

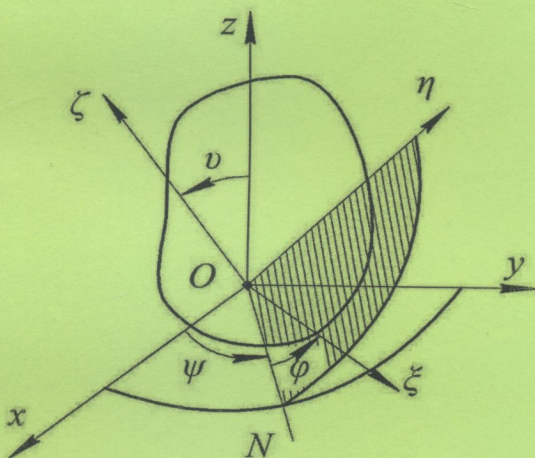
531.1(075.8)

0-39

В. А. Огородніков, В. О. Федотов, В. Є. Перлов

# Теоретична механіка. Кінематика

## Конспект лекцій



531.1(045.8)

Міністерство освіти і науки України

0-39

Вінницький національний технічний університет

В. А. Огородніков, В. О. Федотов, В. Є. Перлов

## Теоретична механіка. Кінематика

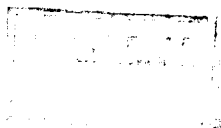
### Конспект лекцій

Навчальний посібник



531.1(075.8) О-39 2017

Огородніков В. А. Теоретична механіка. Кінемати



Вінниця  
ВНТУ  
2017

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 24.09.2013 р.)

Рецензенти:

**В. А. Тітов**, доктор технічних наук, професор

**В. А. Матвійчук**, доктор технічних наук, професор

**І. О. Сивак**, доктор технічних наук, професор

**Огородніков, В. А**

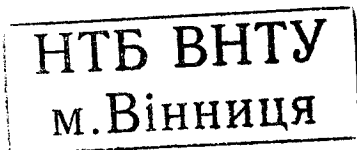
478048

О39 Теоретична механіка. Кінематика. Конспект лекцій : навчальний посібник / В. А. Огородніков, В. О. Федотов, В. Є. Перлов – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 75 с.

В навчальному посібнику поряд із векторною формою викладання теоретичного матеріалу з кінематики точки та твердого тіла застосовується і матрична, що дозволяє застосовувати сучасні комп'ютерні технології. Розглянуті приклади використання теоретичного матеріалу для розв'язання задач.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531.1



© ВНТУ, 2017

## ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1	
Предмет механіки. Історія механіки. Механічні науки. Зв'язок механіки з математикою. Основні поняття механіки. Структура курсу механіки. Кінематика. Кінематика точки.....	4
ЛЕКЦІЯ 2	
Векторний і координатний способи визначення швидкості і прискорення точки. Елементи диференціальної геометрії кривих у просторі. Швидкість та прискоренні при натуральному способі визначення руху точки.....	16
ЛЕКЦІЯ 3	
Кінематика твердого тіла. Класифікація рухів твердого тіла. Кінематика поступального руху. Кінематика обертального руху. Вектор кутової швидкості. Векторні формули для швидкостей і прискорень точок твердого тіла.....	23
ЛЕКЦІЯ 4	
Кінематика плоскопаралельного руху. Плоска фігура. Швидкість точок плоскої фігури, миттєвий центр швидкостей. Прискорення точок плоскої фігури, миттєвий центр прискорень.....	31
ЛЕКЦІЯ 5	
Сферичний рух тіла. Кути Ейлера. Миттєва кутова швидкість. Кінематичні формули Ейлера. Швидкості та прискорення точок тіла при сферичному русі. Аксоїди.....	39
ЛЕКЦІЯ 6	
Кінематика вільного руху твердого тіла. Складний рух точки. Формула Бура. Теорема про додавання швидкостей. Теорема про додавання прискорень. Прискорення Коріоліса.....	48
ЛЕКЦІЯ 7	
Кінематика складного руху твердого тіла. Миттєвий рух тіла. Додавання поступальних рухів. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються, та навколо паралельних осей. Пара обертань. Вектор кутової швидкості як ковзний вектор. Кінематичні інваріанти. Гвинтовий рух твердого тіла.....	57
ЛЕКЦІЯ 8	
Криволінійні координати . Координатні лінії, осі, поверхні . Коефіцієнти Ламе. Місцевий ортогональний базис. Проекції швидкості та прискорення на координатні осі. Кінематика точки в циліндричних та сферичних координатах.....	66
Словник найуживаніших термінів.....	73
ЛІТЕРАТУРА.....	74

## ЛЕКЦІЯ 1

### Вступна

**Предмет механіки. Історія механіки. Механічні науки. Зв'язок механіки з математикою. Основні поняття механіки. Структура курсу механіки. Кінематика. Кінематика точки**

Механіка (*mechanics*) – це наука про загальні закони механічного руху матеріальних тіл. Механічний рух (*mechanical movement*) – це переміщення тіл або їх частин у просторі (*space*) з перебігом часу.

Теоретична (раціональна) механіка опирається на певну сукупність узгоджених законів і фактів, встановлених дослідною (експериментальною) механікою, які вважаються істинними. На цій основі засобами математики дедуктивним шляхом встановлюються нові факти і закони руху.

Класична (ньютонівська) механіка має справу з матеріальними об'єктами, що складаються з величезного числа атомів або молекул (макроскопічні тіла), які рухаються зі швидкістю  $v$ , набагато меншою від швидкості світла  $c/c \approx 300000$  км/с. Межі істинності класичної механіки встановлюються з одного боку спеціальною та загальною теорією відносності (Пуанкаре, Лоренц, Ейнштейн), а з іншого боку – квантовою теорією (Планк, Бор, Гейзенберг, де Бройль). В подальшому будемо розглядати тільки класичну теоретичну механіку.

Історичний розвиток механіки з найдавніших часів можна поділити на періоди.

Найдавніший (доісторичний) період можна охарактеризувати знаходами колеса, важеля, створенням найпростіших механізмів (візок), споруд і пристосувань.

Давньоісторичний (античний) період характеризується створенням ускладнених механізмів (поліспасти, гвинт та ін.), споруд і в зв'язку з цим розробкою перших донаукових систем поглядів на механіку. Термін «механіка»

ввів

Арістотель

(384–322 рр. до н. е.). В цей час техніка виділяється в окремий вид діяльності людей. Розвиток механіки як науки (в Європейській традиції) починається від Архімеда (287–212 рр. до н. е.).

Середньовічний період дає приклади розвитку будівельної механіки і систематизації знань в справі створення допромислових механізмів різноманітного призначення.

Класичний період (16–19 століття) розвитку механіки своїм початком завдячує прискореному розвитку торгівлі, навігації, астрономії, військової справи. В подальшому розвиток механіки стимулюється паралельним розвитком добувної та обробної промисловості, створенням нових транспортних засобів, що в свою чергу стало можливим завдяки освоєнню гідравлічної та теплової енергії і початком освоєння електричної енергії.

М. Коперник (1473–1543) створив геліоцентричну систему світу. Й. Кеплер (1571–1630) відкрив закони обертання планет. Галілей (1564–1642)

вперше сформулював ідеї про інерцію, прискорення, додавання рухів. Х. Гюйгенс (1629–1696) винайшов годинник, дав теорію фізичного маятника. І. Ньютон (1643–1727) систематично виклав основи класичної механіки у творі «Математичні начала натуральної філософії» (1667). Цей твір зберігає своє значення і в наші часи. П. Варіньйон (1654–1722) розробляв методи геометричної статики. Й. Бернуллі (1667–1740), Л. Ейлер (1707–1763), Ж. Даламбер (1717–1763) встановили основні принципи механіки і розв'язали багато знаменитих задач. Ж. Лагранж (1736–1813) у праці «Аналітична механіка» (1768) започаткував новий напрямок в теоретичній механіці, дав нові форми рівнянь статики і динаміки. Л. Пуансо (1777–1859) завершив геометричну статистику. К. Ф. Гаусс (1777–1855) встановив варіаційний принцип. У. Гамільтон (1805–1865), К. Якобі (1804–1851), М. В. Остроградський (1801–1861) сформулювали нові варіаційні принципи і встановили нові форми рівнянь аналітичної механіки. З другої половини 19-го століття теоретична механіка розгалужується на декілька напрямків, що пов'язані з основними проблемами. П. Л. Чебишов (1821–1894), В. І. Лігін (1846–1900) розвинули кінематику механізмів. С. В. Ковалевська (1850–1891) розв'язала проблему динаміки твердого тіла. О. М. Крилов (1863–1945) розробляв теорію гіроскопів. Е. Раус (1831–1907), А. Пуанкаре (1854–1912), М. Є. Жуковський (1847–1921) з'ясували деякі основні поняття теорії стійкості руху. О. М. Ляпунов (1857–1918) у дисертації «Загальна задача про стійкість руху» (1892) виклав основні поняття і методи цієї теорії. П. Аппель (1855–1930), П. В. Воронєць (1871–1923), С. О. Чаплигін (1869–1942) винайшли нові форми рівнянь руху в теорії неголономних систем. Засобами небесної механіки вдалося розрахувати положення невідомої до того часу планети Нептун.

Сучасний період (20-е століття) розвитку механіки характеризується подальшою диференціацією цієї науки. Поряд із вказаними старими проблемами, які не втратили актуальності, виникли нові, що в свою чергу привело до появи нових напрямків: теорії нелінійних коливань; теорії реактивного руху і динаміки штучних космічних систем; теорії руху зчленованих екіпажів; механіки систем з багатьма ступенями вільності (робототехнічних систем) та інших. Тут вже практично неможливо вказати імена всіх вчених-дослідників. Зауважимо, що всі без винятку зазначені напрямки теоретичної механіки містять багато нерозв'язаних принципових питань, які активно розробляються в наші часи.

Теоретична механіка є основою загальної механіки, що містить найбільш загальні закони механічного руху, які лежать в основі теорії інших механічних дисциплін: механіки деформованого твердого тіла, гідромеханіки, теорії механізмів і машин, деталей машин, будівельної механіки і т. д.

Знання теоретичної механіки потрібні також інженерам немеханічних спеціальностей, які розробляють нову техніку, оскільки в більшості випадків кінцеві ланки складних автоматичних систем – це механізми: електричні двигуни, трансмісії, автомобілі, літальні апарати, космічні прилади,

маніпулятори і таке інше. В наш час, коли протягом людського життя доводиться змінювати характер діяльності, оволодіння фундаментальною наукою теоретичною механікою може стати важливою складовою частиною успішної інженерної діяльності.

Теоретична механіка і математика з часів Ньютона мають тісний зв'язок. Механіка широко використовує апарат математики і в свою чергу спонукає математику до створення нових методів. Багато абстракцій і проблем математики мають прозорий механічний зміст, оскільки протягом останніх століть механіка була головним постачальником математичних проблем. Логічна структура механіки подібна до математики. У механіці так само існують аксіоми і теореми, хоча повна аксіоматизація механіки ще не здійснена. Варто вказати на те що визначні вчені-механіки були одночасно і математиками; до часів М. Є. Жуковського теоретичну механіку викладали як суто математичну дисципліну. У деяких своїх розділах теоретична механіка і математика сплелись воедино.

Теоретична механіка – це наука про математичні моделі механічних систем. Тому для розуміння механіки потрібні знання фундаментальних розділів математики – аналітичної геометрії, векторної алгебри і аналізу, теорії тензорів, варіаційного числення, теорії звичайних диференціальних рівнянь, методів обчислювальної математики.

Відмінність теоретичної механіки від математики полягає в способі пізнання матеріального світу, оскільки метою механіки є передбачення поведінки реальних механічних систем з необхідною точністю. Аксіоми (принципи) механіки ґрунтуються на дослідних фактах, тому висновки також повинні підтверджуватись експериментально. Схема пізнання приблизно така: фізичний аналіз – механічна (математична) модель – математичний розв'язок (точний або наближений, часто із застосуванням ЕОМ) – практичний аналіз (інтерпретація) розв'язку. Це створює труднощі при розв'язуванні практичних задач, які полягають в необхідності для дослідника одночасно володіти абстракціями і конкретно-практичним досвідом. Щасливою особливістю механіки є можливість простої перевірки результатів абстрактних побудов на практиці або за допомогою уявного експерименту. Цікаво зазначити, що в психологічному плані за здатністю уявляти механічні рухи люди поділяються на «арістотеліанців» та «ньютоніанців». Про це свідчать прості і дотепні досліди, в яких з'ясовується, уявлення про можливість чи неможливість вільного криволінійного руху або руху без прикладення сили.

Абсолютний тривимірний евклідів простір, що вміщує рухомі або нерухомі тіла. За означенням простір однорідний та ізотропний і тіла ніяк не впливають на властивості простору. Зауважимо, що експерименти свідчать про те, що фізичний простір в масштабах  $10^{-16}$ – $10^{28}$  см можна вважати евклідовим. За І. Ньютоном, простір нерухомий і, отже, його можна арифметизувати нерухомою системою координат. Найбільш простою і зручною в загальному випадку є декартова прямокутна система координат.

Розрізняють праву і ліву систему координат (рис. 1.1 а, б, відповідно). У правій системі додатний поворот відбувається проти руху стрілки годинника. З боку додатного напрямку осі  $Oz$  поворот від осі  $Ox$  до осі  $Oy$  відбувається проти руху годинникової стрілки. Ми користуватимемось правими системами координат згідно з традицією, що склалася у 20-му ст.

Для визначення положення довільної точки  $M$  у просторі вводять одиницю довжини, однакою для трьох осей. Положення точки  $M$  визначаються трійкою чисел  $x, y, z$  – координатами, які мають розмірність довжини (рис. 1.2). За своїм просторовим, геометричним змістом механічні величини поділяються на скаляри (*scalar*) (тензори 0-го рангу), вектори (*vector*) (тензори 1-го рангу), тензори (*tensor*) 2-го рангу. Використовуючи апарат тензорного числення, можна дістати основні співвідношення механіки в найбільш узагальненій (інваріантній) формі. Властивості тензорів 2-го рангу будемо з'ясовувати у ході подальшого викладу, а спочатку зупинимось на властивостях векторів у просторі.

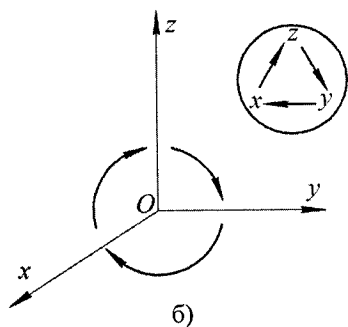
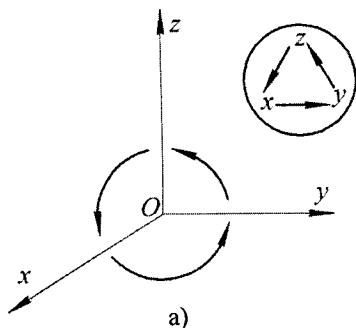


Рисунок 1.1



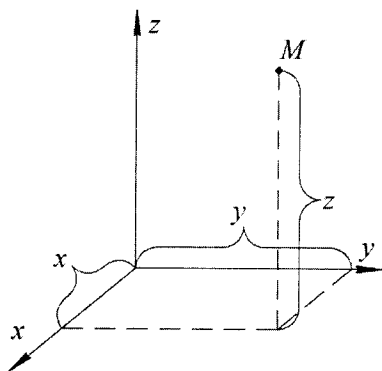


Рисунок 1.2

Розкладання довільного вектора  $\vec{a}$  по координатних векторах. Тут і далі  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – одиничні вектори (орти) декартової прямокутної системи координат. Нехай  $a$  – модуль вектора  $\vec{a}$ .

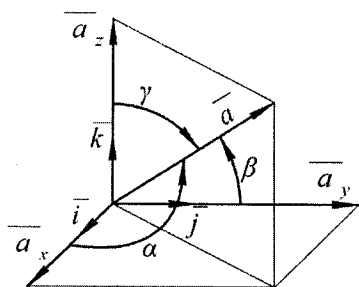


Рисунок 1.3

або вектора-стовпця

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

при цьому одна форма переходить в іншу за допомогою матричної операції транспонування.

В залежності від механічного змісту розрізняють вектори прикладені, зв'язані з певною точкою простору, вектори ковзні, зв'язані з певною прямою, та вільні вектори, які можна віднести до довільної точки простору. Дії векторної алгебри означені лише для векторів, тому при виконанні операцій ми трактуємо вектори довільного змісту як вільні, а вже потім встановлюємо зміст результату операцій.

Нагадаймо коротко деякі формули векторної алгебри у безкоординатному (інваріантному) та координатному вигляді, вважаючи, що основи векторної алгебри вже засвоєні в курсі математичних дисциплін.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cos(\vec{a}, x) = a \cos \alpha \\ a_y &= a \cos(\vec{a}, y) = a \cos \beta \\ a_z &= a \cos(\vec{a}, z) = a \cos \gamma \end{aligned} \right\}. \quad (1.2)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.3)$$

$$a = |\vec{a}| = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.4)$$

Додамо, що іноді зручно зображати вектор у матричному вигляді у формі вектора-рядка

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (1.5)$$

### Додавання векторів

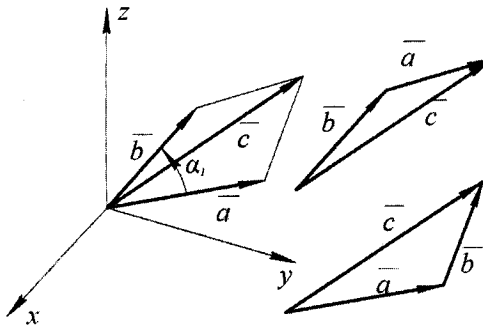


Рисунок 1.4

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned} \right\}, \quad (1.8)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha_1} \quad (1.9)$$

Діями, оберненими додаванню є розкладання вектора на дві складові частини вздовж двох непаралельних прямих у площині та розкладання вектора на три довільні некопланарні напрямки у просторі.

### Скалярний добуток векторів

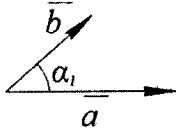


Рисунок 1.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab(\overline{a, b}) = ab \cos \alpha_1 = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (1.10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.11)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (1.12)$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}. \quad (1.13)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z), \quad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (b_x, b_y, b_z), \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

### Векторний добуток

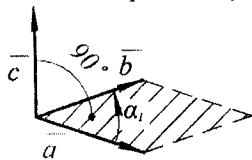


Рисунок 1.6

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \quad (1.16)$$

$$c = abs \sin(\overline{a, b}) = abs \sin \alpha_1 \quad (1.17)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (1.19)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0. \quad (1.20)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 0 \quad (1.21)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j}.$$

Записувати векторний добуток із застосуванням матричного вигляду векторів недоцільно, оскільки це потребує розгляду тензорних операцій.

Зауважимо, що векторний добуток існує як вектор лише в тривимірному просторі.

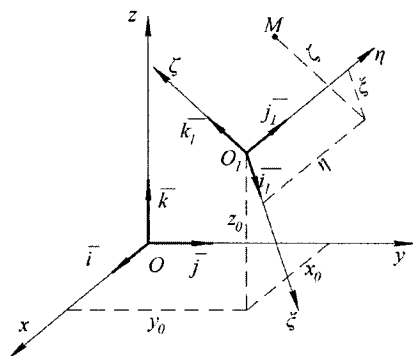
Дії векторного ділення, обернені до скалярного та векторного множення порізно неозначені, однак невідомий вектор, який бере участь одночасно у скалярному та векторному добутках можна визначити однозначно.

Полярні (*polar*) та аксіальні (*axial*) вектори розрізняються своїм відношенням до орієнтації системи координат (рис. 1.1). Полярні вектори (наприклад, радіус-вектор  $t$ , швидкість  $v$ , сили  $F$ ) за своєю суттю не змінюються при зміні орієнтації осей координат. Аксіальні вектори, або псевдовектори (наприклад, кутова швидкість  $\omega$ , момент сили  $M_o(F)$ ) при зміні орієнтації стають протилежними. Векторний добуток двох полярних векторів є вектором аксіальним. Аксіальний вектор у тривимірному просторі можна подати і як антисиметричний (кососиметричний) тензор. Наприклад,

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}, \\ \bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), (\omega) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\omega} &= \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ортогональні перетворення систем координат.

