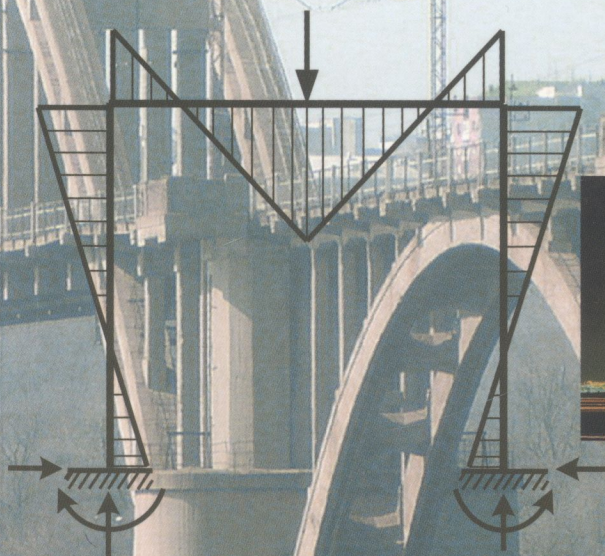


624.04(075)
1758



Б. С. Попович
О. Р. Давидчак



БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

624.04(075)
П58

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Б.С. Попович, О.Р. Давидчак

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

*Рекомендувала Науково-методична рада
Національного університету “Львівська політехніка”*



624.04(075) П58 2014

Попович Б.С. Будівельна механіка статично

Львів
Видавництво Львівської політехніки
2014

УДК 69.04(075.8)

ББК 38.112я73

П 581

Рецензенти:

Яременко О.Ф., доктор технічних наук, професор Одеської державної академії будівництва і архітектури;

Кінаш Р.І., доктор технічних наук, професор Національного університету “Львівська політехніка”

*Рекомендувала Науково-методична рада
Національного університету “Львівська політехніка”
як навчальний посібник для студентів базового напрямку “Будівництво”
(протокол № 3/2014 від 15.01.2014 р.)*

468131

Навчальний посібник підготовлено відповідно до програми навчальної дисципліни “Будівельна механіка. Спецкурс”, яку включено до навчального плану підготовки бакалаврів за напрямом “Будівництво”.

Викладено основні методи розрахунку статично невизначених стержневих систем на нерухоме і рухоме навантаження. Наведено приклади розрахунків, які демонструють застосування теорії розрахунків до розв’язування практичних задач.

Посібник призначений для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**НТБ ВНТУ
м.Вінниця**

© Попович Б.С., Давидчак О.Р., 2014

© Національний університет

“Львівська політехніка”, 2014

ISBN 978-617-607-555-4

КНИГОСХОВНИЩ

ЗМІСТ

Передмова	6
Розділ 1. Проблеми розрахунку статично невизначених систем	7
1.1. Поняття про статичну невизначеність	7
1.2. Визначення кількості зайвих зв'язків	8
1.3. Характерні властивості статично невизначених систем і методи їх розрахунку	11
Задачі і питання для самопідготовки	14
Розділ 2. Загальна теорія методу сил і розрахунок плоских статично невизначених рам	16
2.1. Поняття про розрахунок статично невизначених рам методом сил	16
2.2. Розрахунок плоских рам методом сил і побудова епюр зусиль	20
2.3. Спрощення під час розрахунку окремих рам методом сил. Використання симетрії рами і навантаження	26
2.3.1. Статично невизначена основна система	26
2.3.2. Вибір основної системи, при якій другорядні коефіцієнти дорівнюють нулю	28
2.3.3. Використання симетрії рами	33
2.3.4. Перетворення навантаження	41
2.4. Розрахунок статично невизначених систем методом сил на дію температури і зміщення опор	44
2.5. Визначення переміщень у статично невизначених системах	49
Задачі і питання для самопідготовки	52
Розділ 3. Нерозрізні балки	54
3.1. Загальні зауваження. Розрахунок методом сил	54
3.2. Моментні фокуси і моментні фокусні відношення	62
3.3. Визначання опорних моментів на опорах навантаженого прольоту і побудова епюр моментів за допомогою моментних фокусних відношень	67
3.4. Розрахунок нерозрізних балок на тимчасове навантаження. Побудова огинаючих епюр зусиль	71

3.5. Розрахунок нерозрізних балок на нерівномірний нагрів і осідання опор	73
3.6. Побудова ліній впливу зусиль у перерізах нерозрізної балки статичним методом	77
3.7. Побудова ліній впливу зусиль у перерізах нерозрізної балки кінематичним методом	83
Задачі і питання для самопідготовки	85
Розділ 4. Розрахунок статично невизначених арок	87
4.1. Статично невизначені арки, їх характеристика і загальні положення розрахунку	87
4.2. Двошарнірні арки	89
4.3. Безшарнірна арка	95
Питання для самопідготовки	100
Розділ 5. Статично невизначені ферми і комбіновані системи	102
5.1. Розрахунок статично невизначених шарнірних ферм на нерухоме і рухоме навантаження	102
5.2. Розрахунок комбінованих систем	106
Питання для самопідготовки	111
Розділ 6. Розрахунок статично невизначених рам методом переміщень	113
6.1. Суть методу переміщень. Ступінь кінематичної невизначеності. Основна система і канонічні рівняння методу переміщень	113
6.2. Визначення реакцій у додаткових зв'язках	120
6.3. Приклад розрахунку рами методом переміщень	128
6.4. Спрощення розрахунку симетричних рам	135
6.5. Розрахунок рам методом переміщень на дію температури і на зміщення опор	138
Задачі і питання для самопідготовки	144
Розділ 7. Комбінований і змішаний метод розрахунку статично невизначених систем	145
7.1. Порівняння методу сил і методу переміщень	145
7.2. Комбінований метод	147
7.3. Змішаний метод	150
Питання для самопідготовки	153
Розділ 8. Наближені методи розрахунку багатоповерхових і багатопролітних рам	154
8.1. Призначення наближених методів і міркування, які лежать у їх основі	154
8.2. Розрахунок багатопролітної та багатоповерхової рами на вертикальне навантаження	158

8.3. Розрахунок багатопролітної та багатоповерхової рами на горизонтальне навантаження	160
Питання для самопідготовки	162
Розділ 9. Розрахунок статично невизначених систем за несучою здатністю	163
9.1. Основні положення	163
Питання для самопідготовки	172
Розділ 10. Метод скінченних елементів для стержневих систем	174
10.1. Основні положення	174
10.2. Приклад розрахунку плоскої рами	192
Питання для самопідготовки	210
Література	212

ПЕРЕДМОВА

Запропонований навчальний посібник є продовженням роботи авторів “Будівельна механіка статично визначених стержневих систем” [8]. У посібнику описано розрахунок статично невизначених стержневих систем, що традиційно становить другу частину загального курсу із дисципліни “Будівельна механіка”. Написаний відповідно до програми навчання для студентів напряму підготовки “Будівництво” вищих навчальних закладів. Під час написання посібника головною метою було допомогти студентам засвоїти основні методи розрахунку статично невизначених стержневих конструкцій, зрозуміти роботу стержневих систем та інтуїтивно оцінити розподіл зусиль у статично невизначених конструкціях.

Автори вважають, що для використання сучасних програмних комплексів розрахунків та проектування споруд студент спочатку повинен засвоїти основні традиційні класичні методи і способи розрахунку конструкцій на прикладі ручних розрахунків найпростіших систем, а після отримання навиків оцінювання розподілу зусиль вивчити застосування програмного забезпечення у розрахунках, що є предметом дослідження деяких спецкурсів з будівельної механіки.

Теоретичні положення курсу по тексту проілюстровані прикладами. Після вивчення кожного розділу студенту запропоновані питання для самоперевірки і додаткові завдання.

Матеріали, наведені у посібнику, протягом багатьох років використовувались під час викладання курсу на кафедрі будівельної механіки Національного університету “Львівська політехніка”.

Розділ 1

ПРОБЛЕМИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ

1.1. Поняття про статичну невизначенність

До статично невизначених належать системи, у всіх перерізах яких неможливо визначити згинальні моменти, поздовжні і поперечні сили, користуючись тільки рівняннями статичної рівноваги твердого тіла. Ці системи мають більше зв'язків, ніж мінімально необхідна кількість для забезпечення геометричної незмінності і нерухомості системи. Вважатимемо, що система має зайві (надмірні) зв'язки, якщо можна відкинути деяку їх кількість без порушення геометричної незмінності і нерухомості системи. Найбільша кількість зв'язків, яку можна одночасно відкинути за певної умови, є кількість зайвих зв'язків. Так, наприклад, у системі, зображеній на рис. 1.1, можна одночасно відкинути не більше двох опорних зв'язків, оскільки для забезпечення нерухомості балки потрібно, мінімум, три правильно розташовані опорні зв'язки.



Рис. 1.1

Замість опорних стержнів можна відкидати будь-які інші зв'язки (наприклад, вводити шарніри). Але відкинути можна не більше двох зв'язків. Отже, система має два зайві зв'язки. Згідно з термінологією, запропонованою проф. І.М. Рабіновичем, є зв'язки умовно необхідні і безумовно необхідні. Так, для балки, показаної на рис. 1.1, кожний з вертикальних опорних стержнів є умовно необхідним і кожний з них можна відкинути за збереження двох інших вертикальних і горизонтального опорного стержня. Горизонтальний стержень є безумовно необхідним з умови нерухомості системи. Для системи, зображеної на рис. 1.2, яка має один зайвий зв'язок, будь-який стержень лівої панелі є умовно необхідним. Навпаки, кожний

стержень правої панелі і усі опорні стержні є безумовно необхідними, оскільки відкидання будь-якого з них перетворює систему у геометрично змінну чи рухому.

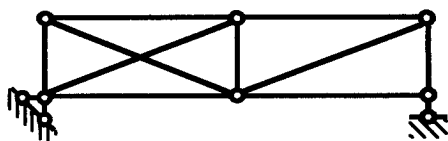


Рис. 1.2

Наявність зайвих зв'язків є необхідною і достатньою ознакою статичної невизначеності. Статично невизначену систему можна розглядати як ускладнену споруду, яка утворена з статично визначеної за допомогою додавання n зв'язків.

Статично невизначені системи мають деякі властивості, які залежать від кількості зайвих зв'язків. Тому число n є важливою характеристикою споруди.

Кількість зайвих зв'язків (n) далі називатимемо ступенем статичної невизначеності системи.

1.2. Визначення кількості зайвих зв'язків

Кількість зайвих зв'язків (n) можна визначити, застосовуючи формулу Чебишева. Враховуючи, що кількість зайвих стержнів є оберненою величиною до кількості вільностей системи, отримаємо формулу для визначення кількості зайвих невідомих n :

$$n = 2 \cdot III_e + C_{on} - 3 \cdot D, \quad (1.1)$$

де III_e – кількість простих (елементарних) шарнірів; C_{on} – кількість опорних стержневих зв'язків; D – кількість дисків (стержнів) у системі.

Формулу (1.1) можна застосувати тільки тоді, коли система утворена з окремих дисків, жоден з яких, своєю чергою, не є системою із зайвими зв'язками.

В інших випадках необхідно враховувати статичну невизначеність окремих дисків. Наприклад, для рами, зображеної на рис. 1.3, a , b , $в$, кількість зайвих зв'язків дорівнює відповідно: $n = 2 \cdot 1 + 6 - 3 \cdot 2 = 2$; $n = 2 \cdot 1 + 6 - 3 \cdot 1 = 5$; $n = 2 \cdot 0 + 6 - 3 \cdot 1 = 3$.

В останньому випадку (рис. 1.3, в) рама являє собою безшарнірний замкнений контур і має три зайві зв'язки. У цьому можна переконатися, відкидаючи одну з опор рами, як це показано на рис. 1.3, г. У результаті отримаємо геометрично незмінну й нерухому систему.

У розглянутих випадках диски, які одержують, якщо відкинути усі опорні зв'язки і шарніри, є статично визначеними. У кожному перерізі диска будуть три невідомі зусилля, які визначають з трьох рівнянь статки.

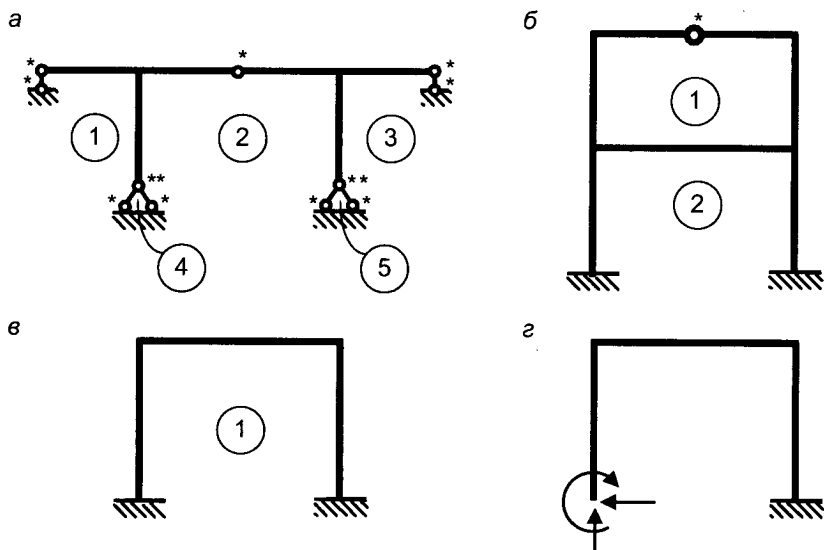


Рис. 1.3

На рис. 1.4, а, б зображено системи, які утворені з статично невизначених дисків. Якщо визначити кількість зайвих невідомих за формулою (1.1), то для рами, зображеної на рис. 1.4, а: $n = 2 \cdot 0 + 3 - 3 \cdot 1 = 0$, але це не означає, що система не має зайвих зв'язків. Припустимо, що треба визначати зусилля в елементах рами.

Переріз 1-1 розріже два стержні і у кожному з них буде по три невідомі зусилля, які не можна визначити з трьох рівнянь статки. Те саме маємо й для рами, зображеної на рис. 1.4, б. Ці рами статично невизначені.

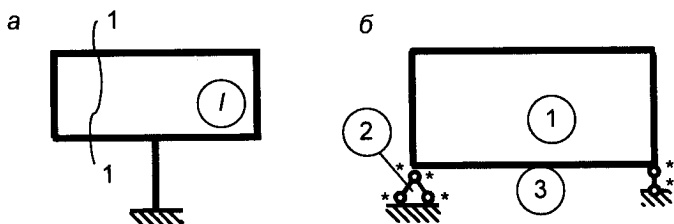


Рис. 1.4

Стержень, який не має проміжних шарнірів і вісь якого утворює замкнений контур, має три зайві зв'язки. Отже, замкнений безшарнірний контур має три зайві зв'язки.

Кожну раму можна розглядати як систему, яка складається з багатьох замкнених контурів. Водночас “умовна” земля вважається одним з дисків системи. Для визначення кількості зайвих невідомих для рам, які не мають шарнірів, достатньо підрахувати кількість замкнених контурів (що не покривають один одного) K і помножити її на три. Якщо в контурі є шарніри, то вони ліквідують частину зв'язків. Як відомо, один простий (дволанковий) шарнір ліквідує один зв'язок, тому кількість ліквідованих шарнірами зв'язків дорівнює кількості простих шарнірів $Ш_e$. У результаті отримана універсальна формула для підрахунку зайвих зв'язків:

$$n = 3 \cdot K - Ш_e. \quad (1.2)$$

Використання формули (1.2) пояснимо на прикладах. Для рам, зображених на рис. 1.3 і 1.4, цифрами у кружечках позначені номери контурів, а зірочками біля шарнірів показана кількість простих шарнірів.

Для рами, зображеної на рис. 1.3, а: $n = 3 \cdot 5 - 13 = 2$; для рами, зображеної на рис. 1.3, б: $n = 3 \cdot 2 - 1 = 5$; для рами, зображеної на рис. 1.3, в: $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$; для рами, зображеної на рис. 1.4, а: $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$; для рами, зображеної на рис. 1.4, б: $n = 3 \cdot 3 - 6 = 3$. Ці результати збігаються з попередніми.

Для шарнірних ферм зручніше застосовувати формулу, яка виникає з умови статичної визначеності і геометричної незмінності ферми:

$$n = C_{en} + C_o - 2 \cdot B, \quad (1.3)$$

де C_{en} – кількість стержнів ферми; C_o – кількість опорних зв'язків (стержнів); B – кількість вузлів ферми.

Для ферми, зображеної на рис. 1.5, $C_{\text{вн}} = 29$; $C_o = 4$; $B = 14$;
 $n = 29 + 4 - 2 \cdot 14 = 5$.

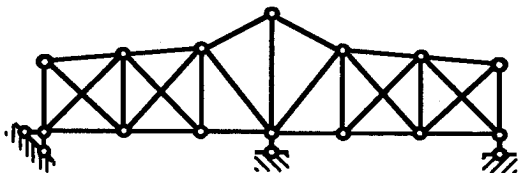


Рис. 1.5

1.3. Характерні властивості статично невизначених систем і методи їх розрахунку

Кінематичною ознакою статично невизначених систем є наявність зайвих зв'язів. Надалі не робитимемо різниці між системами з зайвими зв'язками і статично невизначеними системами.

Однак і у статично невизначених системах можуть бути елементи, зусилля у яких статично визначені. Можна довести теорему: зусилля у безумовно необхідних елементах (коли такі є) завжди статично визначені. Наприклад, у фермі (рис. 1.2) опорні реакції, а також зусилля у стержнях правої панелі статично визначені.

Однак у статично невизначених системах завжди є зусилля, які не можуть бути визначені з умов статичної рівноваги твердого тіла. Тому розрахунок таких систем трудомісткіший, і ця трудомісткість залежить від кількості зайвих зв'язків.

Статично невизначена система, завдяки наявності зайвих зв'язків, порівняно з відповідною статично визначеною системою **жорсткіша**, тому деформації і переміщення у статично невизначеній системі переважно менші, ніж у відповідній статично визначеній системі.

Статично невизначені системи **надійніші**, оскільки руйнування зв'язків не спричиняє негайного руйнування споруди.

Вилучення навіть усіх зайвих зв'язків робить систему геометрично незмінною і статично визначеною, у той час, як руйнування одного зв'язку у статично визначеній системі спричиняє руйнування усієї споруди.

У статично невизначених системах через їхню велику зв'язність (порівняно з відповідною статично визначеною системою) у разі однакового навантаження виникають **загалом менші зусилля**, тому статично невизначені системи економічніші.

Зусилля у статично невизначених системах залежать загалом від геометричних характеристик поперечних перерізів і модулів пружності матеріалів системи. Тільки тоді, коли матеріал усіх елементів має однаковий модуль пружності, а сама система перебуває під дією зовнішнього навантаження (але не температури чи зміщення опорних зв'язків), зусилля не залежать від модуля пружності, а тільки від співвідношення геометричних характеристик перерізів елементів.

У статично невизначених системах **можуть виникати зусилля від зміни температури, зміщення опорних зв'язків і від натягу окремих елементів** під час монтажу системи. З'ясуємо це на простих прикладах.

Нехай температура двопролітної балки (рис. 1.6, а) збільшилась згори на t_1 , а знизу – на t_2 . Після зміни температури вісь балки займе нове положення, зображене на рис. 1.6, а пунктирною лінією. Коли б не було середньої опори, то вісь займала б положення $ab'c$ (рис. 1.6, б). Для зміщення точки b' в положення b потрібно прикласти силу X_1 біля середньої опори.

На рис. 1.7, а показана вісь двопролітної балки після зміщення лівої опори на Δ . За відсутності середньої опори балка від цього зміщення повернеться без згину навколо правої опори (рис. 1.7, б). Для того, щоб точку b' підняти до положення b , потрібно біля середньої опори прикласти силу X_Δ .

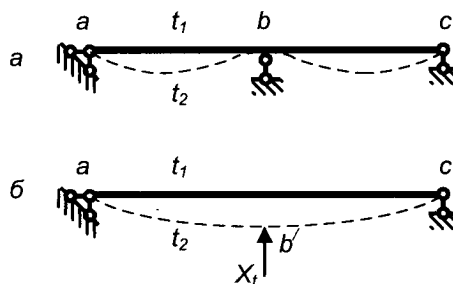


Рис. 1.6

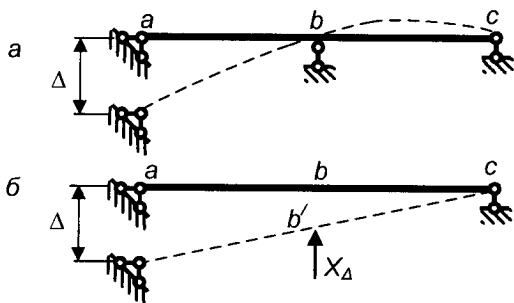


Рис. 1.7

Якщо стержень bc системи, зображеної на рис. 1.8, матиме недостатню довжину, то під час монтажу системи потрібно буде цей стержень натягнути для з'єднання у вузлі. Це спричинить, очевидно, деформацію системи двома силами і появу внутрішніх зусиль у стержнях системи.

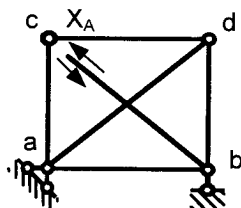


Рис. 1.8

Зусилля, які виникають за відсутності зовнішнього навантаження, називають початковими. Можливість спричинити початкові зусилля у статично невизначених системах можна використати для зменшення зусиль в елементах системи від заданого навантаження.

З розглянутих властивостей статично невизначених систем випливає, що вони мають деякі переваги: **більшу монолітність і взаємозв'язаність елементів в роботі, більшу надійність, здатність розподіляти навантаження між окремими елементами у разі пошкодження чи послаблення одного з елементів, меншу деформацію, ніж будь-яка статично визначена система, яку можна утворити усуненням тих чи інших зв'язків.** З іншого боку, в них можуть виникати зусилля без навантаження. До того ж розрахунок систем із зайвими зв'язками складніший, ніж розрахунок статично визначених систем.

На практиці використовують системи обох типів. Під час проектування споруд перевагу надають системі, яка у певному конкретному випадку економічніша.

Задача розрахунку статично невизначених систем за заданих розрахункових схем і навантажень полягає у знаходженні таких поперечних перерізів усіх елементів, які задовольняли б умови міцності, жорсткості і одночасно умови економії (мінімум витрат матеріалів чи мінімальна приведена вартість). У загальному вигляді таку задачу ще не розв'язано.

У практиці виконують конкретнішу задачу: за заданих розрахункових схем, навантажень і розмірів перерізів визначають зусилля і деформації в усіх елементах системи, і за визначеними зусиллями розраховують нові розміри перерізів елементів системи. Коли визначені за зусиллями розміри перерізів значно відрізняються від прийнятих початково, розрахунок повторюють, приймаючи за початкові попередньо отримані результати. Тобто виконується перевірковий розрахунок.

Загалом у такий спосіб отримати результат, який задовольняє умову економії, неможливо, тому що результати залежать значною мірою від інтуїції інженера.

До основних, так званих класичних перевіркових методів розрахунку статично невизначених систем, належать методи сил і переміщень.

У першому випадку за основні невідомі приймають зусилля у зайвих зв'язках, у другому – переміщення, зумовлені деформацією системи, визначення яких є достатнім для визначення усіх зусиль.

Іноколи використовується змішаний метод, коли за невідомі приймають частково сили, частково переміщення.

З розвитком електронно-обчислювальної техніки виникають нові методи, зручніші для ЕОМ. Однак класичні методи не втратили свого значення. Вони лежать в основі багатьох інших методів розрахунку статично невизначених систем і передусім приблизних методів, важливих для практики. Крім того, треба пам'ятати, що не доцільно використовувати машинні розрахунки в елементарних випадках розрахунку простих систем.

Питання для самоперевірки

1. Які системи називають статично невизначеними?
2. Як визначається кількість зайвих зв'язків?

3. Наведіть властивості статично невизначених систем.
4. Визначіть ступінь статичної невизначеності для систем, показаних на рис. 1.9.

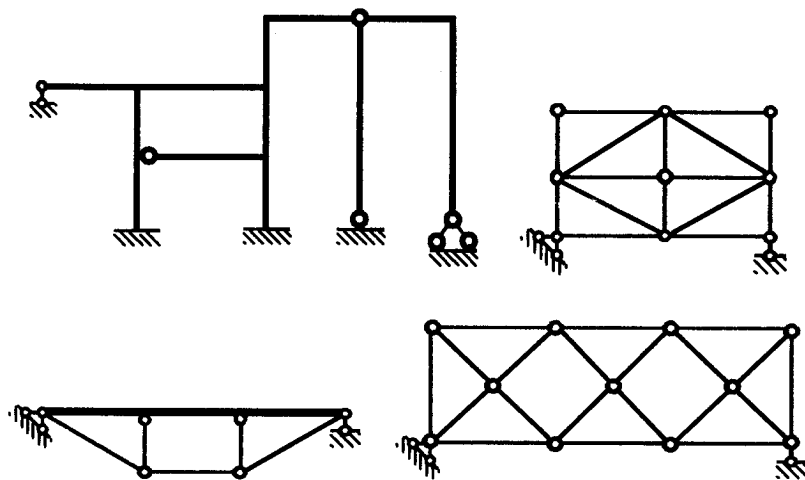


Рис. 1.9

Розділ 2

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ МЕТОДУ СИЛ І РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ

2.1. Поняття про розрахунок статично невизначених систем за методом сил

Розглядати методи розрахунку статично невизначених систем розпочинаємо з методу сил, який можна використати для розрахунку будь-яких статично невизначених стержневих систем.

Характерною особливістю методу є залежність усього ходу розрахунку від кількості зайвих зв'язків, тобто від ступеня статичної невизначеності. Чим більше зайвих зв'язків, тим важче їх розраховувати.

Розрахунок статично невизначеної системи за методом сил полягає в ідеї переходу від заданої системи до основної системи, яку отримують з заданої відкиданням певної кількості зв'язків. На практиці здебільшого відкидають усі зайві зв'язки, і основна система виходить геометрично незмінною і статично визначеною. Необхідно звернути увагу не тільки на кількість зв'язків, які відкидають, але і на їх розташування. Основна система не може бути геометрично змінною загалом, чи в якійсь (окремій) частині.

Розраховують систему з визначення кількості невідомих (формула (1.2)), після цього вибирають основну систему, яка обов'язково повинна бути геометрично і миттєво незмінною. Для отримання основної системи відкидають зайві зв'язки. Оскільки зайвими можна вважати різні зв'язки, то основна система у методі сил не одна. Можна для заданої статично невизначеної системи вибрати кілька основних незмінних систем, які принципово відрізняються між собою.

Замість відкинутих зв'язків до основної системи, крім заданого навантаження, прикладаються ще невідомі реакції цих зв'язків $X_1, \dots, X_n$, які називаються основними невідомими методу сил.

468137

468137

468137

468137

468137

468137

468137

468137

Матриця коефіцієнтів канонічних рівнянь має такий вигляд:

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Основні коефіцієнти утворюють головну діагональ матриці. Побічні коефіцієнти, симетрично розташовані щодо головної діагоналі, рівні.

У результаті розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь визначаються основні невідомі $X_1, \dots, X_n$, що дає змогу визначити усі зусилля у будь-якому перерізі заданої статично невизначеної системи.

Так, коли позначимо згинальний момент через M , поздовжню силу – через N і поперечну – через Q , то їх можемо визначати за такими формулами:

$$\begin{cases} M_p = \bar{M}_1^0 \cdot X_1 + \bar{M}_2^0 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n^0 \cdot X_n + M_p^o; \\ N_p = \bar{N}_1^0 \cdot X_1 + \bar{N}_2^0 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n^0 \cdot X_n + N_p^o; \\ Q_p = \bar{Q}_1^0 \cdot X_1 + \bar{Q}_2^0 \cdot X_2 + \dots + \bar{Q}_n^0 \cdot X_n + Q_p^o. \end{cases} \quad (2.6)$$

У формулах $\bar{M}_i^0, \bar{N}_i^0, \bar{Q}_i^0$ – зусилля, які виникають у перерізі основної системи від сили $X_i = 1$, а M_p^o, N_p^o, Q_p^o – зусилля у тому самому перерізі основної системи від заданого навантаження. Оскільки основна система статично визначена, то ці зусилля визначаються з рівнянь статички.

Коли визначаються зусилля M, N, Q не від зовнішнього навантаження, а від зміни температури чи зміщення опор, то у формулах (2.6) $M_p^o = 0; N_p^o = 0; Q_p^o = 0$, тому що у статично визначених системах температура і зміщення опор не спричиняють зусилля.

Отже, усі зусилля в усіх перерізах виражаються через n основних невідомих. Після визначення цих невідомих стає зрозумілим увесь розподіл зусиль у статично невизначеній системі.

2.2. Розрахунок простих плоских рам методом сил і побудова епюр зусиль

Рамою називатимемо стержневу систему, стержні якої у всіх чи деяких вузлах з'єднані жорстко між собою. Рамні конструкції широко використовують у промисловому і цивільному будівництві, мостобудуванні тощо. На рис. 2.1 показані приклади рам, які функціонують у будівництві.

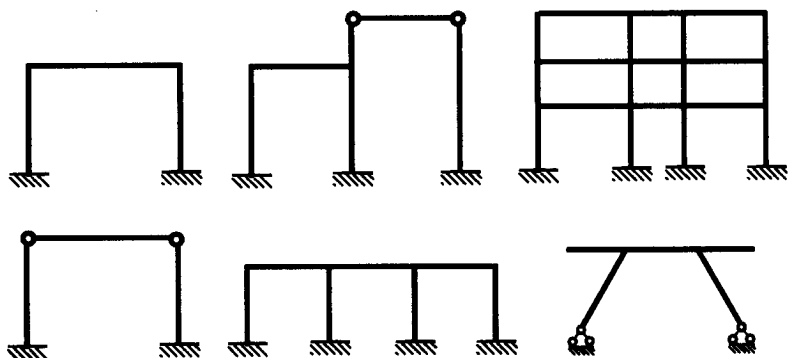


Рис. 2.1

Плоскі рами можуть бути одноповерховими і багатоповерховими. Усі вузли рами можуть бути жорсткими або частково жорсткими і частково шарнірними. Жорсткі вузли характерні тим, що кути між осями стержнів, які утворюють вузол, не змінюються під час деформації рами.

Порядок розрахунку розглянемо на прикладі рами з одним зайвим зв'язком (рис. 2.2).

Розрахунок розпочинаємо із встановлення ступеня статичної невизначеності. Кількість зайвих зв'язків визначають за формулою (1.2): $n = 3 \cdot 3 - 8 = 1$. Беручи до уваги правила, наведені у п. 2.1, вибираємо основну систему (о.с.).

Основну систему показано на рис. 2.2, б. Канонічне рівняння методу сил для системи з одним зайвим зв'язком має вигляд

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

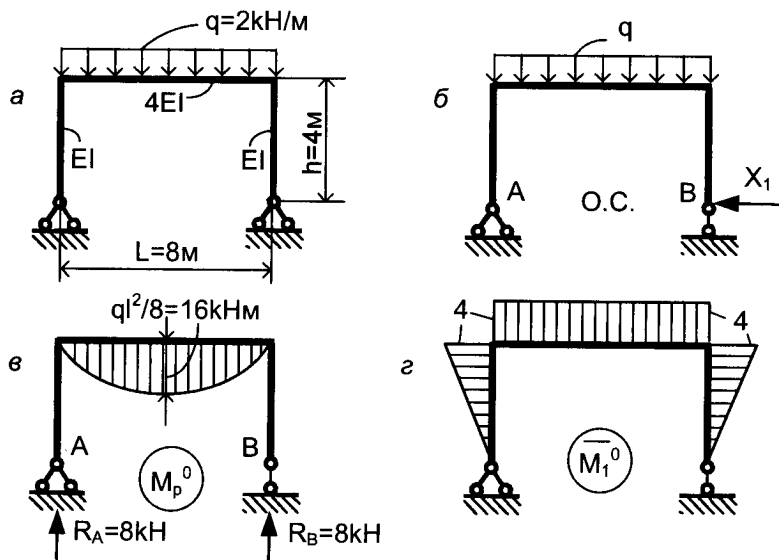


Рис. 2.2

Під час визначення переміщень δ_{11} і Δ_{1p} враховуватимемо тільки згинальні моменти. Тому коефіцієнти канонічного рівняння шукаємо за такими формулами:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_1^{02}}{EI} ds; \quad \Delta_{1p} = \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_1^0 \cdot M_p^0}{EI} ds..$$

Епюри згинальних моментів від навантаження і $X_1=1$, побудовані у статично визначеній основній системі, показані на рис. 2.2, в (M_p^0) і 2.2, г ($\bar{M}_1^0$). Обчислюємо інтеграли Мора за способом перемноження епюр (спосіб Верещагіна):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{4EI} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 4 = \frac{224}{3EI};$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{4EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 16 \cdot 4 = -\frac{256}{3EI}.$$

Після підстановки значень δ_{11} і Δ_{1p} в канонічне рівняння визначаємо X_1 :

$$X_1 = \frac{256}{3EI} \cdot \frac{3EI}{224} = 1.143 \text{ kH}.$$

Для отримання остаточної епюри згинальних моментів у заданій статично невизначеній рамі достатньо побудувати епюру в основній системі від заданого навантаження і усіх зусиль у відкинутих зв'язках, величину яких визначено в результаті розв'язування системи канонічних рівнянь.

Для рами на рис. 2.2 потрібно побудувати епюри в основній системі від навантаження $q = 2 \frac{kH}{m}$ і горизонтальної сили $X_1 = 1,143 \text{ кН}$.

Остаточну епюру згинальних моментів можна отримати алгебраїчним додаванням ординат навантажувальної епюри M_p^0 і епюр від зусиль у зайвих зв'язках. Своєю чергою, епюри від зусиль у зайвих зв'язках отримують множенням кожної одиничної епюри на визначене значення відповідного зусилля. У нашому випадку:

$$M_p = M_p^0 + \bar{M}_1^0 \cdot X_1.$$

Побудову остаточної епюри M_p показано на рис. 2.3.

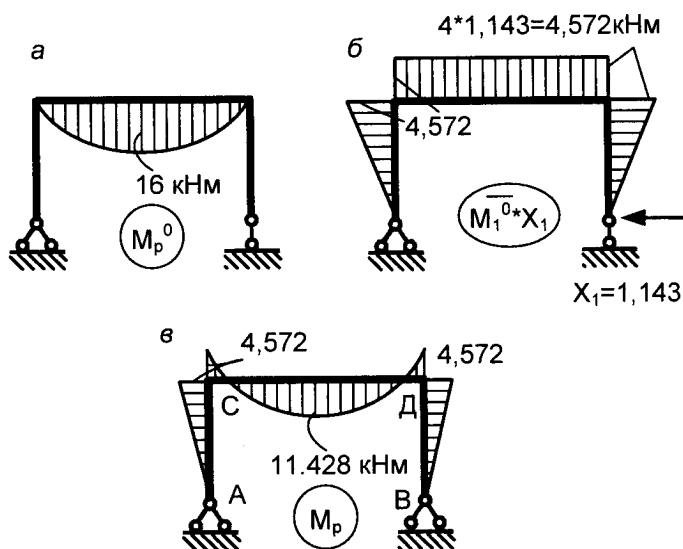


Рис. 2.3

Для перевірки правильності побудованої епюри моментів використовують кінематичну перевірку. Під час кінематичної перевірки визначають переміщення у заданій рамі за напрямком відкинутих зв'язків у разі побудови основної системи (за напрямком невідомих методу сил). Ці переміщення повинні дорівнювати нулю з умови задачі. Отже, результат перемноження остаточної епюри згинальних моментів на будь-яку одиничну епюру повинен дорівнювати нулю:

$$\sum_0^s \frac{\bar{M}_1^0 \cdot M_p}{EI} ds = 0. \quad (2.7)$$

Співвідношення (2.7) не виконується під час розрахунку статично невизначеної системи на температуру і зміщення опор.

Коли система має кілька зайвих зв'язків, можна використати сумарну одиничну епюру:

$$\bar{M}_s^o = \bar{M}_1^o + \bar{M}_2^o + \dots + \bar{M}_n^o.$$

Тоді

$$\sum_0^s \frac{\bar{M}_s^o \cdot M_p}{EI} ds = 0. \quad (2.8)$$

Співвідношення (2.8) відображає умову, що сума переміщень, які зумовлюють усі сили, що діють на систему за напрямками усіх зайвих зв'язків, дорівнює нулю.

Виконаємо кінематичну перевірку для побудованої епюри моментів. Остаточну епюру моментів показано на рис. 2.3, в, а одиничну – на рис. 2.2, г.

$$\begin{aligned} & \sum_0^s \frac{\bar{M}_1^0 \cdot M_p}{EI} ds = \\ & = \left(\frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4,572 \cdot 8 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 16 \cdot 4 \right) / EI = \\ & = \frac{85,344 - 85,333}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

$$\text{Відносна похибка обчислень становить } \frac{0,011 \cdot 100}{85,333} = 0,011 \%.$$

Для простих систем допустима похибка обчислення становить близько 3 %, для складних – близько 5 %.

Епюру Q_p переважно будують безпосередньо по остаточній епюрі M_p . На ділянках рами, де епюра M_p окреслюється прямою, поперечні сили визначаються на підставі залежності Д.І. Журавського:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha ,$$

де α – кут нахилу лінії, яка обмежує епюру моментів, до осі елемента.

На ділянці, де епюра моментів окреслюється кривою, поперечні сили можна визначити, якщо розглядати цю ділянку як просту однопролітну балку, завантажену прикладеним до ділянки зовнішнім навантаженням і моментами на кінцях ділянки, взятими з епюри моментів. У нашому випадку поперечна сила у перерізах лівого стояка:

$$Q_{AC} = \frac{dM}{dx} = -\frac{4,572}{4} = -1.143 \text{ кН} ;$$

у перерізах правого стояка:

$$Q_{BD} = \frac{dM}{dx} = \frac{4,572}{4} = 1.143 \text{ кН} .$$

У перерізах ригеля епюра моментів окреслюється квадратною параболою, і тому поперечна сила змінюється за прямолінійним законом:

$$Q_C = Q_C^0 + \frac{M_D - M_C}{\ell_{CD}} = 8 + \frac{-4,572 - (-4,572)}{8} = 8 \text{ кН} ,$$

$$Q_D = Q_D^0 + 0 = -8 \text{ кН} .$$

Епюру поперечних сил Q_p в заданій рамі показано на рис. 2.4, а.

Поздовжні сили можна визначити з умов рівноваги вузлів (рис. 2.4, в). Епюру N_p показано на рис. 2.4, б.

За такого порядку побудови епюр зусиль у рамі епюра моментів є вихідною. Від точності її побудови залежить і точність побудови епюр поперечних і поздовжніх сил. Тому епюру M потрібно перевірити до побудови епюр Q і N за допомогою кінематичної перевірки.

Статична перевірка полягає у перевірці рівноваги усіх вузлів рами під дією вузлових моментів. Для цього вирізають вузли і прикладають моменти з боку відкинутих стержнів. Сума моментів у кожному вузлі повинна дорівнювати нулю. Вузли C і D рами, яку розглядаємо, зрівноважені (рис. 2.5, а)

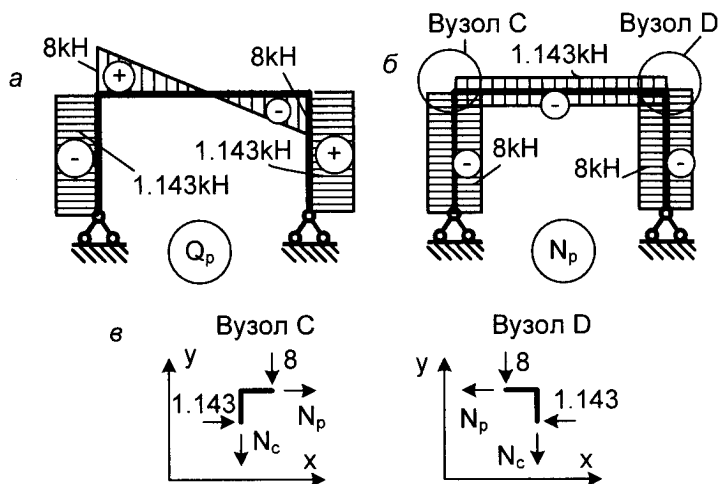


Рис. 2.4

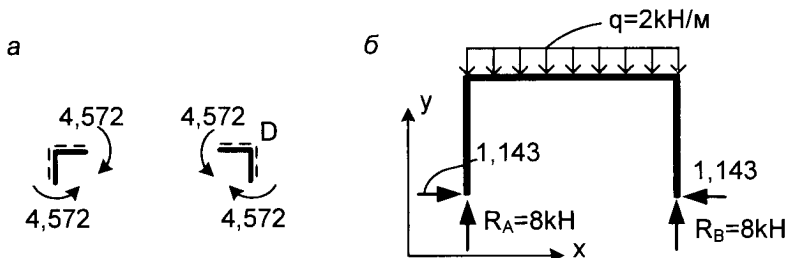


Рис. 2.5

Статична перевірка є необхідна, але недостатня, оскільки розподіл зусиль у статично невизначеній системі, який задовольняє умову рівноваги, не є єдиний. Крім статичної, потрібно виконувати і кінематичну перевірку.

Епюри поперечних і поздовжніх сил перевіряють з умови рівності нулю суми вертикальних і горизонтальних проекцій усіх сил, які діють на систему. А величини опорних реакцій беруть з епюри поперечних і поздовжніх сил. Для нашого прикладу (рис. 2.5, б):

$$\sum Y = 8 + 8 - 2 \cdot 8 = 0,$$

$$\sum X = 1,143 - 1,143 = 0.$$

У разі складних рам для перевірки епюр Q і N розглядають рівновагу окремих частин і рами загалом. Наприклад, раму, зображену на рис. 2.6, можна було б розрізати горизонтальним перерізом I – I і за допомогою рівнянь $\sum X = 0$ і $\sum Y = 0$ перевірити рівновагу відрізаної верхньої частини, потім розрізати II – II і виконати те саме для частини, вищої від перерізу II – II тощо.

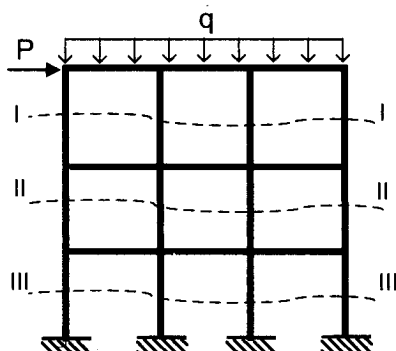


Рис. 2.6

2.3. Спрощення окремих рам під час їх розрахунку за методом сил. Використання симетрії рами і навантаження

2.3.1. Статично невизначена основна система

Основна система у методі сил, як вже відзначалося, не обов'язково повинна бути статично визначеною, але вона повинна мати менший ступінь статичної невизначеності, ніж задана система.

Статично визначену основну систему часто використовують, тому що вона дає змогу просто будувати одиничні і вантажну епюри, необхідні під час розрахунку.

Однак статично невизначена основна система вимагає складання і розв'язування меншої кількості канонічних рівнянь, що дуже істотно для ручного розрахунку. Так, наприклад, під час розрахунку рами (рис. 2.7, а) використання основної статично визначеної системи (рис. 2.7, б) дає п'ять основних невідомих, а використання статично невизначеної основної системи (рис. 2.7, в) – два.

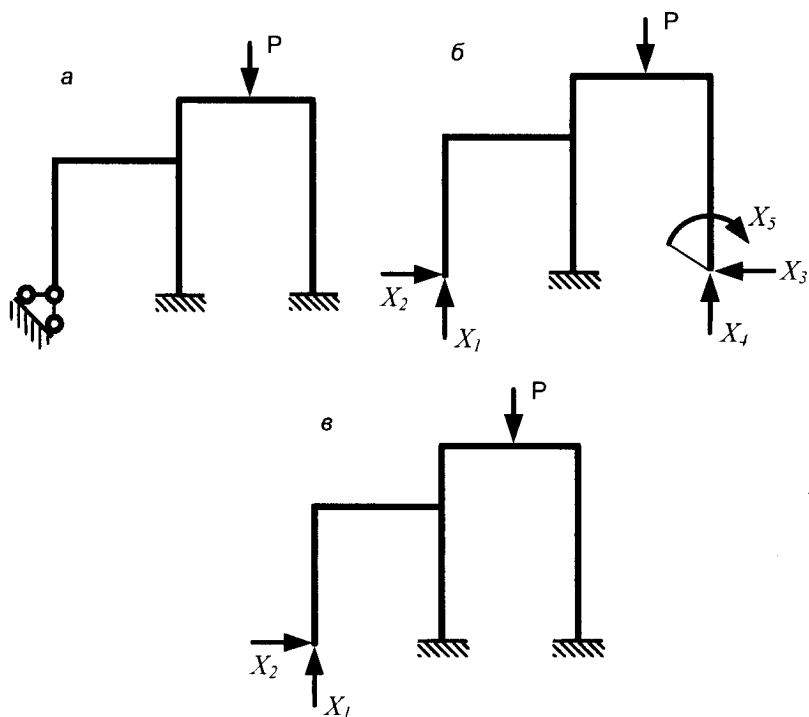


Рис. 2.7

Але статично невизначена основна система потребує попереднього її розрахунку, оскільки в такій системі не можна просто побудувати необхідні епюри. Для спрощення розрахунку можна скористатися статично невизначеною основною системою тільки у тому випадку, коли із заданої системи може бути утворена така основна статично невизначена система, результати розрахунку якої на різні дії наведені. Приклади добре вивчених статично невизначених систем, які часто входять до складу заданих систем, показані на рис. 2.8.

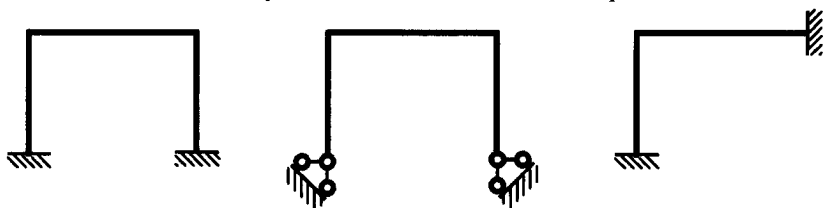


Рис. 2.8

2.3.2. Вибір основної системи, за якої другорядні коефіцієнти дорівнюють нулю

Під час розрахунку складних, багато разів статично невизначених рам, особливо важливо так вибирати основну систему, щоб більше другорядних коефіцієнтів дорівнювало нулю. Це спрощує канонічні рівняння. Ідеальним є випадок, коли усі другорядні коефіцієнти дорівнюють нулю, і система рівнянь розкладається на окремі рівняння, у яких є по одному невідомому. Матриця коефіцієнтів стає діагональною.

Другорядні коефіцієнти дорівнюватимуть нулю тоді, коли:

а) епюри, які перемножують для знаходження переміщень, не мають ділянок, які збігаються;

б) одна з епюр прямолінійна з нульовою ординатою під центром ваги іншої;

в) одна з епюр симетрична, а інша обернено симетрична щодо осі симетрії.

Не завжди можна досягти того, щоб усі одиничні епюри не мали ділянок, які збігаються, але потрібно так вибирати основну систему, щоб таких ділянок було якнайменше. Тому для отримання основної системи краще вводити шарніри, а не робити розрізи. Введення шарнірів дає змогу поділити систему на більшу кількість дисків і епюри від невідомих стають локальними (короткими), а частина другорядних коефіцієнтів може дорівнювати нулю. Розглянемо естакадну раму (рис. 2.9, а).

За формулою $n = 3 \cdot K - \text{Ш}_e$ рама дев'ять разів статично невизначена. На рис. 2.9, б, в, г показані три варіанти основної системи. У першому варіанті відкидають дев'ять опорних зв'язків. Основна система невдала – усі другорядні коефіцієнти не дорівнюють нулю.

Дещо вдалішим є другий варіант (рис. 2.9, в), коли 18 другорядних коефіцієнтів дорівнюють нулю. Найкращим є третій варіант основної системи (рис. 2.9, г), коли 63 з 72-х другорядних коефіцієнтів дорівнюють нулю. Завдяки введенню шарнірів система складається з десяти дисків і одиничні епюри короткі (у межах двох-трьох дисків). Під час введення шарнірів потрібно ретельно вибирати місця для їх встановлення. Покажемо це на простому прикладі. Для розрахунку тричі статично невизначеної рами (рис. 2.10, а) вибираємо основну систему, показану на рис. 2.10, б.

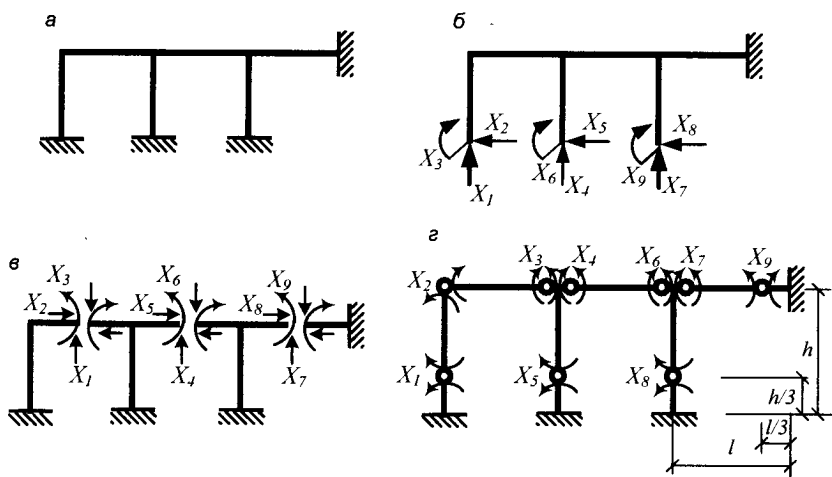


Рис. 2.9

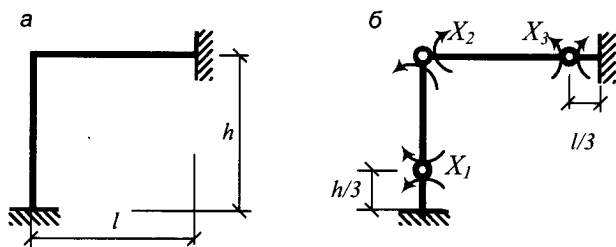


Рис. 2.10

Перший і третій шарніри розташовані відповідно на $1/3 \cdot h$ і $1/3 \cdot l$ від опорних защемлень. За такого розташування шарнірів усі другорядні коефіцієнти дорівнюють нулю і для визначення невідомих X_1 , X_2 , X_3 потрібно розв'язати три окремі рівняння з одним невідомим.

У випадку замкнених одноконтурних систем інколи для того, щоб усі другорядні коефіцієнти дорівнювали нулю, можна використати перетворення системи за допомогою долучення жорстких консолей і перенесення невідомих у пружний центр системи.

Розглянемо раму, зображену на рис. 2.11, а. За допомогою абсолютно жорстких консолей її можна замінити на еквівалентні, приклади яких показано на рис. 2.11, б і в.

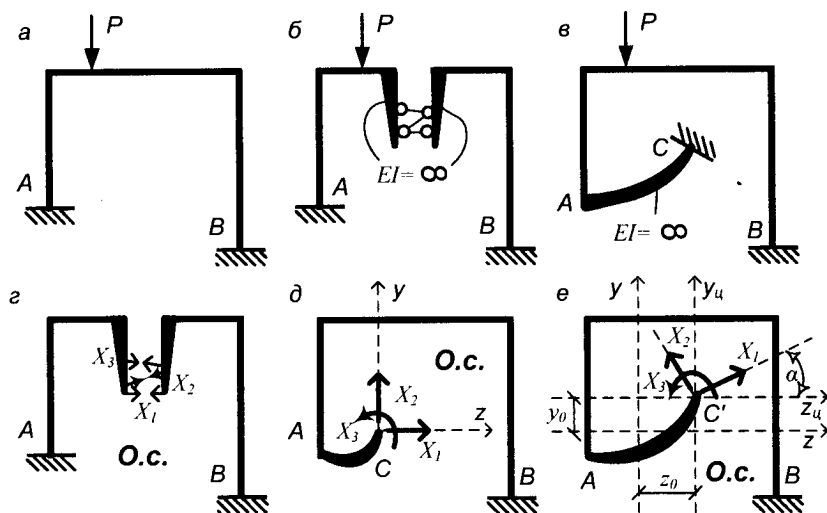


Рис. 2.11

У першому випадку розрізано ригель і до кожної утвореної частини приєднані жорсткі стержні, які з'єднані між собою незмінно за допомогою трьох стержнів. У другому випадку до лівого кінця рами приєднана жорстка консоль, кінець якої зашцеПЛений у деякій точці C. Основну систему для рами на рис. 2.11, б отримаємо, якщо відкинемо зв'язки між жорсткими консолями і замість зв'язків прикладемо невідомі зусилля (рис. 2.11, г). Оскільки довжина і форма абсолютно жорстких консолей можуть бути довільними, то і зв'язки між абсолютно жорсткими консолями можуть бути у різних точках і мати різний напрямок. Це означає, що точки прикладання основних невідомих і їх напрямки можуть бути довільними (рис. 2.11, г). Основну систему для рами на рис. 2.11, в отримаємо, якщо відкинемо три опорні зв'язки у точці C (рис. 2.11, д).

Для отримання нульових другорядних коефіцієнтів потрібно вибрати точку прикладання невідомих і їх напрямки так, щоб одиничні епюри були ортогональними, тобто, перемноживши їх між

собою, для визначення відповідних другорядних переміщень одержуємо в результаті нуль. Враховуючи, що для визначення переміщень нехтуємо впливом Q і N , і отримуємо такі рівняння:

$$\begin{cases} \delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 \cdot \bar{M}_2^0 ds}{EI} = \sum \int (-y) \cdot z \cdot \frac{ds}{EI} = 0; \\ \delta_{13} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 \cdot \bar{M}_3^0 ds}{EI} = \sum \int (-y) \cdot 1 \cdot \frac{ds}{EI} = 0; \\ \delta_{23} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^0 \cdot \bar{M}_3^0 ds}{EI} = \sum \int z \cdot 1 \cdot \frac{ds}{EI} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Відношення $\frac{ds}{EI}$ називатимемо пружним вантажем. Тоді умови $\sum \int (-y) \cdot 1 \cdot \frac{ds}{EI} = 0$ і $\sum \int z \cdot 1 \cdot \frac{ds}{EI} = 0$ визначають, що статичні моменти пружних вантажів стосовно випадкових ортогональних осей z і y повинні дорівнювати нулю. Це означає, що осі z і y проходять через центр ваги пружних вантажів, який називається пружним центром.

