



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»



ОПТИМАЛЬНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ



681.51:519.8(072)
0-62

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Оптимальні системи управління

Навчальний посібник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*



681.51:519.8](0-62 2017

Оптимальні системи управління

24 / 000082

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

УДК 681.513.5:519.857](075.8)

ББК 32.965я73

О-62

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(Протокол № 2 від 13.02.2017 р.)*

Рецензенти:

*В. М. Синеглазов, д-р техн. наук, проф.,
Національний авіаційний університет*

*С. Л. Кривий, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

Відповідальний редактор

*М. М. Ткач, канд. техн. наук, доц.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

О-62

Оптимальні системи управління : навч. посіб. / О. А. Стенія,
В. П. Пасько, А. Д. Лемешко, О. М. Польшакова. – Київ : КПІ ім. Ігоря
Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 172 с.

Розглянуто питання з вирішення проблеми синтезу оптимальних систем управління. Достатню увагу приділено систематизації викладеного матеріалу. Запропоновані на основі класичних методів оптимізації (класичне варіаційне числення, принцип максимуму, динамічне програмування) алгоритми синтезу є передусім ефективним практичним інструментарієм для побудови різних оптимальних систем управління.

Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами цілої низки прикладних задач, а для його закріплення в кінці кожного розділу є контрольні запитання.

Для студентів вищих навчальних закладів України всіх спеціалізацій та спеціальностей «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології».

УДК 681.513.5:519.857](075.8)

ББК 32.965я73

483_151

НТБ ВІНУ
М. ВІННИЦЯ

© О. А. Стенія, В. П. Пасько, А. Д. Лемешко,
О. М. Польшакова, 2017

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ФІОТ), 2017

ПЕРЕДМОВА	5
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА КРИТЕРІЇВ, ОБМЕЖЕНЬ ТА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ	7
1.1. Критерії оптимальності та характеристики обмежень	8
1.2. Загальна постановка задачі оптимального управління	13
1.3. Приклади постановок задач оптимального управління	15
1.4. Класифікація задач оптимального управління	19
Контрольні запитання	22
Контрольні тести	22
РОЗДІЛ 2. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ.....	23
2.1. Загальні положення	23
2.2. Задача з закріпленими кінцями та фіксованим часом	26
2.3. Рівняння Ейлера-Лагранжа (задача на умовний екстремум).....	31
2.4. Задача з рухомими кінцями та фіксованим часом	36
2.5. Задача з нефіксованим часом та рухомими кінцями	40
2.6. Прямі методи варіаційного числення.....	42
2.7. Особливості розв'язку варіаційних задач теорії оптимальних систем управління	44
Контрольні запитання	45
Контрольні тести	46
РОЗДІЛ 3. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	47
3.1. Загальні відомості	47
3.2. Дискретне динамічне програмування	48
3.3. Стохастичні задачі динамічного програмування	53
3.4. Неперервне динамічне програмування	57
Контрольні запитання	67
Контрольні тести	67
4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА.....	68
4.1. Основні відомості про принцип максимуму	68
4.2. Розв'язання задачі оптимізації у відсутності обмежень на управління.....	79
4.3. Розв'язання задачі оптимізації при обмеженнях на управління.....	84
4.4. Дискретний принцип максимуму	86
Контрольні запитання	91
Контрольні тести	92

РОЗДІЛ 5. СИСТЕМИ, ОПТИМАЛЬНІ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ТА ВИТРАТАМИ ПАЛИВА. СУБОПТИМАЛЬНІ І ТЕРМІНАЛЬНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ	93
5.1. Оптимальне управління на основі принципу максимуму	93
5.2. Визначення моментів перемикання лінійного управління оптимального за швидкодією	100
5.3. Замкнуті оптимальні за швидкодією системи	107
5.7. Управління оптимальне за витратами енергії	132
5.8. Термінальні системи управління	135
Контрольні запитання	139
Контрольні тести	139
6. АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕГУЛЯТОРІВ	140
6.1. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів варіаційним методом	142
6.2. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів методом динамічного програмування	149
6.3. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів за допомогою принципу максимуму	155
6.4. Зв'язок між варіаційним обчисленням, динамічним програмуванням та принципом максимуму	162
Контрольні запитання	168
Контрольні тести	168
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	169

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник присвячений сучасній теорії оптимального управління. Для загального курсу теорії управління характерні порівняно прості задачі регулювання: підтримання деяких регульованих величин на заданому рівні чи їх зміна за заздалегідь відомим чи невідомим законом (системи стабілізації, програмні чи слідкуючі системи відповідно), найпростіші жорсткі алгоритми управління, що реалізують в основному принцип зворотного зв'язку та ін.

Основи теорії оптимального управління були закладені в працях О.А.Фельбаума, Р.Белмана – розробника методу динамічного програмування, Л.С.Понтрягіна, що сформулював і довів принцип максимуму. Теорія аналітичного конструювання оптимальних регуляторів створена М.М.Красовським, О.М.Летовим, Р.Калманом. Подальший розвиток одержано в працях А.А.Воронова, В.В.Солодовнікова, Я.З.Ципкина, М.Атанса, П.Фалба, Р.Куликовського та ін.

При вирішенні задач оптимізації необхідно спочатку вибрати та сформулювати мету (вибрати критерій оптимальності), потім узгодити її з існуючими можливостями (врахувати обмеження) і, нарешті, реалізувати засоби досягнення мети з врахуванням обмежень. В процесі вирішення останнього етапу з'ясовуються переваги різних математичних методів оптимізації.

Враховуючи прикладну спрямованість підготовки фахівців у технічних вузах, основну увагу приділено практичним питанням оптимізації, тісно пов'язаним з роботою в конкретних предметних областях. Як показує практика комп'ютерного моделювання і вирішення реальних оптимізаційних задач, зазвичай представлені у навчальній літературі універсальні «бібліотечні» методи програмування оптимізаційних задач часто виявляються малоефективними і вимагають адаптації при практичній реалізації. Крім того, важливе значення набувають елементи супутніх обчислювальних технологій, пов'язані з формалізацією конкретної прикладної проблеми і розробкою сценарію оптимізації.

Метою даного навчального посібника є ознайомлення студентів з основними положеннями сучасної теорії управління – теорією оптимальних систем управління.

Розглядаються основні методи оптимізації: класичне варіаційне числення, динамічне програмування, принцип максимуму. Значна увага приділяється системам оптимальним за швидкодією, аналітичному конструюванню регуляторів, системам оптимальним за витратами палива, системам з мінімальними витратами енергії, термінальним і субоптимальним системам управління.

Для повного засвоєння поданих у навчальному посібнику матеріалів передбачається знайомство з курсами вищої математики (що містять, зокрема, досить повні відомості з лінійної і матричної алгебри), чисельного аналізу і основ теорії управління.

Посібник буде корисним для викладачів та студентів всіх спеціалізацій спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА КРИТЕРІЇВ, ОБМЕЖЕНЬ ТА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Задачі покращення статичних чи динамічних характеристик систем управління виникали протягом всієї історії розвитку теорії автоматичного управління, але проблема оптимальних систем була чітко сформульована лише після точного визначення поняття критерію оптимальності. Для його визначення потрібно також вказати обмеження, пов'язані з витратами матеріальних засобів чи енергії для управління об'єктом, та обмеження на окремі координати стану об'єкту.

Незалежно від природи об'єкта, розв'язання будь-якої задачі оптимізації полягає у послідовному виконанні двох основних етапів.

1. Математична постановка задачі оптимізації шляхом формалізації понять «найкращий», «оптимальний» і визначення умов існування розв'язку формалізованої задачі.
2. Розв'язання сформульованої математичної задачі з використанням відповідного методу, вибір якого значною мірою залежить від постановки задачі, а також математичної моделі об'єкта оптимізації.

Головним завданням першого етапу є побудова деякої скалярної чи векторної функції $I(\bar{X})$, яка кількісно характеризує якісні показники об'єкта чи системи, і називається *цільовою функцією, критерієм ефективності або оптимальності*. На практиці основними критеріями оптимальності виступають деякі показники, що характеризують якість функціонування об'єкта чи системи, наприклад, максимальна швидкість чи мінімальні витрати енергії для технічних систем або максимальний прибуток чи мінімальні витрати в економічних системах. Аргументи цієї функції \bar{X} (її незалежні змінні) називаються *параметрами оптимізації*. Характерною особливістю задач оптимізації є наявність обмежень на параметри оптимізації, які зумовлені можливостями фізичної реалізації технічних рішень та режимами функціонування реальних систем та об'єктів. Результатом розв'язування задачі оптимізації є такі значення параметрів, за яких цільова функція приймає максимальне або мінімальне значення.

1.1. Критерії оптимальності та характеристики обмежень

Критерій оптимальності – це технічний чи техніко-економічний показник, математичний вираз якого є функцією чи функціоналом координат процесу та управляючого впливу. Досягнення максимального (чи мінімального) значення критерію вказує на оптимальний стан чи поведінку системи. Для техніко-економічних систем розв'язування задачі оптимального управління повинно забезпечити максимум критерію оптимальності (продуктивність, прибуток і т.п.). Для більшості технічних систем критерій вказує на витрати палива, енергії, коштів і т.п.. У цьому разі розв'язування задачі оптимального управління повинно забезпечити мінімум критерію.

Труднощі визначення критерію оптимальності обумовлені тим, що на практиці дуже часто вимоги до системи суперечні. З одного боку система повинна бути максимально простою, надійною, дешевою і т.п. Однак, створити систему, яка є оптимальною за всіма суперечливими критеріями, технічно неможливо. Виникає проблема формулювання деякого єдиного критерію, що давав би компромісний розв'язок задачі. Крім того, слід враховувати, що складність задачі в значній мірі залежить від складності формулювання критерію оптимальності. Можна вимагати такого вибору вектора параметрів \bar{X} , щоб критерій $I_1(\bar{X})$ досягав мінімуму, але при цьому значення інших $I_2(\bar{X})$ та $I_3(\bar{X})$ не відхилялись би в процентному відношенні від своїх екстремумів більше, ніж на задані значення ε_2 та ε_3 , відповідно. Розрізняють також векторний критерій $I(I_1, I_2, \dots, I_n)$, тобто задачу багатокритеріальної оптимізації. Для визначення області розв'язків, оптимальних за Парето, необхідно перейти від задачі векторної оптимізації до задачі нелінійної оптимізації зі спеціально сконструйованою скалярною цільовою функцією: $I=f(I_1, I_2, \dots, I_n)$. Існують різні типи цієї функції, найбільш поширеним серед яких є метод зважених сум:

$$I = \sum_{i=1}^n \lambda_i I_i, \text{ де } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (1.1)$$

В самому загальному випадку мета управління, тобто те, заради чого створюється система управління, визначається деяким функціоналом

$$I=I[X(t), X_{вх}(t), U(t), N(t)], \quad (1.2)$$

де $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – вектор стану об'єкта, $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – вектор управляючих впливів, $N=\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ – вектор збурюючих впливів, $X_{BX}=\{x_{BX1}, x_{BX2}, \dots, x_{BXn}\}$ – вектор задаючих впливів (рис. 1.1).

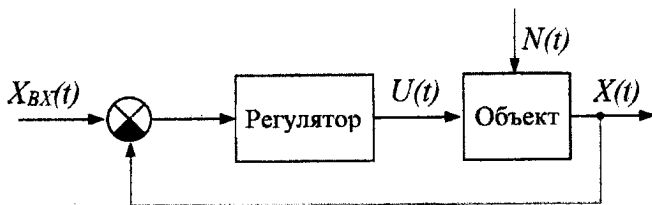


Рис.1.1. Схема системи управління

Треба знайти такий алгоритм $U(t)$ чи $U \approx f(X, N)$, за якого функціонал (1.2) приймає екстремальне значення, тобто:

$$I [X, X_{BX}, U, N] = \text{extr}$$

Ця умова дозволяє задати аналітично критерій оптимальності.

Міру погіршення якості системи управління можна оцінити також різницею $(I - I_{min})$ чи $(I_{max} - I)$ або монотонною функцією цієї різниці. Критерії оптимальності розрізняється залежно від усталених чи перехідних процесів в системі.

Найбільш широке використання мають інтегральні функціонали. *Інтегральний функціонал* – це величина, значення якої залежить від заданих функцій. Метою управління є знаходження вектору U , який забезпечує екстремум функціоналу I , зокрема, інтегрального:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, X_{BX}, U, N, t) dt = \text{extr} \quad (1.3)$$

Кожному управлінню $U(t)$, заданому на відрізку $t_0 \leq t \leq t_1$ та в області управліннь U_0 , буде відповідати певне числове значення I . При $f_0(\cdot) = 1$ для синтезу оптимальної за швидкодією системи маємо критерій виду:

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0 \rightarrow \min \quad (1.4)$$

Розв'язок задачі для даного критерію I_1 – це мінімальний час переходу об'єкту зі стану X_0 в X_1 за наявності обмежень на управління, що належить деякій замкнутій області $U \in U_0$. Прикладом оптимальних за швидкодією систем управління є регулятори турбін та прокатних станів, металорізальних верстатів та роботів, управління об'єктами, що рухаються і т.п.

На практиці часто проводиться синтез оптимальної системи управління за інтегральним критерієм якості перехідного процесу

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} [X_{вх}(t) - X_{вих}(t)]^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} X^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (1.5)$$

де $X(t)$ – відхилення координати від усталеного значення. Фізичний зміст цього інтегралу в тому, що він визначає площу фігури, обмеженої кривою $X^2(t)$. Недолік його в тому, що він погано враховує коливальний характер процесів. Тому застосовується більш складний критерій:

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} [X^2(t) + c\dot{X}^2(t)] dt \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

де c – ваговий коефіцієнт, що забезпечує баланс між управлінням, помилкою та її похідною.

Більш загальний інтегральний критерій має вигляд:

$$I_4 = \int_{t_0}^{t_1} \{X^2(t) + c\dot{X}^2(t) + \dots + c_{n-1}[X^{n-1}(t)]^2\} dt \rightarrow \min. \quad (1.7)$$

В задачі аналітичного конструювання регуляторів використовується також інтегральний критерій:

$$I_5 = \int_{t_0}^{t_1} [a_1 X^2 + a\dot{X}^2 + c_1 U^2 + c_2 \dot{U}^2] dt \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

У цьому випадку необхідно знайти $U(t)$, що мінімізує такий інтеграл.

В системах оптимальних за витратами палива мінімізується критерій:

$$I_6 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m C_j |U_j(t)| dt, \quad (1.9)$$

де сталі $c_j > 0$.

При управлінні об'єктами з мінімальними затратами енергії застосовують критерій виду:

$$I_7 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \gamma_j U_j^2(t) \rightarrow \min, \quad (1.10)$$

де $U_j(t)$ – управляючі впливи, γ_j – вагові коефіцієнти.

Залежно від виду критерію оптимальності розрізняють такі типи оптимальних систем:

- рівномірно-оптимальні;
- статистично-оптимальні;
- мінімаксно-оптимальні.

У системах першого типу всі процеси є оптимальними. Наприклад, незалежно від початкових умов чи задаючих впливів (останні повинні належати деякому заданому класу допустимих впливів), в системі, оптимальній за швидкодією, об'єкт переходить з початкового стану до заданого протягом мінімального часу. Таким чином, рівномірно-оптимальна система виконує свої функції найкращим чином для всіх випадків.

Для систем другого типу неможливо (чи непотрібно) забезпечувати оптимальне управління для кожного окремого процесу. Критерій оптимальності є статистичним і використовується для систем управління, на які діють випадкові фактори. У цьому випадку управління також повинно бути випадковим процесом. Випадковий характер управління вимагає і статистичної оцінки критерію оптимальності. Такі системи повинні бути оптимальними у середньому і як критерій управління часто застосовують середнє значення критерію, обчислене для оцінки окремої реалізації процесу для детермінованої задачі. Наприклад, якщо первинним критерієм оптимальності є $F(X, X_{BX}, U, N)$, де завада N – випадкова величина з щільністю ймовірності $P(N)$, то критерієм оптимальності може бути:

$$I_8 = M\{F\} = \int_{\Omega(N)} F(X, X_{BX}, U, N) P(N) d\Omega(N), \quad (1.11)$$

де M – математичне сподівання, чи середнє значення; $\Omega(N)$ – область зміни вектора завад N , а $d\Omega(N)$ – її нескінченно малий елемент. В деяких роботах статистичним критерієм є ймовірність виходу величини за деякі задані межі чи ймовірність аварії системи.

Системи третього типу, що називаються мінімаксно-оптимальними, забезпечують найкращий у порівнянні з іншою системою результат тільки в

найгіршому випадку. Інакше кажучи, найгірший результат в мінімаксно-оптимальній системі краще, ніж найгірший результат в будь-якій іншій системі. Наприклад, потрібно, щоб максимальне динамічне відхилення перехідного процесу у системі мало мінімальне значення. Така ж постановка інколи є доцільною за відсутності апіорних ймовірносних розподілів.

В цих випадках застосовують так звані мінімаксні критерії

$$I_9 = \min \max f_{ij}(x), \quad (1.12)$$

де $f_{ij}(x)$ – затрати при використанні i -тої стратегії в j -тій ситуації.

Управління об'єктом чи процесом завжди пов'язане з матеріальними чи енергетичними затратами, які завжди технологічно обмежені. Наприклад, управляючі впливи U_1, U_2, \dots, U_m не можуть або не повинні перевищувати певні значення внаслідок фізичних чи технічних особливостей об'єкту через небезпеку порушення нормальної роботи об'єкта чи неможливість технічної реалізації.

Обмеження часто задають у вигляді:

$$|U_1| \leq U_{1s}, |U_2| \leq U_{2s}, \dots, |U_m| \leq U_{ms}, \quad (1.13)$$

де $U_{1s}, U_{2s}, \dots, U_{ms}$ – задані константи, які є лінійним обмеженнями.

У випадку нелінійних обмежень маємо:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j^2 \leq A \quad (1.14)$$

де λ_j та A – константи чи задані функції часу.

Якщо розглянути m -вимірний простір вектора U з декартовими координатами U_1, U_2, \dots, U_m , то наведені вище обмеження є окремими випадками умови, що обмежує положення вектора U деякою допустимою областю $\Omega(U)$ цього простору:

$$U \in \Omega(U) \quad (1.15)$$

В окремому випадку (1.13) вектор U обмежено m -вимірним паралелепіпедом, а у випадку умов (1.14) – m -вимірним еліпсоїдом в U -просторі.

Інтегральні нерівності:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \beta_j u_j^2(t) dt \leq B,$$

обмежують сумарну витрату управляючих впливів за час управління.

Замкненість множини U означає, що управління можуть знаходитись не лише всередині, але і на межі множини допустимих управлінь. Аналогічно фазові координати стану об'єкту x_1, x_2, \dots, x_n можуть бути обмежені технічними чи технологічними умовами. Перш за все координати обмежуються диференціальними рівняннями об'єкта, так званими неголономними зв'язками. Існують також обмеження типу голономних зв'язків $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, l$, де φ_i – деякі функції. Крім того, зустрічаються ізопараметричні обмеження у вигляді визначених інтегралів:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(x, t) dt \leq b_i; \quad i = 1, l.$$

Деякі координати обмежуються умовами міцності конструкції, недопустимістю перегріву вузлів та блоків.

Обмеження фазових координат задають у просторі стану замкнену область $\Omega(X)$ допустимих значень:

$$X \in \Omega(X). \quad (1.16)$$

Для кожної конкретної системи межі областей $\Omega(X)$ та $\Omega(U)$ визначаються з умов експлуатації та характеристик елементів САУ.

В загальному випадку обмежуються деякі функціонали Z від U, X, N на певному інтервалі часу:

$$Z_j[U, X, N] \in \Omega_j(Z), \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

де $\Omega(Z)$ – допустима область змін функціонала Z_j .

Прикладом може служити обмеження виду:

$$Z = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j^2 + \beta U^2 \right] dt \leq A, \quad (1.17)$$

де $t_0, t_1, \alpha_j, \beta, A$ – додатні константи.

1.2. Загальна постановка задачі оптимального управління

Задача синтезу оптимальної системи належить до задач оптимального управління та формулюється як варіаційна задача. При цьому, крім рівняння об'єкту управління, необхідно задати обмеження на управляючий та фазовий вектори, крайові умови та вибрати критерій оптимальності.

Припустимо, що рівняння об'єкту задається в нормальній формі:

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad (1.18)$$

чи в скалярному вигляді:

$$\dot{x}_i = f_i(X, U, t), i = 1, n,$$

де $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – фазовий вектор, $U=(U_1, U_2, \dots, U_m)^T$ – управління чи вектор управління.

На управляючий та фазовий вектори можуть бути накладені обмеження у вигляді скінченних відношень – рівностей чи нерівностей. В загальному випадку їх можна записати як:

$$U(t) \in U, X(t) \in X. \quad (1.19)$$

Тут U , та X – деякі задані множини, які взагалі можуть залежати від часу, причому $U_i \subseteq R^m$ та $X_i \subseteq R^n$, тобто U_i – підмножина n -вимірного простору. В (1.19) перше співвідношення є обмеженням на управління, друге – обмеженням на фазовий вектор чи фазовим обмеженням. Обмеження на управління та фазовий вектор можна не розділяти і в загальному випадку записати у вигляді:

$$(U(t), X(t)) \in V, V \subseteq R^{n+m}, \quad (1.20)$$

де V – підмножина $(n+m)$ -вимірного простору.

Крайові (граничні) умови – це обмеження на фазовий вектор в початковий t_0 та кінцевий t_1 моменти часу і в загальному виді їх можна записати так:

$$X(t_0) \in X_0, X(t_1) \in X_1, X_0 \subseteq R^n, X_1 \subseteq R^n. \quad (1.21)$$

Вектор $X(t_0)$ зветься лівим, а вектор $X(t_1)$ правим кінцем траєкторії, X_0 та X_1 – підмножини n -вимірного простору.

Крайові умови мають вигляд (1.21), якщо обмеження на лівий та правий кінець траєкторії розділені. В протилежному випадку вони запишуться у вигляді:

$$(X(t_0), X(t_1)) \in V_0, V_0 \subseteq R^{2n}, \quad (1.22)$$

де V_0 – підмножина $2n$ -вимірного простору.

Критерій оптимальності, що є кількісним показником якості системи, задається у вигляді функціоналу:

$$I = I(U(t), X(t)). \quad (1.23)$$

Тоді задача оптимального управління формулюється таким чином: при заданих рівнянні об'єкту управління (1.18), обмеженнях (1.19) та крайових

умовах (1.21) знайти програмне управління $U^*(t)$ чи управління із зворотним зв'язком та фазову траєкторію $X^*(t)$, за яких критерій (1.23) приймає мінімальне (чи максимальне) значення. Для визначеності в подальшому приймаємо, що функціонал (1.23) повинен приймати мінімальне значення. Управління $U^*(t)$ чи $U^*(X(t), t)$ та траєкторія $X^*(t)$ зветься оптимальною. При вирішенні задачі синтезу оптимальних систем управління буває достатнім знайти оптимальне управління.

1.3. Приклади постановок задач оптимального управління

1.3.1. Задачі оптимального управління літальним апаратом

Розглянемо задачі оптимального управління літальним апаратом (ЛА), поведінка якого в вертикальній площині описується рівнянням:

$$m\dot{v} = p + q \quad (1.24)$$

чи в проекціях на горизонтальну ξ та вертикальну η осі нерухомої системи координат:

$$m\ddot{\xi} = p_1 + q_1; m\ddot{\eta} = p_2 + q_2 \quad (1.25)$$

де $m = m_f + m_p(t)$ – маса ЛА; $m_p(t)$ – "реактивна маса"; $V = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$ – швидкість ЛА; $p = (p_1, p_2)$ – реактивна сила; $q = (q_1, q_2)$ – рівнодіюча всіх решти сил (сил тяжіння Землі, сили опору повітря та ін.)

Реактивна сила:

$$p = -\dot{m}w, |w| = const, \quad (1.26)$$

де $w = (w_1, w_2)^T$ – відносна швидкість часток, що відокремлюються; $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ – евклідова норма вектора w ; $|\dot{m}| = |\dot{m}_p|$ – секундні витрати реактивної маси. Розділимо обидві частини рівняння на m . Позначаючи $x_1 = \xi; x_2 = \eta; x_3 = \dot{\xi}; x_4 = \dot{\eta}; u_1 = \frac{p_1}{m}; u_2 = \frac{p_2}{m}; \bar{q}_1 = \frac{q_1}{m}; \bar{q}_2 = \frac{q_2}{m}$, рівняння ЛА можна записати у вигляді нормальної системи:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= u_1 + \bar{q}_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2 + \bar{q}_2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

чи в векторній формі:

$$\dot{X} = AX + BU + \tilde{q}. \quad (1.28)$$

В останньому рівнянні:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Відношення реактивної сили до маси ЛА приймаємо за управління. Трасекторія не повинна перетинати земну поверхню, тобто повинні виконуватись обмеження на фазові координати:

$$x_2 \geq 0. \quad (1.30)$$

Задача 1. Виведення ЛА в задану точку фазового простору за мінімальний час.

Нехай реактивна сила обмежена: $|p| \leq p_m$. Треба вивести ЛА з фіксованої початкової точки $X(t_0) = X^0$ в фіксовану кінцеву точку $X(t_1) = X^1$ за мінімальний час. Ця задача є задачею оптимального управління об'єктом (1.28), (1.29), з фазовим обмеженням (1.30), обмеженням на управління:

$$|u| \leq U_m; U_m = \frac{P_m}{m}. \quad (1.31)$$

Крайові умови:

$$X(t_0) = X^0, X(t_1) = X^1 \quad (1.32)$$

та критерієм оптимальності:

$$I = t_1 - t_0, \quad (1.33)$$

де t_0 – початковий момент (будемо вважати його фіксованим); t_1 – кінцевий момент – момент часу досягнення ЛА точки X^1 (не фіксований).

Задача 2. Виведення ЛА в задане положення за мінімальний час.

При обмеженні на управління (1.31) потрібно вивести ЛА з заданої точки $X(t_0) = X^0$ фазового простору в задане положення $(x_1(t_1), x_2(t_1)) = (x_1^1, x_2^1)$ на вертикальній площині за мінімальний час. В цій задачі лівий кінець $X(t_0)$ фіксовано (тобто положення та швидкість ЛА в момент t_0 задані), а правий кінець $X(t_1)$ не фіксований, тобто в момент t_1 положення ЛА задано, а на його швидкість ніяких обмежень не накладено. Ця задача оптимального управлін

ня відрізняється від задачі 1 тільки умовою на правому кінці траєкторії: $x_1(t_1) = x_1^1, x_2(t_1) = x_2^1$. В задачі 1 кожна з множин X_m^0 та X_m^1 (1.20) має лише одну точку. В задачі 2 множина X_0 складається з однієї точки, а множина X_1 є площина $x_1 = x_1^1, x_2 = x_2^1$ в чотирьохвимірному фазовому просторі (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Задача 3. Переведення ЛА на максимальну далечинь.

В даному випадку слід врахувати, що реактивна маса, чи, що те ж саме, початкова маса $m(t_0) = m_0$, обмежена.

Оскільки

$$|u| = \frac{|p|}{m} = \frac{|m|}{m} |w|, \quad (1.34)$$

то обмеженість реактивної маси накладає наступні обмеження на управління:

$$\int_{t_0}^{t_1} |u| dt = B_1; B_1 = |w| \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right). \quad (1.35)$$

Обмеження такого вигляду називається ізопериметричним. Кінцевий

момент t_1 визначається з умови:

$$x_2(t_1) = 0 \text{ (висота дорівнює нулю)}. \quad (1.36)$$

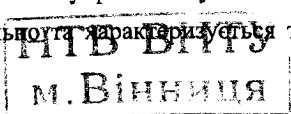
Задача оптимального управління формулюється таким чином: при заданому рівнянні об'єкту (1.28), фазовому обмеженні (1.36), обмеженні на управління (1.35), крайових умовах $X(t_0) = X^0, x_2(t_1) = 0$ знайти управління, що мінімізує функціонал $I = -x_1(t_1)$. В цьому випадку множина X_0 складається з однієї точки, а множина X_1 є трьохвимірним простором (x_1, x_3, x_4) , що визначається співвідношенням $x_2 = 0$.

Задача 4. Виведення ЛА на максимальну висоту.

В даному випадку також необхідно врахувати обмеження на реактивну масу. Задача оптимального управління формулюється так, як і задача 3, але при крайовій умові $X(t_0) = X^0$ та критерій оптимальності $I = -x_2(t_1)$. В цій задачі на правий кінець ніяких обмежень не накладено. Множина X_1 співпадає з усім фазовим простором R^n .

Задача 5. Мінімізація витрат палива.

Нехай об'єкт управління уявляє собою метеорологічну ракету, що стартує вертикально та характеризується трьома змінними стану: x_1 – висотою



положення ракети, x_2 – швидкістю польоту, x_3 – масою. Рух ракети в описується рівняннями:

$$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = \frac{1}{x_3} (c + x_2)U - \frac{D(x_1, x_2)}{x_3} - g(x_2); \dot{x}_3 = -U, \quad (1.37)$$

де U – витрати палива за секунду (управляючий вплив); c – коефіцієнт пропорційності, що визначає залежність тяги двигунів ракети від витрат палива; D – сила лобового опору, що залежить від швидкості та висоти польоту; g – прискорення вільного падіння, яке залежить від висоти. Початкові умови для ракети визначаються співвідношеннями $x_1(t_0) = 0$; $x_2(t_0) = 0$; $x_3(t_0) = m_0(t_0 = 0)$, де m_0 – початкова маса ракети. Задана також висота підйому ракети h . Треба визначити такий закон зміни тяги двигуна, тобто витрат палива $U(t)$, враховуючи обмеження $U(t) \leq U_m$, за якого кількість палива, затрачена на підйом на висоту h , буде найменшою. В даному випадку критерій оптимальності має вигляд:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt = \min u(t) \quad (1.38)$$

та досягається гранична умова $x_1(t_1) = h$ (де t_1 – невідома величина).

1.3.2. Задачі оптимального управління двигуном постійного струму

Рівняння двигуна постійного струму має вигляд:

$$J\ddot{\phi} = i_a k_\phi \Phi - M_o,$$

де J – момент інерції частини двигуна, що обертається; i_a – струм в якірній ланці; k_ϕ – конструктивна стала; Φ – магнітний потік; M_o – момент опору. Розділимо обидві частини рівняння на J . Використовуючи позначення $b = k_\phi \Phi / J$; $x_1 = \phi$; $x_2 = \dot{\phi}$; $u = i_a$; $u_o = \frac{M_o}{J}$, рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= bU - U_o \end{aligned}$$

чи в векторній формі:

$$\dot{X} = AX + BU + \tilde{q}, \quad (1.39)$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}; \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_o \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Для спрощення моделі об'єкта за управління приймається струм в якорній ланці. Але слід мати на увазі, що в дійсності управляючим впливом двигуна при управлінні з боку якорної ланки є напруга на якорі і до приведення моментів потрібно додати рівняння для напруги та струму якорної ланки. Тому приклади з моделлю (1.39), (1.40) є чисто ілюстративні.

Задача 6. Поворот двигуна на заданий кут за мінімальний час.

Задача оптимального управління формулюється таким чином: при заданих рівняннях об'єкту (1.39), (1.40), обмеженні на управління $|U| \leq U_m$ (сила струму в якорній ланці обмежується), крайових умовах:

$$X(t_0) = X^0, x_1(t_1) = x_1^1 \quad (1.41)$$

визначити управління, що мінімізує функціонал $I = t_1 - t_0$.

Задача 7. Поворот двигуна на заданий кут з зупинкою за мінімальний час.

Задача формулюється так, як і задача 6, але при інших крайових умовах:

$$X(t_0) = X^0; x_1(t_1) = x_1^1; x_2(t_1) = 0. \quad (1.42)$$

Задача 8. Повороту двигуна на заданий кут без зупинки за час T при мінімальних витратах енергії.

Витрати енергії пропорційні інтегралу від квадрату управління (сили струму). Оскільки константа перед функціоналом не впливає на вирішення варіаційної задачі за критерій оптимальності приймається інтеграл:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt,$$

де t_0 і t_1 фіксовані, $t_1 - t_0 = T$. Обмеження на управління не враховуємо. Крайові умови співпадають з умовою (1.41), якщо двигун після повороту на заданий кут непотрібно зупиняти; з умовою (1.42), якщо двигун після повороту на заданий кут потрібно зупинити.

1.4. Класифікація задач оптимального управління

Зараз існує кілька принципів класифікації таких задач. У розглянутих вище прикладах синтез оптимальних алгоритмів управління проводиться залежно від вибраних критеріїв. Задачі синтезу оптимальних систем можна розділити на два класи.

1. Синтез оптимального програмного управління (програматора) чи визначення оптимального управління $U^*(t)$ як функції часу (відповідні системи називають також оптимальними за режимом управління). Такій стратегії управління відповідає розімкнена система, що не має зворотних зв'язків. Реалізація таких систем дещо простіша, але при цьому зменшується точність.

2. Синтез оптимального регулятора чи визначення закону управління як функції фазових координат об'єкту управління $U^*(t)$, що забезпечує рух об'єкту управління по фазовій траєкторії, на якій реалізується мінімальний критерій оптимальності (відповідні системи називаються оптимальними за перехідним режимом). Таким системам відповідають замкнуті системи. Наявність зворотних зв'язків в таких системах компенсує вплив багатьох збурень, в тому числі і невимірних. Це підвищує точність систем, але їх синтез більш складний.

По виду обмежень розрізняють задачі оптимального управління класичного та некласичного типу.

У задачах класичного типу обмеження задаються у вигляді рівностей:

$$\phi_k(X, U, t) = 0, k = 1, m. \quad (1.43)$$

У задачах некласичного типу обмеження задаються нерівностями:

$$\phi_k(X, U, t) \leq 0, k = 1, m. \quad (1.44)$$

До класичного типу належать також ізопериметричні задачі:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+j}(X, U, t) dt = b_j, j = 1, l. \quad (1.45)$$

Додаткових змінних від ізопериметричних обмежень можна позбутися. Достатньо замість ізопериметричних обмежень (1.45) в умови задачі ввести такі рівняння та крайові умови:

$$x_{n+j} = f_{n+j}(X, U, t); x_{n+j}(t_0) = 0; x_{n+j}(t_1) = b; j = 1, j..$$

Формально задачі некласичного типу можна звести до задач класичного типу введенням додаткових змінних. Дійсно, обмеження (1.44) можна замінити обмеженнями типа рівностей:

$$\phi_k(X, U, t) + U_{r+k}^2 = 0, k = 1, m.$$

Задачі некласичного типу можуть також мати обмеження вигляду:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+s}(X, U, t) \leq C_s, s = 1, p. \quad (1.46)$$

Введенням додаткових змінних ці обмеження можна замінити співвідношеннями:

$$x_{n+s} = f_{n+s}(X, U, t), x_{n+s}(t_0) = 0; x_{n+s}(t_1) \leq c_s, s = 1, p.$$

Прикладами задач класичного типу є задачі 3, 4, 7, некласичного – задачі 1, 2, 6, 8.

За видом крайових умов розрізняють наступні класи задач.

1. З фіксованими (закріпленими) кінцями траєкторії, коли кожна з множин X_0 та X_1 містить одну точку ($X(t_0) = X^0, X(t_1) = X^1$ – задані точки).
2. З рухомим правим кінцем траєкторії (X_1 збігається з усім фазовим простором, тобто на правий кінець обмежень не накладено).

У розглянутих прикладах задачами з фіксованими кінцями є задачі 1, 7, а з рухомим правим кінцем – 2, 3, 6, з вільним правим кінцем – задача 4.

Залежно від часу початку та закінчення процесу розрізняють наступні типи задач.

1. З фіксованим часом управління, коли початковий t_0 та кінцевий t_1 моменти фіксовані.
2. З нефіксованим часом, коли один з моментів часу t_0 чи t_1 нефіксований.

За критерієм оптимальності розрізняють три типи задач.

1. У задачі Больца критерій має вигляд:

$$I = g_0[X(t_0), X(t_1), t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt.$$

2. Для задачі Лагранжа критерій

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt.$$

3. Задача Майера критерій задається як:

$$I = g_0[X(t_0), X(t_1), t_0, t_1].$$

Задача Майера для функціоналу $I = g_0[X(t_1), t_1]$ називається задачею термінального управління. Якщо функціонал має вид $I = (t_1 - t_0)$ – то задача на-

зивається задачею максимальної (оптимальної) швидкодії. Із наведених вище постановок задач задача 8 є задачею Лагранжа, решта задач – задачами Майера. Задачі 1, 2, 6 та 7 є задачами максимальної швидкодії, а задачі 3, 4 – термінального управління. Задачі Больца, Лагранжа та Майера еквівалентні в тому розумінні, що шляхом перетворення змінних від однієї задачі можна перейти до іншої.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення терміну «критерій оптимальності».
2. Охарактеризуйте проблему багатокритеріальності в оптимальних задачах.
3. Назвіть найбільш відомі критерії оптимальності.
4. Назвіть найбільш відомі типи оптимальних систем і дайте характеристику.
5. Перерахуйте типи обмежень при синтезі оптимальних управлінь.
6. Дайте загальну постановку задачі оптимального управління.
7. Наведіть приклади постановок задач оптимального управління.
8. Наведіть класифікацію оптимальних задач по виду обмежень.
9. Наведіть класифікацію оптимальних задач по виду критерія оптимальності.

Контрольні тести

1. Термін «оптимізація» означає:
 - a. досягнення екстремуму деякого функціонала;
 - b. раціональне керування;
 - c. досягнення кінцевого стану.
2. В теорії управління використовують такі критерії якості:
 - a. інтегральні;
 - b. алгебраїчні;
 - c. диференційні;
 - d. усі вищеозначені.
3. Термін «крайова задача» означає визначення числових значень:
 - a. повністю на початку управління;
 - b. повністю в кінці управління;
 - c. частково на початку і в кінці управління.
4. Термін «пряма оптимізація» означає:
 - a. оптимізація функціонала за наявності зв'язків;
 - b. оптимізація функціонала за відсутності зв'язків.
5. Вирішувати умовні задачі оптимізації можна методом:
 - a. класичного варіаційного числення;
 - b. принципом максимуму;
 - c. динамічним програмуванням;
 - d. будь-яким із вище перерахованих.
6. Система управління замкнена, якщо управління є функцією:
 - a. часу;
 - b. вихідних змінних об'єкту;
 - c. зовнішніх параметрів.
7. Термін «неголономний зв'язок» означає:
 - a. зв'язок у вигляді диференційних рівнянь;
 - b. зв'язок у вигляді алгебраїчних рівнянь;
 - c. зв'язок у вигляді інтегральних рівнянь.

РОЗДІЛ 2. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Задача синтезу оптимальної системи, точніше, задача визначення алгоритму управляючого пристрою цих систем, належить до задач варіаційного типу. Для їх вирішення найчастіше застосовуються наступні методи оптимізації:

1. класичне варіаційне числення;
2. динамічне програмування;
3. принцип максимуму Понтрягіна.

Останнім часом застосовуються також методи функціонального аналізу.

Класичне варіаційне числення доцільно застосовувати для розв'язування задач управління, в яких області зміни вектора стану $X \in \Omega(X)$ та управління $U \in \Omega(U)$ відкриті, тобто не включають обмежень, що має місце у разі малих відхилень X та U від їх ustalених значень.

Динамічне програмування доцільно використовувати для складних задач управління, що вимагають розрахунків на комп'ютерах.

Принцип максимуму застосовується у випадку, коли області $X \in \Omega(X)$ та $U \in \Omega(U)$ замкнені, а вектори X та U можуть належати границям цих областей.

2.1. Загальні положення

Пошуки шляхів розв'язування конкретних практичних екстремальних задач, що виникали в фізиці, геометрії, механіці, призвели до створення нового розділу математичного аналізу, який отримав назву варіаційного числення. Вперше варіаційна задача сформульована І.Бернуллі ще в 1696 р. Над теорією варіаційного числення працювали такі видатні математики як Г.Лейбніц, І.Ньютон, Г.Лопіталь. Загальні методи розв'язування задач варіаційного числення були розроблені ще у 18 столітті Ж.Лагранжем та Л.Ейлером.

2.1.1. *Поняття про варіації та їх властивості*

Методи розв'язування варіаційних задач схожі з методами дослідження функцій на максимум та мінімум. Тому коротко зупинимось на властивостях екстремумів функцій та функціоналів. Властивості екстремальних функцій

будуть необхідні також і при викладенні методів синтезу екстремального управління в розділі адаптивних систем.

Спочатку розглянемо деяку функцію $x=f(t)$. Кожному значенню аргументу t відповідає число x . Критерії оптимальності – це функціонали, які залежать від функцій $I[x(t)]$, тобто їх аргументами є деякі функції. Кожній функції $x(t)$ відповідає числове значення I .

Приростом Δt аргумента функції називається різниця $\Delta t=t_1-t_2$.

Приростом, чи варіацією δx , аргумента $x(t)$ функціоналу $I[x(t)]$ називається різниця двох функцій $\delta x=x_1(t)-x_2(t)$. Як бачимо, варіація δx обумовлена зміною функціональної залежності між x та t . Функція $x(t)$ неперервна, якщо малій зміні t відповідає мала зміна $x(t)$. Функціонал неперервний, якщо малій зміні $x(t)$ відповідає мала зміна $I[x(t)]$.

Виникає питання, які зміни функції $x(t)$, що є аргументом функціоналу $I[x(t)]$ вважаються малими, чи, що те ж саме, які криві $x_1(t)$ та $x_2(t)$ вважаються такими, що мало відрізняються або близькими. Функції $x_2(t)$ та $x_1(t)$ можна вважати близькими, якщо різниця $|x_2(t)-x_1(t)|$ мала для всіх значень t , для яких задаються функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$, тобто близькими вважаються криві близькі за ординатами. Такі криві називаються близькими за змістом близькості нульового порядку.

Однак при такому визначенні близькості кривих функціонали $I[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x, \dot{x}, t) dt$, що часто зустрічаються на практиці, є неперервними лише у особливих випадках. Тому близькими вважають ті криві, які близькі за ординатами та за напрямками дотичних у відповідних точках, тобто для близькості кривих малою повинна бути не тільки різниця $|x_2(t)-x_1(t)|$, а й різниця $|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)|$. Тоді криві $x_2(t)$ та $x_1(t)$ близькі в сенсі близькості першого порядку.

На рис. 2.1 зображені криві нульового порядку близькості (рис. 2.1, а) та першого порядку (рис. 2.1, б) відповідно. Якщо криві є близькими n -го порядку, то вони є близькими і меншого порядку.

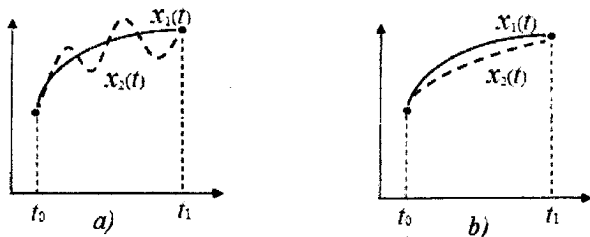


Рис. 2.1. Криві нульового та першого порядку близькості

Лінійними функціоналами зуться такі, для яких справедливі умови:

$$I[cx(t)] = cI[x(t)],$$

$$I[x_1(t) + x_2(t)] = I[x_1(t)] + I[x_2(t)].$$

Прикладом лінійного функціоналу є функціонал виду:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [r(t)x(t) + q(t)\dot{x}(t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} r(t)x(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} q(t)\dot{x}(t) dt.$$

Якщо приріст функції

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad (2.1)$$

то для функціоналу $I[x(t)]$ варіацію функції δx можна розглядати як приріст аргументу. Тоді приріст функціоналу за аналогією з (2.1) визначається виразом

$$\Delta I[x(t)] = I[x(t) + \delta x(t)] - I[x(t)]. \quad (2.2)$$

Лінійна частина приросту $\Delta I[x(t)]$ функціоналу стосовно δx зветься варіацією функціоналу та позначається δI . Варіація функціоналу δI аналогічна диференціалу функції δx .

2.1.2. Екстремуми функціоналів

Відомо, що якщо функція $x(t)$ приймає екстремальне значення у точці t_0 , то в цій точці $dx=0$. Тоді аналогічно, щоб функціонал мав екстремум його варіація повинна дорівнювати нулю, тобто $\delta I=0$. Це необхідна умова.

Поняття екстремуму функціоналу потребує уточнення. Говорячи про максимум чи мінімум, ми маємо на увазі найбільше чи найменше значення функціоналу стосовно його значень на близьких кривих, але близькість кривих можна розуміти по різному.