При переході від старої системи координат  $O_1 \xi \eta \zeta$  до нової  $Oxuz$  (рис. 1.7) нові координати  $x, y, z$  довільної точки  $M$  через її старі координати  $\xi, \eta, \zeta$  можна виразити так



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{x\xi} & a_{x\eta} & a_{x\zeta} \\ a_{y\xi} & a_{y\eta} & a_{y\zeta} \\ a_{z\xi} & a_{z\eta} & a_{z\zeta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{x\xi} &= \cos(x, \xi) = \bar{i} \cdot \bar{i}_1 \\ a_{x\eta} &= \cos(x, \eta) = \bar{i} \cdot \bar{j}_1 \\ \dots & \dots \\ a_{x\zeta} &= \cos(x, \zeta) = \bar{k} \cdot \bar{k}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Рисунок 1.7

Елементи (1.24) матриці в (1.23) є проєкціями старих ортів  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  на нові осі  $Ox, Oy, Oz$ . Серед дев'яти елементів (напрямних косинусів) в

(1.24) лише три (але не довільних три!) незалежні, оскільки для ортів  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  справедливі співвідношення (1.13), виражені в новій системі координат.

Абсолютний час протікає рівномірно і однаково у всіх частинках простору; на нього не впливають рух матерії або спостерігача. Однорідність часу дозволяє довільно вибирати початок відліку часу. Класичне поняття часу добре узгоджується з нашими інтуїтивними уявленнями про причини та наслідки. Принципи вимірювання часу склалися на основі астрономічних спостережень періодичних явищ, однак виявилися придатними і для механізмів.

Постулат класичної механіки про можливість миттєвої передачі взаємодії між тілами на довільну відстань через порожній простір (далекодія) та про миттєву передачу інформації також пов'язаний з поняттям часу.

З точки зору математики час  $t$  являє собою скалярний неперервний параметр (аргумент) і це дає можливість застосувати апарат аналізу скалярних та векторних функцій.

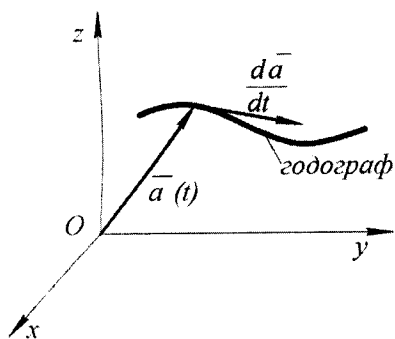


Рисунок 1.8

Нагадаємо деякі відомості з векторного аналізу. Нехай  $\bar{a}$  є вектор-функція скалярного аргументу  $t$ .

$$\bar{a} = \bar{a}(t). \quad (1.25)$$

Тут і далі будемо позначати функцію та її значення однією і тією самою літерою.

Годограф вектора  $\bar{a}(t)$  є лінія у просторі (рис. 1.8), яку описує кінець  $\bar{a}$  при зміні  $t$ . Властивості годографа нагадують властивості графіків скалярних функцій.

Похідна векторної функції  $\bar{a}(t)$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t} \quad (1.26)$$

також є вектор, напрямлений по дотичній до годографа. Основні властивості похідних вектор-функцій:

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt}. \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)\bar{a}) = \frac{df}{dt}\bar{a} + f \frac{d\bar{a}}{dt}. \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt}\bar{b} + \bar{a} \frac{d\bar{b}}{dt}. \quad (1.29)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \quad (1.30)$$

Інтегрування векторних функцій

$$\vec{b}(t) = \int \vec{a}(t) dt + \vec{c}, \vec{c} = \overline{const} \quad (1.31)$$

$$\vec{f} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt = \vec{b}(t_1) - \vec{b}(t_0) = \overline{const} \quad (1.32)$$

Матеріальна точка (*particle*) – матеріальне тіло, розмірами якого можна нехувати при вивченні його руху. Це гранична абстракція реальних тіл.

Система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух однієї з цих точок залежить від положення і руху решти точок.

Абсолютно тверде тіло (тверде тіло) (*rigid body*) – система матеріальних точок, відстані між якими у процесі руху залишаються незмінними. Запроваджуючи цю абстракцію до вивчення руху реальних твердих тіл, ми робимо перше наближення до встановлення реальних закономірностей. При цьому ми вважаємо, що тіла не можна зруйнувати і що вони є абсолютно непроникними. Слід пам'ятати, однак, що реальні тіла під час руху деформуються: вал, що обертається, трохи збільшує свій діаметр внаслідок пружних деформацій; всі реальні тіла деформуються під дією сил.

Сила (*force*) – міра механічного прояву фізичного впливу на матеріальні тіла. Природа сили в механіці не встановлюється, це – задача фізики. Сила не може призвести до руйнування абсолютно твердого тіла і матеріальної точки.

Теоретична механіка, власне кажучи, є досить вузький розділ механіки, а саме: механіка матеріальної точки, абсолютно твердого тіла та їх систем.

Структура теоретичної механіки. Теоретична механіка традиційно поділяється на три розділи: кінематика (*kinematics*), статика (*statics*), динаміка (*dynamics*). Кінематика вивчає рух без урахування сил. Статика – вчення про рівновагу та про перетворення систем сил. Динаміка вивчає рух під дією сил. Аналітична механіка – особливий розділ механіки, що містить кінематику, статику і динаміку. Історично всі розділи механіки розвивалися паралельно, однак кожен з цих розділів має своє коло задач і свої методи їх розв'язування. Кінематика, статика, і динаміка вивчаються послідовно.

## КІНЕМАТИКА

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються геометричні властивості механічного руху матеріальних тіл без урахування їх мас

та сил, що діють на них. Кінематика – геометрія рухів, «геометрична мова» механіки.

Усякий рух (або спокій) є відносним. Для виділення руху певного матеріального тіла запроваджують систему відліку.

Система відліку (*readout system*) – сукупність деякої системи координат, незмінно пов'язаної (скріпленої) з деяким абсолютно твердим тілом (тілом відліку) (рис. 1.9).

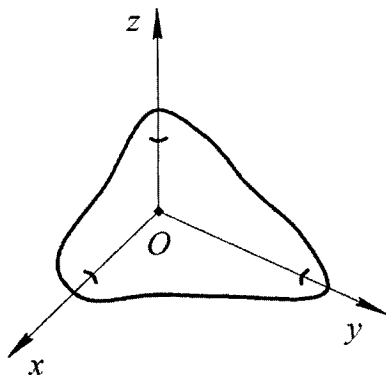


Рисунок 1.9

Параметри руху (узагальнені координати) – незалежні величини довільної фізичної природи, що однозначно визначають положення матеріальної системи (або точки, тіла) у системі відліку. Найчастіше за параметри руху приймають звичайні координати.

Рух – це зміна параметрів руху з плином часу.

Кінематичні рівняння (або рівняння руху, закон руху) (*kinematic equations*) – це функціональний зв'язок між параметрами руху у системі відліку і часом.

Основні задачі кінематики:

- 1) встановлення математичних способів визначення руху точки, тіла або механічних систем;
- 2) визначення за заданим законом руху всіх кінематичних характеристик цього руху (траєкторій, швидкостей, прискорень окремих точок, кутових швидкостей і прискорень).

## КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Рух точки визначається трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним.

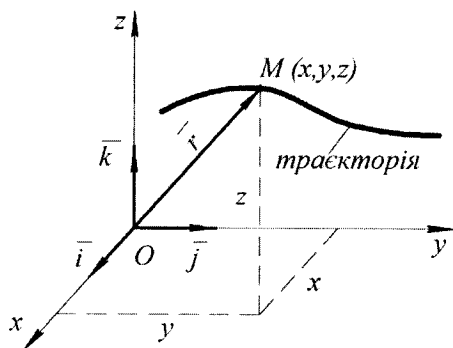


Рисунок 1.10

Векторний (інваріантний) спосіб визначення руху найчастіше застосовується в теорії. Параметр руху – це радіус-вектор  $\vec{r}$  (рис. 1.10).

Рівняння руху точки  $M$  має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.33)$$

Траєкторія (*trajectory*) – це годограф радіус-вектора  $\vec{r}$ .

Координатний спосіб визначення руху точки.

Рівняння руху точки  $M$  (рис. 1.10) в координатній формі мають вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.34)$$

Радіус-вектор  $\vec{r}$  також може бути виражений через координати точки  $M$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.35)$$

Залежність (1.34) встановлює зв'язок між координатним та векторним способами визначення руху точки.

Часто користуються циліндричною  $\rho, \varphi, z$  (рис. 1.11) та сферичною  $r, \varphi, \psi$  або  $r, \varphi, \nu$  (рис. 1.12) системами координат.

Рівняння руху точки у цих системах координат мають, відповідно, вигляд

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (1.36)$$

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t). \quad (1.37)$$

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \nu = \nu(t). \quad (1.38)$$

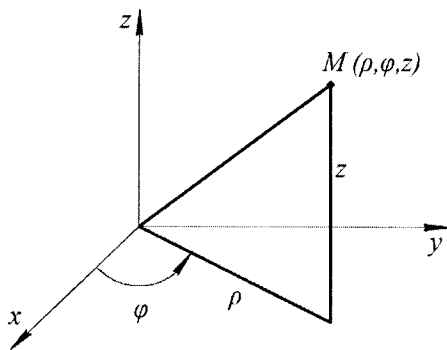


Рисунок 1.11

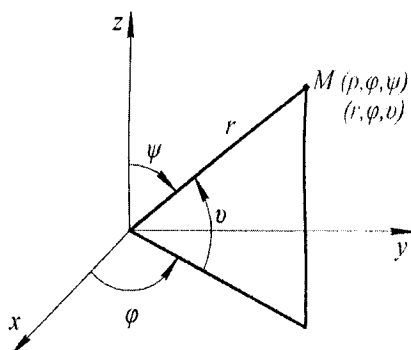


Рисунок 1.12

Як видно з рівнянь (1.34), (1.36), (1.37), положення вільної точки в просторі визначаються трьома скалярними параметрами. Вільна точка в просторі має три ступені вільності (ступені свободи).

Рівняння (1.33), (1.36), (1.37) є одночасно параметричними рівняннями траєкторії точки  $M$ , час  $t$  виступає параметром. Виключивши з цих рівнянь час  $t$ , можемо отримати рівняння траєкторії в координатній формі.

Приклад. Рух точки заданий рівняннями  $x = t^2$ ,  $y = t$ . Знайти траєкторію точки.

Розв'язування. Виключивши час  $t$ , дістанемо  $x = y^2$ .

Траєкторія точки – частина параболи, що відповідає  $0 \leq t < \infty$  або  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$  (рис. 1.13).

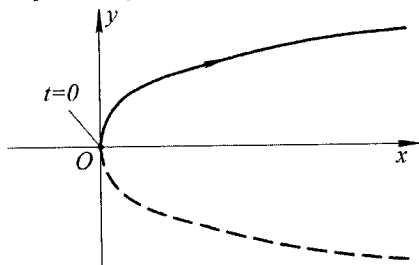


Рисунок 1.13

Натуральний спосіб визначення руху точки  $M$  полягає в тому, що задаються:

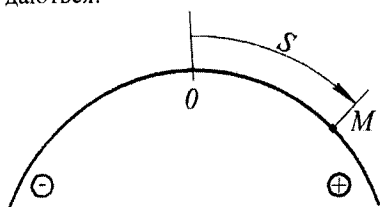


Рисунок 1.14

- 1) траєкторія точки (рис. 1.14);
- 2) початок відліку (точка  $O$ ) криволінійної координати  $S$ , що має розмірність довжини;
- 3) додатний та від'ємний напрям відліку  $S$ ;
- 4) закон руху по траєкторії у вигляді залежності дугової координати  $S$  від часу:  $S=S(t)$ .

Потрібно розрізняти шлях, що є величиною завжди додатною, від дугової координати  $S$ , яка може бути і від'ємною.

Вказівка: у вступній лекції лектор повідомляє слухачам навчальний план курсу та знайомить їх з необхідними підручниками і навчальними посібниками.

#### Питання для самоконтролю

1. Що вивчає теоретична механіка?
2. Дати означення матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла.
3. Як записати та знайти скалярний добуток двох векторів?
4. Як записати та знайти векторний добуток двох векторів?
5. Дати означення сили?
6. Як знайти силу через її проєкції на декартові осі координат?
7. Яка основна задача кінематики точки.
8. Що таке траєкторія точки?
9. Чи залежить траєкторія точки від системи координат?



**Векторний і координатний способи визначення швидкості і прискорення точки. Елементи диференціальної геометрії кривих у просторі. Швидкість та прискорення при натуральному способі визначення руху точки.**

Зауваження 1. За традицією, наслідуючи Ньютона, в механіці похідна від змінної величини за часом позначається точкою над величиною, наприклад,

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}, \quad \frac{d^3x}{dt^3} \equiv \overset{\cdot}{\ddot{x}}. \quad (2.1)$$

Кінематичними мірами (характеристиками) руху точки є швидкість (*speed*) та прискорення (*acceleration*). Почнемо розгляд з векторного способу.

Швидкість точки є похідна від радіуса-вектора  $\vec{r}$  цієї точки за часом  $t$  у розглядуваній системі відліку (рис .2.1)

$$\vec{U} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.2)$$

Вектор  $\vec{U}$  швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії. Прискорення точки є похідною від вектора швидкості  $\vec{v}$  за часом або другою похідною за часом від радіуса-вектора  $\vec{r}$  у розглядуваній системі відліку

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.3)$$

Формули (2.2) та (2.3) є означенням швидкості та прискорення.

Швидкість та прискорення при координатному способі визначення руху.

Якщо рух точки наданий координатним способом у декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  (формули (1.33)), то можна перейти до векторного способу виразом (1.34).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.4)$$

Оскільки в даній системі відліку

$$\vec{i} = \overline{const}, \quad \vec{j} = \overline{const}, \quad \vec{k} = \overline{const}, \quad (2.5)$$

то

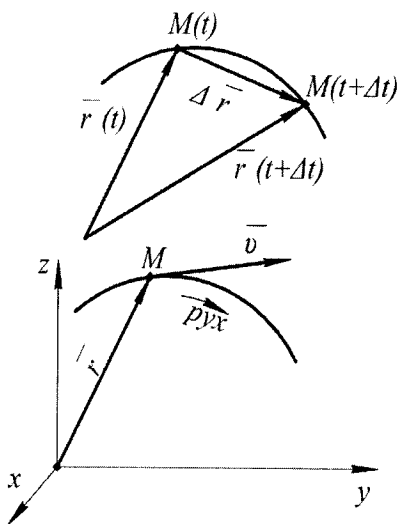


Рисунок 2.1

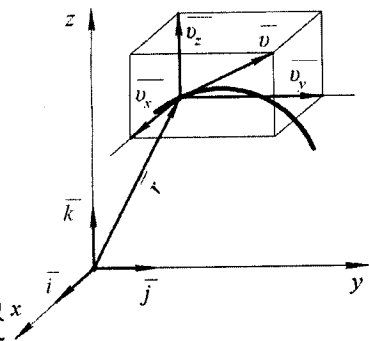
$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

Тоді, диференціюючи вираз для  $\vec{r}$  за часом  $t$ , одержимо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (2.7)$$

З іншого боку, вектор  $\vec{v}$  у просторі можна подати як (рис. 2.2)

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (2.8)$$



Порівнюючи (2.2) і (2.8) дістанемо формули для проєкцій вектора швидкості

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, \\ v_y &= \dot{y}, \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рисунок 2.2

його модуля

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (2.10)$$

та напрямних косинусів в

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}, \\ \cos \beta &= \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{v}, \\ \cos \gamma &= \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Проекції вектора прискорення можна одержати, міркуючи аналогічно

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (2.12)$$

з іншого боку

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad (2.13)$$

звідки дістанемо

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a} \\ \cos \beta_1 &= \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a} \\ \cos \gamma_1 &= \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Деякі відомості із диференціальної геометрії кривих у просторі.

Параметр  $S$  є натуральним, коли він є довжиною дуги. Параметричні рівняння довільної гладкої кривої можна записати через натуральний параметр  $S$ . Наприклад, рівняння кола

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad R = \text{const}. \quad (2.17)$$

Заміною  $t = \frac{S}{R}$  також можна перетворити в

$$x = R \cos \frac{S}{R}, \quad y = R \sin \frac{S}{R}. \quad (2.18)$$

Параметричні рівняння гвинтової лінії (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$z = bt$$

заміною  $c = \sqrt{R^2 + b^2}$  також можна подати через натуральний параметр  $S$

$$\begin{aligned} x &= R \cos \frac{S}{c}, \\ y &= R \sin \frac{S}{c}, \\ z &= b \frac{S}{c}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

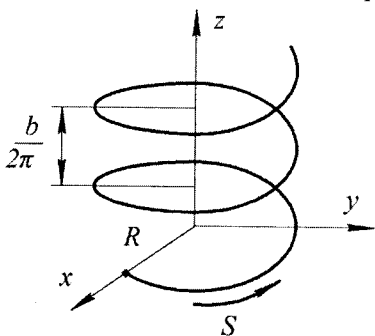


Рисунок 2.3

До всякої гладкої кривої можна провести дотичну пряму, яку можна перетворити в дотичну вісь  $[\tau]$  (рис. 2.4) напрямком якої збігається з напрямком відліку параметра (координати)  $S$ .

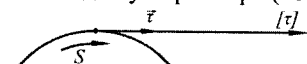


Рисунок 2.4

Вектор  $\vec{\tau}$  вводиться як одиничний вектор цієї осі. Вектор  $\vec{\tau}$  можна також запровадити як (рис. 2.5)

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \frac{d\vec{r}}{dS} \quad (2.21)$$

Із зміною параметра  $S$  вздовж кривої вектор  $\vec{\tau}$  змінює свій напрямок, тобто

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(S). \quad (2.22)$$

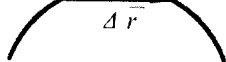


Рисунок 2.5

Стична площина є граничним положенням площини, що проходить через вектори  $\vec{\tau}$  та  $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ , коли  $\Delta S \rightarrow 0$  (рис. 2.6).

Всяка плоска крива цілком лежить у стичній площині. Чим «більше крива», тим сильніше повертається вектор  $\vec{\tau}$  у стичній площині, тим швидше змінюється кут суміжності  $\Delta\varphi$  на дузі  $\Delta S$ .

Кривизна кривої

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \quad (2.23)$$

Радіус кривизни

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (2.24)$$

Для прямої лінії  $K = 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ .

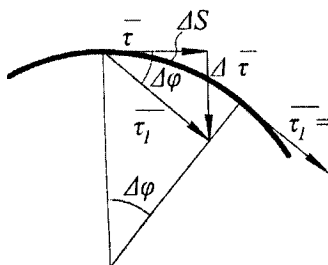


Рисунок 2.6

Встановимо зміст похідної  $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$ .

Диференціюючи тотожність  $\vec{\tau}^2 = 1$  (2.25)

дістанемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (2.26)$$

це означає, що вектор  $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$  перпендикулярний до вектора  $\vec{\tau}$  і

направлений у бік угнутості кривої по  $\Delta\vec{\tau}$  (рис. 2.6). Далі, подамо

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \quad (2.27)$$

і знайдемо похідну  $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$ . За означенням

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\varphi} \quad (2.28)$$

є вектором. Знайдемо його модуль.

З рис. 2.7 видно, що

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (2.29)$$

Для малих кутів справедливе співвідношення

$$\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2. \quad (2.30)$$

Звідси маємо

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}| \frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta\varphi |\vec{\tau}| \quad (2.31)$$

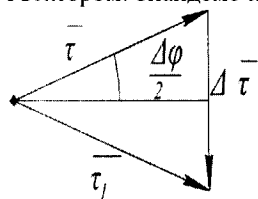


Рисунок 2.7

тоді

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\varphi} \right| = 1. \quad (2.32)$$

Ми встановили, що вектор  $\frac{d\vec{r}}{d\varphi}$  є одиничним вектором, що лежить в стичній площині і перпендикулярний до вектора  $\vec{r}$ . Цей вектор позначається  $\vec{n}$ . Остаточно дістанемо

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{1}{\rho} \vec{n}. \quad (2.33)$$

Нормальна площина перпендикулярна до осі  $[\tau]$

Головна нормаль є лінією перетину нормальної площини  $N$  зі стичною площиною  $\Pi$ , на цій прямій лежить вектор  $\vec{n}$  (рис. 2.8), що вказує напрямком нормальної осі  $[n]$ . Вектор бінормалі  $\vec{b}$  дорівнює

$$\vec{b} = \vec{r} \cdot \vec{n} \quad (2.34)$$

і вказує напрямком осі  $[b]$ . Спрямна площина  $\Sigma$  перпендикулярна до площин  $\Pi$  та  $N$ .