Положення пружного центра визначають за формулами, аналогічними до формул для плоского тіла:

$$z_0 = \frac{\sum \int z \cdot ds / EI}{\sum \int ds / EI}; \quad y_0 = \frac{\sum \int y \cdot ds / EI}{\sum \int ds / EI},$$

де z_0 і y_0 – координати пружного центра у довільній системі прямокутних координат z і y .

Умова $\sum \int (-y) \cdot z \cdot \frac{ds}{EI} = 0$ визначає, що відцентровий момент інерції пружних вантажів стосовно осей z і y дорівнює нулю, тобто осі z і y повинні бути головними осями інерції пружних вантажів. Напрямок головних осей інерції визначають за формулою, відомою із курсу опору матеріалів:

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) = -\frac{2 \cdot I_{y_z}}{I_{y_y} - I_{z_z}},$$

де α – кут повороту головних осей; I_{z_z} , I_{y_y} , I_{y_z} – моменти інерції пружних вантажів стосовно осей z_y і y_z .

Треба зазначити, що використання пружного центра буде ефективним тільки у разі симетричних систем, коли напрямок головних осей відомий, оскільки одна з осей збігається з віссю симетрії.

Якщо система має одну вісь симетрії, то потрібно визначити тільки одну координату пружного центра, а це зробити просто. Якщо є дві осі симетрії, то положення пружного центра відоме.

Розглянемо раму (рис. 2.12, а). Рама три рази статично невизначена. Для того, щоб усі другорядні коефіцієнти дорівнювали нулю, використовуємо перенос невідомих у пружний центр.

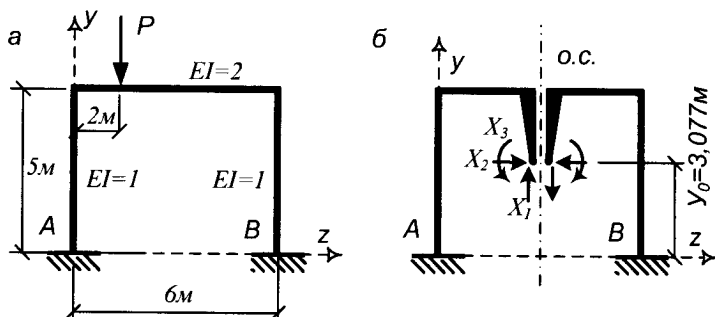


Рис. 2.12

Оскільки рама симетрична стосовно вертикальної осі, то потрібно визначити одну ординату (y_0) пружного центра:

$$y_0 = \frac{\sum \int y \cdot ds / EI}{\sum \int ds / EI} = \frac{5/1 \cdot 2,5 \cdot 2 + 6/2 \cdot 5}{2 \cdot 5/1 + 6/2} = 3,077 \text{ м.}$$

Основна система і напрямки невідомих показані на рис. 2.12, б. За такого розташування невідомих X_1 , X_2 і X_3 усі другорядні коефіцієнти дорівнюють нулю і система канонічних рівнянь матиме такий вигляд

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

2.3.3. Використання симетрії рами

Розрахунок симетричних систем має практичне значення завдяки широкому застосуванню симетричних конструкцій у будівництві. Симетричною вважатимемо конструкцію, яка має симетрію не тільки у обрисів осі і у розміщенні опорних зв'язків, але і у жорсткості елементів. Спрощення під час розрахунку симетричних систем полягає у можливості так вибирати основну систему, щоб усі одиничні епюри від невідомих були симетричними або обернено симетричними. У результаті усі другорядні переміщення (коефіцієнти), які визначаються перемноженням симетричної одиничної епюри на обернено симетричну, дорівнюватимуть нулю.

Щоб мати змогу використати симетрію системи для спрощення розрахунку, потрібно обов'язково:

- а) основну систему приймати тільки симетричною;
- б) невідомі вибирати так, щоб одинична епюра від кожного з них була симетричною або обернено симетричною.

За дотримання цих умов система канонічних рівнянь автоматично розпадається на дві незалежні групи, одна з яких містить рівняння з симетричними невідомими, тобто невідомі, які зумовлюють симетричні епюри згинальних моментів, а друга – обернено симетричні невідомі. Це відбувається незалежно від зовнішнього навантаження.

Наприклад, розглянемо симетричну раму (рис. 2.13, а). Рама чотири рази статично невизначена. Симетричну основну систему отримусмо, розрізаючи раму по осі симетрії (рис. 2.13, б). За зайві невідомі приймаємо горизонтальні і вертикальні сили взаємодії у першому (X_1 і X_2) і другому шарнірах (X_3 і X_4). Невідомі X_1 і X_3 є симетричними, оскільки спричиняють симетричні епюри згинальних моментів, а невідомі X_2 і X_4 – обернено симетричні, тому що зумовлюють обернено симетричні епюри згинальних моментів (рис. 2.14). Епюра моментів від навантаження у нашому випадку несиметрична. Канонічні рівняння деформацій загалом матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0, \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

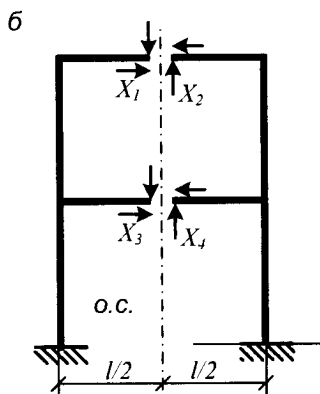
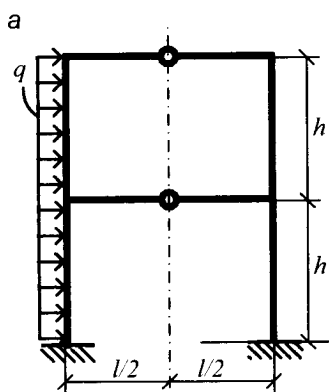


Рис. 2.13

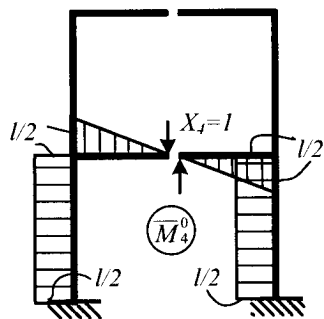
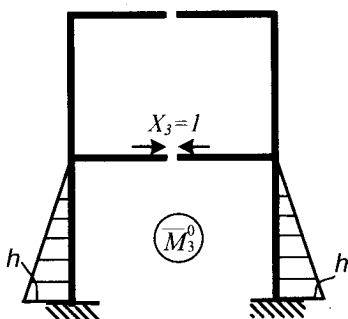
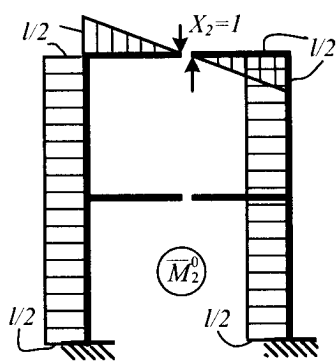
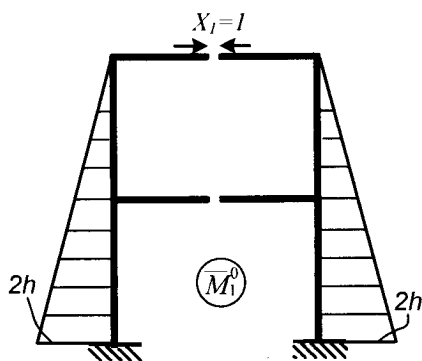


Рис. 2.14

Зазначимо, що перше рівняння виражає умову рівності нулю взаємного горизонтального зміщення перерізів верхнього ригеля, а друге – умову рівності нулю взаємного вертикального зміщення цих перерізів. Третє і четверте рівняння виражають, відповідно, ці умови у відношенні до перерізів нижнього ригеля.

Якщо розглянемо одиничні епюри (рис. 2.14), то переконаємося, що другорядні переміщення за напрямками симетричних невідомих, зумовлені обернено симетричними невідомими (і навпаки), дорівнюють нулю. Тобто δ_{12} , δ_{21} , δ_{23} , δ_{32} , δ_{14} , δ_{41} , δ_{34} , δ_{43} дорівнюють нулю.

Добуток за правилом Верещагіна симетричної епюри на обернено симетричну завжди дорівнює нулю. Так, наприклад, результат перемноження епюр $\overline{M}_1^0$ і $\overline{M}_2^0$ для лівої частини рами дорівнює результату перемноження цих епюр для правої частини, але з протилежним знаком, отже, $\delta_{12} = 0$.

У результаті система канонічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0, \\ \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

Це означає, що вона розпалася на дві незалежні системи рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

До першої з цих систем входять тільки симетричні невідомі X_1 і X_3 , а в другу – тільки обернено симетричні X_2 і X_4 .

Отже, використання симетрії дало змогу замінити розв'язування системи з чотирьох рівнянь розв'язуванням двох незалежних систем з двох рівнянь. Це значно скорочує обсяг обчислень і тому уможливорює точніше визначення невідомих. Обсяг обчислень скорочується не тільки в результаті спрощення системи канонічних рівнянь і зменшення кількості переміщень, які потрібно обчислювати, але і тому, що для визначення переміщень можна перемножити відповідні епюри тільки для елементів половини споруди (отриманий результат подвоїти).

Треба зазначити, що система рівнянь не завжди розпадається на системи з однаковою кількістю рівнянь, але завжди в одну систему входять тільки симетричні невідомі, а в другу – обернено симетричні.

Якщо в основній системі невідомі розміщені на осі симетрії, то епюри від невідомих будуть симетричними або обернено симетричними. Тому під час розрахунків рам, які не мають стояків на осі симетрії, для отримання основної системи розрізають раму по осі симетрії (рис. 2.15).

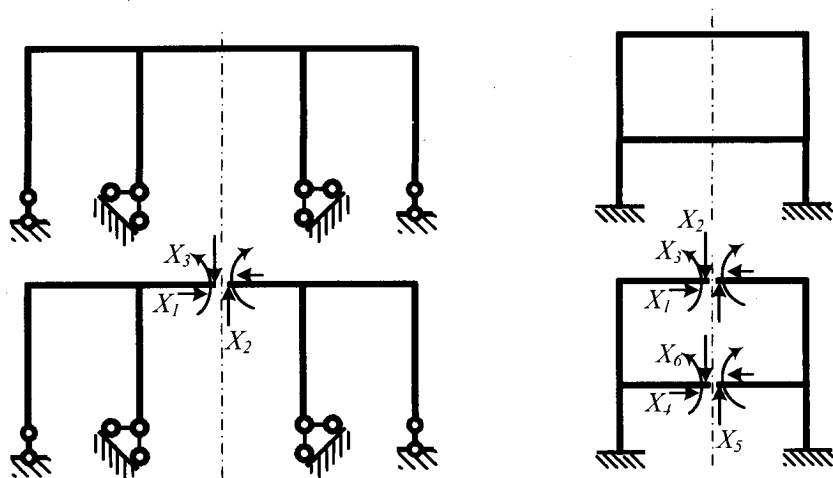


Рис. 2.15

Однак під час розрахунку рам, які мають кілька прогонів (прольотів) або стояків по осі симетрії, неможливо розмістити усі невідомі на осі симетрії.

У цьому разі для отримання симетричних і обернено симетричних епюр потрібно приймати за невідомі не окремі сили, а групи сил. Для з'ясування суті цього прийому розглянемо чотири рази статично невизначену раму, зображену на рис. 2.16, а.

Коли для розрахунку рами прийняти основну систему (рис. 2.16, б) з несиметричними зайвими невідомими X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , то потрібно буде розв'язувати сумісно чотири рівняння, в яких усі другорядні коефіцієнти не дорівнюють нулю.

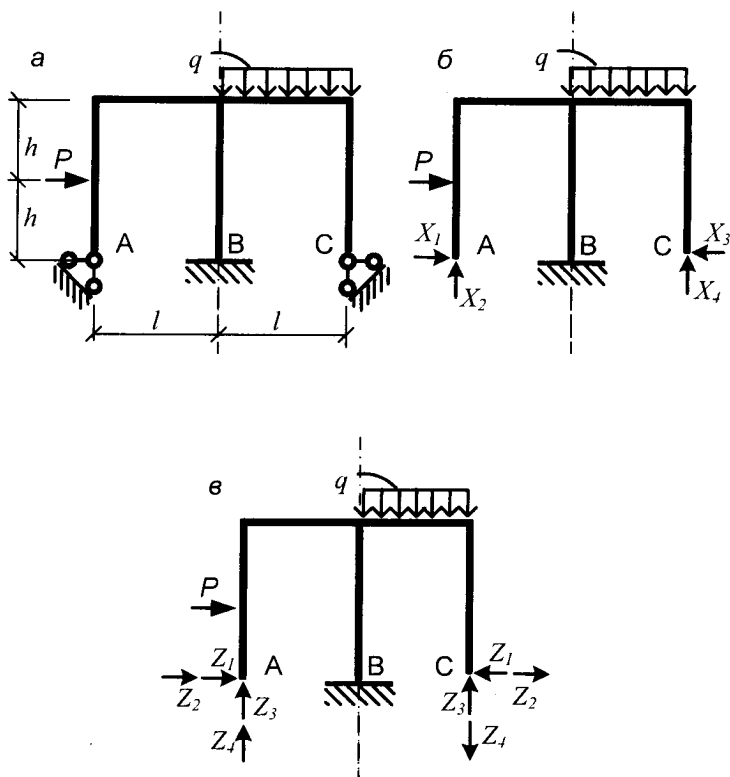


Рис. 2.16

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0, \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

Коли за невідомі прийняти не окремі сили X_1, X_2, X_3, X_4 , а групи сил Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 (рис. 2.16, в), то багато другорядних коефіцієнтів почнуть дорівнювати нулю, оскільки вони визначаються добутком симетричних епюр на обернено симетричні. У нашому випадку, за однієї осі симетрії, групи сил – це пара однакових сил, симетричних або обернено симетричних щодо осі симетрії.

Z_1 – дві, одночасно діючі рівні і протилежно скеровані горизонтальні сили;

Z_2 – дві рівні горизонтальні сили, скеровані в один бік;

Z_3 – дві рівні вертикальні сили, скеровані ввверх;

Z_4 – дві рівні вертикальні сили, скеровані в різні боки.

Епюри згинальних моментів від одиничних групових сил показані на рис. 2.17. Епюри $\overline{M}_1^0$ і $\overline{M}_3^0$ – симетричні, а епюри $\overline{M}_2^0$ і $\overline{M}_4^0$ – обернено симетричні.

Якщо порівнювати дві основні системи, зображені на рис. 2.16, б, в, легко переконатися, що між невідомими X і Z існує така залежність:

$$X_1 = Z_1 + Z_2; \quad X_2 = Z_3 + Z_4; \quad X_3 = Z_1 - Z_2; \quad X_4 = Z_3 - Z_4,$$

яку можна подати і в такому вигляді:

$$Z_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad Z_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}; \quad Z_3 = \frac{X_3 + X_4}{2}; \quad Z_4 = \frac{X_3 - X_4}{2}.$$

Треба зазначити, що для побудови остаточних епюр зусиль немає потреби визначати величини X .

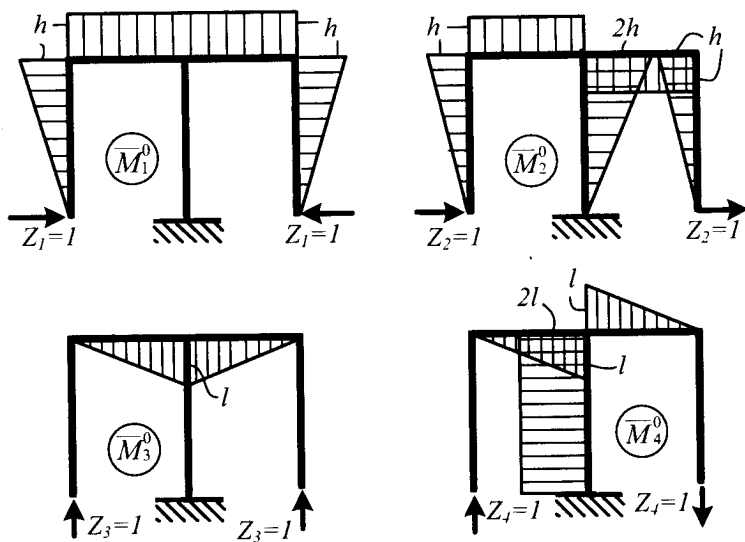


Рис. 2.17

У результаті використання парних невідомих система з чотирьох канонічних рівнянь розпадається на дві незалежні системи, в одну з яких входять симетричні, а в другу – обернено симетричні невідомі:

$$\begin{cases} (\delta_{11}) \cdot Z_1 + (\delta_{13}) \cdot Z_3 + (\Delta_{1p}) = 0 \\ (\delta_{31}) \cdot Z_1 + (\delta_{33}) \cdot Z_3 + (\Delta_{3p}) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (\delta_{22}) \cdot Z_2 + (\delta_{24}) \cdot Z_4 + (\Delta_{2p}) = 0 \\ (\delta_{42}) \cdot Z_2 + (\delta_{44}) \cdot Z_4 + (\Delta_{4p}) = 0. \end{cases}$$

У цих рівняннях (δ_{ik}) і (Δ_{ip}) – це сума чи різниця горизонтальних або вертикальних переміщень точок прикладання парних невідомих. Рівняння заперечують ці переміщення, тому що точки А і С (рис. 2.16, а) не переміщуються по горизонталі і вертикалі, а, значить, і сума чи різниця їх вертикальних і горизонтальних переміщень дорівнює нулю.

Групові переміщення визначаються так само, як і негрупові (звичайні) переміщення, перемноженням відповідних групових одиничних епюр.

Далі невідомі зусилля позначатимемо буквою X незалежно від того чи є вони окремими силами, чи груповими. Не ставитимемо і дужок для позначення групових переміщень.

Як бачимо, групові невідомі за однієї осі симетрії – це пари сил. За більшої кількості осей симетрії збільшується кількість груп і кількість сил, що утворюють групи.

В основній системі з двома осями симетрії невідомі групуються у чотири групи (рис. 2.18): симетричні щодо двох осей (рис. 2.18, б); симетричні щодо осі x і обернено симетричні щодо осі y (рис. 2.18, в); обернено симетричні щодо осі x і симетричні щодо осі y (рис. 2.18, г); обернено симетричні щодо двох осей (рис. 2.18, д).

Відповідно до цього канонічні рівняння розпадаються на чотири незалежні групи рівнянь, кожна з яких міститиме тільки невідомі однієї з чотирьох категорій. У випадку рами, показаної на рис. 2.18, у разі довільного навантаження отримаємо чотири незалежні рівняння:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0, \\ \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

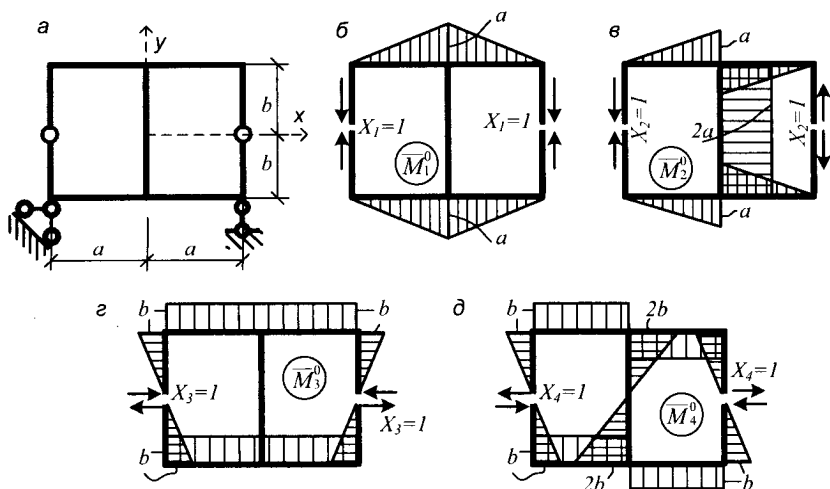


Рис. 2.18

Усі другорядні переміщення як результат перемноження симетричних епюр на обернено симетричні дорівнюють нулю.

Розглянуті спрощення не залежать від навантаження. Кількість невідомих не зменшується, тільки значно спрощується розрахунок.

Подальше спрощення задачі настає тоді, коли на симетричну систему діє симетричне або обернено симетричне навантаження і вантажна епюра моментів буде симетричною або обернено симетричною. Під час симетричного навантаження усі вільні члени у групі рівнянь з обернено симетричними невідомими дорівнюють нулю, а це означає, що усі обернено симетричні невідомі дорівнюють нулю.

Під час обернено симетричного навантаження з такого самого приводу усі симетричні невідомі дорівнюють нулю.

В и с н о в к и:

1) під час симетричного навантаження згинальні моменти і поздовжні сили у перерізах на осі симетрії не дорівнюють нулю, а поперечні сили дорівнюють нулю;

2) під час обернено симетричного навантаження поперечні сили у перерізах на осі симетрії не дорівнюють нулю, а згинальні моменти і поздовжні сили дорівнюють нулю.

2.3.4. Перетворення навантаження

Будь-яке несиметричне навантаження, яке діє на симетричну систему, можна розкласти на симетричну і обернено симетричну складові. Сума цих навантажень у кожній точці осей елементів системи дорівнює заданому навантаженню.

Нехай на симетричну раму (рис. 2.19) діє рівномірно розподілене навантаження q , зосереджена сила P і момент M , прикладені несиметрично. Розкладемо це навантаження на симетричну і обернено симетричну складові за способом Андре:

$$P_{\text{сим}} = \frac{(P_{\text{лів}}) + (P_{\text{пр}})}{2}; \quad P_{\text{об.сим.}} = \frac{(P_{\text{лів}}) - (P_{\text{пр}})}{2}.$$

На рис. 2.20, а, б показана рама з симетричною і обернено симетричною складовими заданого навантаження.

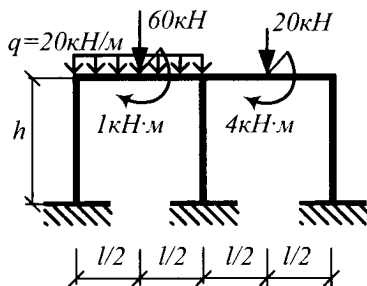


Рис. 2.19

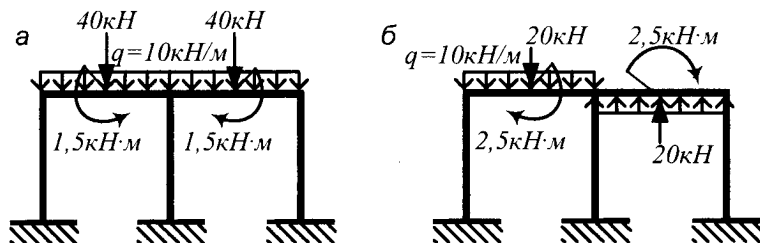


Рис. 2.20

В основній системі (рис. 2.21, а) з симетричним навантаженням діють тільки симетричні невідомі, а саме – групові сили X_1 , X_2 , X_3 . Канонічні рівняння для їх визначення мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

Під час обернено симетричного навантаження (рис. 2.21, б) діють тільки обернено симетричні невідомі X_4 , X_5 , X_6 .

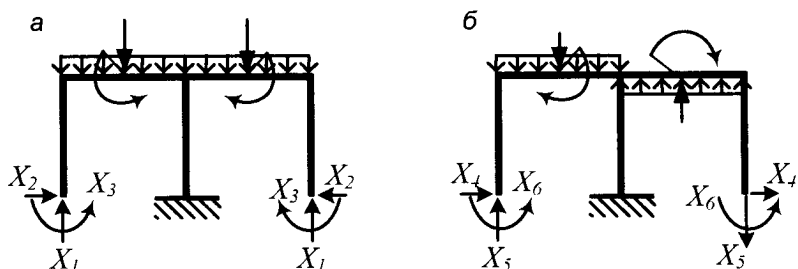


Рис. 2.21

Канонічні рівняння для їх визначення мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{44} \cdot X_4 + \delta_{45} \cdot X_5 + \delta_{46} \cdot X_6 + \Delta_{4p} = 0, \\ \delta_{54} \cdot X_4 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{5p} = 0, \\ \delta_{64} \cdot X_4 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{6p} = 0. \end{cases}$$

Перетворення навантаження розкладанням на симетричне і обернено симетричне здебільшого не спрощує обчислення. І без розкладання навантаження система рівнянь розпадається на дві системи. У нашому прикладі система з шести рівнянь розпадається на дві незалежні системи по три рівняння. Дещо спрощується побудова навантажувальних епюр і обчислення вантажних переміщень Δ за рахунок симетричності навантажувальних епюр.

Але у деяких випадках розкладання несиметричного навантаження значно спрощує розрахунок. Прикладом цього є рама, зображена на рис. 2.22, а.

Рама шість разів статично невизначена. На рис. 2.22, б показане симетричне, а на рис. 2.22, в – обернено симетричне навантаження. Під час дії симетричного навантаження верхній

кінець середнього стояка не може зміщуватися по горизонталі (таке зміщення обернено симетричне, тому за такого навантаження можна вважати, що у верхнього кінця середнього стояка є опора, яка не дає йому зміщуватися по горизонталі (рис. 2.22, з).

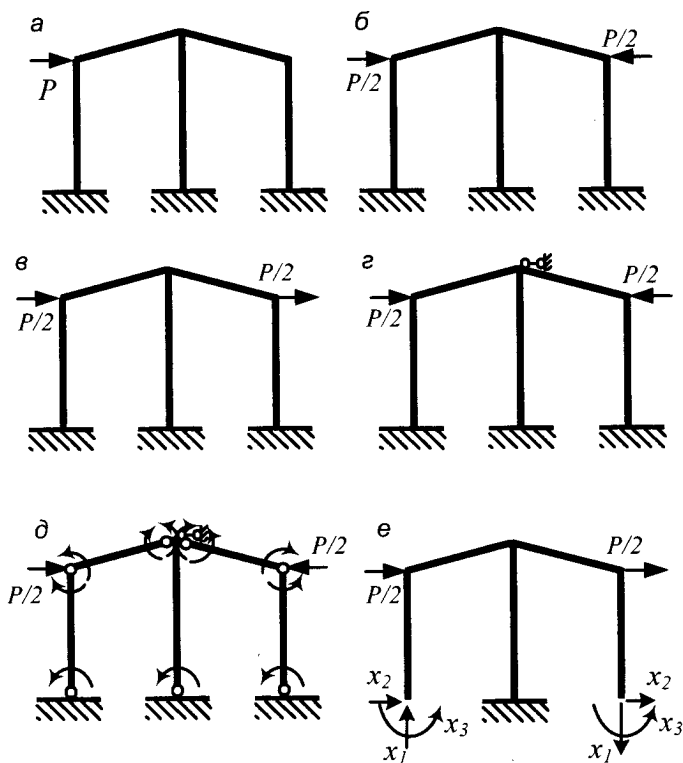


Рис. 2.22

Коли прийняти основну систему для рами, зображеної на рис. 2.22, б, із шарнірами у вузлах (рис. 2.22, д), то від симетричного навантаження в основній системі згинальні моменти дорівнюватимуть нулю. Тому вантажні зміщення Δ_{ip} , невідомі X_i і згинальні моменти в усіх елементах рами дорівнюватимуть нулю. Згинальні моменти у рамі виникають тільки від обернено симетричної складової навантаження (рис. 2.22, в). Розрахунок на це навантаження можна виконати за допомогою основної системи (рис. 2.22, е) за трьох групових обернено симетричних невідомих.

Отже, у такому разі перетворення навантаження дало змогу розрахунок рами з шістьма невідомими (рис. 2.22, *а*) замінити розрахунком рами на обернено симетричне навантаження з трьома невідомими (рис. 2.22, *е*).

2.4. Розрахунок статично невизначених систем методом сил на дію температури і зміщення опор

Канонічні рівняння методу сил під час розрахунку будь-якої статично невизначеної системи на дію температури мають вигляд

[illegible]

де $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{nn}$ мають таке саме значення, як і під час розрахунку на дію зовнішнього навантаження; $\Delta_{1l}, \Delta_{2l}, \dots, \Delta_{nl}$ — температурні переміщення в основній системі за напрямками зайвих невідомих $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Визначаються ці переміщення за формулами

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \overline{M}_i^0 dx + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \overline{N}_i^0 dx$$

a60

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \cdot \Omega_{\bar{M}_i^0} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot \Omega_{\bar{N}_i^0},$$

де α , t_1 , t_2 , h , $\Omega_{M_i}^0$, $\Omega_{N_i}^0$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу стержня, зміни температур із двох боків стержня, висота поперечного перерізу стержня, площі епюр моментів та поздовжніх зусиль від одиничного невідомого в основній системі.

Зміст канонічних рівнянь під час розрахунку на температуру полягає у тому, що сумарні переміщення за напрямками відкинутих зв'язків дорівнюють нулю.

З рівнянь (2.10) випливає, що сумарне переміщення в основній системі за напрямком будь-якого невідомого, зумовленого дією невідомих, повинно дорівнювати переміщенню за тим самим напрямком в результаті зміни температури (із зворотним знаком).

Отже, результат перемноження будь-якої одиничної епюри на результуючу (остаточну) епюру моментів не дорівнюватиме нулю:

$$\sum_0^s \int \bar{M}_i^0 \cdot M_i \cdot ds / (EI) = -\Delta_{ii} ,$$

де Δ_{ii} – переміщення за напрямком X_i в основній системі від зміни температури.

Кінематична перевірка побудови остаточної епюри моментів з використанням сумарної одиничної епюри $\bar{M}_s^0$:

$$\sum_0^s \int \bar{M}_s^0 \cdot M \cdot ds / (EI) = -\sum \Delta_{ii} .$$

Канонічне рівняння методу сил під час розрахунку на задане зміщення опори "с" має такий вигляд:

$$\delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{ii} \cdot X_i + \dots + \delta_{in} \cdot X_n + \Delta_{ic} = 0 \quad . (2.11)$$

Вільні члени рівнянь визначають за формулою

$$\Delta_{ic} = -\sum_k \bar{R}_k^0 \cdot c_k ,$$

де c_k – задане зміщення опорних зв'язків; $\bar{R}_k^0$ – реакції опорних зв'язків у допоміжному стані, які відповідають заданим зміщенням опорних зв'язків.

Послідовність розрахунку та сама, що і під час розрахунку на дію навантаження. Кінематична перевірка правильності побудови епюр моментів передбачає виконання умови

$$\sum_0^s \int \frac{\bar{M}_i^0 \cdot M_{\Delta}}{EI} ds = -\Delta_{i\Delta} . \quad (2.12)$$

Приклад 1. Потрібно визначити згинальні моменти у перерізах стержнів рами (рис. 2.23, а) за таких умов: $l = 6,0$ м, висота перерізів стояка і ригелів постійні по довжині $h_c = 0,3$ м; $h_p = 0,6$ м; поперечні перерізи стержнів симетричні щодо їх осей; перепад температури по довжині кожного стержня – постійний; температури t_1 , t_2 і t_3 змінилися порівняно з початковими на 10, 15 і (-0°C) відповідно.

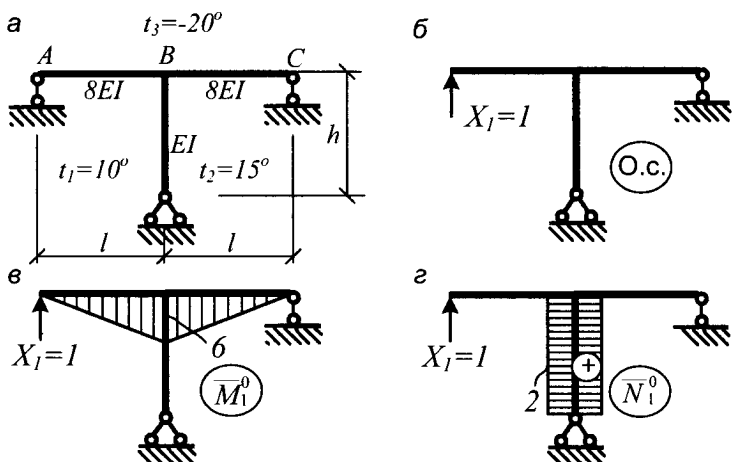


Рис. 2.23

Розв'язання: Рама має один зайвий зв'язок. Канонічне рівняння

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Основна система, одиничні епюри $\bar{M}_1$ і $\bar{N}_1$ показані на рис. 2.23, б, в, г.

$$\delta_{11} = 2 \cdot \int_0^6 \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = 2 \cdot \frac{1}{8 \cdot EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{18}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \alpha \frac{t_1 - t_3}{b_p} \omega_{\bar{M}} + \alpha \frac{t_2 - t_3}{b_p} \omega_{\bar{M}} + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{\bar{N}} = \\ &= \alpha \frac{10 - (-20)}{0,6} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) + \alpha \frac{15 - (-20)}{0,6} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) + \alpha \frac{10 + 15}{2} (2 \cdot 6) = \\ &= \alpha (900 + 1050 + 150) = 2100\alpha. \end{aligned}$$

Тоді $\frac{18}{EI} X_1 + 2100\alpha = 0$ і $X_1 = -111,667 \cdot \alpha \cdot EI$.

Остаточну епюру згинальних моментів ($M_t = \bar{M}_1 \cdot X_1$) показано на рис. 2.24, а, а епюри поперечних і поздовжніх сил — відповідно на рис. 2.24, б, в.

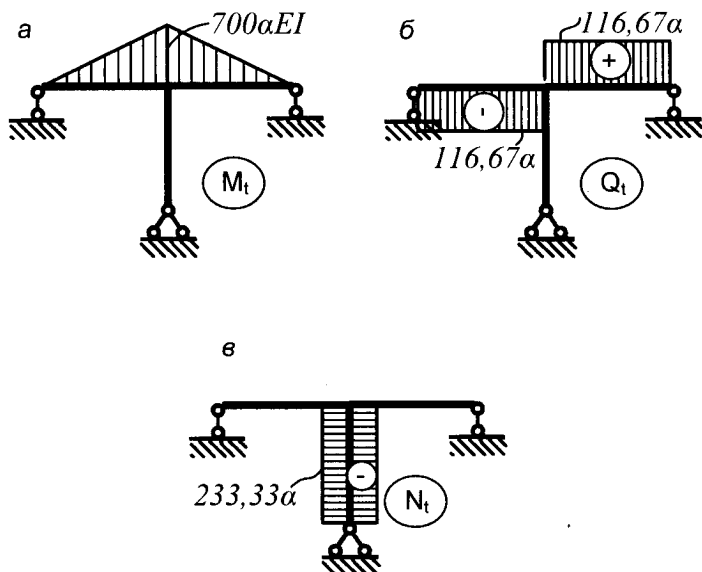


Рис. 2.24

Кінематична перевірка правильності побудови остаточної епюри:

$$2 \int_0^s \frac{\overline{M}_1^0 \cdot M}{EI} ds = -2 \cdot \frac{1}{8 \cdot EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 700 \cdot \alpha \cdot EI = -2100\alpha = -\Delta_{1l}.$$

Приклад 2. Побудувати епюру згинальних моментів в рамі (рис. 2.25, а) від заданих зміщень опори В: $EI = 13,5 \text{ Мн/м}^2$; висота поперечного перерізу стояка А – 1 і ригеля 1 – 2: $h_1 = 0,4 \text{ м}$; висота поперечного перерізу стояка В – 2: $h_2 = 0,3 \text{ м}$. Опора В перемістилася на $c_1 = 1 \text{ см}$ праворуч, на $c_2 = 2 \text{ см}$ донизу і повернулася за годинниковою стрілкою на кут $\varphi = 0,01 \text{ рад}$ (рис. 2.25, б).

Рама два рази статично невизначена. Основну систему показано на рис. 2.25, в. На рис. 2.25, з, д наведені одиничні епюри і реакції у зв'язках опори В.

Канонічні рівняння мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

$$EI \cdot \delta_{11} = 207; EI \cdot \delta_{22} = 144; EI \cdot \delta_{12} = -135; EI \cdot \delta_{21} = EI \cdot \delta_{12} = -135;$$

$$EI \cdot \Delta_{1\Delta} = -EI(-1 \cdot c_1 + 3 \cdot \varphi) = 135 \cdot 10^6 \cdot (1 \cdot 0,01 - 3 \cdot 0,01) = -2,7 \cdot 10^6;$$

$$EI \cdot \Delta_{2\Delta} = -EI(1 \cdot c_2 - 6 \cdot \varphi) = 135 \cdot 10^6 \cdot (-1 \cdot 0,02 + 6 \cdot 0,01) = 5,4 \cdot 10^6.$$

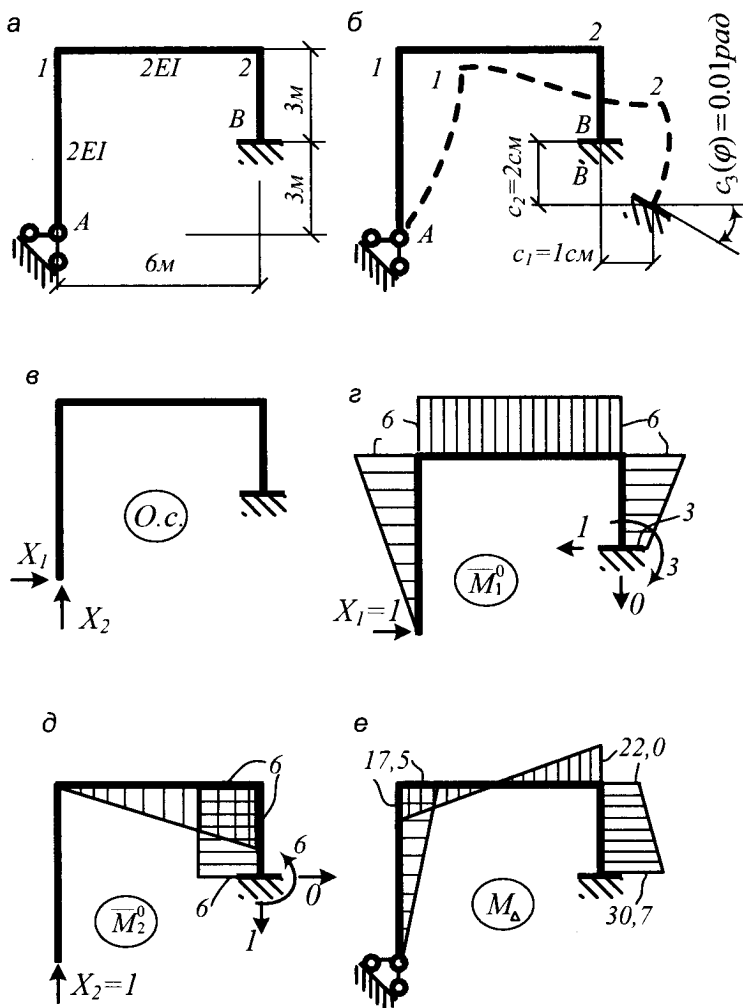


Рис. 2.25

Тоді:

$$\begin{cases} 207 \cdot X_1 - 135 \cdot X_2 - 2,7 \cdot 10^6 = 0 & X_1 = -2930H = -2,93 \text{ кН}, \\ -135 \cdot X_1 + 144 \cdot X_2 + 5,4 \cdot 10^6 = 0 & X_2 = -6490H = -6,49 \text{ кН}. \end{cases}$$

Остаточна епюра

$$M_{\Delta} = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 = \overline{M}_1 \cdot (-2,93) + \overline{M}_2 \cdot (-6,49)$$

(рис. 2.25, е).

Перевірка остаточної епюри задовольняє умову

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} dx + \sum \Delta_{ic} &= 0, \\ \frac{-17,5 \cdot 6 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot EI} - \frac{6}{6 \cdot 2 \cdot EI} \cdot (2 \cdot 17,5 \cdot 6 - 22 \cdot 6) - \\ - \frac{3}{6 \cdot EI} \cdot (2 \cdot 30,7 \cdot 3 + 22 \cdot 3) + \Delta_{1\Delta} + \Delta_{2\Delta} &= \\ = -\frac{1}{EI} (105 + 39 + 125,5) - 0,02 + 0,04 &= \\ = -\frac{270}{13,5 \cdot 10^3} + 0,02 = -0,02 + 0,02 &= 0. \end{aligned}$$

2.5. Визначення переміщень у статично невизначених системах

Під час виведення формул для визначення переміщень у першій частині будівельної механіки (будівельна механіка статично визначених стержневих систем) розглядали пружну стержневу систему, матеріал якої задовольняє закон Гука, із малими деформаціями порівняно з її розмірами. Ці формули, а також способи обчислення переміщень можуть бути використані як для статично визначених, так і для статично невизначених систем.

Обчислення переміщень у статично невизначеній системі може бути значно спрощеним на основі таких міркувань. Остаточну епюру згинальних моментів для статично невизначеної системи від будь-якої зовнішньої дії отримують як алгебраїчну суму епюр від зовнішньої дії і зусиль у зайвих зв'язках, побудованих для статично визначеної основної системи. Тобто статично невизначену систему

можна завжди замінити тотожною статично визначеною. Ця тотожна статично визначена система завантажена зовнішнім навантаженням і попередньо знайденими зусиллями у відкинутих зв'язках.

Зусилля у двох тотожних системах однакові, а це означає, що і деформації двох тотожних систем однакові. Тому будь-яке переміщення у статично невизначеній основній системі можна визначити не у заданій системі, а в статично визначеній основній системі, яка отримана з заданої за допомогою відкидання зайвих зв'язків, але навантаженої, крім зовнішньої дії, ще дійсними зусиллями у відкинутих зв'язках. Оскільки переміщення визначаються здебільшого після розрахунку системи на міцність, коли епюра моментів від навантаження (чи іншої зовнішньої дії) уже побудована, то для визначення переміщення вибираємо одиничний (фіктивний) стан у будь-якій статично визначеній основній системі, отриманій із заданої відкиданням зайвих зв'язків.

Проілюструємо це на простому прикладі. Потрібно визначити вертикальне переміщення точки С ригеля рами (рис. 2.26, а). Для цього вибираємо одиничний стан (рис. 2.26, в).

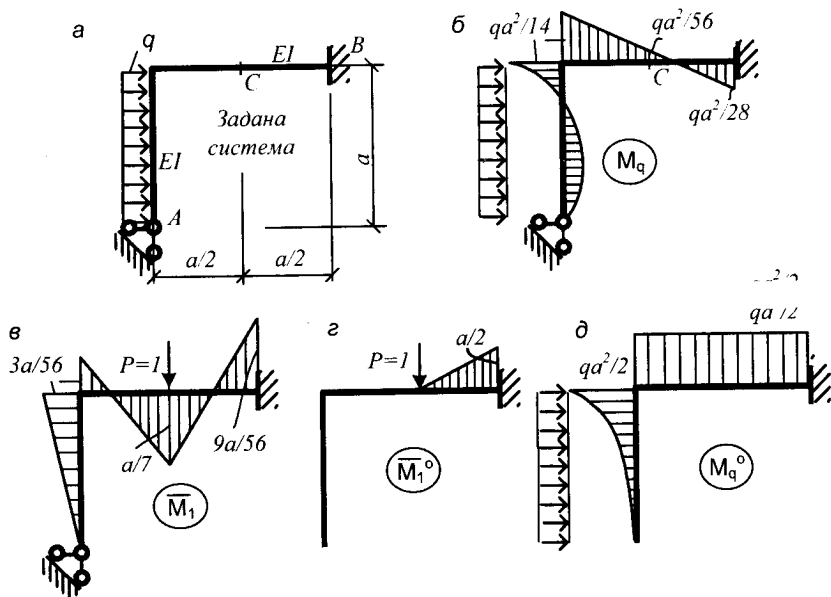


Рис. 2.26

Будуємо епюри моментів у заданому і одиничному станах (рис. 2.26, б, в). Для знаходження переміщень перемножуємо способом Верещагіна ці дві епюри:

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \sum \int \frac{M_q \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \left[\frac{q \cdot a^2}{14} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{56} - \frac{q \cdot a^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{3a}{56} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ &+ \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{3a}{56} \cdot \frac{q \cdot a^2}{14} \cdot 2 - \frac{a}{7} \cdot \frac{q \cdot a^2}{56} \cdot 2 + \frac{3a}{56} \cdot \frac{q \cdot a^2}{56} - \frac{a}{7} \cdot \frac{q \cdot a^2}{14} \right) + \\ &+ \left. \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(-\frac{a}{7} \cdot \frac{q \cdot a^2}{56} \cdot 2 - \frac{9a}{56} \cdot \frac{q \cdot a^2}{28} \cdot 2 + \frac{a}{7} \cdot \frac{q \cdot a^2}{28} + \frac{9a}{56} \cdot \frac{q \cdot a^2}{56} \right) \right] \cdot \frac{1}{EI} = \\ &= -\frac{q \cdot a^4}{448 \cdot EI}.\end{aligned}$$

Знак “мінус” показує, що точка С зміщується у напрямку, протилежному до напрямку одиничної сили, тобто догори. Для визначення переміщення таким способом потрібно було два рази розрахувати статично невизначену систему.

Спростимо задачу і одиничний стан приймемо у можливій статично визначеній системі (рис. 2.26, г). Одинична епюра будуватиметься просто. Для визначення переміщення Δ_c перемножуємо епюри (рис. 2.26, б і г):

$$\Delta_c = \sum \int \frac{M_q \cdot \bar{M}_1^0}{EI} dx = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q \cdot a^2}{56} \cdot \frac{1}{3} - \frac{q \cdot a^2}{28} \cdot \frac{2}{3} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{q \cdot a^4}{448 \cdot EI}.$$

Як бачимо, такий самий результат, як і у попередньому випадку, отримали простішим способом. Потрібно визначити, що для побудови одиничної епюри може бути вибрана будь-яка з можливих основних статично визначених систем і не обов'язково та, яку приймали під час розрахунку системи на задане навантаження. Вибирається така основна система, для якої епюра від сили $P = 1$ буде найпростіша і найкоротша.

У деяких випадках потрібно визначити переміщення у статично невизначеній системі від заданого навантаження, і немає необхідності визначати зусилля, які виникають у цій системі. У такому разі можна не розраховувати статично невизначену систему на задане навантаження, а розрахувати її на одиничну силу, яка прикладена в точці, переміщення якої визначаємо, і скерована за напрямком цього переміщення, а вантажну епюру побудувати в статично визначеній основній системі.

Використаємо це положення для визначення переміщення вище розглянутого прикладу. Для визначення Δ_c перемножимо епюри, показані на рис. 2.26, в, д.

$$\Delta_c = \sum \int \frac{M_q^0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx =$$

$$= \left[\frac{q \cdot a^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3a}{56} \cdot \frac{3}{4} + \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{3 \cdot a}{56} - \frac{a}{7} \cdot 2 + \frac{9a}{56} \right) \frac{1}{2} \right] \frac{1}{EI} = -\frac{q \cdot a^4}{448 \cdot EI}.$$

Отже, під час визначення переміщення у статично невизначених системах, як і у випадку статично визначених, потрібно розглядати два стани: заданий (вантажний), і одиничний (фіктивний).

Епюра моментів для одного стану (вантажного чи одиничного) обов'язково повинна бути побудована для заданої статично невизначеної системи, друга ж епюра може бути побудована і для статично визначеної системи, отриманої із заданої відкиданням зайвих зв'язків.

Визначення переміщень у статично невизначених фермах виконується аналогічно, але замість перемноження епюр згинальних моментів перемножують епюри поздовжніх сил.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає суть методу сил?
2. Як визначають ступінь статичної невизначеності?
3. Що приймаємо за основні невідомі під час розрахунку методом сил?
4. Порядок розрахунку статично невизначених систем методом сил.
5. Канонічні рівняння методу сил і їх зміст.
6. У чому полягає спрощення під час розрахунку складних статично невизначених систем методом сил?
7. Використання симетрії під час розрахунку систем методом сил?
8. Що вам відомо про зусилля у симетричних рамах з симетричним і обернено симетричним навантаженням?
9. Як будується остаточна епюра згинальних моментів під час розрахунку статично невизначених систем за методом сил?
10. Як перевіряють результати розрахунку за методом сил?
11. У чому полягає особливість розрахунку за методом сил на зміну температури і на задане зміщення опор?
12. Як визначаються переміщення у статично невизначених системах?
13. Розрахувати раму за методом сил (рис. 2.27).
14. Визначити кількість невідомих з врахуванням симетрії рам і навантажень (рис. 2.28).

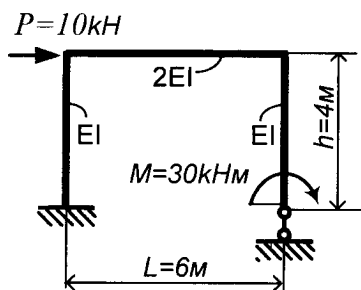


Рис. 2.27

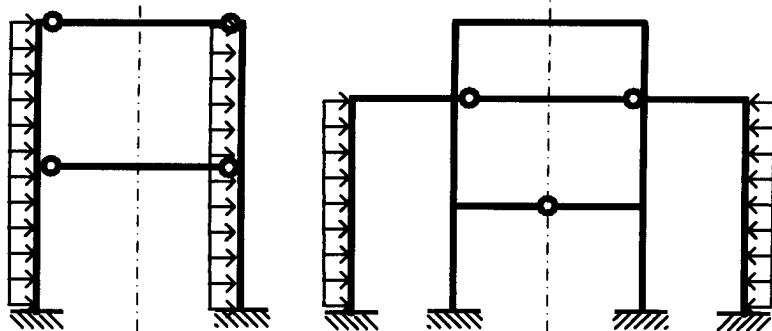


Рис. 2.28

Розділ 3

НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ

3.1. Загальні положення. Розрахунок за методом сил

Нерозрізною називається суцільна балка, яка перекриває низку суміжних прольотів і пов'язана з опорами.

Щоб уникнути виникнення напружень від рівномірного нагрівання, усі опори, крім однієї, повинні бути шарнірно-рухомими.

Конструктивні схеми балки можуть передбачати наявність консолей, затисненої чи плоско-рухомої опори (рис. 3.1, *а, б, в*), але в усіх випадках конструктивних схем розрахункова схема нерозрізної балки однакова – *n*-прольотна балка, яка має одну шарнірно-нерухому опору, а решта опор – шарнірно-рухомі (рис. 3.1).

Така уніфікація розрахункової схеми досягається тому, що:

а) консоль, як статично визначену частину будь-якої конструкції, можна відкинути, а дію навантаження на балку на консолі замінити згинальним моментом на крайній опорі з відповідним знаком (рис. 3.1, *з*);

б) коли крайня опора затиснена, то можна ввести додатковий фіктивний проліт $l_0=0$, у якому одна опора шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома (рис. 3.1, *д*);

в) коли крайня опора плоско-рухома, то теж вводиться додатковий фіктивний проліт $l_4=0$, з двома шарнірно-рухомими опорами (рис. 3.1, *е*).

Домовимось нумерувати прольоти зліва направо, починаючи з l_1 . Права опора у кожному прольоті має номер прольоту.

Перевага нерозрізної балки над однопрольотними у разі перекривання кількох прольотів полягає у тому, що під час навантаження нерозрізної балки у будь-якому прольоті до роботи долучається уся балка, зусилля розподіляються по усій довжині балки. Пружна лінія деформованої балки має плавний характер (рис. 3.2, *а*). Максимальні зусилля значно менші, ніж у відповідній системі однопрольотних балок (рис. 3.2, *б*).

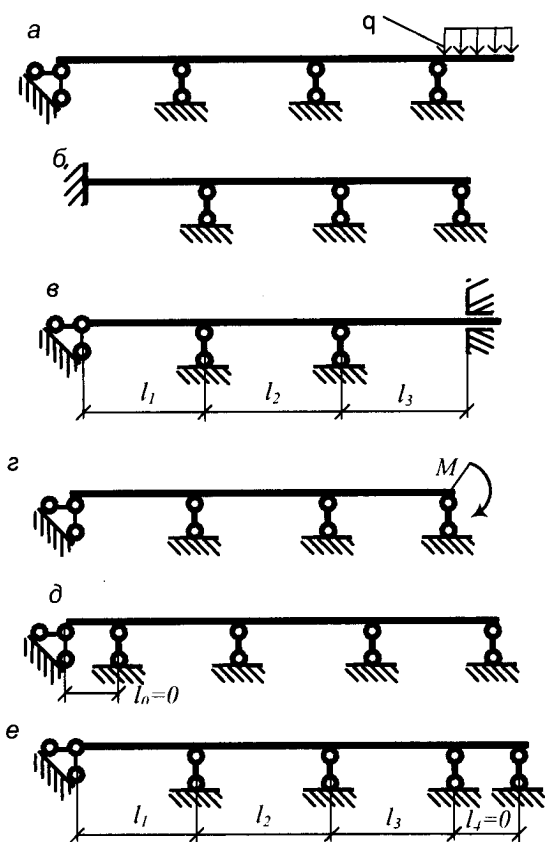


Рис. 3.1

На практиці використовувати нерозрізні балки почали давно. Вони поширені у мостобудуванні, у промисловому і цивільному будівництві.

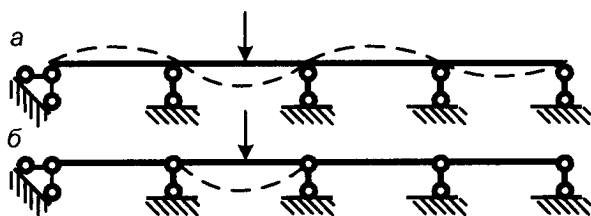


Рис. 3.2

Природно, що і розроблення розрахунку таких балок має теж давню історію. Зацікавленість нерозрізною балкою зумовлена простотою розрахункової схеми. Результати, досягнуті під час досліджень нерозрізної балки, поширюються потім і на інші споруди.

