

519.87:517.9(075.8)



**КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

В. А. СТОЯН

**ОСНОВИ
ЛАБОРАТОРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

19 519.87:517.9(045)
C82

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. А. СТОЯН

**ОСНОВИ
ЛАБОРАТОРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

Навчальний посібник

КНИГОСКОВИЩЕ

КИЇВСЬКИЙ  2017
УНІВЕРСИТЕТ

519.8-1.575.958(075.8)
УДК 517.95:519.86(075.8)

С82

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук Д. Я. Хусаїнов,

д-р фіз.-мат. наук А. В. Гладкий

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук
та кібернетики
(протокол № 2 від 11 жовтня 2016 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 3-16/17 н. р. від 31 березня 2017 року)*

Стоян В. А.

С82 Основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем : навч. посіб. / В. А. Стоян. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2017. – 118 с.

Викладено основи розв'язання задач математичного моделювання просторово розподілених лінійних динамічних систем, які функціонують у заданих просторово-часових областях за умов неповноти початково-крайової інформації про їхній зовнішньодинамічний стан. Запропоновано алгоритми математичного моделювання функції стану дискретно та неперервно спостережуваних систем і керування ними. Розглянуто випадки, коли керуючими чинниками є довільна комбінація розподілених, крайових і початкових зовнішньодинамічних збуджуючих факторів.

Для студентів, аспірантів, інженерів і наукових співробітників спеціальностей "Математика", "Прикладна математика" та "Механіка".

483329

УДК 517.95:519.86(075.8)

© Стоян В. А., 2017

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2017

**НТБ ВНТУ
м. Вінниця**

ПЕРЕДМОВА

Математичне моделювання як термін і наука з'явилося, стало актуальним і широко використовуваним в останні десятиріччя ХХ ст. Розуміють його по-різному, часто вживаючи в суто спекулятивних і не зовсім обов'язкових випадках. Із цим терміном пов'язують також класичні питання побудови математичної моделі системи (процесу) у вигляді різного роду рівнянь та їх розв'язання (аналітичного або числового).

Побудова рівняння (моделі) процесу чи явища – це мистецтво, інтуїція й уміння дослідника використовувати фундаментальні закони природи. Дослідження певного рівняння (моделі) – це компетенція аналітичної чи обчислювальної математики.

У посібнику розглядаються методи дослідження математичних моделей диференціального та інтегрального типів для процесів і явищ, природа й особливості функціонування яких не дозволяють зробити такі моделі математично коректними, як цього вимагають класичні методи диференціальних рівнянь, математичної фізики та обчислювальної математики. Некоректність математичної моделі вбачатимемо в неузгодженості кількості та якості спостережень за процесом (явищем) з вимогами класичного математичного та обчислювального апарату, який міг би бути використаний для дослідження такої моделі.

Вивчаються процеси та явища довільної природи, функція стану яких залежить від кількох (у частинному випадку – однієї) змінних (координат). Для загальності викладок ці координати називатимемо просторово-часовими. Допускається, що залежність зазначеної функції стану від зовнішньодинамічних збуджуючих факторів системи (явища) описана лінійним диференціальним рівнянням (у загальному випадку – з частинними похідними), яке "вловлює" фізику процесу (явища).

Ставляться та розв'язуються задачі побудови зазначеної функції стану за наявності ніяк не регламентованої кількості інформа-

ції (спостережень) про поточний, початковий і крайовий стани системи (явища), яку спостерігачі за процесом (явищем) надають дискретно або неперервно в зручних для них точках, областях та інтервалах. Наведено розв'язки задач керування станом згаданих систем з метою наближення їх функцій стану до середньоквадратичного околу бажаного. На відміну від класичного розв'язання задач керування, у посібнику розглядаються випадки керування довільною комбінацією доступних для цього зовнішньодинамічних керуючих факторів – розподілених, початкових та крайових. Оцінюються точність і однозначність отриманих розв'язків.

Посібник написано на основі попередніх наукових досліджень автора. Матеріал подано конспективно, без проміжних викладень, як автор упродовж останніх років читає його в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка для студентів відділення "Прикладна математика" у межах нормативного курсу "Математичне моделювання". Алгоритми й методики розв'язання поставлених задач включаються в програми з підготовки фахівців у НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника та Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича.

Структурно посібник складається з чотирьох розділів, які об'єднують 20 підрозділів.

Перший розділ, структурно незалежний, є основою для розв'язання проблем і задач, сформульованих і розглянутих у наступних двох.

Об'єктами досліджень, реферативно викладених у розділі, є лінійно неперетворювальні системи, якими описуються логічні зв'язки між дискретно та неперервно визначеними входами-виходами. Розглядаються алгебраїчно перетворювальні системи та їх узагальнення у вигляді лінійних дискретно підсумувальних (п. 1.2) і дискретно розподільних (п. 4.3) систем. Виконується перехід до систем з неперервними динамічними входами-виходами (п. 4) та інтегрально-функціональних перетворювачів просторово розподіленої динамічної інформації (п. 5). Наведені псевдообернення всіх розглядуваних систем без обмежень на властивості їхніх перетворюваних ядер. Даються оцінки точнос-

ті таких обернень і формулюються умови їх однозначності. Описуються деякі класичні алгоритми числової реалізації викладених у розділі математичних результатів і положень.

У другому розділі викладено матеріал з математичного моделювання функції стану просторово розподілених динамічних систем, які функціонують у заданих просторово-часових областях, обмежених і необмежених за просторовими координатами та часовою змінною. Особливістю постановок проблем і задач дослідження таких систем, викладених у п. 2.1, є їхня некоректність за кількістю та якістю початково-крайових спостережень, якими доповнюється диференціально визначена математична модель системи. У п. 2.1 описуються принципи математичного моделювання наявних початково-крайових збурень системою дискретно та неперервно визначених моделюючих функцій. Наводяться розв'язки задач математичного моделювання дискретно (п. 2.2, 2.3) і неперервно (п. 2.4) заданих спостережень системою неперервно визначених (п. 2.3) функцій та векторами їхніх значень (п. 2.2, 2.4). Оцінюється точність отриманих розв'язків і формулюються умови їх однозначності. Акцентується увага (п. 2.3.3, 2.4.3) на особливостях постановок задач математичного моделювання та використання математичних методик такого моделювання для систем, які досліджуються в просторово необмежених областях і в усталеному часовому режимі.

У третьому розділі методи математичного моделювання розв'язків окремих задач динаміки просторово розподілених систем поширюються на задачі керування такими системами. У п. 3.1 наводяться постановки задач керування розглядуваними системами, формулюються проблеми їх розв'язання. Акцентується увага на широті постановок задач, які охоплюють усі диференціально описані лінійні динамічні системи з дискретно та неперервно визначеним бажаним станом і довільно можливою комбінацією зовнішньодинамічних керуючих факторів. Системи керування, як і в другому розділі, розглядаються за умов неповноти інформації про їхній початково-крайовий стан. Критерієм керування є середньоквадратичне наближення функції стану до бажаного й середньоквадратичне узгодження її з наявними початково-крайовими спостереженнями за системою.

Далі (п. 3.2–3.5) наводяться розрахункові формули для побудови вибраних при постановці задачі зовнішньодинамічних керуючих факторів і функції стану системи, до якого вони систему зводять. Розглядаються системи, керовані розподіленим динамічним збудженням (п. 3.2) і початково-крайовими (п. 3.2.5–3.2.8) зовнішньодинамічними збуджуючими факторами, узятими в довільній комбінації. Бажаний стан системи, як і спостереження за нею, задаються як дискретно (п. 3.2.6), так і неперервно (п. 3.2.7). Обговорюються (п. 3.2.8) особливості розв'язання задач керування для систем, які функціонують у просторово обмежених областях та в усталеному часовому режимі.

Четвертий розділ посібника є рекомендаційним для реалізації методик розв'язання задач і проблем, розглянутих у другому та третьому розділах. У п. 4.1 описуються особливості такого розв'язання при лабораторному тестуванні розглядуваних задач. У п. 4.2 даються рекомендації з оформлення тестового програмного продукту у вигляді програмного моделюючого комплексу. Далі описуються побажання до структури та можливостей інтерфейсної (п. 4.2), математичної (п. 4.3) і графічної (п. 4.4) частин комплексу, а також до особливостей візуалізації (п. 4.5) отриманих результатів. У п. 4.6–4.8 наводяться приклади зовнішньоінтерфейсного оформлення програмно-моделюючих комплексів, виконаних студентами факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка й факультету інформатики та обчислювальної техніки НТУУ "Київський політехнічний інститут" імені Ігоря Сікорського в межах лабораторних робіт на різних навчальних курсах.

1. Математичні моделі лінійних динамічних систем та проблеми їх псевдообернення

Розглядаються математичні моделі лінійних дискретно та неперервно визначених систем. Наводяться розрахункові формули середньоквадратичного обернення алгебраїчно перетворювальних систем та їх узагальнення на дискретно підсумувальні та дискретно розподільні системи. Даються розв'язки, а за їх відсутності – середньоквадратичні наближення до них інтегрально та функціонально перетворювальних одноаргументних систем і систем з розподіленими параметрами. Реферуються чисельно-аналітичні алгоритми комп'ютерної реалізації псевдорозв'язків розглядуваних математичних моделей.

1.1. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем

Розглянемо лінійну алгебраїчну систему вигляду:

$$Ax = b, \quad (1.1)$$

де A – $(m \times n)$ -вимірна матриця, а x та b – відповідно n - та m -вимірні вектори.

Система (1.1) є базовою для дослідження складніших моделей реальних процесів та явищ. У межах лінійної алгебри досліджуються умови існування розв'язку системи (1.1), будується цей розв'язок та оцінюється його однозначність. Поза увагою лінійної алгебри залишається питання визначення вектора x , який би за відсутності розв'язку системи (1.1) при заданих A та b найкраще (за певним критерієм) задовольняв співвідношення (1.1).

Зважаючи на важливість дослідження системи (1.1), за довірливих A та b побудуємо вектор $x \in R^n$, який би:

- точно задовольняв рівняння (1.1), якщо воно має розв'язок;
- був елементом множини розв'язків, якщо таких розв'язків багато;

- був однозначним середньоквадратичним наближенням до розв'язку системи (1.1);
- був елементом множини таких наближень за умов неоднозначності обернення (1.1).

Інакше кажучи, для системи (1.1) побудуємо множину

$$\Omega_x = \{ x \in R^n : \|Ax - b\|^2 \rightarrow \min_x \}. \quad (1.2)$$

За умов неоднозначності множини (1.2) виділимо з неї вектор \hat{x} такий, щоб

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \quad (1.3)$$

Розв'язком задачі (1.1)–(1.3) буде [6]

$$\Omega_x = \{ x : x = A^+b + v - A^+Av, \forall v \in R^n \}, \quad (1.4)$$

$$\hat{x} = A^+b,$$

де A^+ – псевдообернена матриця, для якої має місце співвідношення

$$A^+ = A_2^T (A_2 A_2^T)^+ (A_1^T A_1)^+ A_1^T \quad (1.5)$$

при заданих $A_1 \in R^{m \times r}$ та $A_2 \in R^{r \times n}$ (r – ранг матриці A)
 $A = A_1 A_2$ та

$$A^+ = A^T (AA^T)^+, \quad A^+ = (A^T A)^+ A^T. \quad (1.6)$$

Розв'язок (1.4) задачі (1.1)–(1.3) буде однозначним, якщо

$$\det(A^T A) > 0. \quad (1.7)$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{x \in \Omega_x} \|Ax - b\|^2 = b^T b - b^T A A^+ b. \quad (1.8)$$

1.2. Лінійні дискретно підсумувальні системи

Розглянемо узагальнення розв'язку (1.2), (1.3) системи (1.1) на випадок, коли вихідний вектор $b \in R^m$ отримуємо після під-

сумовування N лінійно перетворених n -вимірних векторів x_1, \dots, x_N , що описується співвідношенням

$$\sum_{i=1}^N A_i x_i = b, \quad (1.9)$$

у якому A_i ($i = \overline{1, N}$) – задані $(m \times n)$ -вимірні матриці.

Як і система (1.1), перетворення (1.9) може мати або не мати обернення (однозначне або множину обернень). В останньому випадку, як і для (1.1), обмежимося середньоквадратичним наближенням до такого обернення. Унаслідок цього для системи (1.9) побудуємо множину

$$\Omega_x = \{ (x_1, \dots, x_N) : \left\| \sum_{i=1}^N A_i x_i - b \right\|_{x_1, \dots, x_N}^2 \rightarrow \min \}. \quad (1.10)$$

За неоднозначності Ω_x з неї виділимо вектори \hat{x}_i ($i = \overline{1, N}$) такі, щоб

$$\hat{x}_i = \arg \min_{x_i \in \Omega_x} \|x_i\|^2 \quad (i = \overline{1, N}). \quad (1.11)$$

Розв'язком задачі (1.9)–(1.11) будуть [6] вектори

$$x_i = A_i^T P_1^+ b + v_i - A_i^T P_1^+ A_i v_i \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.12)$$

у яких

$$P_1 = \sum_{i=1}^N A_i A_i^T, \quad A_i = \sum_{i=1}^N A_i v_i$$

за довільних n -вимірних v_1, \dots, v_N , що дорівнюють нулю, якщо

$$\det [A_i^T A_j]_{i,j=1}^N > 0 \quad (1.13)$$

та

$$\hat{x}_i = A_i^T P_1^+ b. \quad (1.14)$$

Точність розв'язання задачі оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{(x_1, \dots, x_N) \in \Omega_x} \left\| \sum_{i=1}^N A_i x_i - b \right\|^2 = b^T b - b P_1 P_1^+ b. \quad (1.15)$$

Розв'язок (1.12), (1.14) задачі (1.9)–(1.11) може бути легко поширений на задачу псевдообернення системи

$$\sum_{i=1}^N A(t_i)x(t_i) = b, \quad (1.16)$$

яка значення $x(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) вектор-функцій $x(t) \in R^n$ ($t \in [0, T]$), визначені в точках $t_i \in [0, T]$ ($i = \overline{1, N}$) і лінійно перетворені матрицями $A(t_i) \in R^{m \times n}$ ($i = \overline{1, N}$), трансформує у вектор $b \in R^m$. При цьому множина

$$\Omega_x = \{ (x(t_i) (i = \overline{1, N})) : \left\| \sum_{i=1}^N A(t_i)x(t_i) - b \right\|^2 \rightarrow \min_{x(t_i) (i = \overline{1, N})} \} \quad (1.17)$$

значень $x(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) вектора $x(t)$ та $\hat{x}(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) такі, що

$$\hat{x}(t_i) = \arg \min_{x(t_i) \in \Omega_x} \|x(t_i)\|^2 \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.18)$$

визначатимуться співвідношеннями

$$\Omega_x = \{ (x(t_i) (i = \overline{1, N})) : x(t_i) = A^T(t_i)P_1^+b + v(t_i) - A^T(t_i)P_1^+A_v \}, \quad (1.19)$$

$$\hat{x}(t_i) = A^T(t_i)P_1^+b, \quad (1.20)$$

у яких

$$P_1 = \sum_{i=1}^N A(t_i)A^T(t_i),$$

$$A_v = \sum_{i=1}^N A(t_i)v(t_i),$$

а $v(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) є значеннями довільної n -вимірної вектор-функції $v(t)$ аргументу $t \in [0, T]$, яка дорівнює нулю, якщо

$$\det \left[A^T(t_i)A(t_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0. \quad (1.21)$$

Точність розв'язку (1.19), (1.20) задачі (1.17), (1.18) визначається величиною

$$\varepsilon^2 = b^T b - b^T P_1 P_1^+ b. \quad (1.22)$$

1.3. Лінійні дискретно розподільні системи

Подальшим узагальненням результату (1.2), (1.3) псевдооб'єднання системи (1.1) може бути задача побудови псевдорозв'язку лінійної системи вигляду

$$B_i x = b_i \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.23)$$

яка n -вимірний вектор x матрицями $B_i \in R^{n \times n}$ ($i = \overline{1, N}$) перетворює на послідовність n -вимірних векторів b_1, \dots, b_N .

При цьому за відомих матриць B_1, \dots, B_N та векторів b_i ($i = \overline{1, N}$) множина

$$\Omega_x = \{x \in R^n : \sum_{i=1}^N \|B_i x - b_i\|^2 \rightarrow \min_x\} \quad (1.24)$$

і вектор

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2 \quad (1.25)$$

визначатимуться співвідношеннями

$$\Omega_x = \{x : x = P_2^+ B_b + v - P_2^+ P_2 v, \forall v \in R^n\}, \quad (1.26)$$

$$\hat{x} = P_2^+ B_b, \quad (1.27)$$

у яких

$$P_2 = \sum_{i=1}^N B_i^T B_i,$$

$$B_b = \sum_{i=1}^N B_i^T b_i,$$

а довільний n -вимірний вектор $v \equiv 0$, якщо

$$\det P_2 > 0. \quad (1.28)$$

Точність розв'язку (1.26), (1.27) задачі (1.23)–(1.25), як і вище, оцінюватиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N b_i^T b_i - B_b^T P_2^+ B_b. \quad (1.29)$$

Розв'язок (1.26), (1.27) задачі (1.23)–(1.25) може бути успішно використаний для псевдообернення системи

$$B(t_i)x = b(t_i) \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.30)$$

яка вхідний вектор $x \in R^n$ значеннями $B(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) у моменти часу $t_i \in [0, T]$ ($i = \overline{1, N}$) трансформує в значення $b(t_i)$ ($i = \overline{1, N}$) вектор-функції $b(t) \in R^n$, визначеної для $t \in [0, T]$.

При цьому множина

$$\Omega_x = \left\{ x : \sum_{i=1}^N \|B(t_i)x - b(t_i)\|^2 \rightarrow \min_x \right\} \quad (1.31)$$

і вектор

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2 \quad (1.32)$$

визначатимуться співвідношеннями (1.26), (1.27), у яких тепер

$$P_2 = \sum_{i=1}^N B^T(t_i)B(t_i),$$

$$B_b = \sum_{i=1}^N B^T(t_i)b(t_i),$$

а вектор $v \equiv 0$ при

$$\det P_2 > 0. \quad (1.33)$$

Точність визначеного таким чином псевдорозв'язку системи (1.30) оцінюватиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N b^T(t_i)b(t_i) - B_b^T P_2^+ B_b. \quad (1.34)$$

1.4. Лінійні інтегрально та функціонально перетворювальні системи

Наведені в п. 1.1–1.3 результати із псевдообернення моделей стаціонарних (п. 1.1, 1.2) і дискретизованих (п. 1.3) динамічних

лінійно перетворювальних систем використовуємо для дослідження математичних моделей

$$\int_0^T A(t)x(t)dt = b \quad (1.35)$$

та

$$B(t)x = b(t) \quad t \in [0, T], \quad (1.36)$$

які неперервно визначений вхідний вектор $x(t) \in R^n$ перетворюють на стаціонарний вихід $b \in R^m$ (модель (1.35)) і, навпаки, стаціонарний вхід $x \in R^n$ трансформують у динамічний вихід $b(t) \in R^m$ ($t \in [0, T]$).

При цьому за відомих $(m \times n)$ -вимірних перетворювальних матриць $A(t), B(t)$ ($t \in [0, T]$) і заданих вихідних векторів $b, b(t)$ ($t \in [0, T]$) відновимо динамічний вхід $x(t)$ (для моделі (1.35)) і статичний вхід x (для моделі (1.36)) таким чином, щоб

$$\left\| \int_0^T A(t)x(t)dt - b \right\| \rightarrow \min_{x(t)}, \quad (1.37)$$

$$\int_0^T \|B(t)x - b(t)\|^2 dt \rightarrow \min_x. \quad (1.38)$$

Як і вище, побудуємо множини

$$\Omega_{x_t} = \left\{ x(t) : \left\| \int_0^T A(t)x(t)dt - b \right\| \rightarrow \min_{x(t)} \right\} \quad (1.39)$$

та

$$\Omega_x = \left\{ x : \int_0^T \|B(t)x - b(t)\|^2 dt \rightarrow \min_x \right\} \quad (1.40)$$

для систем (1.35), (1.36), відповідно, а також

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{x(t) \in \Omega_{x_t}} \int_0^T \|x(t)\|^2 dt, \quad (1.41)$$

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \quad (1.42)$$

Розв'язки задач (1.35), (1.39), (1.41) та (1.36), (1.40), (1.42) отримаємо поширенням результатів псевдообернення систем (1.16), (1.30) на неперервно визначений аргумент $t \in [0, T]$.

При цьому

$$\Omega_{x'} = \{x(t) : x(t) = A^T(t)P_1^+b + v(t) - A^T(t)P_1^+A, \quad \forall v(t) \in R^n\}, \quad (1.43)$$

$$\Omega_x = \{x : P_2^+B_b + v - P_2^+P_2v \quad \forall v \in R^n\}, \quad (1.44)$$

$$\hat{x}(t) = A^T(t)P_1^+b, \quad (1.45)$$

$$\hat{x} = P_2^+B_b \quad (1.46)$$

при

$$P_1 = \int_0^T A(t)A^T(t)dt,$$

$$P_2 = \int_0^T B^T(t)B(t)dt,$$

$$A_v = \int_0^T A(t)v(t)dt,$$

$$B_b = \int_0^T B^T(t)b(t)dt$$

і довільній інтегрованій на $[0, T]$ n -вимірній вектор-функції $v(t)$ ($t \in [0, T]$) та векторі v , що тотожно дорівнюють нулю, якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det [A^T(t_i)A(t_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0 \quad (1.47)$$

для системи (1.35) і

$$\det P_2 > 0 \quad (1.48)$$

— для системи (1.36).

Точність псевдообернень (1.43), (1.45) та (1.44), (1.46) систем (1.35) та (1.36) визначається величинами

$$\varepsilon_i^2 = b^T b - b^T P_1 P_1^+ b, \quad (1.49)$$

$$\varepsilon^2 = \int_0^T b^T(t)b(t)dt - B_b^T P_2^+ B_b. \quad (1.50)$$

1.5. Псевдообернення математичних моделей просторово розподілених динамічних систем

Наведені вище дослідження псевдообернень математичних моделей (1.16), (1.30) та (1.35), (1.36) стосувалися лінійних динамічних процесів, дискретно (моделі (1.16), (1.30)) і неперервно (моделі (1.35), (1.36)) визначених на інтервалі $t \in [0, T]$ та не залежних від інших параметрів (координат).

Заслужують на увагу динамічні процеси (системи), вхідні та вихідні характеристики яких визначені в певних (назвемо їх просторовими) областях. Залишаючи незмінною часову координату $t \in [0, T]$, уведемо до розгляду також просторову координату $x = (x_1, \dots, x_n) \in S_0$ та їхнє об'єднання

$$s = (x, t) \in S_0^T = S_0 \times [0, T].$$

Обмежуючись одновимірністю входу-виходу такої системи та позначивши через $u(s)$ та $y(s)$ функції зовнішньодинамічних збурень і стану системи, розглянемо такі математичні моделі розподілених в області S_0 динамічних процесів:

$$\int_{S_0^T} G_1(s) u(s) ds = \bar{y}, \quad (1.51)$$

$$G_2(s) \bar{u} = y(s) \quad (s \in S_0^T). \quad (1.52)$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \text{col}(y(s_l), l = \overline{1, L}), \\ \bar{u} &= \text{col}(u(s_m), m = \overline{1, M}), \end{aligned}$$

а при заданій перетворювальній функції $G(s - s')$ та $s_l, s_m \in S_0^T$ ($l = \overline{1, L}; m = \overline{1, M}$)

$$G_1(s) = \text{col}(G(s_l - s), l = \overline{1, L}),$$

$$G_2(s) = \text{str}(G(s - s_m), m = \overline{1, M}).$$

Використовуючи результати псевдообернення лінійних динамічних моделей (1.35), (1.36), побудуємо вектор \bar{u} значень $u(s_m)$

($m = \overline{1, M}$) вхідної функції $u(s)$ і саму функцію $u(s)$ так, щоб при заданих $G_1(s)$, $G_2(s)$ і доступних для спостережень $y(s)$ та \bar{y}

$$\left\| \int_{S_0^T} G_1(s)u(s)ds - \bar{y} \right\|^2 \rightarrow \min_{u(s)}, \quad (1.53)$$

$$\int_{S_0^T} \|G_2(s)\bar{u} - y(s)\|^2 ds \rightarrow \min_u \quad (1.54)$$

при $s \in S_0^T$.