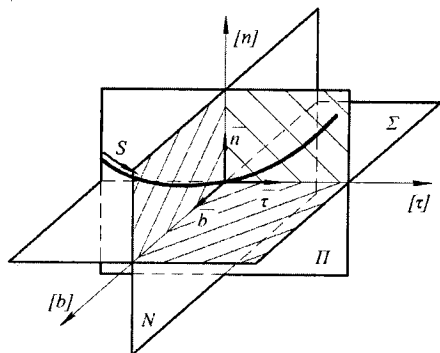


Рисунок 2.8

Вектори  $\vec{r}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  утворюють праву супровідну систему осей  $[\tau]$ ,  $[n]$ ,  $[b]$ , яка повертається із зміною координати  $S$ .

Натуральний триєдр (тригранник, тристінник Френе) утворений ребрами (осями)  $[\tau]$ ,  $[n]$ ,  $[b]$  і площинами, що сполучають ці ребра (заштриховані на рис. 2.6) також переміщується та повертається і при зміні параметра  $S$ , тобто супроводжує рухому точку на кривій.

Швидкість та прискорення точки при натуральному способі визначення руху.

Встановимо зв'язок з векторним способом, формально подаючи  $\vec{r}$  через  $S$  як складну функцію

$$\vec{r} = \vec{r}(S(t)). \quad (2.35)$$

Диференціюючи її дістанемо вектор швидкості

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \dot{S} \vec{r}. \quad (2.36)$$

Формула (2.36) дає розкладання вектора  $\vec{v}$  по натуральних осях, тобто

$$\vec{v} = v_r \vec{r}. \quad (2.37)$$

Порівнюючи (2.36) і (2.37), запишемо

$$v_{\tau} = \dot{S}. \quad (2.38)$$

Формула (2.37) безпосередньо вказує на напрямленість вектора по дотичній, тобто  $v_n = v_b = 0$

Зауваження 2. Потрібно розрізнити позначення  $\vec{v}$ ,  $v$ ,  $v_{\tau}$

$\vec{v}$  – вектор швидкості

$v$  – швидкість (модуль вектора  $\vec{v}$ )

$v_{\tau}$  – проекція вектора швидкості на вісь  $[\tau]$ ,  $v_{\tau} = \pm v$

$v_{\tau} < 0$  коли точка рухається у напрямі зменшення  $S$ .

Далі з (2.38) маємо

$$S(t) = \int_0^t dS + S_0 = \int_0^t v_{\tau} dt + S_0 = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt + S_0 \quad (2.39)$$

де  $S_0$  – початкова координата.

Шлях  $\sigma$  за час  $0 \leq t \leq t_1$  може бути розрахований за формулою

$$\sigma = \int_0^{t_1} |dS| = \int_0^{t_1} v dt = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (2.40)$$

Вектор прискорення одержимо, диференціюючи (2.36) або (2.37)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_{\tau} \vec{\tau}) = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau} + v_{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (2.41)$$

Величину та напрям другого доданку в (2.41) з'ясуємо, вважаючи, що  $\vec{\tau} = \vec{\tau}(S(t))$ , та з урахуванням (2.33)

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v_{\tau}}{\rho} \vec{n} = \frac{\dot{S}}{\rho} \vec{n}. \quad (2.42)$$

Формула (2.41) перетвориться в

$$\vec{a} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau} + \frac{v_{\tau}^2}{\rho} \vec{n} = \ddot{S} \vec{\tau} + \frac{v_{\tau}^2}{\rho} \vec{n}. \quad (2.43)$$

Вираз (2.43) є розкладення вектора  $\vec{a}$  на тангенціальне (дотичне) прискорення  $\vec{a}_{\tau}$  та нормальне прискорення  $\vec{a}_n$  (по напрямках натуральних осей)

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n = \vec{a}_{\tau} \vec{\tau} + \vec{a}_n \vec{n}, \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{\tau} &= \dot{v}_{\tau} = \ddot{S} \\ a_n &= \frac{v_{\tau}^2}{\rho} \\ a_s &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.45)$$

Це означає, що вектор прискорення завжди лежить в стичній площині; натуральний триєдр повертається так, щоб вектор  $\vec{a}$  в натуральних осях мав лише дві складові частини (рис. 2.9).

Зважаючи на перпендикулярність  $\vec{\tau}$  та  $\vec{n}$ , можемо записати

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}. \quad (2.46)$$

Тангенціальне прискорення  $\vec{a}_\tau$  визначає зміну вектора  $\vec{v}$  за модулем: коли  $a_\tau$  та  $v_\tau$  одного знаку швидкість  $v$  зростає; коли різного знаку – зменшується. Якщо  $a_\tau < 0$  це ще не означає сповільнення!

Нормальне прискорення  $a_n$  характеризує зміну вектора  $\vec{v}$  за напрямком  $a_n = 0$ , коли рух прямолінійний ( $\rho \rightarrow \infty$ ), в точках перегину ( $\rho \rightarrow \infty$ ) в місцях зупинки ( $v = 0$ ).

Запитання 1. Чи залежить вигляд траєкторії точки від вибору системи відліку?

Запитання 2. Скільки ступенів вільності має точка, яка рухається по заданій траєкторії?

Задача. Нехай рух точки задано координатним способом.

Потрібно:

- 1) вказати алгоритм (послідовність дій) та навести необхідні формули для переходу до натурального способу;
- 2) визначити  $v_\tau$ ,  $a_\tau$ ,  $a_n$ ;
- 3) вказати умови за якими можна визначити прискорений чи сповільнений характер руху по траєкторії.

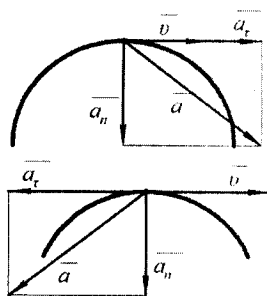


Рисунок 2.9

### Питання для самоконтролю

1. Способи задавання руху точки.
2. Як задається рух точки при векторному способі?
3. Як задається рух точки при координатному способі?
4. Як задається рух точки при натуральному (природному) способі?
5. Чи залежать характеристики руху точки від способу задавання її руху?
6. Чи можливо встановити взаємозв'язок між різними способами руху точки?
7. Чи є різниця між шляхом, пройденим точкою по траєкторії, і значенням дугової координати в деякий момент часу?
8. Фізична суть проекції вектора прискорення точки на нормальну вісь натуральних осей координат?
9. Фізична суть проекції вектора прискорення точки на дотичну вісь натуральних осей координат?
10. Чому дорівнює проекція вектора прискорення точки на бінормальну вісь натуральних осей координат?
11. Які площини утворюють натуральний тригранник Френе?

## ЛЕКЦІЯ 3

**Кінематика твердого тіла. Класифікація рухів твердого тіла. Кінематика поступального руху. Кінематика обертального руху. Вектор кутової швидкості. Векторні формули для швидкостей і прискорень точок твердого тіла.**

### КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Рух твердого тіла може бути вільним (*free movement*) або невільним (*non-free movement*). При невільному русі існують обмежувальні умови, які називаються в'язями (*support*). Виділимо в тілі три точки, що не лежать на одній прямій (рис. 3.1).

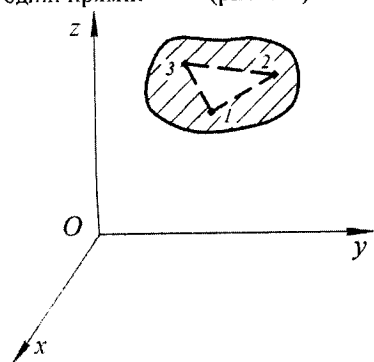


Рисунок 3.1

Якщо ці точки закріпити, то тіло буде нерухомим у даній системі відліку. Звільнюючи поступово ці точки, одержимо вільне тіло, положення якого повністю визначається дев'ятьма координатами  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$  цих точок.

Оскільки тіло абсолютно тверде, координати цих точок не є незалежними, вони підпорядковуються трьом умовам, що виражають незмінність відстаней між виділеними точками.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2 = \text{const},$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l_{23}^2 = \text{const},$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l_{13}^2 = \text{const}.$$

(3.1)

Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, оскільки його положення у просторі характеризується шістьма незалежними параметрами (координатами). Невільне тверде тіло має меншу кількість ступенів вільності.

Задачі кінематики твердого тіла полягають у встановленні способів визначення його руху та в знаходженні кінематичних характеристик тіла в цілому та окремих його точок.

Класифікація рухів твердого тіла. Число ступенів вільності не визначає повністю характер руху. Характер руху визначається споглядально (візуально) і поділяється на п'ять видів:

1. Поступальний (*translational motion*).
2. Обертальний навколо нерухомої осі (*rotational motion*).
3. Плоско-паралельний або плоский.
4. Обертальний навколо нерухомої точки або сферичний.
5. Довільний.



Деякі властивості руху точок твердого тіла можна встановити безпосередньо, не звертавшись до детальних аналізів характеру руху.

Загальна теорема. При вільному або невільному русі твердого тіла в кожний момент часу руху проєкції швидкостей двох точок тіла на вісь, яка проходить через ці точки, рівні між собою

$$np_{AB}\vec{V}_A = np_{AB}\vec{V}_B \quad (3.2)$$

або

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta. \quad (3.3)$$

Механічний зміст теореми досить простий: точка  $A$  не може ні «наздогнати» точку  $B$ , ні «відстати» від неї (рис. 3.2).

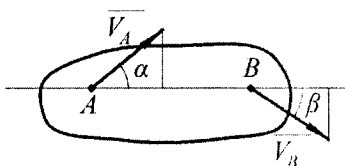


Рисунок 3.2

### ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Поступальним рухом називається рух твердого тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі. Приклади: рух педалей велосипедиста, поршнів в циліндрах, спарника коліс локомотива, кабін колеса огляду в парках, шатуна шарнірного паралелограма.

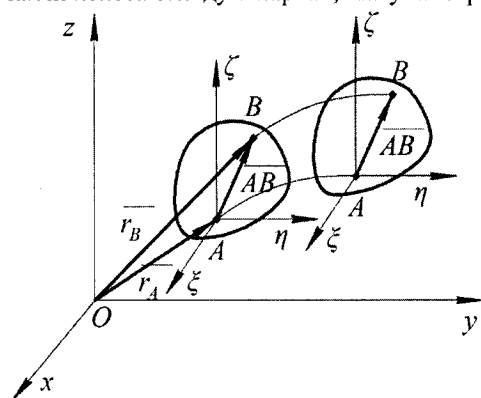


Рисунок 3.3

З тілом, яке рухається поступально, зв'яжемо систему координат  $A\xi\eta\zeta$  (рис. 3.3).

Рухомою системою координат  $A\xi\eta\zeta$  також рухається поступально, тому осі  $A\xi$ ,  $A\eta$ ,  $A\zeta$  в процесі руху зберігають свій напрям у просторі; цей напрям може збігатися з напрямом осей  $0_x$ ,  $0_y$ ,  $0_z$ .

При поступальному русі тіла траєкторії всіх точок тіла конгруентні. Для довільних точок  $A$  та  $B$  твердого тіла справедлива умова

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}, \quad (3.4)$$

де  $\vec{AB} = \text{const}$  є вектор паралельного перенесення (трансляції).

Диференціюючи (3.4), дістанемо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}. \quad (3.5)$$

Однак  $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$ , тому

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A, \vec{v}_B = \vec{v}_A. \quad (3.6)$$

Диференціюючи ще раз, одержимо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (3.7)$$

При поступальному русі твердого тіла всі його точки рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями. Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї його точки, наприклад точки  $A$  (рис. 3.3), яку назвемо полюсом. Коли полюс є вільною точкою, рівняння поступального руху тіла буде мати вигляд

$$\vec{r}_A = r_A(t) \quad (3.8)$$

або

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t).$$

Тверде тіло, яке рухається поступально, має не більше трьох ступенів вільності.

### ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Обертальним рухом тіла навколо осі називається рух, при якому певна пряма, що належить тілу, – вісь обертання – залишається нерухомою. Іноді рівносильно визначають обертальний рух як рух тіла з двома нерухомими точками.

Довільна точка  $M$  тіла, яка не лежить на осі обертання (рис. 3.4) рухається, описуючи коло з радіусом обертання  $h$  і центром на осі обертання.

Якщо з тілом скріпити площину  $Q$ , яка проходить через вісь обертання, то положення тіла однозначно визначається двограним кутом повороту  $\varphi$  площини  $Q$  від початкового положення  $Q_0$ .

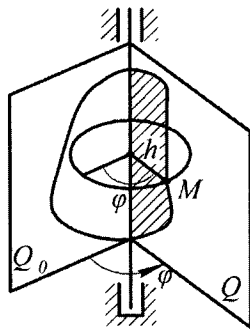


Рисунок 3.4

Кінематичне рівняння обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi(t). \quad (3.10)$$

Тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має одну ступінь вільності (один параметр руху – кут  $\varphi$ ).

Запровадимо нерухому систему координат  $Oxyz$  так щоб вісь  $Oz$  сумістилась з віссю обертання, а скріплену з тілом руху систему координат  $O\xi\eta\zeta$  напрямимо так, щоб вісь  $O\zeta$  збігалась з віссю  $Oz$  (рис. 3.5).

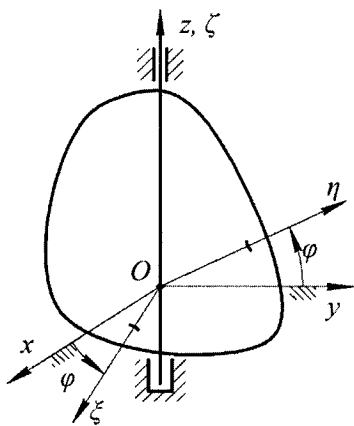


Рисунок 3.5

Додатний напрям відліку кута  $\varphi$  відповідає повороту тіла проти руху стрілки годинника при погляді на тіло з боку додатного напрямку осі  $Oz$ . Як видно, додатний напрям повороту пов'язаний з додатним напрямом осі  $Oz$ . Для підкреслення цього факту введемо позначення  $\varphi_z$  для кута повороту. Алгебраїчна кутова швидкість є похідна за часом від кута повороту.

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}_z. \quad (3.11)$$

Кутова швидкість (*angular velocity*) є абсолютною величиною (модулем) першої похідної за часом від кута повороту

$$\omega = |\omega_z| = \left| \frac{d\varphi_z}{dt} \right| = |\dot{\varphi}_z|. \quad (3.12)$$

Алгебраїчне кутове прискорення дорівнює першій похідній за часом від алгебраїчного кутової швидкості.

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z. \quad (3.13)$$

Кутове прискорення (*angular acceleration*) є модулем алгебраїчного кутового прискорення

$$\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}_z|. \quad (3.14)$$

Розмірність цих величин

$$[\omega] = \frac{rad}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1}, \quad [\varepsilon] = \frac{rad}{c^2} = \frac{1}{c^2} = c^{-2}. \quad (3.15)$$

Подамо також корисні для практики оберталині формули

$$\varphi_z = \int_0^t \omega_z dt + \varphi_{z0}, \quad (3.16)$$

$$\omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt + \omega_{z0}. \quad (3.17)$$

Приклад. Розглянемо важливі випадки рівномірного та рівнозмінного (рівноприскореного або рівносповільненого) оберталиних рухів тіла навколо осі обертання.

Для рівномірного руху справедливі формули

$$\varepsilon_z = 0, \quad \omega_z = \omega_{z0} = const, \quad \varphi_z = \varphi_{z0} + \omega_{z0}t. \quad (3.18)$$

Для рівнозмінного руху запишемо

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} = const, \quad \omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_{z0}t, \quad \varphi_z = \varphi_{z0} + \omega_{z0}t + \frac{\varepsilon_{z0}t^2}{2}. \quad (3.19)$$

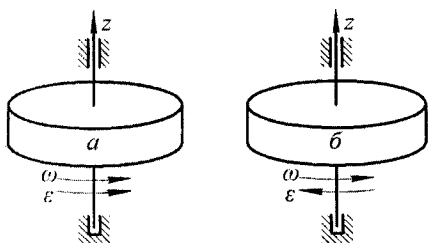


Рисунок 3.6

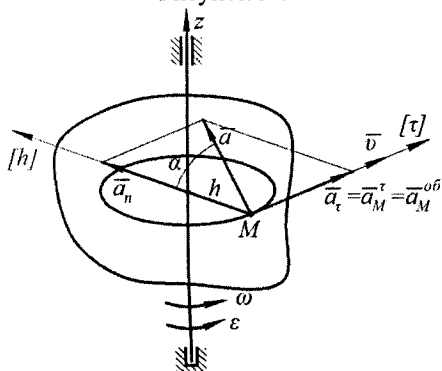


Рисунок 3.7

В практичних задачах напрям обертального руху позначають дуговими стрілками із символами  $\omega$  та  $\varepsilon$ . На рис. 3.6, а  $\omega_z > 0$ ,  $\varepsilon_z > 0$ , а на рис. 3.6, б  $\omega_z > 0$ ,  $\varepsilon_z < 0$ .

Швидкість та прискорення точок тіла, що обертаються навколо нерухомої осі. Тут зручно використати натуральний спосіб визначення руху точок тіла. Для дуги кола, радіусом  $h$ , по якому рухається точка  $M$  (рис. 3.7), справедливе співвідношення

$$dS = h d\varphi_z. \quad (3.20)$$

Тоді

$$v_\tau = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi_z}{dt} = h\omega_z. \quad (3.21)$$

Модуль швидкості точки

$M$

$$v_M = h\omega. \quad (3.22)$$

Прискорення точки  $M$  можна подати у вигляді двох складових частин.

Дотична (тангенціальна) частина, яку називають обертальним прискоренням становить

$$a_M^{o\tau} = a_M^\tau = \dot{v}_\tau = h\ddot{\varphi}_z = h\dot{\omega}_z = h\varepsilon_z. \quad (3.23)$$

Нормальна частина, яку називають (доосьовим, доцентровим) прискоренням, дорівнює

$$a_M^{oc} = a_M^n = a_M^n = \frac{v_M^2}{h} = h\omega^2. \quad (3.24)$$

Повне прискорення обчислимо за формулою

$$a = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{(a_M^{o\tau})^2 + (a_M^{oc})^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.25)$$

Кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{a}$  та радіусом обертання знайдемо із виразу

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_M^{o\tau}|}{a_M^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.26)$$

Кут  $\alpha$  однаковий для всіх точок тіла.

Зауваження 1. Потрібно чітко розрізняти поняття кутової швидкості, яка характеризує рух тіла в цілому від швидкості окремих його точок, які неоднакові і залежать від радіуса обертання та інколи називаються лінійними швидкостями. Те саме стосується понять кутового та лінійного прискорення.

Вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  напрямлений вздовж нерухомої осі обертання так, що при погляді з кінця вектора на його початок обертальний рух тіла відбувається проти руху годинникової стрілки.

Вектор  $\vec{\omega}$  є ковзним аксіальним вектором.

Якщо вісь  $Oz$  напрямлена вздовж осі обертання, то

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}_z \vec{k} = \omega_z \vec{k}. \quad (3.27)$$

Вектор кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  визначається як перша похідна за часом від  $\vec{\omega}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}. \quad (3.28)$$

При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектори  $\vec{\omega}$  та паралельні їй напрямлені в один бік, коли обертання прискорене або в протилежні боки, коли обертання сповільнене.

Векторні формули для швидкостей точок тіла.