Якщо функціонал на деякій кривій $x_1(t)$ досягає екстремуму стосовно кривих, для яких різниця $|x_2(t)-x_1(t)|$ мала, тобто кривих нульового порядку близькості стосовно $x_1(t)$, то екстремум називають сильним.

Якщо ж на кривій $x_1(t)$ досягається екстремум стосовно більш вузького класу кривих, для яких мала не тільки різниця $|x_2(t)-x_1(t)|$, але й різниця $|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)|$, тобто має місце близькість першого порядку, то екстремум називають слабким.

Якщо на кривій $x_1(t)$ досягається сильний екстремум, то досягається і слабкий, бо сильний екстремум – це екстремум стосовно більш широкого класу кривих. Якщо ж на кривій $x_1(t)$ досягається лише слабкий екстремум, то сильний екстремум може бути і не досягнутий, тобто серед кривих близьких тільки по ординатам, але не близьким за дотичними, можуть бути такі, на яких значення функціоналу більше (у випадку мінімуму менше), ніж на кривій $x_1(t)$.

Це все стосується і функціоналів, що залежать від функцій одної змінної чи функцій кількох змінних. Для таких функціоналів варіації визначаються як головна лінійна частина приросту, для яких доводиться, що для функцій, на яких реалізується екстремум, варіація дорівнює нулю.

Слід зауважити, що при порівнянні значень функціоналів неблизьких функцій, обчислюється локальний (частковий) екстремум. За наявності кількох екстремумів, то найбільший (чи найменший) з них є абсолютним (глобальним).

Звідси витікає, що якщо необхідні деякі умови для реалізації слабого екстремуму, то вони безумовно необхідні для реалізації сильного і тим більше глобального екстремуму.

2.2. Задача з закріпленими кінцями та фіксованим часом

Якщо кінці закріплені і час фіксовано, то у класичному випадку задачу оптимального управління в загальному вигляді можна сформулювати як наступну задачу Лагранжа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(X, U, t), i = 1, n - \text{рівняння об'єкту;} \\ \phi_k(X, U, t) &= 0; k = 1, l - \text{класичні обмеження;} \end{aligned}$$

$x_i(t_0) = x_i^0; x_i(t_1) = x_i^1, i = 1, n$ – крайові умови;

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt \rightarrow \min \text{ критерій.}$$

Припустимо, що функції $f_i(X, U, t), i = 1, n$ та $\varphi_k(X, U, t), k = 1, l \in$ неперервними диференційованими за всіма своїми аргументами, управління $U(t)$ належить до класу кусково-неперервних функцій, а траєкторії $X(t)$ – класу кусково-гладких функцій.

Функція $U(t)$ називається кусково-неперервною на інтервалі $[t_0, t_1]$, якщо вона неперервна на $[t_0, t_1]$ за винятком скінченної кількості точок, де вона має розриви першого роду.

Функція $X(t)$ зветься кусково-гладкою на інтервалі $[t_0, t_1]$, якщо на $[t_0, t_1]$ вона неперервна, а її похідна кусково-неперервна.

Управління $U(t)$ з класу кусково-неперервних функцій називають допустимим управлінням, а траєкторію $X(t)$ з класу кусково-гладких функцій – допустимою траєкторією. Пару $(U(t), X(t))$ називають допустимою, якщо допустимими є $U(t)$ і $X(t)$.

2.2.1. Рівняння Ейлера

Було показано, що функціонали приймають екстремальні значення для деяких функцій. Як же серед множини функцій знайти ті, що дають екстремум функціоналу? Відповідь на це питання дає рівняння Ейлера, рішенням якого є *екстремаль*.

Розглянемо найпростішу задачу класичного варіаційного числення:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (2.3)$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1. \quad (2.4)$$

Для спрощення вважатимемо, що $x(t)$ є скалярною функцією і належить до класу $C^1[t_0, t_1]$ неперервних диференційованих функцій на інтервалі $[t_0, t_1]$. Екстремум шукаємо серед функцій вказаного класу, які задовольняють крайовим умовам. Такі функції називатимемо допустимими функціями чи допустимими точками (мається на увазі точка в функціональному просторі).

Припустимо, що екстремум досягається в допустимій точці $x^*(t)$. Тоді $x(t) = x^*(t) + \varepsilon \tilde{x}(t)$, де ε – досить мале число, буде допустимою, якщо $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ і задовольняються крайові умови

$$\tilde{x}(t_0) = 0, \tilde{x}(t_1) = 0. \quad (2.5)$$

Для кожного фіксованого $\tilde{x}(t)$ отримаємо функцію числового аргументу ε

$$\Phi(\varepsilon) = I(x^* + \varepsilon \tilde{x}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^* + \varepsilon \tilde{x}, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{\tilde{x}}, t) dt,$$

що досягає екстремуму при $\varepsilon = 0$. Тому, згідно теореми Ферма, похідна

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \int_{t_0}^{t_1} [f'_{0x}(x^*, \dot{x}^*, t) \tilde{x} + f'_{0\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t) \dot{\tilde{x}}] dt = 0.$$

Інтегруючи другий доданок за частинами та враховуючи крайові умови (2.5) отримаємо:

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \int_{t_0}^{t_1} [f'_{0x}(x^*, \dot{x}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t)] \tilde{x} dt = 0. \quad (2.6)$$

Згідно основній лемі варіаційного числення (лема Лагранжа: інтеграл дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнює нулю його підінтегральна функція), остання рівність можлива за довільної $\tilde{x}(t) \in C^1([t_0, t_1])$, $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(t_1) = 0$, якщо

$$f'_{0x}(x^*, \dot{x}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t) = 0. \quad (2.7)$$

Таким чином, якщо функція $x^*(t)$ надає екстремум функціоналу (2.3), то вона задовольняє рівнянню (2.7), яке називається рівнянням Ейлера і його можна переписати у вигляді

$$F_x - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}} = 0, \quad (2.8)$$

де $F_x = f'_{0x}(x^*, \dot{x}^*, t) = \frac{\partial f_0(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x}$; $F_{\dot{x}} = f'_{0\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t) = \frac{\partial f_0(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}}$.

Допустима функція, що задовольняє рівнянню Ейлера, зветься екстремаллю задачі (2.3), (2.4). Отже, розв'язки задачі (2.3), (2.4) є екстремалами, протилежне у загальному випадку невірно.

Рівняння Ейлера є необхідною умовою екстремуму функціоналу. Для визначення типу екстремуму (мінімум чи максимум) необхідні додаткові умови. Наведемо без доведення умову Лежандра: для того, щоб функціонал (2.3) досягав на екстремалі мінімуму (максимуму), необхідно, щоб уздовж всієї траєкторії задовольнялась умова

$$\frac{\partial^2 f_0(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f_0(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^2} < 0 \right). \quad (2.9)$$

Всі викладки залишаються справедливими і у випадку, коли $x(t)$ – векторна функція. У цьому випадку рівняння (2.7) також є векторним. Покажемо, як з рівності (2.6) отримати векторне рівняння Ейлера (2.7).

За визначенням, похідна від скалярної функції $f_0(z)$ за вектором аргументу $z = (z_1, \dots, z_r)^T$ – є вектор-рядок $f_{0z} = (z_{0z1}, \dots, z_{0zr})$. Перемноживши під інтегралом (2.6) вектор-рядок на вектор-стовпець, отримаємо

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^r [f'_{0x_i} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}_i}] \tilde{x}_i dt = 0.$$

Ця рівність повинна виконуватись за довільною $\tilde{x}(t) \in C^1[t_0, t_1]$, зокрема коли всі її компоненти, крім одної, рівні нулю: $\tilde{x}_j \neq 0$ та $\tilde{x}_i = 0$ для всіх $i \neq j$. Оскільки j приймає всі значення від 1 до r , з останньої рівності одержимо систему рівнянь

$$\int_{t_0}^{t_1} (f'_{0x_j} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}_j}) \tilde{x}_j dt = 0, \quad j = 1, r,$$

звідки згідно леми Лагранжа знайдемо

$$f'_{0x_j} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}_j} = 0, \quad j = 1, r. \quad (2.10)$$

Ця система є скалярною формою запису векторного рівняння (2.7), якщо розв'язувати систему диференційних рівнянь (2.10), отримаємо систему функцій $x_i(t)$, що визначають просторову криву – екстремаль.

Вид екстремуму визначається за допомогою умов Лежандра. Щоб прийнятий функціонал набував мінімального значення на екстремалі, необхідно, щоб усі головні діагональні мінори матриці $Q_{\dot{x}\dot{x}}$ задовольняли умову $\delta > 0$:

$$Q_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_2} & \dots & F_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ F_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_2} & \dots & F_{\dot{x}_2\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_n\dot{x}_2} & \dots & F_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

$$\Delta_1 = F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} \geq 0; \Delta_2 = F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} F_{\dot{x}_2\dot{x}_2} - F_{\dot{x}_2\dot{x}_1} F_{\dot{x}_1\dot{x}_2} \geq 0 \text{ і т.д.}$$

Для пошуку максимуму знаки нерівностей змінюються на протилежні.

Приклад 2.1.

Для функціоналу

$$I = \int [12xt + \dot{x}^2] dt$$

визначити екстремаль, яка проходить через точки

$$x(t_0 = 0) = 0; x(t_1 = 0) = 0. \quad (1)$$

Визначимо

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = f'_{0x} = 12t; \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} = f'_{0\dot{x}} = 2\dot{x}; \frac{\partial}{\partial x} f'_{0\dot{x}} = 2\ddot{x}.$$

Рівняння Ейлера має вигляд:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 6t = 0.$$

Звідки

$$x(t) = t^3 + c_1 t + c_2.$$

Для визначення c_1 та c_2 використовуємо умови (1):

$$\text{Для } t_0 = 0 \quad c_2 = 0;$$

$$\text{Для } t_1 = 2 \quad c_1 = 0;$$

Тоді екстремаль $x(t) = t^3$ і за умовою Лежандра функція

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} [12xt + \dot{x}^2] = 2 > 0$$

є екстремаллю, що задовольняє умови мінімуму.

2.2.2. Рівняння Ейлера-Пуассона

Функціонал може залежати не тільки від функції та її першої похідної, але і від похідних вищих порядків

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, t) dt, \quad (2.12)$$

де припускається, що f_0 – неперервна і $(n+2)$ разів диференційована за всіма аргументами. Як допустимі використовуються функції $x(t)$, які диференційовані $2n$ разів.

За допомогою міркувань, аналогічних тим, які використовувались при виведенні рівнянь Ейлера можна отримати рівнянь

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial f_0}{\partial \dddot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f_0}{\partial x^{(n)}} = 0, \quad (2.13)$$

яке називається рівнянням Ейлера-Пуассона. В загальному вигляді воно є нелінійним диференціальним рівням порядку $2n$ постійних інтегрування (c_1, c_2, \dots, c_{2n}), які обчислюються з $2n$ крайових умов.

Умова Лежандра для визначення типу екстремуму, якого досягає функціонал на екстремалі $x(t)$, виражаються нерівностями:

$$\begin{aligned} \text{для мінімуму } \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} &> 0; \\ \text{для максимуму } \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} &< 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Приклад 2.2.

Визначити екстремаль для функціоналу

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2) dt,$$

що задовольняє наступним крайовим умовам:

$$x(t_0 = 0) = 0; \dot{x}(t_0 = 0) = 0; x(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0; \dot{x}(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Складаємо рівняння Ейлера-Пуассона, для чого визначимо

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -2x; \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} = 0; \frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}} = 2\dot{x}; \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}} = 2x,$$

Загальним рішенням являється

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

Використовуючи крайові умови, одержимо $c_1 = c_2 = c_4 = 0, c_3 = 1$.

Тоді екстремаль $x = \text{const}$.

Умова Лежандра

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} = \frac{\partial^2}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} [\dot{x}^2] = 2 > 0.$$

Отже, побудована екстремаль забезпечує заданому функціоналу мінімум.

2.3. Рівняння Ейлера-Лагранжа (задача на умовний екстремум)

Функціонал, що мінімізується, як правило, залежить від кількох змінних, які пов'язані між собою деякими співвідношеннями (умовами), які повинні виконуватись у процесі розв'язування.

Такі задачі називають задачами на умовний екстремум. Ці умови (зв'язки) можуть бути:

а) кінцевими, неголономними у вигляді алгебраїчних (кінцевих) рівностей:

$$\phi_k(X, t) = 0; k = 1, l; \quad (2.15)$$

б) диференціальними, голономними:

$$\phi_k(X, \dot{X}, t) = 0; k = 1, l; \quad (2.16)$$

в) інтегральними

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi_k(X, \dot{X}, t) dt = b_k; k = 1, l. \quad (2.17)$$

де X – n -вимірний вектор.

У всіх випадках кількість зв'язків менше кількості невідомих, тобто $k < n$. Відповідні задачі називають ще геодезичними, Лагранжа та ізопараметричними. Задача Лагранжа (з диференціальними зв'язками) є найбільш загальною, оскільки всі інші це часткові її випадки).

Розглянемо постановку задачі Лагранжа:

$$f_i(X, \dot{X}, t) = 0; i = 1, n; \quad (2.18)$$

$$\phi_k(X, T) = 0; k = 1, l; \quad (2.19)$$

$$X(t_0) = X^0; X(t_1) = X^1; \quad (2.20)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, \dot{X}, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (2.21)$$

де X – n -вимірний вектор; f_i ($i = 0, n$), ϕ_k ($k = 1, l$) – диференційовані за своїми аргументам функції. Ця задача відрізняється від найпростішої варіаційної задачі, розглянутої при виведенні рівняння Ейлера тим, що на аргументи функціоналу крім крайових умов накладаються додаткові обмеження (зв'язки (2.18) та (2.19)) і вони вже не є незалежними.

Для отримання необхідних умов екстремуму скористаємось прийомом Лагранжа.

Складемо функцію

$$L(X, \dot{X}, \Psi, \Lambda, t) = \sum_{i=1, n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k + \psi_0 f_0. \quad (2.22)$$

де $\psi_i (i=1, n)$ – функції часу; $\lambda_k (k=1, l)$ та ψ_0 – константи. Ця функція називається функцією Лагранжа, а функції $\psi_i (i=1, n)$ та числа $\lambda_k (k=1, l)$ і ψ_0 – множниками Лагранжа. Прийом Лагранжа полягає в тому, що задача (2.18)+(2.21) перетворюється в найпростішу задачу варіаційного числення, яка розв'язується як задача пошуку екстремумів функції без обмежень:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(X, \dot{X}, \Psi, \Lambda, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (2.23)$$

$$X(t_0) = X^0; X(t_1) = X^1. \quad (2.24)$$

Таким чином, задача на умовний екстремум зведена до задачі на безумовний екстремум. Очевидно, остання задача має сенс, якщо не всі множники Лагранжа одночасно дорівнюють нулю. Під рівністю нулю множників $\psi_i (i=1, n)$, що є функціями, розуміють їх тотожне обернення в нуль. Крім того, якщо $\psi_0 = 0$, то функціонал I не залежить від вихідного функціоналу. Цей випадком називається особливим. Найважливішим є неособливий випадок, коли $\psi_0 \neq 0$. В перетвореній функції роль незалежних аргументів відіграє вектор $y = (X, \Psi, \Lambda)$, а роль підінтегральної функції – функція Лагранжа. Враховуючи, що функція Лагранжа не залежить від похідних $\dot{\phi}$ та $\dot{\lambda}$, рівняння Ейлера приймають вигляд [див. (2.10)]:

$$L'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0, i = 1, n; \quad (2.25)$$

$$L'_{\psi_j} = 0; j = 1, n; L'_{\lambda_k} = 0; k = 1, l. \quad (2.26)$$

Рівняння (2.26) співпадають з рівняннями (2.18), (2.19), тому досить обмежитись рівняннями (2.25) та розв'язати їх разом з рівняннями (2.18) і (2.19) за крайових умов (2.20). Крайові умови не повинні суперечити умовам зв'язків. Рівняння (2.25) називаються також рівняннями Ейлера-Лагранжа.

Тепер повернемося до задачі оптимального управління. Наведемо її, дещо змінивши запис рівнянь об'єкту:

$$f_i(x, U, t) - \dot{x}_i = 0, i = 1, n; \quad (2.27)$$

$$\phi_k(X, U, t) = 0; k = 1, l; \quad (2.28)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0; x_i(t_1) = x_i^1; i = 1, n; \quad (2.29)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt \rightarrow \min. \quad (2.30)$$

Побудуємо функцію Лагранжа

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k \quad (2.31)$$

В ній роль аргумента X відіграє вектор (X, U) , і так як в неї не входить похідна \dot{U} , то рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд:

$$L'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0, i = 1, n; \quad L'_{u_j} = 0; j = 1, m. \quad (2.32)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа записується також, використовуючи функцію

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k, \quad (2.32)$$

яка називається функцією Гамільтона чи гамільтоніаном. Тоді

$$L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i. \quad (2.34)$$

Тому з (2.32) отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1, n; \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U_j} = 0, j = 1, m. \quad (2.36)$$

Рівняння (2.36) називається умовою стаціонарності. Ця умова показує, що на екстремалі гамільтоніан, що розглядається при кожному фіксованому $t \in [t_0, t_1]$ як функція управління, задовольняє необхідній умові екстремуму. Як побачимо далі, має місце, що дійсно на оптимальній траєкторії гамільтоніан як функція U досягає максимуму (чи точності верхньої грані) при оптимальному управлінні.

Сформулюємо основний результат.

Правило множників Лагранжа. Якщо допустима пара $(U(t), X(t))$ є розв'язком задачі оптимального управління (2.27)+(2.30), то знайдуться такі одночасно ненульові множники Лагранжа, що ця пара задовольняє рівнянням Ейлера-Лагранжа (2.35) і (2.36).

Відповідно з цим правилом, щоб знайти оптимальне управління та оптимальну траєкторію потрібно розв'язати спільно рівняння (2.27), (2.28), (2.35) і (2.36) за крайових умов (2.29). Рівняння Ейлера-Лагранжа отримаємо припускаючи, що управління $U(t)$ є неперервною функцією, а траєкторія $X(t)$ – гладкою на інтервалі $[t_0, t_1]$. Правило множників Лагранжа залишається справедливим і в тому випадку, коли $U(t)$ належить класу кусково-неперервних функцій, а $X(t)$ – класу кусково-гладких функцій. Тільки якщо оптимальне управління $U(t)$ має розриви першого роду, в будь-яких точках (ці точки називаються кутовими), то управління і відповідна йому траєкторія $X(t)$ повинна задовольняти вказаним вище рівнянням лише в точках неперервності управління. В кутових точках повинні виконуватись так звані умови Вейерштрасса-Ердмана

$$\psi^- = \psi^+; H^- = H^+, \quad (2.37)$$

де індекси «-» і «+» означають лівий та правий ліміти відповідних функцій.

Множники Лагранжа визначаються з точністю до постійного множника. Вони входять в рівняння Ейлера-Лагранжа лінійно та однорідно, і рівняння не змінюються, якщо всі множники помножити на одне і теж число. Тому один із постійних ненульових множників Лагранжа можна прирівняти будь-якому заданому числу, що відрізняється від нуля. Далі, якщо не буде вказано інше, будемо вважати неособливий випадок ($\psi_0 \neq 0$) і прийматимемо $\psi_0 = -1$.

Для визначення $(2n+m+l)$ невідомих: x_i , $i=1, n$; $\psi_i, i=1, n$; $U_j, j=1, m$; $\lambda_k, k=1, l$ маємо стільки ж рівнянь, серед яких є $2n$ диференціальних рівнянь, при розв'язанні яких з'являється $2n$ невідомих (сталих інтегрування). Ці невідомі можна знайти з крайових умов (2.29), які містять $2n$ співвідношень. Таким чином, розв'язання вихідної варіаційної задачі зводилося до розв'язання крайової задачі Коші.

Ще раз підкреслимо, що рівняння Ейлера-Лагранжа є тільки необхідною умовою, тобто будь-який розв'язок початкової задачі являється екстремаллю, але не будь-яка екстремаль, що задовольняє граничним (крайовим) умовам, являється розв'язком. Але якщо розв'язок задачі існує і екстремаль, що задовольняє граничним умовам, єдина, то ця екстремаль і є розв'язком.

Приклад 2.3.

Розглянемо задачу повороту вала двигуна на заданий кут з зупинкою за мінімальних витрат енергії:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \dot{x}_2 = U, \\ x_1(t_0 = 0) &= x_2(t_0 = 0) = 0; \\ x_1(t_1 = 1) &= 1; x_2(t_1 = 1) = 0; \end{aligned}$$

$$I = \int_0^1 U^2 dt \rightarrow \min.$$

Обмеження на управління не враховується. Для спрощення приймаємо $U_c = 0$. Складаємо гамільтоніан:

$$H = -U^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 U.$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа та його розв'язання мають вигляд

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \frac{\partial H}{\partial U} = -2U + \psi_2 = 0.$$

$$\psi_1 = c_1; \psi_2 = -c_1 t + c_2; U = \frac{\psi_2}{2} = \frac{(-c_1 t + c_2)}{2}.$$

Підставляючи отриманий вираз для управління в рівняння об'єкта і розв'язавши їх отримаємо:

$$x_2 = -\frac{c_1 t^2}{4} + \frac{c_2 t}{2} + c_3; x_1 = -\frac{c_1 t^3}{12} + c_2 \frac{t^2}{4} + c_3 t + c_4.$$

Використовуючи крайові умови, отримаємо:

$$x_2(t_0 = 0) = c_3 = 0; x_1(t_0 = 0) = c_4 = 0; c_1 = 24; c_2 = 12.$$

Тому для оптимальних управління та фазової траєкторії маємо:

$$U^*(t) = -12t + 6; x_1^*(t) = -2t^3 + 3t^2; x_2^*(t) = -6t^2 + 6t.$$

2.4. Задача з рухомими кінцями та фіксованим часом

Якщо кінці рухомі, то в класичному випадку задача управління відрізняється від задачі (2.18) – (2.21) тим, що змінюються крайові умови і критерій оптимальності може мати будь який з вказаних при класифікації видів, тобто в цьому випадку задача оптимального управління може бути задачею Лагранжа, Больца, Майера. Якщо кінці закріплені і час фіксовано, то задача оптимального управління може бути тільки задачею Лагранжа.

Одержимо необхідні умови екстремуму. Почнемо з найпростішої варіаційної задачі з рухомими кінцями та фіксованим часом.

$$I = g_0[x(t_0), x(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow \text{extr} \quad (2.38)$$

Функції g_0, f_0 – неперервні та диференційовані за всіма своїми аргументами. Порядок виведення необхідних умов такий же як і у випадку задачі з фіксованими кінцями. Деякі особливості обумовлені тим, що граничні точки

рухомі і їх також необхідно варіювати. Знову всі викладки будемо виконувати припускаючи, що $x(t)$ належить до класу гладких функцій: $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$.

Нехай екстремум досягається в точці $x^*(t)$. При довільній фіксованій точці $x(t) = x^*(t) + \varepsilon \tilde{x}(t)$ функціонал:

$$I = g_0[\dot{x}^*(t_0) + \varepsilon \dot{\tilde{x}}(t_0), x^*(t_1) + \varepsilon \tilde{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^* + \varepsilon \tilde{x}, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{\tilde{x}}, t) dt = \Phi(\varepsilon) \quad (2.39)$$

є функцією чисельного аргументу ε . Ця функція досягає екстремуму при $\varepsilon = 0$, тому згідно теореми Ферма:

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \frac{\partial g_0}{\partial x(t_0)} \tilde{x}(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial x(t_1)} \tilde{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (f'_{0x} \tilde{x} - f'_{0\dot{x}} \dot{\tilde{x}}) dt = 0 \quad (2.39)$$

Інтегруючи за частинами другий доданок під інтегралом маємо:

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \frac{\partial g_0}{\partial x(t_0)} \tilde{x}(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial x(t_1)} \tilde{x}(t_1) + f'_{0\dot{x}} \tilde{x} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (f'_{0x} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}}) \tilde{x} dt = 0. \quad (2.40)$$

Функція $x^*(t)$ повинна доставляти екстремум функціоналу I і при фіксованих граничних точках $x(t_0) = x^*(t_0)$ та $x(t_1) = x^*(t_1)$, тому вона повинна задовольняти рівнянню Ейлера

$$f'_{0x} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{x}} = 0.$$

Враховуючи це рівняння маємо:

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \left(\frac{\partial g_0}{\partial x(t_0)} - f'_{0\dot{x}} \Big|_{t=t_0} \right) \tilde{x}(t_0) + \left(\frac{\partial g_0}{\partial x(t_1)} + f'_{0\dot{x}} \Big|_{t=t_1} \right) \tilde{x}(t_1) = 0 \quad (2.41)$$

В силу довільності та незалежності $\tilde{x}(t_0)$ та $\tilde{x}(t_1)$ з останньої рівності отримаємо співвідношення

$$f'_{0\dot{x}} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial x(t_0)}; f'_{0\dot{x}} \Big|_{t=t_1} = -\frac{\partial g_0}{\partial x(t_1)}, \quad (2.42)$$

які називаються умовами трансверсальності.

Якщо $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор, то умови трансверсальності в скалярній формі приймають вигляд:

$$f'_{0\dot{x}_i} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial x_i(t_0)}; f'_{0\dot{x}_i} \Big|_{t=t_1} = -\frac{\partial g_0}{\partial x_i(t_1)}; i = 1, n. \quad (2.43)$$

Рівняння Ейлера в скалярній формі були приведені раніше (див. (2.10)).

Таким чином, для розв'язання варіаційної задачі з рухомими кінцями, крім рівнянь Ейлера повинні задовольнятися умови трансверсальності.

Тепер отримаємо необхідні умови оптимальності для задачі оптимального управління:

$$\dot{x}_i = f_i(X, U, t), i = 1, n; \quad (2.44)$$

$$\phi_k(X, U, t) = 0, k = 1, l; \quad (2.45)$$

$$g_j[X(t_0), x(t_1)] = 0; j = 1, q < 2n; \quad (2.46)$$

$$I = g_0[X(t_0), (t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt \rightarrow \min. \quad (2.47)$$

Припустимо, що граничні умови (2.46) незалежні, функції $g_j[X(t_0), x(t_1)]; j = 1, q$ – неперервні та диференційовані за всіма аргументами. На решту функцій накладені також вимоги, як і у випадку задачі з фіксованими кінцями.

Використовуючи прийом Лагранжа, можна звести цю задачу до найпростішої задачі Больца:

$$I = G[X(t_0), X(t_1), \nu] + \int_{t_0}^{t_1} L(X(t), \dot{X}(t), U(t), \lambda) dt \rightarrow \min \quad (2.48)$$

$$\text{де } G = \sum_{i=0}^q v_i g_i; \nu_0 = \psi_0; L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \psi_0 f_0 + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i. \quad (2.49)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі співпадає з рівняннями (2.32) чи (2.35), (2.36).

Враховуючи рівності

$$-\psi_i = L'_{\dot{x}_i}, i = 1, n, \quad (2.50)$$

умови трансверсальності приймають вигляд

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_1)}; i = 1, n. \quad (2.51)$$

Окремі координати граничних точок можуть бути фіксовані. Співвідношення, що визначають ці координати, в вираз для G не входять. Зокрема, якщо початкова точка фіксована, тобто фіксовані всі координати точки $X(t_0)$, то умови трансверсальності (2.51) приймають вигляд:

$$\psi_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_1)}; i = 1, n. \quad (2.52)$$

Якщо частина координат точки $X(t_1)$ також фіксована, то в останній умові і пробігає тільки значення індексів нефіксованих координат.

Правило множників Лагранжа для задачі з рухомими кінцями і фіксованим часом.

Якщо допустима пара $(U(t), X(t))$ є розв'язком задачі (2.44)+(2.47), то існують такі множники Лагранжа, які одночасно не дорівнюють нулеві, що ця пара задовольняє рівнянням Ейлера-Лагранжа (2.35), (2.36) та умовам трансверсальності (2.51).

Якщо управління має розрив неперервності першого роду, то розв'язок $(U(t), X(t))$ повинен задовольняти рівнянням Ейлера-Лагранжа в точках неперервного управління. В кутових точках (в точках розриву управління) повинні виконуватись умови Вейерштрасса-Ердмана (2.37).

Таким чином, щоб отримати розв'язок (2.44)+(2.47) потрібно розв'язати рівняння Ейлера-Лагранжа (2.35), (2.36) за крайових умов (2.46) та умов трансверсальності (2.51).

Приклад 2.4.

Розглянемо задачу повороту вала двигуна на заданий кут без зупинки за мінімальних витрат енергії:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \dot{x}_2 = u \\ x_1(t_0 = 0) &= x_2(t_0 = 0) = 0; x_1(t_1 = 1) = 1 \\ I &= \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Ця задача відрізняється від задачі, розглянутої в прикладі 2.3, тільки тим, що правий кінець не закріплено: координата $x_2(1)$ не фіксована. Тому, рівняння Ейлера-Лагранжа та їх розв'язок отримаємо таким ж, що і в прикладі 2.3.

$$\psi_1 = c_1; \psi_2 = -c_1 t + c_2; u = \psi_2 / 2 = (-c_1 t + c_2) / 2.$$

Функція $G=0$ і умова трансверсальності приймає вигляд:

$$\psi_2(1) = \frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = 0.$$

Враховуючи (4), маємо $c_2 = c_1$. Тоді маємо

$$\psi_2 = c_1(1-t), u = c_1 \frac{1-t}{2}.$$

Підставляючи отриманий вираз для управління в рівняння об'єкту і розв'язавши їх при заданих крайових умовах, отримаємо:

$$\begin{aligned} x_2(t_0=0) &= 0 = c_3; x_1(t_0=0) = 0 = c_4; c_1 = c_2 = 6. \\ u^*(t) &= 3(1-t); x_1^*(t) = -t^3/2 + 3t^2/2; x_2^*(t) = -3t^2/2 + 3t. \end{aligned}$$

2.5. Задача з нефіксованим часом та рухомими кінцями

В умовах задачі з нефіксованим часом на відміну від задачі (2.44)÷(2.47) з фіксованим часом можуть явно входити початковий та кінцевий моменти часу. Задача оптимального управління в цьому випадку формулюється таким чином

$$\dot{x}_i = f_i(X, U, t), i = 1, n; \quad (2.53)$$

$$\phi_k(X, U, t) = 0, k = 1, l; \quad (2.54)$$

$$g_j[X(t_0), X(t_1), t_0, t_1] = 0; j = 1, q \leq 2n; \quad (2.55)$$

$$I = g_0[X(t_0), X(t_1), t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt \rightarrow \min; \quad (2.56)$$

Якщо допустима пара $(U^*(t), X^*(t))$ при $t \in [t_0^*, t_1^*]$ є розв'язком задачі (2.53)÷(2.56) то вона буде розв'язком цієї ж задачі і за фіксованого часу: $t_0 = t_0^*, t_1 = t_1^*$. Тому розв'язок задачі (2.53)÷(2.56) повинен задовольняти рівнянням Ейлера-Лагранжа та умовам трансверсальності, причому умови трансверсальності доповнюються співвідношеннями, обумовленими варіацією початкового і кінцевого моментів часу, і приймають вигляд:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_1)}; i = 1, n. \quad (2.57)$$

$$H \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; H \Big|_{t=t_1} = -\frac{\partial G}{\partial t_1}. \quad (2.58)$$

Рівняння (2.57) співпадають з рівняннями (2.51). Додатковим є співвідношення (2.58). Їх наведеним вище елементарним способом отримати не вдається.

Задачі з рухомими кінцями та нефіксованим часом являються найбільш загальними. З них як часткові випадки одержимо задачі з фіксованим часом і закріпленими чи нерухомими кінцями.

Правило множників Лагранжа формулюється таким же чином, як і у випадку з фіксованим часом. Наведемо його в дещо іншому, ніж вище формулюванні.

Правило множників Лагранжа для задачі з рухомими кінцями і нефіксованим часом. Для того, щоб допустима пара $(U(t), X(t))$ була розв'язком задачі (2.53)÷(2.56), необхідно, щоб існували такі множники Лагранжа, які од-

ночасно не дорівнюють нулеві, що ця пара задовольняє рівнянням Ейлера-Лагранжа (2.35), (2.36) у всіх точках неперервності управління і умовам трансверсальності (2.57), (2.58). В точках розриву управління (якщо такі існують) виконується умова Вейерштраса-Ердмана (2.37).

Приклад 2.5.

Задано рівняння об'єкта

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u;$$

ізопериметричне обмеження

$$\int_0^1 U^2 dt = b,$$

крайові умови $x_1(t_0 = 0) = x_2(t_0 = 0) = 0; x_1(t_1) = d; x_2(t_1) = 0$

та критерій оптимальності

$$I = t_1 \rightarrow \min.$$

Момент часу t_1 не фіксовано і потрібно визначити оптимальне за швидкодією управління.

Перетворимо ізопериметричне обмеження:

$$\int_0^1 U^2 dt = x_3(t);$$

$$\dot{x}_3 = u^2; x_3(0) = 0; x_3(t_1) = b.$$

Функція $G = -t_1$ і умова трансверсальності залишиться таким чином [див. (2.58)]:

$$H \Big|_{t=t_1} = -\frac{\partial G}{\partial t_1} = 1.$$

Гамільтоніан і рівняння Ейлера-Лагранжа мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2 \\ \psi_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \psi_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \psi_2 + 2\psi_3 u = 0. \end{aligned}$$

З останніх рівнянь маємо:

$$\psi_1 = c_1; \psi_2 = -c_1 t + c_2; \psi_3 = c_3.$$

$$u = \frac{(c_1 t - c_2)}{2c_3} = c_4 t - c_5,$$

де $c_4 = c_1/2c_3$; $c_5 = c_2/2c_3$.

Підставивши цей вираз для управління в вихідні рівняння і розв'язавши їх з врахуванням крайових умов, отримаємо

$$x_2 = \frac{1}{2} c_4 t^2 - c_5 t; c_4 = \frac{2c_3}{t_1} \quad (\text{з умови } x_2(t_1) = 0),$$

$$x_1 = \frac{1}{6} c_4 t^3 - \frac{c_5}{2} t^2; c_5 = -\frac{6d}{t_1^2}; c_4 = -\frac{12d}{t_1^3} \quad (\text{з умови } x_1(t_1) = d),$$

$$x_3 = \frac{1}{3} c_4^2 t^3 - c_4 c_5 t; t_1 = \sqrt[3]{12 \frac{d^2}{b}} \quad (\text{з умови } x_3(t_1) = b).$$

Таким чином, правилу множників Лагранжа задовольняє управління

$$U^*(t) = \frac{12d}{t_1^3} \left(\frac{t_1}{2} - t \right); t_1^* = \sqrt[3]{\frac{12d^2}{b}}.$$

Тут, як і в прикладах 2.3 і 2.4, припускамо, що розв'язок задачі існує, тому єдине управління, що задовольняє правилу множників Лагранжа, буде оптимальним. В даному прикладі умови трансверсальності при визначенні оптимального управління не використовувались. Вони потрібні для обчислення множників Лагранжа.

2.6. Прямі методи варіаційного числення

Для більшості практичних задач рівняння Ейлера-Лагранжа розв'язати аналітично неможливо, тому доводиться використовувати наближені методи, зокрема прямі. До прямих належать методи Ейлера, Рітца, Канторовича. Екстремальна задача розв'язується для функції скінченної кількості змінних, а потім на основі граничного переходу для змінних визначається точний розв'язок варіаційної задачі. На жаль, для практичних задач виконати граничний перехід складно.

Розглянемо найбільш поширений метод Рітца. Нехай для визначеності мінімізується функціонал в формі:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (2.59)$$

при крайових умовах

$$x(t_0) = x^0; x(t_1) = x^1. \quad (2.60)$$

Якщо точний розв'язок рівняння Ейлера, яке відповідає цій функції, знайти не вдається, обчислимо наближений. У цьому разі значення функціоналу $I[x(t)]$ аналізується не на довільно допустимих кривих даної варіаційної задачі, а лише на всіх можливих лінійних комбінаціях

$$x(t) \approx x_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(t) + P_0(t), \quad (2.61)$$

де α_i – невідомі сталі; $P_i(t)$, $P_0(t)$ – відомі лінійно незалежні координатні функції, які складені з n перших функцій деякої вибраної послідовності

$$P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t), \dots \quad (2.62)$$

Щоб функція $x_n(t)$ задовольняла граничним умовам за будь-яких α_i , $i = 1, n$, координатні функції повинні бути обмежені (граничним умовам)

$$P_i(t_0) = P_i(t_1) = 0; i = 1, n; \quad (2.63)$$

$$P_0(t_0) = x(t_0); P_0(t_1) = x(t_1). \quad (2.64)$$

Вдалий вибір послідовності координатних функцій $P_0(t)$, $P_i(t)$ та величини n суттєво впливають на успішне застосування методу. Однак універсальних рекомендацій їх вибору немає. Підставляючи (2.61) в (2.59), отримаємо функцію $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ невідомих параметрів α_i , $i=1, n$. Параметри слід підібрати так, щоб функція $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ досягала *min*. Для цього розв'язуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\frac{\partial I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_j} = 0; j = 1, n \quad (2.65)$$

Розв'язок системи (2.65), як правило, досить трудомістка процедура, тому для пошуку параметрів α_j , $j=1, n$, що мінімізують $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, використовують чисельні методи. В багатьох випадках при $n \rightarrow \infty$ $I[x_n(t)]$ наближається до мінімального значення функціоналу I , тобто до $I[x(t)]$. При цьому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$. Такі умови, зокрема, виконуються для функціоналу виду

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [a(t)\dot{x}^2(t) + b(t)x^2(t) + 2c(t)x(t)]dt, \quad (2.66)$$

де $a(t) > 0$; $b(t) \geq 0$ і $c(t)$ – відомі неперервні функції на інтервалі $[t_0, t_1]$.

На практиці часто достатньо в (2.61) обмежитись 2÷3 членами суми, щоб отримати прийнятне наближення.

Приклад 2.6.

Потрібно мінімізувати функціонал

$$I = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2tx)dt \quad (1)$$

методом Рітца при граничних умовах:

$$x(t_0=0) = x(t_1=1) = 0.$$

Виберемо координатні функції у вигляді

$$P_0(t) = 0; P_1(t) = t^2 - t; P_2(t) = t^3 - t^2; \dots; P_n(t) = t^{n+1} - t^n$$

$$P_i(t_0=0) = P_i(t_1=1) = 0.$$

Обмеживши розклад величиною $n=2$ одержимо:

$$x_2(t) = \alpha_1(t^2 - t) + \alpha_2(t^3 - t^2)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_1(2t - 1) + \alpha_2(3t^2 - 2t). \quad (2)$$

Підставляємо в (1) і отримаємо

$$I[x_2(t)] = I(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{11\alpha_1^2}{30} + \frac{11\alpha_1\alpha_2}{30} + \frac{\alpha_2}{7} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\alpha_2}{10}.$$

З умови мінімуму функції $I(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_1} = 0 \text{ та } \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{15} + \frac{1\alpha_2}{30} = \frac{1}{6} \text{ та } \frac{11\alpha_1}{30} + \frac{2\alpha_2}{7} = \frac{1}{10}$$

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо

$$\alpha_1 = 69/473; \alpha_2 = 7/43.$$

Тоді з (2) отримаємо наближений розв'язок

$$x_2(t) = \frac{(77t^3 - 8t^2 - 69t)}{473}.$$

Ця задача може бути розв'язана точно з використанням рівняння Ейлера. Точний розв'язок $x(t) = \frac{e(e^t - e^{-t})}{(e^t - 1)} - t$

Порівняємо точний та наближений розв'язок задачі:

T	0,0	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0
$x(t)$	0,0	-0,0287	-0,0505	-0,0583	-0,0444	0,0
$x_2(t)$	0,0	-0,0985	-0,0506	-0,0585	-0,0442	0,0

2.7. Особливості розв'язку варіаційних задач теорії оптимальних систем управління

Порівнюючи ці задачі із класичними задачами варіаційного числення, можна відмітити ряд їх особливостей.

1. Як і у функціоналі, що мінімізується, (критерії оптимальності), так і в рівнянні об'єкта та обмеженнях фігурують не тільки координати x_i об'єкта, але і управляючий вплив $U_j, j=1, m$.

2. Обмеження на фазові координати і управління, як правило, мають вид нерівностей типу $|u_j| \leq U_j, |x_i| \leq X_i$. Причому вектори U та X можуть знаходитись не тільки всередині, але й на границях допустимих областей $\Omega(U), \Omega(X)$.

3. Розв'язок оптимальної задачі часто являється кусково-неперервною функцією $U_j(t)$ з скінченною кількістю точок розривів першого роду, причому заздалегідь не визначені моменти розривів U_j .

Перша особливість не викликає при розв'язуванні труднощів. Потрібно лише розширити вектор x_i функціями U_j . Тоді замість n -вимірного фазового простору вектору X маємо $(n+m)$ -вимірний простір з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m$.

Рівняння системи тепер можна розглядати як обмежуючу умову:

$$\varphi_i = \dot{x}_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m, t) = 0. \quad (2.67)$$

Іноколи можна виключити U чи X , якщо можна виразити X через U .

Друга особливість пов'язана вже з більшими труднощами. Правда, обмеження у вигляді нерівностей можна формально звести до обмежень у вигляді рівностей. Дійсно, замість U_j можна ввести інші функції V_j , що зв'язані з U_j рівністю:

$$U_j = Z_j(V_j), \quad (2.68)$$

причому Z_j підбирається таким чином, щоб при будь-яких V_j функції U_j не виходили із заданих інтервалів. Якщо треба задовольнити умови:

$$|u_j| \leq U_{j \max}, \quad (2.69)$$

то можна вибрати

$$Z_j = U_{j \max} \sin V_j, \quad (2.70)$$

чи вибрати Z_j так, як показано на рис. 2.2

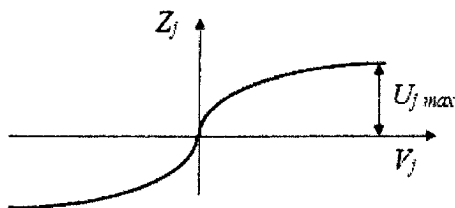


Рис. 2.2. Вибір обмежень на управління

Якщо підставити $U_j = Z_j(V_j)$ в (2.67), то нові змінні V_j можуть бути будь-якими і обмеження (2.69) в явному вигляді можна не враховувати. Деякі задачі піддаються при цьому розв'язуванню. Взагалі, умови у вигляді нерівностей $K \leq 0$ можна замінити умовою $N=0$, де N – нуль, коли K – від'ємне і N відрізняється від нуля при додатному K . Однак, у загальному випадку введення нелінійних функцій може значно ускладнити розв'язування.

Контрольні запитання

1. Назвіть найбільш відомі методи оптимізації.
2. Дайте визначення варіації та охарактеризуйте її властивості.
3. Дайте визначення слабкому і сильному екстремуму функціонала.
4. Охарактеризуйте найпростішу задачу класичного варіаційного числення.
5. Наведіть рівняння Ейлера.
6. Наведіть додаткові умови Лежандра.
7. Наведіть рівняння Ейлера-Пуассона.
8. Охарактеризуйте задачі на умовний екстремум.
9. Наведіть рівняння умов трансверсальності.
10. Охарактеризуйте прямі методи оптимізації.
11. У чому полягає суть метода Рітца.

Контрольні тести

- Класичним варіаційним численням неможливо вирішити задачі:
 - за наявності умовних обмежень на параметри
 - за наявності обмежень на час керування
 - за наявності безумовних обмежень на параметри
- Ці функціонали відповідно відносяться до задач Лагранжа, Больца, Майєра (показати стрілкою):

	$I = g_0 [X(t_0), X(T), t_0, T] + \int_{t_0}^T f_0(X, U, t) dt$	Лагранжа
a.	$I = \int_{t_0}^T f_0(X, U, t) dt$	Больца
b.		
c.	$I = g_0 [X(t_0), X(T), t_0, T]$	Майєра
- В класичному варіаційному численні основним є рівняння:
 - Ейлера, Ейлера-Пуассона
 - Шредінгера
 - Беллмана
- Запис лінійних диференціальних рівнянь у формі Коші означає, що:
 - в лівій частині рівнянь похідні першого порядку, в правій частині – лінійна комбінація змінних
 - в лівій частині рівнянь похідні другого порядку, в правій частині – лінійна комбінація змінних
 - в лівій частині рівнянь похідні першого порядку, в правій частині – будь-яка функція

РОЗДІЛ 3. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Загальні відомості

Американський математик Р.Беллман запропонував загальний метод приведення варіаційних задач до функціональних рівнянь. Метод придатний не лише до систем, що описуються диференціальними рівняннями, а й до широкого кола технічних та економічних систем, в яких зв'язки між координатами стану, векторами управління та критерієм оптимальності можна задавати як рівняннями довільного виду, так і експериментальними даними у вигляді таблиць чи графіків. Метод приводить варіаційну задачу до еквівалентної задачі розв'язування рівняння в частинних похідних (рівняння Беллмана), а це значно ускладнює пошук аналітичного розв'язку. Для реалізації методу динамічного програмування запропоновано алгоритми наближеного розв'язування задачі шляхом розбиття її на окремі етапи, на кожному з яких обчислюються локальні відрізки оптимальних фазових траєкторій і проводиться цілеспрямований пошук локальних розв'язків для отримання остаточного розв'язку. Як показує досвід, при оптимізації складних технічних систем обсяг обчислень дуже великий, тому ряд досліджень були спрямовані на зменшення складності реалізації.