Неважко бачити, що розв'язки задач (1.53), (1.54) ми отримуємо узагальненням розв'язків (1.43), (1.44) задач (1.37), (1.38). При цьому

$$u(s) \in \Omega_{us} = \{u(s) : u(s) = G_1^T(s)P_1^+ \bar{y} + v(s) - G_1^T(s)P_1^+ G_v, \forall v(s) \in R^n\}, \quad (1.55)$$

$$u \in \Omega_u = \{u : P_2^+ G_y + v - P_2^+ P_2 v, \forall v \in R^n\}, \quad (1.56)$$

де за довільної інтегровної в області S_0^T функції $v(s)$

$$P_1 = \int_{S_0^T} G_1(s)G_1^T(s)ds,$$

$$P_2 = \int_{S_0^T} G_2^T(s)G_2(s)ds,$$

$$G_y = \int_{S_0^T} G_2^T(s)y(s)ds,$$

$$G_v = \int_{S_0^T} G_1(s)v(s)ds.$$

Розв'язки (1.55), (1.56) задач (1.53), (1.54) будуть однозначними ($v(s) \equiv 0$, $v \equiv 0$), якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[G_1^T(s_i)G_1(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

для системи (1.51) та

$$\det P_2 > 0$$

— для системи (1.52).

Точності отриманих згідно з (1.55) та (1.56) результатів псевдообернення моделей (1.51), (1.52) визначатимуться величинами

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s) \in \Omega_{ux}} \left\| \int_{S_0^T} G_1(s)u(s)ds - \bar{y} \right\|^2 = \bar{y}^{-T} \bar{y} - \bar{y}^{-T} P_1 P_1^+ \bar{y},$$

$$\varepsilon^2 = \min_{u \in \Omega_n} \int_{S_0^T} \left\| G_2(s)\bar{u} - y(s) \right\|^2 ds = \int_{S_0^T} y^2(s)ds - G_y^T P_2^+ G_y,$$

відповідно.

1.6. Основи числової реалізації алгоритмів псевдообернення математичних моделей лінійних динамічних систем

Побудовані вище розв'язки задач псевдообернення математичних моделей лінійних динамічних систем з визначеними дискретно та неперервно входами-виходами дозволяють побудувати й дослідити на точність і однозначність множини розв'язків (якщо вони існують) або середньоквадратичних наближень до них (якщо точних розв'язків не існує) для досить широкого класу лінійно перетворювальних процесів. Це дозволяє успішно працювати з будь-якою з розглядуваного класу математичною моделлю просторово розподілених динамічних систем, ставлячи та розв'язуючи пов'язані з нею математичні задачі, не вболіваючи особливо за коректність постановок останніх. Комп'ютерна ж реалізація отриманих псевдорозв'язків зазначених систем виявилася досить простою й не потребує використання математично складних обчислювальних процедур – усе обмежується алгоритмами лінійної алгебри, числового інтегрування та псевдообернення прямокутних матриць.

Не зупиняючись на перших двох групах алгоритмів (вони є класичними), наведемо рекурентний алгоритм псевдообернення прямокутних матриць, побудований на формулах Гревіля [6], згідно з якими для всякої прямокутної матриці $A \in R^{m \times n}$, розширеної рядком a^T , де $a \in R^n$,

$$\left(\begin{array}{c} A \\ a^T \end{array} \right)^+ = \left\{ \begin{array}{l} \left(A^+ - \frac{Z(A)aa^T A^+}{a^T Z(A)a} ; \frac{Z(A)a}{a^T Z(A)a} \right) \quad \text{при } a^T Z(A)a > 0; \\ \left(A^+ - \frac{R(A)aa^T A^+}{1+a^T R(A)a} ; \frac{R(A)a}{1+a^T R(A)a} \right) \quad \text{при } a^T Z(A)a = 0. \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Аналогічно для матриці A , розширеної стовпчиком $a \in R^m$,

$$(A:a)^+ = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} A^+ - \frac{A^+aa^T Z(A^T)}{a^T Z(A^T)a} \\ \frac{a^T Z(A^T)}{a^T Z(A^T)a} \end{array} \right) \quad \text{при } a^T Z(A^T)a > 0, \\ \left(\begin{array}{c} A^+ - \frac{A^+aa^T R(A^T)}{1+a^T R(A^T)a} \\ \frac{a^T R(A^T)}{1+a^T R(A^T)a} \end{array} \right) \quad \text{при } a^T Z(A^T)a = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.58)$$

Тут $Z(A) = I - A^+A$, $Z(A^T) = I - AA^+$,

$$R(A) = A^+(A^+)^T, \quad R(A^T) = (A^+)^T A^+.$$

Основою для рекурентного використання формул (1.57), (1.58) є той факт, що для $A \in R^{l \times n}$

$$A^+ = A^T P_1^{-1},$$

де $P_1 = AA^T$, а для $A \in R^{m \times l}$

$$A^+ = P_2^{-1} A^T,$$

де $P_2 = A^T A$.

2. Математичне моделювання стану просторово розподілених динамічних систем

Формулюються проблеми дослідження динаміки лінійних просторово розподілених систем. Акцентується увага на недовизначених за початково-крайовими умовами просторово розподілених динамічних системах. Пропонується алгоритм математичного моделювання впливу початково-крайових збуджуючих факторів на стан системи. Розв'язуються задачі математичного моделювання функції стану дискретно та неперервно спостережуваної лінійної просторово розподіленої динамічної системи, логіка функціонування якої визначена лінійною диференціальною моделлю. Оцінюється точність та однозначність такого моделювання. Розглядаються випадки як обмеженості просторово-часової області, так і її необмеженості за просторовими координатами та часом t .

2.1. Проблеми та ідейні основи математичного моделювання стану просторово розподілених динамічних систем

Зупинимось на проблемах дослідження функції стану $y(s)$, розподіленої в області $S_0^T = S_0 \times [0, T]$ динамічної системи, логіка функціонування якої визначена рівнянням

$$L(\partial_s)y(s) = u(s). \quad (2.1)$$

Тут і далі $s = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in S_0^T$ – просторово-часова змінна, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$ – вектор частинних похідних за просторовими змінними x_1, \dots, x_n та часом t , $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, а $u(s)$ – функція розподілених у S_0^T просторово-часових зовнішньодинамічних збудрень.

Будемо виходити з того, що для розглядуваного динамічного процесу (2.1) мають місце початкові (при $t=0$) і крайові (на контурі Γ просторової області S_0) спостереження вигляду

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}, x \in S_0), \quad (2.2)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s \in \Gamma \times [0, T]} = Y_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}) \quad (2.3)$$

або

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=y^0 \in S_0}} = Y_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \quad (2.4)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_\rho^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.5)$$

На відміну від прийнятих у класичних розділах диференціальних рівнянь математичної фізики та обчислювальної математики, не будемо накладати жодних обмежень на кількості R_0 та R_Γ початково-крайових співвідношень (2.2)–(2.5) (вони можуть бути й відсутніми) і на властивості функцій $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Останнє, не кажучи про дискретність спостережень (2.4), (2.5), робить задачі (2.1)–(2.3) та (2.1), (2.4), (2.5) некоректними й не розв'язними методами аналітичної та обчислювальної математики.

З урахуванням сказаного поставимо задачу побудови функції стану $y(s)$, яка б, будучи розв'язком рівняння (2.1), за середньоквадратичним критерієм

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(s) \right)^2 ds \rightarrow \min_{y(s)} \quad (2.6)$$

за неперервних спостережень (2.2), (2.3) або

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y(s)} \quad (2.7)$$

– за дискретних спостережень (2.4), (2.5) узгоджувалася з останніми.

Зважаючи на обмеженість області S_0^T функціонування системи (2.1) і наявність трьох факторів зовнішньодинамічного впливу на стан системи $y(s)$, визначення останнього зобразимо співвідношенням

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \quad (2.8)$$

складові якого відповідають просторово розподіленим початковим і крайовим збуренням, відповідно.

Для побудови функцій $y_\infty(s), y_0(s), y_\Gamma(s)$ уведемо до розгляду передатну функцію $G(s-s')$ досліджуваного процесу – функцію Гріна системи (2.1), розглядуваної в необмеженій просторово-часовій області, співвідношенням

$$L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s'), \quad (2.9)$$

де $\delta(s-s')$ – δ -функція Дірака. Після цього маємо:

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s') u(s') ds', \quad (2.10)$$

$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s-s') u_0(s') ds', \quad (2.11)$$

$$y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s') u_\Gamma(s') ds', \quad (2.12)$$

де $u_0(s), u_\Gamma(s)$ – функції, дія яких в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times (0, T]$ згідно з (2.6), (2.7) моделюватиме вплив визначених у (2.2)–(2.5) початково-крайових зовнішньодинамічних збурень. Зауважимо, що мо-

делюючі функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, як і функція $u(s)$, можуть бути визначені векторами

$$u = \text{col}(u(s_m), m = \overline{1, M}) \quad (s_m \in S_0^T), \quad (2.13)$$

$$u_0 = \text{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}) \quad (s_m^0 \in S^0), \quad (2.14)$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}) \quad (s_m^\Gamma \in S^\Gamma) \quad (2.15)$$

своїх значень $u_m = u(s_m)$ ($m = \overline{1, M}$), $u_{0m} = u_0(s_m^0)$ ($m = \overline{1, M_0}$),

$u_{\Gamma m} = u_\Gamma(s_m^\Gamma)$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$).

У цьому випадку

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s - s_m) u_m, \quad (2.16)$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) u_{0m}, \quad (2.17)$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) u_{\Gamma m}, \quad (2.18)$$

і проблема побудови функції $y(s)$ зведеться до знаходження векторів u_0 , u_Γ згідно з критеріями (2.6), (2.7). Визначення ж функції $G(s - s')$ згідно з (2.9) дозволяє стверджувати [6], що функція стану $y(s)$, зображена як співвідношеннями (2.8), (2.10)–(2.12), такі і співвідношеннями (2.8), (2.16)–(2.18), за будь-яких $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та u_0 , u_Γ з моделлю (2.1) узгоджуватиметься точно.

Останнє означає, що проблема побудови функції $y(s)$ визначеного згідно з (2.1) і спостережуваного згідно з (2.2)–(2.5) процесу зводиться до знаходження функцій $u_0(s)$ ($s \in S^0$), $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$) або векторів u_0 , u_Γ їхніх значень, моделюючих згідно з (2.6), (2.7) початково-крайові збурення (2.2)–(2.5).

Саме на розрахункових алгоритмах розв'язання задач побудови моделюючих факторів, визначених функціями $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ або векторами u_0 , u_Γ , зупинимось далі.

2.2. Дискретний варіант задачі математичного моделювання динаміки лінійно розподілених систем

2.2.1. Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях

Виходячи зі сформульованих вище проблем математичного дослідження динаміки просторово розподілених систем, розглянемо задачу побудови функції $y(s)$ ($s \in S_0^T = S_0 \times [0, T]$) стану динамічної системи (2.1) за умови, що спостереження за нею визначені згідно з (2.4), (2.5).

Пошук у (2.14), (2.15) векторів u_0, u_Γ таких, щоб при визначеному згідно з (2.8), (2.16)–(2.18) $y(s)$ виконувався критерій (2.7), зведеться до розв'язання задачі

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \quad (2.19)$$

Це еквівалентно середньоквадратичному щодо u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) оберненню системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо із (2.4), (2.5) після підстановки до них розв'язку (2.8), (2.16)–(2.18):

$$A\bar{u} = \bar{Y}. \quad (2.20)$$

Тут

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$Y_0 = \text{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s))\Big|_{t=0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s))\Big|_{x=x_l^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{11} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{12} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Згідно з (1.12) вектор \bar{u} , визначений системою (2.20) і такий, що

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0+M_\Gamma}} \|Au - \bar{Y}\|^2, \quad (2.21)$$

запишемо у вигляді

$$\bar{u} = A^+ (\bar{Y} - Av) + v,$$

де v – довільний вектор розмірністю $M_0 + M_\Gamma$, а A^+ – матриця, псевдообернена до A . Звідси знаходимо множини

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{u_0 : \|Au - \bar{Y}\|^2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma}\} = \\ &= \{u_0 : u_0 = (A_{11}^T, A_{21}^T)P_1^+ (\bar{Y} - Av) + v_0, \forall v_0 \in R^{M_0}\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

та

$$\begin{aligned} \Omega_\Gamma &= \{u_\Gamma : \|Au - \bar{Y}\|^2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma}\} = \\ &= \{u_\Gamma : u_\Gamma = (A_{12}^T, A_{22}^T)P_1^+ (\bar{Y} - Av) + v_\Gamma, \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де $P_1 = AA^T$.

З урахуванням (1.15) та особливостей переходу від задачі (2.1), (2.4), (2.5), (2.7) до задачі (2.21) точність моделювання початково-крайових умов (2.4), (2.5) функцією $y(s)$, знайденою згідно із (2.8), (2.16)–(2.18) при $u_0 \in \Omega_0$, $u_\Gamma \in \Omega_\Gamma$, визначимо величиною

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_p^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = \\ &= \min_{y(s)} \Phi_2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}. \end{aligned}$$

Якщо $\det A^T A > 0$, то у співвідношеннях (2.22), (2.23) $v_0 = v_\Gamma \equiv 0$, а розглядуване моделювання однозначне. При $\det A^T A = 0$ розв'язок задачі неоднозначний.

2.2.2. Дослідження динаміки просторово-часових систем у необмежених просторових і часових областях

При дослідженні просторово-часового процесу, розподіленого в області S_0^T , може виникнути ситуація, коли функція $y(s)$ його стану становить інтерес для використання у просторовій області S_0 або на часовому інтервалі $[0, T]$, а вплив крайових умов (2.5) для області S_0 або початкових (2.4) для інтервалу $[0, T]$ несуттєвий і ним можна знехтувати. Тоді функцію $y(s)$ стану досліджуваного процесу можна будувати як розв'язок рівняння (2.1), що середньоквадратично задовольняє тільки (2.4) або тільки (2.5).

У першому випадку

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]), \quad (2.24)$$

у другому –

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]). \quad (2.25)$$

Складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначимо співвідношеннями (2.10), (2.17), (2.18), функцію $G(s-s')$ яких знайдемо згідно з викладеним вище.

Вектори u_0 та u_Γ значень моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ тут визначимо простіше, ніж при моделюванні повної початково-крайової задачі (2.1), (2.4), (2.5), оскільки спрощується критерій (2.7) їхнього пошуку. Для процесів, досліджуваних у необмежених просторових і часових областях, цей критерій матиме вигляд

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 \rightarrow \min_{u_0}$$

або

$$\Phi_{\Gamma} = \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} \left(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) y(s) \Big|_{s=s_l^{\Gamma}} - Y_{\rho l}^{\Gamma} \right)^2 \rightarrow \min_{u_{\Gamma}}$$

відповідно. Це означає, що вектори u_0 та u_{Γ} шукатимемо тепер середньоквадратичним оберненням рівнянь

$$A_{11}u_0 = Y_0 \quad (2.26)$$

та

$$A_{22}u_{\Gamma} = Y_{\Gamma}. \quad (2.27)$$

Розв'язки рівнянь (2.26), (2.27) такі, що

$$\|A_{11}u_0 - Y_0\|^2 \rightarrow \min_{u_0}$$

та

$$\|A_{22}u_{\Gamma} - Y_{\Gamma}\|^2 \rightarrow \min_{u_{\Gamma}}$$

набудуть вигляду

$$u_0 = A_{11}^+ Y_0 + v_0 - A_{11}^+ A_{11} v_0, \quad (2.28)$$

$$u_{\Gamma} = A_{22}^+ Y_{\Gamma} + v_{\Gamma} - A_{22}^+ A_{22} v_{\Gamma}, \quad (2.29)$$

де v_0 та v_{Γ} – довільні вектори розмірністю M_0 та M_{Γ} , відповідно.

Точності ε_0^2 та ε_{Γ}^2 досягнення функціями (2.24) та (2.25) початкового (2.4) і крайового (2.5) станів процесу визначимо співвідношеннями

$$\varepsilon_0^2 = \min_{y(s)} \Phi_0 = \min_{u_0} \Phi_0 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T A_{11} A_{11}^+ Y_0,$$

$$\varepsilon_{\Gamma}^2 = \min_{y(s)} \Phi_{\Gamma} = \min_{u_{\Gamma}} \Phi_{\Gamma} = (Y_{\Gamma})^T Y_{\Gamma} - (Y_{\Gamma})^T A_{22} A_{22}^+ Y_{\Gamma};$$

однозначність розв'язання розглядуваних задач – величинами $\det(A_{11}^T A_{11})$ та $\det(A_{22}^T A_{22})$, відповідно.

Розв'язок (2.8), (2.10), (2.17) задачі (2.1), (2.4) моделювання початкового стану (2.4) для процесів, визначених у необмеженій просторовій області, буде однозначним ($v_0 \equiv 0$) при $\det(A_{11}^T A_{11}) > 0$ і неоднозначним при $\det(A_{11}^T A_{11}) = 0$.

Аналогічно для задачі (2.1), (2.5) моделювання крайових збуджуючих факторів (2.5) на необмеженому часовому інтервалі розв'язок (2.8), (2.10), (2.18) буде однозначним ($v_{\Gamma} \equiv 0$) при $\det(A_{22}^T A_{22}) > 0$ і неоднозначним при $\det(A_{22}^T A_{22}) = 0$.

2.2.3. Деякі особливості математичного моделювання динаміки дискретно спостережуваних просторово-часових систем

Особливістю розглядуваного підходу до побудови функції $y(s)$ стану розподіленої в обмеженій просторово-часовій області S_0^T динамічної системи є те, що:

- 1) динаміка системи описана лінійним диференціальним рівнянням (2.1);
- 2) початково-крайовий стан системи спостерігається дискретно;
- 3) дискретно визначені також моделюючі для цього стану зовнішньодинамічні фактори – вектори u_0 та u_{Γ} .

Такий підхід дозволяє складну (часто некоректно поставлену) задачу розв'язати простими методами лінійної алгебри.

Запропонована в [4–6] методика дослідження такого складного класу розподілених просторово-часових систем має додаткові можливості:

- 1) математична частина алгоритму розв'язання задачі мало зміниться, якщо початково-крайові спостереження за станом системи доповнити (замінити) розподіленими у просторово-часовій області S_0^T дискретними спостереженнями

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_i \in S_0^T} = Y_i \quad (i = \overline{1, I}), \quad (2.30)$$

які за деяких обставин для користувача зручніші, ніж спостереження (2.4), (2.5);

- 2) методику розв'язання задачі легко поширити на дискретно спостережувані просторово розподілені динамічні системи, структура й логіка функціонування яких важкі для математичної формалізації (2.1).

Зупинимося на особливостях розв'язання задачі побудови функції $y(s)$ стану системи (2.1) для випадку, коли початково-

крайові спостереження (2.4), (2.5) доповнені розподіленими просторово-часовими спостереженнями (2.30). При цьому методика математичного моделювання початково-крайових зовнішньодинамічних збурень (2.4), (2.5) не зміниться – моделюючі вектори u_0 та u_Γ визначатимемо з умов середньоквадратичного виконання співвідношень (2.4), (2.5) або (що еквівалентно) лінійних алгебраїчних рівнянь (2.19).

За наявності спостережень (2.20), виконання яких вимагатимемо за середньоквадратичним критерієм, праву частину лінійної алгебраїчної системи (2.20), до якої зведеться розв'язання задачі, розширимо вектором

$$Y = \text{col}(Y_i, i = \overline{1, I}).$$

Відповідного розширення на блоки

$$A_{31} = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^0)|_{s=s_i}, m = \overline{1, M_0}), i = \overline{1, I}),$$

$$A_{32} = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^\Gamma)|_{s=s_i}, m = \overline{1, M_\Gamma}), i = \overline{1, I})$$

набуде й матриця A , тобто на додаток до моделюючого вектора \bar{u} матриця A та вектор \bar{Y} у співвідношенні (2.20) матимуть вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \\ Y \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Останнє викличе зміни визначення векторів u_0 та u_Γ – елементів множин Ω_0 та Ω_Γ (див. (2.22), (2.23)), відповідно. Вони за визначених вище P_1 та v будуть такими:

$$u_0 = (A_{11}^T, A_{21}^T, A_{31}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_0, \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \quad (2.32)$$

$$u_\Gamma = (A_{12}^T, A_{22}^T, A_{32}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_\Gamma, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}. \quad (2.33)$$

Умови точності й однозначності побудованої згідно з (2.8), (2.10), (2.17), (2.18) з урахуванням (2.32), (2.33) функції $y(s)$ збігатимуться (з урахуванням змін (2.31)) з умовами точності й однозначності розв'язання задачі (2.1), (2.4), (2.5).

Зупинимося коротко на особливостях побудови й дослідженні функції $y(s)$ стану розглядуваної системи за відсутності диференціальної моделі вигляду (2.1).

Виходитимемо з того, що не формалізована згідно із (2.1) розподілена просторово-часова система допускає I спостережень

$$\bar{u}^{(i)} = \text{col}(u^{(i)}(s'_m), m = \overline{1, M}) \quad (i = \overline{1, I}), \quad (2.34)$$

$$\bar{y}^{(i)} = \text{col}(y^{(i)}(s_l), l = \overline{1, L}) \quad (i = \overline{1, I}) \quad (2.35)$$

за станом системи $y(s)$ ($s \in S_0^T$) і зовнішньодинамічним збуренням $u(s)$ ($s \in S_0^T$), яке цей стан викликає.

Спостережень (2.34), (2.35) достатньо [6], щоб побудувати алгебраїчну модель

$$A \bar{u} = \bar{y} \quad (2.36)$$

– дискретний аналог інтегрального зображення (2.10) диференціальної моделі (2.1) у необмеженій просторово-часовій області.

Матриця A дискретної моделі (2.36), побудованої за спостереженнями (2.34), (2.35), може бути базовою для відновлення (ідентифікації) функції Гріна $G(s - s')$ розглядуваної системи, з використанням якої, згідно з викладеним вище, можуть бути враховані й початково-крайові збурення (2.4), (2.5).

2.3. Неперервно-аналітичне моделювання динаміки лінійно розподілених систем із дискретно спостережуваним початково-крайовим станом

2.3.1. Задача неперервно-аналітичного моделювання дискретно визначеного початково-крайового збурення

Продовжимо розгляд динаміки просторово розподіленої системи (2.1), зумовленої визначеним в області S_0^T зовнішньоди-

намічним збуренням $u(s)$ і заданими згідно із (2.4), (2.5) початково-крайовими збурюючими факторами Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}$; $r = \overline{1, R_0}$) та $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). На відміну від розглянутого у п. 2.2, останні змодельюємо неперервно визначеними функціями $u_0(s)$ ($s \in S^0$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$), а не їхніми дискретними значеннями

$$u_0 = \text{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0})$$

та

$$u_\Gamma = \text{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}).$$

Вплив моделюючих факторів на функцію $y(s)$ стану розглядуваного процесу врахуємо, подаючи останню сумою (2.8), складові $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ якої, на відміну від (2.17), (2.18), визначимо співвідношеннями (2.11), (2.12) при заданій передавальній функції $G(s - s')$.

Подана співвідношеннями (2.8), (2.10)–(2.12) функція $y(s)$ задовольняє [6] рівняння (2.1) точно за будь-яких $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$. Обмеження на вибір $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ накладають лише умови (2.4), (2.5). Задовольнимо їх згідно із (2.7) або, що еквівалентно, виконанням критерію

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)}, \quad (2.37)$$

функціонал Φ_2 якого розуміємо за (2.7).

2.3.2. Множини моделюючих функцій для дискретно визначеного початково-крайового стану

Розв'язок задачі (2.37) визначення функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, якими згідно з (2.7) моделюється функція стану $y(s)$ розглядуваного процесу при спостереженнях за нею (2.4), (2.5), можна

отримати середньоквадратичним оберненням системи інтегральних рівнянь

$$\int_{S^0} L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{x=x_l^0} u_0(s') ds' +$$

$$+ \int_{S^\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{x=x_l^0} u_\Gamma(s') ds' = \bar{Y}_{rl} \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}), \quad (2.38)$$

$$\int_{S^0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s') \Big|_{s=s_l^\Gamma} u_0(s') ds' +$$

$$+ \int_{S^\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s') \Big|_{s=s_l^\Gamma} u_\Gamma(s') ds' = \bar{Y}_{\rho l} \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (2.39)$$

де

$$\bar{Y}_{rl} = Y_{rl} - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s) \Big|_{x=x_l^0},$$

$$\bar{Y}_{\rho l} = Y_{\rho l} - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma}.$$

Для використання методики псевдообернення систем інтегральних рівнянь (див. п. 1.4) співвідношення (2.38), (2.39) запишемо у вигляді

$$\int_{(\cdot)} A(s)\bar{u}(s)ds = \bar{Y}, \quad (2.40)$$

де інтегрування здійснюється по області зміни аргументу s вектор-функції

$$\bar{u}(s) = \text{col}(u_0(s) \quad (s \in S^0), \quad u_\Gamma(s) \quad (s \in S^\Gamma))$$

і матричної функції

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) \quad (s \in S^0), & A_{12}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s) \quad (s \in S^0), & A_{22}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix},$$

а \bar{Y} – вектор, визначений у (2.20). При цьому

$$A_{li} = \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s')) \Big|_{x=x_l^0}, \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2i} = \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, \quad l = \overline{1, L_\Gamma}, \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

де $s' \in S^0$ при $i=1$ та $s' \in S^\Gamma$ при $i=2$.