Ступінь статичної невизначеності нерозрізної балки (n) обчислюється за формулою

$$n = C_0 - 3, \quad (3.1)$$

де C_0 – кількість опорних зв'язків; 3 – мінімальна кількість опорних зв'язків для статично визначеної балки.

У разі вертикального навантаження ступінь статичної невизначеності дорівнює кількості проміжних опор плюс кількість крайніх защемлень (повних і неповних). Для балки, показаної на рис. 3.1, $a - n = 2$, для балки, показаної на рис. 3.1, $б, в - n = 3$.

Нерозрізні балки розраховують за методом сил, і все, що було викладено у розділі 2, стосується і статично невизначених нерозрізних балок.

Розглянемо балки окремо, тому що за тривалу історію розвитку розрахунку балки вироблені певні прийоми, які полегшують розрахунок, і їх потрібно використовувати. Крім того, на прикладі нерозрізної балки як найпростішої статично невизначеної конструкції легше опанувати деякі питання розрахунку за методом сил і нові методи розрахунку статично невизначених систем. Отже, для визначення кількості зайвих зв'язків у нерозрізній балці простіше використовувати формулу (3.1), ніж формули з розділу 2.

Немає потреби розглядати різні варіанти основної системи. З практики бачимо, що кращою буде основна система, отримана введенням в опорні перерізи балки шарнірів. Невідомими у цьому випадку будуть згинальні опорні моменти на проміжних опорах і крайніх защемленнях (якщо такі є) (рис. 3.3).

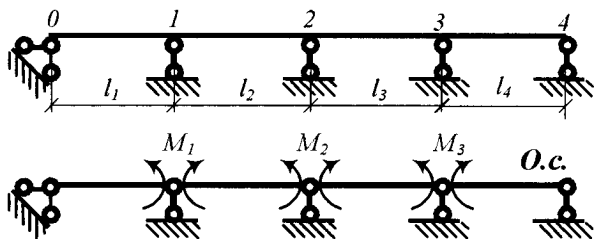


Рис. 3.3

Така основна система являє собою ряд однопрольотних балок, яка допускає взаємний кут повороту перерізів безмежно близько зліва та справа від опор (рис. 3.4, *а*). Легко переконатись, що кожний невідомий опорний момент деформує балку тільки у двох сусідніх прольотах, тобто момент на опорі n спричиняє переміщення тільки за напрямком M_{n-1} , M_n і M_{n+1} .

Як відомо, канонічні рівняння методу сил заперечують переміщення за напрямком відкинутих зв'язків. Для випадку нерозрізної балки з рекомендованою основною системою n -не рівняння виражає думку про те, що сумарний взаємний кут повороту перерізів на опорі n в основній системі від усіх невідомих опорних моментів і заданого навантаження дорівнює нулю.

Накладання таких умов на переміщення за напрямком кожного відкинутого зв'язку перетворює основну систему у тотожну із заданою, у якій пружна лінія проходить плавно над опорами (рис. 3.4, *б*).

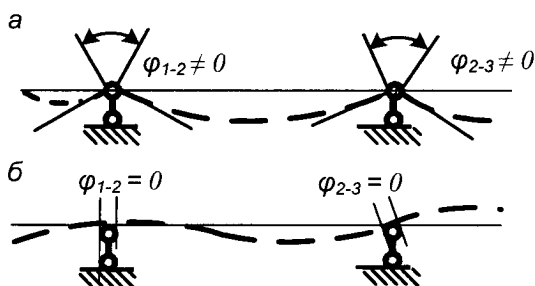


Рис. 3.4

Для опори n сумарний взаємний кут повороту перерізів визначається дією у загальному випадку тільки трьох опорних моментів: M_{n-1} , M_n , M_{n+1} і навантаженням у лівому і правому прольотах від опори n . Це означає, що в n -не канонічне рівняння входять тільки три невідомі моменти, і рівняння матиме вигляд

$$\delta_{n,n-1} \cdot M_{n-1} + \delta_{n,n} \cdot M_n + \delta_{n,n+1} \cdot M_{n+1} + \Delta_{n,p} = 0. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) називається рівнянням трьох моментів. Воно виражає умову, що на опорі n відсутній взаємний поворот перерізів балки, які розташовані безмежно близько зліва і справа від опори n .

Можна скласти таких рівнянь стільки, скільки є невідомих опорних моментів (скільки відкинуто зв'язків проти повороту у разі утворення основної системи). У перше і останнє рівняння входять по два невідомі моменти.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів n -го рівняння (3.2) застосовуватимемо формули Мора і Верещагіна. Впливом поперечних сил нехтуватимемо. Епюри згинальних моментів в основній системі від M_{n-1} , M_n і M_{n+1} , що дорівнюють одиниці, показані на рис. 3.5, б, в, з. На рис. 3.5, д зображено спіру моментів у загальному випадку від навантаження у прольоті n і $n+1$.

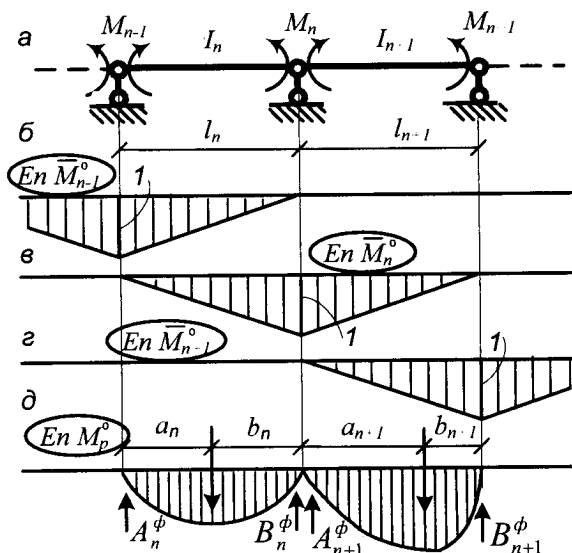


Рис. 3.5

Очевидно, що результат перемноження епюри $\overline{M}_n^0$ на епюру $\overline{M}_{n-1}^0$ і епюру $\overline{M}_{n+1}^0$ не дорівнює нулю, а з перемноження епюри $\overline{M}_n^0$ на будь-яку іншу одиничну епюру одержимо в результаті нуль. Вантажна епюра M_p^0 зображена тільки в прольотах n і $n+1$, тому що навантаження в інших прольотах не впливає на величину Δ_{np} .

$$\delta_{n,n-1} = \sum_0^s \int \frac{\overline{M}_n^o \cdot \overline{M}_{n-1}^o}{EI} ds = \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_n}{6EI_n};$$

$$\delta_{n,n} = \sum_0^s \int \frac{\overline{M}_n^o \cdot \overline{M}_n^o}{EI} ds =$$

$$= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_n}{3EI_n} + \frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}};$$

$$\delta_{n,n+1} = \sum_0^s \int \frac{\overline{M}_n^o \cdot \overline{M}_{n+1}^o}{EI} ds = \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}};$$

$$\Delta_{n,p} = \sum_0^s \int \frac{\overline{M}_n^o \cdot M_p^0}{EI} ds = \frac{1}{EI_n} \cdot \omega_n \cdot y_n + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \omega_{n+1} \cdot y_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

де ω_n і ω_{n+1} – площа епюр моментів від зовнішнього навантаження в основній системі відповідно у прольотах n і $n+1$; a_n і b_{n+1} – відстані від центрів ваги цих епюр відповідно до лівої і правої опор (рис. 3.5, δ); $\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} = B_n^\phi$ і $\frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} = A_{n+1}^\phi$, тобто це є фіктивні

реакції в однопрольотних балках (відповідно, на правій опорі у прольоті n і на лівій опорі – в прольоті $n+1$).

Фіктивні реакції – це реакції від завантаження балки епюрою M_p^0 .

Для зручності помножимо усі коефіцієнти і вільний член рівняння на $6EI_0$, де I_0 – довільний момент інерції (за I_0 зручно приймати момент інерції перерізу балки, який часто повторюється у прольотах певної балки). Позначимо: $l_n \frac{I_0}{I_n} = l'_n$ – приведена довжина

прольоту l_n ; $l_{n+1} \frac{I_0}{I_{n+1}} = l'_{n+1}$ – приведена довжина прольоту l_{n+1} . Тоді

$$6EI_0 \delta_{n,n-1} = l'_n; \quad 6EI_0 \delta_{n,n} = 2(l'_n + l'_{n+1}); \quad 6EI_0 \delta_{n,n+1} = l'_{n+1};$$

$$6EI_0 \Delta_{n,p} = 6(B_n^\phi \frac{I_0}{I_n} + A_{n+1}^\phi \frac{I_0}{I_{n+1}}),$$

і рівняння (3.2) набуде такого вигляду:

$$l'_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l'_n + l'_{n+1}) \cdot M_n + l'_{n+1} \cdot M_{n+1} + 6 \cdot (B_n^\phi \frac{I_0}{I_n} + A_{n+1}^\phi \frac{I_0}{I_{n+1}}) = 0. \quad (3.3)$$

Коли усі прольоти балки мають однакову жорсткість EI, то $EI_0 = EI$ і рівняння має вигляд:

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} + 6 \cdot (B_n^\phi + A_{n+1}^\phi) = 0. \quad (3.4)$$

Формули для визначення фіктивних опорних реакцій для типових навантажень наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

№ сх.	Схема навантаження	$6 \cdot A_n^\phi$	$6 \cdot B_n^\phi$
1		$Pl^2uv(1+v)$ за $u=v=0.5$ $\frac{3}{8}Pl^2$	$Pl^2uv(1+u)$ за $u=v=0.5$ $\frac{3}{8}Pl^2$
2		$\frac{ql^3}{4}$	$\frac{ql^3}{4}$
3		$\frac{ql^3u^2(2-u)^2}{4}$ за $u=v=0.5$ $\frac{9}{384}ql^3$	$\frac{ql^3u^2(2-u^2)}{4}$ за $u=v=0.5$ $\frac{7}{384}ql^3$
4		$\frac{5}{32}ql^3$	$\frac{5}{32}ql^3$
5		$\frac{7}{60}ql^3$	$\frac{8}{60}ql^3$
6		$M \cdot l(1-3v^2)$ за $u=v=0.5$ $\frac{M \cdot l}{4}$	$M \cdot l(1-3u^2)$ за $u=v=0.5$ $\frac{M \cdot l}{4}$

За інших комбінацій навантажень фіктивні опорні реакції можна визначити, користуючись принципом незалежності дії сил.

Якщо крайня опора нерозрізної балки затиснена (защемлена), то під час складання рівняння трьох моментів для цієї опори вводиться додатковий фіктивний проліт l_0 . За $l_0 \rightarrow 0$ переходимо до абсолютно жорсткого защемлення.

Наприклад, для нульової опори балки постійної жорсткості, зображеної на рис. 3.1, б, рівняння трьох моментів буде:

$$2 \cdot (l_0 + l_1) \cdot M_0 + l_1 \cdot M_1 + 6 \cdot A_1^{\phi} = 0, \text{ але } l_0 = 0.$$

Тоді:

$$2 \cdot l_1 \cdot M_0 + l_1 \cdot M_1 + 6 \cdot A_1^{\phi} = 0.$$

Коли нерозрізна балка у крайньому прольоті має навантажену консоль, то дія навантаження на консолі замінюється згинальним моментом на крайній опорі з відповідним знаком.

Після розв'язування системи канонічних рівнянь, складених за формулами (3.3) чи (3.4), отримаємо значення опорних моментів і визначимо зусилля у балці.

Згинальний момент у перерізі x будь-якого прольоту n балки (рис. 3.6) та поперечна сила у цьому прольоті:

$$M_p(x) = M_p^0(x) + M_{n-1} \frac{l_{n-x}}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n}; \quad (3.5)$$

$$Q_p(x) = Q_p^0(x) + \frac{M_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n}, \quad (3.6)$$

де $M_p^0(x)$, $Q_p^0(x)$ – відповідно згинальний момент і поперечна сила у перерізі x в основній системі; M_{n-1} , M_n , M_{n+1} – опорні моменти (у формули вводяться із своїм знаком).

Опорна реакція на опорі n :

$$R_n = R_n^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} - \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}; \quad (3.7)$$

де R_n^0 – реакція на опорі n в основній системі.

На практиці остаточну епюру згинальних моментів будують у такій послідовності. Опорні моменти відкладають у вигляді ординат над відповідними опорами в однаковому масштабі, і вершини цих ординат з'єднують тонкою прямою лінією. Від цієї лінії, яка окрес-

лює епюру опорних моментів, у кожному прольоті відкладаються у тому самому масштабі ординати епюри згинальних моментів від навантаження в однопрольотних балках основної системи (виконується складання двох епюр) (рис. 3.6).

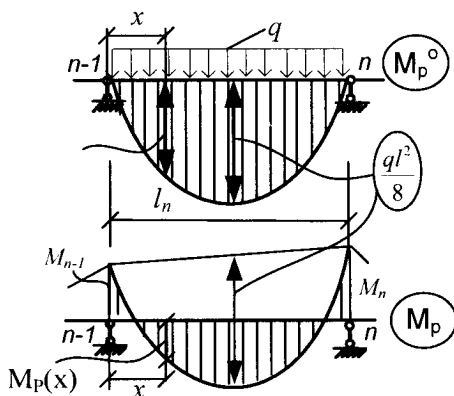


Рис. 3.6

Після побудови епюри моментів будувється епюра поперечних сил з використанням залежності, як і у випадку статично визначених балок.

Епюра Q дає змогу визначити реакції опор з умови рівноваги, так як і для статично визначених систем.

Перевіряють правильність побудови епюр так само, як і під час розрахунку рам методом сил.

3.2. Моментні фокуси і моментні фокусні відношення

Теорія методу моментних фокусних відношень природно виникає з розгляду і аналізу епюри згинальних моментів від навантаження тільки одного прольоту нерозрізної балки. У деформованому стані від такого навантаження вісь балки являє собою плавну криву, кривизна якої зменшується з віддаленням від навантаженого прольоту.

Аналогічний характер має і еюра згинальних моментів (рис. 3.7). Характерною особливістю її є те, що в кожному ненавантаженому прольоті вона обмежена прямою лінією, яка перетинає вісь балки. Діє закон загасання моментів, а це означає, що нульові точки в прольотах ліворуч від навантаженого розташовані ближче до лівих опор, а у прольотах праворуч від навантаженого – ближче до правих опор.

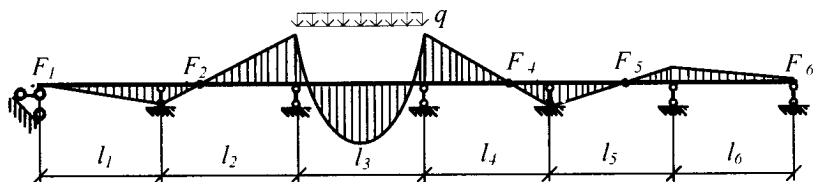


Рис. 3.7

Під час подальшого аналізу еюри моментів від навантаження одного прольоту можна переконатися, що нульові точки в ненавантажених прольотах мають постійне розташування, яке не залежить від навантаження, а є характеристикою певної балки.

Справді, коли у балці, яку розглядаємо, виконати розріз нескінченно близько від опори так, щоб все навантаження було праворуч від розрізу, відкинути частину балки з навантаженням і вплив відкинутої частини у загальному випадку замінити моментом M , вертикальною силою Q і горизонтальною N (рис. 3.8), то стане зрозуміло, що згинальний момент у ненавантаженої частині залежить тільки від M , оскільки Q сприймається опорою, а сила N (якщо вона є) не спричиняє згинальних моментів під час розрахунку за недеформованою схемою.

Отже, якщо у правій частині, яку відкинули, виникають якісь зміни (навантаження, чи навіть характер зовнішньої дії), то ці зміни позначаються на лівій частині через зміну моменту M . Можна вважати, що момент буде помножений на якийсь множник "к". За законом пропорційності усі ординати еюри M повинні бути помножені на множник "к", а це означає, що розташування нульових точок в прямолінійній еюрі M не змінюється (рис. 3.8). З рис. 3.8 стає зрозумілим, чому нульові точки еюри M у ненавантажених прольотах отримали назву моментних фокусних точок.

Нульові точки ліворуч від навантаженого прольоту називаються лівими фокусними точками F_i , а нульові точки праворуч від навантаженого прольоту – правими фокусними точками (F_i^l).

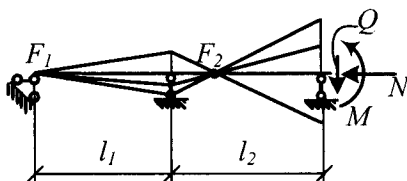


Рис. 3.8

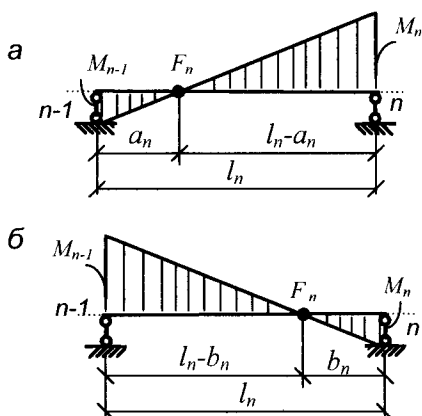


Рис. 3.9

Лівим (правим) моментним фокусом називатимемо нульову точку епюри моментів у цьому прольоті, коли цей проліт ненавантажений, і все навантаження розташоване праворуч (ліворуч) від нього.

З факту, що моментні фокуси займають певне постійне положення і епюра прямолінійна, випливає, що відношення між опорними моментами у незавантаженому прольоті є величина постійна.

Величину, яка визначається абсолютним значенням відношення більшого опорного моменту до меншого у ненавантаженому прольоті, називають моментним фокусним відношенням (k).

Залежно від того, якими фокусними точками вони визначаються, розрізняють ліві (k_n) і праві (k_n^l) моментні фокусні відношення.

У разі розташування навантаження праворуч від прольоту n епюра моментів у прольоті n матиме вигляд, зображений на рис. 3.9, *а*, а ліве моментне фокусне відношення буде:

$$k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{l_n - a_n}{a_n}. \quad (3.8)$$

У разі розташування навантаження зліва від прольоту n епюра моментів має вигляд, зображений на рис. 3.9, *б*, і праве моментне фокусне відношення:

$$k'_n = -\frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{l_n - b_n}{b_n}. \quad (3.9)$$

Знак “мінус” у формулах (3.8) і (3.9) перед відношенням моментів свідчить про те, що моменти на опорах незавантаженого прольоту завжди є різних знаків.

Коли моментне фокусне відношення і один з опорних моментів відомі, тоді за формулами (3.8) чи (3.9) можна визначити і другий опорний момент у певному прольоті балки.

Визначимо ліве моментне фокусне відношення для n -го прольоту балки. Жорсткість балки у межах кожного прольоту постійна.

Рівняння трьох моментів для опори $(n-1)$ нерозрізної балки (рис. 3.10) має такий вигляд (у разі навантаження праворуч від опори n):

$$l'_{n-1} \cdot M_{n-2} + 2 \cdot (l'_{n-1} + l'_n) \cdot M_{n-1} + l'_n \cdot M_n = 0.$$

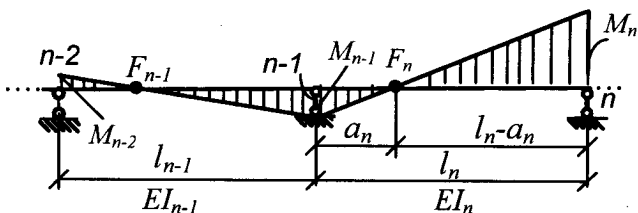


Рис. 3.10

Якщо поділити усі члени рівняння на M_{n-1} і розкрити дужки, отримаємо

$$l'_{n-1} \cdot \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} + 2 \cdot l'_{n-1} + 2 \cdot l'_n + l'_n \cdot \frac{M_n}{M_{n-1}} = 0.$$

Але з рівняння (3.8):

$$\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} = -\frac{1}{k_{n-1}}; \quad \frac{M_n}{M_{n-1}} = -k_n.$$

Тому
$$-l'_{n-1} \cdot \frac{1}{k_{n-1}} + 2 \cdot l'_{n-1} + 2 \cdot l'_n - l'_n \cdot k_n = 0.$$

Тоді

$$k_n = 2 + \frac{l'_{n-1}}{l'_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right). \quad (3.10)$$

Формула (3.10) – рекурентна. Для визначення фокусного відношення у певному прольоті потрібно знати фокусне відношення у попередньому прольоті. Отже, для того, щоб визначити ліві фокусні відношення за формулою (3.10), потрібно знати фокусне відношення у першому зліва прольоті. Коли перша зліва опора шарнірна, тоді

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty.$$

Коли перша ліва опора защемлена, то ліворуч додаємо фіктивний проліт з шарнірними опорами $l_0 = 0$. Тоді у нульовому прольоті $k_0 = \infty$, а у першому фактичному прольоті за формулою (3.10)

$$k_1 = 2 + \frac{l'_0}{l'_1} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 + 0 = 2$$

Отже, фокусне відношення у першому прольоті завжди відоме і можна за формулою (3.10) знайти ліві моментні фокусні відношення усіх прольотів.

У разі шарнірного спирання лівого кінця балки, а також за наявності консолі ліва фокусна точка збігається з опорним перерізом. У разі жорсткого затиснення (защемлення) кінця фокусна точка розташована на відстані $\frac{1}{3}$ прольоту від затиснення. Отже, у будь-якому прольоті відстань від фокусної точки до найближчої опори лежить у межах $0 \leq a_n \leq \frac{l_n}{3}$.

Праві моментні фокусні відношення визначаються аналогічно. Згідно з рис. 3.11, з рівняння трьох моментів для опори n отримаємо (за навантаження ліворуч від опори $n-1$):

$$k'_n = 2 + \frac{l'_{n+1}}{l'_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right). \quad (3.11)$$

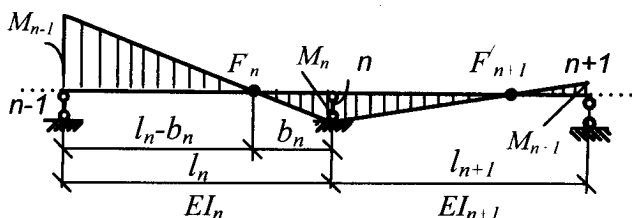


Рис. 3.11

Праве моментне фокусне відношення останнього прольоту визначається аналогічно до лівого фокусного відношення першого прольоту. Для балки з постійною жорсткістю прольотів формули (3.10) і (3.11) набувають вигляду

$$k_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right); \quad k'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right).$$

Визначасмо ліві моментні фокусні відношення з першого прольоту ліворуч, а правих – з першого прольоту праворуч. Фокусні відношення для балки визначаються один раз і можуть бути використані за будь-якого навантаження у будь-якому прольоті балки.

3.3. Визначення опорних моментів на опорах навантаженого прольоту і побудова епюр моментів за допомогою моментних фокусних відношень

Припустимо, що навантажений один із середніх прольотів балки. Виділимо ділянку нерозрізної балки, у n -му прольоті якої прикладене довільне навантаження (рис. 3.12, а). Рівняння трьох моментів для опор $(n-1)$ і (n) :

$$l'_{n-1} \cdot M_{n-2} + 2 \cdot (l'_{n-1} + l'_n) \cdot M_{n-1} + l'_n \cdot M_n = -6 \cdot A_n^\phi \cdot \frac{I_0}{I_n};$$

$$l'_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l'_n + l'_{n+1}) \cdot M_n + l'_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6 \cdot B_n^\phi \cdot \frac{I_0}{I_n},$$

чи з врахуванням залежностей (3.8) і (3.9):

$$-l'_{n-1} \cdot \frac{M_{n-1}}{k_{n-1}} + 2 \cdot (l'_{n-1} + l'_n) \cdot M_{n-1} + l'_n \cdot M_n = -6 \cdot A_n^\phi \cdot \frac{I_0}{I_n};$$

$$l'_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l'_n + l'_{n+1}) \cdot M_n - l'_{n+1} \cdot \frac{M_n}{k'_{n+1}} = -6 \cdot B_n^\phi \cdot \frac{I_0}{I_n}.$$

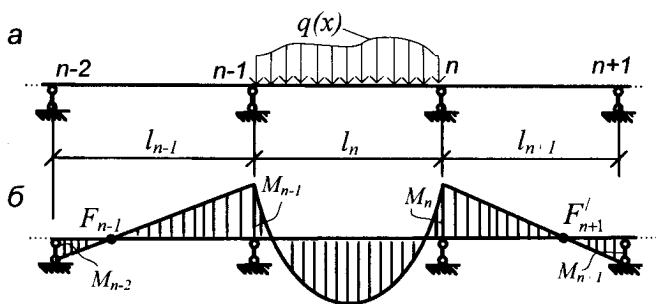


Рис. 3.12

Враховуючи $\frac{I_0}{I_n} = \frac{l'_n}{l_n}$, після перетворень одержимо:

$$\left(-\frac{l'_{n-1}}{l'_n} \cdot \frac{1}{k_{n-1}} + 2 \cdot \frac{l'_{n-1}}{l'_n} + 2\right) \cdot l'_n \cdot M_{n-1} + l'_n \cdot M_n = -6 \cdot A_n^\phi \cdot \frac{l'_n}{l_n};$$

$$l'_n \cdot M_{n-1} + \left(2 + 2 \cdot \frac{l'_{n+1}}{l'_n} - \frac{l'_{n+1}}{l'_n \cdot k'_{n+1}}\right) l'_n \cdot M_n = -6 \cdot B_n^\phi \cdot \frac{l'_n}{l_n}.$$

У першому і другому рівняннях вирази у дужках дорівнюють, відповідно, k_n і k'_n . Якщо розділимо ліву і праву частини рівнянь на l'_n , то отримуємо два таких рівняння:

$$k_n \cdot M_{n-1} + M_n = -6 \cdot A_n^\phi \cdot \frac{1}{l_n}; \quad M_{n-1} + k'_n \cdot M_n = -6 \cdot B_n^\phi \cdot \frac{1}{l_n}.$$

Звідки

$$\begin{cases} M_{n-1} = -\frac{6(A_n^\phi \cdot k'_n - B_n^\phi)}{l_n(k_n \cdot k'_n - 1)}; \\ M_n = -\frac{6(B_n^\phi \cdot k_n - A_n^\phi)}{l_n(k_n \cdot k'_n - 1)}; \end{cases} \quad (3.12)$$

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k_{n-2}};$$

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}; \quad M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k'_{n+2}}.$$

Формули (3.12) використовуються і для визначення лівого (M_{n-1}) і правого (M_n) опорних моментів крайнього навантаженого прольоту, одна з опор якого защемлена (затиснена). Якщо навантаження у крайньому прольоті з шарнірними опорами, то достатньо визначити опорний момент на проміжній опорі.

Нехай навантажений проліт є першим зліва (рис. 3.13, а):

$$M_0 = 0; M_1 = -\frac{6(B_1^\phi \cdot \infty - A_1^\phi)}{l_1(\infty \cdot k_1' - 1)} = -\frac{6B_1^\phi}{l_1 \cdot k_1'};$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2'}; M_3 = -\frac{M_2}{k_3'} \text{ і т.д.}$$

Під час навантаження у n -му крайньому правому шарнірно опертому прольоті ($k_n' = \infty$) (рис. 3.13, б):

$$M_{n-1} = -\frac{6A_n^\phi}{l_n \cdot k_n}; M_n = 0; M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-2}'}.$$

Під час навантаження на консолі (рис. 3.13, в) достатньо знати моментні фокусні відношення (у цьому випадку ліві) в усіх прольотах і консольний момент $M_4 = -P \cdot b$.

$$M_3 = -\frac{M_4}{k_4} = \frac{Pb}{k_4}; M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = -\frac{Pb}{k_4 \cdot k_3}.$$

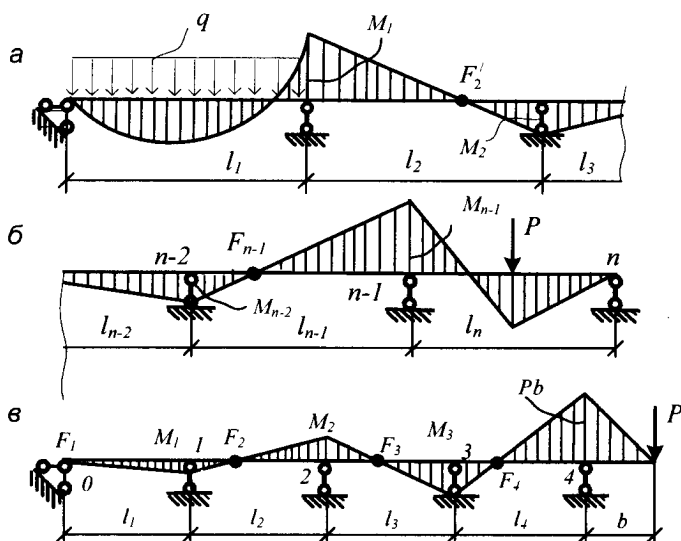


Рис. 3.13

Для побудови епюри згинальних моментів відкладемо визначені опорні моменти в однаковому масштабі на відповідних опорах і вершини цих ординат з'єднаємо прямими лініями. У ненавантажених прольотах ці прямі і окреслюють остаточну епюру моментів.

Остаточну епюру у межах навантаженого прольоту будуємо так, як і під час розрахунку балки за допомогою трьох моментів (п. 3.1).

Переваги методу моментних фокусних відношень полягають у тому, що можна просто побудувати епюру згинальних моментів від навантаження одного прольоту. Моментні фокусні відношення визначають один раз для певної балки і можуть бути використані під час розрахунку будь-якого навантаження у будь-якому прольоті. Це дає змогу ефективно використати метод моментних фокусних відношень у разі побудови ліній впливу зусиль у перерізах балки.

Недоліком методу є те, що балку можна розрахувати на навантаження тільки одного прольоту. Однак під час розрахунку балки на тимчасове навантаження, коли потрібно знаходити розрахункове сполучення навантажень і для цього будувати епюри від тимчасового навантаження у кожному прольоті окремо, цього недоліку немає.

Приклад. Для балки (рис. 3.14, а) побудувати епюру згинальних моментів методом моментних фокусних відношень.

Приймаємо $EI_0 = EI_1 = 1$, тоді $l'_1 = 8$; $l'_2 = 4$; $l'_3 = 6$; $l'_4 = 6$.

Визначаємо потрібні моментні фокусні відношення:

$$k_1 = 2; k_2 = 2 + \frac{8}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 5;$$

$$k'_4 = \infty; k'_3 = 2 + \frac{6}{6} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4; k'_2 = 2 + \frac{6}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 4,625.$$

Опорні моменти у навантаженому прольоті:

$$\begin{cases} M_1 = -\frac{6 \cdot (A_2^\phi \cdot k'_2 - B_2^\phi)}{l_2 \cdot (k_2 \cdot k'_2 - 1)} = -\frac{6 \cdot (320 \cdot 4,625 - 320)}{8 \cdot (5 \cdot 4,625 - 1)} = -39,77 \text{ (кН} \cdot \text{м)}; \\ M_2 = -\frac{6 \cdot (B_2^\phi \cdot k_2 - A_2^\phi)}{l_2 \cdot (k_2 \cdot k'_2 - 1)} = -\frac{6 \cdot (320 \cdot 5 - 320)}{8 \cdot (5 \cdot 4,625 - 1)} = -43,39 \text{ (кН} \cdot \text{м)}; \end{cases}$$

$$A_2^\phi = B_2^\phi = \frac{q \cdot l^3}{24} = \frac{15 \cdot 8^3}{24} = 320 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-39.8}{2} = 19.9 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3} = -\frac{-43.4}{4} = 10.85 \text{ (кН} \cdot \text{м)}; \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4} = -\frac{10.85}{\infty} = 0.$$

Епюра моментів зображена на рис. 3.14, б.

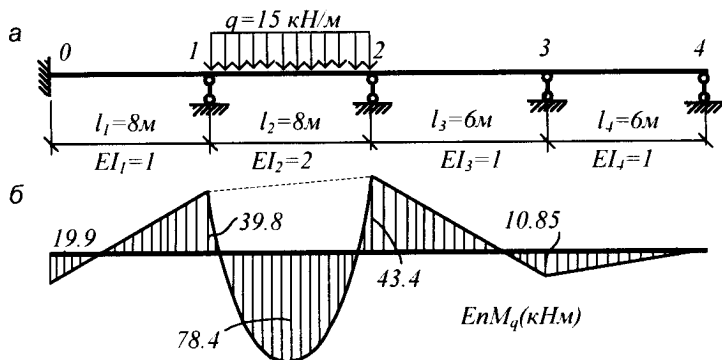


Рис. 3.14

3.4. Розрахунок нерозрізних балок на тимчасове навантаження. Побудова обвідних епюр зусиль

Під час встановлення розмірів поперечних перерізів нерозрізної балки, як і кожної іншої балки, визначальними є згинальні моменти. Тому виникає необхідність визначення їх найбільших можливих величин.

Коли балку розраховують тільки на одне навантаження, то епюра згинальних моментів від цього навантаження і буде розрахунковою, за якою підбирають перерізи чи перевіряють її міцність.

Коли ж, крім постійного навантаження, як це переважно і буває, на балку діятимуть різні тимчасові навантаження, які можуть перебувати на балці як одночасно, так і кожне окремо у різних сполученнях, то необхідно для кожного перерізу балки вибрати таке сполучення навантажень, за якого у певному перерізі буде найбільший згинальний момент як із знаком "плюс", так і зі знаком "мінус". Для цього потрібно розрахувати і побудувати епюри моментів окремо від постійного навантаження усієї балки і від навантаження окремо кожного прольоту (і консолі) тимчасовим навантаженням.

Після цього визначаємо у кількох (4–6) перерізах кожного прольоту $M_{\max}$ і $M_{\min}$: $M_{\max}$ – алгебраїчна сума згинального моменту від постійного навантаження і додатних моментів у певному перерізі від тимчасових навантажень; $M_{\min}$ – алгебраїчна сума згинального моменту від постійного навантаження і від’ємних моментів у певному перерізі від тимчасових навантажень.

Значення $M_{\max}$ і $M_{\min}$ відкладаємо у відповідних перерізах у вигляді ординат однакового масштабу. Після з’єднання вершин ординат $M_{\max}$ плавною кривою отримаємо обвідну епюру $M_{\max}$, а після з’єднання такою кривою вершин ординат $M_{\min}$ – обвідну епюру $M_{\min}$. Дві криві не перетинаються. Вони обмежують згори і знизу зоною, у якій за будь-якого поєднання постійного і тимчасового навантажень лежать значення згинальних моментів у перерізах балки.

Приклад побудови обвідних епюр показано на рис. 3.15.

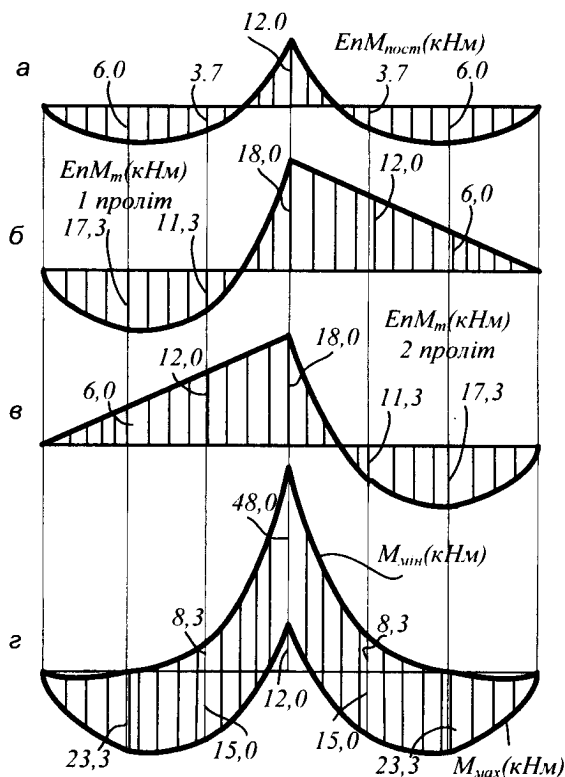


Рис. 3.15

На рис. 3.15, z показані розрахункові згинальні моменти у перерізах балки.

Обвідні епюри поперечних сил $Q_{\max}$ і $Q_{\min}$ будують за таким самим принципом. Оскільки епюри Q окреслюються переважно прямими лініями, то для побудови обвідних епюр достатньо визначити $Q_{\max}$ і $Q_{\min}$ на початку і вприкінці ділянок, у межах яких усі епюри Q (від постійного і тимчасового навантажень) окреслюються прямими лініями.

3.5. Розрахунок нерозрізних балок на нерівномірне нагрівання і осідання опор

Рівномірне нагрівання не спричиняє зусиль у нерозрізній балці, оскільки усі вертикальні опорні стержні паралельні і не заважають зміні довжини балки. Розраховують тільки на нерівномірне нагрівання – різницю зміни температури верхнього і нижнього волокон балки.

Якщо в рівняннях (3.2) і (3.3) замінимо Δ_{np} на Δ_{nt} , то отримаємо рівняння для розрахунку нерозрізної балки на зміну температури:

$$l'_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l'_n + l'_{n+1}) \cdot M_n + l'_{n+1} \cdot M_{n+1} + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{nt} = 0, \quad (3.13)$$

де Δ_{nt} – взаємний кут повороту в основній системі перерізів на опорі n від зміни температури:

$$\Delta_{nt} = \pm \alpha \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{l_n}{2h_n} + \frac{l_{n+1}}{2h_{n+1}} \right), \quad (3.14)$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; h_n і h_{n+1} – висота поперечного перерізу балки відповідно у прольотах n і $n+1$; $\Delta t = |t_1 - t_2|$ – різниця зміни температури.

У формулі (3.14) знак “плюс” приймають, коли $t_1 > t_2$ (рис. 3.16, *a*), знак “мінус” – коли $t_1 < t_2$.

Нехай балку (рис. 3.16) потрібно розрахувати на задану дію температури. Висоту перерізів у прольотах приймаємо $h_n = 0.05 \cdot l_n$.

Складаємо рівняння трьох моментів:

$$\begin{cases} 2 \cdot l'_1 \cdot M_0 + l'_1 \cdot M_1 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{0t} = 0, \\ l'_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l'_1 + l'_2) \cdot M_1 + l'_2 \cdot M_2 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{1t} = 0, \\ l'_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l'_2 + l'_3) \cdot M_2 + l'_3 \cdot M_3 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

Приймаємо $I_0 = I_1$, тоді $l'_1 = 6.0 \text{ м}$; $l'_2 = 4.0 \text{ м}$; $l'_3 = 4.0 \text{ м}$.

$$\Delta_{0t} = \alpha \cdot 40 \cdot \left(\frac{6}{2 \cdot 0,05 \cdot 6} \right) = 400 \cdot \alpha;$$

$$\Delta_{1t} = \alpha \cdot 40 \cdot \left(\frac{6}{2 \cdot 0,05 \cdot 6} + \frac{8}{2 \cdot 0,05 \cdot 8} \right) = 800 \cdot \alpha;$$

$$\Delta_{2t} = \alpha \cdot 40 \cdot \left(\frac{8}{2 \cdot 0,05 \cdot 8} + \frac{8}{2 \cdot 0,05 \cdot 8} \right) = 800 \cdot \alpha.$$

Тоді:

$$\begin{cases} 12 \cdot M_0 + 6 \cdot M_1 + 6 \cdot EI_0 \cdot 400 \cdot \alpha = 0, \\ 6 \cdot M_0 + 20 \cdot M_1 + 4 \cdot M_2 + 6 \cdot EI_0 \cdot 800 \cdot \alpha = 0, \\ 4 \cdot M_1 + 16 \cdot M_2 + 0 + 6 \cdot EI_0 \cdot 800 \cdot \alpha = 0. \end{cases}$$

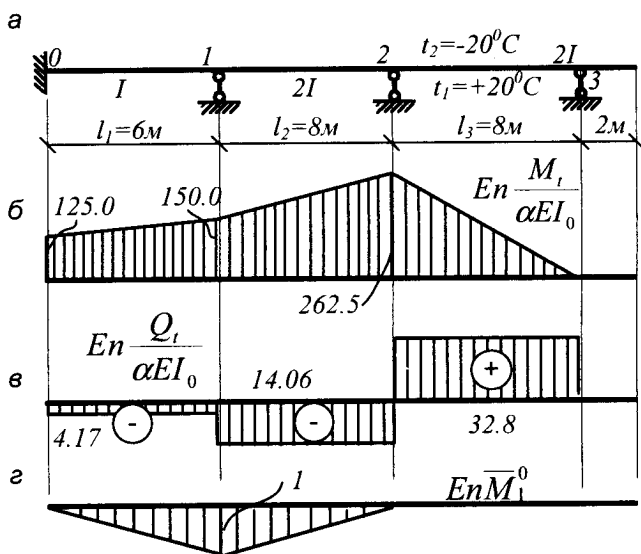


Рис. 3.16

У результаті розв'язування системи рівнянь отримаємо
 $M_0 = -125 \cdot \alpha \cdot EI_0$; $M_1 = -150 \cdot \alpha \cdot EI_0$; $M_2 = -262.5 \cdot \alpha \cdot EI_0$.

На рис. 3.16, б, в показані епюри $M_t / (\alpha EI_0)$ і $Q_t / (\alpha EI_0)$.

Кінематичну перевірку під час розрахунку на дію температури виконують за формулою

$$\sum_0^s \int \frac{\bar{M}_1^0 \cdot M_t}{EI} ds + \Delta_{it} = 0.$$

У цьому прикладі ($\bar{M}_1$ див. рис. 3.16, з):

$$\begin{aligned} \sum_0^s \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_t}{EI} ds + \Delta_{it} &= \frac{6}{6} (-2 \cdot 150 \cdot 1 - 125 \cdot 1) \frac{EI_0 \cdot \alpha}{EI_0} + \\ &+ \frac{8}{6} (-2 \cdot 150 \cdot 1 - 262.5 \cdot 1) \frac{EI_0 \cdot \alpha}{2 \cdot EI_0} + 800 \cdot \alpha = -800 \cdot \alpha + 800 \cdot \alpha = 0. \end{aligned}$$

Похибка дорівнює нулю.

Під час розрахунку нерозрізної балки на задане осідання опор рівняння трьох моментів має такий вигляд:

$$l_n' \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n' + l_{n+1}') \cdot M_n + l_{n+1}' \cdot M_{n+1} + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{no} = 0, \quad (3.15)$$

де Δ_{no} – взаємний кут повороту перерізів на опорі n в основній системі, зумовлений заданим осіданням опор.

Взаємний кут повороту перерізів на опорі визначають за формулою

$$\Delta_{no} = \varphi_n^{nig} + \varphi_n^{np},$$

де $\varphi_n^{nig}, \varphi_n^{np}$ – кути повороту перерізів ліворуч і праворуч від опори n в основній системі від осідання опор. Їх вважають додатними, якщо їхній напрямок збігається з додатним напрямком невідомих опорних моментів.

Кути повороту приймаємо такими, що дорівнюють їх тангенсам.

Розраховуємо балку (рис. 3.16, а) на показане на рис. 3.17, а зміщення опор.

Рівняння трьох моментів:

$$\begin{cases} 2 \cdot l_1' \cdot M_0 + l_1' \cdot M_1 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{0o} = 0, \\ l_1' \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1' + l_2') \cdot M_1 + l_2' \cdot M_2 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{1o} = 0, \\ l_2' \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2' + l_3') \cdot M_2 + l_3' \cdot M_3 + 6 \cdot EI_0 \cdot \Delta_{2o} = 0. \end{cases}$$

Приймаємо $I_0 = I_1 = I$, тоді

$$l_1' = 6.0 \text{ м}; \quad l_2' = 4.0 \text{ м}; \quad l_3' = 4.0 \text{ м}; \quad M_3 = 0; \quad \Delta_{0o} = 0 + 0 = 0; \\ \Delta_{1o} = 0 + 0,01 = 0,01; \quad \Delta_{2o} = -0,01 - 0,01 = -0,02, \quad (\text{рис. 3.17, б}).$$

Після підстановки:

$$\begin{cases} 12 \cdot M_0 + 6 \cdot M_1 = 0, \\ 6 \cdot M_0 + 20 \cdot M_1 + 4 \cdot M_2 + 6 \cdot EI_0 \cdot 0,01 = 0, \\ 4 \cdot M_1 + 16 \cdot M_2 + 0 + 6 \cdot EI_0 \cdot (-0,02) = 0. \end{cases}$$

У результаті розв'язування системи рівнянь:

$$M_0 = 28,12 \cdot 10^{-4} \cdot EI_0 \text{ (кНм)}; \quad M_1 = -56,25 \cdot 10^{-4} \cdot EI_0 \text{ (кНм)};$$

$$M_2 = 89,06 \cdot 10^{-4} \cdot EI_0 \text{ (кНм)}.$$

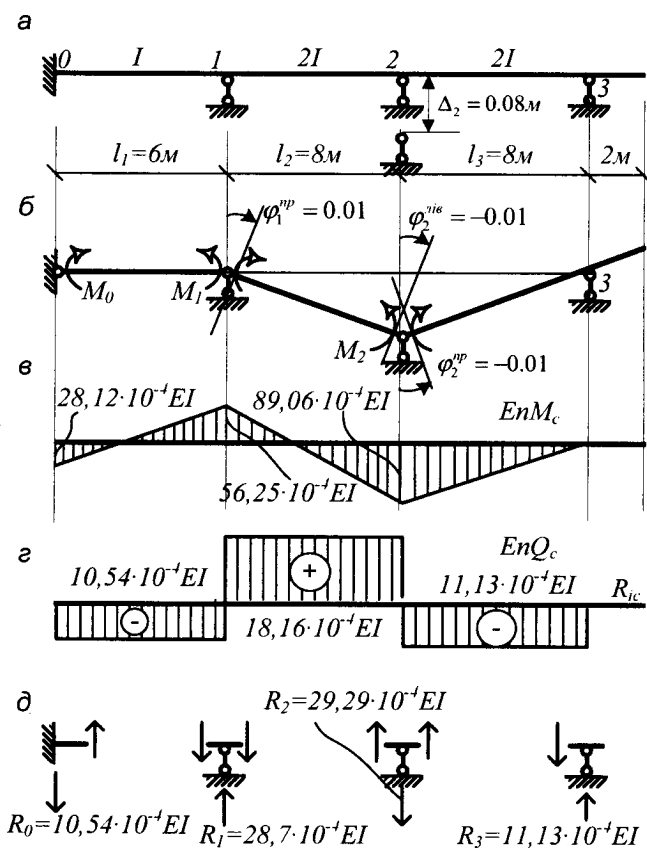


Рис. 3.17

Епюри моментів і поперечних сил показані на рис. 3.17, в і 3.17, г. На рис. 3.17, д показано визначення опорних реакцій.

Статична перевірка:

$$\begin{aligned}\sum Y &= (-10.54 + 28.7 - 29.29 + 11.13) \cdot 10^{-4} \cdot EI_0 = \\ &= (39.79 - 39.83) \cdot 10^{-4} \cdot EI_0 \approx 0.\end{aligned}$$

Кінематична перевірка виконується так само, як і під час розрахунку на температуру:

$$\sum \int_0^s \frac{\bar{M}_n^0 \cdot M_o}{EI} ds + \Delta_{io} = 0.$$

Для балки постійної жорсткості згинальні моменти як під час розрахунку на температуру, так і під час розрахунку на осідання опор, пропорційні до жорсткості балки.

3.6. Побудова ліній впливу зусиль у перерізах нерозрізної балки статичним методом

Будь-яке зусилля у перерізах прольоту нерозрізної балки можна виразити через відповідне зусилля у статично визначеній основній системі і через лівий і правий опорні моменти нерозрізної балки (див. формули (3.5), (3.6), (3.7)).

Отже, на основі формули (3.5) можна записати

$$л.вп..M(x) = л.вп.M^0(x) + (л.вп.M_{n-1}) \frac{l_n - x}{l_n} + (л.вп.M_n) \frac{x}{l_n}. \quad (3.16)$$

Це означає, що для побудови лінії впливу згинального моменту у перерізі на відстані x від лівої опори n -го прольоту нерозрізної балки потрібно побудувати лінію впливу моменту у цьому перерізі в основній системі, лінію впливу лівого опорного моменту нерозрізної балки з ординатами, помноженими на $(l_n - x)/l_n$, лінію впливу правого опорного моменту з ординатами, помноженими на x/l_n , і ординати цих трьох ліній впливу алгебраїчно скласти.

На основі формули (3.6):

$$л.вп.Q(x) = л.вп.Q^0(x) + \frac{л.вп.M_n}{l_n} - \frac{л.вп.M_{n-1}}{l_n}. \quad (3.17)$$

На основі формули (3.7):

$$л.вп. R_n = л.вп. R_n^0 + \frac{л.вп. M_{n-1} - л.вп. M_n}{l_n} - \frac{л.вп. M_{n+1} - л.вп. M_n}{l_{n+1}}. \quad (3.18)$$

Як бачимо, для побудови ліній впливу поперечної сили у перерізі на відстані x від лівої опори n -го прольоту, крім ліній впливу поперечної сили у цьому перерізі в основній системі, потрібно побудувати лінії впливу лівого і правого опорних моментів з ординатами, помноженими на $1/l_n$, а для побудови лінії впливу реакції опори n потрібно будувати лінії впливу трьох опорних моментів.

Отже, для побудови лінії впливу будь-якого зусилля у нерозрізній балці потрібно будувати лінії впливу відповідних зусиль у статично визначеній основній системі ($M^0(x)$, $Q^0(x)$, R_n^0) і лінії впливу відповідних опорних моментів у нерозрізній балці.

Як будувати лінії впливу зусиль в однопрольотній статично визначеній балці (рис. 3.18) відомо. Залишилося розглянути, як будувати лінії впливу опорних моментів у нерозрізній балці. Для побудови ліній впливу застосуємо метод моментних фокусних відношень. Опорні моменти у завантаженому прольоті визначаються формулами (3.12).

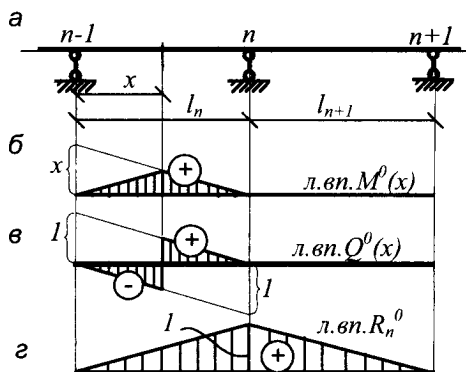


Рис. 3.18

У цих формулах фіктивні реакції A_n^ϕ і B_n^ϕ змінюються залежно від розташування навантаження.

Якщо проліт навантажений силою $P = 1$, то згідно з табл. 3.1 п. 1:

$$\begin{aligned} 6 \cdot A_n^\phi &= l_n^2 \cdot u \cdot v \cdot (1 + v), \\ 6 \cdot B_n^\phi &= l_n^2 \cdot u \cdot v \cdot (1 + u). \end{aligned} \quad (3.19)$$

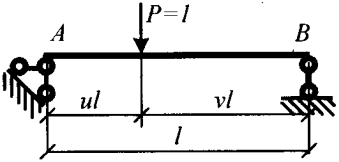
Тоді:

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= -\frac{6(A_n^\phi \cdot k_n' - B_n^\phi)}{l_n(k_n \cdot k_n' - 1)} = \frac{-l_n \cdot (u \cdot v \cdot (1 + v)k_n' - u \cdot v \cdot (1 + u))}{k_n \cdot k_n' - 1}, \\ M_n &= -\frac{6(B_n^\phi \cdot k_n - A_n^\phi)}{l_n(k_n \cdot k_n' - 1)} = \frac{-l_n \cdot (u \cdot v \cdot (1 + u)k_n - u \cdot v \cdot (1 + v))}{k_n \cdot k_n' - 1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

З формул (3.20) зрозуміло, що опорні моменти у разі переміщення вантажу $P = 1$ у прольоті нерозрізної балки є функцією u^3 , у чому просто переконатися, коли у формули замість v підставимо $(1 - u)$. Для встановлення дійсного характеру обрису криволінійної лінії впливу (кубічної параболи) у кожному прольоті балки необхідно визначити достатню кількість ординат лінії впливу. Тобто у кожному прольоті необхідно намітити достатню кількість перерізів, послідовно ставити вантаж $P = 1$ у ці перерізи і знаходити ординати відповідної лінії впливу (значення відповідного зусилля у разі розташування $P = 1$ у певному перерізі).

Для прикладу побудуємо лінію впливу опорного моменту M_1 для трипрольотної балки (рис. 3.19, а). Балка має постійний поперечний переріз. Для полегшення обчислень користуватимемось табл. 3.2 і знаходитимемо по чотири ординати лінії впливу у кожному прольоті.