В основу методу покладено принцип оптимальності Р.Беллмана, ідея якого полягає в тому, що оптимальне управління визначається кінцевою метою і станом системи в даний момент часу, незалежно від того, яким чином система досягла цього стану.

Проілюструємо принцип оптимальності для неперервної задачі. Нехай об'єкт управління описується векторним диференціальним рівнянням

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (3.1)$$

де X – n -вимірний вектор координат стану об'єкта; U – m -вимірний вектор управління. Потрібно побудувати управління $U(t)$, що переводить об'єкт із заданого початкового стану $X(t_0=0)=X^0$ в кінцевий стан $X(t_1=T)=X^T$ (рис. 3.1), для якого функціонал

$$I(X, U) = \int_0^T f_0[X(t), U(t)] dt \quad (3.2)$$

досягає би мінімуму. Вважаємо, що кінцевий момент часу T фіксовано. Кінцевий стан $X(t)$ довільним. Нехай $U^*(t)$ – оптимальне управління та $X^*(t)$ – відповідна йому оптимальна фазова траєкторія в n -мірному просторі. Виберемо деяку довільну точку $X^*(t_i)$ на траєкторії ($0 < t_i < T$), яка ділить фазову траєкторію на два відрізки. На першому відрізку функціонал приймає значення $I_1 = \int_0^{t_i} f_0(X, U) dt$, на другому – $I_2 = \int_{t_i}^T f_0(X, U) dt$. Другий відрізок можна розглядати і як окрему фазову траєкторію з початковим значенням $X_i^* = X^*(t_i)$, яка є оптимальною, якщо функціонал I_2 досягає на ній мінімуму.

Таким чином, згідно з принципом оптимальності, незалежно від того, яким чином система досягла точки X_i^* , другий відрізок оптимальної траєкторії також є оптимальною траєкторією. Дійсно, якщо існує інша траєкторія, на якій функціонал I_2 приймає менше значення, ніж для даної траєкторії, то можна побудувати траєкторію, для якої функціонал I буде мати менше значення, ніж для всієї траєкторії. Але це неможливо, бо за припущенням функціонал I досягає на всій траєкторії мінімуму.

3.2. Дискретне динамічне програмування

Спочатку розглянемо статичну варіаційну задачу.

Приклад 3.1.

Задача про найкоротший шлях на мережі. Потрібно знайти найкоротший шлях з вершини 1 до вершини 10 на графі, зображеному на рис.3.1. Цифри на дугах означають довжини c_{ij} відповідних комунікацій. Застосуємо ідею динамічного програмування до розв'язання цієї задачі. Розв'язання задачі проводиться в кілька етапів. Етапи позначені на рис.1. Нехай $f_k(x)$ – мінімальна відстань від вершини x , що належить k -му етапу до вершини 10, $d_k(x)$ – вершина, до якої потрібно перейти після вершини x , дотримуючись шляху мінімальної довжини. Якщо ми знаходимося на 4 - му етапі, то $f_4(8) = 8$, $d_4(8) = 8$, $f_4(9) = 4$, $d_4(9) = 10$.

Переходимо до 3-го етапу. З вершини 5, що належить третьому етапу, існує два можливих шляхи до вершини 10. Очевидно, що:

$$f_3(5) = \min \{4 + f_4(8), 8 + f_4(9)\} = \min \{12, 12\} = 12,$$

$$d_3(5) = 8 \text{ або } 9.$$

Аналогічно знаходимо всі величини $f_k(x)$ та $d_k(x)$. Результати наведені в таблиці.

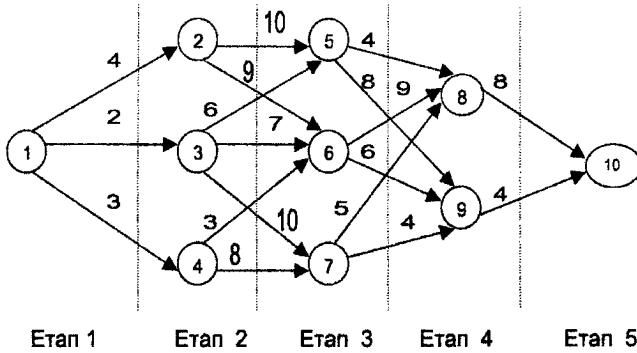


Рис. 3.1. Граф задачі динамічного програмування

Таблиця 3.1. Результати розв'язування задачі

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(x)$								8	4
$d_4(x)$								10	10
$f_3(x)$					12	10	8		
$d_3(x)$					8,9	9	9		
$f_2(x)$		19	17	13					
$d_2(x)$		6	6	6					
$f_1(x)$	16								
$d_1(x)$	4								

З таблиці 3.1 випливає, що довжина найкоротшого шляху з вершини 1 до вершини 10 дорівнює 16, а оптимальним маршрутом є $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$. Цей маршрут буде утворюватися згідно з $dk(x)$:

$$1 \rightarrow d_1(1) = 4 \rightarrow d_2(4) = 6 \rightarrow d_3(6) = 9 \rightarrow d_4(9) = 10.$$

Зауважимо, що якщо c_{ij} – собівартість перевезення вантажу по відповідній комунікації, то розглянута задача еквівалентна пошуку шляху мінімальної собівартості з вершини 1 до вершини 10. Мінімальний шлях можна також розглядати як оптимальну траєкторію руху в прийнятій системі координат.

Відмітимо ще раз, що по мірі просування від вершини 10 до 1 послідовно із розгляду виключаються неоптимальні траєкторії, що значно спрощує пошук оптимальної траєкторії. Цей приклад ще раз пояснює принцип оптимальності, що будь-який відрізок оптимальної траєкторії також є оптимальним, а майбутня поведінка процесу не залежить від його передісторії, тобто поведінки системи до початку управління.

У загальному випадку для $(m+1)$ етапів, коли кожен з m етапів має l альтернатив, критерій оптимальності є функцією $(l \times m)$ змінних. Для малих значень m та l оптимальний розв'язок можна знайти методом простого перебору можливих варіантів. Однак застосування динамічного програмування значно скорочує обсяг обчислень на комп'ютері. В даному випадку задача знаходження оптимального значення критерію, що залежить від m змінних, кожна з яких може приймати l значень, зводиться до послідовності пошуку розв'язків більш простої задачі оптимізації функції одної змінної, що приймає l значень. Тобто у методі динамічного програмування задача вибору одного із $(l \times m)$ варіантів зводиться до послідовного вибору всього з l варіантів. Наприклад, для $m = l = 10$ вибір з 1010 варіантів зводиться до послідовного перебору всього 10 варіантів.

Тепер розглянемо розв'язування неперервної динамічної задачі методом дискретного динамічного програмування, коли об'єкту описується векторним диференціальним рівнянням виду:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (3.3)$$

де X – n -вимірний вектор стану об'єкта, U – m -вимірний вектор, початковий стан $X(0) = X_0$, $0 \leq t \leq T$.

Необхідно оптимальне управління, що переводить об'єкт з початкового стану в заданий кінцевий при мінімумі функціоналу:

$$I = \int_0^T f_0(X, U) dt + \theta[X(T)] \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Параметр T вважаємо фіксованим, тому кінцевий стан системи, що залежить від T , позначимо через $\theta[X(T)]$. Щоб перейти до дискретної задачі розіб'ємо інтервал T на N відрізків та позначимо кожен

$$\Delta = \frac{T}{N},$$

а диференціальне рівняння (3.3) замінимо різницеvim виду:

$$\dot{X} \approx \frac{X(n+1) - X(n)}{\Delta} = f_1[X(n), U(n)], n = 0, N-1,$$

де n – номер відрізка.

Тоді маємо:

$$X(n+1) = X(n) + \Delta f_1[X(n), U(n)] = X(n) + f[X(n), U(n)]. \quad (3.5)$$

Прийmemo, що управління $U(n)$ на заданому відрізку дискретизації Δ не змінюється і належить з множини допустимих значень.

Функціонал (3.4) заміняємо наближено сумою:

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} f_{10}[X(n), U(n)]\Delta + \theta[X(N)] = \sum_{n=0}^{N-1} f_0[X(n), U(n)] + \theta[X(N)] \rightarrow \min. \quad (3.6)$$

Таким чином, критерій оптимальності (3.6) є функцією N змінних $U(n)$. Здавалося б, що таку задачу можна вирішити, мінімізуючи функціонал за багатьма змінними. Проте при малому кроці ε дискретизації Δ розмірність задачі мінімізації

$$I = \min_{U_0} \min_{U_1} \dots \min_{U_{N-1}} [f_0(X_0, U_0) + f_0(X_1, U_1) + \dots + f_0(X_{N-1}, U_{N-1})] \quad (3.7)$$

зростає настільки, що робить її нерозв'язуванною.

Метод динамічного програмування дозволяє спростити процедуру розв'язування задачі. Причому застосовується метод зворотного руху, тобто пошуку оптимальної траєкторії від кінця процесу до його початку.

Припустимо, що всі значення оптимального управління $U(n)$ знайдені, крім останнього, і система перебуває у стані $X(N-1)$. Згідно принципу оптимальності управління $U(N-1)$ також повинно бути оптимальним і повинно забезпечувати мінімум функціоналу (3.6), який для останньої ділянки траєкторії має вигляд:

$$I_{N-1} = f_0[X(N-1), U(N-1)] + \theta[X(N)]. \quad (3.8)$$

Враховуючи співвідношення (3.5), отримаємо:

$$I_{N-1} = f_0[X(N-1), U(N-1)] + \theta\{X[(N-1), U(N-1)]\} = I_{N-1}[X(N-1)].$$

Таким чином, значення функціоналу залежить від стану системи на $(N-1)$ -ому кроці та управління на останньому кроці N . Виберемо вектор управління таким чином, щоб функціонал I_{N-1} набував мінімального значення, та позначимо його $U^*(N-1)$. Для визначення $I^*_{N-1}[X(N-1)]$ необхідно мінімізувати функцію $I_{N-1}[X(N-1), U(N-1)]$ стосовно m змінних $u_1(N-1), u_2(N-1), \dots, u_m(N-1)$.

Таким чином отримаємо оптимальне управління $U^*(N-1)$. Тоді маємо:

$$I^*_{N-1}[X(N-1)] = I^*_{N-1} = f_0[X(N-1), U^*(N-1)] + \theta\{X(N-1) + f[X(N-1), U^*(N-1)]\}. \quad (3.9)$$

Запам'ятаємо значення функціоналу I^*_{N-1} та управління $U^*(N-1)$. Тепер необхідно визначити управління $U(N-1)$ і $U(N-2)$, що забезпечують мінімум функціоналу на передостанньому кроці.

$$\begin{aligned} I^*_{N-2,N-1}[X(N-2)] &= \min_{U(N-2) \in U} I_{N-2,N-1}(X, U) = \min_{\substack{U(N-1) \in U \\ U(N-2) \in U}} I_{N-2,N-1}(X, U) = \\ &= \min_{\substack{U(N-1) \in U \\ U(N-2) \in U}} \{f_0[X(N-2), U(N-2)] + f_0[X(N-1), U(N-1)] + \theta[X(N)]\}. \end{aligned}$$

Мінімізація даного функціоналу стосовно $U(N-1)$ для $X(N-1)$ проведена вище, на її основі визначено відповідне оптимальне управління $U^*(N-1)$. Тому, враховуючи (3.6) можна записати:

$$\begin{aligned} I^*_{N-2,N-1}[X(N-2)] &= \min_{U(N-2) \in U} \{f_0[X(N-2), U(N-2)] + I^*_{N-1}[X(N-1)]\} = \\ &= f_0[X(N-2), U^*(N-2)] + I^*_{N-1}\{X(N-2) + f[X(N-2), U^*(N-2)]\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

На цьому кроці проводиться мінімізація функції m змінних $U_1(N-2), U_2(N-2), \dots, U_m(N-2)$, причому визначається оптимальне управління $U^*(N-2)$.

Тепер слід запам'ятати лише $I^*_{N-2,N-1}$ та $U^*(N-2)$, значення I^*_{N-1} – можна відкинути, оскільки воно враховано в $I^*_{N-2,N-1}$.

Переходячи до наступного кроку, маємо:

$$\begin{aligned} I_{N-3, \dots, N-1} &= f_0[X(N-3), U(N-3)] + I^*_{N-2,N-1}[X(N-2)] = f_0[X(N-3), U(N-3)] + \\ &+ I^*_{N-2,N-1}\{X(N-3) + f[X(N-3), U(N-3)]\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Мінімізуючи $I_{N-3, N-2, N-1}$ стосовно управління $U^*(N-3)$, одержимо:

$$\begin{aligned} I^*_{N-3, N-2, N-1}[X(N-3)] &= I^*_{N-3, N-2, N-1} = f_0[X(N-3), U^*(N-3)] + I^*_{N-2, N-1}\{X(N-3) + \\ &+ f[X(N-3), U^*(N-3)]\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тепер запам'ятовуємо $I^*_{N-3, N-2, N-1}$ та $U^*(N-3)$, а значення $I^*_{N-2, N-1}$ можна відкинути, оскільки воно враховано в $I^*_{N-3, N-2, N-1}$.

Виконуючи подібні розрахунки на подальших кроках, отримуємо для довільного $(N-i)$ -го кроку

$$\begin{aligned} I^*_{N-i, N-i+1, \dots, N-1}[X(N-i)] &= I^*_{N-i, N-i+1, \dots, N-1} = f_0[X(N-i), U^*(N-i)] + \\ &+ I^*_{N-i+1, N-i+2, \dots, N-1}\{X(N-i) + f[X(N-i), U^*(N-i)]\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

На цьому кроці слід зафіксувати $I^*_{N-i, N-i+1, \dots, N-1}$ та $U^*(N-i)$. Вираз (3.13) є рекурентним співвідношенням для визначення функціоналу на будь-якому кроці. Виконавши обчислення до початкової точки траєкторії $X(0)$ при $I = N$, яка відома з постановки задачі, матимемо оптимальну траєкторію та оптимальне уп-

равління і як результат – оптимальний критерій на всій траєкторії $I_{0,1,\dots,N-1}[X(0)]$ та послідовність оптимальних управлінь на всіх кроках $U^*(0), U^*(1), \dots, U^*(N-1)$. Запис алгоритму у векторно-матричному вигляді приховує реальний обсяг обчислень, необхідних для його реалізації. Складність обчислень, передбачених алгоритмом, оцінюється поліноміальною сигнальною функцією. Для зменшення обсягу обчислень застосовують різні методи апроксимації.

3.3. Стохастичні задачі динамічного програмування

Детерміновані оптимізаційні моделі досить часто неадекватно описують реальні виробничі, технічні, економічні та інші системи та процеси. Це пов'язано насамперед з неточністю та ймовірнісним характером їх параметрів та показників оптимізації. В таких задачах процес, що управляється, не повністю визначається початковим станом X'_0 та оптимальним управлінням U , а залежить від часткової чи повної невизначеності, неточності та випадкової вхідної інформації. Задачі, в яких критерій оптимальності та обмеження, що визначають допустиму множину оптимальних рішень, залежать від параметрів, які мають випадковий характер, називаються задачами стохастичного програмування. Якщо при розв'язуванні задачі обмежитись тільки усередненими ймовірнісними характеристиками випадкових параметрів, то стохастична задача зводиться до стандартної задачі динамічного програмування.

Розглянемо постановку стохастичної задачі динамічного програмування, коли стан системи X залежить від випадкових факторів. Припустимо, що критерій I є адитивним:

$$I = \sum_{i=1}^{N-1} I_i, \quad (3.14)$$

де I_i – значення критерію на i -му кроці, яке також є випадковою величиною.

Задачу стохастичного програмування часто розглядають як задачу максимізації математичного сподівання виду:

$$\max \bar{I} = M[I] = \sum_{i=1}^{N-1} M[I_i] = \sum_{i=1}^{N-1} \bar{I}_i, \quad (3.15)$$

де \bar{I}_i – середній виграш на i -ому кроці.

Задача динамічного програмування полягає в тому, щоб знайти оптимальне управління U^* , що є послідовністю оптимальних управлінь $U^*_1, U^*_2, \dots, U^*_{N-1}$ на окремих кроках, за яких критерій I набуває максимального значення. На перший погляд задача полягає лише у простій заміні критерію. Але різниця між стохастичною і детермінованою задачами динамічного програмування більш суттєва: вона стосується самої структури оптимального управління.

Дійсно, детермінована задача динамічного програмування полягає в пошуку оптимального управління на i -му кроці, за умови, що стан системи X_{i-1} після $(i-1)$ -го кроку фіксований. При цьому стан системи після i -го кроку X_i та значення I_i повністю визначаються станом X_{i-1} та управлінням U_i на i -му кроці:

$$X_i = X_i(X_{i-1}, U_i). \quad (3.16)$$

Стан стохастичної системи X_i визначається не тільки станом X_{i-1} та управлінням U_i , а й залежить від випадкових факторів. Тобто від конкретних значень X_{i-1} та U_i залежить розподіл ймовірностей випадкової величини X_i . Значення критерію I_i в стохастичній системі також є випадковою величиною, розподіл якої залежить від стану системи X_{i-1} та управління U_i . Визначити управління на i -му кроці U_i можна шляхом усереднення критерію на i -му кроці з урахуванням розподілу ймовірностей, за умови заданого стану X_{i-1} :

$$\bar{I}_i(X_{i-1}, U_i). \quad (3.17)$$

Припустимо, що розподіл ймовірності стану X_i і умовне середнє (3.17) залежить тільки від досягнутого X_{i-1} та U_i , і не залежить від того, яким чином, коли і в результаті дії якого управління система перейшла в стан X_{i-1} (процес є марківським). Задача полягає у тому, щоб для будь-якого можливого досягнутого на $(i-1)$ -му кроці стану X_{i-1} визначити умовно оптимальне управління на кроці i . Таким чином, в стохастичній схемі оптимальне управління U^* є випадковою величиною і його величина на кожному кроці залежить лише від досягнутого випадкового стану. Завдання управління полягає в тому, щоб знайти таке рішення, яке забезпечує оптимальне продовження процесу відносно досягнутого на даний момент випадкового стану.

У цьому полягає корінна відмінність стохастичної задачі від детермінованої. В детермінованій задачі оптимальне управління є програмним і мо-

же бути сформовано заздалегідь. В стохастичній задачі оптимальне управління є випадковою величиною і кожен раз приймає інше значення в ході самого процесу управління залежно від досягнутого на попередньому кроці випадкового стану. Така система управління є системою із «зворотнім зв'язком» від поточного стану.

Звернемо увагу ще на одну обставину. В детермінованій системі процес управління спочатку розгортається від кінця до початку, результати чого знаходяться умовні оптимальні управління на кожному кроці, а потім від початку до кінця, в результаті чого знаходиться управління, яке забезпечує оптимальне продовження процесу відносно досягнутого на даний момент стану.

Умовно оптимальне управління $U_i(X_{i-1})$ стохастичного процесу – це таке управління, застосування якого на i -му кроці, забезпечує максимум умовного середнього критерію оптимальності на всіх наступних кроках: від i -го до $(N-1)$ -го включно. Пошук максимуму виконується аналогічно детермінованій схемі, з тою різницею, що замість критерію, що є випадковою величиною, використовується його середнє значення.

Процес відшукування управління розгортається від останнього $(N-1)$ -го кроку. Фіксується стан системи X_{N-1} і обчислюється управління $U_{N-1}^*(X_{N-2})$, яке забезпечує максимум усередненого умовного критерію на $(N-1)$ -му кроці:

$$\bar{I}_{N-1}^*(X_{N-1}) = \max_{U_{N-1}} [\bar{I}_{N-1}(X_{N-1}, U_{N-1})]. \quad (3.18)$$

Після обчислення $U_{N-1}^*(X_{N-1})$ та $\bar{I}_{N-1}^*(X_{N-1})$, які залежать від X_{N-1} , оптимізація на $(N-1)$ -му кроці завершується. Це означає, що незалежно від того, в якому стані X_{N-1} перебуватиме система після $(N-1)$ кроків, середнє значення критерію на останньому $(N-1)$ -му кроці буде максимальним.

Обчислити управління на $(N-2)$ -му кроці складніше, ніж на $(N-1)$ -му. Для цього спочатку фіксуємо стан системи X_{N-2} після $(N-3)$ -х кроків. А потім обчислюємо середнє критерію $I_{N-2, N-1}(X_{N-2}, U_{N-1})$ на двох останніх кроках за будь-якого управління U_{N-2} на $(N-2)$ -му кроці та оптимального управління U_{N-1} на кроці $(N-1)$, яке вже відоме. Будемо міркувати наступним чином. При будь-якому управлінні U_{N-2} стан X_{N-2} буде випадковим, але ми знаємо його розподіл ймовірностей, що залежить від X_{N-3} та U_{N-2} . Випадковий стан X_{N-2} визначає максимальнє умовне середнє на $(N-1)$ -му кроці $\bar{I}_{N-1}^*(X_{N-2})$. Обчислюємо умовне середнє значення критерію з урахуванням розподілу ймовір-

ностей стану X_{N-2} . Таким чином, подвійне усереднення визначає максимальне умовне значення критерію на $(N-1)$ -ому кроці, яке залежить не тільки від X_{N-2} , а й від X_{N-3} та U_{N-2} . Позначимо це значення як:

$$\bar{I}_{N-1}^*(X_{N-3}, U_{N-2}). \quad (3.19)$$

До нього потрібно додати умовне середнє критерію на $(N-2)$ -му кроці $\bar{I}_{N-2}(X_{N-3}, U_{N-2})$. при управлінні U_{N-2} .

Отримаємо:

$$\bar{I}_{N-2, N-1}^*(X_{N-3}, U_{N-2}) = \bar{I}_{N-2}(X_{N-3}, U_{N-2}) + \bar{I}_{N-1}^*(X_{N-3}, U_{N-2}). \quad (3.20)$$

Знайдемо управління на $(N-2)$ -му кроці, при якому величина (3.20) досягає максимуму, тобто:

$$\bar{I}_{N-2, N-1}^*(X_{N-3}) = \max_{U_{N-2}} [\bar{I}_{N-2, N-1}^*(X_{N-3}, U_{N-2})] = \max_{U_{N-2}} [\bar{I}_{N-2}(X_{N-3}, U_{N-2}) + \bar{I}_{N-1}^*(X_{N-3}, U_{N-2})] \quad (3.21)$$

і позначимо його як $U_{N-2}^*(X_{N-3})$.

Таким чином, в результаті оптимізації на $(N-2)$ -му кроці знайдено умовно оптимальне управління $U_{N-2}^*(X_{N-3})$ та відповідне максимальне умовне середнє критерію на двох останніх кроках $\bar{I}_{N-2, N-1}^*(X_{N-3})$.

Аналогічно виконується оптимізація на будь-якому i -му кроці. Для кожного X_i на i -му кроці вже відомо максимальне умовне середнє критерію на наступних кроках $\bar{I}_{i+1, \dots, m}^*(X_i)$. Оскільки стан X_i випадковий та його розподіл ймовірностей залежить від X_{i-1} та U_i , то випадковий критерій можна усереднити з урахуванням розподілу ймовірностей X_i та отримати «двічі усереднене» значення $\bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_{i-1}, U_i)$.

Умовно оптимальне управління на i -му кроці $U_i^*(X_{i-1})$ обчислюється як управління, при якому сума

$$\bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_i, U_i) = \bar{I}_i(X_{i-1}, U_i) + \bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_{i-1}, U_i). \quad (3.22)$$

досягає максимуму:

$$\bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_{i-1}) = \max_{U_i} [\bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_{i-1}, U_i)] = \max_{U_i} [\bar{I}_i(X_{i-1}, U_i) + \bar{I}_{i+1, \dots, N-1}^*(X_{i-1}, U_i)]. \quad (3.23)$$

Застосовуючи формулу (3.23) послідовно на всіх кроках, обчислюється умовно оптимальне управління та максимальне умовне середнє значення критерію на всіх кроках до другого включно. Оптимізація на першому кроці має деякі особливості, пов'язані з тим, що початковий стан X_0 , як правило,

не є випадковим (для спрощення вважатимемо, що X_0 відомо), і оптимальне управління U_1 також не є випадковою величиною. Максимальне середнє критерію з урахуванням першого кроку дорівнюватиме

$$\bar{I}^* = \bar{I}_{1,2,\dots,N-1}^* \quad (3.24)$$

Таким чином, процес динамічного програмування завершено, знайдено оптимальне управління:

$$U^* = [U_1^*, U_2^*(X_1), U_3^*(X_2), \dots, U_{N-1}^*(X_{N-2})], \quad (3.25)$$

всі складові якого, крім першого, є випадковими і залежать від стану системи. При цьому досягається максимальне середнє значення критерію (3.25).

Послідовність реалізації оптимального управління наступна: на першому кроці застосовується управління U_1^* і залежно від результату його дії і стану X_1 після першого кроку, застосовуємо оптимальне управління $U_2^*(X_1)$. На третьому кроці залежно від X_2 , застосовуємо оптимальне управління $U_3^*(X_2)$ і т.д.

3.4. Неперервне динамічне програмування

При певних припущеннях метод динамічного програмування можна поширити на знаходження оптимального управління в неперервних системах управління. Розглянемо необхідні умови оптимальності управління для нестационарного об'єкту, який описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U, T), \quad (3.26)$$

де X – n -вимірний вектор стану; U – m -вимірний вектор управління.

Припустимо, що вектор управління U належить деякій області простору управління і необхідно мінімізувати функціонал виду:

$$I(X, U) = \int_0^T f_0(X, U, T) dt. \quad (3.27)$$

Вважаємо також, що час T фіксовано; початковий стан $X(0)=X_0$, а кінцевий стан $X(T)$ довільний. Припустимо, що відома оптимальна фазова траєкторія $X(t)$, яка проходить від точки X_0 через точку $X(T)$. Мінімальне значення критерію $I(X, U)$ позначимо через $I^*(X_0, 0)$. На траєкторії виділимо проміжні точки $X(t)$ та $X(t+\Delta t)$, що визначають стан у моменти t та $(t+\Delta t)$.

Згідно з принципом оптимальності відрізок оптимальної траєкторії від точки $X(t)$ до точки $X(T)$ також є оптимальною траєкторією. Маємо:

$$I^*[X(t), t] = \min_{u(\tau) \in U} \int_0^T f_0(X, U, \tau) d\tau. \quad (3.28)$$

Запишемо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів від t до $(t+\Delta t)$ і від $(t+\Delta t)$ до T :

$$I^*[X(t), t] = \min_{u(\tau) \in U} \left[\int_t^{t+\Delta t} f_0(X, U, \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0(X, U, \tau) d\tau \right]. \quad (3.29)$$

Використовуючи формули чисельного інтегрування для малого Δt замінимо перший інтеграл на частковому відрізку наступним чином:

$$\int_t^{t+\Delta t} f_0(X, U, \tau) d\tau = f_0[X(t), U(t), t] \Delta t + \theta_1(\Delta t), \quad (3.30)$$

де $\theta_1(\Delta t)$ – мала більш високого порядку, ніж Δt , тобто $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Враховуючи, що

$$\min_{U(\tau) \in U} \left[\int_{t+\Delta t}^T f_0(X, U, \tau) d\tau \right] = I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t], \quad (3.31)$$

маємо

$$I^*[X(t), t] = \min_{U(t) \in U} \{ f_0[X(t), U(t), t] \Delta t + I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t] + \theta_1(\Delta t) \}. \quad (3.32)$$

Розкладемо функцію в ряд Тейлора:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \frac{dX}{dt} \Delta t + \theta_2(\Delta t), \quad (3.33)$$

де $\theta_2(\Delta t)$ – мала більш високого порядку малості, ніж Δt . Припустимо, що функція $I^*(X, t)$ має неперервну часткову похідну за всіма змінними x_1, x_2, \dots, x_n, t .

Розкладемо в ряд Тейлора в околі точки (X, t) функцію $I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t]$ і враховуючи (3.33), отримуємо:

$$I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t] = I^*[X(t), t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} f_i(X, U, t) \Delta t + \frac{\partial I^*}{\partial t} \Delta t + \theta_3(\Delta t), \quad (3.34)$$

де $\theta_3(\Delta t)$ – мала більш високого порядку малості, ніж Δt . Введемо в розгляд вектор

$$\frac{\partial I^*}{\partial X} = \left[\frac{\partial I^*}{\partial x_1}, \frac{\partial I^*}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial I^*}{\partial x_n} \right].$$

Тоді формула (3.34) можна записати компактніше:

$$I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t] = I^*[X(t), t] + \frac{\partial I^*}{\partial X} f(X, U, t) \Delta t + \frac{\partial I^*}{\partial t} \Delta t + \theta_3(\Delta t).$$

Підставимо значення $I^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t]$ в (3.32), розділимо на Δt обидві частини отриманої рівності і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Враховуючи, що функції $I^*(X, t)$ та $\frac{\partial I^*(X, t)}{\partial t}$ не залежать від управління $U(t)$, отримаємо:

$$-\frac{\partial I^*}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} [f_0(X, U, t) + \frac{\partial I^*}{\partial X} \cdot f(X, U, t)]. \quad (3.35)$$

Рівняння (3.35) називається рівнянням Беллмана і визначає необхідні умови існування екстремуму. Рівняння Беллмана – це рівняння із частинними похідними відносно функції $I^*(X, t)$. Після мінімізації відносно U вираз (3.35) не містить функції управління і рівняння містить лише невідому функцію $I^*(X, t)$.

Тепер розглянемо задачу синтезу оптимального управління об'єктом, що описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (3.36)$$

де X – n -вимірний вектор стану; U – m -вимірний вектор управління.

Функціонал, який необхідно мінімізувати, вибираємо у вигляді:

$$I(X, U) = \int_0^T f_0(X, U) dt. \quad (3.37)$$

Підінтегральна функція $f_0(X, U)$ явно від часу не залежить. В цій постановці задачі припустимо, що початковий $X(0) = X_0$ та кінцевий $X(T) = X_T$ стани фіксовані. Не фіксовано час T переходу системи із початкового в кінцевий стан.

Припустимо, що відомо оптимальне управління $U(T)$ і відповідна йому траєкторія $X(T)$, що проходить через точку X_T в момент часу $t=T$. Мінімум функціоналу

$$I^*(X^0, n) = \min_{u(t) \in U} \int_0^T f_0(X, U) dt \quad (3.38)$$

залежить від початкового стану системи X^0_n . Нехай $X(t)$ – довільна точка на оптимальній траєкторії ($0 < t < T$). Згідно з принципом оптимальності для цієї точки можна записати:

$$I^*[X(t)] = \min_{U(\tau) \in U} \int_0^T f_0[X(\tau), U(\tau)] d\tau. \quad (3.39)$$

Оскільки система рівнянь (3.36) стаціонарна, підінтегральна функція $f_0(X, U)$ в (3.37) не залежить явно від часу і час переходу T не фіксовано, то функція $I^*[X(t)]$ явно від часу не залежить (тому $\partial I^* / \partial t = 0$).

Розглянемо стан $X(t_1) = X_1$, $t_1 = t + \Delta t$, де Δt – досить мала величина. З умови неперервності оптимальної траєкторії витікає, що стан X_1 належить околу точки $X(t)$, і має місце рівність:

$$X^1 = X + \frac{dX}{dt} \cdot \Delta t + \theta(\Delta t), \quad (3.40)$$

де $\theta(\Delta t)$ – величина більш високого порядку малості, ніж Δt .

Вираз для $I^*[X(t)]$ запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} I^*[X(t)] &= \min_{u(\tau) \in U} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0[X(\tau), U(\tau)] d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0[X(\tau), U(\tau)] d\tau \right\} = \\ &= \min_{u(t) \in U} \{ f_0[X(t), U(t)] \Delta t + \min_{u(\tau) \in U} \int_{t+\Delta t}^T f_0[X(\tau), U(\tau)] d\tau \}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Позначимо другий доданок суми як $I^*(X_1)$ і вважатимемо, що $I^*(X)$ має неперервні частинні похідні за всіма аргументам до другого порядку включно.

Розкладемо $I^*(X_1)$ в ряд Тейлора, обмежившись двома членами розкладу.

Враховуючи, що $\frac{dX}{dt} = f(X, U)$, маємо:

$$I^*(X_1) = I^*(X) + \frac{\partial I^*}{\partial X} \cdot f(X, U) \Delta t + \theta_1(\Delta t), \quad (3.42)$$

де $\theta_1(\Delta t)$ залишкові члени розкладу, тобто $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Підставивши вираз для $I^*(X_1)$ в праву частину (3.41) і переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, одержимо:

$$0 = \min_{u(t) \in U} [f_0[X(t), U(t)] + \frac{\partial I^*(X)}{\partial X} \cdot f(X, U)]. \quad (3.43)$$

Рівняння (3.43) являє собою рівняння Беллмана для стаціонарної задачі з фіксованими границями, тобто фіксованими початковим X_0 та кінцевим X_T станами і довільним часом переходу T .

Зокрема, у задачі про оптимальну швидкодію мінімізується функціонал, підінтегральна функція якого $f_0(X, U) \equiv 1$.

У цьому випадку рівняння Беллмана приймає вигляд:

$$-1 = \min_{u(t) \in U} \left[\frac{\partial I^*}{\partial X} \cdot f(X, U) \right] \quad (3.44)$$

У задачі переведення системи із довільного початкового стану $X(0)=X_0$ в початок координат $X(T)=0$ за мінімальний час T розв'язок $I^*(X) = T(X)$ рівняння (3.44) повинен задовольняти граничній умові $T(0)=0$.

З умови (3.43) визначається оптимальне управління як функція $I^*(X)$:

$$U^* = \Phi[I^*(X)]. \quad (3.45)$$

Універсального методу розв'язання рівняння (3.43) не існує. Якщо вдається визначити функцію $I^*(X)$, то з (3.45) одержимо оптимальний алгоритм управління як функцію фазових координат. Таким чином, розв'язується задача синтезу оптимального регулятора для замкненої системи автоматичного управління.

В загальному випадку тільки для стаціонарних лінійних об'єктів з квадратичним функціоналом якості можна отримати аналітичне рішення.

3.4.1. Синтез оптимального управління лінійними стаціонарними об'єктами за необмежених управляючих впливів

Розглянемо стаціонарний об'єкт, що описується системою рівнянь:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot u_k; i = 1, n. \quad (3.46)$$

Критерій оптимальності є квадратичним функціоналом:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{k=1}^m c_k u_k^2 \right) dt. \quad (3.47)$$

Зауважимо, що обмеження на управління не накладаються.

Рівняння методу динамічного програмування матиме наступний вигляд:

$$\min_U \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{k=1}^m c_k u_k^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{j=1}^m b_{ik} \cdot u_k \right] \right\} = 0. \quad (3.48)$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні за всіма m компонентами вектора управління U , одержимо систему m рівнянь для визначення оптимального управління, що переводить об'єкт з початкового в заданий стан і мінімізують критерій (3.48):

$$2c_k \cdot u_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot b_{ik} = 0, k = 1, m. \quad (3.49)$$

Тоді

$$u_k^* = -\frac{1}{2c_k} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot b_{ik}, k = 1, m. \quad (3.50)$$

Отже, оптимальне управління визначається функцією Беллмана $I^*(X)$. Підставляємо (3.50) у рівняння (3.48):

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{k=1}^m c_k \cdot \left(-\frac{1}{2c_k} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot b_{ik} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot \left(\frac{1}{2c_k} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (3.51)$$

Після нескладних перетворень отримаємо нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними для визначення функції Беллмана $I^*(X)$.

Для задачі (3.46), (3.47) А.М.Летовим доведено, що розв'язок рівняння (3.51) слід шукати у вигляді квадратичної додатньо визначеної форми, диференційованої за всіма координатами:

$$I^*(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \quad (3.52)$$

де $C = [c_{ij}]$, $i = 1, n$; $j = 1, n$ симетрична матриця коефіцієнтів квадратичної форми. Будь-яку квадратичну форму можна записати в матричному вигляді:

$$I^*(X) = X^T \cdot C \cdot X, \quad (3.53)$$

де $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Згідно з критерієм Сильвестра квадратична форма (3.52) додатньо визначена тоді і тільки тоді, коли всі головні діагональні мінори її матриці C строго додатні.

Підставимо (3.52) у (3.50) і з умов рівності нулю одержимо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для обчислення c_{ij} . Оптимальне управління обчислимо з (3.54), як лінійні функції фазових координат

$$u_k^* = \sum_{i=1}^n k_i \cdot x_i, \quad (3.54)$$

що дозволяє побудувати замкнену систему оптимального управління.

Оскільки функція $I^*(X)$ є додатньо визначена квадратична форма, а її похідна, враховуючи (3.43), від'ємна:

$$\frac{dI^*}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot f_i(X, U) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = -f_0(X, U) \quad (3.55)$$

то функція $I^*(X)$ є функцією Ляпунова для системи (3.46). Отже, замкнена оптимальна система з управлінням (3.54) є асимптотично стійкою.

Приклад 3.3.

Для об'єкта

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU \end{aligned} \quad (1)$$

визначити оптимальне управління, що переводить його з початкового стану $X(t_0)$ в кінцевий $X(t_1)$ за умови відсутності обмежень на управління, і мінімізує функціонал:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (dx_1^2 + cU^2) dt \quad (2)$$

Рівняння динамічного програмування має вигляд:

$$\min_U \left[dx_1^2 + cU^2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \cdot (a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU) \right] = 0 \quad (3)$$

З умови рівності нулю першої похідної за управлінням від виразу (3)

$$2cU + \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \cdot b = 0 \quad (4)$$

знаходимо оптимальне управління

$$U^* = -\frac{b}{2c} \cdot \frac{\partial I^*}{\partial x_2}, \quad (5)$$

що залежить від функції Беллмана $I^*(X)$.

Підставляємо (5) в (3):

$$dx_1^2 + c \cdot \left(-\frac{b}{2c} \cdot \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \cdot (a_1 x_1 + a_2 x_2) + b \cdot \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{b}{2c} \cdot \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right) = 0$$

Після перетворень одержимо нелінійне рівняння з частинними похідними:

$$dx_1^2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \cdot (a_1 x_1 + a_2 x_2) - \frac{b}{4c} \cdot \left(\frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right)^2 = 0 \quad (6)$$

Згідно (3.52) його розв'язок шукаємо у вигляді квадратичної додатньо визначеної форми:

$$I^*(X) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

де $|c_{ij}|$ – симетрична матриця.

Враховуючи $c_{12}=c_{21}$ маємо

$$I^*(X) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + 2c_{12}x_1x_2. \quad (7)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*}{\partial x_1} &= 2c_{11}x_1 + 2c_{12}x_2, \\ \frac{\partial I^*}{\partial x_2} &= 2c_{22}x_2 + 2c_{12}x_1, \\ \left(\frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right)^2 &= 4c_{22}^2x_2^2 + 8c_{22}c_{12}x_1x_2 + 4c_{12}^2x_1^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставивши (8) у (6), одержимо тотожність

$$dx_1^2 + x_2(2c_{11}x_1 + 2c_{12}x_2) + (a_1x_1 + a_2x_2)(2c_{22}x_2 + 2c_{12}x_1) - b^2/4c(4c_{22}^2x_2^2 + 8c_{22}c_{12}x_1x_2 + 4c_{12}^2x_1^2) = 0,$$

яку після перетворення можна записати у вигляді

$$((d+2c_{12}a_1-(b^2/c)c^2_{12})c^2_{11}+(2c_{12}+2c_{22}a_2-(b^2/c)c^2_{22})x^2_2+(2c_{11}+2c_{22}a_1+2c_{12}a_2-(2b^2/c)c_{22}c_{12})x_1x_2=0. \quad (9)$$

З (9) отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{aligned} d+2c_{12}a_1-(b^2/c)c^2_{12} &= 0 \\ 2c_{12}+2c_{22}a_2-(b^2/c)c^2_{22} &= 0 \\ 2c_{11}+2c_{22}a_1+2c_{12}a_2-(2b^2/c)c_{22}c_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

З якої знаходимо c_{11} , c_{22} та c_{12} . З розв'язків системи (10) вибираємо коефіцієнти, що задовольняють критерій Сільвестра.

Тоді згідно з (4), оптимальне управління

$$U^* = -(b/2c) \partial I^* / \partial x_2 = K_1 x_1 + K_2 x_2 \quad (11)$$

де $K_1 = -c_{12}b/c$, $K_2 = -c_{22}b/c$ є лінійною функцією фазових координат. Це дозволяє збудувати замкнену систему управління з оптимальним лінійним регулятором у колі зворотного зв'язку.

3.4.2. Синтез оптимальних управлінь лінійними стаціонарними об'єктами за обмежень на управляючі дії

Розглянемо об'єкт, що описується наступною системою рівнянь

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u, \quad i = 1, n, \quad (3.56)$$

або в матричній формі

$$\dot{X} = AX + BU,$$

де X – n -вимірний вектор фазових координат;

A – $(n \times n)$ – вимірна матриця стану;

B – $(n \times 1)$ – вимірна матриця управлінь;

U – вектор управління, або просто управління.

Необхідно визначити управління $U(X)$, що переводить об'єкт із початкового стану $X(t_0)$ в кінцевий $X(t_1)$, і при якому досягає мінімуму квадратичний функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 dt, \quad (3.57)$$

або в матричній формі

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n X^T C X dt.$$

На управління накладається обмеження у вигляді $|U| \leq U_{\max}$.

Рівняння динамічного програмування запишеться таким чином:

$$\min_U \left[\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I^*}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j + b_i u) \right] = 0. \quad (3.58)$$

У задачі без обмежень на управління мінімум рівняння Беллмана досягається при $u \rightarrow -\infty$. Якщо в постановці задачі задано обмеження, то оптимальне управління має релейний характер:

$$U^* = -U_{\max} \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i (\partial I^*(X) / \partial x_i). \quad (3.59)$$

Для об'єкта (3.56) маємо функцію Ляпунова у вигляді позитивно визначеної квадратичної форми:

$$V(X) = X^T Q X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j. \quad (3.60)$$

Відомо, що оптимальне управління можна визначити так

$$U^* = -U_{\max} \text{sign}(B^T Q X) \quad (3.61)$$

чи

$$U^* = -U_{\max} \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i (\partial V(X) / \partial x_i), \quad (3.62)$$

де матриця Q визначається з умови

$$A^T Q + Q A = -C. \quad (3.69)$$

Приклад 3.

Дано рівняння об'єкта і функціонал

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b u, \\ I &= \int_{t_0}^{t_1} (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

які в матричній формі мають вигляд:

$$\dot{X} = A X + B U,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} X^T C X dt,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Необхідно знайти оптимальне управління, яке переводить об'єкт з початкового в кінцевий стан і мінімізує заданий функціонал за умови обмеження на управління $|u| < U_{\max}$.

Запишемо рівняння динамічного програмування:

$$\min [c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + (\partial I^* / \partial x_1) x_2 + \partial I^* / \partial x_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + b u)] = 0.$$

Тоді згідно з (3.59) одержимо:

$$u^* = -U_{\max} \text{sign}(\partial I^* / \partial x_2) b,$$

чи згідно (3.61)

$$u^* = -U_{\max} \text{sign}b(\partial V(X)/\partial x_2). \quad (2)$$

Функцію Ляпунова (3.60) приймаємо у вигляді:

$$V(X) = X^T Q X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_1 x_1^2 + 2q_2 x_1 x_2 + q_4 x_2^2, \quad (3)$$

де Q – симетрична матриця, тобто $q_2 = q_3$.

Визначимо цю матрицю з умови (3.63):

$$A^T Q + Q A = -C.$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 q_2 & a_1 q_4 + q_1 + a_2 q_2 \\ a_1 q_4 + q_1 + a_2 q_2 & q_2 + a_2 q_4 + q_2 + a_2 q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2a_1 q_2 &= -c_1 \\ a_1 q_4 + q_1 + a_2 q_2 &= 0 \\ 2q_2 + 2a_2 q_4 &= c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

з якої отримуємо значення коефіцієнтів q_1, q_2, q_4 .