Якщо положення точки  $M$  тіла визначити радіусом-вектором  $\vec{r}$  (рис. 3.8), то відклавши вектор  $\vec{\omega}$  вздовж осі обертання, запишемо формулу (3.22) у вигляді

$$\vec{v} = \omega h = \omega r \sin \beta \quad (3.29)$$

Помічаємо, далі, що (3.29) визначає модуль векторного добутку

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \quad (3.30)$$

Ця формула називається формулою Ейлера або основною формулою кінематики твердого тіла. Вона справедлива в нерухомій системі координат  $Oxyz$  та в рухомій системі  $O\xi\eta\zeta$ .

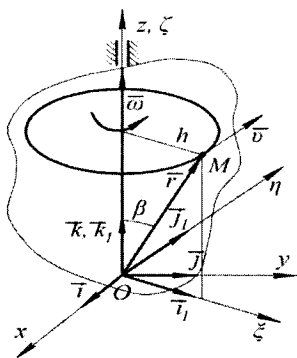


Рисунок 3.8

В нерухомій системі

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

і вектор  $\vec{v}$  змінюється за напрямом.

В рухомій системі  $O\xi\eta\zeta$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \quad (3.32)$$

і вектор  $\vec{v}$  не змінює напрям відносно рухомих осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ .

Коли нерухома вісь обертання довільно орієнтована у просторі, вектор  $\vec{\omega}$  має проєкції на всі осі нерухомої системи координат.

Тоді

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (3.34)$$

Подаючи вектор  $\vec{\omega}$  як антисиметричний (кососиметричний) тензор ( $\omega$ ), можна записати (3.34) у вигляді матричного добутку

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} = (\omega) \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

В проєкціях формули (3.34) та (3.35) запишуться однаково

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Векторні формули для прискорень точок тіла при обертальному русі.

Диференціюючи за часом формулу Ейлера (3.30), одержимо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.37)$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r}, \quad (3.38)$$

одержимо формулу Рівальса

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}). \quad (3.39)$$

Подаючи прискорення у вигляді обертального і доосьового прискорення, запишемо

$$\vec{a} = \vec{a}^{ob} + \vec{a}^{oc}, \quad \vec{a}^{ob} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}, \quad \vec{a}^{oc} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}). \quad (3.40)$$

Зауваження 2. Формули (3.30) та (3.39) справедливі не тільки для обертального руху навколо нерухомої осі.

Лема про похідну за часом вектора сталої довжини витікає з формули (3.30): похідна за часом вектора сталої довжини дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості і самого вектора

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{r}, \quad |\vec{r}| = r = const. \quad (3.41)$$

Застосовуючи цю лему до ортів рухомої системи координат, одержимо формули Пуасона

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{k}_1. \quad (3.42)$$

Задача. Довести справедливість формули

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$$

для довільних  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ . Ця формула, власне вказує розкладання подвійного векторного добутку (зліва) по векторах  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ .

#### Питання для самоконтролю

1. Класифікація рухів твердого тіла.
2. Який рух твердого тіла називається поступальним?
3. Який рух твердого тіла називається обертальним?
4. Як визначається величина кутової швидкості та кутового прискорення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?
5. Як вводяться напрямки псевдовекторів кутової швидкості та кутового прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
6. Записати формулу Ейлера.
7. Як заходиться прискорення точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?

## ЛЕКЦІЯ 4

**Кінематика плоскопаралельного руху. Плоска фігура. Швидкість точок плоскої фігури, миттєвий центр швидкостей. Прискорення точок плоскої фігури, миттєвий центр прискорень.**

### ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Плоскопаралельним (плоским) рухом називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються паралельно певній нерухомій площині (основній площині). Приклади: рух шатуна кривошипно-шатунного механізму, кочення без ковзання циліндра по площині, рух зубчастих коліс в планетарних редукторах.

Плоска фігура – це проекція тіла на основну площину  $\Pi$  (рис. 4.1), або переріз тіла площиною, яка паралельна основній.

Рух плоскої фігури в основній площині повністю визначає плоскопаралельний рух тіла.

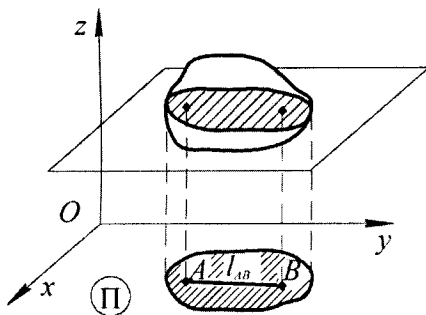


Рисунок 4.1

Зауваження 1. Часто для зручності в теорії плоску фігуру необмежно поширюють. Дістаємо два екземпляри площини: рухома площина ("плоска фігура") рухається в основній нерухомій площині.

Якщо  $A(x_A, y_A)$  та  $B(x_B, y_B)$  дві довільні точки плоскої фігури (рис. 4.1), то лише три координати є незалежними, оскільки відстань  $l_{AB}$  не змінюється

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l_{AB}^2 = \text{const} \quad (4.1)$$

Плоскопаралельний рух має не більше трьох ступенів вільності. Для нього справедливі такі теореми:

1. Плоскопаралельний рух є сумою двох рухів: поступального в площині разом з полюсом та обертального навколо полюса.

2. (Теорема Ейлера–Шаля). Усяке непоступальне переміщення плоскої фігури в площині можна здійснити одним поворотом навколо певного центра обертання.



Запровадимо дві системи координат (рис. 4.2): нерухому  $Oxyz$  та рухому  $A\xi\eta\zeta$  (точка  $A$  – полюс), яка незмінно зв'язана з фігурою та рухається разом з нею (рис. 4.2). Площина  $Oxy$  – основна. Положення фігури та системи  $A\xi\eta\zeta$  визначається параметрами руху  $x_A, y_A, \varphi$ . Кут  $\varphi$  (точніше  $\varphi_z$ ) – це кут між осями  $Ox$  та  $A\xi$ .

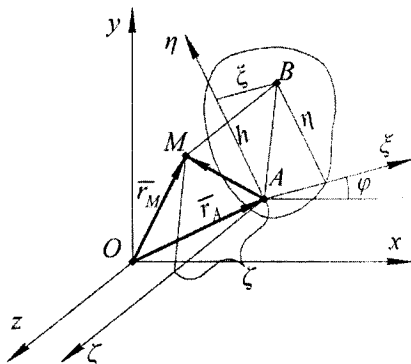


Рисунок 4.2

Рівняння руху плоскої фігури (кінематичні рівняння плоскопаралельного руху) мають вигляд

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t). \quad (4.2)$$

Рух плоскої фігури, очевидно, повністю визначається рухом відрізка прямої або прямої в цілому, яка належить фігурі (наприклад осі  $A\xi$ )

Від рівнянь руху (4.2) можна перейти до кінематики точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  тіла (рис. 4.2), здійснивши перехід у координатну систему  $Oxyz$  за допомогою векторного співвідношення

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overline{AM} \quad (4.3)$$

або за допомогою матриці повороту у площині  $Oxy$  на кут  $\varphi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Для довільної точки  $B$  плоскої фігури  $z_B = z_A = \zeta_B = 0$ , тому рівняння (4.4) можна спростити, перейшовши до координат  $x_B, y_B$  у площині

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_B \\ \eta_B \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Розкривши матричний добуток, запишемо

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \xi_B \cos \varphi - \eta_B \sin \varphi, \\ y_B &= y_A + \xi_B \sin \varphi + \eta_B \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сукупність рівнянь (4.6) та (4.2) визначають координатний спосіб опису руху точки  $B$  ( $\xi_B = const, \eta_B = const$ ) і дають можливість в принципі визначити її швидкість і прискорення.

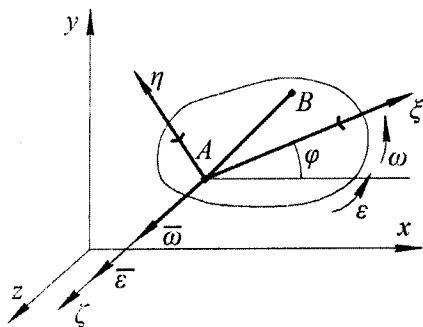


Рисунок 4.3

Кутова швидкість і кутове прискорення плоскої фігури характеризують обертальну частину плоского руху твердого тіла. Відразу знайдемо вектори кутової швидкості  $\vec{\omega}$  і кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  (рис. 4.3).

$$\omega_z = \omega_\zeta = \dot{\varphi}. \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_z = \dot{\omega}_\zeta = \ddot{\varphi}. \quad (4.8)$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \omega_\zeta \vec{k}_1. \quad (4.9)$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k} = \varepsilon_\zeta \vec{k}_1. \quad (4.10)$$

Вектори  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  не залежать від положень полюса. Це можна довести безпосередньо, розглядаючи переміщення  $d\varphi$  або розглядаючи швидкості точок плоскої фігури.

Швидкості точок плоскої фігури. Очевидно, вектори швидкостей усіх точок фігури лежать у площині. Швидкість  $\vec{v}_A$  полюса  $A$  знаходиться безпосередньо з (4.2)

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}. \quad (4.11)$$

Положення довільної точки  $B$  плоскої фігури визначається вектором  $\vec{r}_B$  (рис. 4.4)

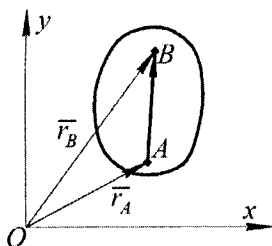


Рисунок 4.4

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (4.12)$$

Диференціюючи за часом, дістанемо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}. \quad (4.13)$$

Зважаючи на те, що для вектора  $\vec{AB}$  постійної довжини похідна за часом визначається формулою Ейлера

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{AB} \quad (4.14)$$

можна записати

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \cdot \vec{AB}. \quad (4.15)$$

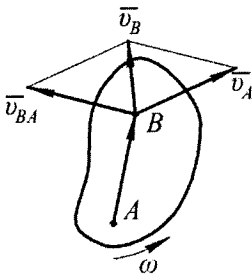


Рисунок 4.5

Дістанемо формулу

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \\ \vec{v}_{BA} &= \omega \cdot AB \\ \vec{v}_{BA} &\perp AB \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса та швидкості даної точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) – це точка фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю. МЦШ існує, коли  $\omega \neq 0$ .

Коли відомі швидкості  $\vec{v}_A$  та  $\vec{v}_B$  двох точок  $A$  та  $B$  плоскої фігури, МЦШ (точку  $P$ , рис. 4.6) знаходимо на перпендикулярах до векторів  $\vec{v}_A$  та  $\vec{v}_B$ .

Доведення можна провести на основі загальної теореми кінематики твердого тіла. Враховуючи, що  $v_P = 0$ , можна записати

$$\vec{v}_A = \omega \cdot AP, \quad \vec{v}_B = \omega \cdot BP. \quad (4.17)$$

Співвідношення (4.17) вказують на розподіл швидкостей у плоскій фігурі. Очевидна аналогія з обертальним рухом. Формули (4.17) справедливі для усіх точок плоскої фігури. На рис. 4.6 та 4.7 наведені способи знаходження МЦШ у різних випадках.

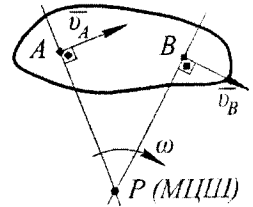


Рисунок 4.6

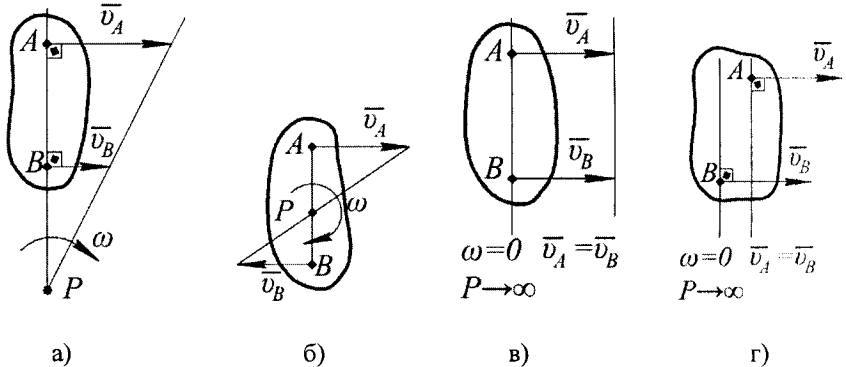


Рисунок 4.7

Миттєво поступальний рух (рис. 4.7, в-г) плоскої фігури ( $\omega = 0$ ) характеризуються однаковими швидкостями усіх її точок; прискорення точок можуть бути різними.

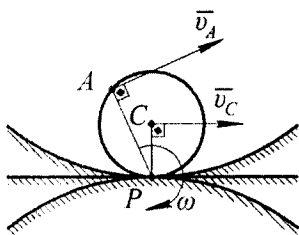


Рисунок 4.8

При коченні без ковзання фігури по нерухомій лінії (рис. 4.8) МЦШ розташований в точці контакту.

Миттєвий центр швидкостей змінює своє положення внаслідок руху плоскої фігури і описує нерухому центроїду в нерухомій площині  $Oxy$  та рухому центроїду в рухомій площині  $A\xi\eta$  (плоскій фігури).

**Теорема Пуансо.** При плоскопаралельному русі рухома центроїда коїться по нерухомій без ковзання.

Аналізуючи рух плоскої фігури, можна скористатись також наслідком загальної теореми кінематики твердого тіла, який полягає в тому, що проєкції швидкостей двох точок плоскої фігури на вісь, яка сполучає ці точки, рівні між собою (рис. 4.9)

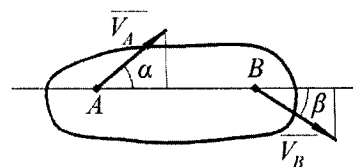


Рисунок 4.9

$$np_{AB}\bar{v}_A = np_{AB}\bar{v}_B. \quad (4.18)$$

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta. \quad (4.19)$$

Прискорення точок плоскої фігури. Очевидно, що вектори прискорень усіх точок фігури лежать у площині. Прискорення  $\bar{a}_A$  полюса  $A$  знаходиться безпосередньо з (4.2)

$$\bar{a}_A = \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j}. \quad (4.20)$$

Прискорення довільної точки  $B$  плоскої фігури визначається диференціюванням (4.15)

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \cdot \overline{AB}). \quad (4.21)$$

Розкриваючи похідну векторного добутку з урахуванням співвідношення (4.14), запишемо

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \overline{AB} + \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \cdot \overline{AB}). \quad (4.22)$$

Можна довести, що

$$\bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \cdot \overline{AB}) = -\omega^2 \overline{AB}. \quad (4.23)$$

Тоді дістаємо формулу

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\epsilon} \cdot \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}. \quad (4.24)$$

Яку зручно записати так

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{o6} + \bar{a}_{BA}^u \\ \bar{a}_{BA}^{o6} &= \epsilon \cdot AB, \quad \bar{a}_{BA}^{o6} \perp AB \\ \bar{a}_{BA}^u &= \omega^2 \cdot AB, \quad \bar{a}_{BA}^u = -\omega^2 AB \end{aligned} \right\}. \quad (4.25)$$

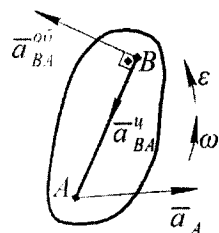


Рисунок 4.10

Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса та обертального та доцентрового прискорень даної точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

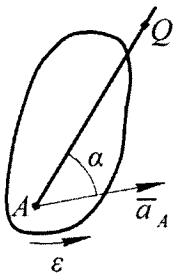


Рисунок 4.11

Миттєвий центр прискорень (МЦП) – це точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю. Для визначення положення МЦП (точка  $Q$ ) необхідно від вектора прискорення  $\vec{a}_A$  точки відкласти в напрямі дугової стрілки кутового прискорення  $\varepsilon$  під кутом  $\alpha$ , який дорівнює

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right) \quad (4.26)$$

відрізок  $AQ$  довжиною

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (4.27)$$

Знаючи положення МЦП (точки  $Q$ ), прискорення точки  $A$ , а також довільної точки  $B$  можна виразити так

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.28)$$

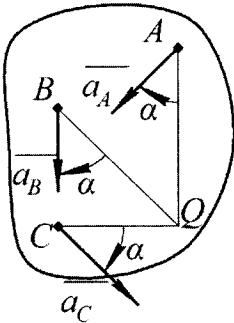


Рисунок 4.12

Вектор прискорення довільної точки плоскої фігури можна побудувати, скориставшись формулами (4.28) при відомому положенні МЦП, виконавши зворотні дії (рис. 4.12). Зауважимо, що МЦП також переміщується по площині. МЦП та МЦШ та МЦП не збігаються, різні точки!

Поняття МЦП рідко застосовується в практичних задачах.

Приклад. Точка  $A$  лінійки  $AB$  еліпсографа, яка має довжину  $l$ , рухається зі швидкістю  $v_A = \text{const}$  вздовж осі  $0x$  (рис. 4.13).

Запровадимо рухому систему  $A\xi\eta$ , пов'язану з лінійкою.

Рівняння руху тоді мають вигляд  $x_A = v_A t$ ,  $y_A = 0$ ,  $\varphi = \arcsin\left(\frac{v_A t}{l}\right)$ .

З останнього рівняння можна знайти  $\omega$  та  $\varepsilon$

$$\omega = |\dot{\varphi}| = \frac{v_A}{l \cos \varphi},$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{v_A \omega l \sin \varphi}{l^2 \cos^2 \varphi} = \frac{v_A^2 \sin \varphi}{l^2 \cos^3 \varphi}$$

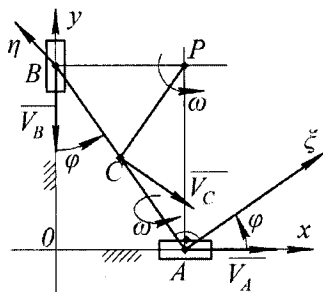


Рисунок 4.13

Швидкість точок плоскої фігури можна знайти трьома способами.

1. Коли напрям  $\vec{v}_B$  відомий, величину  $v_B$  доцільно знайти із співвідношення (4.19).

$$v_B \cos \varphi = v_A \sin \varphi, \quad v_B = v_A \operatorname{tg} \varphi.$$

2. Побудуємо план швидкостей (рис. 4.14) за формулою (4.16).

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

із трикутника, утвореного векторами  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_{BA}$ ,  $\vec{v}_B$  знайдемо

$$v_B = v_A \operatorname{tg} \varphi, \quad v_B = \frac{v_A}{\cos \varphi}$$

і кутову швидкість

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_A}{l \cos \varphi}.$$

Швидкість  $v_C$  довільної точки  $C$  (рис. 4.13) знаходимо за планом швидкостей, відкладаючи у масштабі вектори  $\vec{v}_{CA}$ ,  $\vec{v}_C$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}, \quad \vec{v}_{CA} = \omega \cdot AC, \quad \vec{v}_{CA} \perp AC.$$

3. Побудуємо МЦШ (точку  $P$ , рис. 4.13), тоді

$$AP = l \cos \varphi, \quad BP = l \sin \varphi.$$

Далі знаходимо кутову швидкість та

$v_B$

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{l \cos \varphi}, \quad v_B = \omega \cdot BP = v_A \operatorname{tg} \varphi.$$

Так само знаходимо величину і напрям вектора  $\vec{v}_C$  (рис. 4.13)

$$\vec{v}_C = \omega \cdot CP.$$

Рухомою центроїда являє собою коло діаметром  $l$ , а нерухомою – коло діаметром  $2l$  з центром в точці  $O$  (рис. 4.15).

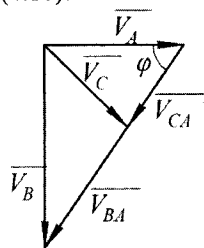


Рисунок 4.14

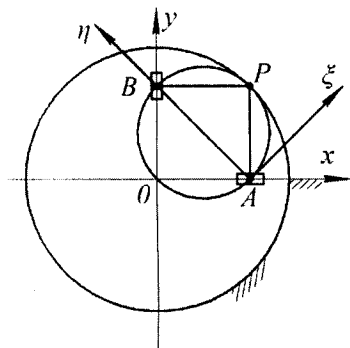


Рисунок 4.15

Прискорення точки  $B$  дістанемо, побудувавши план прискорень (рис. 4.16) за формулою (4.25)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^u + \vec{a}_{BA}^{ob}$$

в якій  $a_A = 0$ ,  $a_{BA}^u = \omega^2 l$  а вектор  $a_{BA}^{ob}$  спочатку відомий тільки за напрямком.