Таблиця 3.2

u	v	$u \cdot v \cdot (1 + u)$	$u \cdot v \cdot (1 + v)$	Схема
0,0	1,0	0,0	0,0	
0,2	0,8	0,192	0,288	
0,4	0,6	0,336	0,384	
0,6	0,4	0,384	0,336	
0,8	0,2	0,288	0,192	
1,0	0,0	0,0	0,0	
				$6A^\phi = l^2 \cdot u \cdot v \cdot (1 + v)$ $6B^\phi = l^2 \cdot u \cdot v \cdot (1 + u)$

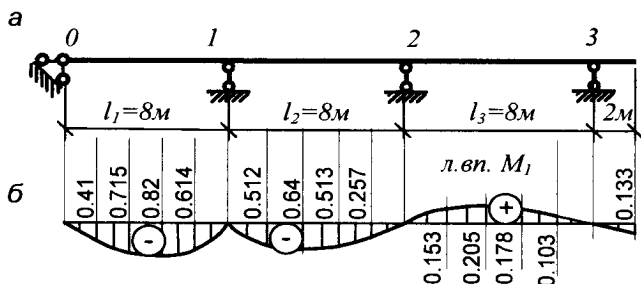


Рис. 3.19

Попередньо визначають ліві і праві фокусні відношення. Припустимо, що рухомий вантаж $P=1$ починає рухатися ліворуч, починаючи з першого прольоту:

а) $P=1$ у першому прольоті:

$$M_1 = M_n = -\frac{6 \cdot B_1^\phi}{l_1 \cdot k_1'} = -\frac{u \cdot v \cdot (1+u) \cdot l_1}{k_1'};$$

$$u=0 \quad M_1=0;$$

$$u=0.2 \quad M_1 = -\frac{0.192 \cdot 8}{3.75} = -0.410;$$

$$u=0.4 \quad M_1 = -\frac{0.336 \cdot 8}{3.75} = -0.715;$$

$$u=0.6 \quad M_1 = -\frac{0.384 \cdot 8}{3.75} = -0.820;$$

$$u=0.8 \quad M_1 = -\frac{0.288 \cdot 8}{3.75} = -0.614;$$

$$u=1 \quad M_1=0;$$

б) $P=1$ у другому прольоті:

$$M_1 = M_{n-1} = -\frac{6 \cdot (A_2^\phi \cdot k_2' - B_2^\phi)}{l_2 \cdot (k_2 \cdot k_1' - 1)} = -\frac{l_2 \cdot (u \cdot v \cdot (1+v) \cdot k_2' - u \cdot v \cdot (1+u))}{k_2 \cdot k_2' - 1}$$

$$u=0 \quad M_1=0;$$

$$u=0.2 \quad M_1 = -\frac{8 \cdot (0.288 \cdot 4 - 0.192)}{4 \cdot 4 - 1} = -0.512;$$

$$u=0.4 \quad M_1 = -\frac{8 \cdot (0.384 \cdot 4 - 0.336)}{4 \cdot 4 - 1} = -0.64 ;$$

$$u=0.6 \quad M_1 = -\frac{8 \cdot (0.336 \cdot 4 - 0.384)}{4 \cdot 4 - 1} = -0.513 ;$$

$$u=0.8 \quad M_1 = -\frac{8 \cdot (0.192 \cdot 4 - 0.288)}{4 \cdot 4 - 1} = -0.257 ;$$

$$u=1 \quad M_1 = 0 ;$$

в) $P=1$ у третьому прольоті:

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = +\frac{6 \cdot A_3^{\phi}}{l_3 \cdot k_3 \cdot k_2} = +\frac{l_3 \cdot u \cdot v \cdot (1+v)}{k_2 \cdot k_3} ;$$

$$u=0 \quad M_1 = 0 ;$$

$$u=0.2 \quad M_1 = \frac{8 \cdot 0.288}{3.75 \cdot 4} = 0.153 ;$$

$$u=0.4 \quad M_1 = \frac{8 \cdot 0.384}{3.75 \cdot 4} = 0.205 ;$$

$$u=0.6 \quad M_1 = \frac{8 \cdot 0.336}{3.75 \cdot 4} = 0.178 ;$$

$$u=0.8 \quad M_1 = \frac{8 \cdot 0.192}{3.75 \cdot 4} = 0.103 ;$$

$$u=1 \quad M_1 = 0 ;$$

г) $P=1$ на кінці консолі

Під час переміщення $P=1$ у межах консолі лінія впливу окреслюється прямою, тому достатньо знати тільки ординату лінії впливу на кінці консолі:

$$M_{\text{конс}} = -2 \cdot 1 = -2 ; \quad M_2 = -\frac{M_{\text{конс}}}{k_3} = -\frac{-2}{3.75} = 0.532 ;$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{2}{3.75 \cdot 4} = -0.133 .$$

Лінію впливу M_1 показано на рис. 3.19, б.

На рис. 3.20 показано схему побудови лінії впливу згинального моменту у перерізі κ другого прольоту балки; на рис. 3.21 – схему побудови лінії впливу поперечної сили у перерізі κ цього прольоту; на рис. 3.22 – лінії впливу реакції R_2 .

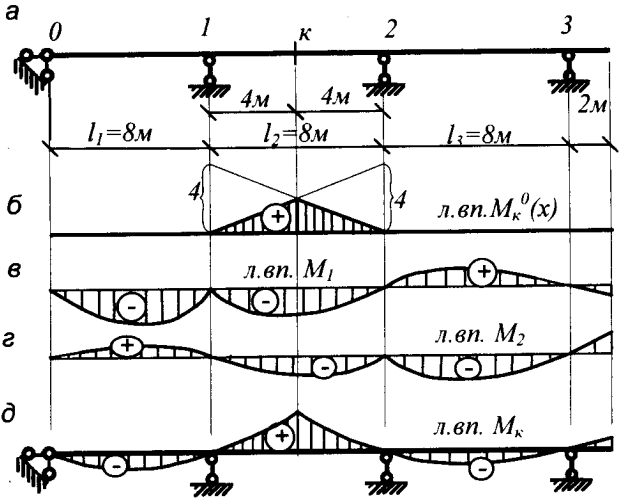


Рис. 3.20

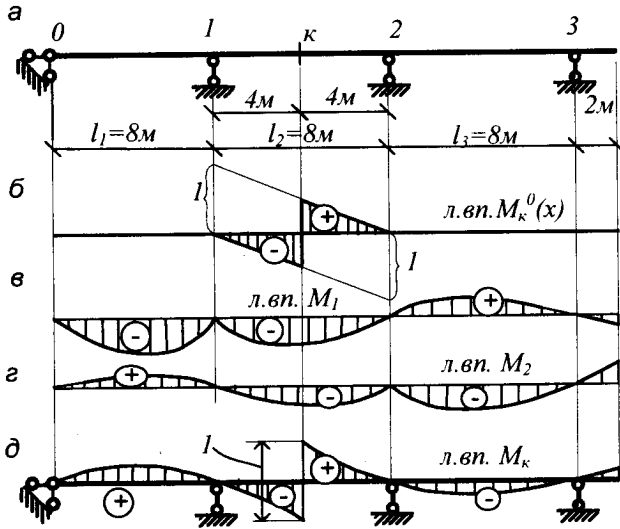


Рис. 3.21

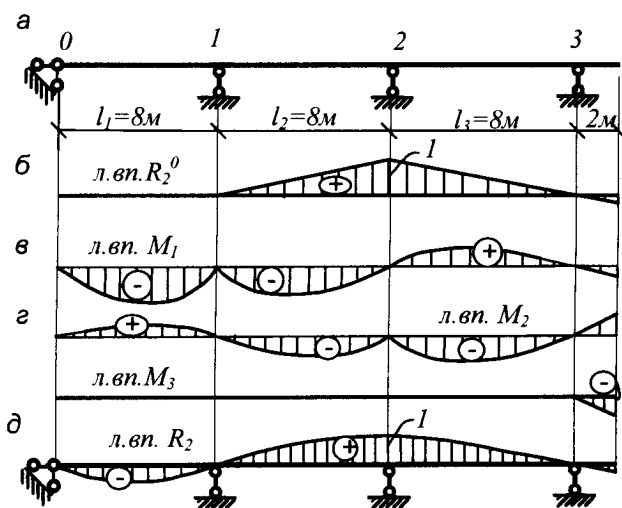


Рис. 3.22

3.7. Побудова ліній впливу зусиль у перерізах нерозрізної балки кінематичним методом

Лінії впливу зусиль можна побудувати з використанням вертикальних переміщень балки. Для цього у нерозрізній балці потрібно відкинути зв'язок, лінію впливу зусилля в якому треба побудувати, і після цього зобразити епюру вертикальних переміщень в отриманій системі, яка і буде моделлю цієї лінії впливу.

Наприклад, для отримання моделі лінії впливу опорної реакції опори 2 нерозрізної балки (рис. 3.23, а) потрібно відкинути опорний стержень на опорі 2 і замінити дію стержня на балку силою R_2 . У разі малого переміщення δ_R за напрямком сили R_2 вісь балки прийме криволінійний обрис (рис. 3.23, б).

Нехай сила $P=1$ перебуває у четвертому прольоті. Переміщення балки за напрямком сили $P=1$ — δ_p . Використовуючи принцип

можливих переміщень, одержуємо $R_2 \cdot \delta_R - P \cdot \delta_p = 0$ або $R_2 = \frac{\delta_p}{\delta_R}$.

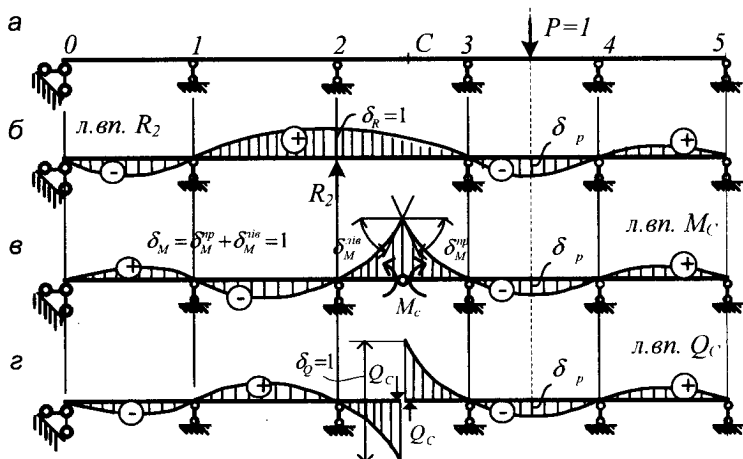


Рис. 3.23

Отже, епюра вертикальних переміщень показує зміну опорної реакції залежно від розташування навантаження $P=1$. За $\delta_R=1$ епюра вертикальних переміщень буде одночасно і лінією впливу опорної реакції R_2 (рис. 3.23, б).

Для побудови лінії впливу згинального моменту у перерізі С потрібно у цьому перерізі ввести шарнір і замінити дію відкинутого зв'язку двома моментами, прикладеними ліворуч і праворуч від шарніра (рис. 3.23, в). Якщо позначимо кут повороту перерізу ліворуч від шарніра С – $\delta_M^{лів}$, а праворуч – $\delta_M^{пр}$, то взаємний кут повороту перерізів, що примикають до шарніра С: $\delta_M = \delta_M^{лів} + \delta_M^{пр}$.

Рівняння робіт

$$M_c \cdot \delta_M^{лів} + M_c \cdot \delta_M^{пр} - 1 \cdot \delta_p = 0,$$

звідси

$$M_c = \frac{\delta_p}{\delta_M^{лів} + \delta_M^{пр}} = \frac{\delta_p}{\delta_M}, \text{ а за } \delta_M = 1 \quad M_c = \delta_p.$$

Для побудови лінії впливу поперечної сили у перерізі С (Q_c) відкинемо у ньому зв'язок, який заважає взаємному вертикальному зміщенню перерізів балки у точці С (рис. 3.23, г).

Припустимо, що виникло взаємне зміщення цих перерізів на $\delta_Q = 1$. За аналогом з попереднім випадком матимемо:

$$Q_c \cdot \delta_Q^{lis} + Q_c \cdot \delta_Q^{np} - 1 \cdot \delta_p = 0;$$

$$Q_c = \frac{\delta_p}{\delta_Q}, \text{ а при } \delta_Q = 1: Q_c = \delta_p.$$

Загальний вигляд лінії впливу R_2 , M_c і Q_c зображений на рис. 3.23, б, в, г.

Кінематичний метод дає змогу швидко і доволі правильно зображати моделі лінії впливу без виконання обчислень, і отже, виявляти у кожному окремому випадку ділянки балки, які потрібно навантажувати для отримання максимальних і мінімальних значень досліджуваного зусилля. Очевидно, для отримання максимального значення потрібно навантаження розташувати над додатними ділянками лінії впливу, а для отримання мінімального значення – над від'ємними.

Питання для самопідготовки

1. У чому полягає перевага нерозрізної балки порівняно з системою однопрольотних балок для перекриття кількох прольотів?
2. Наведіть розрахункову схему нерозрізної балки.
3. Як визначають кількість невідомих під час розрахунку нерозрізної балки методом сил?
4. Яку основну систему прийнято під час розрахунку балки з використанням рівнянь трьох моментів?
5. У чому полягає зміст рівнянь трьох моментів?
6. Яка характерна особливість епюри згинальних моментів під час навантаження одного прольоту нерозрізної балки?
7. Як визначити моментні фокусні відношення?
8. Як визначити опорні моменти на кінцях завантаженого прольоту для балки із одним навантаженням прольотом методом моментних фокусних відношень?
9. Запишіть систему рівнянь трьох моментів для розрахунку балок (рис. 3.24).
10. Побудуйте епюри згинальних моментів за методом моментних фокусних відношень для балок на рис. 3.25.
11. Застосувавши кінематичний метод, побудуйте моделі ліній впливу опорного моменту M_1 , опорних реакцій R_0 , R_1 , R_2 , R_3 , моменту і поперечної сили у перерізі С для балки (рис. 3.26).

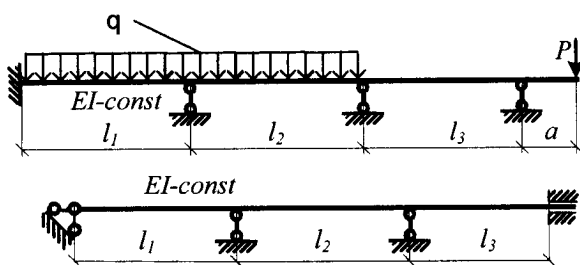


Рис. 3.24

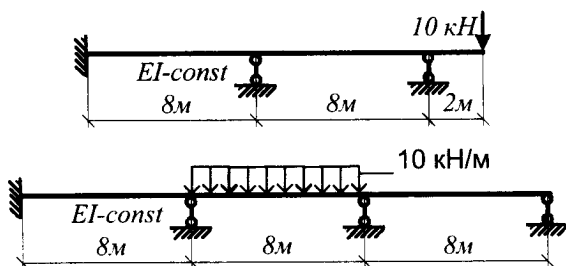


Рис.3.25

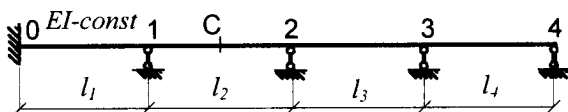


Рис. 3.26

Розділ 4

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ АРОК

4.1. Статично невизначені арки, характеристика і загальні положення розрахунку

Статично невизначені арки мають зайві зв'язки і тому, на відміну від статично визначених арок, зусилля в таких арках не можуть бути визначені за допомогою тільки рівнянь статичної рівноваги.

Залежно від кількості зайвих зв'язків (ступеня статичної невизначеності) відомо три основні види статично невизначених арок: одношарнірні (рис. 4.1, *а*), які мають один, переважно ключовий шарнір і два зайві зв'язки; двошарнірні арки (рис. 4.1, *б*), які мають два, переважно опорні (п'ятові) шарніри і один зайвий зв'язок; безшарнірні арки (рис. 4.1, *в*), які являють собою три рази статично невизначений замкнений контур.

Статично невизначені арки, як і статично-визначені, можуть бути з затяжками (рис. 4.2, *а*), з затяжками і підвісками (рис. 4.2, *б, в, г*), а також з надарковою спорудою (рис. 4.2, *д*).

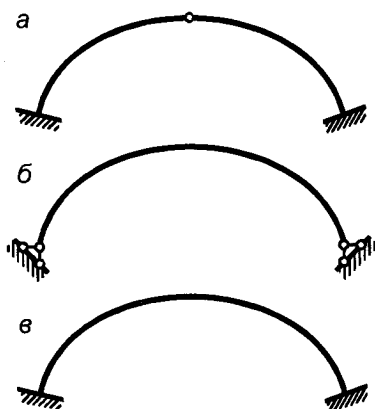


Рис. 4.1

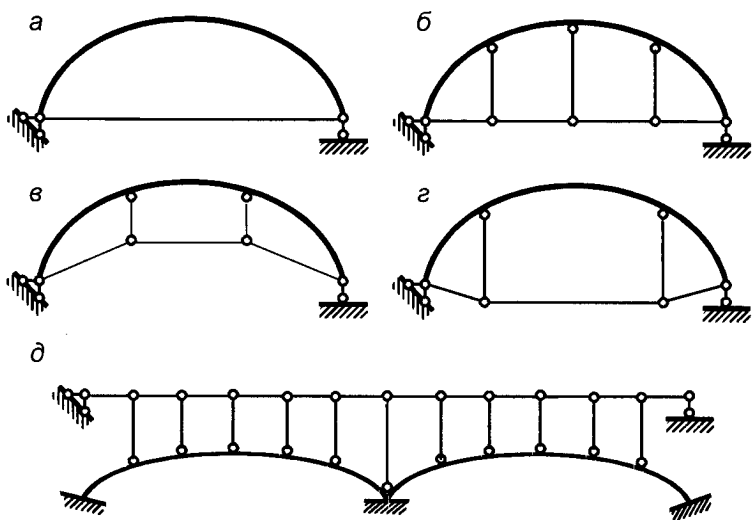


Рис. 4.2

Двошарнірні арки використовують у мостобудуванні, для покриття ангарів, спортивних та інших споруд. Їх можна виконувати з різних матеріалів. Безшарнірні арки переважно виконують з залізобетону і використовують у мостобудуванні і у гідротехнічних спорудах (арочні греблі).

Розраховують статично невизначені арки за методом сил.

Оскільки розподіл зусиль в арці залежить від геометричних характеристик поперечних перерізів і обрису арки, то спочатку вибирають закон зміни площі і моменту інерції поперечних перерізів арки і рівняння кривої, за якою окреслюється вісь арки. Вибір цих характеристик визначається техніко-економічними вимогами: мінімальні витрати матеріалу, зменшення вартості споруди, технологічність конструкцій, естетичні якості.

Вісь арки можна окреслювати по дузі кола чи еліпса та інших кривих. Найчастіше вісь арки окреслюється за квадратною параболою.

Найпростіший закон зміни моменту інерції поперечних перерізів такий:

$$- \text{для двошарнірної арки: } I = I_0 \cdot \cos^n \varphi ; \quad (4.1)$$

$$- \text{для безшарнірної арки: } I = I_0 / \cos^n \varphi , \quad (4.2)$$

де I_0 – момент інерції ключового перерізу арки; φ – кут нахилу дотичної осі у певному перерізі до горизонталі; n – число з ряду простих чисел. За $n=0$, $I=I_0=const$. З залежностей (4.1) чи (4.2) можна отримати і закони зміни площі поперечних перерізів арки.

Під час визначення переміщень в арках потрібно враховувати, що ступінь впливу на них поздовжніх і поперечних сил залежить від виду арки (у безшарнірній арці вона переважно більша, ніж у двошарнірній), від діючого навантаження і таких геометричних параметрів арки, як, зокрема, відношення стріли підіймання до прольоту (f/l), відношення висоти поперечного перерізу у ключі арки до прольоту (h/l), окреслення осі арки. Загалом часто враховують вплив усіх силових чинників. Виконуючи наближені розрахунки, впливом поздовжніх і поперечних сил нехтують, коли виконані умови:

$$\text{для двошарнірної арки: } \frac{l}{5} \leq f \leq \frac{l}{3}; h \leq \frac{l}{10};$$

$$\text{для безшарнірної арки: } f \leq \frac{l}{5}, h \leq \frac{l}{30}.$$

Але це можливо лише тоді, коли вісь арки не є раціональною чи близькою до неї.

4.2. Двошарнірні арки

Під час розрахунку двошарнірної арки (рис. 4.3, а) за методом сил за невідоме приймаємо горизонтальну реакцію шарнірно-нерухомої арки, тобто розпір арки. Основна система у цьому випадку є криволінійною балкою (рис. 4.3, б). Канонічне рівняння, яке заперечує переміщення рухомої опори основної системи, має вигляд

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

де Δ_{1p} – горизонтальне переміщення правої опори від заданого навантаження Р; δ_{11} – горизонтальне переміщення цієї опори від $X_1 = 1$.

З канонічного рівняння отримаємо

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}. \quad (4.3)$$

За формулою (4.3) визначають розмір, але для цього потрібно попередньо визначити переміщення Δ_{1p} і δ_{11} .

Для визначення переміщень розраховуємо основну систему на дію сили $X_1 = 1$ і на дію заданого навантаження. Проводимо розріз через довільний переріз k і з умови рівноваги лівої частини арки (рис. 4.3, в) отримуємо

$$\overline{M}_{k1}^0 = -y_k; \quad \overline{N}_{k1}^0 = -\cos \varphi_k; \quad \overline{Q}_{k1}^0 = -\sin \varphi_k. \quad (4.4)$$

Епюри зусиль (4.4) наведені на рис. 4.3, з.

Під час розрахунку на задане навантаження (рис. 4.4, а) з тих самих рівнянь статки отримуємо

$$M_{kp}^o = M_{kp}^6; \quad N_{kp}^o = -Q_{kp}^6 \cdot \sin \varphi_k; \quad Q_{kp}^o = Q_{kp}^6 \cdot \cos \varphi_k, \quad (4.5)$$

де M_{kp}^6 , Q_{kp}^6 – згинальний момент і поперечна сила у відповідному перерізі простої балки. Епюри зусиль (4.5) наведені на рис. 4.4, б.

Застосовуючи формули (4.4.) і (4.5), враховуємо знаки тригонометричних функцій. Для перерізів лівої піварки $\sin \varphi_k$ і $\cos \varphi_k$ додатні, для перерізів правої піварки $\cos \varphi_k$ додатний, а $\sin \varphi_k$ – від'ємний.

За формулою Мора:

$$\begin{aligned} EI_0 \cdot \delta_{11} &= \int_0^s y^2 \cdot \frac{I_0}{I} ds + \int_0^s \cos^2 \varphi \cdot \frac{I_0}{A} ds + \int_0^s \sin^2 \varphi \cdot \frac{\mu \cdot EI_0}{GA} ds; \\ EI_0 \cdot \Delta_{1p} &= -\sum \int_0^s y \cdot M_p^o \frac{I_0}{I} ds + \sum \int_0^s Q_p^o \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{I_0}{A} ds - \\ &\quad - \int_0^s \mu \cdot Q_p^o \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{EI_0}{GA} ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Безпосереднє інтегрування складових, які входять у формулу (4.6), можливе тільки в окремих випадках, коли їх можна звести до табличних інтегралів.

Здебільшого використовують наближені методи обчислення інтегралів, наприклад, чисельні. Для цього арку ділять на доволі велику кількість ділянок з однаковою горизонтальною проекцією (10–16 ділянок). Усі змінні параметри, які входять у вирази під інтегралами, вважають постійними у межах кожної ділянки і такими, що дорівнюють їх значенням у середині ділянки.

Після визначення розпору розрахунок двошарнірної арки не відрізняється від розрахунку статично визначеної тришарнірної арки за $H = X_1$:

$$M_{kp} = M_{kp}^0 - H \cdot y_k; Q_{kp} = Q_{kp}^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k, \quad (4.7)$$

$$N_{kp} = -(Q_{kp}^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k).$$

Загальний вигляд епюр остаточних зусиль показано на рис. 4.4, в.

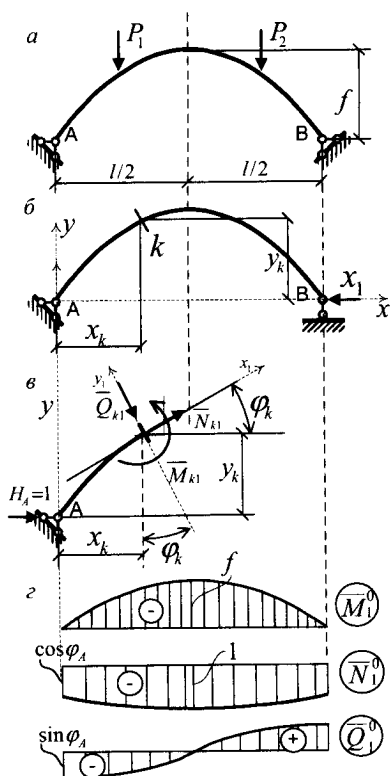


Рис. 4.3

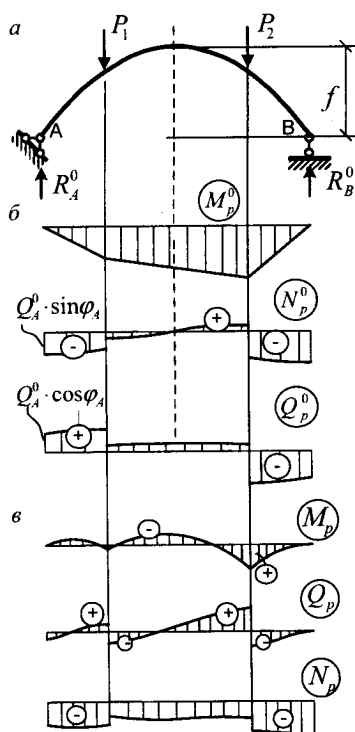


Рис. 4.4

Потрібно мати на увазі, що часто на практиці, коли арка являє собою брус малої кривини (радіус кривизни R великий ($\frac{R}{h} > 8$, де h – найбільша висота перерізу бруса) можна обчислювати Δ_{1p} без врахування впливу N і Q за спрощеною формулою:

$$\Delta_{1p} = \sum \int_0^s \frac{\overline{M}_1^0 \cdot M_p^0}{EI} ds.$$

Під час визначення горизонтального переміщення δ_{11} не завжди можна нехтувати впливом поздовжньої сили:

$$\delta_{11} = \int_0^s \overline{M}_1^{02} \cdot \frac{ds}{EI} + \int_0^s \overline{N}_1^{02} \cdot \frac{ds}{EA},$$

де $\overline{M}_1^0 = -1 \cdot y$; $\overline{N}_1^0 = -1 \cdot \cos \varphi$.

Для гнучких арок (за малих h/l) під час визначення δ_{11} можна не враховувати вплив N на переміщення δ_{11} . Так, для одного із залізобетонних мостів за $f/l = 1/7$ і $h/l = 1/26$ вплив N на переміщення δ_{11} становив 0,2 %.

В окремому випадку параболічної арки з законом зміни моменту інерції $I = I_0 \cdot \cos \varphi$ отримуємо прості вирази для переміщень і розпору X_1 . Ці вирази можна використати для попередніх розрахунків двохарнірних арок. У цьому випадку

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx \cdot \cos \varphi}{I_0 \cdot \cos \varphi} = \frac{dx}{I_0}.$$

Тому

$$\Delta_{1p} = \sum \int_0^s \frac{\overline{M}_1^0 \cdot M_p^0}{EI_0} dx = -\frac{1}{EI_0} \sum \int_s^0 y \cdot M_p^0 dx.$$

Для пологих гнучких арок:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_0} \int_0^{l/2} y^2 \cdot dx.$$

Коли $y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)$, то після інтегрування отримаємо:

$$\delta_{11} = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^2 \cdot l}{EI_0}.$$

Арка з затяжкою (рис. 4.5, а) є системою з одним зайвим зв'язком. Основну систему отримаємо, якщо розріжемо затяжку, в якій виникає тільки поздовжня сила X_1 (рис. 4.5, б). Канонічне рівняння таке саме, як і під час розрахунку двохарнірної арки:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

де δ_{11} – взаємне зміщення по горизонталі кінців затяжки у розрізі від дії сили $X_1 = 1$; Δ_{1p} – те саме, від прикладеного навантаження.

Від заданого навантаження у перерізаній затяжці зусиль не виникає, тому Δ_{1p} буде таке саме, як і у разі аналогічної двохарнірної арки. Для переміщення δ_{11} , порівняно з двохарнірною аркою, додається вплив подовження затяжки від $X_1 = 1$.

Воно буде $\frac{l}{E_s \cdot A_s}$, де $E_s \cdot A_s$ – жорсткість затяжки на розтяг.

Для арки з затяжкою:

$$\delta_{11} = \delta_{11,a} + \frac{l}{E_s \cdot A_s},$$

де $\delta_{11,a}$ – переміщення від $X_1 = 1$ для двохарнірної арки.

Нехтуючи впливом поздовжніх і поперечних сил:

$$\delta_{11} = \int_0^s y^2 \frac{ds}{EI} + \frac{l}{E_s \cdot A_s}, \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{-\int_0^s y \cdot M_p^0 \frac{ds}{EI}}{\int_0^s y^2 \frac{ds}{EI} + \frac{l}{E_s \cdot A_s}}. \quad (4.8)$$

Як зрозуміло з (4.8), розпір в арці з затяжкою завжди менший, ніж розпір у двохарнірній арці без затяжки. За $E_s \cdot A_s = 0$, $X = 0$ – арка стає криволінійною балкою. За $E_s \cdot A_s = \infty$ – маємо двохарнірну арку.

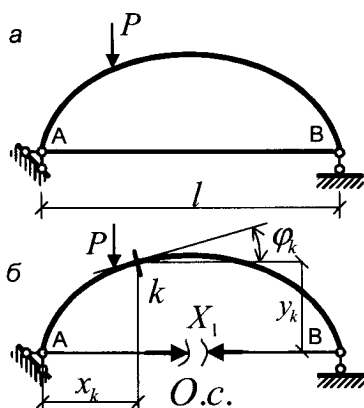


Рис. 4.5

Побудова ліній впливу розпору чи зусилля у зтяжці статичним методом виконується на основі залежності (4.3), яку можна записати так:

$$H = -\frac{EI_0 \cdot \Delta_{1P}}{EI_0 \cdot \delta_{11}},$$

де $EI_0 \cdot \Delta_{1P}$ – змінна величина, яка залежить від розташування на арці вантажу $P=1$ і визначається за формулою (4.6); $EI_0 \cdot \delta_{11}$ – стала величина, яка визначається за формулою (4.5).

Кількість фіксованих положень вантажу $P=1$ дорівнює кількості ординат лінії впливу, які визначаються.

Лінію впливу H для арки без зтяжки показано на рис. 4.6.

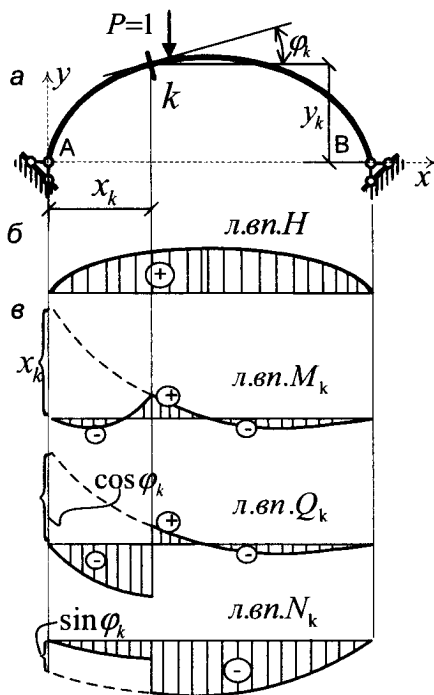


Рис. 4.6

Для визначення ординат ліній впливу зусиль у будь-якому перерізі арки необхідно, крім лінії впливу H , мати лінії впливу цих зусиль у звичайній балці. Загальний вигляд ліній впливу зусиль у довільному перерізі k арки зображений на рис. 4.6, а, б, в.

Визначення розрахункових розташувань рухомого навантаження виконується так, як і для статично визначених систем.

4.3. Безшарнірна арка

Безшарнірна арка тричі статично невизначена. Канонічні рівняння для безшарнірної арки (рис. 4.7, а) мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Під час розрахунку без використання комп'ютерних програм важливим є вибір основної системи. Рациональною буде така система із застосуванням жорстких консолей і перенесенням невідомих у пружний центр системи (рис. 4.7, б).

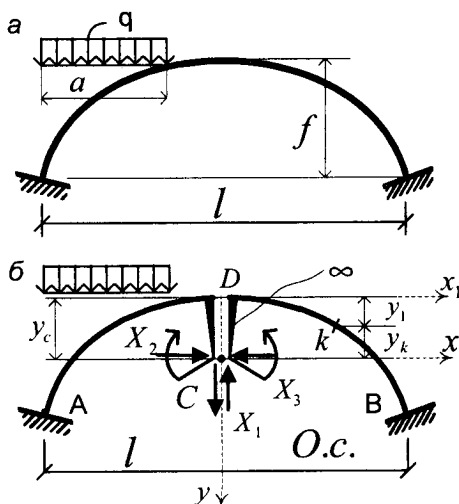


Рис. 4.7

Розташування пружного центра (точки C) визначається з умов, що побічні коефіцієнти дорівнюють нулю. Основні невідомі зосереджені у пружному центрі. У точці K сила $X_1 = 1$ (рис. 4.8, a) спричиняє зусилля $\overline{M}_{k1}^0 = x_k$; $\overline{Q}_{k1}^0 = \cos \varphi_k$; $\overline{N}_{k1}^0 = \sin \varphi_k$. Епюри цих зусиль показані на рис. 4.8, b . Від сили $X_2 = 1$ (рис. 4.9) $\overline{M}_{k2}^0 = y_k$; $\overline{Q}_{k2}^0 = -\sin \varphi_k$; $\overline{N}_{k2}^0 = \cos \varphi_k$. Прийнято, що $\cos \varphi$ – додатний для усіх перерізів арки; $\sin \varphi$ – додатний для перерізів правої піварки і від’ємний для перерізів лівої піварки. Відповідні епюри показані на рис. 4.9, b .

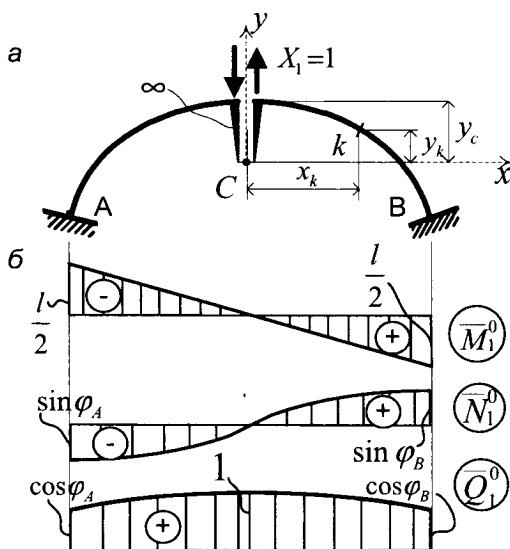


Рис. 4.8

Від $X_3 = 1$ (рис. 4.10, a) $\overline{M}_{k3}^0 = -1$; $\overline{Q}_{k3}^0 = 0$; $\overline{N}_{k3}^0 = 0$. Епюру моментів зображено на рис. 4.10, b .

Епюри зусиль в основній системі від дії зовнішнього навантаження показані на рис. 4.11, b . Аналіз одиничних епюр показує, що $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, оскільки ці коефіцієнти визначають перемноженням симетричних епюр на обернено симетричні (якщо арка симетрична).

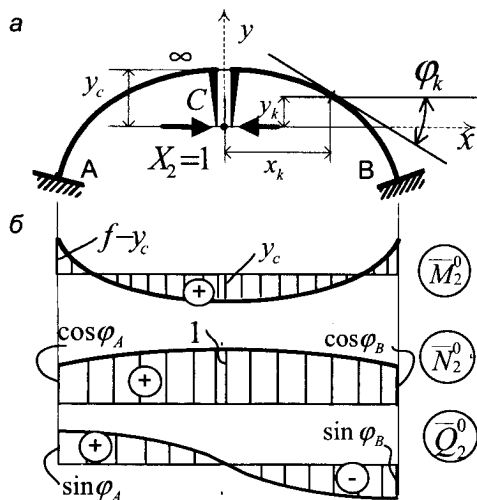


Рис. 4.9

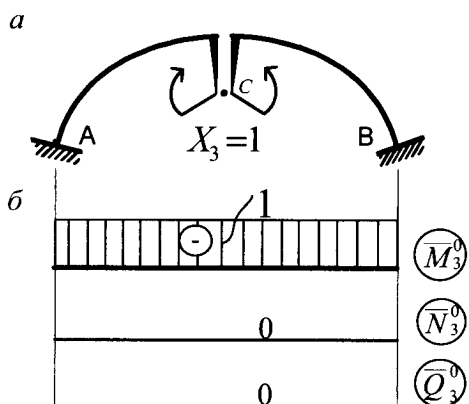


Рис. 4.10

Для того, щоб останній другорядний коефіцієнт дорівнював нулю, потрібно відповідно визначити довжину консолей — y_c (рис. 4.7).

З рис. 4.7 бачимо, що ордината будь-якої точки на осі арки: $y = y_c - y_1$, тоді умова

$$\delta_{23} = \int_0^s \frac{\overline{M}_2^0 \cdot \overline{M}_3^0}{EI} ds = 0, \text{ або } EI_0 \delta_{23} = \int_0^s \frac{I_0}{I} \overline{M}_2^0 \cdot \overline{M}_3^0 ds = 0$$

набуде такого вигляду:

$$\int_0^s \frac{I_0}{I} (y_c - y_1) ds = 2 \cdot \int_A^D \frac{I_0}{I} (y_c - y_1) ds = 0.$$

Звідки

$$y_c = \frac{\int_A^D y_1 \frac{I_0}{I} ds}{\int_A^D \frac{I_0}{I} ds}, \quad (4.10)$$

де y_1 – ординати точок на осі арки у системі координатних осей $x_1 y$ (рис. 4.7, б).

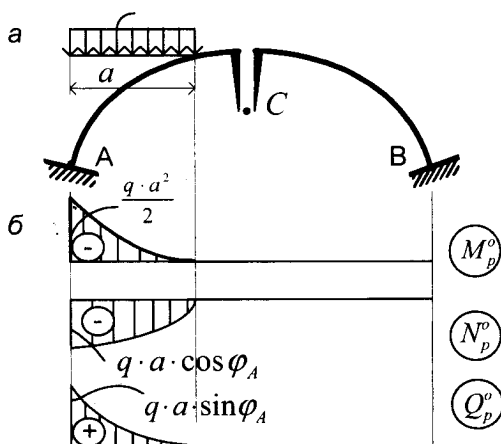


Рис. 4.11

Отже, якщо y_c буде визначений за формулою (4.10), усі друго-рядні коефіцієнти канонічних рівнянь дорівнюватимуть нулю, а саме:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}. \quad (4.11)$$

Коли момент інерції перерізів параболічної арки змінюється за законом $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$, то $y_c \cong \frac{f}{3}$. Переміщення, які входять у вирази (4.11), визначаються за формулою Мора:

$$\left\{ \begin{aligned} EI_0 \cdot \delta_{11} &= \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot x^2 \cdot ds + \int_0^s \frac{I_0}{F} \cdot \sin^2 \varphi \cdot ds + \int_0^s \frac{EI_0}{GF} \mu \cdot \cos^2 \varphi \cdot ds, \\ EI_0 \cdot \delta_{22} &= \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot y^2 \cdot ds + \int_0^s \frac{I_0}{F} \cdot \cos^2 \varphi \cdot ds + \int_0^s \frac{EI_0}{GF} \mu \cdot \sin^2 \varphi \cdot ds, \\ EI_0 \cdot \delta_{33} &= \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot ds. \end{aligned} \right. \quad (4.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} EI_0 \cdot \Delta_{1p} &= \sum \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot x \cdot M_p^o \cdot ds + \sum \int_0^s \frac{I_0}{F} \cdot N_p^o \cdot \sin \varphi \cdot ds + \\ &+ \sum \int_0^s \frac{EI_0}{GF} \mu \cdot Q_p^o \cdot \cos \varphi \cdot ds, \\ EI_0 \cdot \Delta_{2p} &= \sum \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot y \cdot M_p^o \cdot ds + \sum \int_0^s \frac{I_0}{F} \cdot N_p^o \cdot \cos \varphi \cdot ds - \\ &- \sum \int_0^s \frac{EI_0}{GF} \mu \cdot Q_p^o \cdot \sin \varphi \cdot ds, \\ EI_0 \cdot \Delta_{3p} &= - \sum \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot M_p^o \cdot ds. \end{aligned} \right. \quad (4.13)$$

Обчислюють інтеграли, які входять в (4.12) і (4.13), як і для двохарнірної арки: в окремих випадках – безпосереднім інтегруванням, здебільшого – числовим підсумовуванням остаточної кількості складових. Можна використовувати спрощення, як і для двохарнірної арки.

Після визначення X_1 , X_2 і X_3 на основі принципу незалежності дії сил визначають зусилля у будь-якому перерізі арки.

Для перерізу K , наприклад:

$$M_k = M_{kp}^0 + x_k \cdot X_1 + y_k \cdot X_2 - X_3,$$

$$Q_k = Q_{kp}^0 + \cos \varphi_k \cdot X_1 - \sin \varphi_k \cdot X_2,$$

$$N_k = N_{kp}^0 + \sin \varphi_k \cdot X_1 + \cos \varphi_k \cdot X_2.$$

Для арки, зображеної на рис. 4.7, а, вигляд епюр остаточних зусиль показаний на рис. 4.12, б.

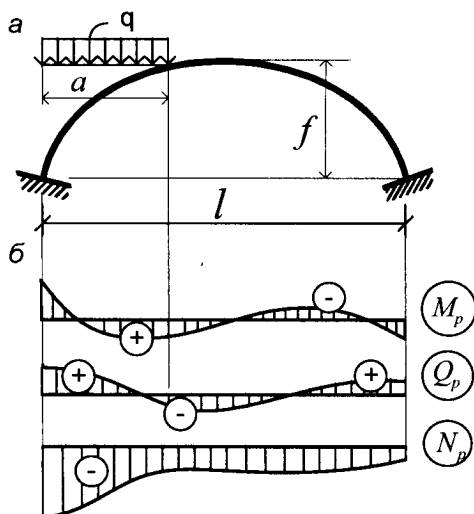


Рис. 4.12

Перевірка розрахунку така сама, як і для статично невизначених рам. У зв'язку з особливостями структури арок і малою кількістю коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь виконують переважно тільки кінематичну перевірку.

Під час розрахунку без використання обчислювальної техніки розрахунок статично невизначених арок зручно виконувати у табличній формі.

Питання для самопідготовки

1. Які є види статично невизначених арок і які їх основні ознаки?
2. Які раціональні основні системи статично невизначених арок можна використовувати під час розрахунку їх за методом сил?
3. Завдяки чому другорядні коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил під час розрахунку безшарнірної арки можуть дорівнювати нулю?

Розділ 5

СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ ФЕРМИ І КОМБІНОВАНІ СИСТЕМИ

5.1. Розрахунок статично невизначених шарнірних ферм на нерухоме і рухоме навантаження

Нижче розглянемо розрахунок статично невизначених шарнірних стержневих ферм на дію вузлового навантаження. Справді, з'єднання стержнів ферм у вузлах жорстке, у результаті чого у вузлах виникають моменти, аналогічні до рамних конструкцій. Однак розрахунок ферм з жорсткими вузлами дуже складний і може бути раціонально виконаний тільки за методом переміщень чи іншим способом.

Розглянемо загальноприйнятий розрахунок ферм як систему з ідеально шарнірними вузлами.

Статично невизначені ферми мають зайві зв'язки, зусилля в яких неможливо визначити за допомогою тільки рівнянь статичної рівноваги. Зайвою може бути або кількість стержнів безпосередньо ферм (внутрішня статична невизначеність), або кількість її опорних закріплень (зовнішня статична невизначеність). Коли не можна нехтувати жорсткістю вузлів, розглядають інший клас конструкцій – рами або комбіновані системи.

Статично невизначені ферми мають переваги, притаманні усім фермам (робота елементів на центральний стиск або розтяг), і завдяки простоті їх виготовлення і монтажу дуже поширені у різних галузях будівництва.

На рис. 5.1 показані розрахункові схеми деяких ферм: а) двопрольотної крокв'яної; б) трипрольотної нерозрізної мостового типу; в) двогратчастої; г) із шпренгелем.

Ступінь статичної невизначеності ферм визначають за формулою

$$n = C + C_{on} - 2 \cdot B,$$

де n – кількість зайвих зв'язків; C – кількість стержнів ферми; C_{on} – кількість опорних зв'язків; B – кількість вузлів.

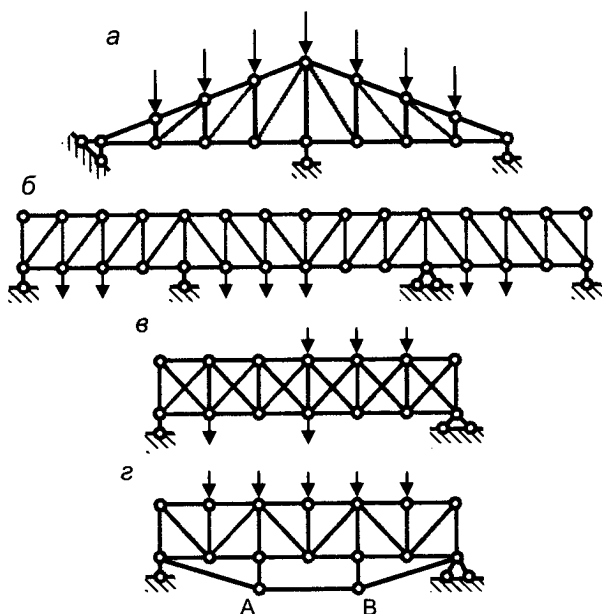


Рис. 5.1

Розраховують статично невизначені ферми переважно за методом сил. Для ферми (рис. 5.1, г), яка має один зайвий зв'язок, основну систему отримаємо, якщо розріжемо один з умовно необхідних стержнів, наприклад стержень АВ, і прикладемо у перерізі невідоме зусилля X_1 (рис. 5.2).

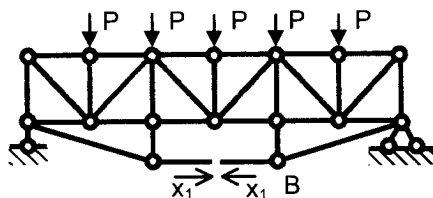


Рис. 5.2

Канонічне рівняння методу сил має вигляд

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Основна система розраховується як статично-визначена ферма на дію зовнішнього навантаження і сили $X_1 = 1$.

У результаті визначають зусилля N_{ip}^o в усіх стержнях основної системи від заданого навантаження і зусилля $\bar{N}_{il}^o$ від $X_1 = 1$.

Переміщення обчислюють за такими формулами

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{N_{ip}^o \cdot \bar{N}_{il}^o \cdot l_i}{E_i A_i}; \quad \delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_{il}^{o2} \cdot l_i}{E_i A_i},$$

де l_i – довжина кожного стержня;

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum \frac{N_{ip}^o \cdot \bar{N}_{il}^o \cdot l_i}{E_i A_i}}{\sum \frac{\bar{N}_{il}^{o2} \cdot l_i}{E_i A_i}}. \quad (5.1)$$

Коли усі стержні ферми виготовлені з одного матеріалу, то модуль пружності виносимо за знак сум і скорочуємо.

Остаточні зусилля в елементах ферм визначають за формулою

$$N_{ip} = N_{ip}^o + \bar{N}_{il}^o \cdot X_1. \quad (5.2)$$

Кінематична перевірка:

$$\sum \frac{N_{ip} \cdot \bar{N}_{il}^o \cdot l_i}{E_i A_i} = 0.$$

Усі обчислення зручно виконувати у табличній формі.

У випадку складних, багато разів статично невизначених ферм потрібно більше уваги приділяти вибору основної системи. Вибираючи раціональну основну систему, можемо використати способи, які викладені вище стосовно рамних конструкцій: використання симетричної системи, перетворення навантаження, групові невідомі.

Проілюструємо вибір основної системи на прикладі симетричної ферми (рис. 5.3, а).

Ферма має чотири зайві зв'язки. Основну систему можна отримати, якщо розрізати будь-які чотири стержні, оскільки усі стержні ферми умовно необхідні. Якщо розріжемо чотири симетричні стояки (рис. 5.3, б), то не буде другорядних коефіцієнтів, які дорівнюють нулю. Це бачимо з аналізу роботи основної системи за дії усіх $X_i = 1$ ($i = 1, \dots, 4$).

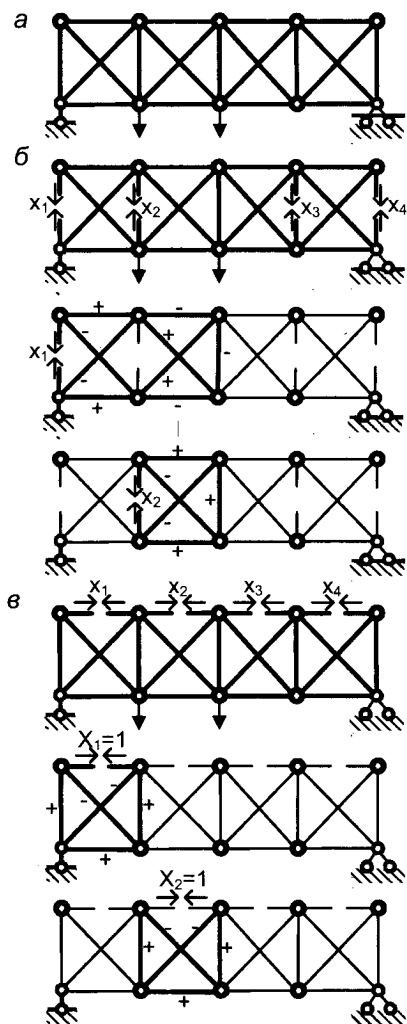


Рис. 5.3

розташування одиничної зосередженої сили основне невідоме визначають з канонічного рівняння методу сил за формулою (5.1).

Для побудови лінії впливу зусилля X_1 необхідно вантаж $P=1$ послідовно ставити в усі вузли вантажного пояса, у кожному положенні вантажу розраховувати ферму і визначати δ_{1p} (δ_{11} – стала величина).

Це трудомісткий процес, оскільки розрахунок потрібно повторювати стільки разів, скільки вузлів має вантажний пояс, за винятком опорних.

У другому варіанті основної системи розрізані чотири стержні верхнього пояса (рис. 5.3, б). Стержні, які працюють за $X_i=1$ ($i=1,2$), зображені жирними лініями. Оскільки розподіл зусиль за дії $X_i=1$ ($i=1,\dots,4$) має локальний характер (у межах однієї панелі), то δ_{13} , δ_{14} , δ_{24} , δ_{42} , δ_{41} і δ_{31} дорівнюють нулю. Отже, другий варіант основної системи є раціональніший.

Під час визначення зусиль у стержнях статично невизначених ферм від рухомого навантаження, а також його розрахункового найневигоднішого положення використовують лінії впливу.

Лінії впливу зусиль у стержнях ферм будують після побудови ліній впливу зайвих невідомих.

Розглянемо двопрольотну симетричну балкову ферму з нижнім вантажним поясом (рис. 5.4, а). Основну систему отримаємо, якщо відкинемо проміжну опору. За будь-якого

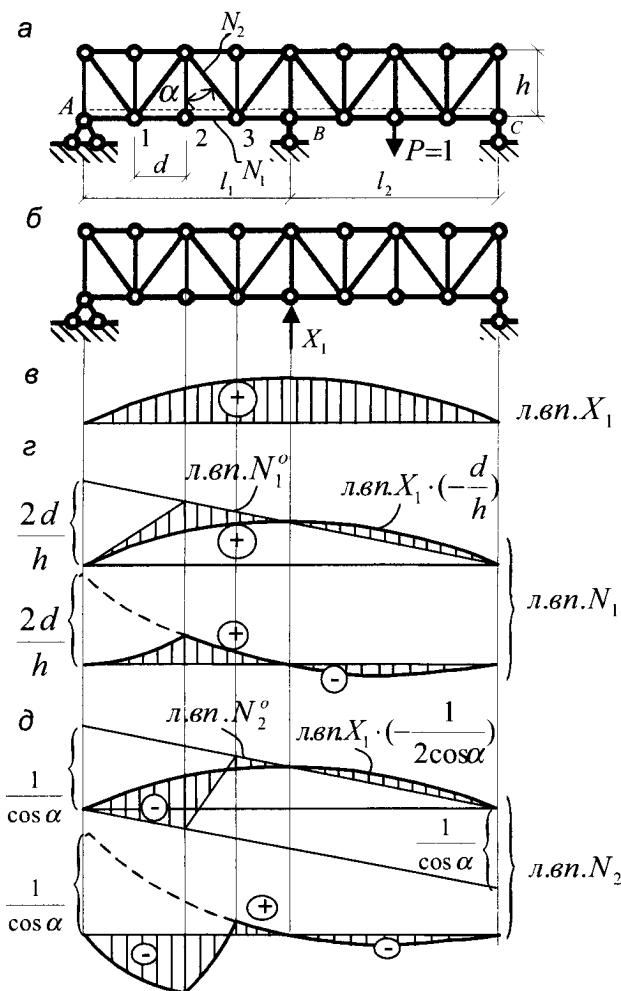


Рис. 5.4

Під час побудови лінії впливу X_1 можна використати теорему про взаємність переміщень ($\delta_{1p} = \delta_{p1}$). Тоді

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}, \quad (5.3)$$

де δ_{p1} – прогин точки прикладання вантажу $P=1$ від нерухомої сили $X_1=1$.

Оскільки δ_{11} – стала величина, то з рівняння (5.3) виникає, що для отримання ординат лінії впливу X_1 необхідно ординати графіка прогинів вузлів вантажного пояса поділити на δ_{11} (рис. 5.4, в).

На підставі формули (5.2) лінію впливу будь-якого зусилля отримують за допомогою алгебраїчного підсумовування ординат лінії впливу певного зусилля в основній системі (статично визначеній фермі) і ординат лінії впливу X_1 , помножених на постійний множник – зусилля у розглядуваному стержні від $X_1 = 1$:

$$\text{л.вп.} N_i = \text{л.вп.} N_i^o + \overline{N}_{11}^0 \cdot (\text{л.вп.} X_1).$$

Побудовані в такий спосіб лінії впливу N_1 і N_2 показано на рис. 5.4, з, д.

Розрахунок статично невизначених ферм може ґрунтуватися на використанні матриць впливу поздовжніх зусиль, елементи яких визначаються у скалярній формі з рівнянь рівноваги для статично визначених систем. Такий розрахунок об'єднує усі елементи методу сил (визначення кількості зайвих зв'язків, вибір і розрахунок основної системи, визначення остаточних зусиль в елементах системи) і передбачує використання стандартних програм для реалізації матричних операцій на ЕОМ.

5.2. Розрахунок комбінованих систем

У статично невизначених комбінованих системах є зайві зв'язки. Ступінь статичної невизначеності визначаємо за формулою (1.2).