Розв'язком $\bar{u}(s)$ рівняння (2.40) таким, щоб

$$\left\| \int_{(\cdot)} A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{Y} \right\|^2 \rightarrow \min_{u(s)},$$

згідно з (1.43) буде

$$\bar{u}(s) = A^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v(s), \quad (2.41)$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} A(s)A^T(s)ds,$$

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(s)v(s)ds,$$

а $v(s)$ – довільна інтегровна в області зміни своїх аргументів вектор-функція

$$v(s) = \text{col}(v_0(s) \ (s \in S^0), v_\Gamma(s) \ (s \in S^\Gamma)).$$

З урахуванням визначення $\bar{u}(s)$ та $A(s)$ із (2.41) знаходимо

$$u_0(s) = A_0(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_0(s), \quad (2.42)$$

$$u_\Gamma(s) = A_\Gamma(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_\Gamma(s), \quad (2.43)$$

де

$$A_0(s) = (A_{11}^T(s), A_{21}^T(s)) \ (s \in S^0),$$

$$A_\Gamma(s) = (A_{12}^T(s), A_{22}^T(s)) \ (s \in S^\Gamma),$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma} \end{pmatrix},$$

а

$$P_{ij} = \int_{S^0} A_{i1}(s)A_{j1}^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{i2}(s)A_{j2}^T(s)ds \quad (i, j = \overline{1, 2}),$$

$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{12}(s)v_\Gamma(s)ds,$$

$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^0} A_{21}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds.$$

Функція $y(s)$ стану системи (2.1), (2.4)–(2.5), побудована згідно із (2.8), (2.10)–(2.12) з урахуванням функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, задовольняє [6] початково-крайові умови (2.4), (2.5) з точністю

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}$$

і визначається однозначно ($v(s) \equiv 0$), якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A^T(s_i) A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0.$$

За інших умов розв'язок задачі буде неоднозначним.

2.3.3. Задачі математичного моделювання дискретизованих початково-крайових умов у необмежених просторових і часових областях

Розглянемо особливості розв'язання задачі моделювання дискретно визначеного початково-крайового стану (2.4), (2.5) розподіленої просторово-часової системи (2.1) за умови її функціонування в необмеженій просторовій області або на необмеженому часовому інтервалі.

Для систем, досліджуваних у необмеженій просторовій області за початкових збурень (2.4), функцію стану $y(s)$ визначимо співвідношенням (2.24) із визначеними згідно з (2.10) та (2.11) складовими $y_\infty(s)$, $y_0(s)$. Для систем, що перебувають під впливом крайових збурень (2.5) і не залежать від початкового стану, функцію стану $y(s)$ подамо співвідношенням (2.25), складові $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$ якого визначимо згідно з (2.10) та (2.12). В обох випадках значно спрощуються вирази (2.42), (2.43) для визначення моделюючих функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$.

Для побудови цих функцій виходитимемо зі співвідношень (2.38) та (2.39), відповідно, які в даному випадку набудуть вигляду

$$\int_{s^0} A_{11}(s) u_0(s) ds = Y_0, \quad (2.44)$$

$$\int_{s^\Gamma} A_{22}(s) u_\Gamma(s) ds = Y_\Gamma, \quad (2.45)$$

де Y_0, Y_Γ – вектори, визначені у п. 2.2.1. Із (2.44), (2.45) згідно з (1.43) знаходимо

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u_0(s) : u_0(s) = A_{11}^T(s)P_0^+(Y_0 - A_{v_0}) + v_0(s)\},$$

$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma(s) : u_\Gamma(s) = A_{22}^T(s)P_\Gamma^+(Y_\Gamma - A_{v_\Gamma}) + v_\Gamma(s)\},$$

де $v_0(s), v_\Gamma(s)$ – довільні інтегровні відповідно в S^0 та S^Γ функції,

$$P_0 = \int_{S^0} A_{11}(s)A_{11}^T(s)ds,$$

$$P_\Gamma = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)A_{22}^T(s)ds,$$

$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds,$$

$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds.$$

Точність моделювання функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ початкових (2.4) і крайових (2.5) умов (згідно з (1.49)) визначимо величинами

$$\varepsilon_0^2 = \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 =$$

$$= \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \left\| \int_{S^0} A_{11}(s)u_0(s)ds - Y_0 \right\|^2 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T P_0 P_0^+ Y_0,$$

$$\varepsilon_\Gamma^2 = \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \sum_{p=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_p^\Gamma(\partial_x)y(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{pl}^\Gamma)^2 =$$

$$= \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \left\| \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)u_\Gamma(s)ds - Y_\Gamma \right\|^2 = (Y_\Gamma)^T Y_\Gamma - (Y_\Gamma)^T P_\Gamma P_\Gamma^+ Y_\Gamma.$$

Умови однозначності множин моделюючих функцій $u_0(s)$ ($v_0(s) \equiv 0$) та $u_\Gamma(s)$ ($v_\Gamma(s) \equiv 0$) визначимо співвідношеннями

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A_{11}^T(s_i) A_{11}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A_{22}^T(s_i) A_{22}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0.$$

2.4. Математичне моделювання динаміки просторово розподілених процесів з неперервно заданим початково-крайовим станом

2.4.1. Задача математичного моделювання неперервно визначеного початково-крайового збурення розподілених динамічних систем

Розглянемо задачу математичного моделювання стану розподіленої в області S_0^T просторово-часової системи, описаної рівнянням (2.1), функція $y(s)$ стану якої задовольняє не дискретно визначені початково-крайові умови (2.4), (2.5), а неперервні умови (2.2), (2.3). Вважатимемо, що функція $u(s)$ розподілених зовнішньодинамічних збурень відома, кількість R_0, R_Γ умов не обов'язково узгоджена з порядком диференціального оператора $L(\partial_s)$ рівняння (2.1), а просторова область і часовий інтервал, на якому вони задані, не обов'язково збігаються із просторовою областю S_0 і часовим інтервалом $[0, T]$, на якому досліджувана система функціонує.

Оскільки розв'язання даної задачі за зроблених зауважень аналітичними або числовими методами проблематичне, то побудуємо функцію $y(s)$, яка, будучи розв'язком рівняння (2.1), умови (2.2), (2.3) задовольнятиме середньоквадратично.

Як і у п. 2.2.1, функцію $y(s)$ стану розглядуваного процесу зобразимо співвідношеннями (2.8), (2.10), (2.17), (2.18), де вектори

$$u_0 = (u_{0m}, m = \overline{1, M_0})^T, \quad u_\Gamma = (u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma})^T$$

невідомих фіктивних зовнішньодинамічних збурень u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) виберемо з умови середньоквадратичного виконання початково-крайових співвідношень (2.2), (2.3), тобто з умови, щоб

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 dt \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \end{aligned} \quad (2.46)$$

або, що еквівалентно,

$$\Phi \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (2.47)$$

Шукані згідно з (2.46), (2.47) вектори u_0 та u_Γ називатимемо моделюючими відносно початково-крайових умов (2.2), (2.3), оскільки їхні компоненти u_{0m} та $u_{\Gamma m}$ є значеннями функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, визначених у зовнішньопросторовій S^0 та зовнішньочасовій $(-\infty, 0]$ областях. Вектори ці знайдемо з умов (2.46), (2.47) середньоквадратичного виконання початково-крайових умов (2.2), (2.3), а їхній вплив через функцію $G(s - s')$ поширимо на область S_0^T , у якій система функціонує.

2.4.2. Вектори моделюючих факторів для неперервно визначених початково-крайових умов динаміки просторово розподіленої системи

Розглянемо задачу знаходження моделюючих векторів u_0 та u_Γ , що згідно з (2.46), (2.47) дозволяють виконати початково-крайові умови (2.2), (2.3).

З урахуванням зображення (2.8), (2.10), (2.17), (2.18) функції $y(s)$ стану розглядуваної системи із (2.2), (2.3) отримаємо систему рівнянь для знаходження компонент u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) векторів u_0 та u_Γ :

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)|_{t=0}u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m} = \overline{Y}_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}), \quad (2.48)$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)|_{x \in \Gamma}u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m} = \overline{Y}_\rho^\Gamma(x, t) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.49)$$

При цьому

$$\overline{Y}_r^0(x) = Y_r^0(x) - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0},$$

$$\overline{Y}_\rho^\Gamma(x, t) = Y_\rho^\Gamma(x, t) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)|_{x \in \Gamma}.$$

Для розв'язання системи (2.48), (2.49) згідно із критерієм (2.46) зведемо її до вигляду

$$B(s)\overline{u} = Y(s), \quad (2.50)$$

де

$$\overline{u} = \text{col}(u_0, u_\Gamma),$$

а

$$Y(s) = \text{col}(Y_0(x) \quad (x \in S_0), Y_\Gamma(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]),$$

$$B(s) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} (B_{11}(x) \quad (x \in S_0)) & (B_{12}(x) \quad (x \in S_0)) \\ (B_{21}(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]) & (B_{22}(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]) \end{array} \right) \quad (2.51)$$

при

$$Y_0(x) = \text{col}(\overline{Y}_r^0(x), r = \overline{1, R_0}), \quad (2.52)$$

$$Y_\Gamma(x, t) = \text{col}(\overline{Y}_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\begin{aligned}
B_{11}(x) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_0}), \\
B_{12}(x) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_0}), \\
B_{21}(x, t) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0)), m = \overline{1, M_0}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \\
B_{22}(x, t) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma)), m = \overline{1, M_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Розв'язання системи (2.48), (2.49) згідно з (2.46) еквівалентне знаходженню вектора \bar{u} такого, щоб

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0+M_\Gamma}} \int_{(\cdot)} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds. \tag{2.54}$$

Інтегрування у (2.54) розуміється по області зміни аргументу s , визначеній у (2.51).

Оскільки розв'язання задачі (2.54) зводиться до розглядуваної у п. 1.4 проблеми псевдообернення лінійних функціональних рівнянь, то з (1.44) маємо

$$\bar{u} \in \Omega_u = \{u : u = P^+ B_y + v - P^+ P v, \forall v \in R^{M_0+M_\Gamma}\}, \tag{2.55}$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} B^T(s)B(s)ds, \quad B_y = \int_{(\cdot)} B^T(s)Y(s)ds. \tag{2.56}$$

З урахуванням того, що інтегрування у (2.56) виконується по області визначення аргументу s , матрицю P і вектор B_y подамо у вигляді

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \int_{S_0} B_{1i}^T(x)B_{1j}(x)dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(x, t)B_{2j}(x, t)dxdt, \\
B_{y_i} &= \int_{S_0} B_{1i}^T(x)Y_0(x)dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(x, t)Y_\Gamma(x, t)dxdt \quad (i, j = \overline{1, 2}).
\end{aligned}$$

Вважаючи, що

$$P^+ = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

де $Q_{11} \in R^{M_0 \times M_0}$, $Q_{12} \in R^{M_0 \times M_\Gamma}$, $Q_{21} \in R^{M_\Gamma \times M_0}$, $Q_{22} \in R^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$, а $v = \text{col}(v_0, v_\Gamma)$, $v_0 \in R^{M_0}$, $v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$, із (2.55) знаходимо шукані згідно з (2.46) моделюючі вектори u_0 та u_Γ . При цьому

$$u_0 \in \Omega_0 = \{u \in R^{M_0} : u = (Q_{11}, Q_{12})B_y + v_0 - (Q_{11}, Q_{12})Pv, \forall v \in R^{M_0}\}, \quad (2.57)$$

$$u_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \{u \in R^{M_\Gamma} : u = (Q_{21}, Q_{22})B_y + v_\Gamma - (Q_{21}, Q_{22})Pv, \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\}. \quad (2.58)$$

Знайдені згідно з (2.57), (2.58) вектори u_0 та u_Γ з урахуванням (2.8), (2.10), (2.17), (2.18) дозволяють знайти функцію $y(s)$ стану розглядуваної системи, яка, задовольняючи (2.1) точно, початково-крайові умови (2.2), (2.3) моделює з точністю

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi = \min_{u \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int_{S_0} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds = \int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx + \\ + \int_{\Gamma \times [0, T]} Y_\Gamma^T(x, t) Y_\Gamma(x, t) dx dt - B_y^T P^+ B_y, \end{aligned}$$

де Φ визначене співвідношенням (2.46).

Моделювання буде однозначним ($v \equiv 0$) при $\det P > 0$. За інших умов розв'язок задачі буде неоднозначним.

2.4.3. Задачі математичного моделювання неперервно визначених початково-крайових умов у необмежених просторових і часових областях

Зупинимося на особливостях розв'язання розглядуваної задачі для випадків, коли впливом початкових (2.2) і крайових (2.3) збурюючих факторів на досліджувану систему можна знехтувати. У цьому випадку область S_0^T вважатимемо необмеженою відповідно за просторовими й часовими координатами.

Для побудови розв'язку задачі в таких випадках виходитимемо з того, що:

1) для систем, що функціонують у необмеженій просторовій області, відсутні крайові умови (2.3) і вектор u_Γ , який їх моделює;

2) для систем, що досліджуються без урахування дії початкових зовнішньодинамічних збурень, відсутні початкові умови (2.2) і вектор u_0 , який їх моделює.

Останнє означає, що:

1) у першому випадку (необмежена просторова область)

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \quad (s \in R^n \times [0, T]), \quad (2.59)$$

де $y_\infty(s)$ та $y_0(s)$ визначаються співвідношеннями (2.10) та (2.17), у яких

$$u_0 = P_{11}^+ B_{y_0} + v_0 - P_{11}^+ P_{11} v_0 \quad \forall v_0 \in R^{M_0} \quad (2.60)$$

при P_{11} та v_0 , уведених у п. 2.4.2, а

$$B_{y_0} = \int_{S_0} B_{11}^T(x) Y_0(x) dx;$$

2) у другому випадку (необмежений часовий інтервал)

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (s \in S_0 \times (-\infty, T]), \quad (2.61)$$

де $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначаються співвідношеннями (2.10) та (2.18), у яких

$$u_\Gamma = P_{22}^+ B_{y_\Gamma} + v_\Gamma - P_{22}^+ P_{22} v_\Gamma \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma} \quad (2.62)$$

при P_{22} та v_Γ , уведених у п. 2.4.2, а

$$B_{y_\Gamma} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{22}^T(x, t) Y_\Gamma(x, t) dx dt.$$

Розв'язки (2.59) та (2.61) разом з визначеними у (2.60) та (2.62) векторами u_0 та u_Γ моделюватимуть початкові (2.2) і крайові (2.3) умови з точностями

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx = \\ &= \int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx - B_{y_0}^T P_{11}^+ B_{y_0} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\Gamma}^2 &= \min_{y(s)} \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)y(s) - Y_{\rho}^{\Gamma}(x, t))^2 ds = \\ &= \int_{\Gamma \times [0, T]} Y_{\Gamma}^T(x, t) Y_{\Gamma}(x, t) dx dt - B_{y_{\Gamma}}^T P_{22}^+ B_{y_{\Gamma}},\end{aligned}$$

відповідно.

Розв'язки розглядуваних задач будуть однозначними ($v_0 \equiv 0$ та $v_{\Gamma} \equiv 0$) при $\det P_{11} > 0$ та $\det P_{22} > 0$, відповідно;

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx = \\ &= \int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx - B_{y_0}^T P_{11}^+ B_{y_0}\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\Gamma}^2 &= \min_{y(s)} \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)y(s) - Y_{\rho}^{\Gamma}(x, t))^2 ds = \\ &= \int_{\Gamma \times [0, T]} Y_{\Gamma}^T(x, t) Y_{\Gamma}(x, t) dx dt - B_{y_{\Gamma}}^T P_{22}^+ B_{y_{\Gamma}},\end{aligned}$$

відповідно.

Розв'язки розглядуваних задач будуть однозначними ($v_0 \equiv 0$ та $v_{\Gamma} \equiv 0$) при $\det P_{11} > 0$ та $\det P_{22} > 0$, відповідно.

3. Математичне моделювання розв'язків задач керування динамікою просторово розподілених систем

Формулюються проблеми керування динамікою лінійних просторово розподілених систем з метою виведення їхньої функції стану в середньоквадратичний окіл бажаного, який визначається дискретно та неперервно. Ставляться та розв'язуються задачі керування розглядуваними системами для випадків, коли керуючі фактори розподілені в просторово-часовій області, на контурі області та в початковий момент часу й беруться поодиноці, по два і всі три одночасно. Наводяться розрахункові формули як для побудови вибраної системи керувань, так і для функції стану системи, до якої ці керування систему приводять. Виконується оцінка точності побудованих розв'язків розглядуваних задач. Виписуються умови однозначності отриманих розв'язків. Обговорюються особливості використання запропонованих методик для розв'язання задач керування розглядуваними системами в необмежених просторових областях і для усталеного режиму їх функціонування.

3.1. Проблеми та ідейні основи розв'язання задачі керування динамікою просторово розподілених систем

Продовжимо дослідження розподіленого в просторово-часовій області $S_0^T = S_0 \times [0, T]$ динамічного процесу, функція стану $y(s)$ якого визначена моделлю

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \quad (3.1)$$

де $L(\partial_s)$ – лінійно заданий диференціальний оператор, фізична природа якого трансформована в передатну функцію $G(s - s')$ таку, що

$$L(\partial_s)G(s - s') = \delta(s - s') \quad (3.2)$$

(тут $\delta(s - s')$ – δ -функція Дірака).

На відміну від розв'язаних вище задач побудови функції стану $y(s)$ процесу (3.1), доповненого початково-крайовими спостереженнями, вигляду

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} = Y_r^0(x), \quad r = \overline{1, R_0}, \quad x \in S_0, \quad (3.3)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t), \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}, \quad t \in [0, T], \quad x^\Gamma \in \Gamma \quad (3.4)$$

або

$$L_r^0(\partial_t y)(s)|_{t=0} = Y_{rl}^0, \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}, \quad x_l^0 \in S, \quad (3.5)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{pl}^\Gamma,$$

$$l = \overline{1, L_\Gamma}, \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}, \quad s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T], \quad (3.6)$$

розглянемо задачі керування цим процесом з метою досягнення його функцією стану $y(s)$ бажаних значень, які визначимо співвідношеннями

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s \in S_0^T} = Y_i(s), \quad (i = \overline{1, I}), \quad (3.7)$$

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_{ij} \in S_0^T} = Y_{ij}, \quad (j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}). \quad (3.8)$$

Тут $L_i(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, а $Y_i(s)$ ($i = \overline{1, I}$) та Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$) – задані функції та їхні значення. Вважатимемо, що кожен із трьох зовнішньодинамічних факторів, а це розподілене $u(s)$, початкове $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та крайове $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) збурення, може бути відомим, а може – керуючим. В останньому випадку ці керуючі фактори знайдемо з умови середньоквадратичного наближення функції стану $y(s)$ до заданих у (3.7), (3.8) бажаних значень при одночасному середньоквадратичному узгодженні його з початково-крайовими спостереженнями (3.3)–(3.6). Кількість R_0, R_Γ таких спостережень, як і їх наявність, ніяк регламентувати не будемо.

Як і при розв'язанні розглянутих вище прямих задач із побудови функцій стану $y(s)$ процесу (3.1), у задачах керування динамікою процесу за умови, що досліджується він у замкненій просторово-часовій області S_0^T (допускається також відкритість області за просторовими координатами та часом t), функцію $y(s)$ подамо сумою

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s) \quad (3.9)$$

трьох складових, визначених співвідношеннями

$$\begin{aligned} y_\infty(s) &= \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \\ y_0(s) &= \int_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds', \\ y_\Gamma(s) &= \int_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds' \end{aligned} \quad (3.10)$$

або

$$\begin{aligned} y_\infty(s) &= \sum_{m=1}^M G(s-s_m)u_m, \\ y_0(s) &= \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)u_{0m}, \\ y_\Gamma(s) &= \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Однак, на відміну від розглянутого вище, тут функція $u(s)$ (або вектор $u_* = \text{col}(u_m, m = \overline{1, M})$ її значень) просторово розподілених динамічних збурень може бути відомою або розглядатися як керуюча. Функції $u_0(s)$ ($s \in S^0$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$) будемо вважати невідомими й разом із функцією $u(s)$ та вектором u_* її значень (якщо останні є керуючими) визначимо їх з умови найкращого за середньоквадратичним критерієм моделювання наявних початково-крайових збурюючих факторів та узгоджен-

ня побудованого згідно з (3.9) стану $y(s)$ системи (3.1) з бажаними значеннями (3.7), (3.8), тобто так, щоб

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 dx dt + \\ & + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{y(s)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_{rl}^0)^2 + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_j} - Y_{ij})^2 \rightarrow \min_{y(s)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Знайдені згідно з (3.12), (3.13) керуюче-моделюючі фактори $u(s)$, $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ або u_* , u_0 , u_Γ дозволяють співвідношенням (3.9) знайти функцію $y(s)$, а співвідношеннями (3.3), (3.4) побудувати також функції $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$, $x \in S_0$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$, $s \in \Gamma \times [0, T]$) початково-крайових збурюючих факторів, якщо такі є керуючими.

Зауважимо, що властивості визначеної згідно з (3.2) передатної функції $G(s - s')$ дозволяють стверджувати, що за будь-яких знайдених таким чином керуюче-моделюючих факторів зображена співвідношеннями (3.9), (3.10) або (3.9), (3.11) функція $y(s)$ задовольнятиме рівняння (3.1) точно. Середньоквадратичну ж оцінку її узгодженості зі спостереженнями (3.3)–(3.6) та бажаним станом (3.7), (3.8) визначимо при розгляді конкретних задач.

3.2. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з дискретно визначеним критерієм і керуючою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень

3.2.1. Задачі керування розподіленим просторово-часовим збуренням

Зупинимось на розв'язанні задачі (3.13), до якої зводиться проблема керування спостережуваною згідно з (3.5), (3.8) системою (3.1) для досягнення її функцією стану $y(s)$ дискретно визначених у (3.8) бажаних значень Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}, i = \overline{1, I}$).

3.2.2. Розв'язувальна система рівнянь

Як і вище, будемо виходити з розв'язку

$$y_{\infty}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')u(s')ds'$$

рівняння (3.1), маючи на увазі, що функція $G(s-s')$ визначена співвідношенням (3.2).

Подаючи функцію стану системи (3.1) у вигляді (3.9), складові $y_0(s)$ та $y_{\Gamma}(s)$ залежно від ситуації будемо визначати згідно з (3.10) або згідно з (3.11), де, як і вище, $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, $S^{\Gamma} = (R^n \setminus S_0) \times [0, T]$, $u_{0m} = u_0(s_m^0)$, $u_{\Gamma m} = u_{\Gamma}(s_m^{\Gamma})$, $s_m^0 \in S^0$, $s_m^{\Gamma} \in S^{\Gamma}$.

Зважаючи на форму визначення функцій $u_0(s)$ та $u_{\Gamma}(s)$, як і їхніх значень u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_{\Gamma}}$) (усі вони діють за межами розглядуваної просторово-часової області S_0^T), а також форму впливу цих функцій та їхніх значень на функцію стану системи (впливають вони через функцію $G(s-s')$ – функцію Гріна процесу (3.1) у необмеженій просторово-часовій

області), функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, як і їхні значення u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$), будемо називати *моделюючими*. На відміну від цього, невідому функцію $u(s)$ ($s \in S_0^T$) будемо називати *керуючою*. Керуючим можна вважати й вектор

$$u_* = \text{col}(u(s_m), m = \overline{1, M})$$

значень $u(s_m) = u_m$ функції $u(s)$ у точках $s_m \in S_0^T$ ($m = \overline{1, M}$). Останнє означає, що задача (3.13) з пошуку функції $u(s)$ буде складнішою і зведеться до знаходження вектор-функції

$$\bar{u}(s) = \text{col}(u_0(s) (s \in S^0), u_\Gamma(s) (s \in S^\Gamma), u(s) (s \in S_0^T)) \quad (3.14)$$

або вектора

$$\bar{u} = \text{col}(u_0, u_\Gamma, u_*),$$

де

$$u_0 = \text{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}),$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

таких, щоб

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{\bar{u}(s)} \quad (3.15)$$

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{\bar{u}} \quad (3.16)$$

або

$$\Phi_1 \rightarrow \min_{\bar{u}} \quad (3.17)$$

Зауважимо, що розв'язання задач (3.15), (3.16) еквівалентне задачам середньоквадратичного обернення систем рівнянь, які отримаємо з (3.5), (3.6), (3.8) після підстановки в них (3.9), (3.10) та (3.9), (3.11), відповідно.