З побудови (рис. 4.16) знаходимо

$$a_{BA}^{ob} = a_{BA}^u \operatorname{tg} \varphi = \omega^2 l \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a_B = \frac{a_{BA}^u}{\cos \varphi} = \frac{\omega^2 l}{\cos \varphi}.$$

Вказані прискорення можна знайти аналітично, якщо записати формулу (4.25) в проекціях на осі  $A\xi$  та  $A\eta$ .

Далі, знаючи  $a_{BA}^{ob}$ , можна знайти кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{ob}}{AB} = \omega^2 \operatorname{tg} \varphi$$

і прискорення точки  $C$ , побудувавши вектори  $\vec{a}_{CA}^{ob}$ ,  $\vec{a}_{CA}^u$

$$a_{CA}^u = \omega^2 \cdot AC, \quad a_{CA}^{ob} = \varepsilon \cdot AC.$$

Зауваження 2. Графічні методи розрахунку, які ґрунтуються на побудові плану швидкостей і плану прискорень, детально вивчаються у курсі теорії механізмів та машин.

Задача. Вважаючи рівняння руху плоскої фігури відомі, скласти параметричні рівняння рухомої та нерухомої центроїд.

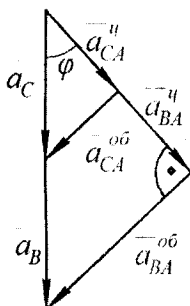


Рисунок 4.16

### Питання для самоконтролю

1. Який рух тіла називається плоскопаралельним (плоским)?
2. Записати рівняння плоского руху тіла.
3. Чи залежить кут повороту тіла від вибору полюса?
4. Чи залежить кутова швидкість та кутове прискорення тіла від вибору полюса?
5. Записати формули для визначення швидкості та прискорення точок при плоскому русі тіла.
6. Фізична суть теореми про проекції швидкості точок тіла на вісь, що проходить через ці точки.
7. Способи визначення миттєвого центра швидкостей (МЦШ)?
8. Як знайти миттєвий центр прискорень (МЦП)?
9. Методика побудови плану швидкостей.
10. Методика побудови плану прискорень.

## ЛЕКЦІЯ 5

**Сферичний рух тіла. Кути Ейлера. Миттєва кутова швидкість. Кінематичні формули Ейлера. Швидкості та прискорення точок тіла при сферичному русі. Аксоїди.**

### РУХ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

Рух тіла навколо нерухомої точки (обертання навколо нерухомої точки) називають також сферичним рухом, оскільки траєкторія кожної точки тіла лежить на сфері радіусом, що дорівнює відстані до нерухомої точки, яка в свою чергу є центром сфери. Приклад: рух дзиги (гіроскопа), рух шарніра Гука в кардановій передачі. Практичне значення кінематики сферичного руху полягає в застосуванні її до динаміки корабля, літака, ракети, космічного апарата, та до небесної механіки.

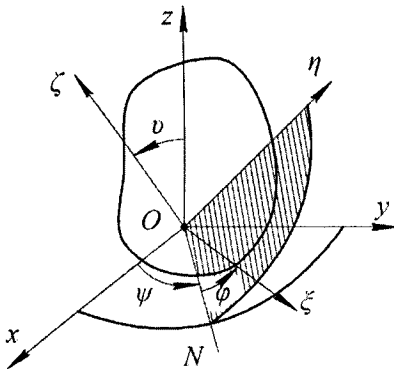


Рисунок 5.1

Рух та положення тіла із закріпленою точкою визначається рухом та положенням рухомої системи осей  $O\xi\eta\zeta$ , яка незмінно пов'язана з тілом, відносно системи до відлікової системи координат  $Oxyz$  (рис. 5.1). Одним з основних є питання про параметри руху, якими можна визначити положення рухомої системи осей  $O\xi\eta\zeta$ .

Теорема Ейлера. Довільне переміщення твердого тіла навколо нерухомої точки можна здійснити трьома послідовними поворотами тіла навколо трьох осей, що проходять через нерухому точку.

Доведення цієї теореми опирається на побудову трьох послідовних поворотів на певні кути – кути Ейлера  $\psi$ ,  $\nu$ ,  $\varphi$  (рис. 5.1). Початкове положення тіла і рухомої системи осей збігаються з  $Oxyz$ .



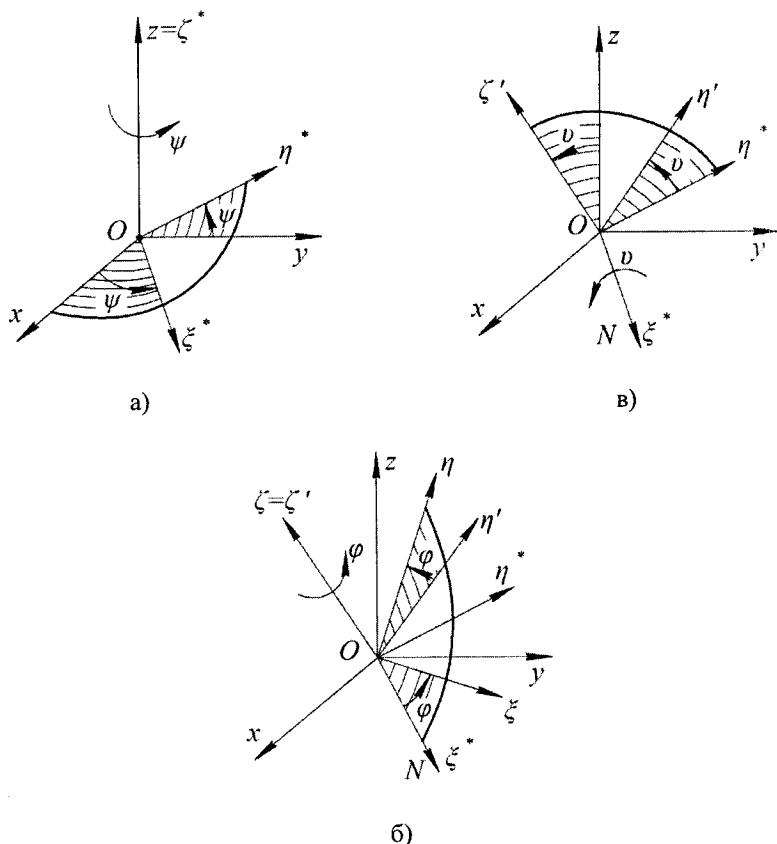


Рисунок 5.2

Послідовність поворотів така:

1) першим поворотом системи  $0xyz$  на кут процесії  $\psi$  навколо осі процесії  $0z$  дістаємо систему  $0\xi^*\eta^*\zeta^*$  (рис. 5.2, а). Від координат  $\xi^*, \eta^*, \zeta^*$  до координат  $x, y, z$  можна перейти за допомогою матриці повороту  $A_\psi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^* \\ \eta^* \\ \zeta^* \end{pmatrix}, \quad A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (5.1)$$

2) другий поворот системи  $0\xi^*\eta^*\zeta^*$  навколо осі нутації  $0\xi^*$  на кут нутації  $\nu$  породжує систему  $0\xi'\eta'\zeta'$  (рис. 5.2, б). Відповідне перетворення від координат  $0\xi'\eta'\zeta'$  до  $0\xi^*\eta^*\zeta^*$  має вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi^* \\ \eta^* \\ \zeta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}, A_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}; \quad (5.2)$$

3) третій поворот системи  $0\xi'\eta'\zeta'$  навколо осі власного обертання  $0\xi''$  на кут власного обертання  $\varphi$  породжує кінцеве положення системи  $0\xi\eta\zeta$  (рис. 5.2, в). Відповідне перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Результуюче перетворення від координат  $\xi, \eta, \zeta$  до координат  $x, y, z$  опишеться матрицею  $A$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, A = A_\psi A_\nu A_\varphi. \quad (5.4)$$

Нагадаємо, що матричне положення некомутативне. Елементи результуючої матриці мають громіздкий вигляд і тому не наводяться.

Запровадження кутів Ейлера особливо зручно тоді, коли  $\nu \approx \text{const}$ ,  $\psi \approx \text{const}$ ,  $\varphi \approx \text{const}$ ; недолік полягає в тому, що при  $\nu \rightarrow 0$  кути  $\psi$  та  $\varphi$  втрачають свою однозначність.

Кути Ейлера  $\psi, \nu, \varphi$  є параметрами руху, тому рівняння руху мають вигляд

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}(t), \dot{\nu} = \dot{\nu}(t), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t). \quad (5.5)$$

Сферичний рух точки не більше 3-х ступенів вільності. В літературних джерелах відлік кутів Ейлера може бути запроваджений по-різному. Різними можуть бути і позначення кутів.

Зауваження 1. Сукупністю параметрів руху не є єдиною можливою. В деяких положеннях (орієнтацію) твердого тіла зручно визначити трьома кутами орієнтації літака або корабля (кути Кардано, Брайтона, Крилова), які також можна запроваджувати різноманітною послідовністю поворотів. Застосовують також параметри Ейлера (параметри Келі–Клейна, Родіга–Гамільтона, Кватерніони), які мають іншу математичну природу. Завжди можна однозначно перейти від однієї сукупності параметрів руху до іншої. Доцільність вибору тих чи інших параметрів визначається природою задач.

Інші методи дослідження руху тіла навколо нерухомої точки на геометричних міркуваннях.

Теорема Ейлера–Деламбера. Довільне переміщення твердого тіла навколо нерухомої точки можна здійснити одним поворотом навколо відповідної осі обертання.

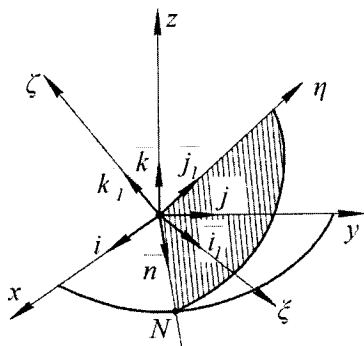


Рисунок 5.3

Зауваження 2. Таке запровадження вектора  $\vec{\omega}$  потребує пояснень. З одного боку, ми маємо випадок складного обертального руху – додавання обертань навколо осей, що перетинаються, і вираз (5.6) потребує доведення. З іншого боку, довести що  $\vec{\omega}$  є вектором кутової швидкості можна безпосередньо, диференціюючи за часом вираз (5.4), потім подаючи вектор  $\vec{v}$  у системі  $Oxyz$  або  $O\xi\eta\zeta$  у вигляді  $\dot{A}A^{-1}\vec{r}$  або  $A^{-1}\dot{A}\vec{r}$ , відповідно. Потім можна встановити, що матриці  $A^{-1}\dot{A}$  та  $\dot{A}A^{-1}$  косиметричні (антисиметричні) і являють собою тензор ( $\omega$ ) і тим самим аксіальний вектор (псевдовектор)  $\vec{\omega}$ . В системі нерухомих координат  $Oxyz$  маємо

$$\dot{A}A^{-1} = (\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

а в системі рухомих координат  $O\xi\eta\zeta$  одержимо

$$A^{-1}\dot{A} = (\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Кінематичні рівняння Ейлера дістанемо, проектуючи вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  на осі рухомої системи координат

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \nu + \dot{\nu} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \nu - \dot{\nu} \cos \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \nu + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

або нерухомої системи координат

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\nu} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \nu, \\ \omega_y &= \dot{\nu} \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \nu, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \nu. \end{aligned} \quad (5.10)$$

На цій підставі легко знаходимо модуль миттєвої кутової швидкості

Миттєва кутова швидкість  $\vec{\omega}$ . Поряд з ортогональними трійками одиничних векторів  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  та  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  нерухомої та рухомої системи відповідно запровадимо одиничний вектор  $\vec{n}$  вздовж лінії вузлів  $ON$  (рис. 5.3). Тоді знайшовши похідні за часом від кутів  $\psi, \nu, \varphi$ , можна вектор кутової швидкості подати як

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\nu} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{k}_1 \quad (5.6)$$

причому доданки в цьому виразі не є взаємно ортогональними.

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\psi^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\psi\dot{\phi}\cos\psi}. \quad (5.11)$$

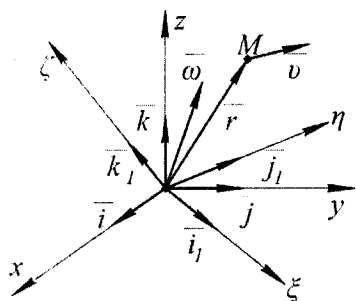


Рисунок 5.4

Швидкості точок тіла при сферичному русі. Положення довільної точки  $M$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$  (рис. 5.4), який в рухомій системі можна подати як

$$\vec{r} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1, \quad (5.12)$$

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \quad \zeta = \text{const}$$

або в нерухомій системі подати як

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{r}| = \text{const}. \quad (5.13)$$

Диференціюючи за часом вектор  $\vec{r}$  постійної довжини, приходимо до знайомої формули Ейлера

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \cdot \vec{r}, \quad (5.14)$$

яку в системі рухомих осей можна подати у вигляді визначника

$$\dot{\vec{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

або у вигляді сукупності скалярних співвідношень для проекції

$$\begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned} \quad (5.16)$$

або у вигляді скалярного добутку вектора  $\vec{r}$  і тензора  $(\omega)$

$$\dot{\vec{v}} = (\omega) \cdot \vec{r}, \quad \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Цілком аналогічні формули можна написати через проекції у нерухомій системі координат  $Oxyz$ , наприклад,

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (5.18)$$

На відміну від обертання навколо нерухомої осі, при русі тіла навколо нерухомої точки вектора  $\vec{\omega}$  змінює свій напрям у просторі, визначаючи своїм напрямком миттєву вісь обертання (МВО) або, інакше, миттєву вісь швидкостей (МВШ).

Рухаючись у просторі, МВО описує в рухомій системі координат  $0\xi\eta\zeta$  рухомий аксоїд, а в нерухомій системі  $0xyz$  нерухомий аксоїд. Аксоїд є кінчними поверхнями з вершиною в нерухомій точці  $O$  тіла (рис. 5.5)

Теорема Пуансо. При русі тіла навколо нерухомої точки рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання. Поверхні аксоїдів дотикаються вздовж МВО.

Положення МВО можна знайти з векторного рівняння прямої, колінеарної вектору  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0. \quad (5.19)$$

Із співвідношень (5.16) та аналогічних для нерухомої системи координат дістанемо рівняння МВО

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}, \quad \frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (5.20)$$

На практиці, якщо відома точка тіла з  $v = 0$ , визначаємо МВО, сполучивши цю точку з точкою  $O$ .

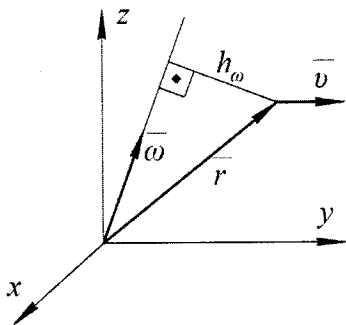


Рисунок 5.6

Швидкість довільної точки  $M$  дістанемо, знаючи відстань  $h_\omega$  до МВО (рис. 5.6) за формулою

$$v = \omega \cdot h_\omega. \quad (5.21)$$

Миттєвий розподіл швидкостей точок відповідає стану обертання тіла навколо миттєвої осі, а розподіл прискорень може не відповідати цьому стану.

Вектор кутового прискорення  $\vec{\epsilon}$  – це похідна за часом від вектора  $\vec{\omega}$

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \quad (5.22)$$

Вектор  $\vec{\epsilon}$  направлений по дотичній до годографа вектора  $\vec{\omega}$ , який в свою чергу лежить на нерухомому аксоїді (рис. 5.7). Вектор  $\vec{\epsilon}$  звичайно переносять у нерухому точку.

При обертанні тіла навколо нерухомої точки вектори  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\epsilon}$  не завжди збігається за напрямком.

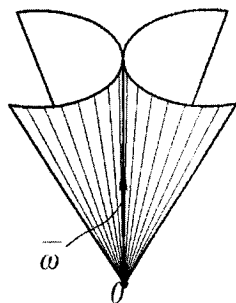


Рисунок 5.5

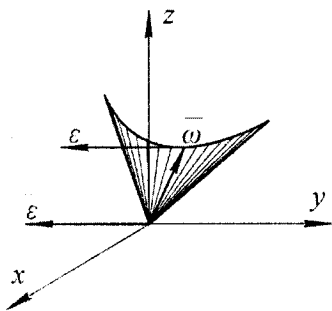


Рисунок 5.7

Обертальне прискорення  $\vec{a}^{ob}$  довільної точки можна визначити, знаючи відстань  $h_\varepsilon$  до осі вектора  $\vec{\varepsilon}$  (рис. 5.8)

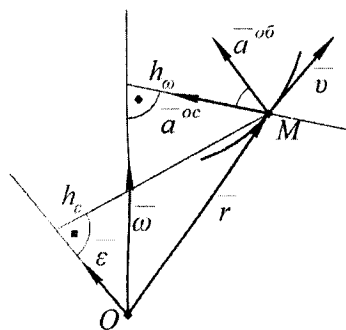


Рисунок 5.8

$$\vec{a}^{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad a^{ob} = \varepsilon \cdot h_\varepsilon. \quad (5.26)$$

Вектор  $\vec{a}^{ob}$  може бути напрямлений під кутом до вектора швидкості  $\vec{v}$ .

Доосьове прискорення  $\vec{a}^{oc}$  спрямоване до миттєвої осі обертання

$$\vec{a}^{oc} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}), \quad a^{oc} = \omega^2 \cdot h_\omega. \quad (5.27)$$

Вектор  $\vec{a}^{oc}$  перпендикулярний до вектора швидкості  $\vec{v}$ , але він не буде нормальним прискоренням точки  $M$ .

Знайдемо проекції прискорення на осі нерухомої та рухомої системи, спочатку перетворивши формулу (5.24) до вигляду

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{\omega}^2 \vec{r}, \quad (5.28)$$

а потім проектуючи цю рівність на відповідній осі.

В нерухомих осях формула (5.27) дасть

$$\begin{aligned} a_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ a_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ a_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (5.29)$$

а в рухомих осях, відповідно

$$\begin{aligned} a_\xi &= \varepsilon_y \zeta - \varepsilon_z \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi, \\ a_\eta &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta, \\ a_\zeta &= \varepsilon_x \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Приклад. Конус висотою  $OC = h$  і радіусом  $r$  котиться по площині без ковзання, має нерухому вершину в точці  $O$  так, що точка  $C$  має постійну за модулем швидкість  $v_C$  (рис. 5.9)

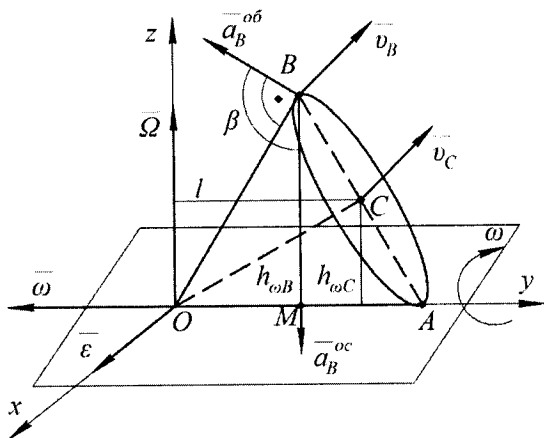


Рисунок 5.9

Рухомий аксоїд – бічна поверхня з твірною  $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ , нерухомий аксоїд – площина  $Oxy$ .  $MBO$  і вектор  $\vec{\omega}$  проходять вздовж  $AO$ . Знаходимо

$$\omega = \frac{v_C}{CK} = \frac{v_C}{h_{\omega d}} = \frac{v_C l}{hr}$$

Вектор  $\vec{\omega}$  постійної довжини, лінія  $AO$  та лінія  $OC$  обертається навколо осі  $Oz$  з постійною кутовою швидкістю  $\Omega$ , яку знайдемо так

$$\Omega = \frac{v_C}{CL} = \frac{v_C l}{h^2}$$

Вектор кутового прискорення, що дорівнює

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}, \quad \varepsilon = \Omega \cdot \omega = \frac{v_C^2 l^2}{h^3 r}$$

буде перпендикулярним до вектора  $\vec{\omega}$ . Знайдемо швидкість та прискорення в точці  $B$ . Обчислимо швидкість за формулою (5.20)

$$v_B = \omega \cdot h_{\omega B} = \omega \cdot BM = 2v_C$$

та прискорення за формулами (5.25)(5.26)

$$a_B^{ob} = \varepsilon h_{\varepsilon B} = \varepsilon \cdot OB = \frac{v_C^2 l^3}{h^3 r},$$

$$a_B^{ic} = \omega^2 h_{\omega B} = \omega^2 \cdot OB = 2v_C^2 \frac{l}{hr}$$

Оскільки вектори  $\vec{a}_B^{ob}$  та  $\vec{a}_B^{oc}$  не є перпендикулярними, величину повного прискорення обчислимо за формулою

$$a_B = \sqrt{(a_B^{ob})^2 + (a_B^{oc})^2 + 2a_B^{ob} a_B^{oc} \cos \beta} = \frac{v_C^2 l}{h^3 r} \sqrt{l^4 + 4h^2 r^2}.$$

Проблемне запитання. Визначити елементи матриці А, здійснивши множення за формулою (5.4).