Розрахунок статично невизначених комбінованих систем за методом сил на нерухоме навантаження принципово не відрізняється від розрахунку інших конструкцій. Особливістю є те, що залежно від умов роботи елементів (центральный розтяг чи стиск, згин, розтяг чи стиск із згином) під час визначення переміщень враховуються відповідні складові формули Мора.

Розглянемо розрахунок один раз статично невизначеної шпренгельної балки (рис. 5.5, а). Вважаємо, що жорсткість балки на згин $E_o I_o$ і на стиск (розтяг) $E_o A_o$, а також поздовжні жорсткості інших елементів EA_i – відомі.

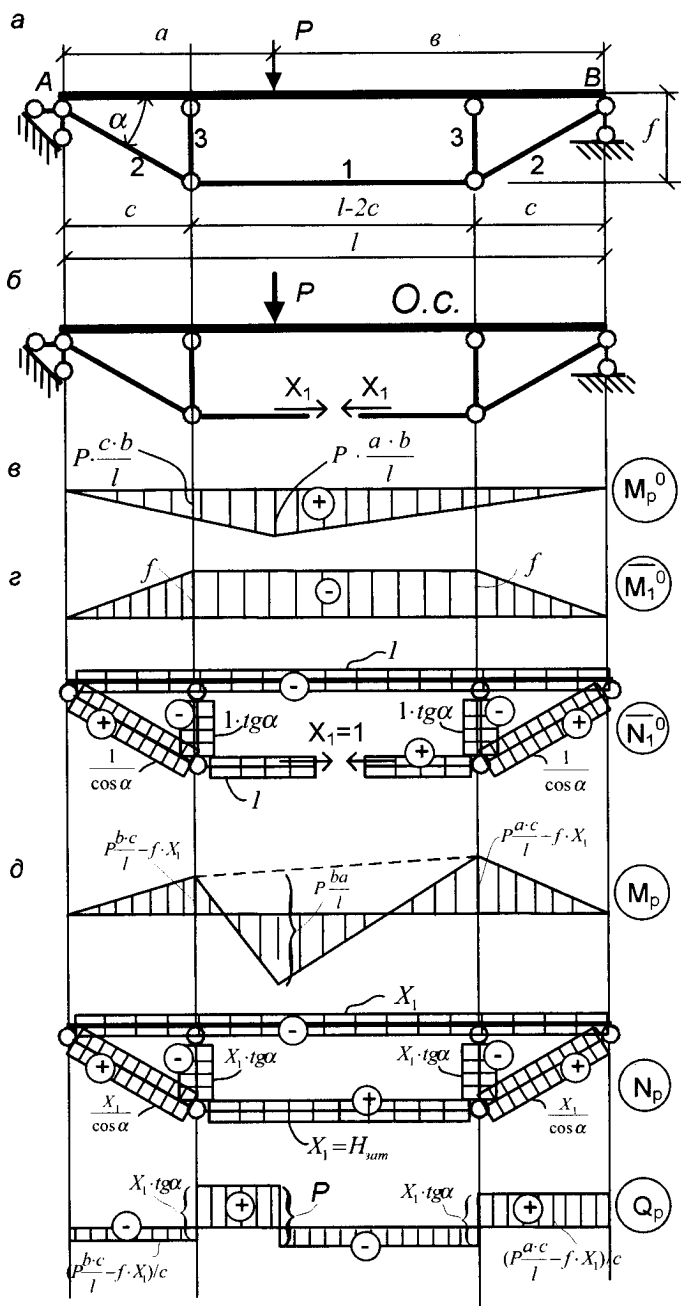


Рис. 5.5

Основну систему отримаємо, якщо розріжемо затяжку (рис. 5.5, б). Для визначення невідомого X_1 використовуємо метод сил. Розрахуємо основну систему окремо на дію зовнішнього навантаження і сили $X_1 = 1$. Від зовнішнього навантаження виникають зусилля лише у балці, яка працює на згин (рис. 5.5, в). Поздовжні зусилля в усіх елементах дорівнюють нулю. У разі дії $X_1 = 1$ виникають згинальні моменти в балці і поздовжні зусилля у балці $\bar{N}_{01}^0$ та елементах шпренгеля $\bar{N}_{i1}^0$. Відповідні епюри показано на рис. 5.5, г. Впливом поперечних сил у балці можна знехтувати. Канонічне рівняння для системи, один раз статично невизначеної: $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0$. Переміщення δ_{11} і Δ_{1p} , які входять в рівняння, визначають за формулою Мора:

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1^{o2}}{EI_o} ds + \frac{\bar{N}_{01}^o \cdot l}{E_o A_o} + \sum \frac{\bar{N}_{i1}^{o2} \cdot l_i}{EA_i}; \quad \Delta_{1p} = \sum_s \int \frac{M_p^o \cdot \bar{M}_1^o}{E_o I_o} ds.$$

Остаточні зусилля в усіх елементах визначаються за такими залежностями:

$$M_p = M_p^o + \bar{M}_1^o \cdot X_1; \quad N_{ip} = \bar{N}_{i1}^o \cdot X_1.$$

Поперечні сили визначаються за епюрою моментів. Остаточні епюри зусиль у шпренгельній балці зображені на рис. 5.5, д.

Достатня деформаційна перевірка розрахунку полягає у перевірці умови:

$$\sum_s \int \frac{M_p \cdot \bar{M}_1^o}{E_o I_o} ds + \frac{X_1 \cdot l}{E_o A_o} + \sum \frac{N_{ip} \cdot \bar{N}_{i1}^o \cdot l_i}{EA_i} = 0.$$

Складніша комбінована система – це висячий міст (рис. 5.6, а). У такому разі розпір сприймає балка. Система три рази статично невизначена.

Зручно під час розрахунку основну систему приймати статично невизначеною, яку отримаємо, якщо розріжемо ланцюг (рис. 5.6, б). Основна система два рази статично невизначена. Канонічне рівняння матиме такий вигляд:

$$\delta_{11}^{(2)} \cdot X_1 + \Delta_{1p}^{(2)} = 0, \quad (5.4)$$

де $\delta_{11}^{(2)}$ і $\Delta_{1p}^{(2)}$ – переміщення у системі, два рази статично невизначеній.

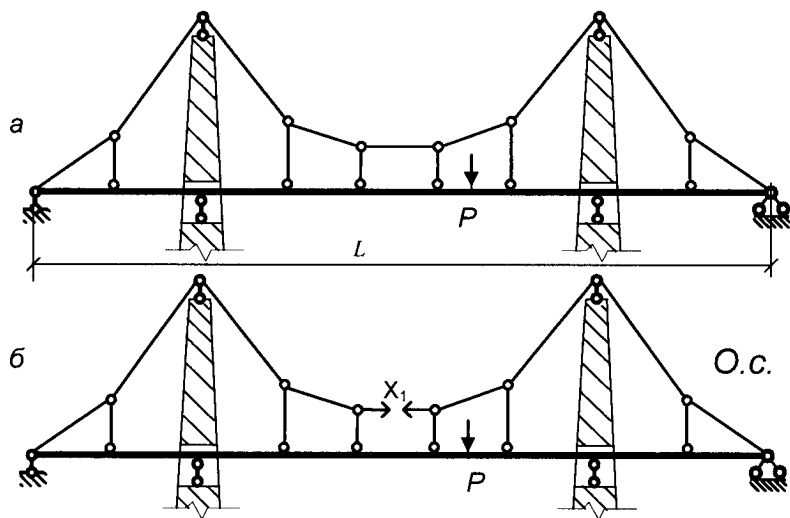


Рис. 5.6

Для визначення $\delta_{11}^{(2)}$ і $\Delta_{1p}^{(2)}$ потрібно знати поздовжні сили $\bar{N}_{1l}^o$ в ланцюгу і підвісках і побудувати епюри $\bar{M}_1^o$ і M_p^o для нерозрізної балки відповідно від $X_1 = 1$ та P .

$$\delta_{11}^{(2)} = \sum \frac{\bar{N}_{1l}^{o2} \cdot l_i}{EA_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_1^{o2}}{(EI)_{\text{балки}}} dx + \frac{1 \cdot L}{(EA)_{\text{балки}}},$$

$$\Delta_{1p}^{(2)} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^o \cdot M_p^o}{(EI)_{\text{балки}}} dx. \quad (5.5)$$

Епюри згинальних моментів $\bar{M}_1^o$ і M_p^o будують для нерозрізної балки з використанням рівнянь трьох моментів. Коли ланцюг з'єднаний з балкою з ексцентриситетом, то потрібно враховувати згинальні моменти у балці від ексцентрично прикладеної горизонтальної сили.

Відповідно до теореми про взаємність переміщень, вираз $\delta_{1p}^{(2)} = \delta_{p1}^{(2)}$ визначає епюру вертикальних переміщень осі нерозрізної балки в основній системі від $X_1 = 1$, яку можна знайти із загального рівняння осі зігнутої балки.

Лінії впливу M_k і Q_k у балці і поздовжніх сил у підвісках і ланцюгу визначають за загальними виразами:

$$\begin{cases} л.вп. M_k = (л.вп. X_1) \cdot \overline{M}_{k1}^o + л.вп. M_k^o \\ л.вп. Q_k = (л.вп. X_1) \cdot \overline{Q}_{k1}^o + л.вп. Q_k^o \\ л.вп. N_i = (л.вп. X_1) \cdot \overline{N}_{i1}^o \end{cases}, \quad (5.6)$$

де $л.вп. M_k^o$ і $л.вп. Q_k^o$ – лінії впливу M_k і Q_k для нерозрізної трипрольотної балки; $\overline{M}_{k1}^o$, $\overline{Q}_{k1}^o$ – внутрішні зусилля в перетині k балки від $X_1=1$; $\overline{N}_{i1}^o$ – поздовжня сила в елементах підвіски і ланцюга від $X_1=1$.

Під час побудови ліній впливу зусиль у комбінованій системі від $P=1 - \Delta_{1P}^{(2)} = \delta_{p1}^{(2)}$.

У викладеному способі розрахунку зусилля визначають за недеформованим станом системи, тому не враховані зміни поздовжніх сил у ланцюгу і згинальних моментів балки під час деформації системи. Не враховувано також додаткові моменти в деформованій балці від розпору, що можна допускати тільки тоді, коли розпір ланцюга X_1 малий порівняно з критичною силою для нерозрізної балки.

Розрахунок можна уточнити за допомогою послідовних наближень.

Коли система не сприймає розпір (рис. 5.7), то усе наведене вище застосовується і до неї. Повздовжня сила в балці дорівнює нулю. Розрахунок такої системи за недеформованим станом точніший, ніж системи, яка сприймає розпір.

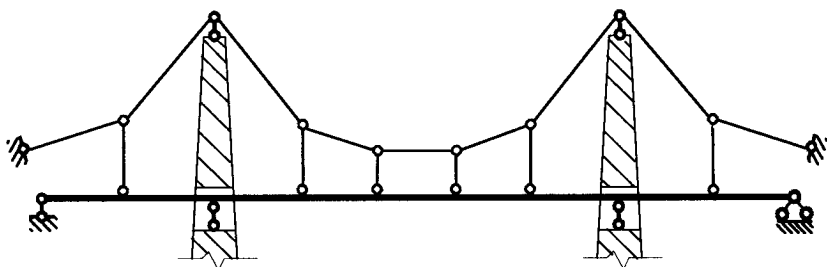


Рис. 5.7

Якщо маємо балку чи ферму, підсилену шарнірною аркою (рис. 5.8, а), то розрахунок виконується на основі тих самих міркувань, які викладені під час розрахунку балки, підсиленої ланцюгом. За основну систему приймається трипрольотна балка (рис. 5.8, б) і зберігаються вирази (5.5) і (5.6). Середній проліт балки працюватиме на згин з поздовжньою силою, яка передається від арки. Тому для перерізів середнього прольоту потрібно будувати лінії впливу ядрових моментів, а в крайніх прольотах – лінії впливу центральних моментів.

Неточність розрахунку, як і у попередньому випадку, полягає передусім у тому, що не враховується вплив повздовжніх сил у шарнірній арці і згинальних моментів у балці у зв'язку зі зміною системи в результаті її деформацій.

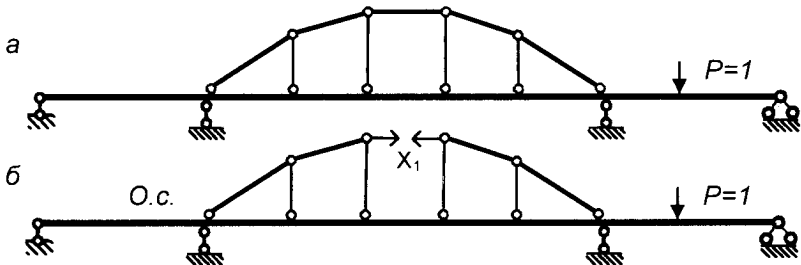


Рис. 5.8

Питання для самоперевірки

1. За якою формулою визначається ступінь статичної невизначеності шарнірних ферм?
2. Який метод розрахунку статично невизначених систем використовують під час розрахунку статично невизначених шарнірних ферм без використання обчислювальної техніки?
3. Визначити кількість невідомих і вибрати основну систему для розрахунку статично невизначених систем методом сил (рис. 5.9).

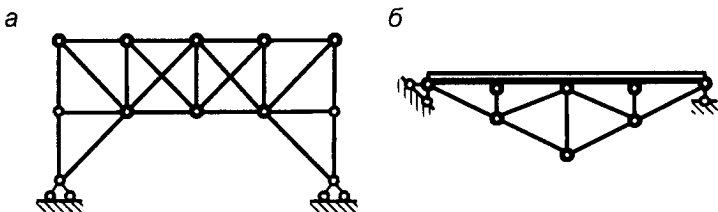


Рис. 5.9

4. Визначити зусилля у стержнях ферми (рис. 5.10, а).
5. Вибрати основну систему методу сил для розрахунку шпренгельної балки (рис. 5.10, б) та визначити коефіцієнти канонічного рівняння у загальному вигляді.

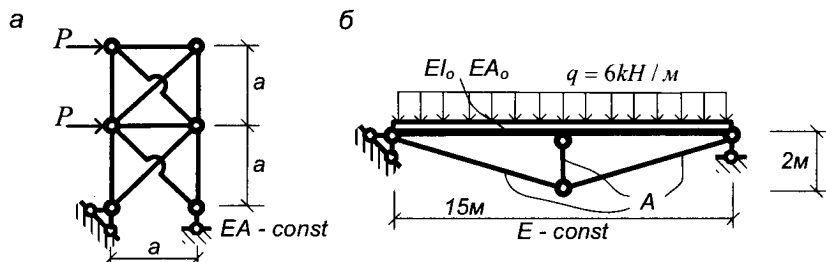


Рис. 5.10

Розділ 6

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ ЗА МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

6.1. Суть методу переміщень. Ступінь кінематичної невизначеності. Основна система і канонічні рівняння методу переміщень

Метод переміщень (деформацій) широко використовують для розрахунку складних рамних каркасів, ферм з жорсткими вузлами і багатьох інших статично невизначених систем. Його використовують для розв'язання задач стійкості і динаміки споруд, а також він лежить в основі наближених способів розрахунку статично невизначених систем. Основні положення методу переміщень використані у методі скінченних елементів для стержневих систем.

Як відомо, будь-яка зовнішня дія на незмінну пружну систему спричиняє в результаті деформації переміщення окремих точок і зусилля в елементах системи. Між цими переміщеннями і зусиллями існує тісний зв'язок. Зокрема цей зв'язок для деформованої балки визначається математично диференціальними рівняннями зігнутої осі. Отже, після визначення відповідних зусиль просто визначити переміщення будь-якої точки системи і, навпаки, визначення відповідних переміщень дає змогу знайти зусилля.

У методі сил за основні невідомі приймають зусилля в зайвих зв'язках і для визначення цих зусиль використовують рівняння сумісності деформацій. У методі переміщень за основні невідомі приймають переміщення, які визначаються за допомогою рівнянь рівноваги.

Перші спроби використання методу переміщень з'явилися у другій половині XIX ст. у працях Вінклера (1862 р.) і Бресса (1865 р.), але, по суті, започаткували метод переміщень праці Мандлера і Мора з розрахунку ферм із жорсткими вузлами у 70-х роках XIX ст., в яких запропоновано за невідомі прийняти кути повороту вузлів.

Метод поступово вдосконалювався у працях проф. Беллера, інж. Бендіксена і у праці шведського професора Остенфельда метод вперше названо методом деформацій (1926 р.) Помітне значення у розвитку методу мали праці проф. А.А. Гвоздєва, П.Л. Пастернака, Б.Н. Жемочкіна, Н.І. Безухова, І.М. Рабіновича та ін.

Сьогодні метод переміщень широко використовують як один з найпростіших і найзручніших. Його застосовують у розгорнутій і канонічній формах. Нижче цей метод викладений у канонічній формі, яка сприяє кращому засвоєнню його суті.

Під час розроблення методу переміщень прийняті такі припущення:

а) враховуються тільки деформації згину, до того ж вважається, що хорди, які з'єднують кінці стержнів після деформації, дорівнюють початковій довжині стержнів, тобто віддаль між вузлами не змінюється;

б) під час деформації системи кути між стержнями, з'єднаними між собою в одному жорсткому вузлі, не змінюються. Це означає, що під час повороту жорсткого вузла на кут φ , кінці всіх стержнів, жорстко з'єднаних у цьому вузлі, теж обертаються на кут φ ;

в) кути повороту через малу величину приймають такими, що дорівнюють їх тангенсам.

Враховуючи ці припущення, можемо вважати, що положення будь-якого стержня АВ (рис. 6.1) системи після її деформації цілком визначається:

- його зміщенням вздовж осі (Δ_x);
- зміщенням кінців А і В перпендикулярно до осі стержня (Δ_A і Δ_B);
- кутом повороту лівого кінцевого перерізу (φ_A);
- кутом повороту правого кінцевого перерізу (φ_B).

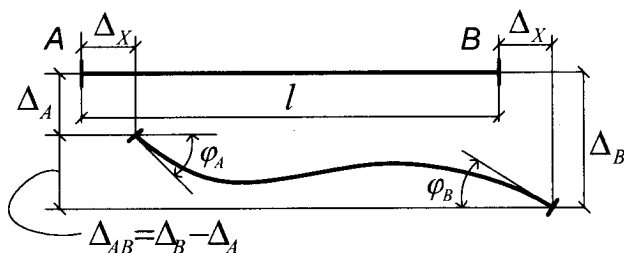


Рис. 6.1

Переміщення стержня вздовж осі і переміщення паралельно до самого себе у напрямку, перпендикулярному до осей (коли $\Delta_A = \Delta_B$), не спричиняють зусиль.

Отже, під час визначення зусиль у перерізах стержня потрібно знати кути повороту кінцевих перерізів (φ_A і φ_B) і відносне зміщення кінців стержня у напрямку, перпендикулярному до осі стержня ($\Delta_{AB} = \Delta_A - \Delta_B$).

Для визначення кутів повороту кінцевих перерізів усіх стержнів системи достатньо знайти кути повороту жорстких вузлів. Жорстким є вузол, у якому не менше ніж два стержні, з'єднані жорстко (зварні). На рис. 6.2, а зображені приклади жорстких, а на рис. 6.2, б – шарнірних вузлів.

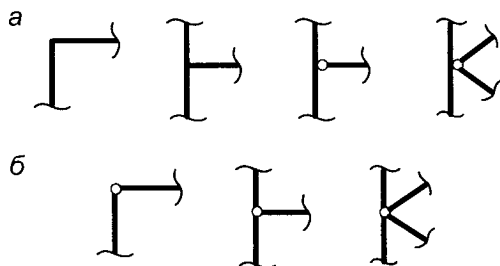


Рис. 6.2

Кількість відносних переміщень кінців усіх стержнів теж пов'язана з кількістю вузлів. Для встановлення відносних переміщень кінців усіх стержнів потрібно знати лінійні переміщення усіх вузлів.

Кількість незалежних лінійних переміщень вузлів значно менша від кількості вузлів, тому що вузли у системі часто пов'язані між собою прямими стержнями, довжина яких не змінюється, і зміщення одного вузла визначає зміщення кількох інших.

Кількість незалежних лінійних переміщень вузлів можна визначити як ступінь свободи шарнірно-стержневої системи, отриманої з заданої через введення у всі вузли (зокрема, опорні) повних шарнірів:

$$W = 2 \cdot B - C,$$

де W – ступінь свободи; B – кількість вузлів; C – кількість стержнів.

Кількість незалежних лінійних переміщень вузлів шарнірної системи можна визначити і без формули. Вона дорівнює мінімальній кількості стержневих зв'язків, які необхідно ввести у шарнірну систему для забезпечення лінійної нерухомості усіх вузлів системи.

Отже, за невідомі під час розрахунку статично невизначених систем за методом переміщень приймаємо кутові і лінійні переміщення вузлів системи. Загальна кількість невідомих “ n ” дорівнює алгебраїчній сумі незалежних кутових переміщень жорстких вузлів n_k і незалежних лінійних переміщень усіх вузлів n_d :

$$n = n_k + n_d. \quad (6.1)$$

Оскільки кількість незалежних кутових переміщень жорстких вузлів дорівнює кількості жорстких вузлів $B_{ж}$, а кількість незалежних лінійних переміщень вузлів $2 \cdot B - C$, то кількість невідомих під час розрахунку за методом переміщень визначають за формулою

$$n = B_{ж} + (2 \cdot B - C). \quad (6.2)$$

Якщо знатимемо кути повороту і лінійні зміщення усіх вузлів рами, то знатимемо φ_A , φ_B і Δ_{AB} для усіх стержнів системи, а це означає, що зможемо визначити зусилля у будь-яких перерізах.

Ступінь пружної рухомості вузлів рами $n = n_k + n_d$ називають ступенем кінематичної невизначеності системи. Розглянемо раму, зображену на рис. 6.3, а. У вузлах 1 і 2 стержні жорстко з'єднані між собою, і згин будь-якого ригеля рами зумовить згин усіх стержнів рами. У кожному вузлі дотичні до пружних ліній стержнів будуть повертатися на однаковий кут. Ступінь кутової рухомості n_k рами, чи будь-якої іншої системи дорівнює кількості жорстких вузлів. Для рами, що розглядається, $n_k = 2$. Вузли 1 і 2 не можуть переміщуватися по вертикалі, оскільки прийнято, що стержні не стискаються.

У горизонтальному напрямку відстань між вузлами 1, 2 і 3 теж залишається постійною на основі прийнятих припущень, але можливе переміщення по горизонталі рами загалом за рахунок вигину стояків. Горизонтальний стержень на крайній правій опорі, який би перешкодив такому переміщенню, відсутній. Отже, у цьому випадку рама має одне незалежне лінійне зміщення вузлів, оскільки вузли 1, 2 і 3 змістяться по горизонталі на одну величину Δ .

Для визначення кількості незалежних лінійних переміщень вузлів рами можна скористатися її шарнірною схемою (рис. 6.3, б).

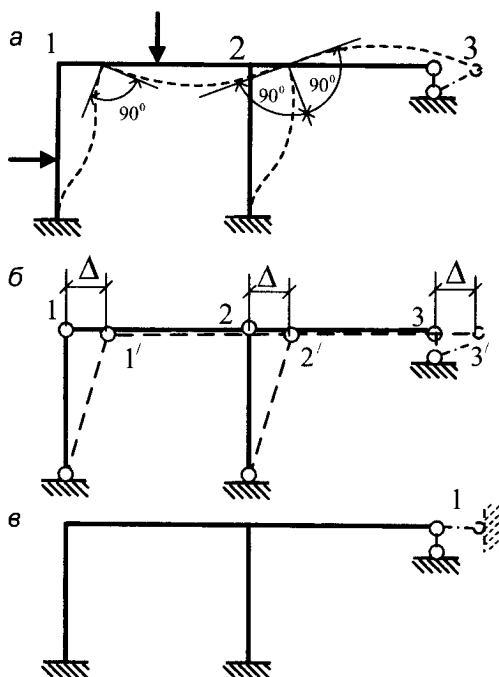


Рис. 6.3

Число ступенів свободи отриманого механізму дорівнює кількості лінійних переміщень рами $n_n = 2 \cdot B - C = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Для ліквідації цього переміщення достатньо поставити один додатковий опорний стержень (рис. 6.3, в). Ступінь кінематичної невизначеності рами – $n = 2 + 1 = 3$.

Для рами, зображеної на рис. 6.4, а:

$$n = n_k + n_n = 3 + (2 \cdot 4 - 6) = 5.$$

Шарнірна схема і переміщення вузлів рами показані на рис. 6.4, б. Стержні 1, 2 забезпечують лінійну нерухомість вузлів (рис. 6.4, в).

Для рами (рис. 6.5): $n = n_k + n_n = 4 + (2 \cdot 5 - 8) = 6$.

Як і під час розрахунку за методом сил, під час розрахунку статично невизначених систем за методом переміщень утворюємо основну систему, яка фігурує в усіх обчисленнях. Так само, як і там, основна система повинна бути простою, добре вивченою і давати змогу легко будувати епюри від будь-яких факторів. Але на відміну

від методу сил основна система методу переміщень утворюється не відкиданням зайвих зв'язків, а введенням нових. Постановка нових зв'язків повинна ліквідувати можливі кутові і лінійні зміщення вузлів, тобто зробити систему кінематично визначеною. На рис. 6.6 показано кілька прикладів заданих (рис. 6.6, а) і основних систем (рис. 6.6, б).

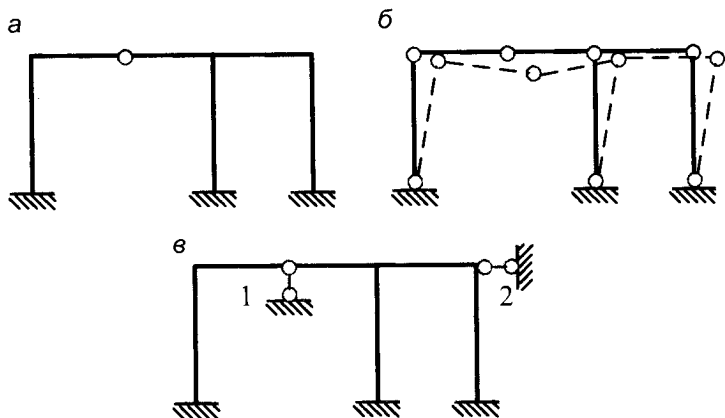


Рис. 6.4

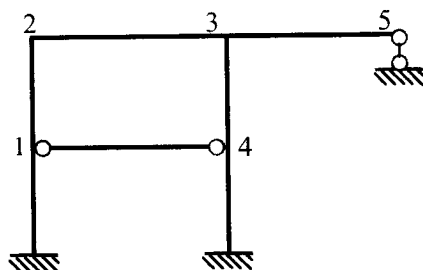


Рис. 6.5

Введення зв'язків проти повороту кожного жорсткого вузла і проти лінійного зміщення вузлів спрощує систему. Перетворена таким способом рама являє собою сукупність багатьох однопрольотних балок з двома абсолютно защемленими кінцями, чи з одним защемленням і другим шарнірно опертим кінцем. Такі балки добре вивчені, розраховані на дію різних чинників, результати розрахунку

наведені у відповідних довідниках. Ці матеріали використовують під час побудови епюр в основній системі. Треба зазначити, що зв'язок проти повороту жорсткого вузла перешкоджає тільки повороту вузла і не перешкоджає лінійним зміщенням вузла.

Різниця між заданою і основною системами з кінематичного погляду полягає у тому, що у першій вузли можуть повертатися і лінійно зміщуватися, а у другій – не можуть. Тому для усунення цієї різниці необхідно за напрямками додаткових зв'язків надати вузлам переміщення. Невідомі переміщення позначатимемо буквою Z_i з порядковим номером (рис. 6.6, б).

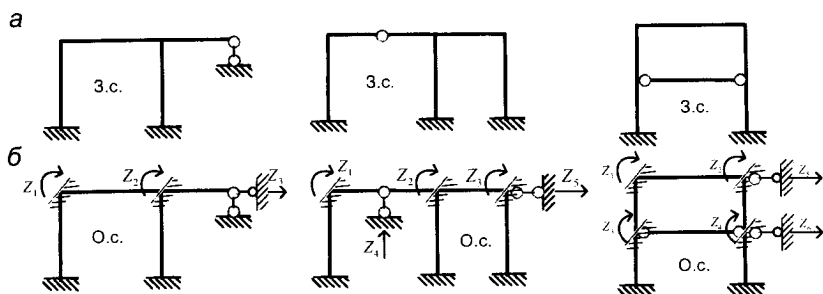


Рис. 6.6

Основна система стає тотожною заданій, якщо величини цих переміщень будуть такі самі, як відповідні переміщення вузлів у заданій системі. Завдання полягає у їх знаходженні. Невідомі переміщення вузлів будуть визначені з умови, що в заданій системі немає зв'язків, які додатково введені для отримання основної системи і тому немає реактивних зусиль за напрямком цих зв'язків. Якщо основна система тотожна до заданої, то реактивні зусилля у введених зв'язках повинні дорівнювати нулю. Тобто сумарне реактивне зусилля у кожному додатковому зв'язку від зміщення додаткових зв'язків за своїм напрямком і від зовнішнього навантаження (чи іншого чинника) дорівнює нулю, а ця умова еквівалентна відсутності додаткових зв'язків у заданій системі.

Заперечення реактивних зусиль (сил чи моментів) у введених зв'язках проти повороту вузлів і проти лінійних переміщень лежить в основі рівнянь методу переміщень, подібно до того, як в основі рівнянь методу сил лежить заперечення переміщень в основній системі за напрямками невідомих зусиль.

Коротко рівняння методу переміщень можна подати так:

$$R_1 = 0; R_2 = 0; R_3 = 0; \dots$$

де $R_1, R_2, R_3, \dots$ – реактивні моменти у додаткових зв'язках проти повороту вузлів і реактивні зусилля у додаткових стержнях (в основній системі), які виникають від дії навантаження, поворотів вузлів і їхніх лінійних переміщень. Індеси відповідають індексам невідомих. Кількість рівнянь завжди дорівнює кількості додаткових зв'язків, а отже, і кількості невідомих переміщень.

Рівняння методу переміщень – статичні; це рівняння рівноваги. Зазначимо, що рівняння методу сил – кінематичні; це рівняння переміщень. Наведемо в розгорнутій формі i -те рівняння методу переміщень. Для цього реактивний момент (чи зусилля) у зв'язку i ($\bar{R}_i$) замінимо сумою:

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + \dots + R_{in} + R_{ip}.$$

Другий індекс вказує на причину виникнення реакції. Тому R_{ip} – реакція у зв'язку i від навантаження. Реактивні зусилля $R_{i1}, R_{i2}, \dots$ можна замінити виразами:

$$R_{i1} = r_{i1} \cdot Z_1; R_{i2} = r_{i2} \cdot Z_2; \dots,$$

де r_{i1} – реакція у зв'язку i від зміщення зв'язку 1 за своїм напрямком на $Z_1 = 1$ тощо. Після такої заміни i -те рівняння методу переміщень отримаємо у такому вигляді:

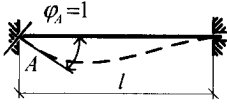
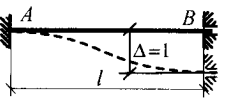
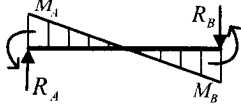
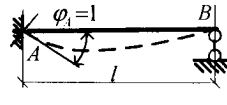
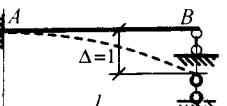
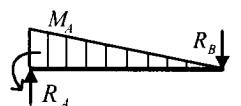
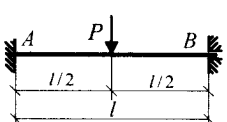
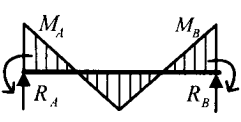
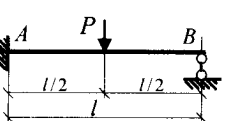
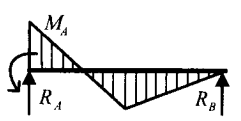
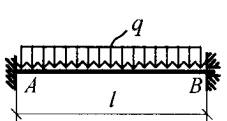
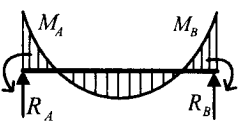
$$r_{i1} \cdot Z_1 + r_{i2} \cdot Z_2 + \dots + r_{in} \cdot Z_n + R_{ip} = 0. \quad (6.3)$$

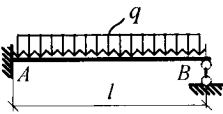
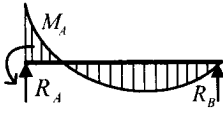
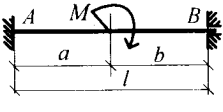
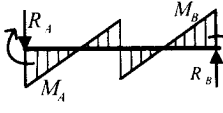
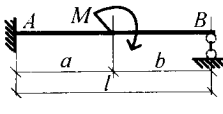
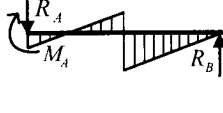
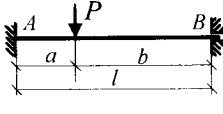
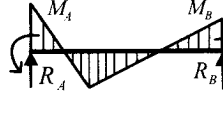
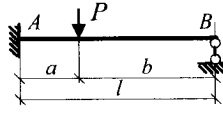
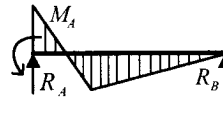
Якщо підставити замість i послідовно 1, 2, ..., n , отримаємо систему канонічних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

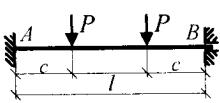
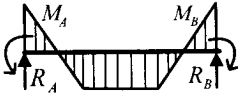
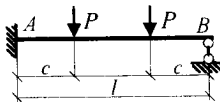
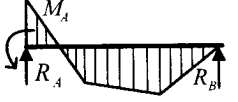
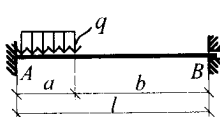
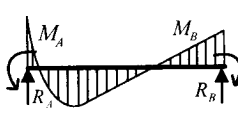
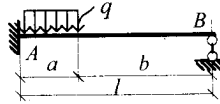
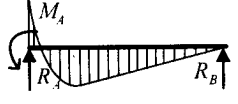
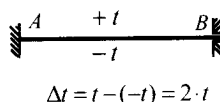
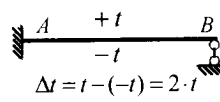
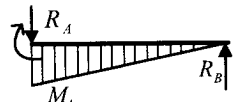
6.2. Визначення реакцій у додаткових зв'язках

Для визначення коефіцієнтів r_{ik} і вільних членів R_{ip} канонічних рівнянь методу переміщень потрібно попередньо побудувати епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних невідомих переміщень ($Z_i = 1$). Їх побудова виконується за допомогою даних, наведених у табл. 6.1. Ці дані отримані в результаті розрахунку однопрольотних статично невизначених балок за методом сил.

Таблиця 6.1

Схема балки	Епюра моментів	Реактивні моменти і опорні реакції
1	2	3
		$M_A = 4 \cdot \frac{EI}{l} = 4 \cdot i$ $M_B = \frac{M_A}{2}; R_A = R_B = \frac{6 \cdot i}{l}$
		$M_A = M_B = \frac{6 \cdot EI}{l^2} = \frac{6 \cdot i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{12 \cdot i}{l^2}$
		$M_A = 3 \cdot \frac{EI}{l} = 3 \cdot i$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot i}{l}$
		$M_A = 3 \cdot \frac{EI}{l^2} = \frac{3 \cdot i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot i}{l^2}$
		$M_A = M_B = -\frac{P \cdot l}{8}$ $R_A = R_B = \frac{P}{2}$
		$M_A = -\frac{3 \cdot P \cdot l}{16}$ $R_A = \frac{11}{16} \cdot P; R_B = \frac{5}{16} \cdot P$
		$M_A = M_B = \frac{q \cdot l^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$

1	2	3
		$M_A = \frac{q \cdot l^2}{8}$ $R_A = \frac{5 \cdot q \cdot l}{8}; R_B = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8}$
		$M_A = \frac{M \cdot b}{l^2} (2 \cdot l - 3 \cdot b)$ $M_B = \frac{M \cdot a}{l^2} (2 \cdot l - 3 \cdot a)$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot a \cdot b}{l^3} \cdot M$
		$M_A = \frac{M}{2 \cdot l^3} (l^2 - 3 \cdot b^2)$ $R_A = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot l^3} \cdot (l^2 - b^2)$ $R_B = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot l^3} \cdot (l^2 - b^2)$
		$M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2};$ $M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$ $R_A = \frac{P \cdot b^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot a}{l}\right)$ $R_B = \frac{P \cdot a^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot b}{l}\right)$
		$M_A = \frac{P \cdot b \cdot (l^2 - b^2)}{2 \cdot l^2}$ $R_A = \frac{P \cdot b \cdot (3 \cdot l^2 - b^2)}{2 \cdot l^3}$ $R_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot (3 \cdot l - a)}{2 \cdot l^3}$

1	2	3
		$M_A = M_B = -\frac{P \cdot c}{l} \cdot (l - c)$ $R_A = R_B = P$
		$M_A = \frac{3 \cdot P \cdot c}{2 \cdot l} \cdot (l - c)$ при $c = \frac{l}{3}$, $M_A = \frac{P \cdot l}{3}$
		$M_A = \frac{q \cdot a^2}{12 \cdot l^2} (6 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b)$ $M_B = \frac{q \cdot b^3}{12 \cdot l^2} (4 \cdot b + a)$
		$M_A = \frac{q \cdot a^2}{8 \cdot l^2} (4 \cdot a \cdot l + b^2)$ $R_A = q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot l}\right);$ $R_B = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot l}$
		$M_A = M_B = EI \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta t}{d}$ d – висота поперечного перерізу $R_A = R_B = 0$
		$M_A = \frac{3 \cdot EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot d}$ d – висота поперечного перерізу $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot l \cdot d}$

Домовимось: кути повороту і реактивні моменти додатні, коли вони відповідають повороту вузла за годинниковою стрілкою, реакції від зовнішнього навантаження додатні, якщо їх напрямок збігається з напрямком одиничного переміщення зв'язку; лінійні переміщення завжди додатні; реакції, зумовлені лінійними переміщеннями, додатні, якщо їх напрямок збігається з напрямком переміщень.

Для стержня з жорстко защемленими кінцями (рис. 6.7, а) знайдемо реактивні зусилля, які виникають у разі повороту опорних перерізів і відповідного зміщення опор у напрямку, перпендикулярному до осі.

На рис. 6.7, б показаний стержень АВ, здеформований в результаті повороту опорних перерізів А і В і лінійного зміщення опори В по вертикалі на Δ .

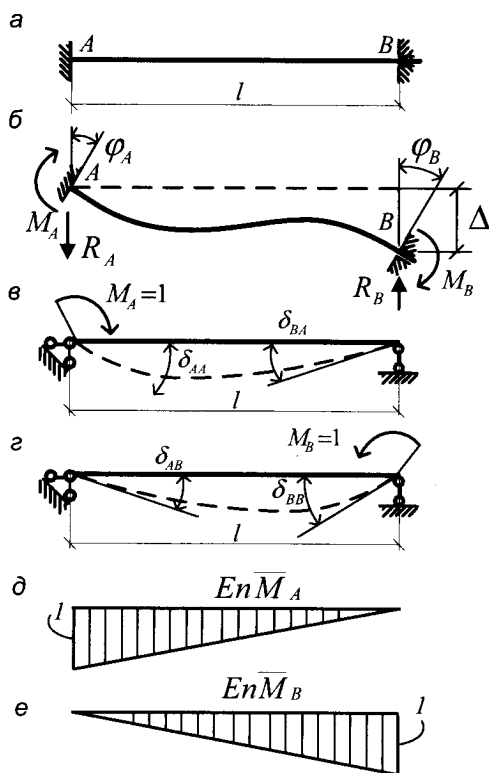


Рис. 6.7

Розглянемо заданий стан (рис. 6.7, б) і два допоміжні стани балки (рис. 6.7, в, г), в яких вона навантажена одиничними моментами на опорах.

На основі теореми про взаємність робіт:

$$\begin{cases} \delta_{AA} \cdot M_A - \delta_{BA} \cdot M_B = \varphi_A \cdot 1 - \frac{1}{l} \cdot \Delta; \\ \delta_{AB} \cdot M_A - \delta_{BB} \cdot M_B = \varphi_B \cdot (-1) + \frac{1}{l} \cdot \Delta. \end{cases}$$

Коефіцієнти δ визначаються перемноженням одиничних епюр (рис. 6.7, δ , e):

$$\delta_{AA} = \delta_{BB} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI},$$

$$\delta_{AB} = \delta_{BA} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l}{6EI}.$$

Отже:

$$2 \cdot M_A - M_B = \frac{6EI}{l} \left(\varphi_A - \frac{\Delta}{l} \right),$$

$$M_A - 2 \cdot M_B = \frac{6EI}{l} \left(\varphi_B - \frac{\Delta}{l} \right).$$

Звідси

$$\begin{cases} M_A = 2 \cdot i \cdot \left(2 \cdot \varphi_A + \varphi_B - 3 \cdot \frac{\Delta}{l} \right), \\ M_B = 2 \cdot i \cdot \left(\varphi_A + 2 \cdot \varphi_B - 3 \cdot \frac{\Delta}{l} \right), \end{cases} \quad (6.4)$$

де $\frac{EI}{l} = i$ – погонна жорсткість балки.

Вертикальні опорні реакції на опорах:

$$R_A = R_B = \frac{(M_A + M_B)}{l}.$$

Після підстановки значень опорних моментів:

$$R_A = R_B = \frac{6 \cdot i}{l} \left(\varphi_A + \varphi_B - 2 \cdot \frac{\Delta}{l} \right). \quad (6.5)$$

Для балки з одним защемленим і другим шарнірно-опертим кінцем формули для визначення реакцій і опорного моменту мають такий вигляд:

$$M_A = 3 \cdot i \cdot \left(\varphi_A - \frac{\Delta}{l} \right); \quad R_A = R_B = \frac{3 \cdot i}{l} \left(\varphi_A - \frac{\Delta}{l} \right). \quad (6.6)$$

Реакції в опорних закріпленнях стержнів визначаються від будь-якого опорного переміщення, яке дорівнює одиниці, а усі інші переміщення вважаються такими, що дорівнюють нулю. Формули (6.4)–(6.6) дають змогу отримати розв'язки для окремих випадків. Наприклад, коли опорний переріз А стержня, защемленого на двох кінцях, повернувся за годинниковою стрілкою на кут $\varphi_A = 1$, за формулами (6.4) і (6.5):

$$M_A = 4 \cdot i; \quad M_B = 2 \cdot i; \quad R_A = R_B = -\frac{6 \cdot i}{l}.$$

У табл. (6.1) наведені формули реакцій однопрольотних балок від одиничних переміщень, різних видів навантаження і дії температури. Користуючись таблицею, можна побудувати одиничні та вантажну епюри в основній системі.

Розглянемо статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь. У загальному випадку є два види коефіцієнтів і вільних членів. Перший вид – це реактивні моменти у зв'язках проти повороту вузлів, другий – реактивні зусилля у зв'язках проти лінійних зміщень вузлів.

Реактивні моменти у зв'язках проти повороту вузлів визначаються з умови рівноваги відповідного вузла за допомогою рівняння $\sum M = 0$. Для визначення r_{ik} потрібно розглядати рівновагу вузла “і” в одиничній епюрі “к”.

Реактивні зусилля у зв'язках проти лінійних зміщень вузлів визначаються з рівноваги частини рами. Розріз, який виділяє частину рами, повинен обов'язково розрізати зв'язок, у якому визначається зусилля. Використовується рівняння рівноваги типу $\sum T = 0$ (сума проєкцій усіх сил на вісь Т дорівнює нулю). Вісь Т звичайно приймається паралельною до зусилля, яке визначається.

Коефіцієнти за невідомих канонічних рівнянь методу переміщень можна визначати також перемноженням одиничних епюр (як у разі визначення коефіцієнтів рівнянь методу сил). Тоді можна записати:

$$r_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2}{EI} dx;$$

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_k}{EI} dx.$$

Статичний спосіб простіший і зручніший, але коли стояки рами похилі, то в рівняння рівноваги увійдуть як поперечні, так і поздовжні сили, що значно ускладнює задачу. У цьому випадку краще знаходити коефіцієнти методу переміщень за способом перемноження епюр.

Перевірка правильності визначення коефіцієнтів аналогічна до перевірки, яка виконувалася у рівняннях методу сил. Використовується сумарна епюра моментів:

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n;$$

$$\overline{M}_s^2 = \sum r_{ik}, (i=1, 2, \dots, n).$$

Вільні члени рівнянь теж можна визначити перемноженням епюр:

$$R_{ip} = - \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot M_p^*}{EI} dx, \quad (6.7)$$

де $\overline{M}_i$ – одинична епюра згинальних моментів в основній системі методу переміщень; M_p^* – епюра згинальних моментів від навантаження в основній системі методу сил.

Формула (6.7) виражає закон взаємності переміщень і реакцій (друга теорема Релея).

Після визначення коефіцієнтів і вільних членів рівнянь розв'язують систему лінійних алгебраїчних рівнянь і визначають невідомі $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Остаточну епюру моментів M_p будують за формулою

$$M_p = M_p^0 + \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \overline{M}_n \cdot Z_n, \quad (6.8)$$

де M_p^0 – ординати епюри згинальних моментів в основній системі від заданого навантаження (вантажної епюри); $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$ – ординати епюр згинальних моментів в основній системі від одиничних невідомих.

Побудову епюр поперечних і поздовжніх сил і їх перевірку виконують так само, як і під час розрахунку методом сил.

Виконуючи кінематичну перевірку, одиничні епюри можемо приймати у будь-якій основній системі методу сил. Для перевірки епюр Q_p і N_p використовують рівняння рівноваги $\sum X = 0$ і $\sum Y = 0$ для рами загалом і для її частин.

6.3. Приклад розрахунку рами за методом переміщень

Для ілюстрації вищевикладеного розглянемо приклад розрахунку рами за методом переміщень. На рис. 6.8, а показана рама три рази кінематично невизначена:

$$n = n_k + n_n = 2 + 1 = 3.$$

Невідомі два кути повороту жорстких вузлів і одне лінійне зміщення вузлів. Основну систему показано на рис. 6.8, б.

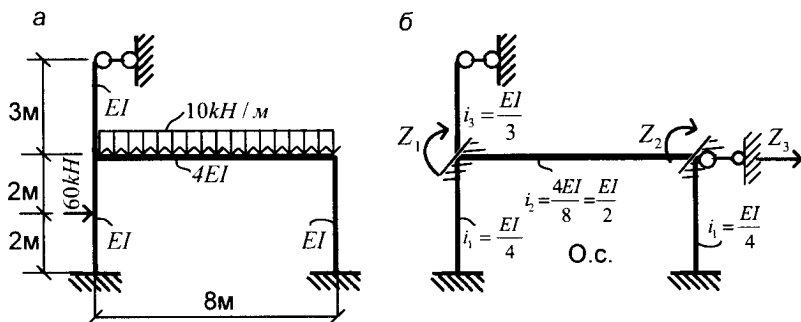


Рис. 6.8

Канонічні рівняння мають вигляд

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0$$

Одиничні епюри будуюмо з використанням табл. 6.1. На рис. 6.9 показано, як деформується рама від дії одиничних невідомих переміщень і навантаження і відповідні епюри моментів $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ і M_p^0 .

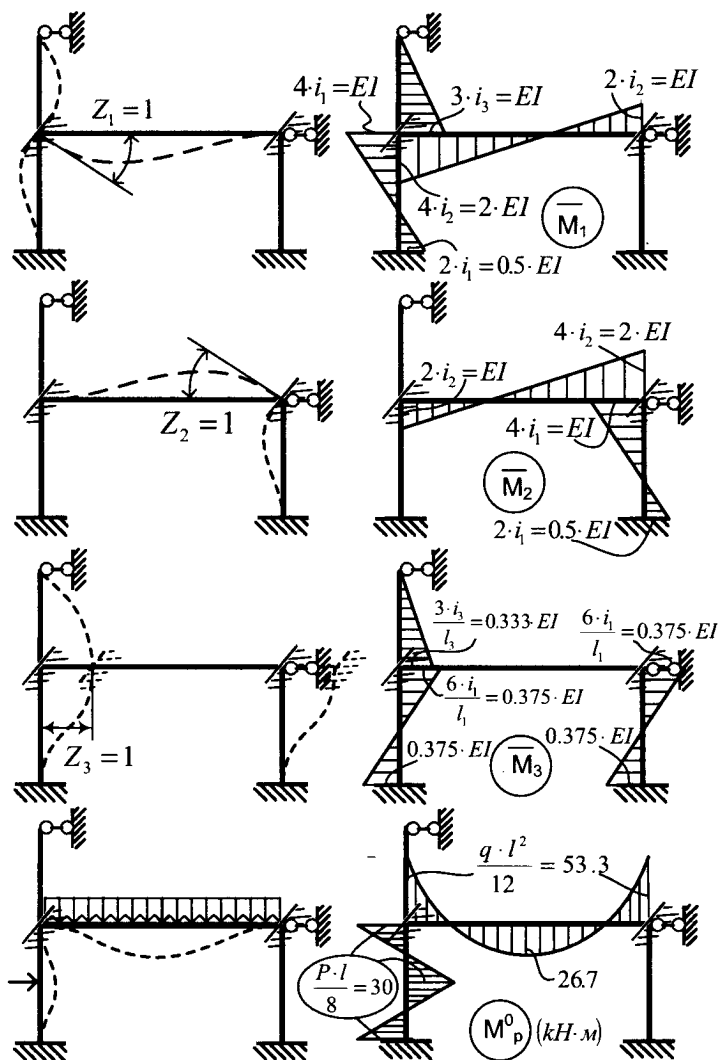


Рис. 6.9

Зображення картини деформації допомагає правильно побудувати епюри.

Реакції r_{11} , r_{12} , r_{13} , R_{1p} , r_{21} , r_{22} , r_{23} , R_{2p} — це моменти у зв'язках проти повороту вузлів і їх визначають з умови рівноваги вузлів за допомогою рівнянь $\sum M = 0$. r_{31} , r_{32} , r_{33} , R_{3p} — це зусилля

у зв'язку проти лінійного зміщення, і їх визначають з умови рівноваги частини рами з використанням рівняння $\sum T = 0$. Треба пам'ятати, що коефіцієнти, розташовані на головній діагоналі у матриці коефіцієнтів, завжди більші від нуля. Згідно з першою теоремою Релея: $r_{ik} = r_{ki}$.

Для визначення коефіцієнтів першого рівняння розглянемо рівновагу першого вузла послідовно в епюрах $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ і M_p^0 (рис. 6.10, а):

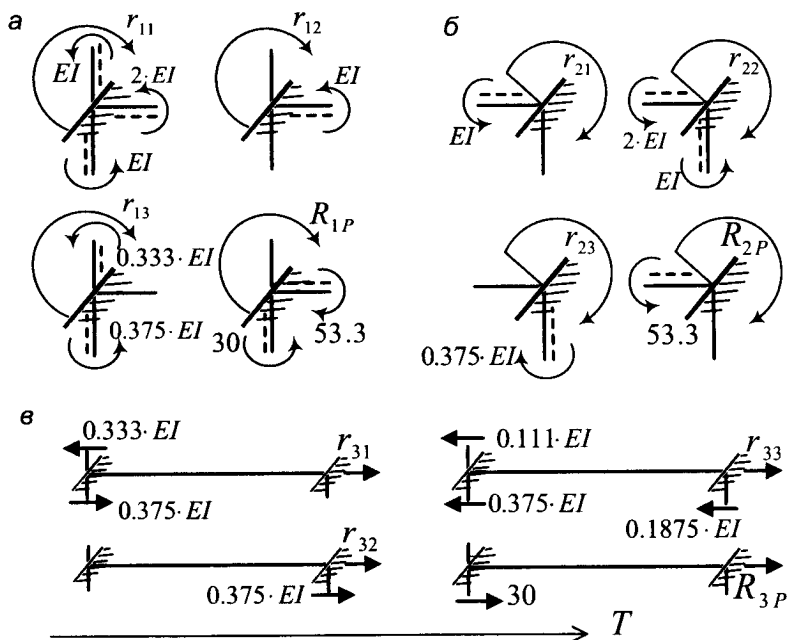


Рис. 6.10

$$r_{11} - EI - EI - 2 \cdot EI = 0 \Rightarrow r_{11} = 4 \cdot EI,$$

$$r_{12} - EI = 0 \Rightarrow r_{12} = EI,$$

$$r_{13} + 0.375 \cdot EI - 0.333 \cdot EI = 0 \Rightarrow r_{13} = -0.042 \cdot EI,$$

$$R_{1P} + 53.3 - 30 = 0 \Rightarrow R_{1P} = -23.3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для визначення коефіцієнтів другого рівняння розглянемо рівновагу другого вузла в епюрах $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ і M_p^0 (рис. 6.10, б):

$$\begin{aligned} r_{21} - EI &= 0 \Rightarrow r_{21} = EI = r_{12}, \\ r_{22} - EI - 2 \cdot EI &= 0 \Rightarrow r_{22} = 3 \cdot EI, \\ r_{23} + 0.375 \cdot EI &= 0 \Rightarrow r_{23} = -0.375 \cdot EI = r_{32}, \\ R_{2p} - 53.3 &= 0 \Rightarrow R_{2p} = 53.3 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для визначення коефіцієнтів третього рівняння розглянемо рівновагу частини рами, відрізаної замкнутим розрізом послідовно в епюрах $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ і M_p^0 (рис. 6.10, в):

$$\begin{aligned} \sum T &= 0; r_{31} - 0.333 \cdot EI + 0.375 \cdot EI = 0 \Rightarrow r_{31} = -0.042 \cdot EI, \\ r_{32} + 0.375 \cdot EI &= 0 \Rightarrow r_{32} = -0.375 \cdot EI, \\ r_{33} - 0.111 \cdot EI - 2 \cdot 0.1875 \cdot EI &= 0 \Rightarrow r_{33} = 0.486 \cdot EI, \\ R_{3p} + 30 &= 0 \Rightarrow R_{3p} = -30 \text{ кН}. \end{aligned}$$

r_{21} , r_{31} , r_{32} можна було не визначати, оскільки завжди $r_{21} = r_{12}$; $r_{31} = r_{13}$; $r_{32} = r_{23}$.