Отримані системи рівнянь будуть такими:

- при дискретно визначених керуюче-моделюючих факторах

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t) G(s - s_m^0) \Big|_{t=0} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t) G(s - s_m^\Gamma) \Big|_{t=0} u_{\Gamma m} + \quad (3.18)$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_r^0(\partial_t) G(s - s_m) \Big|_{t=0} u_m = Y_{rl}^0 \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}),$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_{\Gamma m} + \quad (3.19)$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m)\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_m = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_i(\partial_s)G(s-s_m^0)\Big|_{s=s_{ij}} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_i(\partial_s)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{s=s_{ij}} u_{\Gamma m} + \quad (3.20)$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_i(\partial_s)G(s-s_m)\Big|_{s=s_{ij}} u_m = Y_{ij} \quad (j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I});$$

- при непрерывно визначених керуюче-моделюючих факторах

$$\int_{S^0} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u_0(s')ds' + \int_{S^\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u_\Gamma(s')ds' + \quad (3.21)$$

$$+ \int_{S_0^r} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u(s')ds' = Y_{rl}^0 \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}),$$

$$\int_{S^0} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_0(s')ds' + \int_{S^\Gamma} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_\Gamma(s')ds' + \quad (3.22)$$

$$+ \int_{S_0^\rho} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u(s')ds' = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\int_{S^0} L_i(\partial_s)G(s-s')\Big|_{s=s_{ij}} u_0(s')ds' + \int_{S^\Gamma} L_i(\partial_s)G(s-s')\Big|_{s=s_{ij}} u_\Gamma(s')ds' + \quad (3.23)$$

$$+ \int_{S_0^j} L_i(\partial_s)G(s-s')\Big|_{s=s_{ij}} u(s')ds' = Y_{ij} \quad (j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}).$$

3.2.3. Множини дискретно визначених керуюче-моделюючих факторів

Розглянемо задачу побудови вектора \bar{u} керуюче-моделюючих факторів, за допомогою якого згідно з (3.16) розв'язується задача (3.1), (3.5), (3.6), (3.8). Будемо виходити із системи рівнянь (3.18)–(3.20), якими компоненти цього вектора визначаються.

Для середньоквадратичного згідно з (3.16) обернення системи (3.18)–(3.20) останню запишемо у вигляді

$$A\bar{u} = \bar{Y}. \quad (3.24)$$

При цьому

$$\bar{Y} = \text{col}(Y_0, Y_\Gamma, Y_*),$$

$$A = [A_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=3},$$

де

$$Y_0 = \text{col}((Y_{r,l}^0, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma = \text{col}((Y_{\rho,l}^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (3.25)$$

$$Y_* = \text{col}((Y_{ij}, j = \overline{1, J_i}), i = \overline{1, I}),$$

A_{ij} для $i, j = \overline{1, 2}$ визначаються як у системі (2.20), а

$$A_{13} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m))\Big|_{x=x_l^0}, m = \overline{1, M}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{23} = \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{31} = \text{col}((\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^0))\Big|_{s=s_{ij}}, m = \overline{1, M_0}), j = \overline{1, J_i}), i = \overline{1, I}),$$

$$A_{32} = \text{col}((\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{s=s_{ij}}, m = \overline{1, M_\Gamma}), j = \overline{1, J_i}), i = \overline{1, I}),$$

$$A_{33} = \text{col}((\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m))\Big|_{s=s_{ij}}, m = \overline{1, M}), j = \overline{1, J_i}), i = \overline{1, I}).$$

Після середньоквадратичного обернення системи (3.24) такого, щоб

$$\|A\bar{u} - \bar{Y}\|_{\bar{u}}^2 \rightarrow \min, \quad (3.26)$$

за аналогією із (2.22), (2.20) знаходимо, що керуюче-моделюючі вектори u_0 , u_Γ та u_* визначатимуться співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_0 \in \Omega_0 &= \{u : u = (A_{11}^T, A_{21}^T, A_{31}^T)P_1^+ (\bar{Y} - A\bar{v}) + v_0\}, \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma &= \{u : u = (A_{12}^T, A_{22}^T, A_{32}^T)P_1^+ (\bar{Y} - A\bar{v}) + v_\Gamma\}, \\ u_* \in \Omega_* &= \{u : u = (A_{13}^T, A_{23}^T, A_{33}^T)P_1^+ (\bar{Y} - A\bar{v}) + v_*\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

при

$$\begin{aligned} \forall v_0 \in K^{M_0}, \forall v_\Gamma \in K^{M_\Gamma}, \forall v_* \in K^M, \\ \bar{v} = \text{col}(v_0, v_\Gamma, v_*), P_1 = A \cdot A^T. \end{aligned}$$

Середньоквадратична точність, з якою вектори (3.27) задовольняють (3.24), а знайдене з їх використанням $y(s)$ задовольняє початково-крайові умови (3.5), (3.6) і керуючі умови (3.8), визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma \\ u_* \in \Omega_*}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}. \quad (3.28)$$

Однозначність знайдених згідно з (3.27) керуюче-моделюючих векторів визначатиметься $\det A^T A$. При $\det A^T A > 0$ $v_0 = v_\Gamma = v_* \equiv 0$ розв'язок задачі однозначний, при $\det A^T A = 0$ – неоднозначний.

Зауважимо насамкінець, що стан процесу описується функцією (3.9), компоненти $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ якої визначаються співвідношеннями (3.11).

3.2.4. Множини неперервно визначених керуюче-моделюючих факторів

Розглянемо варіант розв'язання задачі (3.1), (3.5), (3.6), (3.8), (3.15). На відміну від розглянутого вище, моделюючими факторами для початково-крайових збурень (3.5), (3.6) виберемо функції $u_0(s)$ ($s \in S^0$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$). Функціонально визначеним будемо вважати також керуючий фактор $u(s)$. Вектор-функція $\bar{u}(s)$ керуюче-моделюючих факторів при цьому визначається системою рівнянь (3.21)–(3.23).

Для середньоквадратичного згідно з (3.15) обернення системи рівнянь (3.21)–(3.23) запишемо її у вигляді

$$\int_{(\bullet)} A(s)\bar{u}(s)ds = \bar{Y}, \quad (3.29)$$

де, як і раніше, інтегрування виконується по області визначення аргументу s вектор-функції $\bar{u}(s)$ і матричної функції $A(s)$.

При цьому матимемо на увазі, що

$$A(s) = ((A_1(s)(s \in S^0)), (A_2(s)(s \in S^\Gamma)), (A_3(s)(s \in S_0^T))), \\ \bar{Y} = \text{col}(Y_0, Y_\Gamma, Y_*)$$

при

$$A_i(s) = \text{col}((A_{ji}(s), j = \overline{1,3}), i = \overline{1,3}),$$

$$A_{1j}(s') = \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s'))_{\substack{t=0 \\ |x=x_t^0}}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2j}(s') = \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s'))_{|s=s_t^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (3.30)$$

$$A_{3j}(s') = \text{col}((L_i(\partial_s)G(s-s'))_{|s=s_{ij}}, j = \overline{1, J_i}, i = \overline{1, I}) \quad (j = \overline{1,3}),$$

$$Y_0 = \text{col}((Y_{rl}^0, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$Y_* = \text{col}((Y_{ij}, j = \overline{1, J_i}, i = \overline{1, I}).$$

У результаті середньоквадратичного обернення системи (3.29) такого, щоб

$$\left\| \int_{(\bullet)} A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{Y} \right\|_{\bar{u}(s)}^2 \rightarrow \min, \quad (3.31)$$

аналогічно (2.42), (2.43) знаходимо, що керуюче-моделюючі функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та $u(s)$ визначатимуться співвідношеннями

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u(s) : u(s) = A_1^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_0(s), \forall v_0(s)\}, \quad (3.32)$$

$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u(s) : u(s) = A_2^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_\Gamma(s), \forall v_\Gamma(s)\}, \quad (3.33)$$

$$u(s) \in \Omega_u = \{u(s) : u(s) = A_3^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v(s), \forall v(s)\}, \quad (3.34)$$

у яких

$$P = \int_{S^0} A_1(s)A_1^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)A_2^T(s)ds + \int_{S_0^T} A_3(s)A_3^T(s)ds ,$$

$$A_v = \int_{S^0} A_1(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)v_\Gamma(s)ds + \int_{S_0^T} A_3(s)v(s)ds .$$

Як і в попередньому пункті, середньоквадратичну точність, з якою керуюче-моделюючі функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та $u(s)$ задовольняють (3.29), а знайдене з їх використанням $y(s)$ задовольняє початково-крайові умови (3.5), (3.6) і керуючі умови (3.8), визначатимемо величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{\substack{u_0(s) \in \Omega_0 \\ u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma \\ u_*(s) \in \Omega_*}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}. \quad (3.35)$$

Функція стану досліджуваного процесу визначатиметься співвідношеннями (3.9), (3.10) з урахуванням знайдених згідно з (3.32)–(3.34) керуюче-моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u(s)$.

3.2.5. Задачі комплексного керування розподіленими просторово-часовими та початково-крайовими збуреннями

Розглянуті вище задачі з керування системою (3.1) були поставлені та розв'язані за умови, що початково-крайові збурення (3.5) та (3.6) відомі, а керуючим фактором є розподілені зовнішньодинамічні збурення $u(s)$. Не виключені, однак, випадки, коли переведення системи (3.1) в окіл, визначений співвідношенням (3.8), виконується за участю початкових, крайових і початково-крайових збурюючих факторів. Зауважимо, що керування цими факторами може здійснюватися як за участю функції $u(s)$, так і без неї.

Ураховуючи сказане, розглянемо задачі керування системою (3.1), яка функціонує в обмеженій просторово-часовій області, за допомогою:

- 1) функції $u(s)$ і початкових збурень (3.5);
- 1) функції $u(s)$ і крайових збурень (3.6);

- 2) функції $u(s)$ і початково-крайових збурень (3.5), (3.6);
- 3) початкових збурень без функції $u(s)$;
- 4) крайових збурень без функції $u(s)$;
- 5) початково-крайових збурень без функції $u(s)$.

Вважатимемо, що форма можливих для реалізації початково-крайових збурень визначена операторами $L_r^0(\partial_t)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $L_p^\Gamma(\partial x)$ ($p = \overline{1, R_\Gamma}$), тому проблема знаходження цих збурень зведеться до побудови функції $y(s)$ стану системи, який задовольняв би рівняння (3.1) і відомі початкові чи крайові умови (середньоквадратично).

Для побудови функції $y(s)$ стану розглядуваного процесу, як і раніше, будемо виходити із системи (3.18)–(3.20) або (3.21)–(3.23) залежно від того, дискретно чи неперервно вибрані керуюче-моделюючі фактори. Зауважимо, що системи ці будуть спрощуватися залежно від постановки задачі.

3.2.6. Задачі керування дискретно визначеним розподіленим зовнішньодинамічним збуренням і початково-крайовими збурюючими факторами

Розглянемо задачі керування системою (3.1) з досягнення нею стану, визначеного співвідношенням (3.8). Будемо вважати, що керування виконується вектором

$$u_* = \text{col}(u_m, m = \overline{1, M})$$

дискретно визначених значень $u_m = u(s_m)$ ($s_m \in S_0^T$) розподіленого зовнішньодинамічного збурення $u(s)$ разом з початковими (задача 1), крайовими (задача 2) і початково-крайовими (задача 3) збурюючими факторами.

Оскільки область, у якій перебігає процес (3.1), обмежена та мають місце початково-крайові збурення вигляду (3.5), (3.6), то у визначенні вектора \bar{u} керуюче-моделюючих факторів будуть наявні всі три компоненти (u_0, u_Γ та u_*). Однак визначатимуться вони із системи (3.18)–(3.20), у якій відсутніми будуть блоки

рівнянь із початковими (задача 1), крайовими (задача 2) і початково-крайовими (задача 3) умовами.

Розглянемо кожну із зазначених задач детальніше.

Задача 1. Для системи (3.1) за відомих крайових умов (3.6) знайти вектор u_* дискретно заданих розподілених просторово-часових збурень і початкові збурюючі фактори Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$), визначені співвідношенням (3.5), які б стан $y(s)$ розглядуваного процесу середньоквадратично наближали до заданого згідно з (3.8).

Шукані Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$) отримаємо згідно з (3.5) за відомою функцією $y(s)$. Останню побудуємо згідно з (3.9) з урахуванням (3.11) та вектора \bar{u} , який визначимо зі співвідношень (3.18)–(3.20), записавши їх у вигляді (3.24). При цьому врахуємо, що

$$A = [A_{ij}]_{i=2, j=1}^{i=3, j=3}, \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_{\Gamma} \\ Y_* \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

У результаті середньоквадратичного згідно з (3.26) обернення системи (3.24) знайдемо

$$\begin{aligned} u_0 &= (A_{21}^T, A_{31}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_0, \\ u_{\Gamma} &= (A_{22}^T, A_{32}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_{\Gamma}, \\ u_* &= (A_{23}^T, A_{33}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_*, \end{aligned} \quad (3.37)$$

де при $\forall v_0 \in R^{M_0}$, $\forall v_{\Gamma} \in R^{M_{\Gamma}}$ та $\forall v_* \in R^M$
 $\bar{v} = \text{col}(v_0, v_{\Gamma}, v_*)$, $P_1 = AA^T$, а вектори Y_{Γ} , Y_* та блоки A_{ij} ($i = \overline{2, 3}; j = \overline{1, 3}$) визначені в (3.24). З урахуванням (3.36) із (3.28) отримаємо оцінку точності розв'язку задачі, однозначність якого, як і раніше, оцінюватиметься $\det A^T A$.

Задача 2. Розглянемо задачу пошуку вектора u_* та крайових збурюючих факторів $Y_{\rho l}^{\Gamma}$ ($l = \overline{1, L_{\Gamma}}; \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}$), які стан $y(s)$ сис-

теми (3.1), (3.5) середньоквадратично наближають до визначеного в (3.8).

Аналогічно розглянутому вище, вектор \bar{u} керуюче-моделюючих факторів u_0 , u_Γ та u_* знайдемо, середньоквадратично обертаючи систему (3.24), у якій тепер

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_* \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

При цьому

$$\begin{aligned} u_0 &= (A_{11}^T, A_{31}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_0, \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \\ u_\Gamma &= (A_{12}^T, A_{32}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_\Gamma, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \\ u_* &= (A_{13}^T, A_{33}^T)P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_*, \quad \forall v_* \in R^{M_*}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де всі позначення відповідають прийнятим вище.

Далі з урахуванням (3.39) згідно з (3.9), (3.11) знайдемо $y(s)$, а з (3.6) – і шукані $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; r = \overline{1, R_\Gamma}$). Із (3.28) з урахуванням (3.38) визначимо середньоквадратичну точність розв'язання задачі.

Задача 3. Виконаємо середньоквадратичне наближення стану $y(s)$ розглядуваного процесу до значень, визначених у (3.8), впливаючи на систему вектором u_* та початково-крайовими збурюючими факторами Y_{rl}^Γ ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$) і $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$).

Як і раніше, вектор \bar{u} керуюче-моделюючих факторів u_0 , u_Γ та u_* знайдемо з (3.24), (3.26), ураховуючи, що в цьому випадку

$$A = (A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33}), \quad \bar{Y} = Y_*. \quad (3.40)$$

При цьому (у межах прийнятих позначень)

$$\begin{aligned} u_0 &= A_{31}^T P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_0, \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \\ u_\Gamma &= A_{32}^T P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_\Gamma, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \\ u_* &= A_{33}^T P_1^+(\bar{Y} - A\bar{v}) + v_*, \quad \forall v_* \in R^{M_*}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Далі процедура та сама: із (3.9), (3.11) знайдемо $y(s)$, а з (3.5), (3.6) – шукані Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$) і $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$).

Точність розв'язання задачі визначимо з (3.28) з урахуванням (3.40), а однозначність – умовою $\det A^T A > 0$.

3.2.7. Задачі керування неперервно визначеним розподіленим зовнішньодинамічним збуренням і початково-крайовими збурюючими факторами

Розглянемо задачу середньоквадратичного наближення стану $y(s)$ системи (3.1) до визначеного в (3.8), впливаючи на неї функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень $u(s)$ у комбінації з початковими (задача 4), крайовими (задача 5) і початково-крайовими (задача 6) збурюючими факторами вигляду (3.5), (3.6).

Оскільки розподілене зовнішньодинамічне керування $u(s)$ тут шукаємо неперервно за просторово-часовими координатами, то візьмемо неперервно визначеними й моделюючі функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$. Вектор-функцію

$$\bar{u}(s) = \text{col}(u_0(s), u_\Gamma(s), u(s))$$

керуюче-моделюючих факторів знайдемо як розв'язок системи (3.21)–(3.23). З використанням компонент вектор-функції $\bar{u}(s)$ із (3.9), (3.10) знайдемо $y(s)$, а з (3.5), (3.6) (залежно від постановки задачі) – початково-крайові керуючі фактори. Таким чином, відмінності в розв'язанні задач 4–6 будуть тільки на етапі знаходження вектор-функції $\bar{u}(s)$. На цьому й зупинимся в кожній із задач.

Задача 4. Визначений у (3.8) стан Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$) системи (3.1) середньоквадратично досягається при керуючих $u(s)$ та Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$).

Розв'язком задачі (3.29), (3.31) буде

$$\bar{u}(s) = A^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + \bar{v}(s), \quad (3.42)$$

де $\bar{v}(s) = \text{col}((v_0(s) (s \in S^0)), (v_\Gamma(s) (s \in S^\Gamma)), (v(s) (s \in S_0^T)))$ – довільна інтегровна в області зміни своїх аргументів вектор-функція,

$$P = \int_{S^0} A_1(s)A_1^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)A_2^T(s)ds + \int_{S_0^T} A_3(s)A_3^T(s)ds, \quad (3.43)$$

$$A_v = \int_{S^0} A_1(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)v_\Gamma(s)ds + \int_{S_0^\Gamma} A_3(s)v(s)ds, \quad (3.44)$$

$$A(s) = (A_1(s), A_2(s), A_3(s)), \quad (3.45)$$

$$\bar{Y} = \text{col}(Y_\Gamma, Y_*), \quad (3.46)$$

$$A_i(s) = \text{col}(A_{2i}(s), A_{3i}(s)) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (3.47)$$

Задача 5. Визначений у (3.8) стан Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$) системи (3.1) середньоквадратично досягається при керуючих $u(s)$ та $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$).

Алгоритм розв'язання задачі аналогічний розглянутому вище. Вектор-функцію $\bar{u}(s)$ шукаємо згідно з (3.42). Мають місце визначення (3.43)–(3.45). Відмінними від визначених у (3.46), (3.47) є

$$\bar{Y} = \text{col}(Y_0, Y_*) \quad (3.48)$$

та

$$A_i(s) = \text{col}(A_{i1}(s), A_{i3}(s)) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (3.49)$$

Задача 6. Мета задачі така сама, як і двох попередніх – стан системи (3.1) вивести в середньоквадратичний окіл значень Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$), визначених у (3.8). Керуючими факторами є $u(s)$, $Y_{r l}^0$ ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$), $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$).

Алгоритм і всі розрахункові співвідношення збігаються з визначеними в попередніх двох задачах. Відмінність – у визначенні вектора \bar{Y} і вектор-функцій $A_i(s)$ ($i = \overline{1,3}$). Вони будуть такими:

$$\bar{Y} \equiv Y_*; A_i(s) \equiv A_{3i}(s) \quad (i = \overline{1,3}).$$

3.2.8. Задачі керування в необмежених просторових, часових і просторово-часових областях

Розглянуті вище задачі з переведення стану $y(s)$ розподіленої просторово-часової системи (3.1) в окіл дискретно визначених співвідношеннями (3.8) значень Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$) можуть бути успішно розв'язані не тільки в обмеженій просторово-

часовій області S_0^T , але й у областях $S_\infty^T = R^n \times [0, T]$, $S_0^\infty = S_0 \times (-\infty, T]$, $S_\infty^\infty = R^n \times (-\infty, \infty)$, необмежених за просторовою, часовою та просторово-часовою координатами, тобто без крайових (3.6), початкових (3.5) і початково-крайових (3.5), (3.6) співвідношень. Останнє впливає на структуру алгебраїчних (3.18)–(3.20) та інтегральних (3.21)–(3.23) рівнянь, що розв'язують задачу. Укажемо на особливості цих рівнянь, виходячи з їхнього зображення у вигляді (3.24) та (3.29), відповідно.

При розв'язанні задач керування в просторово необмеженій області S_∞^T , які зводяться до середньоквадратичного обернення рівнянь (3.24), у векторах \bar{u} та \bar{Y} будуть відсутні їхні другі компоненти, а в матриці A – другий рядок і другий стовпець. Те саме відбуватиметься і з рівняннями (3.29), до середньоквадратичного обернення яких зводяться задачі, одним з керуючих факторів яких є неперервно визначене розподілене просторово-часове керування $u(s)$. У них буде відсутня компонента $u_\Gamma(s)$ вектор-функції $\bar{u}(s)$, компонента Y_Γ вектора \bar{Y} , а також компоненти $A_{2j}(s)$ та $A_{i2}(s)$ ($i, j = \overline{1,3}$) матричної функції $A(s)$. Указані спрощення матимуть місце й у постановці та розв'язках розглядуваних вище задач 1 та 4. Задачі 2, 3, 5, 6 при цьому втрачають сенс.

Аналогічна ситуація виникатиме при розв'язанні задач керування в необмеженій за часом області S_0^∞ . У рівняннях (3.24) та (3.29), які цим задачам відповідають, будуть відсутні компоненти u_0 та $u_0(s)$ вектора \bar{u} та вектор-функції $\bar{u}(s)$, а також перші стовпчики матриці A та матричної функції $A(s)$, які відповідають цим компонентам.

Задачі 1–6 втрачають сенс і при керуванні системою (3.1) у необмеженій просторово-часовій області S_∞^∞ , оскільки розв'язувальні рівняння (3.24) та (3.29) спрощуються до таких:

$$A_{33}u_* = Y_*, \quad (3.50)$$

$$\int_{S_0^T} A_{33}(s)u(s)ds = Y_* . \quad (3.51)$$

Розв'язки ж задач керування вектором u_* та функцією $u(s)$ легко отримати як частинний випадок загального розв'язку рівнянь (3.24), (3.29) або безпосередньо з (3.50), (3.51).