#### Питання для самоконтролю

1. Записати рівняння сферичного руху тіла.
2. Як вводяться кути Ейлера?
3. Записати кінематичні формули Ейлера.
4. Як знайти миттєву вісь руху тіла, що має одну нерухому?
5. Як визначити величину та напрямок кутового прискорення при сферичному русі тіла?
6. Як визначити величину та напрямок кутової швидкості при сферичному русі тіла?
7. Чому вектори кутового прискорення та кутової швидкості направлені не по одній прямій?



## ЛЕКЦІЯ 6

**Кінематика вільного руху твердого тіла. Складний рух точки. Формула Бура.**

**Теорема про додавання швидкостей. Теорема про додавання прискорень. Прискорення Кориоліса.**

### РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

З попереднього відомо, що вільне тверде тіло має шість ступенів вільності та не має обмежень на рух у просторі. Для розгляду кінематики вільного тіла поряд з нерухомою системою осей  $Oxyz$  запровадимо рухому систему осей  $Ax_1y_1z_1$ , поступальний рух якої пов'язаний з рухом певної точки  $A$  (полюса) твердого тіла (рис. 6.1).

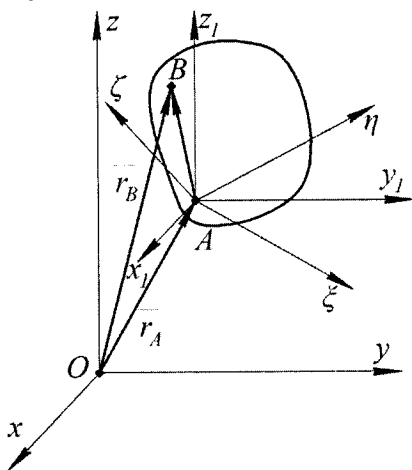


Рисунок 6.1

Вибір полюса  $A$  на практиці визначається тільки зручністю, осі  $Ax_1$ ,  $Ay_1$ ,  $Az_1$  також зручно напрямляти паралельно відповідним осям нерухомої системи. Запровадимо також рухому систему координат  $A\xi\eta\zeta$ , що незмінно скріплена з тілом.

Рух та положення вільного твердого тіла однозначно визначається рухом та положенням рухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$  відносно відлікової системи  $Oxyz$ .

Параметри руху вільного твердого тіла одночасно визначають положення рухомої системи  $A\xi\eta\zeta$  – це координати полюса  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $z_A$  та три кути Ейлера  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , визначені у системі  $Ax_1y_1z_1$ .

Рівняння руху вільного твердого тіла можуть мати вигляд

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t), & y_A &= y_A(t), & z_A &= z_A(t), \\ \psi &= \psi(t), & \vartheta &= \vartheta(t), & \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Рух вільного твердого тіла можна подати як суму поступального руху, що визначається рухом полюса, та обертання навколо полюса. Важливим є те, що при іншому виборі полюса, кути Ейлера не змінюються, тому не змінюються кутова швидкість і кутове прискорення обертальної частини руху. Поступальна частина руху вільного тіла істотно залежить від вибору положення полюса.

Швидкість точок вільного твердого тіла можна визначити із очевидного співвідношення (рис. 6.1)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}, \quad |\overline{AB}| = \text{const}. \quad (6.2)$$

Диференціюючи за часом, дістанемо

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt} = \vec{v}_A + \frac{d(\overline{AB})}{dt}. \quad (6.3)$$

Швидкість  $\vec{v}_A$  полюса  $A$  вважається відомою, коли відомі рівняння руху (6.1). Похідна за часом вектора  $\overline{AB}$  визначається тільки обертальним рухом його навколо точки  $A$  в системі  $Ax_1y_1z_1$ . Тому, застосовуючи формулу Ейлера

$$\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \vec{\omega} \cdot \overline{AB}, \quad (6.4)$$

одержимо формулу

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \cdot \overline{AB}, \quad (6.5)$$

яка означає, що швидкість довільної точки вільного твердого тіла векторно складається із швидкості полюса та швидкості точки в обертальному русі тіла навколо полюса.

Прискорення точок вільного твердого тіла.

Для довільної точки  $B$  тіла прискорення  $\vec{a}_B$  визначимо, диференціюючи за часом формулу (6.5), маємо

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \overline{AB} + \vec{\omega} \cdot \frac{d(\overline{AB})}{dt} \quad (6.6)$$

звідки, згадавши, що відомі величини

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad (6.7)$$

одержимо новий різновид формули Рівальса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \cdot \overline{AB} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \overline{AB}), \quad (6.8)$$

яка вказує на те, що прискорення довільної точки твердого тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса, та прискорення точки в обертальному русі навколо полюса.

## СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Повернімось до кінематики точки. Інколи буває необхідно (або зручно) розглядати рух однієї і тієї самої матеріальної точки одночасно в різних системах відліку, які, в свою чергу, здійснюють різноманітні відносні рухи. Такі задачі виникають в теорії механізмів машин, в теорії навігації або в питаннях цілевказування у військовій справі.

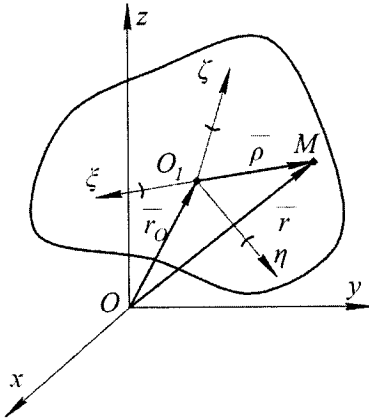


Рисунок 6.2

Складним (складеним) рухом (*complex movement*) точки називається рух, розглядуваний одночасно в двох (чи більше) системах відліку (та двома координатними системами:  $Oxyz$  та  $O_1\xi\eta\zeta$  (рис. 6.2).

Одну із зазначених систем відліку умовно вважають нерухомою (абсолютною), другу, відповідно, рухомою. Систему координат  $Oxyz$  вважають нерухомою, систему  $O_1\xi\eta\zeta$  рухомою (рис. 6.2), причому рух системи  $O_1\xi\eta\zeta$  викликаний рухом деякого тіла відліку, з яким система  $O_1\xi\eta\zeta$  незмінно з'єднана.

Для зручності тіло відліку інколи уявляють необмеженим або таким, що точка  $M$  весь час рухається по його поверхні.

Абсолютний рух точки  $M$  – це рух, який спостерігається з нерухомої системи координат нерухомих спостерігачем. Векторне рівняння абсолютного руху точки має вигляд (рис. 6.2).

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (6.9)$$

Відносний рух точки  $M$  – це рух, який спостерігається з рухомої системи координат спостерігачем, який з цією системою незмінно зв'язаний (з'єднаний з тілом). Вектор рівняння відносного руху буде мати вигляд (рис. 6.2).

$$\rho = \rho(t). \quad (6.10)$$

Переносний рух точки  $M$  – це власне, не рух точки  $M$ , а рух тієї точки рухомої системи координат (або, рівносильно, рух точки рухомого тіла), з якою в даний момент збігається рухома точка  $M$ . Цей рух повністю означений, коли відомі рівняння руху системи  $O_1\xi\eta\zeta$ , як твердого тіла в абсолютному просторі (які, в свою чергу, містять рівняння руху полюса  $O_1$  та ейлерівих кутів, що визначають орієнтацію системи  $O_1\xi\eta\zeta$  відносно системи  $Oxyz$ ).

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}_0(t), \\ \psi &= \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \quad (6.11)$$

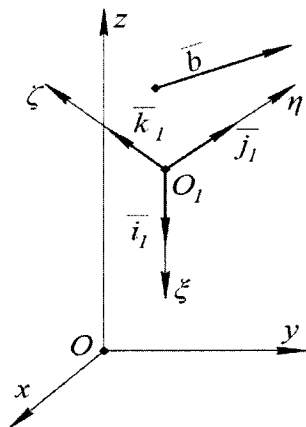


Рисунок 6.3

Задачею кінематики складного руху точки є встановлення взаємозв'язку між абсолютним, відносним та переносними рухами точки, а також між кінематичними характеристиками (швидкісними прискореннями) вказаних рухів.

Формально зв'язок між рухами (рис. 6.3) встановлюється просто

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}. \quad (6.12)$$

Однак ця формула має прихований більш складний зміст, оскільки залежності (6.10)–(6.11) попередньо можуть бути означені в різних системах.

Абсолютна та відносна (локальна) похідні векторної функції скалярного аргументу. Формула Бура.

Нехай у просторі існує змінний вектор  $\vec{b}(t)$  (рис. 6.3), який одночасно спостерігається в абсолютній системі  $Oxyz$  та в рухомій системі  $O_1\xi\eta\zeta$ . Зміна цього вектора спостерігається у рухомій системі не так, як у нерухомій. Встановимо взаємозв'язок між похідною за часом вектора  $\vec{b}(t)$ , яка спостерігається в нерухомій системі (абсолютною похідною) та похідною за часом цього ж вектора, яка спостерігається в рухомій системі (відносною, локальною похідною). Це буде необхідно для аналізу складного руху точки або тіла у подальшому.

Знаходячись в нерухомій системі  $Oxyz$ , подамо вектор  $\vec{b}$ , розкладений по осях рухомої системи  $O_1\xi\eta\zeta$

$$\vec{b} = b_\xi \vec{i}_1 + b_\eta \vec{j}_1 + b_\zeta \vec{k}_1. \quad (6.13)$$

Продиференціюємо за часом рівність (6.13), враховуючи, що вектори  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{k}_1$  можуть змінювати свій напрям внаслідок руху системи

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{b}_\xi \vec{i}_1 + \dot{b}_\eta \vec{j}_1 + \dot{b}_\zeta \vec{k}_1 + b_\xi \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \dot{b}_\eta \frac{d\vec{j}_1}{dt} + b_\zeta \frac{d\vec{k}_1}{dt}. \quad (6.14)$$

Застосуємо формулу Пуасона (3.43)

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{k}_1, \quad (6.15)$$

де  $\vec{\omega}$  – вектор миттєвої кутової швидкості обертання системи  $O_1\xi\eta\zeta$ , відносно нерухомої  $Oxyz$ .

Тоді формула (6.14) дістане вигляд

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{b}_\xi \vec{i}_1 + \dot{b}_\eta \vec{j}_1 + \dot{b}_\zeta \vec{k}_1 + \vec{\omega} \cdot (\dot{b}_\xi \vec{i}_1 + \dot{b}_\eta \vec{j}_1 + \dot{b}_\zeta \vec{k}_1). \quad (6.16)$$

Встановимо механічний зміст величини у виразі (6.16). Похідна зліва являє собою абсолютну похідну, яка спостерігається в нерухомій системі  $Oxyz$

$$\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{a\vec{o}c} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\text{відн}}. \quad (6.17)$$

Перші три доданки у правій частині (6.16) являють собою відносну похідну, яка спостерігається в рухомій системі

$$\left. \dot{b}_\xi \vec{i}_1 + \dot{b}_\eta \vec{j}_1 + \dot{b}_\zeta \vec{k}_1 \right|_{\text{відн}} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\text{відн}}. \quad (6.18)$$

Векторний добуток справа в (6.16) можна, очевидно, подати як

$$\vec{\omega} \cdot (\dot{b}_\xi \vec{i}_1 + \dot{b}_\eta \vec{j}_1 + \dot{b}_\zeta \vec{k}_1) = \vec{\omega} \cdot \vec{b}. \quad (6.19)$$

Таким чином, дістанемо шукану формулу, яка виражає зв'язок між похідними вектора в двох системах відліку (формулу Бура)

$$\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{a\vec{o}c} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\text{відн}} + \vec{\omega} \cdot \vec{b} \quad (6.20)$$

Теорема про додавання швидкостей точки в складному русі встановлює зв'язок між швидкостями точки відносно вказаних (рис. 6.2) систем координат. Диференціюючи за часом вираз (6.12) з урахуванням формули Бура (6.20), приходимо до формули

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{a\vec{o}c} = \left. \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right|_{\text{відн}} + \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}. \quad (6.21)$$

Абсолютна швидкість  $\vec{v}_{a\vec{o}c}$  – це швидкість точки  $M$  відносно нерухомої системи координат; абсолютна швидкість спостерігається в нерухомій системі координат  $Oxyz$  (рис. 6.2)

Відносна швидкість  $\vec{v}_{\text{відн}}$  – це швидкість точки  $M$  по відношенню до рухомої системи координат; відносна швидкість спостерігається в рухомій системі координат  $O_1\xi\eta\zeta$  (рис. 6.2).

$$\vec{v}_{\text{відн}} = \left. \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right|_{\text{відн}} = \dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1 + \dot{\zeta} \vec{k}_1. \quad (6.22)$$

Переносна швидкість  $\vec{v}_{неп}$  – це власне, не швидкість точки (рис. 6.2), а швидкість тієї точки рухомої системи координат (або, рівносильно, точки скріпленого з рухомою системою необмеженого тіла), в якій перебуває точка  $M$  в даний момент часу

$$\vec{v}_{неп} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}. \quad (6.23)$$

Переносна швидкість спостерігається в нерухомій системі, тому  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{неп}$ .

Одержимо математичний вираз теореми

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{неп} + \vec{v}_{\epsilon i \partial n} \quad (6.24)$$

тобто абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей.

Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса) встановлює зв'язок між прискоренням точки відносно вказаних систем координат. Для визначення цього зв'язку формулу (6.21) з урахуванням (6.22), (6.23) подамо у вигляді

$$\vec{v}_{abc} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{\rho} + \vec{v}_{\epsilon i \partial n} \quad (6.25)$$

і продиференціюємо за часом. Дістанемо вираз

$$\frac{d\vec{v}_{abc}}{dt} = \vec{a}_{abc} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}_{неп}}{dt} \cdot \vec{\rho} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\epsilon i \partial n}}{dt} \quad (6.26)$$

в якому всі похідні за часом мають зміст абсолютних похідних. Враховуючи, що вектори  $\vec{\rho}$  та  $\vec{v}_{\epsilon i \partial n}$  спостерігаються одночасно в двох системах координат і застосовуючи формулу Бура, одержимо

$$\left. \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right|_{abc} = \left. \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right|_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{\rho} = \vec{v}_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{\rho} \quad (2.27)$$

або

$$\left. \frac{d\vec{v}_{\epsilon i \partial n}}{dt} \right|_{abc} = \left. \frac{d\vec{v}_{\epsilon i \partial n}}{dt} \right|_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{v}_{\epsilon i \partial n} = \vec{a}_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{v}_{\epsilon i \partial n}. \quad (2.28)$$

Підставляючи (6.27), (6.28) в (6.26) та враховуючи, що

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon} \quad (6.29)$$

одержимо формулу

$$\vec{a}_{abc} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\rho} + \vec{\omega} \cdot (\vec{v}_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) + \vec{a}_{\epsilon i \partial n} + \vec{\omega} \cdot \vec{v}_{\epsilon i \partial n} \quad (6.30)$$

або

$$\vec{a}_{abc} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\rho} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) + \vec{a}_{\epsilon i \partial n} + 2\vec{\omega} \cdot \vec{v}_{\epsilon i \partial n}. \quad (6.31)$$

Абсолютне прискорення  $\vec{a}_{abc}$  – це прискорення точки  $M$  відносно нерухомої системи координат; абсолютне прискорення спостерігається в нерухомій системі координат  $Oxyz$  (рис. 6.2)

Відносне прискорення  $\vec{a}_{відн}$  – це прискорення точки  $M$  відносно рухомої системи координат; відносне прискорення спостерігається в нерухомій системі координат  $O_1\xi\eta\zeta$  (рис. 6.2).

Переносне прискорення  $\vec{a}_{неп}$  – це, власне, не прискорення точки  $M$  (рис. 6.2), а прискорення тієї точки рухомої системи координат (або, рівно-сильно, точки скріпленого з рухомою системою необмеженого тіла), в якій перебуває точка  $M$  в даний момент часу.

$$\vec{a}_{неп} = \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (6.32)$$

Переносне прискорення спостерігається в нерухомій системі, тому, очевидно,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{неп}$ ,  $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{неп}$ .

Прискорення Кориоліса  $\vec{a}_{кор}$  можна виразити формулою

$$\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega}_{неп} \times \vec{v}_{відн}. \quad (6.33)$$

Одержимо математичний вираз теореми Кориоліса

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{неп} + \vec{a}_{відн} + \vec{a}_{кор}. \quad (6.34)$$

Тобто, абсолютне прискорення точки є векторна сума переносного, відносного та кориолісового прискорень.

Модуль прискорення Кориоліса (6.33) визначається за формулою

$$\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega}_{неп} \cdot \vec{v}_{відн} \sin(\vec{\omega}_{неп}, \vec{v}_{відн}) \quad (6.35)$$

з якої видно, що це прискорення дорівнює нулю в таких випадках:

- 1) коли  $\vec{\omega}_{неп} = 0$ , при поступальному переносному русі;
- 2) при колінеарності (паралельності) векторів  $\vec{\omega}_{неп}$  та  $\vec{v}_{відн}$ ;
- 3) у ті моменти часу, коли  $\vec{v}_{відн} = 0$ .

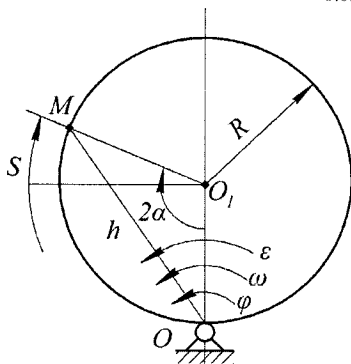


Рисунок 6.4

#### Приклад.

Кільце радіуса  $R$  обертається навколо осі, що перпендикулярна до його площини за законом  $\varphi = \varphi(t)$  (рис. 6.4). Вздовж кільця рухається матеріальна точка  $M$  (маленьке кільце) за законом  $S = S(t)$ .

Потрібно знайти абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки.

Положення точки  $M$  на кільці визначається кутом  $\alpha$  таким, що  $2\alpha = S/R$  (рис. 6.4).

Для знаходження вектора  $\vec{v}_{abc}$  застосуємо формулу (6.24)

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{nep} + \vec{v}_{sido}$$

тут

$$\vec{v}_{nep} = \omega h = 2\dot{\varphi}R \sin \alpha, \quad \vec{v}_{sido} = S,$$

$$\vec{v}_{abc} = \sqrt{4R\dot{\varphi}(R\dot{\varphi} - \dot{S})^2 \sin^2 \alpha + \dot{S}^2}$$

а напрямки векторів для деякого  $\alpha$  вказані на рис. 6.5.