Сумарну одиничну епюру показано на рис. 6.11.

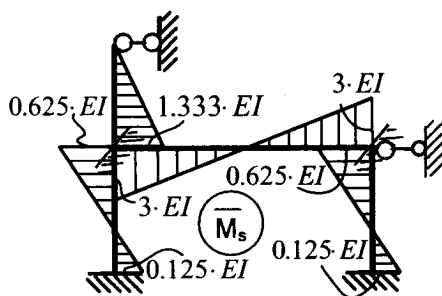


Рис. 6.11

Для перевірки правильності знаходження коефіцієнтів за невідомих перемножимо $\overline{M}_s$ саму на себе (як у методі сил):

$$\begin{aligned} \int \frac{\overline{M}_s^2}{EI} dx &= \left(\frac{1}{2} \cdot 1.333 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.33 + 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0.625 \cdot 0.625 + 2 \cdot 0.125 \cdot 0.125 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot 0.625 \cdot 0.125) + \frac{8}{6} \cdot 4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 3) \right) \cdot EI = 8.652 \cdot EI, \end{aligned}$$

$$\sum r_{ik} = (4 + 1 - 0.042 + 1 + 3 - 0.375 - \\ - 0.042 - 0.375 + 0.486) \cdot EI = 8.652 \cdot EI,$$

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^2}{EI} dx = \sum r_{ik}.$$

Після підстановки знайдених величин r_{ik} , R_{ip} у канонічні рівняння отримаємо:

1. $4 \cdot EI \cdot Z_1 + EI \cdot Z_2 - 0.042 \cdot EI \cdot Z_3 - 23.3 = 0.$
2. $EI \cdot Z_1 + 3 \cdot EI \cdot Z_2 - 0.375 \cdot EI \cdot Z_3 + 53.3 = 0.$
3. $-0.042 \cdot EI \cdot Z_1 - 0.375 \cdot EI \cdot Z_2 + 0.486 \cdot EI \cdot Z_3 - 30 = 0.$

Звідки

$$Z_1 = 10.04 \cdot \frac{1}{EI}; \quad Z_2 = -14.71 \cdot \frac{1}{EI}; \quad Z_3 = 51.24 \cdot \frac{1}{EI}.$$

Розв'язок системи рівнянь перевіряємо підстановкою визначених Z_1 , Z_2 , Z_3 у рівняння:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10.04 - 14.71 - 0.042 \cdot 51.24 - 23.3 &= 40.16 - 40.16 = 0, \\ 10.04 - 3 \cdot 14.71 - 0.375 \cdot 51.24 + 53.3 &= -63.34 + 63.34 = 0, \\ -0.042 \cdot 10.04 + 0.375 \cdot 14.71 + 0.486 \cdot 51.24 - 30 &= -30.42 + 30.42 = 0. \end{aligned}$$

Будуємо епюри моментів від дійсних значень Z_1 , Z_2 , Z_3 , користуючись принципом пропорційності (рис. 6.12).

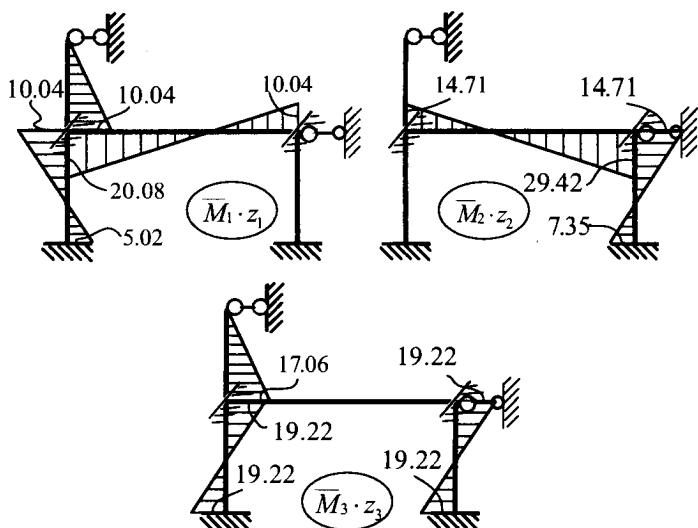


Рис. 6.12

Ординати остаточної епюри згинальних моментів отримаємо як алгебраїчну суму ординат вантажної епюри M_p^0 і епюр $\bar{M}_1 \cdot Z_1$, $\bar{M}_2 \cdot Z_2$ і $\bar{M}_3 \cdot Z_3$ (рис. 6.13, а). Статична перевірка остаточної епюри згинальних моментів полягає у перевірці рівноваги усіх вузлів рами (рис. 6.13, з).

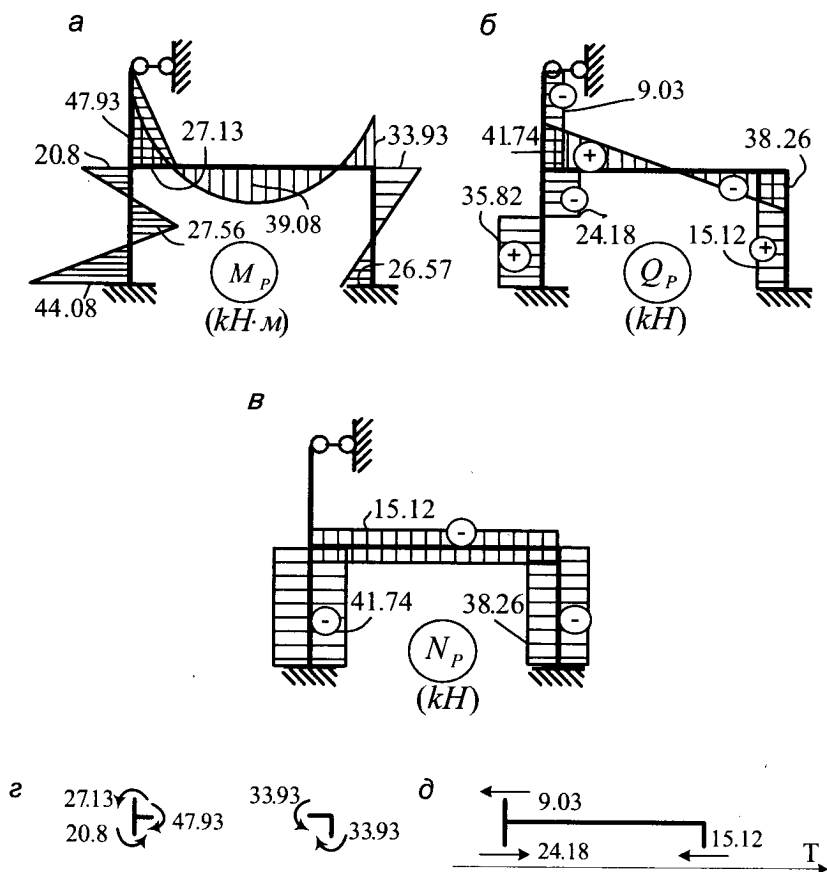


Рис. 6.13

Для несвобідних рам, тобто для рам, у яких немає лінійних переміщень вузлів, достатньо зробити тільки статичну перевірку епюри M .

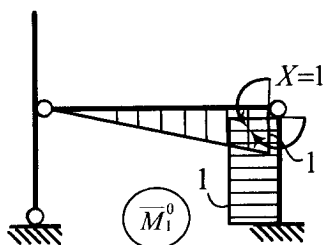


Рис. 6.14

Для свободних рам, які мають лінійні зміщення вузлів (до них належить рама, яку розраховуємо), крім статичної, потрібно виконати кінематичну перевірку епюри M_p . Для цього будемо будь-яку одиничну епюру моментів для можливої основної системи заданої рами під час розрахунку за методом сил (рис. 6.14) і перемножимо її на остаточну епюру. У результаті повинні одержати нуль:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i^0 \cdot M_p}{EI} dx = 0.$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_i^0 \cdot M_p}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \left(-1 \cdot 4 \cdot 33.93 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 4 \cdot 26.57 \cdot \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{8}{6 \cdot 4 \cdot EI} (-33.93 \cdot 1 + 4 \cdot 39.08 \cdot 0.5) = (-14.72 + 14.74) \cdot \frac{1}{EI} = \frac{0.02}{EI} \approx 0.0. \end{aligned}$$

Після побудови і перевірки епюри M_p будемо епюри Q_p і N_p (рис. 6.13, б, в), тому що це виконують і в статично визначених системах. Для перевірки цих епюр розглядаються умови рівноваги окремих частин рами (рис. 6.13, д) та рами загалом (рис. 6.15):

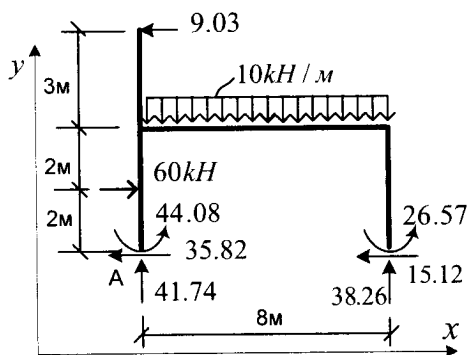


Рис. 6.15

$$\begin{aligned} \sum X &= 0: 60 - 35.82 - 9.03 - 15.12 \approx 0, \\ 0.03 &\approx 0, \\ \sum Y &= 0: 41.74 + 38.26 - 10 \cdot 8 = 0, \\ 0 &= 0, \\ \sum M_A &= 0: 60 \cdot 2 + 10 \cdot 8 \cdot 4 - 38.26 \cdot 8 - 9.03 \cdot 7 - 44.08 - 26.57 \approx 0, \\ 0.06 &\approx 0. \end{aligned}$$

6.4. Спрощення розрахунку симетричних рам

Симетричне навантаження у симетричних рамах зумовлює симетричні деформації. Це означає, що кути повороту симетрично розташованих вузлів рівні за величиною і зворотні за напрямком, а вузли та перерізи на осі симетрії не повертаються. Лінійні зміщення вузлів можуть бути тільки симетричними, тому вузли, симетрично розташовані стосовно осі симетрії і з'єднані між собою прямо-лінійними ригелями, під час симетричного навантаження не можуть лінійно зміщуватися у напрямку, перпендикулярному до осі симетрії (рис. 6.16, а).

За дії обернено симетричного навантаження на симетричну раму деформований вигляд рами буде обернено симетричним. Кути повороту симетрично розташованих вузлів рівні за величиною і за напрямком. Лінійні зміщення вузлів обернено симетричні, тому перерізи на осі симетрії (рис. 6.16, б, переріз k , k') не зміщуються вздовж осі симетрії.

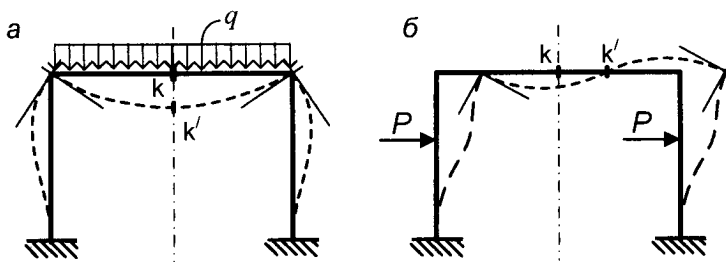


Рис. 6.16

Під час розрахунку симетричних рам за методом переміщень так само, як і під час розрахунку методом сил, можна використати групові невідомі. Групові невідомі дають змогу отримати симетричні або обернено симетричні епюри від одиничних невідомих. У результаті канонічні рівняння розділяються на дві незалежні системи, в одну з яких входять тільки симетричні, а в другу – обернено симетричні невідомі.

Використання симетрії у методі переміщень ґрунтується на тих самих ідеях, що і у методі сил.

Невідомі переміщення симетрично розташованих вузлів групуються у нові парні невідомі, які являють собою симетричні і обернено симетричні невідомі.

Канонічні рівняння складаються для узагальнених переміщень (парних невідомих). Форма канонічних рівнянь зберігається. Однак значення одиничних і вантажних реакцій у рівняннях набувають іншого сенсу. Тут r_{ik} – узагальнена реакція, яка відповідає узагальненому переміщенню Z_i від парного переміщення ($Z_k = 1$); R_{ip} – узагальнена реакція, яка відповідає узагальненому переміщенню Z_i від навантаження. Узагальнені реакції визначаються як суми простих реакцій у симетричних зв'язках у разі групового переміщення.

Додатними напрямками реакцій є напрямки, які збігаються з додатним напрямком переміщень під час одиничних групових переміщень.

Наприклад, коли позначити симетричне кутове переміщення вузлів 1 і 2 – Z_k , а обернено симетричне кутове переміщення тих самих вузлів – Z_i (рис. 6.17, а), то реакції r_{km} (рис. 6.17, б) і r_{im} (рис. 6.17, в) від симетричного переміщення Z_m вузлів 3 і 4 дорівнюють сумі двох реакцій у зв'язках 1 і 2, додатний напрямок яких показано на рис. 6.17.

Легко переконатися, що обернено симетрична реакція r_{im} , яка відповідає обернено симетричному переміщенню Z_i від симетричного переміщення Z_m вузлів 3 і 4, дорівнює нулю.

У цьому полягає зміст використання парних невідомих у вигляді симетричних і обернено симетричних переміщень.

Симетричні реакції від обернено симетричних переміщень і навантажень і обернено симетричні реакції від симетричних переміщень і навантажень дорівнюють нулю. Як і в методі сил, канонічні рівняння за будь-якого навантаження розпадаються на дві незалежні системи: одна містить тільки симетричні невідомі, а друга – обернено симетричні. Тому у разі симетричного навантаження усі обернено симетричні переміщення дорівнюють нулю, а у разі обернено симетричного навантаження усі симетричні невідомі теж дорівнюють нулю.

Переміщення за напрямом зв'язків, розташованих на осі симетрії, наприклад, за напрямком зв'язку 7 (рис. 6.17), або за напрямком зв'язків, розташованих тільки з одного боку від осі симетрії, наприклад, за напрямком зв'язку 10 (рис. 6.17), є симетричними або обернено симетричними і не групуються.

Переміщенням за напрямком зв'язку 7 є обернено симетричний кут повороту вузла, а переміщенням за напрямком зв'язку 10 – обернено симетричне лінійне переміщення вузлів першого ярусу.

Якщо система має дві осі симетрії, то групують за двома осями у групи з чотирьох переміщень, як і у методі сил.

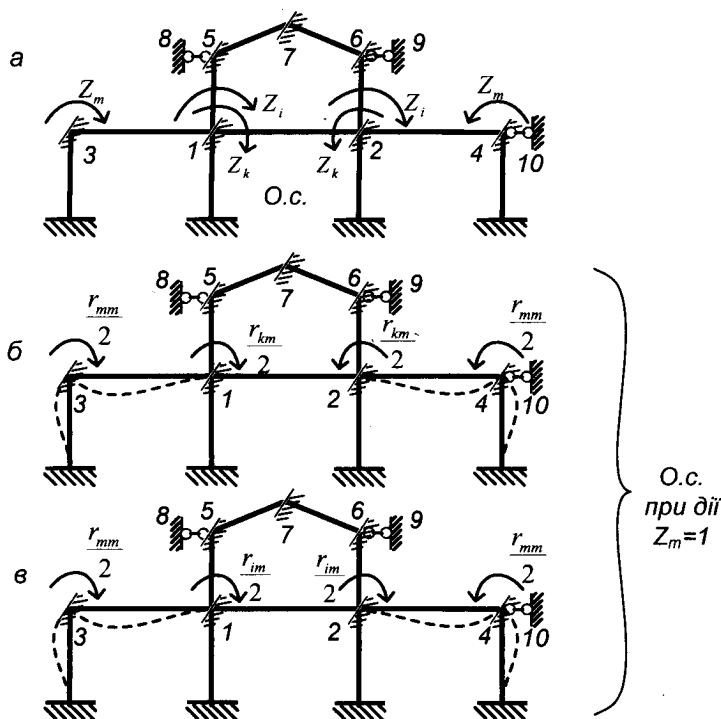


Рис. 6.17

У деяких випадках симетричних рам з симетричним навантаженням можна розглядати тільки половину рами (з одного боку від осі симетрії). Перерізи на осі симетрії необхідно поставити у ті самі умови деформацій, в яких ці перерізи перебувають у заданій рамі (рис. 6.18).

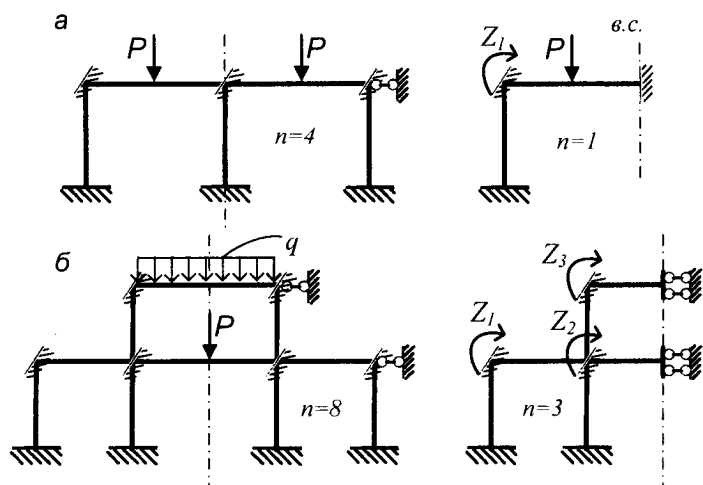


Рис. 6.18

Епюра моментів, отримана для однієї половини рами, повторюється симетрично на іншій половині. У рамі на рис. 6.18, а переріз на осі симетрії не обертається, не зміщується по вертикалі і по горизонталі. У рамі (рис. 6.18, б) перерізи ригелів на осі симетрії не обертаються і не зміщуються по горизонталі. По вертикалі ці перерізи можуть зміщуватися.

6.5. Розрахунок рам за методом переміщень на дію температури і зміщення опор

Канонічні рівняння методу переміщень під час розрахунку на дію температури і задане зміщення опор відрізняються від рівнянь на дію навантаження тільки вільними членами. Вони у першому випадку являють собою реакції від дії температури у зв'язках, накладених в основній системі проти зміщення вузлів і позначаються R_{it} ; у другому випадку – це реакції від заданого зміщення опор і позначаються $R_{i\Delta}$. Уся особливість розрахунку рам за методом переміщень на дію температури і зміщення опор полягає у визначенні цих вільних членів канонічних рівнянь.

Для визначення реактивних зусиль від дії температури потрібно будувати епюру згинальних моментів від дії температури у статично невизначеній основній системі методу переміщень. Це можна зробити, якщо будь-яку температурну дію розкласти на симетричну і обернено симетричну складові.

Якщо якийсь стержень АВ з симетричним поперечним перерізом (вісь стержня проходить посередині висоти перерізу) нагріти на t_1 згори і t_2 знизу, то таку несиметричну температурну дію можна замінити на симетричну дію $t_{\text{сим}}$, коли верхнє і нижнє волокна нагріти на однакову температуру $t_{\text{сим}} = (t_1 + t_2)/2$, і обернено симетричну $t_{\text{об.сим}}$, коли верхнє волокно нагріти на температуру $(t_1 - t_2)/2$, а нижнє – на температуру $-(t_1 - t_2)/2$.

Елементи основної системи методу переміщень (статично невизначені балки) під час симетричного нагрівання подовжуються, але не вигинаються. За обернено симетричного нагрівання елементи основної системи не подовжуються, оскільки температура осьового волокна дорівнює нулю, але вигинаються, і в перерізах елементів виникають згинальні моменти, епюри яких наведені у табл. 6.1.

Розглянемо приклад. Розрахувати раму (рис. 6.19, а) на дію температури за висоти поперечних перерізів стержнів рами d і $EI = \text{const}$. На рис. 6.19, б, в задана температурна дія приведена до симетричної і обернено симетричної складових. Основна система показана на рис. 6.20. Система канонічних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1t,\text{сим}} + R_{1t,\text{об.сим}} &= 0, \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2t,\text{сим}} + R_{2t,\text{об.сим}} &= 0. \end{aligned}$$

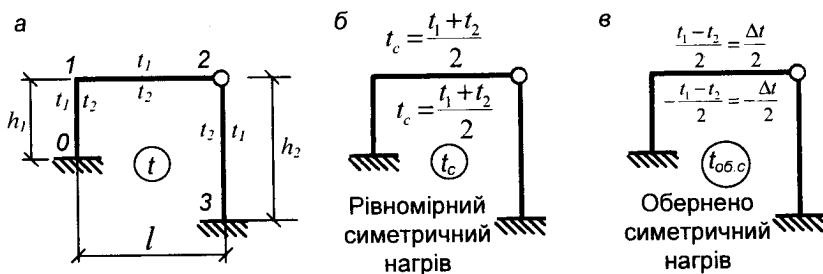


Рис. 6.19

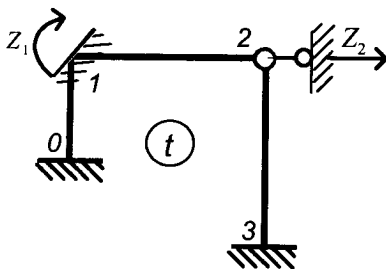


Рис. 6.20

Усі коефіцієнти за невідомих визначаються як під час дії навантаження. Вільні члени рівнянь – це реакції, які виникають під час симетричного і обернено симетричного нагрівань елементів в основній системі.

Визначимо спочатку подовження стержнів рами, зумовлене симетричним нагріванням (нехтуємо впливом поздовжніх сил):

$$\text{подовження стояка 0-1} - \Delta_1 = \alpha \cdot t_0 \cdot h_1;$$

$$\text{подовження стояка 2-3} - \Delta_2 = \alpha \cdot t_0 \cdot h_2;$$

$$\text{подовження стояка 1-2} - \Delta_3 = \alpha \cdot t_0 \cdot l,$$

$$\text{де } t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Коли вісь стержня не ділить висоту поперечного перерізу навпіл, то $t_0 = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{d} \cdot y$, де y – відстань від волокна, нагрітого на t_2 , до осі стержня.

Нове розташування вузлів основної системи після рівномірного нагрівання показано на рис. 6.21, а. З цього рисунка визначимо взаємне зміщення кінців усіх стержнів у напрямках, перпендикулярних до їхніх осей. Вузол 1 під час зміщення не обертається, тому епюру згинальних моментів від цих зміщень можна отримати перемноженням епюри від одиничних зміщень (див. табл. 6.1) на величини взаємних зміщень. Вигляд епюри $M_{1, \text{сум}}$ і значення її ординат показано на рис. 6.21, б.

З умови рівноваги вузла 1 (рис. 6.21, в) визначаємо $R_{1, \text{сум}}$:

$$\sum M_1 = 0: R_{1, \text{сум}} - \frac{6 \cdot EI}{h_1^2} \cdot \Delta_{10} - \frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot \Delta_{21} = 0,$$

звідки

$$R_{1t, \text{сум}} = 6 \cdot EI \cdot \left(\frac{\Delta_{10}}{h_1^2} + \frac{\Delta_{21}}{2 \cdot l^2} \right).$$

Якщо провести розріз 1-1 (рис. 6.21, з) і скласти рівняння проєкцій на горизонтальну вісь X сил, які діють на відрізану частину, можна визначити $R_{2t, \text{сум}}$:

$$\sum X = 0 : \frac{12 \cdot EI}{h_1^3} \cdot \Delta_{10} + R_{2t, \text{сум}} = 0,$$

звідки

$$R_{2t, \text{сум}} = -\frac{12 \cdot EI}{h_1^3} \cdot \Delta_{10}.$$

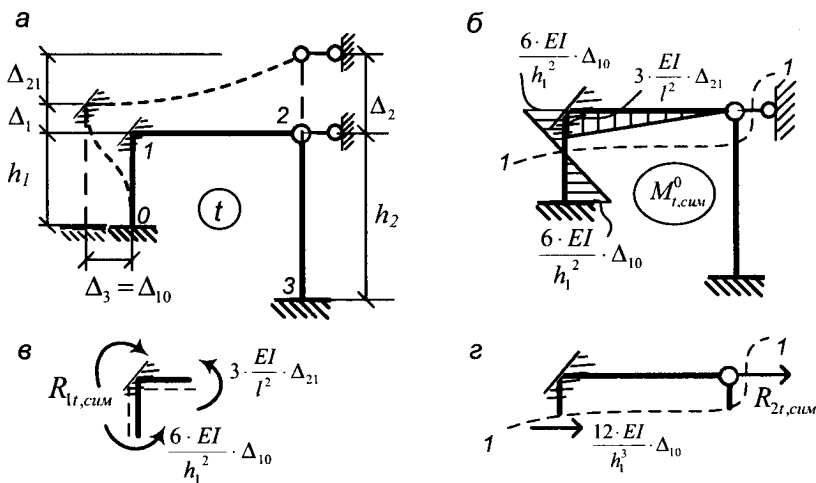


Рис. 6.21

Тепер розглянемо обернено симетричну дію температури за різниці зміни температур зовнішнього і внутрішнього волокон $\Delta t = t_1 - t_2$. За даними табл. 6.1 будуємо епюру $M^0_{t, \text{об. сум}}$. Ординати цієї епюри відкладаються збоку від'ємної температури стержня, тобто збоку розтягнутих волокон стержнів основної системи (рис. 6.22).

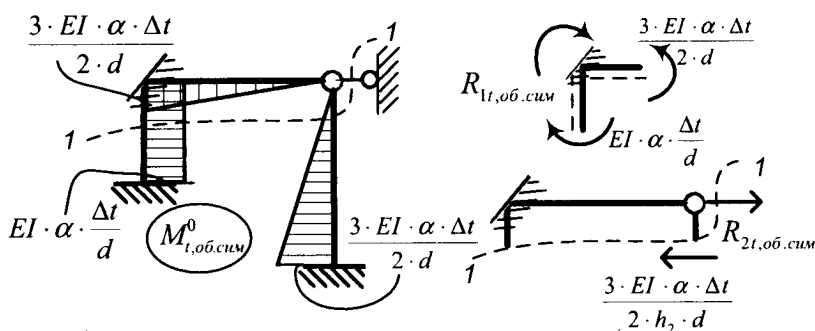


Рис. 6.22

З умови рівноваги вузла 1 (рис. 6.22) визначаємо:

$$\sum M_1 = 0: R_{1t,об.сум} + \frac{EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{d} - \frac{3 \cdot EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot d} = 0,$$

звідки

$$R_{1t,об.сум} = \frac{EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot d}.$$

З умови рівноваги відрізаної розрізом 1-1 частини рами (рис. 6.22) одержимо:

$$\sum X = 0: R_{2t,об.сум} - \frac{3 \cdot EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot d \cdot h_2} = 0;$$

$$R_{2t,об.сум} = \frac{3 \cdot EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot d \cdot h_2}.$$

Після того, як усі коефіцієнти і вільні члени знайдені, розв'язуванням системи канонічних рівнянь визначаються невідомі Z_1 і Z_2 . Остаточні значення згинальних моментів визначають за формулою

$$M_t = M_{t,сум}^0 + M_{t,об.сум}^0 + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2.$$

За епюрою M_t будемо епюри Q_t і N_t .

Просто виконується розрахунок за методом переміщень на задане зміщення опор. Розглянемо раму із стержнями постійної жорсткості, показану на рис. 6.23, а. Задано: вузол 0 зміщується по вертикалі на $\Delta_0 = 2$ см, вузол 3 по горизонталі на $\Delta_3 = 1$ см і обертається за годинниковою стрілкою на кут $\varphi_3 = 0,001$ рад.

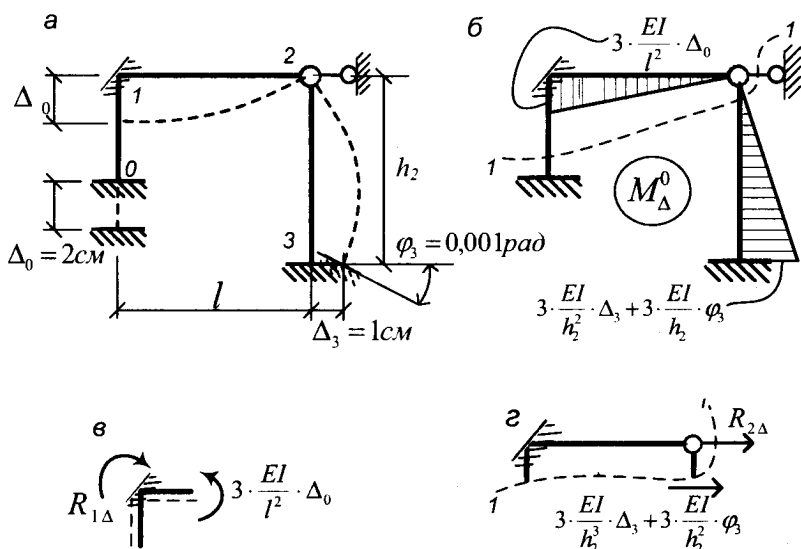


Рис. 6.23

Система канонічних рівнянь має такий вигляд:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1\Delta} = 0,$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2\Delta} = 0.$$

Усі коефіцієнти за невідомих визначаються як під час дії навантаження. Для визначення вільних членів канонічних рівнянь - $R_{i\Delta}$ необхідно побудувати епюру M_{Δ}^0 - епюру в основній системі від заданих зміщень, використовуючи дані табл. 6.1 (рис. 6.23, б).

$R_{1\Delta}$ визначається з умов рівноваги вузла 1 (рис. 6.23, в):

$$R_{1\Delta} = \frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot \Delta_0.$$

З умови рівноваги частини рами, відрізаної перерізом 1-1 (рис. 6.23, г), визначається $R_{2\Delta}$:

$$\sum X = 0: R_{2\Delta} + \frac{3 \cdot EI}{h_2^2} \cdot \Delta_3 + \frac{3 \cdot EI}{h_2} \cdot \varphi_3 = 0,$$

$$R_{2\Delta} = -\frac{3 \cdot EI}{h_2^2} \cdot \Delta_3 - \frac{3 \cdot EI}{h_2} \cdot \varphi_3 = 0.$$

Подальший розрахунок виконуємо, як і розрахунок на дію навантаження чи температури.

Задачі і питання для самоперевірки

1. У чому полягає суть методу переміщень?
2. Як визначається ступінь кінематичної невизначеності рами?
3. Що приймаємо за основні невідомі під час розрахунку рам методом переміщень?
4. Порядок розрахунку статично невизначених систем методом переміщень.
5. Канонічні рівняння методу переміщень і їхній зміст.
6. У чому полягає спрощення під час розрахунку симетричних систем методом переміщень із використанням симетрії?
7. Що вам відомо про переміщення у симетричних рамах з симетричним і обернено симетричним навантаженнями?
8. Як будується остаточна епюра згинальних моментів під час розрахунку кінематично невизначених систем за методом переміщень?
9. Як перевіряють результати розрахунку рам за методом переміщень?
10. Розрахувати раму за методом переміщень (рис. 6.24).
11. Визначити кількість невідомих під час розрахунку рам за методом переміщень з врахуванням симетрії рам і характеру навантаження (рис. 6.25).

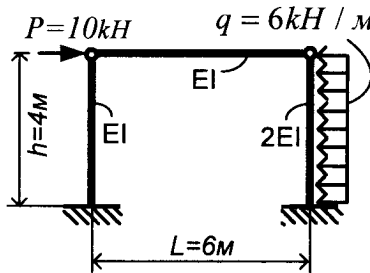


Рис. 6.24

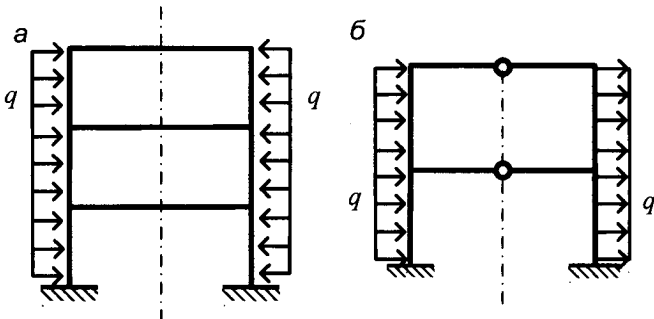


Рис. 6.25

Розділ 7

КОМБІНОВАНИЙ І ЗМІШАНИЙ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ

7.1. Порівняння методу сил і методу переміщень

У розрахунках статично невизначених систем за методом сил і переміщень можна виділити якісно однакові етапи. Визначення ступеня статичної невизначеності системи у методі сил і кінематичної невизначеності у методі переміщень за трудомісткістю фактично однакові. Обидва методи передбачають використання основної системи. У методі сил основна система, зазвичай, статично визначена і утворюється відкиданням зайвих зв'язків. Водночас для однієї статично невизначеної системи можна вибрати багато варіантів основної системи, які задовольняють усі необхідні вимоги. Тому вибір раціональної основної системи – одне з важливих завдань, яке потрібно виконувати у розрахунках за методом сил. Під час розрахунку за методом переміщень утворення основної системи – значно простіший процес. Вона є тільки одна для певної системи і для багатьох рамних каркасів дає змогу отримати неповні канонічні рівняння, що спрощує розрахунок.

За структурою канонічні рівняння методу сил і методу переміщень однакові. Відмінність полягає тільки у фізичному змісті цих рівнянь. В обох методах в основній системі будують одиничні епюри моментів від невідомих і вантажну епюру. У методі переміщень побудова цих епюр простіша, оскільки можна використати таблиці з готовими розв'язками. Так само просто визначаються коефіцієнти і вільні члени рівнянь методу переміщень.

Побудова остаточної епюр M , Q , N в обидвох методах ідентична.

Отже, з цього аналізу зрозуміло, що метод переміщень має деякі переваги. Однак це не означає, що метод переміщень раціо-

нальніший для усіх статично невизначених систем. Наприклад, під час розрахунку ферм із шарнірними вузлами перевагу має метод сил. Взагалі метод переміщень втрачає свої переваги, коли необхідно враховувати поздовжні деформації елементів системи. Коли немає застережень щодо вибору методу розрахунку, перевагу віддають методу, де кількість основних невідомих (кількість канонічних рівнянь) менша і відповідно меншим є обсяг обчислювальних робіт. Розглянемо кілька прикладів. На рис. 7.1 зображено кілька статично невизначених рам.

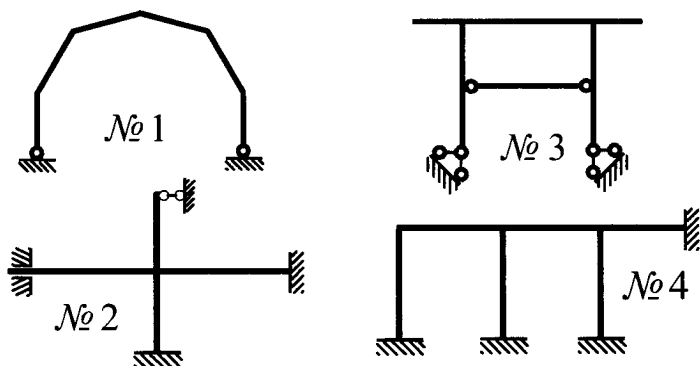


Рис. 7.1

Не розглядатимемо детально, як визначається кількість невідомих під час розрахунку цих рам за методом сил і переміщень. Наведемо тільки результати (пропонується самостійно перевірити ці результати). Так, під час розрахунку рами № 1 за методом сил основних невідомих – 1, за методом переміщень – 9. Для рами № 2 – відповідно 6 і 1, для рами № 3 – відповідно 2 і 6, для рами № 4 – 9 і 3. Аналіз рам і результатів визначення кількості невідомих під час розрахунку їх за методом сил і методом переміщень дає змогу зробити такий висновок: до розрахунку методом сил тяжіють рами, які мають мало опорних реакцій і багато пружних вузлів (№ 1, № 3), а до методу переміщень – рами з багатьма опорними зв'язками і малою кількістю жорстких вузлів (№ 2 і № 4). За однакової кількості невідомих безліч обчислювальних операцій методу переміщень простіші, ніж методу сил.

7.2. Комбінований метод

Комбінованим називається метод розрахунку статично невизначених систем, за якого для розрахунку системи використовують паралельно метод сил і метод переміщень. Під час розрахунку за комбінованим методом основна система може бути вибрана за методом сил з відкиданням тільки частини зайвих зв'язків, або за методом переміщень з накладанням неповної кількості додаткових зв'язків. Отже, основна система, утворена як в методі сил, у комбінованому методі статично невизначена, а основна система, вибрана за методом переміщень, містить нестандартні елементи. Коли основна система вибирається за методом сил, розрахунок її статично невизначеної частини виконують методом переміщень, а коли основна система вибирається за методом переміщень, розрахунок нестандартних елементів виконують за методом сил.

Отже, крім основних невідомих, які відповідають прийнятій основній системі, у комбінованому методі вводяться допоміжні невідомі. Основні невідомі відділені від допоміжних, і канонічні рівняння поділяються на два види, які відповідають методу сил і методу переміщень.

Пояснимо це на прикладі рами, зображеної на рис. 7.2, *а*. Вибираємо основну систему методу сил (рис. 7.2, *б*), а розрахунок статично невизначеної її частини (рис. 7.2, *в*) виконуємо за методом переміщень. Отже, матимемо дві основні невідомі X_1 і X_2 і чотири допоміжні $Z_1, \dots, Z_4$. Статично невизначена частина основної системи повинна бути розрахована на сили V , H і M (рис. 7.2, *в*). Використовуючи результати цього розрахунку, можемо побудувати одиничні та грузову епюри у вибраній основній системі.

Можна основну систему вибрати за методом переміщень (рис. 7.3, *а*), а нестандартний елемент (рис. 7.3, *б*) попередньо визначити за методом сил і розрахувати цей елемент на дію навантаження і на поворот защемлення Z_1 . Другий варіант можна розглядати як метод переміщень з використанням нестандартного елемента при чотирьох основних невідомих $Z_1, \dots, Z_4$ (рис. 7.3, *а*) і двох допоміжних – X_1 і X_2 (рис. 7.3, *в*).

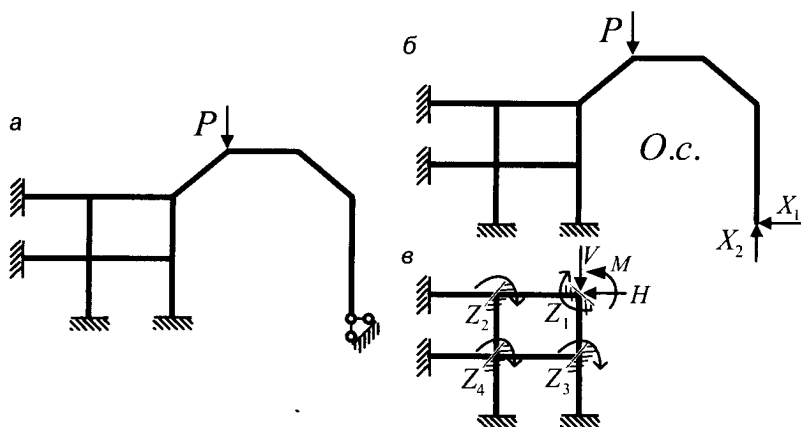


Рис. 7.2

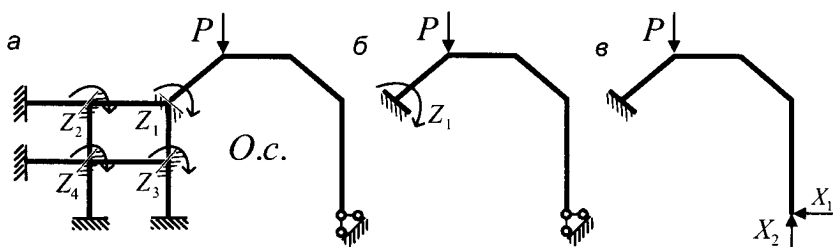


Рис. 7.3

Комбінований метод найчастіше використовують під час розрахунку симетричних рам з несиметричним навантаженням (метод І.М. Рабіновича). У цьому випадку метод полягає на роз'єднаному використанні методу сил і методу переміщень для розрахунку симетричної системи на симетричне і обернено симетричне навантаження. Несиметричне навантаження розкладається на симетричну і обернено симетричну складові. Окремо розраховується симетрична рама на дію симетричної складової навантаження і окремо на дію обернено симетричної складової.

Симетричну раму з симетричним навантаженням раціонально розраховувати за методом переміщень, а з обернено симетричним навантаженням – за методом сил. Загальна кількість невідомих може бути меншою, ніж у разі використання тільки методу сил, чи тільки

методу переміщень. Розглянемо симетричну раму з несиметричним навантаженням (рис. 7.4, а). Під час розрахунку методом сил – 4 невідомі, під час розрахунку за методом переміщень – 6 невідомих. Якщо замінімо навантаження на симетричне і обернено симетричне і розрахуємо симетричну раму з симетричним навантаженням за методом переміщень, то матимемо два групових невідомих Z_1 і Z_2 (рис. 7.4, б), а під час розрахунку симетричної рами з обернено симетричним навантаженням за методом сил – одне групове невідоме X_1 . (рис. 7.4, в).

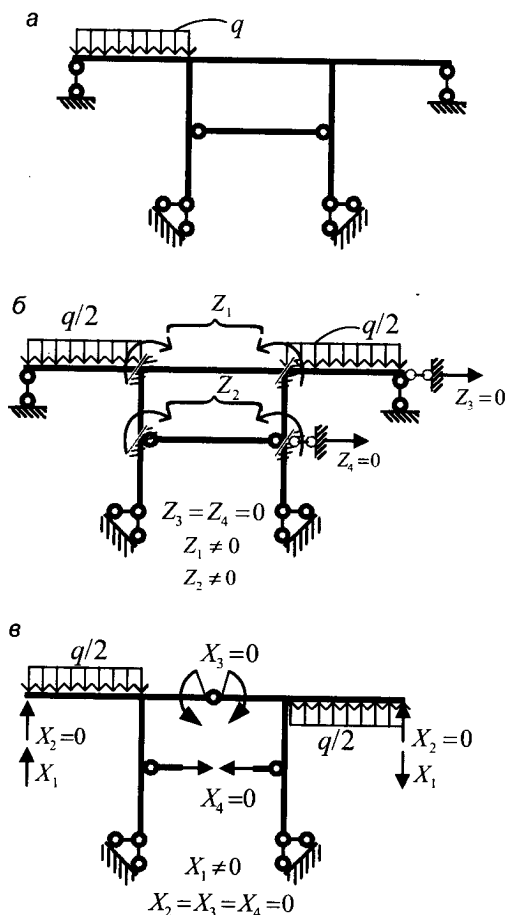


Рис. 7.4

Для отримання остаточної епюри моментів для рами з несиметричним навантаженням необхідно додати епюри моментів від симетричної і обернено симетричної складових навантаження.

7.3. Змішаний метод

У деяких випадках одна частина статично невизначеної рами має значну кількість зайвих зв'язків і малу кількість пружно рухових вузлів, а друга – мало зайвих зв'язків і значну кількість пружно рухових вузлів. Тобто одна частина рами тяжіє до методу переміщень, а інша – до методу сил.

Основна система у змішаному методі (метод А.А. Гвоздєва) утворюється в результаті відкидання (усунення) зв'язків (як у методі сил) у частині системи, яка тяжіє до методу сил, і накладанням зв'язків (як у методі переміщень) у частині рами, яка тяжіє до методу переміщень.

Основними невідомими є одночасно і сили (як у методі сил) і переміщення (як у методі переміщень). Структура канонічних рівнянь звичайна, однак у кожне рівняння входять невідомі сили і переміщення. У системі рівнянь є два види рівнянь. Складові рівняння першого випадку (виду) є переміщення за напрямком усунутих зв'язків (як у методі сил), а складові рівняння другого виду – реакції накладених зв'язків (як у методі переміщень). Кількість рівнянь першого виду дорівнює кількості усунутих зв'язків у разі утворення основної системи, а кількість канонічних рівнянь другого виду – кількості накладених зв'язків. Водночас у рівняння першого виду входять одиничні переміщення не тільки від сил, але і від одиничних переміщень накладених зв'язків. Канонічні рівняння другого виду містять одиничні реакції не тільки від одиничних переміщень зв'язків, але і від одиничних сил. Якщо δ'_{km} – переміщення за напрямком сили X_k від переміщення $Z_m = 1$, а r'_{mk} – реакція у зв'язку m від сили $X_k = 1$, то на основі другої теореми Релея про взаємність реакцій і переміщень

$$\delta'_{km} = -r'_{mk}. \quad (7.1)$$

Переміщення від сил і реакції від переміщень визначаються за звичайними правилами, викладеними у методі сил і у методі переміщень.

Переміщення δ'_{km} від переміщення накладених зв'язків може бути визначеним на основі простих геометричних міркувань, або після визначення r'_{mk} на основі теореми про взаємність реакцій і переміщень.

Реакції r'_{mk} від сил визначаються, як у методі переміщень, з умов рівноваги.

Вантажні члени Δ_{kp} і R_{kp} визначають так, як у методі сил (Δ_{kp}) і в методі переміщень (R_{kp}).

Остаточна епюра згинальних моментів будується так, як в методі сил чи методі переміщень як алгебраїчна сума вантажної епюри і епюр від усіх невідомих.

Перевірку остаточних епюр виконують так само, як у методах сил і переміщень.

Розглянемо раму, зображену на рис. 7.5, а. Під час розрахунку методом сил рама чотири рази статично невизначена, під час розрахунку методом переміщень невідомих – на одиницю менше (два кути повороту вузлів і одне лінійне зміщення вузлів).

Основну систему змішаного методу, одержану усуненням опорного зв'язку 1 і введенням зв'язку проти повороту вузла 2, показано на рис. 7.5, б. Отже, під час розрахунку рами змішаним методом буде два невідомих: X_1 – реакція відкинутого зв'язку і Z_2 – кут повороту вузла 2 (нумерація невідомих сил і переміщень виконується за порядком). На рис. 7.5, в, г, д показані, відповідно, вантажна епюра, одиничні епюри від $X_1 = 1$ і $Z_2 = 1$.

Канонічні рівняння:

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta'_{12} \cdot Z_2 + \Delta_{1p} &= 0, \\ r'_{21} \cdot X_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Для визначання δ_{11} перемножимо епюру $\overline{M_1^0}$ саму на себе:

$$\delta_{11} = \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{2 \cdot EI} + \frac{8 \cdot 2 \cdot 8}{EI} = \frac{640}{3 \cdot EI}.$$

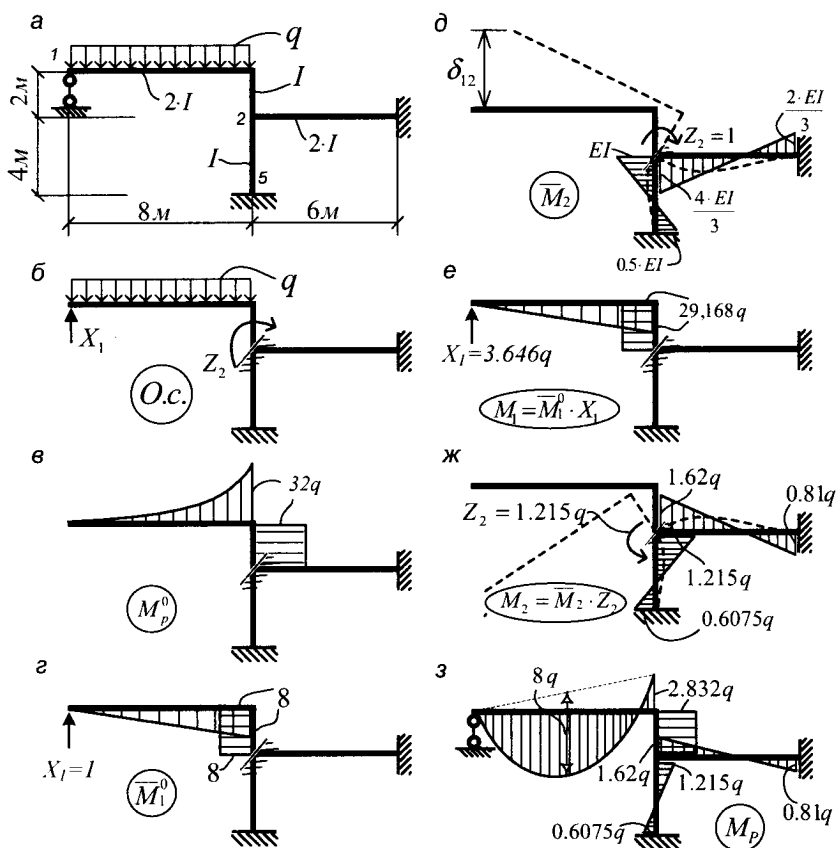


Рис. 7.5

Для визначення Δ_{1p} перемножимо епюри M_p^0 і $\bar{M}_1^0$:

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{3} \cdot 32 \cdot q \cdot 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot EI} - 32 \cdot q \cdot \frac{2 \cdot 8}{EI} = -\frac{768 \cdot q}{EI}.$$

Для визначення r_{22} розглядаємо рівновагу вузла 2 епюри $\bar{M}_2$:

$$r_{22} - \frac{4}{3} \cdot EI - EI = 0, \quad r_{22} = \frac{4}{3} \cdot EI + EI = \frac{7}{3} \cdot EI.$$

З рівноваги вузла 2 епюри $\bar{M}_1$:

$$r'_{21} = -8, \quad \delta'_{12} = -r'_{21} = 8.$$

З рівноваги вузла 2 епюри M_p в основній системі:
 $R_{2p} = -32 \cdot q$.

Тоді:

$$\begin{cases} \frac{640}{3 \cdot EI} \cdot X_1 + 8 \cdot Z_2 - \frac{768}{EI} = 0, \\ -8 \cdot X_1 + \frac{7}{3} \cdot EI \cdot Z_2 + 32 \cdot q = 0. \end{cases}$$

Звідки отримаємо: $X_1 = 3.646 \cdot q$; $Z_2 = -1.215 \cdot q / (EI)$.

Виправлені одиничні і остаточна епюри згинальних моментів показані на рис. 7.5, е, ж, з.

Питання для самоперевірки

1. Яке із рівнянь (7.2) є умовою рівноваги, а яке умовою сумісності деформацій?
2. Який фізичний зміст коефіцієнтів канонічних рівнянь змішаного методу?
3. Вибрати раціональний метод розрахунку симетричних рам (рис. 7.6) у разі довільного, симетричного і обернено симетричного навантаження.

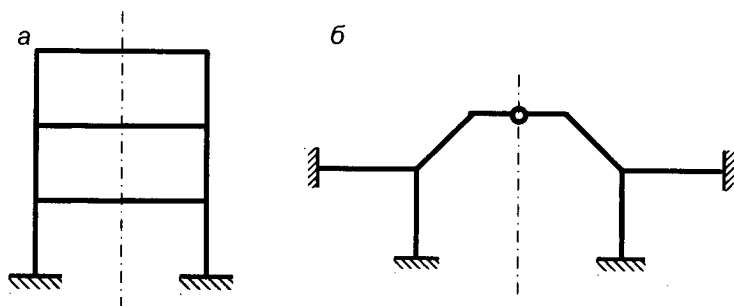


Рис. 7.6

Розділ 8

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ БАГАТОПОВЕРХОВИХ І БАГАТОПРОЛЬОТНИХ РАМ

8.1. Призначення наближених методів і міркування, які лежать у їх основі

Розрахунок складних статично невизначених систем за точними методами, до яких належать метод сил, метод переміщень, змішаний метод – завдання трудомістке і складне. Тому зрозумілим було прагнення знайти простіші способи розрахунку, які усунули б основну математичну трудність – розв’язування громіздких систем рівнянь, а точність розрахунку була б задовільною для практики, близької до точних розрахунків.

Треба зазначити, що так звані точні методи розрахунку мали низку спрощувальних припущень, які роблять окреслення “точний метод” умовним.

Спрощення, про які йтиметься нижче, ширші і ґрунтуються, з одного боку, на додаткових спрощеннях під час вибору розрахункової схеми, а з іншого, – на спрощенні математичного опису суті задачі, побудовані на основі одного з методів чи їх комбінації. Зрозуміло, що необхідна точність розрахунку залежить і від об’єкта розрахунку. Різні вимоги до розрахунку залізничного моста і до розрахунку невеликої тимчасової невідповідальної споруди.

Вищерозглянуті методи розрахунку є перевірковими, оскільки попередньо приймаємо геометрію перерізів і оперуватимемо під час розрахунку параметрами жорсткості елементів системи. Чим більша точність, з якою будуть попередньо задані жорсткісні параметри, тим точнішими будуть результати. Наближені методи можна використати для попереднього розрахунку з метою підбору розмірів перерізів елементів системи.

Наближені методи широко використовують на стадії варіантного проектування, що дає змогу швидко порівняти різні планувальні і конструктивні варіанти споруди.

Здебільшого для визначення зусиль в елементах споруди від випадкових навантажень, що рідко виникають, наближені методи можна використовувати як самостійні і достатньо точні.

Наближені методи потрібні для швидкого прийняття рішень в аварійних ситуаціях, коли потрібно діяти швидко і ефективно. За допомогою наближених методів можна деякою мірою оцінювати результати розрахунку, отримані з використанням програмних комплексів.

Отже, призначення наближених методів різноманітне і знати їх інженеру-будівельнику необхідно.

Треба зазначити, що наближені методи виникли як результат аналізу роботи конструкції і результатів точних розрахунків, тому знаючи ці методи, збагачуються інженерні знання, які дають змогу орієнтуватися в роботі конструкцій, і потрібні вони не тільки тим, хто проектує і будує, але і тим, хто стежить за експлуатацією будівельних конструкцій.

Спрощені, наближені способи розрахунку можна отримати за рахунок спрощення схеми конструкції.

Спрощення розрахункової схеми завжди має певні межі, які не можна не враховувати.

