

**Зеленський К.Х.,  
Кіт Г.В.,  
Чумаченко О.І.**

# **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ**

+

01011101

0101101011010101 01011010110101011101

1101011010111010101

010111010101

110101011101010110101101 11101

01010110

+ 0101101011010101110101

+ 0101101011010111010101011101

004.9(075.8)  
3-48

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВІДКРИТИЙ МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ «УКРАЇНА»

*К.Х. ЗЕЛЕНСЬКИЙ, Г.В. КИТ, О.І. ЧУМАЧЕНКО*

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ**

*Навчальний посібник*

Київ  
Університет «Україна»  
2014.

004.94(075,8)

УДК 518.12(07)  
ББК 22.17я73  
3-48.

Рекомендовано до друку  
Науково-методичною радою Університету "Україна"  
(Протокол № 1 від 23.10.13)

Зеленський К. Х., Кіт Г. В., Чумаченко О. І.

Рецензенти: *Ю.І. Бадаєв*, доктор технічних наук, професор,  
зав. кафедрою інформаційних технологій та програмування  
Київської Національної академії водного транспорту  
ім. П. Конашевича-Сагайдачного.  
*М. К. Печурін*, доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри комп'ютерних систем та мереж НАУ

**Зеленський К.Х.**

3-48 Комп'ютерне моделювання систем: навч. посіб./Зеленський К.Х.,  
Кіт Г.В., Чумаченко О.І. – К: Університет "Україна", 2014. – 315 с.  
ISBN 978-966-388-491-2

Навчальний посібник складається із трьох основних частин. Перша частина присвячена викладенню загальних основ комп'ютерного моделювання складних систем. У другій частині розглядаються методи статистичного та імітаційного моделювання систем. Третя частина присвячена методам моделювання динамічних систем управління. У доданку викладено методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни та програмне забезпечення. Для студентів вищих навчальних закладів.  
Іл. Бібліогр. 54 найм.

УДК 518.12(07)  
ББК 22.17я73

ISBN 978-966-388-491-2

©К.Х. Зеленський, Г.В. Кіт, О.І. Чумаченко, 2014  
© Університет «Україна», 2014

482159

НТБ ВНТУ  
м. Вінниця

---

# Зміст

---

<b>Загальні питання моделювання систем</b>	<b>7</b>
<b>1 Задачі та методи моделювання</b>	<b>8</b>
1.1 Приклади математичних моделей	8
1.2 Класифікація і методи дослідження математичних моделей	10
1.3 Основні властивості математичних моделей	15
1.4 Загальна схема математичного моделювання	16
1.5 Поняття моделі та способи побудови моделей	20
1.5.1 Способи побудови моделей	20
1.5.2 Задачі моделювання	21
1.6 Методи і процес моделювання	21
1.6.1 Процес моделювання	23
1.7 Системний підхід до побудови моделей	24
1.8 Приклади розв'язання задач	25
<b>2 Методи збору інформації та даних про систему</b>	<b>28</b>
2.1 Ідентифікація закону розподілу	28
2.2 Апроксимація функціональної залежності	36
2.3 Приклади розв'язання задач	44
2.4 Завдання для самостійної роботи	51
2.5 Контрольні запитання	51
<b>Статистичне та імітаційне моделювання</b>	<b>53</b>
<b>3 Статистичне моделювання</b>	<b>54</b>
3.1 Метод Монте-Карло	54
3.2 Рівномірні випадкові послідовності (РВП)	55
3.3 Загальні методи генерування випадкових послідовностей із заданими законами розподілу	59
3.4 Спеціальні методи генерування випадкових послідовностей із деякими законами розподілу	61
3.5 Моделювання багатовимірних випадкових векторів	65
3.6 Теорія масового обслуговування	67

3.6.1	Ланцюги Маркова . . . . .	67
3.6.2	Робота телефонного комутатора . . . . .	70
3.6.3	Система масового обслуговування із очікуванням . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Імітаційне моделювання</b>	<b>79</b>
4.1	Основні етапи імітаційного моделювання . . . . .	79
4.2	Побудова концептуальної моделі . . . . .	81
4.3	Логічні структурні схеми імітаційних моделей . . . . .	81
4.4	Операторні схеми імітаційних моделей . . . . .	85
4.5	Реалізація імітаційних моделей . . . . .	86
4.6	Імітаційна модель управління запасами . . . . .	86
4.7	Регресійні моделі . . . . .	87
4.7.1	Загальна характеристика методів та задач регресійного аналізу . . . . .	88
4.7.2	Теоретичні основи методу . . . . .	92
4.7.3	Статистичний аналіз точності . . . . .	93
4.7.4	Перевірка адекватності моделі . . . . .	94
4.7.5	Реалізація побудови моделі . . . . .	94
4.8	Основні поняття планування експерименту . . . . .	99
4.8.1	Плани для моделей, що містять взаємодії . . . . .	103
4.8.2	Плани для квадратичних моделей . . . . .	107
4.8.3	Ортогональні центральні композиційні плани . . . . .	107
4.8.4	Ротатабельні центральні композиційні плани . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Оптимізація процесів за статистичними моделями</b>	<b>118</b>
5.1	Основні проблеми прийняття рішень за поліноміальними статистичними моделями . . . . .	119
5.1.1	Математична теорія експерименту в техніко-економічних задачах . . . . .	119
5.1.2	Комплекс завдань, які вирішуються на основі аналізу поліноміальної моделі . . . . .	120
5.2	Загальні принципи оцінки значення виходу, що передбачається . . . . .	130
5.3	Принципи пошуку компромісного рішення . . . . .	133
5.4	Оперативне керування за поліноміальною моделлю . . . . .	136
5.5	Методи самоорганізації моделей . . . . .	140
5.5.1	Основні поняття теорії самоорганізації моделей . . . . .	140
5.5.2	Алгоритми самоорганізації моделей . . . . .	143
5.5.3	Однорядний алгоритм самоорганізації моделей . . . . .	144
5.5.4	Багаторядний алгоритм самоорганізації моделей . . . . .	150
5.5.5	Приклади розв'язання задач . . . . .	154
5.6	Завдання для самостійної роботи . . . . .	158
5.7	Контрольні запитання . . . . .	159
	<b>Динамічні моделі</b>	<b>160</b>
<b>6</b>	<b>Методи дослідження динамічних моделей</b>	<b>164</b>

<b>7</b>	<b>Синтез оптимальних лінійних систем за квадратичного критерію</b>	<b>169</b>
7.1	Синтез систем, оптимальних по мінімуму енергії	169
7.1.1	Формулювання задачі	169
7.1.2	Синтез оптимального управління	172
7.1.3	Управління обмежено за величиною	176
7.2	Розв'язання задачі 1	179
7.3	Квадратичний критерій	180
7.4	Синтез оптимальних лінійних систем по квадратичному критерію	183
7.4.1	Задача про регулятор стану	183
7.4.2	Синтез регулятора стану для інваріантної системи	186
7.4.3	Задача про регулятор виходу	188
7.4.4	Задача слідкування	190
7.5	Синтез оптимального управління лінійними системами	193
7.5.1	Розробка алгоритмів оптимального управління	194
7.5.2	Розв'язання рівнянь Ріккати	194
7.5.3	Розв'язання рівняння стану	197
<b>8</b>	<b>Автоматизоване проектування СУ</b>	<b>199</b>
8.1	Постановка задачі оптимізації САУ	199
8.2	Сутність процесу проектування	202
8.3	Автоматизація проектування	203
8.4	Системи автоматизованого синтезу (СИАС)	204
8.4.1	Загальна характеристика проблеми синтезу МСАР	204
8.4.2	Основні вимоги до динамічних властивостей МСАР	207
8.5	Синтез пристроїв, що спостерігають	208
8.5.1	Принципи побудови	209
8.5.2	Спостерігачі повної розмірності	211
8.5.3	Спостерігачі зниженої розмірності	212
8.5.4	Приклад синтезу естиматора для одновимірного об'єкта	215
8.5.5	Модальні регулятори	216
8.6	Фільтри Калмана	216
8.6.1	Попередні зауваження	217
8.6.2	Стохастичні моделі динамічних систем	218
	Неперервний випадок	218
	Дискретний випадок	219
8.6.3	Розв'язання задачі фільтрації за Калманом	220
	Дискретний (рекурентний) фільтр Калмана	221
8.6.4	Неперервний фільтр Калмана	221
	Алгоритм на ґрунті інформаційної матриці	222
8.6.5	Субоптимальні алгоритми фільтрації	223
8.7	Алгоритми стохастично оптимального управління	224

<b>9</b>	<b>Адаптивні системи управління</b>	<b>226</b>
9.1	Огляд	226
9.2	Ідентифікація об'єктів управління і моделей випадкових сигналів	227
9.2.1	Моделі об'єктів і випадкових сигналів	228
9.2.2	Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК) Ідентифікація динамічного об'єкта моделлю Приклад. Випадкові сигнали	229 229 231 232
9.2.3	Узагальнений РМНК (УРМНК)	233
9.2.4	Рекурентний метод максимальної правдоподібності (РММП)	233
9.3	Ідентифікація у замкненому контурі	236
9.3.1	Параметрична ідентифікація за відсутності збурень Умови параметричної ідентифіковності Пряма ідентифікація об'єкта управління	236 237 238
9.3.2	Параметрична ідентифікація при зовнішніх збуреннях	240
	Література	242
<b>A</b>	<b>Лабораторний практикум</b>	<b>245</b>
A.1	Вступ	245
A.2	Лабораторні роботи № 1–3	246
A.2.1	Метод зворотних функцій	246
A.2.2	Метод відбору	249
A.2.3	Метод суперпозицій	251
A.2.4	Комбінація методу суперпозицій і методу відбору	251
A.2.5	Моделювання деяких спеціальних розподілів	252
A.2.6	Первинна обробка статистичних даних Вибірка. Емпірична функція розподілу. Гістограма Перевірка статистичних гіпотез	256 256 259
A.2.7	Порядок виконання роботи	261
A.3	Лабораторна робота № 4	263
A.3.1	Теоретичні відомості.	263
A.3.2	Процес моделювання	268
<b>B</b>	<b>Програми реалізації алгоритмів моделювання систем</b>	<b>271</b>
B.1	Моделювання системи масового обслуговування	271
B.2	Многоканальна СМО із очікуванням	274
B.3	Імітаційне моделювання мереж масового обслуговування	296
B.3.1	Програма реалізації мережі МО	298
B.4	Програма реалізації алгоритму оптимального управління	307

---

## Загальні питання моделювання систем

---

Сьогодні не існує закінченої теорії побудови й аналізу математичних моделей. Тому багато фахівців вважають, що це є скоріше мистецтвом, ніж наукою. Проте практика накопичила багатий досвід побудови моделей, що дає змогу сформулювати деякі загальні принципи і підходи до математичного моделювання.

Метою вивчення дисципліни "Моделювання систем" студентами напрямів „Прикладна математика" та „Комп'ютерні науки" є надання їм початкових знань і навичок, необхідних для побудови і дослідження математичних моделей складних природних, технічних, екологічних, соціально-економічних та організаційних систем і процесів, навчання студентів основним положенням, загальним підходам та методам математичного моделювання.

Передбачається, що студенти мають підготовку з математичного аналізу, алгебри, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь та обчислювальних методів у межах, встановлених вимогами відповідних освітньо-професійних програм. Крім того, передбачається, що студенти знайомі з основами фізики в рамках програми нетехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів.



---

## Задачі та методи моделювання

---

Математичне моделювання є одним із основних сучасних методів дослідження. Загалом під моделюванням розуміється процес дослідження реальної системи, який включає побудову моделі, її дослідження та перенесення одержаних результатів на досліджувану систему. Модель можна визначити як об'єкт, що у деяких відношеннях збігається із прототипом і є засіб опису, пояснення та/або прогнозування його поведінки. Під математичною моделлю реальної системи (процесу) розуміється сукупність співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів тощо), які визначають характеристики станів системи залежно від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, впливів), початкових умов та часу. Загалом, за визначенням М.М. Амосова, математична модель – це система, що відображає іншу систему.

### 1.1. Приклади математичних моделей

З курсу фізики середньої школи відомо, що для опису руху матеріальної точки під дією постійної сили  $\mathbf{F}$  можна використовувати таке рівняння:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{F} t^2}{2m} \quad (1.1)$$

де  $\mathbf{r}(t)$  – радіус-вектор точки в момент часу  $t$ ,  $\mathbf{r}_0$  – радіус-вектор точки у початковий момент часу,  $\mathbf{v}_0$  – початкова швидкість,  $m$  – маса. Це рівняння можна розглядати як найпростішу математичну модель руху.

У складніших випадках, коли сила не є стала, модель (1.1) може бути перетворена різними способами. Зокрема, якщо відома величина сили для кожного моменту часу, математичну модель руху можна записати у вигляді системи, що складається із диференціального рівняння другого степеня і двох початкових умов:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (1.2)$$

Якщо для кожного моменту часу відомий радіус-вектор точки, математичну

модель руху можна подати у вигляді степеневого ряду

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=0} + \frac{t^3}{3!} \left. \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right|_{t=0} + \dots + \frac{t^n}{n!} \left. \frac{d^n\mathbf{r}}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (1.3)$$

У багатьох випадках математичні моделі складних процесів подаються у вигляді систем диференціальних рівнянь. Зокрема, Г.І. Марчук запропонував таку модель взаємодії імунної системи організму людини з антигеном:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V; \\ \frac{dC}{dt} = \xi Q(t - \tau) - \mu_C(C - C_0); \\ \frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V)F; \\ \frac{dM}{dt} = \sigma V - \mu_M M. \end{cases} \quad (1.4)$$

Тут:  $V$  – кількість вірусів в організмі;  $C$  – кількість плазмових клітин, що виробляють антитіла;  $F$  – кількість антитіл;  $M$  – маса тканини, пошкодженої вірусами;  $\beta$  – коефіцієнт розмноження вірусів, тобто кількість нових вірусів, яку створює кожен з них у середньому за одиницю часу;  $\gamma$  – коефіцієнт, що відображає ймовірність нейтралізації вірусу при його зустрічі із антигеном ( $\gamma = \text{const}$ );  $\xi$  – коефіцієнт, що відображає ймовірність збудження реакції створення каскаду плазмових клітин одним антигеном;  $Q(t - \tau)$  – швидкість утворення плазмових клітин;  $\tau$  – інкубаційний період, тобто час, потрібний для організації каскаду клітин і початку масового синтезу антитіл;  $\mu_C$  – коефіцієнт, обернено пропорційний часу життя плазмових клітин;  $C_0$  – імунологічний рівень плазмових клітин в організмі;  $\rho$  – коефіцієнт відтворення антитіл за одиницю часу з розрахунку на одну клітину;  $\mu_f$  – коефіцієнт, обернено пропорційний середньому часу розпаду антитіл;  $\eta$  – коефіцієнт, що відображає ймовірність розпаду антитіла при нейтралізації ним вірусу;  $\sigma$  – коефіцієнт, що відображає ступінь пошкодження органа одним вірусом за одиницю часу;  $\mu_M$  – коефіцієнт, обернено пропорційний часу відновлення пошкодженої частини органа в  $e$  разів.

Рівняння системи (1.4) відображають відповідно швидкість зростання кількості вірусів, плазмових клітин, антитіл та маси пошкодженої тканини в організмі. При цьому позитивні доданки відповідають їх утворенню, а негативні – розпаду.

Операторне рівняння (рівняння Шредингера)

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi, \quad (1.5)$$

де  $\hbar$  – стала Планка,  $\psi$  – хвильова функція,  $t$  – час,  $x, y, z$  – координати частинки,  $m$  – її маса,  $U$  – потенціальна енергія,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , можна розглядати як математичну модель, що описує зміну стану квантової частинки за часом.

Математична модель електростатичного поля, що відображає теорему Гауса, записується як інтегральне рівняння

$$\oint (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q, \quad (1.6)$$

де  $\mathbf{E}$  – напруженість електричного поля,  $d\mathbf{S}$  – елемент поверхні. Ліва частина рівняння (1.6) виражає потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню, всередині якої знаходиться електричний заряд.

Динамічна модель міжгалузевого балансу Леонтьєва має вигляд матричного рівняння

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}(t), \quad (1.7)$$

де  $\mathbf{x}(t)$  – вектор-колонка обсягів виробництва,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  – вектор-колонка абсолютних швидкостей приросту виробництва (похідних обсягів виробництва за часом),  $\mathbf{A}$  – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат,  $\mathbf{B}$  – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого накопичення на одиницю приросту відповідних видів продукції),  $\mathbf{c}(t)$  – вектор-колонка споживання.

## 1.2. Класифікація і методи дослідження математичних моделей

Типовими завданнями моделювання можуть бути пошук оптимальних чи наближених до оптимальних рішень; визначення властивостей системи; встановлення взаємозв'язків між її елементами або характеристиками, а також між характеристиками системи та зовнішнього середовища тощо.

Складні системи можна охарактеризувати функціями, які вони виконують (процесами, які відбуваються у них), структурою, а також поведінкою у часі. Відповідно розрізняють функціональні, структурні, інформаційні та поведінкові (подійні) моделі систем. Функціональна модель системи описує сукупність функцій, що їх виконує система (сукупність процесів, які відбуваються у ній), характеризує склад та взаємозв'язки її функціональних підсистем. Структурна модель відображає побудову системи; інформаційна – відношення між елементами системи, а також між системою і зовнішнім середовищем. Остання будується у вигляді структур даних, що характеризують елементи системи, зовнішнє середовище та взаємозв'язки між ними. Інформаційна модель також може мати вигляд рівнянь регресії або кореляційних рівнянь, які відображають зв'язок між рядами даних, статистичного опису сукупності даних, порівняльних статистичних характеристик наборів даних тощо. Поведінкова модель відображає динаміку функціонування системи, зміни її станів, події, що відбуваються у ній, тощо.

Розглянемо детальніше цю класифікацію на прикладі такої системи, як тверде тіло. Функціональні моделі мають відображати процеси, що відбуваються у системі. Для твердого тіла це можуть бути моделі, які описують теплопровідність, електропровідність, дифузію, коливання кристалічної решітки, поглинання та розсіювання світла тощо. Структурні моделі відображають побудову твердого тіла. Для ідеального кристалу таку модель можна сформулювати як сукупність елементів симетрії кристалічної решітки (просторова або точкова група симетрії), як геометричний опис елементарної решітки кристалу, як віднесення до деякого класу структур (наприклад, “об'ємно центрована кубічна решітка”, “решітка типу алмазу”) тощо. Інформаційними моделями твердого тіла є, наприклад, залежності його фізичних властивостей (питомий електричний опір, період кристалічної решітки, питома теплоємність

та інші) від зовнішніх параметрів (температура, тиск, напруженість електричного або магнітного полів тощо), спектри оптичного поглинання, рентгенограми тощо. Інформаційними моделями будуть також взаємозв'язки між різними властивостями, зокрема залежність коефіцієнту дифузії деякої домішки від умісту інших домішок. Ці моделі можна побудувати у вигляді таблиць даних, графіків або функцій.

Існує багато різних класифікацій математичних моделей. Зокрема, виділяють моделі статичні та динамічні, диференціальні й інтегральні, детерміністичні та стохастичні, лінійні та нелінійні, геометричні, топологічні, імітаційні, оптимізаційні тощо. Найбільш поширеними формами запису математичних моделей є інваріантна, аналітична, алгоритмічна та схемна (графічна). В інваріантній формі моделі записують за допомогою алгебраїчних, диференціальних, інтегральних та інших рівнянь і нерівностей без урахування методу подальшого аналізу моделі. Аналітична форма – це запис моделі у вигляді аналітичного розв'язку вихідних рівнянь інваріантної моделі. Алгоритмічна форма є запис алгоритму дослідження вихідної моделі, тобто послідовності операцій, що здійснюються при такому дослідженні. Моделі, записані у графічній формі, – це геометричні та топологічні об'єкти, графи, схеми, графіки тощо.

З погляду практичного використання важливою є класифікація моделей за методом їх подальшого аналізу. При цьому виділяють моделі, які досліджують аналітично, чисельно та за допомогою апаратного моделювання (аналогових обчислювальних машин).

У першому випадку вихідна математична модель має бути перетворена у таку систему співвідношень, яка дає можливість отримати необхідний результат аналітичними методами. Зазвичай результатом аналітичного дослідження є побудова формул, що задають шукані величини в явному вигляді; перетворення рівнянь до вигляду, для якого відомий аналітичний розв'язок, тощо. Результатами аналітичного дослідження також можуть бути якісні висновки про наявність особливих точок, асимптотику, монотонність і однозначність залежності, стійкість розв'язку та інші. Розвиток комп'ютерної техніки та програмного забезпечення дає змогу використовувати для аналітичних досліджень математичних моделей прикладні пакети символічних обчислень, такі як Maple, Махута, Reduce тощо, що значно розширює можливості здійснення аналітичних досліджень.

Утім, для отримання аналітичного розв'язку часто необхідно спростити вихідну математичну модель. Типовими прикладами таких спрощень є розкладання складної залежності у ряд Тейлора або Фур'є та врахування лише кількох перших членів цього ряду, нехтування деякими величинами, які вважаються малими, тощо. У більшості реальних випадків математична модель не може бути перетворена до вигляду, який дає можливість отримати аналітичний розв'язок за умови збереження її адекватності. Тому для дослідження моделі використовують інші методи.

Чисельне дослідження має ширшу сферу застосування, ніж аналітичне. Це зумовлено тим, що обчислювальні методи аналізу можуть застосовуватися до ширшого кола математичних моделей. Принциповим недоліком обчислювальних методів є те, що з їх допомогою можна виконувати лише аналіз окремих випадків. Тому розв'язки,

що отримують, не будуть повними. Вони характеризують поведінку та властивості систем, що досліджуються, і процесів лише за певних умов, які мають бути чітко визначеними.

Ще однією проблемою при використанні обчислювальних методів може бути некоректність поставленої задачі, тобто відсутність у неї розв'язку, його нестійкість або наявність кількох розв'язків. Умову стійкості можна сформулювати в такому вигляді:

$$\|\delta y\| \rightarrow 0 \quad \text{якщо} \quad \|\delta x\| \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

де  $\delta x$  – вектор похибок вихідних даних,  $\delta y$  – вектор похибок результатів.

Нестійкість розв'язку означає, що малі похибки значень вихідних параметрів можуть призводити до великих похибок результатів, що отримуються. У таких випадках застосування обчислювальних методів не має сенсу. Можливі ситуації слабкої стійкості (поганої зумовленості), коли умова (1.8) формально виконується, але похибка результату є неприпустимо велика.

Прикладами коректних задач можуть бути знаходження коренів полінома; розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, і детермінант матриці, складеної із коефіцієнтів рівнянь, є відмінний від нуля; розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь тощо.

Для дослідження математичних моделей, що побудовані у вигляді диференціальних рівнянь та їх систем, застосовують також аналогове моделювання. У цьому разі використовують спеціальні установки, які називають аналоговими обчислювальними машинами. Як правило, це електричні ланцюги, що містять активні опори, конденсатори, котушки індуктивності та джерела струму. Залежності сили току та напруги від часу у таких ланцюгах описуються різноманітними диференціальними рівняннями. Це дає змогу отримувати розв'язки відповідних рівнянь у чисельному або графічному вигляді, виконуючи вимірювання відповідних електричних величин.

При дослідженні складних систем і процесів використовують також методи, оснований на дослідженні їх аналогів. Аналогами називають різні за змістом процеси, що описуються одними й тими самими математичними моделями. Це дає можливість вивчати складні для експериментального дослідження природні, технічні та соціально-економічні системи за допомогою інших методів. Часто існування аналогів зумовлено дією більш загальних законів, тому дослідження аналогів сприяє глибшому розумінню систем і процесів, що досліджуються.

Класичними прикладами аналогів є фізичні процеси перенесення – теплопровідність, дифузія та електропровідність. Густина потоку тепла  $\mathbf{j}_T$ , потоку частинок  $\mathbf{j}_n$  та електричного струму  $\mathbf{j}_E$  підпорядковуються відповідно, першому закону Фур'є для теплопровідності, першому закону Фіка для дифузії та закону Ома:

$$\mathbf{j}_T = -\lambda_T \nabla T; \quad \mathbf{j}_n = -D_T \nabla n; \quad \mathbf{j}_E = -\sigma \nabla \varphi; \quad (1.9)$$

де  $\lambda_T$  – коефіцієнт теплопровідності,  $T$  – температура,  $D$  – коефіцієнт дифузії,  $n$  – концентрація дифундуючих частинок,  $\sigma$  – питома електрична провідність,  $\varphi$  – потенціал електричного поля.

Для нестационарних процесів також спостерігається аналогія:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T; \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = D \nabla^2 \mathbf{n}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\sigma}{C^*} \nabla^2 \varphi, \quad (1.10)$$

де  $t$  – час,  $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $C^* = dq/d\varphi$  – питома електрична ємність матеріалу,  $q$  – електричний заряд.

Закон подібності між теплопровідністю та електричним струмом має вигляд:

$$\frac{\sigma}{C^* a} \frac{t_E}{t_T} \left( \frac{l_T}{l_E} \right)^2 = 1, \quad (1.11)$$

де  $l, t$  – відповідні довжини та часи. Цей закон містить два коефіцієнти подібності  $\frac{t_E}{t_T}$  і  $\frac{l_E}{l_T}$ , а також критерій подібності (число Бойкена)  $Beu = \frac{\sigma}{C^* a}$ .

Закон подібності між теплопровідністю та дифузією має вигляд:

$$\frac{a}{D} \frac{t_T}{t_D} \left( \frac{l_D}{l_T} \right)^2 = 1, \quad (1.12)$$

У цьому разі коефіцієнтами подібності є  $\frac{l_T}{l_D}$  і  $\frac{t_T}{t_D}$ , а критерієм подібності – число Льюїса  $Le = \frac{a}{D}$ .

Розглянемо як приклад математичну модель дифузії домішки у твердому тілі.

Вихідну модель у разі вільної дифузії можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{j}}_n & = -D(\mathbf{r}, t) \text{ grad } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t); \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} & = \text{div} (D(\mathbf{r}, t) \text{ grad } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)); \\ \mathbf{n}(\mathbf{r}_0, t) & = \varphi(t); \\ \mathbf{n}(\mathbf{r}, t_0) & = \psi(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (1.13)$$

де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор.

Модель (1.13) не має аналітичного розв'язку. Але за деяких умов вона може бути перетворена до моделей, що можна досліджувати аналітично. Наприклад, однією з типових задач дифузії є одновимірна дифузія із необмеженого однорідного плоского джерела у півнескінченне однорідне тіло при сталому коефіцієнті дифузії. Така модель дифузії широко використовується при аналізі багатьох процесів хіміко-термічної обробки металів, процесів створення твердотілих електронних приладів тощо. Для цього випадку, якщо можна нехтувати присутністю домішки в тілі при  $t = 0$ , модель (1.13) набирає вигляду:

$$\begin{cases} \mathbf{j} & = -D \frac{dn}{dx}; \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} & = D \frac{d^2 \mathbf{n}}{dx^2}; \\ \mathbf{n}(0, t) & = \mathbf{n}_0; \\ \mathbf{n}(x, 0) & = \mathbf{n}_0 \quad (x = 0), \end{cases} \quad (1.14)$$

Із системи (1.14) можна одержати таке рівняння, що описує концентрацію в довільний момент часу в довільній точці тіла:

$$n(x, t) = n_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Dt}}, \quad (1.15)$$

де

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx. \quad (1.16)$$

У дійсності зроблені припущення або не виконуються взагалі, або виконуються лише приблизно. Зокрема, тіло, в яке дифундує домішка, зазвичай буває не зовсім однорідним. Тому коефіцієнт дифузії у точці залежить від її радіус-вектора. Крім того, він залежить також від концентрації домішки і, внаслідок цього, від часу. Реальні тіла завжди скінченні, а джерела домішки обмежені. Якщо цими обставинами нехтувати не можна, то модель (1.13) не має аналітичного розв'язку й її дослідження слід виконувати за допомогою обчислювальних методів.

Загальна схема чисельного дослідження системи (1.13) може бути такою. На першому етапі задають початковий розподіл концентрації домішки  $n(x, 0)$ , крок за часом  $\Delta t$  і крок за координатою  $\Delta x$ . Це дозволяє обчислити похідну

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{n(x + 2\Delta x, 0) - 2n(x, 0) + n(x - 2\Delta x, 0)}{4\Delta x^2} \quad (1.17)$$

для будь-якої точки тіла. За її значеннями можна розрахувати швидкості зміни концентрації у відповідних точках для початкового моменту часу. Після цього знаходять розподіл концентрації домішки для наступного моменту часу:

$$n(x, \Delta t) = n(x, 0) + \left. \frac{dn}{dt} \right|_{t=0} \Delta t. \quad (1.18)$$

Потім визначають нові значення похідної  $\left. \frac{d^2 n}{dx^2} \right|_{x, t=\Delta t}$ , нові швидкості зміни концентрації в усіх точках і значення концентрації для наступного моменту часу  $t = 2\Delta t$ . Продовжуючи цю процедуру, можна отримати розподіл домішки у твердому тілі для будь-якого моменту часу.

Аналогове дослідження системи (1.13) може ґрунтуватися на тотожності математичних моделей процесів дифузії та теплопровідності або електропровідності.

У загальному вигляді математична модель для розрахунку розподілу температури у твердому тілі може бути такою:

$$\begin{cases} \bar{j}_T & = -\lambda_T(\mathbf{r}, t) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t); \\ \frac{\partial T}{\partial t} & = \operatorname{div} (\lambda_T(\mathbf{r}, t) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)); \\ T(\mathbf{r}_0, t) & = \zeta(t); \\ T(\mathbf{r}, t_0) & = \zeta(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (1.19)$$

Вимірювання розподілу температури у деяких випадках є простіша задача, ніж вимірювання розподілу концентрації домішки. Тоді розподіл концентрації можна знайти таким чином. На першому етапі визначають параметри системи, для якої будуть вимірювати розподіл температури. Потім експериментально визначають розподіл температури. Після цього з використанням критеріїв подібності його перераховують у розподіл концентрації.

Важливий клас математичних моделей складних систем становлять імітаційні моделі. При імітаційному моделюванні відтворюють елементарні явища, що відбуваються в досліджуваній системі, зі збереженням їх структури, взаємозв'язків та послідовності протікання. Це дає змогу вивчати розвиток системи у часі, розв'язувати складніші задачі порівняно з аналітичним моделюванням, дає можливість враховувати наявність дискретних і неперервних елементів, нелінійність характеристик елементів системи, випадкові впливи та інші ефекти. Варіантами імітаційного моделювання є метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло) і метод статистичного моделювання. Метод Монте-Карло передбачає багаторазове відтворювання процесів, що є реалізації випадкових величин або функцій, та подальшу статистичну обробку отриманих результатів. Він використовується для моделювання випадкових величин та функцій, статистичні характеристики яких попередньо були отримані як розв'язки аналітичних задач. Метод статистичного моделювання використовується для дослідження випадкових впливів на характеристики систем або процесів, що досліджуються.

### **1.3. Основні властивості математичних моделей**

До основних властивостей математичних моделей належать їх скінченність, спрощеність, наближеність, повнота, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик та відношень, властивих оригіналу. Її зумовлено обмеженістю ресурсів часу, пам'яті ЕОМ тощо, потрібних для розробки й аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що у деякому сенсі вона має бути простішою за оригінал. У цьому полягає сенс моделювання, оскільки у противному разі доцільніше досліджувати оригінал. Спрощення досягають шляхом нехтування другорядними, несуттєвими для досягнення мети моделювання властивостями оригіналу. При побудові моделей використовують принцип руху від простого до складного. Тобто, спочатку будують найпростішу можливу модель системи (як правило, такі моделі можна знайти у фаховій літературі). Потім перевіряють її адекватність. Якщо простіша модель неадекватна, то визначають, чим зумовлено її неадекватність. Зазвичай причинами є нехтування у змістовній моделі деякими факторами, що істотно впливають на досліджувану систему, або надмірна спрощеність математичної моделі.

Типовими прикладами наближень, які використовують при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, завдання обмежень на точність чисельних розрахунків, заміна нелінійних залежностей лінійними тощо. Ступінь наближеності моделі визначається компромісом між необхідністю від-



ображення всіх суттєвих властивостей оригіналу й обмеженістю часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів.

Зі скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі визначається метою та завданнями моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а істинність – її відповідність сукупності наявних знань про об'єкт дослідження. Критеріями адекватності є відображення всіх істотних властивостей та параметрів об'єкта дослідження, якісно правильне відображення суттєвих зв'язків між параметрами, а при кількісному дослідженні також мала різниця між результатами моделювання та наявними емпіричними даними. Адекватність є обов'язкова вимога до будь-якої моделі, що використовується для дослідження реальних систем. Але у деяких випадках застосовують відносно прості моделі, що не є адекватні. Це доцільно, зокрема, під час розробки алгоритмів аналізу моделей (на першому етапі розробляють алгоритми аналізу неадекватних моделей, які потім використовують як елементи більш складної моделі), у навчальному процесі (зокрема, коли треба дослідити явища, які у реальних системах та процесах спотворюються іншими ефектами) тощо. Слід пам'ятати, що істинність моделі не є гарантія її адекватності. Зокрема, це може бути зумовлено накопиченням похибок за необхідності виконання великого обсягу розрахунків. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинні. Типовими прикладами є регресійні моделі, які дають змогу прогнозувати поведінку досліджуваної системи у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, але не відображають наявних знань про побудову, зв'язки та внутрішні процеси у ній.

#### **1.4. Загальна схема математичного моделювання**

Загальна схема побудови математичної моделі є така. Насамперед необхідно визначити, для чого необхідна модель. Це має принципове значення для обрання методу її побудови. Існують два основні підходи. У першому випадку математична модель ґрунтується на відомих теоретичних даних про закономірності поведінки системи або протікання процесу. У цьому разі математична модель, що отримується, буде системою відомих з теорії моделей. Перевагами такого підходу є відповідність структури моделі реальній структурі об'єкта дослідження. Завдяки цьому всі параметри моделі мають реальний фізичний, економічний, технічний або інший зміст. Такі моделі дають змогу аналізувати не тільки загальні властивості системи як цілого, але також і поведінку окремих її елементів, зміни структури, визначати відносні внески різних факторів у властивості, що спостерігаються, тощо. Недоліками цього підходу зазвичай є складність цих моделей і, внаслідок цього, можливість накопичення похибок при розрахунку вихідних характеристик об'єкта дослідження.

У другому випадку моделю є рівняння регресії (або система таких рівнянь), за допомогою якого можна прогнозувати, як будуть змінюватися характеристики системи або процесу при зміні вхідних змінних. Рівняння регресії відповідає розгляду системи як чорної скриньки. Тому такі моделі принципово неможливо використовувати для оцінювання внеска окремих підсистем у формування загальних властивостей системи, аналізу структури системи, зв'язків між її елементами тощо.

Коефіцієнти рівнянь регресії часто не мають якогось реального змісту. Проте регресійні моделі відрізняються простотою й у багатьох випадках дають можливість отримувати точніші оцінки вихідних характеристик систем та процесів, що досліджуються.

У багатьох випадках при побудові моделей складних систем і процесів використовують комбінації цих підходів. Зокрема, часто базову модель будують як систему відомих теоретичних моделей, параметри яких визначають за допомогою регресійного аналізу.

Якщо модель будують у вигляді системи відомих теоретичних моделей, наступним етапом її розробки є визначення концептуальної або змістовної (фізичної, технічної, економічної тощо) моделі об'єкта дослідження. Змістовну модель будують на основі відомих теоретичних та емпіричних даних про досліджуваний об'єкт. На цьому етапі визначають суттєві для задачі, що розв'язується, елементи системи, взаємозв'язки між ними, взаємозв'язки системи й навколишнього середовища, можливі стани системи, закономірності поведінки системи у цілому та її окремих елементів тощо. Потім переходять від змістовного до формального опису, тобто відбирають теоретичні моделі, із яких будуватиметься загальна математична модель об'єкта дослідження, визначають межі застосування зроблених у них припущень і спрощень.

Далі процедура розробки моделі залежить від обрання методики її подальшого аналізу. На сьогодні найбільш поширеним методом дослідження математичних моделей є їх чисельний аналіз за допомогою ЕОМ. Для цього можна використовувати різноманітні математичні, статистичні та інші прикладні пакети програмного забезпечення, зокрема Microsoft Excel, MathCad, MathLab, Mathematica, Statistica тощо. Але слід мати на увазі, що не існує алгоритмів чисельних розрахунків, які б давали змогу отримати задовільні розв'язки для всіх задач деякого класу. Якість роботи алгоритму залежить не тільки від типу задачі, але й від її конкретних умов та параметрів. Тому обрання алгоритму є нетривіальна задача. Як правило, якість алгоритму (й моделі взагалі) визначають порівнянням результатів, що отримують за різними алгоритмами розрахунків, зокрема виконанням розрахунків для моделей із відомими характеристиками, а також порівнянням результатів моделювання із відомими даними про систему, що моделюють (якісними закономірностями її поведінки, кількісними значеннями її параметрів тощо). У типових прикладних пакетах, як правило, не вказується конкретний алгоритм, за яким виконуються розрахунки. Більше того, досить часто не вказується також математичний метод, на якому базується цей алгоритм. Це суттєво ускладнює попередній аналіз можливості застосування прикладних пакетів у дослідженні тієї чи іншої моделі, а також пошук джерел похибок моделювання.

Важливою характеристикою результатів моделювання є похибка результатів, що отримують. Можна виділити такі її основні складові: похибка математичної моделі, похибка вихідних даних, похибка розрахункового алгоритму та похибка обчислень.

Похибка математичної моделі пов'язана із тим, що будь-яка модель є лише наближене відображення об'єкта моделювання. Джерелами цієї похибки є припущення, що роблять при розробці змістовної моделі об'єкта дослідження, а також наближе-

ність при побудові її математичної моделі. Зокрема, наближеність моделі (1.13) визначається припущеннями про однорідність твердого тіла, незалежність коефіцієнта дифузії від концентрації домішки та від часу, нехтуванням впливу внутрішніх та зовнішніх електромагнітних полів на поведінку електрично заряджених домішок тощо. Якщо необхідно, похибку моделі можна зменшити шляхом урахування додаткових факторів, що впливають на вимірювані характеристики.

Похибка вихідних даних пов'язана із похибками вимірювань, використанням наближених значень параметрів системи, заміною генеральних сукупностей вибірками обмеженого обсягу тощо. Вона може бути зменшена тільки шляхом виконання повторних або додаткових експериментів та спостережень.

Похибка розрахункового алгоритму пов'язана зі спрощеннями та припущеннями, що роблять при заміні вихідної математичної моделі алгоритмом обчислень. Зокрема, більшість методів чисельного знаходження інтегралів використовує заміну площі під кривою, що інтегрується, на суму площ відносно простих фігур. При цьому похибка інтегрування суттєво залежить від того, які саме фігури буде обрано для наближення, а також від кількості ділянок, на які розбивають інтервал інтегрування. Багато алгоритмів використовують ітераційні процедури, що теоретично можуть виконуватися нескінченно довго, поступово наближуючись до точного розв'язку. Але у практиці час виконання ітерацій має бути обмеженим. Тому необхідно заздалегідь встановити точність результату, яка задовольняє дослідника.

Похибка обчислень пов'язана з необхідністю обмеження кількості значущих цифр у числах, з якими виконують розрахунки.

Похибки розрахункового алгоритму та обчислень належать до усувних похибок, оскільки вони можуть бути зменшені до необхідного рівня шляхом внесення змін до алгоритму та підвищення точності розрахунків.

Похибки вихідних даних та моделі належать до неусувних похибок. Це треба розуміти так: ці похибки не можна усунути або зменшити математичними методами, але точність моделювання може бути підвищена шляхом обрання більш адекватної моделі (цей етап є неформальний, і для його реалізації необхідно використовувати не тільки математичні методи, а й дані відповідних конкретних наук), а також підвищення точності вихідних даних.

При побудові моделі необхідно прагнути до балансу похибок різного типу. Це зумовлено тим, що похибка моделювання визначається найбільшою із них. Підвищувати точність розрахунків на деякому етапі моделювання недоцільно, якщо вихідні дані для нього мають суттєво меншу точність або якщо результати цього етапу потім використовують для розрахунків зі значно більшою похибкою. Можна рекомендувати таку послідовність балансу похибок. На першому етапі необхідно визначити похибку вихідних емпіричних даних, що використовуватимуться при розрахунках, та характер впливу цієї похибки на результати моделювання. Загалом похибка результатів перевищує похибку вихідних даних і є тим вища, що складніша модель. Але при цьому слід розрізнити систематичну та випадкову похибку моделювання. У деяких випадках похибка визначення сталих коефіцієнтів, що входять до моделі, призводить лише до появи систематичної похибки. Якщо цей коефіцієнт викори-

стовують у моделі як самостійний доданок, то його похибка зумовлює збільшення або зменшення результату на одну й ту саму величину. При цьому якісна поведінка моделі та всі інші її кількісні характеристики не змінюються. Якщо коефіцієнт використовують як загальний множник, то відхилення вихідних результатів будуть пропорційні похибці його визначення. При цьому якісна поведінка моделі також залишається правильною. У складніших випадках похибки вихідних даних можуть призводити до якісних змін у поведінці моделі.

Розглянемо, наприклад, модель, задану у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ax^2 + bx + c, \quad (1.20)$$

для якої емпірично встановлено такі значення коефіцієнтів:  $a = 2$ ;  $b = 4$ ;  $c = 2$ . Для цих значень величина  $dy/dx = 0$  у точці  $x = -1$ , в інших точках вона більша за нуль. Відповідно, функція  $y(x)$  є зростаюча і має одну точку перегину, в якій її похідна дорівнює нулю. Істинні значення коефіцієнтів моделі відрізняються від емпірично встановлених. Нехай, наприклад, вони становлять  $a = 1,9$ ;  $b = 4,1$ ;  $c = 1,9$ . Тоді маємо дві точки  $x_1 \approx -1,484$  та  $x_2 \approx -0,674$ , де похідна дорівнює нулю. При  $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$  функція зростає, а при  $x \in [x_1, x_2]$  – спадає. Відповідно,  $x_1$  є точка максимуму, а  $x_2$  – точка мінімуму функції  $y(x)$ . Якщо істинні значення коефіцієнтів моделі становлять  $a = 2,14$ ;  $b = 3,9$ ;  $c = 1,9$ , похідна є додатна для всіх  $x$ , і функція не має точок екстремуму. Така різниця поведінки функції  $y(x)$  може бути істотною з точки зору змістовної моделі системи. Зокрема, якщо  $y(x)$  – потенційна енергія фізичної системи, то ми отримуємо три суттєво різні фізичні моделі. Залежно від істинних значень коефіцієнтів система може мати точки стійкої та нестійкої рівноваги, тільки точку нестійкої рівноваги або ж взагалі не мати точок рівноваги. Якщо похибка вихідних даних може призводити до якісно різних результатів моделювання, подальший аналіз такої моделі має сенс лише у випадках, коли ставиться завдання визначити можливі сценарії розвитку системи, її можливі стани тощо. Інакше необхідно підвищити точність вихідних даних, побудувати іншу модель або змінити завдання дослідження. Якщо похибка вихідних даних дає можливість досягти мети моделювання, наступним етапом є оцінка та порівняння похибок проміжних і підсумкових розрахунків. За результатами порівняння робиться висновок про збалансованість похибок, необхідність доробки алгоритму чи підвищення точності розрахунків на деякому етапі, якщо точність результатів не задовольняє дослідника, або про можливість спрощення алгоритму чи зменшення точності деяких розрахунків, коли точність, що отримується на відповідному етапі, є надмірна.

Після побудови математичної моделі необхідно визначити її адекватність. Для цього треба порівняти результати моделювання із емпіричними даними, що отримано при близьких умовах, а також із результатами, отриманими на інших моделях. Інколи для перевірки адекватності треба залучати незалежних експертів, які не брали участі в розробці моделі.

За результатами перевірки адекватності моделі приймають рішення щодо можливості її використання. Результатом перевірки може бути рішення про необхідність доробки (корегування) та оптимізації моделі. При корегуванні уточнюють

перелік суттєвих параметрів моделі, обмеження, функціональні зв'язки між параметрами тощо. Під оптимізацією розуміють спрощення моделі при збереженні заданого рівня її адекватності. Основними критеріями оптимальності є витрати часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів при використанні моделі.

### **1.5. Поняття моделі та способи побудови моделей**

Моделлю називається представлення об'єкта, системи чи поняття у деякій абстрактній формі, що є зручна для наукового дослідження.

У загальному випадку модель має структуру, зображену на рис. 1.1. Тут  $X$  – множина вхідних змінних системи,  $Y$  – множина вихідних змінних системи,  $P$  – множина параметрів,  $F$  – функція, функціонал, алгоритм або формальне представлення залежності змінних  $Y$  від змінних  $X$ .

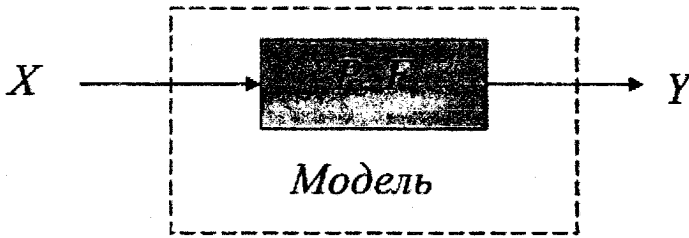


Рис. 1.1. Загальна структура моделі

Наприклад, моделі масового обслуговування описуються набором вхідних змінних, що складається із інтенсивності вхідного потоку вимог на обслуговування, тривалості обслуговування вимоги кожним пристроєм, ймовірностей вибору маршруту. набір вихідних змінних моделі масового обслуговування складається з таких змінних як інтенсивність вихідного потоку вимог, середня довжина черги у місцях накопичення вимог та інших. В якості параметрів моделі масового обслуговування можуть розглядатись кількість пристроїв обслуговування, наявність черг у місцях накопичення вимог, наявність обмежень на кількість місць у чергах та інші. В якості алгоритму – алгоритм розрахунку вихідних змінних моделі за значенням вхідних змінних, який залежно від складності моделі може мати вид простого розрахунку за математичними формулами або вид алгоритму імітації системи.

#### **1.5.1. Способи побудови моделей**

Існують два способи побудови моделей. При першому способі у результаті ретельного вивчення системи встановлюються закони функціонування системи, які потім відтворюються за допомогою моделі. Поведінку системи, таким чином, досліджують на моделі. Параметри  $P$  моделі у цьому випадку пов'язані з реальними процесами, що протікають у системі, і мають фізичну інтерпретацію. Тому моделі такого типу називають фізичними моделями.

При другому без усякого фізичного обґрунтування припускається вид залежності  $F$ , невідомі параметри якої  $P$  потім відшукуються за даними спостережень за змінними системи  $X, Y$ . Параметри  $P$  у цьому разі не зв'язані з фізикою реальних процесів, що протікають у системі, або, точніше, цей зв'язок досліднику залишається невідомим. Тому моделі такого типу називають нефізичними моделями.

В літературі трапляються також терміни моделей типу сірої та чорної скриньки, які еквівалентні термінам фізичної та нефізичної моделі. Для фізичної моделі закони функціонування системи досліднику відомі, тому скринька є прозора, сіра. Для нефізичної моделі сутність системи залишається для дослідника скритою, потаємною, тобто скринька є чорна.

### 1.5.2. Задачі моделювання

Однакові об'єкти моделювання залежно від цілі та задачі дослідження можуть мати різні моделі.

Серед задач моделювання виділимо такі задачі: задача моделювання, задача управління, задача ідентифікації, задача оптимізації, задача прогнозування.

Задача моделювання (або пряма задача) полягає у відшуванні значень вихідних змінних  $Y$  при відомих значеннях вхідних змінних  $X$ , відомій моделі  $F$  та визначених параметрах  $P$  (див. рис. 1.1).

Задача управління (або зворотна задача) полягає у відшуванні таких значень вхідних змінних  $X$ , що забезпечують задані значення вихідних змінних  $Y$  при відомій моделі  $F$  та фіксованих значеннях параметрів  $P$ .

У формулюванні задачі ідентифікації відомими являються множина вхідних змінних  $X$ , множина вихідних змінних  $Y$  та множина моделей  $F$ . Потрібно визначити єдину модель  $f$  із множини запропонованих моделей  $F$ , і визначити її параметри  $P$ , що забезпечують при вхідних значеннях  $X$  вихідні значення  $Y$ .

У постановці задачі оптимізації відомими являються модель  $F$ , множина можливих вхідних значень  $X$  та критерій оптимізації  $K$ , а від дослідника вимагається знайти значення вхідних змінних  $X$ , значення параметрів  $P$  та значення вихідних змінних  $Y$ , що задовольняють заданому критерію оптимізації  $K$ .

Задача прогнозування формулюється так, що при відомих для дослідника значеннях вхідних та вихідних значень моделі  $X_t, Y_t$  до моменту часу  $t$  та заданому часі прогнозування  $T$  потрібно визначити модель  $F$  та її параметри  $P$ , які забезпечують найліпший прогноз  $Y_{t+T}$ .

Стисло визначення методів моделювання представлені на рис. 1.2.

### 1.6. Методи і процес моделювання

Серед великої кількості методів моделювання, що існують, виділимо такі методи: аналітичне моделювання, математичне моделювання, імітаційне моделювання.

Моделювання аналітичне, якщо представлення залежності  $F$  вихідних змінних  $Y$  від вхідних її змінних  $X$  має аналітичний вигляд, тобто представлений у вигляді відомих аналітичних функцій. Нагадаємо, що функція називається аналітичною, якщо вона розкладається у ряд Тейлора. Аналітичні функції диференційовні безліч разів і тому до них можуть застосовуватись методи математичного аналізу. Пере-

## ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ

<b>Моделювання:</b>	відомі $X, P, F \Rightarrow$ знайти $Y$
<b>Управління:</b>	відомі $Y, P, F \Rightarrow$ знайти $X$
<b>Ідентифікації:</b>	відомі $X, Y$ , множина $F \Rightarrow$ знайти $f \in F, P$
<b>Оптимізації:</b>	відомі $F$ , критерій $K \Rightarrow$ знайти $P, X, Y$
<b>Прогнозування:</b>	відомі $X_b, Y_b, T \Rightarrow$ знайти $F, P, Y_{t+T}$

Рис. 1.2. Задачі моделювання

вагою цього методу моделювання є можливість отримання залежності  $y = f(x)$  в явному вигляді і застосування до неї методів класичного математичного аналізу. Якщо є можливість побудувати аналітичну модель системи, то завжди віддають перевагу цьому методу моделювання. Зауважимо, що відшукання залежності  $y = f(x)$  може виявитись настільки складним, що досліднику доведеться застосовувати спеціальне програмне забезпечення, а для деяких систем доводиться відмовлятися від пошуку абстрактної залежності  $y = f(x)$  і задовольнятися наближеним розв'язком, що знаходиться чисельними методами.

Деякі системи настільки складні, що не дивлячись на те, що опис їх функціонування піддається опису аналітичними функціями, знаходження залежності  $y = f(x)$  в явному вигляді виявляється неможливим. Наприклад, усі задачі математичного програмування мають досить простий аналітичний опис, але розв'язок задачі може бути знайдений тільки у результаті виконання певної кількості кроків. Іншими словами, відомий алгоритм відшукання точного розв'язку задачі, але сам розв'язок не може бути записаний в аналітичній формі. Такий метод моделювання називають математичним моделюванням. Зауважимо, що алгоритм  $F$  відшукання точного розв'язку задачі може бути реалізований дослідником самостійно, за допомогою спеціального програмного забезпечення або за допомогою чисельних методів.

Існують системи, опис яких не піддається опису аналітичними функціями, але процес функціонування їх може бути описаний алгоритмом імітації. Під імітацією розуміють відтворення за допомогою комп'ютерної програми процесу функціонування складної системи у часі. У результаті багатократних прогонів імітаційної моделі дослідник отримує інформацію про властивості реальної системи. Такий метод моделювання називають імітаційним моделюванням.

Стисло визначення методів моделювання представлені на рисунку 1.3.

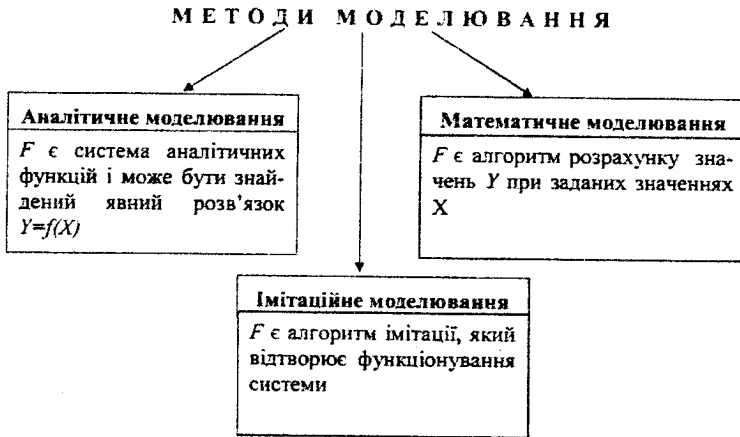


Рис. 1.3. Методи моделювання

### 1.6.1. Процес моделювання

Процес моделювання складається з кількох етапів. На першому етапі дослідник визначає мету та задачу моделювання. На другому етапі, виходячи з мети та задачі моделювання, дослідник приступає до вербального опису системи. Опис набору змінних моделі, разом із описом структури системи та формулюванням цілі та задачі дослідження складає концептуальну модель системи. Виходячи з концептуальної моделі системи та з огляду на вибір інструментальних засобів, дослідник робить вибір теоретичної бази, на основі якої буде побудована модель системи. Отже, обравши теоретичну базу моделювання, дослідник має описати систему, що розглядається, обраними елементами формального опису і визначити для них усі необхідні параметри. Формальне представлення системи має вигляд схеми, в якій указані зв'язки між елементами системи та зв'язки із зовнішнім середовищем й указані параметри елементів системи. У формальній моделі міститься також інформація, яким чином будуть знайдені вихідні змінні моделі в результаті моделювання. Наприклад, якщо в якості теоретичної бази моделювання обрані засоби мереж масового обслуговування, формальна модель представляється зображенням мережі масового обслуговування, що складена за умовою задачі, з визначенням числових значень вхідних змінних і параметрів, а також формули розрахунку вихідних змінних моделі, що є мета моделювання.

На третьому етапі дослідник приступає до створення моделі. Спочатку виконується реалізація моделі за допомогою обраного програмного забезпечення. Потім виконується верифікація моделі, тобто перевірка алгоритму моделювання на відповідність задуму моделювання. Наприклад, змінюють значення вхідних змінних і спостерігають як модель реагує на таке змінювання. Якщо реакція моделі відповідає логіці її функціонування, то модель вважається правильною. Завершується створення моделі перевіркою адекватності моделі, що полягає у порівнянні значень



вихідних змінних об'єкта, що моделюється, і моделі при однакових значеннях вхідних змінних. Очевидно, що таку перевірку можна здійснити тільки якщо відомі деякі значення вхідних і вихідних змінних об'єкта.

Четвертий етап – це дослідження моделі. Результати моделювання стають корисними, якщо проведене змістовне дослідження моделі відповідно до цілі моделювання. Експерименти, що проводяться з моделлю, мають бути спочатку сплановані, потім – проведені, і наприкінці – статистично оброблені. Наприклад, якщо при дослідженні технологічного процесу обробки деталей була поставлена мета – виявлення місць накопичення деталей, то у результаті моделювання слід не тільки указати ці місця накопичення та обсяги накопичення, але й дослідити, які фактори впливають на зменшення накопичення деталей, і запропонувати заходи щодо зменшення обсягів накопичення деталей.

Аналіз результатів моделювання складається із оцінки точності результатів моделювання, оцінки стійкості результатів моделювання та оцінки чутливості результатів моделювання.

Формування висновків та пропозицій є завершальний етап моделювання, на якому підводяться підсумки та висловлюються думки щодо напрямків подальшого дослідження об'єкта моделювання.

Звісно, що процес моделювання може бути представлений етапами тільки у звіті про результати моделювання. У ході моделювання досліднику доводиться неодноразово повертатись до попередніх етапів і уточнювати постановку задачі, формальний опис моделі, алгоритм реалізації або план проведення експериментів, поступового наближаючись до мети.

## **1.7. Системний підхід до побудови моделей**

Задачею системного аналізу являється формування опису системи, що відповідає меті дослідження системи [44]. Опис системи складається з:

- 1) набору вхідних змінних системи із указуванням їх основних характеристик;
- 2) набору вихідних змінних системи, визначення яких забезпечує досягнення мети дослідження;
- 3) меж системи із указуванням того, що являється для системи її зовнішнім середовищем;
- 4) елементів системи із указуванням їх основних властивостей;
- 5) зв'язків між елементами системи.

Системний підхід до дослідження систем означає, що дослідник вивчає функціонування системи у цілому, не концентруючи свою увагу на окремих її частинах. Системний підхід ґрунтується на визнанні факту, що навіть найліпше функціонування окремих підсистем та елементів системи не гарантує найліпшого функціонування всієї системи у цілому, оскільки завжди існує взаємодія між частинами системи. Всім системам притаманні характеристики, що являються перепорою на шляху до поліпшення функціонування системи:

– змінюваність – жодна реальна система не являється статичною впродовж тривалого проміжку часу, тому модель, що будується, має обмежений термін користу-

вання;

- наявність оточуючого середовища - в моделі має бути передбачений вплив зовнішнього середовища, який часто має випадковий характер;
- протivoінтуїтивна поведінка - виникає як результат того, що інколи наслідок проявляється пізніше причини;
- тенденція до погіршення характеристик функціонування - окремі частини системи зношуються, у результаті чого погіршується їх робота, що своєю чергою призводить до не передбачуваних наслідків;
- взаємозалежність - усі частини системи залежать одна від одної, внаслідок чого погіршення характеристик функціонування однієї частини системи неминуче впливає на характеристики функціонування інших частин системи;
- організація - існує ієрархія підсистем, що підпорядковується цільовому призначенню системи.

Будь-яка система об'єктивна і в той же час суб'єктивна з точки зору вибору меж системи та її елементів. Дійсно, одному й тому ж самому об'єктивному процесу дослідник може поставити у відповідність різні системи і тільки досвід дослідника, його інтуїція і здатність творчо мислити допомагає здійснити вибір між багатьма варіантами і виконати дослідження системи найліпшим способом.

Моделі, побудовані із застосуванням системного підходу, отримали назву системних моделей.

Опис системи разом із указуванням мети та задачі дослідження складає сутність концептуальної моделі системи. Назва "концептуальна" походить від латинського слова *conceptio*, що означає "сприйняття".

Умовно можна виділити такі етапи створення концептуальної моделі системи:

- Визначення цілі дослідження системи (орієнтація).
- Вибір рівня деталізації системи (стратифікація).
- Визначення елементів системи (деталізація).
- Визначення впливу зовнішнього середовища (локалізація).
- Визначення зв'язків між елементами системи та із зовнішнім середовищем (структуризація).

## 1.8. Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт - технологічний процес обробки деталей.

Розв'язання. Функціонування технологічного процесу обробки деталей залежить, насамперед, від інтенсивності потоку деталей, що надходять на обробку. Структура технологічного процесу описується кількістю та послідовністю технологічних операцій, характеристиками обладнання, призначеного для виконання кожної операції технологічного процесу, кількістю працівників, зайнятих у кожній операції. До характеристик обладнання відносять такі величини, як тривалість виконання технологічної операції, кількість деталей, що одночасно оброблюються, кількість пристроїв, що призначені для виконання технологічної операції. Складне обладнання, як прави-

ло, часто псується у процесі експлуатації, тому слід передбачити у моделі можливість виходу з ладу обладнання й описати процес виникнення та усунення несправностей обладнання.

Основним показником ефективності технологічного процесу є інтенсивність вихідного потоку деталей. Важливими показниками є також коефіцієнт завантаження обладнання, завантаження працівників, зайнятих у технологічному процесі. У деяких задачах розглядається проблема накопичення деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом.

Відповідь: Множина вхідних змінних технологічного процесу обробки деталей може складатись залежно від цілі моделювання з таких змінних:

- інтенсивність надходження деталей на початок технологічного процесу,
- кількість операцій технологічного процесу,
- кількість та характеристики обладнання, призначеного для виконання кожної операції технологічного процесу,
- кількість працівників, зайнятих у кожній операції технологічного процесу;
- ймовірності виходу з ладу обладнання,
- тривалість виконання кожної операції технологічного процесу,
- кількість місць для зберігання деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом – для кожної операції технологічного процесу окремо.

Множина вихідних змінних технологічного процесу обробки деталей може складатись залежно від цілі моделювання з таких змінних:

- інтенсивність вихідного потоку деталей на кінець технологічного процесу,
- завантаження обладнання,
- завантаження працівників,
- обсяги накопичення деталей у місцях зберігання.

В якості параметрів технологічного процесу обробки деталей залежно від цілі моделювання можуть розглядатись:

- кількість операцій технологічного процесу,
- кількість обладнання, що забезпечує виконання технологічного процесу,
- кількість працівників, зайнятих у технологічному процесі;
- наявність місць для зберігання деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом.

**Задача 2.** Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо об'єкт – система управління транспортним рухом на перехресті.

Відповідь: Множина вхідних змінних системи управління транспортним рухом на перехресті може складатись залежно від цілі моделювання із таких змінних:

- інтенсивність надходження автомобілів на ділянку транспортного руху,
- ймовірності вибору маршруту слідування автомобіля.

Множина вихідних змінних системи управління транспортним рухом на перехресті може складатись залежно від цілі моделювання із таких змінних:

- обсяги накопичення автомобілів на кожному напрямку руху,

- середній час очікування автомобіля на кожному напрямку руху,
- максимальний час очікування автомобіля на перехресті.

В якості параметрів системи управління транспортним рухом залежно від цілі моделювання можуть розглядатись:

- структура перехрестя (Т-образне перехрестя, Х-образне, кільце),
- кількість напрямків руху,
- кількість рядів руху для кожного напрямку руху,
- параметри управління транспортним рухом – наявність керування світлофорними об'єктами, наявність дорожніх знаків,
- кількість світлофорних об'єктів та їх характеристики – кількість фаз управління та їх структура, тривалість горіння червоного, жовтого та зеленого світла у кожному напрямку впродовж кожної фази,
- параметри автомобілів, що надходять, – їх габарити, маршрути слідування, швидкість руху.

**Задача 3.** Поставте задачу моделювання для системи обслуговування клієнтів у банку з метою визначення кількості клієнтів, що перебувають у приміщенні банку.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження клієнтів у банк, інтенсивності обслуговування клієнтів у касирів банку та у клерків залежно від виду банківської операції, ймовірності звернення клієнта до касира або до клерка знайти середню та найбільшу кількість клієнтів у банку, що обслуговуються або очікують обслуговування, якщо відомі кількість касирів, кількість клерків, кількість різних банківських операцій та ймовірності їх затребування клієнтом банку, а також обслуговування клієнтів у банку.

**Задача 4.** Поставте задачу оптимізації для системи обслуговування клієнтів у банку з метою визначення найменшої кількості касирів та кількості клерків, що забезпечують обслуговування клієнтів за умови, що кількість клієнтів, які очікують обслуговування, не перевищує десяти.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження клієнтів у банк, інтенсивності обслуговування клієнтів у касирів банку та у клерків залежно від виду банківської операції, ймовірності звернення клієнта до касира або до клерка визначити найменшу кількість касирів, що забезпечує найбільшу кількість клієнтів у чергах меншу або рівну десяти, якщо відома процедура обслуговування клієнтів у банку.

**Задача 5.** Поставте задачу управління для системи транспортного руху на перехресті, керованому світлофорами, з метою забезпечення найменшого накопичення автомобілів на перехресті.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження автомобілів у кожному напрямку руху, кількості рядів руху у кожному напрямку, інтенсивності від'їзду автомобілів з перехрестя при зеленому сигналі світлофора визначити тривалості горіння зеленого та червоного сигналу світлофору у кожному напрямку руху, що забезпечують найменше значення спостережуваної найбільшої кількості автомобілів, які очікують переїзду перехрестя, якщо відомі правила дорожнього руху на перехресті.

## Методи збору інформації та даних про систему

### 2.1. Ідентифікація закону розподілу

Найважливішою характеристикою випадкової величини являється її закон розподілу. Знання закону розподілу дозволяє із певною ймовірністю прогнозувати наступне значення випадкової величини, знаходити ймовірність влучення випадкової величини у заданий інтервал, а також моделювати випадкову величину за допомогою генераторів випадкових чисел. Випадкову величину можна замінити у моделі її середнім значенням тільки тоді, коли дослідник упевнений, що це не вплине на результати моделювання. Наприклад, у випадку, коли відхилення випадкової величини від середнього її значення у десятки разів менше за середнє значення, напевно, можна припустити, що випадкова величина є детермінована із значенням, що дорівнює середньому значенню випадкової величини.

Послідовність дій, що виконують для ідентифікації закону розподілу, наведена на рис. 2.1.

<b>Ідентифікація закону розпо- ділу випадкової величини</b>	Формування масиву значень випадкової величини
	Побудова гістограми частот
	Формування гіпотези про вид закону розподілу
	Оцінка значень параметрів закону розподілу
	Перевірка відповідності за критерієм згоди

Рис. 2.1. Послідовність дій для ідентифікації закону розподілу випадкової величини

Розглянемо детально кожну дію.

Формування масиву спостережуваних значень випадкової величини. Із попередніх спостережень за випадковою величиною або у ході експериментів отримують певну, бажано велику (більше сотні) кількість значень і запам'ятовують у файлі для проведення подальшого дослідження.

Побудова гістограми частот. Розглянемо, як будується гістограма частот. Спо-

чатку, переглядаючи масив значень випадкової величини  $\zeta$ , знаходять найменше  $\min$  та найбільше  $\max$  значення випадкової величини, що спостерігається.

Далі, весь інтервал спостережуваних значень випадкової величини від мінімального до максимального значення поділяють на рівні інтервали так, що кожний інтервал має довжину

$$h = \frac{\max - \min}{k}, \quad (2.1)$$

де  $k$  – кількість інтервалів.