З урахуванням (2) та (3) отримаємо оптимальне управління:

$$u^* = -U_{\max} \text{sign}b(\partial V(X)/\partial x_2) = -U_{\max} \text{sign}2b(q_2 x_1 + q_4 x_2). \quad (5)$$

Схема оптимальної системи управління наведена на рис.3.2.

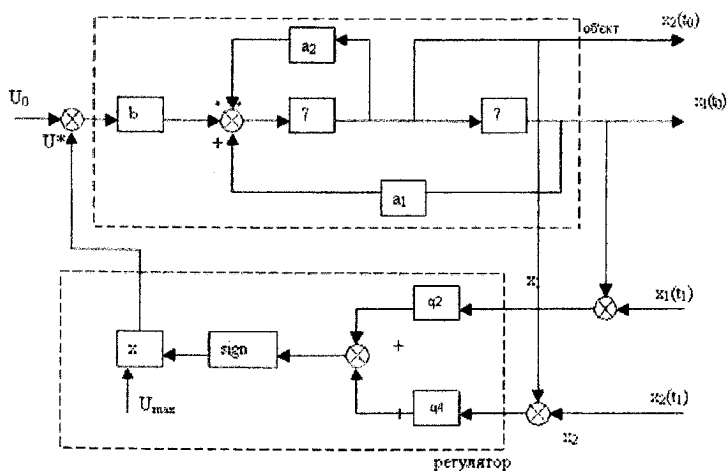


Рис. 3.2. Приклад системи оптимального управління

Схема ілюструє застосування оптимального закону управління, а саме, управління у вигляді функцій фазових координат динамічної системи. Аналогічний закон управління можна отримати, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна. Застосування методу класичного варіаційного числення для цього прикладу неможливо, оскільки в класичній постановці задачі оп-

тимізації не передбачено обмежень для змінних стану та управління, а також розривів першого роду.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні труднощі використання методу динамічного програмування(ДП).
2. В чому полягає суть принципу оптимальності Беллмана.
3. Наведіть приклад вирішення задачі дискретного дискретного програмування.
4. Назвіть основні особливості стохастичних задач дискретного програмування.
5. Наведіть основне рівняння Беллмана.
6. Наведіть особливості вирішення методом дискретного програмування оптимальних задач з квадратичним функціоналом.
7. У чому полягає особливість вирішення оптимальних задач методом дискретного програмування при обмеженні на управляючі дії.

Контрольні тести

1. Суть принципу оптимальності Беллмана полягає в тому, що:
 - a. оптимальне управління визначається кінцевою метою і станом системи в даний момент часу незалежно від того, яким чином система прийшла в цей стан;
 - b. оптимальне управління визначається кінцевою метою і станом системи в даний момент часу з урахуванням того, яким чином система прийшла в цей стан;
2. Основною відмінністю стохастичного методу динамічного програмування від детермінованого є:
 - a. відсутність жорсткої програми дій;
 - b. відсутність єдиного умовного оптимального управління на кожній ділянці;
 - c. одночасне виконання умов a і b.

4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

4.1. Основні відомості про принцип максимуму

При порушенні умови неперервності та наявності обмежень на управління застосування класичного варіаційного числення ускладнюється. Ці труднощі можна обійти за допомогою принципу максимуму, запропоновано-го Л.С.Понтрягіним та його учнями. Строге доведення принципу базується на теорії множин та функціонального аналізу. Далі наведемо лише спрощене доведення принципу максимуму, приділяючи увагу трактуванню його геометричного та фізичного змісту.

Спочатку зробимо кілька попередніх зауважень. Запишемо рівняння об'єкту в наступному вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(X, U), \quad i = 1, n, \quad (4.1)$$

де $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – n -вимірний вектор стану; $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – вектор управління.

Задано критерій оптимальності:

$$I(X, U) = \int_{t_0}^{t_1} f_0[X(t), U(t)] dt \quad (4.2)$$

Введемо нову координату:

$$\frac{dx_0}{dt} = f(X, U), \quad (4.3)$$

Таким чином отримаємо систему з $(n+1)$ рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(X, U), \quad i = 0, n, \quad (4.4)$$

Згідно системи (4.4) матимемо $(n+1)$ – вимірний фазовий простір, а система рівнянь (4.4) запишеться у векторній формі як:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (4.5)$$

де X – вектор в $(n+1)$ -вимірному просторі.

Припустимо, що управління $U(t)$ є оптимальним. Тоді $X(t)$ буде розв'язком рівняння при відомих початкових умовах. Покажемо цей розв'язок графічно в тривимірному ($n = 3$) фазовому просторі. Початкові зна-

чення координат у момент $t = t_0$ рівні $x_0 = 0, x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}$. Кінцеве значення при $t = t_1, x_0 = I_1, x_1 = x_{11}, x_2 = x_{21}$. Проведемо через точку з координатами $(0, x_{11}, x_{21})$ пряму Π , паралельну вісі $(0, x_0)$. В результаті дії управління отримаємо дві траєкторії: одну в площині (x_1, x_2) , яка в момент t_0 виходить з початкової точки $(0, x_{10}, x_{20})$ і в момент t_1 проходить точку $(0, x_{11}, x_{21})$ і другу в просторі всіх координат, яка виходить з початкової точки $(0, x_{10}, x_{20})$ і перетинає при $t = t_1$ пряму Π (рис.4.1).

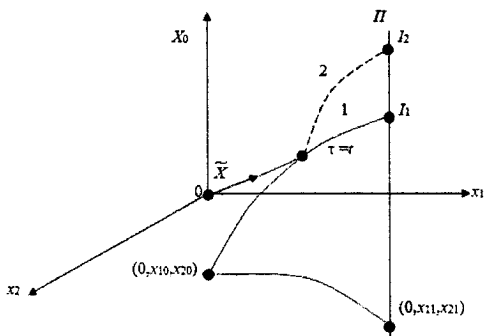


Рис. 4.1. Графічна ілюстрація принципу максимуму

Якщо на прямій Π відкласти значення функціоналу I , то фазова траєкторія, що пересікає пряму Π , визначає значення функціоналу I_1 в момент t_1 . Для оптимального управління відрізок I_1 повинен мати екстремальне значення. Отже, рис.4.1 дає графічне зображення розв'язку рівняння (4.4). Для цього значення необхідно знайти в $(n+1)$ -вимірному просторі координат оптимальні траєкторії і відповідні їм управління.

Крім неперервного управління будемо розглядати і кусково-неперервне. Це значить, що варіація функції i , зокрема, $U(t)$, може бути великою через розриви першого роду, тому буде великою і варіація функціонала. В лінійному плані такі варіації розглядати вже не можна. Однак, розробники принципу максимуму запропонували так звану голкову варіацію. При цьому варіація функції розглядається у вигляді імпульса, що діє дуже короткий час τ (рис.4.2).

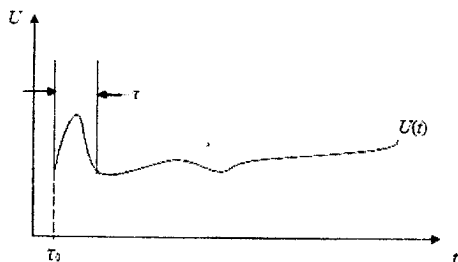


Рис.4.2. Голкова варіація

Імпульс може бути за амплітудою дуже великим, припустимо $2U$, але оскільки він діє дуже короткий час, то варіація функціоналу δI буде малою. Тому приріст функціоналу можна розглядати в лінійному плані, що значно спрощує розв'язок задачі.

4.1.1. Визначення принципу максимуму

Демо визначення оптимального управління для наступних умов. Задано рівняння об'єкту з n -вимірним вектором стану:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (4.6)$$

і функціонал виду:

$$I(X, U) = \int_0^T f_0[X(t), U(t)] dt \rightarrow \min \quad (4.7)$$

Це задача з фіксованим часом і вільним кінцем траєкторії. Їй відповідає випадок, коли за умови, що при $t_1 = T = \text{const}$, координати $x_1(T)$ та $x_2(T)$ можуть приймати будь-які значення (рис.4.1). При зміні закону управління $U(t)$ буде змінюватись як функціонал $I(T) = x_0(T)$, так і координати $x_1(T)$ та $x_2(T)$. Із допустимих управлінь виберемо те, для якого буде виконуватись умова (4.7).

Введемо нову координату:

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(X, U), \quad (4.8)$$

Розглянемо задачу в $(n+1)$ -вимірному просторі:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (4.9)$$

де $\tilde{X} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Початкові умови задано у вигляді вектора $\tilde{X}(0) = (0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Припустимо, що знайдено оптимальне управління і траєкторія. Позначимо їх відповідно $U^*(t)$ та $X^*(t)$. Оптимальна траєкторія показана на рис.4.1 (лінія 1). В момент $t = T$ оптимальна траєкторія проходить через точку $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$ і відсікає на лінії Π відрізок I_{\min} , тобто $x_{0}^*(T) = I_{\min}$.

В момент $t = \tau (0 \leq \tau < T)$ введемо голкову варіацію ε за управлінням. В результаті варіації подальша траєкторія відрізняється від оптимальної (пунктирна лінія 2 на рис. 4.1). На прямій Π нова траєкторія відсікає відрізок I_2 , для якого $I_2 > I_{\min}$, бо I_{\min} відсікається оптимальною траєкторією.

Запишемо варіацію функції $\tilde{X}(t)$:

$$\delta \tilde{X}(t) = \tilde{X}(t) - \tilde{X}^*(t) = \varepsilon \left(\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{X}^*}{\partial t} \right) \right)_{t=\tau} = \varepsilon \{ f(X(\tau), U(\tau)) - f(X^*(\tau), U^*(\tau)) \}. \quad (4.10)$$

Оскільки час ε досить малий, то $\delta \tilde{X}(t)$ можна наближено записати як добуток швидкості $\partial \tilde{X} / \partial t$ на ε . Виражаємо $\tilde{X}(t)$ через варіацію та оптимальну траєкторію:

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}^*(t) + \delta \tilde{X}(t). \quad (4.11)$$

Підставляємо (4.11) в ліву частину рівняння узагальненого об'єкта (4.9):

$$\partial(\tilde{X}^*(t) + \delta \tilde{X}(t)) / \partial t = f(X(t), U(t))$$

і переходимо до координатного запису:

$$\frac{\partial(\tilde{x}_i^*(t) + \delta \tilde{x}_i(t))}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 0, n. \quad (4.12)$$

Розклавши отриману функцію (4.12) в ряд Тейлора, після ряду перетворень маємо:

$$\partial \delta x_j / \partial t = \sum_{i=0}^n (\partial f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) / \partial x_i) \delta x_i, \quad j = 0, n, \quad (4.13)$$

Цей вираз є лінійною частиною приросту аргумента функціоналу.

Для варіації функціоналу відповідне рівняння має вигляд:

$$\partial \delta x_0 / \partial t = \sum_{i=0}^n (\partial f_0(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) / \partial x_i) \delta x_i, \quad j = 0, n, \quad (4.14)$$

Тепер визначимо варіацію функціоналу в кінці траєкторії в момент $t = T$:

$$\delta I_{t=T} = I_2 - I_{\min} > 0.$$

Це співвідношення можна записати таким чином:

$$-\delta I_{t=T} = -\delta x_{0 \ t=T} \leq 0.$$

Автори методу запропонували ввести вектор $\tilde{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$ таким чином, щоб при $t = T$ скалярний $\delta X(t)$ на $\tilde{\psi}(t)$ дорівнював $-\delta x_0(T)$:

$$-\delta \tilde{I}_{t=T} = -\delta x_0(T) \leq \delta X(T), \quad \psi(T) \geq \sum_{i=0}^n \delta x_i(T) \psi_i(T) \leq 0. \quad (4.15)$$

Вектор спряжених функцій $\tilde{\psi}(t)$ при цьому складається з неперервних функцій $\psi_i(t)$, що мають всюди, крім точок розриву управління неперервні похідні за t , та вводиться за умови:

$$\psi_0(t) = -1, \quad \psi_1(T) = \psi_2(T) = \dots = \psi_n(T) = 0. \quad (4.16)$$

Покажемо, що для неоптимального управління $-\delta I < 0$ і тільки при оптимальному $-\delta I = 0$. Отже, для оптимального управління необхідно мати нульову варіацію функціоналу. Зв'яжемо спряжений вектор $\tilde{\psi}(t)$ з управлінням і координатами об'єкта. Знайдемо такий вектор $\tilde{\psi}(t)$, що задовольняє умову:

$$\delta \tilde{X}(t) \tilde{\psi}(t) \geq \delta \tilde{X}(T) \tilde{\psi}(T) = -\delta I(T) = \text{const}. \quad (4.17)$$

Продиференціюємо за часом (4.17) і отримуємо:

$$\partial \langle \delta \tilde{X}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle \partial \delta \tilde{X}(t) / \partial t, \tilde{\psi}(t) \rangle + \langle \delta X(t), \partial \tilde{\psi}(t) / \partial t \rangle = 0. \quad (4.18)$$

Тепер перейдемо до координатного запису:

$$\sum_{j=0}^n (\partial \delta x_j(t) / \partial t) \psi_j(T) + \sum_{i=0}^n \delta x_i(t) (\partial \psi_i(t) / \partial t) = 0. \quad (4.19)$$

Підставивши значення похідної $(\partial \delta x_j(t) / \partial t)$ з (4.13) в (4.19), маємо:

$$\sum_{j=0}^n \psi_j(t) \sum_{i=0}^n \delta f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) / \partial x_i + \sum_{i=0}^n \delta x_i(t) (\partial \psi_i(t) / \partial t) = 0. \quad (4.20)$$

Змінюючи порядок слідування в (4.20) та виносячи за дужки $\sum_{i=0}^n \delta x_i$

одержимо:

$$\sum_{i=0}^n \delta x_i(t) \left[\sum_{j=0}^n \psi_j(t) (\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) / \partial x_i) \right] = 0. \quad (4.21)$$

Оскільки δx_i можуть приймати будь-які значення, то рівність (4.21) задовольняється, коли вираз у квадратних дужках дорівнює нулю. Тоді остаточно маємо:

$$\partial \psi_i(t) / \partial t = - \sum_{j=0}^n (\partial f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) / \partial x_i) = \psi_i(t). \quad (4.22)$$

Звернемось знову до варіації функціоналу:

$$-\delta I = \langle \delta \tilde{X}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = 0. \quad (4.23)$$

Запишемо варіацію $\delta \tilde{X}(t)$ згідно (4.10), підставивши в (4.23), і скоротимо на ε :

$$\langle f[X(t), U(t)], \tilde{\psi}(t) \rangle - \langle f[X^*(t), U^*(t)], \tilde{\psi}(t) \rangle = 0. \quad (4.24)$$

Введемо функцію

$$\tilde{H} = \langle f[X(t), U(t)], \psi(t) \rangle = \sum_{i=0}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) \psi_i. \quad (4.25)$$

Тоді з рівності (4.24) витікає, що величина \tilde{H} досягає максимуму тоді, коли управління оптимальне, тобто $U(t) = U^*(t)$. Отже, необхідно в будь-який момент мати таке значення $U^*(t)$, при якому функція H досягає максимуму:

$$H(\tilde{X}, U, \psi) = \sum_{i=0}^n f_i(X, U) \psi \rightarrow \max. \quad (4.26)$$

Це і визначило назву принципу оптимізації як *принцип максимуму*. Введена функція H має певний фізичний зміст. Якщо аналізувати оптимальне управління для консервативних механічних систем, то функція H є повною енергією системи, яка повинна залишатись постійною і максимальною в процесі управління. Функції ψ_i є імпульсами і задають напрямок руху. Для неконсервативних систем, припустимо електричних, функція H є потужністю, а функція ψ_i – імпульсами. Звідси чіткий фізичний зміст оптимального управління: необхідно об'єкту надавати таку кількість енергії, яка забезпечила б екстремум функціоналу та заданий закон руху.

4.1.2. Геометрична інтерпретація принципу максимуму

Принципу максимуму можна дати наступну геометричну інтерпретацію. Нехай стоїть задача про переведення за мінімальний час точки з деякого початкового положення O в певне кінцеве K (рис. 4.3).

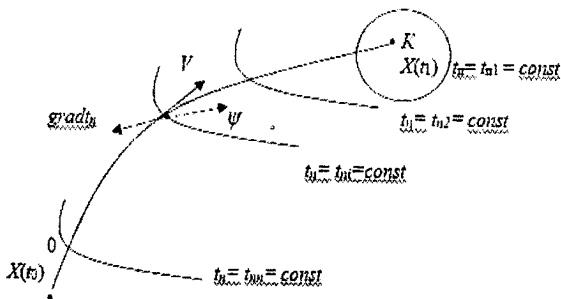


Рис.4.3. Геометрична інтерпретація принципу максимуму

Кожній точці фазового простору в околі точки K відповідають певні оптимальна траєкторія і мінімальний час переходу в цю точку. Навколо кінцевої точки можна побудувати поверхні, що є геометричним місцем точок з однаковим мінімальним часом t_{n1} переходу в цю точку. Такі поверхні називаються ізохронами. Очевидно, що оптимальна за швидкодією траєкторія з точки O в точку K повинна бути максимально близькою до нормалей до ізохрон, наскільки це дозволяють обмеження, які накладаються на координати об'єкта управління.

Дійсно, будь-який рух вздовж ізохрони збільшує час процесу, бо означає витрати часу без скорочення ділянки часу, що залишається до моменту досягнення кінцевої точки. Математично ця умова оптимальності траєкторії означає, що впродовж всієї траєкторії скалярний добуток вектора швидкості $V = \partial X / \partial t = f(X, U)$ на вектор, обернений градієнту часу переходу в кінцеву точку, повинен бути максимальним. Якщо позначити цей добуток через H , а вектор обернений градієнту часу переходу через $\bar{\psi} = -\text{grad } t_n$, то ця умова може бути записана наступним чином:

$$H = \langle \bar{\psi}, U \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i v_i \rightarrow \max. \quad (4.25)$$

де ψ_i та v_i — координати векторів $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ і $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, тобто умовою оптимальності є максимум проекції вектора V на напрямок $\bar{\psi}$. Сформульована умова і є принципом максимуму.

У випадку довільного критерію оптимальності I поверхні постійних значень цього критерію називаються ізоповірхами. Умова оптимальності

при цьому зберігається попередня, тобто у вигляді максимального скаляра \tilde{H} з тією різницею, що в рівняння об'єкта (4.6) додається нова координата x_0 згідно рівняння (4.8), мінімізація кінцевого значення якої визначає мету управління.

Практичний метод визначення оптимального управління $U^*(t)$ та відповідної оптимальної траєкторії $X^*(t)$ не потребує визначення ізоповерхонь. Необхідний для розв'язання задачі вектор $\tilde{\psi}$ знаходимо без цього за допомогою наступних так званих спряжених рівнянь, справедливих для оптимальної траєкторії:

$$\partial \psi_i / \partial t = \sum_{j=0}^n \psi_j (\partial v_j / \partial x_i), \quad i = 0, n. \quad (4.26)$$

Рівняння об'єкта та спряжені рівняння можна записати у вигляді рівнянь Гамільтона, враховуючи, що відповідно (4.25)

$$\partial \tilde{H} / \partial \psi_i = v_i \quad \text{і} \quad \partial \tilde{H} / \partial x_i = \sum_{j=0}^n \psi_j (\partial v_j / \partial x_i), \quad i = 0, n.$$

Тоді

$$\partial x_i(t) / \partial t = \partial \tilde{H}(X, U, \psi) / \partial \psi_i, \quad i = 0, n. \quad (4.27)$$

$$\partial \psi_i(t) / \partial t = -\partial \tilde{H}(X, U, \psi) / \partial x_i, \quad i = 0, n. \quad (4.28)$$

Перші рівняння – це рівняння об'єкта, а другі – спряжені рівняння.

Треба знайти управління $U(t)$, що дає в результаті спільного розв'язування рівнянь об'єкта (4.27) та спряжених рівнянь (4.28) таку траєкторію $X(t)$, для якої значення \tilde{H} в її точках будуть максимальними.

4.1.3. Порядок розв'язування оптимізаційної задачі за допомогою принципу максимуму

Задано рівняння об'єкта у вигляді:

$$\dot{x}_i(t) / \partial t = f_i(X, U), \quad i = 1, n, \quad (4.29)$$

і критерій оптимальності:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U) dt \rightarrow \min. \quad (4.30)$$

Введемо функцію x_0 як

$$\dot{x}_0(t) / \partial t = f_0(X, U), \quad (4.31)$$

і вектор $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$, що задається лінійними однорідними рівняннями:

$$\partial \psi_i(t) / \partial t = - \sum_{j=0}^n (\partial f_j(X, U) / \partial x_i) = \psi_j(t), \quad i = 0, n. \quad (4.32)$$

Якщо ввести тепер допоміжну функцію

$$\tilde{H}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n; x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{j=0}^n \psi_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (4.33)$$

то всі рівняння (4.29), (4.31), (4.32) можна об'єднати в одну систему типу відомої з механіки системи рівнянь Гамільтона:

$$\partial x_i(t) / \partial t = \partial \tilde{H}(X, U, \psi) / \partial \psi_i, \quad i = 0, n. \quad (4.34)$$

$$\partial \psi_i(t) / \partial t = - \partial \tilde{H}(X, U, \psi) / \partial x_i, \quad i = 0, n. \quad (4.35)$$

Тоді сформулюємо принцип максимуму.

Для оптимальності системи, тобто для отримання мінімуму функціоналу (4.30), необхідно існування таких ненульових неперервних функцій $\tilde{\psi} = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, що для будь-якого t із заданого інтервалу $t_0 \leq t \leq t_1$ значення \tilde{H} як функції змінних u_1, u_2, \dots, u_m , в заданій області їх допустимих значень, досягає максимуму:

$$\tilde{H} = F(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.36)$$

причому F і ψ_0 стали в часі і

$$F \geq 0 \text{ та } \psi_0 \leq 0. \quad (4.37)$$

Для найпростішого випадку оптимальності – оптимальності за швидкодією – маємо $f_0 \equiv 1$, а H приймає вигляд :

$$H = \psi_0 + H, \text{ де } H = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m). \quad (4.38)$$

В цьому випадку штучна величина x_0 не потрібна. Система рівнянь Гамільтона приймає вигляд:

$$\partial x_i / \partial t = \partial H / \partial \psi_i, \quad i = 1, n. \quad (4.39)$$

$$\partial \psi_i / \partial t = - \partial H / \partial x_i, \quad i = 1, n. \quad (4.40)$$

Для оптимальності системи за швидкодією необхідно існування таких ненульових неперервних функцій $(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$, що для будь-якого t із заданого інтервалу $t_0 \leq t \leq t_1$ величина H як функція змінних u_1, u_2, \dots, u_m , в заданій області їх допустимих значень досягає максимуму

$$H = F(\psi_1, \dots, \psi_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.41)$$

причому величина F стала в часі і $F \geq 0$.

Рівняння (4.39) і (4.40) можна розглядати як рівняння Гамільтона консервативної механічної системи, в якій x_i – відповідно є координати положення, ψ_i – координати швидкості. В фіктивній системі відрізок часу між двома положеннями припускається мінімальним, якщо енергія H системи максимальна вздовж шляху. Тому u_1, u_2, \dots, u_m (значення яких обмежені) обираємо так, щоб

$$\max H(x_1, x_2, \dots, x_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n; u_1, u_2, \dots, u_m),$$

що надає

$$U_j^* = U_j(x_1, x_2, \dots, x_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \quad j = 1, n. \quad (4.42)$$

Одержавши U_j з (4.42), розв'язуємо рівняння (4.39), (4.40) з початковими умови $x_i(t_0) = 0$ (бо початок координат переносимо в кінцеве положення рівноваги) і $\psi_i(t_0) = \theta_i$, що і дає в результаті:

$$x_i = x_i(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad i = 1, n \quad (4.43)$$

$$\psi_i = \psi_i(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad i = 1, n. \quad (4.44)$$

Це відповідає переміщенню по оптимальному шляху від початку координат в просторі у зворотному часі $-\infty \leq t \leq 0$. Підставляючи (4.43) та (4.44) в (4.42), одержимо:

$$U_j^* = U_j(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad j = 1, n. \quad (4.45)$$

Виключаючи $t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ з (4.43) та (4.45), знаходимо оптимальне управління (регулятор):

$$U_j^* = U_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, n. \quad (4.46)$$

Функція Гамільтона (4.38) на оптимальній траєкторії набуває ряд властивостей. Відзначимо деякі з них.

1. Для автономних об'єктів (4.29), коли функції $f_i(X, U)$, $i = 0, n$ явно не залежать від часу t , гамільтоніан $\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{\psi})$ є постійними для будь-якого $t_0 \leq t \leq T$.
2. Значення гамільтоніана в кінці оптимальної траєкторії в заданих з нефіксованим часом управління T дорівнює нулю.

Ці властивості використовуються як крайові умови при розв'язанні задач. Універсального методу вирішення крайових задач сьогодні поки що не існує. Складність полягає в тому, що невідомі початкові умови спряжених

функцій $\psi_i(t=t_0)$, $i=1, n$, а отже неможливо інтегрувати систему рівнянь (4.43), (4.44) в прямому часі.

Один з можливих підходів до розв'язування такої задачі є метод, відомий як *метод стрільби*. Для заданих $X(t = t_0)$ вибирають довільні значення $\psi(t = t_0)$ і розв'язуючи рівняння (4.43), (4.44) для значень управління, що визначені з умови (4.26), перевіряють потрапляння об'єкта за час T в заданий кінцевий стан $X(T)$. Якщо це не вдалося, процес продовжують доти, поки знайдеться такий набір початкових умов $\psi(t = t_0)$, для яких буде виконуватись умова потрапляння з прийнятним ступенем точності.

Для прискорення вирішення крайових задач *методом стрільби* застосовують різні методи, наприклад, градієнтні, коли $\psi(t = t_0)$ вибирають з умови мінімуму відстані до заданого $X(t = t_1)$.

4.1.4. Умови трансверсальності

Вище розглядалось управління, коли граничні точки на початку та на кінці управління строго орієнтовані в фазовому просторі. Така задача, по аналогії з класичним варіаційним численням, *називається задачею з закріпленими кінцями*. Однак, початкове та кінцеве положення вектора X при t_0 і t_1 може знаходитись на деяких поверхнях в фазовому просторі. Знову потрібно знати ті точки на поверхнях, через які повинна пройти оптимальна траєкторія. Ці точки знаходяться з умов *трансверсальності* на кінцях траєкторії. Перш ніж ввести поняття умов трансверсальності необхідно зробити кілька зауважень.

Множина всіх точок $X=(x_0, x_1, \dots, x_n)$, яка задана рівнянням

$$f(X)=f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (4.53)$$

називається гіперповерхнею простору X , а співвідношення (4.53) - рівнянням цієї гіперповерхні. Якщо функція $f(X)$ має перші частинні похідні за x_i ($i=1, n$), то вектор

$$\text{grad } f(X)=(\partial f/\partial x_0, \partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n) \quad (4.54)$$

називається градієнтом функції $f(X)$. Точки, в яких $\text{grad } f(X)$ приймає значення нуль, називаються особливими точками. Гіперповерхня, що не має особливих точок, називається гладкою гіперповерхнею. Далі розглядатимемо саме гладкі гіперповерхні.

Якщо функція $f(X)$ лінійна відносно координат системи:

$$f(X) = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad (4.55)$$

то сукупність її точок в просторі утворює гіперплощину. Вектор $\text{grad } f_1(X)$ у всіх точках гіперплощини однаковий:

$$\text{grad } f(X) = (a_0, a_1, \dots, a_n) \quad (4.56)$$

Візьмемо на гіперповерхні R точку N і визначимо в ній градієнт (рис.4.4). Якщо тепер через точку N провести гіперплощину M так, щоб вона була нормальна до $\text{grad } f(N)$, то це буде дотична гіперплощина до поверхні в точці n . Таким чином, оптимальна траєкторія і оптимальне управління повинні бути такими, щоб вектор $\tilde{X}(t)$ в початковій точці N_0 і в кінцевій N_1 був паралельним векторам градієнта в цих точках чи ортогональним до дотичних векторів, що лежать в дотичних гіперплощинах, які проходять через ці точки. Таким чином, умови трансверсальності для оптимального процесу зводяться до умов ортогональності векторів $\tilde{X}(t_0)$ і $\tilde{X}(t_1)$ до дотичних гіперплощин в деяких точках гіперповерхонь. Умови ортогональності і дають можливість визначити точки $N(t_0)$ і $N(t_1)$ на гіперповерхнях і тим самим визначити оптимальне управління і оптимальну траєкторію.

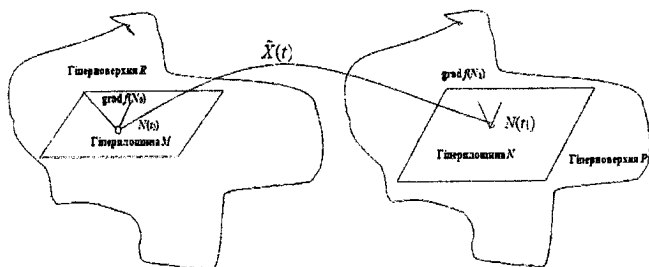


Рис. 4.4. Графічна ілюстрація принципу трансверсальності

4.2. Розв'язання задачі оптимізації у відсутності обмежень на управління

Задано рівняння об'єкта

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + bU. \quad (4.57)$$

і критерій оптимальності

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (x_1^2 + x_2^2 + cU^2) dt \quad (4.58)$$

Потрібно визначити оптимальне управління $U^*(t)$, що переводить об'єкт з початкового $X(t_0)$ в кінцевий стан $X(t_1)$ за встановлений час $(t_1 - t_0) = T$ за умови мінімуму функціоналу (4.58). На управління обмежень не накладається.

Вводимо додаткову координату:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} (dx_1^2 + d_2 x_2^2 + cU^2). \quad (4.59)$$

Тоді для узагальненого об'єкту $\tilde{X}(t) = (x_0, x_1, x_2)$ можна визначити за формулою (4.32) при $i = j = 0, 2$ систему спряжених функцій:

$$\dot{\psi}_0 = -[\partial / \partial x_0 (d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + cU^2) \psi_0(t) + (\partial x_2 / \partial x_0) \psi_1(t) + \partial / \partial x_0 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU) \psi_2(t)];$$

$$\dot{\psi}_1 = -[\partial / \partial x_1 (d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + cU^2) \psi_0(t) + (\partial x_2 / \partial x_1) \psi_1(t) + \partial / \partial x_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU) \psi_2(t)];$$

$$\dot{\psi}_2 = -[\partial / \partial x_2 (d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + cU^2) \psi_0(t) + (\partial x_2 / \partial x_2) \psi_1(t) + \partial / \partial x_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU) \psi_2(t)];$$

Після перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= 2d_1 x_1 \psi_0(t) - a_2 \psi_2(t), \\ \dot{\psi}_2 &= 2d_2 x_2 \psi_0(t) - \psi_1(t) - a_2 \psi_2(t). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Визначимо функцію Гамільтона з (4.38) при $i = j = 0, 2$:

$$\tilde{H}(X, U, \tilde{\psi}) = (d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + cU^2) \psi_0(t) + x_2 \psi_1(t) + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + bU) \psi_2(t). \quad (4.61)$$

Оскільки на управління немає обмежень, то з умови максимуму гамільтоніана

$$\partial \tilde{H}(X, U, \tilde{\psi}) / \partial U = 2cU \psi_0(t) + bU \psi_2(t) = 0 \quad (4.62)$$

одержимо

$$U^* = (b / 2c) (\psi_2(t) / \psi_0(t)) = 0. \quad (4.63)$$

З системи рівнянь (4.60) видно, що функція $\psi_0(t) = const$.

Враховуючи (4.16), одержимо $\psi_0(t) = -1$, а значить

$$U^* = (b / 2c) (\psi_2(t)). \quad (4.64)$$

Запишемо систему рівнянь Гамільтона після підстановки (4.64) в (4.57).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2; \\
 \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b \psi_2; \\
 \dot{\psi}_1 &= 2d_1 x_1 - a_1 \psi_2; \\
 \dot{\psi}_2 &= 2d_2 x_2 - \psi_1 - a_2 \psi_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.65}$$

де $b_1 = b_2 / 2c$. Характеристичне рівняння системи (4.65) має вид:

$$|\Psi - pE| = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - p & 0 & b_1 \\ 2d_1 & 0 & -p & a_a \\ 0 & 2d_2 & -1 & a_2 - p \end{vmatrix} = p^4 + q_1 p^2 + q_2 = 0.$$
(4.66)

де Ψ – матриця стану системи (4.65), $q_1 = a_2^2 - 2a_1 - 2d_1 b_1$; $q_2 = a_1^2 + 2d_2 b_1$.

Характеристичне рівняння (4.66) має чотири корені:

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{q_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q_1^2 - 4q_2}},$$

два з яких будуть «лівими» і два «правими». Якщо $q_1^2 > 4q_2$, то корені дійсні, для $q_1^2 < 4q_2$ – комплексні.

Невимушений розв'язок системи (4.65) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 x_i &= \sum_{j=1}^4 C_{ij} e^{p_j t}, \quad i=1,2, \\
 \psi_i &= \sum_{j=1}^4 D_{ij} e^{p_j t}, \quad i=1,2,
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

де C_{ij} та D_{ij} – сталі інтегрування, що знаходяться з крайових умов для x_i та ψ_i .

Для побудови стійкої системи управління враховуємо в (4.67) тільки додатки з «лівими» коренями p_1 та p_2 . Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}, \\
 x_2(t) &= c_1 p_1 e^{p_1 t} + c_2 p_2 e^{p_2 t},
 \end{aligned}
 \tag{4.68}$$

Значення $\psi_1(t)$ визначимо у вигляді:

$$\psi_1(t) = D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t},$$
(4.69)

а з третього рівняння системи (4.65) одержимо:

$$\psi_2(t) = 1/a_1 (2d_1 x_1 - \psi_1),$$

або $\psi_2(t) = ((2d_1/a_1)C_1 - (1/a_1)p_1 D_1) e^{p_1 t} + ((2d_1/a_1)C_1 - (1/a_1)p_2 D_2) e^{p_2 t}$.

Отже, отримаємо розв'язок системи (4.65) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \\
 x_2(t) &= C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}, \\
 \psi_1(t) &= D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t}, \\
 \psi_2(t) &= D_3 e^{p_1 t} + D_4 e^{p_2 t},
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

де $D_3 = (2 d_1/a_1)/C_1 - (1/a_1)D_1 p_1$; $D_4 = (2d_2/a_1)/C_2 - (1/a_1)D_2 p_2$. Коефіцієнти C_1, C_2, D_1, D_2 визначаємо з крайових умов.

Припустимо, що траєкторія має фіксовані кінці:

$$X(t_0 = 0) = X^0; X(t_1 = T) = X^1,$$

і час переведення об'єкта задано $t_1 - t_0 = T$. Тоді

$$\begin{aligned}
 x_1(t_0 = 0) = x_{10}; x_2(t_0 = 0) = x_{20}; x_1(t_1 = T) = x_{11}; \\
 x_2(t_1 = T) = x_{21}; \psi_1(T) = \psi_2(T) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

З (4.70) одержимо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_2 &= x_1(t_0 = 0), \\
 C_1 p_1 e^{p_1 T} + C_2 p_2 e^{p_2 T} &= x_1(t_1 = T),
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t} &= 0, \\
 p_1 D_1 e^{p_1 t} + p_2 D_2 e^{p_2 t} &= M,
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

де $M = 2d_1(C_1 e^{p_1 T} + C_2 e^{p_2 T})$.

Знаючи C_1, C_2, D_1, D_2 знаходимо з (4.64) оптимальне управління, як:

$$U^*(t) = (b/2c)\psi_2(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}, \tag{4.74}$$

де $k_1 = (b/2a_1c)(2d_1C_1 - p_1D_1)$; $k_2 = (b/2a_1c)(2d_2C_2 - p_2D_2)$.

Як видно з (4.74) оптимальне управління є функцією часу. Це дозволяє побудувати розімкнену програмну оптимальну систему, що переводить об'єкт (4.57) із початкового стану $X(t_0 = 0)$ в заданий кінцевий стан $X(t_1 = T)$ за час $t_1 - t_0 = T$.

Щоб визначити оптимальне управління як функції фазових координат об'єкта, із системи (15) обчислимо $e^{p_1 t}$ та $e^{p_2 t}$ через $x_1(t)$ і $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 e^{p_1 t} &= (x_1(t)p_2 - x_2(t))/(c_1(p_2 - p_1)), \\
 e^{p_2 t} &= (x_2(t) - x_1(t)p_1)/(c_2(p_2 - p_1)).
 \end{aligned}
 \tag{4.75}$$

Ці значення підставимо в четверте рівняння системи (4.70)

$$\psi_2(t) = l_1 x_1(t) + l_2 x_2(t), \tag{4.76}$$

де

$$l_1 = (2d_1 / a_1) + p_1 p_2 / (a_1 C_1 C_2 (p_2 - p_1)) (C_1 D_2 - C_2 D_1),$$

$$l_2 = (p_1 D_1 C_2 - p_2 C_1 D_1) / (a_1 C_1 C_2 (p_2 - p_1)).$$

Тоді оптимальне управління (4.64) буде мати вигляд

$$U^*(X) = (b/2c)\psi_2(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), \quad (4.77)$$

де $k_1 = (b/2c)l_1$; $k_2 = (b/2c)l_2$.

Структурна схема замкненої оптимальної системи наведена на рис. 4.5.

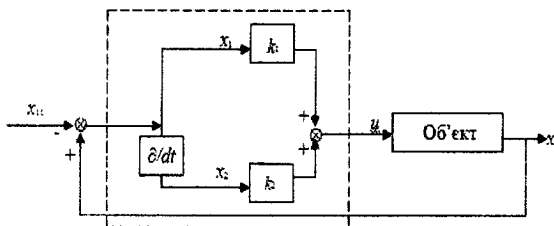


Рис.4.5. Структурна схема замкненої оптимальної системи

Розглянемо ще один шлях вирішення цієї задачі. Якщо час T переведення об'єкта на задано, то початкових умов не достатньо для визначення всіх постійних інтегрування рівнянь (4.72) і (4.73). У цьому випадку з перших двох рівнянь (4.70) знаходимо:

$$C_1 e^{p_1 t} = (x_1(t)p_2 - x_2(t)) / (p_2 - p_1), \quad (4.78)$$

$$C_2 e^{p_2 t} = (x_2(t) - x_1(t)p_1) / (p_2 - p_1).$$

З другого рівняння системи (4.57) визначаємо

$$U(X) = 1/b [x_2(t) - a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t)], \quad (4.79)$$

Куди підставимо значення $x_1(t)$ та $x_2(t)$ з (4.70):

$$U^*(t) = 1/b [-a_2 x_2(t) - a_1 x_1(t) + C_1 p_{21} e^{p_1 t} + C_2 p_{22} e^{p_2 t}], \quad (4.80)$$

Після врахування (4.78) і перетворень одержимо:

$$U^*(X) = k_4 x_2(t) + k_3 x_1(t), \quad (4.81)$$

де $k_3 = (a_1 + p_1 p_2) / b$; $k_4 = (a_2 - p_1 - p_2) / b$.

Управління (4.81), в принципі, відповідає алгоритму (4.77).

4.3. Розв'язання задачі оптимізації при обмеженнях на управління

Розглянемо об'єкт, що описується рівнянням:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i U, \quad i = 1, n. \quad (4.82)$$

і критерій оптимальності у вигляді квадратичного функціоналу:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2) dt. \quad (4.83)$$

Необхідно визначити оптимальне управління, що переводить об'єкт із початкового в кінцевий стан за час $t_1 - t_0 = T$ і забезпечує мінімум функціоналу (4.83) з врахування обмежень на управління

$$|u| < U_{\max}. \quad (4.84)$$

Введемо додаткову координату x_0 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2, \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i U, \quad i = 1, n. \end{aligned} \quad (4.85)$$

За формулою (4.32) визначаємо систему спряжених функцій:

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_i = -2q_i x_i \psi_0 - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_j. \quad (4.86)$$

Враховуючи, що $\psi_0 = \text{const}$ і (4.16), прийmemo $\psi_0 = -1$.

Складаємо гамільтоніан системи:

$$\tilde{H} = \psi_0 (\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2) + \sum_{i=1}^n \psi_i (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i U), \quad (4.87)$$

із умови максимуму якого визначаємо оптимальне управління.

Запишемо частину гамільтоніана (4.87), що залежить від управління, для $\psi_0 = -1$:

$$H_1 = -cU^2 + U \sum_{i=1}^n b_i \psi_i. \quad (4.88)$$

Доповнимо вираз до повного квадрату різниці:

$$H_1 = -c[U^2 - (2U/2c) \sum_{i=1}^n b_i \psi_i + 1/4c^2 (\sum_{i=1}^n b_i \psi_i)^2] + 1/4c (\sum_{i=1}^n b_i \psi_i)^2, \quad (4.89)$$

$$H_1 = -c[U - (1/2c) \sum_{i=1}^n b_i \psi_i]^2 + 1/4c (\sum_{i=1}^n b_i \psi_i)^2.$$

Оптимальне управління одержимо з умови

$$\max_U H_1. \quad (4.90)$$

де від управління залежить тільки перший доданок. Враховуючи знак «-» перед ним, модуль виразу в перших дужках повинен бути мінімальним.

Якщо

$$|1/2c \sum_{i=1}^n b_i \psi_i| \leq |U_{\max}|, \quad (4.91)$$

то оптимальне управління має вигляд:

$$U_1^* = 1/2c \sum_{i=1}^n b_i \psi_i. \quad (4.92)$$

Якщо ж

$$|1/2c \sum_{i=1}^n b_i \psi_i| > |U_{\max}|, \quad (4.93)$$

то оптимальне управління вибирають у вигляді:

$$U_2^* = U_{\max} \operatorname{sign} 1/2c \sum_{i=1}^n b_i \psi_i. \quad (4.94)$$

Підставляючи управління (4.92) у (4.82), одержимо систему основних і спряжених рівнянь

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_j \psi_j, \quad (4.95)$$

$$\dot{\psi}_i = 2g_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} \psi_j, \quad i = 1, n.$$

для визначення функцій ψ_i , а потім оптимального управління (4.92). Причому можна отримати оптимальне управління як у функції часу, так і у функції фазових координат. Якщо виконується умова (4.93), то замість системи (4.95) необхідно розв'язати систему:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i U_{\max} \operatorname{sign} \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^n b_j \psi_j, \quad (4.96)$$

$$\dot{\psi}_i = 2q_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_j, \quad i = 1, n.$$

Отже, щоб отримати розв'язок задачі як в лінійній, так і в нелінійній області за наявності обмеженого управління потрібно розв'язувати по черзі дві системи рівнянь (4.95) і (4.96) залежно від виразу:

$$\left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \right|, \quad (4.97)$$

При переході від одного режиму на другий необхідно виконати стикування розв'язків.

4.4. Дискретний принцип максимуму

Принцип максимуму можна застосовувати і для знаходження оптимального управління об'єктами, що описуються різницевиими рівняннями виду:

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k, t_k), \quad (4.98)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -вимірний вектор стану; $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – m -вимірний вектор управління; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n -вимірна функція. Всі процеси розглядаються в дискретні моменти часу k .

У загальному випадку застосування принципу максимуму до дискретних системи функція Гамільтона на оптимальному дискретному управлінні (на відміну від неперервного управління) може і не досягати максимального значення, а значить принцип максимуму виявляється несправедливим.

Задачу оптимізації сформулюємо таким чином: обмежимося випадком фіксованого часу, управлінням автономним об'єктом з вільним правим кінцем траєкторії та одновимірним управлінням. Отже, припустимо, що дискретний об'єкт управління описується системою нелінійних різницевих рівнянь:

$$x_i(k+1) = f_i[X(k), U(k)], \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (4.99)$$

де $X(k) = X(t_k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$ – вектор стану; $U(k) = U(t_k)$ – управляючий вплив; f_i – диференційована однозначна функція.

Задаємо початковий стан об'єкта $X(0)$ та обмеження на управління:

$$U(k) \in \Omega(U). \quad (4.100)$$

Критерій оптимальності:

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} f_0[X(k), U(k)], \quad (4.101)$$

Необхідно визначити таке управління $U^*(0), U^*(1), \dots, U^*(N-1)$, що належить області допустимих управлінь $\Omega(U)$, на яких критерій оптимальності (4.101) досягає найменшого значення, а траєкторія переміщення об'єкта (4.74) проходить через задану початкову точку.