3.3. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з дискретно заданим критерієм і відомою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень

3.3.1. Задачі керування початковими, крайовими та початково-крайовими збурюючими факторами

Продовжимо розгляд задачі керування розподіленим просторово-часовим процесом (3.1) за середньоквадратичним наближенням його стану $y(s)$ ($s \in S_0^T$) до дискретно визначених просторово-часових значень (3.8). На відміну від розглянутого в п. 3.2 припускати, що досліджуваний процес перебігає під впливом відомого просторово-часового збурення $u(s)$. Це означає, що факторами, через які можна цілеспрямовано впливати на процес, є тільки початково-крайові збурюючі фактори

$$Y_{rl}^0 \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}), \quad Y_{pl}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; p = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Ураховуючи взаємну незалежність доступних для реалізації керуючих початково-крайових збурюючих факторів, робимо висновок, що в нашому випадку вони можуть визначатися такими співвідношеннями:

$$\Phi_1 = \left[\sum_{p=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_p^\Gamma (\partial_x) y(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{pl}^\Gamma)^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (L_i (\partial_s) y(s) - Y_{ij})^2 \Big|_{s=s_{ij}} \right] \rightarrow \min_{Y_{rl}^0 \quad (l=\overline{1, L_0}; r=\overline{1, R_0})}; \quad (3.52)$$

$$\Phi_2 = \left[\sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_l)y(s) - Y_{rl}^0)^2 \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_{ij})^2 \Big|_{s=s_{ij}} \right] \rightarrow \min_{Y_{\rho l}^{\Gamma} (l=\overline{1, L_{\Gamma}}; \rho=\overline{1, R_{\Gamma}})};$$

$$\Phi_3 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_{ij})^2 \Big|_{s=s_{ij}} \rightarrow \\ \rightarrow \min_{Y_{\rho l_1}^0, Y_{\rho l_2}^0 (l_1=\overline{1, L_0}; r=\overline{1, R_0}, l_2=\overline{1, L_{\Gamma}}; \rho=\overline{1, R_{\Gamma}})}.$$

Значення $Y_{\rho l}^{\Gamma} (l = \overline{1, L_{\Gamma}}; \rho = \overline{1, R_{\Gamma}})$ у співвідношенні (3.52) та $Y_{rl}^0 (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0})$ – у співвідношенні (3.53), як і $Y_{ij} (j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I})$ у співвідношеннях (3.52)–(3.54), є заданими характеристиками процесу. Заданою будемо вважати і складову $y_{\infty}(s)$ у виразі (3.9), яким визначатимемо функцію стану нашого процесу. Визначатися $y_{\infty}(s)$ може співвідношенням (3.10) або (3.11) залежно від того, неперервно чи дискретно визначена функція $u(s)$. Дві форми зображення можемо вибрати також для складових $y_0(s)$ та $y_{\Gamma}(s)$. Це будуть співвідношення (3.11) при дискретно визначених моделюючих факторах $u_{0m} (m = \overline{1, M_0})$, $u_{\Gamma m} (m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ або співвідношення (3.12) при неперервно визначених моделюючих факторах (функції $u_0(s)$ та $u_{\Gamma}(s)$). Визначення (див. нижче) цих факторів дозволить згідно з (3.9) знайти $y(s)$, а згідно з (3.5), (3.6) – і шукані значення керуючих початково-крайових факторів.

3.3.2. Випадок дискретно визначених моделюючих факторів

Зупинимося на задачі пошуку моделюючих векторів

$$u_0 = \text{col}(u_{0m}, m = \overline{1, M_0}),$$

$$u_{\Gamma} = \text{col}(u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_{\Gamma}}),$$

які б із врахуванням (3.9) розв'язували задачі (3.52)–(3.54). Розв'язувальні системи зі знаходження цих векторів для за-

дач (3.52)–(3.54) у межах позначень, уведених у п. 3.2, запишемо у вигляді

$$A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \bar{Y}, \quad (3.55)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_\Gamma \\ \bar{Y}_* \end{pmatrix}$$

для задачі (3.52);

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{Y}_* \end{pmatrix}$$

– для задачі (3.53);

$$A = (A_{31} \quad A_{32}), \quad \bar{Y} = (\bar{Y}_*)$$

– для задачі (3.54) з доповненням (3.25);

$$\bar{Y}_0 = Y_0 - \text{col}((L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)) \Big|_{x=s_l^0, l=\overline{1, L_0}, r=\overline{1, R_0}}),$$

$$\bar{Y}_\Gamma = Y_\Gamma - \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)) \Big|_{s=s_l^\Gamma, l=\overline{1, L_\Gamma}, \rho=\overline{1, R_\Gamma}}), \quad (3.56)$$

$$\bar{Y}_* = Y_* - \text{col}((L_i(\partial_s)y_\infty(s)) \Big|_{s=s_{ij}, j=\overline{1, J_i}, i=\overline{1, I}}).$$

Звідси аналогічно (3.27) знаходимо

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \arg \min_{u_0, u_\Gamma} \left\| A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix} - \bar{Y} \right\|^2 = A^T P_1^+ \left(\bar{Y} - A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

для $\forall v_0 \in R^{M_0}$, $v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$ при $P_1 = A A^T$.

Як показано вище, знайдені згідно з (3.57) u_0 та u_Γ дозволяють (згідно з (3.9)) знайти функцію стану розглядуваного процесу, а також (згідно з (3.5), (3.6)) керуючі фактори Y_{rl}^Γ ($l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}$) та $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$) для задач (3.52)–(3.54). При цьому

$$\min \Phi_i(u_0, u_\Gamma) = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}$$

відповідно для $i = \overline{1, 3}$.

3.3.3. Випадак неперервно визначених моделюючих факторів

Запишемо розв'язувальні рівняння для пошуку моделюючих факторів $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, через які згідно з (3.9), (3.10) знайдемо функцію $y(s)$ розглядуваного процесу для задач (3.52)–(3.54), а отже, і керуючі фактори Y_n^Γ ($l = \overline{1, L_0}$; $r = \overline{1, R_0}$) та $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), які ці задачі розв'язують. Залишаючись у межах позначень п. 3.2.4, запишемо ці рівняння у вигляді

$$\int_{S^0} A_1(s)u_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)u_\Gamma(s)ds = \bar{Y}, \quad (3.58)$$

де для задачі (3.52)

$$A_1(s) = \begin{pmatrix} A_{21}(s) \\ A_{31}(s) \end{pmatrix}; A_2(s) = \begin{pmatrix} A_{22}(s) \\ A_{32}(s) \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_\Gamma \\ \bar{Y}_* \end{pmatrix},$$

для задачі (3.53)

$$A_1(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) \\ A_{31}(s) \end{pmatrix}; A_2(s) = \begin{pmatrix} A_{12}(s) \\ A_{32}(s) \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{Y}_* \end{pmatrix},$$

для задачі (3.54)

$$A_1(s) = A_{31}(s); A_2(s) = A_{32}(s); \bar{Y} = \bar{Y}_*,$$

а \bar{Y}_0 , \bar{Y}_Γ та \bar{Y}_* збігаються з визначеними в (3.56). Звідси

$$\begin{pmatrix} u_0(s) \\ u_\Gamma(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T(s) \\ A_2^T(s) \end{pmatrix} P^+ (\bar{Y} - A_v) + \begin{pmatrix} v_0(s) \\ v_\Gamma(s) \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

де

$$P = \int_{S^0} A_1(s) A_1^T(s) ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s) A_2^T(s) ds,$$

$$A_v = \int_{S^0} A_1(s) v_0(s) ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s) v_\Gamma(s) ds.$$

Точність моделювання знайденими згідно з (3.59) функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ крайового (у задачі (3.52)) і початкового (у задачі (3.53)) збурень (3.6) та (3.5) і досягнення функцією $y(s)$ стану

досліджуваного процесу значень Y_{ij} ($j = \overline{1, J_i}; i = \overline{1, I}$) (у задачах (3.52)–(3.54)) визначатимемо величинами Φ_i ($i = \overline{1, 3}$) такими, що

$$\min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \Phi_i = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}$$

у межах прийнятих вище позначень.

3.3.4. Особливості розв'язання задач у необмеженій просторовій області та на необмеженому часовому інтервалі

Задачі керування системою (3.1) з умовами, заданими співвідношенням (3.5), (3.6), можуть мати місце у просторово та часово необмежених областях. На відміну від спектра задач, розглянутих у п. 3.2.8, у нашому випадку їх буде тільки дві. Перша – це керування системою (3.1), (3.8) у необмеженій просторовій області дискретно визначеним згідно з (3.5) початковим станом системи. Друга – керування тією самою системою за відсутності початкових збурень (3.5) через дискретно (згідно з (3.6)) визначений набір граничних керувань.

Керуючий початковий (задача 1) і крайовий (задача 2) стани процесу в цьому випадку визначатимуться через функції

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s)$$

та

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s)$$

співвідношеннями (3.5) та (3.6), відповідно. При цьому

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) u_{0m}; \quad y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) u_{\Gamma m},$$

а

$$\text{col}(u_{0m}, m = \overline{1, M_0}) = A_{31}^T (A_{31} A_{31}^T)^+ (\bar{Y}_* - A_{31} v_0) + v_0 \quad \forall v_0 \in R^{M_0},$$

$$\text{col}(u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma}) = A_{32}^T (A_{32} A_{32}^T)^+ (\bar{Y}_* - A_{32} v_\Gamma) + v_\Gamma \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$$

або

$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s - s') u_0(s') ds', \quad y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s - s') u_\Gamma(s') ds',$$

а

$$u_0(s) = A_{31}^T(s)P_1^+(\bar{Y}_* - A_{v_1}) + v_0(s),$$

$$u_\Gamma(s) = A_{32}^T(s)P_2^+(\bar{Y}_* - A_{v_2}) + v_\Gamma(s)$$

для

$$P_1 = \int_{S^0} A_{31}(s)A_{31}^T(s)ds, \quad A_{v_1} = \int_{S^0} A_{31}(s)v_0(s)ds,$$

$$P_2 = \int_{S^\Gamma} A_{32}(s)A_{32}^T(s)ds, \quad A_{v_2} = \int_{S^\Gamma} A_{32}(s)v_\Gamma(s)ds.$$

3.4. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з неперервно за просторово-часовими координатами визначеним критерієм та керуючою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень

3.4.1. Задачі керування розподіленим просторово-часовим збуренням

Продовжимо розгляд питань керування розподіленим в області S_0^T просторово-часовим процесом

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \quad (3.60)$$

початково-крайовий стан якого, на відміну від (3.5), (3.6), визначається співвідношеннями (див. (3.3), (3.4))

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x \in S_0, r = \overline{1, R_0}), \quad (3.61)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (t \in [0, T], \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (3.62)$$

Розглянемо задачу побудови функції $u(s)$ (однієї або в комбінації з функціями $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$)), яка б визначала стан $y(s)$ досліджуваного процесу так, щоб виконувалося одне зі співвідношень:

$$L_{iT}(\partial_s)y(s)\Big|_{t=t_i} = Y_{Ti}(x) \quad (x \in S^* \subseteq S_0, t_i \in [0, T], i = \overline{1, I}); \quad (3.63)$$

$$L_{iX}(\partial_s)y(s)\Big|_{x=x_i} = Y_{Xi}(t) \quad (t \in [0, T], x_i \in S_0, i = \overline{1, I}); \quad (3.64)$$

$$L_{iT}(\partial_s)y(s)\Big|_{t=T} = Y_{Ti}(x) \quad (i = \overline{1, I}); \quad (3.65)$$

$$L_{iX}(\partial_s)y(s)\Big|_{t=X} = Y_{Xi}(t) \quad (X \in S_0, i = \overline{1, I}); \quad (3.66)$$

$$L_i(\partial_s)y(s)\Big|_{s \in S} = Y_i(s) \quad (S \subseteq S_0, i = \overline{1, I}). \quad (3.67)$$

Оскільки методичне розв'язання розглядуваних задач для цих випадків збігається, то при розв'язанні задачі керування можна виходити з однієї з умов (3.63)–(3.67). З урахуванням цього детально розглянемо методику розв'язання задачі (3.60)–(3.62) з умовою керування у формі (3.67) як найзагальнішою з фізичного погляду.

Зупинимось на проблемах керування системою (процесом) (3.60) для досягнення її функцією стану $y(s)$ значень $Y_i(s)$ в області S_0^T . Для початку (як і в п. 3.2) розглянемо випадок керування зазначеною системою через функцію розподілення у S_0^T просторово-часових збурень $u(s)$ за відомих функцій $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) початково-крайових збурюючих факторів. При цьому будемо вимагати, щоб

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 dx dt + \\ & + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{u(s)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

або, що еквівалентно,

$$\Phi \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (3.69)$$

3.4.2. Розв'язувальна система рівнянь

При розв'язанні задачі моделювання динаміки системи (3.60)–(3.62), розглянутої нами в п. 2.4, неперервно розподілені початково-крайові збурення $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) моделювалися векторами

$$u_0 = \text{col}(u_{0m}, m = \overline{1, M_0}) \quad (3.70)$$

та

$$u_\Gamma = \text{col}(u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma}) \quad (3.71)$$

дискретно заданих значень $u_{0m} = u_0(s_m^0)$ ($s_m^0 \in S^0$) та $u_{\Gamma m} = u_\Gamma(s_m^\Gamma)$ ($s_m^\Gamma \in S^\Gamma$) моделюючих функцій $u_0(s)$ і $u_\Gamma(s)$, відповідно.

Для розв'язання задачі (3.60)–(3.62), доповненої умовою (3.67), систему (3.70), (3.71) моделюючих векторів u_0 та u_Γ доповнимо (як і в п. 3.2) вектором

$$u_* = \text{col}(u_m, m = \overline{1, M}) \quad (3.72)$$

значень $u_m = u(s_m)$ керуючої функції $u(s)$, що дозволить стан $u(s)$ досліджуваного процесу подати співвідношеннями (3.9)–(3.11). З урахуванням (3.61), (3.62) проблему розв'язання задачі (3.69) зведемо до задачі середньоквадратичного обернення такої системи лінійних функціональних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0)u_{0m} \Big|_{t=0} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma)u_{\Gamma m} \Big|_{t=0} + \quad (3.73)$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_r^0(\partial_t)G(s - s_m)u_m \Big|_{t=0} = Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0};$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0)u_{0m} \Big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma)u_{\Gamma m} \Big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} + \quad (3.74)$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m)u_m \Big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t), \rho = \overline{1, R_\Gamma};$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_i(\partial_s)G(s-s_m^0)u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_i(\partial_s)G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^M L_i(\partial_s)G(s-s_m)u_m = Y_i(s), i = \overline{1, I}. \quad (3.75)$$

3.4.3. Множини керуюче-моделюючих факторів

Розглянемо задачу побудови вектора

$$\bar{u} = \text{col}(u_0, u_\Gamma, u_*)$$

керуюче-моделюючих факторів досліджуваної системи, який середньоквадратично задовольняє рівняння (3.73)–(3.75). Для цього останні (аналогічно розглянутому в п. 2.4) зведемо до вигляду

$$B(s)\bar{u} = \bar{Y}(s), \quad (3.76)$$

де

$$\bar{Y}(s) = \text{col}(Y_0(x) (x \in S_0), Y_\Gamma(s) (s \in \Gamma \times [0, T]), Y(s) (s \in S_0^T)),$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(x)(x \in S_0) & B_{12}(x)(x \in S_0) & B_{13}(x)(x \in S_0) \\ B_{21}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{22}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{23}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) \\ B_{31}(s)(s \in S_0^T) & B_{32}(s)(s \in S_0^T) & B_{33}(s)(s \in S_0^T) \end{pmatrix}$$

при

$$Y_0(x) = \text{col}(Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma(s) = \text{col}(Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$Y(s) = \text{col}(Y_i(s), i = \overline{1, I});$$

$$B_{11}(x) = \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{12}(x) = \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{13}(x) = \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m)|_{t=0}, m = \overline{1, M}), r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{21}(s) = \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0), m = \overline{1, M_0}), \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{22}(s) = \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{23}(s) = \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m), m = \overline{1, M}), \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{31}(s) = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^0), m = \overline{1, M_0}), i = \overline{1, I});$$

$$B_{32}(s) = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), i = \overline{1, I});$$

$$B_{33}(s) = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m), m = \overline{1, M}), i = \overline{1, I}).$$

Побудуємо розв'язок \bar{u} системи рівнянь (3.76) такий, щоб

$$\bar{u} = \arg \min_u \int_{(\bullet)} \|B(s)u - \bar{Y}(s)\|^2 ds, \quad (3.77)$$

де інтегрування виконуватимемо по області зміни аргументу s матричної функції $B(s)$ і векторної функції $\bar{Y}(s)$.

Грунтуючись на методиці середньоквадратичного обернення лінійних функціональних рівнянь, викладеній у п. 1.4, аналогічно отриманому в п. 2.4.2 розв'язок задачі (3.76), (3.77) запишемо у вигляді

$$\bar{u} \in \Omega_u = \left\{ u : u = P^+ B_y + v - P^+ P v \quad \forall v \in R^{M_0 + M_\Gamma + M} \right\}, \quad (3.78)$$

де

$$P = \left[P_{ij} \right]_{i,j=1}^{i,j=3}, \quad B_y = \text{col}(B_{yi}, i = \overline{1, 3}), \quad (3.79)$$

а

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) B_{2j}(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds;$$

$$B_{yj} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) Y_0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) Y_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds.$$

Із (3.78) за аналогією з (2.57), (2.58) знайдемо вектори

$$\begin{aligned} u_0 &= Q_1(B_y - P v) + v_0, \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \\ u_\Gamma &= Q_2(B_y - P v) + v_\Gamma, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \\ u_* &= Q_3(B_y - P v) + v_*, \quad \forall v_* \in R^M, \end{aligned} \quad (3.80)$$

у яких

$$\begin{aligned} \text{col}(v_0, v_\Gamma, v_*) &= v; \\ \text{col}(Q_1, Q_2, Q_3) &= P^+. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Зауважимо, що для знайдених згідно з (3.79) векторів u_0 , u_Γ , u_*

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u} \in \Omega_u} \Phi = & \int_{S_0} (Y_0(x))^T Y_0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} (Y_\Gamma(s))^T Y_\Gamma(s) ds + \\ & + \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \end{aligned} \quad (3.82)$$

При цьому $v_0 = v_\Gamma = v_* \equiv 0$, якщо

$$\det P > 0. \quad (3.83)$$

3.4.4. Задача керування за участю початково-крайових керуючих факторів

За аналогією з розглянутим у п. 3.2.5 зупинимося на особливостях розв'язання задачі середньоквадратичного згідно з (3.69) наближення функції $y(s)$ досліджуваної системи до визначених у (3.67) значень $Y_i(s)$ за умови, що керування виконується вектором u_* розподілених просторово-часових збурень разом із:

- початковими збурюючими факторами $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) за відомих $Y_\rho^\Gamma(x, t)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) (задача 1);
- крайовими збурюючими факторами $Y_\rho^\Gamma(x, t)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) за відомих $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) (задача 2);
- початково-крайовими збурюючими факторами $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(x, t)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) (задача 3).

При цьому виходитимемо з того, що шукані функції $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(x, t)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) співвідношеннями (3.61) та (3.62) визначаються через функцію $y(s)$.

Для знаходження $y(s)$, як і вище, будемо виходити з її зображення (3.9), (3.11), де u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) – компоненти векторів u_0 та u_Γ , якими згідно з (3.69) моде-

люються як відомі, так і керуючі початково-крайові збурюючі фактори. Вектор

$$\bar{u} = \text{col}(u_0, u_\Gamma, u_*)$$

визначених таким чином керуюче-моделюючих факторів знайдемо із записаної з урахуванням особливостей кожної з трьох названих вище задач системи функціональних рівнянь (3.73)–(3.75) або (що еквівалентно) системи (3.76).

Задача 1. У системі (3.76) відсутній блок рівнянь, пов'язаний зі співвідношеннями (3.73), а

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{21}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{22}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{23}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) \\ B_{31}(s)(s \in S_0^T) & B_{32}(s)(s \in S_0^T) & B_{33}(s)(s \in S_0^T) \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Визначатимемо u_0, u_Γ, u_* згідно з (3.80) з урахуванням того, що в цьому випадку

$$P = \left[P_{ij} \right]_{i,j=1}^{i,j=3}, \quad B_y = \text{col}(B_{yi}, i = \overline{1,3}), \quad (3.85)$$

а

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) B_{2j}(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds; \\ B_{yi} &= \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) Y_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds, \\ \min_{u_0, u_\Gamma, u_*} & \left[\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s) y(s) - Y_i(s))^2 ds \right] = \\ & = \int_{\Gamma \times [0, T]} (Y_\Gamma(s))^T Y_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Задача 2. У системі (3.76) відсутній блок рівнянь, який впливає з (3.74), унаслідок чого

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{1i}(x) (x \in S_0), i = \overline{1,3} \\ B_{3i}(s) (s \in S_0^T), i = \overline{1,3} \end{pmatrix}.$$

Вектор \bar{u} керуюче-моделюючих факторів визначатимемо співвідношеннями (3.78) або, що еквівалентно, (3.80), у яких за визначених згідно з (3.79) матриці P та вектора B_y

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds;$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) Y_0(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds,$$

$$\begin{aligned} \min_{u_0, u_\Gamma, u} & \left[\sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_i) y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \right. \\ & + \sum_{i=1}^l \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s) y(s) - Y_i(s))^2 ds = \end{aligned} \quad (3.87) \\ & = \int_{S_0} (Y_0(x))^T Y_0(x) dx + \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \end{aligned}$$

Задача 3. Система (3.76), що розв'язує задачу, спрощується до вигляду

$$(B_{31}(s), B_{32}(s), B_{33}(s)) \bar{u} = Y(s). \quad (3.88)$$

Середньоквадратичне наближення до розв'язку системи (3.88) знову знайдемо з (3.78), (3.80), урахувавши формули

$$P_{ij} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds;$$

$$B_{yi} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds,$$

а

$$\begin{aligned} \min_{u_0, u_\Gamma, u_*} \sum_{i=1}^l \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s) y(s) - Y_i(s))^2 ds = \\ = \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \end{aligned}$$

Зауважимо, що розв'язки всіх трьох задач однозначні ($v_0 = v_\Gamma = v_* \equiv 0$ у співвідношеннях (3.80)), якщо при визначеній для кожної задачі матриці P

$$\det P^T P > 0.$$

3.4.5. Задачі керування в необмежених просторових, часових і просторово-часових областях

Отримані вище розв'язки розглядуваних задач спрощуються, якщо впливом початкових (3.61), крайових (3.62) або початково-крайових (3.61)–(3.62) умов на стан $y(s)$ досліджуваного процесу знехтувати, а сам процес досліджувати в необмеженій просторовій, часовій чи просторово-часовій області, відповідно. Останнє означає, що в системі співвідношень (3.60)–(3.63), які описують задачу, будуть відсутні співвідношення (3.61) (вплив початкових умов несуттєвий), (3.62) (вплив крайових умов несуттєвий) або (3.61), (3.62) (вплив початково-крайових умов несуттєвий). Співвідношення (3.63) обов'язкове – це мета розв'язуваної задачі.

З урахуванням сказаного функцію стану нашого процесу в кожному з трьох зазначених випадків подамо співвідношеннями

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s), \quad (3.89)$$

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s), \quad (3.90)$$

$$y(s) = y_\infty(s), \quad (3.91)$$

складові $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$, та $y_\infty(s)$ яких, як і раніше, визначаються згідно з (3.11) і описують вплив початкових, крайових і розподілених просторово-часових збуджуючих (керуючих) факторів на стан системи. Вектори u_0 та u_Γ , якими згідно з (3.11) моделюється вплив початково-крайових збуджуючих факторів, і вектор u_* , який у даних задачах завжди є керуючим, знаходимо зі співвідношень (3.74), (3.75) (необмежена часова область), (3.73),

(3.75) (необмежена просторова область) або тільки (3.75) (необмежена просторово-часова область).

Запишемо результати середньоквадратичного обернення цих співвідношень у термінах рівняння (3.76), до якого всі вони зводяться, для деяких задач керування системою (3.60) в областях, що розглядаються.