Рекомендована кількість інтервалів  $k$  за великої кількості (більше 100) спостережень складає 20. Потім, переглядаючи масив випадкових значень, для кожного  $i$ -го інтервалу підраховують кількість влучень випадкової величини у цей інтервал  $n_i$ . Гістограма частот представляється прямокутниками, що мають висоту, яка дорівнює кількості влучень  $n_i$ , та ширину, що дорівнює довжині інтервалу (рис.2.2).

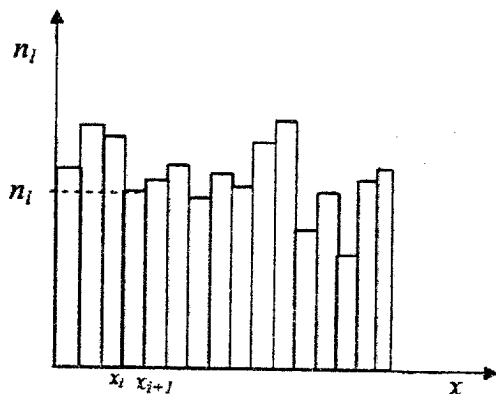


Рис. 2.2. Гістограма частот

За видом гістограми частот роблять припущення про вид закону розподілу. Вид гістограми частот порівнюють із відомими законами розподілу випадкових величин. Для зручності наведемо найбільш вживані у цілях моделювання закони розподілу в таблицях (2.3 та 2.4). Прийняті такі позначення:  $f(x)$  – густина закону розподілу випадкової величини  $\zeta$ ,  $\mu$  – математичне сподівання випадкової величини  $\zeta$ ,  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення випадкової величини. У таблицях крім графічного зображення закону розподілу наведений зв'язок середнього значення та середнього квадратичного відхилення випадкової величини із параметрами закону.

*Оцінка значень параметрів закону розподілу.*

З формули закону розподілу, що наведена у табл. 2.3 та 2.4, дослідник робить висновок про параметри закону розподілу, які потрібно визначити. Переважна більшість параметрів закону розподілу може бути оцінена на основі фундаментальних статистичних характеристик випадкової величини таких, як максимальне та мінімальне значення, середнє значення, середнє квадратичне відхилення.

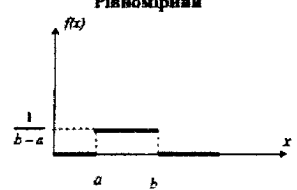
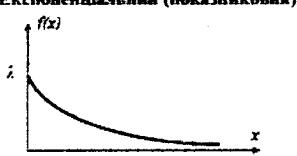
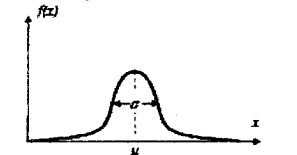
Закони розподілу неперервних випадкових величин	
Графічне представлення щільності закону розподілу	Формульне представлення щільності закону розподілу
<p><b>Рівномірний</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$ $\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
<p><b>Експоненціальний (показниковий)</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$
<p><b>Нормальний (Гауса)</b></p> 	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$ $\mu = \mu, \quad \sigma = \sigma$

Рис. 2.3. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Нагадаємо формули оцінки середнього  $\mu$  та дисперсії  $\sigma$  випадкової величини  $\zeta$ :

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad (2.2)$$

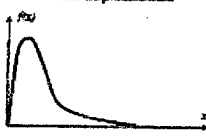
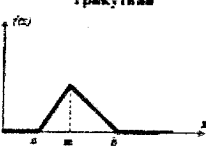
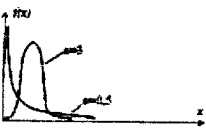
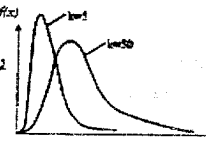
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\zeta_i - \mu)^2, \quad (2.3)$$

де  $n$  – кількість генерованих випадкових чисел, а хвиляста лінія підкреслює, що розраховується статистична оцінка величини.

У випадку дискретного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини  $\zeta$  у значення  $i$  визначається значенням ймовірності  $P(i)$ . У випадку неперервного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини  $\zeta$  в  $i$ -й інтервал визначається за формулами:

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad (2.4)$$

Продовження таблиці 2.1

Графічне представлення щільності закону розподілу	Формульне представлення щільності закону розподілу
<p style="text-align: center;"><b>Логнормальний</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $\mu = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ $\sigma = \sqrt{\frac{e^{\sigma^2} - 1}{\sigma^2}}$
<p style="text-align: center;"><b>Трикутний</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)}, & a \leq x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)}, & m \leq x \leq b \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$ $\mu = \frac{a+m+b}{3}$ $\sigma = \frac{\sqrt{(m-a)^2 + (b-a)^2 + (m-b)^2}}{\sqrt{6}}$
<p style="text-align: center;"><b>Вейбулла</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} kx^{k-1} e^{-x^k}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $\mu = \frac{k}{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$ $\sigma = k \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \Gamma\left(\frac{2}{k}\right)^2}{k} \right]^{\frac{1}{2}}$
<p style="text-align: center;"><b>Ерланга</b></p> 	$f(x) = \begin{cases} \lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\mu = k \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma = \sqrt{k} \cdot \frac{1}{\lambda}$

25

Рис. 2.4. Закони розподілу неперервних випадкових величин

де  $f(x)$  – густина закону розподілу випадкової величини  $\zeta$ ,  $F(x)$  – закон розподілу випадкової величини  $\zeta$ ,  $(x_{i-1}, x_i)$  – інтервал.

Наприклад, у випадку експоненціального закону розподілу теоретичне значення частоти влучення в інтервал може бути визначене за формулою:

$$p_i^T = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = (e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}), \quad (2.5)$$

де параметр  $\lambda$  має бути оцінений за формулою (див. табл.2.3):

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}. \quad (2.6)$$



А у випадку закону розподілу Пуассона – за формулою:

$$p_i^T = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad (2.7)$$

де параметр  $\lambda$  оцінюється за формулою (див. табл.2.5):

$$\lambda = \tilde{\mu} = \bar{\sigma}. \quad (2.8)$$

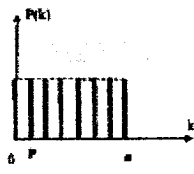
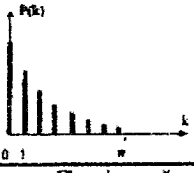
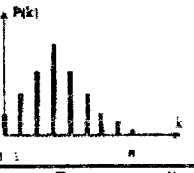
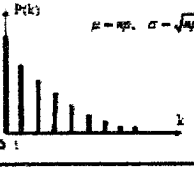
Закони розподілу дискретних випадкових величин	
Графічне представлення закону розподілу	Формульне представлення закону розподілу
<p><b>Рівномірний</b></p> 	$P(k) = \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $\mu = \frac{n}{2}, \quad \sigma = \frac{n}{2\sqrt{3}}$
<p><b>Пуассона</b></p> 	$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $\mu = \lambda, \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$
<p><b>Біноміальний</b></p> 	$P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $\mu = np, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$
<p><b>Геометричний</b></p> 	$P(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$ $\mu = (1-p)p, \quad \sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Рис. 2.5. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Перевірка відповідності досліджуваних випадкових чисел обраному закону розподілу.

Відповідність обраного закону розподілу заданим випадковим числам (при кількості спостережуваних чисел більше ста) перевіряється за критерієм згоди  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^T)^2}{np_i^T}, \quad (2.9)$$

де  $n_i$  – кількість влучень в  $i$ -й інтервал, що спостерігається,  $np_i^T$  – кількість влучень в  $i$ -й інтервал, що очікується за теоретичним законом розподілу. З формули (2.9) видно, що основною ідеєю критерію  $\chi^2$  є вимірювання розбіжності між кількістю влучень в  $i$ -й інтервал, що спостерігається, та очікується за теоретичним законом розподілу (рис. 2.6).

Розраховане значення  $\chi^2$  порівнюється з табличним значенням критерію  $\chi_{кр}^2$ , яке взяте при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  та кількості ступенів свободи, рівній кількості інтервалів у гістограмі частот  $k$  мінус 1 мінус кількість параметрів закону розподілу. Якщо  $\chi^2 < \chi_{кр}^2$ , із довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що знайдений закон розподілу відповідає значенням випадкової величини  $\zeta$ , що спостерігається. Інакше потрібно змінити параметри розподілу або припустити інший закон розподілу.

Довірча ймовірність результату означає, що якщо, наприклад, за допомогою критерію  $\chi^2$  з'ясували відповідність закону випадкових чисел закону розподілу, то гарантувати цю відповідність можемо не більше як із ймовірністю 0,95. Із ймовірністю 0,05 могло статися, що спостережувані значення випадково виявилися не відповідними закону розподілу. Довірча ймовірність означає також, що, якщо провести повторний експеримент із тією самою випадковою величиною, то із ймовірністю 0,95 результат ідентифікації закону розподілу співпаде із отриманим попереднім результатом.

Критерій  $\chi^2$  має такі обмеження для застосування: по-перше, кількість випадкових чисел має бути не менша за 100; по-друге, кількість влучань у кожний інтервал має бути більшою за 5:

$$n \geq 100, \quad n_i \geq 5, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.10)$$

Якщо кількість влучень в якийсь інтервал менша за 5, то потрібно об'єднати сусідні інтервали і домогтися, щоб кількість влучень стала більшою або рівною за 5. Допускається об'єднання як двох інтервалів, так і більше.

Якщо кількість досліджуваних чисел надто мала (менше ста), то потрібно застосувати критерій Колмогорова–Смірнова (або, як його ще називають,  $\lambda$ -критерій). За критерієм Колмогорова–Смірнова відповідність випадкових чисел, що спостерігаються, обраному закону розподілу оцінюється за значенням найбільшої абсолютної різниці [ ]:

$$\lambda = \sqrt{n} \max_i |w_i - w_i^T|, \quad w_i = \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}, \quad w_i^T = F(x_i), \quad (2.11)$$

де  $w_i$  – спостережувані значення сумарної частоти влучень в  $i$ -й інтервал,  $n_j$  – кількість влучень випадкової величини в  $j$ -й інтервал,  $n$  – кількість випадкових чисел, що спостерігаються,  $w_i^T$  – теоретичні значення сумарної частоти влучень в  $i$ -й інтервал, розраховані за законом розподілу  $F(x)$  випадкової величини  $\zeta$ ,  $n_i$  – середина

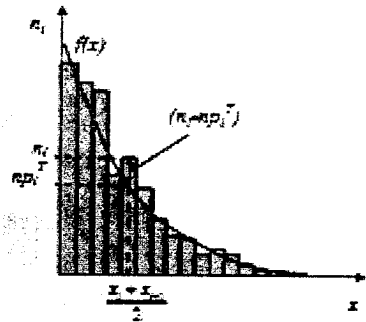


Рис. 2.6. До пояснення змісту критерію  $\chi^2$

$i$ -го інтервалу.

З формули (2.11) випливає, що на відміну від  $\chi^2$ -критерія  $\lambda$ -критерій порівнює сумарні частоти влучення в  $i$ -й інтервал (рис. 2.7).

Розраховане значення  $\lambda$ -критерію порівнюють з табличним значенням критерію, яке взяте при рівні значимості  $\alpha = 0,05$ . Якщо  $\lambda < \lambda_{кр}$ , із довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що випадкова величина  $\zeta$  має закон розподілу  $F(x)$ .

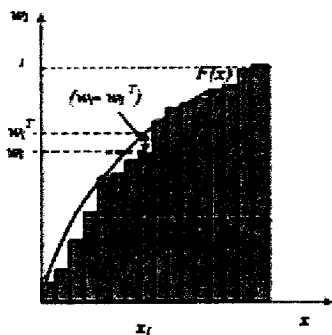


Рис. 2.7. До пояснення змісту критерію  $\lambda$ -критерію (Колмогорова-Смірнова

Смірнова  
вектор, числові значення якого дорівнюють кількості влучень в інтервали гістограми частот.

Для побудови функції закону розподілу в програмному забезпеченні Mathcad передбачені функції:

$runif(x, a, b)$ ,  $dunif(x, a, b)$  – для рівномірного закону розподілу та його густини;  
 $pnorm(x, \mu, \sigma)$ ,  $dnorm(x, \mu, \sigma)$  – для нормального закону розподілу та його густини;

$pxp(x, \lambda)$ ,  $dexp(x, \lambda)$  – для експоненціального закону розподілу та його густини;  
 $plnorm(x, \mu, \sigma)$ ,  $dlnorm(x, \mu, \sigma)$  – для логнормального закону розподілу та його густини;

$pwibull(x, s)$ ,  $dweibull(x, s)$  – для закону розподілу Вейбула та його густини;

$ppois(x, \lambda)$ ,  $dpois(x, \lambda)$  – для закону розподілу Пуасона та його густини;

$pbinom(x, p, c)$ ,  $dbinom(p, c)$  – для біноміального закону розподілу та його густини.

Значення критерію  $\chi^2_{кр}$  забезпечується Mathcad-функцією  $qchsq(0.95, m)$ , де перший параметр – це довірна ймовірність результату, а другий параметр – кількість ступенів свободи.

Реалізація ідентифікації закону розподілу засобами програмного забезпечення Mathcad Дані про значення випадкової величини зчитуються з файлу даних формату *prn*. Функція  $grup(v, w)$  виконує об'єднання сусідніх груп у разі, якщо кількість влучень менша п'яти. Об'єднання груп здійснюється одночасно для значень кількості влучень, що спостерігаються, та теоретичних, які передаються у функцію в якості аргументів. Результат перевірки відповідності за критерієм  $\chi^2$  виводиться за допомогою функції *if*.

Кількість інтервалів у випадку дискретної випадкової величини визначається кількістю значень, які вона приймає. Довжина інтервалу складає 1. Оскільки кількість значень випадкової величини, що спостерігається, мала, у даному випадку використовується  $\lambda$ -критерій, в якому порівнюються сумарні частоти влучення в інтервали. Зауважимо, що використання  $\lambda$ -критерію не вимагає об'єднання груп. Табличне значення  $\lambda_{кр}$  за рівня значимості 0,05 однакове для різних законів розподілу і складає 1,36. Тому функція *if* формує результат, порівнюючи знайдене значення  $\lambda$ -критерію з 1,36.

Ідентифікація закону розподілу випадкової величини. Зчитування значень випадкової величини, що спостерігається.  $A = \text{readprn}(\text{"random.prn"})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9.379 & 8.76 & 10.81 & 9.876 & 11.15 & 12.27 & 9.893 & 10.69 & 11.05 & 8.681 & 8.523 \\ 10.61 & 7.082 & 9.466 & 9.682 & 11.44 & 8.908 & 9.977 & 9.075 & 10.98 & 9.149 & 9.509 \\ 9.515 & 9.591 & 9.146 & 10.06 & 11.55 & 10.43 & 9.75 & 9.378 & 10.2 & 10.94 & 10.8 \\ 9.198 & 12.05 & 11.58 & 9.771 & 12.55 & 10.86 & 9.527 & 11.22 & 9.848 & 10.59 & 9.836 \\ 153 & 9.432 & 7.652 & 10.34 & 7.988 & 9.273 & 9.32 & 10.39 & 9.869 & 8.402 & 10.63 \\ 9.461 & 9.694 & 10.68 & 9.578 & 11.32 & 10.34 & 9.869 & 9.554 & 10.43 & 11.62 & 10.82 \\ 10.39 & 0.97 & 10.31 & 9.968 & 10.81 & 8.61 & 8.326 & 9.521 & 10.99 & 9.469 & 9.691 \end{bmatrix}$$

Формування масиву значень випадкової величини, що спостерігається.

$$j = \overline{0, \text{rows}(A) - 1}, \quad k = \overline{0, \text{cols}(A) - 1}; \quad \zeta_{j+k \cdot \text{rows}(A)_{j,k}}$$

Кількість значень у масиві  $n = \text{lengs}(\zeta)$ ,  $n = 700$ ,  $i = \overline{0, n - 1}$ .

Кількість інтервалів у гістограмі  $m = 20$ ,  $j = \overline{0, m}$ .

Довжина інтервалу  $\Delta x = 0,309$ ,  $\max(\zeta) = 12,55$ ,  $\min(\zeta) = 6,79$ .

Поділ на інтервали  $x_j = \min(\zeta) - \Delta x/2 + j \cdot \Delta x$ ;  $\text{length}(x) = 21$ .

$$x^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6.525 & 6.834 & 7.143 & 7.452 & 7.761 & 8.07 & 8.379 & 8.688 & 8.997 & 9.306 \end{bmatrix}$$

Кількість влучень в інтервал  $h = \text{hist}(x, \zeta)$ .

$$h^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 10 & 17 & 27 & 43 & 54 & 84 & 93 & 84 & 78 & 75 & 51 & 20 & 26 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Оцінка середнього значення випадкової величини  $\mu = \text{mean}(\zeta) = 9,971$ .

Оцінка середнього квадратичного відхилення  $\sigma = \sqrt{n/(n-1)} \cdot \text{stdev}(\zeta) = 0,966$ .

**Ідентифікація закону розподілу випадкової величини.**

Зчитування значень випадкової величини, що спостерігається, із файлу

$A = \text{READPRN}(\text{DATAR.pm})$ .

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 7 & 9 & 5 & 5 & 7 & 7 & 11 & 6 & 4 & 7 & 4 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Формування масиву значень випадкової величини

$$ns = \text{rows}(A) = 48; \quad j = \overline{0, ns - 1}; \quad N = \text{cols}(A) = 1; \quad k = \overline{0, N - 1}; \quad \zeta = A_{j,k}$$

Кількість значень у масиві  $n = \text{lengs}(\zeta) = 48$ ,  $i = \overline{0, ns - 1}$ .

Визначення мінімального та максимального значень  $x_{\min} = \min(\zeta) = 0$ ,  $x_{\max} = \max(\zeta) = 11$ .

Кількість інтервалів у гістограмі  $m = 1 + x_{\max} - x_{\min} = 12$ ,  $j = \overline{0, m}$ ;

Довжина інтервалу  $\Delta x = 1$ , поділ на інтервали  $x_j = x_{\min} - \Delta x/2 + j \cdot \Delta x$

$$x^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 & 5.5 & 6.5 & 7.5 & 8.5 \end{bmatrix}.$$

Середини інтервалів  $k = \overline{0, m - 1}$ ,  $x_{m_k} = x_k + \Delta x/2$ .

$$x_m^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}.$$

Частота влучень в інтервали  $h = \text{hist}(x, \zeta)/n$ ,  $\sum_k h_k = 1$ :

$$x_m^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0.021 & 0.021 & 0 & 0.167 & 0.083 & 0.25 & 0.229 & 0.167 & 0 & 0.042 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}.$$

Перевірка гіпотези за критерієм

Сумарна частота влучень в інтервали 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0.021 0.042 0.042 0.205 0.292 0.542 0.771 0.937 0.937 0.979

Теоретична сумарна частота влучень в інтервали 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 2-10-4 3-10-3 0.045 0.145 0.328 0.561 0.774 0.913 0.977 0.996 0 1 2 3 4 5 6 0 0.02 0.033 3.633-1 0-3 0.063 0.036 0.02 3.595-1 0-3

Формування висновку щодо відповідності випадкової величини обраному закону розподілу

## 2.2. Апроксимація функціональної залежності

Будь-який елемент системи описується залежністю множини вихідних його змінних від множини вхідних. У загальному випадку така залежність може бути представлена функціональною залежністю. Відновлення функціональної залежності змінних моделі за результатами спостережень називають апроксимацією. Заміна об'єкта, який є елемент системи, його функціональною залежністю є, певною мірою, спрощення. Причини, з яких дослідник змушений використовувати апроксимацію різні. Можливо, об'єкт надто складний, щоб представити його функціонування детальніше. Можливо, спрощене представлення об'єкта дозволить спростити загальну модель системи.

Сформулюємо задачу апроксимації. Розглядається об'єкт, що має одну вихідну змінну  $y$  та кілька вхідних змінних, представлених вектором  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Відомі дані спостережень про значення вхідної та вихідної змінної представлені таблицею, яка має вигляд табл. 2.8.

Задача апроксимації полягає у знаходженні функціональної залежності заданого виду, що найліпше відповідає даним спостережень з точки зору критерію найменших квадратів. Нехай  $y_i$  – значення вихідної змінної, що спостерігається,  $y_i^f = f(x_i)$

Дані спостережень

Змінні	Спостереження			
	1	2	...	n
Вхідна змінна $x_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
Вхідна змінна $x_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$
...				
Вхідна змінна $x_m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$
Вихідна змінна $y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Рис. 2.8. Дані спостережень

– розраховані за функціональною залежністю  $f(x_i)$  значення вихідної змінної. Ідея критерію найменших квадратів полягає у тому, що розбіжність між значеннями вихідної змінної, що спостерігається, і розраховується, має бути мінімальною. Якщо розбіжність вимірювати сумою різниць  $(y_i - y_i^f)$ , може статися так, що навіть за великих, але різних за знаком, різниць загальна розбіжність має мале значення. Тому розбіжність вимірюють сумою квадратів різниць  $(y_i - y_i^f)^2$ . Отже, критерій найменших квадратів має вигляд:

$$F = \sum_i (y_i^f - y_i)^2 = \sum_i [f(x_i) - y_i]^2 \rightarrow \min, \quad (2.12)$$

де мінімум у загальному випадку розглядається по відношенню до різних пропонувананих функцій  $f(x_i)$ .

Графічне представлення змісту критерію найменших квадратів наведено на рис. 2.9. У випадку багатьох змінних неможливо представити графічно функціональну залежність  $y = f(x)$ , тому на графіку розглядається тільки залежність  $y = y(i)$ , де  $i$  – номер спостереження.

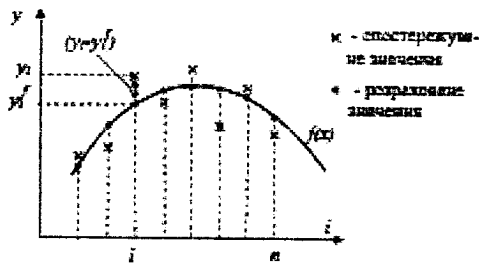


Рис. 2.9. До пояснення змісту критерію найменших квадратів

Апроксимацію функціональної залежності виконують у такий спосіб:

- 1) формують масив значень, що спостерігаються;
- 2) формують припущення про вид математичної функції – параметри функціональної залежності;

3) відшуковують значення параметрів функціональної залежності  $b$  за критерієм найменших квадратів;

4) оцінюють якість знайденої функціональної залежності методами багатофакторного кореляційно-регресійного аналізу.

*Формування масиву значень, що спостерігаються.*

На відміну від функції однієї змінної, задача апроксимації функції багатьох змінних має розв'язок тільки за умови, що змінні  $x_1, x_2, \dots, x_m$  не залежать одна від одної. Дійсно, якщо, наприклад,  $x_1 = g(x_2)$ , змінна  $x_2$  має бути викреслена зі списку змінних. Якщо дослідник помилково включить залежну змінну у список змінних, параметри функціональної залежності не можуть бути знайдені.

*Формування гіпотези про вид функціональної залежності.*

Застосування методу найменших квадратів вимагає, щоб функціональна залежність, яка відшукується, мала лінійний відносно параметрів  $b$  вигляд:

$$f(x, b) = b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_k f_k(x), \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  – вектор змінних. Наприклад,  $f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 \cos x_3 + b_4 \sin x_4$  – лінійна залежність відносно параметрів  $b$ ,  $f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_3 \cos(b_4 \cdot x_2) + x_3^{b_3}$  – нелінійна залежність.

Припущення про вигляд функцій  $f_i(x)$  дослідник має зробити, ґрунтуючись на своїх знаннях та досвіді. Параметри  $b$  функціональної залежності  $f(x, b)$  вибираються так, щоб забезпечити мінімум критерію найменших квадратів.

*Оцінка значень параметрів функціональної залежності.*

Значення критерію найменших квадратів визначається за формулою:

$$F(b) = \sum_{i=0}^n [f(x_i, b) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^n [b_0 + b_1 f_1(x_i) + b_2 f_2(x_i) + \dots + b_k f_k(x_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (2.14)$$

де  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ ,  $y_i$  – дані досліджень про об'єкт.

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = 0, \quad i = \overline{0, k}. \quad (2.15)$$

Візьмемо похідні в (2.15) і після елементарних перетворень отримаємо систему лінійних рівнянь для відшукування  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) + \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_k(x_i) & = \sum_{i=0}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) + b_1 \sum_{i=0}^n f_1^2(x_i) + \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_1(x_i) f_k(x_i) & = b_1 \sum_{i=0}^n y_i f_1(x_i); \\ b_0 \sum_{i=0}^n f_k(x_i) + b_1 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) f_k(x_i) + \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_k^2(x_i) & = b_1 \sum_{i=0}^n y_i f_k(x_i). \end{cases} \quad (2.16)$$

Система (2.16) називається системою нормальних рівнянь. З (2.16) невідомі  $b$  відшукуються, наприклад, за методом Гауса. Запишемо цю систему у матричному вигляді

$$X\mathbf{b} = \mathbf{y}, \quad (2.17)$$

де

$$X = \begin{bmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & \dots & f_k(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Звідси маємо

$$\mathbf{b} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (2.18)$$

### Кореляційно-регресійний аналіз функціональної залежності.

За малого обсягу даних виникає необхідність перевірки отриманої функціональної залежності. Для цього використовують методи багатофакторного кореляційно-регресійного аналізу.

Оцінку практичної значущості отриманої функціональної залежності проводять за допомогою індексу кореляції, який характеризує щільність зв'язку:

$$R = \sqrt{\sigma_{\text{фак}}^2 / \sigma_{\text{заг}}^2}, \quad (2.19)$$

де  $\sigma_{\text{фак}}^2 = \frac{\sum [f(x, \mathbf{b}) - \bar{y}]^2}{n-1}$  – факторна дисперсія результативної ознаки  $y$ ,  $\sigma_{\text{заг}}^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1}$  – його загальна дисперсія.

Для розрахунку індекса кореляції можна скористатись також формулою у матричному вигляді [ ]:

$$R = \sqrt{\frac{\mathbf{b}(X^T \mathbf{y}) - n\bar{y}^2}{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - n\bar{y}^2}}. \quad (2.20)$$

Індекс детермінації  $R^2$  характеризує, яка частина загальної варіації результативної ознаки  $y$  пояснюється фактором  $x$ . Якщо більше половини загальної варіації результативної ознаки  $y$  пояснюється впливом фактора  $x$ , застосування методів функціонального аналізу для вивчення кореляційного зв'язку є виправдані, а синтезовані при цьому аналітичні моделі визнаються придатними для їх практичного застосування. Звідси, функціональна залежність практично значима, якщо  $R^2 > 0,5$ .

Оцінку істотності індекса кореляції проводять за критерієм Фішера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - k - 1}{k}. \quad (2.21)$$

Знайдене значення критерію порівнюють із критичним значенням критерію Фішера, який беруть із статистичних таблиць при рівні значимості 0,05, кількості ступенів свободи чисельника  $n - k - 1$  та кількості ступенів свободи знаменника  $k$ . Якщо  $F > F_{\text{кр}}$ , значення індексу кореляції визнається істотним. Критичне значення критерію Фішера можна знайти, скориставшись вбудованою в програмне забезпечення Mathcad-функцією  $qF$ :

$$F_{\text{кр}} = qF(0.95, k, n - k - 1). \quad (2.22)$$





Формування гіпотези про вид функціональної залежності

$$k = 3; \quad fun(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix}.$$

$$f(x, b) \rightarrow b_0 + b_1 x_0 + b_2 (x_1)^2.$$

Оцінка значень параметрів функціональної залежності за методом найменших квадратів

Формування матриці для розрахунку параметрів

$$i = \overline{0, \text{rows}(\text{Data}) - 1}; \quad X_{i,0} = 1; \quad X_{i,1} = X_{i,0}; \quad X_{i,2} = (X_{i,1})^2.$$

$$X^T = \begin{bmatrix} j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 729 & 341 & 324 & 289 & 729 & 576 & 900 & 400 & 144 & 676 & 196 & 484 & 25 & 144 \end{bmatrix}$$

Розрахунок параметрів функціональної залежності

$$\mathbf{b} = [X^T X]^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 30.778 \\ 9.511 \\ -0.049 \end{bmatrix}.$$

Розрахунок значень вихідної змінної за функціональною залежністю

$$f \begin{bmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)}, \mathbf{b} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 14.742 & 18.713 & 53.795 & 46.015 & 33.763 & 31.82 & 25.306 & 40.525 \end{bmatrix}.$$

Кількість даних спостережень  $n = \text{rows}(\text{Data})$ .

Розрахунок критерію найменших квадратів

$$Krit = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ f \begin{bmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)}, \mathbf{b} \end{bmatrix}_i - y_i \right\}^2 = 87.803.$$

Кореляційно-регресійний аналіз знайденої функціональної залежності. Розрахунок індексу кореляції

$$\sigma_{\text{fact}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ f \begin{bmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)}, \mathbf{b} \end{bmatrix}_i - \text{mean}(Y) \right\}^2 = 265.918;$$

$$\sigma_{\text{zag}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \text{mean}(Y))^2 = 268.434.$$

$$R = \sqrt{\sigma_{\text{fact}} / \sigma_{\text{zag}}} = 0.995.$$

Індекс кореляції показує, що (за шкалою Чеддока) зв'язок між вихідною змінною  $y$  та множиною вхідних змінних  $x$  дуже сильний. Індекс детермінації  $R^2 = 0.991$ . Індекс детермінації показує, що 99 відсотків загальної варіації вихідної змінної  $y$  пояснюється факторами  $x$ .

Розрахунок індексу кореляції матричним способом.

$$\text{Істотність індексу кореляції } F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - k - 1}{k}$$

if(F) > qF(0.95, k, n-k-1), "Yes", "No" = "Yes". Значення індексу кореляції – істотне. Дослідження значимості параметрів функціональної залежності.

$$j = \overline{0, k-1}; \quad d_j = [(X^T X)^{-1}]_{jj} = \begin{bmatrix} 0.845 \\ 0.057 \\ 0.8422 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix};$$

$$s_{kv} = \frac{Krit}{n - k - 1} = 5.488;$$

$$t_j = \frac{|b_j|}{\sqrt{d_j s_{kv}}} = \begin{bmatrix} 14.29 \\ 17.023 \\ 23.007 \end{bmatrix};$$

$$if(t_j > qt(0.95, n - 2), YES, NO) = \begin{bmatrix} YES \\ YES \\ YES \end{bmatrix}.$$

Усі параметри функціональної залежності – значимі.

Визначення довірчих інтервалів параметрів функціональної залежності

$$b_{\min_j} = b_j - qt(0.95, n - 2) \sqrt{d_j s_{kv}}; \quad b_{\max_j} = b_j + qt(0.95, n - 2) \sqrt{d_j s_{kv}};$$

$$b_{\min} = \begin{bmatrix} 27.043 \\ 8.542 \\ -0.053 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30.778 \\ 9.511 \\ -0.049 \end{bmatrix}; \quad b_{\max} = \begin{bmatrix} 34.512 \\ 10.479 \\ -0.046 \end{bmatrix}.$$

Найбільш неточно визначений перший параметр, найбільш точно визначений параметр – останній.

**Апроксимація функціональної залежності за методом  $\chi^2$ .**

У методі апроксимації за методом найменших квадратів вважається, що точність значень, що спостерігаються, приблизно однакова. У випадках, коли відомо, що точність спостережуваних значень суттєво відрізняється, доцільно використовувати апроксимацію за методом  $\chi^2$ .

Оцінка значень параметрів функціональної залежності здійснюється за методом  $\chi^2$ :

$$\chi^2(\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{f(x, \mathbf{b}) - y_i}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (2.27)$$

де  $\sigma_i$  – середнє квадратичне відхилення значення  $y_i$ , що спостерігається.

У випадку, коли точність визначення всіх  $y_i$  однакова, із формули (2.27) отримуємо таку формулу визначення критерію  $\chi^2$ :

$$\chi^2(\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{f(x, \mathbf{b}) - y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^n (f(x, \mathbf{b}) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (2.28)$$

де  $\sigma$  – однакове для всіх значень  $y_i$ , що спостерігаються, середнє квадратичне відхилення.

Значення параметрів  $b_i$ , які отримані за критерієм (2.28) та за критерієм (2.14), співпадають. Але значення критерію  $\chi^2$  не залежить від розмірності  $y$ , а значення критерію (2.14) суттєво залежить від розмірності величини  $y$ .

З формули (2.27) випливає, що параметри функціональної залежності обираються таким чином, щоб найліпше задовольняти даним спостережень, які визначені з більшою точністю, і, можливо гірше задовольняти даним спостережень, які визначені з меншою точністю. На рис. 2.10 графік функціональної залежності, що знайдена за методом  $\chi^2$ , щільніше притискається до точок із більшою точністю.

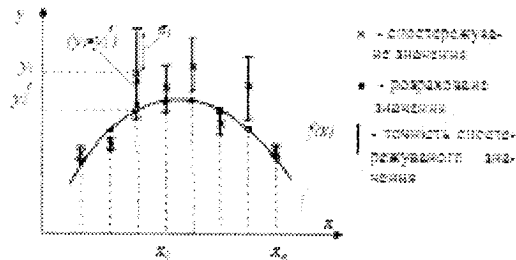


Рис. 2.10. До пояснення змісту критерію  $\chi^2$

Розраховане за формулою (2.27) значення критерію  $\chi^2$  порівнюють із табличним значенням  $\chi_{кр}^2$ , яке знаходять при кількості ступенів свободи, що дорівнює кількості даних, що спостерігаються, мінус один і мінус кількість шуканих параметрів функціональної залежності, та рівні довірчої ймовірності 0,95:

$$\chi_{кр}^2 = qchisq(0.95, n - k - 1), \quad (2.29)$$

де  $qchisq$  – Mathcad-функція, що знаходить значення критерію  $\chi_{кр}^2$ ,  $n$  – кількість значень, що спостерігаються,  $k$  – кількість параметрів функціональної залежності.

Якщо  $\chi^2 < \chi_{кр}^2$ , функціональна залежність, що знайдена за методом  $\chi^2$ , із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає даним спостережень. В іншому випадку потрібно змінити вид функціональної залежності.

Використання критерію  $\chi^2$  має суттєві переваги перед використанням критерію найменших квадратів. Проте використання його обмежене, оскільки дослідник не завжди має інформацію про точність вимірювання даних.

Табл. 2.1. Дані спостережень

Кількість викл. $i$	$i, n_i$	$p_i = n_i/n$
0	70	0,311
1	85	0,378
2	52	0,231
3	14	0,062
4	3	0,013
5	1	0,004
	$n = \sum n_i = 25$	$\sum p_i = 1$

### 2.3. Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** За даними спостережень, які наведені у таблиці 2.1, визначити закон розподілу випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі».

Дані спостережень про кількість телефонних викликів таксі

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, поданий на рис. 2.11.

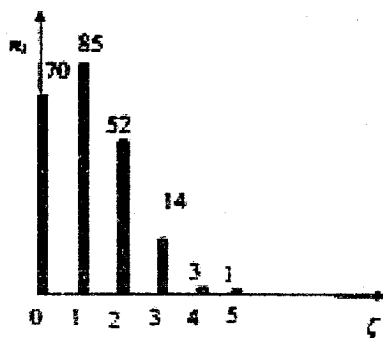


Рис. 2.11. Гістограма

З вигляду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має розподіл Пуассона (див. табл. 2.2):

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = \overline{0, n},$$

де  $\lambda$  – параметр закону розподілу.

Для оцінки параметру закону розподілу обчислимо середнє та середнє квадратичне відхилення випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі»:

$$\bar{\zeta} = (0 \cdot 70 + 1 \cdot 85 + 2 \cdot 52 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1) / 225 = 1.102 \sim \mu;$$

$$D = [70 \cdot (0 - 1.101)^2 + 85 \cdot (1 - 1.101)^2 + 52 \cdot (2 - 1.101)^2 + 14 \cdot (3 - 1.101)^2 +$$

Табл. 2.2. Розрахунок очікуваної кількості влучень за теоретичним законом розподілу

Значення в.в. $i$	$p_i^T$	$n \cdot p_i^T$
0	0.354	79
1	0.368	83
2	0.191	43
3	0.066	15
4	0.017	4
5	0.004	1
	$\sum p_i = 1$	$\sum n_i = 225$

Табл. 2.3. Розрахунок критерію  $\chi^2$ 

Значення в.в. $i$	$n \cdot p_i^T$	$n_i$	$\chi^2$
0	79	70	1.025
1	83	85	0.048
2	43	52	1.884
3	15+4+1	14+3+1	0.2
	$\sum = 225$	$\sum = 225$	$\sum = 3.157$

$$+3 \cdot (4 - 1.101)^2 + 1 \cdot (5 - 1.101)^2 / (225 - 1) = 0.976 \sim \sigma^2.$$

Оскільки параметр закону розподілу Пуассона  $\lambda = \mu = \sigma^2$ , приймемо гіпотезу про значення  $\lambda = (0.976 + 1.102)/2 = 1.039$ . Обчислимо значення ймовірності влучення випадкової величини у значення  $i$  за формулою

$$p_i^T = e^{-1.039} \cdot 1.039^i / i!, \quad i = \overline{0, 5}.$$

Результати розрахунків представлені у таблиці 2.2.

Оскільки кількість значень випадкової величини, що спотерігається, достатньо велика ( $225 > 100$ ), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо критерій  $\chi^2$ . Критерій  $\chi^2$  вимагає, щоб кількість влучень у кожний інтервал була не менша 5, тому об'єднаємо сусідні групи. Розрахунок критерію  $\chi^2$  наведено у таблиці 2.3.

Отже, маємо  $\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n \cdot p_i^T)^2}{n \cdot p_i^T} = 3.157$ . Табличне значення  $\chi_{кр}^2$  знаходиться із таблиць при кількості груп  $k = 4$  та кількості ступенів свободи  $m = 4 - 1 - 1 = 2$ ;  $\chi_{кр}^2 = 5.99$ . Порівнюючи розраховане та табличне значення  $\chi^2 = \chi_{кр}^2$ , приходимо до висновку, що досліджувана випадкова величина із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

Відповідь. Випадкова величина «кількість телефонних викликів таксі» із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

**Задача 2.** Визначити закон розподілу випадкової величини «тривалість обслуговування клієнта» за такими даними спостережень (табл. 2.4):

Табл. 2.4. Дані спостережень про тривалість обслуговування клієнта

$(x_{i-1}, x_i)$	$n_i$	$p_i = n_i/n$	Сумарна частота влучень, $h_i$
(28;30)	11	0.133	0.133
(30;32)	10	0.120	0.253
(32;34)	7	0.084	0.337
(34;36)	7	0.084	0.421
(36;38)	13	0.157	0.578
(38;40)	16	0.193	0.771
(40;42)	8	0.096	0.867
(42;44)	11	0.133	1.000
	$n = \sum n_i = 83$	$\sum p_i = 1$	

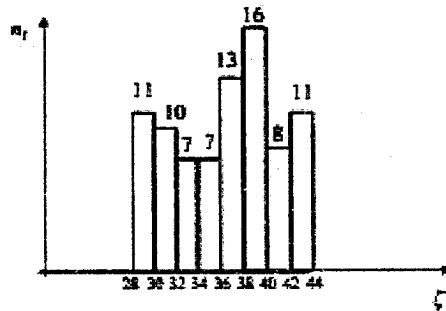


Рис. 2.12. Гістограма

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, представлений на рисунку 2.12:

З вигляду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має рівномірний розподіл. Оцінимо параметри рівномірного закону розподілу:

$$a = \text{floor}(\max(\zeta)) = 28, \quad b = \text{ceil}(\min(\zeta)) = 44,$$

де  $\text{floor}$  – функція наближення до найближчого більшого цілого числа,  $\text{ceil}$  – функція наближення до найближчого меншого цілого числа.

Прийmemo гіпотезу про рівномірний закон розподілу із параметрами 28 і 44. Розрахуємо значення ймовірностей влучення випадкової величини у значення  $i$  за формулою (??):

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{44 - 28} dx = \frac{1}{16}(x_i - x_{i-1}) = 0.125,$$

оскільки довжина інтервалу складає 2.

Результати розрахунків теоретично очікуваної влучень представлені у таблиці 2.5 сумарної частоти.

Табл. 2.5. Розрахунок сумарної частоти влучень за теоретичним законом розподілу

$(x_{i-1}, x_i)$	$p_i$	Очікувана сумарна частота влучань
(28;30)	0.125	0.125
(30;32)	0.125	0.250
(32;34)	0.125	0.375
(34;36)	0.125	0.500
(36;38)	0.125	0.625
(38;40)	0.125	0.750
(40;42)	0.125	0.875
(42;44)	0.125	1.000
	$\sum p_i = 1$	

Табл. 2.6. Розрахунок  $\lambda$ -критерію

$(x_{i-1}, x_i)$	Очікувана сум. частота $w^T$	Сум. частота $w$	$ w^T - w $
(28;30)	0.125	0.133	0.008
(30;32)	0.250	0.253	0.003
(32;34)	0.375	0.337	0.038
(34;36)	0.500	0.421	0.079
(36;38)	0.625	0.578	0.047
(38;40)	0.750	0.771	0.021
(40;42)	0.875	0.867	0.008
(42;44)	1.000	1.000	1.000
			max = 0.0079

Оскільки кількість значень випадкової величини, що спостерігаються, недостатня ( $83 < 100$ ), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо  $\lambda$ -критерій. Розрахунок  $\lambda$ -критерію наведено у табл. 2.6. За формулою (2.11) розраховуємо значення критерію, що спостерігається:

$$\lambda = \sqrt{n} \max_i |w_i - w_i^T| = \sqrt{83} \cdot 0.079 = 0.72.$$

Розраховане значення  $\lambda$ -критерію менше за табличне значення критерію  $\lambda_{кр} = 1,36$  (рівень значимості  $\alpha = 0,05$ ), тому можна стверджувати, що випадкова величина  $\zeta$  із довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу із параметрами 28 і 44.

Відповідь. Випадкова величина “тривалість обслуговування клієнта” із довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу в інтервалі від 28 до 44.

**Задача 3.** За даними спостережень, представленими у таблиці 11, знайти апроксимуючу функцію, що має вигляд  $y = b_0 + b_1x_1^2 + b_2x_2$ , та оцінити її якість.



Таблиця 11. Дані спостережень

$$\begin{bmatrix} X_1 & 4 & 3 & 4 & 4 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ X_2 & 1 & 15 & 13 & 11 & 13 & 13 & 15 & 14 & 15 & 11 & 12 & 12 & 11 & 12 & 14 & 11 & 11 \\ Y & 40 & 15 & 38 & 40 & 2 & 65 & 36 & 16 & 63 & 40 & 18 & 66 & 19 & 63 & 37 & 19 & 4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. За даними спостережень із урахуванням функціональної залежності складемо матрицю  $X$  та вектор  $y$  системи умовних рівнянь (2.17), за формулою (2.18) розрухуємо параметри функціональної залежності  $b$ :

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} -4.915 \\ 2.934 \\ -0.323 \end{bmatrix}.$$

Отже, знайдена така функціональна залежність:

$$y_{\text{reg}} = f(x) = -4.915 + 2.934x_1^2 - 0.323x_2.$$

Оцінимо якість знайденої функціональної залежності. По-перше, розрахуємо критерій найменших квадратів за формулою (2.14). Розрахунки представимо у таблиці 12.

Таблиця 12. Розрахунок критерію найменших квадратів

$$\begin{bmatrix} x_1 & 4 & 3 & 4 & 4 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & \\ x_2 & 1 & 15 & 13 & 11 & 13 & 13 & 15 & 14 & 15 \\ y & 11 & 12 & 12 & 11 & 12 & 14 & 11 & 11 & \\ & 40 & 15 & 38 & 40 & 2 & 65 & 36 & 16 & 63 \\ y_{\text{reg}} & 40 & 18 & 66 & 19 & 63 & 37 & 19 & 4 & \\ & 41,7 & 16,6 & 37,8 & 38,5 & 2,6 & 64,2 & 37,2 & 17,0 & 63,6 \\ & 38,5 & 17,6 & 64,5 & 17,9 & 64,5 & 37,5 & 17,9 & 3,3 & \\ |y_{\text{reg}} - y| & 1,7 & 1,6 & 0,2 & 1,5 & 0,6 & 0,8 & 1,2 & 1,0 & 0,6 \\ & 1,5 & 0,4 & 1,5 & 1,1 & 1,5 & 0,5 & 1,1 & 0,7 & \\ (y_{\text{reg}} - y)^2 & 2,89 & 2,69 & 0,03 & 2,34 & 0,38 & 0,60 & 1,38 & 0,93 & 0,34 \\ & 2,34 & 0,15 & 2,11 & 1,14 & 2,40 & 0,25 & 1,14 & 0,54 & \end{bmatrix}$$

$$\sum (y_{\text{reg}} - y)^2 = 21.65.$$

Отже, значення критерію найменших квадратів досягає значення 21,65, що порівняно із значеннями вихідної величини є досить прийнятне значення. Із наведених розрахунків видно також, що відхилення розрахованого за функціональною залежністю значення від спостережуваного значення не перевищує 1,7, що не перевищує 5% значення вихідної величини.

Проведемо кореляційно-регресійний аналіз функціональної залежності, що знайдена. Обчислимо індекс кореляції за формулою (2.19):

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{17} = 34.2; \quad \sigma_{\text{fact}} = \frac{(y_{\text{reg}} - 34.2)^2}{16} = 443.5, \quad \sigma_{\text{zar}} = \frac{(y_{\text{reg}} - 34.2)^2}{16} = 443.5,$$

Табл. 2.7. Дані інтенсивності надходження покупців до маркету впродовж дня

$t$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$Y$	15	23	16	9	11	16	17	23	32	41	53	28	12	8	5

$$R = \sqrt{\sigma_{\text{fact}}/\sigma_{\text{зар}}} = 0.998 \rightarrow R^2 = 0.997.$$

Отже, за шкалою Чеддока зв'язок оцінюється як дуже сильний. Значення індексу детермінації свідчить про те, що 99,7% варіації вихідної змінної  $y$  пояснюється змінуванням значень вхідних змінних  $x_1$  та  $x_2$ .

Обчислимо довірчі інтервали за формулами (2.23)–(2.26):

$$d = \begin{bmatrix} 1.16 \\ 0.001 \\ 0.006 \end{bmatrix}; \quad s^2 = \frac{y_{\text{рег}} - y_i)^2}{17 - 3 - 1} = 1.67; \quad t = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 65.3 \\ 3.2 \end{bmatrix}, \quad t_{\text{кр}} = qt(0.95, 17 - 3 - 1) = 1.77,$$

$$t_{\text{кр}} \sqrt{d_j s^2} = 1.77 \sqrt{1.67 d} = \begin{bmatrix} 2.46 \\ 0.08 \\ 0.18 \end{bmatrix}.$$

Отже, довірчі інтервали параметрів функціональної залежності задаються наступними значеннями:

$$b_{\text{min}} = \begin{bmatrix} -7.37 \\ 2.85 \\ -0.50 \end{bmatrix}; \quad b_{\text{max}} = \begin{bmatrix} -2.46 \\ 3.01 \\ -0.14 \end{bmatrix}.$$

**Відповідь.** Дані спостережень відповідають функціональній залежності

$$f(x) = -4.915 + 2.934x_1^2 - 0.3323x_2$$

із значенням критерію найменших квадратів 21,65.

Результати кореляційно-регресійного аналізу свідчать, що зв'язок між змінними  $y$  та  $x$  дуже сильний, усі параметри функціональної залежності являються значимими. Довірчі інтервали свідчать про те, що найбільш неточно знайдений перший параметр функціональної залежності ( $\pm 2,46$ ), а найбільш точно знайдений другий параметр функціональної залежності ( $\pm 0,08$ ).

**Задача 4.** Інтенсивність надходження покупців до маркету впродовж дня змінюється (табл. 2.7). Знайти апроксимуючу функцію, що наближено моделює інтенсивність надходження покупців залежно від часу, та визначити якість знайденої функції.

**Розв'язання.** Оскільки спостерігається два піки збільшення інтенсивності надходження покупців (на 9-ту та 18-ту годину), апроксимуюча функція має бути принаймні 4-ого порядку:

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4.$$

Побудуємо матрицю для відшукування параметрів функціональної залежності і розрахуємо за формулою (2.18) параметри функціональної залежності:

$$\mathbf{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 362.3 \\ -86.5 \\ 7.02 \\ -0.2 \\ -0.001 \end{bmatrix}.$$

Отже, апроксимуюча функціональна залежність має вигляд:

$$y_{\text{reg}} = f(x) = -362.3 - 86.6t + 7.02t^2 - 0.2t^3 - 0.001t^4.$$

Оцінимо якість знайденої функціональної залежності. По-перше, розрахуємо критерій найменших квадратів за формулою (2.14):

$$F(\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^n (f(x_i, \mathbf{b}) - y_i)^2 = 873.6.$$

Значення критерію найменших квадратів близько  $30^2$ .

По-друге, оцінимо якість знайденої функціональної залежності. Розрахуємо індекс кореляції за формулою (2.19):

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{15} = 20.6; \quad \sigma_{\text{fact}} = \frac{\sum_i (y_{\text{reg}_i} - 20.6)^2}{14} = 112.7; \quad \sigma_{\text{zar}} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{14} = 175.1;$$

$$R = \sqrt{\sigma_{\text{fact}} / \sigma_{\text{zar}}} = 0.8 \rightarrow R^2 = 0.64.$$

Отже, за шкалою Чеддока зв'язок оцінюється як сильний, але не дуже сильний. Значення індексу детермінації свідчить про те, що 64% змінювання інтенсивності надходження покуштів пояснюється змінюванням часу.

Оцінимо значимість параметрів функціональної залежності (2.23)–(2.25):

$$d = \begin{bmatrix} 2286 \\ 199.4 \\ 2.27 \\ 0.005 \\ 0.1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad s^2 = \frac{\sum_i (y_{\text{reg}_i} - y_i)^2}{15 - 4 - 1} = 87.4; \quad d = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.7 \\ 3.6 \\ 2.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}; \quad t_{\text{кр}} = qt(0.95, 15 - 4 - 1) = 1.8.$$

Порівнюючи розраховані значення  $t_j$  з критичним значенням  $t_{\text{кр}}$ , знаходимо, що значення параметра  $b_4$  є незначиме.

Розрахуємо точність визначення параметрів функціональної залежності, які є значимі, за формулою (2.26):

$$1.8 \sqrt{87.36d} = \begin{bmatrix} 817.8 \\ 241.5 \\ 25.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. Дані спостережень відповідають функціональній залежності

$$f(x) = -362.3 - 86.5t + 7.02t^2 - 0.2t^3 - 0.0001t^4$$

із значенням критерію найменших квадратів 873,6.

Результати кореляційно-регресійного аналізу свідчать, що зв'язок між змінними  $y$  та  $x$  сильний. Усі параметри функціональної залежності, окрім останнього, являються значимими. Точність визначення довірчих інтервалів першого та другого параметрів функціональної залежності недостатня, тому рекомендується збільшити кількість даних спостережень.

## 2.4. Завдання для самостійної роботи

**Задача 1.** Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд значень випадкової величини, що спостерігається, такий:

10, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 9, 10, 7, 10, 7, 10, 9, 9, 8, 8, 8, 9, 6, 6, 5, 8, 7, 8, 8, 7, 8, 9, 9, 9, 8, 7, 8, 7, 6, 9, 9, 9.

**Задача 2.** Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд значень випадкової величини, що спостерігається, такий:

121, 76, 65, 252, 85, 36, 137, 80, 40, 48, 99, 101, 113, 124, 111, 66, 19, 170, 148, 42, 107, 184, 83, 0, 29, 34, 74, 103, 70, 83, 127, 111, 120, 42, 45, 45, 80, 34, 0, 163, 139, 107, 49, 53, 56, 113, 80, 165, 31, 119.

**Задача 3.** Побудуйте апроксимуючу функцію виду  $y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} + b_2 \frac{1}{x^2}$  за такими результатами спостережень:

$X$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9
$Y$	12	13	11	8	5	9	2	7	4	5	5	6	7	9	5	5	4

**Задача 4.** Побудуйте апроксимуючу функцію виду  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$  за такими результатами спостережень:

$X_1$	48	2	4	22	31	22	32	2	21	17	43	11	24	23	22
$X_2$	18	14	13	17	16	4	17	17	18	8	17	9	7	11	15
$X_3$	25	8	20	11	16	16	22	8	24	15	24	13	19	16	11
$Y$	381	8	31	167	242	182	252	5	164	138	341	88	197	183	169

## 2.5. Контрольні запитання

- 1) У який спосіб дослідник може визначити закон розподілу випадкової величини?
- 2) Дайте формулювання задачі ідентифікації закону розподілу.
- 3) Які критерії застосовуються для визначення відповідності обраного закону розподілу випадковим числам, що досліджуються?
- 4) Як розраховується критерій  $\chi^2$ ,  $\lambda$ -критерій?
- 5) За яких умов для визначення відповідності обраного закону розподілу досліджуваним випадковим числам застосовується критерій  $\chi^2$ ?

- 6) Опишіть дії, що виконуються дослідником при визначенні закону розподілу випадкової величини.
- 7) Дайте формулювання задачі ідентифікації функціональної залежності.
- 8) За якої умови задача апроксимації не має розв'язку?
- 9) За якими міркуваннями дослідник обирає вид апроксимуючої функції?
- 10) Чи існують обмеження на вид функціональної залежності, що дослідник висуває в задачі апроксимації? Які?
- 11) За яким критерієм визначаються параметри функціональної залежності?
- 12) Який зміст критерію найменших квадратів?
- 13) Як складається система умовних рівнянь?
- 14) За якими формулами розраховуються параметри апроксимуючої функціональної залежності?
- 15) Яка мета досягається при виконанні кореляційно-регресійного аналізу?
- 16) За якими формулами виконується кореляційно-регресійний аналіз?
- 17) Який показник характеризує щільність зв'язку?
- 18) Що оцінюють за допомогою шкали Чеддока?
- 19) За яким критерієм оцінюється значимість параметрів функціональної залежності?
- 20) За яким критерієм визначається істотність індексу кореляції?
- 21) За якими формулами визначається довірчий інтервал параметра функціональної залежності?
- 22) Яку інформацію надає знання довірчого інтервалу?
- 23) В яких випадках використовується апроксимація за критерієм  $\chi^2$ ?
- 24) Як виконується апроксимація функціональної залежності за критерієм  $\chi^2$ ?
- 25) Які відмінності апроксимації за критерієм  $\chi^2$  від апроксимації за критерієм найменших квадратів?

---

## Статистичне та імітаційне моделювання

---

Статистичне моделювання є невід'ємна складова математичного моделювання реальних систем, що функціонують в умовах невизначеності. Ця невизначеність може обумовлюватися впливом на об'єкт, що вивчається, неконтрольованих збурень, зашумленістю вхідних сигналів, неточністю вимірювання вихідних сигналів об'єкта, що моделюється (шуми на виході тощо). Основна задача статистичного моделювання полягає у визначенні невідомих законів розподілу випадкових процесів, що впливають на систему, яка функціонує у реальному масштабі часу.

Основна задача імітаційного моделювання систем полягає у відтворенні і дослідженні загальносистемних ситуацій, тобто у вивченні об'єкта під впливом сигналів управління або різного роду збурень. Використання імітаційного моделювання при проектуванні систем є прикладання до традиційних форм практичного використання цього способу моделювання.

Іншим напрямом імітаційного моделювання є використання імітації в автоматизованих системах обробки інформації та управління, що функціонують, як складової частини математичного забезпечення. Мета цих систем управління є підготовка інформації, що необхідна для прийняття певних рішень, формування варіантів цих рішень й їхня реалізація. Із урахуванням ймовірносного характеру процесів в автоматизованих системах обробки інформації та управління, недостатньої якості вхідних даних слушною є попередня перевірка варіантів рішень, що сформовано, тобто попередня оцінка показників ефективності автоматизованих систем і поведінки об'єкта під впливом управлінь, що впливають із прийнятих рішень.

Використання імітації в системах надає можливість передати майбутній стан системи. Для більшості систем, що досліджуються, методика побудови імітаційної моделі зводиться до таких двох етапів:

- методологія імітації – постановка задач, підготовка даних, побудова моделі, оцінка адекватності;
- організація імітаційного моделювання – планування експериментів, проведення експериментів, обробка результатів, документування.

---

## Статистичне моделювання

---

### 3.1. Метод Монте–Карло

Важливим класом задач математичного моделювання є задачі побудови статистичних моделей. Для їх вирішення широко використовують метод Монте–Карло (метод статистичних випробувань).

Метод Монте–Карло є обчислювальний метод розв'язування математичних задач за допомогою випадкових величин. Його особливістю є проста структура алгоритму обчислень. Загальна схема реалізації цього методу передбачає розбиття процесу, що досліджується, на елементарні події, для яких може бути встановлено необхідні ймовірнісні характеристики. Після цього здійснюють багаторазову прогонку елементарних подій, виконують частотний аналіз та обчислюють необхідні характеристики процесу, що вивчається. Іншою особливістю методу є його повільна збіжність. Як правило, вона пропорційна  $\sqrt{1/N}$ , де  $N$  – число випробувань. Тому ефективність методу тим вища, чим більшою є припустима похибка розрахунків. Зазвичай його використовують у випадках, коли припустима похибка не нижча за 1 %. Типовою помилкою при використанні методу Монте–Карло є прийняття висновків (особливо при кількісних дослідженнях) за недостатньою кількістю випробувань. Надмірно велика кількість випробувань може призводити до помилок іншого типу. Змістовні висновки при математичному моделюванні мають бути наслідками припущень щодо вихідної змістовної моделі. Результати, що отримують при великій кількості випробувань, можуть виявитися наслідками деяких граничних теорем, що виконуються за будь-яких вихідних припущень.

Як правило, для однієї і тієї самої задачі можна розробити багато варіантів реалізації методу Монте–Карло, в яких моделюються різні випадкові величини. Це створює можливість обрання оптимального для дослідника варіанта з точки зору похибки розрахунків та використання ресурсів.

Найчастіше повторні випробування при незмінних умовах експерименту здійснюють для знаходження математичних сподівань випадкових величин. Із ймовірністю  $\alpha$  математичне сподівання  $m_x$  знаходиться в інтервалі  $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$ , де  $\bar{x} =$

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  – середнє значення,  $x_i$  – реалізація випадкової величини  $X$  у  $i$ -му випробуванні,  $N$  – кількість випробувань,  $\varepsilon = t_\alpha \sigma_{\bar{x}}$ ,  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_X^2/N$  – дисперсія  $\bar{x}$ ,  $\sigma_X^2 \approx S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$  – дисперсія випадкової величини  $X$ ,  $S$  – емпірична оцінка дисперсії.

Звідси маємо:  $\varepsilon = t_\alpha \sigma_X / \sqrt{N}$ . Величини  $t_\alpha$  знаходять із таблиць розподілу Ст'юдента для заданої надійності  $\alpha$ . Оскільки точність, з якою треба визначити математичне сподівання, задається, то для оцінки потрібної кількості випробувань можна використовувати вираз  $N = t_\alpha^2 \sigma_X^2 / \varepsilon^2$  або  $N = t_\alpha^2 S^2 / \varepsilon^2$  у разі, коли істинна дисперсія  $\sigma_X^2$  невідома.

Метод Монте-Карло використовують також для знаходження невідомих ймовірностей  $p$  настання деяких випадкових подій. Для цього в  $N$  випробуваннях реєструють, скільки разів відбулася подія, що досліджується, визначають її частоту  $d$ , яку й беруть за оцінку  $p$ . При заданих  $\varepsilon$  та  $\alpha$  довірчим інтервалом є  $[d - t_\alpha \sigma_d; d + t_\alpha \sigma_d]$ ; Дисперсія

$$\sigma_d^2 = \frac{p(1-p)}{N} \approx \frac{d(1-d)}{N}.$$

Відповідно, кількість випробувань, що треба виконати для забезпечення точності  $\varepsilon$  при рівні надійності  $\alpha$ ,

$$N = \frac{t_\alpha^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} \approx \frac{t_\alpha^2 d(1-d)}{\varepsilon^2}.$$

Звідси випливає, що для підвищення точності необхідно значно збільшити кількість випробувань.

Для реалізації методу Монте-Карло необхідно використовувати різноманітні алгоритми генерації послідовностей випадкових чисел та векторів. Деякі з них розглянуто нижче.

## 3.2. Рівномірні випадкові послідовності (РВП)

Щільність розподілу для випадкової величини, що має рівномірний розподіл на відрізку  $[a, b]$ , задається виразом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{якщо } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases} \quad (3.1)$$

Математичне сподівання цієї випадкової величини  $m_x = (a+b)/2$ , а її дисперсія  $\sigma_x^2 = (b-a)^2/12$ . Найчастіше у практиці використовують випадкові величини, що мають рівномірний розподіл на відрізках  $[0, 1]$  або  $[-1, 1]$ . Для цих випадків густина розподілу та його моменти дорівнюють відповідно:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \quad m_x = 0,5; \quad \sigma_x^2 = 1/12; \quad (3.2)$$



та

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -1, \\ 1/2 & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \quad m_x = 0; \quad \sigma_x^2 = 1/3; \quad (3.3)$$

Випадкову величину, що має рівномірний розподіл на відрізку  $[0, 1]$ , далі будемо позначати літерою  $\xi$ . Ймовірність її потрапляння у деякий інтервал, що міститься усередині відрізка  $[0, 1]$ ,

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi = \beta - \alpha, \quad (3.4)$$

тобто дорівнює довжині цього інтервалу. Цю властивість можна використовувати як необхідну й достатню умову того, що деяка випадкова величина має рівномірний розподіл на відрізку  $[0, 1]$ .

Генерування чергових реалізацій рівномірно розподіленої випадкової величини  $\xi$  можна здійснювати за допомогою такого перетворення:

$$\xi = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + \dots + z_i \cdot 2^{-i} + \dots \quad (3.5)$$

де  $z_i$  – реалізація випадкової величини  $z$ , яка з рівною ймовірністю  $p_x = 0,5$  може набувати значення 0 або 1.

Випадкова величина  $\xi$  може мати нескінченну кількість реалізацій. Але при запису чисел у ЕОМ використовується скінченна кількість двійкових розрядів. Тому кількість реалізацій випадкової величини, які можна використовувати при моделюванні, також буде скінченною. Максимальна кількість випадкових чисел, що записуються за допомогою  $k$  двійкових розрядів і не збігаються одне з одним, дорівнює  $2^k$ . Із сукупності чисел  $0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  можна отримати такі значення дискретної випадкової величини  $\xi$ :

$$\xi_i = \frac{i}{2^k - 1} \quad (i = \overline{0, 2^k - 1}). \quad (3.6)$$

Їхні ймовірності дорівнюють  $p_i = 1/2^k$ . Розподіл такої випадкової величини є квазірівномірний. Моменти цього розподілу дорівнюють

$$m_i = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k - 1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}; \quad \sigma_{\xi}^2 = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} \left( \frac{i}{2^k - 1} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} \frac{2^k + 1}{2^k - 1} \approx \frac{1}{12}. \quad (3.7)$$

Для генерування рівномірно розподілених послідовностей випадкових чисел застосовують табличний, фізичний та програмний способи. У першому випадку використовують таблиці випадкових величин, що отримано за допомогою фізичного або програмного генератора випадкових чисел. Такі таблиці можуть містити більше  $10^6$  випадкових чисел. Таблиці використовують при ручних розрахунках, а також при налагодженні програм та перевірці особливо важливих розрахунків.

При фізичній генерації випадкових чисел можна використовувати довільний випадковий фізичний процес. Найчастіше користуються джерелами радіоактивного випромінювання або власними шумами електронних ламп. У першому випадку задається деякий проміжок часу  $\Delta t$ . Потім підраховується кількість  $k$  частинок, випромінених за час  $\Delta t$ . Значення  $\xi$  розраховуються за формулою (3.5). При цьому беруть

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \text{ непарне,} \\ 1, & \text{якщо } k \text{ парне.} \end{cases}$$

Проміжок  $\Delta t$  має бути достатньо великим для того, щоб ймовірності отримання парних і непарних значень  $k$  були рівними з достатнім ступенем точності.

Якщо використовуються шуми електронних ламп, то необхідно спочатку побудувати залежність вихідної напруги від часу за достатньо великий проміжок часу. Після цього знаходять рівень відтинання  $\zeta$ , для якого виконується умова  $P(U > \zeta) = P(U < \zeta) = 0,5$ . Значення випадкової величини  $z_i$  визначають через рівні проміжки часу  $\Delta t$  за умовою:

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } U(t_i) < \zeta, \\ 1, & \text{якщо } U(t_i) > \zeta. \end{cases}$$

Зазвичай використовують  $m$  таких генераторів, що працюють паралельно ( $m$  – кількість двійкових розрядів). Тоді на кожному такті здійснюється генерація одного  $m$ -розрядного числа. Послідовності, що отримано за таким методом, можуть відрізнятися від рівномірної випадкової послідовності, якщо на вихідну характеристику впливають деякі неконтрольовані зовнішні фактори.

При використанні програмного методу генерування випадкових чисел значення  $(i + 1)$ -го випадкового числа визначають, використовуючи значення  $i$ -го числа за рекурентною формулою  $\xi_{i+1} = f(\xi_i)$ . Завдяки цьому одержувані числа не є дійсно випадкові. Тому їх називають псевдовипадковими числами. Функція  $f$  має бути достатньо складною для того, щоб взаємозв'язок сусідніх елементів послідовності  $\xi_i$  та  $\xi_{i+1}$  не впливав на результати. Існує багато алгоритмів, які використовуються для генерації псевдовипадкових послідовностей рівномірно розподілених чисел. Розглянемо два з них.