Введемо змінну $x_0(k)$, що задовольняє рівнянню:

$$x_0(k+1) = x_0(k) + f_0[X(k), U(k)] = f_0[x_0(k), X(k), U(k)] \quad (4.102)$$

за нульових початкових умов $x_0(0)=0$. Тоді, $x_0(N) = I$. Тому задача зводиться до мінімізації кінцевого значення компоненти $x_0(k)$ вектора стану узагальненого об'єкта $\tilde{X}(k) = [x_0(k), x_1(k), \dots, x_n(k)]$. Якщо зобразити $x_0(k) = C^T \tilde{X}(k)$, $C^T = (1, 0, \dots, 0)$, то задача зводиться до мінімізації кінцевого стану об'єкта управління (термінальна задача).

У теорії оптимальних дискретних процесів доведено, що поведінка гамільтоніана на оптимальному управлінні визначається властивістю множини досяжності. Під цією множиною розуміють наступне. Припустимо, що модифікована задача оптимізації описується рівняннями (4.74) і (4.77) з початковим станом $\tilde{X}(0) = [0, X^T(0)]^T$. Якщо допустимим управлінням $U(0) \in \Omega(u)$ подіяти на об'єкт, то згідно з рівняннями (4.74) та (4.77) об'єкт буде переведено в точку $X(1)$ розширеного $(n+1)$ -вимірному простору станів. Якщо задіяти друге допустиме управління $U(1)$, то об'єкт перейде у новий стан $\tilde{X}(1)$. Множина досяжності – це сукупність всіх станів узагальненого об'єкта управління в розширеному просторі станів, в які об'єкт може бути переведений з допомогою всіх допустимих управлінь $U(0) \in \Omega(u)$. Функція Гамільтона на оптимальному управлінні досягає найбільшого значення, якщо множина досяжності в напрямку від'ємної вісі x_0 є опуклою. Якщо ця умова виконується, то оптимальне управління визначається за схемою, аналогічною неперервному випадку.

Складемо гамільтоніан:

$$H[\tilde{X}(k), \Psi(k+1), U(k)] = \Psi^T(k+1) \tilde{f}[\tilde{X}(k), U(k)] = \sum_{k=0}^n \Psi_i(k+1) f_i[\tilde{X}(k), U(k)] \quad (4.103)$$

і система спряжених рівнянь

$$\Psi(k) = \left\{ \frac{\partial \tilde{f}[\tilde{X}(k), U(k)]}{\partial \tilde{X}(k)} \right\}^T \Psi(k+1) \quad (4.104)$$

чи в скалярному вигляді:

$$\Psi_i(k) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j[\tilde{X}(k), U(k)]}{\partial x_i} \Psi_j(k+1), \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.105)$$

де $\tilde{\Psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$ при граничних умовах

$$\tilde{\Psi}(N) = (-1, 0, \dots, 0)^T \quad (4.106)$$

Якщо вказані умови опуклості виконуються, то на оптимальному управлінні $U^*(k)$ функція Гамільтона має максимальне значення

$$\max H[\tilde{X}(K), \Psi(k+1), U(k)] = H[\tilde{X}(K), \Psi(k+1), U^*(k)], \quad (4.107)$$

де вектор $\Psi(k+1)$ визначаємо з (4.105) за заданих граничних умов $\Psi(N)$; вектор $\tilde{X}(k)$ визначається з (4.99) і (4.102) за заданих початкових умов $\tilde{X}(0)$, а гамільтоніан визначається відповідно з (4.103).

Співвідношення (4.107) є необхідною умовою мінімуму функціонала I . Для його використання необхідно впевнитись у опуклості множини досяжності в напрямку від'ємної вісі x_0 , що зробити інженерними засобами не завжди вдається. Однак, існує клас дискретних систем, лінійних відносно змінних, для яких принцип максимуму буде необхідною і достатньою умовою оптимальності без використання властивостей множини досяжності. Такий клас складають дискретні системи. Нехай об'єкт описується різницевиими матричними векторними рівняннями:

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k), \quad U(k) \in \Omega(U), \quad (4.83)$$

де $A(k)$ – квадратна матриця, елементи якої в загальному випадку залежать від дискретного часу; $B(k)$ – n -вимірний вектор, що також залежить від часу. Критерій оптимальності визначається у вигляді (4.76). Задано початковий стан об'єкта управління. Нехай функція f_0 у критерії оптимальності теж опукла. Тоді має місце таке твердження. Для того, щоб для сформульованої за-

дачі управління U було оптимальним, необхідно і достатньо, щоб функція Гамільтона

$$H = -f_0[X(k), U(k)] + \Psi^T(k+1)B(k)U(k) \quad (4.84)$$

досягала максимального значення за $U(k) \in \Omega(U)$ при $k = 0, N-1$ на цьому управлінні, де значення n -мірного вектору $\Psi(k)$ визначається з системи:

$$\Psi(k) = -\frac{\partial f_0[X(k), U(k)]}{\partial X(k)} + A^T(k)\Psi(k+1) \quad (4.85)$$

за умови $\Psi(N) = 0$, а $X(k)$ є розв'язком системи (4.83) за заданих початкових умов $X(0)$. Це твердження справедливе і для рівнянь вигляду:

$$X(k+1) = A(k)X(k) + \Phi[U(k)] \quad (4.86)$$

якщо множина $\Phi[U(k)]$ за $U(k) \in \Omega(U)$ є опуклою. Відмітимо, що в (4.85) вектор Ψ є n -вимірним, в той час, як у (4.82) Ψ є $(n+1)$ -вимірним вектором. Співвідношення (4.85) є окремим випадком виразу (4.79), отриманого з врахуванням моделі (4.83) і очевидного з (4.84) результату:

$$\psi_0(K) = \psi_0(k+1) = -1 \quad (4.87)$$

Це ж зауваження справедливе і при складанні функцій (4.84) і (4.78), якщо врахувати, що доданок $\Psi(k+1)A(k)X(k)$ у складі (4.84) опущено, як незалежний від U .

Для довільного випадку дискретного управління принцип максимуму не є ні необхідною, ні достатньою умовою оптимальності. Однак, справедливе наступне твердження, корисне при дослідженні властивостей «підозрюваних» на оптимальність управління.

Нехай $U^*(k)$ – оптимальне управління. Тоді за всіх $k = 0, N-1$ має місце нерівність:

$$\delta_u H[\Psi(k+1), \tilde{X}(k), U^*(k)] = \delta U(k) \frac{\partial H[\Psi(k+1), \tilde{X}(k), U^*(k)]}{\partial U(k)} \leq 0, \quad (4.113)$$

де $\delta U(k)$ – деяка змінна (варіація) оптимального управління, що не виводить управління з області $\Omega(U)$; $\Psi(k+1)$ – спряжений вектор, який визначається з (4.80) за $\Psi(N) = (1, 0, \dots, 0)$ і $U(k) = U^*(k)$; $\tilde{X}(k)$ – вектор стану, що визначається з (4.74) та (4.77) за початкового стану $\tilde{X}(0)$ і $U(k) = U^*(k)$.

Зміст умови (4.113) такий. Нехай якимось чином знайдено оптимальне управління $U^*(k)$ і відповідні йому вектори $\tilde{X}(k+1)$, $\Psi(k+1)$. Далі оптимальне

управління змінилось на величину $\delta U(k)$. Тоді гамільтоніан, що визначається у відповідності до (4.103), також зміниться, при чому так, що лінійна частина цієї зміни $\delta_v H$ не буде позитивною. Якщо $U^*(k)$ внутрішня точка області $\Omega(u)$, то $\delta_v H = 0$; Якщо ж $\delta_v H < 0$, то $U^*(k)$ являється граничною точкою області $\Omega(u)$.

Визначення оптимального дискретного управління на основі принципу максимуму у випадку можливості його застосування рідко є задачею, що може бути аналітично розв'язана.

Приклад 4.1.

Розглянемо одномірний об'єкт з рівнянням:

$$\dot{x}_1 = u - \alpha x_1 \quad (1)$$

за заданим початковим станом

$$x_1(t_0 = 0) = x_{10} \quad (2)$$

та за відсутністю обмежень на U .

Критерій оптимальності

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt, \quad (3)$$

де T – фіксовано, підлягає мінімізації.

В даному випадку маємо задачу з вільним правим кінцем траєкторії. Задачу будемо досліджувати в дискретному часі за допомогою дискретного принципу максимуму. Перш за все отримаємо дискретний аналог задачі. З цією метою припустимо, що відрізок $t \in [0, T]$ розбиваємо на N проміжків довжиною $\Delta = \frac{T}{N}$. На окремому проміжку процеси $x_1(t)$ і $U(t)$ сталі і рівні їх значенням на початку проміжка. Позначимо:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(k\Delta) = x_1(k); \\ u(t) &= u(k\Delta) = u(k); \\ \dot{x}_1(t) &\approx \frac{[x_1(k+1) - x_1(k)]}{\Delta} \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді рівняння об'єкту приймає вигляд:

$$x_1(k+1) = (1 - \Delta\alpha)x_1(k) + \Delta u(k) \quad (5)$$

за умови

$$x_1(0) = x_{10} \quad (6)$$

Критерій оптимальності

$$I = \frac{\Delta}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_1^2(k) + u^2(k)]. \quad (7)$$

Шукаємо оптимальне управління за (4.78)-(4.80). Для даної задачі:

$$A(k) = 1 - \Delta\alpha; \quad B(k) = \Delta; \quad X(k) = x_1(k);$$

$$\psi(k) = \psi_1(k); \quad f_0 = \Delta \cdot \frac{x_1^2 + u^2}{2}. \quad (8)$$

Функція Гамільтона:

$$H = -0,5\Delta[x_1^2(k) + u^2(k)] + \psi_1(k+1)\Delta u(k) \quad (9)$$

Оскільки на управління обмежень не накладається, то з умови

$$\frac{\partial H}{\partial U(k)} = 0 \quad (10)$$

визначимо оптимальне управління

$$U^*(k) = \psi_1(k+1) \quad (11)$$

Далі запишемо спряжене рівняння:

$$\psi_1(k) = -\Delta x_1(k) + (1 - \Delta a)\psi_1(k+1), \quad (12)$$

яке потрібно розв'язувати разом з рівнянням об'єкта при оптимальному управлінні.

$$x_1(k+1) = (1 - \Delta a)x_1(k) + \Delta \psi_1(k+1) \quad (13)$$

Із спряженого рівняння одержимо:

$$x_1(k) = -\Delta^{-1}\psi_1(k) + \Delta^{-1}(1 - \Delta a)\psi_1(k+1) \quad (14)$$

$$x_1(k+1) = -\Delta^{-1}\psi_1(k+1) + \Delta^{-1}(1 - \Delta a)\psi_1(k+2) \quad (15)$$

Підставляючи ці функції в рівняння об'єкта (13) приходимо до однорідного лінійного різницевого рівняння другого порядку:

$$(1 - \Delta a)\psi_1(k+2) - [1 + (1 - \Delta a)^2 + \Delta^2]\psi_1(k+1) + (1 - \Delta a)\psi_1(k) = 0, \quad (16)$$

що використовується для визначення

$$\psi_1(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k, \quad (17)$$

де c_1, c_2 - деякі, поки не визначені константи; z_1^k, z_2^k - корені характеристичного рівняння

$$(1 - \Delta a)z^2 - [1 + (1 - \Delta a)^2 + \Delta^2]z + (1 - \Delta a) = 0. \quad (18)$$

Постійні c_1, c_2 повинні задовольняти двоточковій крайовій задачі:

$$\psi_1(N) = 0; \quad x_1(0) = x_{10}. \quad (19)$$

З виразів для $\psi_1(k)$ безпосередньо за $k = N$ одержимо:

$$\psi_1(N) = c_1 z_1^N + c_2 z_2^N = 0. \quad (20)$$

Підставляючи $\psi_1(k)$ та $\psi_1(k+1)$ в вираз для $x_1(k)$ і поклавши $k = 0$, отримаємо друге рівняння:

$$x_1(0) = c_1 \Delta^{-1}[z_1(1 - \Delta a) - 1] + c_2 \Delta^{-1}[z_2(1 - \Delta a) - 1] = x_{10}. \quad (21)$$

Розв'язавши спільно два останні рівняння знайдемо c_1, c_2 . Це дозволяє остаточно одержати оптимальне управління:

$$U^*(k) = c_1 z_1^{k+1} + c_2 z_2^{k+1}. \quad (22)$$

Відмітимо, що за $x_{10} = 0, c_1 = c_2 = 0$ і $U^*(k) = 0$, тобто, в цьому випадку оптимальне управління полягає у відсутності управління. Цей результат пояснюється тим, що в цьому випадку $x_1(k) = 0$ і $I=0$, тобто критерій оптимальності досягає гранично можливого найменшого значення.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення терміну ігольчата варіація.
2. Дайте геометричну інтерпретацію принципу максимуму.
3. Наведіть систему рівнянь Гамільтона.
4. Наведіть основні властивості функції Гамільтона.
5. Наведіть основні рівняння умови трансверсальності.
6. Наведіть узагальнений алгоритм вирішення оптимальних задач з використанням принципу максимуму.
7. Наведіть основні рівняння дискретного принципу максимуму.

Контрольні тести

1. Автором принципу максимуму є:
 - a. Белман
 - b. Понтрягін
 - c. Фельдбаум
2. Термін «ігольчата варіація» означає:
 - a. великий діапазон зміни управління на малому інтервалі часу;
 - b. малий діапазон зміни управління на малому інтервалі часу;
 - c. великий діапазон зміни управління на великому інтервалі часу;
 - d. малий діапазон зміни управління на великому інтервалі часу.
3. Гамільтоніан складається з:
 - a. добутку спряжених змінних на праву частину рівняння об'єкту;
 - b. добутку спряжених змінних на підінтегральну функцію;
 - c. добутку спеціальних функцій на підінтегральну функцію.
4. Задачу швидкодії характеризує критерій:
 - a. $I = \int_{t_0}^T u^2 dt$, T – не задано;
 - b. $I = \int_{t_0}^T 1 dt$, T – не задано;
 - c. $I = \int_{t_0}^T x^2 dt$, T – не задано.
5. Задачу оптимальної витрати палива характеризує критерій:
 - a. $I = \int_{t_0}^T |u| dt$, T – не задано;
 - b. $I = \int_{t_0}^T x^2 dt$, T – задано;
 - c. $I = \int_{t_0}^T |x| dt$, T – задано.

РОЗДІЛ 5. СИСТЕМИ, ОПТИМАЛЬНІ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ТА ВИТРАТАМИ ПАЛИВА. СУБОПТИМАЛЬНІ І ТЕРМІНАЛЬНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

5.1. Оптимальне управління на основі принципу максимуму

Припустимо, що об'єкт управління описується рівнянням:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U) \quad (5.1)$$

за умови обмежень на управління

$$|u| \leq U_{\max} \quad (5.2)$$

Критерій оптимальності задано функціоналом:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \rightarrow \min \quad (5.3)$$

Потрібно визначити таке управління $U(t)$, за якого час переходу об'єкта з початкового стану $X(t_0)$ в стан $X(t_1)$ буде мінімальним. Припустимо, що $f(X, U)$ визначені для будь-яких значень $x \in X$, що відповідають області управління $u \in U$. Крім того, функції $f(X, U)$ неперервні та диференційовані за всіма змінними x_1, x_2, \dots, x_n . Управління може належати до класу кусково-неперервних функцій, що мають розриви першого роду.

Розглянемо задачу пошуку оптимального управління на основі принципу максимуму. Введемо функцію Гамільтона

$$H = \left\langle \frac{dx}{dt}, \Psi \right\rangle = \langle f(X, U), \Psi \rangle \quad (5.4)$$

і обчислимо частинну похідну за U , яка визначає екстремум функції:

$$\frac{dH}{dU} = \Psi \quad (5.5)$$

Ця похідна залежить від одної чи кількох елементів $\psi_i(t)$ вектора Ψ , які є функціями часу. Для того, щоб функція Гамільтона H досягала максимуму, необхідно, щоб виконувалась умова:

$$U(t) = U_{\max} \text{sign} \psi(t). \quad (5.6)$$

Таким чином, необхідно визначити кількість коренів $\psi_i(t)$ (або кількість змін знаку функції $\psi_i(t)$). Управління приймає значення $+U_{max}$ чи $-U_{max}$ (рис. 5.1).

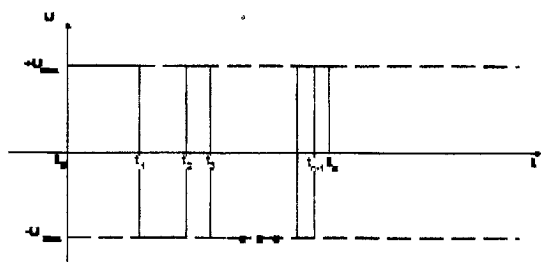


Рис. 5.1. Графік зміни функції управління

Моменти зміни знаку управління називаються *моментами перемикання*, а інтервали часу, протягом яких управління не змінюється, називаються *інтервалами управління*. Оптимальне управління повинно діяти протягом скінченного проміжку часу, а стан об'єкта в момент закінчення дії управління та після повинен бути заданим.

Знайдемо оптимальне управління для двох найбільш поширених структур об'єктів (рис.5.2).

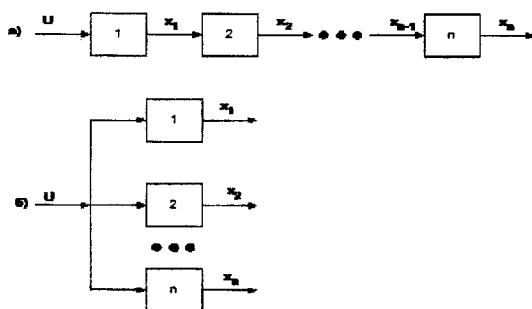


Рис. 5.2. Послідовне та паралельне з'єднання ланок першого порядку

Розглянемо спочатку об'єкт, що має структуру, зображену на рис. 5.2 а. Вона може бути описана системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 U - x_1}{\tau_1} = f_1(x_1, U), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\alpha_2 x_1 - x_2}{\tau_2} = f_2(x_2, x_1), \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{\alpha_n x_{n-1} - x_n}{\tau_n} = f_n(x_n, x_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Крім того, на управління накладено обмеження $|U| \leq U_{\max}$.

Введемо функцію Гамільтона у вигляді:

$$H = f_1(x_1, u)\psi_1 + f_2(x_2, x_1)\psi_2 + \dots + f_n(x_n, x_{n-1})\psi_n \quad (5.8)$$

та візьмемо частинну похідну від H за U :

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\alpha_1}{\tau_1} \psi_1. \quad (5.9)$$

Тоді управління обчислюється за формулою:

$$u(t) = U_{\max} \text{sign} \psi_1(t) \quad (5.10)$$

Отже, треба встановити поведінку функції $\psi_1(t)$. Для цього запишемо систему спряжених рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_1} \psi_1 - \frac{\alpha_2}{\tau_2} \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_2} \psi_2 - \frac{\alpha_3}{\tau_3} \psi_3; \\ &\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_n} \psi_n \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Розв'язуємо систему (5.11) починаючи з останнього рівняння:

$$\psi_n(t) = C_n^1 e^{\frac{t}{\tau_n}};$$

$$\frac{d\psi_{n-1}(t)}{dt} - \frac{1}{\tau_{n-1}} \psi_{n-1}(t) = \frac{\alpha_n}{\tau_n} \psi_n = \frac{\alpha_n}{\tau_n} C_n^1 e^{\frac{t}{\tau_n}},$$

де C_n^1 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Звідси:

$$\psi_{n-1}(t) = e^{\int \frac{dt}{\tau_{n-1}}} \left[\int \frac{\alpha_n}{\tau_n} C_n^1 e^{\frac{t}{\tau_n}} e^{-\frac{t}{\tau_{n-1}}} dt + C_{n-1} \right] = C_n e^{\frac{t}{\tau_n}} + C_{n-1} e^{\frac{t}{\tau_{n-1}}}.$$

Продовжуючи процес розв'язування одержимо:

$$\psi_1(t) = C_1 e^{\frac{t}{\tau_1}} + C_2 e^{\frac{t}{\tau_2}} + \dots + C_n e^{\frac{t}{\tau_n}}. \quad (5.12)$$

З рис. 5.3 видно, що сума двох експонент (пунктирна лінія) залежно від початкових умов, змінює знак лише один раз.

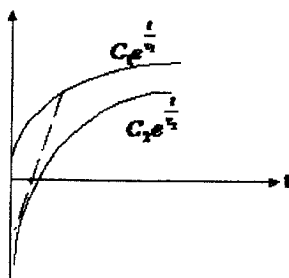


Рис. 5.3. Графічне обчислення суми двох експонент

Можна також показати, що сума n експонент змінює знак не більше ніж $(n-1)$ разів. Таким чином, щоб забезпечити оптимальне управління об'єктом (рис. 5.2а) потрібно, щоб на n інтервалах управління приймало максимальне значення U_{max} , причому його знаки повинні чергуватись $(n-1)$ разів.

Об'єкт, схема якого зображена на рис. 5.2б, описується системою лінійних диференціальних рівнянь виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 U - x_1}{\tau_1} = f_1(x_1, U), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\alpha_2 U - x_2}{\tau_2} = f_2(x_2, U), \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{\alpha_n U - x_n}{\tau_n} = f_n(x_n, U), \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

де: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ та $|U| \leq U_{max}$ — обмеження на управління.

Функція Гамільтона для такого об'єкту має вигляд:

$$H = f_1(x_1, U)\psi_1 + f_2(x_2, U)\psi_2 + \dots + f_n(x_n, U)\psi_n. \quad (5.14)$$

Взявши частинну похідну від H по U :

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\alpha_1}{\tau_1}\psi_1 + \frac{\alpha_2}{\tau_2}\psi_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n}\psi_n = \psi^* \quad (5.15)$$

обчислюємо управління:

$$U = U_{\max} \text{sign} \Psi^*(t). \quad (5.16)$$

Система спряжених рівнянь має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_1} \psi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_2} \psi_2, \\ &\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \psi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \psi_n \right] = \frac{1}{\tau_n} \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Запишемо розв'язок системи рівнянь для функцій:

$$\psi_1(t) = C_1^1 e^{\frac{t}{\tau_1}}, \quad \psi_2(t) = C_2^1 e^{\frac{t}{\tau_2}}, \dots, \psi_n(t) = C_n^1 e^{\frac{t}{\tau_n}}.$$

Підставляючи в (5.15), маємо:

$$\begin{aligned} \psi^*(t) &= \frac{\alpha_1}{\tau_1} C_1^1 e^{\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} C_2^1 e^{\frac{t}{\tau_2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} C_n^1 e^{\frac{t}{\tau_n}} = \\ &= C_1 e^{\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} C_2 e^{\frac{t}{\tau_2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} C_n e^{\frac{t}{\tau_n}} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\frac{t}{\tau_i}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Функція $\psi^*(t)$ має $(n-1)$ дійсних коренів. Таким чином, для оптимального управління об'єктом (рис. 5.26) необхідно задіяти максимальне управління U_{\max} на n інтервалах, при цьому знаки на інтервалах повинні чергуватись $(n-1)$ разів.

Тепер сформулюємо умови оптимальності управління лінійними об'єктами, вперше доведені А.А.Фельдбаумом.

Теорема про n інтервалів. Якщо об'єкт управління описується лінійними диференціальними рівняннями n -го порядку з постійними коефіцієнтами і корені його характеристичного рівняння дійсні від'ємні чи нульові, то для оптимального управління необхідно і достатньо n інтервалів максимального значення управління U_{\max} , а знаки на інтервалах повинні чергуватись $(n-1)$ разів.

Доведення. Для доведення застосуємо принцип максимуму. Нехай рівняння об'єкта має вигляд:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + b_i U, \quad i = 1, n, \quad (5.19)$$

чи у векторній формі:

$$\frac{dX}{dt} = f(X) + bU, \quad (5.20)$$

де U – скалярне управління, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(X) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ та $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектори. Функції f_i вважаємо диференційованими за змінними x_i . Обмеження на управління задано у вигляді (5.2).

Тоді гамільтоніан :

$$H = \frac{dX}{dt} \Psi = [f(X) + bU] \Psi = f(X) \Psi + bU \Psi. \quad (5.21)$$

Від управління U залежить тільки другий доданок. Тому гамільтоніан H буде максимальним за умови:

$$U = U_{\max} \text{sign } b \Psi = U_{\max} \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i. \quad (5.22)$$

Звідси випливає, що протягом всього інтервалу управління приймає максимальне значення U_{\max} . Тобто, оптимальне за швидкодією управління має релейний характер для всіх нелінійних об'єктів, що описується рівнянням (5.19).

Тепер розглянемо лінійний об'єкт. В цьому випадку рівняння (5.19) приймає вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i U \quad i = 1, n. \quad (5.23)$$

Тоді відповідні спряжені рівняння запишуться як:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{k=1}^n a_{ki} \psi_k \quad i = 1, n. \quad (5.24)$$

Дійсно, згідно (5.23) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) = a_{ki}.$$

Якщо характеристичне рівняння об'єкта, який описано диференціальним рівнянням (5.23), за умови $U=0$ має всі дійсні і від'ємні корені, то те саме можна стверджувати і стосовно характеристичного рівняння для системи спряжених рівнянь (5.24). Звідси випливає, що розв'язок системи (5.24) є сумою експонент:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{\alpha_j t}; \quad i = 1, n, \quad (5.25)$$

де α_j – від’ємні дійсні числа; C_{ij} – сталі інтегрування. Отже, згідно з (5.22) маємо:

$$U = U_{\max} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{\alpha_j t} = U_{\max} \operatorname{sign} \sum_{j=1}^n B_j e^{\alpha_j t}, \quad (5.26)$$

де $B_j = \sum_{i=1}^n b_i C_{ij}$.

Сума n експонент в (5.26), як відомо, змінює знак не більше $(n-1)$ разів. Отже, кількість інтервалів сталості управління $U(t)$ також більше n , що і треба було довести.

Якщо система управління містить ланки, що мають однакові динамічні характеристики, тобто однакові сталі часу τ , кількість інтервалів управління дорівнює $(n-k+1)$, де k – кількість ланок з однаковими сталими часу. Для $n = k$ потрібно всього один інтервал управління.

У випадку довільних початкових умов кількість інтервалів управління може бути менше n . Дійсно, нехай, в момент початку розгляду процесу управління початковий стан об’єкта вектори U, X та їх похідні приймають значення, як в кінці k -го інтервалу управління у випадку переведення об’єкта в той же кінцевий стан, але при нульових початкових умовах. Тоді процес оптимального управління займе тільки $(n-k)$ інтервалів.

При обмеженнях не тільки на змінну U , а на кількість проміжних змінних стану об’єкта, кількість інтервалів управління збільшується. Можна показати, що їх кількість:

$$k = [(n-m)+1][(m-l)+1] \dots - 1, \quad (5.27)$$

де n – порядок рівняння об’єкта, що зв’язує вихідну координату X та вхідну U , а $(m-1)$ – порядок рівнянь, що пов’язують вихідну координату X з іншими обмеженими змінними. Наприклад, для об’єкту другого порядку ($n = 2$), для якого крім управління U обмежується ще і змінна x_1 на виході першої ланки ($m = 1$), кількість інтервалів управління, згідно з (5.27), буде:

$$k = (2-1+1)(1-0+1) - 1 = 3.$$

У цьому випадку управління U також змінюється стрибкоподібно від одного граничного значення до іншого. Однак, якщо в якомусь інтервалі од-

на з обмежених змінних набуває граничного значення, U повинно коригуватись таким чином, щоб ця змінна не виходила за вказану межу до моменту чергової зміни знаку управління U , після чого ця змінна почне змінюватись в іншому напрямку. Таким чином, при обмеженні крім управління U ще й проміжної змінної стану об'єкту оптимальний перехідний процес складається з інтервалів, у кожного з яких U чи будь-яка інша обмежена величина приймає граничне значення.

На рис. 5.4 наведемо графік оптимального управління для об'єкта другого порядку з обмеженими U та x_1 . Існування обмежень на x_1 обумовлює наявність додаткового інтервалу, протягом якого зменшується швидкість зростання U до значення $X_{1\max}$. В результаті отримаємо більш тривалий процес, ніж при відсутності обмеження на x_1 .

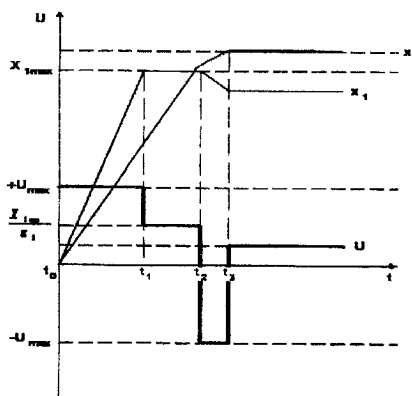


Рис. 5.4 . Графік оптимального управління за наявності обмежень на U та x_1

5.2. Визначення моментів перемикання лінійного управління оптимального за швидкістю

Принцип максимуму дає якісну картину зміни управління. Для управління розімкненої системи достатньо знати моменти перемикання t_1, t_2, \dots, t_n та максимальне значення управління U_{\max} . Зазвичай U_{\max} задається на основі властивостей системи управління, а моменти перемикання потрібно визначати. Ці моменти залежать від кількох факторів, а саме:

- векторів стану об'єкта $X(t_0)$ та $X(t_n)$ у початковий та кінцевий моменти часу відповідно. Очевидно, що чим більше різниця між значеннями

$X(t_0)$ та $X(t_n)$, тим більше часу необхідно для управління за інших рівних умов;

- параметрів об'єкта управління, тобто його сталих часу $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

та коефіцієнта передачі α ;

- граничного значення управління U_{\max} . Чим більше за абсолютною величиною це значення, тим швидше протікає процес управління;
- вектора завад N .

Таким чином, потрібно визначити функцію, яка встановлює залежність між параметрами, вказаними вище:

$$T = [X(t_0), X(t_1), \tau_i, \alpha, U_{\max}; N] \quad (5.28)$$

Задача визначення функції моментів перемикавання від параметрів, наведених вище, доволі складна, особливо у разі врахування завад. Задача спрощується, якщо обчислювати значення моментів перемикавання як функцію $X(t_0)$ та $X(t_n)$ при постійних параметрах об'єкта та за відсутністю завад. У цьому випадку об'єкт описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами виду:

$$\frac{d^n X}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 X = \alpha U_{\max}, \quad (5.29)$$

і корені α_i його характеристичного рівняння є дійсними і розташованими у лівій півплощині.

Задача полягає в тому, щоб за мінімальний час перевести об'єкт зі стану $X(t_0)$ в $X(t_n)$. Відомо, що це можна зробити протягом n проміжків часу, в яких знаки управління $|U|=U_{\max}$ повинні чергуватися $(n-1)$ разів на всьому інтервалі управління. Отже, потрібно визначити n моментів перемикавання, враховуючи і кінцевий момент. Для цього використаємо метод стикування розв'язків диференціальних рівнянь з знакозмінною правою частиною. Розв'язок рівняння (5.29) має вигляд:

$$x(t) = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i e^{\alpha_i t}, \quad (5.30)$$

який для кінця останнього інтервалу управління $t = t_n$ (рис.5.1) має вигляд:

$$x(t_n) = C_0^n + \sum_{i=1}^n C_i^n e^{\alpha_i t_n}, \quad (5.31)$$

де C_i^n – постійні інтегрування на останньому n -ому інтервалі управління.

Складемо систему рівнянь стосовно C_i^n , використовуючи $x(t_n)$ з (5.31) та $(n-1)$ його похідних:

$$\left. \begin{aligned} x(t_n) - \alpha U_{\max} &= \sum_{i=1}^n C_i^n e^{\alpha_i t_n} \\ \dot{x}(t_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i^n e^{\alpha_i t_n} \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} C_i^n e^{\alpha_i t_n} \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Верхній індекс j в C_i^j вказує номер інтервалу управління. З останньої системи рівнянь (5.32) знаходимо $C_1^n, C_2^n, \dots, C_n^n$.

Далі стикуємо розв'язок на межі останнього та передостаннього інтервалів (для чого запишемо розв'язок для кінця передостаннього інтервалу та віднімемо розв'язок для початку останнього інтервалу) для моменту часу $t = t_{n-1}$:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha U_{\max} &= \sum_{i=1}^n (C_i^{n-1} - C_i^n) e^{\alpha_i t_{n-1}} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (C_i^{n-1} - C_i^n) e^{\alpha_i t_{n-1}} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} (C_i^{n-1} - C_i^n) e^{\alpha_i t_{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Таке стикування розв'язків є можливим, бо всі координати рівняння є неперервними. Розв'язок системи (5.33) $(C_i^{n-1} - C_i^n)$, $i = 1, n$.

Аналогічно стикуємо розв'язки для всіх інших моментів перемикання. Нарешті, для першого інтервалу управління $t = t_0$ маємо систему:

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) - \alpha U_{\max} &= \sum_{i=1}^n C_i^1 e^{\alpha_i t_0} \\ \dot{x}(t_0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i^1 e^{\alpha_i t_0} \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} C_i^1 e^{\alpha_i t_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Враховуючи, що $t_0 = 0$, з (5.34) одержимо:

$$\left. \begin{aligned} x(0) - \alpha U_{\max} &= \sum_{i=1}^n C_i^1 \\ \dot{x}(0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i^1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} C_i^1 \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Значення сталих $C_1^1, C_2^1, \dots, C_n^1$ визначаємо з (5.35) при заданих початкових умовах. Таким чином, виключаються постійні інтегрування. Залишається система n трансцендентних рівнянь, що містить n невідомих t_1, t_2, \dots, t_n , яка має єдиний розв'язок. При стикуванні розв'язків диференціальних рівнянь маємо $(n^2 + n)$ невідомих, з яких n^2 – сталі інтегрування, n – моменти перемикання. Система для їх обчислення містить $(n^2 + n)$ рівнянь. Дійсно, є $(n-1)$ моментів перемикання та два моменти, що визначають початок t_0 та кінець t_n управління, тобто всього $(n-1+2 = n+1)$ моментів часу. Для кожного з моментів часу складаємо n рівнянь. Таким чином, всього маємо $(n+1)n = n^2 + n$ рівнянь, яких досить для визначення постійних інтегрування C_i^j та моментів перемикання.

Приклад 5.1.

Розглянемо об'єкт, що описується рівнянням другого порядку

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \alpha U. \quad (1)$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і розташовані у лівій півплощині:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\tau_1}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\tau_2}.$$

Потрібно знайти оптимальне за швидкістю управління, яке переводить об'єкт з початкового стану $x(t_0), \dot{x}(t_0)$ в кінцевий стан $x(t_2), \dot{x}(t_2)$ за обмежень на управління $|u(t)| \leq U_{\max}$.

Згідно з теоремою про n інтервалів для оптимального за швидкістю управління необхідно 2 інтервали управління та одна зміна знаку. Позначимо кінець другого інтервалу через t_2 , момент перемикання – t_1 . Початкові умови при $t = t_0 = 0$: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Кінцеві значення координат: $x(t_2) = t_{CT}$; $\dot{x}(t_2) = 0$. Прийmemo, що перший інтервал – додатний, а другий – від'ємний.

Запишемо розв'язок для кінця другого інтервалу $t=t_2$:

$$\left. \begin{aligned} x(t_2) &= x_{CT} + \alpha U_{\max} = C_1^2 e^{\alpha t_2} + C_2^2 e^{\alpha_2 t_2} \\ \dot{x}(t_2) &= 0 = \alpha_1 C_1^2 e^{\alpha_1 t_2} + \alpha_2 C_2^2 e^{\alpha_2 t_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

З системи (2) маємо:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t_2} & e^{\alpha_2 t_2} \\ \alpha_1 C_1^2 e^{\alpha_1 t_2} & \alpha_2 C_2^2 e^{\alpha_2 t_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1^2 \\ C_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{CT} + \alpha U_{\max} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Знаходимо:

$$C_1^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad C_2^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t_2}$$

$$\Delta_1 = [\alpha_2 (x_{CT} + \alpha U_{\max})] e^{\alpha_2 t_2}$$

$$\Delta_2 = [\alpha_1 (x_{CT} + \alpha U_{\max})] e^{\alpha_1 t_2}.$$

Тоді:

$$C_1^2 = \frac{\alpha_2 (x_{CT} + \alpha U_{\max})}{(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_2 t_2}} \quad (3)$$

$$C_2^2 = \frac{\alpha_1 (x_{CT} + \alpha U_{\max})}{(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_1 t_2}}. \quad (4)$$

Стикуємо розв'язки на момент перемикання $t = t_1$:

$$-2\alpha U_{\max} = (C_1^1 - C_1^2) e^{\alpha t_1} + (C_2^1 - C_2^2) e^{\alpha_2 t_1}$$

$$0 = \alpha_1 (C_1^1 - C_1^2) e^{\alpha_1 t_1} + \alpha_2 (C_2^1 - C_2^2) e^{\alpha_2 t_1}. \quad (5)$$

З системи (5) аналогічно одержимо:

$$C_1^1 - C_1^2 = \frac{2\alpha\alpha_2 U_{\max}}{(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_2 t_1}} \quad (6)$$

$$C_2^1 - C_2^2 = \frac{2\alpha\alpha_1 U_{\max}}{(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_1 t_1}}. \quad (7)$$

Нарешті розв'язок для початку першого інтервалу $t = t_0 = 0$ з врахуванням початкових умов:

$$\left. \begin{aligned} \alpha U_{\max} &= C_1^1 + C_2^1 \\ 0 &= \alpha_1 C_1^1 + \alpha_2 C_2^1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

З системи (8) знаходимо:

$$C_1^1 = \frac{\alpha\alpha_2 U_{\max}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad C_2^1 = \frac{\alpha\alpha_1 U_{\max}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (9)$$

Підставляючи знайдені з (3), (4) C_1^2 та C_2^2 з (9) C_1^1 та C_2^1 в (6) і (7), одержимо систему трансцендентних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{x_{CT}}{\alpha U_{\max}} \right) e^{\alpha t_2} - 2e^{\alpha t_1} + 1 &= 0 \\ \left(1 + \frac{x_{CT}}{\alpha U_{\max}} \right) e^{\alpha_2 t_2} - 2e^{\alpha_2 t_1} + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Система двох і більше трансцендентних рівнянь в загальному вигляді нерозв'язна відносно моментів переключення. Такі рівняння розв'язуються чисельними методами. Для розв'язання двох трансцендентних рівнянь можна скористатись графоаналітичним методом.

Розв'язуючи (10) відносно t_1 одержимо:

$$t_1 = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\left(1 + \frac{x_{CT}}{\alpha U_{\max}}\right) e^{\alpha_1 t_2} + 1}{2}; \quad (11)$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{\left(1 + \frac{x_{CT}}{\alpha U_{\max}}\right) e^{\alpha_2 t_2} + 1}{2}. \quad (12)$$

Задаючи значення t_2 за формулами (11), (12) будемо графіки залежностей (рис.5.5) $t_1 = f_1(t_2)$ та $t_1 = f_2(t_2)$. Точка перетину цих кривих визначає момент часу t_1 та t_2 (рис. 5.5).

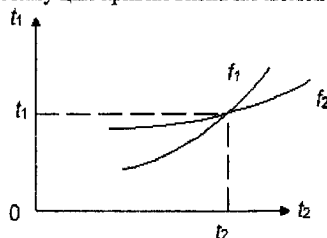


Рис. 5.5. Визначення моментів перемикання управління

Розглянемо ще один метод визначення моментів перемикання управління, обмежившись системами із скалярним управлінням:

$$\dot{X} = AX + bU, \quad (5.36)$$

де $X(0) = X_0$.

Тоді можна записати:

$$X(t) = \int_0^t W(t-\tau) b U(\tau) d\tau + W(t) X_0 \quad (5.37)$$

де $W(t) = e^{At}$ — перехідна матриця системи.

Вважатимемо, що моменти перемикання $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$, і припустимо, що задано початковий стан X_0 і потрібно отримати $(n-1)$ моментів перемикання. На інтервалі $(0, t_1)$ управління $u = \varepsilon U_{\max}$, де $\varepsilon = 1$ чи $\varepsilon = -1$ може мати місце, таким же чином на другому інтервалі управління (t_1, t_2) маємо $u = -\varepsilon U_{\max}$ і так далі.

Для кінцевого моменту $t = t_n$ з (3.57) знаходимо:

$$\begin{aligned} X(t_n) = & \int_0^{t_1} W(t_n - \tau) b \varepsilon U_{\max} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} W(t_n - \tau) b (-\varepsilon U_{\max}) d\tau \dots \\ & \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} W(t_n - \tau) b (-1)^{n-1} \varepsilon U_{\max} d\tau + W(t_n) X_0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Враховуємо також умову в кінцевій точці – $X(t_n) = 0$. Приймаючи до уваги, що $W(t_n - \tau) = W(t_n)W(-\tau)$, помноживши на $W^{-1}(t_n)$ і розділивши на εU_{\max} , отримаємо співвідношення:

$$\left[\int_0^{t_1} W(-\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} W(-\tau) d\tau + \dots + (-1)^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} W(-\tau) d\tau \right] b = -\frac{X_0}{\varepsilon U_{\max}}. \quad (5.39)$$

Позначимо

$$F(t) = \int W(-\tau) d\tau. \quad (5.40)$$

де $W(-\tau)$ – регулярна функція. Тому для (5.39) можна записати:

$$\{ [F(t_1) - F(0)] - [F(t_2) - F(t_1)] + [F(t_3) - F(t_2)] + \dots + (-1)^{n-1} [F(t_n) - F(t_{n-1})] \} b = -\frac{X_0}{\varepsilon U_{\max}}, \quad (5.41)$$

чи після множення на $1/2$:

$$F(t_1)b - F(t_2)b + \dots + (-1)^n F(t_{n-1})b + \frac{(-1)^{n+1}}{2} F(t_n)b = \frac{1}{2} F(0)b - \frac{X_0}{2\varepsilon U_{\max}}. \quad (5.42)$$

Якщо A – регулярна, то можна записати:

$$F(t) = \int e^{-A\tau} d\tau = -A^{-1} e^{-A\tau} \quad (5.43)$$

Враховуючи (5.43), помноживши зліва на $-A$, з (5.42) отримаємо:

$$e^{-At_1} b - e^{-At_2} b + \dots + (-1)^n e^{-At_{n-1}} b + \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{-At_n} b = \frac{1}{2} b - \frac{AX_0}{2\varepsilon U_{\max}}. \quad (5.44)$$

Вирази (5.42) чи (5.44) можуть бути одним векторним рівнянням розмірності n , чи системою n рівнянь відносно t_1, t_2, \dots, t_n . Знак ε можна визначити, якщо відомий початковий стан X_0 . Тоді можна задавати прискорення системи ($\varepsilon = 1$) чи гальмування ($\varepsilon = -1$). Якщо апіорна інформація відсутня, то можна спочатку задати додатне ε , а потім від'ємне.

Загальний розв'язок можна отримати рішення лише систем другого порядку. Для систем більш високого порядку слід використовувати чисельні методи.

5.3. Замкнуті оптимальні за швидкістю системи

У розімкнутих системах управління вектор стану X не контролюється і вважається, що він є оптимальним, на об'єкт не діють завади N , а також незмінними є коефіцієнти диференціальних рівнянь та структура об'єкту управління. Реалізація оптимального за швидкістю управління ускладнюється в розімкнених схемах для реверсивних об'єктів і об'єктів, що потребують зміни моментів перемикавання. Якщо недоступна інформація про вектор X , доцільно застосовувати управління для розімкнених систем.

Для замкнутих систем, оптимальних за швидкістю, моменти перемикавання корегуються залежно від параметрів збурення та завод, а також зміни параметрів об'єкта. У космічній техніці для корегування моментів перемикавання застосовують контролери. У промисловості для цих цілей синтезують цифрові автомати, що реалізують алгоритми оптимального управління з жорсткими зворотними зв'язками. В цьому випадку за допомогою жорсткого нелінійного зворотного зв'язку формується знакозмінне релейне управління $U_r(t)$.

На рис. 5.6а зображена схема системи управління об'єкта n -го порядку, в якій компоненти вектора стану $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ після проходження через блоки жорсткого нелінійного зворотного зв'язку $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ додаються до вхідного сигналу $X_{вк}$. Оскільки компоненти вектора $X(t)$ неперервні, неперервна і функція $U_r(t)$ на вході релейного елемента P_r . Значення коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ підбираємо так, щоб функція перемикавання $U_r(t)$ змінювала знак відповідно із законом управління.

Коефіцієнти $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ обчислюють з використанням оптимальної траєкторії, яку можна побудувати у фазовому просторі, визначивши $U(t)$ на основі принципу максимуму чи теореми про n інтервалів управління.