Задача 1. Стан $Y_i(s)$ ($s \in S_0^T$) (співвідношення (3.67)) досягається станом $y(s)$ системи (3.60), яка функціонує в області $S_0^\infty = S_0 \times (-\infty, T]$ при заданих $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($s \in \Gamma \times [0, T]$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) і невідомій $u(s)$ ($s \in S_0^T$) так, щоб

$$\Phi_\Gamma = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_u. \quad (3.92)$$

Задача знаходження вектора $\bar{u} = \text{col}(u_\Gamma, u_*)$ керуюче-моделюючих факторів зведеться до середньоквадратичного обернення системи (3.76), у якій тепер

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{22}(s) & B_{23}(s) \\ B_{32}(s) & B_{33}(s) \end{pmatrix}, \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_\Gamma(s) \\ Y(s) \end{pmatrix}.$$

Компоненти u_Γ та u_* керуюче-моделюючого вектора \bar{u} в цьому випадку визначатимуться співвідношеннями (3.80), у яких

$$P = \begin{pmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, B_y = \begin{pmatrix} B_{y2} \\ B_{y3} \end{pmatrix}, P^+ = \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

$$P_{ij} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) B_{2j}(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds;$$

$$B_{yi} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) Y_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds.$$

При цьому

$$\min_{u_*} \Phi_\Gamma = \int_{\Gamma \times [0, T]} (Y_\Gamma(s))^T Y_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \quad (3.94)$$

Задача 2. Для системи (3.60), яка функціонує в просторово-часовій області S_0^∞ , знайти вектор u_* розподілених просторово-часових збурень і функцій $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($s \in \Gamma \times [0, T]$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), які стан системи наближали б до заданого функціями $Y_i(s)$ ($s \in S_0^T$) так, щоб

$$\Phi = \sum_{i=1}^l \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s) y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{\bar{u}, Y_\rho^\Gamma (\rho=\overline{1, R_\Gamma})}. \quad (3.95)$$

Керуючі збурення $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) задачі (3.95) знайдемо з (3.62) після підстановки (3.90) з урахуванням (3.11) і того, що керуюче-моделюючий вектор $\bar{u} = \text{col}(u_\Gamma, u_*)$ визначиться після середньоквадратичного обернення рівняння (3.76), у якому

$$B(s) = (B_{32}(s) \quad B_{33}(s)), \quad \bar{Y}(s) = Y(s).$$

Як і в попередній задачі, вектори u_Γ та u_* знайдемо згідно з (3.80), де матриці P , P^+ та вектор B_y визначатимуться співвідношеннями (3.93) при

$$P_{ij} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds, \quad (3.96)$$

$$B_{yi} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds.$$

Точність розв'язку задачі визначатиметься величиною

$$\min_{\bar{u}, Y_\rho^\Gamma (\rho=\overline{1, R_\Gamma})} \Phi_\Gamma = \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \quad (3.97)$$

Задача 3. Значення $Y_i(s)$ ($s \in S_0^T$) досягаються станом $y(s)$ системи (3.60), яка функціонує в області $S_0^T = R^n \times [0, T]$ при

заданих $Y_r^0(x)$ ($x \in S_0$; $r = \overline{1, R_0}$) і невідомій $u(s)$ ($s \in S_0^T$) так, щоб

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s) y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{u_*} \quad (3.98)$$

Задача знаходження вектора $\bar{u} = \text{sol}(u_0, u_*)$ керуюче-модельючих факторів, як і раніше, зведеться до середньоквадратичного обернення системи (3.76), у якій

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(s) & B_{13}(s) \\ B_{31}(s) & B_{33}(s) \end{pmatrix}, \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_0(s) \\ Y(s) \end{pmatrix}.$$

Результат такого обернення отримаємо з (3.80), покладаючи

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{pmatrix}, B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y3} \end{pmatrix}, P^+ = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds,$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) Y_0(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) Y(s) ds.$$

При цьому

$$\min_{u_*} \Phi_0 = \int_{S_0} (Y_0(x))^T Y_0(x) dx + \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \quad (3.100)$$

Задача 4. Для системи (3.60), яка функціонує в просторово-часовій області $S_0^T = R^n \times [0, T]$, знайти вектор u_* розподілених просторово-часових збурень і функції $Y_r^0(x)$ ($x \in S_0$; $r = \overline{1, R_0}$), які стан системи наближали б до заданого функціями $Y_i(s)$ ($s \in S_0^T$; $i = \overline{1, I}$) так, щоб при Φ , визначеному згідно з (3.95),

$$\Phi \rightarrow \min_{u_*, Y_r^0(x) (r=\overline{1, R_0})} \quad (3.101)$$

Керуючі збурення $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) задачі (3.101) знайдемо з (3.61) після підстановки (3.90) з урахуванням (3.11) і того, що керуюче-моделюючий вектор $\bar{u} = \text{col}(u_0, u_*)$ визначиться після середньоквадратичного обернення рівняння (3.76), у якому

$$B(s) = (B_{31}(s) \quad B_{33}(s)), \quad \bar{Y}(s) = Y(s).$$

Як і в попередній задачі, вектори u_0 та u_* знайдемо згідно з (3.80) з урахуванням визначень (3.99).

Задача 5. Для системи (3.60), яка функціонує в необмеженій просторово-часовій області $S_0^T = R^n \times (-\infty, T]$, визначити вектор u_* згідно з критерієм

$$\Phi \rightarrow \min_{u_*} \quad (3.102)$$

при Φ , узятому згідно з (3.95).

Функціональне рівняння (3.76), з якого знаходимо шуканий вектор u_* , спростуємо в даній задачі до :

$$B_{33}(s)u_* = Y(s).$$

Звідси розв'язок задачі (3.102)

$$u_* = P^+(B_y - Pv) + v, \quad \forall v \in R^M, \quad (3.103)$$

де

$$P = \int_{S_0^T} B_{33}^T(s) B_{33}(s) ds, \quad B_y = \int_{S_0^T} B_{33}^T(s) Y(s) ds.$$

При цьому

$$\min_{u_*} \Phi = \int_{S_0^T} (Y(s))^T Y(s) ds - B_y^T P^+ B_y.$$

Зауважимо, що однозначність розв'язків розглянутих вище задач визначається умовою

$$\det P > 0$$

з урахуванням визначення матриці P для кожної окремої задачі.

3.5. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з неперервно визначеним критерієм і відомою функцією зовнішньодинамічних збурень

3.5.1. Задачі керування початковими, крайовими та початково-крайовими збурюючими факторами

Продовжимо розгляд задачі керування розподіленим просторово-часовим процесом (3.60)–(3.62) за середньоквадратичним наближенням його стану $y(s)$ ($s \in S_0^T$) до значень, визначених згідно з (3.67) функціями $Y_i(s)$ ($s \in S_0^T$; $i = \overline{1, I}$). На відміну від розглянутого в п. 3.4, будемо вважати, що розподілені зовнішньодинамічні збурення $u(s)$ ($s \in S_0^T$) відомі, а доступними для керування процесом, що розглядається, є функції $Y_r^0(x)$ ($x \in S_0$; $r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($s \in \Gamma \times [0, T]$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) початково та гранично визначених збурюючих факторів.

Ураховуючи, що доступні для реалізації керуючі функції $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) незалежні, розглянемо такі задачі їхнього визначення:

$$\Phi_1 = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{Y_r^0(x) (r=\overline{1, R_0})}, \quad (3.104)$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{Y_\rho^\Gamma(x, t) (\rho=\overline{1, R_\Gamma})}, \quad (3.105)$$

$$\Phi_3 = \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{\substack{Y_r^0(x) Y_\rho^\Gamma(x,t) \\ (r=1, R_0, \rho=1, R_\Gamma)}} . \quad (3.106)$$

Зауважимо, що функції $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) у співвідношенні (3.104) та $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) – у співвідношенні (3.105), як і функції $Y_i(s)$ у співвідношеннях (3.104)–(3.106), відомі. Відомою також є складова $y_\infty(x)$ функції стану

$$y(s) = y_0(s) + u_\Gamma(s) + y_\infty(s) \quad (3.107)$$

процесу, що розглядається. Її, залежно від визначеності функції $u(s)$, за аналогією з розглянутим вище подамо співвідношенням

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s - s_m) u_m \quad (3.108)$$

або

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s - s') u(s') ds' . \quad (3.109)$$

Складові $y_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ визначимо співвідношеннями (3.11).

Якщо вважати, що специфіка початково-крайових збурень $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) визначена співвідношеннями (3.61) та (3.62), то процедура розв'язання задач (3.104)–(3.106) зведеться до знаходження моделюючого вектора $\bar{u} = \text{sol}(u_0, u_\Gamma)$, який розглядався в п. 3.3.

3.5.2. Керуюче-моделюючі вектори задачі

Запишемо розв'язувальні системи рівнянь відносно u_0 , u_Γ та побудуємо їх розв'язки для сформульованих вище задач (3.104)–(3.106). Як і в п. 3.4, ці системи зведемо до вигляду

$$B(s) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \tilde{Y}(s) . \quad (3.110)$$

У термінах, визначених вище, маємо, що

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{21}(s) & B_{22}(s) \\ B_{31}(s) & B_{32}(s) \end{pmatrix}, \tilde{Y}(s) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_\Gamma(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

для задачі (3.104),

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{31}(s) & B_{32}(s) \end{pmatrix}, \tilde{Y}(s) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0(x) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

для задачі (3.105) і

$$B(s) = (B_{31}(s) \ B_{32}(s)), \tilde{Y}(s) = \bar{Y}(s) \quad (3.113)$$

для задачі (3.106). При цьому на доповнення до визначених у (3.76) $Y_0(x)$, $Y_\Gamma(s)$ та $Y(s)$ уведемо до розгляду

$$\bar{Y}_0(x) = Y_0(x) - \text{col}(L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$\bar{Y}_\Gamma(s) = Y_\Gamma(s) - \text{col}(L_p^\Gamma(\partial_s)y_\infty(s), p = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\bar{Y}(s) = Y(s) - \text{col}(L_i(\partial_s)y_\infty(s), i = \overline{1, I}).$$

Із (3.110) за аналогією з (3.78), (3.80) з урахуванням (3.111)–(3.113) отримуємо:

$$u_0 = Q_1(B_y - Pv) + v_0, \forall v \in R^{M_0+M_\Gamma}, \forall v_0 \in R^{M_0}, \quad (3.114)$$

$$u_\Gamma = Q_2(B_y - Pv) + v_\Gamma, \forall v \in R^{M_0+M_\Gamma}, \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \quad (3.115)$$

де

$$P = [P_{ij}]_{\substack{i,j=2 \\ i,j=1}}, B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix}, P^+ = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

а

$$P_{ij} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) B_{2j}(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds,$$

$$B_{yi} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(s) \bar{Y}_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) \bar{Y}(s) ds$$

для задачі (3.104);

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds,$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) \bar{Y}_0(x) dx + \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) \bar{Y}(s) ds$$

для задачі (3.105):

$$P_{ij} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3j}(s) ds, \quad B_{yi} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) \bar{Y}(s) ds$$

для задачі (3.106).

Точність моделювання знайденими згідно з (3.114) та (3.115) векторами u_0 та u_Γ крайового в задачі (3.104) і початкового в задачі (3.105) збурень (3.61) та (3.62), відповідно, а також досягнення функцією $y(s)$ стану досліджуваного процесу значень Y_i ($i = \overline{1, I}$) у задачах (3.104)–(3.106) визначається величинами Φ_i ($i = \overline{1, 3}$). При цьому

$$\min_{u_0, u_\Gamma} \Phi_1 = \int_{\Gamma \times [0, T]} (\bar{Y}_\Gamma(s))^T \bar{Y}_\Gamma(s) ds + \int_{S_0^T} (\bar{Y}(s))^T \bar{Y}(s) ds - B_y^T P^+ B_y, \quad (3.116)$$

$$\min_{u_0, u_\Gamma} \Phi_2 = \int_{S_0} (\bar{Y}_0(x))^T \bar{Y}_0(x) dx + \int_{S_0^T} (\bar{Y}(s))^T \bar{Y}(s) ds - B_y^T P^+ B_y, \quad (3.117)$$

$$\min_{u_0, u_\Gamma} \Phi_3 = \int_{S_0^T} (\bar{Y}(s))^T \bar{Y}(s) ds - B_y^T P^+ B_y. \quad (3.118)$$

Однозначність моделювання визначається умовою $\det P > 0$.

3.5.3. Особливості розв'язання задач у необмеженій просторовій області та на необмеженому часовому інтервалі

Розглянуті вище задачі (3.104)–(3.106) керування системою (3.60) початковими (3.61) і крайовими (3.62) керуючими факторами за відомої функції $u(s)$ розподілених просторово-часових збурень спрощуються, якщо знехтувати впливом крайових (у задачі (3.104)) і початкових (у задачі (3.105)) збурюючих факторів. Розглядаючи задачу (3.104) у необмеженій просторовій об-

ласті, а задачу (3.105) – на необмеженому часовому інтервалі, будемо вимагати, щоб у задачах (3.104)–(3.105)

$$\Phi_3 \rightarrow \min_{Y_r^0(x), (r=\overline{1, R_0})}, \Phi_3 \rightarrow \min_{Y_\rho^\Gamma(s), (\rho=\overline{1, R_\rho})}. \quad (3.119)$$

Відповідно при цьому

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s), \quad (3.120)$$

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (3.121)$$

Ураховуючи, що керуючі фактори $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) задач (3.119) згідно з (3.61), (3.62) виражаються визначеною співвідношеннями (3.120)–(3.121) функцією $y(s)$, а остання – співвідношеннями (3.9), (3.11) через вектори u_0 та u_Γ , запишемо аналітичні залежності цих векторів для задач (3.104), (3.105):

$$u_0 = P_1^+(B_{y_1} - P_1 v_0) + v_0, \quad \forall v_0 \in R^{M_0}$$

для задачі (3.104),

$$u_\Gamma = P_2^+(B_{y_2} - P_2 v_\Gamma), \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$$

для задачі (3.105), де

$$P_i = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) B_{3i}(s) ds,$$

$$B_{y_i} = \int_{S_0^T} B_{3i}^T(s) \bar{Y}(s) ds \quad (i = \overline{1, 2}).$$

Зауважимо, що $v_0 \equiv 0$ та $v_\Gamma \equiv 0$ при $\det P_1 > 0$ та $\det P_2 > 0$, відповідно.

4. Лабораторні тестування розв'язків задач математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем

Формулюються проблеми тестування алгоритмів і методів математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем у лабораторних умовах. Обговорюються вимоги до структури й особливостей програмної реалізації моделюючого комплексу для тестування розв'язків прямих та обернених задач динаміки просторово розподілених систем. Даються рекомендації для побудови інтерфейсного, логіко-математичного та графічного забезпечення програмно-моделюючого комплексу. Наводяться ілюстративні приклади побудованих раніше програмних комплексів, а також посилання на друковані джерела, де такі комплекси та результати їх роботи описані.

4.1. Проблеми математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем у лабораторних умовах

Реферативно викладені вище алгоритми математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем прості для реалізації, надійні й дозволяють досліджувати розподілені просторово-часові процеси різної природи як у прямій, так і в оберненій постановках, як при коректній постановці початково-крайової задачі, так і в умовах її некоректності за кількістю та якістю спостережень за початково-крайовим станом. Наведені алгоритми легко реалізуються в межах лабораторних робіт студентами старших курсів технічних спеціальностей різних ВНЗ України.

При дослідженні справжніх просторово-часових процесів шляхом реалізації розглянутих алгоритмів і методик вхідною інформацією для програмних реалізацій є реальні, узгоджені з процесом і зовнішньодинамічними умовами, у яких вони перебігають, спостереження. І якщо дослідник, поставлений перед фактом використання таких процесів, повинен дати (і дасть)

ствердну відповідь постановнику задачі, то в лабораторних умовах усе значно складніше – немає ні процесу, ні узгодженої інформації про його перебіг. Тому при тестуванні алгоритмів і методик розв'язання розглянутих вище задач необхідно вибрати математичну модель для певного процесу, побудувати передатну функцію $G(s - s')$, визначитися з областю перебігу процесу, узгоджено задати зовнішньодинамічні умови, за яких процес має відбуватися, і організувати спостереження за ним.

Для того, щоб уся інформація про процес була узгоджена, у лабораторних умовах потрібно:

- вибрати математичну модель процесу через оператор $L(\partial_s)$;
- побудувати або вибрати відповідну до оператора $L(\partial_s)$ передатну функцію $G(s - s')$ – для класичних просторово-часових процесів така функція побудована;
- визначити область S_0^T дослідження процесу;
- задати функцію $y(s)$ динаміки процесу з урахуванням його природи, області та умов перебігу;
- з використанням вибраного $y(s)$ і диференціального оператора $L(\partial_s)$ математичної моделі визначитися з функцією $u(s)$ просторово розподілених зовнішньодинамічних збурень (для задач, де ця функція вважається відомою);
- з використанням заданого $y(s)$ з імітацією шуму та похибок, які показують датчики спостереження за процесом, сформулювати початково-крайові та поточні (якщо вони є) спостереження й визначитися з бажаним станом процесу в задачах керування ним.

Зауважимо, що розглянуті нами алгоритми й методи розв'язання задач математичного моделювання стану розподілених просторово-часових систем і керування ними працюватимуть і за неузгодженості інформації про умови функціонування процесу та спостереження за ним, однак бажано, щоб тестування розв'язків розглянутих вище задач виконувалось в умовах, близьких до реальності.

4.2. Загальні вимоги до програмно-моделюючого комплексу

Основним призначенням лабораторних робіт з математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем є апробація математичних основ моделювання на практиці. Ураховуючи, що реалізація кінцевих розрахункових формул із розглянутих нами задач математичного моделювання не становить особливих проблем (усе розв'язується з використанням матричної та псевдоінверсної алгебри разом з алгоритмами числового інтегрування), очікуємо, що лабораторні роботи будуть виконані на належному програмістському рівні.

Вибір програмного середовища для виконання лабораторної роботи – це прерогатива виконавця. Очевидно, що вихідними даними при цьому мають бути:

- зручність оформлення інтерфейсу з постановки задачі, супроводу її виконання та аналізу отриманих результатів;
- системні можливості з реалізації основних математичних операцій і співвідношень;
- системні (графічні) можливості ілюстрування вхідної та вихідної інформації;
- особиста зацікавленість виконавця (обізнаність із середовищем і практика програмування в ньому; бажання освоїти щось нове, використати досвід поточної дослідницької роботи при виконанні проекту, отримати програмістський досвід для реалізації інших прикладних робіт).

Програмний комплекс має бути універсальним, багатофункціональним з перспективою вдосконалення та подальшого розвитку. Пропонуємо універсифікувати вибір досліджуваного процесу, області його функціонування, спостережень за ним і обробку результатів досліджень. Радимо будувати комплекс із перспективою розв'язання певного класу задач, наприклад моделювання стану розподіленого просторово-часового процесу при:

- дискретно заданому бажаному стані та дискретних спостереженнях за початково-крайовим станом процесу й дискретними керуюче-моделюючими функціями;

- дискретно заданому бажаному стані та дискретних спостереженнях за початково-крайовим станом процесу й неперервними керуюче-моделюючими функціями;

- неперервно заданому бажаному стані та неперервному спостереженні за початково-крайовим станом процесу й дискретно визначеними керуюче-моделюючими функціями.

При побудові програмно-моделюючого комплексу треба передбачати два рівня його використання:

- для розв'язання прямих задач з математичного моделювання стану розподіленої просторово-часової системи при заданих спостереженнях за нею;

- для розв'язання задач керування динамікою розподіленої просторово-часової системи з досягнення її функцією стану бажаних значень.

Усе це реально, оскільки кінцеві математичні результати з розв'язання як прямих, так і обернених задач математичного моделювання просторово розподілених динамічних систем схожі, тому при грамотному плануванні структури програмно-моделюючого комплексу більшість програмних модулів, якщо вони написані універсально, можуть бути використані на обох рівнях.

Сподіваємось, що планування та програмна реалізація моделюючого комплексу, спрямована на універсальність, навіть за обмежених можливостей його практичного використання змусить виконавця ширше подивитись на коло проблем, задач і методик, краще зорієнтуватися в них і системно їх оцінити. Не зайвим буде також програмістський досвід планування й реалізації прикладних програмних систем. Тут можна продемонструвати знання математичних методів і вміння їх реалізувати програмно, а також набути досвіду системного програмування. Часто ці дві частини комплексу виконавець реалізує в різних програмних середовищах, наприклад, інтерфейс із постановки й супроводу математичної задачі виконується в C#, а реалізація логіки її розв'язання – у середовищі Mathematica, зручнішому для цього. Далі йде стикування двох програмних середовищ.

4.3. Інтерфейсна частина програмно-моделюючого комплексу

Інтерфейсна частина комплексу не обов'язкова для розуміння математичних методів моделювання динаміки розподілених просторово-часових систем, але її програмування вимагає систематизації постановки задач математичного моделювання, їх аналізу, виявлення спільності та відмінностей в алгоритмах розв'язання, усвідомлення особливості можливого використання математичних методів та їхніх програмних реалізацій в інженерно-прикладній практиці.

Форма інтерфейсу може бути діалогово-послідовною, яка з'ясує особливості постановки задачі покроково, або кнопочною, що робить це в довільному, зручному для користувача порядку. Головне, щоб інтерфейс дозволяв у зручній для користувача формі:

- формулювати задачу, забезпечуючи її постановку необхідними вхідними даними;

- супроводжувати процес розв'язання, за необхідності втручаючись у його перебіг;

- видавати результат розв'язання задачі.

На етапі постановки задачі інтерфейс має дозволяти користувачу:

- вводити (або вибирати зі списку) оператор $L(\partial_s)$ математичної моделі задачі;

- запускати процес побудови передатної функції $G(s - s')$ або вибирати її зі списку;

- визначатися з розмірністю n просторової області S_0 , що можна робити програмно: вводити з клавіатури, вибирати зі списку або встановлювати шляхом аналізу змінної s оператора $L(\partial_s)$;

- графічно чи поточною (з клавіатури або мишкою) вводити контур Γ просторової області S_0 і правий кінець часового інтервалу;

- вводити функцію $y(s)$ для формування початково-крайових спостережень за процесом і бажаного стану для задач керування ним;

- вираховувати функцію $u(s)$; якщо це складно реалізувати програмно, то вибрати її зі списку в парі до встановленого $y(s)$;

- визначатися з формою (оператори $L_r^0(\partial_t)$, $L_p^\Gamma(\partial_x)$) і кількістю R_0 , R_Γ початково-крайових спостережень;

- визначатися з формою (оператори $L_i(\partial_s)$) і кількістю I таких форм для задавання бажаного стану (для спрощення програмних реалізацій у лабораторних умовах покладемо $R_0 = R_\Gamma = I = L_r^0(\partial_t) = L_p^\Gamma(\partial_x) = L_i(\partial_s) \equiv 1$);

- визначатися з шумом і похибками, які відповідали б реальним датчикам, додавати можливості їх вводити, додавати до функції $y(s)$ і використовувати при формулюванні спостережень

$$Y_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}), Y_p^\Gamma(s) \quad (p = \overline{1, R_\Gamma}), Y_{rl}^0(r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0})$$

$$Y_{pl}^\Gamma(r = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \text{ та задаванні бажаного стану } Y_i(s), Y_i \quad (i = \overline{1, I});$$

- визначити підінтервали, підобласті й точки

$$s_l^0(l = \overline{1, L_0}), s_l^\Gamma(l = \overline{1, L_\Gamma}), s_l(l = \overline{1, L}),$$

у яких формуються спостереження та задається бажаний стан;

- формулювати спостереження $Y_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}) \quad Y_p^\Gamma(s)$
 $(p = \overline{1, R_\Gamma}), Y_{rl}^0(r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0}), Y_{pl}^\Gamma(r = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma})$

і визначити бажаний стан $Y_i(s), Y_i(s) \quad (i = \overline{1, I})$:

а) програмно з використанням функції $y(s)$, уведеного шуму датчиків спостереження та інтервалів, області й точок, у яких визначаються спостереження та бажаний стан;

б) графічно, шляхом візуального вибору значення спостережуваної та бажаної величини в околі графічно зображеної функції $y(s)$;

- для задач із дискретно визначеними керуючо-моделюючими факторами вводити (з клавіатури або графічно) координати $s_m \quad (m = \overline{1, M}), s_m^0 \quad (m = \overline{1, M_0}), s_m^\Gamma \quad (m = \overline{1, M_\Gamma})$ то-

чок для побудови керуючого вектора u_* та моделюючих векторів u_0, u_Γ ;

- визначатися з класом задач, які розв'язуються для досліджуваного процесу, шляхом вибору: форми спостережень за ним (дискретних чи неперервних), форми задавання бажаного стану (дискретного чи неперервного), форми зображення керуюче-моделюючих функцій (дискретних чи неперервних);

- додатково вибирати для задач керування перелік керуючих факторів;

- запускати на виконання математичну частину програмного комплексу.

4.4. Математична частина програмного комплексу

Математична частина комплексу – це набір програмних засобів для реалізації розрахункових формул і алгоритмів їх використання з метою отримання розв'язку сформульованої задачі. Для її виконання зручно скористатися програмними середовищами, що містять бібліотечні засоби, для здійснення операцій матрично-псевдоінверсної алгебри та обчислювальної математики. Моделюючі властивості комплексу значно розширив би вибір програмного середовища з наявними в ньому засобами аналітичної математики, зокрема для математичної роботи з функціями, аналітичного диференціювання та інтегрування останніх.

При побудові математичної частини бажано було б запрограмувати логіко-аналітичний аналізатор вибраної задачі й даних, що її супроводжують. Результатом роботи такого аналізатора була б схема формування векторів, матриць і матричних функцій, які потрапляли б на вхід блока реалізації псевдорозв'язків лінійних алгебраїчних, інтегральних та функціональних систем. Ця нескладна частина математичної частки комплексу працює з використанням стандартних чи програмно реалізованих процедур лінійної алгебри та обчислювальної математики.

Для лабораторної реалізації алгоритмів псевдообернення лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних рівнянь із метою спрощення розрахунків із множини псевдорозв'язків можна взяти той, що відповідає $v \equiv 0$ та $v(s) \equiv 0$. Заключна частина математичного блока – це розшифровка (з урахуванням результатів роботи аналізатора) розв'язків лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних систем, формування керуючо-моделюючих функцій та векторів, а головне – побудова функції $y(s)$ для прямих задач і візуалізація результатів керування в обернених задачах, а також формування й підготовка до візуалізації керуючих функцій у задачах керування.