**Алгоритм фон Неймана.** Нехай  $\xi_k$  є  $m$ -розрядне двійкове число, що задовольняє умову  $0 < \xi_k < 1$  і має вигляд

$$\xi_k = \varepsilon_1 \cdot 2^{-1} + \varepsilon_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \varepsilon_m \cdot 2^{-m}. \quad (3.8)$$

Його квадрат може бути записаний у вигляді

$$\xi_k^2 = \delta_1 \cdot 2^{-1} + \delta_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \delta_{2m} \cdot 2^{-2m}. \quad (3.9)$$

Будемо вважати  $m$  парним числом. Така умова завжди виконується для сучасних ЕОМ. Наступне псевдовипадкове число  $\xi_{k+1}$  отримаємо, використовуючи коефіцієнти середніх членів ряду (3.9) за формулою

$$\xi_{k+1} = f(\xi_k) = \delta_{m/2+1} \cdot 2^{-1} + \delta_{m/2+2} \cdot 2^{-2} + \dots + \delta_{3m/2} \cdot 2^{-m}. \quad (3.10)$$

Послідовність псевдовипадкових чисел, що отримано за таким алгоритмом, за своїми властивостями є близька до рівномірної випадкової послідовності. Але кількість малих чисел, що генеруються за алгоритмом фон Неймана, є дещо вища, ніж це має бути для рівномірної випадкової послідовності.

**Метод лишків.** У цьому разі для одержання рівномірної послідовності псевдовипадкових чисел використовують рекурентне співвідношення  $\xi_k = M\{\xi_k\}$ , де хвилястими дужками позначено дробову частину числа. Як початкове значення  $\xi_0$  можна обрати число  $2^{-m}$ , де  $m$  є число двійкових розрядів у мантісі комірки ЕОМ.  $M$  має бути достатньо великим цілим числом. Рекомендується використовувати  $M = 5^{2p+1}$ , де  $p$  є максимальне із цілих чисел, для яких виконується умова  $5^{2p+1} < 2^m$ .

Після отримання рівномірної випадкової послідовності необхідно перевірити її якість. Використовують такі методи перевірки.

*Перевірка за моментами розподілу.* Для здійснення такої перевірки розраховують моменти отриманого розподілу:

$$m_\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i; \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - m_\xi^2 \quad (3.11)$$

Для рівномірної випадкової послідовності їхні значення мають бути близьки-ми відповідно до  $1/2$  та  $1/12$ . Перевірку гіпотези про рівномірний розподіл можна здійснити за критерієм  $\chi^2$ . При обранні рівня значимості слід враховувати, яка помилка для конкретної задачі є більш суттєва – прийняття помилкової гіпотези чи неприйняття правильної гіпотези.

*Перевірка за гистограмою.* У цьому разі відрізок  $[0, 1]$  розбивають на  $n$  рівних частин. Потім підраховують емпіричні частоти потрапляння чисел, що генеруються, в отримані інтервали:  $p_i = m_i/N$  ( $m_i$  – кількість чисел, що потрапили до  $i$ -го інтервалу,  $N$  – загальна кількість чисел у послідовності). Після цього будують гистограму розподілу. При великих  $N$  гистограма має наближатися до горизонтальної прямої  $p = n/N$ . Кількість відрізків розбиття та розмір послідовності визначаються конкретною задачею. У більшості випадків рекомендується обирати  $n = 20 \dots 50$  та  $N = (10^2 \dots 10^3)n$ .

*Перевірка на періодичність.* Випадкові числа, що генеруються за програмним методом, рано чи пізно починають повторюватися.

Якщо серед елементів послідовності  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1}$  немає однакових чисел, а елемент  $\xi_q$  збігається з одним із попередніх,  $q$  називають відрізком аперіодичності. При використанні рівномірних випадкових послідовностей він має бути не меншим за кількість чисел, потрібну для здійснення розрахунків.

*Перевірка на випадковість.* Серед елементів послідовності, що генерується, може знайтись серія елементів  $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_{k+r}$ , які містяться в одній половині відрізка  $[0, 1]$ , і при цьому елементи  $\xi_k$  і  $\xi_{k+r+1}$  містяться в іншій половині цього відрізка. При використанні такої послідовності необхідно, щоб для кількості  $N$  чисел, що використовуються в розрахунках, виконувалася умова

*Перевірка в роботі.* У цьому разі для перевірки якості генератора випадкових чисел будують імітаційну модель, результат роботи якої є відомим з теорії. Порівнян-

ня результатів моделювання з теоретичними висновками дає змогу зробити висновок про придатність генератора для розв'язування деякого класу задач.

### 3.3. Загальні методи генерування випадкових послідовностей із заданими законами розподілу

У практиці виникає необхідність генерування послідовностей випадкових чисел із довільними законами розподілу. Застосовують різні методи перетворення рівномірних випадкових послідовностей у послідовності з іншими законами розподілу. Найчастіше використовують таку властивість: якщо  $\xi$  – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку  $[0, 1]$ , випадкова величина  $X$ , що є розв'язок рівняння

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \xi \quad (3.12)$$

має густину розподілу  $f(x)$ .

Нехай треба отримати послідовність чисел, рівномірно розподілених на відрізку  $[a, b]$ .

Тоді необхідно для кожного елемента  $\xi_i$  рівномірної випадкової послідовності знайти розв'язок рівняння

$$\xi_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = \int_a^{x_i} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_i - a}{b-a}. \quad (3.13)$$

Звідси маємо:

$$x_i = \xi_i(b-a). \quad (3.14)$$

Для послідовності чисел, що мають експоненціальний розподіл:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } 0 \leq x < \infty; \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Звідси:

$$\xi_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = \int_0^{x_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x_i}. \quad (3.16)$$

та

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i). \quad (3.17)$$

Якщо величина  $\xi_i$  має рівномірний розподіл на  $[0, 1]$ , величина  $1 - \xi_i$  також матиме рівномірний розподіл на  $[0, 1]$ . Тому вираз (3.17) можна записати у вигляді

$$-\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i. \quad (3.18)$$

Такий спосіб не завжди є прийнятний. Зокрема, якщо з рівняння (3.12) неможливо отримати формулу для знаходження шуканого значення  $x$  в явному вигляді, часто доцільнішим є використання інших методів генерування послідовності випадкових чисел, що мають задану густину розподілу  $f(x)$ .

Один із них (*метод відбору*) ґрунтується на використанні такої властивості. Нехай  $\xi_1$  та  $\xi_2$  – це чергові числа, які належать до рівномірної випадкової послідовності, заданої на відріжку  $[0, 1]$ . Зробимо перетворення

$$x' = \xi_1(b - a) + a; \quad y' = \xi_2 c. \quad (3.19)$$

Випадкові величини  $x'$  та  $y'$  мають рівномірний розподіл на відрізках  $[a, b]$  і  $[0, c]$  відповідно. Можна довести, що випадкова величина, яка визначається умовою  $x = x'$ , якщо  $y' < f(x')$ , має щільність розподілу  $f(x)$ . Для генерування випадкової послідовності, що має густину розподілу  $f(x)$ , можна використовувати такий алгоритм.

Генерують чергові два числа рівномірної випадкової послідовності  $\xi_{2i-1}$  та  $\xi_{2i}$ . Потім розраховують відповідні значення  $x'_i$  та  $y'_i$ . Після цього перевіряють виконання умови  $y'_i < f(x'_i)$ . Якщо ця умова виконується,  $x_k = x'_i$  є чергове випадкове число послідовності, яку треба побудувати. Якщо умова не виконується, переходять до перевірки наступної пари значень рівномірної випадкової послідовності.

Ще один спосіб генерування послідовності випадкових чисел із заданим розподілом ґрунтується на можливості наближення істинного розподілу рівномірним на досить малих відрізках. Нехай ми маємо функцію густину розподілу  $f(x)$ , задану графічно на відріжку  $[a, b]$ . Розіб'ємо цей відрізок на  $n$  рівних частин так, щоб виконувалася умова:

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = \dots = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx = \frac{1}{n}. \quad (3.20)$$

де  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$ . При такому розбитті потрапляння випадкової точки на будь-який відрізок є рівномірним. У загальному випадку відрізки  $[a_i, a_{i+1}]$  будуть нерівними. Апроксимуємо  $f(x)$  такою східчастою функцією  $\varphi(x)$ , що для будь-якого відрізка розбиття виконується рівність:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(x) dx = \varphi_i(a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{n}. \quad (3.21)$$

Тобто,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a; \\ \frac{1}{n(a_{i+1} - a_i)}, & \text{якщо } x \in [a_i, a_{i+1}); \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases} \quad (3.22)$$

Координату випадкової точки  $M$  можна записати у вигляді:

$$x_M = a_i + \rho_M, \quad (3.23)$$

де  $a_i$  – координата лівого кінця інтервалу, в якому міститься точка, а  $\rho_M$  – його відстань до точки. Значення  $\rho$  утворюють рівномірну випадкову послідовність. Тому їх можна отримати за формулою

$$\rho = \xi(a_{i+1} - a_i). \quad (3.24)$$

На відміну від (3.14) ця формула не містить доданка  $a_i$ , оскільки значення  $\rho$  відраховуються саме від точки  $a_i$ .

Загальна схема побудови випадкової послідовності із заданою густиною розподілу у даному випадку є така. По-перше, визначають номер інтервалу, в якому міститься чергова точка  $M$ . Для цього знаходять черговий елемент  $\xi_{2i-1}$  рівномірної випадкової послідовності. Номер інтервалу  $i$  знаходять за формулою

$$i = [n\xi_{2j-1}], \quad (3.25)$$

де квадратними дужками позначено цілу частину числа. Після цього генерують наступний елемент рівномірної випадкової послідовності  $\xi_{2j}$  і розраховують випадкове число

$$x = a_i + \xi_{2j}(a_{i+1} - a_i). \quad (3.26)$$

### 3.4. Спеціальні методи генерування випадкових послідовностей із деякими законами розподілу

Загальна формула (3.12) є незручна для генерування випадкових чисел із нормальним законом розподілу, оскільки призводить до необхідності розв'язування відносно  $x_i$  рівняння

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (3.27)$$

Тому використовують інші методи. Один із поширеніших і простих методів ґрунтується на використанні центральної граничної теореми. Нехай  $\xi_i$  – елементи рівномірної випадкової послідовності, заданої на відрізку  $[0, 1]$ . Побудуємо із них послідовність

$$\alpha_i = 2\xi_i - 1. \quad (3.28)$$

Вона також буде рівномірною і випадковою, але заданою на відрізку  $[-1, 1]$ . Розрахуємо величину

$$\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (3.29)$$

Згідно з центральною граничною теоремою, за достатньо великих  $n$  величина  $\beta$  матиме близький до нормального розподіл із параметрами

$$m_\beta = M \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \right] = \sum_{i=1}^n M[\alpha_i]. \quad (3.30)$$

$$\sigma_{\beta}^2 = D \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \right] = \sum_{i=1}^n D[\alpha_i] = \frac{n}{3}. \quad (3.31)$$

Величину  $\gamma = \beta/\sigma_{\beta}$ , що має нормальний розподіл із параметрами  $m_{\gamma} = 0$  та  $\sigma_{\gamma} = 1$ , можна розрахувати за формулою

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^n (2\xi_i - 1). \quad (3.32)$$

яка дає задовільні для практичного користування результати при  $n > 8$ .

У практиці математичного моделювання велике значення має можливість скорочення кількості обчислень. При генеруванні нормально розподілених величин для цього можна використовувати такі емпіричні формули:

$$\mu_k = \gamma_k - \frac{1}{20n} (3\gamma_k - \gamma_k^3) \quad (3.33)$$

та

$$\zeta_k = \gamma_k - \frac{41}{13440n^2} (\gamma_k^5 - 10\gamma_k^3 + 15\gamma_k). \quad (3.34)$$

Використання (3.33) дає змогу скоротити величину  $n$  для обчислення  $\gamma_k$  до п'яти, а використання (3.34) – до двох.

Для отримання елементів нормальної послідовності використовують також перетворення

$$\gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - k/2}{\sqrt{k/12}}. \quad (3.35)$$

У практиці часто буває достатнім узяти  $k = 12$ .

Для отримання послідовності випадкових чисел  $v$ , що мають нормальний розподіл із параметрами  $m_v = a$  та  $\sigma_v = b$ , необхідно зробити перетворення:

$$v_k = b\gamma_k + a. \quad (3.36)$$

Дві незалежні послідовності із нормальним законом розподілу й параметрами (0; 1) можна отримати із двох незалежних випадкових послідовностей за допомогою перетворень:

$$\begin{cases} N_{1i} = \sqrt{-2 \ln \xi_{1i}} \sin(2\pi \xi_{2i}); \\ N_{2i} = \sqrt{-2 \ln \xi_{2i}} \cos(2\pi \xi_{1i}). \end{cases} \quad (3.37)$$

Застосування такого способу суттєво зменшує обсяг потрібних розрахунків завдяки тому, що один і той самий елемент кожної рівномірної послідовності використовується двічі.

Стисло зупинимося на методах побудови псевдовипадкових послідовностей із деякими іншими законами розподілу.

Чергові реалізації  $B_i$  випадкової величини, що має розподіл Бернуллі із параметром  $p$  (ймовірність успіху), отримують із відповідних елементів рівномірної послідовності, використовуючи таке перетворення:

$$B_i = \begin{cases} 1, & \text{за } \xi_i < p; \\ 0, & \text{за } \xi_i > p. \end{cases} \quad (3.38)$$

Реалізації  $G_i$  випадкової величини, що має *геометричний розподіл*, можна отримати із елементів рівномірної послідовності  $\xi_i \in [0, 1]$  за таким алгоритмом. Черговий елемент  $G_i$  дорівнює значенню  $\ln \xi_i / \ln(1 - p)$ , округленому у більший бік до найближчого цілого числа ( $p$  – ймовірність успіху при одному випробуванні).

Реалізації  $B_j$  випадкової величини, що має біноміальний розподіл із параметрами  $n, p$  ( $n$  – кількість незалежних випробувань), можна отримати із елементів рівномірної послідовності  $\xi_i \in [0, 1]$  за таким алгоритмом. Візьмемо перші  $n$  елементів рівномірної послідовності й перевіримо виконання умови  $\xi_i < p$ . Кількість елементів, для яких ця умова виконується, є перший елемент послідовності із біноміальним розподілом  $B_1$ . Потім здійснюємо таку саму перевірку для наступних  $n$  елементів рівномірної послідовності й отримуємо другий елемент  $B_2$ . Продовжуючи цю процедуру, отримуємо необхідну кількість елементів псевдовипадкової послідовності із біноміальним законом розподілу.

При малих  $p$  попередній алгоритм є не ефективний. У цьому разі можна застосовувати такий метод. Будемо послідовно додавати елементи псевдовипадкової послідовності, починаючи з першого, доки їх сума не перевищить  $n$ . Перший елемент послідовності із біноміальним розподілом дорівнюватиме кількості доданків мінус одиниця. Аналогічно отримуємо інші елементи біноміальної послідовності.

Реалізації  $y$  випадкової величини, що має від'ємний біноміальний розподіл із параметрами  $x, p$  ( $x$  – кількість успіхів), можна отримати із елементів рівномірної послідовності  $\xi_i \in [0, 1]$  за методом бракування. Підраховуємо кількість перших елементів рівномірної послідовності, які менше за  $p$ . Нехай вона вперше стане рівною  $x$  після того, як ми врахуємо  $m$ -й елемент. Тоді  $Y_1$  дорівнюватиме кількості чисел  $\xi_i$ , які більші за  $p$ , серед перших  $m$  елементів рівномірної послідовності. Чергові елементи  $Y_j$  отримуємо за аналогічною процедурою, використовуючи наступні елементи рівномірної послідовності.

За малих  $p$  ефективнішим є алгоритм, що використовує таке перетворення:

$$Y_j = \sum_{i=1}^x G_i - x, \quad (3.39)$$

де  $G_i$  – елементи послідовності із геометричним законом розподілу.

Реалізації  $C_j$  випадкової величини, що має *розподіл Паскаля* із параметрами  $x, p$ , можна отримати, використовуючи перетворення

$$C_j = \sum_{i=1}^x G_i, \quad (3.40)$$



де  $G_i$  – чергові елементи послідовності із геометричним законом розподілу.

Реалізації  $P_i$  розподілу Пуассона отримують із відповідних елементів рівномірної послідовності за таким алгоритмом.

Розраховують функцію розподілу  $F(x)$  для  $x = 0, 1, 2, \dots, N$  за формулою

$$F(x) = \sum_{i=1}^x e^{-\lambda}/k!, \quad (3.41)$$

де  $\lambda$  – параметр розподілу (середнє),  $N$  має бути достатньо великим. Значення  $P_i$  вважають рівним  $x$ , для якого виконується умова  $F(x) < \xi_i < F(x+1)$ . При малих  $\lambda$  для прискорення процедури використовують спрощений алгоритм, згідно з яким значення  $P_i$  беруть рівним  $x$ , для якого виконується умова:

$$\xi_i \xi_2 \cdots \xi_{x+1} < e^{-\lambda} < \xi_i \xi_2 \cdots \xi_x.$$

Реалізації  $H_j$  випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл із параметрами  $N, X, n$  ( $X$  – кількість елементів, що мають задану властивість,  $N$  – загальна кількість елементів у вибірці,  $n$  – кількість витягнутих без повернення елементів), можна отримати із елементів рівномірної послідовності  $\xi_i \in [0, 1]$  за таким алгоритмом. Будемо вважати успіхом подію  $\xi_i < p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), де

$$\begin{cases} p_1 &= X/N; \\ N_1 &= N; \\ p_{i+1} &= (N_i p_i - d_i)/(N - i); \\ d_i &= 1, \text{ за } \xi_i < p_i; \\ N_i &= N - i + 1. \end{cases} \quad (3.42)$$

Шуканим випадковим числом  $H_j$  буде кількість успіхів.

Чергові реалізації  $L_j$  – логонормального розподілу із параметрами  $m, \sigma$  ( $m = e^\mu$ ) – медіана,  $\sigma$  – стандартне відхилення для  $\ln L$ ,  $\mu$  – математичне сподівання для  $\ln L$ ) можна отримати із елементів нормальної із параметрами  $(0, 1)$  або рівномірної послідовностей за допомогою перетворень:

$$\begin{cases} L_j = m e^{\sigma N_j}; \\ L_j = m \exp \left[ \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6 \right) \right]. \end{cases} \quad (3.43)$$

Чергові реалізації  $X_j$  – розподілу  $\chi^2$  із  $v$  ступенями вільності можна отримати із елементів незалежних рівномірної та нормальної із параметрами  $(0, 1)$  послідовностей за допомогою таких перетворень.

Для парних  $v$ :

$$X_j = -\frac{1}{2} \ln \left( \prod_{i=1}^{v/2} \xi_i \right), \quad (3.44)$$

Для непарних  $v$ :

$$X_j = -\frac{1}{2} \ln \left( \prod_{i=1}^{(v-1)/2} \xi_i \right) + (N_j)^2, \quad (3.45)$$

Для  $v = 1$

$$X_j = (N_j)^2. \quad (3.46)$$

Чергові реалізації  $\Pi_i$  розподілу Парето із параметром форми  $c$  можна отримати із відповідних елементів рівномірної послідовності за допомогою перетворення

$$\Pi_i = (1/\xi_i)^{1/c}. \quad (3.47)$$

Чергові реалізації  $W_i$  розподілу Вейбула із параметрами масштабу  $b$  та форми  $c$  можна отримати із відповідних елементів рівномірної послідовності за допомогою перетворення

$$W_i = b(-\ln \xi_i)^{1/c}. \quad (3.48)$$

Чергові реалізації  $L_i$  логістичного розподілу можна отримати із відповідних елементів рівномірної послідовності за допомогою перетворення

$$L_i = a + k \ln \left( \frac{\xi_i}{1 - \xi_i} \right), \quad (3.49)$$

де  $a$  – параметр розміщення,  $k = \sqrt{3b}/\pi$  – коефіцієнт масштабу,  $b$  – стандартне відхилення.

### 3.5. Моделювання багатовимірних випадкових векторів

$N$ -вимірний випадковий вектор можна задати як сукупність його компонент  $X = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , де компоненти вектора  $\eta_i$  є випадкові величини із заданим законом розподілу. Задачею моделювання є отримання послідовності чергових реалізацій випадкового вектора  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$  у вигляді послідовності чисел  $(\eta_1^1, \eta_2^1, \dots, \eta_n^1), (\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_n^2), \dots, (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_n^i), \dots$

Якщо компоненти вектора є незалежні одна від іншої, доцільно здійснювати генерування кожної компоненти як незалежної випадкової послідовності із заданим законом розподілу. Перед початком моделювання необхідно перевірити відсутність кореляції між генерованими сукупностями випадкових чисел.

Складнішою є задача моделювання випадкового вектора за наявності кореляції (залежності) між його компонентами. Кореляційну залежність між компонентами нормального випадкового вектора можна задати у вигляді матриці других моментів

$$K = \{\rho_{ij}\} \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (3.50)$$

де

$$\rho_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & i = j, \\ M[(\eta_i - a_i)(\eta_j - a_j)], & i \neq j. \end{cases} \quad (3.51)$$

Матриця  $K$  є симетрична відносно головної діагоналі, оскільки  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ . Нехай  $X$  – це двовимірний випадковий вектор, компоненти якого  $\eta_1$  і  $\eta_2$  мають математичні сподівання  $a_1$  і  $a_2$ . Матриця других моментів має вигляд:

$$K = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{vmatrix}. \quad (3.52)$$

де  $\rho = \rho_{12} = \rho_{21}$ .

Згенеруємо дві незалежні нормальні послідовності випадкових чисел  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , математичні сподівання яких дорівнюють нулю, а дисперсії – одиниці. З них можна отримати дві нові нормальні послідовності за допомогою перетворень:

$$\bar{\eta}_1 = a\mu_1; \quad \bar{\eta}_2 = b\mu_1 + c\mu_2. \quad (3.53)$$

Оберемо коефіцієнти  $a, b, c$  такими, щоб виконувалися умови:

$$M[\bar{\eta}_1^2] = \sigma_1^2, \quad M[\bar{\eta}_2^2] = \sigma_2^2; \quad M[\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2] = \rho. \quad (3.54)$$

Враховуючи (3.53), отримаємо:

$$\begin{cases} M[\bar{\eta}_1^2] = a^2 M[\mu_1^2] = a^2; \\ M[\bar{\eta}_2^2] = b^2 M[\mu_1^2] + 2bcM[\mu_1\mu_2] + c^2 M[\mu_2^2] = b^2 + c^2; \\ M[\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2] = abM[\mu_1^2] + acM[\mu_1\mu_2] = ab. \end{cases} \quad (3.55)$$

Звідси маємо систему

$$a^2 = \sigma_1^2; \quad b^2 + c^2 = \sigma_2^2; \quad ab = \rho. \quad (3.56)$$

розв'язком якої є:

$$a = \sigma_1, \quad b = \frac{\rho}{\sigma_1}, \quad c = \frac{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2}}{\sigma_1}. \quad (3.57)$$

Тому:

$$\bar{\eta}_1 = \sigma_1\mu_1; \quad \bar{\eta}_2 = \frac{\rho}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2}}{\sigma_1}\mu_2. \quad (3.58)$$

Реалізації вихідних випадкових величин можна отримати за допомогою перетворень:

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1 + a_1; \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 + a_2. \quad (3.59)$$

Для тривимірного випадкового вектора матриця других моментів має вигляд:

$$K = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \sigma_2^2 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \sigma_3^2 \end{vmatrix}. \quad (3.60)$$

Реалізації тривимірного випадкового вектора можна отримати за допомогою перетворень:

$$\begin{cases} \eta_1 = \bar{\eta}_1 + a_1 = a\mu_1 + a_1; \\ \eta_2 = \bar{\eta}_2 + a_2 = b\mu_1 + c\mu_2 + a_2; \\ \eta_3 = \bar{\eta}_3 + a_3 = d\mu_1 + e\mu_2 + f\mu_3 + a_3. \end{cases} \quad (3.61)$$

де  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – незалежні нормально розподілені випадкові послідовності, для яких математичні сподівання дорівнюють нулю, а дисперсії – одиниці. Другі моменти розподілу дорівнюють:

$$\begin{cases} M[\bar{\eta}_1^2] = M[a^2\mu_1^2] = a^2; \\ M[\bar{\eta}_2^2] = M[b^2\mu_1^2 + 2bc\mu_1\mu_2 + c^2\mu_2^2] = b^2 + c^2; \\ M[\bar{\eta}_3^2] = M[d^2\mu_1^2 + e^2\mu_2^2 + f^2\mu_3^2 + 2de\mu_1\mu_2 + 2df\mu_1\mu_3 + 2ef\mu_2\mu_3] = d^2 + e^2 + f^2; \\ M[\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2] = M[ab\mu_1^2 + ac\mu_1\mu_2] = ab; \\ M[\bar{\eta}_1\bar{\eta}_3] = M[ad\mu_1^2 + ae\mu_1\mu_2 + af\mu_1\mu_3] = ad; \\ M[\bar{\eta}_2\bar{\eta}_3] = M[bd\mu_1^2 + be\mu_1\mu_2 + bf\mu_1\mu_3 + cd\mu_1\mu_2 + ce\mu_2^2 + cf\mu_2\mu_3] = bd + ce. \end{cases} \quad (3.62)$$

Звідси одержуємо систему шести рівнянь з шістьма змінними:

$$\begin{cases} a^2 = \sigma_1^2; \\ b^2 + c^2 = \sigma_2^2; \\ d^2 + e^2 + f^2 = \sigma_3^2; \\ ab = \rho_{12}; \\ ad = \rho_{13}; \\ bd + ce = \rho_{23}. \end{cases} \quad (3.63)$$

розв'язуючи яку, можна знайти коефіцієнти  $a, b, c$ , необхідні для побудови тривимірного випадкового вектора  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ .

## 3.6. Теорія масового обслуговування

### 3.6.1. Ланцюги Маркова

Необмежена послідовність дослідів із єдиною можливими і попарно несумісними витоками  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  зветься ланцюгом Маркова, якщо ймовірність будь-якого із цих витоків у черговому досліді однозначно визначається результатом безпосередньо попереднього досліді. Сукупність несумісних витоків  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  зветься вектором стану системи, компоненти якого утворюють повну групу подій:  $s_1 + s_2 + \dots + s_n = 1$ .

Позначення:  $p_j^{(0)}$  – ймовірність  $i$ -го витоку у першому досліді ( $j = \overline{1, m}$ ).

$$p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + \dots + p_m^{(0)} = 1.$$

$p_{ji}^{(0)}$  – ймовірність  $i$ -го витоку в  $n$ -му досліді за умови, що у  $(n-1)$ -му досліді настав  $i$ -й виток,  $n = 2, 3, \dots$ ;  $i, j = \overline{1, m}$ ;  $p_{1i}^{(n)} + p_{2i}^{(n)} + \dots + p_{1m}^{(n)} = 1$ . Ймовірностями, що запроваджено, сповна описується ланцюг Маркова.

Ланцюг Маркова зветься однорідним, якщо ймовірності  $p_{ij}^{(n)}$  не залежать від  $n$ , у цьому разі вони позначаються без верхнього індекса  $p_{ij}$ . Числа  $p_{ij}$  зветься ймовір-

ностями переходів, а

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

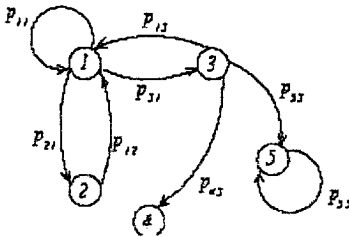
– матрицею переходу.

По матриці переходу можна побудувати граф станів, якщо в якості вузлів взяти стани  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  системи, а стрілками – можливі переходи із одного стану в інший.

Наприклад, для матриці переходу

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{53} & 0 & p_{55} \end{pmatrix}$$

граф стану має вигляд



Позначимо:  $p_{ij}(n)$  – ймовірність того, що через  $n$  кроків здійсниться перехід від  $s_j$  до  $s_i$  ( $i, j = \overline{1, m}$ ),  $P(n)$  – матрицю переходів за  $n$  кроків, тобто матрицю, яка складається із  $p_{ij}(n)$ . Якщо у початковий момент система мала стан  $s^0 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , на наступному кроці вона перейде у стан

$$s^1 = P s^0.$$

Рис. 3.1. Граф стану

На другому кроці стан системи є:

$$s^2 = P s^1 = P \cdot P s^0 = P^2 s^0.$$

Вочевидь, через  $n$  кроків стан системи  $s^n$  буде виражатися через початковий стан  $s^0$  формулою  $s^n = P^n s^0$ . Отже, справедлива формула  $P(n) = P^n$ .

**Теорема Маркова (про граничні ймовірності):** якщо існує таке натуральне число  $n_0$ , що всі елементи матриці  $P(n_0) = P^{n_0}$  строго додатні, для кожного  $j = \overline{1, m}$  існує гранична ймовірність  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = P^*$

Граничні ймовірності (якщо вони існують) можна знайти із рівнянь:

$$P s = s, \rightarrow p_{ij} s_j = \delta_{ij} s_j, \quad (p_{ij} - \delta_{ij}) s_j = 0.$$

Отже, разом із умовою нормування на компоненти вектора стану задача про

відшукування граничного стану зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{aligned}(p_{11} - 1)s_1 + p_{12}s_2 + \dots + p_{1n}s_n &= 0, \\ p_{21}s_1 + (p_{22} - 1)s_2 + \dots + p_{2n}s_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ p_{n1}s_1 + p_{n2}s_2 + \dots + (p_{nn} - 1)s_n &= 0, \\ s_1 + s_2 + \dots + s_n &= 1.\end{aligned}$$

Оскільки дана система перевизначена (вона містить зайве рівняння), із неї можна викреслити одне рівняння. Небажано викреслювати останнє рівняння нормування вектора стану.

**Приклад.** Нехай  $(A_1, A_2, A_3)$  – точки числової осі із цілочисловими координатами ( $x = 1, x = 2, x = 3$ ). Уявимо собі частинку, що рухається за цими точками таким чином: якщо у деякий момент часу  $t = n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) частинка міститься у внутрішній точці  $A_2$ , в наступний момент часу  $t = n + 1$  вона переходить в  $A_1$  із ймовірністю  $q$  або в  $A_3$  із ймовірністю  $p = 1 - q$ ; якщо частинка опинилася у лівій межовій точці  $A_1$ , в наступний момент часу із ймовірністю  $q$  вона там залишається або із ймовірністю  $p$  повертається в  $A_2$ ; якщо ж частинка опинилася у правій межовій точці  $A_3$ , в наступний момент часу вона там залишається із ймовірністю  $p$  або повертається в  $A_2$  із ймовірністю  $q$ .

а) Знайдіть матрицю переходів і побудуйте її граф станів.

б) Знайдіть матрицю переходів за два кроки.

в) Перевірте існування граничних станів.

г) Якщо граничні стани існують, знайдіть їх.

**Розв'язання.**

а) Побудуємо граф станів:

Нагадаємо, що початковому стану переходу відповідає другий індекс  $k$ , а кінцевому – перший індекс  $i$  матриці  $p_{ik}$ . Знаходимо ймовірності переходів  $p_{ik}$  за один крок:

$$p_{11} = q, p_{21} = p, p_{22} = p, p_{23} = q, p_{33} = p.$$

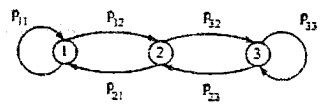


Рис. 3.2. Граф станів

В результаті матриця переходів має вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} q & q & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & p & p \end{vmatrix}.$$

В якості перевірки зауважимо, що сума елементів за стовпцями матриці дорівнює одиниці (згідно умові нормування для вектора станів).

б) Для відшукування  $P(2)$  обчислюємо  $P^2$ :

$$P(2) = P^2 = \begin{vmatrix} q & q & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & p & p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q & q & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & q^2 & q^3 \\ pq & 2pq & pq \\ p^2 & p^2 & p \end{vmatrix}.$$

в) Оскільки всі елементи  $P^2$  є строго додатні, умова теореми Маркова про граничні ймовірності виконується. Отже, граничні ймовірності  $(s_1^*, s_2^*, s_3^*)$  існують.

г) Для відшукування граничних станів розв'яжемо систему:

$$\begin{vmatrix} q-1 & q & 0 \\ p & 0-1 & q \\ 0 & p & p-1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

із додатковою умовою  $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ .

$$s_1 = \frac{q^2}{q^2 + pq + p^2}; \quad s_2 = \frac{pq}{q^2 + pq + p^2}; \quad s_3 = \frac{p^2}{q^2 + pq + p^2}.$$

### 3.6.2. Робота телефонного комутатора

*Приклад.* Система, що досліджується, (комутатор) може приймати два стани: вона може бути вільною у момент часу із ймовірністю  $P_0(t)$  і зайнятою із ймовірністю  $P_1(t)$ . Якщо лінія вільна, за проміжок часу  $\Delta t$  на комутатор надходить сигнал із ймовірністю  $\alpha \Delta t$  і переводить систему у стан зайнято. Якщо комутатор зайнятий, із ймовірністю  $\beta \Delta t$  він обробляє сигнал і переходить у стан вільно. Знайти граничний стан системи при  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$ .

*Розв'язання.* Припустимо, у момент часу  $t + \Delta t$  система була вільною. Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані вільно  $P_0(t)$  і до неї не надійшов сигнал (ймовірність ненадходження сигналу дорівнює  $1 - \alpha \Delta t$ );
2. система перебувала у стані зайнято  $P_1(t)$ , але за проміжок часу  $\Delta t$  запит було оброблено із ймовірністю  $\beta \Delta t$ .

Тоді за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \alpha \Delta t) + P_1(t)\beta \Delta t$$

або

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\alpha \Delta t + P_1(t)\beta \Delta t.$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $\Delta t$  і візьмемо границю  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\alpha + P_1(t)\beta = P_0'(t).$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку

$$dP_0/dt = -P_0\alpha + P_1\beta.$$

Тепер припустимо, що у момент часу  $t + \Delta t$  система була зайнята. Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані вільно (із ймовірністю  $P_0(t)$ ) і на неї надійшов сигнал (ймовірність надходження сигналу дорівнює  $\alpha \Delta t$ );

2. система перебувала у стані зайнято (із ймовірністю  $P_1(t)$ ) і за проміжок часу  $\Delta t$  запит так і не було оброблено (ймовірність того, що сигнал не було оброблено, дорівнює  $1 - \beta\Delta t$ ).

Тоді за формулою повної ймовірності отримуємо:

$$P_1(t + \Delta t) - P_1(t) = P_0(t)\alpha\Delta t - P_1(t)\beta\Delta t.$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $\Delta t$  й візьмемо границю.

$$dP_1/dt = \alpha P_0 - \beta P_1.$$

За припущення, що у початковий момент часу  $t = 0$  система була вільна (із ймовірністю  $P_0(0) = 1$  (тоді  $P_1(0) = 0$ )), отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} P_0' &= -\alpha P_0 + \beta P_1, & P_0(0) &= 1, \\ P_1' &= \alpha P_0 - \beta P_1, & P_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Перетворення за Лапласом ( $p = i\omega$ ) даної системи дає

$$\begin{aligned} (\omega + \alpha)P_0 - \beta P_1 &= 1; \\ \alpha P_0 - (\omega + \beta)P_1 &= 0. \end{aligned}$$

Зворотне перетворення дає

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{\alpha e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}; \\ P_1(t) &= \alpha \left( \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha + \beta} \right). \end{aligned}$$

Для конкретних значень  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$  графік розв'язків набуває вигляду

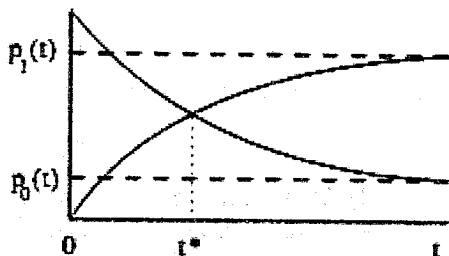
При  $t \rightarrow \infty$  граничні стани системи мають вигляд

$$P_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}; \quad P_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Із графіка видно, крива ймовірності вільного стану перетинається із кривою завантаженого стану.

Це означає, що після настання деякого часу  $t^*$  система перестане справлятися із потоком заявок. Тому необхідно або збільшити продуктивність системи (зменшити час обслуговування заявки), або зменшити сам потік заявок.

**Приклад.** Досліджується мікропроцесор, що розраховано на одночасне обслуговування трьох контролерів. Знайти граничний стан системи, якщо ймовірність надходження переривання на мікропроцесор за проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює  $\alpha\Delta t$ .





Ймовірність обробки переривання за проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює  $\beta\Delta t$ . ( $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,5$ ).

*Розв'язання.* Позначимо через  $P_0(t)$  ймовірність того, що мікропроцесор є вільний (на нього не надходило жодного переривання). Тоді  $P_1(t)$  – ймовірність обробки мікропроцесором одного переривання,  $P_2(t)$  – двох переривань,  $P_3(t)$  – трьох переривань. Запровадимо позначення для таких станів мікропроцесора:

$x_0$  – вільний;  $x_1$  – зайнятий рівно один вхід;  $x_2$  – зайнято два входи;  $x_3$  – зайняті всі три входи.

1). Припустимо, що у момент часу  $t + \Delta t$  система була вільною. Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані вільно  $x_0$  (із ймовірністю  $P_0(t)$ ) і на неї не надійшов сигнал (ймовірність ненадходження сигналу дорівнює  $1 - \alpha\Delta t$ );

2. система перебувала у стані зайнято  $x_1$ , (із ймовірністю  $P_1(t)$ ), але за проміжок часу  $\Delta t$  запит було оброблено із ймовірністю  $\beta\Delta t$ .

Аналогічно попередньому прикладу

$$dP_0/dt = -\alpha P_0 + \beta P_1.$$

2) Тепер припустимо, що у момент часу  $t + \Delta t$  мікропроцесор був зайнятий обробкою одного переривання. Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані вільно  $x_0$  (із ймовірністю  $P_0(t)$ ) і на неї надійшов сигнал (ймовірність надходження сигналу дорівнює  $\alpha\Delta t$ );

2. система перебувала у стані зайнято  $x_1$  і за проміжок часу  $\Delta t$  система не обробила переривання і до неї не надійшов жодний сигнал (ймовірність  $1 - \alpha\Delta t - \beta\Delta t$ ).

3. система перебувала у стані  $x_2$  і за проміжок часу  $\Delta t$  оброблено один запит із двох (ймовірність  $2\beta\Delta t$ ).

Тоді за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(t)\alpha\Delta t + P_1(t)(1 - \alpha\Delta t - \beta\Delta t) + 2\beta\Delta t P_2(t),$$

або

$$P_1(1 + \Delta t) - P_1(t) = \alpha\Delta t P_0(t) - (\alpha + \beta)\Delta t P_1(t) + 2\beta\Delta t P_2(t).$$

Після граничного переходу отримуємо

$$dP_1/dt = \alpha P_0 - (\alpha + \beta)P_1 + 2\beta P_2.$$

3) Тепер припустимо, що у момент часу  $t + \Delta t$  мікропроцесор перебував у стані  $x_2$  (обробка двох переривань). Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані  $x_1$  (із ймовірністю  $P_1(t)$ ) і на неї надійшов сигнал (із ймовірністю  $\alpha\Delta t$ );

2. система перебувала у стані  $x_2$  (з ймовірністю  $P_2(t)$ ) і за проміжок часу  $\Delta t$  запит так і не було оброблено і не надійшов жодний запит (ймовірність  $1 - \alpha\Delta t - 2\beta\Delta t$ ).

3. мікропроцесор був завантажений обробкою трьох переривань (із ймовірністю  $P_3(t)$ ) і за проміжок часу  $\Delta t$  обробив одне із трьох переривань. Тобто перейшов із стану  $x_3$  у стан  $x_2$  із ймовірністю  $3\beta\Delta t$ .

Тоді за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$P_2(1 + \Delta t) - P_2(t) = \alpha \Delta t P_1(t) - (\alpha + 2\beta) \Delta t P_2(t) + 3\beta \Delta t P_3(t).$$

$$dP_2/dt = \alpha P_1 - (\alpha + 2\beta) P_2 + 3\beta P_3.$$

4) Тепер припустимо, що у момент часу  $(t + \Delta t)$  мікропроцесор перебував у стані  $x_3$  (був сповна завантажений). Це означає, що у попередній момент часу  $t$ :

1. система перебувала у стані  $x_2$  (із ймовірністю  $P_2(t)$ ) і на неї надійшов сигнал (із ймовірністю  $\alpha \Delta t$ );

2. система перебувала у стані  $x_3$  (із ймовірністю  $P_3(t)$ ) і за проміжок часу  $\Delta t$  так і не був оброблений жоден із трьох запитів (ймовірність необроблення сигналів дорівнює  $1 - 3\beta \Delta t$ ).

$$P_2(t + \Delta t) = \alpha P_2(t) \Delta t + (1 - 3\beta \Delta t) P_3(t).$$

$$dP_3/dt = \alpha P_2 - 3\beta P_3.$$

За припущення, що у початковий момент часу  $t = 0$  система була вільною (із ймовірністю  $P_0(0) = 1$  (тоді  $P_1(0) = 0$ ,  $P_2(0) = 0$ ,  $P_3(0) = 0$ ), отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} P_0' &= -\alpha P_0 + \beta P_1, P_0(0) = 1, \\ P_1' &= \alpha P_0 - (\alpha + \beta) P_1 + 2\beta P_2, P_1(0) = 0, \\ P_2' &= \alpha P_1 - (\alpha + 2\beta) P_2 + 3\beta P_3, P_2(0) = 0, \\ P_3' &= \alpha P_2 - 3\beta P_3, P_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Перетворення за Лапласом даної системи дає (із урахуванням початкових умов)

$$\begin{aligned} ((\omega + \alpha)P_0 - \beta P_1) &= 1, \\ \alpha P_1 - (\omega + \alpha + \beta)P_1 + 2\beta P_2 &= 0, \\ \alpha P_1 - (\omega + \alpha + 2\beta)P_2 + 3\beta P_3 &= 0, \\ \alpha P_2 - (\omega + 3\beta)P_3 &= 0. \end{aligned}$$

Запишемо цю систему у матричному вигляді  $AP = b$ :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \omega & -\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha + \beta + \omega & -2\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & \omega + \alpha + 2\beta & -3\beta \\ 0 & 0 & -\alpha & \omega + 3\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання цього матричного функціонального рівняння, що залежить від параметрів  $\alpha, \beta$ , отримано у такому вигляді. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\Delta = \omega[\omega^3 + 3(\alpha + 2\beta)\omega^2 + (3\alpha^2 + 9\alpha\beta + 11\beta^2)\omega + (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 6\beta^3)].$$

$$P_0(\omega, \alpha, \beta) = [\omega^3 + 2(\alpha + 3\beta)\omega^2 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + 11\beta^2)\omega + 6\beta^3]/\Delta;$$

$$P_1(\omega, \alpha, \beta) = \{\alpha[\omega^2 + (\alpha + 5\beta)\omega + 6\beta^2]\}/\Delta;$$

$$P_2(\omega, \alpha, \beta) = \alpha^2(\omega + 3\beta)/\Delta; \quad P_3(\omega, \alpha, \beta) = \alpha^3/\Delta.$$

Корені характеристичного рівняння доцільно відшукувати за фіксованих значень параметрів  $\alpha, \beta$ . Позначимо їх:  $r_1 = 0, r_2, r_3, r_4$ . Тоді після відшукування власних значень (полісів) характеристичного рівняння розв'язання матричного рівняння можна представити у вигляді сум елементарних складових:

$$P_0(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 \frac{p_{0k}}{\omega + r_k};$$

$$P_1(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 \frac{p_{1k}}{\omega + r_k};$$

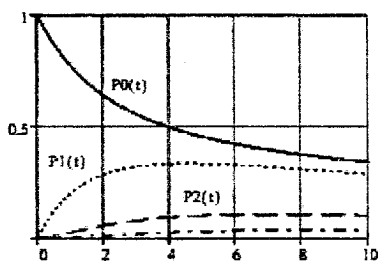
$$P_2(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 \frac{p_{2k}}{\omega + r_k};$$

$$P_3(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 \frac{p_{3k}}{\omega + r_k}.$$

У просторі оригіналів маємо

$$P_m(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 p_{mk} e^{-r_k t}; \quad m = \overline{0, 3}.$$

для конкретних значень графік розв'язків набуває вигляд



Із графіка видно, що криві ймовірності вільного стану перетинаються із кривими завантаженого стану. Це означає, що система справляється із потоком заявок й її продуктивності досить для обслуговування всіх переривань.

**Задача.** Розглядається робота офісної міні-АТС, що розрахована на обслуговування  $N$  абонентів ( $N$ -канальна система). Знайти граничний стан системи.

### 3.6.3. Система масового обслуговування із очікуванням

Розглянемо ситуацію, в якій заявка, що застає всі канали зайнятими, стає у чергу й очікує, поки не звільниться будь-який канал. Вочевидь, для постановки заявки у чергу мають бути виділені відповідні ресурси (обсяг кеш-пам'яті процесора, кількість місць у приймальні начальника тощо). Якщо ресурси (місця) для очікування заповнено, заявка у чергу не стає.

Позначимо  $\alpha\Delta t$  – ймовірність надходження заявки у систему;  $\beta\Delta t$  – ймовірність обслуговування заявки;  $\gamma\Delta t$  – ймовірність уходу заявки із черги.

N	n	$\alpha$	$\beta$	N	n	$\alpha$	$\beta$	N	n	$\alpha$	$\beta$
1	5	0.21	0.36	11	5	0.11	0.31	21	7	0.21	0.19
2	6	0.22	0.37	12	6	0.12	0.32	22	6	0.22	0.20
3	7	0.23	0.38	13	5	0.13	0.33	23	7	0.23	0.21
4	6	0.24	0.39	14	6	0.14	0.34	24	5	0.24	0.22
5	5	0.25	0.40	15	7	0.15	0.35	25	6	0.25	0.23
6	6	0.26	0.41	16	6	0.16	0.49	26	7	0.26	0.24
7	5	0.27	0.42	17	5	0.17	0.50	27	4	0.27	0.25
8	6	0.28	0.43	18	6	0.18	0.21	28	6	0.28	0.46
9	7	0.29	0.44	19	7	0.19	0.33	29	5	0.29	0.47
10	6	0.30	0.45	20	6	0.20	0.34	30	7	0.30	0.48

Рис. 3.4.

У загальному випадку  $n$ -канальна система із  $k$ -розрядною пам'яттю (пам'ять, що утримує  $k$  заявок) може приймати такі стани:

$x_0$  - всі канали вільні;  $x_1$  - один канал зайнято;  $x_2$  - два канали зайняті;

$x_n$  - всі  $n$  каналів зайняті;

$x_{n+1}$  - всі канали зайняті й одна заявка у черзі;  $x_{n+2}$  - зайнято два місця у черзі;

$x_{n+k}$  - зайняті всі  $n$  каналів і  $k$  місць у черзі.

Система диференціальних рівнянь для даного випадку приймає вигляд

$$P'_0 = -\alpha P_0 + \beta P_1,$$

$$P'_1 = \alpha P_0 - (\alpha + \beta) P_1 + 2\beta P_2,$$

$$P'_2 = \alpha P_1 - (\alpha + 2\beta) P_2 + 3\beta P_3,$$

.....

$$P'_{n-1} = \alpha P_{n-2} - (\alpha + (n-1)\beta) P_{n-1} + n\beta P_n,$$

$$P'_n = \alpha P_{n-1} - (\alpha + n\beta) P_n + (n\beta + \gamma) P_{n+1},$$

$$P'_{n+1} = \alpha P_n - (\alpha + n\beta + \gamma) P_{n+1} + (n\beta + 2\gamma) P_{n+2},$$

$$P'_{n+2} = \alpha P_{n+1} - (\alpha + n\beta + 2\gamma) P_{n+2} + (n\beta + 3\gamma) P_{n+3},$$

.....

$$P'_{n+k} = \alpha P_{n+k+1} - (n\beta + k\gamma) P_{n+k}.$$

Початкові умови:  $P_0(0) = 1$ ,  $P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_{n+k}(0) = 0$ .

**Приклад.** На трьохканальний комутатор із 2-розрядною пам'яттю надходить потік заявок. Ймовірність надходження заявки на комутатор за проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює  $\alpha \Delta t$ ; ймовірність обслуговування  $\beta \Delta t$ ; ймовірність уходу заявки із черги  $\gamma \Delta t$ .

Знайти граничний стан системи за  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$ .

**Розв'язання.** Система може приймати одне із таких можливих значень:

$x_0$  - жоден канал не зайнятий;  $x_1$  - зайнятий рівно один канал;  $x_2$  - занято два

канали;  $x_3$  - заняті три канали;

$x_4$  - заняті всі канали, й одна заявка чекає черги;  $x_5$  - заняті всі канали, і дві заявки стоять у черзі.

Тоді система диференціальних рівнянь для відповідних ймовірностей має вигляд

$$\begin{aligned}P_0' &= -\alpha P_0 + \beta P_1, \\P_1' &= \alpha P_0 - (\alpha + \beta) P_1 + 2\beta P_2, \\P_2' &= \alpha P_1 - (\alpha + 2\beta) P_2 + 3\beta P_3, \\P_3' &= \alpha P_2 - (\alpha + 3\beta) P_3 + (3\beta + \gamma) P_4, \\P_4' &= \alpha P_3 - (\alpha + 3\beta + \gamma) P_4 + (3\beta + \gamma) P_5, \\P_5' &= \alpha P_4 - (\alpha + 3\beta + 2\gamma) P_5.\end{aligned}$$

Початкові умови:  $P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = P_5(0) = 0$ .

Перетворення за Лапласом і запис у матричному вигляді дає  $AP = \mathbf{b}$ , де  $\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

$$\begin{bmatrix} p + \alpha & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha + \beta + p & -2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha + 2\beta + p & -3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha + 3\beta + p & -(3\beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha + 3\beta + \gamma + p & -(3\beta + 2\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha + 3\beta + 2\gamma + p \end{bmatrix}$$

Знайдемо її розв'язання.

Характеристичний поліном отримано у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta &= \omega^6 + (6\alpha + 12\beta + 3\gamma)\omega^5 + (15\alpha + 56\beta^2 + 2\gamma^2 + 6\alpha(11\beta + 3\gamma) + 27\beta\gamma)\omega^4 + \\ &+ [4\alpha^2(5\alpha + 36\beta + 10, 5\gamma) + 3\beta^2(83\alpha + 4\beta + 29\gamma) + 12\beta\gamma(11\alpha + \gamma)]\omega^3 + \\ &+ [3\alpha^3(5\alpha + 52\beta + 16\gamma) + 9\beta^3(45\alpha + 15\beta + 13\gamma) + \alpha\beta\gamma(42\gamma + 288\beta + 231\alpha) + \\ &+ 6\alpha^2(3\gamma^2 + 83\beta^2) + 22\beta^2\gamma^2]\omega^2 + [3\alpha^4(3\alpha + 26\beta + 9\gamma) + 18\beta^4(11\alpha + 3\beta + 3\gamma) + \\ &+ \alpha^2\beta^2(327\beta + 287\alpha + 261\gamma) + \alpha\beta\gamma(174\alpha + 174\beta + 32\beta\gamma + 42\alpha\gamma) + 2\gamma^2(6\alpha^3 + 6\beta^3)]\omega + \\ &+ [54\alpha^3\beta^2(\beta + \gamma) + 6\alpha^3\beta(3\alpha^2 + 8\alpha\gamma + 2\beta\gamma^2) + \alpha^3(\alpha^3 + 6\alpha^2\gamma + 4\alpha\gamma^2)].\end{aligned}$$

Вирази для шуканих функцій у просторі зображень отримано у такому вигляді.

$$\begin{aligned}P_0(\alpha, \beta, \gamma) &= \{\omega^5 + (5\alpha + 12\beta + 3\gamma)\omega^4 + \\ &+ [10\alpha^2 + 5\alpha\beta + 12\gamma^2 + 56\beta^2 + 27\beta\gamma + 15\alpha\gamma]\omega^3 + \\ &+ [\alpha^2(10\alpha + 93\beta + 27\gamma) + 3\beta^2(42\beta + 69\alpha + 29\gamma) + 4\gamma^2(2\alpha + 3\beta) + 108\alpha\beta\gamma]\omega^2 + \\ &+ \alpha^3(5\alpha + 69\beta + \gamma) + 3\beta^3(45\beta + 103\alpha + 39\gamma) + \alpha^2(243\beta^2 + 10\gamma^2 + 135\beta\gamma) + 22\beta^2\gamma^2 + \\ &+ \alpha\beta\gamma(32\gamma + 135\alpha + 225\beta)\}\omega + [\alpha^4(\alpha + 19\beta + 6\gamma) + 18\beta^4(3\beta + 3\gamma + 4\alpha) + 2\alpha^3(2\gamma^2 + 27\beta\gamma + 16\beta^2) +\end{aligned}$$

$$+4\beta^3(39\alpha + 3\gamma^2) + \alpha\beta\gamma(16\alpha\gamma + 120\beta^2 + 114\alpha\beta + 20\beta\gamma)\}/\Delta;$$

$$P_1(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\{[\omega^4 + (4\alpha + 11\beta + 3\gamma)\omega^3 + (6\alpha^2 + 42\alpha\beta + 45\beta^2 + 24\beta\gamma + 12\alpha\gamma)\omega^2 + \\ + [\alpha^2(4\alpha + 51\beta + 15\gamma) + \beta(81\beta + 138\alpha^3\gamma + \gamma^2(6\alpha + 10\beta^2) + 78\alpha\beta\gamma)]\omega + \alpha^3(\alpha + 20\beta + 6\gamma) + \\ + \beta^3(54\beta + 144\alpha + 54\gamma) + \alpha^2(102\beta^2 + 60\beta\gamma + 4\gamma^2) + 20\alpha\beta\gamma(6\beta + \gamma) + 18\beta^2\gamma^2]\}/\Delta;$$

$$P_2(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2\{\omega^3 + (3\alpha + 9\beta + 3\gamma)\omega^2 + (3\alpha^2 + 27\beta^2 + 2\gamma^2 + 24\alpha\beta + 9\alpha\gamma + 18\beta\gamma)\omega + \\ + [\alpha^2(4\alpha + 15\beta + 6\gamma) + \beta^2(27\beta + 45\alpha + 27\gamma) + 33\alpha\beta\gamma]\}/\Delta;$$

$$P_3(\alpha, \beta, \gamma) = -\alpha^3[\omega^2 + (2\alpha + 6\beta + 3\gamma)\omega + (\alpha^2 + 9\beta^2 + 2\gamma^2 + 9\alpha\beta + 5\alpha\gamma + 9\beta\gamma)]/\Delta;$$

$$P_4(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^4[\omega + (\alpha_3\beta + 2\gamma)]/\Delta; \quad P_5(\alpha, \beta, \gamma) = -\alpha^5/\Delta.$$

За аналогією із попереднім прикладом позначимо власні значення системи (корені характеристичного рівняння ( $\Delta = 0$ ) через  $r_k$ , ( $k = \overline{1, 6}$ ).

У просторі оригіналів маємо

$$P_m(t, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^6 p_{mk} e^{-r_k t}, \quad m = \overline{0, 5}.$$

Для конкретних значень графік розв'язань приймає вигляд, наведений на рис.3.5.

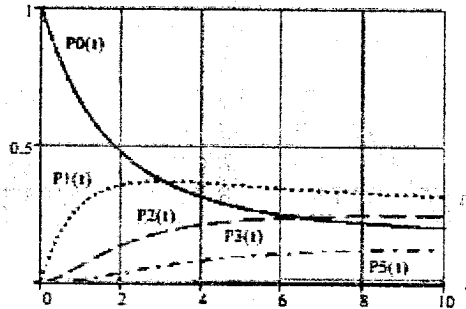


Рис. 3.5.

Задача. Розглядається робота офісної міні-АТС, що розрахована на одночасне обслуговування  $n$  абонентів ( $n$ -канальна система), яка може тримати у пам'яті (на черзі)  $k$  викликів. Знайти граничний стан системи.

N	n	k	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	N	n	k	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	2	1	0.11	0.36	0.21	16	3	3	0.11	0.21	0.36
2	3	2	0.12	0.37	0.22	17	2	1	0.12	0.22	0.37
3	4	3	0.13	0.38	0.23	18	1	2	0.13	0.23	0.38
4	3	2	0.14	0.39	0.24	19	2	2	0.14	0.24	0.39
5	2	1	0.15	0.40	0.25	20	3	1	0.15	0.25	0.40
6	1	2	0.16	0.41	0.26	21	4	2	0.16	0.26	0.41
7	2	3	0.17	0.42	0.27	22	3	4	0.17	0.27	0.42
8	3	2	0.18	0.43	0.28	23	2	3	0.18	0.28	0.43
9	4	1	0.19	0.44	0.29	24	1	3	0.19	0.29	0.44
10	3	2	0.20	0.45	0.30	25	2	1	0.20	0.30	0.45
11	2	3	0.21	0.46	0.31	26	3	2	0.21	0.31	0.46
12	1	2	0.22	0.47	0.32	27	4	4	0.22	0.32	0.47
13	2	1	0.23	0.48	0.33	28	3	1	0.23	0.33	0.48
14	3	3	0.24	0.49	0.34	29	2	3	0.24	0.34	0.49
15	4	2	0.25	0.50	0.35	30	1	4	0.25	0.35	0.50

Рис. 3.6.

## Імітаційне моделювання

Як правило, природні, технічні, соціально-економічні, екологічні та інші реальні системи і процеси є досить складні. Тому звичайні аналітичні методи не завжди дають можливість побудувати їх адекватні моделі. У такому разі альтернативою може бути використання імітаційних моделей. Загальна схема імітаційного моделювання передбачає розбиття системи або процесу, що досліджуються, на елементарні системи й події, для яких можливий достатньо повний математичний опис, і подальшу побудову із них модельної системи або модельного процесу, для яких властивості, що цікавлять дослідника, можуть бути описані через властивості елементарних систем і подій. Сутність імітаційного моделювання полягає у відтворенні елементарних подій і розрахунку на його основі нових властивостей систем і процесів, що досліджується. Імітаційне моделювання становить основу методу обчислювального експерименту, який дає змогу замінити експерименти із реальними системами та процесами у випадках, коли останні є неможливі, небезпечні або дуже коштовні.

### 4.1. Основні етапи імітаційного моделювання

На першому етапі необхідно визначити й проаналізувати завдання дослідження. Це передбачає встановлення та обґрунтування мети дослідження, розбиття основного завдання на окремі задачі, з'ясування областей можливого застосування результатів і особливостей їх використання.

Надалі необхідно розробити методологію виконання завдання дослідження. На цьому етапі встановлюють пріоритети та послідовність розв'язування окремих задач, визначають можливі методи їх розв'язування, оцінюють потрібні ресурси (витрати праці, часу, пам'яті ЕОМ тощо), складають мережевий план виконання робіт. Встановлення пріоритетності критеріїв є нетривіальна задача вибору. Основними методами її вирішення є методи, основані на використанні критеріальної мови, мови бінарних відношень та експертних оцінок.

Далі треба встановити вимоги до інформації, що необхідна для дослідження, зокрема визначити:

- яка саме інформація потрібна;
- як її можна отримати;



- в якому вигляді необхідно подати вихідні дані;
- яка точність даних потрібна;
- які методи можна застосовувати для обробки інформації.

Наступним етапом роботи є збирання потрібної інформації. Її можна отримати з фахової літератури, звітів та інших документів різноманітних установ та організацій, шляхом консультацій у фахівців тощо. У разі відсутності потрібної інформації може виникнути необхідність проведення попередніх експериментів із реальними моделями або розробки додаткових математичних моделей. Зазвичай прагнуть зібрати максимально можливий обсяг даних, оскільки на початку дослідження неможливо точно встановити, яка саме інформація буде використовуватися далі, а яка залишиться незатребуваною.

Зібрану інформацію треба відсортувати за достовірністю, точністю, задачами, для розв'язування яких її планують використовувати, тощо. Необхідно також перевірити наявність суперечності між отриманими даними. Якщо вона є, треба спробувати визначити її причини й усунути суперечність шляхом відбраковування недостовірних даних або їх корегування. Якщо визначити причини суперечності даних неможливо, треба спробувати побудувати таку модель, у якій ці дані не будуть використовуватися. Якщо це також неможливо, після побудови моделі необхідно перевірити вплив сумнівних даних на результати моделювання. При такій перевірці зазвичай змінюють ці дані від мінімально можливих до максимально можливих значень і визначають, чи виявляє така зміна суттєвий вплив на результати.

Зібрана інформація не завжди має вигляд, придатний для безпосереднього використання при моделюванні. Тому часто виникає необхідність її попередньої обробки. Така обробка може полягати у групуванні, класифікації, визначенні статистичних характеристик, інтерполяції, екстраполяції, апроксимації тощо.

Наступним етапом є висування гіпотез і прийняття припущень. Потреба в цьому виникає тоді, коли наявної інформації недостатньо для розробки імітаційної моделі або досягнення мети моделювання. Зокрема, можуть бути невідомими побудова й властивості деяких підсистем системи, що досліджується, окремі зв'язки між її елементами, умови функціонування системи тощо.

Гіпотези використовують при довизначенні завдань дослідження як заміну невідомих закономірностей функціонування і характеристик системи, закономірності її взаємодії із зовнішнім середовищем, а також можливі результати дослідження. Наприклад, часто буває невідомим, але важливим для обрання методів дослідження та висновків характер залежностей, що використовують або досліджують при моделюванні, чи є вони обмежені, неперервні, гладкі, монотонні, унімодальні тощо.

Припущення роблять для заміни невідомих даних, а також у випадках, коли для використання в моделі наявні дані треба спростити або скоротити. Типовими припущеннями, що робляться при імітаційному моделюванні, є можливість ігнорування впливу окремих факторів на результат моделювання, заміна відомих нелінійних залежностей лінійними, використання для наближення відомих залежностей степеневих та тригонометричних рядів із обмеженою кількістю членів тощо.

Гіпотези та припущення має бути узгоджено із іншими даними, що використо-

вуються, а також із наявною інформацією про поведінку й особливості об'єкта дослідження та його окремих підсистем, ресурсами, що їх може застосовувати дослідник, тощо.

## **4.2. Побудова концептуальної моделі**

Зміст концептуальної моделі включає опис системи, що досліджується, зовнішнього середовища, зв'язків усередині системи та між системою і зовнішнім середовищем, цільову функцію, обмеження задачі та наявні ресурси. Необхідно також встановити сталі параметри та змінні моделі. Змінні моделі у загальному випадку можна розподілити на три групи – випадкові величини, регульовані величини, або керуючі параметри, та нерегульовані величини. Опис кожного параметра або змінної має містити найменування та символ (означення), зміст (фізичний, економічний тощо), одиниці вимірювання, діапазон можливих значень, характеристики (регульована, нерегульована або випадкова змінна, однозначна або багатозначна величина тощо), місце використання в моделі, джерело параметра (вихідна величина або проміжний результат).

Опис системи передбачає визначення та опис важливих для подальшого моделювання підсистем та елементів. Опис підсистем та елементів має містити їх найменування, дані про їх зв'язок із іншими підсистемами та елементами, а також зовнішнім середовищем, параметри та змінні, що їх характеризують, характеристики (активні або пасивні, стабільні або нестабільні тощо). Опис зовнішнього середовища включає дані про параметри й змінні, що його характеризують, елементи та підсистеми, через які реалізується зв'язок системи із зовнішнім середовищем, його характеристики.

Опис кожного зв'язку має містити інформацію про елементи, між якими він діє, його спрямованість, якісні характеристики (детермінованість або кореляція, прямий або непрямий тощо), фізичні, хімічні, економічні та інші закони, що визначають зв'язок, математичний опис зв'язку тощо.

Після розробки концептуальну модель попередньо аналізують у послідовності, зворотній до послідовності її побудови. На цьому етапі перевіряють та уточнюють основні елементи, гіпотези й припущення моделі, вихідні дані, математичні моделі елементарних подій та зв'язків тощо. Іншим способом перевірки концептуальної моделі є її розгляд фахівцями, які не брали участі у розробці цієї моделі. Результатом перевірки може бути висновок про доцільність використання моделі, необхідність її уточнення та доробки, помилковість моделі або недоцільність її використання через обмеження ресурсів дослідження.

## **4.3. Логічні структурні схеми імітаційних моделей**

Після прийняття рішення про можливість використання концептуальної моделі необхідно побудувати логічну структурну схему (блок-схему) імітаційної моделі. Логічна структурна схема моделі є впорядковане та наочне представлення процесу моделювання, в якому визначено не тільки дії, що їх треба виконувати під час дослідження, але також і порядок їх виконання. На її підґрунті створюють операторну схему, в якій будь-яка процедура записується у вигляді послідовності елементарних

операцій, що її реалізують. Зазвичай логічну структурну схему розробляють фахівці тієї галузі, до якої належить об'єкт дослідження, а операторну схему – фахівці з програмування. Це призводить до необхідності достатньо повного опису всіх специфічних функцій та процедур у логічній структурній схемі.

Логічну структурну схему рекомендується будувати як сукупність стандартних модулів (блоків). Це забезпечує гнучкість моделі, можливість її вдосконалення й доробки шляхом внесення поправок до окремих модулів або додавання нових модулів. Це також дає можливість при постановці обчислювальних експериментів вносити зміни до одного чи кількох модулів без необхідності відповідного корегування інших.

Розрізняють основні та допоміжні модулі.

Основні модулі відображають специфічні функції систем та процесів, що досліджуються. Їх прикладами можуть бути модуль побудови календарного плану у моделі календарного планування, модуль розрахунку елементарного акту хімічної реакції при моделюванні хімічних процесів, модуль розрахунку вільної енергії системи при моделюванні термодинамічної рівноваги тощо.

Допоміжні модулі не відображають специфічні функції та властивості об'єкту дослідження і можуть використовуватися у різних імітаційних моделях. Прикладами таких модулів є модулі генерації випадкових чисел, статистичної обробки даних, пошуку екстремумів функцій, обчислення визначників матриць тощо.

Зазвичай побудова імітаційної моделі здійснюється за ієрархічним принципом із поступовим підвищенням рівня деталізації. Спочатку розробляють укрупнену структурну схему імітаційної моделі, яка відображає системи та процеси, що досліджуються, в узагальненому вигляді і представляє загальний порядок дій під час моделювання. Нехай, наприклад, нам треба розробити імітаційну модель фінансового плану університету. Укрупнена схема такої моделі може складатися із трьох основних модулів:

- модуль розрахунку доходів;
- модуль розрахунку витрат;
- модуль порівняння витрат і доходів.