Для знаходження вектора  $\vec{a}_{abc}$  перетворимо формулу (6.34), розклавши  $\vec{a}_{nep}$  та  $\vec{a}_{sido}$  на складові частини, тоді дістанемо

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{nep}^{ob} + \vec{a}_{nep}^{oc} + \vec{a}_{sido}^{\tau} + \vec{a}_{sido}^n + \vec{a}_{kop}. \quad (6.36)$$

Модулі наведених векторів становлять

$$\vec{a}_{nep}^{ob} = \epsilon h = \dot{\varphi} h = 2\ddot{\varphi} R \sin \alpha,$$

$$\vec{a}_{nep}^{oc} = \omega^2 h = \dot{\varphi}^2 R \sin \alpha,$$

$$\vec{a}_{sido}^{\tau} = \ddot{S},$$

$$\vec{a}_{sido}^n = \frac{v_{sido}^2}{R} = \frac{S^2}{R},$$

$$\vec{a}_{kop} = 2\omega v_{sido} = 2\dot{\varphi} \dot{S}.$$

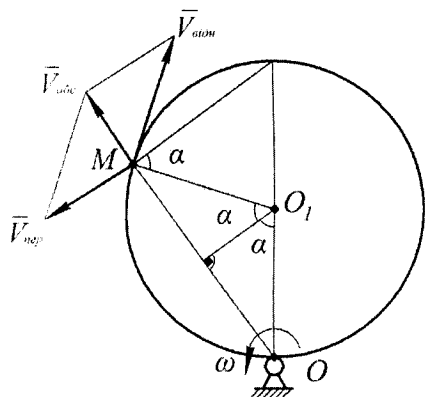


Рисунок 6.5

Напрямки векторів вказані на рис. 6.6 модуль вектора  $\vec{a}_{abc}$  доцільно заходити, користуючись методом проєкцій. Для цього запровадимо систему осей  $Mx$  в площині кільця, які позначаються в точці  $M$  (рис. 6.6).

Векторна рівність (6.36) в проєкціях на осі дасть відповідно

$$\begin{aligned} \vec{a}_{abc.x} &= \vec{a}_{nep.x}^{ob} + \vec{a}_{nep.x}^{oc} + \vec{a}_{sido.x}^{\tau} + \vec{a}_{sido.x}^n + \vec{a}_{kop.x} = \\ &= -2\ddot{\varphi} R \sin \alpha + \dot{\varphi}^2 R \sin^2 \alpha + \frac{S^2}{R} + 2\dot{\varphi} \dot{S}, \end{aligned}$$



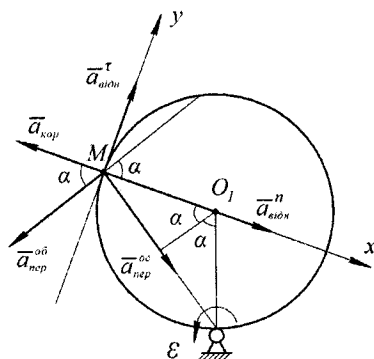


Рисунок 6.6

$$\begin{aligned} \vec{a}_{абс.y} &= \vec{a}_{пер.y}^{об} + \vec{a}_{пер.y}^{ос} + \vec{a}_{відн.y}^τ + \vec{a}_{відн.y}^n + \vec{a}_{кор.y} = \\ &= -2\ddot{\varphi}R \sin^2 \alpha - \dot{\varphi}^2 R \sin \alpha \cos \alpha + \ddot{S}, \end{aligned}$$

тоді

$$\vec{a}_{абс} = \sqrt{(\vec{a}_{абс.x})^2 + (\vec{a}_{абс.y})^2}.$$

#### Питання для самоконтролю

1. Записати рівняння вільного руху тіла.
2. Як знайти швидкість і прискорення точок тіла, що вільно переміщується у просторі?
3. Чи залежить кутова швидкість та кутове прискорення тіла від вибору полюса?
4. Означення відносного, переносного та абсолютного рухів точки.
5. Основна задача абсолютного (складного) руху точки.
6. Означення відносної, переносної та абсолютної швидкості при складному русі точки.
7. Означення відносного, переносного та абсолютного прискорення при складному русі точки.
8. Як знаходиться абсолютна швидкість точки (теорема додавання швидкостей)?
9. Як знайти абсолютне прискорення точки (теорема Коріоліса)?
10. Записати формулу для визначення прискорення Коріоліса.
11. Умови при яких прискорення Коріоліса дорівнює нулю при складному русі тіла.
12. Правило М. Є. Жуковського для визначення величини та напрямку прискорення Коріоліса.

Кінематика складного руху твердого тіла. Миттєвий рух тіла. Додавання поступальних рухів. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються, та навколо паралельних осей. Пара обертань. Вектор кутової швидкості як ковзний вектор. Кінематичні інваріанти. Гвинтовий рух твердого тіла.

### СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Складним (складеним) рухом твердого тіла називається рух, розглядуваний одночасно в двох (чи більше) системах відліку. Необхідність такого розгляду виникає в задачах кінематики маніпуляторів або систем твердих тіл. Обмежимося в подальшому для спрощення двома системами відліку (двома системами координат:  $Oxyz$  та  $O_1\xi\eta\zeta$ ) (рис. 7.1).

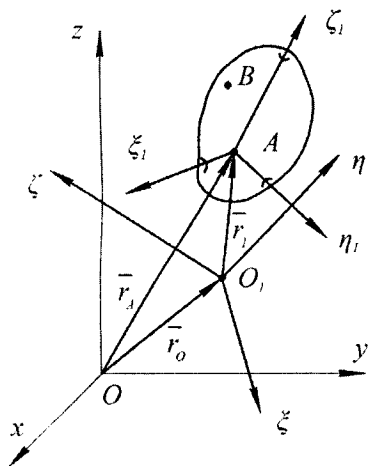


Рисунок 7.1

Систему  $Oxyz$  вважатимемо нерухомою (абсолютною), систему  $O_1\xi\eta\zeta$  - рухомою (тіло відліку для неї не зображено на рис. 7.1). Для розгляду кінематики тіла запровадимо рухому систему осей  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ , незмінно з ним скріплену. Точку  $A$ , як і раніше, вважаємо полюсом.

Абсолютний рух тіла – це рух, який спостерігається в нерухомій системі  $Oxyz$ . Цей рух вважається визначеним, коли відомий рух полюса  $A$  та абсолютні (глобальні) кути орієнтації тіла (наприклад, кути Ейлера  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ) в нерухомій системі.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \quad (7.1)$$

$$\psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

де

$$\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)^T$$

Відносний рух тіла – це рух, який спостерігається в рухомій системі відліку спостерігачем, який з цією незмінно зв'язаний.

Рівняння такого руху можуть мати вигляд

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t), \quad (7.2)$$

$$\psi_1 = \psi_1(t), \quad \vartheta_1 = \vartheta_1(t), \quad \varphi_1 = \varphi_1(t),$$

де  $\vec{r}_1 = (\xi_A, \eta_A, \zeta_A)^T$ :

$\psi_1, \vartheta_1, \varphi_1$  – кути Ейлера, визначені в рухомій системі координат

Переносний рух тіла – це рух, який міг би відбутися, коли б ми це тіло фіксували (зупинили) в рухомій системі координат. Цей рух є визначеним, коли відомі рівняння руху рухомої системи відносно нерухомої, наприклад

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}_0(t), \\ \psi_0 &= \psi_0(t), \vartheta_0 = \vartheta_0(t), \varphi_0 = \varphi_0(t), \end{aligned}$$

де  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$  – кути Ейлера, визначені в нерухомій системі координат

Переносний та відносний рухи вважаються складовими частинами складного руху.

Задачами кінематики складного руху тіла є встановлення взаємозв'язків між абсолютним рухом (положенням, орієнтацією) тіла та переносним і відносними рухами; встановлення аналогічних за змістом взаємозв'язків між кінематичними характеристиками (кутовими швидкостями та прискоренням, швидкостями та прискоренням окремих точок тіла) абсолютного руху та кінематичними характеристиками складових частин руху.

Наприклад, в кінематиці маніпуляторів типовими є такі задачі:

- визначення абсолютного руху (положення, орієнтації) кінцевої ланки, коли задані відносні та переносні рухи (синтез рухів, пряма задача про положення);
- визначення руху кожної проміжної ланки, коли заданий рух кінцевої ланки (обернена задача про положення);
- прямі та обернені задачі про лінійні та кутові швидкості та прискорення.

Зауважимо, що в таких задачах характер відносного та переносного рухів кожної ланки визначається типом сполучень (типом кінематичних пар) між ланками; найбільш поширені кінематичні пари обертового, поступального та гвинтового руху.

Встановимо зв'язок між параметрами абсолютного руху (7.1) та параметрами складових частин руху (7.2), (7.3). Для цього виконаємо відповідні перетворення координат довільної точки  $B$  твердого тіла (рис. 7.1), яка має в самому тілі координати  $\xi_{1B}, \eta_{1B}, \zeta_{1B}$ . Перехід від системи координат  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ , пов'язаної з тілом, до системи  $O_1\xi\eta\zeta$  можна описати співвідношеннями

$$\begin{pmatrix} \xi_B \\ \eta_B \\ \zeta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{pmatrix} + A_{\text{відн}} \begin{pmatrix} \xi_{1B} \\ \eta_{1B} \\ \zeta_{1B} \end{pmatrix}, \quad A_{\text{відн}} = A_{\psi_1} A_{\vartheta_1} A_{\varphi_1}, \quad (7.4)$$

де  $A_{\psi_1}, A_{\vartheta_1}, A_{\varphi_1}$  – це матриці поворотів відповідних ейлерівих кутів (7.2)

(див. лекцію 5).

Наступне перетворення від системи  $O_1\xi\eta\zeta$  до системи  $Oxyz$  можна описати співвідношеннями

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{nep} \begin{pmatrix} \xi_B \\ \eta_B \\ \zeta_B \end{pmatrix}, \quad A_{nep} = A_{\psi_0} A_{\theta_0} A_{\varphi_0}, \quad (7.5)$$

де  $A_{\psi_0}$ ,  $A_{\theta_0}$ ,  $A_{\varphi_0}$  – матриці поворотів ейлерівих кутів (7.3).

На підставі (7.4), (7.5) запишемо

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{nep} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{pmatrix} + A_{nep} A_{видн} \begin{pmatrix} \xi_{1B} \\ \eta_{1B} \\ \zeta_{1B} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Для спостерігача в нерухомій системі  $Oxyz$  рух точки  $B$  з координатами в тілі  $\xi_{1B}$ ,  $\eta_{1B}$ ,  $\zeta_{1B}$  можна описати співвідношеннями

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + A_{abc} \begin{pmatrix} \xi_{1B} \\ \eta_{1B} \\ \zeta_{1B} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

З формул (7.4)–(7.7) випливає, що

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{nep} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{pmatrix}, \quad A_{abc} = A_{nep} \cdot A_{видн}. \quad (7.8)$$

Рівняння (7.8) повністю описують абсолютний рух твердого тіла і з них можна, в принципі, отримати усі параметри (7.1). Диференціюючи (7.7), (7.8), можна отримати також співвідношення між усіма характеристиками складного руху та його складових частин.

Миттєвий рух (миттєвий кінематичний стан) твердого тіла в певний момент часу визначається розподілом швидкостей його точок. Прискорення точок не розглядаються. Поняття миттєвого руху є надзвичайно продуктивним і зручним для теоретичного аналізу рухів тіла, оскільки кожен реальний рух тіла може бути поданий як сукупність (можливо нескінченна) миттєвих кінематичних станів цього тіла. Фактично поняття миттєво поступального, миттєво обертального руху, миттєвої осі обертання вже були використані в лекціях 4, 5.

Обмежимося в подальшому аналізі тільки миттєвих рухів. Спершу застосуємо це поняття до складного руху, а потім наведемо класифікацію миттєвих рухів тіла.

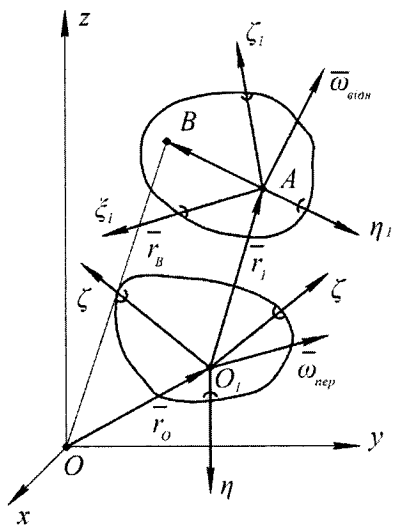


Рисунок 7.2

Кінематика миттєвого складного руху може бути проаналізована шляхом визначення швидкості довільної точки  $B$  твердого тіла у складному русі (рис. 7.1, 7.2).

Рух точки  $B$  визначається радіусом вектором  $\vec{r}_B$  (рис. 7.2)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \overline{AB}. \quad (7.9)$$

Диференціюючи рівність (7.9), дістанемо співвідношення

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt} \quad (7.10)$$

в якому похідні за часом мають зміст абсолютних похідних.

Застосовуючи формулу Бура (лекція 6, формула 6.20), одержимо для векторів  $\vec{r}_1$ ,  $\overline{AB}$  співвідношення

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \left. \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right|_{abc} = \left. \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right|_{vidn} + \vec{\omega}_{nep} \cdot \vec{r}_1 = \vec{v}_{A,vidn} + \vec{\omega}_{nep} \cdot \vec{r}_1. \quad (7.11)$$

$$\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \left. \frac{d(\overline{AB})}{dt} \right|_{abc} = \left. \frac{d(\overline{AB})}{dt} \right|_{vidn} + \vec{\omega}_{nep} \cdot (\overline{AB}). \quad (7.12)$$

Крім того, очевидно, що у рухомій системі  $O_1\xi\eta\zeta$

$$= \left. \frac{d(\overline{AB})}{dt} \right|_{vidn} = \vec{\omega}_{vidn} \cdot (\overline{AB}) \quad (7.13)$$

Зауважимо, що вектор  $\vec{\omega}_{vidn}$  також спостерігається у рухомій системі.

Вираз (7.10) з урахуванням (7.11)–(7.13) може бути поданий у вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_{nep} \cdot \vec{r}_1 + \vec{v}_{A,vidn} + (\vec{\omega}_{nep} + \vec{\omega}_{vidn}) \cdot \overline{AB} \quad (7.14)$$

причому перші три доданки в ньому описують абсолютну швидкість полюса  $A$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_{nep} \cdot \vec{r}_1 + \vec{v}_{A,vidn} \quad (7.15)$$

а останній доданок – миттєве обертання навколо полюса з миттєвою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_{abc}$ , де

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{nep} + \vec{\omega}_{vidn} \quad (7.16)$$

Тоді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{abc} \cdot \overline{AB} \quad (7.17)$$

З вищевказаного випливає, що абсолютна миттєва кутова швидкість дорівнює векторній сумі кутових швидкостей переносного і відносного

обертань. Крім того підтверджено, що довільний миттєвий рух твердого тіла можна подати як миттєвий рух полюса та миттєве обертання навколо полюса.

Співвідношення (7.14), (7.16) можуть бути сформульовані як відповідні теореми про додавання швидкостей для твердого тіла в складному русі. Розглянемо важливі окремі випадки.

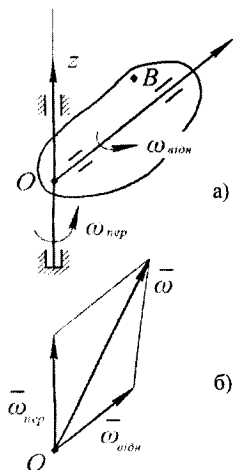


Рисунок 7.3

Додавання миттєво поступальних рухів може бути проаналізовано за формулою (7.14), коли покласти  $\bar{\omega}_{nep} = 0$ ,  $\bar{\omega}_{вiдн} = 0$ , тоді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_{A,вiдн} \quad (7.18)$$

і швидкості усіх точок тіла однакові, тобто результуючий рух є миттєво поступальним. Нагадаємо, що при цьому прискорення точок можуть бути різними. Результат, очевидно, поширюється на додавання довільної кількості рухів

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \vec{v}_k. \quad (7.19)$$

Додавання обертань навколо осей, що перетинаються.

Нехай тіло обертається з миттєвою кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_{вiдн}$  навколо осі  $O\xi$ , яка в свою чергу обертається навколо осі  $Oz$  (7.3, а) з миттєвою кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_{nep}$ .

Абсолютний миттєвий рух можна проаналізувати на основі (7.14), поклавши  $\bar{r}_0 = 0$ ,  $\bar{r}_1 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = 0$ ,  $\vec{v}_{A,вiдн} = 0$ . Тоді для довільної точки  $B$  тіла дістанемо

$$\vec{v}_B = (\bar{\omega}_{nep} + \bar{\omega}_{вiдн}) \cdot \overline{AB} = (\bar{\omega}_{nep} + \bar{\omega}_{вiдн}) \cdot \overline{OB}. \quad (7.20)$$

Результуючий миттєвий рух є обертанням з кутовою швидкістю (рис. 7.3, б)

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{nep} + \bar{\omega}_{вiдн}. \quad (7.21)$$

Поширюючи цей результат на додавання довільної кількості обертань навколо осей, які перетинаються в одній точці, знайдемо, що результуючий рух можна вважати миттєво обертальним з кутовою швидкістю

$$\bar{\omega} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k. \quad (7.22)$$

Напрямок миттєвої осі обертання визначається вектором  $\bar{\omega}$ . Зауважимо, що миттєва вісь обертання (і вектор  $\bar{\omega}$ ) переміщується у просторі.

Додавання обертань навколо паралельних осей (рис. 7.4), очевидно, породжує плоско-паралельний рух тіла. Розглянемо випадок, коли  $\vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{відн} \neq 0$ . Співвідношення (7.16) залишаються в силі,  $\vec{\omega} \neq 0$ . Знайдемо положення миттєвої осі обертання з тієї умови, що швидкість точки  $P$  на ній (рис. 7.4) дорівнює нулю. На підставі (7.14), поклавши  $\vec{v}_0 = \cup$ ,  $\vec{v}_{A,відн} = \cup$ , запишемо для точки  $P$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_{пер} \cdot \vec{OA} + (\vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{відн}) \cdot \vec{AP} = 0. \quad (7.23)$$

Нехай вектори  $\vec{\omega}_{пер}$  та  $\vec{\omega}_{відн}$  спрямовані в один бік, а вектор  $\vec{OA}$  перпендикулярний до векторів кутових швидкостей (лежить в площині ковзання) (рис. 7.4).

Тоді вираз (7.23) породжує умову

$$\omega_{пер} \cdot OA = (\omega_{пер} + \omega_{відн}) \cdot AP \quad (7.24)$$

або, рівносильну

$$\omega_{пер} \cdot OP = \omega_{відн} \cdot AP; \quad \frac{OP}{AP} = \frac{\omega_{відн}}{\omega_{пер}}. \quad (7.25)$$

При цьому

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{відн}. \quad (7.26)$$

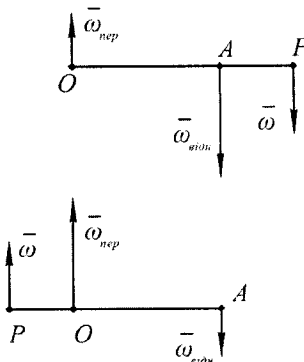


Рисунок 7.5

Коли ж вектори  $\vec{\omega}_{пер}$  та  $\vec{\omega}_{відн}$  спрямовані у протилежні боки (рис. 7.5), замість (7.24) можна записати

$$\omega_{пер} \cdot OA = |\omega_{пер} - \omega_{відн}| \cdot AP = |\omega_{відн} - \omega_{пер}| \cdot AP. \quad (7.27)$$

Нехай  $\vec{\omega}_{пер} < \vec{\omega}_{відн}$ , тоді знову ж таки

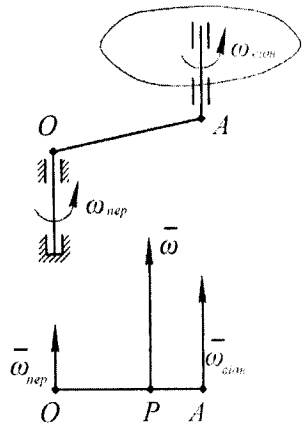


Рисунок 7.4

$$\omega_{\text{пер}} \cdot OP = \omega_{\text{відн}} \cdot AP; \frac{OP}{AP} = \frac{\omega_{\text{відн}}}{\omega_{\text{пер}}}, \quad (7.28)$$

що збігається з (7.25).