4.5. Ілюстрація та аналіз результатів математичного моделювання просторово розподілених динамічних процесів

Результатом роботи програмного комплексу є функція стану $y(s)$ (для прямих задач) і функції керування $u(s)$, $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) (для обернених задач). Бажано, щоб ці функції ілюструвались графічно (за сучасних засобів графіки зробити це не складно). Для задач, де задані функції мають три і більше аргументів, потрібен локальний інтерфейс для перегляду їхніх перетинів і кругового огляду функцій у цілому. Можливе також табличне зображення результатів, але воно менш наочне. Зауважимо, що один з параметрів зображуваної графічно функції (краще час t) можна залишити неперервно змінним, що дозволить отриманий розв'язок спостерігати в динаміці.

Основне призначення ілюстратора результату – не показ картинки, хоча це теж цікаво й корисно, а надання можливості оцінити якість і точність отриманих розв'язків. Якщо пригадати постановки розв'язаних вище математичних задач з моделювання функцій стану $y(s)$ просторово розподілених динамічних систем і задач керування ним, то критерієм розв'язання їх було середньоквадратичне узгодження функції $y(s)$ зі спостережен-

нями та бажаним станом, які визначалися як неперервно, так і дискретно. Отже, можна вирахувати визначену для кожної із задач середньоквадратичну оцінку ε^2 . Однак для візуальної оцінки якості результату непогано було б на тлі графіка функції $y(s)$ показати також бажаний стан і покладені в основу розв'язання задачі спостереження за початково-крайовим станом. Не варто порівнювати отриману функцію $y(s)$ із заданою нами для формування спостережень за початково-крайовим станом процесу – вони збігатися не повинні, оскільки більшість розглядуваних задач має неоднозначні розв'язки, а нами реалізований один з них – той, для якого при розв'язанні лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних систем конкретизовано вибір вектора v та вектор-функції $v(s)$.

4.6. Приклади студентських програмно-моделюючих комплексів

Тестуванням викладених вище математичних підходів до моделювання динаміки просторово розподілених систем у межах різних навчальних курсів в останні роки успішно займалися студенти та аспіранти факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, факультету інформатики та обчислювальної техніки Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут", факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника та факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Були побудовані непогані програмно-моделюючі комплекси для постановки та розв'язання розглядуваних задач, інформація про які опублікована в [4–6].

Не заглиблюючись у програмні реалізації математичних розв'язків тестованих задач (вони дають непоганий результат), наведемо приклади оформлення інтерфейсної частини деяких із цих комплексів.

4.7. Програмно-моделюючий комплекс Віталія Стояна

(Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 2008) [1]

Програмний комплекс написаний у середовищі Microsoft Visual Studio 2005 мовою програмування C# із використанням Mathematica 6.0 і призначений для практичної реалізації математичних методів моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів, які викладені в попередніх пунктах цього посібника. Зовнішня оболонка комплексу побудована на базі .NET Framework 2.0, реалізація математичних алгоритмів виконана в Mathematica 6.0, що дозволяє зробити зручний для користувача інтерфейс, а також прискорити процес розв'язання задач за рахунок активного використання можливостей цього програмного середовища. Потужності обчислювальної техніки, на якій виконувалася розробка комплексу, змусили автора обмежитися тільки двовимірними просторовими областями ($n \leq 2$) та орієнтуватися на наявність однієї початкової та однієї крайової умов ($R_0 = R_\Gamma = 1$).

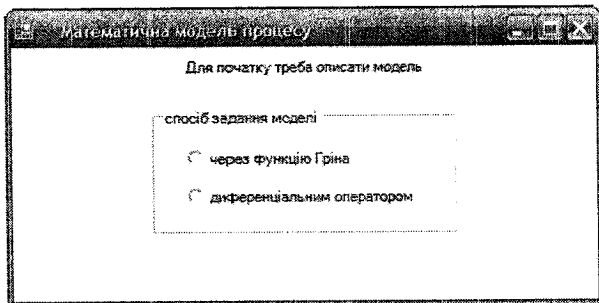
4.7.1. Інтерфейс опису логіки процесу

Інтерфейс комплексу дозволяє описувати логіку досліджуваного процесу з використанням (рис. 1а) диференціальної моделі або її інтегрального еквівалента. Вибір форми опису моделі виконується через вікно, зображене на рис. 1а, введення її диференціального оператора або функції $G(s - s')$ – через вікна, подані на рис. 1б та 1в, відповідно. Зауважимо, що введення виконується в зручному для користувача символічному вигляді. Залежність моделі від просторових координат і часу визначається параметрами x, y, t . Після аналізу параметрів комплекс визначає особливості моделі. За наявності двох просторових координат комплекс налаштовується на сприйняття двовимірної просторової області, в іншому випадку – одновимірної. Наявність (відсутність) параметра t є ознакою динамічності (статичності) процесу.

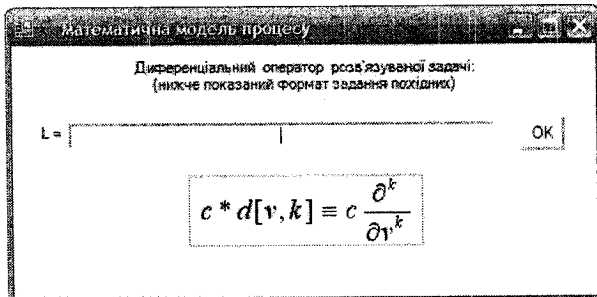
Інтерфейсне вікно (рис. 1з) комплексу передбачає аналітичну форму введення функції $u(x, y, t)$ розподілених зовнішньоди-

намічних збурень, які визначають процес. Кількість просторових координат і наявність часової характеристики мають бути узгодженими з їх кількістю та наявністю у введених раніше операторі $L(\partial_s)$ та функції $G(s-s')$.

На етапі опису математичної моделі процесу передбачена можливість (рис. 1а) введення розв'язку задачі, опису логіки процесу, узгодженого з диференціальним оператором (функцією $G(s-s')$) і функцією $u(s)$ просторово-часових збурень. Останнє може бути підказкою при визначенні початково-крайових спостережень $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $Y_p^\Gamma(s)$ ($p = \overline{1, R_\Gamma}$) та заданні бажаного стану $Y_i(s)$ ($i = \overline{1, I}$), які на етапі експериментального моделювання мають бути узгодженими з фізикою процесу. Вводиться цей стан також аналітично з використанням параметрів x, y, t .

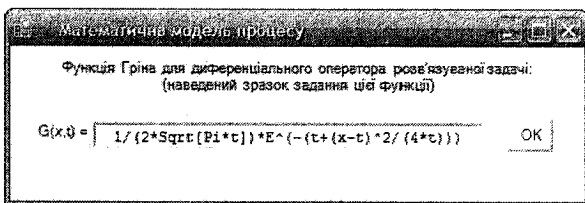


а

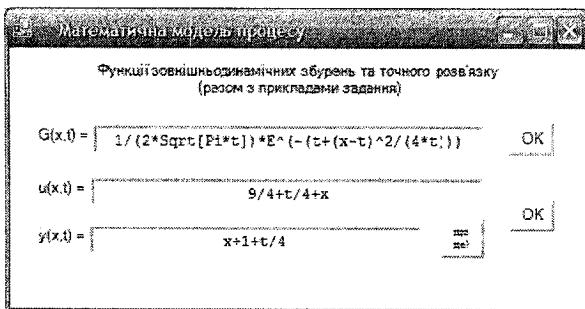


б

Рис. 1. Інтерфейс



6

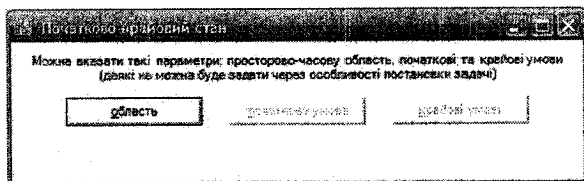


2

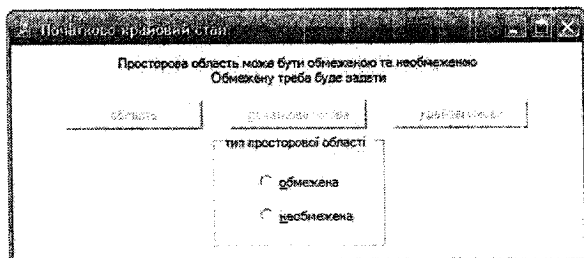
Рис. 1. Інтерфейс (продовження)

4.7.2. Інтерфейс введення просторово-часової області

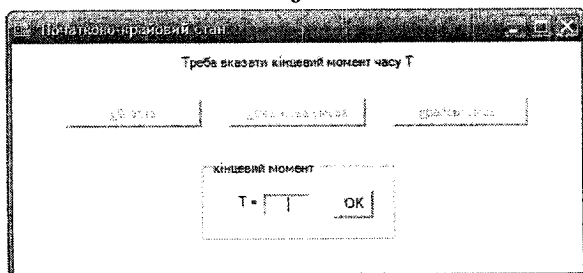
Стартовим для опису просторово-часової області, у якій досліджується визначений вище процес, є вікно (рис. 2а), через яке виконується вихід на вікно з рис. 2б. Часовий інтервал, будучи обмеженим (рис. 2в), визначається його правою межею. Розміри одновимірної області задаються значеннями його лівої та правої координат аналітично (рис. 2г) або графічно (рис. 2д). При введенні двовимірної (за умов її обмеженості, рис. 2б) області передбачені можливості (рис. 2е) визначення її меж для прямокутної (рис. 2ж) і довільної за формою (рис. 2з) областей. В останньому випадку контур області за допомогою лівої клавіші миші задається точками, які автоматично з'єднуються ламаною лінією.



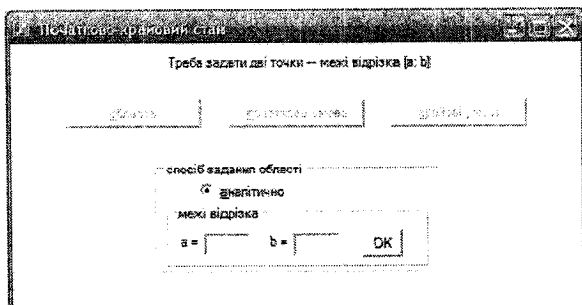
а



б

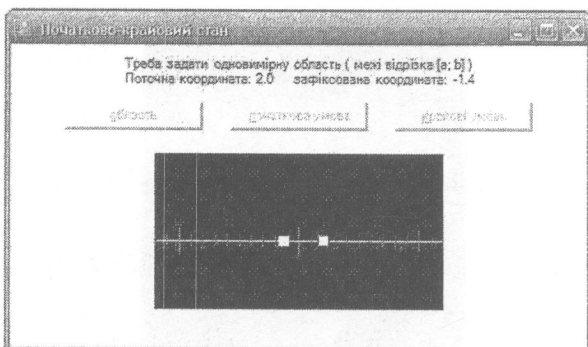


в

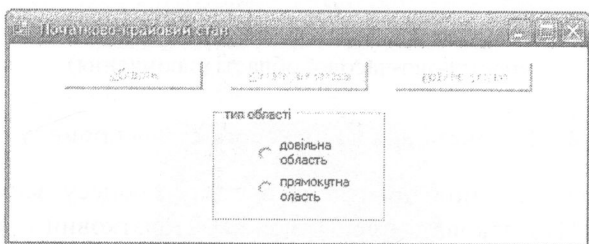


г

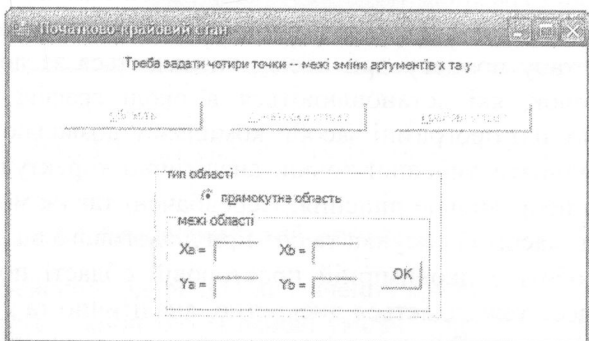
Рис. 2. Інтерфейс введення просторово-часової області



d

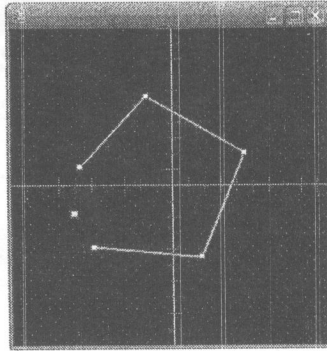


e



жс

Рис. 2. Інтерфейс введення просторово-часової області (продовження)



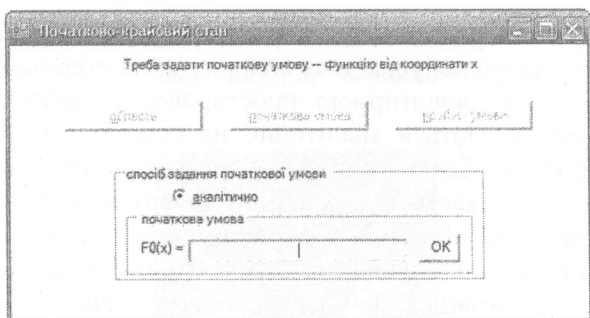
3

Рис. 2. Інтерфейс введення просторово-часової області (закінчення)

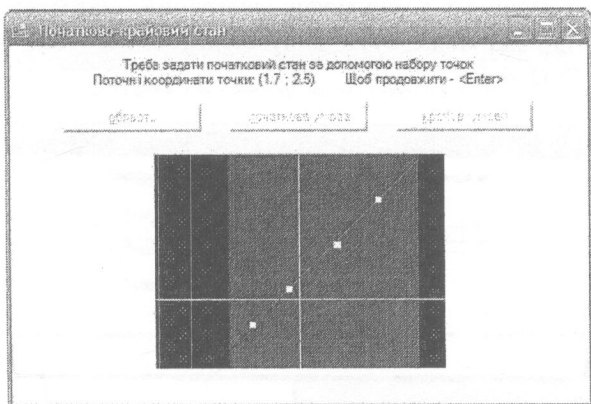
4.7.3. Визначення початкового стану процесу

Інтерфейс задання початкового стану процесу запускається клавішею "Початкова умова" (рис. 2а). Початковий стан процесу в одновимірній просторовій області задається аналітично (рис. 3а) або графічно (рис. 3б) з використанням підказки, яка формується на основі введеного раніше точного розв'язку задачі. Функція стану процесу при цьому визначається за допомогою набору точок, які встановлюються в околі графіка-підказки. Зауважимо, що програмні засоби комплексу дозволяють зчитувати координати вибраної точки, аналітично коректувати їх та відмінити неправильне рішення. Передбачені також можливості змінювати масштаб рисунка та розміри діалогового вікна.

При роботі у двовимірній просторовій області початковий стан процесу теж задається дискретно, аналітично та з використанням підказки. В останньому випадку до точного значення початкового стану може бути додана шумова функція.



a



б

Рис. 3. Визначення початкового стану процесу

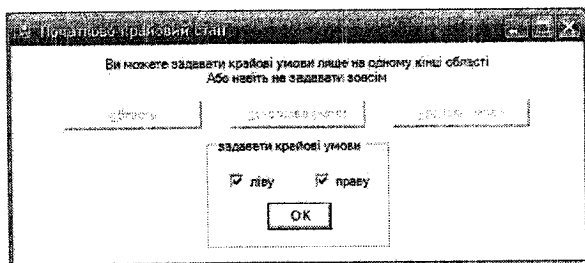
4.7.4. Визначення крайового стану процесу

Інтерфейсний діалог для визначення крайового стану процесу ініціюється кнопкою "Крайові умови" (рис. 2e) і суттєво залежить від вимірності області.

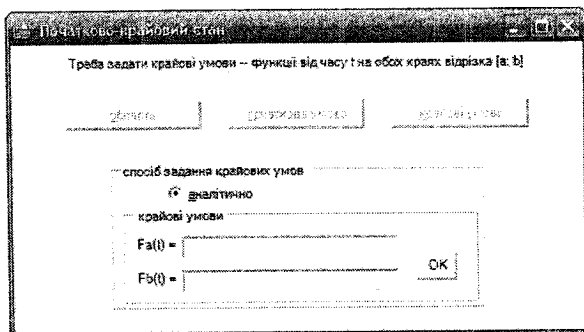
Для одновимірної просторової області передбачена можливість визначення стану лівої, правої, обох або жодної з крайових точок області (рис. 4a). При цьому надаються інтерфейсні можливості для аналітичного (рис. 4б) і графічного (рис. 4в) визна-

чення такого стану. В останньому випадку (як і при введенні початкового стану) допускається використання підказки.

При роботі з двовимірною просторовою областю крайові умови на ній задаються аналітично на кожному з елементів-відрізків контуру області (рис. 4а) або з використанням графіки (рис. 4б), де допускається довільність вибору крайових значень або прив'язка їх до підказки. У першому випадку крайові умови вводяться дискретно в певних точках контуру з подальшою програмною апроксимацією до неперервної функції (рис. 4в). У другому випадку динаміка елемента-відрідка контуру визначається з використанням точного розв'язку, який має місце на ньому. За бажанням користувача вибраний таким чином стан елемента-відрідка може бути зашумлений аналітично вибраною функцією (рис. 4ж).

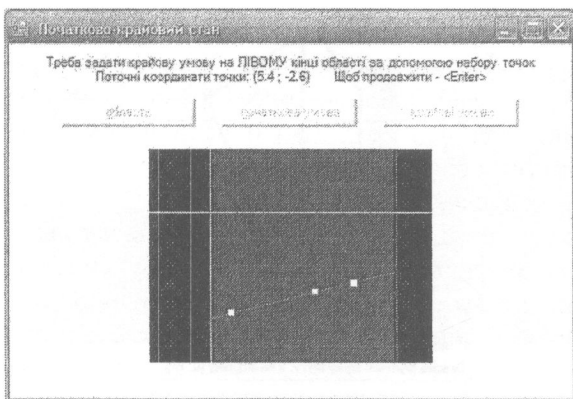


а

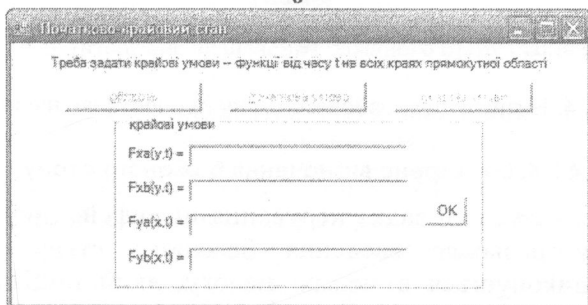


б

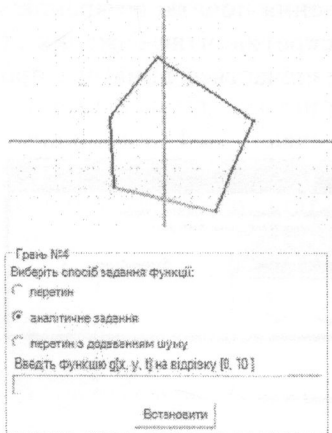
Рис. 4. Визначення крайового стану процесу



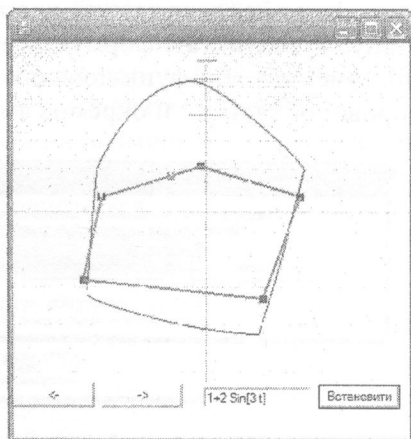
в



г



д



ж

Рис. 4. Визначення крайового стану процесу (продовження)

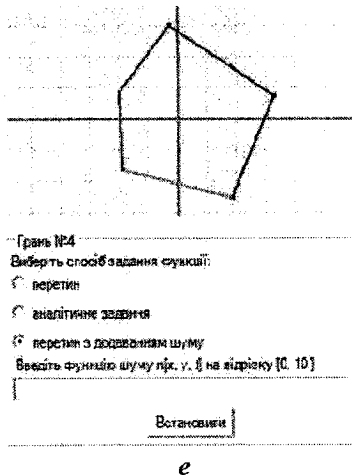


Рис. 4. Визначення крайового стану процесу (закінчення)

4.7.5. Інтерфейс визначення бажаного стану

При розв'язуванні задач керування інтерфейс програмного комплексу дозволяє введення бажаного стану процесу. Останнє виконується в межах діалогу, який ініціалізується кнопкою "Бажаний стан" (рис. 5а). При цьому використовується інтерфейс, описаний для введення початково-крайового стану. У результаті формується дискретна сітка бажаних станів (рис. 5б) або функціонально визначається динаміка просторової області чи її окремих точок.

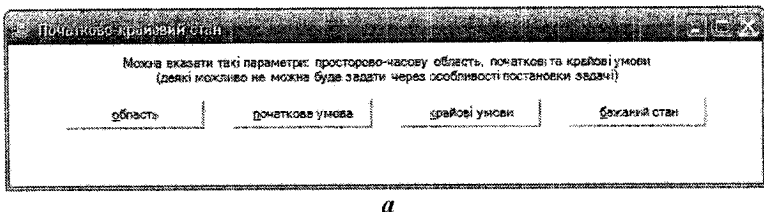
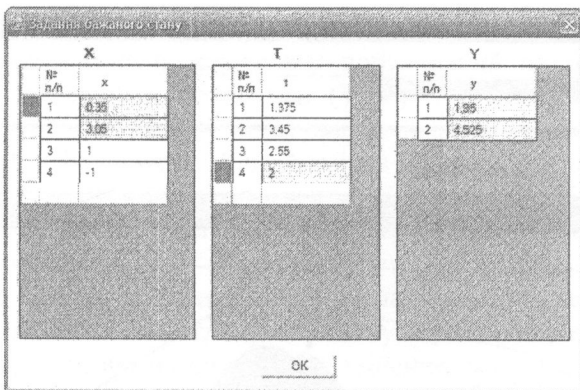


Рис. 5. Інтерфейс визначення бажаного стану

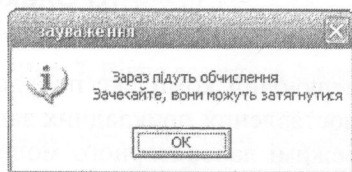


б

Рис. 5. Інтерфейс визначення бажаного стану (закінчення)

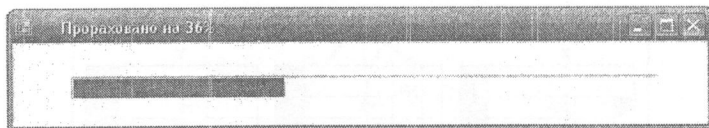
4.7.6. Інтерфейс розв'язання задачі та аналізу обчислень

Процес розв'язання задачі починається автоматично після закриття останнього діалогового вікна опису особливостей динаміки досліджуваного процесу та визначення мети його дослідження. Видавши повідомлення про початок розв'язання задачі (рис. 6а), програмний комплекс виводить інформаційне вікно (рис. 6б), у якому оцінюється відсоток виконаних обчислень. Після закінчення обчислень виводяться вікно результату (рис. 6в) – графік функції стану системи (статичний або динамічний) – і визначені при постановці задачі початково-крайовий та бажаний стани. Реалізована можливість зміни масштабу рисунка, розмірів вікна, а також керування місцезнаходженням камери, з якої отриманий результат спостерігається.