Далі здійснюється деталізація модулів. Наприклад, для розрахунку витрат необхідно відокремити підмодулі розрахунків:

- заробітної плати;
- податків та обов'язкових зборів;
- комунальних платежів;
- адміністративних витрат;
- витрат на придбання обладнання;
- витрат на придбання літератури;
- витрат на ремонт та експлуатацію приміщень;
- витрат на відрядження;
- витрат на видання методичної, навчальної та наукової літератури;
- інших витрат.

При подальшій деталізації виникає розбіжність між різними типами моделей.

Наприклад, ми можемо здійснювати її, доки не одержимо елементарні модулі, для яких є можливий достатньо повний математичний опис. Такими модулями можуть бути:

- розрахунок заробітної плати доцентів, яка дорівнюватиме добутку кількості доцентів на посадовий оклад доцента та на кількість місяців у розрахунковому періоді;

- розрахунок витрат на придбання комп'ютерного класу, які дорівнюватимуть добутку кількості комп'ютерів заданої конфігурації на вартість одного комп'ютера, й тому подібне.

Завданням моделювання може бути прогнозування розвитку університету на деякий період часу. Багато параметрів, які потрібні для таких розрахунків, можуть змінюватися впродовж періоду, що досліджується, або є невідомі. Зокрема, невідомо, чи буде у продажу упродовж розрахункового періоду той чи інший підручник. Якщо буде, то скільки він коштуватиме. Невідомо, чи будуть змінюватися тарифи на комунальні послуги і як саме вони будуть змінюватися. Тому виникає необхідність якось оцінити межі можливих коливань параметрів або уникнути необхідності їх використання.

Для оцінки меж коливань параметрів доцільно використовувати метод екстраполяції або експертні оцінки. У першому разі необхідно зібрати інформацію про динаміку зміни відповідного параметра за достатньо великий проміжок часу, потім підібрати придатний для розв'язування конкретної задачі метод екстраполяції або апроксимації отриманої залежності і визначити можливі значення параметра у необхідний момент часу. Проте у багатьох випадках використання екстраполяції є недоцільне або неможливе. Є параметри, залежності яких від часу можна наближати неперервними функціями. Наприклад, курс долара США відносно гривні змінюється щоденно. Порівняно із розрахунковим періодом, який для задачі, що розглядається, становить від кількох місяців до кількох років, це достатньо малий проміжок часу, тому заміна дискретної функції на неперервну не призведе у цьому випадку до суттєвої похибки. Водночас є параметри, для яких це принципово неможливо. Наприклад, тарифи на комунальні послуги, посадові оклади та інші подібні величини змінюються зазвичай один раз на рік або ще рідше. Тобто період, упродовж якого ці параметри утримуються сталими, є порівняний або більший за розрахунковий. У цьому разі екстраполяція є неможлива. Крім того, використання методу екстраполяції може виявитися занадто складним або дуже коштовним, якщо у розробників моделі відсутні необхідні дані.

Альтернативою методу екстраполяції є експертне оцінювання меж можливих коливань параметрів моделі. Зазвичай метод експертних оцінок вважається трудомістким та вартісним. Але у простих випадках експертами можуть бути розробники та замовники моделі, що суттєво спрощує і здешевлює його реалізацію.

У багатьох випадках доцільнішим є уникнення використання невідомих параметрів. Наприклад, це може бути зумовлено накопиченням помилок при розрахунках, що призводить до неможливості формулювання змістовних висновків за результатами моделювання, або суттєвим ускладненням моделі, зростанням потрібних ресурсів

тощо.

Часто є можливість задати значення деяких параметрів чи проміжних результатів або межі коливань цих значень. Зокрема, у прикладі, що розглядається, можна задати обмеження на деякі види витрат (придбання літератури, обладнання, ремонт приміщень та інші) у вигляді конкретних сум або у відсотковому відношенні до загального доходу чи загальних витрат.

Іноді є можливість уникнення необхідності використання невідомих параметрів шляхом зміни окремих блоків, де вони мали б використовуватися. Така зміна може здійснюватися шляхом використання відомих аналітичних виразів для розрахунку величин, знаходження яких у початковому варіанті моделі передбачало необхідність використання невідомих параметрів. Наприклад, для моделювання броунівського руху частинок необхідно знати швидкості окремих частинок у довільний момент часу. Їх можна знайти шляхом безпосереднього застосування законів динаміки. Але якщо система є рівноважна з точки зору термодинаміки, можна використовувати метод Монте-Карло й відомий аналітичний вираз розподілу Максвелла. В інших випадках можна спробувати замінити аналітичні вирази, що застосовують одні параметри, на вирази, що використовують інші. Зокрема, у класичній механіці одні й ті самі характеристики системи можна знайти, використовуючи закони Ньютона, закони збереження або принцип найменшої дії. Той чи інший підхід обирають, виходячи з відомих параметрів конкретної задачі.

У практиці, як правило, використовують комбінацію всіх розглянутих методів. Тобто, частину модулів деталізують, доки не отримують достатньо повного математичного опису всіх необхідних елементів і подій. Інші модулі не деталізують, а задають необхідні для них параметри.

Повна логічна структурна схема імітаційної моделі має надавати повне відображення концептуальної моделі й містити докладний опис усіх модулів та підмодулів. У ній треба ясно відобразити логіку моделі, напрямки гілок схеми, а також задати в явному вигляді всі потрібні математичні рівняння, нерівності, формули тощо.

При побудові логічних структурних схем велике значення має організація циклічної роботи окремих блоків алгоритму.

Після побудови структурної схеми моделі перевіряють її логічну повноту та послідовність. Для цього послідовно виконують такі операції.

1. Перевірка повноти логічної структурної схеми, тобто наявності в ній усіх функцій, передбачених концептуальною моделлю.
2. Порівняння кожної функції концептуальної моделі із її реалізацією в логічній схемі, тобто перевірка того, чи відповідатиме результат виконання функції в логічній схемі результату, передбачуваному концептуальною моделлю.
3. Перевірка наявності в логічній схемі функцій, відсутніх у концептуальній моделі.
4. Перевірка наявності входів та виходів у структурній схемі в цілому та в окремих її модулях та підмодулях.
5. Порівняння вхідних та вихідних величин структурної схеми в цілому та окремих її елементів з передбаченими концептуальною моделлю.

6. Перевірка правильності запису й використання математичних виразів.
7. Перевірка одиниць вимірювання всіх використовуваних величин. Особливу увагу при цьому слід приділити відповідності цих одиниць, а також форм запису математичних виразів обраній системі одиниць вимірювання.
8. Перевірка правильності значень усіх заданих констант і параметрів.
9. Перевірка правильності використання індексів.
10. Перевірка правильності задання функцій датчиками і стандартними підпрограмами.
11. Перевірка правильності роботи генераторів випадкових чисел.
12. Перевірка правильності реалізації математичних виразів у всіх елементах схеми.

#### 4.4. Операторні схеми імітаційних моделей

Недоліком логічної структурної схеми є її громіздкість. Тому для опису імітаційних моделей часто використовують операторні схеми. Вони є менш наочними, проте більш компактними, ніж логічні структурні схеми. При запису операторних схем використовують такі означення:

- $A$  – арифметичний (обчислювальний) оператор;
- $F$  – оператор детермінованого формування (детермінована функція);
- $\Phi$  – оператор випадкового формування;
- $P$  – логічний оператор;
- $K$  – лічильник циклів;
- $\Pi$  – друк (виведення) результатів.

Основні правила написання операторних схем є такі:

- номер оператора записується як правий нижній індекс, наприклад,  $A_6$ ;
- якщо  $k$ -му оператору управління передається після виконання операторів із номерами  $l, m$ , це позначається за допомогою лівих верхніх індексів; якщо ж управління  $k$ -му оператору передається безпосередньо після виконання  $(k-1)$ -го оператора, ліві верхні індекси не використовують;
- запис  $P_n \uparrow^m$  означає, що при виконанні умови, яку перевіряє оператор, треба перейти до оператора із номером  $m$ , у протилежному разі – до оператора із номером  $n+1$ ;
- запис  $P_n \downarrow_m$  означає, що при виконанні умови, яку перевіряє оператор, треба перейти до оператора із номером  $n+1$ , у протилежному разі – до оператора із номером  $m$ ;
- запис  $P_n \uparrow^m \downarrow_k$  означає, що при виконанні умови, яку перевіряє оператор, треба перейти до оператора із номером  $m$ , у протилежному разі – до оператора із номером  $k$ .

Як приклад наведемо операторну схему запису алгоритму генерування  $n$  випадкових чисел з щільністю розподілу  $f(x)$  за методом відбору, описаним у розділі 2.3. Будемо використовувати такі означення операторів:

- $F_1$  – формує  $i = 0$ ;  $F_2$  – формує  $k = 0$ ;  $K_3$  – лічильник випадкових чисел ( $k = k + 1$ );  $F_4$  – формує  $i = i + 1$ ;  $\Phi_5$  – генерує випадкове число  $\xi_{2i-1}$ , що належить до рівномірної випадкової послідовності, заданої на відрізьку  $[0, 1]$ ;  $A_6$  – розраховує

величину  $x' = \xi_{2i-1}(b-a) + a$ ;  $\Phi_7$  – генерує випадкове число  $\xi_{2i}$ , що належить до рівномірної випадкової послідовності, заданої на відрізку  $[0, 1]$ ;  $A_8$  – обчислює величину  $y = c\xi_{2i}$ ;  $P_9$  – перевіряє виконання умови  $y < f(x')$ ;  $F_{10}$  – формує випадкове число  $x_k = x'$ ;  $P_{11}$  – перевіряє виконання умови  $k = n$ ;  $\Pi_{12}$  – друкує результати

Операторна схема алгоритму для цього випадку має вигляд:

$$F_1 F_2^{2,11} K_3^{3,9} F_4 \Phi_5 A_6 \Phi_7 A_8 P_9 \downarrow_4 F_{11} P_{11} \downarrow_3 \Pi_{12}.$$

#### 4.5. Реалізація імітаційних моделей

Розрізняють два основні способи реалізації імітації динаміки систем, що досліджуються.

У способі однорідного групування за часом задають постійний приріст часу. При цьому весь проміжок часу розбивається на певну хронологічно упорядковану множину рівних відрізків. Під час моделювання всі обчислювальні процедури виконують послідовно для кожного відрізка часу. Якщо деякі із подій, що відбуваються упродовж  $k$ -го відрізка часу, мають наслідки, які треба враховувати у майбутньому, то відповідну інформацію зберігають у пам'яті ЕОМ і за необхідності звертаються до неї.

Можливі процеси, в яких спостерігаються швидкі зміни систем, що досліджуються, упродовж окремих нетривалих проміжків часу і відносно повільні зміни в інший час. У такому разі розбивати весь період часу, що досліджується, на рівні відрізки недоцільно. Якщо обрати ці відрізки малими, це призведе до невикористаного збільшення потрібних ресурсів. Якщо ж їх зробити великими, буде втрачено або спотворено важливу інформацію про події, що відбуваються під час швидкої зміни системи. Для моделювання таких процесів доцільнішим є спосіб неоднорідного групування за часом. Моделювання процесу при використанні цього способу здійснюється від події до події. Можливе також використання схеми, описаної у попередньому випадку, доповненої корегуванням наступного відрізка часу за приростами значень досліджуваних параметрів, які отримано на поточному відрізку.

#### 4.6. Імітаційна модель управління запасами

Як приклад розглянемо імітаційну модель управління запасами.

Існує низка факторів, які призводять до необхідності створення запасів ресурсів. Серед них можна вказати різницю ритмів постачання й використання ресурсів. Наприклад, постачання деякого виду ресурсу може здійснюватися щотижнево, а його використання – щоденно. Іншим фактором є випадковість обсягів та моментів постачання і використання ресурсів. Зокрема, в агропромисловому комплексі, будівництві і деяких інших галузях використання ресурсів суттєво залежить від погодних умов. При нестійкому економічному розвитку постачання й використання ресурсів пов'язане з отриманням необхідних коштів. З іншого боку, збільшення запасів призводить до додаткових витрат, пов'язаних із використанням складів, зменшенням оборотних коштів, частковою втратою ресурсів під час їх зберігання тощо. Тому виникає задача оптимізації запасів.

Розглянемо однопродуктову систему управління запасами. Кількість продукту, що видається зі складу впродовж доби, визначається поточним попитом. Якщо рівень запасу  $y$  стає меншим за деяке визначене значення  $h$ , оформлюють замовлення на постачання продукту в обсязі  $q$ . Загальний період, для якого здійснюється моделювання, дорівнює  $T$ . Будемо вважати, що добовий попит на продукт  $X$  є випадкова невідома величина із відомим законом розподілу.

Послідовність виконання операцій впродовж доби є така. Спочатку підраховують обсяг постачання продукту зі складу впродовж даної доби. Потім здійснюють постачання. Далі оцінюють залишок продукту і в разі необхідності оформлюють замовлення на поповнення запасу. Кількість днів між моментами подання замовлення на постачання та його виконанням  $\lambda$  є випадкова величина. Не задоволені замовлення споживачів анулюються, тобто не припускається перенесення виконання замовлень на наступну добу. Якщо поточний рівень запасу досягає граничного значення  $h$ , оформлюють замовлення обсягу  $q$  на його поповнення. Але це роблять лише у разі виконання поданого раніше замовлення. Тобто, у кожний момент часу не можна реалізувати більше ніж одне замовлення. Вартість постачання вважатимемо незалежною від обсягу поставки і рівною  $g$ , а вартість зберігання – приблизно пропорційною обсягу запасу. При розрахунках можна вважати, що вартість зберігання впродовж доби пропорційна залишку запасу на кінець попередньої доби. Якщо склад не зможе задовольнити якесь замовлення, він має сплатити штраф. Сума сплаченого протягом доби штрафу пропорційна підсумковій величині дефіциту ресурсу на кінець відповідної доби.

Цільовою функцією можуть бути сумарні витрати системи постачання впродовж розрахункового періоду. Оскільки щодобовий попит і затримка постачання є випадкові величини, сумарні витрати також будуть випадковою величиною. Тому як цільову функцію зазвичай обирають математичне сподівання витрат. Завданням імітаційного моделювання є відшукування оптимальних значень  $h^*$  та  $q^*$ , які забезпечують мінімум цільової функції. Позначимо:  $L$  – сумарні витрати;  $L_{зб}$  – витрати на зберігання;  $L_{п}$  – витрати на постачання;  $L_{шт}$  – витрати на сплату штрафів;  $t$  – поточний час;  $t'$  – момент часу, коли здійснюється постачання;  $y$  – поточний обсяг запасу;  $j$  – лічильник циклів;  $s$  – витрати на зберігання одиниці продукту впродовж доби;  $p$  – витрати на сплату штрафів за невиконання замовлення у розрахунку на одиницю продукту;  $z$  – початковий рівень запасу;  $F(x)$  – функція розподілу ймовірності попиту;  $F(\lambda)$  – функція розподілу ймовірності затримки постачання.

## 4.7. Регресійні моделі

Завданням дослідження складних систем і процесів часто є перевірка наявності й встановлення типу зв'язку між незалежними змінними  $x_i$  (предикторами, факторами), значення яких можуть змінюватися дослідником і мають деяку заздалегідь задану похибку, та залежною змінною (відгуком)  $z$ . Розв'язування таких задач є предметом регресійного аналізу.



#### 4.7.1. Загальна характеристика методів та задач регресійного аналізу

Класичний регресійний аналіз включає методи побудови математичних моделей досліджуваних систем, методи визначення параметрів цих моделей і перевірки їхньої адекватності. Він передбачає, що регресія є лінійна комбінація лінійно незалежних базисних функцій від факторів із невідомими коефіцієнтами (параметрами). Фактори й параметри є детерміновані. Відгуки є рівноточні (тобто мають однакові дисперсії) некорельовані випадкові величини. Вважається також, що всі змінні вимірюються у неперервних числових шкалах.

Звичайна процедура класичного регресійного аналізу є така. Спочатку обирають гіпотетичну модель, тобто формулюють гіпотези про фактори, які суттєво впливають на досліджувану характеристику системи, і тип залежності відгуку від факторів. Потім за наявними емпіричними даними щодо залежності відгуку від факторів оцінюють параметри обраної моделі. Далі за статистичними критеріями перевіряють її адекватність.

При побудові регресійних моделей реальних систем і процесів вказані вище постулати виконуються не завжди. У більшості випадків їх невиконання призводить до некоректності використання процедур класичного регресійного аналізу та потребує застосування більш складних методів аналізу емпіричних даних.

Постулат про рівноточність і некорельованість відгуків не є обов'язковий. У разі його невиконання процедура побудови регресійної моделі певною мірою змінюється, але суттєво не ускладнюється.

Складнішою проблемою є обрання моделі та її незалежних змінних. У класичному регресійному аналізі припускають, що набір факторів задається однозначно, всі суттєві змінні присутні в моделі й немає ніяких альтернативних способів обрання факторів. У практиці це припущення не виконується. Тому виникає необхідність розробки формальних і неформальних процедур перетворення та порівняння моделей. Для пошуку оптимальних формальних перетворень використовують методи факторного та дискримінантного аналізу. З розвитком сучасної обчислювальної техніки було розроблено методи послідовної побудови регресійних моделей.

У класичній регресії фактори вважають детермінованими, тобто припускається, що дослідник має про них всю необхідну інформацію із абсолютною точністю. У практиці це припущення не виконується. Відмова від детермінованості незалежних змінних веде до побудови моделей кореляційного аналізу. На жаль, сьогодні їх практичне використання обмежено випадком однофакторних моделей (парною кореляцією). Це пов'язано зі складностями забезпечення та перевірки вимог до багатовимірних функцій розподілу. У деяких випадках можуть використовуватися компромісні методи конфлюентного аналізу, які припускають можливість нормально розподіленого та усікненого розкиду значень факторів. Якщо ця умова виконується, побудову моделі можна звести до багаторазового розв'язування регресійної задачі.

Відмова від припущення про детермінованість параметрів моделей у регресійному аналізі призводить до суттєвих ускладнень, оскільки порушує його статистичні основи. Але у практиці це припущення виконується не завжди. У деяких випадках можливо вважати параметри випадковими величинами із заданим законом розпо-

ділу. Тоді як оцінки параметрів можна обрати їх умовні математичні сподівання для відгуків, що спостерігалися. Умовні розподіли та сподівання розраховують за узагальненою формулою Байєса. Тому відповідні методи називають байєсовським регресійним аналізом.

Регресійні моделі часто використовують для опису процесів, що розвиваються в часі. У деяких випадках це призводить до необхідності переходу від випадкових величин відгуків до випадкових послідовностей, випадкових процесів або випадкових полів. Однією з поширених і найпростіших моделей такого типу є модель авторегресії. Вона передбачає, що відгук залежить не тільки від факторів, але також і від часу. Якщо останню залежність можна виявити, то задача зводиться до стандартної задачі побудови регресії для модифікованого відгуку. В інших випадках необхідно використовувати більш складні прийоми.

Процедури класичного регресійного аналізу передбачають, що закон розподілу відгуків є нормальний. Проте у практиці найчастішими є випадки, коли цей закон невідомий чи відомо, що він не є нормальний. Їх дослідження зумовило виникнення непараметричного регресійного аналізу, який не передбачає необхідності попереднього задання функції розподілу.

Важливою проблемою, яка виникає при оцінюванні параметрів регресійних моделей, є наявність грубих помилок у наборі аналізованих даних. Такі помилки можуть виникати внаслідок неправильних дій дослідника, збоїв у роботі апаратури, неконтрольованих короткотривалих сильних зовнішніх впливів на досліджувану систему тощо. Використовують два підходи, що дають змогу зменшити вплив грубих помилок на результати аналізу. У першому з них розробляють критерії й алгоритми пошуку помилкових даних. Потім такі дані відкидають. У другому підході розробляють такі алгоритми аналізу, які є нечутливі до наявних помилкових даних (алгоритми робастного оцінювання параметрів). У таких алгоритмах, як критерій оптимальності, часто використовують мінімум суми модулів похибок, або мінімум максимального модуля похибки.

Одним із основних постулатів класичного регресійного аналізу є припущення, що найкращі оцінки параметрів можна отримати, використовуючи метод найменших квадратів. У практиці оцінки, що отримані за допомогою цього методу, часто бувають недостатньо точними і містять великі похибки. Причиною цього може бути структура регресійної моделі. Якщо вона становить собою лінійну комбінацію експонент або є поліном високого степеня, це призводить до поганої зумовленості матриці системи нормальних рівнянь і нестійкості оцінок параметрів. Підвищення стійкості оцінок можна досягти шляхом відмови від вимоги їх незміщеності. Розвиток цього напрямку досліджень спричинив виникнення гребіневого або ріджрегресійного аналізу.

Характерною рисою регресійних моделей, що відрізняє їх від математичних моделей інших типів, є те, що вони не відображають структури систем і процесів, що досліджуються, та присутні в них зв'язки. При побудові регресійних моделей ставиться завдання пошуку статистичних зв'язків між окремими характеристиками системи або між її вхідними та вихідними параметрами.

Найчастіше задача побудови регресійної моделі формулюється так. Необхідно знайти функцію заданого класу, для якої функціонал

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^n [z_i(\alpha, X) - y_i]^2 \rightarrow \min. \quad (4.1)$$

У цьому виразі  $z_i(\alpha, X)$  – значення функції, що апроксимує залежність у  $i$ -й точці,  $y_i$  – відповідне значення емпіричної залежності,  $\alpha$  – вектор параметрів, які треба знайти,  $X$  – вектор незалежних змінних. Отриману функцію називають регресійною моделлю. Метод її пошуку, що ґрунтується на використанні критерію (4.1), називають методом найменших квадратів.

Функцію, що апроксимує, у разі однієї незалежної змінної часто шукають у вигляді полінома  $z(x) = \sum_{j=0}^M \alpha_j x^j$ , зворотного полінома  $z(x) = 1 / \sum_{j=0}^M \alpha_j x^j$ , експоненціальних або показникових функцій  $z = \alpha e^x$  чи  $z = \alpha b^x$ , степеневій функції  $z = \alpha x^b$ , лінійно-логарифмічній функції  $z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \ln x$ , тригонометричного ряду Фур'є тощо. У разі кількох незалежних змінних найчастіше використовують моделі лінійні як за параметрами, так і за незалежними змінними  $z = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ , а також поліноміальні моделі, що лінійні за параметрами, але нелінійні за незалежними змінними.

$$z = \alpha_0 + \sum_{i,j}^p \alpha_{ij=1} x_i x_j + \sum_{i,j,k}^p \alpha_{ijk=1} x_i x_j x_k + \dots$$

Останні відповідають розкладенню функції відгуку у ряд Тейлора. Проте можливе й використання для апроксимації інших видів залежностей.

Регресійні моделі називають лінійними або нелінійними, якщо вони є лінійні або нелінійні за параметрами. При цьому визначення “лінійна” часто опускають. Значення найвищого степеня предиктора в поліноміальних моделях називають порядком моделі. Наприклад,

$$z = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – похибка моделі, є лінійна модель третього порядку.

Обрання функції, що апроксимує, є нетривіальна задача. Спочатку рекомендують нанести наявні емпіричні дані на графік. Це дає змогу визначити наявність чи відсутність залежності між досліджуваними величинами, а також зробити деякі припущення про можливий тип такої залежності. Після того, як було встановлено наявність кореляції між досліджуваними величинами, виникає необхідність підбору функції, що апроксимує одержану залежність.

Важливою особливістю регресійних моделей є те, що їх не можна використовувати за межами тієї області значень вихідних параметрів, для якої була побудована ця модель. При побудові регресійних моделей типу полінома, зворотного полінома, тригонометричного ряду та деяких інших слід мати на увазі, що, збільшуючи кількість членів ряду, можна отримати скільки завгодно близьке до нуля значення функціонала (4.1). Проте це не завжди свідчить про якість апроксимації, оскільки

цей функціонал не дає інформації про ступінь близькості апроксимуючої функції та емпіричної залежності у проміжках між наявними точками. Найпростішим критерієм, що дозволяє обмежити кількість членів ряду, який апроксимує емпіричну залежність, є порівняння відношення значення функціонала (4.1) до суми квадратів похибок емпіричних значень функції, а також величини, зворотної до цього відношення, із значенням критерію Фішера для відповідного числа ступенів вільності. Якщо перше відношення перевищує значення критерію Фішера, це свідчить про недостатню кількість членів ряду. Якщо значення критерію Фішера є менше за друге відношення, можна зробити висновок про надмірно велику кількість членів ряду. Іншою проблемою може бути наявність кількох екстремумів функціонала (4.1). У цьому разі необхідно мати на увазі, що більшість стандартних алгоритмів дозволяють знаходити локальні, а не глобальні екстремуми функціоналів. Тому результат аналізу залежить від вибору початкових умов

Регресійні моделі, що побудовані на базі поліномів, як правило, є формальні. Їх використовують для опису систем і процесів, теорію яких розроблено недостатньо. Цікавішими для дослідників зазвичай є змістовні моделі, що відображають структуру та зв'язки у системах, сутність та механізми процесів. Якщо теоретичні основи досліджуваних систем і пошуку процесів достатньо розроблені, експериментальні дані потрібні для визначення окремих параметрів моделі.

Як правило, змістовні моделі бувають нелінійними за параметрами. Методологію їх дослідження розробляє нелінійний регресійний аналіз. Для задач, що розв'язуються в межах цього напрямку, характерними є також й інші ускладнення. Зокрема, моделі зазвичай бувають багатовимірними. При цьому окремі відгуки можуть бути зв'язані один з одним. Сама регресійна модель часто задається у неявному вигляді і є неаналітичний розв'язок системи алгебраїчних або диференціальних рівнянь. Нестійкість оцінок параметрів у нелінійних моделях різко зростає. Як правило, такі задачі мають кілька розв'язків або не мають розв'язків взагалі.

Аналогічні ускладнення можуть виникнути при побудові функціональних моделей, коефіцієнти яких необхідно визначати шляхом апроксимації емпіричних даних. Але у цьому разі потрібно застосовувати інші критерії адекватності моделі. Важливою умовою адекватності моделі є відповідність загальної поведінки моделі, що апроксимує, реальній поведінці об'єкта дослідження у подібних умовах. Крім того, необхідно, щоб за малих змін вихідних даних параметри моделі, що підбираються при апроксимації, змінювалися мало або залишалися незмінними. Ще однією складністю, що виникає при аналізі таких моделей, є можливість отримання значень параметрів, які є неприпустимі з точки зору змістовної постановки задачі. Наприклад, може бути отримано від'ємні значення параметрів, що мають лише невід'ємні значення. Тому задачу пошуку екстремуму функціонала (4.1) у цьому разі треба ставити як задачу умовної оптимізації, а не безумовної, як при побудові регресійних моделей.

Регресійний аналіз застосовується для побудови моделей зв'язку вихідних величин процесу із вхідними величинами, що є випадкові, з метою передбачення поведінки вихідних величин процесу залежно від конкретних значень вхідних величин.

Нехай модель процесу представляється рівнянням виду

$$y = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{a}, \quad (4.2)$$

де  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T$  – вектор невідомих параметрів моделі,  
 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  – вектор значень незалежних змінних,  
 $\mathbf{f} = [f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]$  – вектор заданих функцій.

За результатами експерименту необхідно знайти оцінку  $\hat{\mathbf{a}}$  параметрів  $\mathbf{a}$ . Тоді оцінка  $\hat{y}$  для функції  $y$  обчислюється за формулою

$$\hat{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{a}}. \quad (4.3)$$

Нехай експеримент проводиться у  $N$  точках  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N$ . Позначимо  $\tilde{\mathbf{y}}$  вектор, координатами якого є результати його спостережень у точках  $\mathbf{x}^k$ :

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^N]^T.$$

Власне кажучи, у кожній точці  $\mathbf{x}^k$  може бути виконано  $\nu$  експериментів, результатами яких будуть спостереження

$$\tilde{y}^{k1}, \tilde{y}^{k2}, \dots, \tilde{y}^{k\nu}; \quad k = \overline{1, N}.$$

Тоді

$$\tilde{y}^k = \frac{1}{\nu} (\tilde{y}^{k1}, \tilde{y}^{k2}, \dots, \tilde{y}^{k\nu}).$$

Задача – на підставі результатів спостережень  $\tilde{y}^k$  знайти найкращі у деякому сенсі оцінки  $\hat{\mathbf{a}}$  та  $\hat{y}$ .

#### 4.7.2. Теоретичні основи методу

За основу методу побудови моделі покладено метод найменших квадратів.

Позначимо

$$\hat{y}^k = \frac{1}{\nu} (\hat{y}^{k1}, \hat{y}^{k2}, \dots, \hat{y}^{k\nu})^T$$

– вектор значень, який обчислено у відповідності з (4.3).

$$\hat{y}^k = \mathbf{f}^T \hat{\mathbf{a}}; \quad k = \overline{1, N}, \quad (4.4)$$

або у матричному вигляді

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F} = [f_j(\mathbf{x}^k)] = \begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}^1) & f_1(\mathbf{x}^1) & \dots & f_m(\mathbf{x}^1) \\ f_0(\mathbf{x}^2) & f_1(\mathbf{x}^2) & \dots & f_m(\mathbf{x}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\mathbf{x}^N) & f_1(\mathbf{x}^N) & \dots & f_m(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}.$$

Будемо вважати, що результати експерименту  $\tilde{y}^k$  розподілені нормально, є випадкові величини, що досліджуються, тобто математичне сподівання величини  $\tilde{y}^k$  відповідає дійсному значенню

$$M[\tilde{\mathbf{y}}] = \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{a}.$$

Нехай також результат спостережень у точці  $\mathbf{x}^k$  не залежить від результату спостережень у точці  $\mathbf{x}^j$  й дисперсія результатів спостережень  $\tilde{y}^k$  однакова у всіх точках  $\mathbf{x}^k$ . Останні дві умови виконуються, якщо

$$M[(\tilde{y} - y)(\tilde{y} - y)^T] = \sigma^2 E.$$

Крім того, припустимо, що оцінка  $\hat{\mathbf{a}}$ , що являє собою випадковий вектор, є незміщена, тобто  $M[\hat{\mathbf{a}}] = \mathbf{a}$ , а дисперсія  $\sigma_k^2$  оцінки  $\hat{a}_k$  має бути мінімальною:

$$\sigma_k^2 = M[(\hat{a}_k - a_k)^2], \quad k = \overline{0, n}.$$

Оцінка  $\hat{\mathbf{a}}$  задовольняє цим умовам, якщо

$$S = \sum_{k=1}^N (\tilde{y}^k - y^k)^2 = |\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}|^2 \quad (4.6)$$

є мінімальна.

З урахуванням (4.4) маємо

$$S = S(\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a} - 2\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{F} \mathbf{a}.$$

Якщо матриця  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  не вироджена, тобто якщо матриця  $\mathbf{F}$  має ранг  $m + 1$ , сума квадратів (4.5) має один мінімум при

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{C} \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{y}}. \quad (4.7)$$

Матриця  $\mathbf{C} = [\mathbf{F}^T \mathbf{F}]^{-1} = [c_{j,k}]_0^m$  має назву дисперсійної.

### 4.7.3. Статистичний аналіз точності

Похибка оцінки  $\hat{\mathbf{a}}$ , що обчислена згідно з (4.6) за методом найменших квадратів, тим більше, чим більше дисперсія похибок спостережень. Точність оцінки  $\hat{a}_k$  та величини  $\hat{\mathbf{y}}$  характеризуються відповідно дисперсіями  $\sigma_{a_k}^2$  та  $\sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}^2$ , що залежать від матриці  $\mathbf{F}$ . З метою визначення цієї залежності необхідно знайти вираз для коваріаційної матриці  $V(\hat{\mathbf{a}})$ :

$$V(\hat{\mathbf{a}}) = M[(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T] = \mathbf{C} \sigma^2.$$

Звідси для дисперсії  $\sigma_{a_k}^2$  оцінки  $\hat{a}_k$  маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{a_k}^2 &= c_{kk} \sigma^2, \\ \sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}^2 &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \sigma^2. \end{aligned}$$

Оцінка  $\hat{\mathbf{y}}$  визначається за формулою (4.4).

Далі, згідно з попереднім розділом, визначаються довірчі інтервали для оцінок параметрів  $\hat{\mathbf{a}}$

#### 4.7.4. Перевірка адекватності моделі

Розглянемо величину

$$S_3 = \sum_{k=1}^N \nu (\tilde{y}^k - \hat{y})^2 = \nu S_1,$$

що має  $K_3 = N - m - 1$  степенів свободи.

Частка від ділення оцінки дисперсії неадекватності на оцінку дисперсії похибки одиничного спостереження

$$F = \frac{s_3/K_3}{S_2/K_2} \quad (4.8)$$

у випадку, коли модель адекватна, є випадкова величина, що задовольняє  $\mathcal{F}$ -розподілу Фішера із числом ступенів свободи  $K_3$  та  $K_2$ . Для визначеного рівня значимості  $\alpha$  перевірки гіпотези про адекватність моделі можна визначити значення  $\mathcal{F}_{kp}$ , що відповідає умові

$$P\{\mathcal{F} > \mathcal{F}_{kp}\} = \alpha = 1 - p. \quad (4.9)$$

#### 4.7.5. Реалізація побудови моделі

1. Вибір моделі.

$$y(\mathbf{x}) = a_0 f_0(\mathbf{x}) + a_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + a_m f_m(\mathbf{x}).$$

2. Для  $N > m + 1$  точок

$$\mathbf{x}^k = [x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k]^T, \quad k = \overline{1, N}$$

обчислюється матриця

$$\mathbf{F} = [f_j(\mathbf{x}^k)] = \begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}^1) & f_1(\mathbf{x}^1) & \dots & f_m(\mathbf{x}^1) \\ f_0(\mathbf{x}^2) & f_1(\mathbf{x}^2) & \dots & f_m(\mathbf{x}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\mathbf{x}^N) & f_1(\mathbf{x}^N) & \dots & f_m(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}.$$

3. Обчислюється дисперсійна матриця  $\mathbf{C} = [\mathbf{F}^T \mathbf{F}]^{-1}$ .

4. У кожній точці  $\mathbf{x}^k$  здійснюються  $\nu$  випробувань, за результатами яких  $\tilde{y}^{k1}, \tilde{y}^{k2}, \dots, \tilde{y}^{k\nu}$  обчислюється середнє значення

$$\tilde{y}^k = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{y}^{kj}$$

із дисперсією  $\sigma^2$ .

5. Обчислюються оцінки  $\hat{\mathbf{a}}$  коефіцієнтів моделі за методом найменших квадратів

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{C} \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{y}}.$$

6. Обчислюються дисперсії оцінок

$$\sigma_k^2 = c_{kk}\sigma^2.$$

7. Визначається оцінка функції  $y$  за формулою (4.4).

8. Обчислюється оцінка дисперсії похибок спостережень  $s$ :

$$s^2 = S_2/(\nu K_2); \quad K_2 = N(\nu - 1);$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{y}^{kj} - \bar{y}^k)^2; \quad s_k^2 = c_{kk}s^2.$$

9. Обчислюється

$$S_3 = \sum_{k=1}^N \nu (\bar{y}^k - \hat{y}^k)^2.$$

10. Оцінюється адекватність моделі

$$\mathcal{F} = \frac{S_3/K_3}{S_2/K_2}; \quad K_3 = N - m - 1.$$

Для заданої надійності  $P\{\mathcal{F} < \mathcal{F}_{kp}\} = p$  визначається  $\mathcal{F}_{kp}$ . Якщо  $\mathcal{F} < \mathcal{F}_{kp}$ , модель вважається адекватною процесу.

11. Якщо дисперсія спостережень  $\sigma^2$  відома й модель адекватна, довірчий інтервал із довірчою імовірністю  $p$  визначається за нерівністю

$$|\hat{a}_k - a_k| < \sigma_k \varepsilon.$$

Значення  $\varepsilon$  визначаємо із табл. В.1 за умови  $\Phi(\varepsilon) = p/2$ . Якщо дисперсія спостережень  $\sigma^2$  невідома й у кожній точці плану проводиться один експеримент,

$$|\hat{a}_k - a_k| < s_k \varepsilon; \quad s_k = \sqrt{c_{kk}}s; \quad k = \overline{0, m};$$

$$s^2 = S_1/K_1 = \sum_{k=1}^N (\bar{y}^k - \hat{y}^k)^2 / K_1,$$

$\varepsilon$  знаходимо із табл. В.5 при  $K_1 = N - m - 1$  степенях свободи й заданій довірчій імовірності  $p$ .

12. Перевіряються коефіцієнти  $a_k$  на значимість. Якщо

$$|\hat{a}_k| > t_{kp}s_k,$$

то коефіцієнт  $a_k$  вважається значимим;  $t_{kp}$  - критичне значення розподілу Ст'юдента для заданого рівня значимості  $\alpha$  та  $K_1$  степенів свободи.  $t_{kp}$  визначається із табл. В.4 за умови  $P\{|t| > t_{kp}\} = \alpha$ . Коефіцієнти, які виявились незначимими, відкидаються.



Табл. 4.1.

k	$x_1^k$	$x_2^k$	Результати спроб		
			$y^{k_1}$	$y^{k_2}$	$\tilde{y}^k = (\tilde{y}^{k_1} + \tilde{y}^{k_2})/2$
1	1	1	45,4	46,1	45,75
2	1	-1	38,0	38,4	38,2
3	-1	-1	34,5	34,8	34,65
4	-1	1	42,1	42,7	42,4

**Приклад.**

Розглянемо процес, вихід якого залежить від двох змінних  $x_1, x_2$ . Виконуються у чотирьох точках два експерименти.

Побудуємо лінійну модель

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Матриця

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4E_3;$$

$$C = [\mathbf{F}^T \mathbf{F}]^{-1} = 1/4E_3.$$

Визначимо параметри моделі

$$\hat{\mathbf{a}} = C\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45,75 \\ 38,20 \\ 34,65 \\ 42,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,25 \\ 1,725 \\ 3,825 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, одержуємо

$$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} = 40,25 + 1,725x_1 + 3,825x_2 = [45,80 \quad 38,15 \quad 34,70 \quad 42,35]^T.$$

Оскільки дисперсія спостережень  $\sigma^2$  невідома, то обчислюємо  $S_2$  та  $S_3$ .

$$S_3 = \sum_{j=1}^4 2(\tilde{y}^j - \hat{y}^j)^2 = 0,004;$$

$$S_2 = (45,4 - 45,75)^2 + (46,1 - 45,75)^2 + (38,0 - 38,15)^2 + (38,4 - 38,15)^2 +$$

$$+ (34,5 - 34,70)^2 + (34,8 - 34,70)^2 + (42,1 - 42,35)^2 + (42,7 - 42,35)^2 = 0,55;$$

$$K_2 = 4(2 - 1) = 4; \quad s^2 = \frac{0,55}{2 \cdot 4} = 0,069; \quad s_j = \sqrt{1/4}s = 1,138.$$

Табл. 4.2.

k	$x_1^k$	$x_2^k$	Результати спроб		
			$y^{k_1}$	$y^{k_2}$	$\hat{y}^k = (\hat{y}^{k_1} + \hat{y}^{k_2})/2$
1	0	0	97,9	98,1	98,0
2	1	0	99,05	99,15	99,10
3	0	1	92,4	92,2	92,30
4	-1	0	93,8	93,6	93,70
5	0	-1	92,8	92,4	92,60
6	1	-1	96,25	96,35	96,30
7	1	-1	98,8	98,5	98,65
8	-1	-1	91,95	92,05	92,00
9	-1	1	89,3	89,1	89,20

Для 95% надійності з таблиці В.5 при  $N = 4$  одержуємо  $\varepsilon = 2,776$  і

$$|\hat{a}_j - a_j| < 0,138 \cdot 2,776 = 0,383.$$

З метою визначення адекватності обчислимо

$$\mathcal{F} = \frac{0,004/1}{0,55/4} = 0,03.$$

З табл. В.4 для 99% надійності одержуємо

$$\mathcal{F}_{кр} = 21,2; \quad \mathcal{F} = 0,03 < \mathcal{F}_{кр}.$$

Значить, обрана модель адекватна процесу.

Оцінимо значимість параметрів моделі. Для обраного рівня значимості  $p = 0,99$  із табл. В.5 знаходимо  $\varepsilon = 13,277$ . Одержуємо:

$$|\hat{a}_0| = 40,25 > 13,277 \cdot 0,138 = 1,832; \quad |\hat{a}_1| = 1,725 < 1,832; \quad |\hat{a}_2| = 3,825 > 1,832.$$

Таким чином, модель, що адекватна процесу, має вигляд

$$\hat{y} = 40,25 + 3,825x_2.$$

**Приклад.** Розглянемо процес, вихід якого залежить від двох змінних  $x_1, x_2$ . Виконуються у дев'яти точках два експерименти.

Побудуємо квадратичну модель

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2.$$

Нехай у результаті проведеного трьохрівневого експерименту одержано наступні значення  $\hat{y}^{k_v}$ .

При 95% надійності для  $t$ -критерію та 99% достовірності для  $\mathcal{F}$ -критерію з табл. В.5 знаходимо

$$\varepsilon = 2,26; \quad \mathcal{F}_{кр} = 6,99.$$

Запишемо матрицю

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо інформаційну матрицю  $M$ :

$$M = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо дисперсійну матрицю

$$C = M^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

$$C\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 16 & 8 & 8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 6 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 6 & -6 & -6 & -6 \\ -12 & -12 & 6 & -12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9 & 9 & -9 \end{bmatrix} \frac{1}{36}.$$

Обчислимо параметри моделі.

$$\hat{\mathbf{a}} = C\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{y}} = [98, 72; 2, 567; -2, 10; -1, 333; -3, 433; -0, 80];$$

$$\hat{y} = 97,82 + 2,567x_1 - 2,10x_2 - 1,333x_1^2 - 3,433x_2^2 - 0,80x_1x_2.$$

Обчислюємо значення  $\hat{y}^k$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $\mathcal{F}$ .

$$\hat{y} = C\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{a}} = [97,82; 99,05; 92,99; 93,92; 95,50; 92,72; 98,52; 91,80; 81,19]^T$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^9 \sum_{j=1}^2 (y^{kj} - \hat{y}^k)^2 = 0,195.$$

$$S_3 = 2 \sum_{k=1}^9 (\bar{y}^k - \hat{y}^k)^2 = 0,383.$$

$$\mathcal{F} = \frac{0,383/3}{0,195/9} \approx 5,9 < \mathcal{F}_{kp} = 6,99.$$

Значить, одержана модель адекватна процесу. Для дисперсій оцінок параметрів моделі згідно з  $s_k^2 = c_{kk}x^2$  одержуємо

$$s^2 = S_2/(\nu K_2) = 0,014; \quad s_0^2 = 5/9s^2 = 0,008; \quad s_0 = 0,09; \quad s_1 = s_2 = 0,047; \\ s_3 = s_4 = 0,084; \quad s_5 = 0,06.$$

Із 95% надійністю довірчі інтервали для  $a_k$  мають вигляд:

$$|\hat{a}_0 - a_0| < s_0\varepsilon = 0,203; \quad |\hat{a}_1 - a_1| < s_1\varepsilon = 0,116; \quad |\hat{a}_2 - a_2| < s_2\varepsilon = 0,116; \\ |\hat{a}_3 - a_3| < s_3\varepsilon = 0,189; \quad |\hat{a}_4 - a_4| < s_4\varepsilon = 0,189; \quad |\hat{a}_5 - a_5| < s_5\varepsilon = 0,136.$$

Оцінимо значимість параметрів  $\hat{a}_k$ . Коефіцієнт  $\hat{a}_k$  вважається таким, що значимо відрізняється від нуля, якщо

$$|\hat{a}_k| > t_{kp}s_k.$$

( $t_{kp}$  визначається із табл. В.3 для  $\chi^2$ -розподілу). Маємо:

$$K_2 = 9; \quad t_{kp} = \varepsilon = 16,92.$$

$$|\hat{a}_0| = 97,82 > t_{kp}s_0 = 1,524; \quad |\hat{a}_1| = 2,567 > t_{kp}s_1 = 0,85; \quad |\hat{a}_2| = 2,1 > t_{kp}s_2 = 0,85; \\ |\hat{a}_3| = 1,333 < t_{kp}s_3 = 1,350; \quad |\hat{a}_4| = 3,4333 > t_{kp}s_4 = 1,350; \quad |\hat{a}_5| = 0,8 < t_{kp}s_5 = 1,015.$$

Таким чином, рівняння моделі набуває вигляду

$$\hat{y} = 97,82 + 2,567x_1 - 2,1x_2 - 3,433x_2^2.$$

## 4.8. Основні поняття планування експерименту

Множина всіх точок проведення експериментів

$$\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.10)$$

представляється за допомогою матриці плану

$$\mathbf{X} = [x_j^k] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^N & x_2^N & \dots & x_n^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \dots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

і називається планом експерименту.

Точка

$$\mathbf{x}^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^k \quad (4.12)$$

називається центром плану (центральною точкою плану). Кожна координата  $x_k^0$  вектора  $\mathbf{x}^0$  є середнє значення  $k$ -ї координати всіх точок плану

$$x_k^0 = \frac{\sum_{j=1}^N x_k^j}{N}. \quad (4.13)$$

План називається центральним, якщо його центр міститься у початку координат  $\mathbf{x} = 0$ , тобто  $\mathbf{x}^0 = 0$ .

Вочевидь, оптимальне планування зв'язано з розробкою планів, що представляються у деякій стандартній формі. При цьому слушно розглядати центральні плани. Будь-який план шляхом переносу початку координат можна зробити центральним.

Всілякий план  $Z$  із точками  $z^k$  шляхом заміни  $x = z - z^0$  при

$$x^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^k$$

може бути перетворений на центральний план  $X$  із точками  $x^k$ .

Область можливих значень незалежних змінних називається областю  $\Omega_x$ ,  $x \in \Omega_x$  планування експерименту.

Незалежні змінні часто називають варійованими змінними, або факторами.

Область планування експерименту можна задати, наприклад, за допомогою нерівностей

$$-1 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.14)$$

У цьому випадку говорять, що областю планування є гіперкуб.

У виразі (4.14) межові (максимальне та мінімальне) значення варійованих змінних позначено через +1 та -1 відповідно. Ці межі відповідають стандартному або нормованому масштабу зміни змінних. Перехід до стандартизованого масштабу може бути здійснений таким чином.

$$x_k = \frac{x_k^* - (x_{k \max}^* + x_{k \min}^*)/2}{x_k^* - (x_{k \max}^* - x_{k \min}^*)/2} \quad (4.15)$$

Тут  $X_k^*$  – значення  $k$ -ї змінної у натуральному масштабі виміру.

План називається *ротатабельним*, якщо дисперсія оцінки  $\hat{y}(x)$  залежної змінної у точці  $x$  залежить тільки від відстані між точкою  $x$  та центру плану  $x^0$ . Дисперсія  $\sigma_{\hat{y}(x)}^2$  оцінки залежної змінної визначається як

$$\sigma_{\hat{y}(x)}^2 = f^T(x)(F^T F)^{-1} f(x) \sigma^2. \quad (4.16)$$

Позначимо відстань точки  $x$  від центру плану  $x^0$  через  $r$ :

$$r = \sqrt{(x - x^0)^T (x - x^0)} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}. \quad (4.17)$$

Тоді умова ротатабельності плану має вигляд

$$f^T(x)(F^T F)^{-1} f(x) = \sqrt{(x - x^0)^T (x - x^0)} = \text{const} \quad (4.18)$$

Таким чином, ротатабельні плани забезпечують одне й те ж значення дисперсії оцінки цільової величини у всіх точках, рівновіддалених від центру плану.

*Приклади.*

1. Нехай модель має вигляд

$$y(a, x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Область планування  $\Omega_x$  визначається нерівностями  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ . Розглянемо план

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Табл. 4.3. Фактори.

Фактори	-1	0	+1	інтервал
$x_1^*$	1:1	1,25:1	1,5:1	0,25
$x_2^*$	1:1	1,25:1	1,5:1	0,25
$x_3^*$	3	4	5	1
$x_4^*$	20	25	30	5
$x_5^*$	20	40	60	20

Неважко переконатися, що центр плану  $\mathbf{x}^0 = 0$ , отже план  $X$  – центральний. Матриця

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Інформаційна матриця  $C$  плану

$$C = F^T F = 4E_3$$

діагональна, значить, план  $X$  є ортогональним. Перевіримо умову (4.18) ротатабельності плану

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x})(F^T F)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} = 1/4(1 + x_1^2 + x_2^2) = 1/4(1 + r^2).$$

Дисперсія  $\sigma_{\hat{y}(\mathbf{x})}^2$  залежить тільки від відстані  $r$  між точкою  $\mathbf{x}$  та центром плану, й, отже, план є ротатабельним.

2. Нехай модель має вигляд

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2.$$

$$F^T F = 4E_4.$$

Перевірка умови ротатабельності дає

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x})(F^T F)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} = 1/4(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2) = 1/4(1 + r^2 + x_1^2 x_2^2).$$

Дисперсія  $\sigma_{\hat{y}(\mathbf{x})}^2$  у цьому випадку залежить не тільки від відстані між точкою  $\mathbf{x}$  та центром плану; отже, план  $X$  не є ротатабельним.

3. При вивченні можливостей підвищення виходу продукту хімічної реакції розглядались фактори, наведені в табл. 4.3. Постулюється лінійна залежність між виходом та факторами. Застосуємо дробовий факторний план типу  $2^{5-2}$ , тобто четверту частину повного факторного плану  $2^5$ , що містить 8 спроб.

План експерименту та його результати наведено в табл. 4.4.

Згідно з методом найменших квадратів одержуємо модель процесу у вигляді

$$\hat{y} = 52,3 - 1,755x_1 + 5,04x_2 + 0,575x_3 - 2,1x_4 + 0,325x_5.$$

З метою перевірки адекватності одержаної моделі обчислимо суму квадратів похибок спостережень згідно з

$$S_e = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\nu} (\hat{y}^{ij} - \bar{y}^i)^2 = 51,2 \quad (4.19)$$

Табл. 4.4. План експерименту та його результати.

№ спроби	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\tilde{y}$
1	+	-	-	-	-	-	50,0
2	+	+	+	-	-	-	57,2
3	+	-	-	+	+	-	48,1
4	+	+	-	+	-	+	46,0
5	+	-	+	+	-	+	64,8
6	+	+	-	-	+	+	45,3
7	+	-	+	-	+	+	54,8
8	+	+	+	+	+	-	53,0

із числом ступенів свободи  $\varphi_2 = N(\nu - 1) = 8$ . За формулою

$$S_D = \sum_{i=1}^N \nu(\bar{y}^i - \bar{y})^2 = 47,216 \quad (4.20)$$

із числом ступенів свободи  $\varphi_1 = N - k - 1 = 8 - 5 - 1 = 2$ . Звідси витікає

$$F = \frac{S_D/\varphi_2}{S_e/\varphi_1} = \frac{47,216/2}{51,2/8} = 3,69.$$

З таблиці розподілів Фішера для  $1 - P = 0,05$  знаходимо  $F_{кр} = 4,46 > 3,69$ . Отже одержана модель адекватна досліджуваному процесу. Обчислюємо дисперсію похибок спостережень

$$s^2 = \frac{S_e}{\nu\varphi_2} = 3,2.$$

Для дисперсії оцінок коефіцієнтів отримуємо

$$s_i^2 = s^2/N = 0,4 \rightarrow s = 0,63.$$

Перевірка значимості коефіцієнтів при  $1 - P = 0,05$ ,  $\varphi = 8$  та, відповідно,  $t_{кр} = 2,31$  показує, що коефіцієнти  $a_3$  та  $a_5$  незначимі. Отримуємо модель

$$\hat{y} = 52,3 - 1,755x_1 + 5,04x_2 - 2,1x_4.$$

План  $X$  називається ненасиченим, якщо  $N > k + 1$ , і насиченим, якщо  $N = k + 1$ . Тут  $N$  - число точок спектра плану (спектром плану називається сукупність усіх точок плану, що відрізняються рівнем бодай одного фактора),  $(k + 1)$  - число коефіцієнтів, що оцінюються.

*Визначення.* Ортогональний план для лінійної моделі

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (4.21)$$

одночасно є й ротатабельним, якщо  $C = (F^T F)^{-1} = gE$ ,  $g$  - стала.

### 4.8.1. Плани для моделей, що містять взаємодії

Модель процесу може бути записана у вигляді

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n a_{ikl} x_i x_k x_l + \dots \quad (4.22)$$

Для отримання оцінок коефіцієнтів моделі типу (4.22) можна використати повні факторні плани, але кількість спроб, що при цьому треба виконати, значно зростає при збільшенні  $n$ . Ось чому для одержання інформації про досліджуваний об'єкт слушно при побудові моделі типу (4.22) застосовувати дробові факторні плани.

Дробові плани типу  $2^{n-p}$  для таких моделей будуються таким же чином, що й для моделей, які містять тільки лінійні члени, тобто матрицю повного факторного плану для  $(n - p)$  основних факторів доповнюють стовпцями, елементи яких являють собою добутки елементів визначених стовпців основних факторів. Зазвичай вважається, що тільки деякі парні взаємодії та взаємодії більш високих порядків є значимі. При цьому взаємодії, що є значимі, розглядаються як самостійні фактори, а незначимі вважаються як фактори, що не увійшли до числа основних. При використанні дробових планів для моделей із взаємодіями можна розглядати лише стільки додаткових факторів, скільки існує незначимих взаємодій.

За наявності в моделі взаємодій оцінки  $\hat{a}_i$  коефіцієнтів при лінійних членах залишаються незалежними одна від одної, але вони можуть виявитися змішаними із взаємодіями більш високих порядків. Частина оцінок  $\hat{a}_{ik}$  коефіцієнтів при парних взаємодіях також виявляється змішаною.

Розглянемо матрицю  $F$  для повної моделі (4.22), що містить всі можливі взаємодії, у випадку, коли для оцінки коефіцієнтів використовується дробовий факторний план. Вочевидь, деякі стовпці матриці  $F$  виявляються однаковими. Так, приміром, якщо за генератор вибране співвідношення  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ , то стовпці для фактору  $x_4$  дорівнюють взаємодії  $x_1 x_2 x_3$ . Це означає, що план не дозволяє отримати окремі оцінки для коефіцієнтів  $\bar{a}_{a_4}$  та  $\bar{a}_{123}$  моделі. Оцінки подібного роду називають змішаними. Зауважимо, що якщо  $\bar{a}_{123} = 0$ , то величина  $\hat{a}_4$  є незміщена оцінка коефіцієнта  $\bar{a}_4$ .

Для одержання правила змішування, за допомогою якого можна визначити, сукупність яких лінійних ефектів та ефектів взаємодії оцінюється будь-яким коефіцієнтом, що знайдений на основі даного плану, запроваджується поняття контрасту плану.

Під контрастом  $I$  мається на увазі співвідношення між елементом матриці  $F$ , що визначає елемент першого стовпця матриці  $F$ . Наприклад, для дробового плану  $2^{3-1}$  маємо  $I = x_1 x_2 x_3$ .

Щоб визначити, із якими факторами змішана оцінка деякого фактора, помножимо обидві частини контрасту на цей фактор. При цьому одержимо порядок змішування оцінок коефіцієнтів.

*Приклад.* Для дробового факторного плану  $2^{3-1}$  з контрастом  $I = x_1 x_2 x_3$  одержимо такий порядок змішування для факторів  $x_1, x_2, x_3$ :

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3; \quad x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3; \quad x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2.$$



Для оцінок маємо відповідно

$$\hat{a}_1 \rightarrow \bar{a}_1 + a_{23}; \quad \hat{a}_2 \rightarrow \bar{a}_2 + a_{13}, \quad \hat{a}_3 \rightarrow \bar{a}_3 + a_{12}.$$

Для дробового факторного плану  $2^{4-1}$  з контрастом  $I = x_1 x_2 x_3 x_4$ :

$$\hat{a}_1 \rightarrow \bar{a}_1 + a_{234}; \quad \hat{a}_2 \rightarrow \bar{a}_2 + a_{134}, \quad \hat{a}_3 \rightarrow \bar{a}_3 + a_{124}; \quad \hat{a}_4 \rightarrow \bar{a}_4 + a_{123}.$$

$$\hat{a}_{12} \rightarrow \bar{a}_{12} + \bar{a}_{34}; \quad \hat{a}_{13} \rightarrow \bar{a}_{13} + \bar{a}_{24}; \quad \hat{a}_{14} \rightarrow \bar{a}_{14} + \bar{a}_{23}.$$

Залежно від вибору генератора одержуються дробові факторні плани, що мають різні властивості вирішувальності. Відповідно до порядку контрасту (кількістю елементів у контрасті) говорять про плани із вирішувальною властивістю III, якщо контраст містить три елементи (план  $2_{III}^{4-1}$ ). Якщо як генератор обрано співвідношення  $x_1 x_2 x_3$  та  $I = x_1 x_2 x_3 x_4$ , то цей план має вирішувальну властивість IV і позначається як  $2_{IV}^{4-1}$ .

Дробові факторні плани із найбільшою вирішувальною властивістю називають головними. Цим планам при використанні слід віддавати перевагу.

Якщо у модель входять функції вигляду  $x_i^2$ , ( $i = \overline{1, n}$ ), то стовпці матриці  $F$ , що відповідають цим функціям, будуть співпадати зі стовпцем для  $x_1 = 1$ , а це означає, що  $\hat{a}_0$  є змішана оцінка для  $\bar{a}_0$  та усіх  $\bar{a}_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\hat{a}_0 \rightarrow \bar{a}_0 + \bar{a}_{11} + \dots + \bar{a}_{nn}.$$

Користуючись даною властивістю, можна одержати правило для перевірки значимості квадратичних ефектів. Для цього проведемо у центрі плану  $n_0$  спроб і знайдемо значення

$$\tilde{y}^0 = \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} \tilde{y}^{0j}. \quad (4.23)$$

Якщо відсутні квадратичні члени, тобто  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \dots = \bar{a}_{nn} = 0$ ,

$$\mathcal{M}\{\tilde{y}^0 - \hat{a}_0\} = 0.$$

Звідси витікає, що у випадку, коли гіпотеза  $H: \mathcal{M}\{\tilde{y}^0\} = \mathcal{M}\{\hat{a}_0\}$  відкидається, у модель необхідно включити функції вигляду  $x_i^2$ .

Нехай факторний план містить  $N = 2^{n-p}$  точок, у кожній з яких реалізовано  $\nu$  експериментів. За паралельними спробами у кожній точці знайдено оцінку  $s^2$  дисперсії похибок спостережень із числом ступенів свободи  $\varphi_e$ . Для перевірки гіпотези можна скористатися формулою

$$t = \frac{|\tilde{y}^0 - \hat{a}_0|}{s \sqrt{(n_0 + \nu N)/(n_0 N)}}, \quad (4.24)$$

яка за умови нормальності розподілу та незалежності похибок спостережень підлягає закону розподілу Ст'юдента ( $t$ -розподілу) з числом ступенів свободи  $\varphi_e$ . Гіпотеза  $H: \mathcal{M}\{\tilde{y}^0\} = \mathcal{M}\{\hat{a}_0\}$  відкидається, якщо  $t > t_{кр}$ .  $t_{кр}$  – критичне значення  $t$ -розподілу із обраним рівнем значимості  $\alpha$  та числом ступенів свободи  $\varphi_e$ . Оцінка  $s_e^2$  результатів

єдиничного експерименту зв'язана із оцінкою  $s^2$  дисперсії похибок спостережень за співвідношенням  $s_e^2 = \nu s^2$ .

Інформаційна матриця планів  $2^{n-p}$  для моделей, що містять  $(k+1)$  коефіцієнтів, які підлягають оцінці, у випадку, коли оцінки всіх коефіцієнтів не зміщені (матриця  $F$  не має однакових стовпців), має вигляд:

$$C = F^T F = 2^{n-p} E_{k+1} = N E_{k+1}; \quad C^{-1} = \frac{1}{N} E_{k+1}. \quad (4.25)$$

Таким чином, плани типу  $2^{n-p}$  є ортогональні для моделей вигляду (4.22). Для обчислення оцінок коефіцієнтів одержуємо формули

$$\hat{a}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j \tilde{y}^j, \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.26)$$

$$\hat{a}_{i, \dots, \mu} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j \dots x_\mu^j \tilde{y}^j, \quad i, \mu = \overline{1, n}, \quad (4.27)$$

$$s_i^2 = \frac{s^2}{N}, \quad i = \overline{0, k}. \quad (4.28)$$

Тут  $(k+1)$  – загальна кількість коефіцієнтів моделі. З (4.28) витікає, що всі коефіцієнти оцінюються із однаковою точністю.

Плани типу  $2^n$  та  $2^{n-p}$  для моделей, що містять взаємодії, не є ротатбельні. Плани типу  $2^n$  та  $2^{n-p}$  для моделей вигляду (4.22) є  $A$ ,  $D$  і  $G$ -оптимальні, якщо областю планування експериментів є гіперкуб із координатами вершин, що приймають значення  $\pm 1$ .

*Приклад.* Упродовж попередніх досліджень виявлено, що на питому теплопровідність возгонки, що одержується при хлорванні титанових шлаків, впливають фактори:

$x_1$  – щільність засипки;  $x_2$  – місткість хлору у возгонці;  $x_3$  – відношення концентрацій  $SiO_2$  та  $TiO_2$  у возгонці;  $x_4$  – температура.

Необхідно експериментальним шляхом знайти інтерполяційну формулу, за допомогою якої можна б описати залежність теплопровідності від перелічених чотирьох факторів та їхніх парних взаємодій:

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_3 x_4.$$

Інтервали варіювання факторів наведено в табл. 4.5.

Для побудови моделі було обрано дробовий факторний план типу  $2^{4-1}$  із генератором  $x_4 = x_1 x_2$ . Контрастом для цього плану є співвідношення  $I = x_1 x_2 x_4$ . При цьому оцінки зміщуються таким чином:

$$\hat{a}_1 \rightarrow \bar{a}_1 + \bar{a}_{24}; \quad \hat{a}_2 \rightarrow \bar{a}_2 + \bar{a}_{14}; \quad \hat{a}_4 \rightarrow \bar{a}_4 + \bar{a}_{12};$$

$$\hat{a}_3 \rightarrow \bar{a}_3; \quad \hat{a}_{34} = \bar{a}_{34}; \quad \hat{a}_{13} \rightarrow \bar{a}_{13}; \quad \hat{a}_{23} \rightarrow \bar{a}_{23}.$$

Похибка спостережень:

$$s = 20,00; \quad s_i = 7,10; \quad \varphi_e = 8.$$

Табл. 4.5. Інтервали варіювання факторів.

Фактори	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Основний рівень ( $x_i = 0$ )	0,87	40,0	1,00	250
Інтервали варіювання	0,15	5	0,25	50
Верхній рівень ( $x_i = +1$ )	1,02	45,0	1,25	300
Нижній рівень ( $x_i = -1$ )	0,72	35,0	0,75	200

Табл. 4.6. План експерименту та його результати.

№	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{34}$	$\tilde{y}$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	296
2	+	+	-	+	-	+	-	-	122
3	+	-	-	+	+	-	-	+	239
4	+	-	+	+	-	-	+	-	586
5	+	+	+	-	+	-	-	-	232
6	+	+	-	-	-	-	+	+	292
7	+	-	-	-	+	+	+	-	539
8	+	-	+	-	-	+	-	+	383
$\hat{a}_i$	336,12	-100,62	38,12	-25,38	-9,62	-1,12	92,12	-33,62	

Інтерполяційна формула:

$$\hat{y}(x) = 336,12 - 100,62x_1 + 38,12x_2 - 25,38x_3 - 9,62x_4 - 1,12x_1x_3 + 92,12x_2x_3 - 33,62x_3x_4.$$

Значимість коефіцієнтів.

Перевіримо значимість коефіцієнтів для  $\alpha = 0,05$ . Значення  $t_{кр}$  при 8-ми ступенях свободи та  $\alpha = 0,05$  дорівнює  $t_{кр} = 2,31$ . При цьому

$$t_{кр}s_i = 2,31 \cdot 7,10 = 16,4.$$

Оцінки  $\hat{a}_4$  й  $\hat{a}_{13}$  виявляються незначимими, отже, відповідні функції виключаються із моделі. Одержуємо модель:

$$\hat{y}(x) = 336,12 - 100,62x_1 + 38,12x_2 - 25,38x_3 + 92,12x_2x_3 - 33,62x_3x_4.$$

Перевірка значимості квадратичних ефектів.

Перевіряємо гіпотезу  $H : \mathcal{M}\{\tilde{y}^0 - \hat{a}_0\} = 0$ . Маємо:  $\nu = 2$ ,  $s_e^2 = \nu s^2 = 2 \cdot 400 = 800$ ,  $n_0 = 2$ ,  $N = 8$ ,  $\varphi_e = 8$ ,  $\hat{a}_0 = 336,12$ .

Згідно з (4.23)  $\tilde{y}^0 = 350$ . При  $\alpha = 0,05$  та  $\varphi = 8$   $t_{кр} = 2,31$ .

Перевіряємо умову

$$|\tilde{y} - \hat{a}_0| = |350 - 336,12| = 13,88 < 2,31 \sqrt{\frac{400(2+16)}{2 \cdot 8}} \approx 49.$$

Звідси витікає, що різниця  $|\tilde{y} - \hat{a}_0|$  незначимо відрізняється від нуля і квадратичні члени у модель можна не вводити.