Необхідно відзначити такі способи спрощення розрахункової схеми, як:

- нехтування впливом навантажень, розташованих далеко від стержня, зусилля в якому визначається;
- уніфікація прольотів, висот, жорсткостей окремих елементів системи, якщо різниця цих величин невелика;
- нехтування переміщенням вузлів у випадку, коли вони малі;
- спрощення вузлових з'єднань і опорних закріплень;
- спрощення навантажень.

Допустимі спрощення виявили під час аналізу багатьох результатів розрахунку за точними методами. Широкого узагальнення, однак, отримати неможливо, і ми розглянемо рекомендації для окремих типів рам.

Для простої одноповерхової однопрольотної рами пружний жорсткий вузол, у якому ригель поєднаний з колоною, завжди можна уявити, як щось проміжне між абсолютно жорстким защемленням і шарнірною опорою (рис. 8.1, а).

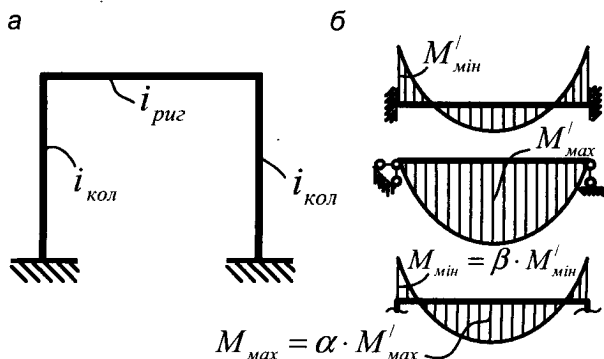


Рис. 8.1

Очевидно, що більша жорсткість колони, то більше защемлення ригеля. Звідси можна зробити висновок, що моменти в перерізах ригеля можна визначити через систему коефіцієнтів, величина яких є функцією співвідношення погонної жорсткості ригеля і колони (рис. 8.1). Отже, запишемо:

$$\begin{cases} M_{\max} = \alpha \cdot M'_{\max} \\ M_{\min} = \beta \cdot M'_{\min} \end{cases}, \quad (8.1)$$

де $M'_{\max}$ – найбільший момент в однопрольотній балці з шарнірними опорами; $M'_{\min}$ – найбільший від'ємний момент у защемленні балки з двома защемленими кінцями (рис. 8.1, б).

Значення коефіцієнтів α , β наведені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

$\frac{i_{\text{риг}}}{i_{\text{кол}}}$	α	β
≥ 4	0,8	0,3
2	0,7	0,5
≤ 1	0,6	0,7

Таку саму ідею можна використати і для розрахунку багато-прольотної одноповерхової рами (рис. 8.2, а).

У цьому разі нехтуємо пружним защемленням ригеля з колонами і розглядаємо ригель як нерозрізну балку з вільним опертям на опори (рис. 8.2, б).

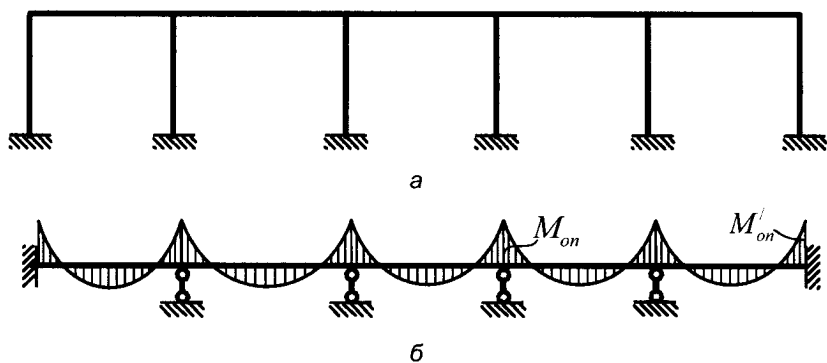


Рис. 8.2

Беручи до уваги, що колони сприймають частку моменту над опорами, визначимо моменти у верхньому перерізі проміжних ($M_{к.сер}$) і крайніх ($M_{к.кр}$) колон як частку опорних моментів нерозрізної балки у функції співвідношення погонної жорсткості ригеля і колони (табл. 8.2):

$$\begin{cases} M_{к.сер} = \gamma_1 \cdot M_{on} \\ M_{к.кр} = \gamma_2 \cdot M'_{on} \end{cases}, \quad (8.2)$$

де M_{on} – момент над відповідною проміжною опорою нерозрізної балки; M'_{on} – момент у крайніх опорах нерозрізної балки із защемленням.

Значення коефіцієнтів γ_1 і γ_2 наведено у табл. 8.2.

Таблиця 8.2

$\frac{i_{риг}}{i_{кол}}$	γ_1	γ_2
≥ 4	0,1	0,2
≤ 1	0,2	0,33

8.2. Розрахунок багатопрольотної та багатоповерхової рами на вертикальне навантаження

На підставі аналізу розрахунку багатопрольотних, багатоярусних рам (рис. 8.3, а) на вертикальне навантаження точними методами можна зробити висновок, що горизонтальне зміщення вузлів рами буде незначним і мало впливатиме на розподіл і величину згинальних моментів. Це дає змогу у наближених розрахунках проігнорувати можливі горизонтальні переміщення вузлів рами.

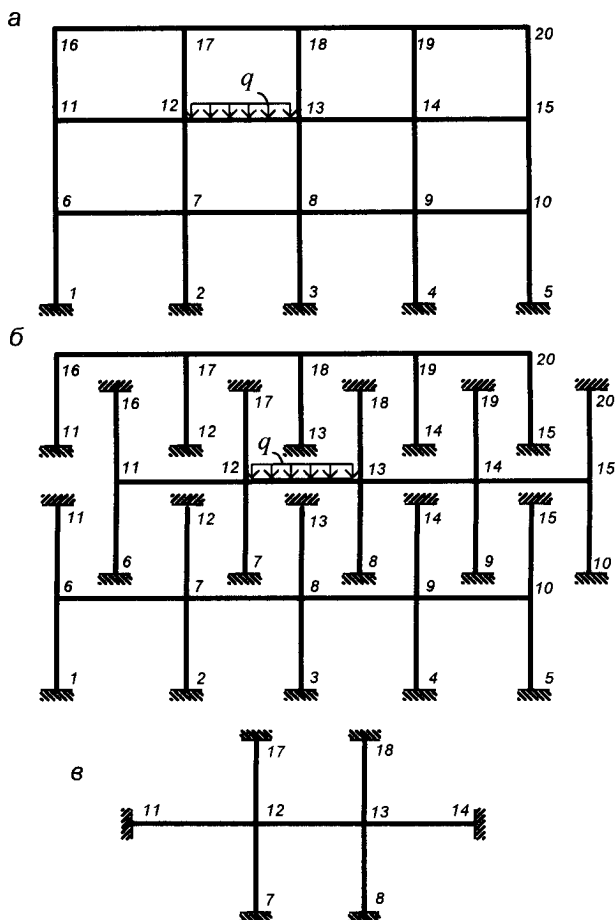


Рис. 8.3

Таке спрощення зумовлює деяку похибку (яка допустима у наближених розрахунках), але істотно спрощує розрахунок.

Приймається також, що навантаження на одному поверсі (ярусі) незначно впливає на величину і розподіл згинальних моментів на ригелях інших поверхів.

На основі таких припущень розділяємо раму на ряд одноповерхових рам, як це показано на рис. 8.3, б. У кожній такій рамі є ригель певного поверху і примикаючі до нього колони верхнього і нижнього поверхів. Беручи до уваги, що вплив завантаженого прольоту на інші прольоти цього поверху різко зменшується з віддаленням їх від завантаженого прольоту, можемо враховувати цей вплив тільки у двох прольотах, суміжних із завантаженням.

Якщо враховувати ці припущення, то розрахункова схема частини рами у разі завантаження прольоту 12–13 буде такою, як зображено на рис. 8.3, в.

Таке спрощення дає змогу уникнути розв'язування системи рівнянь з багатьма невідомими і звести усе рішення до двох рівнянь методу переміщень для кожної виділеної частини рами. У разі симетрії буде тільки одне рівняння з одним груповим невідомим.

Для подальшого спрощення без великої похибки закріплення елементів у вузлах 11, 17, 18, 14, 8 і 7 приймають жорстким, хоч насправді там є пружне защемлення. Це означає, що нехтуємо впливом усіх кутів повороту вузлів рами, крім двох (вузли на кінцях навантаженого прольоту).

Похибку, зумовлену таким припущенням, можна зменшити, якщо під час обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь з рівноваги вузлів рами врахувати, що моменти в окремих стержнях за одиничного повороту вузла, залежно від закріплення стержня на протилежному кінці, змінюються у межах від $4 \cdot i$ (для жорстко защемленого кінця) до $3 \cdot i$ (для шарнірного опертя). У цих межах і приймаємо величину, яка характеризує жорсткість того чи іншого примикаючого стержня.

За рівномірно розподіленого навантаження на ригелі рами (рис. 8.3, в) отримуємо епюру, показану на рис. 8.4. Вищеописаний розрахунок повторюють для кожної виділеної частини (від завантаження кожного прольоту).

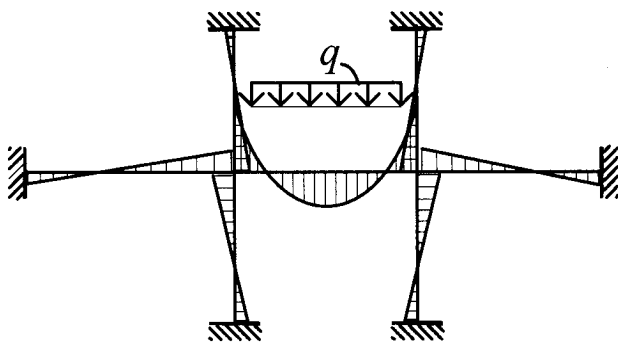


Рис. 8.4

Остаточну епюру моментів можна отримати, якщо скласти епюри, отримані під час розрахунку окремих частин рами.

На кожному ригелі складаються три епюри (від завантаження певного прольоту і двох суміжних), на кожному проміжному стояку – чотири епюри.

8.3. Розрахунок багатопрольотної та багатоповерхової рами на горизонтальне навантаження

Під час розрахунку на вітер розподілений тиск вітру замінюється зосередженим тиском у вузлах на рівні перекриттів. Для рам, у яких жорсткість ригеля значно більша, ніж жорсткість колон, епюра моментів прямолінійна, а нульова точка розташована у межах прольоту. Результати багатьох точних розрахунків показують, що нульові точки у стояках всіх поверхів, крім першого, можна прийняти усередині висоти поверху, а в першому поверсі – на відстані $2/3 \cdot h$ від опорного защемлення.

Якщо зробимо умовний переріз через нульові точки у стояках певного поверху, то з умови рівноваги ($\sum X = 0$) визначимо

$$\sum Q_{нов} = \sum W, \quad (8.3)$$

де $\sum W$ – сума горизонтальних сил вище від поверху, в якому виконуємо переріз (рис. 8.5, а).

Сума горизонтальних сил розподіляється між окремими стояками поверху пропорційно до I_i/h_i^3 , тобто до відношення їх моментів інерції щодо куба висоти, а якщо стояки поверху мають однакову висоту h , то пропорційно до $i_i = I_i/h_i$. Так, поперечна сила в i -му стояку II ярусу матиме такий вигляд:

$$Q_i^{II} = \frac{\sum Q^{II} \cdot i_i^{II}}{\sum i_i^{II}}. \quad (8.4)$$

Моменти на стояках визначаються множенням відповідної поперечної сили на плече.

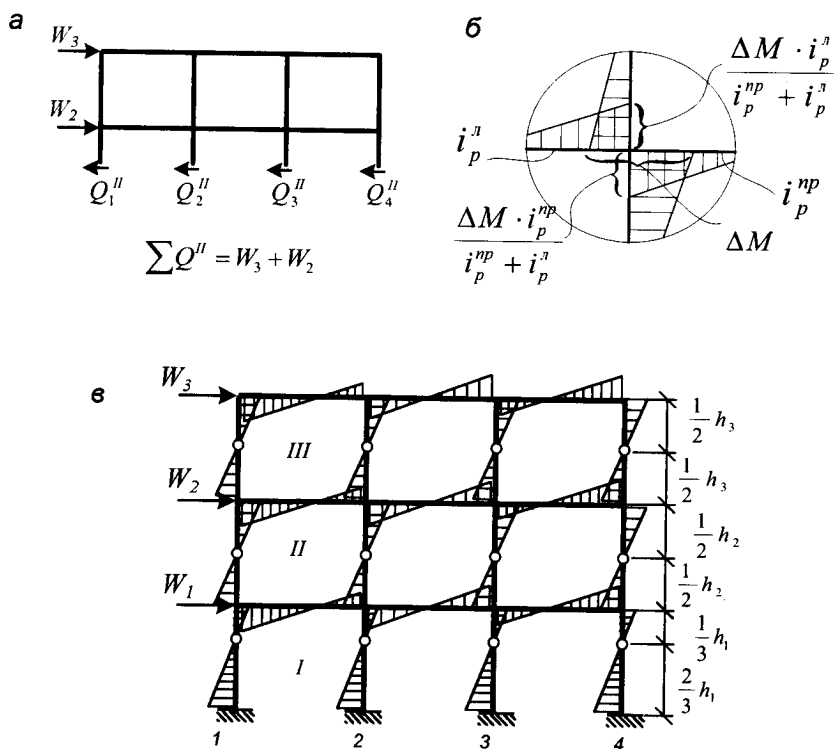


Рис. 8.5

Так отримаємо моменти на усіх стояках. Незрівноважені моменти у вузлах від стояків ($\Delta M = M^u + M^e$) розподіляються на два сусідні ригелі пропорційно до їх погонної жорсткості (рис. 8.5, б). Епюру, яку отримано таким наближеним способом, показано на рис. 8.5, в.

Треба зазначити, що такий наближений метод розрахунку рам на вітер часто використовується як основний.

Питання для самоперевірки

1. Які способи спрощення використовують під час розрахунку наближеними методами багатоповерхових багатопрольотних рам?
2. У яких місцях розташовують нульові точки епюри згинальних моментів у стояках багатоповерхової багатопрольотної рами від горизонтального (вітрового) навантаження?
3. Як визначаються моменти у ригелях багатоповерхової багатопрольотної рами від вітрового навантаження за відомих моментів у стояках рами?

Розділ 9

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ ЗА НЕСУЧОЮ ЗДАТНІСТЮ

9.1. Основні положення

Згідно з чинними будівельними нормами, розрахунок будівельних конструкцій виконують методом граничних станів. Розрізняють дві групи граничних станів:

1) втрата несучої здатності споруди, зумовлена появою течучості і повзучості матеріалу, зрушеннями у з'єднаннях, руйнуванням конструкцій від втоми матеріалу тощо, чи непридатність споруди для експлуатації у разі втрати стійкості форми чи положення;

2) порушення умов нормальної експлуатації споруди у разі появи недопустимих переміщень, коливань, тріщин навіть тоді, коли жоден із граничних станів першої групи ще не настав.

Розрахувавши конструкції за граничним станом, одержимо значну економію матеріалу, тому що враховуватимемо "граничні" можливості роботи матеріалу і конструкції загалом. Так, під час розрахунку на міцність враховують пластичні особливості матеріалу. Такий розрахунок виконується методом граничної рівноваги.

Під час розрахунку конструкцій за методом граничної рівноваги дійсна діаграма роботи матеріалу замінюється діаграмою роботи ідеально пружно-пластичного матеріалу (діаграма Прандтля) (рис. 9.1). Ця діаграма у зонах розтягу і стиску має дві ділянки: першу (східну), яка відповідає пружній роботі матеріалу з модулем пружності E , другу (горизонтальну), що характеризує пластичну стадію роботи матеріалу.

Ділянка течучості характерна тим, що напруження в матеріалі дорівнюють межі течучості σ_m і приймається безмежною. Така діаграма лише наближено відображає реальну роботу деяких матеріалів (будівельні сталі, бетон тощо).

Розглянемо центрально розтягнутий елемент (рис. 9.2, а).

У будь-якому перерізі елемента площею A епюра нормальних напружень матиме вигляд прямокутника (рис. 9.2, б).

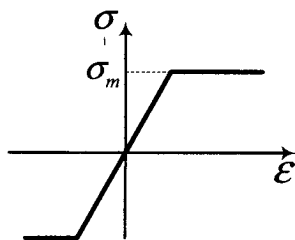


Рис. 9.1

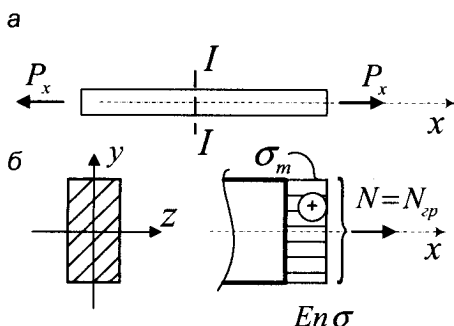


Рис. 9.2

У разі зростання розтягуючої сили P нормальні напруження збільшуються і за певного $P = P_{cp}$ починають дорівнювати σ_m :

$$P_{cp} = N_{cp} = \sigma_m \cdot A. \quad (9.1)$$

Вираз (9.1) визначає граничне навантаження (несучу здатність перерізу) за одноосного напруженого стану елемента. Характерним у цьому випадку є те, що у разі постійного поперечного перерізу елемента пластичні деформації виникають одночасно у всіх перерізах і в усіх волокнах елемента.

У разі чистого згину (рис. 9.3) елемента з симетричним щодо осі у поперечним перерізом (рис. 9.3, б) епюра нормальних напружень у пружній стадії роботи буде такою, як показано на рис. 9.3, в.

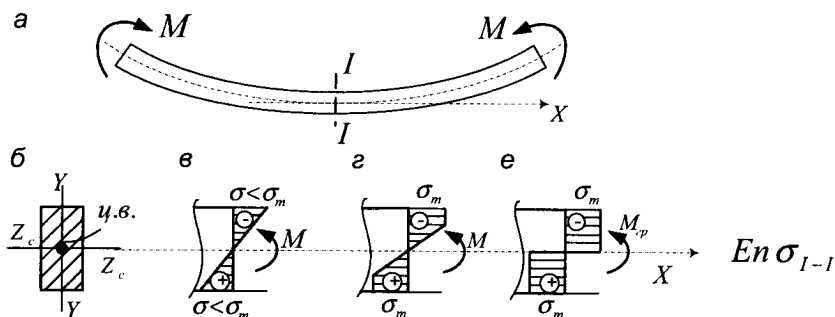


Рис. 9.3

У разі зростання зовнішнього моменту епюра нормальних напружень пройде стадії, показані на рис. 9.3, *з*, і набуде вигляду, показаного на рис. 9.3, *е*. Коли напруження по висоті перерізу σ_m і згинальний момент досягнуть граничного значення M_{cp} , тоді нейтральна вісь розділить переріз на дві однакові за площею частини.

Елемент стає геометрично змінним, оскільки у перерізі, що розглядається, виникає так званий пластичний шарнір, згинальний момент у якому дорівнює M_{cp} :

$$M_{cp} = \sigma_m \cdot W_{nl}, \quad (9.2)$$

де W_{nl} – пластичний момент опору перерізу, який може бути виражений через пружний момент опору перерізу:

$$W_{nl} = \alpha \cdot W.$$

Коефіцієнт α залежить від форми поперечного перерізу, наприклад: для кола $\alpha = 1.7$, для прямокутника – 1,5; для двотавра – 1,15.

При згині у поперечному перерізі виникають момент, поперечна і поздовжня сили. Коли переріз симетричний щодо площини, у якій діє зовнішнє навантаження, то

$$M_{cp} = \sigma_m \cdot W_{nl} \cdot \nu, \quad (9.3)$$

де ν – коефіцієнт, який враховує вплив поздовжніх і поперечних сил та залежить від форми поперечного перерізу. Коли поздовжні і поперечні сили у перерізі малі, а сили σ_m на стиск і розтяг однакові, то можна прийняти $\nu = 1$.

Загалом втрата несучої здатності перерізу (елемента) ще не означає втрату несучої здатності конструкції. Коли конструкція статично визначена, то ці поняття однозначні. Коли ж конструкція статично невизначена, то втрата несучої здатності деяких перерізів (елементів) не спричиняє руйнування конструкції. Коли ступінь статичної невизначеності системи n , то гранична рівновага буде, коли у граничному стані буде $n+1$ перерізів (чи елементів). Водночас можливим є руйнування конструкцій і у разі руйнування меншої чи більшої кількості зв'язків. Таке руйнування називається частковим або надмірним. Приклади повного, часткового і надмірного руйнування нерозрізної балки показані на рис. 9.4, *а*, *б*, *в*.

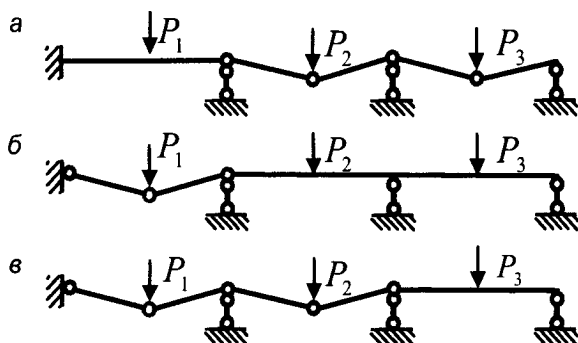


Рис. 9.4

Розрахунок конструкцій методом граничного стану (граничної рівноваги) потребує розв'язання однієї з двох задач: визначення граничного навантаження, якщо несуча здатність елементів відома, або підбір перерізів за граничним навантаженням, яке приймається за розрахункове.

Розглянемо кінематичний метод визначення граничного навантаження. Метод полягає у тому, що виявляються кінематично можливі схеми руйнування системи, до того ж припускають, що у стан текучості переходить така кількість зв'язків, яка необхідна для перетворення системи у механізм.

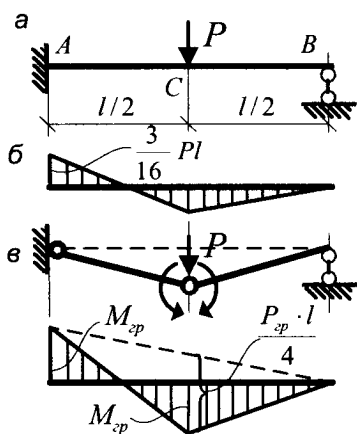


Рис. 9.5

Для кожної системи руйнування з умов її рівноваги з врахуванням діючого навантаження визначається граничне навантаження. З усіх можливих схем руйнування системи дійсною буде та, за якої граничне навантаження найменше.

Розглянемо кілька прикладів. Аналіз роботи однопрольотної балки, зображеної на рис. 9.5, а, у пружній стадії (рис. 9.5, б) показує, що поява двох пластичних шарнірів можлива лише в перері-

зах А і С. Схема руйнування показана на рис. 9.5, в. У момент граничної рівноваги конструкції (рис. 9.5, з):

$$M_A = M_{cp},$$

$$M_c = M_{cp} = P_{cp} \cdot \frac{l}{4} - \frac{M_{cp}}{2} \text{ або } 4 \cdot M_{cp} = P_{cp} \cdot l - 2 \cdot M_{cp}.$$

$$\text{Звідки } P_{cp} = \frac{6 \cdot M_{cp}}{l} = \frac{6 \cdot \sigma_m \cdot W_{nl}}{l}.$$

Поперечні перерізи балки вважають постійними.

У разі нерозрізної балки можливою формою часткового руйнування є виникнення механізму у межах якогось прольоту під час утворення трьох пластичних шарнірів, а в крайніх прольотах у разі їх шарнірного оперття – двох пластичних шарнірів. Фактично потрібно виявити граничну здатність балки під час руйнування балки у прольоті, який працює у найневигодніших умовах.

Під час розрахунку нерозрізних балок постійного поперечного перерізу, враховуючи явище вирівнювання моментів у небезпечних перерізах у граничному стані, визначають граничний момент для перерізів балки і будують епюру несучої здатності перерізів балки.

У такому разі це будуть дві паралельні до осі балки лінії, розташовані згори і знизу від осі на відстані M_{cp} . У цю епюру вписуються епюри згинальних моментів у простих балках від зовнішнього навантаження (рис. 9.6).

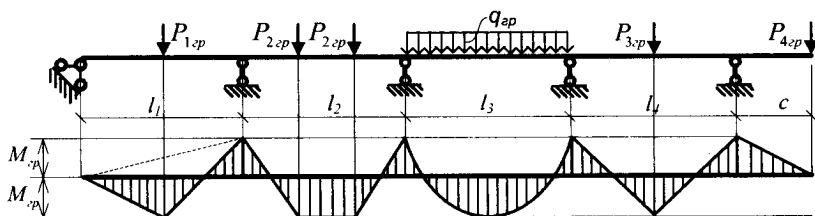


Рис. 9.6

Із співвідношень граничних моментів і згинальних моментів простих балок визначають граничне навантаження для кожного прольоту.

У разі простого навантаження граничне навантаження для балки приймають мінімальним із знайдених граничних навантажень для кожного прольоту. Коли поперечний переріз балки інший у кожному прольоті, то особливість розрахунку полягатиме у тому, що для кожного прольоту необхідно будувати епюру несучої здатності перерізів. Несучу здатність опорних перерізів приймають за меншим M_{ep} у прольотах, що примикають один до одного. Ординати епюри згинальних моментів у простих балках відкладають донизу від лінії менших граничних опорних моментів (рис. 9.7).

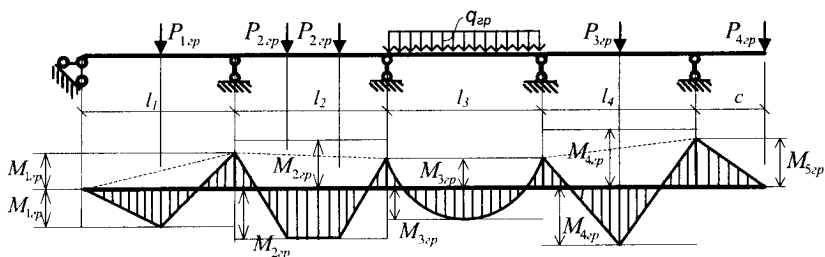


Рис. 9.7

Складнішим завданням є визначення граничного навантаження для рам. Це пояснюється тим, що кількість кінематично можливих механізмів руйнування рам, зокрема багато разів статично невизначених, більша, ніж для балок. Крім того, не завжди точно можна встановити, де виникають пластичні шарніри. Для практичних розрахунків рам з врахуванням пластичних деформацій нехтують впливом поперечних сил на розташування пластичних шарнірів.

Впливом поперечних сил нехтують тоді, коли розрахунок виконується за недеформованою схемою (без врахування виникнення додаткових згинальних моментів від поздовжніх сил у момент граничної рівноваги).

За такого припущення наближено (у деяких випадках точно) розташування пластичних шарнірів визначається за епюрою моментів, побудованою для пружної системи. Тому можна вважати, що небезпечні перерізи будуть там, де прикладені зосереджені сили, а також у вузлових з'єднаннях елементів. Виявивши кінематично

можливі механізми руйнування, потрібно враховувати, що пластичні шарніри односторонні, тому повинні чергуватися за характером розкриття. Так, наприклад, якщо якийсь шарнір в елементі розкрився всередину рами, то розташований поруч (ліворуч чи праворуч) шарнір повинен розкритися назовні. Коли напрямок дії згинального моменту у перерізі не відповідає прийнятому характеру розкриття шарніра, то така схема руйнування кінематично неможлива.

Визначимо граничне навантаження для двошарнірної рами, навантаженої так, як це показано на рис. 9.8, *а*. Перерізи елементів мають однакову несучу здатність. Загальний вигляд епюри згинальних моментів в рамі під час пружної роботи матеріалу показано на рис. 9.8, *б*. Небезпечними можуть бути перерізи 1, 2, 3. Мінімальна кількість пластичних шарнірів, яка відповідає граничній рівновазі рами, становить два.

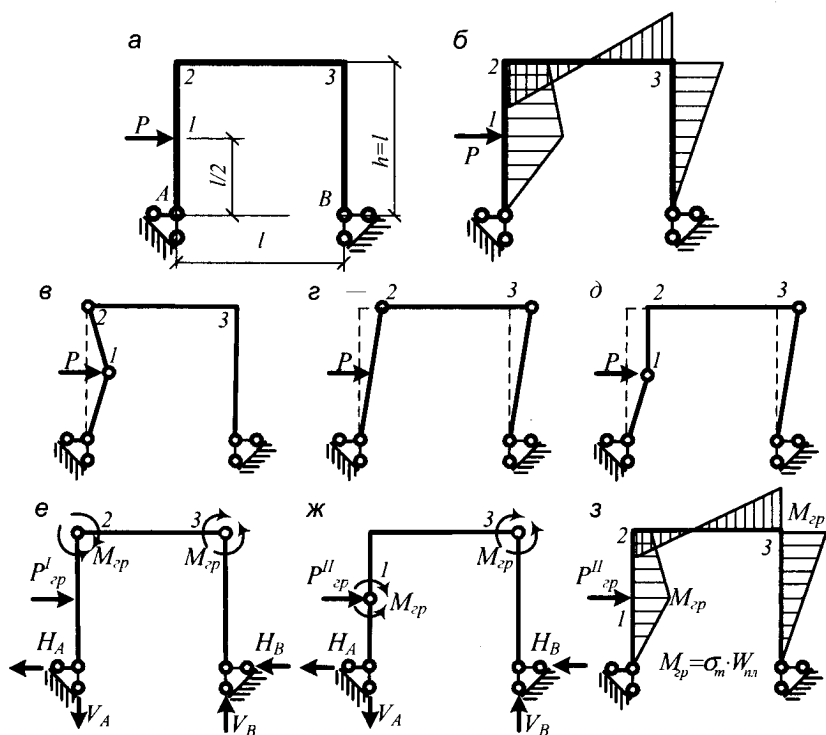


Рис. 9.8

Схема руйнування, зображена на рис. 9.8, в, кінематично неможлива, оскільки характер розкриття пластичного шарніра 2 не відповідає напрямку дії згинального моменту у цьому перерізі.

Як можливі, розглядатимемо схеми руйнування, зображені на рис. 9.8, з і д.

На схемі руйнування (рис. 9.8, з) в пластичних шарнірах 2 і 3 згинальні моменти дорівнюють граничному $M_{cp} = \sigma_m \cdot W_{пл}$. Рівняння рівноваги для цього випадку (рис. 9.8, е):

$$\sum M_2^{лів} = H_A \cdot l - P_{cp}^l \cdot \frac{l}{2} - M_{cp} = 0,$$

звідки

$$H_A = \frac{P_{cp}^l}{2} + \frac{M_{cp}}{l} \quad (9.4)$$

$$\sum M_3^{np} = H_B \cdot l - M_{cp} = 0,$$

звідки

$$H_B = \frac{M_{cp}}{l}. \quad (9.5)$$

З врахуванням (9.4) і (9.5):

$$\sum X = P_{cp}^l - \frac{P_{cp}^l}{2} - \frac{M_{cp}}{l} - \frac{M_{cp}}{l} = 0.$$

З останнього рівняння отримаємо граничне навантаження для схеми руйнування (рис. 9.8, з):

$$P_{cp}^l = \frac{4 \cdot M_{cp}}{l}. \quad (9.6)$$

Складаємо рівняння рівноваги для другої схеми руйнування (рис. 9.8, д), коли в пластичних шарнірах 1 і 3 діють моменти M_{cp} (рис. 9.8, ж):

$$\sum M_1^{лів} = \frac{H_A \cdot l}{2} - M_{cp} = 0,$$

звідки

$$H_A = \frac{2 \cdot M_{cp}}{l} \quad (9.7)$$

$$\sum M_3^{np} = H_B \cdot l - M_{zp} = 0,$$

звідки

$$H_B = \frac{M_{zp}}{l}. \quad (9.8)$$

З врахуванням (9.7) і (9.8):

$$\sum X = P_{zp}^{II} - \frac{2 \cdot M_{zp}}{l} - \frac{M_{zp}}{l} = 0 \text{ і } P_{zp}^{II} = \frac{3 \cdot M_{zp}}{l}. \quad (9.9)$$

Дійсною граничною величиною навантаження для цієї рами буде:

$$P_{zp} = \min(P_{zp}^I, P_{zp}^{II}) = \frac{3 \cdot M_{zp}}{l}. \quad (9.10)$$

Епюра згинальних моментів, яка відповідає дійсній схемі руйнування рами, показана на рис. 9.8, з.

За допомогою залежностей (9.2) і (9.10) можна визначити W_{nl} поперечних перерізів і вибрати їх розміри залежно від P_{zp} .

Визначаючи граничне навантаження для ферм, несучу здатність кожного стержня можна визначити за залежністю $N_{zp} = \sigma_m \cdot A$ (A – площа поперечного перерізу). У зв'язку з тим, що статично невизначені ферми мають переважно багато стержнів, задача ускладнюється через необхідність розгляду великої кількості схем руйнування. Тому під час розрахунку ферм найчастіше використовують прямий метод розрахунку, який забезпечує аналіз роботи ферми на проміжних стадіях до виникнення граничної рівноваги.

Суть способу полягає у тому, що спочатку ферму (рис. 9.9, а) розраховують як пружну систему на навантаження, яке визначається параметром невідомої величини P . З розрахунку визначають стержень з більшим напруженням, в якому насамперед виникне текучість. З умови, що напруження у ньому дорівнює межі текучості, знаходять параметр навантаження P_1 . Після цього стержень вилучають з ферми, а його дію замінюють зовнішніми силами, які дорівнюють граничній поздовжній силі у цьому стержні (рис. 9.9, б).

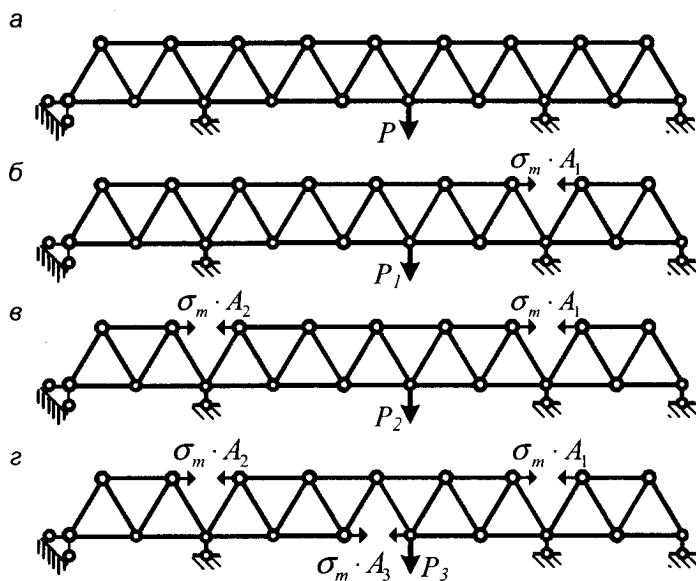


Рис. 9.9

Ступінь статичної невизначеності ферми зменшується на одиницю. Нова ферма розраховується і визначається другий стержень, який усувається з роботи у разі виникнення у ньому текучості. Так буде визначений параметр навантаження P_2 , який відповідає початку текучості другого стержня (рис. 9.9, в). Так продовжується доти, поки ферма стане геометрично змінною (рис. 9.9, г). Тоді і буде визначене граничне навантаження для ферми. Необхідно зазначити, що у цьому разі не розглядається можливість вилучення з роботи стиснутого стержня внаслідок втрати стійкості, що значно ускладнює задачу.

Питання для самоперевірки

1. Визначити граничне навантаження P_{cp} защемленої із обох боків однопрольотної балки кінематичним методом (рис. 9.10). Відомо σ_m , W_{nl} , l .

2. Визначити граничне навантаження P_{zp} для рами на рис. 9.11. Відомо σ_m , W_{nl} , l .

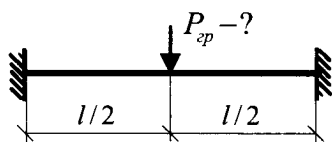


Рис. 9.10

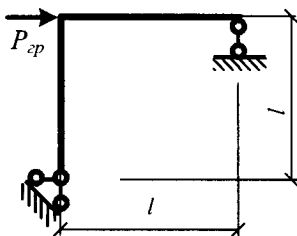


Рис. 9.11

3. Визначити граничне навантаження P_{zp} та q_{zp} для нерозрізної балки (рис. 9.12). Відомо σ_m , W_{nl} , l , $EI_1 = EI_2$.

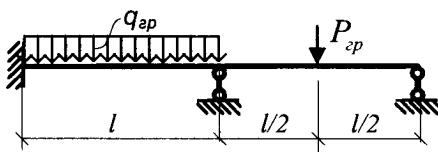


Рис. 9.12

4. Яка послідовність визначення граничного стану прямим способом шарнірних статично невизначених ферм?

Розділ 10

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

10.1. Основні положення методу скінченних елементів

Одним із найефективніших сучасних методів розрахунку споруд, який покладений в основу більшості програмних комплексів для розв'язання великої групи інженерних задач, є метод скінченних елементів (МСЕ). Суть МСЕ полягає в апроксимації суцільного середовища з нескінченно великим числом ступенів свободи, сукупності підобластей (скінченних елементів), що мають скінченне число ступенів свободи (скінченну кількість параметрів, які визначають напружено-деформований стан моделі системи). Для стержневих систем за скінченні елементи беруть окремі стержні.

Скінченні елементи взаємодіють між собою у скінченній кількості вузлових точок (вузлах). Поєднують скінченні елементи у єдину систему складанням рівнянь рівноваги для вузлів, де прикладаються реакції взаємодії, які відповідають внутрішнім зусиллям, що діють у місцях стику скінченного елемента з вузлами. Вважають, що кінці стержнів, які примикають до будь-якого вузла, переміщуються разом з цим вузлом, що забезпечує нерозривність деформацій стержневої системи.

Переміщення, деформації та внутрішні зусилля у перерізах стержня (скінченного елемента) можуть бути виражені через переміщення і реактивні сили взаємодії на його кінцях. Для цього у межах кожного елемента задаються функції (так звані функції форми), які визначають переміщення у внутрішній області елемента за переміщеннями у вузлах.

Припущення про енергетичну еквівалентність конструкції і її скінченно-елементної моделі (СЕМ) дає змогу під час розв'язування рівнянь використовувати варіаційні підходи. На цій підставі можна вважати МСЕ варіаційним методом розрахунку, тобто методом

знаходження мінімуму функціонала повної енергії системи на основі принципу можливих переміщень. З математичного погляду МСЕ є різновидом методу Рітца, коли координатні функції (функції форми) є кусково-поліноміальними і мають локально-сітковий характер.

Метод скінченних елементів розглянемо нижче у формі методу переміщень, оскільки ця форма є найпоширенішою для задач будівельної механіки.

Невідомими МСЕ у формі методу переміщень є можливі і незалежні переміщення вузлів (поступальні та кутові).

Скінченно-елементна модель стержневої системи

Основні поняття методу скінченних елементів розглянемо на прикладі плоских стержневих систем. Вважатимемо їх лінійно-деформівними та пружними системами.

Перший етап розрахунку стержневої системи методом скінченних елементів полягає у дискретизації, тобто в переході від її розрахункової схеми до скінченно-елементної (дискретної) моделі. Для створення **скінченно-елементної моделі** довільну плоску стержневу систему умовно поділяють на окремі стержні (скінченні елементи) і вузли, в яких ці елементи з'єднуються між собою і з основою ("землею"). Розбивають систему на елементи в припущенні, що розв'язок задачі для окремого елемента відомий. Для цього скінченні елементи повинні бути прямолінійними стержнями постійної жорсткості, на яких може бути розташоване рівномірно розподілене зовнішнє навантаження. Криволінійні стержні апроксимуються кількома прямолінійними елементами. Аналогічно апроксимуються стержні, що мають змінну жорсткість, або ті, до яких прикладено нерівномірно розподілене навантаження.

Під час побудови скінченно-елементної моделі системи за вузли моделі приймають точки:

- поєднання двох або більше окремих стержнів;
- ступінчастої зміни жорсткості стержнів;
- прикладання зосереджених зовнішніх сил або моментів;
- ступінчастої зміни інтенсивності розподіленого навантаження;
- опорні вузли.

Плоску дискретну модель системи можна утворити, використовуючи чотири типи скінченних елементів (рис. 10.1), які відрізняються граничними умовами, тобто способами примикання до вузлів:

- жорсткі вузли на початку і на кінці стержня (тип 1);
- жорсткий вузол на початку і шарнірний – на кінці стержня (тип 2);
- шарнірний вузол на початку і жорсткий – на кінці стержня (тип 3);
- шарнірні вузли на початку і на кінці стержня (тип 4).

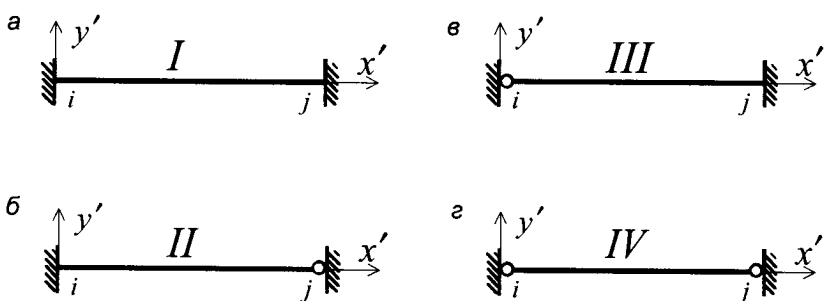


Рис. 10.1

На рис. 10.2 показано приклад переходу від розрахункової схеми (рис. 10.2, а) до дискретної моделі (рис. 10.2, б).

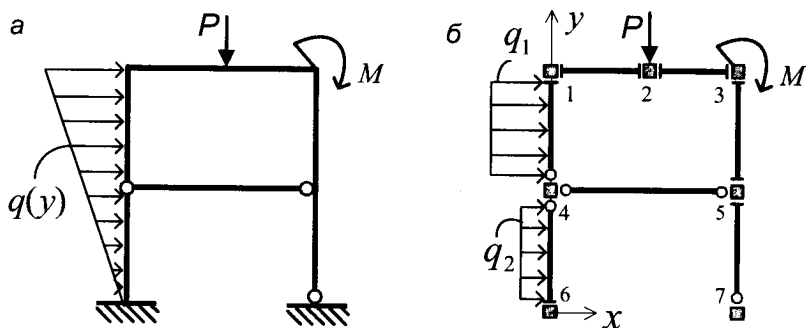


Рис. 10.2

Вузлові характеристики дискретної моделі

До характеристик вузлів дискретної моделі належать вузлові переміщення, вузлові навантаження і вузлові реакції.

Розглянемо вузлові переміщення

У плоскій задачі вузол має три ступені свободи, оскільки його положення характеризується двома лінійними переміщеннями і кутом повороту. Переміщення жорсткого вузла “ i ” може бути записане у вигляді вектора

$$\bar{\Delta}_i = \begin{Bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \\ \Delta_{\phi i} \end{Bmatrix} = \{ \Delta_{xi} \quad \Delta_{yi} \quad \Delta_{\phi i} \}^T, \quad (10.1)$$

де Δ_{xi} – лінійне переміщення вузла “ i ” вздовж осі “ x ”; Δ_{yi} – лінійне переміщення вузла “ i ” вздовж осі “ y ”; $\Delta_{\phi i}$ – кут повороту вузла “ i ”.

Для шарнірного вузла “ j ” вектор переміщення має дві компоненти – лінійні переміщення вздовж осей x і y :

$$\bar{\Delta}_j = \{ \Delta_{xj} \quad \Delta_{yj} \}^T. \quad (10.2)$$

Для дискретної моделі записують вектор вузлових переміщень, який містить вузлові переміщення усіх вузлів. Для моделі, показаної на рис. 10.2, б, вектор вузлових переміщень запишеться:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \{ \bar{\Delta}_1 \quad \bar{\Delta}_2 \quad \dots \quad \bar{\Delta}_i \quad \dots \quad \bar{\Delta}_7 \}^T = \\ &= \{ \Delta_{x1} \quad \Delta_{y1} \quad \Delta_{\phi 1} \mid \Delta_{x2} \quad \Delta_{y2} \quad \Delta_{\phi 2} \mid \dots \mid \Delta_{x7} \quad \Delta_{y7} \}^T. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Для розрахунків моделі використовують наскрізну нумерацію компонентів вузлових переміщень у межах усієї моделі. Для моделі, показаної на рис. 10.2, б, вектор вузлових переміщень під час розрахунків матиме такий вигляд:

$$\bar{\Delta} = \{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \dots \mid \Delta_{18} \quad \Delta_{19} \}^T. \quad (10.4)$$

Додатні напрямки невідомих переміщень вузлів показані на рис. 10.3, а.

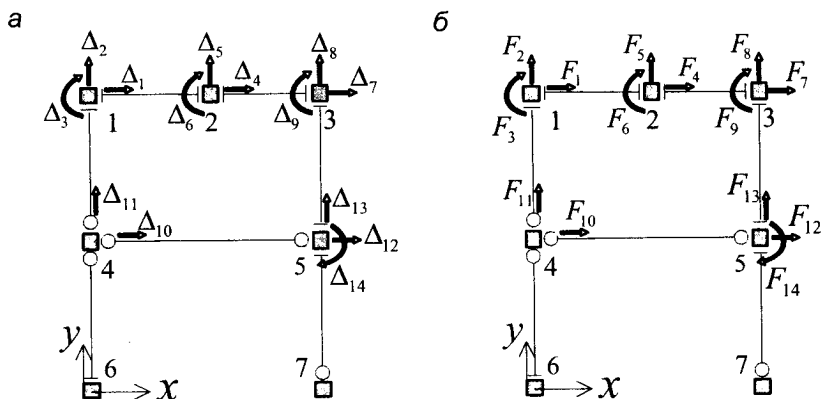


Рис. 10.3

Переміщення опорних вузлів, зазвичай, відомі. Для рами на рис. 10.2:

$$\Delta_{x6} = \Delta_{y6} = \Delta_{\phi6} = \Delta_{x7} = \Delta_{y7} = 0. \quad (10.5)$$

Ці переміщення на рис. 10.3 не показані. Вектор $\bar{\Delta}$ після вилучення нульових елементів набуває такого вигляду:

$$\bar{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \dots \mid \Delta_{12} \quad \Delta_{13} \quad \Delta_{14}\}^T. \quad (10.6)$$

Компоненти вектора вузлових переміщень становлять основні невідомі методу скінченних елементів у формі методу переміщень. Їхня кількість характеризує число ступенів свободи дискретної моделі.

Через вузли відбувається взаємодія між елементами та сприйняття зовнішніх зосереджених навантажень. Жорсткий вузол передає сили і момент, а шарнірний – тільки сили.

Розглянемо вузлові навантаження

Сукупність зосереджених дій на жорсткий вузол “ i ” і шарнірний “ j ”, аналогічно до векторів переміщень, записують у вигляді

$$\bar{F}_i = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{\phi i} \end{Bmatrix} = \{F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{\phi i}\}^T, \quad \bar{F}_j = \{F_{xj} \quad F_{yj}\}^T, \quad (10.7)$$

де F_{xi} – сила, яка спрямована вздовж осі x ; F_{yi} – сила, яка спрямована вздовж осі y ; $F_{\phi i}$ – зосереджений момент.

Для дискретної моделі записують вектор вузлових навантажень, який містить вузлові навантаження усіх вузлів. Для моделі, показаної на рис. 10.2, б, вектор вузлових навантажень запишемо так:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \{\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \dots \quad \bar{F}_i \quad \dots \quad \bar{F}_7\}^T = \\ &= \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{\phi1} | F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{\phi2} | \dots | F_{x7} \quad F_{y7}\}^T.\end{aligned}\quad (10.8)$$

Додатний напрямком компонентів вектора навантажень збігається з додатним напрямком вектора відповідних переміщень (див. рис. 10.3, б).

Розрахунок методом скінченних елементів виконується на навантаження, прикладені у вузлах. У загальному випадку на систему, яка розраховується, діє навантаження, що не є вузловим, тому його потрібно звести до вузлового.

Якщо на стержні (скінченний елемент) діє розподілене навантаження, то вектор вузлових навантажень визначається підсумовуванням вектора зовнішніх сил ($\bar{F}$), що безпосередньо діють на вузли, та вектора реактивних сил ($\bar{Q}$), що передаються на вузли з боку тих стержнів, на які діє розподілене навантаження:

$$\bar{F} = \bar{F} + \bar{Q}.\quad (10.9)$$

Компоненти вектора $\bar{Q}$ необхідно попередньо визначити, звівши розподілене на стержнях навантаження до вузлових сил.

Зведення розподіленого навантаження до вузлових сил можна виконати із умови рівності можливих робіт заданих і вузлових навантажень.

Для стержневих систем зведення розподіленого навантаження до вузлових сил виконується на основі принципу суперпозицій. Стержнева система розраховується на два навантаження, які в сумі дорівнюють заданому. Покажемо це на прикладі, зображеному на рис. 10.4.

Спочатку розв'язується задача 1: систему розраховують на задане позавузлове навантаження за умови закріплення вузлів від усіх можливих переміщень (аналогічно, як в основній системі методу переміщень). За результатами розв'язання цієї задачі знаходять реактивні зусилля у накладених зв'язках. Після цього розв'язують задачу 2. Система розраховується на вузлове навантаження, яке дорівнює за значенням і протилежне за напрямком реакціям у вузлах задачі 1. Сума розв'язків задач 1 і 2 є розв'язком вихідної задачі.

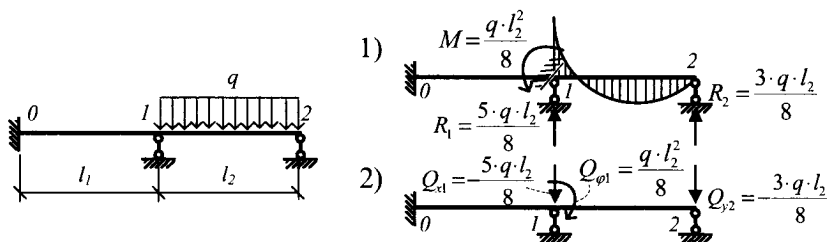


Рис. 10.4

Компоненти векторів вузових навантажень мають наскрізну нумерацію, яка відповідає нумерації вузових переміщень (рис. 10.3):

$$\bar{F} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 | F_4 \ F_5 \ F_6 | \dots | F_{12} \ F_{13} \ F_{14}\}^T,$$

$$\bar{F} = \left\{ \tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3 | \tilde{F}_4 \ \tilde{F}_5 \ \tilde{F}_6 | \dots | \tilde{F}_{12} \ \tilde{F}_{13} \ \tilde{F}_{14} \right\}^T, \quad (10.10)$$

$$\bar{Q} = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_3 | Q_4 \ Q_5 \ Q_6 | \dots | Q_{12} \ Q_{13} \ Q_{14}\}^T.$$

Розглянемо вузові реакції

Під впливом зовнішніх дій вузли дискретної моделі переміщуються, а стержні, які їх з'єднують, деформуються. Між вузлами та стержнями виникають реакції взаємодії, зумовлені тільки переміщенням вузлів. Сумарні реакції, які передаються на вузол i з боку стержнів, позначимо R_{xi} R_{yi} $R_{\phi i}$.

Тоді сумарні реакції усіх стержнів, які приєднуються до жорсткого вузла "i" і шарнірного "j", аналогічно до векторів навантажень записують так:

$$\bar{R}_i = \begin{Bmatrix} R_{xi} \\ R_{yi} \\ R_{\phi i} \end{Bmatrix} = \{R_{xi} \ R_{yi} \ R_{\phi i}\}^T, \quad \bar{R}_j = \{R_{xj} \ R_{yj}\}^T, \quad (10.11)$$

де R_{xi} – сумарна реакція усіх стержнів, що приєднуються до вузла "i", яка спрямована вздовж осі x ; R_{yi} – сумарна реакція усіх стержнів, що приєднуються до вузла "i", яка спрямована вздовж осі y ; $R_{\phi i}$ – сумарний реактивний момент, із яким всі приєднані до вузла "i" стержні діють на вузол.

Для дискретної моделі записують вектор вузлових реакцій, який містить вузлові реакції усіх вузлів, водночас аналогічно до вектора вузлових сил використовують наскрізну нумерацію, яка відповідає нумерації вузлових переміщень.

Для моделі, показаної на рис. 10.2, б, вектор вузлових реакцій запишемо у вигляді:

$$\bar{R} = \{R_1 \ R_2 \ R_3 | R_4 \ R_5 \ R_6 | \dots | R_{12} \ R_{13} \ R_{14}\}^T. \quad (10.12)$$

Додатні напрямки компонентів векторів реакцій, показані на рис. 10.5, є протилежними до додатних напрямків векторів відповідних навантажень (див. рис. 10.3, б).

У лінійно-деформованих системах реакції стержнів, які діють на вузли, можна однозначно визначити через вузлові переміщення системи, оскільки між ними існує лінійна залежність. Для дискретної моделі з n ступенями свободи така залежність матиме вигляд

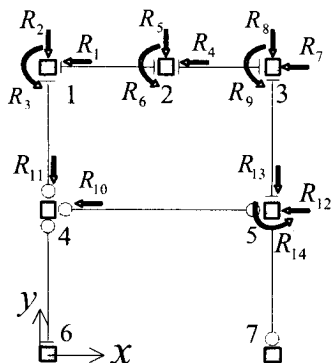


Рис. 10.5

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{1,1} \cdot \Delta_1 + K_{1,2} \cdot \Delta_2 + \dots + K_{1,n} \cdot \Delta_n, \\ R_2 &= K_{2,1} \cdot \Delta_1 + K_{2,2} \cdot \Delta_2 + \dots + K_{2,n} \cdot \Delta_n, \\ &\dots \dots \dots \\ R_n &= K_{n,1} \cdot \Delta_1 + K_{n,2} \cdot \Delta_2 + \dots + K_{n,n} \cdot \Delta_n \end{aligned}$$

або у матричній формі:

$$\bar{R} = K \cdot \bar{\Delta}, \quad (10.13)$$

де $\bar{R}$ – вектор вузлових реакцій; $\bar{\Delta}$ – вектор вузлових переміщень; K – матриця жорсткості дискретної моделі:

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Елемент матриці K : $K_{i,j}$ – це вузлова реакція R_i , яка зумовлена вузовим переміщенням $\Delta_j = 1$ за умови, що усі інші вузлові переміщення дорівнюють нулю. Для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно по чергову надавати одиничні переміщення вузлам дискретної моделі і знаходити сили, які передаватимуться на вузли.