Розглянемо фазову траєкторію оптимальної за швидкістю системи, у якій вектор стану X має складові x та \dot{x} . Траєкторія відображає процеси переведення фазових координат з початкової точки $x=0, \dot{x}=0$ в точку x_{CT1} та x_{CT2} за умови $\dot{x}_{CT1} = \dot{x}_{CT2} = 0$.

Управління змінює знак у точках A та C , і припиняється у точках B та D . У точках A та C функція $U_t(t)$ змінює знак, переходячи через нуль, приймаючи в кінці управління значення $U_t(t) = 0$. Використовуючи траєкторію 2, маємо для кінцевого стану x_{CT2} :

$$x_{\alpha_2} - \gamma_1 x_{CT2} - \gamma_2 \dot{x}_{CT2} = 0 \quad (5.45)$$

Оскільки $\dot{x}_{CT2} = 0$, то з (5.45) одержимо:

$$\gamma_1 = \frac{x_{\alpha_2}}{x_{CT2}}. \quad (5.46)$$

Для моменту перемикавання (точка C) маємо $U_t = 0$, а також:

$$x_{\alpha_2} - \gamma_1 x_2 - \gamma_2 \dot{x}_2 = 0. \quad (5.47)$$

Тоді, враховуючи (5.46), з (5.47) знайдемо:

$$\gamma_2 = \frac{x_{\alpha_2} - \gamma_1 x_2}{\dot{x}_2} = \frac{x_{\alpha_2} - \frac{x_{\alpha_2}}{x_{CT2}} x_2}{\dot{x}_2}. \quad (5.48)$$

Оскільки x_2, \dot{x}_2 та x_{CT2} комплексні величини з фазової траєкторії, то коефіцієнти γ_1 та γ_2 визначені. Аналогічно можна знайти значення γ_1 та γ_2 використовуючи траєкторію 1:

$$\gamma_1 = \frac{x_{\alpha_1}}{x_{CT1}}, \quad (5.49)$$

$$\gamma_2 = \frac{x_{\alpha_1} - \frac{x_{\alpha_1}}{x_{CT1}} x_1}{\dot{x}_1}. \quad (5.50)$$

Можна зобразити ще кілька фазових траєкторій, і для них також обчислити коефіцієнти зворотного зв'язку. Як результат одержимо нелінійну функцію $\gamma_i = f(\dot{x})$, бо і сама фазова траєкторія нелінійна. Таким чином, об'єкт управління розбивається на реальні чи фіктивні динамічні ланки та використовуються проміжні координати для реалізації оптимального за швидкістю управління (рис.5.6.,в). Іноді нелінійні зворотні зв'язки можна замінити лінійними, що значно спрощує їх реалізацію.

Для більшості реальних об'єктів, що описуються складними нелінійними рівняннями, отримати аналітичні вирази точок перемикавання неможли-

во. Але отримавши набір фазових траєкторій, розрахувати коефіцієнти жорстких нелінійних зворотних зв'язків $\gamma_i(x_i)$ завжди можна, що дозволяє сконструювати оптимальний алгоритм управління. Можливо, для нелінійних об'єктів це єдиний шлях реалізації замкнутої оптимальної за швидкодією системи управління. Розглянуті структурні схеми (рис 5.6., а,в) являють собою замкнуті релейні системи з неоднорічними зворотними зв'язками. Природно, що в таких системах можуть виникати автоколивання. Визначення параметрів автоколивань та способи їх усунення виконуються відомими методами теорії автоматичного управління (фазового простору, частотними і т.і.).

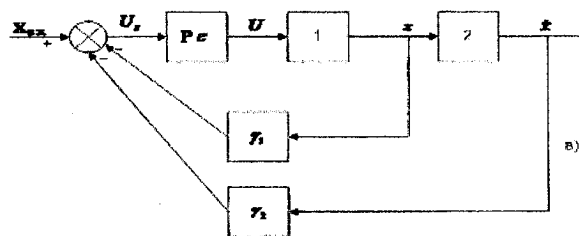
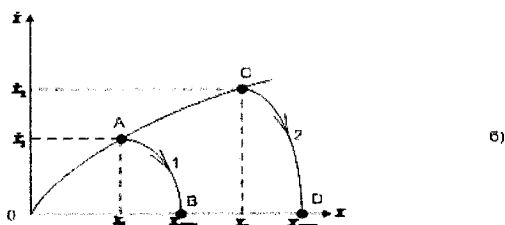
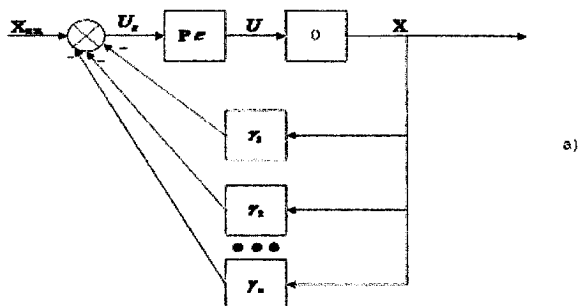


Рис. 5.6. Система управління оптимальна за швидкодією

Оптимальні за швидкодією системи автоматичного управління є оптимальними і за коливальністю у тому сенсі, що перехідний процес у системі протікає максимально швидко без коливань та без перерегулювання чи з мінімальними перерегулюванням.

Часто дане оптимальне управління забезпечує і мінімальне відхилення X . В більшості випадків для цього достатньо, щоб інтервал, протягом якого відбувається граничне форсування об'єкту для ліквідації початкового відхилення X , розтягувався до досягнення максимуму X .

З вище викладеного не повинно створюватись враження, що при будь-якому об'єкті та будь-яких граничних умовах існує оптимальне управління.

5.4. Субоптимальне управління

Розглянуті вище системи управління є оптимальними лише у випадку, якщо математична модель реального об'єкта є точною. Оскільки математична модель, як правило, є спрощеним описом об'єкта (лінеаризація, відкидання малих параметрів і т.п.), синтезоване оптимальне управління застосоване до реальних об'єктів не є оптимальним. У цьому випадку говорять про близьке до оптимального чи, інакше, квазіоптимальне (субоптимальне) управління. Визначення точних значень моментів перемикання ускладнюється і тим, що виконавчі пристрої мають зону нечутливості, гістерезис та фіксований час спрацювання. Засоби вимірювання фазових координат також мають похибки та шуми вимірювання, що також не дозволяє сформулювати абсолютно точне оптимальне управління. Крім того, реалізація системи оптимального управління є настільки складною, що часто її виготовлення і експлуатація економічно не вигідні. Це обумовлює необхідність створення субоптимальних систем управління, тобто спрощення системи за рахунок зниження її якості.

Питання оцінки близькості субоптимальної системи до відповідної їй «ідеальної» оптимальної, є дуже складним і недостатньо розробленим теоретично. Дати таку оцінку можна лише шляхом порівняння показників функціонування реальної системи управління та системи управління на основі математичної моделі.

При реалізації оптимального управління за допомогою зворотного зв'язку виникає задача дослідження стійкості системи. При цьому слід враховувати і малі параметри, що не приймалися до уваги при визначенні оптимального управління. Прикладом субоптимальної системи є система управління натискним пристроєм товстолистового реверсивного стану (рис. 5.7).

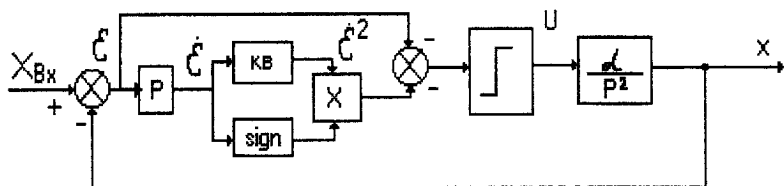


Рис 5.7. Система управління натискним пристроєм товстолистового реверсивного стану

Слід зазначити, що для реалізації навіть найпростішої замкнутої системи оптимального управління другого порядку необхідно обчислювати похідну та виконувати великий обсяг обчислень:

$$U = -U_{\max} \operatorname{sign} \left[\varepsilon + (\operatorname{sign} \dot{\varepsilon}) \frac{\dot{\varepsilon}^2}{2\alpha U_{\max}} \right] \quad (5.51)$$

Для складніших об'єктів визначити оптимальне управління набагато важче, особливо тоді, коли необхідно обчислити значення похідних включно до $(n - 1)$ -го порядку. Суттєвого спрощення системи управління можна досягти ціною незначного відхилення оптимальності.

Існують два основні підходи до синтезу субоптимального управління динамічних об'єктів:

- синтез оптимального управління для спрощеного об'єкта;
- спрощення знайденого строго оптимального управління.

Спрощення об'єкта можливе шляхом відкидання нелінійностей та пониження порядку моделі об'єкта до другого чи третього. В моделі будь-якого об'єкта можна виділити аперіодичні чи інтегруючі ланки. Якщо сталі часу деяких ланок значно менші від інших, то сталі часу таких ланок можна не враховувати, оскільки вони несуттєво впливають на вектор стану $X(t)$. Рекомендується не враховувати сталі часу ланок, які на порядок менше решти. При цьому для зменшення похибки моделі доцільно відповідно збільшити ті сталі

часу, що враховуються, або ввести додатковий час запізнення. Якщо декомпозиція об'єкта на окремі ланки не проводиться, потрібно обчислити корені характеристичного рівняння і відкинути ті з них, які розташовані на порядок далі від уявної осі. Перевага цього способу в тому, що задача пошуку оптимального управління для складного об'єкту суттєво спрощується. Таким чином, оптимальне управління синтезоване для спрощеної моделі об'єкта, є субоптимальним. Недолік такого підходу в тому, що не існує загальної процедури оцінювання, яка враховує різницю між оптимальним і субоптимальним управлінням.

Другий спосіб побудови субоптимальних систем пов'язаний з нехтуванням окремими інтервалами управління. При синтезі управління деякими типами об'єктів при певних параметрах об'єкта, граничних умовах та векторі управління крім досить великих інтервалів управління, задаються інтервали дуже малі – десяті чи соті долі секунди. Якщо такі інтервали складно або неможливо реалізувати наявними технічними засобами, то ними доцільно нехтувати. Похибки при цьому досить малі, бо вектор стану за такий малий проміжок часу практично не змінюється. Крім того, можна свідомо знехтувати останніми інтервалами управління, які, як правило, значно менші попередніх, але при цьому слід забезпечувати задану точність управління. Іншими словами, вектор X повинен досягати не фіксованої точки, а заданої області фазового простору. Перевагою цього способу є те, що в процесі спрощення є можливість порівняти субоптимальний розв'язок з точним оптимальним. А недолік полягає в тому, що потрібно розрахувати оптимальний процес для складного вихідного об'єкту.

Приклад 5.2.

Розглянемо приклад визначення моментів перемикання для синтезу субоптимального управління об'єктом, що описується диференціальним рівнянням:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dx}{dt} + x = \alpha U. \quad (1)$$

Згідно з теоремою про інтервали для управління необхідно два інтервали та одна зміна його знаку. Припустимо, що процес управління об'єктом необхідно виконати лише протягом одного інтервалу. У цьому випадку можуть виникнути небажані відхилення вектора стану x від оптимального, тому перемикання управління слід виконати таким чином, щоб відхилення вектора x не перевищувало граничних значень похибки Δx (рис.5.8). При визначенні моменту перемикання приймаємо як кінцевий стан об'єкту значення $(x_{cr} + \Delta x)$. Початковими значеннями є $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Скористуємось методом виключення постійних інтегрування. Припустимо, що час t_2 , протягом якого ордината досягне максимального значення, а також момент перемикавання t_1 , відомі. Запишемо рівняння для моменту $t = t_2$, що відповідає точці максимуму:

$$\left. \begin{aligned} x_{ct} + \Delta x &= C_0^2 + C_1^2 e^{\alpha_1 t_2} + C_2^2 e^{\alpha_2 t_2} \\ \dot{x} &= 0 = \alpha_1 C_1^2 e^{\alpha_1 t_2} + \alpha_2 C_2^2 e^{\alpha_2 t_2} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

де $C_0^2 = \alpha U_{ct}$ (рис.5.7)

Для початкової точки $t = t_0 = 0$ маємо:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0 = C_0^1 + C_1^1 + C_2^1 \\ \dot{x}_0 &= 0 = \alpha_1 C_1^1 + \alpha_2 C_2^1 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де $C_0^1 = \alpha U_{max}$.

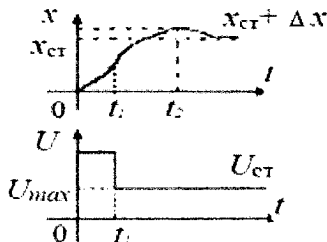


Рис. 5.8. Графіки змінних стану та управління субоптимальної системи

В момент перемикавання $t = t_1$:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (C_0^1 - C_0^2) + (C_1^1 - C_1^2) e^{\alpha_1 t_1} + (C_2^1 - C_2^2) e^{\alpha_2 t_1} \\ 0 &= \alpha_1 (C_1^1 - C_1^2) e^{\alpha_1 t_1} + \alpha_2 (C_2^1 - C_2^2) e^{\alpha_2 t_1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Маємо систему шести рівнянь з шістьма невідомими, яку необхідно розв'язати відносно t_1 та t_2 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{ct} + \Delta x - \alpha U_{ct}}{\alpha U_{max}} e^{\alpha_1 t_2} - \left(1 - \frac{U_{ct}}{U_{max}} \right) e^{\alpha_1 t_1} + 1 &= 0 \\ \frac{x_{ct} + \Delta x - \alpha U_{ct}}{\alpha U_{max}} e^{\alpha_2 t_2} - \left(1 - \frac{U_{ct}}{U_{max}} \right) e^{\alpha_2 t_1} + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Систему нелінійних рівнянь (5) з двома невідомими t_1 та t_2 можна розв'язати чисельними методами, наприклад, побудувавши функції $t_1 = f_1(t_2)$ та $t_1 = f_2(t_2)$, що відповідають рівнянням (5), чи методом Ньютона. Процес управління, показаний на рис.5.7 не є оптимальним, бо теоретично він продовжується до нескінченності. Його можна назвати субоптимальним, бо вектор x досягає задану область за скінченний і мінімальний час.

Аналогічним чином спростити оптимальне управління можна для об'єкту, що описується диференціальним рівнянням:

$$\tau \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \alpha U \quad (6)$$

У цьому випадку алгоритм управління значно простіший за оптимальний, бо не потребує реверсування об'єкту управління. Для електродвигунів попереднє зниження швидкості виконується включенням додаткового опору, такий субоптимальний алгоритм управління широко використовується для управління транспортними механізмами (шахтними підйомниками, вагон-вагами і т.д.).

5.5. Замкнуті субоптимальні за швидкодією системи

Зменшення інтервалів управління можна використати і для синтезу оптимального автомату. Якщо зменшити кількість інтервалів управління, то зменшиться і кількість змін знаків функції перемикавання $U(t)$. Завдяки цьому зменшується і кількість зворотних зв'язків. Визначити кількість інтервалів управління, що забезпечують необхідну точність, можна методами розглянутими вище. А знаючи кількість інтервалів, звичайними методами можна синтезувати оптимальний автомат. Певні складності виникають при виборі контрольованих координат вектора X . Враховуючи складність вимірювання похідних високого порядку, як контрольовані складові вектора стану X при синтезі алгоритму управління враховують лише координату, її першу похідну і рідше другу похідну. Синтезований таким чином автомат є автоматом близьким до оптимального.

Застосування ідеального релейного елемента вимагає дуже точної реалізації алгоритму оптимального управління, тобто всі параметри об'єкта і функція переключення повинні відповідати розрахунковим.

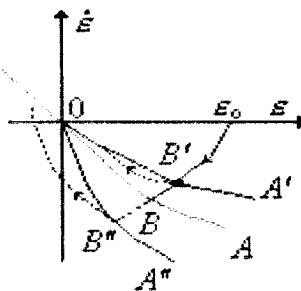


Рис. 5.9. Фазові траєкторії оптимальної системи при похибках часу перемикавання

Похибка і реалізації оптимального автомату, приблизне визначення динамічних властивостей об'єкта, наявність неврахованих при розрахунках нелінійностей (наприклад, сухе тертя, люфт) призводять до зміни моментів перемикавання. В результаті отримаємо додаткові перемикавання релейного елемента, а при певних умовах можливе виникнення граничного циклу в околі початку координат. Для ілюстрації на рис.5.9 наведена фазова траєкторія, що дозволяє оцінити вплив похибки при реалізації оптимального автомату.

В деяких випадках замість релейного елемента доцільно застосовувати лінійний підсилювач з зоною насичення. Тоді фазовою координатою буде похибка ε та її похідна $\dot{\varepsilon}$. На рис. 5.9 лінія ОА відображає ідеальну функцію перемикання. Припустимо, що внаслідок похибок в реалізації лініями перемикання будуть ОА' та ОА'', які відрізняються від ОА. Точками перемикання тепер стануть точки В' та В''. І як видно з рис.5.9 це приводить до виникнення коливального процесу для траєкторії ОВ'' та монотонного процесу для траєкторії ОВ'. Лінійний підсилювач з зоною насичення може бути використаний і для усунення автоколивань (рис 5.10).

При великому коефіцієнті підсилення зона лінійності буде значно меншою ніж сигнал похибки у випадку великих відхилень. При $\alpha \rightarrow \infty$ маємо ідеальний релейний елемент. Якщо вхідний сигнал перевищує зону лінійності ε_n , на вхід об'єкта подається оптимальний сигнал.

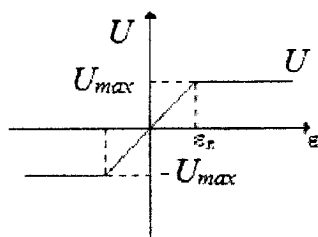


Рис. 5.10. Характеристика лінійного підсилювача з зоною насичення

У цьому випадку підсилювач працює на ділянці насичення і рух відбувається за оптимальною траєкторією, як і для ідеального релейного елемента. Момент перемикання на гальмування визначається точкою перетину траєкторії розгону та лінії перемикання (рис.5.11,а). При наявності зони лінійності будемо мати траєкторії $\varepsilon_n B$ та $\varepsilon_0 C$, які є границями зони лінійності. При $\varepsilon \rightarrow 0$ ці траєкторії стягуються до лінії перемикання ОА. Можна сказати, що точка перетину траєкторій $\varepsilon_n B$ та $\varepsilon_0 B$ відповідає переходу в лінійну область. Від точки В до точки С рух відбувається в лінійній зоні. Враховуючи, що $2\varepsilon_n \ll \varepsilon_0$ та велику швидкість $\dot{\varepsilon}$ системи в момент перемикання, можна припустити, що на ділянці ВС траєкторія суттєво не зміниться і буде мати той же вигляд, що й для $u = U_{max}$. При детальному розгляді необхідно знайти рівняння фазової траєкторії на ділянці В. У точці С підсилювач знову досягає насичення,

що відповідає моменту перемикання на гальмування. Траєкторія $-\epsilon_n C$ є ділянкою гальмування. В результаті гальмування швидкість зменшується до нуля, а починаючи з точки ϵ_n , підсилювач входить в зону лінійності і система досягає початку координат. Процес має коливальний характер. Це пояснюється тим, що зворотній зв'язок за швидкістю $\omega = -\dot{\epsilon}$ є нелінійним і коефіцієнт підсилення зворотного зв'язку зменшується зі зменшенням швидкості.

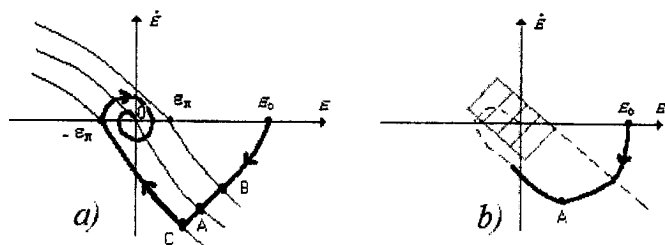


Рис. 5.11. Виникнення та гасіння стійких автоколиваний в системі

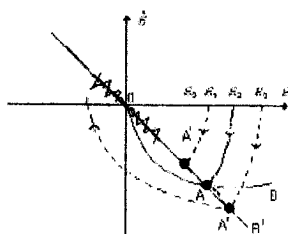


Рис. 5.12. Ковзаючий режим

Наприклад, для двох інтегруючих ланок рівняння лінії перемикання $\epsilon = \alpha \dot{\epsilon}^2$. Відомо, що в системі другого порядку коефіцієнт за швидкістю є коефіцієнтом демпфірування. Для збільшення коефіцієнта демпфірування в початку координат бажано при невеликих помилках змінювати нелінійний зворотній зв'язок на лінійний (рис.5.11,б).

З точки зору оптимальності такий алгоритм означає наступне. При великих початкових помилках критерієм оптимальності є швидкодія, тобто

$I = \int_{t_0}^{t_1} dt$, а в деякій області початку координат – квадратичний критерій опти-

мальності $I = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + cU^2) dt$, якому задовольняє лінійна система управління.

Часто виникає задача використання більш простих функцій перемикання, які можна отримати з ідеальних, наприклад, шляхом лінійно-кускової апроксимації чи заміною нелінійних зв'язків лінійними.

Розглянемо роботу релейної системи, в якій нелінійний зворотній зв'язок за швидкістю замінено лінійним (рис.5.12). Система описується диференціальним рівнянням другого порядку. Допустимо, що оптимальною траєкторією для помилки ε_2 є траєкторія $OA\varepsilon_2$. Крива OB – лінія перемикання. Введення лінійною зворотного зв'язку за швидкістю та збереження релейного управління означає заміну лінії перемикання OB прямою OB' , нахил якої вибирається таким чином, щоб вона проходила через точку A . Момент перемикання на гальмування тепер визначається перетином траєкторії розгону з прямою OB' , коли за певних умов виникає так званий ковзаючий режим. Отже, застосування лінійного зворотного зв'язку дозволяє отримати ідеальний оптимальний процес тільки для одного значення помилки розузгодження, допустимого при ε_2 .

Побудова поверхні перемикання для систем високого порядку є досить складною задачею. У випадку заданої лінійної частини з дійсними коренями для системи n -го порядку можна знайти поверхню перемикання, якщо відома поверхня перемикання для системи $(n-1)$ -го порядку. Користуючись цим методом можна синтезувати оптимальну за швидкодією систему починаючи з другого порядку, для якої задача розв'язана, до системи n -го порядку.

5.5.1. Застосування нелінійної корекції та змінної структури для синтезу субоптимальних за швидкодією систем

Для забезпечення швидкодії та усунення перерегулювання можна зробити коефіцієнт демпфірування змінним, тобто таким, щоб при великих відхиленнях коефіцієнт демпфірування буде малим, а при малих відхиленнях коефіцієнт демпфірування збільшується. Диференціальне рівняння системи в цьому випадку має вигляд:

$$\tau^2 \ddot{x} + 2\tau f(x)\dot{x} + x = 0, \quad (5.52)$$

де $f(x)$ – нелінійна функція, що вводиться в лінійну систему і може бути задана, наприклад, у вигляді:

$$f(x) = a^{-|x|}. \quad (5.53)$$

Інтенсивність впливу демпфірування із зменшенням x буде залежати від величини a .

Структурна схема системи показана на рис.5.13. Такі системи називаються системами зі змінним демпфіруванням. Якість перехідного процесу в них досягається введенням нелінійного зворотного зв'язку.

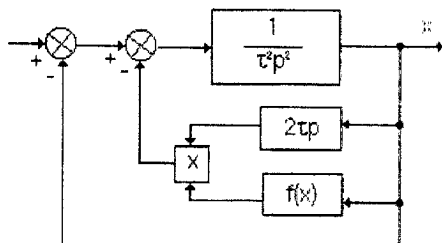


Рис. 5.13. Структурна схема системи зі змінним демпфіруванням

В релейних системах субоптимальне управління можна також реалізувати простими засобами, використовуючи метод так званого переривчастого демпфірування, використовуючи функцію:

$$f(x[n]) = e^{-x[n]}, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.54)$$

Розглянемо ідею побудови системи зі змінною структурою (СЗС) для прискорення перехідних процесів на прикладі системи другого порядку. Нехай диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.55)$$

де ξ та ω_0^2 вибирають так, щоб корені характеристичного рівняння системи (5.55) були дійсними від'ємними та однаковими, тобто

$$p_1 = p_2 = -\xi \quad (5.56)$$

В цьому випадку система має максимальну рівень стійкості, що визначається відстанню від уявної осі до наближеного кореня, і найкращою з цієї точки зору якістю перехідного процесу. Покажемо, що при таких же абсолютних значеннях 2ξ та ω_0^2 можна значно покращити якість перехідного процесу, якщо не обмежуватись умовою розташування коренів характеристичного рівняння у лівій півплощині.

Нехай є можливість тим чи іншим шляхом змінювати під час перехідного процесу структуру динамічної системи так, що при цьому змінювати-

муться знаки величин 2ξ та ω_0^2 . В цьому випадку при зміні знака при ω_0^2 з додатного на від'ємний корені характеристичного рівняння системи (5.55) будуть мати вигляд $p_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \omega_0^2}$. Оскільки параметри системи вибрані так, що $\xi^2 = \omega_0^2$, то:

$$\begin{aligned} p_1 &= \xi(\sqrt{2} - 1), \\ p_2 &= -\xi(1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (5.57)$$

З (5.57) видно, що один з коренів характеристичного рівняння системи (5.57) змістився в праву півплощину і абсолютна величина від'ємного кореня зросла більше, ніж у два рази. Покажемо, як збільшення абсолютної величини від'ємного кореня можна використати для покращення якості процесу управління. Сконструємо динамічну систему так, щоб зображуюча точка системи на фазовій площині за будь-яких початкових умов максимально швидко досягала прямої, що визначається коренем p_2 , а потім переміщалась вздовж цієї прямої до початку координат. Фазова площина такої системи зі змінною структурою показана на рис.5.14. Рух системи при цьому описується рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(x, \dot{x}) \frac{dx}{dt} + f_2(x, \dot{x})x = 0, \quad (5.58)$$

де

$$f_1(x, \dot{x}) = \begin{cases} -2\xi, \text{ при } [\dot{x} + (\sqrt{2} + 1)\xi x] \dot{x} \geq 0; \\ +2\xi, \text{ при } [\dot{x} + (\sqrt{2} + 1)\xi x] \dot{x} < 0; \end{cases}$$

$$f_2(x, \dot{x}) = \begin{cases} -\omega_0^2, \text{ при } [\dot{x} + (\sqrt{2} + 1)\xi x] x > 0; \\ +\omega_0^2, \text{ при } [\dot{x} + (\sqrt{2} + 1)\xi x] x \leq 0. \end{cases}$$

Нехай рух системи починається за початкових умов $x(0)$, $\dot{x}(0)$, що відповідає на фазовій площині точці m (рис.5.14).

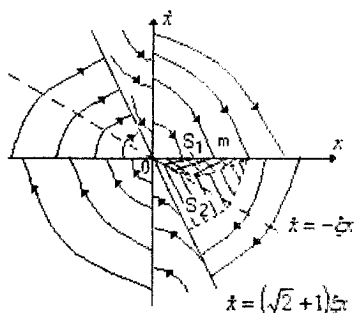


Рис. 5.14. Фазовий портрет системи зі змінною структурою квазіоптимальної за швидкодією

У випадку системи з жорсткою структурою (5.55) зображуюча точка переміщується вздовж параболічної кривої, асимптотично наближуючись до прямої $\dot{x} = -\xi x$. Якість перехідного процесу при цьому характеризується площею S_1 . Для системи зі змінною структурою (5.58) якість перехідного процесу буде значно покращено ($S_2 \gg S_1$), хоч абсолютні значення величин 2ξ та ω_0^2 в обох системах однакові.

5.5.2. Метод прогнозування для розв'язання субоптимальних задач оптимального управління

Метод прогнозування використовується для визначення оптимального управління шляхом одночасного розв'язку в прискореному темпі рівняння динаміки об'єкта та варіаційної задачі. Розглянемо метод оптимального управління, що базується на прогнозуванні оптимального руху об'єкта з обмеженням на управління та його координату. Критерієм оптимальності є швидкодія, а об'єкт описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = U; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1; \quad \frac{dx_3}{dt} = x_2 \quad (5.59)$$

На управління $u(t)$ та координату $x_2(t)$ накладено обмеження $|u(t)| \leq 1$ та $|x_2(t)| \leq X_{2\max}$, відповідно.

Необхідно синтезувати управління, що забезпечує переведення об'єкта з будь-якої початкової точки в заданий кінцевий (рівноважний) стан за мінімально можливий проміжок часу. Кінцевий стан об'єкта визначається координатою $X_{\text{зад}}(x_{1\text{зад}}; x_{2\text{зад}}; x_{3\text{зад}})$. Припустимо, що в системі реалізується опти-

мальне управління для перших двох ланок (рис.5.15,а), яке забезпечує оптимальну зміну координат x_1 та x_2 , та реалізується оптимальним регулятором. Оптимальне управління для об'єкта другого порядку має вид:

$$u = \text{sign} \left[x_{2\text{зад}} - x_2 - \frac{1}{2} (\text{sign} x_1) x_1^2 \right],$$

і воно забезпечує досягнення $x_2 = X_{2\text{max}}$ за мінімальний час (відрізок Oa на рис.5.15,б). Після цього необхідно змінити завдання оптимальному регулятору таким чином, щоб забезпечити перехід з $x_{2\text{зад}} = X_{2\text{max}}$ на $x_{2\text{зад}} = 0$ і на відрізку ab підтримати досягнуте значення $X_{2\text{max}}$ та $u_2(t) = 0$.

Визначення моменту перемикання $u(t)$ виконується прогнозуючим пристроєм (ПП), який являє собою швидкодіючу модель об'єкта. В моделі встановлюється значення $x_{2\text{зад}} = 0$ і до кожного інтегратора задаються як початкові умови поточні значення $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ (рис.5.16).

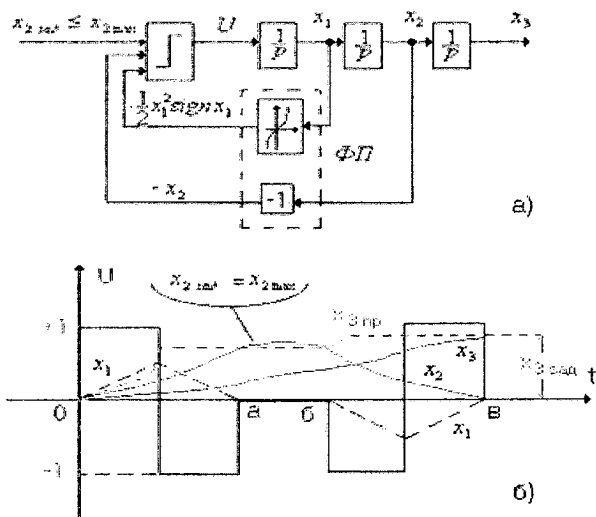


Рис. 5.15. Структурна схема (а) і часові діаграми (б) задачі прогнозування

Така модель працює циклічно в прискореному масштабі часу. В кінці кожного періоду визначаємо координату $x_3(t)$, яка була б досягнута, якби завдання оптимальному управляючому пристрою для x_2 дорівнювало б нулю. Таким чином, на кожному циклі одержимо значення $x_{3\text{пр}}$ (прогнозоване). При досягненні $x_{3\text{пр}} = x_{3\text{зад}}$ логічний блок ЛБ подає команду відключення сигналу

x_2 зад оптимального регулятора (точка б). Після цього і координата об'єкта x_2 прямує до нуля. Зміна x_3 пр в часі показана на рис.5.16.

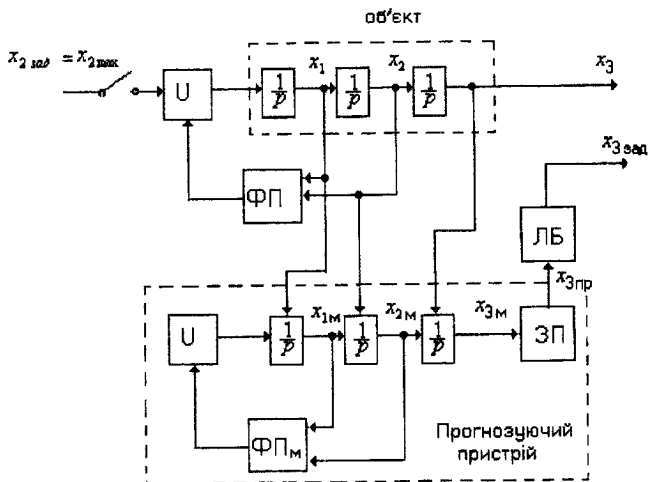


Рис.5.16. Реалізація принципу прогнозування для системи автоматичного управління третього порядку, де ЗП – запам'ятовуючий пристрій; ЛБ – логічний блок; ФП – функціональний перетворювач

5.6. Управління лінійними об'єктами, оптимальне за витратами палива

Критерієм оптимальності системи оптимальної за витратами палива є функціонал виду:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m C_j |U_j(t)| dt, j = \overline{1, m}, \quad (5.60)$$

причому сталі $C_j > 0$.

Динаміка об'єкта описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k, i = \overline{1, n} \quad (5.61)$$

або у векторній формі

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU,$$

де A, B – матриці розміру відповідно $n \times n, n \times m$, X – n -вимірний вектор стану; U – m -вимірний вектор управління. Треба визначити управління $|U_j(t)| \leq 1, (j=1, m)$, що переводить об'єкт (5.61) із початкового стану X^0 в кінцевий X^1 , за якого функціонал (5.60) досягатиме мінімального значення. Час переходу $(t_1 - t_0)$ може бути заданий або ні.

На основі принципу максимуму введемо нову змінну x_0 , що задовольняє рівнянню:

$$\frac{dx_0}{dt} = \sum_{j=1}^m C_j |U_j(t)| \quad (5.62)$$

та допоміжні змінні $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ і функцію Гамільтона

$$\tilde{H} = \psi_0 \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k \right) \quad (5.63)$$

Допоміжні змінні $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ задовольняють системі спряжених рівнянь:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_j, \quad i = 1, n. \quad (5.64)$$

У виразі для \tilde{H} виділимо складові, що явно залежать від управління U (припускаючи, що $\psi_0 = -1$):

$$H_1 = - \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{i=1}^m b_{ij} U_j,$$

чи зменшивши порядок сум у другій складовій, отримаємо:

$$H_1 = - \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{j=1}^m U_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i. \quad (5.65)$$

Якщо оптимальне управління існує, то воно повинно забезпечити максимум \tilde{H} , а отже, і функції H_1 .

Введемо позначення:

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t).$$

Враховуючи те, що управління U_j ($j=1, m$) незалежні, максимальне значення H_1 досягається, якщо досягається максимум за U_j кожною складовою

$$C_j \left(\frac{q_j(t)}{C_j} U_j - |U_j| \right).$$

Неважко побачити, що

$$\max_{U_j \leq 1} \left(\frac{q_j(t)}{C_j} U_j - |U_j| \right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \left| \frac{q_j}{C_j} \right| < 1 \\ \left| \frac{q_j}{C_j} \right| - 1, & \text{якщо } \left| \frac{q_j}{C_j} \right| \geq 1 \end{cases},$$

причому максимум досягається при управлінні

$$U_j^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \left| \frac{q_j}{C_j} \right| < 1, \\ 1, & \text{якщо } \frac{q_j}{C_j} > 1, \\ -1, & \text{якщо } \frac{q_j}{C_j} < -1. \end{cases} \quad (5.66)$$

Якщо $\frac{q_j}{C_j} = 1$, то управління U_j^* можуть приймати будь-які значення на відрізку $[0, 1]$, якщо $\frac{q_j}{C_j} = -1$, то управління U_j^* може приймати будь-які значення на відрізку $[-1, 0]$.

Для компактності запису вводимо функцію зони нечутливості $y = \text{dez}(x)$, яка визначається таким чином:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| < 1; \\ \text{sign } x, & \text{якщо } |x| > 1; \\ \in [0, 1], & \text{якщо } x = 1; \\ \in [-1, 0], & \text{якщо } x = -1. \end{cases} \quad (5.67)$$

Графік функції $y = \text{dez}(x)$ наведено на рис.5.17.

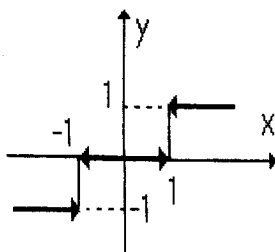


Рис. 5.17. Графік функції зони чутливості

Враховуючи функції $y = dez(x)$, можна записати (5.66) у вигляді

$$U_j' = dez \left(\frac{q_j(t)}{C_j} \right), \quad j = 1, m. \quad (5.68)$$

З виразу (5.68) випливає, що величина і знак управління, яке мінімізує витрати палива, визначена при $\left| \frac{q_j(t)}{C_j} \right| \neq 1$. В протилежному випадку відомий тільки знак, величина ж управління буде невизначеною, будь-якою з інтервалу або $[0, 1]$, або $[-1, 0]$.

Введемо поняття нормальної та виродженої задач про мінімум витрат палива. Якщо на інтервалі $[t_0, t_1]$ маємо скінченні чи лічені множини моментів часу $\tau_{1j}, \tau_{2j}, \dots, \tau_{nj}, \dots$, таких, що $\left| \frac{q_j(\tau_{ij})}{C_j} \right| = 1$ для всіх $j = 1, m$, то задача на мінімум витрат палива зветься *нормальною*.

Якщо на інтервалі $[t_0, t_1]$ є хоча б один такий підінтервал $[\tau_1, \tau_2] \in [t_0, t_1]$, що $\left| \frac{q_j(t)}{C_j} \right| = 1$ для всіх $t \in [\tau_1, \tau_2]$, то задача називається *виродженою*, а інтервал $[\tau_1, \tau_2]$ – *інтервалом виродженості*.

Наведемо без доведення достатні умови нормальності задані на мінімум витрат палива при управлінні лінійним об'єктом. Створимо для цього матрицю

$$G_j = [b_j : Ab_j : \dots : A^{n-1}b_j], \quad j = 1, m,$$

де b_j – j -й стовпець матриці B .

Якщо матриця $G_j^T A^T$ невиврождена для всіх $j = 1, m$, то задача на мінімум витрат палива для лінійного об'єкту є нормальною. Таким чином, задача мінімуму витрат палива вважається нормальною, якщо матриця A невиврождена і система рівнянь (5.61), що описує динаміку об'єкта, нормальна. Для задачі управління такого об'єкта справедлива наступна теорема.

Теорема. Якщо задача на мінімум витрат палива є нормальною, то оптимальне управління (у випадку його існування) є єдиним і має скінчену кількість моментів перемикання.

Приклад 5.3.

Розглянемо задачу синтезу оптимального управління для об'єкту, що описується рівнянням:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 + bU, \quad (1)$$

де $a > 0$, $b > 0$ – деякі сталі.

Припустимо, що на управління накладається обмеження $U(t): |U(t)| \leq 1$.

Критерієм оптимальності є функціонал виду:

$$I = \int_0^T (k + |u(t)|) dt, \quad \text{де } k > 0. \quad (2)$$

Початковий та кінцевий стани задані відповідно як $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ та $x_1(T) = x_2(T) = 0$. Критерій (2) дозволяє синтезувати систему управління, що забезпечить невеликі витрати палива та високу швидкість. Час перехідного процесу не задається. Синтезуємо оптимальний регулятор на основі принципу максимуму шляхом мінімізації критерію (2). Введемо нову змінну x_0 , що задовольняє рівнянню $\frac{dx_0}{dt} = k + |u|$. Тоді, враховуючи рівняння (1), для узагальненого об'єкту $\tilde{X} = \{x_0, x_1, x_2\}$ можна записати наступну систему рівнянь:

$$\frac{dx_0}{dt} = k + |u|; \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 + bu.$$

Гамільтоніан системи має вигляд:

$$\tilde{H}(\tilde{\Psi}, \tilde{X}, U) = \Psi_0(k + |u|) + \Psi_1 x_2 + \Psi_2(-ax_2 + bu).$$

Приймаємо $\Psi_0 = -1$. Тоді оптимальне управління U^* , що забезпечує максимум функції \tilde{H} буде:

$$U^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |b\Psi_2| < 1, \\ +1, & \text{якщо } b\Psi_2 > 1, \\ -1, & \text{якщо } b\Psi_2 < -1, \\ \in [0, 1], & \text{якщо } b\Psi_2 = 1, \\ \in [-1, 0], & \text{якщо } b\Psi_2 = -1, \end{cases}$$

чи $U^* = \text{dez}(b\Psi_2)$.

Допоміжні змінні Ψ_1, Ψ_2 задовольняють системі спряжених рівнянь:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = -\Psi_1 + a\Psi_2.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь:

$$\Psi_1(t) = \Psi_{10}, \quad \Psi_2(t) = (\Psi_{20} - \frac{\Psi_{10}}{a})e^{at} + \frac{\Psi_{10}}{a}, \quad (3)$$

де $\Psi_{10} = \Psi_1(0)$, $\Psi_{20} = \Psi_2(0)$.

З виразу (3) для $\Psi_2(t)$ витікає, що оптимальна управляюча послідовність має вигляд: $\{+1\}, \{-1\}, \{0,+1\}, \{0,-1\}, \{+1,0,-1\}, \{-1,0,+1\}$.

Знайдемо розв'язок системи (1) при управлінні $U = 0$ та $U = \Delta = \pm 1$.

Для управління $U = 0$:

$$x_1(t) = x_{10} + \frac{x_{20}}{a}(1 - e^{-at}), \quad x_2(t) = x_{20}e^{-at}. \quad (4)$$

При управлінні $U = \Delta$ маємо:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} - \frac{1}{a} \left(x_{20} - \frac{b\Delta}{a} \right) e^{-at} + \frac{b\Delta}{a} t + \frac{1}{a} \left(x_{20} - \frac{b\Delta}{a} \right), \\ x_2(t) &= \left(x_{20} - \frac{b\Delta}{a} \right) e^{-at} + \frac{b\Delta}{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Виключаючи час t з виразів (4) та (5), отримаємо рівняння фазової траєкторії. Для управління $U = 0$ рівняння фазової траєкторії (рис.5.18 а) записується у вигляді:

$$x_1 - x_{10} = -\frac{1}{a}(x_2 - x_{20}), \quad (6)$$

а для управління $U = \Delta$ (рис.5.18 б):

$$x_1 - x_{10} = -\frac{1}{a}(x_2 - x_{20}) - \frac{b\Delta}{a^2} \ln \left| \frac{x_2 - \frac{b\Delta}{a}}{x_{20} - \frac{b\Delta}{a}} \right|. \quad (7)$$

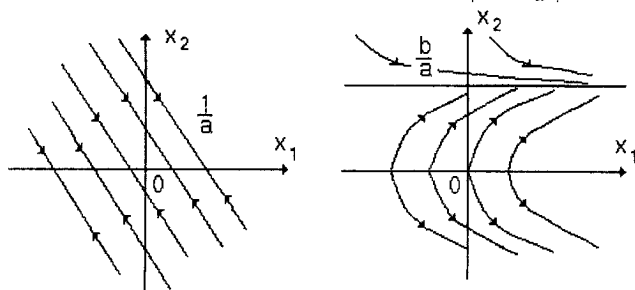


Рис. 5.18. Фазові траєкторії для $U = 0$ та $U = \Delta$

Нехай система з початкового стану (x_{10}, x_{20}) переводяться в початок координат управлінням виду:

$$U^* = \begin{cases} -1, npi & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, npi & t_1 \leq t \leq t_2, \\ +1, npi & t_2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (8)$$

Управлінню (8) відповідає управляюча послідовність $\{-1, 0, +1\}$. Точку на фазовій траєкторії для моменту t_2 позначимо як (y_1, y_2) , а для моменту t_1 — (z_1, z_2) . Тоді рівняння геометричного місця точок (y_1, y_2) можна визначити з співвідношення (7) при $\Delta = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_{10} = y_1$, $x_{20} = y_2$:

$$y_1 = -\frac{1}{a}y_2 - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 - \frac{ay_2}{b} \right), \quad y_2 \leq 0. \quad (9)$$

Якщо задати криву γ_1^+ з допомогою рівняння $x_1 = -\frac{1}{a}x_2 - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 - \frac{ax_2}{b} \right)$; $x_2 \leq 0$, то стан $(y_1, y_2) \in \gamma_1^+$. Знайдемо геометричне місце станів (z_1, z_2) . Стани (z_1, z_2) та (y_1, y_2) з'єднуються фазовою траєкторією (6). Звідки маємо рівність:

$$y_1 - z_1 = -\frac{1}{a}(y_2 - z_2). \quad (10)$$

Підставляючи значення y_1 з (9) в рівність (10), одержимо:

$$z_1 = -\frac{1}{a}z_2 - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 - \frac{az_2}{b} \right); \quad z_2 \leq 0. \quad (11)$$

Для виключення змінної y_2 з рівності (11) врахуємо, що Гамільтоніан H вздовж оптимальної траєкторії дорівнює нулю. При $t = t_1$ управління U^* змінюється із значення $U^* = -1$ на $U^* = 0$, і тому $b\psi_{10}(t_2) = \pm 1$. При $t = t_2$ управління змінюється із значення $U^* = 0$ на $U^* = +1$. Враховуючи це отримуємо:

$$H|_{t=t_1} = -k + \psi_{10}z_2 + \frac{a}{b}z_2 = 0, \quad (12)$$

$$H|_{t=t_2} = -k + \psi_{10}y_2 + \frac{a}{b}y_2 = 0. \quad (13)$$

Виключаючи ψ_{10} з рівнянь (12) і (13) знайдемо:

$$y_2 = -\frac{kz_2}{k - \frac{a}{b}z_2}. \quad (14)$$

Підставляючи знайдене значення y_2 в формулу (11) маємо:

$$z_1 = -\frac{1}{a}z_2 - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 - \frac{akz_2}{bk - 2az_2} \right); z_2 \leq 0. \quad (15)$$

Якщо задати криву γ_2^+ з допомогою рівняння:

$$x_1 = -\frac{1}{a}x_2 - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 - \frac{akx_2}{bk - 2ax_2} \right); x_2 \leq 0, \quad (16)$$

то стан $(z_1, z_2) \in \gamma_2^+$.