### 4.8.2. Плани для квадратичних моделей

Розглянемо плани для моделей, що мають вигляд:

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_1^2 + \dots + a_{2n}x_n^2 + a_{2n+1}x_1x_2 + \dots + a_kx_{n-1}x_n. \quad (4.29)$$

$$(k+1) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \quad (4.30)$$

Для оцінки коефіцієнтів моделі вигляду (4.29) незалежна змінна у плані має приймати три значення. Композиційний план для квадратичних моделей можна одержати шляхом додавання деякої кількості спеціальних точок до "ядра", утвореного планом для лінійної моделі. Як ядро можна використовувати плани типу  $2^n$  або  $2^{n-p}$ . Якщо до ядра додати точку у центрі плану із координатами  $0, \dots, 0$  та  $2n$  так званих "зіркових точок" із координатами

$$(\pm\alpha, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm\alpha),$$

то отримуємо центральний композиційний план, що запропоновано Боксом [ ]. На

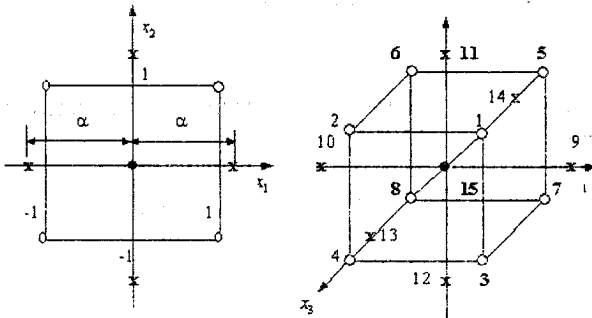


Рис. 4.1. Композиційні плани

рис. (4.1) показано точки композиційних планів для  $n = 2$  та  $n = 3$ . Тут як ядро використано точки факторного експерименту (позначені кружочками). Хрестиками позначено зіркові точки, що містяться на координатних осях на відстані  $\alpha$  від центру плану.

Матрицю планування  $X$  для  $n = 3$  наведено в табл. 4.7.

Номери точок на рис. 4.1 відповідають номерам, вказаним у табл. 4.7. Вибором величини плеча  $\alpha$  композиційного плану та числа  $n_0$  точок у центрі плану можна забезпечити різні властивості плану.

### 4.8.3. Ортогональні центральні композиційні плани

При побудові цих планів величина  $\alpha$  (плече зіркових точок) вибирається так, щоб забезпечити ортогональність плану. Число точок у центрі плану зазвичай при-

Табл. 4.7. Композиційний план другого порядку для  $n = 3$ 

№ спроби	$x_0$	$x_2$	$x_3$
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	+1	-1	-1
8	-1	-1	-1
9	$+\alpha$	0	0
10	$-\alpha$	0	0
11	0	$+\alpha$	0
12	0	$-\alpha$	0
13	0	0	$+\alpha$
14	0	0	$-\alpha$
15	0	0	0

ймається рівним одиниці. Для забезпечення ортогональності плану необхідно перетворити модель (4.29) таким чином.

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = b_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}(x_1^2 - \beta) + \dots + a_{2n}x_n^2 + a_{2n+1}x_1x_2 + \dots + a_kx_{n-1}x_n. \quad (4.31)$$

Тут

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^N (x_i^j)^2}{N} = \frac{2^{n-p} + \alpha^2}{N}. \quad (4.32)$$

У виразі (4.32)  $N$  – загальна кількість точок у плані,  $2^{n-p}$  – число точок ядра композиційного плану. Якщо покласти

$$a_0 = b_0 - \beta \sum_{j=1}^n a_{n+i}, \quad (4.33)$$

то можна від моделі (4.31) перейти до моделі (4.29). Загальна кількість точок плану  $N = 2^{n-p} + 2n + 1$ . Як ядро в композиційних планах можуть бути використані тільки такі дробові плани, що дозволяють одержати оцінки коефіцієнтів при парних незмішаних взаємодіях. Оскільки вибір величини  $\alpha$  не впливає на ортогональність стовпців матриці  $F$ , що відповідають факторам  $x_i$  та парним добуткам  $x_ix_j$ , то для ортогональності композиційного плану необхідно додатково вимагати, щоб парні добутки у ядрі плану не були змішані із лінійними членами. Незавжди переконалися, що для  $n \leq 4$  дробових планів, які задовольняють зазначеним вимогам, не існує.

Отже, при  $n \leq 4$  як ядро ортогонального центрального композиційного плану може бути використано тільки повний факторний план. Для  $n = 5$  як ядро можна використати дробовий факторний план  $2^{5-1}$  із генератором  $x_5 = x_1x_2x_3x_4$ ; для  $n = 6$  або  $n = 7$  можна також використати тільки план  $2^{n-1}$ . Тільки для  $n = 8$  можливе застосування плану  $2^{8-2}$ , наприклад, із генераторами  $x_7 = x_1x_2x_3x_4$  та  $x_8 = x_1x_2x_5x_6$ .

Перейдемо тепер до вибору плеча ортогональних планів. Легко бачити, що скалярні добутки будь-яких двох стовпців матриці  $F$  дорівнюють нулю за будь-яким вибором  $\alpha$ . Виняток складають стовпці при квадратичних функціях вигляду  $(x_i^2 - \beta)$ ; їхні парні добутки у загальному випадку не дорівнюють нулю, але ж залежать від  $\alpha$ .

Прирівнявши до нуля суму добутків елементів двох стовпців при функціях вигляду  $(x_i^2 - \beta)$ , одержимо умову для вибору значення  $\alpha$ , що забезпечує ортогональність плану:

$$2^{n-p} \left(1 - \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N}\right)^2 - 4 \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N} \left(\alpha^2 - \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N}\right) + (2n-3) \left(\frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N}\right)^2 = 0. \quad (4.34)$$

Звідси витікає

$$\alpha = \sqrt{2^{(n-p)/2-1} (\sqrt{N} - 2^{(n-p)/2})}. \quad (4.35)$$

Інформаційна матриця плану:

$$M = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 E_{\binom{n}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Тут

$$m_0 = N = 2^{n-p} + 2n + 1, \quad (4.37)$$

$$m_1 = 2^{n-p} + 2\alpha^2, \quad (4.38)$$

$$m_2 = 2^{n-p}(1 - \beta)^2 + 2(\alpha^2 - \beta)^2 + (2n - 1)\beta^2, \quad (4.39)$$

$$m_3 = 2^{n-p}. \quad (4.40)$$

Звідси отримуємо для дисперсійної матриці вираз

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 E_{\binom{n}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

де  $c_i = m_i^{-1}$ .

Табл. 4.8. Параметри ортогональних центральних композиційних планів.

$n$	Ядро плану	$N$	$\alpha$	$\beta$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
2	$2^2$	9	1	2/3	0,1111	0,1667	0,5	0,25
3	$2^3$	15	1,215	0,73	0,0667	0,0913	0,2298	0,1250
4	$2^4$	25	1,414	0,8	0,04	0,05	0,125	0,0625
5	$2^{5-1}$	27	1,547	0,77	0,03704	0,0481	0,0871	0,0625
6	$2^{6-1}$	45	1,722	0,843	0,0222	0,0264	0,0564	0,03125
7	$2^{7-1}$	79	1,885	0,90	0,0127	0,0141	0,0389	0,0158
8	$2^{8-2}$	81	2,001	0,8889	0,0123	0,0139	0,0312	0,0156

Значення елементів дисперсійної матриці для різних  $n$  наведено в таблиці 4.8. Формули для оцінки коефіцієнтів регресійної моделі.

$$\hat{a}_i = \begin{cases} c_1 \sum_{j=1}^N x_i^j \tilde{y}^j, & i = \overline{1, n}, \\ c_2 \sum_{j=1}^N [(x_{i-n}^j)^2 - \beta] \tilde{y}^j, & i = \overline{n+1, 2n}, \\ c_3 \sum_{j=1}^N x_\mu^j x_\lambda^j \tilde{y}^j, & \mu, \lambda = \overline{1, n}, \mu \neq \lambda, i = \overline{2n+1, k}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Оцінка  $\hat{b}_0$  обчислюється за формулою

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{y}^j. \quad (4.43)$$

Для  $\hat{a}_0$  відповідно до (4.33) маємо

$$\hat{a}_0 = \hat{b}_0 - \beta \sum_{j=1}^n \hat{a}_{n+i}. \quad (4.44)$$

Оцінка дисперсій коефіцієнтів визначається за формулами

$$s_i^2 = \begin{cases} s^2 c_0, & i = 0, \\ s^2 c_1, & i = \overline{1, n}, \\ s^2 c_2, & i = \overline{n+1, 2n}, \\ s^2 c_3, & i = \overline{2n+1, k}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Для  $\hat{a}_0$  маємо

$$s_{\hat{a}_0}^2 = s^2 (c_0 + n\beta^2 c_2). \quad (4.46)$$

Табл. 4.9. Параметри ротатабельних центральних композиційних планів.

$n$	Ядро плану	$n_z$	$n_0$	$N$	$\alpha$
2	$2^2$	4	5	13	1,414
3	$2^3$	6	6	20	1,682
4	$2^4$	8	7	31	2,000
5	$2^5$	10	10	52	2,378
	$2^{5-1}$	10	6	32	2,000
6	$2^6$	12	15	91	2,828
	$2^{6-1}$	12	9	52	2,378
7	$2^7$	14	21	163	3,333
	$2^{7-1}$	14	14	92	2,828

#### 4.8.4. Ротатабельні центральні композиційні плани

У цьому випадку умови для вибору величини плеча зіркових точок  $\alpha$  використовується вимога ротатабельності плану.

Вважаємо, що модель має вигляд (4.29). Ротатабельний центральний композиційний план будується аналогічно до ортогонального плану. За ядро можна використовувати повний або дробовий факторний план. Величина плеча  $\alpha$  визначається за формулою

$$\alpha = 2^{(n-p)/2} \quad (4.47)$$

Число спроб  $n_0$  у центрі плану вибирається за такими міркуваннями. Висувається вимога незміненості інформації про значення вихідної змінної для точок плану знутри сфери одиничного радіусу із центром у центрі плану. Тобто необхідно, щоб інформаційний профіль ротатабельного плану мало відрізнявся при значеннях радіусу сфери від 0 до 1. Плани, що задовольняють цій вимозі, називаються ротатабельними уніформ-планами.

Виявляється, що уніформ-план можна одержати, змінюючи число точок у центрі ротатабельного плану. В табл. 4.9 наведено значення плеча  $\alpha$  та числа  $n_0$  точок у центрі плану, зіркових точок  $n_z$  та загального числа точок  $N$  для ротатабельних уніформ-планів другого порядку.

Перша група точок визначає ядро плану, друга – зіркові точки, третя – центр плану. Звернемо увагу на той факт, що в матриці  $F$  центральна точка фігурує  $n_0$  раз. Це означає, що при обчисленні оцінок коефіцієнтів використовується результат кожного виміру у центрі плану, а не їхнє середнє значення. Така побудова матриці  $F$  є наслідком вимоги однакової дисперсії всіх величин залежної змінної, що входять у матрицю  $\hat{Y}$ . Паралельні спроби у центрі плану дозволяють розрахувати оцінку дисперсії похибок спостережень.

У загальному випадку за наявності  $n_0$  точок у центрі плану і повторенні експерименту  $\nu$  раз у кожній точці матриці  $F$ , оцінки дисперсії одиничного експерименту





$s_e^2$  визначаються за формулою

$$s_e^2 = \frac{S_e}{\varphi_e}. \quad (4.48)$$

$$S_e = \sum_{j=1}^{2^{n-p}+2n} \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{y}^j - \bar{y}^{ji})^2 + \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{y}^0 - \bar{y}^{2^{n-p}+2n+j,i})^2. \quad (4.49)$$

Тут

$$\bar{y}^0 = \frac{1}{n_0\nu} \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{\nu} \bar{y}^{2^{n-p}+2n+j,i}, \quad (4.50)$$

$$\varphi_2 = (2^{n-p} + 2n)(\nu - 1) + \nu n_0 - 1. \quad (4.51)$$

Інформаційна матриця  $M = F^T F$  ротатабельних планів, що розглядаються, є близька до діагональної. Вона має вигляд

$$M = \begin{bmatrix} N & 0 & (2^{n-p} + 2\alpha^2)l'_n & 0 \\ 0 & (2^{n-p} + 2\alpha^2)l'_n & 0 & 0 \\ (2^{n-p} + 2\alpha^2)l'_n & 0 & B_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-p}E_{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Тут  $l_n$  – вектор-стовпець із елементами 1;

$$B_{nn} = \begin{bmatrix} 2^{n-p} + 2\alpha^4 & 2^{n-p} & \dots & 2^{n-p} \\ 2^{n-p} & 2^{n-p} + 2\alpha^4 & \dots & 2^{n-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-p} & 2^{n-p} & \dots & 2^{n-p} + 2\alpha^4 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Із (4.52), (4.53) витікає, що оцінки коефіцієнтів при лінійних членах та парних взаємодіях при використанні ротатабельного плану некорельовані із оцінками решти коефіцієнтів, а оцінки коефіцієнтів при квадратичних членах корельовані між собою та оцінкою вільного члену. Цей факт дозволяє при статистичному аналізі результатів розрахунку робити висновки про значимість коефіцієнтів при лінійних членах та взаємодіях незалежно від значень решти коефіцієнтів. Крім того, виходячи із інформаційної матриці (4.52), можна одержати розрахункові формули для оцінок коефіцієнтів та їхніх дисперсій, зручні для ручних розрахунків:

$$\hat{a}_i = \begin{cases} \frac{A}{N} \left[ 2\lambda_1(n+2)(0\bar{y}) - 2\lambda_i \sum_{j=1}^n (j\bar{y}) \right], & i = 0, \\ \frac{\lambda_2}{N} (i\bar{y}), & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\hat{a}_{n+1} = \frac{A}{N} \{ \lambda_2^2 [(n+2)\lambda_1 - n](i\bar{y}) + \lambda_2^2 (1 - \lambda_1) \sum_{j=1}^n (j\bar{y}) - 2\lambda_1\lambda_2(0\bar{y}) \}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\hat{a}_{2n+j} = \frac{\lambda_2^2}{N\lambda_2} (i\bar{y}), \quad j = \overline{1, k-2n}.$$

Тут запроваджено позначення:

$$\lambda_1 = \frac{2^{n-p}N}{(2^{n-p} + 2\alpha^2)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{N}{2^{n-p} + 2\alpha^2}, \quad A = \frac{1}{2\lambda_1[(n+2)\lambda_1 - n]}. \quad (4.55)$$

Крім того,

$$(0\bar{y}) = \sum_{j=1}^N \bar{y}^j, \quad (i\bar{y}) = \sum_{j=1}^N x_i^j \bar{y}^j, \quad (il\bar{y}) = \sum_{j=1}^N x_i^j x_l^j \bar{y}^j.$$

Відповідно, для дисперсій маємо такі вирази.

$$s_i^2 = \begin{cases} 2\frac{A}{N}\lambda_1^2(n=2)s^2, & i = 0, \\ \frac{\lambda_2}{N}s^2, & i = \overline{1, n}, \\ \frac{A}{N}[(n+1)\lambda_1 - (n-1)]\lambda_1^2s^2, & i = \overline{n+1, 2n}, \\ \frac{\lambda_2}{N\lambda_1}s^2, & i = \overline{2n+1, k}. \end{cases} \quad (4.56)$$

Тут  $s^2$  – оцінка дисперсії значень  $\bar{y}$  (дисперсія спостережень) із числом ступенів свободи  $\varphi = (2^{n-p} + 2n)(\nu - 1) + \nu n_0 - 1$ , що дорівнює  $s^2 = s_e^2/\nu$ .

Розглянемо тепер методику перевірки адекватності моделі для випадку, коли використовується ротатабельний план. Сума квадратів  $S_D$ , що характеризує неадекватність моделі, у даному випадку визначається виразом

$$S_D = \nu n_0 (\bar{y}^0 - \hat{y}^0)^2 + \nu \sum_{j=1}^{2^{n-p}+2n} (\bar{y}^j - \hat{y}^j)^2. \quad (4.57)$$

Тут  $\hat{y}^j$  – значення вихідної змінної у точці плану  $\mathbf{x}^j$ , що обчислені за допомогою одержаного рівняння;  $\bar{y}^0$  – середнє значення залежної змінної у центрі плану (4.50). Із сумою квадратів (4.56) зв'язане число ступенів свободи

$$\varphi_1 = N - (k+1) - (n_0 - 1) = N - k - n_0. \quad (4.58)$$

Модель вважається адекватною при обраному рівні значимості  $1 - P$ , якщо

$$F = \frac{S_D/\varphi_1}{S_e/\varphi_2} < F_{кр}. \quad (4.59)$$

*Приклад.* Досліджувався вплив температури загартування ( $x_1$ ), температури старіння ( $x_2$ ) та терміну старіння ( $x_3$ ) на термін до руйнування одного із жаростійких нікелевих сплавів при температурі  $850^\circ\text{C}$  і напрузі  $50 \text{ кг/мм}^2$ . Рівні варіювання факторів вказані в табл. 4.11.

У ході дослідження спочатку було реалізовано повний факторний план  $2^3$  (див. табл. 4.12) і проведено  $n_0$  паралельних спроб у центрі плану. Результати цих експериментів дозволили переконалися у значимості квадратичних ефектів й отже, у необхідності використання моделі у вигляді полінома другого порядку. Після цього план було доповнено зірковими

Табл. 4.11. Рівні варіювання факторів.

Фактори	$x_i$	$x_j^* = -1,682$	-1	0	+1	$x_j^* = +1,682$
$T_{\text{загарт}}^{\circ} C$	$x_1$	1016	1050	1100	1150	1184
$T_{\text{стар.}}^{\circ} C$	$x_2$	666	700	750	800	834
Термін стар.	$x_3$	0,6	2	4	6	7,4

точками до ротатбельного плану другого порядку. Розглянемо процедуру перевірки значимості квадратичних ефектів за результатами, що одержано при реалізації плану  $2^3$  та спроб у центральній точці. Використовуючи результати спостережень у точках плану  $2^3$ , знаходимо оцінку

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^8 \tilde{y}^j = 19,525; \quad \tilde{y}^0 = \frac{1}{6} \sum_{j=15}^{20} \tilde{y}^j = 29,0.$$

Оцінка  $s^2 = \nu s_e^2 = s_c^2$  дисперсії похибок спостережень, що обчислена за результатами паралельних спроб у центрі плану, дорівнює

$$s^2 = \frac{1}{5} \sum_{j=15}^{20} (\tilde{y}^j - \tilde{y}^0)^2 = 0,58.$$

Число ступенів свободи оцінки  $s^2$  дорівнює  $\varphi_e = 5$ . При рівні значимості  $1 - P = \alpha = 0,05$  та  $\varphi_e = 5$  із таблиці  $t$ -розподілів знаходимо  $t_{кр} = 2,571$ . При  $\nu = 1$ ,  $n_0 = 6$ ,  $N = 20$  переконаємось у тому, що

$$|\tilde{y}^0 - \hat{a}_0| = |29,0 - 19,525| = 9,475 > 2,571 \sqrt{0,58} \sqrt{25/120} = 0,88.$$

Отже, ефекти при квадратичних членах значимі й, отже, у модель слід ввести квадрати факторів.

Розрахуємо тепер оцінки коефіцієнтів моделі другого порядку за результатами спостережень у всіх точках плану. Відзначимо, що плече зіркових точок та число  $n_0$  спроб у центрі плану відповідає табл. 4.10. За допомогою формул (4.55) знаходимо

$$\lambda_1 = \frac{8 \cdot 20}{(8 + 2 \cdot 2,828)^2} = 0,856, \quad \lambda_2 = \frac{20}{8 + 2 \cdot 2,828} = 1,46,$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 0,856(5 \cdot 0,856) - 3} = 0,455.$$

За допомогою (4.54), обчислюємо оцінки коефіцієнтів. Отже, одержуємо модель

$$\hat{y}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 28,98 + 7,34x_1 + 4,93x_2 - 1,21x_3 - 1,79x_1^2 - 3,99x_2^2 - 3,58x_3^2 + 4,30x_1x_2 - 6,78x_1x_3 + 2,05x_2x_3. \quad (4.60)$$

Перевіримо адекватність моделі. Використовуючи (4.49) та (4.51), обчислюємо величини ( $\nu = 1$ )

$$S_e = 2,9; \quad \varphi_2 = 5.$$

Суму квадратів  $S_D$  визначимо відповідно до (4.57):  $S_D = 6,82$ .

Табл. 4.12. Ротатабельний центральний композиційний план та матриця  $F$  для  $n = 3$ .

Номер спроби	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{y}$
1	-1	-1	-1	8,0
2	+1	-1	-1	27,9
3	-1	+1	-1	5,8
4	+1	+1	-1	43,0
5	-1	-1	+1	14,1
6	+1	-1	+1	7,0
7	-1	+1	+1	20,2
8	+1	+1	+1	30,2
9	-1,682	0	0	12,1
10	+1,682	0	0	36,0
11	0	-1,682	0	10,4
12	0	+1,682	0	25,3
13	0	0	-1,682	20,0
14	0	0	+1,682	18,0
15	0	0	0	29,0
16	0	0	0	28,4
17	0	0	0	28,6
18	0	0	0	28,8
19	0	0	0	28,7
20	0	0	0	30,5

Число ступенів свободи для  $S_D$  дорівнює  $\varphi_1 = 20 - 9 - 6 = 5$ . Звідси одержуємо

$$F = \frac{S_D/\varphi_1}{S_e/\varphi_2} = \frac{1,365}{0,58} = 2,44.$$

За рівнем значимості  $\alpha = 0,05$  і при  $\varphi_1 = 5$  та  $\varphi_2 = 5$  знаходимо з таблиці  $F_{кр} = 5,05$ . Оскільки  $F = 2,44 < F_{кр} = 5,05$ , то модель вважається адекватною.

Для перевірки значимості коефіцієнтів розраховуємо оцінки дисперсій коефіцієнтів за формулами (4.56). При цьому скористаємось оцінкою  $s^2 = 0,58$ :

$$s_0^2 = 0,0963; \quad s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 0,0426; \quad s_4^2 = s_5^2 = s_6^2 = 0,0403; \quad s_7^2 = s_8^2 = s_9^2 = 0,0725.$$

При рівні значимості  $\alpha = 1 - P = 0,01$  та  $\varphi_2 = 5$  одержуємо  $t_{кр} = 4,032$ .

$$|\hat{a}_i| > t_{кр} s_i.$$

Отже, із 99%-ю надійністю всі коефіцієнти є значимі.

---

## Оптимізація процесів за статистичними моделями

---

Елементи науково-дослідних робіт, творчий підхід до вирішення конкретних техніко-економічних задач, пошук нових шляхів покращання якості продукції, розробка засобів зростання ефективності праці є прямими обов'язками кожного фахівця в усіх галузях людської діяльності. Одним з шляхів вирішення цих проблем є поширене використання методів *математичної теорії експерименту* та її рекомендацій по раціональному використанню матеріальних та часових ресурсів, а також по стандартизації низки етапів досліджень, які не потребують індивідуального творчого підходу у кожному конкретному техніко-економічному завданні.

Застосування математичної теорії експерименту дозволяє відшукувати оптимальні шляхи вирішення конкретних техніко-економічних завдань та керувати поведінкою об'єктів поза виявлення структурної, фізичної тощо сутностей явища.

Кількість прикладних робіт в галузі такого розділу математичної теорії експерименту як алгоритмізоване його планування (яке не зовсім вдало зветься "активним експериментом") значно збільшується. З'явилося безліч поліноміальних статистичних моделей практично в усіх галузях науки і техніки, що призвело до низки вкрай негативних наслідків: більшість авторів або зупиняються на розрахунках моделей, не наводячи ніякої їхньої інтерпретації, або наводять формальний пошук оптимумів, не аналізуючи конкретні шляхи оптимізації, або наводять "наївну" інтерпретацію лінійної частини моделі, відкидаючи якраз ту її частину, де закладено можливості нетривіальних рішень. При цьому у ряді праць робляться спроби винайти інформацію, яка у моделях не закладена за сутністю явища, або за обмеженням форми моделі поліномом другого степеню, або за статистичним змістом моделювання, що надає відповідь у деякому довірчому інтервалі.

Вірогідно, однією із причин таких явищ є те, що у багатьох рекомендаціях по плануванню експерименту головна увага приділяється принципу "скорочення кількості" експериментальних точок відповідно до зростання факторного простору (збільшення кількості факторів у моделі  $K$ ), що одразу приваблює дослідника можливістю зменшити обсяг дослідницьких робіт. Справді, один із варіантів оптимізації – досягти потрібного рівня якості функціонування системи (у наукових дослідженнях – заданого рівня інформації) за мінімальних витрат ресурсів (тобто кількості

дослідів). Але ж не можна забувати про інший варіант оптимізації – досягнути максимуму якості функціонування системи за повних витрат ресурсів, що виділено на проведення експериментів (за заданої кількості дослідів).

Мета цього розділу – ознайомити фахівців, які мають справу із експериментальним вирішенням техніко-економічних завдань, із тими можливостями, які з'являються при раціональному використанні математичної моделі експерименту, зокрема, при побудові поліноміальних *статистичних многофакторних моделей*. В цьому розділі викладаються не методи власне математичного планування експерименту, яким присвячена досить обширна література, а методи видобування корисної інформації на наступному етапі, тобто при аналізі вже побудованої моделі.

## 5.1. Основні проблеми прийняття рішень за поліноміальними статистичними моделями

### 5.1.1. Математична теорія експерименту в техніко-економічних задачах

Розглянемо  $K$ -факторну модель другого порядку:

$$y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^K \beta_i x_i + \sum_{i=1}^K \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j, \quad (5.1)$$

де  $x_i$  – кодовані значення факторів, що визначаються за формулою

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}, \quad (5.2)$$

де  $\Delta X_i$  – напівдіапазон змінювання  $i$ -го фактора у експерименті,

$$\Delta X_i = 0,5(X_{i \max} - X_{i \min}) \quad (5.3)$$

$X_i$  – значення факторів у натуральних змінних,  $X_{i0}$  – координата центру експерименту за  $i$ -м фактором

$$X_{i0} = 0,5(X_{i \max} + X_{i \min}), \quad (5.4)$$

$X_{i \max}$  та  $X_{i \min}$  – верхня (максимальна) та нижня (мінімальна) межі експерименту відповідно.

Передбачається, що дослідником:

а) сформульовані мета і завдання роботи в техніко-економічних термінах, зібрана та проаналізована апріорна інформація, прийнято рішення про проведення алгоритмізованого експерименту для одержання поліноміальної моделі;

б) обрано  $r$  критеріїв якості роботи об'єкта  $Y_j$  (параметрів виходу системи або параметрів оптимізації) і  $K$  основних факторів  $X_i$ , які визначають змінювання виходу  $Y_j$ ; визначено положення центру експеримента  $X_{i0}$  та напівдіапазон варіювання  $\Delta X_i$  за кожним  $i$ -м фактором;

в) відповідно до мети роботи на ґрунті критеріїв оптимальності планів вибрана матриця плану експеримента та схема організації вимірювань;



г) реалізовано експеримент у  $N$  точках плану, визначена оцінка похибки експеримента  $s_0$ , за методом найменших квадратів розраховано оцінки коефіцієнтів регресії і одержана поліноміальна модель

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i x_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j, \quad (5.5)$$

де  $b_0, b_i, b_{ij}$  – статистичні оцінки істинних коефіцієнтів поліноміальної моделі;

д) оскільки оцінки  $b_0, b_i, b_{ij}$ , що визначаються за вибіркою із  $N$  дослідів, є випадкові величини, що розподілені за деяким законом, то висуваються гіпотези про відмінність цих оцінок від нуля, про адекватність моделі експериментальним даним, про її інформаційну спроможність тощо, які перевірено за відповідними критеріями  $St$  при обраному ризику  $\alpha$  помилкового відкидання цих гіпотез (так званий рівень значимості або похибка першого роду).

Отже, методично обґрунтовано і математично коректно одержана поліноміальна модель (5.5), що статистично описує математичними символами поведінку системи, що вивчається. Тепер потрібно перевести мову математики на професійну мову дослідника, знайти і прийняти за моделлю (або їх комплексу у разі  $r$  критеріїв) техніко-економічне рішення.

### 5.1.2. Комплекс завдань, які вирішуються на основі аналізу поліноміальної моделі

Досвід побудови та застосування поліноміальних моделей у різних техніко-економічних ситуаціях показує, що можна сформулювати 10 типів завдань, які вирішуються на ґрунті однієї поліноміальної моделі. Ці задачі слушно формулювати на прикладі аналізу конкретної моделі. У якості такої моделі ми розглянемо комплекс можливих рішень, що приймаються за поліноміальною моделлю продуктивності праці наукових співробітників залежно від структури бюджету часу, оскільки ця проблема у тій чи іншій мірі цікавить дослідників в усіх галузях господарства.

Одне з основних рішень наукового потенціала закладено у підвищенні продуктивності праці науковців. Задача формулюється так: оцінити ступінь впливу на продуктивність праці наукових співробітників змінюванням долі часу на побутові потреби ( $x_1$ ), адміністративну працю ( $x_2$ ) та некваліфіковану працю ( $x_3$ ) у загальному тижневому бюджеті їхнього часу. Для отримання цих оцінок і вибору напрямку оптимізації використовується поліноміальна модель, яка побудована на основі анкетного опитування.

В якості оцінок продуктивності праці приймається кількість опублікованих наукових праць  $P$ , кількість учнів  $U$  та підготовлених кандидатів наук  $W$ , кількість отриманих авторських свідоцтв  $I$  за три роки. Одночасний облік результатів  $P, U, W, I$  оцінюється як  $Y = 100\%$ . Перший фактор  $X_1$  (кодова назва “побут”) містить час на придбання товарів повсякденного користування, догляд за дітьми тощо. Фактичні витрати часу за фактором  $X_1$  складають для жінок 20–27 г/тиж., для чоловіків – 8–10 г/тиж. Другий фактор  $X_2$  (код “адміністрування”) містить час на засідання та наради тощо. Витрати за фактором  $X_2$  складають 6–16 г/тиж. Третій фактор

$X_3$  (код “некваліфікована праця”) містить час, який витрачається на підготовку та обслуговування апаратури, устаткування, на технічні операції в простих експериментах тощо, які не потребують науково-технічної освіти. Фактичні витрати часу на ці операції складають 7–15 г/тиж.

Для опитування експертів, які працюють у різних галузях науки, складається анкета, яка містить констатуючу частину, конкретні дані про продуктивність праці за три роки, а також розділ уявного експерименту, який забезпечує побудову вербальної моделі продуктивності праці. Постає питання: “Як зміниться Ваша продуктивність праці (в % від  $Y_0 = 100\%$ ), якщо у Вашому бюджеті часу на  $\pm 5\%$  г/тиж. зміняться рівні трьох факторів:  $X_1, X_2, X_3$ ?”

Відповіді просявляються експертами у вигляді таблиць, в яких при фіксованому одному факторі варіюються решта два фактори. Одержуємо 12 точок плану плюс 13-а точка, у якій  $Y_0 = 100\%$  (центральна точка плану).

Для всіх експертів за середніми оцінками знаходиться модель

$$\hat{Y}_1 = 100 - 19x_1 - 21x_2 - 24x_3 - 3x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_2x_3; \quad x_i = \frac{X_i - 0}{5} = 0,2X_i.$$

У кожній із 13 точок плану полігон розподілу вербальних оцінок продуктивності праці наукових співробітників може описуватись однією із кривих теоретичних або емпіричних законів розподілу. За ними визначаються емпіричні межі 90%-го довірчого інтервалу для  $y_u$ , за якими розраховуються дві моделі. Нижня межа, що називається “песимістичною” оцінкою, відповідає тому, що лише 5% експертів називають можливою продуктивність праці *нижче* за це значення:

$$\hat{Y}_p = 100 - 19x_1 - 26x_2 - 23x_3 - 19x_1^2 - 18x_2^2 - 22x_3^2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3. \quad (5.6)$$

Верхня – “оптимістична” оцінка відповідає тому, що лише 5% експертів називають можливою продуктивність праці *вище* за це значення:

$$\hat{Y}_o = 100 - 26x_1 - 26x_2 - 30x_3 + 18x_1^2 + 18x_2^2 + 20x_3^2 + 10x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3. \quad (5.7)$$

Далі формулюються десять типів завдань і наводиться їх розв’язання на основі аналізу повної поліноміальної моделі другого порядку при трьох факторах для моделі  $\hat{Y}_o$ .

### Тип I – інтерполяційна

Визначити значення продуктивності праці  $\hat{Y}_o$  для точки, яка розташована всередині області факторного простору із координатами, що відрізняються від точок плану експеримента, наприклад, для точки із координатами  $x_{ip} = 0, x_{2p} = +0,5, x_{3p} = -0,5$ .

Розв’язок отримаємо шляхом заміщення  $x_{ip}$  у (5.7):

$$\begin{aligned} \hat{Y}_o\{x_{ip}\} &= 100 - 26 \cdot 0 - 26 \cdot 0,5 - 30(-0,5) + 18 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0,5^2 + 20(-0,5)^2 + \\ &+ 10 \cdot 0 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0 \cdot (-0,5) + 8 \cdot 0,5 \cdot (-0,5) = 109,5\%. \end{aligned}$$

### Тип II – екстраполяційна:

Визначити значення  $\hat{Y}_o$  для точки, що міститься *поза* областю факторного простору, наприклад, із координатами  $x_{1p} = 0$ ,  $x_{2p} = +0,5$ ,  $x_{3p} = -1,5$ .

Розв'язок знаходиться при підстановці  $x_{ip}$  у модель (5.7):

$$\begin{aligned} \hat{Y}_o\{x_{ip}\} &= 100 - 26 \cdot 0 - 26 \cdot 0,5 - 30(-1,5) + 18 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0,5^2 + 20(-1,5)^2 + \\ &+ 10 \cdot 0 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0 \cdot (-1,5) + 8 \cdot 0,5 \cdot (-1,5) = 175,5\%. \end{aligned}$$

### Тип III – аналітико-геометрична

Визначити геометричну фігуру, яку описує модель (5.7) і відобразити її у трьохфакторному просторі.

Розв'язання складається з кількох кроків:

а) Одержання стандартної поверхні форми загального рівняння поверхні другого порядку із поліноміальної моделі (5.5):

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^K a_i x_i + \sum_{i=1}^K a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^K a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (5.8)$$

або

$$(b_0 - \hat{Y}) + 2 \sum_{i=1}^K (b_i/2) x_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} (b_{ij}/2) x_i x_j = 0, \quad (5.9)$$

що для моделі (5.7) призводить до форми:

$$\begin{aligned} (100 - \hat{Y}_o) - 2 \cdot 13x_1 - 2 \cdot 13x_2 - 2 \cdot 15x_3 + 18x_1^2 + 18x_2^2 + 20x_3^2 + \\ + 2 \cdot 5x_1x_2 + 2 \cdot 4x_1x_3 + 2 \cdot 4x_2x_3 = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

б) Визначення (із використанням правила Крамера) інваріантів  $I$  та вигляду поверхні (5.10):

$$I_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33} = 18 + 18 + 20 = 56; \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} b_{11} & 0,5b_{12} \\ 0,5b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & 0,5b_{23} \\ 0,5b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & 0,5b_{13} \\ 0,5b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} = \\ &= b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} + b_{11}b_{33} - 0,25(b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2) = \\ &= 18 \cdot 18 + 18 \cdot 20 + 18 \cdot 20 - 0,25(8^2 + 8^2 + 10^2) = 987; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & 0,5b_{12} & 0,5b_{13} \\ 0,5b_{12} & b_{22} & 0,5b_{23} \\ 0,5b_{13} & 0,5b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{11}b_{22}b_{33} + 0,25b_{12}b_{13}b_{23} - 0,25(b_{13}^2b_{22} + b_{12}^2b_{33} + b_{23}^2b_{11}) = \\ &= 18 \cdot 18 \cdot 20 + 0,25 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 - 0,25(8^2 \cdot 18 + 10^2 \cdot 20 + 8^2 \cdot 18) = 5564. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Оскільки  $I_1 I_3 > 0$  і  $I_2 > 0$ , то з дійсних поверхонь це може бути тільки *еліпсоїд*.

в) Визначення координат центру еліпсоїда  $x_{is}$ :

$$x_{1s} = \begin{vmatrix} -0,5b_1 & 0,5b_{12} & 0,5b_{13} \\ -0,5b_2 & b_{22} & 0,5b_{23} \\ -0,5b_3 & 0,5b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} / I_3 = 0,467;$$

$$x_{2s} = \begin{vmatrix} b_{11} & -0,5b_1 & 0,5b_{13} \\ 0,5b_{12} & -0,5b_2 & 0,5b_{23} \\ 0,5b_{13} & -0,5b_3 & b_{33} \end{vmatrix} / I_3 = 0,467;$$

$$x_{3s} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0,5b_{12} & -0,5b_1 \\ 0,5b_{12} & b_{22} & -0,5b_2 \\ 0,5b_{13} & 0,5b_{23} & -0,5b_3 \end{vmatrix} / I_3 = 0,563.$$

г) Визначення значення  $\hat{Y}_{3s}$  у центрі еліпсоїда підстановкою  $x_{is}$  у (5.7):

$$\hat{Y}_{3s} = 100 - 26 \cdot 0,467 - 26 \cdot 0,467 - 30 \cdot 0,563 + 18 \cdot 0,467^2 + 18 \cdot 0,467^2 + 20 \cdot 0,563^2 + \\ + 10 \cdot 0,467 \cdot 0,467 + 8 \cdot 0,467 \cdot 0,563 + 8 \cdot 0,467 \cdot 0,563 = 79,71.$$

д) Визначення коефіцієнтів канонічного рівняння

$$\hat{Y} - \hat{Y}_s = B_1 \tilde{X}_1^2 + B_2 \tilde{X}_2^2 + B_3 \tilde{X}_3^2, \quad (5.14)$$

де  $B_1, B_2, B_3$  – корені характеристичного рівняння із аргументом  $\lambda$ :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \rightarrow \lambda^3 - 56 \lambda^2 + 987 \lambda - 5564 = 0. \quad (5.15)$$

Корені цього рівняння дорівнюють:  $\lambda_1 = 27,35$ ,  $\lambda_2 = 15,65$ ,  $\lambda_3 = 13,00$ .

Отже, канонічне рівняння еліпсоїдів набуває вигляду

$$27,35 \tilde{X}_1^2 + 15,65 \tilde{X}_2^2 + 13,00 \tilde{X}_3^2 = \hat{Y} - 79,71. \quad (5.16)$$

е) Зв'язок між старими  $x_i$  та новими  $\tilde{X}_i^2$  координатами описується системою рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_1 &= l_1(x_1 - x_{1s}) + l_1(x_2 - x_{2s}) + l_1(x_3 - x_{3s}); \\ \tilde{X}_2 &= m_1(x_1 - x_{1s}) + m_1(x_2 - x_{2s}) + m_1(x_3 - x_{3s}); \\ \tilde{X}_3 &= n_1(x_1 - x_{1s}) + n_1(x_2 - x_{2s}) + n_1(x_3 - x_{3s}); \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

де  $l_i = \cos \alpha_i$ ,  $m_i = \cos \beta_i$ ,  $n_i = \cos \gamma_i$  – тригонометричні функції кутів, утворених повертанням осі координат, причому

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1; \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1; \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1; \quad (5.18)$$

Значення напрямних косинусів для кожного кореня  $\lambda_i$  характеристичного рівняння легко відшукуються із системи однорідних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0; \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - \lambda_i)l_i + b_{12}/2m_i + b_{13}/2n_i &= 0; \\ b_{12}/2l_i + (b_{22} - \lambda_i)m_i + b_{23}/2n_i &= 0; \\ b_{13}l_i + b_{23}/2m_i + (b_{33} - \lambda_i)n_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Розв'язок цих рівнянь дає:

$$l_1 = 0,560, m_1 = 0,560, n_1 = 0,610; \quad l_2 = -0,4312, m_2 = -0,4312, n_2 = 0,7925;$$

$$l_3 = 0,7071, m_3 = 0,7071, n_3 = 0.$$

Після підстановки  $l_i, m_i, n_i$  у рівняння (5.17) маємо:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_1 &= 0,5605(x_1 - x_{1s}) - 0,4312(x_2 - x_{2s}) + 0,7071(x_3 - x_{3s}); \\ \tilde{X}_2 &= 0,5605(x_1 - x_{1s}) - 0,4312(x_2 - x_{2s}) + 0,7071(x_3 - x_{3s}); \\ \tilde{X}_3 &= 0,610(x_1 - x_{1s}) + 0,7925(x_2 - x_{2s}). \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Перехід від нових  $\tilde{X}_i$  до старих координат:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 0,467 &= 0,5605\tilde{X}_1 + 0,5605\tilde{X}_2 + 0,910\tilde{X}_3; \\ x_2 - 0,467 &= -0,4312\tilde{X}_1 - 0,4312\tilde{X}_2 + 0,7925\tilde{X}_3; \\ x_3 - 0,563 &= 0,7071\tilde{X}_1 - 0,7071\tilde{X}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Ця задача не має самостійного значення, а слугує як допоміжна для вирішення деяких наступних задач.

#### Тип IV – мінімізаційна

Необхідно визначити мінімально можливу в зоні експеримента продуктивність праці наукових співробітників  $\hat{Y}_{\min}$  і відповідні до неї змінювання у бюджеті часу  $x_{i \min}$ .

Розв'язання у даному разі тривіальне, оскільки модель описує еліпсоїд із мінімумом у центрі  $x_{i \min}$ . Отже,

$$x_{1 \min} = x_{1s} = 0,467 \text{ або } X_{1 \min} = +2,3 \text{ г/тиж.};$$

$$x_{2 \min} = x_{2s} = 0,467 \text{ або } X_{2 \min} = +2,3 \text{ г/тиж.};$$

$$x_{3 \min} = x_{3s} = 0,467 \text{ або } X_{3 \min} = +2,8 \text{ г/тиж..}$$

#### Тип V – максимізаційна за виходом $\hat{Y}$

Необхідно визначити максимально можливу продуктивність праці та відповідні до неї змінювання в бюджеті часу в зоні експеримента при  $|x_i| \leq 1$  (ясно, що поза цією зоною для еліпсоїда (5.16)  $\hat{Y}_{\max} \rightarrow \infty$ ).

Розв'язання V можна відшукувати за кількома методиками.

а) На основі аналізу *канонічної форми* (5.16) припускають, що найшвидше  $\hat{Y}$  зростатиме у напрямку осі  $\tilde{X}_1$ , оскільки коефіцієнти  $B_1 > B_2 > B_3$ . Рух за цією

вісью здійснюватиметься, коли  $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_3 = 0$ . Тоді необхідно розв'язати систему рівнянь (5.21), яка набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_1 &= 0,5605(x_1 - x_{1s}) - 0,4312(x_2 - x_{2s}) + 0,7071(x_3 - x_{3s}) = \kappa; \\ \tilde{X}_2 &= 0,5605(x_1 - x_{1s}) - 0,4312(x_2 - x_{2s}) + 0,7071(x_3 - x_{3s}) = 0; \\ \tilde{X}_3 &= 0,610(x_1 - x_{1s}) + 0,7925(x_2 - x_{2s}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

де  $\kappa$  - довільне число.

Відповідь відшукується у вигляді пропорції

$$\begin{aligned} (x_1 - x_{1s}) : (x_2 - x_{2s}) : (x_3 - x_{3s}) &= \\ &= \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \kappa & l_2 & l_3 & l_1 & \kappa & l_3 & l_1 & l_2 & \kappa \\ 0 & m_2 & m_3 & m_1 & 0 & m_3 & m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & n_2 & n_3 & n_1 & 0 & n_3 & n_1 & n_2 & 0 \end{array} \right| = \\ &= (m_2 n_3 - m_3 n_2) : (m_3 n_1 - m_1 n_3) : (m_1 n_2 - m_2 n_1); \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_{1s}) : (x_2 - x_{2s}) : (x_3 - x_{3s}) &= [-0,4312 \cdot 0 - (-0,7071) \cdot 0,7925] : \\ &: [(-0,7071) \cdot 0,610 - 0,5605 \cdot 0] : [0,5605 \cdot 0,7925 - (-0,4312) \cdot 0,610] = \\ &= 1 : (-0,769) : 1,262 = (-1) : 0,769 : (-1,262). \end{aligned}$$

За умовою завдання рух має зупинитися, якщо будь-який із  $x_i$  досягає значення  $x_i = -1 \cup +1$ . Знайти точки перетину головної осі еліпсоїдів із шістьма гранями  $x_i = -1 \cup +1$  просто, якщо підставити їх значення у (5.24). Наприклад, за  $x_2 = +1$  маємо:

$$(x_1 - 0,467) : (x_2 - 0,467) : (x_3 - 0,563) = 1 : (-0,769) : 1,262;$$

$$x_1 = \frac{(1 - 0,467) \cdot 1}{-0,769} + 0,467 = -0,226; \quad x_3 = \frac{(1 - 0,467) \cdot 1,262}{-0,769} + 0,563 = -0,311.$$

Потім із шести граней вибираються ті, для яких виконується умова  $x_i \leq |1|$ . У даному разі це  $\{x_1 = -0,226, x_2 = +1, x_3 = -0,311\}$  та  $\{x_1 = 0,813, x_2 = 0,201, x_3 = +1\}$ . За рівнянням (5.23) визначаємо координати  $\{\tilde{X}_1 = -1,236, \tilde{X}_2 = 0, \tilde{X}_3 = 0\}$  та  $\{\tilde{X}_1 = 0,618, \tilde{X}_2 = 0, \tilde{X}_3 = 0\}$ , а за канонічною формою (5.16) - значення  $\hat{Y}_o$ . Для площини  $x_2 = +1 \hat{Y}_o = 121\%$ ; для площини  $x_3 = +1 \hat{Y}_o = 90\%$ , що значно менше, ніж  $\hat{Y}$  усередині факторного простору.

Слід відмітити, що канонічне перетворення поверхні не завжди є слушне. Воно є корисне для поверхонь типу гіперболічних параболоїдів, що мають сідлову точку, та нецентральных параболоїдів.

б) Ефективним може виявитися інший шлях - частинний випадок методу *невизначених множників Лагранжа*, коли пошук умовного максимуму ведеться за обмежень, що накладаються сферою  $\rho = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ ; цей метод називають *ридж-аналізом*.

в) Найпростішим у практичних завданнях є метод *дисоціативно-крокової* оптимізації. Кожний крок будується на основі аналізу коефіцієнтів моделі, яка для зручності записується у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{Y}_o &= 100 - 26x_1 + 18x_1x_2 + 8x_2x_3 - \\ &\quad - 26x_2 + 18x_2^2 + 8x_2x_3 - \\ &\quad - 30x_3 + 20x_3^2. \end{aligned}$$

Крок 1: оскільки всі  $b_{ii} > 0$ , то максимум міститься на межі експеримента за  $x_i = -1 \cup +1$ ; оскільки  $|b_{11}| > (|b_{12}| + |b_{13}|)$ , то вибір  $x_i = -1 \cup +1$  визначається знаком біля  $b_{11}$ , отже  $x_{1\max} = -1$ .

Крок 2:

$$\tilde{Y}_o\{x_1 = -1\} = 144 - 36x_2 + 18x_2^2 + 8x_2x_3 - 38x_3 + 20x_3^2.$$

Крок 3:  $|b_{22}| > |b_{23}|$  і  $x_{2\max} = -1$ .

Крок 4:

$$\tilde{Y}_o\{x_1 = x_2 = -1\} = 198 - 46x_3 + 20x_3^2.$$

Крок 5:  $|b_{33}| > |b_{23}|$  і  $x_{3\max} = -1$ .

Крок 6:

$$\tilde{Y}_o\{x_1 = x_2 = x_3 = -1\} = 264\%.$$

### Тип VI – керування за фіксованого $\tilde{Y}$

Необхідно оцінити всі можливі співвідношення між  $x_i$  у зоні експеримента для потрібного рівня  $Y_{\text{потр}} = \text{const}$  ( $Y_{\text{потр}}$  може бути нормативним рівнем якості об'єкта). У даному разі прийнято  $Y_{\text{потр}} = 150\%$  продуктивності праці.

*Розв'язання.* У трьохфакторній зоні розв'язок геометрично являє собою "стискання" просторової фігури за однією із осей  $x_i$ . Як наслідок, на площині із іншими осями  $x_j, x_k$  будуть нанесені ізолінії  $Y_{\text{потр}}$ , які відповідають перетинанню просторової фігури з площинами  $x_i = \text{const}$ , проведеними із кроком  $\Delta x_i$ . Нехай стикування здійснюється по осі  $x_3$ ,  $\Delta x_3 = 0,5$ . Тоді модель (5.7) записується як рівняння лінії другого порядку (еліпса), що змінює під впливом  $x_3$  за сталих інваріантів  $I_1$  та  $I_2$  і кута обертання  $\varphi$  координати центру  $x_{1s}$  і  $x_{2s}$ , а також величину головних діаметрів:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + b_1x_1 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \\ &\quad + b_2x_2 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_3x_3 + d_{33}x_3^2; \\ (b_0 + b_3x_3 + b_{33}x_3^2 - \hat{Y}) &+ (b_1 + b_{13}x_3)x_1 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \\ &\quad + (b_2 + b_{23}x_3)x_2 + b_{22}x_2^2 = 0; \\ (100 - 30x_3 + 20x_3^2 - 150) &+ (-26 + 8x_3)x_1 + 18x_1^2 + \\ &\quad + 10x_1x_2 + (-26 + 8x_3)x_2 + 18x_3^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

$$I_1 = b_{11} + b_{22} = 18 + 18 = 36; \quad (5.26)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & 0,5b_{12} \\ 0,5b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 18 \cdot 18 - 0,25 \cdot 10^2 = 299; \quad (5.27)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = b_{12} : (b_{11} - b_{22}) = 10 : 0 = \infty \rightarrow \varphi = 45^\circ; \quad (5.28)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{1s}\{x_3\} &= \begin{vmatrix} -0,5(b_1 + b_{13}x_3) & 0,5b_{12} \\ -0,5(b_2 + b_{23}x_3) & b_{22} \end{vmatrix} : \\ I_2 &= [0,25b_2b_{12} - 0,5b_1b_{22} + (0,25b_{23}b_{12} - 0,5b_{13}b_{22})] : \\ I_2 &= [0,25(-26) \cdot 10 - 0,5(-26)18 + (0,25 \cdot 8 \cdot 10 - 0,5 \cdot 8 \cdot 18)x_3] : \\ 299 &= 0,565 - 0,173x_3; \\ x_{2s}\{x_3\} &= [0,25b_1b_{12} - 0,5b_2b_{11} + (0,25b_{13}b_{12} - 0,5b_{23}b_{11})] : \\ I_2 &= 0,565 - 0,173x_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

За побудованими лініями  $x_3$  при  $\hat{Y}_{\text{потр}} = 150\%$  можна вибирати будь-яку комбінацію  $x_1, x_2, x_3$ , яка забезпечує  $\hat{Y}_{\text{потр}}$ , тобто вести керування за потрібного рівня виходу.

### Тип VII – мінімізація ресурсів $x_i$ за фіксованого $\hat{Y}$

Необхідно за фіксованого рівня якості об'єкта  $Y_{\text{потр}} = \text{const}$  виявити мінімальні витрати ресурсів  $\hat{x}_{i \min}\{Y_{\text{потр}}\}$  у таких варіантах:

- а) стабілізовані всі  $x_j$  (у даному завданні  $x_3 = -0,5$ ) крім двох ( $x_1$  і  $x_2$ ), один з яких ( $x_1$ ) має максимізуватися, а інший можна розходити сповна ( $x_2 = -1$ );
- б) стабілізовані всі  $x_j$  (у даному завданні  $x_2 = 0$  і  $x_3 = -0,5$ ) крім одного ( $x_1$ ), який мінімізується;
- в) всі  $x_i$  є змінюваними, суму яких потрібно мінімізувати.

#### Розв'язання.

а) Можна скористатися моделлю (5.25). Продовжуючи перетворення моделі (5.25) і залишаючи аргументом лише  $x_1$ , дістанемо квадратне рівняння (за повного розходування ресурсу  $x_2 = -1$ )

$$\begin{aligned} &(b_0 + b_2x_2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{23}x_2x_3 - \hat{Y}_{\text{потр}}) + \\ &+ (b_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)x_1 + b_{11}x_1^2 = 0; \\ &[100 - 26(-1) - 30(-0,5) + 18(-1)^2 + 20(-0,5)^2 + 8(-1)(-0,5) - 150] + \\ &+ [-26 + 10(-1) + 8(-0,5)]x_1 + 18x_1^2 = 18 - 40x_1 + 18x_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

корінь якого  $x_1 = 0,63$  (другий корінь  $x_1 = 1,87$  не має сенсу) дає мінімально можливі витрати ресурсу (за  $\hat{Y}_{\text{потр}} = 150\%$  витрати часу на "побут" можна довести до 3,15 г/тиж., якщо витрати на "адміністрування" зменшити на 5 г/тиж., а на "некваліфіковану працю" – на 2,5 г/тиж.).

б) Як і у попередньому разі можна знайти у загальному вигляді квадратичну модель (5.30), яка для даного завдання має такий вигляд:

$$-31 - 30x_1 + 18x_1^2 = 0 \quad (5.31)$$

із коренями  $x_1 = -0,72 \cup +2,39$ ,



в) Оскільки всі  $x_i$  є рівноцінні ( $\Delta X_i = \pm 0,5$  г/тиж.,  $X_{i0}$  – існуючі витрати часу в бюджеті наукового співробітника), то можна вважати  $x_1 = x_2 = x_3 = z_x$ . Якщо цю рівність підставити у модель (5.7), дістанемо квадратне рівняння

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_o &= b_0 + \left( \sum_{i=1}^3 b_i \right) z_x + \left( \sum_{i=1}^3 b_{ii} + \sum_{i < j} b_{ij} \right) z_x^2, \\ -50 - 82z_x + 89z_x^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

корені якого  $z_x = -0,43 \cup +1,43$ . Реальним є значення  $z_x = x_1 = x_2 = x_3 = -0,43$ , тобто зменшення витрат часу за кожним фактором на 2,15 г/тиж. Це дає загальну мінімальну суму  $\sum_{i=1}^3 x_{i \min} = -1,29$ , тобто зменшення непродуктивних витрат часу на 6,45 г/тиж. для збільшення продуктивності до  $\hat{Y}_o = 150\%$ .

#### Тип VIII – керування $\hat{Y}$ при двох змінюваних факторах

Необхідно побудувати діаграму регулювання для  $\hat{Y}$  при двох змінних і одному довільно фіксованому факторі  $\{x_3\}$ .

*Розв'язання.* Зафіксуємо  $x_3$  у двох екстремальних рівнях  $x_{3 \max}$  та  $x_{3 \min}$ . Дістанемо дві моделі (із завдань що вже вирішені, відомо, що  $x_{3 \max} = -1$  і  $x_{3 \min} = +0,563$ ):

$$\hat{Y}_o\{x_{3 \max} = -1\} = 150 - 34x_1 - 34x_2 + 18x_1^2 + 18x_2^2 + 10x_1x_2; \quad (5.33)$$

$$\hat{Y}_o\{x_{3 \max} = +0,563\} = 89,8 - 21,5x_1 - 21,5x_2 + 18x_1^2 + 18x_2^2 + 10x_1x_2. \quad (5.34)$$

Для моделі  $\hat{Y}\{x_{3 \min}\}$  можна розглядати ще більш загальний випадок, коли  $x_{3 \min}$  буде змінним і різним для кожного сполучення  $x_1$  і  $x_2$  (але для вирішуваного завдання такий випадок не має практичного сенсу, оскільки в цьому завданні слід було б шукати змінне  $\hat{Y}_o\{x_{3 \max}\}$ , але ж  $x_{3 \max}$  в усій зоні експеримента сталий і дорівнює +1).

Щоб знайти таке розв'язання, слід прирівняти до нуля частинну похідну за  $x_3$  і розв'язати рівняння відносно  $x_3$ :

$$\frac{\partial \hat{Y}_o}{\partial x_3} = -30 + 2 \cdot 30x_3 + 8x_1 + 8x_2 = 0; \quad (5.35)$$

$$x_{3 \min} = 0,75 - 0,20x_1 - 0,20x_2. \quad (5.36)$$

Якщо лінійну функцію (5.36) підставити у (5.7), дістанемо нову квадратичну модель

$$\hat{Y}_o\{x_{3 \min} = f(x_1, x_2)\} = 88,75 - 25,25x_1 + 17,9x_1^2 + 8,4x_1x_2 - 25,25x_2 + 17,9x_2^2. \quad (5.37)$$

#### Тип IX – керування $\hat{Y}$ при одному змінюваному факторі

Необхідно побудувати однофакторні моделі, які описують вплив кожного фактора на вихід  $\hat{Y}_o$ .

Розв'язання. Розглянемо модель "квазіоднофакторних" залежностей від  $x_i$  типу

$$\hat{W}_i = \hat{Y}_o\{x_j x_K\} - b_{0jK} = (b_i + \sum_{j=1}^K b_{ij} x_j) x_i + \dots x_i^2, \quad (5.38)$$

де  $b_{0jK}$  - вільний член, що відображує розташування  $x_j$  та  $x_K$  на деяких рівнях й який дорівнює

$$b_{0jK} = b_0 + \sum_{j=1}^K b_j x_j + \sum_{j=1}^K b_{jj} x_j^2 + \sum_{i \neq j < K} b_{jK} x_j x_K. \quad (5.39)$$

Слушним є вирішити завдання стабілізації  $x_j$  і  $x_K$  на рівнях:

- а)  $x_j \max(\min)$  і  $x_K \max(\min)$ ;
- б) зводити завдання до однофакторного завдяки введенню лінійних функцій  $x_{i\text{ext}} = f(x_j x_K)$ ;
- в) виконувати порівняльний аналіз однофакторних залежностей за моделлю (5.38), вважаючи функцією різницю  $\hat{Y}\{x_j x_K\} - b_{0jK}$ , з побудовою зон змінювання графіків під впливом  $x_j$  і  $x_K$ .

Розв'язання.

- а) При стабілізації  $x_j$  і  $x_K$  на максимальних рівнях (для всіх випадків  $x_{\max} = -1$ ) дістаємо такі залежності:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_o\{x_{2\max} = x_{3\max} = -1\} &= 202 - 34x_1 + 18x_1^2; \\ \hat{Y}_o\{x_{1\max} = x_{3\max} = -1\} &= 202 - 34x_2 + 18x_2^2; \\ \hat{Y}_o\{x_{1\max} = x_{2\max} = -1\} &= 198 - 46x_3 + 20x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

- б) При стабілізації  $x_j$  і  $x_K$  мінімальних рівнях  $x_{1\min} = x_{2\min} = 0,467$  і  $x_{3\min} = 0,563$  дістаємо такі залежності:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_o\{x_{2\min} = 0,467, x_{3\min} = 0,563\} &= 84,86 - 17,59x_1 + 18x_1^2; \\ \hat{Y}_o\{x_{1\min} = 0,467, x_{3\min} = 0,563\} &= 84,86 - 17,59x_2 + 18x_2^2; \\ \hat{Y}_o\{x_{1\min} = 0,467, x_{2\min} = 0,467\} &= 84,00 - 26,51x_3 + 20x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

- в) Розв'язання виконується у кілька етапів. Спочатку відшукуються для двох факторів залежність типу (5.37) і для неї лінійна керуюча модель типу (5.36). Потім знову береться частинна похідна  $\partial \hat{Y}_o / \partial x_j$  й обчислюється нова керуюча функція  $x_{j\min}\{x_{K\min}\}$ . При підстановці її у модель типу (5.37) дістанемо завершальну квазіоднофакторну залежність. Так, для моделі  $\hat{Y}_o\{x_{2\text{ext}}, x_{3\text{ext}}\} = f(x_1)$  можна скористатися знайденою раніше моделлю (5.37) та лінійним керуванням

$$\hat{Y}_o\{x_{3\text{ext}}\} = 88,75 - 25,25x_1 + 17,9x_1^2 + 8,4x_1x_2 - 25,25x_2 + 17,9x_2^2; \quad (5.42)$$

$$x_{3\text{ext}} = +0,75 - 0,20x_1 - 0,20x_1^2; \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \hat{Y}_o\{x_{\text{зext}}\}}{\partial x_2} = -25,25 + 2 \cdot 17,9x_2 + 8,4x_1 = 0; \quad x_{2\text{ext}} = 0,705 - 0,235x_1. \quad (5.44)$$

Після підставлення (5.44) у (5.42) та (5.43) дістаємо

$$\hat{Y}_o\{x_{2\text{ext}}, x_{3\text{ext}}\} = 79,85 - 19,33x_1 + 17,8x_1^2; \quad (5.45)$$

$$x_{3\text{ext}} = 0,564 - 0,153x_1. \quad (5.46)$$

г) Для порівнювального аналізу впливу кожного фактора на  $\hat{Y}_o$  можна використати залежності:

$$\left. \begin{aligned} \hat{W}_1 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 23} = -(-26 + 10x_2 + 8x_3)x_1 + 18x_1^2; \\ \hat{W}_2 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 13} = (-26 + 10x_1 + 8x_3)x_1 + 18x_1^2; \\ \hat{W}_3 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 12} = (-30 + 8x_1 + 8x_2)x_3 + 20x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Оскільки  $x_j$  та  $x_K$  змінюються в інтервалі від -1 до +1, то слушно переписати моделі (5.47) із максимальними інтервальними межами для лінійних коефіцієнтів та зоною екстремуму:

$$\left. \begin{aligned} \hat{W}'_1 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 23} = (-26 \pm 18)x_1 + 18x_1^2 \text{ за } 0,222 \leq x_{1\text{ext}} \leq 1,222; \\ \hat{W}'_2 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 13} = (-26 \pm 18)x_2 + 18x_2^2 \text{ за } 0,222 \leq x_{2\text{ext}} \leq 1,222; \\ \hat{W}'_3 &= \hat{Y}_o - b_{0\ 12} = (-30 \pm 16)x_3 + 20x_3^2 \text{ за } 0,350 \leq x_{3\text{ext}} \leq 1,115. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

## 5.2. Загальні принципи оцінки значення виходу, що передбачається

Статистична модель поведінки системи, що вивчається, будується у формі поліному другого степеня від  $K$  факторів. Істинна залежність є взаємозв'язок між координатами точки  $x_i$  у  $K$ -факторному просторі та умовним математичним сподіванням функції (виходом  $Y$ ) у даній точці  $\eta\{x\} = \mathcal{M}\{Y/x\}$ . У матричній формі істинна модель записується у вигляді

$$[\eta] = [x][\beta], \quad (5.49)$$

де  $[\eta]$  – вектор математичного сподівання параметра виходу розмірності  $(N \times 1)$ ;  $[\beta]$  – вектор істинних коефіцієнтів регресії розмірності  $(K \times 1)$ ;  $[x]$  – матриця значень факторів розмірності  $(N \times K)$  (у їх число входить і одна “фіктивна” змінна  $x_0$ ):

$$\eta = [\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_N]^T; \quad (5.50)$$

$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_k, \dots, \beta_K]^T; \quad (5.51)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{K1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{1k} & \dots & x_{Kk} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{1N} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Після обробки результатів експеримента або даних спостереження за методом найменших квадратів (МНК) у схемі регресійного аналізу знаходять оцінку умовного математичного сподівання  $\hat{\eta}\{x\} = \hat{Y}$  (випадкова нормально розподілена величина) від  $K$  факторів, тобто

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_i b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j \quad (5.53)$$

або

$$\hat{Y} = \mathbf{x}\mathbf{B}, \quad (5.54)$$

де  $b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}$  – оцінки коефіцієнтів регресії, які є випадковими (нормально розподілені) величинами;  $\hat{Y}$  – вектор вирахованих значень параметрів виходу розмірності  $N \times 1$ , що відповідає (5.50) при заміні  $\eta_u$  на  $\hat{y}_u$ ;  $\mathbf{B}$  – вектор оцінок коефіцієнтів регресії розмірності  $K \times 1$ , що відповідає (5.51) при заміні  $\beta_i$  на  $b_i$ .

За МНК складається система нормальних рівнянь

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{B} = \mathbf{x}^T \mathbf{Y}, \quad (5.55)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{Y} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{x}^T \mathbf{Y}, \quad (5.56)$$

де  $\mathbf{Y}$  – вектор експериментальних значень виходу розмірності  $N \times 1$ , який відповідає (5.50) при заміні  $\eta_u$  на  $y_u$ ;  $\mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  – нормована за кількістю дослідів  $N$  інформаційна матриця плану, що складається із відомих сум у лівій частині нормальних рівнянь, розмірності  $K \times K$ ;  $\mathbf{C} = 1/N \mathbf{F}^{-1}$  – коваріаційна матриця плану розмірності  $K \times K$ . Коваріаційна матриця задає матрицю дисперсій-коваріацій вектора оцінок коефіцієнтів  $\mathbf{B}$ , яка не залежить від вектора  $\mathbf{Y}$ . Діагональні елементи цієї матриці задають значення дисперсій оцінок коефіцієнтів регресії  $s^2\{b_i\} = c_{ii} s_e^2$ , а позадіагональні елементи  $c_{ij}$  – коваріації коефіцієнтів  $b_i$  та  $b_j$ , які дозволяють визначити коефіцієнт кореляції  $\rho\{b_i b_j\}$  між  $b_i$  та  $b_j$ :

$$\rho\{b_i b_j\} = \frac{\text{Cov}\{b_i b_j\}}{\sqrt{\sigma^2\{b_i\} \cdot \sigma^2\{b_j\}}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}. \quad (5.57)$$

Розрахункову модель (5.54) із урахуванням (5.56) можна переписати у вигляді

$$\hat{Y} = \mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T \mathbf{Y}. \quad (5.58)$$

Якщо вона використовується для передбачення параметра вихода  $\hat{Y}$  у точці  $\mathbf{x}_p$ , координати якої задаються деяким рядком плану, то передбачене значення  $\hat{Y}_p$  визначається як

$$\hat{Y}_p = \mathbf{x}_p^T \mathbf{C} \mathbf{x}_p^T \mathbf{Y}. \quad (5.59)$$

Оцінка дисперсії передбаченого значення  $s^2\{\hat{Y}\}$  для моделі (5.53) відшукується відповідно до загальної теорії похибок вимірювань за правилом, що має назву “закон

додавання похибок", згідно з яким дисперсія  $\sigma^2\{z\}$  опосередкованого вимірювання величини  $z$ , що зв'язана із  $w_i$  залежністю  $z = f(w_i)$ , визначається як

$$\begin{aligned} \sigma^2\{z\} &= \sum_i \left( \frac{\partial z}{\partial w_i} \right)^2 \sigma^2\{w_i\} + 2 \sum_{i < j} \rho\{w_i w_j\} \left( \frac{\partial z}{\partial w_i} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial w_j} \right) \sigma\{w_i\} \sigma\{w_j\} = \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial z}{\partial w_i} \right)^2 \sigma^2\{w_i\} + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}\{w_i w_j\} \left( \frac{\partial z}{\partial w_i} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial w_j} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.60)$$

де  $\sigma\{w_i\}$  – істинна середньоквадратична похибка визначення кожного аргумента  $w_i$ ;  $\rho\{w_i w_j\}$  – коефіцієнти кореляції між всіма парами випадкових величин  $w_i$  та  $w_j$ .