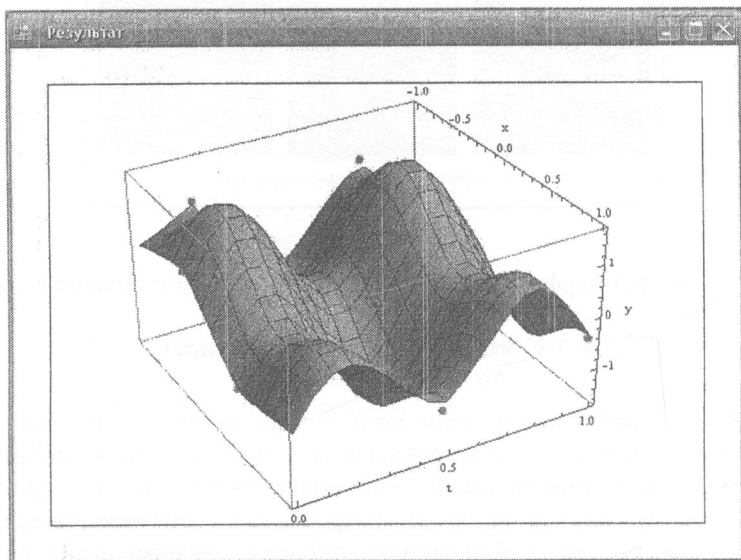


а

Рис. 6. Інтерфейс розв'язання задачі та аналізу обчислень



б



б

Рис. 6. Інтерфейс розв'язання задачі та аналізу обчислень (закінчення)

4.8. Система комп'ютерно-аналітичного моделювання Олександра Єршова та Олександра Ємцова

(НТУ "Київський політехнічний інститут", 2011) [7]

Програмно-моделюючий комплекс побудований як для розв'язання реально поставлених прикладних задач, так і для використання його в режимі лабораторного моделювання. В останньому випадку реальний стан досліджуваного процесу, як і спостереження за ним, імітуються користувачем.

Робоча частина комплексу реалізована мовою C #, інтерфейсно-графічний модуль комплексу побудований на платформі Windows Presentation Foundation (WPF). Істотним елементом комплексу є СУБД MsSQL 2005, взаємодія з якою виконується в межах Entity Framework. Алгоритмічна частина комплексу побудована з використанням внутрішньої математичної бібліотеки, яка містить свої реалізації найбільш використовуваних математичних операцій.

Процес роботи з комплексом включає етапи постановки задачі, її розв'язання, перегляду та аналізу отриманих результатів. Робота користувача на цих етапах здійснюється через зручний інтерфейс, що містить кілька форм, які дозволяють виконувати постановку задачі й супроводжувати процес її розв'язання з використанням спеціально розробленого формульно-аналітичного та графічного редакторів.

Формульно-аналітичний редактор дозволяє вводити, програмно формалізувати, обробляти й показувати на екрані дисплея математично задані вирази. Введення виразів може виконуватися як послідовно, клавіатурним набором символів елементарних функцій типу "інтеграл", "диференціювання", "обчислення", "підстановка значення", так і з використанням "Редактора формул", який кнопкою РЕДАКТОР ФОРМУЛ запускається з панелі інструментів і має схоже на калькулятор вікно (рис. 7).

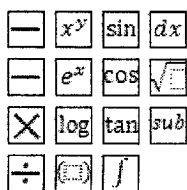


Рис. 7. Вікно редактора формул

Передбачена можливість побудови, обробки і програмної генерації (за спеціальними алгоритмами) формульних виразів з метою візуалізації й обчислення значень (перетинів).

4.8.1. Інтерфейс постановки задачі

Основна форма постановки описаних вище задач, зображена на рис. 8, спільно з формами, наведеними на рис. 9–11, дозволяє в довільному порядку пройти такі етапи:

- опис досліджуваного процесу, який визначається оператором $L(\partial_s)$ чи функцією $G(s-s')$, йому еквівалентною;
- введення області функціонування процесу (графічно, аналітично);
- аналітичне введення функції $y(s)$, якщо комплекс використовується в лабораторному режимі;
- введення (аналітично або графічно) дискретно й неперервно визначених спостережень за процесом; у лабораторному режимі допускається використання графічної підказки;
- введення області визначення (графічно, аналітично й точково) моделюючих функцій чи їхніх значень;
- вибір типу задачі (пряма або обернена).

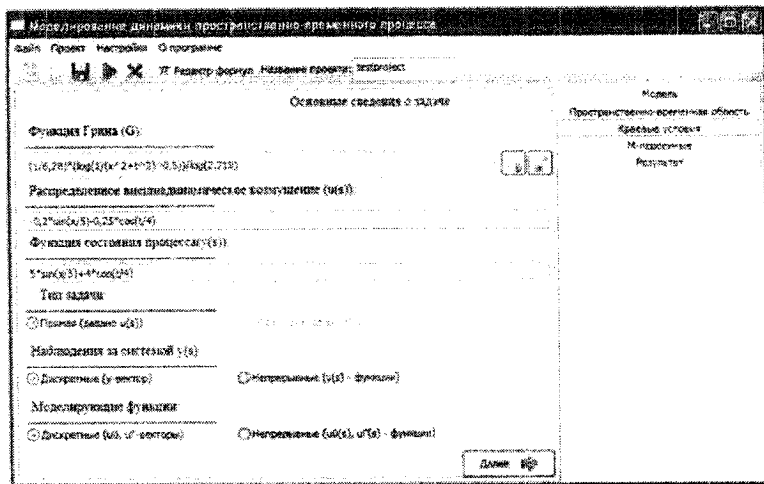


Рис. 8. Вікно редактора формул

Рис. 9. Форма для введения информации про пространственно-временную область

Идентификатор	Время	Параметр	Значение	Условие	Тип
И.0	0	ρ	1	равенство	Исходное
И.1	2	ρ	0.5	равенство	Исходное
И.2	4	ρ	0.75	равенство	Исходное
И.3	6	ρ	0.85	равенство	Исходное
И.4	8	ρ	0.9	равенство	Исходное
И.5	10	ρ	0.95	равенство	Исходное

Рис. 10. Форма для введения начатково-краевых умов

M_0				M_Γ			
x	y	z	t	x	y	z	t
1	27		1	100			1
2	20		2	200			2
3	30		3	35			3
4	1		4	65			4
5	0		5	78			5

Рис. 11. Форма для введения точек M_0 , M_Γ

На рис. 9–11 наведені приклади віконних форм для визначення області функціонування процесу, початково-крайових спостережень за ним і області визначення моделюючих функцій.

Обробка введеної інформації відповідно до алгоритму розв'язку даної задачі виконується аналітично з використанням формульно-аналітичного редактора. Допускаються аналітичний і графічний перегляди отриманих результатів (див. рис. 14, 15).

Особливості загальної структури та функціонування комплексу. Особливістю побудованого програмного комплексу є трирівнева архітектура з тонким клієнтом, що дозволяє здійснювати всі розрахунки на сервері, представленому web-службою. Для роботи з комплексом потрібен доступ до мережі Інтернет. У програмному комплексі реалізована функція збереження задач на сервері. Це дозволяє раніше введені завдання переглядати з клієнтської частини комплексу, а також прораховувати ці завдання на будь-якому персональному комп'ютері без особливих обмежень на потужність. Останнім досягається певна мобільність такого програмного комплексу.

Клієнтська частина комплексу (рис. 12) складається з двох бібліотек (графічної підсистеми й редактора формул) та інтерфейсу для введення даних про задачу. Запити, що посилаються клієнтською частиною комплексу в серверну частину, можуть бути такими: "отримати список збережених задач", "завантажити раніше збережену в базі даних задачу", "отримати список процесів, описаних і збережених у базі даних", "отримати список збережених змінних", "зберегти опис нового процесу", "зберегти нову змінну", "зберегти або відновити завдання", "виконати розрахунок для окремого завдання".

Серверна частина комплексу (рис. 13) включає алгоритми розв'язання описаних вище прикладних задач. Програмна реалізація цих алгоритмів виконана універсально з використанням аналітики генерації формул, побудованої на базі *зворотного польського запису* (ЗПЗ). Робоча бібліотека аналітики універсальна й може бути використана в інших проектах. До цієї бібліотеки ввійшли: лексичний аналізатор формул, який реалізує операції їх систематизації та збереження у ЗПЗ; блоки аналітичного інтегрування, диференціювання, логарифмування, підстановки

значень; блок рекурсивного обчислення формул. У бібліотеці є також повноцінний комплект алгоритмів матричної алгебри з елементами-функціями.

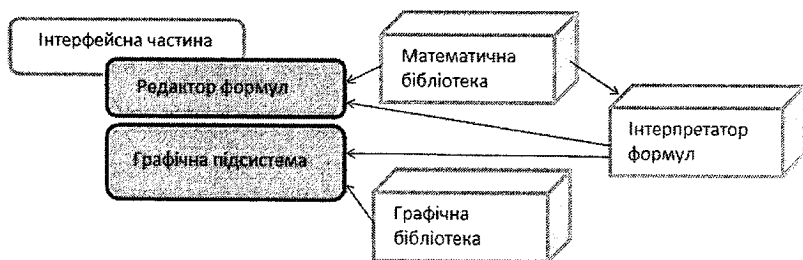


Рис. 12. Структура клієнта

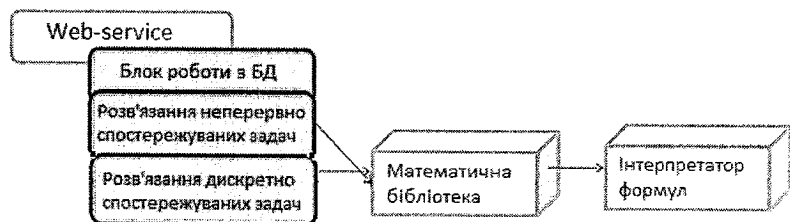


Рис. 13. Структура сервера

До особливостей програмної реалізації комплексу логічно віднести й розпаралелювання обчислювальних процесів, реалізоване як на рівні конкретних розрахункових схем, так і через запуск окремих задач. При цьому кожен новий обчислювальний запит до сервера запускається в окремому процесі, який у міру виконання повертає результати обчислень. Задачі, які вже розв'язувалися в комплексі, зберігаються в базі даних і при повторному запиті до сервера повертаються клієнтові без обчислень.

Особливості формульно-аналітичного забезпечення комплексу. У програмному комплексі закладені елементи аналітики, яка дозволяє виконувати обробку аналітичних виразів і реалізувати алгоритми з неперервно визначеними даними. Останнє

дозволило обробку вихідної інформації й формування кінцевого результату виконувати в аналітичному вигляді. Аналітичний блок комплексу будується за допомогою граматики вигляду

$$G = (N, E, P, S),$$

де N – множина нетерміналів, E – алфавіт, P – множина продукцій, S – початковий нетермінал. Зокрема,

$$E = \{ '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '0', '+', '-', '*', '/', 'subs', 'int', 'L', 'log', '(', ')', 'x', 'sin', 'cos' \},$$

$$N = \{ A, C, D, F, num, digit, int\ num \},$$

а множиною продукцій P є:

- 1) $S \rightarrow A + A \mid A - A \mid A * A \mid A / A \mid (A) \mid \log(A) \mid \sin(A) \mid \cos(A) \mid A \wedge A \mid \text{int}(A)\{D; D; xC\} \mid L(A)\{xC; F\} \mid \text{subs}(A)\{xC; D\};$
- 2) $A \rightarrow S \mid xC \mid num;$
- 3) $C \rightarrow digit\ digit;$
- 4) $D \rightarrow num;$
- 5) $F \rightarrow \text{int}\ num;$
- 6) $num \rightarrow digit \mid num\ digit, digit\ digit\ digit\ digit;$
- 7) $\text{int}\ num \rightarrow digit \mid \text{int}\ num\ digit;$
- 8) $digit \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 0.$

На базі такої граматики в комплексі реалізований однопрохідний аналізатор, який рядкове подання формули розбирає на лексеми й записує в стек за правилами ЗПЗ. Побудована грамика дозволяє працювати з математичними виразами, які містять у записі інтеграли, похідні, піднесення до степеня, логарифмування, тригонометричні функції, диференціювання. Обчислення значень виразів виконується інтерпретатором формул на базі їх ЗПЗ-зображення. Інтегрування й диференціювання тут виконуються чисельно.

Запит на виконання певної обробки виразу реалізується простими та звичними для користувача конструкціями, наприклад:

1) обчислення інтеграла:

`int (<вираз>) {<нижня межа інтегрування>, <верхня межа інтегрування>, <змінна інтегрування у форматі x^{**} >};`

2) диференціювання виразу:

L (<вираз>) {<змінна у форматі x^{**} >; <ступінь похідної>;

3) підстановка значення змінної:

$subs$ (<вираз>) {<змінна у форматі x^{**} >; <значення>}

При розрахунку значення <виразу> невизначені аргументи обнуляються.

4.8.2. Особливості реалізації графічної частини комплексу

Суттєвим елементом постановки, розв'язання й аналізу розв'язків розглянутих задач є графічне забезпечення комплексу. В основу впровадженого в комплекс графічного блока покладена методика тріангуляції Делоне, згідно з якою графік тривимірної функції є набором точок, що лежать на її поверхні. При побудові графіка функції графічна система виводить множину трикутників, побудованих (тріангульованих) на цих точках.

Алгоритм тріангуляції функцій, прийнятий для реалізації в межах зазначеного комплексу, проілюструємо на прикладі функції $f(x, z)$ при $x \in [a, b]$, $z \in [m, n]$. Він включає такі етапи:

1. Побудова множини M точок поверхні:

Крок 1. $M = \emptyset$.

Крок 2. $x = a$.

Крок 3. $z = m$.

Крок 4. $y = f(x, z)$.

Крок 5. $M = M \cup y$.

Крок 6. $z = z + \Delta$.

Крок 7. Якщо $z \leq n$, то перейти до кроку 4.

Крок 8. $x = x + \Delta$.

Крок 9. Якщо $x \leq b$, то перейти до кроку 3.

У результаті роботи алгоритму множина міститиме матрицю

$$\begin{pmatrix} f(a, m) & \dots & f(a, n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(b, m) & \dots & f(b, n) \end{pmatrix}$$

значень $f(a, m), \dots, f(b, n)$ функції $f(x, z)$.

2. Побудова множини T трикутників на базі рядків

$$\text{row}(a, M) = (f(a, m), \dots, f(a, n)),$$

$$\text{row}(a+1, M) = (f(a+1, m), \dots, f(a+1, n))$$

побудованої вище матриці. Алгоритм генерації множини T виглядає таким чином:

Крок 1. $T = \emptyset$.

Крок 2. $z = m$.

Крок 3. $x_1 = a$.

Крок 4. $x_2 = x_1 + 1$.

Крок 5. $T = T \cup \{M(x_1, f(x_1, z), z),$

$$M(x_2, f(x_2, z), z), M(x_2, f(x_2, z+1), z+1)\}.$$

Крок 6. $x_1 = x_1 + \Delta$.

Крок 7. Якщо $x_1 < b$, то перейти на крок 4.

Крок 8. $z = z + \Delta$.

Крок 9. Якщо $z \leq n$, то перейти на крок 3.

3. Побудова поверхні на базі множини трикутників.

4.8.3. Особливості виведення результатів розв'язання задачі

Описані вище формульно-аналітичний і графічний блоки комплексу дозволяють результат розв'язання задачі (у нашому випадку це функція стану системи) подати в аналітичному та графічному вигляді. При аналітичному перегляді результату (рис. 14) останній зображується математичною формулою. Передбачена можливість обчислення виведеної таким чином функції в певній точці. Для порівняння в цій самій точці дається також значення функції стану, прийнятої для формування вихідних спостережень за системою. За бажанням користувача можлива візуалізація результату (рис. 15). Тут, окрім графіка функції, виводяться її значення, які спостерігаються при постановці завдання. Запускаються описані форми кнопкою "РЕЗУЛЬТАТ" на панелі інструментів.

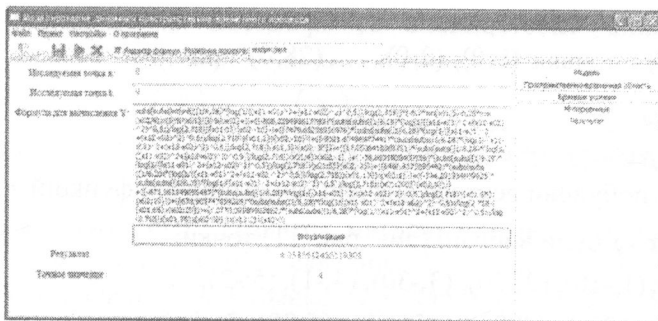


Рис. 14. Аналітичний перегляд результату

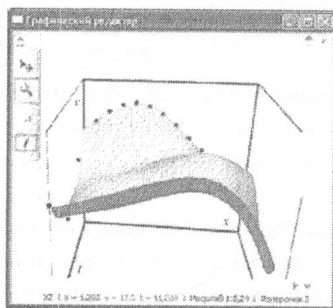


Рис. 15. Графічна візуалізація результату

4.8.4. Приклад розв'язання задачі

У вікні, зображеному на рис. 8, показана інформація, уведена користувачем у процесі постановки та розв'язання задачі з побудови функції стану процесу, динаміка якого в області $S_0^T = \{(x, t) : x \in [0; 50], t \in [0; 50]\}$ (див. рис. 9) описана рівнянням

$$(\partial_x^2 + \partial_t^2)u(x, t) = -0,2 \sin\left(\frac{x}{5}\right) - 0,25 \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

таким, що відповідна до нього передатна функція

$$G(s - s') = \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{(x - x')^2 + (t - t')^2} \right) \right).$$

Імітація спостережень за процесом виконувалася (див. рис. 10) у точках $(0;0)$, $(2;0)$, ..., $(28;0)$ при

$$y(x,t) = 5 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + 4 \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

Для побудови вектора значень моделюючих функцій $u_0(x,t)$ та $u_T(x,t)$ були вибрані (див. рис. 11) точки:

M_0 : $(1;-10)$, $(2;-20)$, $(3;-30)$, $(4;-1)$, $(5;-2)$;

M_T : $(100;1)$, $(200;30)$, $(55;10)$, $(65;20)$, $(75;30)$.

Результат розв'язання задачі наведено на рис. 14, 15.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаращенко Ф. Г. Розвиток методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем: монографія / Ф. Г. Гаращенко, І. А. Куценко, І. І. Харченко. – К.: Вид-во "Сталь", 2009. За редакцією

2. О программно-аналитическом моделировании задач динамики систем с распределенными параметрами / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. А. Стоян та ін. // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 2. – С. 35–55.

3. Программный комплекс моделирования динамики систем с распределенными параметрами / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. А. Стоян та ін. // Управляющие системы и машины. – 2006. – № 2. – С. 16–24.

4. Скопецкий В. В. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян, В. Б. Зваридчук. – К.: Вид-во "Сталь", 2008.

5. Скопецкий В. В. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян, Ю. Г. Кривонос. – К.: Наук. думка, 2008.

6. Стоян В. А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем / В. А. Стоян. – К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2011.

7. О системе компьютерно-аналитического моделирования динамики пространственно-распределенных процессов / В. А. Стоян, К. В. Двирничук, А. Е. Ершов, А. С. Емцов // Компьютерная математика. – 2012. – № 2. – С. 34–44.

Передмова	3
1. Математичні моделі лінійних динамічних систем та проблеми їх псевдообернення	7
1.1. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем	7
1.2. Лінійні дискретно підсумувальні системи	8
1.3. Лінійні дискретно розподільні системи	11
1.4. Лінійні інтегрально та функціонально перетворювальні системи	12
1.5. Псевдообернення математичних моделей просторово розподілених динамічних систем	15
1.6. Основи числової реалізації алгоритмів псевдообернення математичних моделей лінійних динамічних систем	17
2. Математичне моделювання стану просторово розподілених динамічних систем	19
2.1. Проблеми та ідейні основи математичного моделювання стану просторово розподілених динамічних систем	19
2.2. Дискретний варіант задачі математичного моделювання динаміки лінійно розподілених систем	23
2.2.1. Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях	23
2.2.2. Дослідження динаміки просторово-часових систем у необмежених просторових і часових областях	25
2.2.3. Деякі особливості математичного моделювання динаміки дискретно спостережуваних просторово-часових систем	27

2.3. Неперервно-аналітичне моделювання динаміки лінійно розподілених систем із дискретно спостережуваним початково-крайовим станом.....	29
2.3.1. Задача неперервно-аналітичного моделювання дискретно визначеного початково-крайового збурення	29
2.3.2. Множини моделюючих функцій для дискретно визначеного початково-крайового стану.....	30
2.3.3. Задачі математичного моделювання дискретизованих початково-крайових умов у необмежених просторових і часових областях.....	33
2.4. Математичне моделювання динаміки просторово розподілених процесів з неперервно заданим початково-крайовим станом.....	35
2.4.1. Задача математичного моделювання неперервно визначеного початково-крайового збурення розподілених динамічних систем	35
2.4.2. Вектори моделюючих факторів для неперервно визначених початково-крайових умов динаміки просторово розподіленої системи.....	36
2.4.3. Задачі математичного моделювання неперервно визначених початково-крайових умов у необмежених просторових і часових областях.....	39
3. Математичне моделювання розв'язків задач керування динамікою просторово розподілених систем	42
3.1. Проблеми та ідейні основи розв'язання задачі керування динамікою просторово розподілених систем.....	42
3.2. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з дискретно визначеним критерієм і керуючою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень.....	46
3.2.1. Задачі керування розподіленим просторово-часовим збуренням	46

3.2.2. Розв'язувальна система рівнянь	46
3.2.3. Множини дискретно визначених керуюче-моделюючих факторів	49
3.2.4. Множини неперервно визначених керуюче-моделюючих факторів	50
3.2.5. Задачі комплексного керування розподіленими просторово-часовими та початково-крайовими збуреннями	52
3.2.6. Задачі керування дискретно визначеним розподіленим зовнішньодинамічним збуренням і початково-крайовими збурюючими факторами	53
3.2.7. Задачі керування неперервно визначеним розподіленим зовнішньодинамічним збуренням і початково-крайовими збурюючими факторами	56
3.2.8. Задачі керування в необмежених просторових, часових і просторово-часових областях	57
3.3. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з дискретно заданим критерієм і відомою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень	59
3.3.1. Задачі керування початковими, крайовими та початково-крайовими збурюючими факторами	59
3.3.2. Випадок дискретно визначених моделюючих факторів	60
3.3.3. Випадок неперервно визначених моделюючих факторів	62
3.3.4. Особливості розв'язання задач у необмеженій просторовій області та на необмеженому часовому інтервалі	63
3.4. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з неперервно за просторово-часовими координатами визначеним критерієм та керуючою функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень	64
3.4.1. Задачі керування розподіленим просторово-часовим збуренням	64
3.4.2. Розв'язувальна система рівнянь	66

3.4.3. Множини керуюче-моделюючих факторів	67
3.4.4. Задача керування за участю початково-крайових керуючих факторів	69
3.4.5. Задачі керування в необмежених просторових, часових і просторово-часових областях	72
3.5. Задачі керування розподіленими просторово-часовими процесами з неперервно визначеним критерієм і відомою функцією зовнішньодинамічних збурень	77
3.5.1. Задачі керування початковими, крайовими та початково-крайовими збурюючими факторами	77
3.5.2. Керуюче-моделюючі вектори задачі	78
3.5.3. Особливості розв'язання задач у необмеженій просторовій області та на необмеженому часовому інтервалі	80
4. Лабораторні тестування розв'язків задач математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем	82
4.1. Проблеми математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем у лабораторних умовах	82
4.2. Загальні вимоги до програмно-моделюючого комплексу	84
4.3. Інтерфейсна частина програмно-моделюючого комплексу	86
4.4. Математична частина програмного комплексу	88
4.5. Ілюстрація та аналіз результатів математичного моделювання просторово розподілених динамічних процесів	89
4.6. Приклади студентських програмно-моделюючих комплексів	90
4.7. Програмно-моделюючий комплекс Віталія Стояна (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2008)	91
4.7.1. Інтерфейс опису логіки процесу	91
4.7.2. Інтерфейс введення просторово-часової області	93
4.7.3. Визначення початкового стану процесу	96
4.7.4. Визначення крайового стану процесу	97

4.7.5. Інтерфейс визначення бажаного стану.....	100
4.7.6. Інтерфейс розв'язання задачі та аналізу обчислень	101
4.8. Система комп'ютерно-аналітичного моделювання Олександра Єршова та Олександра Ємцова (НТТУ "Київський політехнічний інститут", 2011)	102
4.8.1. Інтерфейс постановки задачі	104
4.8.2. Особливості реалізації графічної частини комплексу.....	109
4.8.3. Особливості виведення результатів розв'язання задачі	110
4.8.4. Приклад розв'язання задачі.....	111
Список рекомендованої літератури	113

Наукове видання

СТОЯН Володимир Антонович

**ОСНОВИ
ЛАБОРАТОРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 7,0. Наклад 100. Зам. № 217-8242.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № КЗ.
Підписано до друку 10.07.17

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет",
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
[http: vpc.univ.kiev.ua](http://vpc.univ.kiev.ua)
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02