Рівняння рівноваги вузлів.

Система рівнянь методу скінченних елементів

Вузли дискретної моделі перебувають у рівновазі під дією зовнішнього навантаження та реакцій стержнів. Умови рівноваги вузлів ($\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum M_i = 0$) записуються у матричній формі:

$$\bar{R} - \bar{F} = 0, \text{ або } K \cdot \bar{\Delta} - \bar{F} = 0, \quad (10.15)$$

або у координатній:

$$\begin{array}{ccccccc} K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + & \dots & + K_{1,n}\Delta_n - F_1 = 0 \\ K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + & \dots & + K_{2,n}\Delta_n - F_2 = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1}\Delta_1 + K_{n,2}\Delta_2 + & \dots & + K_{n,n}\Delta_n - F_n = 0 \end{array} \quad (10.16)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10.16), отримаємо шукані переміщення вузлів, через які визначається напружено-деформований стан усіх стержнів системи.

Для визначання елементів матриці жорсткості дискретної моделі необхідно знати матриці жорсткості окремих елементів (стержнів).

Матриці жорсткості стержневих скінченних елементів

Для визначення взаємного розташування вузлів, їх кінематичних і статичних характеристик вводиться загальна для усього об'єкта права прямокутна система декартових координат x, y , яка називається загальною або глобальною (ЗСК).

Для описування та аналізування напружено-деформованого стану окремого елемента (стержня) зручно користуватися місцевою або локальною системою координат (МСК) для кожного

стержня. Для локальної системи координат потрібно вибирати праву декартову систему координат $x'y'$, початок якої збігається з початком стержня, а вісь x' спрямовується вздовж стержня від його початку до кінця.

Початком елемента завжди вважають вузол із меншим номером. Вісь y' спрямовують перпендикулярно до стержня, причому прямий кут відкладається від осі x' проти ходу годинникової стрілки (рис. 10.6, а).

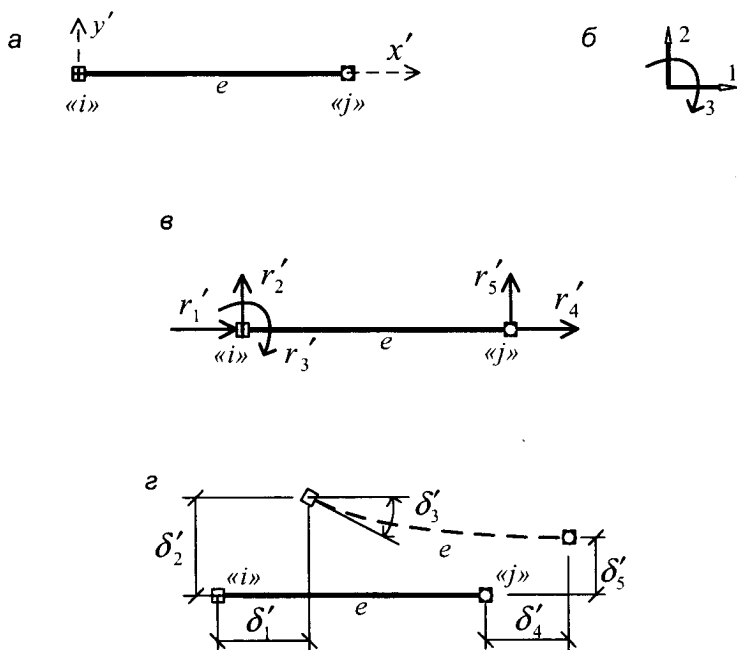


Рис. 10.6

Розглянемо плоский стержневий елемент e із жорстким вузлом $\langle i \rangle$ і шарнірним $\langle j \rangle$ в своїй локальній системі координат. Додатні напрямки переміщень і зусиль, прикладених у вузлах, показано на рис. 10.6, б, в, г.

Переміщення кінців елемента у локальній системі координат (початок стержня – вузол “ i ”, кінець стержня – вузол “ j ”) можна записати у вигляді матриць-стовпців (векторів):

$$\overline{\delta}_i' = \begin{Bmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \end{Bmatrix}_i = \{\delta_1' \quad \delta_2' \quad \delta_3'\}_i^T, \quad \overline{\delta}_j' = \begin{Bmatrix} \delta_4' \\ \delta_5' \end{Bmatrix}_j = \{\delta_4' \quad \delta_5'\}_j^T. \quad (10.17)$$

Повний вектор переміщень скінченного елемента e в локальній системі координат матиме такий вигляд:

$$\overline{\delta}_e' = \left\{ \overline{\delta}_i' \quad \overline{\delta}_j' \right\}_e^T = \{\delta_1' \quad \delta_2' \quad \delta_3' \quad \delta_4' \quad \delta_5'\}_e^T. \quad (10.18)$$

Аналогічно можна записати вектори реакцій на кінцях стержня в локальній системі координат:

$$\overline{r}_e' = \left\{ \overline{r}_i' \quad \overline{r}_j' \right\}_e^T = \{r_1' \quad r_2' \quad r_3' \quad r_4' \quad r_5'\}_e^T. \quad (10.19)$$

У лінійно деформованих пружних системах будь-яке вузлове зусилля можна виразити у вигляді лінійної однорідної функції від вузлових переміщень. Зв'язок між векторами вузлових зусиль і вузлових переміщень для окремого елемента e можна записати так:

$$\overline{r}_e' = k_e' \cdot \overline{\delta}_e', \quad (10.20)$$

де k_e' – матриця жорсткості елемента e в локальній системі координат.

Склад матриці жорсткості розглянемо на прикладі стержня, показаного на рис. 10.6. Для цього стержня можливі п'ять кінцевих переміщень (вектор переміщень має п'ять компонент). Кожне з цих переміщень загалом впливає на величину п'яти реактивних зусиль. Отже, вираз являє собою систему із п'яти рівнянь.

Елементи матриці k_e' позначимо $k_{ij,e}^{st}$. Такий типовий елемент являє собою зусилля у вузлі i елемента e в напрямку s від одиничного зміщення вузла j в напрямку t за умови, що усі інші переміщення вузлів i і j елемента e дорівнюють нулю.

$$k_e' = \begin{bmatrix} k_{ii,e}^{11'} & k_{ii,e}^{12'} & k_{ii,e}^{13'} & k_{ij,e}^{14'} & k_{ij,e}^{15'} \\ k_{ii,e}^{21'} & k_{ii,e}^{22'} & k_{ii,e}^{23'} & k_{ij,e}^{24'} & k_{ij,e}^{25'} \\ k_{ii,e}^{31'} & k_{ii,e}^{32'} & k_{ii,e}^{33'} & k_{ij,e}^{34'} & k_{ij,e}^{35'} \\ k_{ji,e}^{41'} & k_{ji,e}^{42'} & k_{ji,e}^{43'} & k_{jj,e}^{44'} & k_{jj,e}^{45'} \\ k_{ji,e}^{51'} & k_{ji,e}^{52'} & k_{ji,e}^{53'} & k_{jj,e}^{54'} & k_{jj,e}^{55'} \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

Матриця має блокову структуру і її можна записати, використовуючи блоки матриць:

$$k_e' = \begin{bmatrix} k_{ii,e}' & k_{ij,e}' \\ k_{ji,e}' & k_{jj,e}' \end{bmatrix}. \quad (10.22)$$

Блоки на головній діагоналі є квадратними і їх порядок залежить від виду відповідного вузла. Для елемента на рис. 10.6 порядок блока $k_{ii,e}'$ дорівнює трьом, а блока $k_{jj,e}'$ – двом, оскільки вузол i – жорсткий, а вузол j – шарнірний.

Для визначення елементів матриці жорсткості довільного елемента можна використати принцип можливих переміщень. Для плоских стержневих систем із прямолінійними стержневими елементами матриці жорсткості окремих елементів можуть бути визначені в локальній системі координат, відповідно до їх фізичного змісту, використовуючи таблиці методу переміщень.

Матриці жорсткості типових СЕ

Розглянемо скінченні елементи, які найчастіше використовуються під час розрахунків стержневих систем. Це скінченні елементи у вигляді прямолінійних стержнів, у яких враховуються деформації розтягу-стиску та згину.

Компоненти матриці жорсткості скінченного елемента, як зазначалось, є реакціями у вузлах, які виникають під час їх одиничних переміщень. Використовуючи цей фізичний зміст, можемо записати значення кожного компонента.

Розглянемо формування матриці жорсткості на прикладі елемента із двома жорсткими вузлами (рис. 10.7).

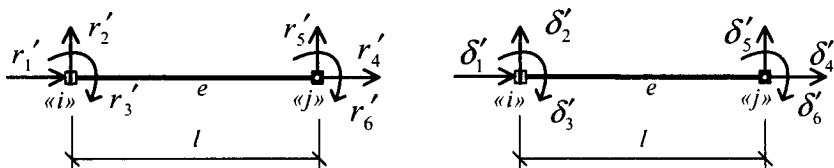


Рис. 10.7

$$\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4' \\ r_5' \\ r_6' \end{bmatrix} = k_e' \cdot \begin{bmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \\ \delta_4' \\ \delta_5' \\ \delta_6' \end{bmatrix},$$

$$k_e' = \begin{bmatrix} k_{11,e}' & k_{12,e}' & k_{13,e}' & k_{14,e}' & k_{15,e}' & k_{16,e}' \\ k_{21,e}' & k_{22,e}' & k_{23,e}' & k_{24,e}' & k_{25,e}' & k_{26,e}' \\ k_{31,e}' & k_{32,e}' & k_{33,e}' & k_{34,e}' & k_{35,e}' & k_{36,e}' \\ \hline k_{41,e}' & k_{42,e}' & k_{43,e}' & k_{44,e}' & k_{45,e}' & k_{46,e}' \\ k_{51,e}' & k_{52,e}' & k_{53,e}' & k_{54,e}' & k_{55,e}' & k_{56,e}' \\ k_{61,e}' & k_{62,e}' & k_{63,e}' & k_{64,e}' & k_{65,e}' & k_{66,e}' \end{bmatrix}$$

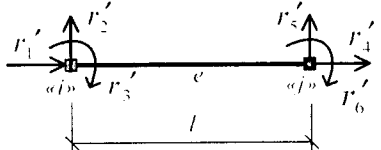
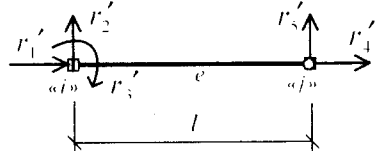
де $k_{ij,e}^{st}$ – реактивне зусилля у вузлі “i” елемента “e” за напрямком “s” від зміщення вузла “j” цього елемента за напрямком “t” на величину, яка дорівнює одиниці. Усі інші зміщення вузлів “i” і “j” дорівнюють нулю.

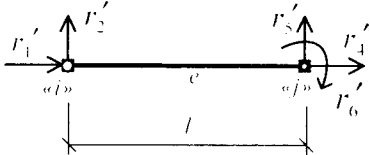
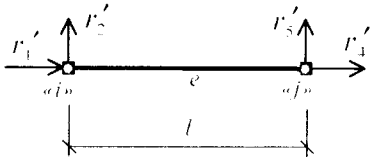
Для визначення компонентів кожного стовпця матриці жорсткості скінченного елемента необхідно надавати послідовно компонентам вектора переміщень одиничне значення і визначати у вузлах-опорах реактивні зусилля. Вектор цих реактивних зусиль і буде відповідним стовпцем матриці k_e' . Позначимо: $f = EA/l$; $i = EI/l$.

Реактивні зусилля у скінченному елементі (рис. 10.7) можуть бути визначені за допомогою таблиці методу переміщень (рис. 10.8).

За відомих значень реактивних зусиль від одиничних переміщень можна записати матрицю жорсткості елемента типу 1 (рис. 10.7), яка наведена у табл. 10.1. У таблиці наведені також матриці жорсткості для скінченних елементів другого, третього і четвертого типів.

Таблица 10.1

Тип	Схема	k_c'
1	2	3
1		$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}$
2		$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l} & 3i & 0 & \frac{3i}{l} & 0 \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1	2	3
3		$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} \\ 0 & -\frac{3i}{l} & 0 & 0 & \frac{3i}{l} & 3i \end{bmatrix}$
4		$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

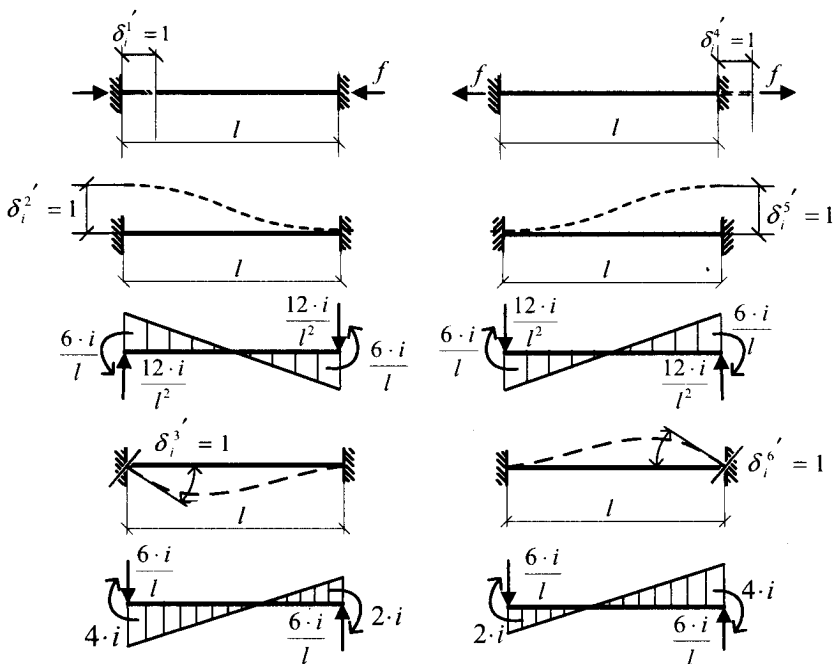


Рис. 10.8

Перехід від локальної системи координат до глобальної

Матриці жорсткості скінченних елементів просто отримуються у локальній системі координат. Під час розрахунку, розглядаючи усю систему елементів (СЕМ), матриця жорсткості кожного елемента повинна бути записана у єдиній, загальній для усіх елементів системі координат, тобто в глобальній системі координат.

Перетворення із локальної в глобальну систему координат, або навпаки, необхідне також і для визначення векторів вузлових зусиль та переміщень окремих елементів. Це перетворення відбувається введенням матриці перетворень – Т.

Розглянемо довільно орієнтований елемент e із жорстким “ i ” і шарнірним вузлом “ j ” (рис. 10.9).

Позначимо величини, які належать до глобальної системи координат, такими самими символами, що і в локальній системі координат, але без штриха.

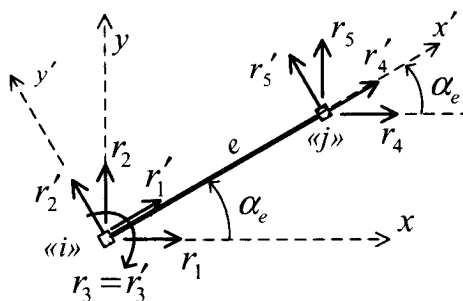


Рис. 10.9

Із рис. 10.9 можна отримати:

$$\begin{aligned} r_4' &= r_4 \cdot \cos \alpha_e + r_5 \cdot \sin \alpha_e, \\ r_5' &= -r_4 \cdot \sin \alpha_e + r_5 \cdot \cos \alpha_e. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Для жорсткого вузла i до рівнянь (10.23) необхідно додати рівняння рівності реактивних моментів у локальній та глобальній системах координат:

$$\begin{aligned} r_1' &= r_1 \cdot \cos \alpha_e + r_2 \cdot \sin \alpha_e, \\ r_2' &= -r_1 \cdot \sin \alpha_e + r_2 \cdot \cos \alpha_e, \\ r_3' &= r_3. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Отже, між векторами реакцій кінців стержня та переміщень стержня у глобальній та локальній системах координат може бути встановлений зв'язок у матричній формі:

$$\overline{r_e'} = T_e \cdot \overline{r_e}, \quad \overline{\delta_e'} = T_e \cdot \overline{\delta_e}, \quad (10.25)$$

де $\overline{r_e'} = \{r_1' \ r_2' \ r_3' \ r_4' \ r_5'\}_e^T$, $\overline{r_e} = \{r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5\}_e^T$;

$$\overline{\delta_e'} = \{\delta_1' \ \delta_2' \ \delta_3' \ \delta_4' \ \delta_5'\}_e^T, \quad \overline{\delta_e} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5\}_e^T,$$

$$T_e = \left[\begin{array}{ccc|cc} \cos \alpha_e & \sin \alpha_e & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_e & \cos \alpha_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_e & \sin \alpha_e \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_e & \cos \alpha_e \end{array} \right] - \text{матриця перетворень.}$$

Матриця перетворень T_e є ортогональною ($T_e^T \cdot T_e = E$) і її обернена матриця збігається з транспонованою: $T_e^{-1} = T_e^T$.

Використовуючи властивість ортогональності, отримуємо

$$\overline{r_e} = T_e^T \cdot \overline{r_e'}; \overline{\delta_e} = T_e^T \cdot \overline{\delta_e'}; k_e = T_e^T \cdot k_e' \cdot T_e. \quad (10.26)$$

Вектори переміщень, зусиль і матриця жорсткості дискретної моделі

За відомих векторів зусиль і переміщень усіх скінченних елементів у глобальній (єдиній для усіх елементів) системі осей координат, можна записати вектори переміщень (Δ) і зусиль (R) усієї системи.

За відомих матриць жорсткості усіх кінцевих елементів окремо в глобальній (єдиній для усіх елементів) системі осей координат можна записати **матрицю жорсткості усієї системи** (K).

Для системи з n ступенями свободи:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_i \\ \dots \\ \Delta_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\text{де } R_i = \sum_{e \in i} r_{i,e}, K_{ij} = \sum_{e \in ij} k_{ij,e}.$$

Знак $e \in i$ біля знака суми означає, що підсумовують за усіма елементами e , до яких входить вузол “ i ”. Знак $e \in ij$ означає, що підсумовують лише по елементах, які мають одночасно вузли “ i ” і “ j ”.

Етапи розрахунку стержневих систем за методом скінченних елементів

I. Створення скінченно-елементної (дискретної) моделі системи, розділ системи на елементи, нумерація вузлів і елементів.

II. Визначення фізико-геометричних характеристик стержневих елементів.

III. Побудова вектора вузлових навантажень.

- IV. Побудова матриці жорсткості скінченно-елементної моделі.
- V. Врахування крайових умов (закріплення системи) та шарнірних з'єднань.
- VI. Розв'язання системи канонічних рівнянь.
- VII. Обчислення внутрішніх зусиль в елементах моделі.

10.2. Приклад розрахунку плоскої рами

Необхідно виконати статичний розрахунок плоскої рами (рис. 10.10). На раму діють зосереджена сила $P = 20 \text{ кН}$ і рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю $q = 6 \text{ кН/м}$. Стойки мають згинну і поздовжню жорсткості, відповідно $EI_c = 1 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $EA_c = 100 \cdot 10^4 \text{ кН}$, а ригель: $EI_p = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $EA_p = 200 \cdot 10^4 \text{ кН}$.

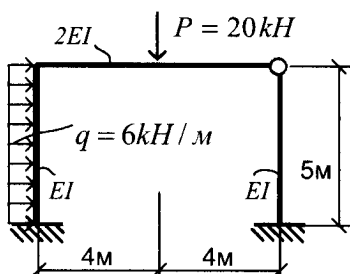


Рис. 10.10

I. Перехід до скінченно-елементної моделі

Для переходу від заданої розрахункової схеми до дискретної моделі розіб'ємо раму на окремі стержневі елементи, які поєднуються у вузлах. За вузли приймаємо точки сполучення окремих стержнів, опорні точки, а також точку прикладання зовнішньої зосередженої сили (рис. 10.11). Пронумеруємо вузли у довільному порядку. Початком глобальної системи координат приймемо вузол 4.

II. Фізико-геометричні характеристики скінченних елементів

Для кожного стержня дискретної моделі необхідно обчислити довжину, нахил осей локальної системи координат у глобальній системі координат, погонні жорсткості та тип елемента. Результати обчислень записані в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Скінцевий елемент	Тип СЕ	Пачаток СЕ		Кінець СЕ		l	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	EI 10^4	EA 10^2	i 10^4	f 10^4
		x	y	x_1	y_1							
1-2	1	0	5	4	5	4	1	0	2	200	0,5	50
2-3	2	4	5	8	5	4	1	0	2	200	0,5	50
1-4	1	0	5	0	0	5	0	-1	1	100	0,2	20
3-5	3	8	5	8	0	5	0	-1	1	100	0,2	20

Схему можливих вузлових переміщень показано на рис. 10.12.

Вектор вузлових переміщень має 15 компонентів:

$$\bar{\Delta} = \{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 | \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 | \Delta_7 \quad \Delta_8 \quad \Delta_9 | \\ | \Delta_{10} \quad \Delta_{11} \quad \Delta_{12} | \Delta_{13} \quad \Delta_{14} \quad \Delta_{15} \}^T.$$

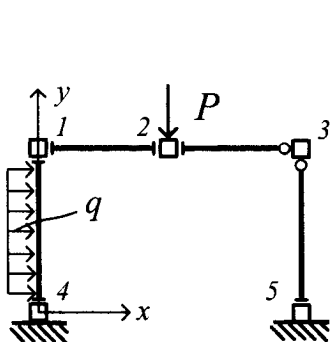


Рис. 10.11

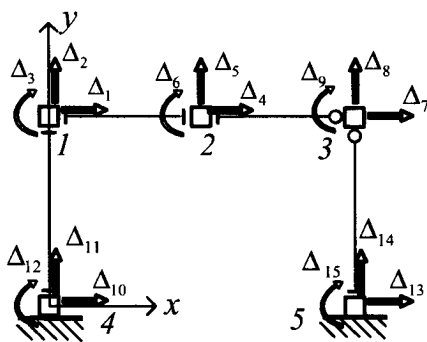


Рис. 10.12

Враховуючи, що переміщення опорних вузлів дорівнюють нулю, а кутове переміщення вузла 3 не впливає на напружено-деформований стан системи і його можна задавати довільно (приймаємо його також таким, що дорівнює нулю), отримаємо

$$\Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{11} = \Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{14} = \Delta_{15} = 0.$$

Тоді вектор невідомих вузлових переміщень запишемо у вигляді

$$\bar{\Delta} = \{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 | \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 | \Delta_7 \quad \Delta_8 \}^T,$$

а дискретна модель, показана на рис. 10.11, матиме вісім ступенів свободи.

III. Побудова вектора вузових навантажень

Компоненти вектора вузових навантажень відповідають компонентам вектора вузових переміщень:

$$\bar{F} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 | F_4 \ F_5 \ F_6 | F_7 \ F_8\}^T.$$

Враховуючи формулу (10.9), вектор вузових навантажень визначаємо як суму двох векторів:

- вектора зовнішніх зосереджених сил і моментів, що безпосередньо діють на вузли:

$$\bar{F} = \left\{ \tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3 | \tilde{F}_4 \ \tilde{F}_5 \ \tilde{F}_6 | \tilde{F}_7 \ \tilde{F}_8 \right\}^T,$$

де $\tilde{F}_5 = -20$, а усі інші компоненти дорівнюють нулю (нумерація компонентів вектора зовнішніх сил відповідає нумерації компонентів вектора переміщень див. рис. 10.12);

- вектора реактивних сил, що передаються на вузли від розподілених на елементі навантажень:

$$\bar{Q} = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_3 | Q_4 \ Q_5 \ Q_6 | Q_7 \ Q_8\}^T,$$

компоненти якого визначимо, розглянувши завантажений елемент окремо.

Елемент 1–4

Скінченний елемент 1–4 (рис. 10.13, а) належить до першого типу елементів (див. рис. 10.1, а) із жорсткими вузлами на початку і на кінці стержня. Вантажні реакції стержня визначаємо за допомогою таблиць методу переміщень. Запишемо значення вантажних реакцій для стержня 1–4 (рис. 10.13) у локальній системі координат:

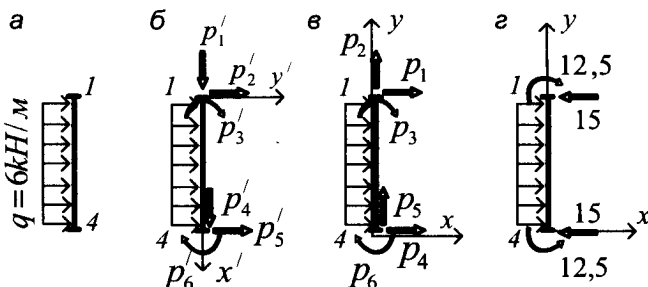


Рис. 10.13

$$p'_1 = 0; \quad p'_2 = -\frac{q \cdot l}{2} = -\frac{6 \cdot 5}{2} = -15;$$

$$p'_3 = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{6 \cdot 5^2}{12} = 12,5; \quad p'_4 = 0;$$

$$p'_5 = -\frac{q \cdot l}{2} = -\frac{6 \cdot 5}{2} = -15; \quad p'_6 = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{6 \cdot 5^2}{12} = -12,5.$$

Вантажні реакції у глобальній системі координат (рис. 10.13, в, з) визначаються, використовуючи зв'язок між векторами у глобальній та локальній системах координат за аналогією з формулою (10.26):

$$\overline{p_e} = T_e^T \cdot \overline{p'_e}, \quad \alpha_{1-4} = -90^\circ,$$

$$T_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha_e & \sin \alpha_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_e & \cos \alpha_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_e & \sin \alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_e & \cos \alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$T_e^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha_e & -\sin \alpha_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_e & \cos \alpha_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_e & -\sin \alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_e & \cos \alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$\overline{p_e} = T_e^T \cdot \overline{p_e}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 12,5 \\ 0 \\ -15 \\ -12,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 12,5 \\ -15 \\ 0 \\ -12,5 \end{bmatrix},$$

або: $p_1 = -15$; $p_2 = 0$; $p_3 = 12,5$; $p_4 = -15$; $p_5 = 0$; $p_6 = -12,5$.

Вантажні реакції у глобальній системі координат для стержня 1–4 показані на рис. 10.13, з.

Реактивні сили, що передаються на вузли від розподіленого на стержні навантаження, дорівнюють вантажним реакціям із протилежним знаком (рис. 10.14).

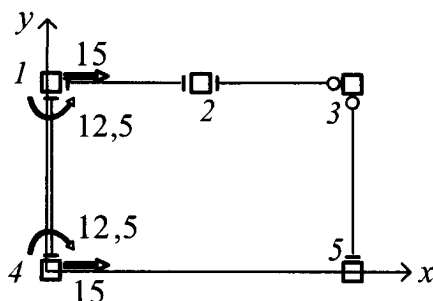


Рис. 10.14

Вектор реактивних сил для усієї системи матиме такий вигляд:

$$\overline{Q} = \{15 \ 0 \ -12,5 | 0 \ 0 \ 0 | 0 \ 0\}^T.$$

Нумерація компонентів вектора реактивних сил відповідає нумерації компонентів вектора переміщень (див. рис. 10.12).

За формулою (10.9) отримаємо вектор вузлових навантажень СЕМ:

$$\overline{F} = \overline{\overline{F}} + \overline{Q} = \{15 \ 0 \ -12,5 | 0 \ -20 \ 0 | 0 \ 0\}^T.$$

IV. Матриця жорсткості дискретної моделі

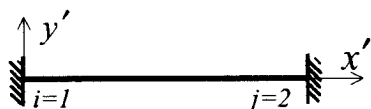
Матриця жорсткості дискретної моделі є квадратною матрицею. Наприклад, на рис. 10.11, відповідно до кількості ступенів свободи, матриця жорсткості має розмірність 8 на 8:

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,8} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{8,1} & K_{8,2} & \dots & K_{8,8} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці – це величини вузлових реакцій, що зумовлені одиничними вузовими переміщеннями. Для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості можна по чергово надавати одиничні переміщення вузам дискретної моделі і знаходити величини вузових реакцій, або використати матриці жорсткості окремих елементів системи (див. табл. 10.1).

Побудуємо матриці жорсткості окремих елементів системи у місцевих системах координат (МСК) та за формулою $k_e = T_e^T \cdot k'_e \cdot T_e$ (10.26) перетворимо їх у загальну систему координат (ЗСК) моделі.

Елемент 1–2



Матриця жорсткості елемента типу 1 у місцевій системі координат має вигляд (див. табл. 10.1):

$$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}.$$

Після обчислень коефіцієнтів отримаємо:

$$[k']^{(1-2)} = \begin{bmatrix} [k'_{11}] & [k'_{12}] \\ [k'_{21}] & [k'_{22}] \end{bmatrix}^{(1-2)} =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & -0.75 & 0 & -0.375 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 2 & 0 & 0.75 & 1 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & 0.75 & 0 & 0.375 & 0.75 \\ 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0.75 & 2 \end{array} \right]^{(1-2)}$$

Орієнтації МСК та ЗСК збігаються, оскільки кут між віссю x' МСК та віссю x ЗСК $\alpha = 0$; матриця перетворень – одинична матриця:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

У зв'язку з цим матриця жорсткості елемента в ЗСК збігається з матрицею жорсткості елемента в МСК:

$$[k]^{(1-2)} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}^{(1-2)} = [T]^T [k']^{(1-2)} [T] =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & -0.75 & 0 & -0.375 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 2 & 0 & 0.75 & 1 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & 0.75 & 0 & 0.375 & 0.75 \\ 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0.75 & 2 \end{array} \right]^{(1-2)}.$$

Блоки матриці:

$$[k_{11}]^{(1-2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & -0,75 \\ 0 & -0,75 & 2 \end{bmatrix};$$

$$[k_{12}]^{(1-2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & -0,75 \\ 0 & 0,75 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[k_{21}]^{(1-2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0,75 \\ 0 & -0,75 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[k_{22}]^{(1-2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 2 \end{bmatrix}.$$

Елемент 2-3



Матриця жорсткості елемента типу 2 у місцевій системі координат (див. табл. 10.1) має такий вигляд:

$$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l} & 3i & 0 & \frac{3i}{l} & 0 \\ -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Після обчислень коефіцієнтів отримаємо

$$[k']^{(2-3)} = \begin{bmatrix} [k'_{22}] & [k'_{23}] \\ [k'_{32}] & [k'_{33}] \end{bmatrix}^{(2-3)} =$$

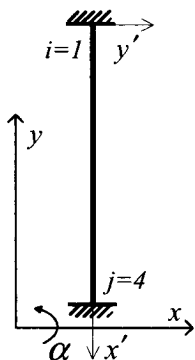
$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0938 & -0.375 & 0 & -0.0938 & 0 \\ 0 & -0.375 & 1.5 & 0 & 0.375 & 0 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0938 & 0.375 & 0 & 0.0938 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{(2-3)}$$

Орієнтації МСК та ЗСК збігаються. Матриця перетворень буде одиничною матрицею. Через це матриця жорсткості елемента в ЗСК збігається з матрицею жорсткості елемента в МСК:

$$[k]^{(2-3)} = \begin{bmatrix} [k_{22}] & [k_{23}] \\ [k_{32}] & [k_{33}] \end{bmatrix}^{(2-3)} = [T]^T [k']^{(2-3)} [T] =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.938 & -0.375 & 0 & -0.0938 & 0 \\ 0 & -0.375 & 1.5 & 0 & 0.375 & 0 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0938 & 0.375 & 0 & 0.0938 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{(2-3)}$$

Елемент 1-4



Матриця жорсткості елемента типу 1 в МСК (див. табл. 10.1):

$$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{array} \right]$$

Після обчислення коефіцієнтів:

$$[k']^{(1-4)} = \begin{bmatrix} [k'_{11}] & [k'_{14}] \\ [k'_{41}] & [k'_{44}] \end{bmatrix}^{(1-4)} =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 & 0 & -0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 & 0 & 0.24 & 0.4 \\ \hline -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 & 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 & 0 & 0.24 & 0.8 \end{array} \right]$$

Матриця перетворень за $\alpha = -90^\circ$:

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

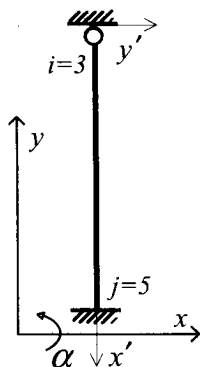
$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Матриця жорсткості елемента в ЗСК:

$$[k]^{(1-4)} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{14}] \\ [k_{41}] & [k_{44}] \end{bmatrix}^{(1-4)} = [T]^T [k']^{(1-4)} [T] =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.096 & 0 & -0.24 & -0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ \hline -0.096 & 0 & 0.24 & 0.096 & 0 & 0.24 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{array} \right]$$

Елемент 3-5



Матриця жорсткості елемента типу 3 в МСК (див. табл. 10.1):

$$[k'] = \begin{bmatrix} [k'_{ii}] & [k'_{ij}] \\ [k'_{ji}] & [k'_{jj}] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} \\ 0 & -\frac{3i}{l} & 0 & 0 & \frac{3i}{l} & 3i \end{array} \right]$$

Після обчислення коефіцієнтів:

$$[k']^{(3-5)} = \begin{bmatrix} [k'_{33}] & [k'_{35}] \\ [k'_{53}] & [k'_{55}] \end{bmatrix}^{(3-5)} =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.024 & 0 & 0 & -0.024 & -0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0.024 & 0 & 0 & 0.024 & 0.12 \\ 0 & -0.12 & 0 & 0 & 0.12 & 0.6 \end{array} \right]$$

Матриця перетворень за $\alpha = -90^\circ$:

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Матриця жорсткості елемента в ЗСК:

$$[k]^{(3-5)} = \begin{bmatrix} [k_{33}] & [k_{35}] \\ [k_{53}] & [k_{55}] \end{bmatrix}^{(3-5)} = [T]^T [k']^{(3-5)} [T] =$$

$$= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.024 & 0 & 0 & -0.024 & 0 & -0.12 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.024 & 0 & 0 & 0.024 & 0 & 0.12 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0.6 \end{array} \right]$$

Матриця жорсткості усієї системи у загальній системі координат (ЗСК) загалом для п'ятивузлової стержневої системи має такий вигляд:

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,15} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{15,1} & K_{15,2} & \dots & K_{15,15} \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{15}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{25}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{51}] & [K_{52}] & \dots & [K_{55}] \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $[K]$ симетрична, обчислюємо лише коефіцієнти блоків, що лежать на діагоналі та вище від діагоналі матриці $[K]$:

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= \sum_{e \in 1} [k_{11}]^{(e)} = [k_{11}]^{(1-2)} + [k_{11}]^{(1-4)} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & -0,75 \\ 0 & -0,75 & 2 \end{bmatrix} + 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0,096 & 0 & -0,24 \\ 0 & 20 & 0 \\ -0,24 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50,096 & 0 & -0,24 \\ 0 & 20,375 & -0,75 \\ -0,24 & -0,75 & 2,8 \end{bmatrix}; \\ [K_{12}] &= \sum_{e \in 1,2} [k_{12}]^{(e)} = [k_{12}]^{(1-2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & -0,75 \\ 0 & 0,75 & 1 \end{bmatrix}; \\ [K_{13}] &= \sum_{e \in 1,3} [k_{13}]^{(e)} = [0]; \\ [K_{14}] &= \sum_{e \in 1,4} [k_{14}]^{(e)} = [k_{14}]^{1-4} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -0,096 & 0 & -0,24 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0,24 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}; \\ [K_{15}] &= \sum_{e \in 1,3} [k_{15}]^{(e)} = [0]; \\ [K_{22}] &= \sum_{e \in 2} [k_{22}]^{(e)} = [k_{22}]^{(1-2)} + [k_{22}]^{(2-3)} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 2 \end{bmatrix} + 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0938 & -0,375 \\ 0 & -0,375 & 1,5 \end{bmatrix} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4688 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 3,5 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$[K_{23}] = \sum_{e \in 2,3} [k_{23}]^{(e)} = [k_{23}]^{(2-3)} = \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0938 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[K_{24}] = \sum_{e \in 2,4} [k_{24}]^{(e)} = [0]; \quad [K_{25}] = \sum_{e \in 2,5} [k_{25}]^{(e)} = [0];$$

$$\begin{aligned} [K_{33}] &= \sum_{e \in 3} [k_{33}]^{(e)} = [k_{33}]^{(2-3)} + [k_{33}]^{(3-5)} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0938 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50.024 & 0 & 0 \\ 0 & 20.0938 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$[K_{34}] = \sum_{e \in 3,4} [k_{34}]^{(e)} = [0];$$

$$[K_{35}] = \sum_{e \in 4} [k_{35}]^{(e)} = [k_{35}]^{(3-5)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -0.024 & 0 & -0.12 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[K_{44}] = \sum_{e \in 4} [k_{44}]^{(e)} = [k_{44}]^{(1-4)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & 0.24 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix};$$

$$[K_{45}] = \sum_{e \in 3,4} [k_{45}]^{(e)} = [0];$$

$$[K_{55}] = \sum_{e \in 5} [k_{55}]^{(e)} = [k_{55}]^{(3-5)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & 0.12 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0.12 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Коефіцієнти блоків матриці $[K]$ нижче від її діагоналі отримаємо на підставі її симетрії: $[K_{ji}] = [K_{ij}]^T$.

$$\frac{[K]}{10^3} =$$

50,096	0	-0,24	-50	0	0	0	0	0	-0,096	0	-0,24	0	0	0
0	20,38	-0,75	0	-0,38	-0,75	0	0	0	0	-20	0	0	0	0
-0,24	-0,75	2,8	0	0,75	1	0	0	0	0,24	0	0,4	0	0	0
-50	0	0	100	0	0	-50	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0,38	0,75	0	0,47	0,38	0	-0,094	0	0	0	0	0	0	0
0	-0,75	1	0	0,38	3,5	0	0,38	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-50	0	0	50,02	0	0	0	0	0	-0,24	0	-0,12
0	0	0	0	-0,094	0,38	0	20,094	0	0	0	0	0	-20	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,096	0	0,24	0	0	0	0	0	0	0,096	0	0,24	0	0	0
0	-20	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0
-0,24	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0,24	0	0,8	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0,24	0	0	0	0	0	0,024	0	0,12
0	0	0	0	0	0	0	-20	0	0	0	0	0	20	0
0	0	0	0	0	0	-0,12	0	0	0	0	0	0,12	0	0,6

Матриця жорсткості усієї системи у загальній системі координат

V. Врахування крайових умов (закріплення системи) та шарнірних з'єднань

Враховуючи, що переміщення опорних вузлів відомі ($\Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{11} = \Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{14} = 0$), а кутове переміщення шарнірного вузла 3 (рис. 10.12) не впливає на напружено-деформований стан системи і може задаватися довільно (приймаємо його також $\Delta_9 = 0$), можна спростити матрицю жорсткості усуненням рядків та стовпців, які відповідають цим компонентам переміщень. Після спрощення отримаємо:

$$[K] = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50,096 & 0 & -0,24 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20,375 & -0,75 & 0 & -0,375 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,24 & -0,75 & 2,8 & 0 & 0,75 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0,75 & 0 & 0,4688 & 0,375 & 0 & -0,0938 \\ 0 & -0,75 & 1 & 0 & 0,375 & 3,5 & 0 & 0,375 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 50,024 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0938 & 0,375 & 0 & 20,0938 \end{bmatrix}$$

VI. Запис та роз'язок системи канонічних рівнянь

Система канонічних рівнянь:

$$[K^*] \{\Delta^*\} = \{\bar{F}^*\},$$

або

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 50,096 & 0 & -0,24 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20,375 & -0,75 & 0 & -0,375 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,24 & -0,75 & 2,8 & 0 & 0,75 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -50 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0,75 & 0 & 0,4688 & 0,375 & 0 & -0,0938 \\ 0 & -0,75 & 1 & 0 & 0,375 & 3,5 & 0 & 0,375 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 50,024 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0938 & 0,375 & 0 & 20,0938 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -12,5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

У результаті розв'язання системи канонічних рівнянь матимемо значення вузлових переміщень дискретної моделі, показані на рис. 10.15.

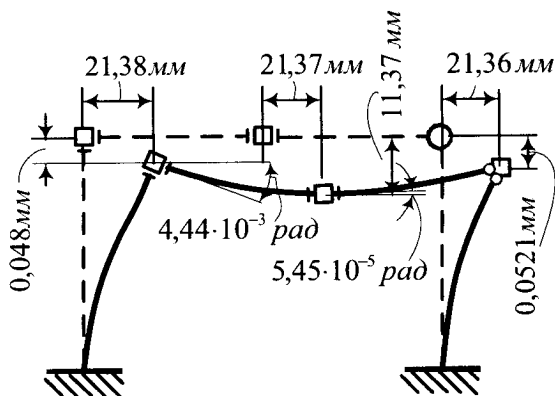


Рис. 10.15

Номери вузлів скінченно-елементної моделі рами та вузлових переміщень показано на рис. 10.11 та 10.12:

вузол 1: $\Delta_1 = 0.02138 \text{ м}$, $\Delta_2 = -0.48 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $\Delta_3 = 0.00444 \text{ рад}$;

вузол 2: $\Delta_4 = 0.02137 \text{ м}$, $\Delta_5 = -0.01137 \text{ м}$, $\Delta_6 = -0,545 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$;

вузол 3: $\Delta_7 = 0.02136 \text{ м}$, $\Delta_8 = -0.521 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

VII. Обчислення внутрішніх зусиль в елементах моделі

За відомих вузлових переміщень дискретної моделі можна обчислити сумарні остаточні реакції у кожному скінченному елементі. Обчислимо, наприклад, сумарні остаточні реакції у стержні 1-4.

Вектор вузлових переміщень елемента 1-4 в ЗСК:

$$\{\delta\}^{(1-4)} = \left\{ \begin{matrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_4\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1\varphi} \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} \delta_{4x} \\ \delta_{4y} \\ \delta_{4\varphi} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} 0.02138 \\ -0.48 \cdot 10^{-4} \\ 0.00444 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\}.$$

Внутрішні зусилля у перерізах біля кінців елемента 1-4 відповідно до формул (10.20), (10.25):

$$\begin{aligned}
 \{\bar{r}\}^{(1-4)} &= \left\{ \begin{Bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_4 \end{Bmatrix} \right\}^{(1-4)} = \left\{ \begin{Bmatrix} -N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_4 \\ -Q_4 \\ -M_4 \end{Bmatrix} \right\}^{(1-4)} = \\
 &= [k']^{(1-4)} \cdot \bar{\delta}_e' + \left\{ \bar{p}_e' \right\}^{(1-4)} = [k']^{(1-4)} \cdot [T] \{\delta\}^{(1-4)} + [T] \{p\}^{(1-4)} = \\
 &= 10^4 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,096 & -0,24 & 0 & -0,096 & -0,24 \\ 0 & -0,24 & 0,8 & 0 & 0,24 & 0,4 \\ \hline -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0,096 & 0,24 & 0 & 0,096 & 0,24 \\ 0 & -0,24 & 0,4 & 0 & 0,24 & 0,8 \end{array} \right] \times \\
 &\quad \times \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{c} 0,02138 \\ -0,48 \cdot 10^{-4} \\ 0,00444 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \\
 &\quad + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{c} -15 \\ 0 \\ 12,5 \\ -15 \\ 0 \\ -12,5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 9,6 \\ -5,14 \\ -3,29 \\ -9,6 \\ -24,86 \\ -46,05 \end{array} \right\}; \\
 N_1 &= -9,6 \text{ кН}; \quad Q_1 = -5,14 \text{ кН}; \quad M_1 = -3,29 \text{ кНм}; \\
 N_4 &= -9,6 \text{ кН}; \quad Q_4 = 24,86 \text{ кН}; \quad M_4 = 46,05 \text{ Нм}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно визначають внутрішні зусилля у перерізах біля кінців інших скінченних елементів.

Епюра згинальних моментів у межах елемента 1–4 окреслюється квадратною параболою. Посередині елемента прогин параболи $\Delta M = q l^2 / 8 = 6 \times 5^2 / 8 = 18.75 \text{ кНм}$. Згинальний момент посередині елемента: $M = (M_4 - M_1) / 2 + M_1 - \Delta M = (46.05 - (-3.29)) / 2 + (-3.29) - 18.75 = 2.63 \text{ кНм}$.

Епюри внутрішніх зусиль в елементах заданої рами показано на рис. 10.16.

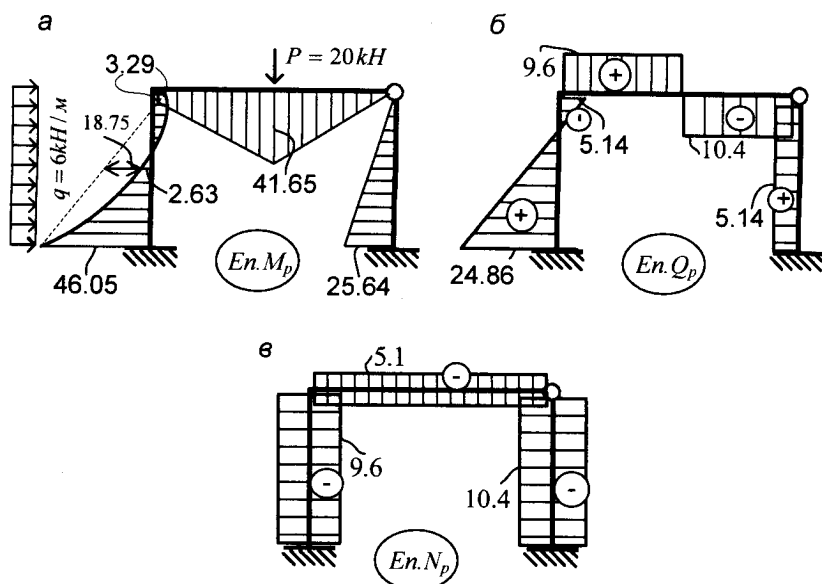


Рис. 10.16

Питання для самоперевірки

1. Як побудувати розрахункову модель стержневої системи під час розрахунку МСЕ?
2. Які величини приймають за невідомі МСЕ у формі переміщень?
3. Які типи скінченних елементів використовують під час розрахунку плоскої стержневої системи?

4. Як формуються вектори вузлових переміщень, реакцій та навантажень для скінченно-елементної моделі?
5. Яка фізична суть коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента під час розрахунку МСЕ у формі методу переміщень?
6. Призначення та властивості матриці перетворень скінченного елемента.
7. Опишіть етапи розрахунку стержневих систем методом скінченних елементів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс: підруч. – К., 1999. – 584 с.
2. Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навч. посіб. – К.: Каравела, 2006. – 344 с.
3. Бутенко Ю.Н. Строительная механика. – К.: Вища шк., 1989. – 480 с.
4. Бутенко Ю.Н. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. – К.: Вища шк., 1989. – 368 с.
5. Дарков А.В., Клейн Г.К., Кузнецов В.И. і ін. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1976. – 600 с.
6. Дорошук Г.П., Трач В.М. Основи будівельної механіки: підруч. – Рівне: УДУВГП, 2003. – 504 с.
7. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
8. Попович Б.С., Давидчак О.Р. Будівельна механіка статично визначених стержневих систем: навч. посіб. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2007. – 196 с.
9. Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых вистем. – Часть II: Статически неопределимые системы. – М.: Госиздат литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 544 с.
10. Хило Е.Р., Попович Б.С. Усиление строительных конструкций. – Львів: Вища шк., 1985. – 156 с.
11. Чирас А.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. – 256 с.
12. Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка: підруч. – Харків: УкрДАЗТ, 2002. – 305 с.
13. Яременко О.Ф., Шебанін В.С., Орлова А.М., Сорока М.М., Калініна Т.О. Будівельна механіка у прикладах: посіб. – Одеса, 2003. – 246 с.

Книги для навчання і роботи!

Гнідець Б.Г.

ЗАЛІЗОБЕТОННІ КОНСТРУКЦІЇ З НАПРУЖУВАНИМИ СТИКАМИ І РЕГУЛЮВАННЯМ ЗУСИЛЬ

Монографія. – 2008. – 548 с.

ISBN 978-966-553-823-3



Наведено результати розробок, досліджень і впровадження в будівництво на багатьох об'єктах нових збірних і збірно-монолітних статично невизначених залізобетонних конструкцій з напружуваними стиками і регулюванням зусиль. Розглянуто залізобетонні конструкції одноповерхових, багатоповерхових промислових і громадських будинків, інженерних споруд та прогонових будов мостів, а також методику їх розрахунку з урахуванням попереднього напруження надпорної арматури, різних видів стиків, способів їх виконання і технології монтажу.

Розглянуто особливості технології виконання попередньо напружених стиків цих конструкцій із застосуванням електротермічного і силового методів натягу арматури з автоматизацією контролю технологічних операцій.

Рекомендовано для інженерів-будівельників, проектувальників, наукових працівників, а також студентів і аспірантів будівельних спеціальностей ВНЗ і факультетів.

Шналь Т.М.

ВОГНЕСТІЙКІСТЬ ТА ВОГНЕЗАХИСТ МЕТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Навчальний посібник. – 2010. – 176 с.

ISBN 978-966-553-945-2



Розглянуто вогнезахист сталевих елементів та конструкцій будівель і споруд. Викладено методики розрахунку вогнестійкості конструкцій. Наведено способи вогнезахисту металевих конструкцій та найуживаніші матеріали.

Для студентів, курсантів, слухачів вищих навчальних закладів, які навчаються за освітньо-кваліфікаційною програмою підготовки бакалавра та спеціаліста напрямів 0928 "Пожежна безпека" та 0921 "Будівництво", а також для інженерно-технічних працівників проектних та будівельно-монтажних організацій, працівників служби цивільного захисту МНС України.



Солодкий С.Й. та ін.

ПРОЕКТУВАННЯ РОЗВ'ЯЗОК НА АВТОМОБІЛЬНИХ ДОРОГАХ

Навчальний посібник. – 2012. – 200 с.
ISBN 978-617-607-435-9

Викладено дані про історію розвитку, класифікацію, особливості різних типів перехрещень і примикань на автомобільних дорогах. Наведено методи вишукувань і проектування транспортних розв'язок в одному, двох та більше рівнях. Зосереджено увагу на розрахунку геометричних елементів різного типу вузлів автомобільних доріг і гарантуванні безпеки руху на транспортних вузлах.

Для студентів спеціальностей “Автомобільні дороги та аеродроми”, “Мости і транспортні тунелі”, “Організація та регулювання дорожнього руху”, а також для інженерів-проектувальників автомобільних доріг.



Мовчан М.І., Собко Ю.М.

ПРОЕКТУВАННЯ АВТОМОБІЛЬНИХ ДОРІГ

Навчальний посібник. – 2012. – 116 с.
ISBN 978-617-607-323-9

Наведено основні відомості про автомобільні дороги, викладено основи проектування автомобільних доріг, подано необхідні довідкові матеріали. Способи проектування проілюстровано прикладами. Особливу увагу зосереджено на питаннях гарантування безпеки руху.

Для студентів спеціальностей “Автомобільні дороги та аеродроми”, “Мости та транспортні тунелі” й “Організація і регулювання дорожнього руху”.

Видавництво Львівської політехніки

вул. Ф. Колесси, 2, корп. 23 А, м. Львів, 79000

тел. +380 32 2582146, факс +380 32 2582136, <http://vip.com.ua>, vmr@vip.com.ua



НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Попович Борис Степанович
Давидчак Олег Романович

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ
СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Редактор *Галина Клим*
Коректор *Ольга Грабовська*
Технічний редактор *Лілія Саламін*
Комп'ютерне верстання *Ірини Жировецької*
Художник-дизайнер *Уляна Келеман*

Здано у видавництво 02.04.2014. Підписано до друку 10.06.2014.

Формат 60×90^{1/16}. Папір офсетний. Друк офсетний.

Умовн. друк. арк. 13,5. Обл.-вид. арк. 10,30.

Наклад 300 прим. Зам. 140239.

Видавець і виготівник: Видавництво Львівської політехніки
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4459 від 27.12.2012 р.

вул. Ф. Колесси, 2, Львів, 79013
тел. +380 32 2582146, факс +380 32 2582136
vlp.com.ua, ел. пошта: *vmr@vlp.com.ua*

Попович Б.С.

П 581 Будівельна механіка статично невизначених стержневих систем: навч. посібник / Б.С. Попович, О.Р. Давидчак. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2014. – 216 с.

ISBN 978-617-607-555-4

Навчальний посібник підготовлено відповідно до програми навчальної дисципліни “Будівельна механіка. Спецкурс”, яку включено до навчального плану підготовки бакалаврів за напрямом “Будівництво”.

Викладено основні методи розрахунку статично невизначених стержневих систем на нерухоме і рухоме навантаження. Наведено приклади розрахунків, які демонструють застосування теорії розрахунків до розв’язування практичних задач.

Посібник призначений для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 69.04(075.8)

ББК 38.112я73



ПОПОВИЧ Борис Степанович

кандидат технічних наук, доцент. З 1968 до 2002 р. працював у Національному університеті «Львівська політехніка» на кафедрі будівельної механіки, а з 2002 до 2010 р. на кафедрі автомобільних шляхів та транспортних технологій. Опублікував понад 80 наукових та методичних праць, серед них у співавторстві дві монографії, навчальний посібник та 15 авторських свідоцтв на винаходи.

Науковий напрям: будівельна механіка, обстеження та підсилення будівельних конструкцій.



ДАВИДЧАК Олег Романович

кандидат технічних наук, доцент кафедри мостів та будівельної механіки Інституту будівництва та інженерії довкілля Національного університету «Львівська політехніка». Опублікував понад 60 наукових та методичних праць, серед них у співавторстві навчальний посібник, два довідники та має одне авторське свідоцтво на винаходи.

Науковий напрям: будівельна механіка, динаміка та стійкість дискретно-неперервних стержневих систем.

ISBN 978-617-607-555-4



9 786176 075554 >