Якщо формулу (5.60) застосувати до моделі (5.53), значення вибіркової дисперсії можна вирахувати як

$$\begin{aligned} s^2\{\hat{Y}\} &= s^2\{b_0\} + \sum_i s^2\{b_i\} x_i^2 + \sum_i s^2\{b_{ii}\} x_i^4 + \sum_{i < j} s^2\{b_{ij}\} x_i^2 x_j^2 + \\ &+ 2 \sum_i \text{cov}\{b_0 b_i\} x_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}\{b_0 b_{ij}\} x_i x_j + 2 \sum_{i < j} \text{cov}\{b_{ii} b_{jj}\} x_i^2 x_j^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Найрозповсюдженішими є *симетричні плани* другого порядку Бокса ( $B_i$ ), *ротатабельні центральні композиційні плани* (РЦКП) та інші, які мають блочно-діагональну структуру матриці:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

де  $\mathbf{D}_1$  – підматриці для оцінювання нульового і квадратичних ефектів із позадіагональними елементами;  $\mathbf{D}_2$  – діагональна підматриця для оцінювання лінійних ефектів.

Блочно-діагональна структура матриці  $\mathbf{D}$  забезпечує рівність дисперсій для коефіцієнтів регресії одного порядку і нульову кореляцію між деякими оцінками

$$\text{cov}\{b_i b_j\} = \text{cov}\{b_i b_{ij}\} = \text{cov}\{b_{ij} b_{iK}\} = 0,$$

що дозволяє спростити вираз (5.61):

$$\begin{aligned} s^2\{\hat{Y}\} &= s^2\{b_0\} + s^2\{b_i\} \sum_i x_i^2 + s^2\{b_{ii}\} \sum_i x_i^4 + s^2\{b_{ij}\} \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2 + \\ &+ 2 \text{cov}\{b_0 b_{ii}\} \sum_i x_i + 2 \text{cov}\{b_{ii} b_{jj}\} \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Із аналізу залежності (5.63) випливає важливий висновок – оцінка дисперсій передбачення  $s^2\{\hat{Y}\}$  залежить від трьох параметрів: від *точності експеримента* або спостережень, яка характеризується випадковою похибкою  $s_0$ , від *координат точки*

передбачення, що визначаються розташуванням факторів  $x_i$ , та від властивостей плану експеримента, які відображуються коефіцієнтами коваріаційної матриці, й отже, від координат точок, в яких ставився експеримент.

Для ортогональних планів повного факторного експеримента (ПФЕ) та дробового факторного експеримента (ДФЕ), які мають діагональну коваріаційну матрицю  $D$  й, отже, нульову кореляцію між усіма коефіцієнтами регресії та рівність

$$s^2\{b_0\} = s^2\{b_i\} = s^2\{b_{ii}\} = s_0^2/N,$$

із (5.63) знаходимо

$$s^2\{\hat{Y}\} = s_0^2/N(1 + \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2). \quad (5.64)$$

Якщо при цьому розглядається *лінійна*  $K$ -факторна модель (всі  $\beta_{ij} = 0$ ),  $s^2\{\hat{Y}\}$  є пропорційна квадрату радіуса  $\rho$  гіперсфери із центром у початку координат  $x_i$ , а інформація, яка міститься у рівнянні регресії, рівномірно розташована по сфері із радіусом  $\rho$ :

$$s^2\{\hat{Y}\} = s_0^2/N(1 + \sum_i x_i^2) = s_0^2/N(1 + \rho^2). \quad (5.65)$$

Це означає відповідність моделі

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_i b_i x_i$$

критерію *ротатабельності*, що вказує на незалежність точності передбачення від його напрямку при русі від центра експеримента.

### 5.3. Принципи пошуку компромісного рішення

У значному класі техніко-економічних завдань дослідник вимушений розглядати кілька критеріїв якості роботи об'єкта (наприклад, мінімізація в'язкості технологічної суміші, усадки при формування виробу та його собівартості, максимізація міцності готового матеріалу, довгочасності виробу в агресивному середовищі та продуктивності агрегата), на які впливають фактори  $x_i$ .

Отже, на початковому етапі роботи у завданні присутня скінченна множина критеріїв якості  $R_r$ . Самий простий, але не з точки зору реалізації шлях полягає у побудові  $r$  поліноміальних моделей від  $K$  факторів та розрахунку у табличній формі (див. типи завдань I та II) значень  $\hat{R}_r$  із кроком квантування  $\Delta X_i$ . Тож потрібно обрати інший шлях пошуку компромісних рішень, що складається із кількох кроків.

*Крок 1* містить аналіз співвідношень між критеріями  $R_r$  на основі *фундаментальних* закономірностей розвитку об'єкта. Однією з таких можливостей є застосування теорії подібності в інженерних та економічних завданнях. Як наслідок, кількість критеріїв може скоротитися на число  $r'$ :  $q = r - r'$ .

*Крок 2* полягає в *експериментальному* визначенні  $q$  критеріїв якості у кожній  $u$ -й точці плану експеримента. Як результат буде знайдено  $N$  комплексів по  $q$  випадкових величин у кожному. Цей крок є обов'язковий.

Крок 3 включає кореляційний аналіз  $q$  випадкових величин, які утворюють  $N$  комплексів. Розраховуються оцінки парних коефіцієнтів кореляції  $r(R_{qi}, R_{qj})$  і визначаються рівні їхньої значимості  $\alpha$  за числа ступенів свободи  $f_r = N - 2$ . Потім будується низка графів взаємозв'язку між критеріями  $R_q$  за різних рівнях значимості, що дорівнюють 0,001, або 0,01, або 0,05. Якщо якийсь критерій виявляється тісно зв'язаним (рівень *alpha* задається дослідником із урахуванням небезпеки техніко-економічних збитків, які обумовлюються помилковим відхиленням вірної гіпотези  $H_0$ ) зі всіма іншими, то він може бути використаний для оптимізації всіх  $R_q$  критеріїв якості об'єкта. Але така сприятлива ситуація із одним критерієм, що залишається, виникає дуже рідко. Але за рахунок цих дій можна все ж скоротити число критеріїв на  $q'$  і зменшити кількість критеріїв до  $n = q - q'$ . Цей крок є також обов'язковий.

Крок 4 містить побудову для  $n$  критеріїв узагальненого параметра оптимізації. Розв'язання такого завдання є досить складним. У плануванні експеримента досить популярним для побудови узагальненого критерія є функція бажаності. Узагальнена функція бажаності  $H$  може розраховуватися як

$$H = \sqrt{n} \prod_{j=1}^n d_j = \sqrt{n} \prod_{j=1}^n \exp[-\exp(-Y'_j)], \quad (5.66)$$

де  $Y'_n$  – кодовані значення критеріїв якості  $R_n$ , що відповідають експертним оцінкам від “дуже погано” до “дуже гарно”.

Крок 5 використовується замість кроку 4. Це засіб пошуку компромісного рішення за кількома критеріями якості, який має назву “плезіооптимальної оптимізації” (від грецького “plesios”, що означає “близький”) факторів й який складається з кількох етапів:

5а) будується  $n$  поліноміальних моделей для  $R_n$  критеріїв якості залежно від  $K$  факторів;

5б) для кожної із  $n$  моделей відшукуються координати оптимуму  $\{x_{1\text{opt}}, x_{2\text{opt}}, \dots, x_{k\text{opt}}\}$  й за необхідності, конкуруючі координати точок, що відрізняються від  $\hat{R}_{\text{opt}}$  на величину менше за  $t \cdot s\{\hat{R}_{\text{opt}}\}$ ;

5в) складається матриця координат індивідуальних оптимумів розмірності  $K \times n$ :

$$[x_{i\text{opt}/n}] = \begin{bmatrix} x_{1\text{opt}/1} & x_{2\text{opt}/1} & \dots & x_{k\text{opt}/1} \\ x_{1\text{opt}/2} & x_{2\text{opt}/2} & \dots & x_{k\text{opt}/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1\text{opt}/n} & x_{2\text{opt}/n} & \dots & x_{k\text{opt}/n} \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

за якою відшукується стовпець із співпадаючими значеннями

$$x_{i\text{opt}/1} = x_{i\text{opt}/2} = \dots = x_{i\text{opt}/n}. \quad (5.68)$$

Якщо в моделі кроку 5а) підставити єдине значення  $x_{i\text{opt}}$ , розмірність всіх моделей скоротиться на одиницю;

5г) кроки 5б) та 5в) циклічно повторюються доти, доки знайдеться задовільне рішення за кроком 5в), після чого будуються графічні образи  $n$  моделей від  $(K - \kappa)$  факторів ( $\kappa$  – кількість циклів із кроком 5а).

Далеко не завжди вдається знайти точну рівність (5.68). У цих випадках слід:  
а) проаналізувати координати точок, що конкурують, й які забезпечують

$$R = \hat{R}_{\text{opt}} - t \cdot s\{\hat{R}_{\text{opt}}\};$$

б) проаналізувати координати оптимуму урахуванням довірчих інтервалів  $\Delta x_{i\text{opt}}/n$ :

$$\Delta\{x_{1p}\} = \frac{t(\alpha/2)s_e}{b_1(\alpha)} \sqrt{\frac{s^2(\hat{Y})}{s_e^2} - \frac{b_1(\alpha)}{b_1}} + 1; \quad (5.69)$$

в) забезпечити точне виконання рівності (5.68) для частини моделей із урахуванням пріоритетів критеріїв якості, вже досягнутого рівня якості за кожним із критеріїв  $R_q$ , а також витрат, що виникають від заміни індивідуальних оптимумів (5.67) загальними плезіооптимальними рівнями. Суттєвою перевагою методу плезіооптимальної стабілізації факторів є можливість слідкування за ходом пошуку компромісного рішення після кожного циклу за всіма  $n$  критеріями якості об'єкта. При цьому не стається таке часте застосування узагальнених критеріїв зменшення одного з частинних критеріїв за рахунок підсиленого зростання іншого.

**Приклад.** На одному із етапів комплексної роботи з оптимізації якості продукції змінювались п'ять факторів: сумарна доля двох домішок "Б" і "В" –  $X_6 = 12,5 \pm 7,5\%$ , співвідношення між домішками "В" і "Б" –  $X_7 = (5 \pm 4) : 1$ , час витримання розплаву під час перегріву –  $X_8 = 15 \pm 10$  хв., час витримки зразка у пресформі –  $X_9 = 10 \pm 5$  хв. і температура термообробки зразка у пресформі –  $X_{10} = 130 \pm 65^\circ\text{C}$ .

У склад шести критеріїв якості соляного відливання входили граничні зусилля руйнування стандартних зразків на розрив  $P_p$  та стискання  $P_c$ . План експерименту та результати визначення  $P_c(10^2\text{H})$  і  $P_p(0,5\text{H})$  наведено у табл. Там же наведено розрахункові величини для оцінювання коефіцієнта кореляції  $r\{P_c P_p\}$  для двох випадкових величин  $Y_1 = P_p$  і  $Y_2 = P_c$  ( $\bar{Y}_1 = 14,4$ ,  $\bar{Y}_2 = 4,51$ ):

$$r(Y_1 Y_2) = \frac{\sum_u (Y_{1u} - \bar{Y}_1)(Y_{2u} - \bar{Y}_2)}{\sqrt{(Y_{1u} - \bar{Y}_1)^2 \cdot (Y_{2u} - \bar{Y}_2)^2}} = \frac{31,01}{\sqrt{33,06 \cdot 402,02}} = 0,269. \quad (5.70)$$

Для  $f_r = N - 2 = 25$  додатна межа довірчого інтервалу для істинного значення коефіцієнта кореляції  $\rho(Y_1 Y_2)$  у разі відсутності кореляційного зв'язку (довірча ймовірність  $P = 1 - 2\alpha$ ) при  $\alpha = 0,05$  складає 0,323. Оскільки  $r(Y_1 Y_2) = 0,269$  є нижчим за це значення, то треба відмітити, що зв'язок між  $P_c$  і  $P_p$  не виявлено і заміна одного критерія на інший неможлива.

За результатами експеримента отримано дві адекватні моделі зі значимими коефіцієнтами ( $\alpha = 0,10$ ):

$$P_c = 4,84 + 0,48x_6 - 0,23x_7 - 0,10x_8 + 0,62x_9 - 0,25x_{10} - 0,55x_6^2 + 1,12x_7^2 - 1,06x_{10}^2 + x_6(0,12x_7 + 0,13x_8 + 0,16x_9 + 0,25x_{10}) + 0,16x_7x_9 - 0,31x_7x_{10} - 0,58x_8x_9 + 0,23x_8x_{10}; \quad (5.71)$$

$$P_p = 17,4 + 1,4x_7 + 0,3x_8 + 0,8x_9 - 1,0x_{10} - 1,7x_6^2 - 4,4x_7^2 + 2,3x_8^2 + 0,8x_9^2 - 1,4x_{10}^2 -$$



$$-0,4x_6x_7 - 0,3x_8x_{10} + 1,2x_7x_8 - 0,8x_7x_{10} - 1,8x_8x_9 - 1,7x_9x_{10}. \quad (5.72)$$

За цими моделями знайдено координати індивідуальних оптимумів (максимуму міцності в зоні експеримента):

$$P_c = \{x_6 = 0,504, x_7 = +1, x_8 = -1, x_9 = +1, x_{10} = -0,307\}; \quad (5.73)$$

$$P_p = \{x_6 = 0,072, x_7 = 0,110, x_8 = -1, x_9 = +1, x_{10} = -0,964\}; \quad (5.74)$$

Із зіставлення цих координат видно, що значення  $x_8 \max = -1$  і  $x_9 \max = +1$  в обох випадках співпадають. При підстановці цих значень у моделі (5.71) і (5.72) дістаємо

$$P_c\{x_8, x_9\}_{\max} = 6,14 + 0,51x_6 - 0,07x_7 - 0,48x_{10} - \\ -0,55x_6^2 + 1,12x_7^2 - 1,06x_{10}^2 + 0,12x_6x_7 + 0,25x_6x_{10} - 0,31x_7x_{10}; \quad (5.75)$$

$$P_p\{x_8, x_9\}_{\max} = 22,8 + 0,2x_7 - 2,7x_{10} - \\ -1,7x_6^2 - 4,4x_7^2 - 1,4x_{10}^2 - 0,4x_6x_7 - 0,3x_6x_{10} - 0,8x_7x_{10}. \quad (5.76)$$

Можна розрахувати приріст міцності за рахунок стабілізації  $x_8 \max$  і  $x_9 \max$ , для чого із (5.75) віднімемо (5.71), а із (5.76) віднімемо (5.72):

$$\Delta P_c\{x_8, x_9\}_{\max} = 1,30 + 0,03x_6 + 0,16x_7 + 0,10x_8 - 0,62x_9 - 0,23x_{10} - \\ -0,13x_6x_8 - 0,16x_7x_9 - 0,16x_7x_9 + 0,58x_8x_9 - 0,23x_8x_{10}. \quad (5.77)$$

$$\Delta P_p\{x_8, x_9\}_{\max} = 5,4 - 1,2x_7 - 0,3x_8 - 0,8x_9 - 1,7x_{10} - \\ -2,3x_6^2 - 0,8x_9^2 + 1,2x_7x_8 + 1,8x_8x_9 + 1,7x_9x_{10}. \quad (5.78)$$

Для аналізу впливу стабілізації деяких факторів на оптимальних рівнях на величину оцінки коефіцієнта кореляції  $r(Y_1Y_2)$  досить до експериментальних значень  $y_u$  додати прирощення (5.77) або (5.78) із урахуванням значень  $x_i$  у кожному рядку плану.

#### 5.4. Оперативне керування за поліноміальною моделлю

Більшість рекомендацій математичної теорії експеримента щодо планування дослідів для здобування поліноміальної статистичної моделі стосуються так званого "пілотного" об'єкта, для якого рівні факторів  $x_i$  можуть вільно варіюватися дослідником в усьому діапазоні існування від  $X_{i \min}$  до  $X_{i \max}$ . Але у виробничих умовах не всі фактори є рівноцінні за своєю техніко-економічною сутністю. Одна частина із них за вимогами інженера або економіста може точно встановлюватися на будь-якому рівні у діапазоні існування факторів (температура термообробки продукта, концентрація хімічних домішків-регуляторів, швидкість перемішування тощо). Інша частина – лише точно (в межах точності контролю в даній системі) контролюється в умовах виробництва (чистота вхідної сировини, температура в печу, ступінь зносу робочих органів машин тощо). У зв'язку з цим при вирішенні деяких завдань слушно умовно виділити формули:  $z_u$  – "вільно" стабілізуються на будь-яких рівнях, зокрема оптимальних (їм у поліноміальній моделі будуть відповідати коефіцієнти регресії  $a_u$  замість  $b_i$ ) у кількості  $K_1$ ;  $x_i$  – "обмежено" регульовані (їм відповідають, як і раніше, оцінки  $b_i$ ) у кількості  $K_2$ .

Поліноміальна модель (5.1) тепер запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \eta\{Y\} = & \beta_0 + \sum_{u=1}^{K_1} \alpha_u z_u + \sum_{u=1}^{K_1} \alpha_{uu} z_u^2 + \sum_{u<w} \alpha_{uw} z_u z_w + \\ & + \sum_{i=1}^{K_2} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{K_2} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum \gamma_{iu} x_i z_u, \end{aligned} \quad (5.79)$$

а модель (5.49) як

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & b_0 + \sum_{u=1}^{K_1} a_u z_u + \sum_{u=1}^{K_1} a_{uu} z_u^2 + \sum_{u<w} a_{uw} z_u z_w + \\ & + \sum_{i=1}^{K_2} b_i x_i + \sum_{i=1}^{K_2} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum c_{iu} x_i z_u, \end{aligned} \quad (5.80)$$

де  $\gamma_{iu}$  і  $c_{iu}$  – істинний коефіцієнт регресії та його “оцінка” для взаємодії “вільних” і “обмежених” факторів.

Якщо фактори, що “вільно” стабілізуються, можуть бути на будь-якому рівні, то логічно встановлювати їх на оптимальному рівні для кожної комбінації  $x_i, \dots, x_j$  (він може бути заданий числом  $z_u \text{ opt}$  або функцією  $z_u \text{ opt} = f(x_i, \dots, x_j)$ ), внаслідок чого буде отримана модель у  $K_2$ -вимірному факторному просторі

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & b_0 + \left( \sum_{u=1}^{K_1} a_u z_u \text{ opt} + \sum_{u=1}^{K_1} a_{uu} z_u^2 \text{ opt} + \sum_{u<w} a_{uw} z_u \text{ opt} z_w \text{ opt} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{K_2} b_i x_i + \sum_{i=1}^{K_2} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum c_{iu} x_i z_u \text{ opt} = \\ = & b_0 + \sum_{i=1}^{K_2} b_i x_i + \sum_{i=1}^{K_2} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \Delta \hat{Y}\{z_u \text{ opt}\}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

де

$$\Delta \hat{Y}\{z_u \text{ opt}\} = \sum_{u=1}^{K_1} a_u z_u \text{ opt} + \sum_{u=1}^{K_1} a_{uu} z_u^2 \text{ opt} + \sum_{u<w} a_{uw} z_u \text{ opt} z_w \text{ opt} + \sum c_{iu} x_i z_u, \quad (5.82)$$

Функція  $\Delta \hat{Y}\{z_u \text{ opt}\}$ , що визначена як приріст виходу  $\hat{Y}$  за рахунок керування факторами на оптимальному рівні, змінює значення  $b_0$  і  $b_i$  у моделі (5.80), якщо  $z_u \text{ opt}$  не залежить від  $x_i$  (межові умови  $|z_u \text{ opt}| = 1$ ). Крім того, вона змінює значення  $b_{ii}$  і  $b_{ij}$ , якщо  $z_u \text{ opt}$  – лінійна функція від  $x_i$ .

Комплекс правил і алгоритмів для розв’язання завдань будь-якої розмірності  $K = K_1 + K_2$  даже при  $K_2 \leq 2$  побудувати не просто, але принцип їхнього розв’язання

прояснюється вже при аналізі можливих рішень трьохфакторної моделі із двома "вільними" факторами  $z_1, z_2$  та одним "обмеженим"  $-x_3$ :

$$\hat{Y} = b_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_{11} z_1^2 + a_{22} z_2^2 + a_{12} z_1 z_2 + b_2 x_3 + b_{33} x_3^2 + c_{13} z_1 x_3 + c_{23} z_2 x_3. \quad (5.83)$$

Варіанти рішень будуються залежно від значень  $a_i$  і  $a_{ii}$ , а також напрямку змінування  $\hat{Y} \rightarrow \max$ .

**Варіант I.** Якщо  $a_{11} \geq 0$  і  $a_{22} \geq 0$ , то  $\hat{Y}_{\max}$  міститься тільки на межі  $|z_1| = |z_2| = 1$ , тому досить:

- розрахувати чотири моделі прирошення при підстановці сполучень  $z_i$ :  $z_1 = z_2 = +1$ ,  $z_1 = +1, z_2 = -1$ ;  $z_1 = -1, z_2 = +1$ ;  $z_1 = z_2 = -1$ ;

- побудувати на осі  $|x_3| \leq 1$  чотири прямі й відібрати ті  $\hat{Y}$ , які дають максимальний приріст у деякій області  $x_3$ ; межі цих областей визначаються з рівності типу

$$a_1 + a_2 + a_{12} + (c_{13} + c_{23})x_3 = a_1 - a_2 - a_{12} + (c_{13} - c_{23})x_3; \quad x_3 = -(a_2 + a_{12})/c_{23}, \quad (5.84)$$

побудованої для точки перетину

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1, z_2 = +1\} = \Delta \hat{Y}\{z_1 = +1, z_2 = -1\}.$$

*Приклад.* За моделлю

$$\hat{Y} = 100 + 20z_1 + 20z_1^2 + 30z_1 z_2 + 20z_1 z_3 - 30z_2 + 110z_2^2 - 50z_2 x_3 - 50x_3^2 \quad (5.85)$$

побудувати графік і знайти  $x_3 \min$  для  $\hat{Y} = 150$ .

Оскільки  $a_{11} > 0$  і  $a_{22} > 0$ , то

$$\Delta \hat{Y}\{++\} = (20 - 30 + 30) + (20 - 50)x_3 = 20 - 30x_3;$$

$$\Delta \hat{Y}\{+-\} = (20 + 30 - 30) + (20 + 50)x_3 = 20 + 70x_3;$$

$$\Delta \hat{Y}\{-+\} = (-20 - 30 - 30) + (-20 - 50)x_3 = -80 - 70x_3;$$

$$\Delta \hat{Y}\{--\} = (-20 + 30 + 30) + (-20 + 50)x_3 = 40 + 30x_3.$$

Побудова цих прямих на площині та аналіз графіка показує, що кращими є прирошення  $\Delta \hat{Y}\{++\}$  та  $\Delta \hat{Y}\{+-\}$ , ці прямі перетинаються у точці  $x_3' = -0,333$ , і прирошення  $\Delta \hat{Y}\{+-\}$  та  $\Delta \hat{Y}\{-+\}$ ,  $x_3'' = +0,5$ .

Отже, дістаємо три параболічні функції виходу:

1) за  $-1 \leq x_3 \leq -0,333$  і  $z_1 = z_2 = +1$

$$\hat{Y} = 100 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot x_3 - 30 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 - 50 \cdot 1 x_3 - 50 x_3^2 = 150 - 30 x_3 - 50 x_3^2;$$

2) за  $-0,333 \leq x_3 \leq +0,5$  і  $z_1 = z_2 = -1$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 100 + 20 \cdot (-1) + 20 \cdot (-1)^2 + 30 \cdot (-1) \cdot (-1) + 20(-1)x_3 - 30(-1) + 10(-1)^2 - 50(-1)x_3 - 50x_3^2 = \\ &= 170 + 30x_3 - 50x_3^2; \end{aligned}$$

3) за  $+0,5 \leq x_3 \leq 1$  і  $z_1 = +1, z_2 = -1$

$$\hat{Y} = 100 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 x_3 - 30(-1) + 10(-1)^2 - 50(-1)x_3 - 50x_3^2 =$$

$$= 150 + 70x_3 - 50x_3^2.$$

Побудова цих парабол як функцій від  $x_3$  показує, що для забезпечення  $\hat{Y} = 150$  необхідно, щоб  $z_1 = z_2 = +1$ ,  $x_3 = 30/50$ ,  $x_3 = -0,6$ .

**Варіант II.** Якщо  $a_{11} \geq 0$  і  $a_{22} < 0$ , то  $\hat{Y}_{\max}$  міститься на межі  $|z_1| = 1$  при  $z_2 \text{ opt} = f(x_3)$ .

Необхідно:

- вирахувати дві моделі прирощення при  $z_1 = -1$  і  $z_1 = +1$ :

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = -1\} = (a_{11} - a_1 - c_{13}x_3) + a_2z_2 + a_{22}z_2^2 - a_{12}z_2 + c_{23}z_2x_3; \quad (5.86)$$

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1\} = (a_{11} + a_1 + c_{13}x_3) + a_2z_2 + a_{22}z_2^2 + a_{12}z_2 + c_{23}z_2x_3; \quad (5.87)$$

- визначити оптимальні керування  $z_2 \text{ opt} = f(x_3)$ :

$$z_2 \text{ opt}\{z_1 = -1\} = -0,5a_{22}^{-1}(a_2 - a_{12} + c_{23}x_3); \quad (5.88)$$

$$z_2 \text{ opt}\{z_1 = +1\} = -0,5a_{22}^{-1}(a_2 + a_{12} + c_{23}x_3); \quad (5.89)$$

- розрахувати моделі прирощення:

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = -1, z_2 \text{ opt} = f(x_3)\} = a_{11} - a_1 - c_{13}x_3 - 0,25a_{22}^{-1}(a_2 - a_{12} + c_{23}x_3)^2; \quad (5.90)$$

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1, z_2 \text{ opt} = f(x_3)\} = a_{11} + a_1 + c_{13}x_3 - 0,25a_{22}^{-1}(a_2 + a_{12} + c_{23}x_3)^2 \quad (5.91)$$

для зони, де  $|z_2 \text{ opt}| < 1$ , і модель

$$\Delta \hat{Y}\{|z_1| = 1, |z_2| = 1\} = a_{11} + [\pm a_1 \pm a_2 \pm (\pm a_{12})] + (\pm c_{13} \pm c_{23})x_3 \quad (5.92)$$

для зони, де  $|z_2 \text{ opt}| > 1$ . У разі, коли  $|z_2 \text{ opt}| = 1$ , використовуються формули варіанта I.

*Приклад.* Для заданої моделі

$$\hat{Y} = 105 + 5z_1^2 + 10z_1z_2 - 15z_1x_3 + 10z_2 - 10z_2^2 - 20z_2x_3 + 30x_3 - 10x_3^2 \quad (5.93)$$

побудувати графік регулювання і знайти  $x_3 \text{ min}$  для  $\hat{Y} = 130$ .

Оскільки  $a_{11} > 0$  і  $a_{22} < 0$ , то

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = -1\} = 5 - 10z_2^2 + 15x_3 - 20z_2x_3; \quad (5.94)$$

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1\} = 5 + 20z_2 - 10z_2^2 - 15x_3 - 20z_2x_3 \quad (5.95)$$

мають змінні вигляду

$$z_2 \text{ opt}\{z_1 = -1\} = -x_3; \quad z_2 \text{ opt}\{z_1 = +1\} = 1 - x_3. \quad (5.96)$$

Після врахування  $z_2 \text{ opt} = f(x_3)$  дістанемо моделі приросту:

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = -1, z_2 = -x_3\} = 5 + 15x_3 + 10x_3^2; \quad (5.97)$$

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1, z_2 = 1 - x_3\} = 15 - 35x_3 + 10x_3^2 \quad (5.98)$$

із точкою перетину  $x'_3$ , яка вираховується за співвідношенням

$$5 + 15x_3 + 10x_3^2 = 15 - 35x_3 + 10x_3^2; \quad x'_3 = 0, 2.$$

Але для моделі (5.98) співвідношення  $z_2 \text{ opt} \leq 1$  виконується тільки для точки  $x_3^u = 0 \rightarrow z_2 = +1$ . Отже, необхідно за (5.95) знайти ще одну модель

$$\Delta \hat{Y}\{z_1 = +1, z_2 = +1\} = 5 + 20 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 - 15x_3 - 20 \cdot 1 \cdot x_3 = 15 - 35x_3. \quad (5.99)$$

Зрештою маємо три функції

$$\hat{Y} = 120 - 5x_3 - 10x_3^2 \text{ при } -1 \leq x_3 \leq 0;$$

$$\hat{Y} = 120 - 5x_3 \text{ при } 0 \leq x_3 \leq 0, 2;$$

$$\hat{Y} = 110 + 45x_3 \text{ при } 0, 2 \leq x_3 \leq +1.$$

Для забезпечення  $\hat{Y} = 130$  необхідно, щоб  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -0, 333$  і  $x_3 \text{ min} = +0, 333$ .

**Варіант III.** Якщо  $a_{11} < 0$  і  $a_{22} < 0$ , то  $z_1 = f(x_3)$  і  $z_2 = f(x_3)$ , тому необхідно:  
- знайти координати оптимумів  $z_1 \text{ opt}$  та  $z_2 \text{ opt}$ :

$$z_1 \text{ opt} = K_1 = \frac{-2a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} + (-2c_{13}a_{22} + a_{12}c_{23})x_3}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = m_1 + n_1x_3; \quad (5.100)$$

$$z_2 \text{ opt} = K_2 = \frac{-2a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} + (-2c_{23}a_{22} + a_{12}c_{13})x_3}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = m_2 + n_2x_3; \quad (5.101)$$

- знайти модель приросту шляхом підстановки цих виразів у модель (5.83):

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Y} &= a_1K_1 + a_2K_2 + a_{11}K_1^2 + a_{22}K_2^2 + a_{12}K_1K_2 + c_{13}K_1x_3 + c_{23}K_2x_3 = \\ &= M_{03} + M_3x_3 + M_{33}x_3^2 \end{aligned} \quad (5.102)$$

і результуючу модель

$$\hat{Y} = (b_0 + M_{03}) + (b_3 + M_3)x_3 + (b_{33} + M_{33})x_3^2; \quad (5.103)$$

- якщо в деякій зоні умова  $|z_1 \text{ opt}| \leq 1$  не виконується, то необхідно перейти до варіантів I або II.

## 5.5. Методи самоорганізації моделей

### 5.5.1. Основні поняття теорії самоорганізації моделей

Методи самоорганізації моделей застосовують з метою отримання моделі довгострокового прогнозу за результатами спостережень над об'єктом дослідження. Під самоорганізацією моделей розуміють вибір з великої кількості моделей- претендентів єдиної моделі оптимальної складності (МОС), якій властиві певні критерії.

Основна ідея самоорганізації моделей полягає у тому, що всі дані про об'єкт спостереження поділяють на дві частини А і В. Частину таблиці даних А використовують для визначення параметрів моделі і називають навчальною послідовністю

даних. Частину таблиці даних  $B$  використовують при виборі моделі оптимальної складності і називають перевіркою послідовністю даних. До частини таблиці даних  $B$  можуть належати тільки дані, які не використовувались при визначенні параметрів моделі- претендента, тобто які не входили до частини  $B$ .

За даними навчальної послідовності даних без додаткової зовнішньої інформації принципово неможливо знайти єдину модель оптимальної складності. Дійсно, середньоквадратична похибка  $\Delta^2(A)$  зі збільшенням складності моделі завжди зменшується і досягає нуля. Наприклад, через  $n$  точок завжди можна провести поліном  $n - 1$  степеню.

Складність моделі визначається мінімальною кількістю даних спостережень, необхідною для визначення всіх параметрів моделі за умови точних даних. Наприклад, для визначення двох параметрів  $b_0, b_1$  найпростішої моделі, що описується лінійним рівнянням  $y = b_0 + b_1x$  потрібно мінімум два спостереження  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , для визначення трьох параметрів моделі, що описується квадратичним рівнянням  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$  потрібно мінімум три спостереження. Тому квадратична модель складніша за лінійну. Але у випадку кількох змінних  $x_j, j = \overline{1, n}$  маємо кілька лінійних моделей вигляду  $y = b_0 + b_1x_j$ . Як упорядкувати моделі за складністю, якщо вони мають однакову складність?

Критерій, що використовується для визначення параметрів моделі, називають *внутрішнім критерієм*. Найчастіше внутрішнім критерієм слугує середньоквадратична похибка, що визначається за формулою:

$$\Delta^2(A) = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} (y_i^{\text{сп}} - y_i^M)^2}{\sum_{i=1}^{N_A} (y_i^{\text{сп}})^2} \rightarrow \min, \quad (5.104)$$

де  $y_i^{\text{сп}}$  – табличне значення вихідної змінної  $y$  у точці  $x_i$ ,  $y_i^M$  – значення вихідної змінної  $y$  у точці  $x_i$ , яке розраховане за моделлю,  $N_A$  – кількість точок.

Значення внутрішнього критерію із ростом складності моделі завжди зменшується, тобто чим складніша модель, тим вона точніша.

Критерій, що обчислюється за інформацією, яка не використовувалась при визначенні параметрів моделі, називається зовнішнім критерієм

**Принцип самоорганізації моделей** [16]: при поступовому збільшенні складності моделі значення зовнішніх критеріїв спочатку спадає, досягає мінімуму, а потім або залишається сталим, або починає збільшуватися. Мінімуму зовнішнього критерію відповідає *модель оптимальної складності*.

**Зовнішні критерії селекції моделей.**

Вибір зовнішнього критерію здійснюється дослідником залежно від задачі, яка розв'язується. Досвід багатьох дослідників свідчить, що найпоширеніше застосування мають такі зовнішні критерії.

*Критерій регулярності* потребує, щоб середньоквадратична похибка, що розра-

хована за даними частини таблиці  $B$ , була мінімальна:

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} \rightarrow \min, \quad (5.105)$$

де  $(y_{\text{таб}})_i$  – табличні значення вихідної змінної у точці  $x_i$  таблиці даних  $B$ ,  $i = \overline{1, N_B}$ ;  $(y_M)_i$  – значення вихідної змінної у точці  $x_i$  таблиці даних  $B$ , що розраховане за моделлю, яка була отримана за даними частини таблиці  $A$ .

*Критерій мінімуму зсуву* потребує, щоб моделі, які отримані на частинах таблиці  $A$  і  $B$ , якомога менше відрізнялися одна від одної на інтервалі екстраполяції  $(x_1; x_{\alpha N})$

$$n_{\text{зсуву}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} (y_A - y_B)_i^2}{\alpha \sum_{i=1}^N (y_{\text{таб}})_i^2} \rightarrow \min, \quad (5.106)$$

де  $y_{\text{таб}}$  – табличні дані вихідної змінної в усіх точках таблиці даних  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = N_A + N_B$ ;  $y_A$  – модель, що отримана на частині таблиці даних  $A$ ;  $(y_A)$  – значення вихідної змінної, розраховане по моделі  $y_A$  у точці  $x_i$ ,  $i = \overline{1, \alpha N}$ ;  $y_B$  – модель, що отримана на частині таблиці даних  $B$ ;  $(y_B)_i$  – значення вихідної змінної, розраховане по моделі  $y_B$  у точці  $x_i$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт екстраполяції, який приймає значення  $\alpha = 1, 0 \div 3, 0$ .

Зауважимо, що критерій мінімуму зсуву використовується майже в усіх алгоритмах самоорганізації моделей. Критерій регулярності використовується, як правило, в комбінації із критерієм мінімуму зсуву. Інші критерії такі як критерій балансу змінних, критерій точності короткострокового прогнозу, критерій точності покрокового інтегрування, мають обмежене використання. Для вивчення цих критеріїв рекомендуємо читачеві скористатись спеціальною літературою [ ]

#### **Поділ таблиці даних на навчальну (А) та перевірочну (В) частини.**

Поділ таблиці даних на частини  $A$  і  $B$  мало впливає на значення критерію мінімуму зсуву і впливає на значення критерію регулярності.

Оптимальний (з погляду завадостійкості вибору моделі) поділ точок на частини  $A$  і  $B$  у випадку критерію регулярності відповідає поділу у відношенні  $N_A : N_B = 2 : 1$ , причому точки частини  $B$  – це точки із меншою дисперсією вихідної величини, а точки  $A$  – це точки із більшою дисперсією вихідної величини.

У випадку критерію мінімуму зсуву найкращий (з погляду завадостійкості вибору моделі) результат дає поділ таблиці даних у відношенні  $N_A : N_B = 1 : 1$ , тобто на рівні частини. Оптимальний поділ множини точок можна знайти за правилом «максимуму»: найкращий поділ точок таблиці даних на дві різні множини відповідає максимальному з усіх значень мінімуму критерію мінімуму зсуву.

#### **Визначення параметрів моделі за даними навчальної послідовності.**

Якщо внутрішній критерій – критерій найменших квадратів, то відшукання параметрів моделі здійснюється так, як у задачі апроксимації функціональної залежності.

Припустимо, що ставиться задача знаходження рівняння виду:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2. \quad (5.107)$$

Тоді таблицю вихідних даних  $x_{1i}, x_{2i}, y_i, i = \overline{1, N}$ , потрібно доповнити даними  $x_{1i}, x_{2i}, x_{1i}^2, x_{2i}^2$ . У результаті утвориться матриця даних  $X$  про вхідні змінні, що складається зі стовпчиків  $1, x_{1i}, x_{2i}, x_{1i}, x_{2i}, x_{1i}^2, x_{2i}^2$ . Кожний стовпчик відповідає коефіцієнту  $b_j, j = \overline{0, 5}$  рівняння моделі. Система умовних рівнянь приймає вид:

$$X \cdot b = y. \quad (5.108)$$

Для отримання системи нормальних рівнянь потрібно помножити зліва обидві частини рівняння на  $X^T$ :

$$X^T \cdot X \cdot b = X^T \cdot y. \quad (5.109)$$

Матриця  $X^T \cdot X$  є квадратна матриця і обов'язково симетрична. Тому завжди існує розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T y. \quad (5.110)$$

Підставимо параметри  $b$ , що знайдені, у (5.107), отримаємо модель.

### 5.5.2. Алгоритми самоорганізації моделей

Алгоритми самоорганізації розрізняють:

- за ансамблем зовнішніх критеріїв, використовуваних для пошуку моделі оптимальної складності;
- за набором базисних функцій, використовуваних для побудови моделей претендентів;
- за способом перебору моделей-претендентів.

*Однорядні (комбінаторні) алгоритми самоорганізації* моделей організують повний перебір множини моделей - претендентів і використовуються, коли кількість моделей - претендентів відносно невелика. Модель оптимальної складності в цьому випадку визначається мінімумом зовнішнього критерію.

*Багаторядні (порогові) алгоритми самоорганізації* моделей організують неповний перебір множини моделей- претендентів і використовуються, коли кількість моделей- претендентів надто велика для того, щоб здійснити повний перебір. Модель оптимальної складності у цьому випадку знаходиться швидко, але не точно за рахунок того, що деякі моделі при переборі просто пропускаються.

*Завадостійкість алгоритму самоорганізації* оцінюється за результатами пошуку заздалегідь відомої моделі за даними, що мають нормально розподілену заваду із середнім значенням 0:

$$x_i = x_i + \Delta x_i; \quad y_i = y_i + \Delta y_i, \quad i = \overline{1, n} \quad \sum_{j=1}^n \Delta x_j = 0; \quad \sum_{j=1}^n \Delta y_j = 0. \quad (5.111)$$



$x_i$  –  $i$ -те спостереження вхідної змінної моделі,  $\Delta x_i$  –  $i$ -те значення випадкової величини, що має нормальний закон розподілу із нульовим середнім значенням і середнім квадратичним відхиленням, що складає  $\delta$ -частину значення  $x_i$ ,  $\delta$  – рівень завади,  $y_i$  –  $i$ -те спостереження вихідної змінної моделі,  $\Delta y_i$  –  $i$ -те значення випадкової величини, що має нормальний закон розподілу із нульовим середнім значенням і середнім квадратичним відхиленням, що складає  $\delta$ -частину значення  $y_i$ .

При поступовому зростанні рівня завад  $\delta$  спостерігають, чи відрізняється модель оптимальної складності, що визначена алгоритмом самоорганізації, від істинної моделі не більше як на 5%. Найбільший рівень завад, при якому алгоритм самоорганізації визначає модель правильно, вважається характеристикою завадостійкості алгоритму. Рекомендований рівень завад, який повинен витримувати алгоритм самоорганізації, складає 5%.

Наприклад, для перевірки завадостійкості дослідник вибрав істинну модель у вигляді:

$$f(x) = 1 + 3x_1 - 4x_2 + 2x_1^2 - x_2^2.$$

Наступний крок, який потрібно зробити, – сформуванати таблицю даних. Завдаючи значення вхідних змінних випадковим чином у деякій області і додаючи до них похибку, отримуємо таблицю даних вхідних змінних:

$$x_{1i} = x_{1i} + \xi_i, \quad x_{2i} = x_{2i} + \zeta_i; \quad y_i = f(x_i) + \eta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\xi, \zeta, \eta$  – нормально розподілені випадкові величини із нульовим середнім значенням та середнім квадратичним відхиленням, що складає  $\delta \cdot |\max x_1|$ ,  $\delta \cdot |\max x_2|$ ,  $\delta \cdot |\max y|$  відповідно.

### 5.5.3. Однорядний алгоритм самоорганізації моделей

Модель оптимальної складності в однорядному алгоритмі самоорганізації моделей визначається на основі повного перебору моделей із множини моделей- претендентів. Якщо моделі упорядковані за рівнем зростання складності, перебір моделей продовжується, доки спостерігається зменшення значення зовнішнього критерію із зростанням складності моделі. Якщо моделі не упорядковані, модель оптимальної складності визначається мінімальним значенням зовнішнього критерію (рис. 5.1).

Оскільки упорядкування моделей представляє собою важку задачу, то при відносно невеликій кількості моделей в множині моделей- претендентів простіше перебрати усі моделі без упорядкування.

Для того, щоб побудувати однорядний алгоритм потрібно:

- визначити зовнішні критерії, за якими здійснюється вибір моделі оптимальної складності;
- визначити опорні функції;
- визначити спосіб розподілу таблиці даних;
- сформуванати множину моделей-претендентів;
- для кожної моделі-претендента визначити параметри моделі і розрахувати значення зовнішнього критерію;
- за найменшим значенням зовнішнього критерію вибрати модель оптимальної складності;

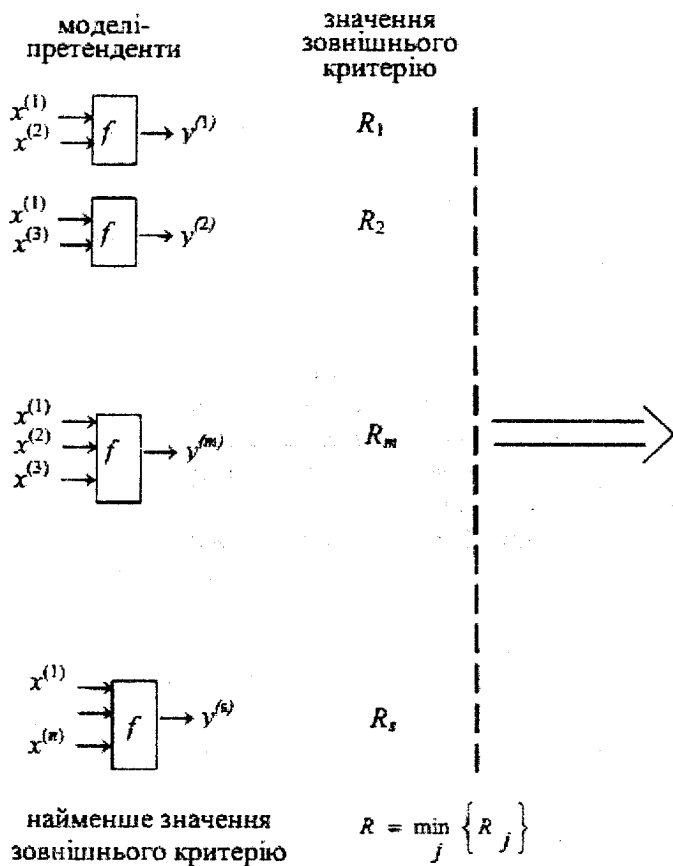


Рис. 5.1. Структура однорядного алгоритму самоорганізації моделей

– уточнити параметри моделі оптимальної складності з урахуванням усієї таблиці даних.

### Вибір зовнішніх критеріїв.

Дослідження впливу рівня завад на значення зовнішнього критерію показало, що зі збільшенням рівня завад мінімум критерію регулярності прямує до більш простих моделей і тому визначає модель оптимальної складності неправильно. При тому ж збільшенні рівня завад мінімум критерію мінімуму зсуву залишається стійким і визначає модель оптимальної складності правильно. Спостерігається тільки логічне збільшення самого значення критерію мінімуму зсуву при збільшенні рівня завад. Звідси, використання критерію мінімуму зсуву має пріоритетне використання в алгоритмах самоорганізації.

Використання кількох критеріїв підвищує точність визначення моделі оптимальної складності і робить вибір моделі однозначнішим. Дослідження завадостійкості алгоритмів самоорганізації показало, що найбільш завадостійким являється одноря-

дний алгоритм, в якому спочатку вибираються кілька ліпших моделей за критерієм мінімуму зсуву, а потім з цих моделей вибирається найліпша модель за критерієм регулярності. Такі алгоритми називають алгоритмами із послідовним використанням критеріїв. Замість критерію регулярності використовують також критерій балансу або критерій покрокового інтегрування.

### Вибір опорних функцій.

Вид опорних функцій являється припущенням дослідника про вид шуканої моделі. Від правильного вибору опорних функцій в найбільшій мірі залежить успіх алгоритму самоорганізації. Потрібно пам'ятати, що

- поліноміальні моделі являються найбільш універсальним представленням функціональної залежності, але не завжди вірним;
- дробово-раціональна функціональна залежність не може бути представлена лінійною залежністю або поліноміальною залежністю;
- функціональна залежність, що має періодичний характер, представляється тригонометричними функціями.

Опорні функції повинні бути лінійно незалежними одна від одної. Наприклад, наступний вибір опорних функцій являється, очевидно, не допустимим:

$$f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2, \quad f_3(x) = x_1 + x_2.$$

Проте наступний вибір опорних функцій являється допустимим:

$$f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2, \quad f_3(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

### Формування множини моделей-претендентів.

Множина моделей-претендентів будується наступним чином. Нехай обрані опорні функції  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ . Тоді найскладніша модель має вигляд:

$$f(x) = b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_k f_k(x). \quad (5.112)$$

Перебір усіх моделей здійснюється методом занулення коефіцієнтів у (5.112). Поставимо у відповідність кожній моделі вектор  $v$ , компоненти якого дорівнюють одиниці, якщо доданок виду  $b_i f_i(x)$  присутній у моделі і дорівнює нулю, якщо доданок виду  $b_i f_i(x)$  відсутній у моделі. Множина моделей-претендентів визначається повним перебором усіх можливих комбінацій 1 і 0 у ненульових компонентах вектора  $v$ , окрім комбінації  $(1, 0, \dots, 0)$ , оскільки модель виду  $f(x) = b_0$  не розглядається.

Наприклад, якщо найскладніша модель представляється функціональною залежністю виду

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 \sin t + b_3 \cos t, \quad (5.113)$$

множина моделей-претендентів представляється такими сьома моделями:

$$\begin{aligned}
 y &= b_0 + b_1 x, \\
 y &= b_0 + b_1 \sin t, \\
 y &= b_0 + b_1 \cos t, \\
 y &= b_0 + b_1 x + b_2 \sin t, \\
 y &= b_0 + b_1 x + b_2 \cos t, \\
 y &= b_0 + b_1 \sin t + b_2 \cos t, \\
 y &= b_0 + b_1 x + b_2 \sin t + b_3 \cos t.
 \end{aligned}
 \tag{5.114}$$

Зверніть увагу, що однакові позначення коефіцієнтів  $b_i$  в (5.114) не означає, що значення цих коефіцієнтів однакові. Позначення коефіцієнтів мають схематичний характер.

Наведеній множині моделей-претендентів відповідає множина векторів  $v$ , що зручно представляється такою матрицею:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \tag{5.115}$$

Моделі у множині моделей-претендентів слід упорядковувати за зростанням рівня складності, що визначається кількістю доданків моделі та рівнем складності доданків.

Кількість моделей у множині моделей-претендентів повністю визначається кількістю обраних опорних функцій і складає  $2^k - 1$  де  $k$  – кількість опорних функцій. Зауважимо, що при зростанні кількості опорних функцій кількість моделей у множині моделей-претендентів сильно зростає. Так, при  $k = 6$  кількість моделей складає 63, а при  $k = 10$  – 1023.

**Способи розподілу таблиці даних на навчаючу та перевірочну послідовності даних.**

Розподіл таблиці даних здійснюється дослідником із урахуванням особливостей задачі, що розв'язується. Розподіл характеризується кількістю точок навчальної та перевірочної послідовності даних та способом, за яким приймається рішення про належність точки до навчальної чи перевірочної послідовності даних.

Кількість точок даних навчальної та перевірочної послідовності даних визначається такою, що забезпечує найбільшу завадостійкість алгоритму. З усіх можливих розподілів при рівному співвідношенні кількості даних у частинах  $A$  і  $B$  оптимальним вважається той, що забезпечує найбільше значення мінімуму зовнішнього критерію (принцип мінімаксу).

Спосіб розподілу повинен відповідати декільком вимогам:

– дані навчальної та перевірконої послідовності даних повинні покривати усю область даних;

– дані кожної послідовності даних повинні бути лінійно незалежними;

– якщо відома точність табличних даних, точніші дані відбирають до перевірконої послідовності даних (частини  $B$ ), а менш точні дані – до навчальної послідовності даних (частини  $A$ ).

Всі способи можна поділити на детерміновані та статистичні. Детермінований спосіб означає, що точки вибираються за деяким правилом. Наприклад, кожна друга точка послідовності даних належить навчальній послідовності, а всі інші – перевірконій послідовності.

Випадковий (статистичний) вибір точок даних використовують, щоб перевірити стійкість обраної моделі оптимальної складності по відношенню до вибору точок даних.

Дослідження впливу розподілу даних на значення зовнішнього критерію показали, що розподіл таблиці даних сильно впливає на значення критерію регулярності і не сильно впливає на значення критерію мінімуму зсуву.

Узагальнена схема алгоритму представлена на рис. 5.2.

Розподіл таблиці даних здійснюється програмою випадковим чином у заданому співвідношенні  $N_A/N_B = 2$ . Оскільки на значення критерію мінімуму зсуву розподіл таблиці даних не впливає, а на значення критерію регулярності – впливає, розподіл таблиці даних обирається так, щоб отримати найточніше значення критерію регулярності. Коефіцієнт екстраполяції вибраний у розмірі 2 відповідно рекомендаціям, що значення екстраполяції належить інтервалу (1; 3).

По-перше, здійснюється відбір моделей за критерієм регулярності. Потім із  $K$  штук обраних найліпших моделей здійснюється вибір оптимальної моделі за критерієм мінімуму зсуву. Якість отриманої моделі перевіряється по-перше, за досягнутим значенням зовнішнього критерію, по-друге, за значенням глибини критерію, по-третє, за результатами аналізу отриманої функціональної залежності. Значення зовнішнього критерію повинно досягати значення, не більшого за 0,05. Значення глибини критерію повинно бути великим і чим більше, тим ліпше знайдена модель. Аналіз отриманої функціональної залежності не повинен суперечити логічним зв'язкам, наявним у моделі.

Дослідження *завадостійкості* алгоритму при зростанні рівня завад показало, що алгоритм витримує рівень завад не більше 5%. Завади задавались у вигляді нормально розподіленої випадкової величини із середнім значенням 0 і відхиленням 0,05 від самого значення. Також вимагалось, щоб сума усіх завад була рівна 0:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_i + \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n} \\
 \Delta x_i &= \text{rnorm}(1, 0, 0, 05|x_i|)_0, \quad i = \overline{1, n-1} \\
 \Delta x_n &= - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j.
 \end{aligned}
 \tag{5.116}$$



Рис. 5.2. Узагальнена схема алгоритму

Для перевірки використовувалась функція виду:

$$f(x) = x_1 - x_2 + \frac{2}{x_1} - \frac{3}{x_2}.$$

Алгоритм самоорганізації при кількості даних в таблиці спостережень 20 і рівні завод спостережень 6% отримав функцію виду:

$$f(x) = -0,016 + 1,007x_1 - 0,995x_2 + \frac{2,106}{x_1} - \frac{3,087}{x_2}.$$

Отже, похибка у визначенні коефіцієнтів не перевищує 5% і результат визначення функції є вірний.

Рівень завод 5%, який витримує запропонований алгоритм самоорганізації, відповідає загальноприйнятому рівню завод 5% і тому приймається до використання.

Оскільки кількість моделей у множині моделей-претендентів зі збільшенням кількості параметрів моделі, що відшукуються, сильно зростає, то однорядні алгоритми самоорганізації використовують при відносно невеликій кількості параметрів –

до двадцяти. При більшій кількості параметрів повний перебір моделей із множини моделей- претендентів втрачає свою доцільність і рекомендується використовувати багаторядні алгоритми самоорганізації, які ґрунтовані на неповному переборі моделей.

#### **5.5.4. Багаторядний алгоритм самоорганізації моделей**

Ідея багаторядного алгоритму ґрунтується на ідеях селективного відбору, що застосовують біологи при скрещуванні особин для отримання гібридного різновиду із заданими властивостями. Гіпотеза селекції стверджує, що алгоритм масової селекції рослин або тварин являється оптимальним алгоритмом обробки інформації у складних задачах [ ].

Багаторядний алгоритм організує перегляд моделей зі зростанням складності від одного ряду (покоління) до іншого. В результаті такого перегляду деякі моделі виявляються пропущеними, що, з одного боку скорочує обсяг розрахунків, з іншого – спричиняє неточне визначення моделі оптимальної складності. Дійсно, якщо модель оптимальної складності виявилась пропущеною, багаторядний алгоритм не зможе виявити її як найліпшу.

На першому ряду багаторядного алгоритму формуються усі можливі пари змінних із вхідних змінних системи і складаються моделі, що містять ці пари змінних (рис. 5.3). З усіх моделей першого ряду вибираються кілька ліпших за значенням зовнішнього критерію і тільки вони допускаються до другого ряду. На другому ряді формуються усі можливі пари моделей першого ряду і складаються моделі другого ряду. Якість кожної моделі оцінюється за значенням зовнішнього критерію і кілька найліпших відбираються для наступного ряду тощо. Нарощування рядів відбувається доти, доки із переходом до наступного ряду відбувається зменшення значення зовнішнього критерію. Модель оптимальної складності вибирається як найліпша у найліпшому ряду.

Для того, щоб побудувати багаторядний алгоритм потрібно:

- визначити зовнішній критерій, за яким здійснюється вибір моделі оптимальної складності;
- визначити вид моделі, що використовується для пари змінних на кожному ряду алгоритму;
- визначити спосіб розподілу таблиці даних;
- визначити кількість моделей, що переходять з одного ряду до наступного;
- для кожної моделі ряду визначити параметри моделі і розрахувати значення зовнішнього критерію;
- за значенням зовнішнього критерію вибрати найліпші моделі, що переходять до наступного ряду;
- формувати таблицю даних, що є вихідною таблицею для наступного ряду;
- нарощувати кількість рядів, доки зростання складності моделі призводить до зменшення значення зовнішнього критерію;
- визначити модель оптимальної складності як найліпшу модель найліпшого ряду.

#### **Формування моделей ряду.**

На першому ряду розглядаються моделі, які використовують вхідні змінні до-

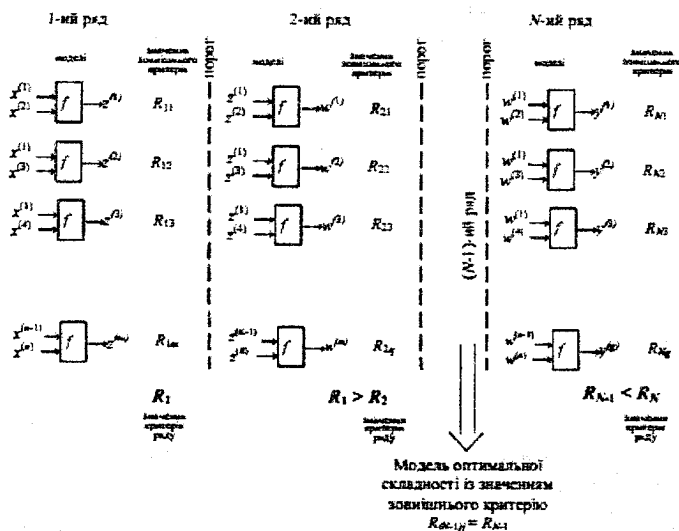


Рис. 5.3. Многорядний (пороговий) алгоритм самоорганізації моделей

сліджуваної системи по дві змінні:

$$z = b_0 + b_1 f_1(x^{(u)}, x^{(s)}) + b_2 f_2(x^{(u)}, x^{(s)}) + \dots + b_k f_k(x^{(u)}, x^{(s)}), \quad (5.117)$$

де  $u, s$  – пара чисел,  $u \neq s$ ,  $u, s = \overline{1, n}$ ,  $x^{(u)}, x^{(s)}$  – компоненти вектора вхідних змінних  $x$ .

В найпростішому випадку припускають лінійний вид моделей:

$$z = b_0 + b_1 x^{(u)} + b_2 x^{(s)}. \quad (5.118)$$

Для кожної моделі (5.118) за даними частини таблиці даних  $A$  відшуковуються параметри  $b$  (див. (5.110)).

**Вибір найліпших моделей за значенням зовнішнього критерію.**

Кожна  $j$ -та модель  $i$ -го ряду оцінюється за допомогою зовнішнього критерію, що розраховується із використанням частини таблиці даних  $B$ . Позначимо розраховане значення критерію  $R_{ij}$ . Найменше значення критерію, досягнуте на даному ряду, називається *критерієм ряду*:

$$R_i = \min_j \{R_{ij}\}. \quad (5.119)$$

З усіх моделей ряду вибирається  $K$  штук найліпших за значенням зовнішнього критерію, які переходять у наступний ряд. Інші моделі, які не проявили себе як найліпші, знищуються. Відбір моделей, що переходять до наступного ряду, називається порогом. Число  $K$  має бути не меншим за три для того, щоб у наступному ряді існувала можливість сформувати більше однієї моделі.

**Формування таблиці даних наступного ряду.**



Для тих моделей, що виявились найліпшими на першому ряду, формується таблиця даних таким чином. Значення вхідних змінних пропускаються через найліпші моделі першого ряду і отримують значення вихідних змінних моделей першого ряду:

$$z_i^{(s)} = b_0 + b_1 x_i^{(2)} + b_2 x_i^{(5)}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$y^{(2)} = b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)};$$

$$z^{(1)} = b_0 + b_1 y^{(1)} + b_2 y^{(2)} = b_0 + b_1 (b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)}) + b_2 (b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)}).$$

Перехід до наступного  $(j + 1)$ -го ряду здійснюється за умови, що значення критерію ряду зменшується:

$$R_j < R_{j-1}. \quad (5.120)$$

Іншими словами, доки ускладнення моделі спричиняє поліпшення значення критерію. Якщо значення критерію ряду більше за значення критерію попереднього ряду, то алгоритм зупиняється і відшукується єдина найліпша модель із моделей попереднього ряду. Саме ця модель вважається моделлю оптимальної складності.

Зауважимо, що в багаторядних алгоритмах складність моделі зростає при переході від одного ряду до іншого, оскільки зростає кількість шуканих параметрів. Якщо на першому ряду отримані моделі виду:

$$z^{(1)} = b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)};$$

$$z^{(2)} = b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)},$$

то модель другого ряду має вигляд:

$$w^{(1)} = b_0 + b_1 z^{(1)} + b_2 z^{(2)} = b_0 + b_1 (b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)}) + b_2 (b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)}),$$

де значення коефіцієнтів  $b$  в усіх моделях різні, а позначення схематичне.

### Формування результату пошуку моделі оптимальної складності.

Припустимо, що модель оптимальної складності знайдена на третьому ряду багаторядного алгоритму самоорганізації моделей:

$$y^{(k)} = b_{03} + b_{13} w^{(i)} + b_{23} w^{(j)},$$

де  $w^{(i)}$ ,  $w^{(j)}$  – змінні другого ряду.

Залежність змінних другого ряду від змінних першого ряду представляється функціональними залежностями:

$$w^{(i)} = b_{02} + b_{12} z^{(m)} + b_{22} z^{(n)}, \quad w^{(j)} = b_{02} + b_{12} z^{(g)} + b_{23} z^{(h)},$$

де  $z^{(m)}$ ,  $z^{(n)}$ ,  $z^{(g)}$ ,  $z^{(h)}$  – змінні другого ряду.

Нарешті, залежність змінних першого ряду представляється функціональними залежностями від вихідних змінних моделі:

$$z^{(m)} = b_{01} + b_{11} x^{(s)} + b_{12} x^{(p)}; \quad z^{(n)} = b_{01} + b_{11} x^{(q)} + b_{12} x^{(r)};$$

$$z^{(g)} = b_{01} + b_{11}x^{(u)} + b_{12}x^{(l)}; \quad z^{(h)} = b_{01} + b_{11}x^{(v)} + b_{12}x^{(f)}.$$

Тому модель оптимальної складності представляється через вихідні дані таким чином:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= b_{03} + b_{13}w^{(z)} + b_{23}w^{(j)} = b_{03} + b_{13}(b_{02} + b_{12}z^{(m)} + b_{22}z^{(n)}) + b_{23}(b_{02} + b_{12}z^{(g)} + b_{23}z^{(h)}) = \\ &= b_{03} + b_{13}[b_{02} + b_{12}(b_{01} + b_{11}x^{(s)} + b_{12}x^{(p)}) + b_{22}(b_{01} + b_{11}x^{(q)} + b_{12}x^{(r)})] + \\ &\quad + b_{23}[b_{02} + b_{12}(b_{01} + b_{11}x^{(u)} + b_{12}x^{(l)}) + b_{22}(b_{01} + b_{11}x^{(v)} + b_{12}x^{(f)})]. \end{aligned}$$

Отже, символічне представлення моделі оптимальної складності, яка знайдена, у багаторядному алгоритмі набагато складніше ніж в однорядному алгоритмі і потребує розробки спеціального алгоритму для виведення результату. Якщо багаторядний алгоритм використовується для прогнозування, то замість виведення символічного результату обмежуються чисельним виведенням результатів прогнозу.

На рис. 5.4 наведена узагальнена схема багаторядного алгоритму самоорганізації моделей.

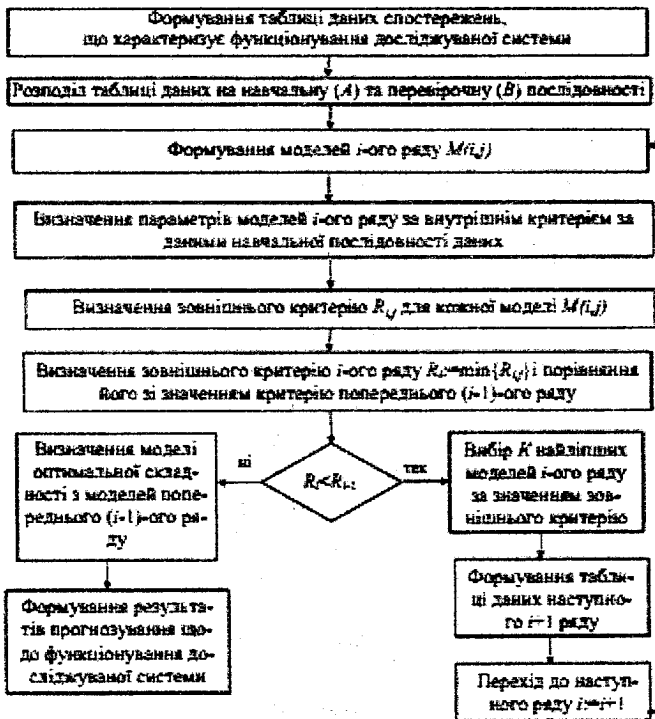


Рис. 5.4. Узагальнена схема багаторядного алгоритму самоорганізації моделей

	x=0	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7
<i>y</i>	1,5	2	2,2	2,9				
<i>y<sub>A</sub></i>	1,5	1,85	2,2	2,55	2,9	3,25	3,6	3,95
<i>y<sub>B</sub></i>	1,55	2	2,45	2,9	3,35	3,8	4,25	4,7

### 5.5.5. Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** Таблиця даних складається із шести точок **(2;2,2)**, **(3;2,3)**, (4;2,6), (5;2,5), (6;2,6), (7;3,2), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій регулярності.

**Розв'язання.** За даними навчаючої послідовності та формулою (5.114) знаходимо модель:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} 2,2 \\ 2,3 \\ 2,5 \\ 2,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Звідси,  $y_M = 2 + 0,1x$ .

За даними перевірконої послідовності даних обчислюємо значення критерію регулярності за формулою (5.104):  $y_M(4) = 2,4$ ,  $y_M(7) = 2,7$ .

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} = \frac{(2,6 - 2,4)^2 + (2,7 - 3,2)^2}{2,6^2 + 3,2^2} = 0.017.$$

Відповідь:  $y_M = 2 + 0,1x$ ,  $\Delta^2(B) = 0.017$ .