Якщо система із початкового стану (x_{10}, x_{20}) переводиться в початок координат управляючою послідовністю $\{+1, 0, -1\}$, причому моменти перемикання t_1 і t_2 , то геометричне місце точок (y_1, y_2) , які відповідають моменту перемикання t_2 , буде задано рівнянням:

$$y_1 = -\frac{1}{a}y_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{ay_2}{b} \right); y_2 \geq 0, \quad (17)$$

а геометричне місце точок (z_1, z_2) , що відповідає моменту перемикання t_1 , задається співвідношенням:

$$z_1 = -\frac{1}{a}z_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{akz_2}{bk - 2az_2} \right); z_2 \geq 0. \quad (18)$$

Задамо криву γ_1^- рівнянням:

$$x_1 = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{ax_2}{b} \right); x_2 \geq 0. \quad (19)$$

Тоді стан $(y_1, y_2) \in \gamma_1^-$.

Крива γ_2^- задається співвідношенням:

$$x_1 = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{akx_2}{bk + 2ax_2} \right); x_2 \geq 0. \quad (20)$$

Стан $(z_1, z_2) \in \gamma_2^-$, а лінія перемикання $\gamma_1 = \gamma_1^+ \cup \gamma_1^-$, вздовж якої управління змінює значення з $U^* = 0$ на $U^* = \pm 1$ задається рівнянням:

$$\gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{ax_2}{b} \right) \text{sign} x_2 \right\}. \quad (21)$$

Аналогічно лінія перемикання $\gamma_2 = \gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$, на якій управління $U^* = \pm 1$ набуває значення $U^* = 0$, визначатись співвідношенням

$$\gamma_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{akx_2}{bk + 2ax_2} \right) \text{sign} x_2 \right\}. \quad (22)$$

Криві γ_1 та γ_2 ділять фазову площину на області R_1, R_2, R_3 та R_4 (рис.5.19 а). При $k = 0$ функціонал (2) має вигляд:

$$I = \int_0^T |u(t)| dt. \quad (23)$$

Для цього випадку лінія перемикання γ_1 не змінюється, а рівняння лінії γ_2 приймає вигляд:

$$\gamma_3 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{a}x_2 \right\}. \quad (24)$$

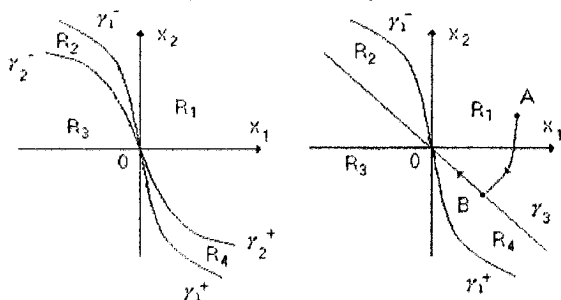


Рис. 5.19. Лінії перемикання оптимального управління

Розбиття площини (x_1, x_2) на області R_1, R_2, R_3 та R_4 кривими γ_1 та γ_3 показано на (рис.5.19 б).

Оптимальне управління U^* як функція координат стану системи визначається таким чином:

$$U^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } (x_1, x_2) \in R_1, \\ +1, & \text{якщо } (x_1, x_2) \in R_3, \\ 0, & \text{якщо } (x_1, x_2) \in R_2 \cup R_4. \end{cases} \quad (25)$$

На рис.5.20 показана структурна схема системи, в якій реалізовано оптимальне управління (25). На рис.5.20 функція $f_1(x_2)$ визначається залежністю

$$f_1(x_2) = \frac{x^2}{a} - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{a|x_2|}{b} \right) \text{sign} x_2, \quad (26)$$

а функція $f_2(x_2)$ задається співвідношенням

$$f_2(x_2) = \frac{x^2}{a} - \frac{b}{a^2} \ln \left(1 + \frac{ak|x_2|}{bk + 2a|x_2|} \right) \text{sign} x_2. \quad (27)$$

Для функціоналу (23) лінія перемикання γ_3 є фазовою траєкторією. Наприклад, якщо початковий стан належить області R_1 , то на відрізку траєкторії, розташованому в області R_1 , управління $U^* = -1$. При досягненні точки стану кривої γ_3 управління набуває значення $U^* = 0$ і рух відбувається по цій кривій. Час переходу в початок координат вздовж неї нескінченний, але для будь-якого малого околу початку координат можна досягти за скінченний проміжок часу.

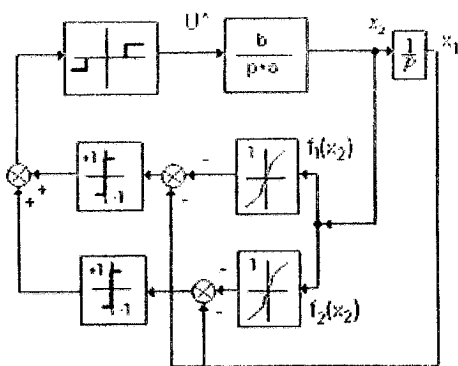


Рис. 5.20. Структурна схема системи оптимального управління

Приклад 5.4.

Розглянемо задачу оптимального за витратами палива управління для об'єкта, що описується системою рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + U. \quad (1)$$

Мінімізується критерій виду $I = \int_0^T |U(t)| dt$ і на управління $U(t)$ обмежується

$$|U(t)| \leq 1.$$

Початковий стан $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$, кінцевий — $x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$. Для системи

рівнянь (1) маємо матриці: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; звідки $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Матриця $G^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — невироджена, тобто задача є нормальною. За умови, що $\psi_0 = -1$, гамільтоніан має вид:

$$\tilde{H} = -\dot{U} + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + U). \quad (2)$$

Управління U^* , що надає максимум гамільтоніану (2), визначаємо системою:

$$U^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\psi_2(t)| \leq 1, \\ +1, & \text{якщо } \psi_2(t) > 1, \\ -1, & \text{якщо } \psi_2(t) < -1, \end{cases} \quad (3)$$

чи $U^* = \text{dez}[\psi_2(t)]$.

Запишемо систему рівнянь для допоміжних змінних ψ_1 та ψ_2 :

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \quad (4)$$

Розв'язок системи рівнянь (4) має вигляд:

$$\psi_1 = -A \cos(t + \alpha), \psi_2 = A \sin(t + \alpha), \quad (5)$$

причому $A > 0, 0 \leq \alpha < 2\pi$. Визначимо рішення системи (1) при $U = 0, U = 1$ та $U = -1$.

За умови, що $U = 0$ одержимо систему рівнянь $\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = -x_1$, розв'язок якої

$x_1 = -R \cos(t + \beta), x_2 = R \sin(t + \beta)$ залежить від сталих R та β , причому $R > 0, 0 \leq \beta < 2\pi$.

Фазовою траєкторією цієї системи є сім'я концентричних кіл з центром в початку координат. Фазові траєкторії системи (1) при $U = 1$ та $U = -1$ також будуть концентричними колами, центр яких при $U = 1$ у точці $(1,0)$; при $U = -1$ центр кола знаходиться в точці $(-1,0)$. Фазові траєкторії системи (1) при $U = 0, U = 1$ та $U = -1$ зображені на рис.5.21.

Припустимо, що оптимальне управління U^* переводить систему із початкового стану (x_{10}, x_{20}) в початок координат. Тоді на останній фазі оптимальної траєкторії управління U^* дорівнює $+1$ чи -1 . Припустимо, що деякий початковий стан відповідає оптимальному управлінню, зображеному на рис.5.22.

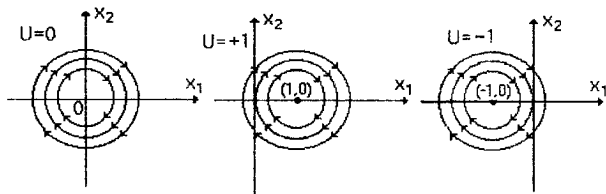


Рис. 5.21. Фазові траєкторії системи управління при різних значеннях U

Тоді остання фаза AO траєкторії являє собою дугу кола з центральним кутом η (рис.5.23). Враховуючи те, що управління на відрізку часу $[T - \pi, T - \eta]$ дорівнює нулю, відрізок оптимальної фазової траєкторії уявляє собою дугу кола AB з центральним кутом $\pi - \eta$. У точці A управління змінюється з $U^* = 0$ на $U^* = +1$, а у точці B з $U^* = -1$ на $U^* = 0$.

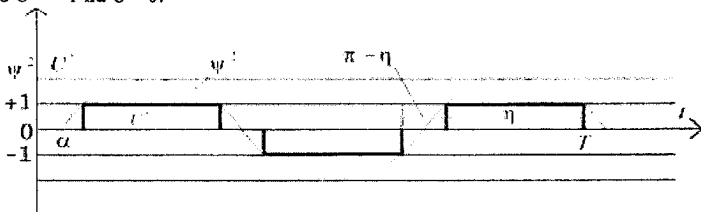


Рис. 5.22. Графік оптимального управління

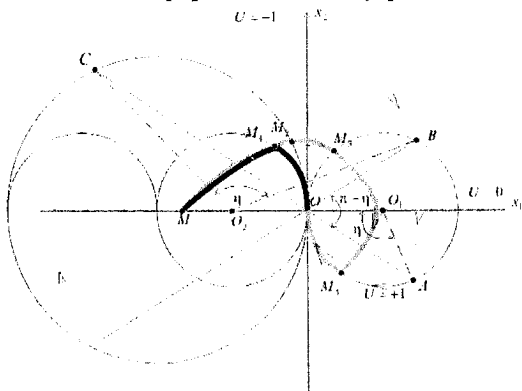


Рис. 5.23. Фазова траєкторія для оптимального управління U^*

Слід відмітити, що управління, яке задовольняє принципу максимуму, не є єдиним. Оскільки початкова точка M може бути переведена в початок координат як по траєкторії MM_1O , так і по траєкторії $MM_1M_2M_3M_4O$ (рис.5.23), тривалість руху по цим траєкторіям різний.

5.7. Управління оптимальне за витратами енергії

Оскільки квадрат управляючого впливу пропорційний потужності, потрібної для управління, то мінімум інтеграла за часом від квадрата сигналу управління є мірою енергії затраченої при оптимальному управлінні.

Розглянемо нестационарний об'єкт n -го порядку, що описується векторно-матричним диференціальним рівнянням

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (5.69)$$

за початкових умов $X(t_0) = x_0$, де вектор стану $X(t)$ має розмірність n , вектор управління $U(t)$ – розмірність m , а матриця коефіцієнтів $A(t)$ та матриця управління $B(t)$ відповідно $(n \times n)$ та $(n \times m)$.

Вектор оптимального управління шукаємо за умови мінімальних витрат енергії:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt \quad (5.70)$$

при обмеженнях на управління виду:

$$|u_{kmax}| \geq u_k(t) \quad (5.71)$$

де u_{kmax} – деяка стала. Введенням нової координати:

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt \quad (5.72)$$

задача управління за мінімальними витратами енергії зводиться до задачі з пошуку мінімуму нової координати кінця траєкторії стосовно вектора управління U , для якого мають місце обмеження (5.69) та (5.71).

Перетворимо систему, що характеризується диференціальними рівняннями:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{k=1}^m p_{ik}(t)U_k(t), \quad i = 1, n; \quad (5.73)$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^m U_k^2(t) \quad (5.74)$$

при початкових умовах:

$$x(t_0) = X_0, x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (5.75)$$

В (5.73) $a_{ij}(t)$ – елементи матриці $A(t)$, $b_{ik}(t)$ – елементи матриці $B(t)$.

Функція Понтрягіна має вигляд:

$$\rho = x_{n+1}(t_1), \quad (5.76)$$

а гамільтоніан системи:

$$H = X^T(t)A^T(t)\psi(t) + U^T(t)B^T(t)\psi(t) + \psi_0(t)\sum_{k=1}^m u_k^2(t) \quad (5.77)$$

За умови, що $\psi_0(t) = -1$ запишемо гамільтоніан як:

$$H = X^T(t)A^T(t)\Psi(t) + U^T(t)B^T(t)\Psi(t) - \sum_{k=1}^m u_k^2(t), \quad (5.78)$$

де допоміжний вектор $\psi(t)$ є розв'язок канонічного рівняння:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -A^T(t)\psi(t). \quad (5.79)$$

і визначається виразом:

$$\psi(t) = W_a(-t, t_0)\psi(t_0). \quad (5.80)$$

Нехай

$$S(t) = B^T(t)\psi(t) = B^T(t)W_a(-t, t_0)\psi(t_0). \quad (5.81)$$

Тоді Гамільтоніан має вигляд:

$$H = X^T(t)A^T(t)\psi(t) + U^T(t)S(t) - \sum_{k=1}^m u_k^2(t). \quad (5.82)$$

Векторна функція $S(t)$ уявляє собою вектор-стовбець розмірності m

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ S_m(t) \end{bmatrix}, \quad (5.83)$$

що, як буде видно далі, описує оптимальну функцію перемикавання.

Гамільтоніан H (5.82) досягає максимуму відносно $U(t)$, якщо функція:

$$U^T(t)S(t) - \sum_{k=1}^m u_k^2(t) = \sum_{k=1}^m [u_k(t)S_k(t) - u_k^2(t)] \quad (5.84)$$

має максимум. З виразу (5.84) видно, що якщо $|S_k(t)| \leq 2H_{k \max}$, то умова максимуму H має вид:

$$\frac{\partial [u_k(t)S_k(t) - u_k^2(t)]}{\partial u_k(t)} = 0. \quad (5.85)$$

Звідси витікає, що оптимальні управляючі впливи дорівнюють

$$u_k^*(t) = \frac{1}{2} S(t), \quad k = \overline{1, m}, \quad (5.86)$$

а вектор оптимального управління

$$U^*(t) = \frac{1}{2} S(t). \quad (5.87)$$

При цьому обмеження (5.71) виконуються, бо $|s_k(t)| \leq 2u_{k \max}$.

З іншого боку, якщо $|s_k(t)| \geq 2u_{k \max}$, то оптимальний управляючий вплив, який надає мінімум гамільтоніану H , дорівнює

$$u_k(t) = u_{k \max} \text{Sign}\{s_k(t)\}, \quad (5.88)$$

бо максимально допустиме значення для $u_k(t)$ дорівнює $u_{k \max}$. Звідси випливає, що оптимальне управління за мінімальними витратами енергії лінійним об'єктом за наявності обмеження на управляючий вплив, має вид:

$$u_k^2 = \frac{1}{2} s_k(t), \quad \text{якщо } |s_k(t)| \leq 2u_{k \max} \quad (5.89)$$

$$u_k^*(t) = u_{k \max} \text{sign}\{s_k(t)\}, \quad \text{якщо } |s_k(t)| \geq 2u_{k \max}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (5.90)$$

У випадку інваріантного в часі процесу, оптимальна функція перемикання $S(t)$ визначається формулою:

$$S(t) = B^T e^{-A^T(t)} \psi(t_0). \quad (5.91)$$

З отриманого результату витікає, що систему управління оптимальну за мінімальною енергією можна зобразити за допомогою схеми (рис. 5.26).

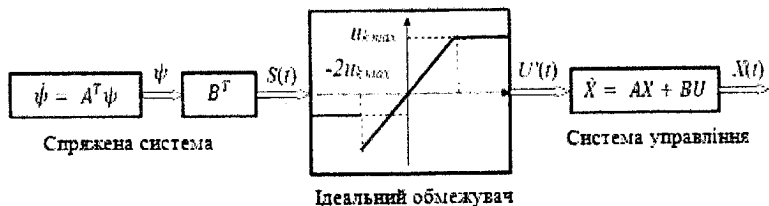


Рис. 5.24. Схема системи оптимальної за витратами енергії

В області лінійного управління, тобто коли $|s_r(t)| \leq 2u_{k \max}$, вектор оптимального управління $U^*(t)$ може бути виражений у вигляді функції змінних стану.

Розв'язок рівняння (5.69) має вид:

$$X(t) = W(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t W(t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (5.92)$$

Підставляючи (5.87) та (5.81) в рівняння (5.92), одержимо:

$$X(t) = W(t, t_0)X_0 + Q(t)\psi(t_0), \quad (5.93)$$

де $Q(t)$ – матриця, що має $n \times n$ елементів, визначається виразом:

$$Q(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t W(t, \tau)B^T(\tau)W_a(-\tau, t_0)d\tau. \quad (5.94)$$

Вектор початкового стану $\psi(t_0)$ для спряженої системи можна знайти безпосередньо з рівняння (5.93)

$$\psi(t_0) = Q^{-1}(t)[X(t) - W(t, t_0)X_0] \quad (5.95)$$

якщо матриця $Q(t)$ – несингулярна, T – кінцевий момент часу. Оптимальне управління в лінійній області управління має вид:

$$U^*(X, t) = \frac{1}{2} B^T(t)W_a(-t, t_0)Q^{-1}(t)[X(t) - W(t, t_0)X_0]. \quad (5.96)$$

В межах області насичення оптимальний управляючий вплив дорівнює максимально допустимому значенню і змінюється відповідно з (5.90).

5.8. Термінальні системи управління

Якщо в результаті цілеспрямованої дії системи оптимального управління об'єкт переходить із деякого початкового стану в заданий кінцевий за встановлений час $t = T$, то управляючий вплив носить назву *термінального*.

Можливі дві постановки задач пошуку термінального управління. В обох існує нескінченна множина фазових траєкторій, які обов'язково проходять через початкову та кінцеву фазові точки.

У першій постановці формуються додаткові вимоги до процесу управління у вигляді деяких функціоналів, що повинні досягати екстремуму. Це, так звана, *варіаційна постановка*.

У другій постановці задачі додаткові вимоги до фазової траєкторії не висувуються. Критерієм її вибору може бути, наприклад, простота обчислення управління. Ця постановка задачі зветься *термінальною*. Часто час T дуже малий (кілька секунд) і додаткова мета не може бути задана.

Існують два методи пошуку термінальних управлінь. У першому управляючі впливи обчислюються у вигляді поліномів відносно часу, невідомі коефіцієнти яких визначаються з крайових умов. Однак замкнене оптимальне управління просто отримати лише для нескладних структур лінійних об'єктів.

У другому методі вводиться вихідна траєкторія часу, невідомі параметри якої визначаються з крайових умов, а потім, виходячи з особливостей структури лінійного чи нелінійного об'єкта, визначається вхідний управляючий вплив.

Розглянемо порядок синтезу термінальних управлінь другим методом. Припустимо, що об'єкт управління описується системою рівнянь:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m), i = 1, n; \quad m < n, \quad (5.97)$$

де n – порядок об'єкта; x_i – фазові координати; U_j – управляючі дії; f_i – неперервні функції координат та управлінь. Для лінійних об'єктів та значної частини нелінійних система рівнянь (5.97) розв'язується відносно управлінь. При цьому задачу синтезу термінальних управлінь можна розв'язати точно не використовуючи варіаційний підхід.

У випадку скалярного управління ($m = 1$) систему (5.97) можна звести до наступного вигляду:

$$\phi(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, u) = 0, \quad \text{або} \quad u(t) = G(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}), \quad (5.98)$$

де функція ϕ – неперервна і n раз диференційована. Вихідну змінну об'єкта згідно з теоремою Вейерштраса про наближення можна апроксимувати з будь-якою наперед заданою точністю поліномом від часу виду:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n+r-1} c_i t^i, \quad (5.99)$$

де c_i – $(n+r)$ невідомих параметрів, n – кількість початкових, r – кількість граничних умов.

Для одновимірного об'єкта (5.97) крайові умови для внутрішніх фазових координат перераховують у крайові умови вихідної координати $x(t)$ та її похідних. Для цього складемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dot{x}_i &= \varphi_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n); \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$x_1^{(n)} = \psi_n(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_n^{(n-1)}).$$

Перепишучи (5.100) для початкового ($t = 0$) та кінцевого ($t = T$) моментів часу, одержимо формули для обчислення граничних значень похідних вихідної величини $x_1(t)$, які використовуються для визначення коефіцієнтів c_i траєкторії (5.99). Підставляючи (5.99) в рівняння одномірного об'єкта

$$x^{(n)} + b_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{x} + b_0x = u, \quad (5.101)$$

одержимо термінальне управління у вигляді:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n+r-1} k_i t^i, \quad (5.102)$$

де $k_i = \sum_{\nu=0}^2 \frac{(i+\nu)!}{i!} b_\nu c_{i+\nu}$, c_i – раніше визначені коефіцієнти.

Приклад 5.5.

Треба знайти термінальне управління, яке переводить об'єкт

$$\begin{aligned} x_1(t_0 = 0) &= x_{10} \\ \dot{x}_1 &= -ax_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a_2 + u \\ x_2(t_0 + 0) &= x_{20} \end{aligned} \quad (1)$$

в заданий кінцевий стан $x_1(t_1 = T) = x_{11}$; $x_2(t_1 = T) = x_{21}$ за заданий час $t_1 = T$. В даному прикладі об'єкт другого порядку $n = 2$, кількість кінцевих умов $r = 2$. Тоді траєкторія переведення об'єкта в заданий кінцевий стан визначається функцією виду:

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{2+2-1} c_i t^i = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3. \quad (2)$$

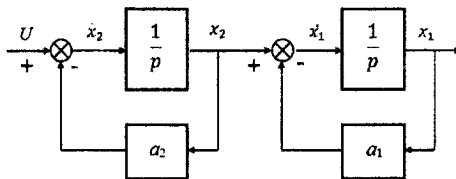


Рис.5.25. Структурна схема оптимальної термінальної системи

Перераховуємо крайові умови до вихідної координати x_1 та її похідної. Для цього із першого рівняння системи (1) для початкового $t_0 = 0$ та кінцевого $t_1 = T$ моментів часу визначимо

$$\dot{x}_{10} = -a_1 x_{10} + x_{20}, \quad (3)$$

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2. \quad (4)$$

Для полінома (2) в момент $t = 0$ одержимо

$$x_1(t=0) = x_{10} = c_0, \quad (5)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_{10} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 = c_1.$$

В результаті $c_0 = x_{10}$, $c_1 = \dot{x}_{10}$, для полінома (2) в момент $t_1 = T$ маємо:

$$x_1(T) = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 = x_{11} \quad (6)$$

$$\dot{x}_1(T) = c_1 + 2c_2 T + 3c_3 T^2 = \dot{x}_{11}.$$

після перетворень останніх рівнянь, маємо

$$c_2 T^2 + c_3 T^3 = A, \quad (7)$$

$$2c_2 T + 3c_3 T^2 = B,$$

де $A = x_{11} - c_0 - c_1 T$, $B = \dot{x}_{11} - c_1$.

З системи рівнянь (7) визначимо

$$c_2 = \frac{1}{T^2} (3A - BT), \quad c_3 = \frac{1}{T^3} (TB - 2A). \quad (8)$$

Враховуючи (7), одержимо

$$c_2 = -\frac{3}{T^2} x_{10} - \frac{2}{T} \dot{x}_{10} + \frac{3}{T^2} x_{11} - \frac{1}{T} \dot{x}_{11}, \quad (9)$$

$$c_3 = \frac{2}{T^3} x_{10} + \frac{1}{T^2} \dot{x}_{10} - \frac{2}{T^3} x_{11} + \frac{1}{T^2} \dot{x}_{11}.$$

Використовуючи значення одержаних коефіцієнтів c_0, c_1, c_2, c_3 знаходимо параметри управляючого впливу

$$u(t) = \sum_{i=0}^{2+2-1} k_i t^i = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3, \quad (10)$$

де коефіцієнти k_i визначаються згідно (5.91).

Передаюча функція об'єкта (рис. 5.27):

$$Y(p) = \frac{1}{b_2 p^2 + b_1 p + p_0}, \quad (11)$$

де $b_0 = a_1 a_2$; $b_1 = a_1 + a_2$; $b_2 = 1$.

За формулою $k_i = \sum_{\nu=0}^2 \frac{(i+\nu)!}{i!} b_\nu c_{i+\nu_0}$ $i = 0, 1, 2, 3$ обчислені значення

$$\begin{aligned} k_0 &= b_0 c_0 + b_1 c_1 + 2b_2 c_2 \\ k_1 &= b_0 c_1 + 2b_1 c_2 + 6b_2 c_3 \\ k_2 &= b_0 c_2 + 3b_1 c_3 \\ k_3 &= b_0 c_3 \end{aligned} \quad (12)$$

де враховано, що при $i > 3$ $c_i = 0$.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку оптимальної за швидкістю задачі управління.
2. Сформулюйте теорему об n -інтервалах.
3. Особливості синтезу програмних оптимальних за швидкістю алгоритмів управління.
4. Замкнуті оптимальні системи. Метод фазового простору.
5. Дайте поняття квазіоптимальних систем. Назвіть основні методи спрощення.
6. Охарактеризуйте метод прогнозування для вирішення оптимальних за швидкістю задач управління.
7. Наведіть особливості управління, оптимального за витратами палива.
8. Охарактеризуйте термінальні системи управління.

Контрольні тести

1. Ковзаючий режим характеризується:
 - a. малою амплітудою і великою частотою коливань
 - b. великою амплітудою і великою частотою коливань
 - c. малою амплітудою і малою частотою коливань
 - d. великою амплітудою і малою частотою коливань
2. Автором теореми про n -інтервалів є:
 - a. Фельдбаум
 - b. Белман
 - c. Понтрягін
3. Коефіцієнти в лінійних стаціонарних поліномах мають бути:
 - a. постійними
 - b. змінними
 - c. кусково-постійними
4. Використання принципу максимуму приводить до вирішення:
 - a. крайової задачі в звичайних похідних
 - b. звичайної задачі в часткових похідних
 - c. крайової задачі в часткових похідних

6. АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕГУЛЯТОРІВ

Існує ще одна назва задачі аналітичного конструювання оптимальних регуляторів – синтез оптимальної системи управління за квадратичним критерієм якості. Задача полягає у виборі структури та параметрів чи тільки параметрів при жорстко заданій структурі управляючого пристрою чи деякої частини його корегуючого пристрою, які забезпечують відповідні характеристики з суттєвими обмеженнями на тривалість перехідного процесу, величину перерегулювання, значення початкових коефіцієнтів і помилок. Вперше задача синтезу була формалізована А.М.Льотовим (назвав АКОР). За кордоном аналогічні роботи проводились Калманом.

Існує кілька модифікацій задачі АКОР. Обмежимося розглядом цієї задачі лише для лінійних об'єктів.

1. Нехай лінійний нестационарний об'єкт описується рівняннями:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad (6.1)$$

$$Y(t) = C(t)X(t), \quad (6.2)$$

де $A(t), B(t), C(t)$ – відомі нестационарні матриці розмірності $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ відповідно; $X(t)$ – n -вимірний вектор стану; $U(t)$ – m -вимірний вектор управління; $Y(t)$ – l -мірний вектор вихідних координат об'єкта; $Y_6(t)$ – бажаний вихід об'єкта (l -вимірний вектор). Необхідно, щоб сигнал $Y(t)$ був близький до $Y_6(t)$ при малих затратах енергії на процес управління. Вводимо $\varepsilon(t) = Y_6(t) - Y(t)$ помилка управління. Потрібно, щоб особливо при $t = t_2$, що відповідає закінченню процесу управління, компоненти вектора $\varepsilon(t)$ були малі. Якість системи описується узагальненим критерієм:

$$I = 0,5\varepsilon^T(t_2)F\varepsilon(t_2) + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t) + U^T(t)R(t)U(t)] dt, \quad (6.3)$$

де $F, Q(t)$ – постійна і нестационарна додатньо напів визначені $l \times l$ матриці відповідно; $R(t)$ – нестационарна додатньо визначена $m \times m$ матриця. Перший доданок в (6.3) характеризує помилку управління в кінцевий момент часу t_2 , другий є своєрідний «штраф» за великі помилки, які можуть виникати при

будь-якому $t_1 \leq t \leq t_2$. Останній доданок, завжди додатний, «карає» систему за велике управління. Малість цього доданку при додатньо визначеній матриці $R(t)$ свідчить про обмеженість управління $U(t)$. Нестационарний характер матриць $Q(t)$ та $U(t)$ дозволяє за бажанням проєктанта регулювати значимість відповідних додатків в різні моменти часу t . Існують деякі рекомендації по вибору матриць $F, Q(t)$ та $R(t)$, зокрема рекомендується вибирати матриці з діагональними елементами, пропорційними максимально допустимим значенням величин $[x_i(t_2)]^2$, $[x_i(t)]^2$, $[U_i(t)]^2$ відповідно. АКОР полягає в пошуку такого управління $U^* [X(t)]$ та відповідної йому траєкторії $X^*(t)$, при яких критерій якості (6.3) досягає найменшого значення. Сформульована задача АКОР може називатись задачею слідкування. Реальний вихід об'єкта управління повинен бути найкращим з позицій критерію (6.3) чином слідкувати за бажаним вихідним сигналом $Y_6(t)$. З цієї задачі витікають ряд практично важливих ситуацій, що мають самостійне значення.

2. Нехай $Y_6(t) = 0$. Тоді критерій (6.3) приймає форму

$$I = 0,5Y^T(t_2)FY(t_2) + 0,5 \int_{t_0}^{t_2} [Y^T(t)Q(t)Y(t) + U^T(t)R(t)U(t)] dt \quad (6.4)$$

і метою управління є утримання вихідної координати об'єкта $Y(t)$ поблизу нуля при обмеженні енергії на управління. Така задача називається *задачею про регулятор виходу*.

3. У випадках, коли важливо утримувати біля нуля всі компоненти вектора стану $X(t)$, критерій (6.3) приймає вид

$$4. \quad I = 0,5X^T(t_2)FX(t_2) + 0,5 \int_{t_0}^{t_2} [X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)] dt, \quad (6.5)$$

а оптимальне управління повинно його мінімізувати. Ця задача АКОР називається *задачею про регулятор стану*.

5. У випадку управління лінійним стаціонарним об'єктом

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)U(t) \quad (6.6)$$

маємо критерій якості

$$I = 0,5 \int_{t_0}^{t_2} [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)] dt, \quad (6.7)$$

де A, B, Q, R – не залежні від часу матриці. Задано обмеження на кінцевий стан об'єкта у формі $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$, еквівалентне вимозі асимптотичної стійкості проєктованій системі. Треба визначити оптимальне управління $U^* [X(t)]$, під дією якого критерій (6.7) досягає найменшого значення і виконання умов асимптотичної стійкості.

Сформульовані задачі розповсюджуються на нелінійні об'єкти та узагальнені показники якості з спеціально вибраною структурою, що дозволяє і в нелінійних ситуаціях встановлювати алгоритми роботи управляючого пристрою. В ряді постановок задачі вводяться обмеження на допустимі управління, наприклад, в формі

$$|u_i(t)| \leq U_{i\max}, \quad U_{i\max} = \text{const}, i = 1, m.$$

6.1. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів варіаційним методом

Нехай стаціонарний об'єкт описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k, i = \overline{1, n} \quad (6.8)$$

або у векторному виді $\frac{dx}{dt} = AX + BU$,

де X – n -вимірний вектор стану об'єкта; U – m -вимірний вектор управління; $A(n \times n)$ і $B(n \times m)$ – матриці коефіцієнтів.

Треба знайти управління U та відповідну йому траєкторію $X(t)$, які забезпечують мінімум функціоналу:

$$I(X, U) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^m c_j u_j^2 \right) dt, \quad (6.9)$$

де $q_i \geq 0, c_j > 0$ – вагові коефіцієнти. При цьому повинні задовольнятися граничні умови:

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}, \\ x_1(\infty) = x_2(\infty) = \dots = x_n(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

На координати вектора стану $X(t)$ та вектор управління $U(t)$ обмежень не накладається. Будемо шукати управління, що надає мінімум функціоналу

(6.9), у вигляді функції координат стану. Тим самим буде вирішена задача синтезу оптимального лінійного регулятора.

Структурна схема системи управління, що складається з об'єкта та регулятора, що мінімізує (6.9), показана на рис 6.1.

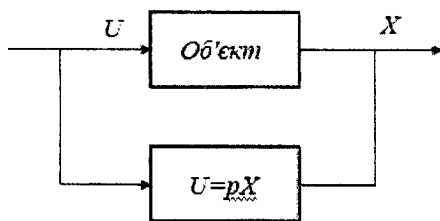


Рис.6.1. Структурна схема системи оптимального управління

Спочатку визначимо управління $U^* = U^*(t)$, а також відповідну йому траєкторію $X^* = X^*(t)$ системи (6.8). Сформульована вище задача є задачею Лагранжа на умовний екстремум. Умови зв'язку задаються рівняннями (6.8). Відповідно з методом вирішення задачі Лагранжа складемо допоміжний функціонал:

$$I_1(X, U) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^m c_j u_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \left(\dot{x}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k \right) \right] dt, \quad (6.11)$$

для якого запишемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} &= 0, \quad i = 1, n; \quad j = 1, m. \end{aligned} \quad (6.12)$$

де L – підінтегральна функція функціонала (6.11). До рівнянь (6.12) необхідно додати рівняння зв'язків (6.8). Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= 2q_i x_i - \sum_{k=1}^n a_{ki} \lambda_k, \\ 2c_j u_j - \sum_{i=1}^n b_{ij} \lambda_i &= 0, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k; \quad i = 1, n; \quad j = 1, m. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Виразимо управління u_j з другого рівняння системи (6.13) і підставимо в останнє. Отримуємо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + \sum_{k=1}^n m_{1k} \lambda_k, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= 2q_i x_i - \sum_{k=1}^n a_{ki} \lambda_k, \text{ де } m_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij} b_{kj}}{2c_j}, \quad i=1, n. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Неважко побачити, що $m_{ik} = m_{ki}$. Запишемо характеристичне рівняння для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (6.14):

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} & \dots & a_{1n} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & \dots & a_{2n} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \mu & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \\ 2q_1 & 0 & \dots & 0 & -a_{11} - \mu & -a_{12} & \dots & -a_{n1} \\ 0 & 2q_2 & \dots & 0 & -a_{12} & -a_{22} - \mu & \dots & -a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2q_n & -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Можна показати, що $D(-\mu) = D(\mu)$. Звідси випливає, що характеристичне рівняння $D(\mu) = 0$ містить тільки парні степені μ . Характеристичне рівняння має порядок $2n$. Припустимо, що воно не має комплексних коренів. Тоді n коренів розташовані в лівій напівплощині та n коренів – у правій. Нехай μ_1, \dots, μ_s – корені, що розташовані в лівій напівплощині, а r_1, \dots, r_s – їх кратності. Загальний розв'язок системи рівнянь (6.14) для змінних x_i можна записати у вигляді:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^s \left(n'_{j1} + n'_{j2} t + \dots + n'_{jr-1} t^{r-1} \right) e^{\mu_j t} + \sum_{j=1}^s \left(\bar{n}_{j1} + \bar{n}_{j2} t + \dots + \bar{n}_{jr-1} t^{r-1} \right) e^{-\mu_j t}, \quad i=1, n. \quad (6.15)$$

Це загальне рішення містить n довільних сталих n'_{jk} та \bar{n}_{jk} . Використовуючи граничні умови при $t = \infty$, одержимо, що довільні постійні $\bar{n}_{jk} = 0$. Таким чином

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^s \left(n'_{j1} + n'_{j2} t + \dots + n'_{jr-1} t^{r-1} \right) e^{\mu_j t}, \quad i=1, n. \quad (6.16)$$

Якщо корні характеристичного рівняння прості, то загальний розв'язок системи рівнянь (6.14)

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n n_j e^{\mu_j t}, \quad i=1, n. \quad (6.17)$$

З цих співвідношень можна виразити функції $n_j e^{\mu_j t}$ через координати x_i :

$$n_j e^{\mu_j t} = \sum_{i=1}^n p_{ji} x_i, \quad i = 1, n. \quad (6.18)$$

Рівності (6.18) дають можливість визначити оптимальне управління u_k ($k = 1, m$) як функцію координат стану. Дійсно, диференціюючи (6.17) з урахуванням (6.8), маємо:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n d_{ij} n_j \mu_j e^{\mu_j t} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \mu_j \sum_{l=1}^n p_{jl} x_l = \sum_{l=1}^n x_l \sum_{j=1}^n d_{ij} \mu_j p_{jl} = \sum_{l=1}^n h_{il} x_l, \quad i = 1, n,$$

де $h_{il} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \mu_j p_{jl}$, яке можна записати як:

$$\sum_{k=1}^m b_{ik} u_k = \sum_{l=1}^n x_l (h_{il} - a_{il}), \quad i = 1, n. \quad (6.19)$$

Розв'язавши систему рівнянь (6.19) відносно вектора управління, маємо:

$$u_k^* = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} x_i, \quad k = 1, m., \quad (6.20)$$

Оптимальне управління залежить лінійно від координат стану системи.

Приклад 6.1.

Нехай рівняння об'єкта мають вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{22} x_2 + b_2 u. \quad (1)$$

Таким чином, об'єкт управління – це послідовне з'єднання інтегруючої та аперіодичної ланок. Необхідно визначити управління, що надає мінімум функціоналу:

$$I(X, U) = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + cu^2) dt. \quad (2)$$

Граничні умови вибираємо у вигляді:

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}; \quad x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0. \quad (3)$$

Складемо допоміжний функціонал

$$I_1(X, U) = \int_0^{\infty} [q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + cu^2 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - a_{22} x_2 - b_2 u)] dt.$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціоналу будуть

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{\lambda}_1 &= 2q_1 x_1; \\ \dot{x}_2 &= a_{22} x_2 + b_2 u; \\ \dot{\lambda}_2 &= 2q_2 x_2 - \lambda_1 - a_{22} \lambda_2; \\ 2cu - b_2 \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Виражаємо управління з останнього рівняння системи (4) і підставимо в друге рівняння. Отримаємо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + \frac{b_2^2}{2c} \lambda_2, \\
 \dot{\lambda}_1 &= 2q_1x_1, \\
 \dot{\lambda}_2 &= 2q_2x_2 - \lambda_1 - a_{22}\lambda_2.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Характеристичне рівняння системи (5):

$$P(\mu) = \begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \mu & 0 & \frac{b_2^2}{2c} \\ 2q_1 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 2q_2 & -1 & -a_{22} - \mu \end{vmatrix} = \mu^4 - \left(a_{22}^2 + \frac{q_2 b_2^2}{c} \right) \mu^2 + \frac{q_1 b_2^2}{c} = 0. \tag{6}$$

Корні характеристичного рівняння є:

$$\begin{aligned}
 \mu_{1,2} &= \left[\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{2c} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{c} \right)^2 - \frac{4q_1 b_2^2}{c}} \right]^{1/2}; \\
 \mu_{3,4} &= - \left[\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{2c} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{c} \right)^2 - \frac{4q_1 b_2^2}{c}} \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо $\left(\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{c} \right)^2 > \frac{4q_1 b_2^2}{c}$, то маємо чотири дійсні корні – два додатні

μ_1, μ_2 та два від'ємні μ_3, μ_4 . Якщо $\left(\frac{a_{22}^2 c + q_2 b_2^2}{c} \right)^2 < \frac{4q_1 b_2^2}{c}$, то корні комплексні, причому

два з них розташовані в лівій напівплощині, два – в правій. Враховуючи граничні умови (3), загальне рішення системи (5) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= n_1 e^{\mu_3 t} + n_2 e^{\mu_4 t} \\
 x_2(t) &= n_1 \mu_3 e^{\mu_3 t} + n_2 \mu_4 e^{\mu_4 t}
 \end{aligned} \tag{8}$$

де μ_3, μ_4 – корні характеристичного рівняння (6), які розташовані в лівій напівплощині.

Розв'яжемо рівності (8) відносно $n_1 e^{\mu_3 t}$ та $n_2 e^{\mu_4 t}$. Одержимо:

$$\begin{aligned}
 n_1 e^{\mu_3 t} &= \frac{x_1 \mu_4 - x_2}{\mu_4 - \mu_3} \\
 n_2 e^{\mu_4 t} &= \frac{x_2 - \mu_3 x_1}{\mu_4 - \mu_3}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тоді з другого рівняння системи (1), враховуючи (8) і (9), одержимо

$$U^* = \frac{\mu_3 \mu_4}{b_2} \left[-x_1 - \frac{a_{22} - (\mu_3 + \mu_4)}{\mu_3 \mu_4} x_2 \right]. \tag{10}$$

Ми визначили управління як лінійну функцію координат стану системи. Структурна схема, в якій реалізовано управління (10), зображена на рис.6.2.

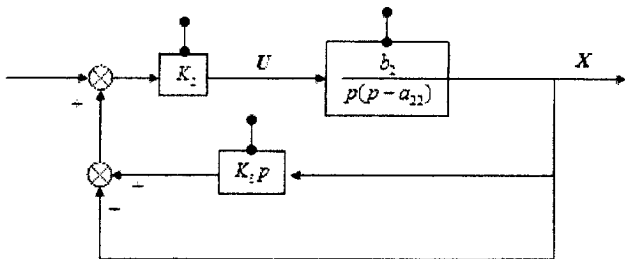


Рис.6.2. Структурна схема системи оптимального управління

На цій схемі введені наступні позначення: коефіцієнт підсилення в прямій ланці

$$k_2 = \frac{\mu_3 \mu_4}{b_2}; \quad \text{коефіцієнт підсилення в зворотному зв'язку за швидкістю}$$

$$k_3 = \frac{a_{22} - (\mu_3 + \mu_4)}{\mu_3 \mu_4}. \quad \text{Покажемо, що система з управлінням (10) буде стійкою. Дійсно, ха-}$$

рактеристичне рівняння замкненої системи $p^2 - (\mu_3 + \mu_4)p + \mu_3 \mu_4 = 0$.

Його корені $p_1 = \mu_3, p_2 = \mu_4$ розташовані в лівій напівплощині. Відмітимо, що від вибору вагових коефіцієнтів в формулі (2) залежить характер перехідного процесу в системі. Процес може бути коливальним чи монотонним, мати різні перерегулювання і т.д

Розглянемо ще один підхід до розв'язання цієї ж задачі, заснований на варіаційному методі та прогонці (переносі) граничних умов з одного кінця на інший. Цей підхід іноді дозволяє отримати аналітичний вираз для оптимального закону управління і тоді, коли матричне рівняння Рікатті аналітично розв'язати не вдається.

Розглянемо задачу синтезу оптимальної стаціонарної лінійної системи при умові, що рівняння об'єкта, граничні умови та критерій оптимальності мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ X^T(t_2) F X(t_2) + \int_{t_0}^{t_2} (X^T Q X + U^T R U) dt \right\}.$$

Складемо гамільтоніан (при $\psi_0 = -1$):

$$H = -\frac{1}{2} (X^T Q X + U^T R U) + \psi^T (AX + BU). \quad (6.22)$$

Знайдемо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T = QX - A^T \psi,$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = -U^T R + \psi^T B = 0.$$

З останнього рівняння маємо

$$U^* = R^{-1} B^T \psi. \quad (6.23)$$

Підставляючи цей вираз в (6.22), запишемо рівняння об'єкта разом з першим рівнянням Ейлера-Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

або $\dot{Z} = DZ$, де $Z = \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{pmatrix}$.