Легко бачити, що і у випадку, коли  $\vec{\omega}_{\text{пер}} > \vec{\omega}_{\text{відн}}$  співвідношення (7.25) або (7.28) залишаються справедливими, але

$$\omega = |\omega_{\text{пер}} - \omega_{\text{відн}}|. \quad (7.29)$$

Система двох миттєвих обертань навколо паралельних осей зводиться до миттєвого обертання навколо миттєвої осі, яка внутрішнім або зовнішнім способом поділяє відстань між осями складових обертань у відношенні обернено пропорціональному величинам  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  та  $\vec{\omega}_{\text{відн}}$ . Результуюча кутова швидкість дорівнює векторній сумі складових кутових швидкостей. Зауважимо, що миттєва вісь обертання переміщується у просторі.

Пара обертань виникає, коли паралельні вектори переносної та відносної кутової швидкостей протилежні за напрямком та рівні за модулем (рис. 7.6).

Цей випадок може бути проаналізований на основі формули (7.14), якщо покласти  $\vec{r}_0 = \cup$ ,  $\vec{v}_{A, \text{відн}} = \cup$ ,  $\vec{\omega}_{\text{відн}} = -\vec{\omega}_{\text{пер}}$ . Результуюча кутова швидкість, очевидно, рівна нулю.

Пара миттєвих обертань створює миттєво поступальний рух. Усі точки тіла мають однакові миттєві швидкості

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \cdot \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{\omega}_{\text{відн}}. \quad (7.30)$$

Векторний добуток в (7.30) називається моментом пари обертань. Модуль вектора  $\vec{v}$  дорівнює (рис. 7.6)

$$v = \omega \cdot OA \sin \alpha = \omega \cdot h. \quad (7.31)$$

Відстань  $h$  називається плечем пари.

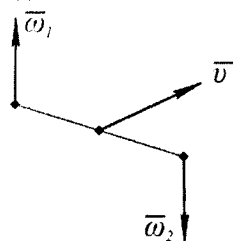


Рисунок 7.7

З іншого боку, усякий миттєво поступальний рух можна уявити як пару обертань  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  з відповідною величиною та напрямком моменту (рис. 7.7).

З формули (7.30) витікає, що пари обертань з однаковими моментами (але різними кутовими швидкостями та плечами) еквівалентні.

Крім того, пара протилежно напрямлених векторів  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  (рис. 7.8) означає миттєвий спокій, оскільки  $v = 0$ .



Додавання миттєво поступальних та миттєво обертальних рухів може бути проаналізовано на підставі формули (7.14). Розгляд окремих випадків недоцільний, оскільки всі вони так чи інакше зводяться до формули (7.17).

Формула (7.17) вказує також на те, що в загальному випадку миттєвий кінематичний стан може бути поданий як сукупність миттєво поступального руху разом з полюсом та миттєвого обертання навколо полюса.



Рисунок 7.8

Важливе питання про зміну та перехід до нового полюса або, інакше, про зведення векторів швидкостей до довільного полюса  $B$  (центра) в твердому тілі може бути розглянуто на основі формули (7.14), якщо покласти  $\vec{v}_{A \text{ відн}} = 0$ ,  $\vec{v}_{B \text{ відн}} = 0$ ,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\text{пер}}$ . Паралельне перенесення вектора  $\vec{\omega}$  в довільну точку  $B$  (рис. 7.9) супроводжується додаванням моменту

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB}. \quad (7.32)$$

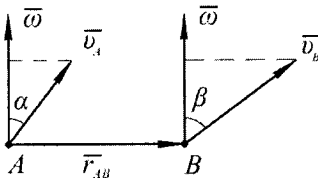


Рисунок 7.9

Все сказане означає, що вектор  $\vec{\omega}$  є ковзним вектором. Вектор  $\vec{\omega}$  є першим кінематичним інваріантом, оскільки він не змінюється при переміщенні. В більш вузькому сенсі першим інваріантом є квадрат вектора  $\vec{\omega}$

$$I_1 = \omega^2. \quad (7.33)$$

Другим кінематичним інваріантом є скалярний добуток вектора  $\vec{v}$  швидкості довільної точки тіла та вектора  $\vec{\omega}$

$$I_2 = \vec{v} \cdot \vec{\omega}. \quad (7.34)$$

Доведення цього факту можна здійснити помноживши рівність (7.32) на  $\vec{\omega}$ , тоді

$$\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB}) \cdot \vec{\omega}, \quad (7.35)$$

але

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB}) \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (7.36)$$

тому остаточно

$$\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \quad (7.37)$$

або (рис. 7.9)

$$v_A \omega \cos \alpha = v_B \omega \cos \beta. \quad (7.38)$$

Миттєво гвинтовий рух тіла відбувається, коли вектори  $\vec{v}_A$  та  $\vec{\omega}$  паралельні. Тоді

$$\vec{v}_A = \rho \vec{\omega}, \quad (7.39)$$

де  $\rho$  - параметр гвинта.

Найбільш загальний рух твердого тіла можна подати як гвинтовий рух.

### Питання для самоконтролю

1. Основна задача складного руху тіла.
2. Дати означення миттєвої осі обертання.
3. Як знаходиться швидкість точок тіла, що бере участь у кількох поступальних рухах?
4. Формула для визначення кутової швидкості при обертанні тіла навколо осей, що перетинаються.
5. Що таке пара обертань при складному русі тіла?
6. Кінематичні інваріанти при складному русі тіла.
7. Як знайти крок кінематичного гвинта?
8. Записати формулу для визначення параметра кінематичного гвинта.

**Криволінійні координати. Координатні лінії, осі, поверхні. Коефіцієнти Ламе. Місцевий ортогональний базис. Проекції швидкості та прискорення на координатні осі. Кінематика точки в циліндричних та сферичних координатах.**

**КРИВОЛІНІЙНІ ОРТОГОНАЛЬНІ КООРДИНАТИ**

З попереднього відомо декартові прямокутні системи координат  $O x, y, z$ , (рис. 8.1), декартові координати  $x, y, z$ , точки у просторі.

Іноколи зручно визначити положення точки у просторі іншими величинами, як це здійснюється при застосуванні циліндричних та сферичних координат, хоча можна застосувати і інші додатні системи координат.

Криволінійні координати точки у просторі – це система трьох незалежних параметрів  $q_i, i = 1, 2, 3$ , які однозначно визначають положення точки у просторі.

Тоді можна записати

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3), \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{8.1}$$

або

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Циліндричні координати  $\rho, \varphi, z$ , та сферичні координати  $r, \vartheta, \varphi$ , є окремими випадками криволінійних систем координат (8.1). Для циліндричної системи можна вказати залежність (8.2) такими формулами

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \tag{8.3}$$

для сферичної системи, відповідно

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi, y = r \cos \vartheta \sin \varphi, z = z \sin \vartheta. \tag{8.4}$$

Зафіксуємо у просторі точку  $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$ . Якщо в цьому положенні точки змінювати одну з координат  $q_i$ , а решту координат залишити незмінною, то дістанемо лінію у просторі.

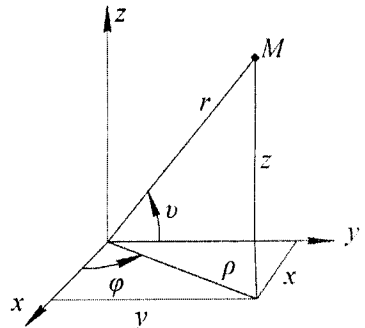


Рисунок 8.1

Координатна лінія ( $q_i$ ) – це крива у просторі, яку окреслює кінець вектора  $\vec{r}$  (8.1) при зміні лише координат  $q_i$ . Через кожну точку  $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$  можна провести три координатні лінії (рис. 8.2).

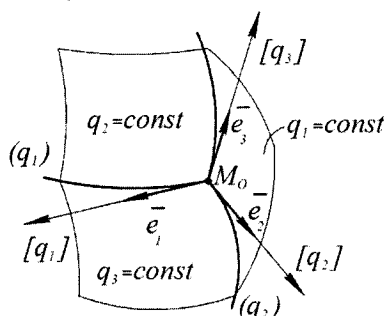


Рисунок 8.2

Координатна вісь  $[q_i]$  – це дотична до координатної лінії ( $q_i$ ) в даній точці  $M_0$ , напрямлена в бік зростання координати  $q_i$ .

Корінна відмінність криволінійних координат від звичайних декартових полягає в тому, що в криволінійних координатах напрямки осей  $[q_1]$ ,  $[q_2]$ ,  $[q_3]$  у просторі залежать від положення точки  $M_0$ .

Координатна поверхня  $q_i = q_{i0} = \text{const}$  – це поверхня у просторі, яка проходить через точку  $M_0$  і визначається змінною решти двох криволінійних координат. Через кожну точку  $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$  у просторі можна провести три координатні поверхні  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_2, q_3)$ ,  $(q_1, q_3)$ .

Для циліндричної системи  $\rho$ ,  $u$ ,  $z$ , координатні лінії  $(\rho)$ ,  $(u)$ ,  $(z)$  та осі  $[\rho]$ ,  $[u]$ ,  $[z]$  зображенні на рис. 8.3.

Для сферичної системи  $r$ ,  $u$ ,  $q$ , координатні лінії  $(r)$ ,  $(u)$ ,  $(q)$  та осі  $[r]$ ,  $[u]$ ,  $[q]$  зображені на рис. 8.4

Ортогональні криволінійні координати – це такі криволінійні координати, в яких координатні осі  $[q_1]$ ,  $[q_2]$ ,  $[q_3]$  взаємно перпендикулярні в кожній точці простору.

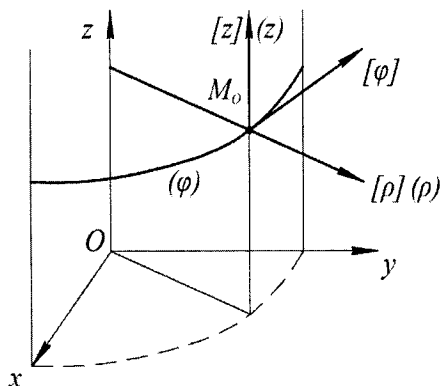


Рисунок 8.3

Циліндричні та сферичні координати є ортогональними.

Визначимо одиничні вектори  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  координатних (рис. 8.2) осей.

Розглянемо координатну лінію координатних (рис. 8.2) осей. Розглянемо координатну лінію (рис. 8.5) та вісь  $[q_i]$ , які проходять через точку  $M_0$ .

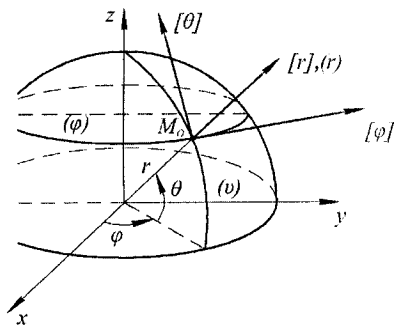


Рисунок 8.4

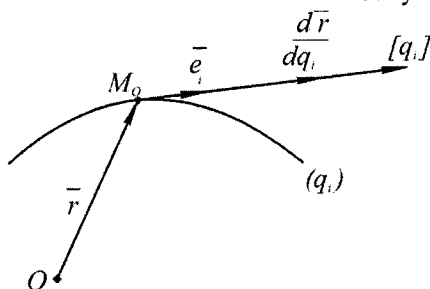


Рисунок 8.5

Вектор  $\partial \bar{r} / \partial q_i$ , напрямлений вздовж осі  $[q_i]$ . Згадавши (8.1), запишемо

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \bar{k} \quad (8.5)$$

Модуль вектора  $\partial \bar{r} / \partial q_i$ , дорівнює

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} = H_i. \quad (8.6)$$

Величини  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  мають назву коефіцієнта Ламе.

Тоді можна записати

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \bigg/ \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (8.7)$$

Для кожного з одиничних векторів маємо вирази

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}, \quad \bar{e}_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}, \quad (8.8)$$

які в подальшому нам знадобляться у вигляді

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = H_1 \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = H_2 \vec{e}_2, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = H_3 \vec{e}_3. \quad (8.9)$$

Умовою ортогональності векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j). \quad (8.10)$$

Вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  утворюють місцевий (локальний) координатний базис (рис. 8.2), в якому зручно розглядати векторні величини, які існують в околі точки  $M_0$ .

Довільний нескінченно малий вектор  $\partial \vec{r}$  у системі криволінійних координат може бути розкладений так

$$\partial \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \partial q_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \partial q_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \partial q_3 = H_1 \partial q_1 \vec{e}_1 + H_2 \partial q_2 \vec{e}_2 + H_3 \partial q_3 \vec{e}_3. \quad (8.11)$$

Величина диференціалу дуги довільної кривої і криволінійних ортогональних координат може бути обчислена за формулою

$$(dS)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (d\vec{r})^2 = |d\vec{r}|^2 \quad (8.12)$$

або

$$(dS)^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2. \quad (8.13)$$

Формули (8.11), (8.13) означають, що диференціали дуг координатних ліній можна подати як

$$dS_1 = H_1 dq_1, \quad dS_2 = H_2 dq_2, \quad dS_3 = H_3 dq_3. \quad (8.14)$$

Коефіцієнти Ламе – це множники при диференціалах координат в виразах диференціальних дуг відповідних координатних ліній. Формули (8.14) є більш зручними для обчислень, ніж формули (8.6)

В циліндричній системі координат

$$dS_1 = d\rho, \quad dS_2 = \rho d\varphi, \quad dS_3 = dz \quad (8.15)$$

тому

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1. \quad (8.16)$$

В сферичній системі

$$dS_1 = dr, \quad dS_2 = r \cos \vartheta d\varphi, \quad dS_3 = r d\vartheta \quad (8.17)$$

тому

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r \cos \vartheta, \quad H_\vartheta = r.$$

## КІНЕМАТИКА РУХУ ТОЧКИ В КРИВОЛІНІЙНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

Рух матеріальної точки в криволінійних координатах вважається визначеним, якщо відомі кінематичні рівняння

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t). \quad (8.19)$$

Для знаходження швидкості та прискорення матеріальної точки можна скористатися формулами (8.19) разом з (8.2), а потім діяти за відомими формулами для декартової системи.

Однак часто необхідно знайти проекції швидкості та прискорення на осі локального базису.

Проекція швидкості на осі місцевого (ортогонального) координатного базису можуть бути знайдені шляхом диференціювання співвідношення (8.1) з урахуванням (8.9)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (8.20)$$

$$\vec{v} = H_1 \dot{q}_1 \vec{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \vec{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \vec{e}_3. \quad (8.21)$$

Ортогональність одиничних векторів  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  дає змогу записати проекцію вектора швидкості на локальні осі та його модуль

$$\vec{v}_1 = H_1 \dot{q}_1, \quad \vec{v}_2 = H_2 \dot{q}_2, \quad \vec{v}_3 = H_3 \dot{q}_3, \quad (8.22)$$

$$v = \sqrt{(H_1 \dot{q}_1)^2 + (H_2 \dot{q}_2)^2 + (H_3 \dot{q}_3)^2}. \quad (8.23)$$

Проекція вектора швидкості на осі циліндричної системи координат з урахуванням (8.16) будуть мати вигляд

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (8.24)$$

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}, \quad (8.25)$$

а проекції швидкості на осі сферичної системи

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = r \dot{\vartheta}, \quad (8.26)$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2}. \quad (8.27)$$

Проекція прискорення на осі місцевого ортогонального координатного базису подамо у вигляді

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = \dot{v} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (8.28)$$

звідки маємо

$$H_i a_i = \dot{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (8.29)$$

Далі для спрощення здійснимо тотожні перетворення правої частини (8.29). Перше перетворення пов'язане з очевидною тотожністю

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \dot{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \quad (8.30)$$

з якої маємо

$$\dot{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right). \quad (8.31)$$

Подальші перетворення пов'язані з тотожністю Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}, \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (8.33)$$

Тотожність (8.32) доведемо так. Вектор-функція  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$  залежить безпосередньо тільки від координат, тому її диференціюємо за часом як складну функцію часу

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_3} \dot{q}_3. \quad (8.34)$$

Ліву частину (8.32) визначимо шляхом диференціювання співвідношення (8.20)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_3} \dot{q}_3. \quad (8.35)$$

Праві частини (8.34) та (8.35) відрізняються тільки порядком частинного диференціювання, тому вони збігаються. Це і означає справедливість (8.32).

Для доведення (8.33) продиференціюємо  $\bar{v}$  із (8.20) за  $\dot{q}_1$ , потім за  $\dot{q}_2$  та  $\dot{q}_3$ .

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_2}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_3} \quad (8.36)$$

і справедливість (8.33) встановлена

Вираз (8.30) з урахуванням (8.31), (8.32) та (8.33) подамо у вигляді

$$H_i a_i = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (8.37)$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{\bar{v}^2}{2} \right), \\ \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\bar{v}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Остаточно, беручи до уваги (8.22) та позначивши

$$T = \frac{v^2}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2) \quad (8.40)$$

дістанемо шукані співвідношення для проекцій прискорення на осі локального базису криволінійної системи координат

$$a_i = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.41)$$



В циліндричній системі координат

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (8.42)$$

і проекції прискорення матеріальної точки на координатні осі будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\phi}), \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

В сферичній системі координат

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \dot{\vartheta}^2) \quad (8.44)$$

і проекція прискорення визначається формулами

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta - r \dot{\vartheta}^2, \\ a_\varphi &= r \ddot{\varphi} \cos \vartheta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \vartheta - 2r\dot{\varphi} \sin \vartheta = \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \vartheta), \\ a_\vartheta &= r \ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\vartheta}) + r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Проблемне запитання. Одержати формули (8.24), (8.26), (8.43), (8.45), застосовуючи теореми доведення швидкостей та прискорень в складному русі точки.

#### Питання для самоконтролю

1. Дати означення криволінійних координат.
2. Приклади криволінійних координат.
3. Що таке координатна лінія, вісь та поверхня?
4. Як знайти параметри Ламе?
5. Швидкість точок в криволінійних координатах. Приклади визначення швидкості точок в полярній, циліндричній системах координат.
6. Прискорення точок в криволінійних координатах. Приклади визначення прискорення точок в полярній, циліндричній системах координат.

## СЛОВНИК НАЙУЖИВАНІШИХ ТЕРМІНІВ

Аксіальний	axial
В'язь (опора)	counteracting force (support)
Вільний рух	free movement
Динаміка	dynamics
Кінематика	kinematics
Кінематичне рівняння	kinematic equations
Кутова швидкість	angular velocity
Кутове прискорення	angular acceleration
Матеріальна точка	particle
Невільний рух	non-free movement
Обертальний рух	rotational motion
Прискорення	acceleration
Сила	force
Система відліку	readout system
Складний рух	complex movement
Статика	statics
Тверде тіло	rigid body
Траєкторія	trajectory
Швидкість	speed

## ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник / Павловський М. А. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Видмиш А. А. Збірник завдань для самостійної роботи з теоретичної механіки. Статика. Кінематика : збірник завдань / Видмиш А. А., Приятельчук В. О., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.
3. Теоретична механіка : збірник задач / [О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.] ; за ред. М. А. Павловського. – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
4. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика / Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. – [8-е изд. перер.]. – М. : Наука, 1984. – 504 с.
5. Ільчишина Д. І. Теоретична механіка : навч. посіб. / Д. І. Ільчишина, Л. М. Шальда – К. : УМК ВО, 1991 – 252 с.
6. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пос. для техн. вузов / [ Яблонский А. А., Норейко С. С., Вольфсон С. А. и др.] ; под ред. А. А. Яблонского. – [4-е изд. перер. и доп.]. – М. : ВШ, 1985. – 367 с.

*Навчальне видання*

**Огородніков Віталій Антонович  
Федотов Валерій Олександрович  
Перлов Віктор Євгенійович**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА**  
**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлений В. О. Федотовим  
Редактор В. Дружиніна  
Коректор З. Поліщук

Підписано до друку 12.06.2017 р.  
Формат 29,7×42<sup>1</sup>/<sub>4</sub>. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 4,33  
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) прим.  
Зам. № 2017-187

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38,  
**press.vntu.edu.ua**;  
*E-mail*: kivc.vntu@gmail.com.

Свідцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.