**Задача 2.** Таблиця даних складається із чотирьох точок **(0;1,5)**, (1;2), **(2;2,2)**, (3;2,9), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій мінімуму зсуву. Коефіцієнт екстраполяції візьміть рівним 2.

**Розв'язання.** За даними навчаючої послідовності знаходимо модель *A*:

$$y_A = 1,5 + 0,35x$$

За даними перевірконої послідовності даних знаходимо модель *B*:

$$y_B = 1,55 + 0,45x.$$

За умовою задачі коефіцієнт екстраполяції дорівнює 2, тому збільшуємо таблицю даних вдвічі такими точками: x=4, x=5, x=6 та x=7. Розраховуємо значення моделей *A* та *B* для всіх восьми точок та заповнюємо таблицю:

В першому рядочку цієї матриці указані чотири табличних значення відгуку моделі. За формулою(5.105) обчислюємо значення критерію мінімуму зсуву:

$$n_{\text{зсуву}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a8} (y_A - y_B)_i^2}{2 \sum_{i=1}^N (y_{\text{таб}})_i^2} = \frac{1,7}{39} = 0,044.$$

Відповідь:  $y_A = 1,5 + 0,35x$ ,  $n_{\text{зсуву}}^2 = 0,044$ .

Задача 3. Для даних спостережень  $x = [-4, -2, 0, 2]$ ,  $y = [0, 3, 5, 9]$  побудувати найпростішу модель та оцінити її якість за критерієм регулярності.

*Розв'язання.* Поділимо таблицю даних на частини  $A$  і  $B$  у відношенні приблизно 2:3, тобто три точки віднесемо до частини  $A$  і одну точку – до частини  $B$ . Нехай точка  $(0;5)$  – точка частини  $B$ , а інші точки – частина даних  $A$ . За даними навчаючої послідовності (частини  $A$ ) побудуємо найпростішу модель:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Тобто,  $y_M = 6 + 1,5x$ .

За даними перевірконої послідовності даних (частини  $B$ ) обчислюємо значення критерію регулярності за формулою (5.105):

$$\Delta^2(B) = \frac{(5-6)^2}{5^2} = 0,04.$$

Приймаючи до уваги, що значення критерію близьке до 0,05, робимо висновок про достатню якість побудованої моделі.

Відповідь: моделлю системи може бути функціональна залежність  $y_M = 6 + 1,5x$ , якість якої оцінюється значенням критерію регулярності 0,04.

Задача 4. Для даних спостережень  $x = [-2, 0, 2, 4]$ ,  $y = [3, 1, 0, 2]$  побудувати найпростішу модель та оцінити її якість за критерієм мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 2.

*Розв'язання.* Поділимо таблицю даних на частини  $A$  і  $B$  у відношенні 1:1, тобто дві точки віднесемо до частини  $A$  і дві точки до частини  $B$ . Нехай точки  $(0;1)$  та  $(4;2)$  – частина даних  $B$ , а інші точки – частина даних  $A$ .

За даними навчаючої послідовності знаходимо модель  $A$ :  $y_A = 1,5 - 0,75x$ .

За даними перевірконої послідовності даних знаходимо модель  $B$ :  $y_B = 1 + 0,25x$ .

За умовою задачі коефіцієнт екстраполяції дорівнює 2, тому збільшуємо таблицю даних вдвічі такими точками:  $x=-6$ ,  $x=-4$ ,  $x=6$  та  $x=8$ . Розраховуємо значення моделей  $A$  та  $B$  для всіх восьми точок та заповнюємо таблицю:

В першому рядочку цієї матриці указані чотири табличних значення відгуку моделі. Обчислюємо значення критерію мінімуму зсуву за формулою (5.106):

$$n_{\text{зсуву}}^2 = \frac{6,5^2 + 4,5^2 + 2,5^2 + 0,5^2 + 1,5^2 + 3,5^2 + 5,5^2 + 7,5^2}{2 \cdot (9 + 0 + 4)} = \frac{170}{28} = 6,07.$$

	x=-6	x=-4	x=-2	x=0	x=2	x=4	x=6	x=8
y			3	1	0	2		
y <sub>A</sub>	6	4,5	3	1,5	0	-1,5	-3	-4,5
y <sub>B</sub>	-0,5	0	0,5	1	1,5	5	2,5	3

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
y <sub>t</sub>	-1	-3	-3	-1	0	1	2	2	4	6
y <sub>t-2</sub>			-1	-3	-3	-1	0	1	2	2

Відповідь: побудована найпростіша модель системи  $y_A = 1,5 - 0,75x$ , якість якої оцінюється значенням критерію мінімуму зсуву 6,07. Оскільки значення критерію мінімуму зсуву завелике, то модель не може бути прийнятною. Причиною такого результату може бути те, що задані точки не відповідають лінійній залежності.

Задача 5. Таблиця даних A складається із 10-ти точок (0;-1), (1;-3), (2;-3), (3;-1), (4;0), (5;1), (6;2), (7;2), (8;4), (9;6). Знайти коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд  $y_t = b_0 + b_1 y_{t-2}$ .

Розв'язання. Розташуємо дані задачі у таблиці: Починаючи із моменту часу  $t = 2$ , відомими є як значення  $y_t$ , так і  $y_{t-2}$ . Скористаємося цією частиною таблиці для відшукування коефіцієнтів рівняння  $y_t = b_0 + b_1 y_{t-2}$ . Складемо матрицю системи умовних рівнянь і знайдемо параметри моделі:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,794 \\ 1,117 \end{bmatrix}.$$

Отже,  $y_t = 1,794 + 1,117 y_{t-2}$ .

Задача 6. Таблиця перевірконої послідовності даних складається із п'яти точок:

За даними навчальної послідовності даних знайдені коефіцієнти таких моделей:

1.  $y_M = -0,13 - 0,2x_1 + 2,2x_2;$

2.  $y_M = 2,2 - 0,2x_1 + 2x_2;$

x <sub>1</sub>	-4	-2	0	2	4
x <sub>2</sub>	-3	-1	1	3	5
y	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8

$y_{\text{таб}}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
$y_M$	-6	-1,9	2,1	6,1	10,2

$y_{\text{таб}}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
$y_M$	-7,2	-0,7	4,17	7,3	8,7

$$3. y_M = 0,27 - 0,25x_1 + 0,07x_2;$$

$$4. y_M = 2,06 - 0,2x_1^2 - 0,03x_1x_2 + 2x_2.$$

Для даної множини моделей визначити модель оптимальної складності за критерієм регулярності.

*Розв'язання.* Для кожної моделі розрахуємо її значення у точках перевірконої послідовності даних, а потім обчислимо значення критерію регулярності за формулою (5.104).

Для першої моделі маємо: Значення критерію

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} = 0,051.$$

Для другої моделі маємо: Значення критерію

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} = 0,0036.$$

Для третьої моделі маємо: Значення критерію

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} = 0,9.$$

Для четвертої моделі маємо: Значення критерію

$y_{\text{таб}}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
$y_M$	1,9	0,84	0,35	0,42	1,07

$y_{\text{таб}}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
$y_M$	-7,7	-0,85	4,1	7,1	8,3

$x_1$	-2	0	1	3
$x_2$	2	-1	0	1
$y$	-8,3	-0,2	1,6	5,9

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{таб}})_i^2} = 0,0077.$$

Найменше значення критерію (0,0036) досягається для другої моделі  $y_M = 2,2 - 0,2x_1^2 + 2x_2$ . Отже, за даної множини моделей- претендентів ця модель і є модель оптимальної складності.

### 5.6. Завдання для самостійної роботи

1. Таблиця даних складається із чотирьох точок **(2;2,2)**, (3;2,4), **(4;2,4)**, (5;2,8), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій мінімуму зсуву. Коефіцієнт екстраполяції візьміть рівним 2.

2. Нехай таблиця даних складається з шести точок (0;1,8), **(1;2,0)**, **(2;2,5)**, (3;1,9), **(4;2,1)**, (5;2,3), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій регулярності.

3. Таблиця даних А складається з дев'яти точок (2;-2), (3;-3), (4;0), (5;1), (6;2), (7;2), (8;4), (9;5). Знайдіть коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд:  $y_t = b_0 + b_1 y_{t-1}$ .

4. Для даної таблиці спостережень (-2;12), (0;5), (2;0), (4;-3) побудувати модель та оцінити її якість за критерієм мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 2.

5. Для даної таблиці спостережень (0;7), (1;3), (2;1), (3;0), (4;-3) побудувати модель та оцінити її якість за критерієм регулярності:

6. Для даної таблиці спостережень (-1;5), (0;2), (1;0), (2;1), (4;3), (6;4) побудувати модель та оцінити її якість за критерієм мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 1,5.

7. Таблиця даних А складається з восьми точок (0;-3), (2;2), (3;3), (4;8), (5;10), (6;16), (7;21). Знайдіть коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд

8. Таблиця перевірконої послідовності даних складається з чотирьох точок: За

даними навчальної послідовності даних знайдені коефіцієнти таких моделей:

$$y_M = -1,4 + 0,3x_1 - 2x_2;$$

$$y_M = -3,9 + 0,3x_1^2 + 2,1x_1x_2;$$

$$y_M = 0,9 - 0,5x_2^2 + 2x_1x_2;$$

$$y_M = 1,5 - 0,05x_1^2 + 2x_1x_2 - 0,55x_2^2.$$

Для даної множини моделей визначить модель оптимальної складності за критерієм регулярності.

### 5.7. Контрольні запитання

- 1) У чому полягає основна ідея самоорганізації моделей?
- 2) Для чого використовують навчальну послідовність даних? перевірочну послідовність даних?
- 3) Як поділити таблицю даних на навчальну та перевірочні частини?
- 4) Чим визначається складність моделі?
- 5) Дайте поняття внутрішнього критерію та зовнішнього критерію.
- 6) Чим визначається модель оптимальної складності?
- 7) Які Ви знаєте зовнішні критерії?
- 8) За якою формулою розраховується внутрішній критерій?
- 9) За якою формулою розраховується критерій регулярності?
- 10) За якою формулою розраховується критерій мінімуму зсуву?
- 11) Що таке коефіцієнт екстраполяції?
- 12) Як визначити параметри моделі за табличними даними?
- 13) Які алгоритми самоорганізації Ви знаєте?
- 14) Опишіть, які дії виконуються в однорядному (комбінаторному) алгоритмі самоорганізації.
- 15) Опишіть, які дії виконуються в багаторядному алгоритмі самоорганізації.
- 16) Які класифікації алгоритмів самоорганізації Ви знаєте?



---

## Динамічні моделі

---

Зазвичай, коли що-небудь називають системою, мають на увазі сукупність взаємопов'язаних елементів або частин, що взаємодіють із навколишнім середовищем за визначеними закономірностями.

Система – це пристрій, комплекс, об'єднання, характерне наявністю *входів*, тобто елементів, що сприймають зовнішні, вхідні, впливи навколишнього середовища, та наявністю *виходів*, тобто деяких фізичних величин чи явищ, що характеризують результат впливу зовнішнього середовища на рух самого пристрою, комплексу, об'єднання.

Для вивчення процесів, що протікають у системах, необхідно уміти за поточними значеннями вхідних впливів визначати вихідні величини системи. Для цього необхідно тим чи іншим образом описати саму систему мовою математики, або, як прийнято казати, створити математичну модель системи. У теоретичному плані опис системи обумовлює лише знання її *стану* у даний і наступні моменти часу. Цей стан має сповна визначатися математичними співвідношеннями, які однозначно встановлені для даної системи.

*Вхідні впливи* природно у загальному випадку віднести до деякої визначеної множини їхніх миттєвих значень, які позначимо через  $U$ , та до множини моментів часу  $T$ . Це означає, що конкретний вхідний вплив  $u(t)$  належить у даний момент часу  $t$  множині  $U$ .

У загальному випадку не можна вважати, що вхідний вплив  $u(t)$  є будь-яка довільна функція часу. Зазвичай необхідно у кожному конкретному випадку запроваджувати певні обмеження. Вони диктуються, головним чином, умовами задачі, що вирішується, властивостями оточуючого середовища тощо, але завжди мають бути унаявності. Якщо позначити абстрактне правило побудови допустимих функцій  $u(t)$  через  $\omega$ , множина  $\Omega$  допустимих значень функцій  $u(t)$  можна визначити таким образом:

$$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\}.$$

Цей вираз читається так: на множинах  $T$  і  $U$  задана відповідність (правило)  $\omega$  таке, що множина  $T$  відображається у множину  $U$ , утворюючи множину  $\Omega$ . Вочевидь,  $\Omega$  є підмножина множини  $T \times U$ . Для конкретних значень величин наведених вище

вираз можна записати так:

$$u(t) = \omega(t).$$

Оскільки у реальних системах ми маємо справу тільки із відрізками вхідних впливів (час обмежено), клас функцій на множині  $\Omega$  має бути таким, щоб дві різні функції  $\omega_1$  і  $\omega_2$  на сусідніх відрізках часу  $[t_1; t_2]$  и  $[t_2; t_3]$  могли бути замінені однією функцією  $\omega_3$  на сумарному відрізку  $[t_1; t_3]$ . Цю умову запишемо таким чином. Нехай

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega, \quad t_1 < t_2 < t_3 \in T,$$

тоді

$$\omega_3 = \omega_1 \text{ при } t_1 < t \leq t_2,$$

$$\omega_3 = \omega_2 \text{ при } t_2 < t \leq t_3.$$

Розглянемо тепер поняття *стану* системи. Нехай існують деякі величини  $x$ , що характеризують стан системи у даний момент часу, які залежать від попереднього стану, поточного часу і вхідних впливів. Запишемо цю залежність у загальному випадку як

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega],$$

де  $t_1$  – даний момент часу;  $t_0 < t_1$ ;  $x(t_0)$  – стан системи, що передуює даному;  $\omega$  – вхідний вплив, причому  $\omega \in \Omega$ .

Якщо розглядати величини  $x$  як елементи деякої множини  $X$ , а всі моменти часу такими, що належать множині  $T$ , формулу для станів  $x$  можна записати у загальнішій формі

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}.$$

Множина  $T \times T \times X \times \Omega$  містить у якості своїх елементів упорядковані четвірки у вигляді  $t_1, t_0, x(t_0), \omega$ ; отже, відповідність (правило)  $\varphi$  устанавлює відображення (функціональний зв'язок) цих четвірок на множині  $X$ , що містять елементи  $x$ . Отримане відображення  $\varphi$  належить деякій множині  $\Phi$  і має спеціальну назву – *перехідна функція стану системи*.

Перехідна функція стану системи має задовольняти низку вимог, що визначають однозначність запровадженого визначення.

*Динамічною системою* називається математична модель сукупності взаємопов'язаних елементів, що задовольняє таким аксіомам:

1. Задана множина моментів часу  $T$ , множина станів системи  $X$ , множина значень вхідних впливів  $U$ , множина їхніх допустимих значень

$$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\}, \quad (5.121)$$

множина значень вихідних величин  $Y$  та множина їх допустимих значень

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}. \quad (5.122)$$

2. Множина  $T$  є деяка упорядкована підмножина множини дійсних чисел (напрямок часу):  $T \subset R$ .

3. Множина вхідних впливів задовольняє умови:

- а) множина  $\Omega$  не порожня;  
 б) відрізок вхідного впливу  $\omega$  на проміжку часу  $(t_1, t_3]$  має властивість

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega \text{ и } t_1 < t_2 < t_3 \in T, \\ \text{то } \omega_3 = \omega_1 \text{ при } t_1 < t \leq t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \text{ при } t_2 < t \leq t_3. \end{array} \right\} \quad (5.123)$$

#### 4. Існує перехідна функція стану

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}, \quad (5.124)$$

значеннями якої є стани системи

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] \in X, \quad (5.125)$$

в яких вона опиняється у момент  $t \in T$ , якщо у початковий момент часу  $t_0$  вона була у початковому стані  $x(t_0) \in X$  та якщо на неє діяв вхідний вплив  $\omega \in \Omega$ .

Перехідна функція стану має властивості:

а) функція визначена для всіх  $t > t_0$  і не обов'язково визначена для всіх  $t < t_0$  (напрямок руху);

б) функція узгоджена зі своїм початковим значенням, тобто рівність

$$x(t_0) = \varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] \quad (5.126)$$

виконується для будь-яких  $t \in T$ ,  $x \in X$ ,  $\omega \in \Omega$ .

в) для всіх відрізків вхідних впливів  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  таких, що  $\omega_1 = \omega_2$  для всіх  $t_0 < t_2 < t_3$ , має місце рівність

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_2]; \quad (5.127)$$

г) функція має півгрупову властивість, тобто для будь-яких  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $x \in X$ ,  $\omega \in \Omega$  виконується

$$\varphi[t_3; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi[t_3; t_2, x(t_2), \omega]. \quad (5.128)$$

#### 5. Задано вихідне відображення

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}, \quad (5.129)$$

що визначає значення вихідних величин системи.

$$y(t) = \eta[t; x(t)]. \quad (5.130)$$

Наведене означення у найзагальнішій формі описує математичну модель динамічної системи. Ця математична модель може застосовуватися до різних класів фізичних систем, оскільки велика кількість частинних прикладень об'єднується загальною термінологією, основними поняттями і фундаментальними результатами теорії.

Стан системи  $x$  у момент часу  $t_0$ , або пара елементів множини  $T \times X$  називають *подією* (*фазою*) системи. Сама множина  $T \times X$  називається *простором подій*, або *фазовим простором*.

У разі коли деяка множина вхідних впливів  $\Omega_1$  використовується для управління системою, вона зветься *управлінням*. Управління переводить стан  $x(t_0)$  у стан  $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ . При цьому система перебуває у *русі*, й описує у просторі станів *траєкторію*.

---

**Методи дослідження динамічних моделей**


---

Залежно від цілей дослідження використовують різні методи опису та дослідження динамічних систем. Один із поширених методів ґрунтується на тому, що широкий клас динамічних систем у скінченновимірному лінійному наближенні можна записати у вигляді

$$\mathbf{R}(t) = \int_{-\infty}^t K(t, \tau) \mathbf{I}(\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

де  $\mathbf{I}$  – вектор вхідних впливів,  $\mathbf{R}$  – вектор реакцій системи,  $K$  – матриця імпульсних перехідних функцій системи,  $t, \tau$  – час. У нелінійному випадку додатково враховується залежність  $K$  від  $\mathbf{I}$ .

Інші методи передбачають використання диференціальних рівнянь для опису динаміки систем. Нехай поведінка системи описується сукупністю рівнянь

$$\frac{dr_i}{dt} = f_i(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.2)$$

де  $\mathbf{r}$  – вектор стану (точка) системи,  $\alpha_i$  – параметри системи. Тоді стаціонарний стан є розв'язком рівняння

$$f_i(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Якщо розв'язок  $r_i = a_i$  є особлива точка, питання про стійкість отриманого стаціонарного стану вирішується розрахунком коренів характеристичного рівняння

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \quad A = \left. \frac{\partial f_i}{\partial r_k} \right|_{r_s = a_s}. \quad (6.3)$$

Стаціонарний стан є стійкий, якщо  $r_i \lambda_i < 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), де  $\lambda_i$  – корені рівняння (6.3). Точки, в яких умови стійкості порушуються, називають критичними, або екстремальними. Сформульована умова не стосується стійкості  $\mathbf{r}(t)$  за малих збурень  $\delta \mathbf{I}$  вхідних змінних  $\mathbf{I}$ .

Найбільш розвинуеною є теорія динамічних систем другого порядку. Нехай (6.2) є автономна система диференціальних рівнянь, в якій одна частина рівнянь

$$\frac{dr_{i_1}}{dt} = f_{i_1}(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \quad i_1 = \overline{1, i_1^0}, \quad (6.4)$$

описує повільні зміни, а інша –

$$\varepsilon \frac{dr_{i_2}}{dt} = \tilde{f}_{i_2}(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \quad i_2 = \overline{i_1^0 + 1, n}, \quad (6.5)$$

$\tilde{f}_{i_2} = \varepsilon f_{i_2}$  – швидкі. При  $\varepsilon = 0$  системи (6.4), (6.5) переходять до системи

$$\begin{cases} \frac{dr_{i_1}}{dt} = f_{i_1}(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \\ 0 = \tilde{f}_{i_2}(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \end{cases} \quad (6.6)$$

яку називають виродженою. Систему (6.5) називають приєднаною.

При дослідженні таких систем важливу роль відіграє теорема О.М. Тихонова:

*Розв'язок повної системи (6.4), (6.5) наближається до розв'язку виродженої системи (6.6) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  якщо:*

- а) розв'язок  $\bar{r}_{i_1^0+1}, \dots, \bar{r}_n$  системи  $\tilde{f}_{i_2}(r_1, r_2, \dots, r_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  ( $i_2 = \overline{i_1^0 + 1, n}$ ) є стійка ізольована точка системи (6.5) за всіх значень  $r_1, \dots, r_{i_1^0}$ ;
- б) початкові умови  $r_{i_1^0+1}^0, \dots, r_n^0$  для системи (6.5) попадають до області впливу стійкої особливої точки;
- в) розв'язок повної системи та приєднаної системи (6.5) є єдиний, і праві частини цих систем неперервні.

Ця теорема дозволяє знизити порядок системи (6.2) і надає можливість її практичного дослідження. Загальна схема дослідження поведінки динамічних систем у цьому підході є така.

1. Складають блок-схему структурно-функціональної організації системи, що досліджується.
2. Складають математичну модель системи із урахуванням доцільних обсягу та рівня алгоритмізації; виділяють системи швидких та повільних рухів; переводять систему до безрозмірного вигляду; знижують порядок системи рівнянь.
3. Досліджують стійкість рухів системи, визначають її стаціонарні точки, досліджують характер особливих критичних точок.
4. На основі якісного аналізу обирають параметри для кількісного дослідження моделі, отримують чисельні розв'язки і верифікують їх за експериментальними даними.
5. Оцінюють області та межі можливого застосування моделі, можливі результати і соціально-економічні наслідки її використання у фундаментальних та прикладних дослідженнях.

Висновки щодо стійкості динамічних систем можна отримати також на основі інтегрального представлення вигляду (6.1). При цьому функцію  $K(t_0, t, \mathbf{r}_0)$  треба

обрати так, щоб кожній інтегральній кривій вигляду (6.2) із початковим вектором відповідала в (6.1) вектор-функція

$$\mathbf{r}^0(t) = K(t_0, t, \mathbf{r}_0)\mathbf{r}^0, \quad K(t_0, t_0, \mathbf{r}_0)\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}_0, \quad (6.7)$$

яку отримують, обираючи  $\mathbf{I}(\tau)\mathbf{r}^0\delta(\tau - t_0)$ , де  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака. Виключаючи з (6.7) час  $t$ , отримують рівняння інтегральної кривої, записане у фазових змінних.

Особливим точкам автономної системи (6.2), яка не містить у правій частині часу  $t$  в явному вигляді, відповідають такі стани  $\bar{\mathbf{r}}$  у просторі фазових змінних, за яких

$$\mathbf{r}'(t) = K'_t(\bar{t}, t)K^{-1}(\bar{t}, \bar{t})\bar{\mathbf{r}} \equiv 0, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (6.8)$$

Особлива точка  $\bar{\mathbf{r}}$  буде стійкою, якщо за будь-якого скільки завгодно малого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta > 0$ , що

$$\|\mathbf{r}_0 - \bar{\mathbf{r}}\| < \delta \rightarrow \|\mathbf{r}^0(t) - \bar{\mathbf{r}}\| < \varepsilon. \quad (6.9)$$

В інших випадках особлива точка буде нестійкою.

Умову (6.9) для представлення (6.1) згідно з теоремою Тихонова можна записати у вигляді

$$\| [r_{0i_2}]_{i_0+1}^n - [\bar{r}_{0i_2}]_{i_0+1}^n \| < \delta \rightarrow \| r_{0i_2}^0(t) ]_{i_0+1}^n - [\bar{r}_{0i_2}]_{i_0+1}^n \| \leq \varepsilon. \quad (6.10)$$

яка виконується рівномірно відносно  $[r_{i_1}]_1^{i_1}$ . Зі збільшенням  $t$  внаслідок зростання  $r_{i_2}^0(t)$  друга нерівність у (6.10) виконується все швидше і за все більших значень  $\delta$ . Це означає, що у граничному випадку достатньо розглядати лише розв'язок виродженої системи.

Отже, результати, що отримують за допомогою інтегральних та диференціальних представлень, за суттю є однакові. Проте, у силу більшої стійкості результатів інтегрування порівняно з диференціюванням, а також компактності запису використання інтегральних представлень має певні теоретичні та практичні переваги. Варто відзначити ще одну перевагу інтегральних представлень, що в деяких випадках має практичне значення. Вона полягає у тому, що диференціальне представлення у деяких випадках (у певних точках, у певні моменти часу) втрачає фізичний, економічний чи інший зміст внаслідок того, що використовуються функції, що мають у цих точках розриви. Інтегральні представлення зазвичай можуть застосовуватися й у таких випадках.

Впродовж останніх десятиріч набули розвитку деякі інші підходи до вивчення динамічних систем. Серед них варто відзначити такі.

Моделювання процесів самовідтворення, росту та розвитку систем на основі теорії автоматів призвело до розвитку алгоритмічно-автоматного опису динамічних систем, а в подальшому – до розвитку методів нейронних мереж і, зокрема, створення динамічних перцептонів, призначених для моделювання інтелектуальних динамічних систем, структур складних систем тощо.

Важливий клас моделей динамічних систем присвячений аналізу квазістохастичної поведінки детермінованих моделей (дивним атракторам). Встановлено, що деякі динамічні системи за певних умов породжують рухи, що можна розглядати як випадкові (квазістохастичні). Найбільш дослідженою є модель Лоренца, що описує теплоу конвекцію між двома площинами з різною температурою. Вона може бути записана у такий спосіб:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{6.11}$$

де  $x$  – інтенсивність конвекційного перенесення,  $y$  – різниця між спадними та висхідними потоками тепла,  $z$  – відхилення вертикального розподілу температури від рівноважного лінійного профілю,  $\sigma$  – число Прандтля,  $r$  – число Релея,  $b$  – стала, що характеризує розміри системи.

При  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  і  $r$  у межах 14–48,5 система (6.11) має різноманітні осцилюючі розв'язки, у тому числі й дивні атрактори. При  $r = 28$  траєкторії нерегулярно переходять з одного півпростору в інший.

Встановлено, що складну квазістохастичну поведінку за певних умов виявляють багато фізичних, хімічних, біологічних, технічних, економічних, екологічних та інших систем, у тому числі в одно- та двовимірному випадках. З виникненням дивних атракторів пов'язані такі властивості динамічних систем, як ергодичність, перемішування, гіперболічність та інші.

Під ергодичністю розуміють збіг середніх за часом значень із середніми за фазовим простором. Область фазового простору називають областю із перемішуванням, якщо у її довільній підобласті є точки фазової траєкторії, що проходять через будь-яку іншу підобласть даної області. Гіперболічність системи полягає в тому, що всі фазові траєкторії динамічної системи є сідловими, а стійка та нестійка сепаратриси неперервно залежать від траєкторій. Виявлення таких властивостей є доведенням необхідної й достатньої умов наявності квазістохастичних розв'язків.

Ще одним напрямом розвитку математичного моделювання динамічних систем є підхід, що ґрунтується на моделях автохвильових процесів. Такі процеси можуть виникати й розповсюджуватися в активних кінетичних середовищах внаслідок втрати стійкості однорідного стану. Кожен елемент такого середовища є джерелом енергії і взаємодіє із сусідніми елементами через процеси перенесення. Під автохвильовими процесами розуміють також хвилі в активних середовищах, що самопідтримуються і зберігають свої характеристики (період, довжина хвилі, амплітуда й форма) сталими за рахунок розподіленого в середовищі джерела енергії. За певних умов ці характеристики залежать тільки від локальних властивостей середовища й не залежать від початкових умов. На достатньому віддаленні від меж середовища, вони не залежать також від межових умов і лінійних розмірів системи. Математичною



моделлю активної кінетичної системи є рівняння вигляду

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = f_i(q_i) + D_i \nabla^2 q_i, \quad (6.12)$$

де  $f_i(q_i)$  – нелінійні функції, що описують взаємодію  $q_i$  компонент,

У межах моделі (6.12) можна описати збурення, які розповсюджуються у вигляді імпульсу, що біжить, генерацію хвиль автономними джерелами імпульсної активності, стоячі хвилі, синхронні автохвилі у всьому просторі, квазістохастичні хвилі, дисипативні структури тощо, Дані типи хвиль визначаються переважно властивостями параболічних рівнянь і розповсюджуються в активних (неконсервативних) системах, Це відрізняє їх від хвиль солітонного типу, що визначаються переважно властивостями гіперболічних хвиль і можуть розповсюджуватися в консервативних середовищах,

Усе більшого значення в моделюванні динамічних систем набувають методи, що ґрунтуються на теоретико-груповому підході, Це визначається необхідністю врахування інформації про властивості симетрії об'єктів, що досліджуються, У рамках цього підходу, зокрема, показано, що морфологічна подібність змін пропорцій окремих частин динамічної системи означає афінну еквівалентність форм, що аналізуються,

Методи теорії алгебраїчних інваріантів широко використовуються в задачах автоматичного управління, Зокрема, вони дозволяють визначити умови розв'язності задач інваріантності, чутливості й автономності при зовнішніх та параметричних впливах, Ці умови виражаються через алгебраїчні інваріанти групи лінійних перетворень рівнянь динамічної системи,

Важливим напрямом асимптотичних методів теорії нелінійних коливань є метод малого параметра Крилова–Боголюбова–Мітропольського (КБМ), Останнім часом асимптотичні методи набули подальшого узагальнення та розвитку під назвою методів розв'язування жорстких систем, В околі критичної точки динамічна система (6.6) часто може бути записана у вигляді

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon f_1(r, t), \quad (6.13)$$

де  $\varepsilon$  – достатньо малий параметр, Тому ефективними є асимптотичні методи, сутність яких полягає у побудові наближених розв'язків, що задовольняють (6.13) із похибкою  $\varepsilon^{m+1}$ , де  $m$  – порядок наближення на достатньо великому часовому інтервалі, Рівняння першого наближення має вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0(\xi), \quad f_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(r, \tau) d\tau. \quad (6.14)$$

За достатньо загальних умов справедливо:

$$|r(t) - \xi(t)| < \delta, \quad 0 < t < L/\varepsilon, \quad (6.15)$$

де  $r, \varepsilon$  – розв'язки систем (6.13), (6.14) відповідно,  $\delta$  – скільки завгодно мале додатне число,  $L$  – скільки завгодно велике число,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, L)$ .

---

## Синтез оптимальних лінійних систем за квадратичного критерію

---

### 7.1. Синтез систем, оптимальних по мінімуму енергії

#### 7.1.1. Формулювання задачі

Термін “мінімум енергії” означає, що необхідно мінімізувати величину, що зв’язана із енергією електричного сигналу.

##### Приклад 1.

Знайдемо сигнал, який передає задану кількість енергії у навантаження. Тобто розглянемо просту  $LC$ -ланцюжок. До виходу ланцюжка приєднаємо опір  $R_H$ . Нехай  $x_1(t)$  – напруга на опорі навантаження  $R_H$ , а  $u(t)$  – вхідна (або управляюча) напруга. Рівняння такого ланцюга має вигляд

$$RR_H C \dot{x}(t) + (R + R_H)x_1(t) = R_H u(t).$$

Або

$$\dot{x}_1(t) = -ax_1(t) + bu(t). \quad a = \frac{R + R_H}{RR_H C}; \quad b = \frac{1}{RC}. \quad (7.1)$$

Нехай конденсатор  $C$  при  $t = 0$  не заряджений, тобто  $x_1(0) = 0$ .

Енергія, що розсіюється на  $R_H$  за час  $[0, T]$ , дорівнює

$$E_H = \frac{1}{R_H} \int_0^T x_1^2(t) dt. \quad (7.2)$$

Визначимо енергію, що надходить на вхід. Енергія  $E_R$ , що розсіюється на опорі  $R$ :

$$E_R = \frac{1}{R} \int_0^T [u(t) - x_1(t)]^2 dt. \quad (7.3)$$

Енергія, що накопичується на конденсаторі, дорівнює (миттєва потужність, що надходить до конденсатора, дорівнює  $Cdx_1(t)/dt$ )

$$E_C = C \int_0^T [x_1(t)\dot{x}_1(t)]dt. \quad (7.4)$$

Отже, енергія, що надходить на вхід, дорівнює

$$E_{bx} = E_H + E_R + E_C.$$

Якщо підставити отримані вирази для складових енергії, після перетворень отримаємо

$$E_{bx} = \frac{1}{T} \int_0^T [u^2(t) - x_1(t)u(t)]dt. \quad (7.5)$$

Тепер можна сформулювати таку задачу про мінімум енергії.

Дано систему, що описується рівнянням (7.1). Нехай  $x_1(0) = 0$ . Треба знайти вхід  $u(t)$ , який переводить задану кількість енергії  $E_H$  на опір навантаження і мінімізує при цьому вхідну енергію.

Задана лінійна система (що сповна управляєма) зі змінними коефіцієнтами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.6)$$

Крім того, заданий кінцевий час  $T_f$  і кінцевий стан  $\mathbf{x}(T_f) = \theta$ . Дана додатно визначена матриця  $N(t)$  розмірності  $(n+r) \times (n+r)$ .

$$N(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & M(t) \\ M^T(t) & R(t) \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Функціонал записується у вигляді

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} [(\mathbf{x}(t), Q(t)\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t)) + 2(\mathbf{x}(t), M(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.8)$$

Треба знайти управління  $\mathbf{u}(t)$ , яке

- переводить стан  $\mathbf{x}_0$  у нуль за фіксований час  $T_f$ ;
- мінімізує функціонал  $J(\mathbf{u})$ .

Отримаємо необхідні умови для цієї задачі на ґрунті принципу максимуму. Гамільтоніан, який є квадратична функція від  $\mathbf{u}(t)$ , запишемо у вигляді

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t), Q(t)\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t)) +$$

$$+(\mathbf{x}(t), M(t)\mathbf{u}(t)) + (A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) + (B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)). \quad (7.9)$$

### Теорема. Необхідні умови

Якщо  $\mathbf{u}^*(t)$  – оптимальне управління і  $\mathbf{x}^*(t)$  – оптимальна траєкторія, що відповідає оптимальному управлінню  $\mathbf{u}^*(t)$ , існує відповідна додаткова змінна  $\mathbf{p}^*(t)$ , що задовольняє такі умови.

- стан  $\mathbf{x}^*(t)$  і  $\mathbf{p}^*(t)$  задовольняють рівняння

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t)\mathbf{x}^*(t) + B(t)\mathbf{u}^*(t), \quad (7.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -Q(t)\mathbf{x}^*(t) - M(t)\mathbf{u}^*(t) - A(t)\mathbf{p}^*(t), \quad (7.11)$$

із межовими умовами

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}^*(T_f) = 0. \quad (7.12)$$

- для будь-яких  $\mathbf{u}(t) \in R_r$  ( $\mathbf{u}(t)$  не обмежене) і  $t \in [t_0, T_f]$  справджується співвідношення вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{u}^*(t), R(t)\mathbf{u}^*(t)) + (\mathbf{x}^*(t), M(t)\mathbf{u}^*(t)) + (B(t)\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t)) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t)) + (\mathbf{x}^*(t), M(t)\mathbf{u}(t)) + (B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t)). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Отримаємо тепер рівняння, які єдиним образом зв'язують управління  $\mathbf{u}^*(t)$  із  $\mathbf{x}^*(t)$  та  $\mathbf{p}^*(t)$ . Ця процедура аналогічна процедурі, що виконується для задач на оптимум за швидкістю та розходу палива. Але наявні й суттєві відмінності.

Нерівність (7.13) означає, що функція

$$\varphi[\mathbf{u}(t)] = \frac{1}{2}(\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t)) + (\mathbf{x}^*(t), M(t)\mathbf{u}(t)) + (B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t)) \quad (7.14)$$

має абсолютний мінімум при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ . Оскільки  $\mathbf{u}(t)$  не обмежене і  $\varphi[\mathbf{u}(t)]$  є гладка функція від  $\mathbf{u}(t)$ , мінімум відшукується за умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}(t)} = R(t)\mathbf{u}(t) + M(t)\mathbf{x}^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}^*(t), \quad (7.15)$$

звідки випливає

$$R(t)\mathbf{u}^*(t) + M(t)\mathbf{x}^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}^*(t) = 0. \quad (7.16)$$

Оскільки матриця  $R(t)$  невыроджена, отримаємо

$$\mathbf{u}^*(t) = -R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}^*(t)]. \quad (7.17)$$

Припущення про те, що  $R(t)$  є додатно визначена, гарантує, що рівняння (7.17) визначає єдиний мінімум гамільтоніана при  $\mathbf{u}(t)$ . Квадратичний функціонал і відсутність обмежень на величину управління забезпечує лінійність оптимального управління.

### 7.1.2. Синтез оптимального управління

Для відшукування оптимальних траєкторій і оптимального управління підставимо (7.17) у канонічне рівняння (7.10), (7.11). Отримаємо таку систему  $2n$  рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)M(t)] \mathbf{x}^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}^*(t); \quad (7.18)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [-Q(t) + M(t)R^{-1}(t)M(t)] \mathbf{x}^*(t) + [-A^T(t) + M(t)R^{-1}(t)B^T(t)]\mathbf{p}^*(t). \quad (7.19)$$

Для зручності позначимо

$$\left. \begin{aligned} W_{11}(t) &= A(t) - B(t)R^{-1}(t)M(t); \\ W_{12}(t) &= -B(t)R^{-1}(t)B^T(t); \\ W_{21}(t) &= -Q(t) + M(t)R^{-1}(t)M(t); \\ W_{22}(t) &= -A^T(t) + M(t)R^{-1}(t)B^T(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Тепер рівняння (7.10), (7.11) можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ W_{21}(t) & W_{22}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Нехай  $\Psi(t_1, t_0)$  – фундаментальна матриця системи (7.19). Представимо її у вигляді

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t, t_0) & \Psi_{12}(t, t_0) \\ \Psi_{21}(t, t_0) & \Psi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Тоді маємо

$$\mathbf{x}^*(t) = \Psi_{11}(t, t_0)\mathbf{x}^*(t_0) + \Psi_{12}(t, t_0)\mathbf{p}^*(t_0); \quad (7.23)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = \Psi_{21}(t, t_0)\mathbf{x}^*(t_0) + \Psi_{22}(t, t_0)\mathbf{p}^*(t_0). \quad (7.24)$$

Необхідно, щоб  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ ;  $\mathbf{x}^*(T_f) = 0$ . Із рівності (7.24) отримаємо

$$\Psi_{12}(T_f, t_0)\mathbf{p}^*(t_0) = -\Psi_{11}(T_f, t_0)\mathbf{x}_0. \quad (7.25)$$

Якщо  $\det \Psi_{12}(T_f, t_0) \neq 0$ , знаходимо початкове значення

$$\mathbf{p}^*(t_0) = -\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0)\Psi_{11}(T_f, t_0)\mathbf{x}_0. \quad (7.26)$$

Підставимо цей вираз у рівності (7.17), (7.20) та у (7.21) для оптимального управління. Отримуємо:

$$\mathbf{x}^*(t) = [\Psi_{11}(t, t_0) - \Psi_{12}(t, t_0)\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0)\Psi_{11}(T_f, t_0)] \mathbf{x}_0; \quad (7.27)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = [\Psi_{21}(t, t_0) - \Psi_{22}(t, t_0)\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0)\Psi_{11}(T_f, t_0)] \mathbf{x}_0. \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -R^{-1}(t) \left\{ M(t) [\Psi_{11}(t, t_0) - \Psi_{12}(t, t_0)\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0)\Psi_{11}(T_f, t_0)] \right. \\ &\quad \left. + B^T(t) [\Psi_{21}(t, t_0) - \Psi_{22}(t, t_0)\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0)\Psi_{11}(T_f, t_0)] \right\} \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Матриця  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  не залежить від початкового стану. Вона залежить від матриць  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $M(t)$ ,  $R(t)$ , від початкового часу  $t_0$  та від кінцевого часу  $T_f$ . Невиродженість цієї матриці гарантує єдиність оптимального управління  $u^*(t)$ , яке визначається рівністю (7.29). При цьому воно екстремальне.

Приклад 2.

Нехай дана система вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \\ x_2(0) &= x_{20}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Вважатимемо, що величина управління  $u(t)$  не обмежена. Знайдемо управління  $u(t)$ , що переводить початковий стан системи  $(x_{10}, x_{20})$  у  $(0, 0)$  за час  $T_f$ , тобто  $x_1(T_f) = x_2(T_f) = 0$  і мінімізує функціонал

$$E = E(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} u^2(t) dt. \quad (7.31)$$

Для відшукування оптимального управління, знайдемо спочатку управління, що задовольняє необхідні умови (тобто екстремальне управління). Запишемо гамільтоніан для системи (7.30) та функціонала (7.31):

$$H = \frac{1}{2} u^2(t) + x_2(t) p_1(t) + u(t) p_2(t). \quad (7.32)$$

Екстремальне управління має мінімізувати гамільтоніан. Оскільки він є квадратична функція від  $u(t)$ , екстремальне управління можна знайти, якщо покласти  $\partial H / \partial u(t) = 0$  і перевірити, чи додатна  $\partial^2 H / \partial u^2(t)$ . Оскільки

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = u(t) + p_2(t),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = 1,$$

приходимо до висновку, що екстремальним є управління

$$u(t) = -p_2(t); \quad t \in [0, T_f]. \quad (7.33)$$

Розв'язанням системи рівнянь відносно  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  при початкових умовах  $p_1(0) = \pi_1$ ,  $p_2(0) = \pi_2$  будуть функції

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 = \text{const}; \\ p_2(t) &= \pi_2 - \pi_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Отже, екстремальним буде управління вигляду

$$\bar{u}(t) = \pi_2 - \pi_1 t. \quad (7.35)$$

Звідси випливає, що оптимальне управління, якщо воно існує, має бути лінійною функцією часу із початковим значенням  $\pi_2$  і нахилом  $\pi_1$ .

Визначимо  $\pi_1, \pi_2$  через початковий стан і  $T_f$ . Підставимо управління, що отримано, у рівняння системи. Отримаємо

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + x_{20}t - \frac{1}{2}\pi_2 t^2 + \frac{1}{6}\pi_1 t^3; \\ x_2(t) &= x_{20} - \pi_2 t + \frac{1}{2}\pi_1 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Оскільки має бути  $x_1(T_f) = x_2(T_f) = 0$ , із цієї системи знаходимо, що  $\pi_1$  та  $\pi_2$  однозначно визначаються співвідношеннями

$$\pi_1 = \frac{6}{T_f^2} (2x_{10} + x_{20}T_f); \quad (7.37)$$

$$\pi_2 = \frac{2}{T_f^2} (3x_{10} + 2x_{20}T_f). \quad (7.38)$$

Екстремальне управління виражається формулою

$$u(t) = -\frac{2}{T_f^2} (3x_{10} + 2x_{20}T_f) + \frac{6}{T_f^2} (2x_{10} + x_{20}T_f). \quad (7.39)$$

Це оптимальне управління – єдине.

Знайдемо тепер мінімальну енергію  $E^*$ , яка потрібна для оптимального управління. Для цього підставимо (7.39) у функціонал (7.31) і зинтегруємо отриманий вираз. Маємо

$$E^* = E^*(x_{10}, x_{20}, T_f) = \frac{2}{T_f^3} (2x_{10}^2 + 3x_{10}x_{20}T_f + x_{20}^2 T_f^2). \quad (7.40)$$

Вибір  $T_f$  є вельми критичний для енергії. Нехай  $x_{10} = 1, x_{20} = -1$ . Розглянемо графік залежності  $E^*(1, -1, T_f)$ . За значень  $T_f < 2$  енергія досить велика, а потім за  $T_f = 3$  досягає точки перегину і далі мінімальна необхідна енергія спадає повільно. Побудуємо оптимальні траєкторії із початкового стану  $(1, -1)$  у  $(0, 0)$ . Звернемо увагу на значні зміни, що мають місце за змінювання  $T_f$ . Хоча енергія за  $T_f > 3$  змінюється повільно, траєкторії відрізняються суттєво. Зі зростанням  $T_f$  суттєво зростає перерегулювання. Це показує важливість урахування змінювання параметрів.

Точку перегину кривої, що відображає поведінку енергії за різних  $T_f$ , визначимо, прирівнявши нулю  $\partial E^*/\partial T_f = 0$ . Бачимо, що точка перегину має місце, коли

$$x_{10}T_f = -3x_{20}.$$

Зазначимо, що за незаданого кінцевого часу ( $T = \infty$ ) задача про мінімум енергії не має розв'язання, оскільки у цьому разі для всіх  $t$  маємо  $u(t) = 0$ .

Розглянемо той самий об'єкт (7.30) і функціонал

$$J_1(u) = kT + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt = \int_0^T [k + u^2(t)] dt. \quad (7.41)$$

$T$  не задано,  $k > 0$ .

Знайдемо управління, що переводить систему із початкового стану у нульовий й яке мінімізує функціонал (7.41). Маємо задачу із закріпленим кінцем і незададим часом переходу

Якщо розв'язувати задачу, вважаючи час заданим, у (7.41) член  $kT$  буде відомою сталою і задача мінімізації функціоналу (7.41) буде еквівалентною мінімізації функціоналу (7.31). У цьому разі управління, що визначається (7.39), залишається оптимальним і мінімальне значення функціоналу із урахуванням (7.39) дорівнює

$$J_1(x_{10}, x_{20}, T) = kT + \frac{2}{T^3} (2x_{10}^2 + 3x_{10}x_{20}T + x_{20}^8 T^2). \quad (7.42)$$

Визначимо екстремальні точки  $J_1(x_{10}, x_{20}, T)$ .

$$\frac{\partial J_1(x_{10}, x_{20}, T)}{\partial T} = 0.$$

Звідси

$$k - \frac{18x_{10}^2}{T^4} - \frac{12x_{10}x_{20}}{T^2} - \frac{2x_{20}^2}{T^2} = 0. \quad (7.43)$$

Корені цього рівняння дорівнюють

$$\left. \begin{aligned} T_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( \beta x_{20} \pm \sqrt{\beta^2 x_{20}^2 + 12\beta x_{10}} \right); \\ T_{3,4} &= \frac{1}{2} \left( -\beta x_{20} \pm \sqrt{\beta^2 x_{20}^2 - 12\beta x_{10}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

$\beta^2 = 2/k$ . Кінцевий час  $T$  відповідає локальному мінімуму функціонала (7.41) тільки тоді, коли

$$0 < T_i < -3 \frac{x_{10}}{x_{20}}, \quad (7.45)$$

або

$$T_i > -6 \frac{x_{10}}{x_{20}}. \quad (7.46)$$

Якщо  $T_i$  міститься всередині цього інтервалу, це відповідає локальному максимуму. Вочевидь, ті самі значення коренів можна визначити через гамільтоніан, якщо додати  $kT$ . Із урахуванням знайдених інтервалів змінювання кінцевого часу, за яких функціонал ( ) має мінімум, отримуємо вирази для оптимальних управлінь.



- якщо  $x_{10} \geq 0$ ,  $x_{20} \geq 0$  або  $x_{20} < 0$ ,  $x_{10} \geq \beta x_{20}^2/12$ , мінімуму відповідає тільки час  $T_1$ . Значить, оптимальне управління єдине і кінцевий час дорівнює  $T_1$ .
- якщо  $x_{10} < 0$ ,  $x_{20} \leq 0$  або  $x_{20} \geq 0$ ,  $x_{10} \leq \beta x_{20}^2/12$ , мінімуму відповідає тільки час  $T_2$ . Значить, оптимальне управління єдине і кінцевий час дорівнює  $T_2$ .
- якщо

$$x_{20} > 0; \text{ и } -\frac{\beta x_{20}^2}{12} < x_{10} < 0,$$

$T_1$  і  $T_3$  відповідають двом локальним мінімумам, тоді як  $T_2$  відповідає локальному максимуму. У цьому разі існує два екстремальних управління, і тому може виявитися два оптимальних управління.

- якщо

$$x_{20} < 0; \text{ и } 0 < x_{10} < \frac{\beta x_{20}^2}{12},$$

$T_1$  і  $T_3$  відповідають двом локальним мінімумам, тоді як  $T_4$  відповідає локальному максимуму. У цьому разі існує два екстремальних управління, і тому може бути два оптимальних управління.

### 7.1.3. Управління обмежено за величиною

$$|u_j(t)| \leq 1. \quad (7.47)$$

Позначимо

$$\mathbf{w}^*(t) = -R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}^*(t)]. \quad (7.48)$$

Додамо до обох частин нерівності (7.47) величину

$$\frac{1}{2}(w^*(t), R(t)w^*(t)).$$

Умова мінімуму гамільтоніана вздовж оптимальної траєкторії для цього випадку із урахуванням запровадженого позначення буде

$$\left( [\mathbf{u}^*(t) + w^*(t)], R(t)[\mathbf{u}^*(t) + w^*(t)] \right) \leq \left( [\mathbf{u}(t) + w^*(t)], R(t)[\mathbf{u}(t) + w^*(t)] \right) \quad (7.49)$$

для всіх  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ .

Із цієї необхідної умови випливає

$$\begin{cases} u_j^*(t) = -w_j^*(t), & \text{якщо } |w_j^*(t)| \leq 1; \\ u_j^*(t) = -\text{sign } w_j^*(t), & \text{якщо } |w_j^*(t)| > 1. \end{cases} \quad (7.50)$$

Бачимо, що оптимальне управління для випадку, коли управління обмежене, виражається через оптимальне управління без обмежень на управління й воно визначається однозначно. Компоненти оптимального управління є неперервні функції часу на

відміну від компонент управління, оптимальних за швидкодією та витратам палива, що є кусково - сталі функції.

Позначимо функцію в (7.50) через  $\text{SGN}$  :  $\mathbf{u}^*(t) = \text{SGN}(w^*(t))$ . Із урахуванням

$$\mathbf{u}_\infty^*(t) = -R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}_\infty^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}_\infty^*(t)]. \quad (7.51)$$

отримаємо

$$\mathbf{u}_K^*(t) = -\text{SGN}\left\{R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}_K^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}_K^*(t)]\right\}. \quad (7.52)$$

Після підстановки цього оптимального управління у сполучені рівняння відносно  $\mathbf{x}_K^*(t)$ ,  $\mathbf{p}_K^*(t)$  отримаємо

$$\dot{\mathbf{x}}_K^*(t) = A(t)\mathbf{x}_K^*(t) - B(t)\text{SGN}\left\{R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}_K^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}_K^*(t)]\right\}. \quad (7.53)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_K^*(t) = -Q(t)\mathbf{x}_K^*(t) - A(t)\mathbf{p}^*(t) - M(t)\text{SGN}\left\{R^{-1}(t)[M(t)\mathbf{x}_K^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}_K^*(t)]\right\} \quad (7.54)$$

із межовими умовами

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}^*(T_f) = 0. \quad (7.55)$$

Ця система нелінійна із-за наявності в ній операції  $\text{SGN}$ . У зв'язку з цим її розв'язують ітераційними методами.

При проектуванні систем, оптимальних за швидкодією та мінімуму витрат палива виникають проблеми, пов'язані із встановленням оптимального закону управління та із реалізацією оптимальних систем зі зворотним зв'язком. Навіть коли система, що управляється, лінійна, майже неможливо отримати загальні аналітичні результати як у випадку оптимізації за витратами палива, так й у випадку оптимальної швидкодії.

До сих пір ми розглядали розімкнені системи управління. Замкнена система управління у лінійному випадку описується такою динамічною задачею:

Нехай  $\mathbf{x}(t)$  - вектор стану системи розмірності  $n$ . Матриця  $A(t)$  - розмірності  $n \times n$ ,  $\mathbf{u}(t)$  - вектор управління розмірності  $r$ . Матриця  $B(t)$  - розмірності  $n \times r$ ,  $\mathbf{y}(t)$  - вектор виходу системи розмірності  $m$ . Матриця  $C(t)$  - розмірності  $m \times n$ .  $0 < m \leq r \leq n$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Позначимо

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t), \quad (7.57)$$

$\mathbf{z}(t)$  - бажаний вихід системи.

Функціонал має вигляд

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}(T), F\mathbf{e}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{e}(t), Q(t)\mathbf{e}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.58)$$

Матриця  $F$  – додатно піввизначена матриця розмірності  $m \times m$ ; матриця  $Q$  – додатно піввизначена матриця розмірності  $m \times m$ ; матриця  $R$  – додатно визначена матриця розмірності  $r \times r$ .  $T$  фіксовано. Припустимо, що обмеження на управління відсутні.

Член  $(\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))$  визначає вартість управління. Цей член часто називають енергією управління.

Член  $(\mathbf{e}(t), Q(t)\mathbf{e}(t))$  визначає вартість виходу системи. Чем більша похибка, тим більший “штраф” накладається на систему.

Член  $(1/2)(\mathbf{e}(T), F\mathbf{e}(T))$  називають вартістю кінцевого стану. Його мета – гарантувати “малість” похибки у кінцевий момент часу  $T$ . Тобто цей член має бути у наявності, коли величина  $\mathbf{e}(T)$  є особливо важлива.

У загальному випадку залежність матриць  $Q$  і  $R$  від часу зв’язана із фізичною сутністю об’єкта управління. Припустимо, що у початковий момент часу  $t_0$  початковий стан системи відомий. Тоді відомий також і вихід системи.

$$\mathbf{y}(t_0) = C(t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

Вектор  $\mathbf{z}(t_0)$  може виявитися таким, що початкова похибка  $\mathbf{e}(t_0)$  буде великою. У цьому разі маємо вибирати матрицю  $Q(t)$  такою, щоб можливо менше “карати систему” за великі початкові похибки, ніж за похибки у подальшому. Для цього матрицю  $Q(t)$  треба вибирати такою, щоб для довільного сталого вектора  $\mathbf{b}$  скалярні добутки задовольняли нерівність

$$(\mathbf{b}, Q(t_1)\mathbf{b}) \leq (\mathbf{b}, Q(t_2)\mathbf{b}); \quad t_1 < t_2.$$

Нехай тепер  $\Phi(t, t_0)$  – фундаментальна матриця лінійної системи ((7.56) і  $\mathbf{x}(t_0)$  – початковий стан. Тоді маємо

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \left[ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^T \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right]. \quad (7.59)$$

Похибка визначається рівністю

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - C(t)\Phi(t, t_0) \left[ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^T \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right]. \quad (7.60)$$

Якщо початковий стан і бажаний вихід зв’язані рівністю

$$\mathbf{z}(t_0) = C(t_0)\Phi(t_0, t_0)\mathbf{x}(t_0), \quad t \in [t_0, T], \quad (7.61)$$

оптимальне управління  $\mathbf{u}(t) = 0$  і мінімальна вартість  $J^* = 0$ .

Якщо  $\mathbf{u}(t) \neq 0$ , мінімальна вартість  $J^* > 0$ .

На відміну від задач синтезу розімкненого оптимального управління, коли кінцевий стан задавався у вигляді точки ( $\mathbf{x}(T) = 0$ ), або області мети, тут кінцевий стан невизначене сповна, що має суттєве практичне значення.

## 7.2. Розв'язання задачі 1

Дана система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}.\end{aligned}\tag{7.62}$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [k + u^2(t)] dt.$$

Запишемо гамільтоніан.

$$H = \frac{1}{2} [k + u^2(t)] + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t) - [2x_1(t) + 3x_2(t)]p_2(t).\tag{7.63}$$

Маємо

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + p_2(t) = 0; \quad u(t) = -p_2(t).\tag{7.64}$$

Канонічна система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) - x_2(t) &= 0; \\ \dot{x}_2(t) + 3x_2(t) + 2x_1(t) &= u(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}.\end{aligned}\tag{7.65}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t) - 2p_2(t) &= 0; \\ \dot{p}_2(t) - 3p_2(t) + p_1(t) &= 0; \\ p_1(T) &= p_{10}; \quad p_2(T) = p_{20}.\end{aligned}\tag{7.66}$$

Приведемо цю задачу до задачі Коші. Для цього зробимо заміну змінних  $\tau = T - t$ ,  $q_i(\tau) = p_i(T - t)$ .

Розв'язок цієї задачі отримано у вигляді

$$\begin{aligned}q_1(\tau) = p_1(T - t) &= 2(r_{20} - r_{10})e^{2\tau} + (r_{10} - 2r_{20})e^\tau; \\ q_2(\tau) = p_2(T - t) &= (2r_{20} + r_{10})e^{2\tau} - (r_{10} + r_{20})e^\tau.\end{aligned}\tag{7.67}$$

$$u(t) = -(2r_{20} + r_{10})e^{2(T-t)} + (r_{10} + r_{20})e^{T-t}.\tag{7.68}$$

Щоб відшукати невідомі початкові значення  $r_{10}$ ,  $r_{20}$ , знайдемо розв'язок вихідної системи рівнянь відносно фазових траєкторій із урахуванням отриманого виразу для управління. Застосуємо для цього перетворення Лапласа. Визначник системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{vmatrix} = (p+2)(p+1) = 0.\tag{7.69}$$

У просторі зображень розв'язання записується у вигляді

$$X_1(p) = \begin{bmatrix} x_{10} & -1 \\ x_{20} + U(p) & p+3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = \frac{x_{10}p + 3x_{10} + x_{20}}{(p+2)(p+1)} + \frac{U(p)}{(p+2)(p+1)}.\tag{7.70}$$

Представимо  $u(t)$  у вигляді

$$u(t) = u_2 e^t + u_1 e^{2t}. \quad u_2 = (r_{10} + r_{20})e^{-T}; \quad u_1 = -(r_{10} + 2r_{20})e^{-2T}. \quad (7.71)$$

Розкладемо вираз на елементарні складові і повернемося у простір оригіналів. Отримаємо такий вираз для траєкторії  $x_1(t)$ .

$$x_1(t) = -(x_{10} + x_{20})e^{-2t} + (2x_{10} + x_{20})e^{-t} + \frac{u_1}{12} (3e^{-2t} + e^{2t} - 4e^{-t}) + \frac{u_2}{6} (-3e^{-t} + e^t + 2e^{-2t}). \quad (7.72)$$

Вираз для  $x_2(t)$  знайдемо шляхом диференціювання (7.72) по  $t$ .

$$x_2(t) = 2(x_{10} + x_{20})e^{-2t} - (2x_{10} + x_{20})e^{-t} + \frac{u_1}{6} (-3e^{-2t} + e^{2t} + 2e^{-t}) + \frac{u_2}{6} (3e^{-t} + e^t - 4e^{-2t}). \quad (7.73)$$

Оскільки оптимальне управління відшукується із умови переведення системи із початкового стану у нульовий за мінімальний час,  $r_{10}$ ,  $r_{20}$  знаходимо як розв'язок системи рівнянь, що отримується при підстановці у (7.72), (7.73)  $t = T$ .

Для визначення мінімального кінцевого часу підставимо у функціонал (7.58) вираз для  $u(t)$  (7.71) і виконаємо інтегрування. Отримаємо

$$J(T) = kT + \frac{1}{4} \left[ e_1^2 - \frac{4}{3} e_1 e_2 + \frac{1}{2} e_2^2 \right] - \frac{1}{4} \left[ e_1^2 e^{-2T} - \frac{4}{3} e_1 e_2 e^{-3T} + \frac{e_2^2}{2} e^{-4T} \right]. \quad (7.74)$$

Мінімум цього виразу знаходимо із умови

$$\frac{dJ(T)}{dT} = 0. \quad (7.75)$$

### 7.3. Квадратичний критерій

Об'єкт управління описується моделлю

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Критерій якості задано у вигляді

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + u^2(t)] dt. \quad (7.77)$$

Управління не обмежено за величиною.

$$H = \frac{1}{2} [x_1^2(t) + u^2(t)] + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t) - [2x_1(t) + 3x_2(t)]p_2(t). \quad (7.78)$$

Маємо

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + p_2(t) = 0; \quad u(t) = -p_2(t). \quad (7.79)$$

Канонічна система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - x_2(t) &= 0; \\ \dot{x}_2(t) + 3x_2(t) + 2x_1(t) &= u(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) - 2p_2(t) + x_1(t) &= 0; \\ \dot{p}_2(t) - 3p_2(t) + p_1(t) &= 0; \\ p_1(T) &= p_{10}; \quad p_2(T) = p_{20}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

На відміну від попереднього випадку оптимізації за гібридним критерієм мінімуму за енергією та швидкодією у даному випадку отримана канонічна система рівнянь є взаємопов'язана, тому необхідно розв'язувати систему із 4-х рівнянь відносно змінних стану та функцій  $p_i(t)$ .

Позначимо

$$Y(p) = [X_1(p) \ X_2(p) \ Q_1(p) \ Q_2(p)].$$

Запишемо цю систему в операторній формі.

$$\begin{bmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ 2 & p+3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & p & 2 \\ 0 & 0 & -1 & p+3 \end{bmatrix} Y(p) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

Визначник матриці має дорівнювати нулю.

$$\Delta = p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 3 = (p^2 + 3p + 1)(p^2 + 3p + 3) = 0. \quad (7.83)$$

Загальна схема розв'язання такого роду систем рівнянь полягає у тому, що під час пошуку розв'язання за змінною  $Y_k(p)$  відповідний стовпець матриці замінюється на праву частину системи (7.82). Маємо:

$$X_1(p) = \begin{bmatrix} x_{10} & -1 & 0 & 0 \\ x_{20} & p+3 & 0 & -1 \\ r_1 & 0 & p & 2 \\ r_2 & 0 & -1 & p+3 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}. \quad (7.84)$$

Розкриємо цей визначник. Маємо

$$X_1(p) = \frac{1}{\Delta} [x_{10}p^3 + (6x_{10} + x_{20})p^2 + (11x_{10} + 3x_{20} + r_2)p + (6x_{10} + 2x_{20} + r_1)]. \quad (7.85)$$

$$X_2(p) = \begin{bmatrix} p & x_{10} & 0 & 0 \\ 2 & x_{20} & 0 & -1 \\ -1 & r_1 & p & 2 \\ 0 & r_2 & -1 & p+3 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}. \quad (7.86)$$

Розкриємо цей визначник. Маємо

$$X_2(p) = \frac{1}{\Delta} [x_{20}p^3 + (3x_{20} - 2x_{10} + r_2)p^2 + (2x_{20} - 6x_{10} + r_1)p - 3x_{10}]. \quad (7.87)$$

$$Q_2(p) = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 & x_{10} \\ 2 & p+3 & 0 & x_{20} \\ -1 & 0 & p & r_1 \\ 0 & 0 & -1 & r_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}. \quad (7.88)$$

$$Q_2(p) = \frac{1}{\Delta} [r_2p^3 + (3r_2 + r_1)p^2 + (x_{10} + 3r_1 + 2r_2)p + (3x_{10} + x_{20} + 2r_1)]. \quad (7.89)$$

Із урахуванням власних значень системи (розкладання визначника) вирази для шуканих функцій подамо у вигляді

$$Y_i(p) = \frac{a_i(p + \alpha) + b_i}{(p + \alpha)^2 - \omega_1} + \frac{c_i(p + \alpha) + d_i}{(p + \alpha)^2 + \omega_2}. \quad (7.90)$$

$$\alpha = 1.5; \quad \omega_1 = \sqrt{(5)/2}; \quad \omega_2 = \sqrt{(3)/2}.$$

Після обчислення коефіцієнтів  $a_i, b_i, c_i, d_i$  у просторі оригіналів розв'язання системи лінійних рівнянь набуває вигляд

$$x_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\alpha t} \left[ (x_{10} + r_2) \operatorname{ch} \omega_1 t + (\alpha x_{10} + x_{20} + r_1) \operatorname{sh} \omega_1 t / \omega_1 + (x_{10} - r_2) \cos \omega_2 t + (\alpha x_{10} + x_{20} - r_1) \sin \omega_2 t \right]. \quad (7.91)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{-\alpha t} \left[ x_{20}(\operatorname{ch} \omega_1 t + \cos \omega_2 t) - (\alpha x_{20} + x_{10}) \frac{\operatorname{sh} \omega_1 t}{\omega_1} - \omega_2(2x_{20} + x_{10}) \sin \omega_2 t + (r_1 - 3r_2)(\operatorname{ch} \omega_1 t - \cos \omega_2 t) + \frac{1}{2}(7r_2 - 3r_1) \frac{\operatorname{sh} \omega_1 t}{\omega_1} + \omega_2(r_1 - r_2) \sin \omega_2 t \right]. \quad (7.92)$$

$$g_2(t) = p(T - \tau) = \frac{1}{2}e^{-\alpha t} \left[ x_{10}(\operatorname{ch} \omega_1 t - \cos \omega_2 t) + r_2(\operatorname{ch} \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + (\alpha x_{10} + x_{20}) \left( \frac{\operatorname{sh} \omega_1 t}{\omega_1} - \sin \omega_2 t \omega_2 \right) + (r_1 - \alpha r_2) \left( \frac{\operatorname{sh} \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right) \right] \quad (7.93)$$

За  $t = T$  знаходимо  $r_1, r_2$  як розв'язання системи двох функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} d_1(x_{10}, x_{20}, T) &= g_1(T)r_1 + g_2(T)r_2; \\ d_2(x_{10}, x_{20}, T) &= g_3(T)r_1 + g_4(T)r_2. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Формула для управління отримується із ( ) заміною  $t$  на  $T - \tau$ .

$$\begin{aligned}
 u(\tau) = & \frac{1}{2}e^{-\alpha(T-\tau)} \left[ x_{10}(\operatorname{ch} \omega_1(T-\tau) - \cos \omega_2(T-\tau)) + r_2(\operatorname{ch} \omega_1(T-\tau) + \cos \omega_2(T-\tau)) + \right. \\
 & + (\alpha x_{10} + x_{20}) \left( \frac{\operatorname{sh} \omega_1(T-\tau)}{\omega_1} - \sin \omega_2(T-\tau)\omega_2 \right) + \\
 & \left. + (r_1 - \alpha r_2) \left( \frac{\operatorname{sh} \omega_1(T-\tau)}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2(T-\tau)}{\omega_2} \right) \right]. \quad (7.95)
 \end{aligned}$$

## 7.4. Синтез оптимальних лінійних систем по квадратичному критерію

### 7.4.1. Задача про регулятор стану

Розглянемо систему, що описується рівняннями (7.56). Якщо покласти  $C(t) = E$  і  $z(t) = 0$ , то  $y(t) = x(t) = -e(t)$ . Тоді функціонал (7.58) зводиться до функціоналу

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(T), F\mathbf{x}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{x}(t), Q(t)\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.96)$$

Фізичний зміст цього виразу полягає у тому, що ми бажаємо утримати стан поблизу нуля без надлишкових витрат енергії на управління.