Умови трансверсальності мають вид:

$$\begin{aligned} \psi_i(t_0) &= -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \\ \psi_i(t_2) &= \frac{\partial G}{\partial x_i(t_2)}, \end{aligned} \quad \text{де } G = X^T(t_2)FX(t_2) \quad \psi(t_2) = -FX(t_2) \quad (6.25)$$

Запишемо розв'язок рівняння (6.24), використовуючи його нормальну фундаментальну матрицю $Z(t, t')$, яка задовольняє умові $Z(t, t') = E$ при будь-якому $t' \in [t_0, t_2]$:

$$z(t) = Z(t, t')z(t'). \quad (6.26)$$

Представимо фундаментальну матрицю у відповідному зі структурою рівняння (6.24) виді:

$$Z(t, t') = \begin{pmatrix} z_{11}(t, t') & z_{12}(t, t') \\ z_{21}(t, t') & z_{22}(t, t') \end{pmatrix}, \quad \text{де } z_{ij} - \text{матриці розмірності } n \times n.$$

Використовуючи це подання та прийнявши $t' = t_2$, з (6.26) одержимо

$$\begin{aligned} X(t) &= z_{11}(t, t_2)X(t_2) + z_{12}(t, t_2)\psi(t_2); \\ \psi(t) &= z_{21}(t, t_2)X(t_2) + z_{22}(t, t_2)\psi(t_2); \end{aligned}$$

чи після підстановки (6.25)

$$\begin{aligned} X(t) &= [z_{11}(t, t_2) - z_{12}(t, t_2)F]X(t_2), \\ \psi(t) &= [z_{21}(t, t_2) - z_{22}(t, t_2)F]X(t_2). \end{aligned}$$

Вилучаємо з отриманої системи рівнянь $X(t_2)$:

$$\psi(t) = [z_{21}(t, t_2) - z_{22}(t, t_2)F] \cdot [z_{11}(t, t_2) - z_{12}(t, t_2)F]^{-1} X(t).$$

При цьому, по суті, граничні умови з точки t_2 на осі часу переносяться в точку $t \in [t_0, t_2]$. Порівнюючи оптимальне управління (6.23) після підстановки в нього останнього виразу для ψ з оптимальним законом управління $u^* = -R^{-1}B^TKX$, отриманим раніше (6.23), одержимо:

$$K(t) = [z_{21}(t, t_2) - z_{22}(t, t_2)F] \cdot [z_{11}(t, t_2) - z_{12}(t, t_2)F]^{-1} \quad (6.27)$$

і зокрема у випадку, коли $F = 0$,

$$K(t) = z_{21}(t, t_2)z_{11}^{-1}(t, t_2). \quad (6.28)$$

Співвідношення (6.27) та (6.28) визначають розв'язок матричного рівняння Рікатті через фундаментальну матрицю системи, що складається з рівняння об'єкта та рівняння Ейлера-Лагранжа для спряжених координат. Вони можуть бути використані для визначення матриці $K(t)$ при розв'язанні задачі синтезу оптимального лінійного регулятора.

6.2. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів методом динамічного програмування

Розглянемо задачу синтезу оптимального регулятора стану об'єкта (6.6) згідно функціоналу

$$I^*[X(t), t] = \min_U \{0, 5X^T(T)FX(T) + \int_t^T f_0[X(t), U(t)]dt\}, \quad (6.29)$$

де f_0 – підінтегральна функція з (6.5).

Рівняння Белмана (3.43) стосовно до функціоналу (6.5) та рівняння об'єкту (6.1) запишемо як:

$$\frac{-\partial I^*[X(t), t]}{\partial t} = \min_U \left\{ \frac{1}{2}X^T(t)Q(t)X(t) + \frac{1}{2}U^T(t)R(t)U(t) + \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} [A(t)X(t) + B(t)U(t)] \right\} \quad (6.30)$$

Послідовність дій для пошуку оптимального управління на основі (6.30) та сама, що й при роботі з (3.43). Оскільки на $U(t)$ обмежень не накладено, оптимальне управління шукаємо з умов рівності нулю похідних за $U(t)$ від виразу, що знаходиться в фігурних дужках рівняння (6.30):

$$U^T(t)R(t) + \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} B(t) = 0.$$

Завдяки додатній визначеності матриця $R(t)$ не вироджена, тому оптимальне управління є:

$$U^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t) \left\{ \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} \right\}^T. \quad (6.31)$$

Щоб знайти функцію $I^*[X(t), t]$, підставимо (6.31) в (6.30) і одержимо рівняння типу Гамільтона-Якобі:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial t} = & \frac{1}{2} X^T(t) Q(t) X(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} \cdot D(t) R^{-1}(t) B^T(t) \left\{ \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} \right\}^T + \\ & + \frac{\partial I^*[X(t), t]}{\partial X} \cdot A(t) X(t) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Розв'язок цього рівняння $I^*[X(t), t]$ при $t = T$ повинен задовольняти умові, що витікає з (6.29):

$$I^*[X(T), T] = 0,5 X^T(T) F X(T), \quad (6.33)$$

Будемо шукати його у вигляді квадратичної форми змінних стану

$$I^*[X(t), t] = X^T(t) K(t) X(t), \quad (6.34)$$

де $K(t)$ – невідома симетрична нестационарна $n \times n$ матриця

Якщо можна знайти таку матрицю $K(t)$, при якій функція (6.34) обертає (6.32) в тотожність, то структурою розв'язку задалися вдало. Покажемо, що така матриця існує. Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*}{\partial t} &= \frac{1}{2} X^T(t) \dot{K}(t) X(t); \\ \frac{\partial I^*}{\partial X} &= X^T(t) K(t), \end{aligned}$$

то підставивши (6.34) в (6.32) і опустивши для аргумент t , одержимо:

$$-0,5 X^T \dot{K} X = 0,5 X^T Q X - 0,5 X^T K B R^{-1} B^T K X + X^T K A X. \quad (6.35)$$

Останню складову як скалярну величину представимо наступною сумою:

$$X^T K A X = 0,5 X^T K A X + 0,5 X^T A^T K X.$$

Тоді отримане співвідношення перетворимо до вигляду:

$$0,5 X^T (\dot{K} + Q - K B R^{-1} B^T K + K A + A^T K) X = 0.$$

За будь-якого стану $X(t)$ це співвідношення використовується, якщо тільки дорівнює нулю вираз, що стоїть в дужках, тобто:

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q. \quad (6.36)$$

В результаті одержимо нелінійне квадратичне відносно матриці $K(t)$ диференціальне рівняння, розв'язком якого є шукана матриця $K(t)$. З співставлення (6.36) з (6.34) видно, що розв'язок слід шукати за граничних умов:

$$K(T) = F. \quad (6.37)$$

Рівняння (6.36) відоме як матричне рівняння Рікатті, розв'язок якого за граничних умов (6.37) є симетричною матрицею. З цією метою транспонуємо обидві частини рівняння (6.35):

$$\dot{K}^T = -A^T K^T - K^T A + K^T B R^{-1} B^T K^T - Q^T.$$

Останнє рівняння в силу симетричності матриці F повинно розв'язуватись за умови $K^T(T) = F$, що випливає з (6.37). Звідси видно, що рівняння та граничні умови для матриць K та K^T при симетричній матриці Q повністю співпадають. Матричне рівняння (6.36) по суті уявляє систему з $0,5n(n+1)$ скалярних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Запишемо остаточно алгоритми оптимального управляючого пристрою в умовах задачі, що вивчається:

$$U^*(X) = -R^{-1}(t)B^T(y)K(t)X(t). \quad (6.38)$$

Цьому алгоритмові відповідає замкнена система з від'ємним зворотнім зв'язком. Оптимальна система відносно вектора стану є лінійною. Змінний в часі коефіцієнт передачі визначається наряду з відомими матрицями $R(t), B(t)$ розв'язком матричного рівняння Рікатті (6.35) за умови (6.37).

Отриманий розв'язок задачі розповсюджується на ситуацію (6.7), що відповідає лінійному стаціонарному об'єкту (6.6). коли $F = 0$ рівняння Рікатті розв'язується при граничних умовах $K(T) = 0$. В працях Калмана доведено, що в цьому випадку для стаціонарних об'єктів розв'язання рівняння Рікатті $K(T)$ при $t \rightarrow \infty$ має $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T) = \hat{K}$, де \hat{K} – постійна симетрична додатньо визначена матриця. Ця матриця визначається з рівняння Рікатті, в якому слід покласти $\dot{K} = 0$, тобто нелінійне матричне алгебраїчне рівняння приймає вигляд:

$$\hat{K}A + A^T \hat{K} - \hat{K}B R^{-1} B^T \hat{K} + Q = 0. \quad (6.39)$$

За аналогією з (6.38) оптимальне управління буде:

$$U^*(X) = -R^{-1}B^T \hat{K}X(t) \quad (6.40)$$

Отже в цьому випадку оптимальна система є стаціонарною лінійною і в замкненому стані описується витікаючим з (6.7) та (6.40) рівнянням:

$$\dot{X}(t) = (A - BR^{-1}B^T \hat{K})X(t), \quad (6.41)$$

якому відповідає асимптотична стійкість системи, що задовольняє умові $X(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Дійсно, щоб система була стійкою, власні числа матриці $A - BR^{-1}B^T \hat{K}$ повинні мати від'ємні дійсні частини. Якщо одне чи більше власних значень цієї матриці мають додатні дійсні частини, то деякі з компонент вектора стану $X(t)$ не будуть прямувати до нуля, внаслідок чого критерій якості (6.7) при $t \rightarrow \infty$, прямує до нескінченності. Тому матриця \hat{K} повинна бути такою, щоб власні числа матриці $A - BR^{-1}B^T \hat{K}$ були від'ємними. При цьому деякі з власних чисел матриці A можуть бути і додатніми, тобто об'єкт управління може бути нестійким. Але оптимальна замкнена система не зважаючи на це обов'язково буде стійкою.

Мінімальне значення критерію якості, що визначається загальним співвідношенням (6.34) є:

$$I^* = \frac{1}{2} X^T(0) \hat{K} X(0),$$

де $X(0)$ – початковий стан об'єкта управління при $t = 0$. При постановці та розв'язанні задачі (6.6), (6.7) важливо мати на увазі, що об'єкт управління, який описується рівнянням (6.6), повинен бути таким, що повністю управляється, і гарантує скінченність критерію якості. Якщо об'єкт є таким, що не управляється, то завдяки нескінченному інтервалу управління критерій якості може прямувати в нескінченність за будь-якого управління (особливо при нестійких об'єктах) і оптимальне управління неможливо відрізнити від неоптимального. В той же час для задачі з скінченим часом T керованість не є обов'язковою, бо вклад некерованих компонент вектора стану $X(t)$ в критерій якості (6.5) при скінченному T завжди скінченний.

Зупинимось на методиці розв'язання рівняння Рікатті (6.36). оскільки останнє є нелінійним і знайти його аналітичний розв'язок можна лише в особливих випадках. Звичайно його розв'язують чисельними методами у збіро-

тному часі, починаючи з моменту T і припускаючи $K(T) = F$. Для цього наближено приймаємо $\dot{K}(t) \approx \frac{[K(t + \Delta t) - K(t)]}{\Delta}$, що дозволяє записати:

$$K(t + \Delta) \approx K(t) + \left\{ -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t) \right\}.$$

Задаючи малий приріст $\Delta < 0$ та прийнявши $K(T) = F$, по цій формулі поступово обчислюється $K(t)$ починаючи з $t = T$. Так як рівняння Рікати не включає вектор стану $X(t)$, то його розв'язують ще до початку роботи системи. Тому процес пошуку оптимального алгоритму та управляючого пристрою не пов'язаний з робочим режимом роботи системи.

Покажемо тепер, що функція $I^*(X)$ є функцією Ляпунова для системи, що описується рівнянням (6.6). дійсно, функція $I^*(x) = \frac{1}{2} X^T K X$ є визначена додатньо. Обчислимо повну похідну за часом цієї функції в силу системи (6.6)

$$\frac{dI^*}{dt} = \frac{\partial I^*}{\partial X} \cdot \frac{dx}{dt} = X^T K (AX + BU) = X^T K A X - X^T K B R^{-1} B^T K^T X.$$

З рівняння (6.35) випливає, що:

$$X^T K A X = -\frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} X^T K B R^{-1} B^T K^T X.$$

Враховуючи останню рівність, одержимо наступний вираз для повної похідної за часом функції $I^*(X)$ в силу системи (6.6):

$$\frac{dI^*}{dt} = -\frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} U^T R U. \quad (6.42)$$

Таким чином, для системи (6.6) побудовано додатньо визначену функцію $I^*(X)$, похідна якої в силу системи (6.6) від'ємно визначена. Таким чином, згідно теореми Ляпунова система (6.6) є асимптотично стійкою.

Приклад 6.2.

Розглянемо задачу одноосної оптимальної стабілізації космічного апарату з допомогою маховика при інтегральному квадратичному критерію якості. Нехай $z(t)$ – кут відхилення апарату від заданого напрямку; U – напруга, що подається на двигун з розташованим на його валу маховиком. Годі рівняння, що описує поведінку космічного апарату відносно вісі стабілізації, має вид $c\dot{z} + a\ddot{z} = bU$, де a, b – неперервні величини, що визначаються за допомогою параметрів системи стабілізації. Прирівнюючи $x_1 = z$ запишемо це рівняння в формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -ax_2 + bU. \quad (1)$$

На управління обмеження не накладаються.

Необхідно знайти таке управління $u(x_1, x_2)$, при якому критерій якості:

$$I = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + r U^2) dt, \quad (2)$$

де q_1, q_2, r – додатні константи, досягає мінімуму.

З співставлення позначень, що використовуються в (6.6), (6.7) і даних задачі, витікає, що:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}; \quad R = 2; \quad (3)$$

Матриця вагових коефіцієнтів:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Перемноживши матриці, запишемо рівняння (6.38) в вигляді:

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{11} - k_{12}a \\ 0 & k_{12} - k_{22}a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{11} - k_{12}a & k_{12} - k_{22}a \end{bmatrix} - \frac{b^2}{r} \begin{bmatrix} k_{12}^2 & k_{12}k_{22} \\ k_{12}k_{22} & k_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

Це матричне рівняння справедливе, якщо нулю дорівнює кожний елемент сумарної матриці в лівій частині рівняння. В результаті переходимо до чотирьох алгебраїчних рівнянь, два з яких виявляються однаковими. Опускаючи одне з них, одержимо системи з трьох рівнянь:

$$-r^{-1}b^2k_{12}^2 + q_1 = 0; \quad 2k_{12} - 2k_{22}a - r^{-1}b^2k_{22}^2 + q_2 = 0; \quad k_{11} - k_{12}a - r^{-1}b^2k_{12}k_{22} = 0, \quad (6)$$

яка послідовно легко розв'язується відносно трьох величин k_{12}, k_{22}, k_{11} . Для забезпечення стійкості беруть тільки додатні корні. Оптимальне управління, що витікає з рівняння (6.39) описується співвідношенням

$$U^*(x_1, x_2) = -\left(\frac{b}{r}\right)(k_{12}x_1 + k_{22}x_2). \quad (7)$$

Цьому алгоритму відповідає замкнена система з зворотнім зв'язком, зображена на рис. 6.3.

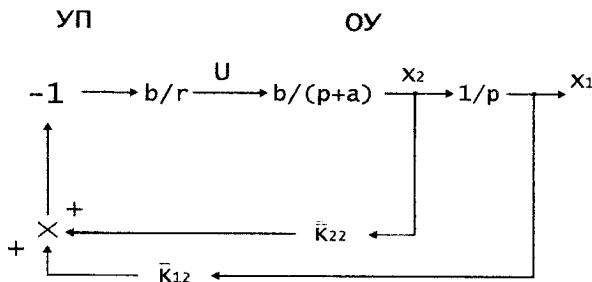


Рис. 6.3. Структура замкненої системи із зворотнім зв'язком

При додатніх k_{12}, k_{22} система стійка. Диференціальне рівняння системи

$$[p^2 + (a + b^2r^{-1}k_{22})p + b^2r^{-1}k_{12}]x_1 = 0. \quad (8)$$

Для стійкості лінійної системи другого порядку необхідна і достатня умова – додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння, що в даному випадку виконується.

Змінюючи коефіцієнти q_1, q_2, r в критерії оптимальності (2), можна забезпечити задані вимоги якості перехідного процесу.

6.3. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів за допомогою принципу максимуму

Розглянемо задачу синтезу регулятора стану з допомогою принципу максимуму. Функціонал (6.3) можна звести до інтегральної форми, якщо ввести нову змінну

$$x_0(t) = 0.5X^T FX(t) + 0.5 \int_{t_0}^t [X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)] dt, \quad (6.43)$$

яка задовольняє умові $x_0(T) = I$.

Продиференціюємо цю функцію по t :

$$\frac{d}{dt} [X^T FX(t)] = \dot{X}^T FX(t) + X^T(t)F\dot{X}(t)$$

і отримаємо рівняння:

$$x_0(t) = 0.5(\dot{X}^T FX + X^T F\dot{X} + X^T QX + U^T RU),$$

яке задовольняє початковій умові:

$$x_0(t) = 0.5X^T(0)FX(0),$$

що витікає з визначення функції $x_0(t)$, де $X(0)$ – початковий стан об'єкта, що є відомим за умовами задачі. Виражаючи похідну \dot{X} через праву частину рівняння (6.1), одержимо рівняння виду:

$$x_0(t) = 0.5[(AX + BX)^T FX + X^T F(AX + BU) + X^T QX + U^T RU]. \quad (6.44)$$

Змінна x_0 , що визначається цим рівнянням, дозволяє записати:

$$I = 0.5X^T(0)FX(0) + 0.5 \int_{t_0}^T [AX + BU)^T FX + X^T F(AX + BU) + X^T QX + U^T RU] dt.$$

Функцію Гамільтона зручно записати так:

$$H[\tilde{X}(t), \tilde{\Psi}(t), U(t)] = \Psi_0 f_0 + \Psi^T f + \Psi_{n+1} f_{n+1}, \quad (6.45)$$

де $\tilde{\Psi} = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})^T$; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$; f_0, f, f_{n+1} – праві частини рівнянь (6.44), (6.6) та рівняння:

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = f_{n+1} = 1; \quad x_{n+1}(t_0 = 0) = 0. \quad (6.46)$$

Розкриваючи вміст правих частин, перепишемо (6.45):

$$H = \Psi_0 0.5[(AX + BU)^T FX + X^T F(AX + BU) + X^T QX + U^T RU] + \Psi^T (AX + BU) + f_{n+1}, \quad (6.47)$$

де A, B, Q, R – матриці, що є функціями змінної x_{n+1} у відповідності до сенсу призначення цієї змінної. Оскільки на управління $U(t)$ обмеження не накладено, оптимальне управління шукаємо за умовою $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$, яка в розгорнутій формі має вигляд:

$$\Psi_0(0.5B^T FX + 0.5B^T FX + RU) + B^T \Psi = 0. \quad (6.48)$$

Матриця R додатньо визначена, тому існує обернена матриця R^{-1} , що дозволяє записати розв'язок рівняння (6.48) як:

$$U(t) = -R^{-1}(x_{n+1})B^T(x_{n+1})[\Psi_0^{-1}(t)\Psi + FX(t)]. \quad (6.49)$$

Для виключення з функції $U(t)$ змінних $\Psi_0, \Psi(t)$ складаємо систему спряжених рівнянь

$$\dot{\Psi}_0(t) = 0;$$

$$\dot{\Psi}_i(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_i} \Psi_0 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Psi_j - \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} \Psi_{n+1}, \quad i = 1, n;$$

$$\dot{\Psi}_{n+1}(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_{n+1}} \Psi_0 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{n+1}} \Psi_j - \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \Psi_{n+1}.$$

В рамках раніше проведеної класифікації задач оптимального управління АКОР відповідає задачі з фіксованим часом управління T і вільним кінцем траєкторії, бо на $X(T)$ обмежень не накладено. Тому записана система спряжених рівнянь повинна розв'язуватись за граничними умовами $\Psi_0(T) = -1$; $\Psi_i(T) = 0$, $i = 1, n+1$. Їм з першого рівня відповідає $\Psi_0(t) = -1$. Функція $\Psi_{n+1}(t)$ не входить до оптимального управління $U(t)$. Оскільки $f_{n+1} = 1$ і $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} = 0$, то $\Psi_{n+1}(t)$ не входить в праві частини спряжених рівнянь. Тому

будь-яка необхідність в пошуку цієї змінної відпадає і останнє рівняння в складі спряженої системи можна опустити. В результаті спряжена система обмежена рівняннями:

$$\dot{\Psi}_i(t) = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \Psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, n;$$

чи в матрично-векторній формі

$$\dot{\Psi} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial X}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T \Psi.$$

Відповідно з виразами правих частин рівнянь (6.44), (6.1)

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial X}\right)^T = A^T FX + FAX + FB U + QX; \quad \frac{\partial f}{\partial X} = A,$$

і спряжена система приймає остаточно вигляд:

$$\dot{\Psi}(t) = [A^T(t)F + FA(t) + Q(t)]X(t) + A^T(t)\Psi(t) + FB(t)U(t). \quad (6.50)$$

При $\Psi_0(t) = -1$ оптимальне управління запишеться з (6.48):

$$U^*(t) = R^{-1}(t)B^T(t)[\Psi(t) - FX(t)]. \quad (6.51)$$

Тут аргумент x_{n+1} замінено на t , бо необхідність в особливій змінній x_{n+1} для позначення автономного аргументу t в виразах (6.5), (6.3) відпала в зв'язку із відсутністю змінної Ψ_{n+1} в співвідношеннях (6.49), (6.50). Нескладно показати, що функція (6.51) відповідає максимуму Гамільтона (6.47). Для цього обчислюємо другу похідну $\frac{\partial^2 H}{\partial U^2}$. З (6.47) при $\Psi_0 = -1$ витікає

$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -R$. Оскільки R додатньо визначена матриця, тому на (6.51) функція (6.47) досягає найбільшого значення. Тепер необхідно спільно розв'язати рівняння (6.1), (6.50), (6.51). Ця об'єднана система містить $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку і для її розв'язування необхідно мати таку ж кількість граничних умов: n початкових умов $X(0)$ для вектору стану $X(t)$ і n кінцевих значень $\Psi(T) = 0$ допоміжного вектору $\Psi(t)$. Тому двоточкова крайова задача, що зводиться до розв'язку системи (6.1), (6.50), (6.51) не зважаючи на її складність, принципово розв'язувана. Таким чином знайдемо оптимальне рішення $U^*(t)$ як функцію часу, якому відповідає розімкнена оптимальна система. Нашою початковою метою була побудова замкненої системи, тому пошук слід вести іншим шляхом.

Співвідношення (6.1), (6.50), (6.51) є лінійними відносно змінних $X(t), U(t), \Psi(t)$. Можна допустити, що і між змінними $\Psi(t)$ і $X(t)$ існує лінійний зв'язок, тоді:

$$\Psi(t) = K(t)X(t) + FX(t), \quad (6.52)$$

де $K(t)$ – невідома квадратна n -вимірна матриця. Якщо існує така матриця $K(t)$, при якій спільно задовольняються співвідношення (6.1), (6.50), (6.51), то структура (6.52) розв'язку (6.50) вибрана правильно. Підставляючи (6.52), (6.51) в (6.1), (6.50) одержимо:

$$\dot{X} = AX + BR^{-1}B^T[(K+F)X - FX];$$

$$\dot{K}X + (K+F)\dot{X} = (A^T F + FA + Q)X - A^T(K+F)X + FBR^{-1}B^T KX.$$

Замінивши в другому рівнянні похідну \dot{X} її значення з першого рівняння, отримаємо співвідношення:

$$\dot{K}X + (K+F)(A + BR^{-1}B^T K)X = (FA + Q)X - A^T KX + FBR^{-1}B^T KX,$$

яке після очевидних спрощень приймає вигляд:

$$(\dot{K} + KA + A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q)X = 0.$$

За будь-яких $X(t)$ ця умова виконується, якщо перший співмножник зліва дорівнює нулю. Це твердження приводить до диференціального рівняння відносно матриці K :

$$\dot{K} = -KA - A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q, \quad (6.53)$$

яке з точністю до знаків співпадає з рівнянням, отриманим методом динамічного програмування і є матричним рівнянням Рікатті. Оскільки $\Psi(T) = 0$ для задачі з вільним правим кінцем траєкторії та фіксованого T , то з (6.52) витікає необхідність розв'язання рівняння (6.53) за граничних умов:

$$K(T) = -F. \quad (6.54)$$

Таким чином, принцип максимуму приводить до наступних результатів: оптимальне управління в задачі АКОР є лінійною функцією стану і на основі (6.51), (6.52) визначається співвідношенням:

$$U^*(X) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t), \quad (6.55)$$

де $K(t)$ – розв'язок диференціального матричного рівняння Рікатті (6.53) за граничних умов (6.54).

Отриманий результат повністю співпадає з розв'язком задачі методом динамічного програмування. Дійсно, якщо в (6.55) замінити $K(t)$ на $-K(t)$, то (6.55) перетвориться в (6.37), а рівняння (6.53) в рівняння Рікатті (6.35), а граничні умови (6.54) – в граничні умови (6.36).

Для стаціонарних повністю керованих об'єктів при $T \rightarrow \infty$ $K(t)$ є постійною додатньо визначеною симетричною матрицею розмірності $(n \times n)$. При цьому рівняння (6.53) перетворюється в алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$KBR^{-1}B^TK^T - KA - A^TK^T - Q = 0, \quad (6.56)$$

де A, B, R, Q – постійні матриці.

В алгоритмі (6.55) чи (6.53) припускались можливості вимірювання всіх компонент вектора стану $X(t)$. В реальних задачах звичайно вимірюється не вектор стану, а вектор (вихідних) координат $Y(t)$, пов'язаних з вектором стану рівнянням (6.2). Неусувна похибка вимірювань обумовлена недосконалістю вимірюваної системи, спотворенням моделі (6.2), яка за реальних умов має вид:

$$Y(t) = C(t)X(t) + N(t), \quad (6.57)$$

де $N(t)$ – сукупність похибок вимірювання, часто інтерпретується як багатовимірний випадковий процес типу нормального «білого шуму».

В таких умовах система оптимального управління реалізується відповідно з теоремою розподілу чи статистичної еквівалентності. Згідно цієї теореми оптимальна система складається з пристрою, що оцінює вектор стану $X(t)$ по результатам спостережень за вектором $Y(t)$ відповідно з (6.57), та керуючого пристрою, що працює за алгоритмом (6.55), в структурі якого вектор стану $X(t)$ замінюється його оцінкою $\hat{X}(t)$. Пристроєм, який оцінює $\hat{X}(t)$ за результатами спостережень (6.57), є фільтр Калмана.

Розглянемо ще вирішення задачі АКОР при обмеженні управління.

Нехай об'єкт описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_iU, \quad i = 1, n, \quad (6.58)$$

і накладемо обмеження на управління:

$$|U| \leq U_{\max}. \quad (6.59)$$

Необхідно знайти управління, що мінімізує функціонал:

$$I(U) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2 \right) dt \quad (6.60)$$

за наступних граничних умов:

$$x_i(0) = x_{i0}; \quad x_i(\infty) = 0, \quad i = 1, n. \quad (6.61)$$

Введемо нову координату x_0 , яка описується наступним чином:

$$\frac{dx_0}{dt} = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2. \quad (6.62)$$

Складемо функцію Гамільтона:

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^n f_i \Psi_i = \Psi_0 \left(\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + cU^2 \right) + \sum_{i=1}^n \Psi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i U \right). \quad (6.63)$$

Система рівнянь, спряжених з (6.58) та (6.62), у вигляді Гамільтонової системи:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i} \quad (i=1, n),$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_0}{dt} &= 0; \\ \frac{d\Psi_i}{dt} &= -2\Psi_0 q_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} \Psi_j, \quad i=1, n. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Для першого рівняння маємо:

$$\Psi_0 = \text{const} = -1 \quad (\text{вибираємо}).$$

В (6.63) виділяємо складову, що залежить від U , позначивши її як H_1 :

$$H_1 = -c \left(U - \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \right)^2 + \frac{1}{4c} \left(\sum_{i=1}^n b_i \Psi_i \right)^2. \quad (6.66)$$

Закон управління необхідно визначити так, щоб функція H_1 досягала максимуму. Для цього розглянемо два випадки:

1. $\left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \right| < H_{\max}$
2. $\left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \right| \geq H_{\max}$

Враховуючи обмеження (6.59), закон управління можна записати як:

$$U^* = \begin{cases} \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i, \text{ при } \left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \right| < H_{\max}, \\ H_{\max}, \text{ при } \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \geq H_{\max}, \\ -H_{\max}, \text{ при } \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \leq -H_{\max}. \end{cases} \quad (6.67)$$

Для визначення управління як функції координат, тобто $U = f(X)$, необхідно до системи спряжених рівнянь (6.64) додати рівняння об'єкта (6.58) з врахуванням одного з законів управління (6.67).

Так для (6.67) подібно попередньому випадку розв'язок сформованої системи $2n$ рівнянь запишеться у вигляді:

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j, i = 1, n. \quad (6.68)$$

Тоді остаточно управління запишеться:

$$U^* = \sum_{i=1}^n K_i x_i.$$

В загальному випадку аналітичний розв'язок задачі з врахуванням обмежень (6.59) знайти досить складно, бо для його пошуку як в лінійній, так і в нелінійній областях необхідно по черзі розв'язувати дві системи рівнянь залежно від значення виразу

$$\left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n \Psi_i b_i \right|.$$

В зв'язку з цим, дослідження звичайно проводиться з використанням чисельних методів.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \frac{b_i}{2c} \sum_{j=1}^n b_j \Psi_j \\ \dot{\Psi}_i = 2q_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Psi_j, i = 1, n. \end{cases} \quad (6.69)$$

та

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \pm b_i H_{\max} \\ \dot{\Psi}_i = 2q_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Psi_j, i = 1, n. \end{cases} \quad (6.70)$$

Для (6.69) та (6.70) відбувається стикування розв'язків в момент переходу з одного режиму на другий.

6.4. Зв'язок між варіаційним обчисленням, динамічним програмуванням та принципом максимуму

Спочатку встановимо зв'язок між принципом максимуму і класичним варіаційним численням. Покажемо, що в тому випадку, коли на управління не накладено обмежень, необхідна умова екстремуму функціоналу, отримана у варіаційному численні, може бути знайдена за допомогою принципу максимуму. Для цього розглянемо наступну задачу варіаційного числення: серед всіх кусково-гладких кривих $X(t)$, що задовольняють граничним умовам $X(t_0) = X^0; X(t_1) = X^1$, треба визначити таку криву, яка надає мінімум функціоналу:

$$I(X) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, \dot{X}, t) dt. \quad (6.71)$$

Припускаємо, що функція $f_0(X, \dot{X}, t)$ неперервна за всіма аргументами та має неперервні частинні похідні до другого порядку включно за змінними X та \dot{X} .

Для спрощення викладення розглянемо задачу з закріпленими границями. В задачі з рухомими границями, коли кінці траєкторії $X(t)$ не закріплені, а належать деяким множинам M_1 та M_2 , слід застосовувати умови трансверсальності.

Введемо позначення

$$\dot{X} = U \quad (6.72)$$

і перейдемо від вище сформульованої задачі варіаційного числення до задачі вибору оптимального управління $U(t)$ динамічної системи (6.72), причому функціонал, що мінімізується, буде:

$$I(X, U) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt. \quad (6.73)$$

Використовуючи принцип максимуму для неавтономних систем, складемо функцію Гамільтона:

$$H(\Psi, X, U, t) = \Psi_0 f_0(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \Psi_i U_i. \quad (6.74)$$

Допоміжні змінні $\Psi_i(t)$ задовольняють системі рівнянь:

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = 0; \frac{d\Psi_i}{dt} = -\Psi_0 \frac{\partial f_0(X, U, t)}{\partial x_i}, i = 1, n. \quad (6.75)$$

Нас цікавить нетривіальний розв'язок системи рівнянь (6.75), а тому $\Psi_0 = \text{const} < 0$. Вибираємо $\Psi_0 = -1$, тоді функція $H(\tilde{\Psi}, X, U, t)$ приймає вигляд:

$$H(\tilde{\Psi}, X, U, t) = -f_0(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \Psi_i U_i,$$

а систему рівнянь (6.75) можна записати як:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{\partial f_0(X, U, t)}{\partial x_i}, i = 1, n. \quad (6.76)$$

За принципом максимуму функція $H(\tilde{\Psi}, X, U, t)$ досягає на оптимальному управлінні максимуму за U . Область змін управління припускалася відкритою, а тому управління $U(t)$, яке надає максимум $H(\tilde{\Psi}, X, U, t)$, повинно задовольняти умові:

$$\frac{\partial H}{\partial U_i} = 0, i = 1, n. \quad (6.77)$$

і, крім того, квадратична форма:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial U_i \partial U_j} h_i h_j \leq 0 \quad (6.78)$$

для будь-яких h_i, h_j і $t \in [t_0, t_1]$. Рівності (6.77) з врахуванням (6.74) запишеться у вигляді:

$$\Psi_i = \frac{\partial f_0(X, U, t)}{\partial U_i}, i = 1, n. \quad (6.79)$$

Інтегруючи рівняння (6.76) та приймаючи до уваги (6.79), одержимо:

$$\frac{\partial f_0}{\partial U_i} = \int_{t_0}^t \frac{\partial f_0}{\partial x_i} dt + \phi_i(t_0), i = 1, n. \quad (6.80)$$

Рівняння (6.80) є рівнянням Ейлера в інтегральній формі. Диференцюючи обидві частини рівняння (6.80) з врахуванням (6.72), перейдемо до рівнянь Ейлера в диференційній формі:

$$\frac{\partial f_0(X, \dot{X}, t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0(X, \dot{X}, t)}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, n.. \quad (6.81)$$

Одержали першу необхідну умову мінімуму функціоналу (6.71). Крива, на якій досягається мінімум, повинна бути екстремальна, тобто рішенням

рівнянь Ейлера (6.81). Для отримання другої необхідної умови мінімуму функціоналу (6.71), запишемо нерівність (6.78), враховуючи (6.72) та (6.74):

$$\frac{\partial f_0(X, \dot{X}, t)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_i} h_i h_j \geq 0, \{t \in [t_0, t_1]\}. \quad (6.82)$$

Умова (6.82) є необхідною умовою Лежандра мінімуму функціоналу (6.71). Якщо при $t = t'$ траєкторія $X(t)$ має злом, тобто похідна $\dot{X}(t)$ при $t = t'$ має розрив неперервності першого роду, то з неперервності вектор-функції $\Psi(t)$ та функції $H(\Psi, X, U, t)$, враховуючи (6.74) та (6.79), випливає, що:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t'_+0} &= \left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t'_-0}, \quad i = 1, n; \\ \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t'_+0} &= \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t'_-0}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Одержимо умови Вейерштрасса-Ердмана, яким повинна задовольняти крива $X(t)$ в точках злому.

Для задачі з рухомими границями можна показати, що з умов трансверсальності принципу максимуму випливають умови трансверсальності класичного варіаційного числення для функціоналу (6.71).

Тепер покажемо, що основні співвідношення принципу максимуму при розв'язуванні задачі оптимального управління системою

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U, t) \quad (6.84)$$

за відсутністю обмежень на управління можна отримати на основі класичного варіаційного числення.

Нехай функціонал задачі мінімізації має вигляд (6.73):

$$I(X, U) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt.$$

Сформульована задача є задачею Лагранжа на умовний екстремум. Тому можна скласти допоміжний функціонал:

$$I_1(X, U) = \int_{t_2}^{t_1} \{f_0(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i [\dot{x}_i - f_i(X, U, t)]\} dt. \quad (6.85)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціоналу (6.85) мають вигляд:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U, t), \quad i = 1, n;$$

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, n; \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial U_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial U_j} = 0, \quad j=1, n.$$

Введемо вектор-функцію

$$\tilde{\Psi}(t) = \{\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)\}, \quad (6.87)$$

припускаючи, що

$$\Psi_0(t) = -1, \Psi_i(t) = \lambda_i(t), \quad i=1, n,$$

та

$$H(\tilde{\Psi}, X, U, t) = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i(X, U, t). \quad (6.88)$$

Тоді для функції $\Psi_i(t)$ одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \Psi_j \frac{\partial f_j(X, U, t)}{\partial x_i}, \quad i=1, n. \quad (6.89)$$

З рівностей (6.86) витікає, що оптимальне управління $U(t)$ є стаціонарною точкою функції $H(\tilde{\Psi}, X, U, t)$, тобто

$$\frac{\partial H}{\partial U_j} = 0, \quad j=1, n. \quad (6.90)$$

Тепер встановимо зв'язок між класичним варіаційним численням та методом динамічного програмування. Для цього розглянемо задачу мінімізації функціоналу $I(X) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, \dot{X}, t) dt$. Позначимо $\dot{X} = U$ та виконаємо розв'язок задачі методом динамічного програмування. Складемо рівняння Беллмана

$$\frac{\partial I^*}{\partial t} = - \min_{U(t)} \left[f_0(X, U, t) + \frac{\partial I^*}{\partial X} U \right]. \quad (6.91)$$

Припустимо, що на управління U обмежень не накладено. Тоді управління U , що мінімізує праву частину рівняння (6.91), визначається з умови

$$\frac{\partial f_0}{\partial U} + \frac{\partial I^*}{\partial X} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial U^2} \geq 0.$$

Повертаючись до початкових змінних, одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{X}} + \frac{\partial I^*}{\partial X} &= 0 \\ f_0(X, \dot{X}, t) + \frac{\partial I^*}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial I^*}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{X}^2} \geq 0. \quad (6.93)$$

З рівнянь (6.92) витікає рівняння Ейлера-Лагранжа, а умова (6.93) є умовою Лежандра. Дійсно, взявши повну похідну за X другого рівняння системи (6.92), будемо мати:

$$\frac{\partial f_0}{\partial X} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{X} \partial t} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{X} \partial X} \dot{X} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{X}^2} \ddot{X} = 0,$$

чи

$$\frac{\partial f_0}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{X}} = 0.$$

Останнє рівняння є рівнянням Ейлера.

Встановимо тепер зв'язок між принципом максимуму та методом динамічного програмування. Для спрощення розглянемо стаціонарну задачу з закріпленими границями, що описується диференціальними рівняннями в векторній формі

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U), \quad (6.94)$$

для якої треба визначити допустиме управління $U(t) \in U$, для якого відповідна траєкторія $X(t)$ надає мінімум функціоналу:

$$I(X, U) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U) dt.$$

Початкова точка $X(t_0) = X^0$ та кінцева $X(t_1) = X^1$ вважаються фіксованими. Для цього випадку рівняння Беллмана мають вигляд:

$$0 = \min_{u \in U} \left[f_0(X, u) + \frac{\partial I^*}{\partial X} f(X, u) \right], \quad (6.95)$$

$$\text{де } I^* [X(t)] = \min_{u(\tau) \in U} \int_{t_0}^{t_1} f_0 [X(\tau), U(\tau)] d\tau.$$

Припускаємо, що функція $I^*(X)$ двічі неперервно диференційована. Введемо в розгляд функцію

$$g(X, U) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} f_i(X, U). \quad (6.96)$$

Тоді рівняння (6.95) можна записати у вигляді:

$$0 = \max_{u(t) \in U} [g(X, U) - f_0(X, U)]. \quad (6.97)$$

Нехай $u(t)$ – оптимальне управління. Тоді, в силу неперервної диференційованості функції $g(X, U)$ маємо:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 I^*}{\partial x_i \partial x_j} f_i(X, u) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial I^*}{\partial x_i} \frac{\partial I^*}{\partial x_j} - \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = 0, j = 1, n. \quad (6.98)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 I^*}{\partial x_i \partial x_j} f_i(X, U) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 I^*}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial I^*}{\partial x_j}.$$

Якщо позначити

$$\frac{\partial I^*}{\partial x_j} = -\Psi_j, \quad i = 1, n; \quad \Psi_0 = -1, \quad (6.99)$$

то система рівнянь (6.98) може бути представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_j}{dt} &= -\sum_{i=1}^n \Psi_i \frac{\partial f_i(X(t), U(t))}{\partial x_j}, \quad j = 1, n; \\ \frac{d\Psi_0}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Рівняння (6.100) співпадає з рівнянням для векторної функції $\tilde{\Psi}(t)$ при доведенні принципу максимуму, а з рівності (6.97) витікає, що функція Гамільтона:

$$H(\tilde{\Psi}, X, U, t) = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i(X, U). \quad (6.101)$$

досягає на оптимальному управлінні $U(t)$ максимуму за U .

Таким чином, показано взаємний зв'язок між класичним варіаційним численням, принципом максимуму та динамічним програмуванням. При цьому виявляється, що необхідні умови екстремуму функціоналу, які розглядаються в класичному варіаційному численні, можуть бути одержані з основ теореми принципу максимуму. В свою чергу за відсутності обмежень на управляючий вплив необхідні умови оптимальних управління і фазової траєкторії, сформульовані в теоремі принципу максимуму, можуть бути визначені за допомогою класичного варіаційного числення.

Застосувавши для розв'язування задачі мінімізації функціонала метод динамічного програмування, ми одержимо обидві необхідні умови мінімуму функціоналу, що розглядались в варіаційному численні – рівняння Ейлера-Лагранжа та умову Лежандра.

І, нарешті, використавши для розв'язування стандартної задачі необхідну умову мінімуму, отриману методом динамічного програмування, – рівняння Беллмана, показано, що функція Гамільтона повинна досягати на оптимальному управлінні максимуму. Ця умова складає зміст основної теореми принципу максимуму.

Слід відзначити, що методи оптимізації дають однакові результати, доки існують частинні похідні функції Беллмана $\Gamma^*(X)$ за всіма фазовими координатами у всіх точках фазового простору.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні модифікації задач АКОР.
2. Наведіть узагальнений алгоритм вирішення задачі АКОР методом класичного варіаційного числення.
3. Наведіть узагальнений алгоритм вирішення задачі АКОР методом динамічного програмування.
4. Наведіть узагальнений алгоритм вирішення задачі АКОР класичним варіаційним численням.
5. Доведіть існуючий зв'язок між вказаними вище методами.

Контрольні тести

1. Ковзаючий режим характеризується:
 - a. малою амплітудою і великою частотою коливань
 - b. великою амплітудою і великою частотою коливань
 - c. малою амплітудою і малою частотою коливань
 - d. великою амплітудою і малою частотою коливань
2. Автором теореми про η -інтервалів є:
 - a. Фельдбаум;
 - b. Беллман;
 - c. Понтрягін.
3. Коефіцієнти в лінійних стаціонарних поліномах мають бути:
 - a. постійними;
 - b. змінними;
 - c. кусково-постійними.
4. Використання принципу максимуму приводить до вирішення:
 - a. крайової задачі в звичайних похідних;
 - b. звичайної задачі в часткових похідних;
 - c. крайової задачі в часткових похідних.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. Учеб. пос. для ВУЗов. М.: В.Ш., 1989. – 262 с.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.:Наука, 1979. – 420 с.
3. Аракелян Э.К., Пикина Г.А. Оптимизация и оптимальное управление. Учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 410 с.
4. Зубов В.И. Лекции по оптимальному управлению. – М.: Лань, 2009. – 496 с.
5. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1982. – 332 с.
6. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных САУ. Учебное пособие для ВУЗов, М.: Наука, 1981 - 331 с.
7. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. Учебное пособие для ВУЗов. М.: В.Ш., 1980. – 287 с.
8. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.
9. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.
10. Сборник задач и примеров по ТАУ (оптимальное, экстремальное и программное управление) п/р А.Ф. Фатеева, М.: Высшая школа, 1969. – 198 с.
11. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. Житомир: ЖІТІ, 1998. – 512 с.
12. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. Практикум. Житомир: ЖІТІ, 2002. – 420 с.
13. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления. С.-Пб.: Питер, 2004. – 256 с.
14. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. Учеб. пос. Для ВУЗов. М.: Энергоиздат, 1987. – 225 с.

Навчальне видання

Стенін Олександр Африканович
Пасько Віктор Петрович
Лемешко Анатолій Дмитрович
Польшакова Ольга Михайлівна

Оптимальні системи управління

Навчальний посібник

*В авторській редакції
Комп'ютерна верстка авторів*

Темплан 2017 р., поз. 1-2-004

Підл. до друку 07.04.2017. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографічний. Ум. друк. арк. 10,0. Обл.-вид. арк. 16,63. Наклад 50 пр.
Зам. № 17-40.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Видавництво «Політехніка»

Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.

03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15

тел. (44) 204-81-78