Складемо гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t), Q(t)\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t)) + (A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) + (B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)). \quad (7.97)$$

Відносно вектора  $\mathbf{p}(t)$  отримуємо рівняння

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} = -Q(t)\mathbf{x}(t) - A^T(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.98)$$

Вздовж оптимальної траєкторії має бути

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = R(t)\mathbf{u}(t) + B^T(t)\mathbf{p}(t) = 0. \quad (7.99)$$

Звідси

$$\mathbf{u}(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.100)$$

Для того, щоб екстремум, що визначається рівнянням (7.98) був мінімумом по відношенню до  $\mathbf{u}(t)$ , матриця  $\partial^2 H / \partial \mathbf{u}^2$  має бути додатно визначеною. Із рівняння (7.100) випливає, що

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2(t)} = R(t). \quad (7.101)$$

Оскільки за умовою матриця  $R(t)$  є додатно визначена, управління  $\mathbf{u}(t)$ , що відповідає рівнянню (7.56), дійсно мінімізує гамільтоніан і тому є  $H$ -мінімальне.



Підставимо тепер (7.99) у канонічні рівняння (7.56), (7.97).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) - [B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]\mathbf{p}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) - S(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.102)$$

Тоді систему рівнянь (7.56), (7.97) можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

Початкові умови відносно вектору стану задано. Межові умови для вектора  $\mathbf{p}(T)$  знайдемо із умов трансверсальності, у силу яких у кінцевий момент часу  $\mathbf{p}(T)$  має задовольнятися співвідношення

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t)} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{x}(T), F\mathbf{x}(T)) \right]. \quad (7.104)$$

Отже,

$$\mathbf{p}(T) = F\mathbf{x}(T). \quad (7.105)$$

Нехай  $G(t, t_0)$  – фундаментальна матриця системи (7.102) розмірності  $2n \times 2n$ . Позначимо невідомі початкові умови через  $\mathbf{p}(t_0)$ . Тоді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} = G(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{bmatrix} \quad (7.106)$$

Значить, при  $t = T$  має бути

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(T) \\ \mathbf{p}(T) \end{bmatrix} = G(T, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.107)$$

Розділімо матрицю  $G(t, t_0)$  на чотири матриці.

$$G(T, t) = \begin{bmatrix} G_{11}(T, t) & G_{12}(T, t) \\ G_{21}(T, t) & G_{22}(T, t) \end{bmatrix}. \quad (7.108)$$

Підставимо цю матрицю у рівняння (7.107). Після деяких перетворень ( за умови, що зворотна матриця існує) отримаємо

$$\mathbf{p}(t) = [G_{22}(T, t) - FG_{12}(T, t)]^{-1} [FG_{11}(T, t) - G_{21}(T, t)] \mathbf{x}(t). \quad (7.109)$$

Позначимо

$$\mathbf{K}(t) = [G_{22}(T, t) - FG_{12}(T, t)]^{-1} [FG_{11}(T, t) - G_{21}(T, t)]. \quad (7.110)$$

Тоді можна записати

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.111)$$

Для кінцевого часу  $t = T$

$$\mathbf{K}(T) = F. \quad (7.112)$$

Продиференціюємо тепер цю рівність. Із урахуванням канонічних рівнянь приходимо до такого матричного рівняння

$$\frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} = -\mathbf{K}(t)A(t) - A^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t) - Q(t). \quad (7.113)$$

Це рівняння являє собою матричне диференціальне рівняння типу Ріккати. Рівняння (7.105) дає межову умову для цього рівняння. Оскільки  $\mathbf{K}(t)$  – симетрична матриця, рівняння Ріккати (7.113) є система  $n(n+1)/2$  звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Підставимо рівність (7.111) у вираз для управління (7.99), отримаємо закон управління

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.114)$$

У силу припущень щодо матриць, що наявні у цій рівності, оптимальне управління єдине.

Тепер можна визначити стан системи (7.180), (7.181) як розв'язання лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (7.115)$$

із початковими умовами

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.116)$$

Із структури оптимального управління (7.114) видно, що матриця  $\mathbf{K}(t)$  може трактуватися як коефіцієнт підсилення замкненої системи регулювання стану.

#### Приклад 1

Розглянемо систему другого порядку

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.117)$$

і функціонал

$$J_1 = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt. \quad (7.118)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & B(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; & Q(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; & R(t) &= \frac{1}{2}; & t_0 &= 0; & T &= 3. \\ \mathbf{K}(t) &= k_{ij}(t); & i, j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Оптимальне управління визначається рівнянням

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t)B(t)K(t)x(t) = -2[0 \ 1] \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \\ &= -2[k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}(t)x_2(t)]. \end{aligned} \quad (7.119)$$

Запишемо рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) \\ \dot{k}_{12}(t) & \dot{k}_{22}(t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2[0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Межова умова при  $t = 3$  є

$$\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (7.121)$$

Після виконання дій у рівнянні (7.120) отримуємо три диференціальні рівняння та відповідні їм межові умови

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11}(t) &= 2k_{12}^2(t) - 2; & k_{11}(3) &= 1. \\ \dot{k}_{12}(t) &= -k_{11}(t) + 2k_{12}(T)k_{22}(t) - 1; & k_{12}(3) &= 0; \\ \dot{k}_{22}(t) &= -2k_{12}(t) + 2k_{22}^2(t) - 4; & k_{22}(3) &= 2. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дає оптимальне управління.

#### 7.4.2. Синтез регулятора стану для інваріантної системи

Дана лінійна інваріантна у часі система, що є управляєма

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (7.123)$$

і функціонал

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(\mathbf{x}(t), \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{U}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.124)$$

Управління не обмежене,  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  – додатно визначені матриці. Нехай інтервал часу є необмежений:  $T = \infty$ . У цьому разі  $F = 0$ . Тоді межова умова для рівняння Ріккати буде  $\mathbf{K}(T) = 0$ .

Оптимальне управління для такої системи існує і єдине:

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^T\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t). \quad (7.125)$$

Матриця  $\hat{\mathbf{K}}$  – стала додатно визначена матриця розміром  $n \times n$ , яка є розв'язання нелінійного матричного рівняння

$$-\hat{\mathbf{K}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\hat{\mathbf{K}} - \mathbf{Q} = 0. \quad (7.126)$$

При цьому оптимальна траєкторія знаходиться розв'язанням лінійної інваріантної у часі системи

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad \mathbf{G} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\hat{\mathbf{K}}. \quad (7.127)$$

Власні значення матриці  $\mathbf{G}$  повинні мати від'ємні дійсні частини, щоб забезпечити стійкість системи.

Мінімальна вартість дорівнює

$$\hat{J}(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t)). \quad (7.128)$$

### Приклад 2

Знову розглянемо систему другого порядку

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.129)$$

і функціонал

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)] dt. \quad (7.130)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad R = 1.$$

Для додатної визначеності матриці  $Q$  має виконуватися  $a - b^2 > 0$ . Згідно (7.125)

$$u(t) = -\hat{k}_{12}x_1(t) - \hat{k}_{22}x_2(t). \quad (7.131)$$

Підставимо матриці  $A, B, Q, R$  у рівняння Ріккати (7.126). Отримуємо таку систему рівнянь для визначення елементів матриці  $\mathbf{K}$ .

$$\begin{aligned} \hat{k}_{12}^2 &= 1; \\ -\hat{k}_{11} + \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} &= b; \\ -\hat{k}_{12} - \hat{k}_{22}^2 &= a. \end{aligned}$$

Ця система має розв'язок

$$\begin{aligned} \hat{k}_{12}^2 &= \pm 1; \\ \hat{k}_{11} &= \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b; \\ \hat{k}_{22} &= \pm \sqrt{a + 2\hat{k}_{12}}. \end{aligned}$$

Матриця  $\mathbf{K}$  має бути додатно визначеною. Звідси

$$\hat{k}_{11}\hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0; \quad \hat{k}_{11} > 0; \quad \hat{k}_{22} > 0.$$

Отже,

$$\hat{k}_{12} = +1; \quad \hat{k}_{22} = \sqrt{a+2}; \quad \hat{k}_{11} = \sqrt{a+2} - b.$$

Оптимальне управління дорівнює

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}x_2(t). \quad (7.132)$$

Бачимо, що для даної задачі  $u(t)$  не залежить від  $b$ . Структурна схема оптимальної системи може бути представлена у вигляді рис. 1 або в еквівалентному вигляді рис. 2. Згідно рис. 2 оптимальна система містить у ланцюзі зворотного зв'язку компенсуючий ланцюг із передаточною функцією  $1 + p\sqrt{a+2}$ .

Передаточна функція замкненої системи дорівнює

$$W^*(p) = \frac{1/p^2}{1 + \frac{1 + p\sqrt{a+2}}{p^2}} = \frac{1}{p^2 + p\sqrt{a+2} + 1}. \quad (7.133)$$

Полюси оптимальної системи зі зворотним зв'язком містяться у точках

$$p = -\frac{\sqrt{a+2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{a-2}}{2}. \quad (7.134)$$

При  $a = 0$  полюси дорівнюють  $p = -\sqrt{2}/2 \pm j\sqrt{2}/2$ , що відповідає випадку, коли сигнал  $x_2(t)$  не зважується у функціоналі (ця змінна у ньому відсутня). Із зростанням  $a$  полюси оптимальної системи прагнуть до дійсної осі площини  $p$ , що призводить до зменшення коливальності перехідного процесу. При  $a > 2$  обидва корені є дійсні – процес стає згасаючим.

### 7.4.3. Задача про регулятор виходу

Розглянемо лінійну систему зі змінними параметрами

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (7.135)$$

Функціонал має вигляд

$$J_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}(T), F\mathbf{y}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{y}(t), Q(t)\mathbf{y}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.136)$$

Припустимо, що система (7.135) є сповна спостережна, управління не обмежене, матриця  $\mathbf{R}(t)$  додатно визначена,  $\mathbf{Q}(t), F$  – додатно піввизначені матриці,  $T$  задано. Треба знайти оптимальне управління, що мінімізує функціонал (7.136).

Підінтегральні члени у функціоналі означають прагнення зробити, а потім утримати близьким до нуля вихід  $\mathbf{y}(t)$ , не витрачаючи багато енергії на управління. Перший член у функціоналі означає бажання гарантувати малу величину виходу у кінці інтервалу управління.

Зведемо цю задачу до задачі, що аналогічна задачі про регулятор стану, а потім скористаємося результатами розв'язання задачі про регулятор стану для синтезу оптимального управління.

Підставимо рівняння виходу  $\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t)$  у функціонал  $J_2$ .

$$J_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(T), C^T(T)FC(T)\mathbf{x}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{x}(t), C^T(t)Q(t)C(t)\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.137)$$

Якщо система (7.137) є спостережна, матриця  $C(t)$  не може дорівнювати нулю при жодному  $t \in [t_0, T]$ . Спостережність системи передбачає, що кожний вихід системи отримується за єдиного стану  $\mathbf{x}(t)$ , тому, якщо матриці  $F$  і  $Q(t)$  є додатно піввизначені, матриці  $C^T(t)FC(t)$  і  $C^T(t)Q(t)C(t)$  також є додатно піввизначені.

Значить, система (7.135) із функціоналом (7.136) є аналогічна системі, що відповідає задачі про регулятор стану. Потому

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.138)$$

Додатно визначена симетрична матриця  $\mathbf{K}(t)$  є розв'язок рівняння Ріккати

$$\frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) \quad (7.139)$$

із межовою умовою

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{C}(T). \quad (7.140)$$

Оптимальний стан є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (7.141)$$

із початковими умовами

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.142)$$

Мінімум функціоналу дорівнює

$$J_2^*[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)). \quad (7.143)$$

Для інваріантної у часі системи (системи зі сталими параметрами) отримаємо результати, аналогічні результатам для задачі про регулятор стану із матрицею  $C^TQC$  замість матриці  $Q$ .

**Приклад 3**

Розглянемо систему

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} + \beta u(t). \quad (7.144)$$

Передаточна функція цієї системи

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = W(p) = \frac{p + \beta}{p^2}. \quad (7.145)$$

Визначимо змінні стану (фазові координати):

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(1); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.146)$$

Рівняння системи

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \beta u(t); \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.147)$$

Знайдемо управління, що мінімізує функціонал

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (7.148)$$

Закон управління:

$$u(t) = -\frac{1}{r} \left[ (\hat{k}_{11} + \beta \hat{k}_{12}) x_1(t) + (\hat{k}_{12} + \hat{k}_{22}) x_2(t) \right]. \quad (7.149)$$

Відповідно до рівняння ( ) отримуємо таку систему алгебраїчних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11}^2 + 2\beta \hat{k}_{11} \hat{k}_{12} + \beta^2 \hat{k}_{12}^2 - r &= 0; \\ \beta \hat{k}_{11} \hat{k}_{22}^2 + \beta^2 \hat{k}_{12} \hat{k}_{22} + \hat{k}_{11} \hat{k}_{12} - r \hat{k}_{11} &= 0; \\ \hat{k}_{12}^2 + 2\beta \hat{k}_{12} \hat{k}_{22} + \beta^2 \hat{k}_{22}^2 - 2r \hat{k}_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.150)$$

Оскільки  $\hat{k}_{11} > 0$ ;  $\hat{k}_{22} > 0$ ;  $\hat{k}_{11} \hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0$ , отримуємо

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11} + \beta \hat{k}_{12} &= \sqrt{r}; \\ \hat{k}_{12} + \beta \hat{k}_{22} &= \sqrt{2r \hat{k}_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.151)$$

#### 7.4.4. Задача слідкування

Розглянемо лінійну систему зі змінними параметрами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.152)$$

Нехай вектор  $\mathbf{z}(t)$  – бажаний вихід, розмірність якого збігається із розмірністю  $\mathbf{y}(t)$ . Визначимо вектор похибки  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)$ . Функціонал має вигляд

$$J_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{e}(T), F\mathbf{e}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{e}(t), Q(t)\mathbf{e}(t)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.153)$$

Виразимо похибку як функцію  $\mathbf{z}(t)$  та  $\mathbf{x}(t)$ :

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.154)$$

Складемо гамільтоніан задачі:

$$H = \frac{1}{2}([\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)], \mathbf{Q}(t)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)]) + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{u}(t)) + (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) + (\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)). \quad (7.155)$$

Умова мінімуму дає рівняння

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0 = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.156)$$

Звідси отримуємо

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.157)$$

Оскільки матриця  $\mathbf{R}(t)$  є додатно визначена, це управління мінімізує  $H$ , тому є  $H$ -мінімальне. Цьому управлінню відповідають функції  $\mathbf{p}(t)$  та  $\mathbf{x}(t)$  як розв'язок рівнянь

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t).; \quad (7.158)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t). \quad (7.159)$$

Позначимо

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t); \\ \mathbf{V}(t) = \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t); \\ \mathbf{W}(t) = \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t). \quad (7.160)$$

Отримуємо канонічне рівняння зі змінними параметрами у такому вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{S}(t) \\ -\mathbf{V}(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}(t)\mathbf{z}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.161)$$

Вектор  $\mathbf{W}(t)\mathbf{z}(t)$  є для цього рівняння збурюючим впливом. За  $t = t_0$  початковий стан дає  $n$  межових умовна лівій межі

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.162)$$

При  $t = T$  умова трансверсальності дає ще  $n$  межових умов

$$\mathbf{p}(T) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(T)} \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{e}(T), \mathbf{F}\mathbf{e}(T)) \right] = \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{C}(T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{z}(T). \quad (7.163)$$

Нехай  $\Phi(t, t_0)$  – фундаментальна матриця системи. Тоді можна записати

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(T) \\ \mathbf{p}(T) \end{bmatrix} = \Phi(T, t_0) \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^T \Phi^{-1}(\tau, t_0) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}(\tau)\mathbf{z}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\}. \quad (7.164)$$



Якщо замістити у це рівняння вираз для  $\mathbf{p}(T)$ , виявиться, що

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t). \quad (7.165)$$

Продиференціюємо цю рівність:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{K}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t). \quad (7.166)$$

Маємо

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{g}(t). \quad (7.167)$$

Тоді

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{K}}(t)[\mathbf{E} + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{g}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t). \quad (7.168)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [-\mathbf{V}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{g}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{z}(t). \quad (7.169)$$

Оскільки оптимальне управління існує, два останні рівняння мають виконуватися для будь-яких  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ . Тоді матриця  $\mathbf{K}(t)$  розмірності  $n \times n$  має задовольняти такому матричному рівнянню

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{V}(t). \quad (7.170)$$

$n$  - вектор-стовпець  $\mathbf{g}(t)$  має задовольняти векторному рівнянню

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = [\mathbf{K}(t)\mathbf{S}(t) - \mathbf{A}^T(t)]^T \mathbf{g}(t) - \mathbf{W}(t)\mathbf{z}(t). \quad (7.171)$$

Межові умови отримаємо у такий спосіб.

$$\mathbf{p}(T) = \mathbf{K}(T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{g}(T), \quad (7.172)$$

а із умов трансверсальності

$$\mathbf{p}(T) = \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{C}(T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{C}(T)\mathbf{F}\mathbf{z}(T). \quad (7.173)$$

Звідси маємо:

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{C}(T); \quad (7.174)$$

$$\mathbf{g}(T) = \mathbf{C}^T(T)\mathbf{F}\mathbf{z}(T). \quad (7.175)$$

Отже, межові умови для диференціальних рівнянь визначені сповна, їх можна розв'язати і отримати  $\mathbf{K}(t)$  та  $\mathbf{g}(t)$ .

Якщо замістити рівність для  $\mathbf{p}(t)$  в управління, то екстремальне управління набуває такого вигляду

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)[\mathbf{g}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)]. \quad (7.176)$$

Оптимальна траєкторія, що починається із  $\mathbf{x}_0$ , є розв'язання лінійного диференціального рівняння

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)]^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t). \quad (7.177)$$

Мінімум функціоналу дорівнює

$$J_3^* = \frac{1}{2} (\mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)) - (\mathbf{g}(t), \mathbf{x}(t)) + \varphi(t), \quad (7.178)$$

де

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} [(\mathbf{z}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t)) - (\mathbf{g}(t), \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t))];$$

$$\varphi(T) = (\mathbf{z}(T), \mathbf{K}(T)\mathbf{z}(T)).$$

Із порівняння матриці “підсилення”  $\mathbf{K}(t)$  із аналогічною матрицею для регулятора виходу бачимо, що вони є ідентичні. Тому структура зворотного зв'язку оптимальної слідкуючої системи та сама, що і системи оптимального управління виходом. Цей факт стає очевиднішим при порівнянні рівнянь, що визначають стан системи. В обох рівняннях матриця системи

$$\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)$$

одна й та сама..

Отже, власні значення замкненої оптимальної слідкуючої системи тотожні власним значенням замкненої оптимальної системи для регулятора виходу і не залежать від бажаного виходу  $\mathbf{z}(t)$ .

Основна відмінність слідкуючої системи від оптимального регулятора виходу полягає у векторі  $\mathbf{g}(t)$ . Цей вектор можна представити як вимушену функцію системи, яка прагне врівноважити регулюючі особливості системи.

Із порівняння рівняння стану системи і рівняння відносно  $\mathbf{g}(t)$  видно, що система ( ) є сполучена до системи ( ). Це означає, що якщо  $\Psi^T(t, t_0)$  – фундаментальна матриця системи ( ), то

$$\Psi^T(t, t_0)\Phi(t, t_0) = E. \quad (7.179)$$

## 7.5. Синтез оптимального управління лінійними системами

Замкнена система управління у лінійному випадку описується такою динамічною задачею.

Нехай  $\mathbf{x}(t)$  – вектор стану системи розмірності  $n$ . Матриця  $\mathbf{A}(t)$  – розмірності  $n \times n$ ,  $\mathbf{u}(t)$  – вектор управління розмірності  $r$ . Матриця  $\mathbf{B}(t)$  розмірності  $n \times r$ ,  $\mathbf{y}(t)$  – вектор виходу системи розмірності  $m$ . Матриця  $\mathbf{C}(t)$  розмірності  $m \times n$ .  $0 < m \leq r \leq n$ .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (7.180)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.181)$$

Позначимо

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t), \quad (7.182)$$

$\mathbf{z}(t)$  – бажаний вихід системи.

Функціонал має вигляд

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}(T), F\mathbf{e}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\mathbf{e}(t), Q(t)\mathbf{e}(T)) + (\mathbf{u}(t), R(t)\mathbf{u}(t))] dt. \quad (7.183)$$

### 7.5.1. Розробка алгоритмів оптимального управління

Розглянемо об'єкт, що описується таким рівнянням:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = c_1 u(t) + c_2 \frac{du}{dt}. \quad (7.184)$$

У просторі станів йому відповідає система нормальних рівнянь

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (7.185)$$

де  $b_1 = c_2$ ;  $b_2 = c_1 - b_1 a_1$ .

Критерій якості задано у вигляді

$$J_1 = \frac{1}{2} [f_1 x_1^2(T) + 2f_2 x_1(T)x_2(T) + f_3 x_2^2(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T [q_1 x_1^2(t) + q_3 x_2^2(t) + 2q_2 x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^2(t)] dt. \quad (7.186)$$

Відповідно викладеному вище задача синтезу оптимального управління зводиться до складання рівнянь Ріккати та їх вирішенню. Потім за відшуканою матрицею Ріккати знаходиться розв'язок вхідної задачі (7.184), тобто визначаються оптимальні траєкторії руху системи, а за формулою (7.116) знаходимо оптимальне управління.

### 7.5.2. Розв'язання рівнянь Ріккати

Виписемо матриці, що наявну рівнянні Ріккати (7.115).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}. \quad (7.187)$$

$$R^{-1} = 2.$$

Відповідно до (7.115) отримаємо таку систему нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dk_1(t)}{dt} = 2a_0 k_2(t) + q_1 - [h_1 k_1^2(t) + (2h_3 k_1(t) + h_2 k_2(t))k_2(t)]; \quad k_1(T) = f_1;$$

$$\frac{dk_2(t)}{dt} = a_1 k_2(t) + a_0 k_3(t) - k_1(t) + q_2 - [(h_1 k_1(t) + h_3 k_2(t))k_2(t) + (h_3 k_1(t) + h_2 k_2(t))k_3(t)]; \quad k_2(T) = f_2;$$

$$\frac{dk_3(t)}{dt} = 2a_1 k_3(t) - 2k_2(t) + q_3 - [h_1 k_1^2(t) + (2h_1 k_2(t) + h_2 k_3(t))k_3(t)]; \quad k_3(T) = f_3. \quad (7.188)$$

Тут запроваджено позначення:  $h_1 = b_1^2$ ;  $h_2 = b_2^2$ ;  $h_3 = b_1 b_2$ .

Цю систему будемо розв'язувати ітераційним методом. Для цього приведемо цю задачу до задачі Коші шляхом запровадження заміни

$$\bar{k}_i(\tau) = k_i(T - t); \quad \tau = T - t.$$

У результаті застосування інтегрального перетворення Лапласа отримуємо таке векторно-матричне рівняння

$$\begin{bmatrix} p & 2a_0 & 0 \\ -1 & p + a_1 & a_0 \\ 0 & -2 & p + 2a_1 \end{bmatrix} \cdot \bar{K}(p) = 1p \begin{bmatrix} p\bar{k}_1(0) + q_1 \\ p\bar{k}_2(0) + q_2 \\ p\bar{k}_3(0) + q_3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} G_1(p) \\ G_2(p) \\ G_3(p) \end{bmatrix}. \quad (7.189)$$

Визначник матриці системи дорівнює

$$\Delta = p^3 + 3a_1 p^2 + 2(a_1^2 + 2a_0)p + 4a_0 a_1 = p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3 = (p + \alpha_1)(p + \alpha_2)(p + \alpha_3) = 0. \quad (7.190)$$

Розв'язання системи рівнянь (7.189) у просторі зображень за Лапласом:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(p) &= \frac{1}{p\Delta} \begin{vmatrix} f_1 p + q_1 & 2a_0 & 0 \\ f_2 p + q_1 & p + a_1 & a_0 \\ f_3 p + q_3 & -2 & p + 2a_1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{p\Delta} \left( f_1 p^3 + (q_1 + 3a_1 f_1 - 2a_0 f_2) p^2 + [3a_1 q_1 - 2a_0 q_2 + 2(a_1^2 + a_0) f_1 - \right. \\ &\quad \left. - 4a_0 a_1 f_2 + 2a_0^2 f_3] p + [2(a_1^2 + a_0) q_1 - 4a_0 a_1 q_2 + 2a_0^2 q_3] \right) - \frac{1}{\Delta} N_1(p). \end{aligned} \quad (7.191)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_2(p) &= \frac{1}{p\Delta} \begin{vmatrix} p & f_1 p + q_1 & 0 \\ -1 & f_2 p + q_2 & 2 \\ 0 & f_3 p + q_3 & p + 2a_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{p\Delta} (f_2 p^3 + [q_2 + 2a_1 f_2 + f_1 - a_0 f_3] p^2 + \\ &\quad + [2a_1 q_2 + q_1 - a_0 q_3 + 2a_1 f_1] p + 2a_1 q_1) - \frac{1}{\Delta} N_2(p); \end{aligned} \quad (7.192)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_3(p) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p & 2a_0 & f_1 p + q_1 \\ -1 & p + a_1 & f_2 p + q_2 \\ 0 & -2 & f_3 p + q_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{p\Delta} (f_3 p^3 + (q_3 + 2a_1 f_3 + 2f_2) p^2 + \\ &\quad + 2(a_1 q_3 + q_2 + a_0 f_3 + f_1) p + 2(a_0 q_3 + q_1)) - \frac{1}{\Delta} N_3(p). \end{aligned} \quad (7.193)$$

У цих виразах запроваджено такі позначення для нелінійних частин:

$$N_1(p) = G_1(p)p^2 + [3a_1 G_1(p) - 2a_0 G_2(p)]p + 2(a_1^2 + a_0)G_1(p) - 4a_0 a_1 G_2(p) + 2a_0^2 G_3(p);$$

$$N_2(p) = G_2(p)p^2 + [2a_1 G_2(p) - G_1(p) - a_0 G_3(p)]p + 2a_1 G_1(p);$$

$$N_3(p) = G_3(p)p^2 + 2[a_1 G_3(p) + G_2(p)]p + 2a_0 G_3(p) + 2G_1(p).$$

Представимо розв'язок лінійної частини системи рівнянь у вигляді сум елементарних складових. Для цього знайдемо розв'язки трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$C\bar{a}^{(k)} = \bar{d}^{(k)}. \quad (7.194)$$

$$C = \begin{bmatrix} d_3 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2 \\ d_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.195)$$

Вектори  $\bar{d}^{(k)}$  – це коефіцієнти при степенях  $p$  у виразах (7.191)–(7.193) відповідно, що записані у порядку зростання степенів.

У просторі оригіналів розв'язок лінійної частини системи рівнянь Ріккати записується у вигляді

$$\bar{k}_i^{(0)}(\tau) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}e^{-\alpha_1\tau} + c_2^{(i)}e^{-\alpha_2\tau} + c_3^{(i)}e^{-\alpha_3\tau} \quad (7.196)$$

Розв'язання нелінійних рівнянь Ріккати шукатимемо за формулою

$$\bar{k}_i^{(m)}(\tau) = \bar{k}_i^{(0)}(\tau) - 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta} \mathcal{L}[N_i(\bar{k}_j^{(0)}(\tau))] \right\} \quad (7.197)$$

Випишемо нелінійні частини рівнянь.

$$g_1(\tau) = h_1[\bar{k}_1^{(0)}(\tau)]^2 + [2h_3\bar{k}_1^{(0)}(\tau) + h_2\bar{k}_2^{(0)}(\tau)]\bar{k}_2^{(0)}(\tau) = \sum_{j=0}^9 g_k^{(1)}e^{-\beta_j\tau};$$

$$g_2(\tau) = [h_1\bar{k}_1^{(0)}(\tau) + h_3\bar{k}_2^{(0)}(\tau)]\bar{k}_2^{(0)}(\tau) + [h_3\bar{k}_1^{(0)}(\tau) + h_2\bar{k}_2^{(0)}(\tau)]\bar{k}_3^{(0)}(\tau) = \sum_{j=0}^9 g_j^{(2)}e^{-\beta_j\tau};$$

$$g_3(\tau) = h_1[k_2^{(0)}(\tau)]^2 + [2h_1k_2^{(0)}(\tau) + h_2k_3^{(0)}(\tau)]k_3^{(0)}(\tau) = \sum_{j=0}^9 g_k^{(3)}e^{-\beta_j\tau}.$$

$$\beta = [0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_1^2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_3].$$

Із урахуванням (7.196) для лінійних частин розв'язання після виконання відповідних перетворень маємо у просторі зображень

$$N^{(1)}(p) = G_1(p)p^2 + [3a_1G_1(p) - 2a_0G_2(p)]p + 2(a_1^2 + a_0)G_1(p) + 2a_0^2G_2(p) - 4a_0a_1G_3(p); \quad (7.198)$$

$$N^{(2)}(p) = G_2(p)p^2 + [G_1(p) + 2a_1G_2(p)]p - a_0G_3(p)]p + 2a_1G_1(p); \quad (7.199)$$

$$N^{(3)}(p) = G_3(p)p^2 + 2[G_2(p) + a_1G_3(p)]p + 2(G_1(p) + a_0G_3(p)). \quad (7.200)$$

Тоді розв'язання рівнянь Ріккати у першому наближенні запишеться у такому вигляді:

$$k_i^{(1)}(\tau) = k_i^{(0)}(\tau) - \left[ \sum_{j=1}^3 (cn_j^{(i)} + \tau cn_{j+3}^{(i)}) e^{-\beta_j\tau} + \sum_{j=4}^9 cn_{j+3}^{(i)} e^{-\beta_j\tau} \right]. \quad (7.201)$$

Повернемося тепер у формулах (7.201) до змінної  $t$  ( $\tau = T - t$ ). Отримаємо

$$k_i^{(1)}(T-t) = \bar{c}_0^{(i)} + \sum_{j=1}^3 \left( \bar{c}_j^{(i)} + t\bar{c}_{j+3}^{(i)} \right) e^{-\alpha_j(T-t)} + \sum_{j=4}^9 c_{j+3}^{(i)} e^{-\beta_{j+4}(T-t)}. \quad (7.202)$$

де

$$\bar{c}_0^{(i)} = c_0^{(i)}; \quad \bar{c}_j^{(i)} = cn_j^{(i)} - Tcn_{j+3}^{(i)}; \quad j = 1, 2, 3.$$

### 7.5.3. Розв'язання рівняння стану

Рівняння стану для даного об'єкта

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - c_1^{(2)} & -3 - c_1^{(3)} \end{bmatrix} \bar{x}(t) - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_1(t)k_2'(T-t) + x_2(t)k_3'(T-t) \end{bmatrix} \quad (7.203)$$

Це векторне рівняння – лінійне рівняння зі змінними параметрами. Фактично це векторне рівняння із запізненням із-за наявності множників вигляду  $\exp[-jt]$  при шуканих функціях  $x_i(t)$ . Пошук розв'язання такого роду рівнянь являє собою як у теоретичному, так і у практичному плані досить складну проблему. Тому для пошуку розв'язання цієї системи з двох рівнянь застосуємо той самий ітераційний метод, що застосовувався для розв'язання рівнянь Ріккати.

У “лінійному” наближенні маємо

$$\Delta_x = p^2 + (3 + c_1^{(3)})p + (2 + c_1^{(2)}) = (p + \alpha_1)(p + \alpha_2). \quad (7.204)$$

$$x_1^{(0)}(t) = ax_1 e^{-\alpha_1 t} + bx_1 e^{-\alpha_2 t} \quad (7.205)$$

$$x_2^{(0)}(t) = ax_2 e^{-\alpha_1 t} + bx_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (7.206)$$

Коефіцієнти  $ax_i, bx_i$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} ax_1 &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[ x_{10}(3 + c_1^{(3)}) + x_{20} - \alpha_1 x_{10} \right]; & bx_1 &= x_{10} - ax_1; \\ ax_2 &= \frac{-1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[ 2x_{10} + c_1^{(2)} + \alpha_1 x_{20} \right]; & bx_2 &= x_{20} - ax_2. \end{aligned} \quad (7.207)$$

Визначимо  $N_x(t) = x_1^{(0)}(t)k_2'(T-t) + x_2^{(0)}(t)k_3'(T-t)$ .

$$\begin{aligned} N_x(t) &= t \sum_{j=2}^4 \left[ \left( ax_1 c_j^{(2)} + ax_2 c_j^{(3)} \right) e^{-jT} e^{-\beta_j t} + \left( bx_1 c_j^{(2)} + bx_2 c_j^{(3)} \right) e^{-jT} e^{-\gamma_j t} \right] + \\ &+ \sum_{j=2}^8 \left[ \left( ax_1 c_{j+3}^{(2)} + ax_2 c_{j+3}^{(3)} \right) e^{-jT} e^{-\beta_j t} + \left( bx_1 c_{j+3}^{(2)} + bx_2 c_{j+3}^{(3)} \right) e^{-jT} e^{-\gamma_j t} \right] = \\ &= t \sum_{j=2}^4 \left[ (g_{1,j-1} e^{-\beta_j t} + g_{2,j-1} e^{-\gamma_j t}) e^{-jT} \right] + \sum_{j=2}^8 \left[ (g_{1,j+2} e^{-\beta_j t} + g_{2,j+2} e^{-\gamma_j t}) e^{-jT} \right] \end{aligned} \quad (7.208)$$

Перейдемо у простір зображень, домножимо вираз, що отримується, на

$$\left[ \frac{ax_1}{p + \alpha_1} + \frac{bx_1}{p + \alpha_2} \right],$$

відокремимо елементарні множники

$$1/(p + \alpha_i), \quad 1/(p + \beta_j), \quad 1/[(p + \beta_j)^2], \\ 1/(p + \gamma_j), \quad 1/[(p + \gamma_j)^2], \quad \beta_j = \alpha_1 - j, \quad \gamma_j = \alpha_2 - j,$$

та повернемося у простір оригіналів. Отримуємо

$$x_1^{(1)}(t) = x_1^{(0)}(t) - \left[ h_{1,1}e^{-\alpha_1 t} + h_{2,1}e^{-\alpha_2 t} + t \sum_{j=2}^4 (h_{1,j}e^{-\beta_j t} + h_{2,j}e^{-\gamma_j t}) e^{-jT} + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^8 (h_{1,j+3}e^{-\beta_j t} + h_{2,j+3}e^{-\gamma_j t}) e^{-jT} \right] \quad (7.209)$$

Змінну стану  $x_2^{(1)}(t)$  знаходимо, продиференціювавши по  $t$   $x_1^{(1)}(t)$ .

Тепер можна записати вираз для оптимального управління

$$u(t) = -2[x_1(t)k_2(T - t) + x_2(t)k_3(T - t)]. \quad (7.210)$$

---

 Автоматизоване проектування СУ
 

---

### 8.1. Постановка задачі оптимізації САУ

Сформулюємо задачу оптимізації систем автоматичного управління по пунктам.

1. Задано векторно-матричне диференціальне рівняння, що описує поведінку об'єкту управління:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{p}, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.1)$$

де  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  – вектор змінних стану,  $\mathbf{U}(t) \in R^m$  – вектор управляючих впливів;  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$  – вектор проектних параметрів,  $\mathbf{F} \in R^n$  – вектор-функція, що передбачається неперервною та неперервно диференційовною за всіма змінними.

Якщо об'єкт лінійний і стаціонарний, система (8.1) має вигляд

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{U}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{p}) = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (8.2)$$

якщо ж він лінійний і нестаціонарний, векторно-матричне рівняння об'єкту запишеться у вигляді

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{p}, t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{p}, t)\mathbf{U}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (8.3)$$

де  $\mathbf{A}(\mathbf{p}, t), \mathbf{B}(\mathbf{p}, t)$  – змінні матриці, що залежать від вектора проектних параметрів  $\mathbf{p}$ .

2. Задано показник якості управління, або критеріальний функціонал:

$$I = g_0(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^T, T, \mathbf{p}) + \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{p}, t) dt. \quad (8.4)$$

3. Задано обмеження на управління, які пов'язані із обмеженістю ресурсів управління.

Наприклад, обмеження вигляду  $|\mathbf{U}(t)| \leq u_m$  трапляється при управлінні поворотами космічного апарата, коли обертальний момент утворюється парою реактивних двигунів, що обертають.



Вектор  $\mathbf{U}(t)$  набуває значень із деякої множини  $U^m \subset R^m$  із координатами  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Ця множина може виявитися усім простором  $R^m$  (задача без обмежень) або його частиною.

Множину  $U^m$  називають *множиною допустимих значень управління*.

У механіці польоту управляючими змінними  $u_i(t)$  зазвичай являються координати відхилення рульових поверхонь вектору тяги, координати кутового положення літального апарату, компоненти швидкості та її напрямку тощо.

#### 4. Задано обмеження на траєкторію.

У низці реальних ситуацій система не спроможна відшукувати певні області фазового простору. Це відображається у відповідних обмеженнях на траєкторію  $\mathbf{X}(t)$  руху системи, що полягає у тому, що у кожний момент часу  $t$  задається область  $X^n \subset R^n$ , в яку може опинитися вектор стану  $\mathbf{X}(t)$ . Вказані умови визначаються запасами механічної міцності об'єкту, його термічною міцністю тощо.

#### 5. Задано межові умови.

Мета управління полягає у переведенні об'єкту із певного початкового стану у заданий кінцевий стан. Початковий і кінцевий стани можна задати двома точками у фазовому просторі:

$$\mathbf{X}(t)|_{t=0} = \mathbf{X}^0 = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$$

– початковий стан;  $t = t_0 = 0$  – початковий момент часу (початок управління);

$$\mathbf{X}(t)|_{t=T} = \mathbf{X}^T = [x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)]^T$$

– кінцевий стан,  $T$  – кінцевий момент часу (кінець управління).

Залежно від вигляду цих обмежень відокремлюють різні класи задач управління. У задачах із фіксованими кінцями початковий  $\mathbf{X}^0$  і кінцевий  $\mathbf{X}^T$  стани задані. Якщо ж початковий  $\mathbf{X}^0$  або кінцевий  $\mathbf{X}^T$  стан не задано, відповідна задача має назву задачею із вільним лівим або правим кінцем траєкторії. Задачею із рухомими межами називається така задача, в якій моменти часу  $t = 0$  і  $t = T$  задано, а  $\mathbf{X}^0$  та  $\mathbf{X}^T$  можуть змінюватися у межах областей  $G^0$  та  $G^T$ .

У фазовому просторі множини  $G^0$  та  $G^T$  часто записують у вигляді

$$G^0[\mathbf{X}(0)] = 0, \quad G^T[\mathbf{X}(T)] = 0.$$

Множини  $G^0$  і  $G^T$  називають цільовими множинами. Із множини фазових траєкторій, що починаються на  $G^0$  і закінчуються на  $G^T$ , у процесі оптимізації вибирають ту, яка дає екстремальне значення критерію якості.

У задачах із ізопериметрними обмеженнями заданими вважаються величини інтервалів

$$I_j = \int_0^T f_{0j}(\mathbf{X}(t), t), \quad j = \overline{1, k_0}, \quad (8.5)$$

де  $f_{0j}$  – задані скалярні функції.

Переведення об'єкту із стану  $\mathbf{X}^0$  у стан  $\mathbf{X}^T$  на  $[0, T]$  можливий не завжди. Якщо знайдеться бодай одна пара векторів  $\{\mathbf{U}(t), \mathbf{p}\}$ , що здійснює такий перехід, зазвичай існують й інші пари векторів, що реалізують переведення об'єкта із  $\mathbf{X}^0$  у  $\mathbf{X}^T$ . При оптимізації ставиться задача про відшукування таких  $\{\mathbf{U}(t), \mathbf{p}\}$ , які доставляють екстремум функціоналу якості. Для побудови оптимальних управлінь у більшості випадків використовують наближені методи, тому часто ставиться задача досягнути бажаного стану  $\mathbf{X}^T$  із певною точністю, що задається умовою

$$[\mathbf{X}(T) - \mathbf{X}^T]^T \mathbf{Q} [\mathbf{X}(T) - \mathbf{X}^T] \leq \delta,$$

де  $\mathbf{Q}$  – невід'ємно визначена матриця,  $\delta$  – задане число,  $\mathbf{X}^T$  – еталонний вектор,  $\mathbf{X}(T)$  – реальний вектор.

### 6. Задано допустиме програмне управління.

Вектор-функцію  $\mathbf{U}(t)$  називають допустимим програмним управлінням, якщо

а)  $\mathbf{U}(t)$  належить класу кусково-неперервних по  $t$  на проміжку  $[0, T]$  функцій, тобто може мати лише скінченну кількість точок розриву першого роду;

б)  $\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m \forall t \in [0, T]$ .

Наведемо постановку задачі оптимізації (для спрощення постановки задачі вважають, що функції від вектора  $\mathbf{p}$  не залежать).

При заданих управліннях об'єкта (8.1), обмеженнях (8.5) та межових умовах  $\mathbf{X}^0 \in G^0$ ,  $\mathbf{X}^T \in G^T$  треба знайти таке програмне управління  $\mathbf{U}^*(t)$  або управління у вигляді зворотного зв'язку  $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t), t)$  із класу усіх допустимих та фазову траєкторію  $\mathbf{X}^*(t)$ , за яких критерій (8.4) на розв'язках системи набуває екстремального значення.

Управління  $\mathbf{U}^*(t)$ ,  $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t), t)$  і траєкторія  $\mathbf{X}^*(t)$  називаються оптимальними.

Постановку задачі можна зробити повнішою, якщо врахувати вектор параметрів

$\mathbf{p}$ .

Поміж усіх допустимих на інтервалі  $[0, T]$  програмних управлінь  $\mathbf{U}(t)$  або управлінь у вигляді зворотного зв'язку  $\mathbf{U}(\mathbf{X}(t), t)$  та управляючих параметрів  $\mathbf{p} \in P^s$ , що переводять об'єкт із стану  $G^0$  у стан  $G^T$ , знайти такі, для яких функціонал (8.4) на розв'язках системи (8.1) приймає екстремальне значення.

Формальна постановка задачі:

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{p}, t) dt + g_0(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^T, T, \mathbf{p}) \rightarrow \min_{\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{p}}$$

за таких обмежень:

а)  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{p}, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;

б)  $\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m \forall t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{X}(t) \in X^n \subset R^n \forall t \in [0, T]$ ;

в)  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(t)|_{t=0} = \mathbf{X}^0 \in G^0$ ,  $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}(t)|_{t=T} = \mathbf{X}^T \in G^T$ ;

г)  $\mathbf{U}(t)$

належить до класу допустимих управлінь.

## 8.2. Сутність процесу проектування

Системи автоматизованого проектування (САПР) є один із ефективніших засобів підвищення продуктивності інженерної праці і наукової діяльності, скорочення термінів та покращання якості розробок.

Специфіка автоматизації проектування систем автоматичного та автоматизованого управління визначається перш за все такими факторами:

1. Системи управління створюються практично в усіх галузях господарства як для автоматизації технологічних процесів, так і для управління технічними об'єктами. У розробці приймають участь як спеціалісти з управління, так і спеціалісти із конкретних процесів і об'єктів, тобто особи, професійні знання яких стосуються різних сфер.

2. Теорія автоматичного управління, як методологічна основа проектування, в її сучасному стані містить низку загальних принципів, що справджуються для будь-яких процесів, що є управляемі, і досить значну кількість підходів до синтезу систем управління різного класу. Питання про можливість та слушність застосування того чи іншого методу необхідно вирішувати у кожному конкретному випадку.

Із всіх етапів автоматизованого проектування САПР САУ нижче розглядається найважливіший і специфічний етап проектування – автоматизований синтез, що ґрунтується на методах теорії автоматичного регулювання.

Створенню будь-якого об'єкту передують проектування, тобто опис об'єкту, що має бути створений. Під поняттям об'єкт проектування мають на увазі будь-який об'єкт, що ще не існує, наприклад, машину, процес, систему, обчислювальний комплекс тощо.

Мета процесу проектування полягає передусім у тому, щоб на ґрунті апріорної (вхідної) інформації та апостеріорної (додаткової) інформації, що отримують у процесі проектування, розробити технічну документацію, що необхідна для виготовлення об'єкта проектування.

Проектування – це процес створення прототипу, необхідного для виготовлення цього об'єкту. Проектування по сутності, є процес управління зі зворотним зв'язком. Технічне завдання (ТЗ) формує входи або уставки, які порівнюються із результатами проектування, й якщо вони не збігаються, цикл проектування повторюють доти, доки похибка (відхилення від заданих технічних вимог) не опиниться у допустимих межах.

Процес проектування здійснюється системою проектування, тобто сукупністю проектувальників, що взаємодіють один із одним, та технічних засобів, які для цього необхідні. По суті системи проектування можна розглядати як складні людино-машинні многоконтурні, многовимірні системи управління зі зворотним зв'язком, що потребують збирання, передавання, переробки інформації для досягнення мети проектування. Вони мають підпорядковуватися певному критерію оптимізації, наприклад, критерію найменшої тривалості або максимальній швидкодії за обмежених витрат або критерію найшвидшої окупності системи, що спроектована тощо.

Для скорочення часу проектування необхідно пришвидшувати проходження корисних сигналів і запобігати впливу завад, тобто сигналів, що не несуть корисної інформації. Такими завадами можуть бути помилкові або неточні проміжні результа-

ти або невдалий вибір структури системи проектування, коли сигнали, що необхідні для прийняття рішень на певному рівні, надходять на верхні рівні, де вони можуть виявитися не тільки не корисними, але й шкідливими.

### 8.3. Автоматизація проектування

Спочатку термін "автоматизація проектування" застосовували в усіх випадках, коли ЕОМ використовували для розрахунків, що пов'язані із проектуванням. Але зараз цей вислів набув специфічного сенсу, що стосується інтерактивних систем, в яких проектувальник та ЕОМ під час вирішення задачі проектування взаємодіють.

САПР можна розглядати як системи управління зі зворотним зв'язком. САПР – це людино-машинна або автоматизована система управління технологічним процесом виробництва технологічної документації, що необхідна для виготовлення об'єкта, що проектується.

Загальним для всіх САПР є те, що незалежно від об'єкта проектування вони можуть розглядатися як автоматизовані системи управління технологічними процесами виробництва технічної документації. Тому розвиток загальної теорії систем автоматизованого управління одночасно є розвиток теоретичних основ САПР будь-яких об'єктів. Але САПР систем автоматизованого управління технічними об'єктами властива низка особливостей, що відрізняє їх від більшості САПР інших технічних об'єктів. Цими особливостями є:

1. При проектуванні СУ основні складності і найбільша трудомісткість пов'язана із вибором структури, інформаційних потоків, функціональних, динамічних, логічних та алгоритмічних зв'язків між підсистемами, на відміну від, наприклад, проектування споруд, машин тощо, коли головна увага зосереджена на етапах конструкторського і технологічного проектування.

2. Обчислювальні машини, люди і потоки інформації між ними входять у склад не тільки САП СУ, але й являються складовими елементами системи, що проектується. Тому САПР АСУ ТП може розглядатися не тільки як узагальнена модель процесу проектування АСУ визначеного класу, але й як інформаційно-динамічна модель конкретної системи управління у процесі її нормальної експлуатації, оскільки інформаційні потоки і необхідність їхньої обробки існують не тільки у процесі проектування, але й за нормальної експлуатації СУ.

3. Математичні моделі СУ складаються в умовах суттєво неповної інформації про об'єкт управління, про збурення, що впливають на них, а також умовах неповної вимірювальної інформації і за наявності завдань.

4. Система управління зазвичай адекватні не статичні, а логіко-динамічні моделі високої розмірності, що враховують принципову структурну особливість систем управління, які є системи зі зворотним зв'язком, для яких важливими умовами робоздатності є динамічна стійкість, управляємість, спостережність та поведінка у динаміці.

5. САПР СУ мають передбачати можливість дослідження питання про раціональний розподіл функцій між людиною і ЕОМ у процесі експлуатації системи управління.

Отже, САПР АСУ ТП можна розглядати як модель системи, що проектується, в якій враховано основні види динамічної та інформаційної взаємодії між її частинами, у тому числі й проектувальників.

Розробка теорії і методики автоматизованого проектування АСУ ТП і технічними об'єктами являє собою складну проблему перш за все із-за складності формалізації, або математичного опису, і складання моделей протікання цих процесів.

#### 8.4. Системи автоматизованого синтезу (СИАС)

Мета й основний зміст автоматизованого проектування АСУ ТП такі:

1. Складання математичної моделі об'єкту управління і зовнішнього середовища за наявною апріорною інформацією і результатами ідентифікації діючих об'єктів або їхніх фізичних моделей.

2. Структурний синтез, що містить складання структурної схеми АСУ на ґрунті аналізу особливостей технологічного процесу, визначення необхідних інформаційних потоків, оцінку можливості отримання вимірювальної інформації, пошук точок прикладання управляючих впливів, врахування можливості декомпозиції системи і розподіл функцій управління за відповідними рівнями (розподілені системи).

3. Складання математичної та імітаційної моделі всієї системи управління.

4. Синтез законів регулювання, управління, координації і алгоритмів їх реалізації.

5. Визначення режимів інтерактивної взаємодії у реальному масштабі часу із ЕОМ, що входить у склад СУ.

6. Аналіз отриманих результатів за допомогою засобів імітаційного та півнатурного моделювання.

7. Формулювання вимог і рекомендацій про вибір ЕОМ та інших технічних засобів, що входять у склад АСУ.

8. Уточнення і корекція технічного завдання.

9. Складання документації

Системи автоматизованого проектування, що виконують перші 6 пунктів, що перелічно, називають *системами автоматизованого синтезу* (СИАС).

##### 8.4.1. Загальна характеристика проблеми синтезу МСАР

Відомі два основних принципи побудови багатовимірних систем автоматичного регулювання (МСАР).

Перший принцип побудови, що іноді іногда називають "класичним", наведено на рис. 8.1. Він ґрунтується на математичному опису за допомогою змінних вхід – вихід (матричних передаточних функцій (МППФ) та матричних частотних характеристик (МЧХ).

Розглянемо багатовимірну САР, що містить лінійний стаціонарний об'єкт із кількома входами та виходами.

Позначимо:  $g_{\text{вх}}(p)$ ,  $n(p)$ ,  $g(p)$ ,  $\varepsilon(p)$ ,  $u(p)$ ,  $y(p)$ ,  $\eta(p)$ ,  $z(p)$ ,  $f(p)$  відповідно перетворення за Лапласом для векторів:  $g_{\text{вх}}(t)$  – вхідного впливу, що задає;  $n(t)$  – вхідного шуму;  $g(t)$  – дійсного вхідного впливу;  $\varepsilon(t)$  – похибки;  $u(t)$  – впливу, що регулює;  $y(t)$  – виходу;  $\eta(t)$  – шуму вимірювань;  $z(t)$  – зворотного зв'язку;  $f(t)$  – збурень, що

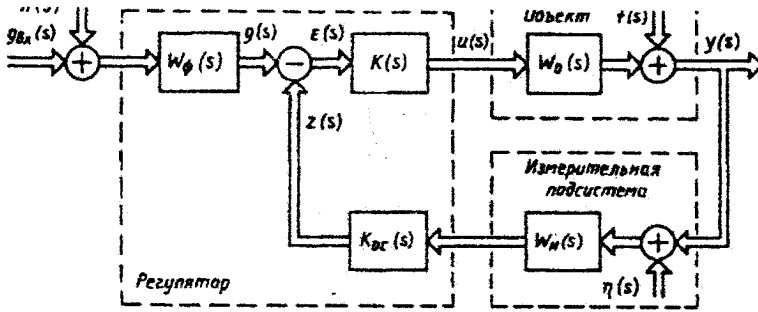


Рис. 8.1. "Класична" структура МСАР

діють на об'єкт.

Крім того, позначимо:  $W_0(p)$  – МПФ об'єкта;  $W_{из}(p)$  – МПФ вимірювальної підсистеми;  $K_{oc}(p)$  – МПФ пристрою зворотного зв'язку, що корегує;  $K(p)$  – МПФ послідовного корегуючого пристрою;  $W_f(p)$  – МПФ попереднього фільтру.

Припустимо, що бажаний вихід  $y_d(t)$  замкненої системи зв'язаний із дійсним входом сигналом, що задає,  $g(t)$ , який надходить від верхнього рівня системи, співвідношенням

$$y_d(p) = H(p)g_{вх}(p),$$

де  $H(p)$  – ідеальна матрична ПФ.

Попередній фільтр, що має МПФ  $W_f(p)$ , вибирають так, щоб його вихід  $g(t)$ , що визначається співвідношенням

$$g(p) = W_f[g_{вх}(p) + n(p)],$$

був найкращим варіантом бажаного вихідного сигналу  $y_d(t)$ . Якість регулювання характеризується вектором похибки

$$\epsilon(p) = g(p) - y(p).$$

Вимірювальна система має МПФ  $W_{из}(p)$ . Регулятор являє собою динамічну систему, яка описується диференціальними рівняннями або МПФ  $K(p)$  та  $K_{oc}(p)$ .

При проектуванні МСАР застосовують дві постановки задачі: детерміновану і стохастичну. У першому випадку шум вимірювань  $\eta(t)$ , вхідний шум  $n(t)$  не запроваджуються у розгляд, а вплив, що збурює,  $f(t)$  вважається нульовим або дорівнює заданій функції часу.

При стохастичній постановці задачі враховують усі три або бодай один із векторів  $\eta(t)$ ,  $n(t)$ ,  $f(t)$ , що розглядаються як випадкові функції часу. При повнішій постановці задачі враховують невизначеність у завданні параметрів системи.

Позначимо:  $\Phi(p)$  МПФ замкненої системи,  $W(p)$  – МПФ розімкненої системи (рис. 8.1). Тоді загальне розв'язання для вектору виходу  $y(t)$  стійкої системи у де-

термінованій постановці за  $f(t) = 0$  можна подати у вигляді

$$y(t) = ce^{\lambda t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi(p)G(p)s^{pt} dp, \quad (8.6)$$

де перший член у правій частині формули характеризує вільні коливання, що виникають під впливом початкових умов, а другий – вимушені коливання, що визначаються вхідним впливом  $g(t)$ .

При “класичному” підході вплив початкових умов зазвичай не враховують, тобто розглядають випадок нульових початкових умов

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi(p)G(p)s^{pt} dp, \quad (8.7)$$

Найчастіше в якості вхідного впливу як типового і найгіршого для відтворення вибирають одиничний випадковий вплив  $1(t)$ , для якого  $G(p) = 1/p$ .

Другий принцип побудови МСАР ґрунтується на математичному опису системи у змінних стану. Регулювання здійснюється за допомогою зворотного зв'язку за вектором стану  $x(t)$  (рис. 8.2) або за вектором виходу (рис. 8.3).

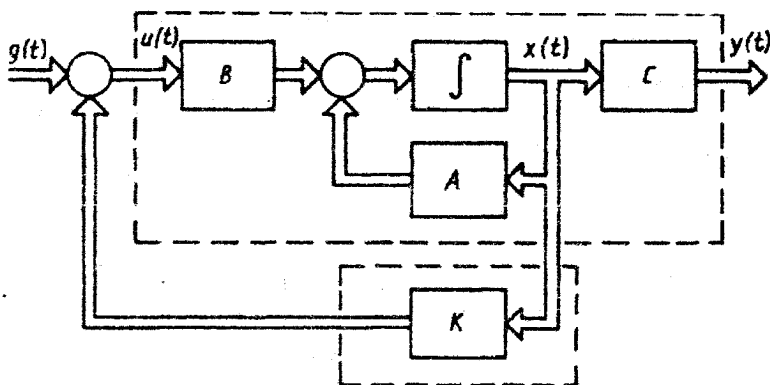


Рис. 8.2. Структура МСАР зі зворотним зв'язком за вектором стану

першому випадку вважають, що вектор стану повна спостерігається. Але зазвичай спостерігається лише вихід  $y(t)$ . Тому у контур регулювання запроваджується так званий *пристрій, що спостерігає*, задача якого полягає у тому, щоб за входом, що спостерігається,  $u(t)$  і виходом  $y(t)$  об'єкту регулювання оцінювати вектор стану  $x(t)$ .

Об'єкт регулювання заданий своїм лінеаризованим математичним описом у змінних стану:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + w, \quad x(t)|_{t=t_0} = x(t_0). \quad (8.8)$$

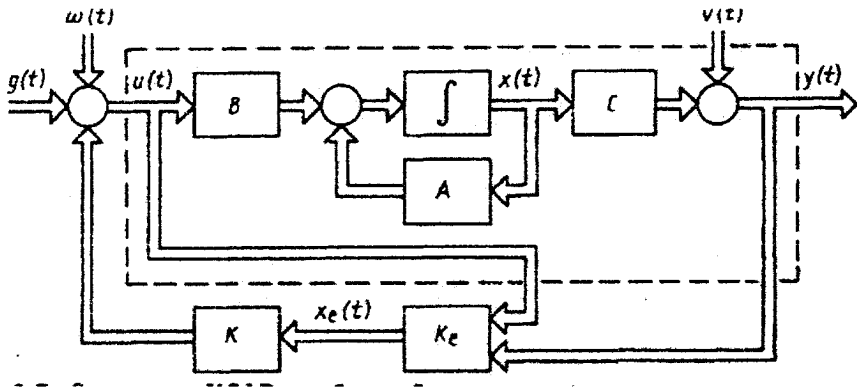


Рис. 8.3. Структура МСАР зі зворотним зв'язком за вектором виходу

$$y = Cx + v, \quad (8.9)$$

де  $x \in R^n$ ,  $y \in R^l$ ,  $u \in R^m$ ,  $A, B, C$  – матриці відповідно розміром  $(n, n)$ ,  $(n, m)$ ,  $(n, l)$ , а  $w(t)$  і  $v(t)$  – випадкові ієкторні функції.

Проектування МСАР на стадії динамічного синтезу, згідно із цим підходом складається із двох взаємно незалежних (за певних обмежувальних умов) етапів синтезу: закону регулювання у вигляді матриці коефіцієнтів  $K$ ; пристрою, що спостерігає у вигляді матриці спостережності  $K_e$ .

У цьому підході зазвичай регулятор синтезують як нединамічну систему або систему без “пам'яті”. Тобто, припускають, що вихід регулятора або вхід об'єкта  $u(t)$  у момент часу  $t$  є функція від вектора стану  $x(t)$  або його оцінки  $x_e(t)$  у той самий момент часу  $t$ . Матриця  $K$  у цьому разі не містить динамічних (тобто інерційних, інтегруючих, диференціюючих) ланок, хоча може залежати від часу.

Пристрій, що спостерігає, або фільтр  $K_e$ , є, як правило, динамічна система, що містить у собі модель об'єкта, який замкнений безінерційним багатовимірним зворотним зв'язком.

Короткий аналіз двох основних принципів побудови структури МСАР свідчить, що поняття структури системи є важливішим, оскільки воно визначає вибір підходу і методу при розв'язанні задач синтезу, тобто поняття системи, структури та її математичний опис тісно пов'язані.

#### 8.4.2. Основні вимоги до динамічних властивостей МСАР

При проектуванні МСАР на етапі їхнього динамічного синтезу до них пред'являють такі вимоги:

*стійкості*, яка полягає у тому, щоб вектор стану  $x(t)$  (або вектор виходу  $y(t)$ ) прямував до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , тобто щоб  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , або/і  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ ;

*управляємості*, яка полягає у тому, щоб існував вхідний вектор  $u(t)$ , який надає можливість перевести вектор стану  $x(t)$  (або вектор виходу  $y(t)$ ) із початкового стану  $x(t_0)$  (або  $y(t_0)$ ) у кінцевий стан  $x(t_1)$  за заданий час  $t_1 - t_0$ ;



*спостережності*, що означає можливість за спостереженням вектора виходу  $y(t)$  упродовж інтервалу  $(t_1 - t_0)$  знайти початковий стан  $x(t_0)$ ;

*відтворюваності*, яке полягає у можливості відшукання входу  $g(t)$ , який викликає на виході сисеми задану реакцію  $y(t)$ , що мфститься в околі бажаного виходу  $y_d(t)$ ;

*якості регулювання*, згідно якому вектор входу  $y(t)$  за векторного одиничного східчастого впливу на вході (або при переході із початкового стану  $x(t_0)$  у кінцевий  $x(t_1)$ ) має належати прострові допустимої якості регулювання  $Q_{\sigma, T, \Delta}$ , що визначається допустимими значеннями перерегулювання:

$$\sigma[y_{\max} - y(t)]/y(t_1),$$

часу регулювання  $T$  та статичній точності  $\Delta$ ;

*завадостійкості*, яка полягає у тому, щоб похибки відтворення вектора заданого хідного впливу за наявності завод не перевищували заданої величини;

*грубості* – спроектвана МСАР має задовольняти усім умовам, що сформульовано вище за наявності обмеженої невизначеності у завданні моделі об'єкта і моделі навколишнього середовища (характеристик завд і збурень).

В теорії автоматичного управління не існує універсального шляху для забезпечення всієї сукупності вимог, що перелічено. Крім того, проектувальник конкретних систем управління, як правило, не здатний оволодіти всіма подробицями сучасних методів та їх модифікацій, особливостями застосування їхніх розрахункових процедур і методик.

Отже, одна із основних перспективних проблем автоматичного проектування – надати проекутвальнику можливість використання при розобках різноманітних підходів до дослідження та синтезу систем без заглиблення у математичні та обчислювальні нюанси цих підходів.

Основний шлях подолання цієї проблеми – створення пакетів прикладних програм для вирішення окремих задач або етапів дослідження і синтезу систем регулювання і управління.

## 8.5. Синтез пристроїв, що спостерігають

Відомо, що запровадження зворотного зв'язку за вектором стану, тобто формування закону регулювання вигляду  $u = -Kx$  пееворює передаточну матрицю об'єкта  $W_0$  у матрицю замкненої системи

$$\Phi(p) = C(pI - A + BK)^{-1}B, \quad (8.10)$$

якій відповідає характеристичне рівняння

$$|pI - A + BK| = 0. \quad (8.11)$$

Це рівняння свілчить, що належним вибором матриці  $K$  можна отримати бажані значення коренів характеристичного поліному і цим впливати на динамічні властивості системи.

При цьому, якщо об'єкт є управляємий, значення коренів можна завдавати будь-якими. Задача визначення закону регулювання, що забезпечує задані бажані значення коренів, отримала назву задачі *модального управління*.

Але формування такого закону вимагає, щоб усі складові вектора стану  $x$  були досяжні для вимірювання, що часто є неможливе, оскільки спостерігається і вимірюється тільки вихід  $y$ . Тому необхідно мати у розпорядженні пристрої, що надають можливість оцінювати вектор стану  $x$  за результатами спостереження векторів  $y(t)$  і  $u(t)$ . Такого роду пристрої назвають пристроями, що спостерігають (або естиматорами, спостерігачами, ідентифікаторами стану).

Спостерігачі можна поділити на два класи: детерміновані і стохастичні. Перші – вирішують задачу оцінювання вектора стану  $x$  і визначення матриці  $K_e$  за заданим розподілом власних значень матриці  $\Phi$  без урахування статистичних характеристик завад. Другі – надають можливість знайти матрицю  $K_e$ , яка надає оптимальну оцінку вектора  $x$  (наприклад, з точки зору квадратичного критерію), але вони потребують знання статистичних характеристик завад.

### 8.5.1. Принципи побудови

Назвемо пристроєм, що спостерігає, динамічну систему, яка здатна визначати складові вектора стану  $x(t)$  за відомими векторами входу  $u(t)$ , виходу  $y(t)$  та тими складовими  $x_n(t)$ , що досяжні для спостереження.

Здається, очевидний принцип побудови пристрою, що спостерігає, полягає у тому, щоб за допомогою рівнянь об'єкту

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (8.12)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (8.13)$$

виразити  $x(t)$  через  $y(t)$  та  $u(t)$  і замінити безпосередній зворотний зв'язок по  $x(t)$  зворотним зв'язком по  $y(t)$  та  $u(t)$ . Але на практиці такий метод обчислення вектора стану непридатний, оскільки він вимагає обчислення похідних від входу  $u(t)$  і виходу  $y(t)$ , які завжди містять завади.

Оскільки естиматор має використовувати вхід, що спостерігається,  $u(t)$  і вихід, що спостерігається,  $y(t)$  об'єкта регулювання, а також що виходом естиматора, що має власну динаміку, має бути оцінювання вектора стану  $x(t)$ , подамо рівняння естиматора у такій формі:

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + B_1u(t) + B_2y(t). \quad (8.14)$$

При цьому зробимо два суттєвих зауваження:

рівняння об'єкта і пара  $(A, C)$  відповідають системі, що є сповна спостережна, оскільки у протилежному разі принципово неможливо визначити стан об'єкта за спостереженням входу і виходу;

Природно припустити, що естиматор має представляти собою модель об'єкта. Тоді рівняння естиматора подамо у вигляді

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e + Bu + K_e C(x_e - x), \quad (8.15)$$

Схема, що відповідає рівнянню (8.15), наведена на рис. 8.4. Рівняння (8.15) має властивість, що коли  $x_e(t)$  та  $x(t)$  збігаються для деякого моменту часу  $t_0$ , то вони не відрізняться один від одного для всіх  $t > t_0$ . Якщо ж цієї збіжності немає, відповідним вибором  $K_e$  можна з часом досягти зменшення різниці між  $x_e$  і  $x$ .

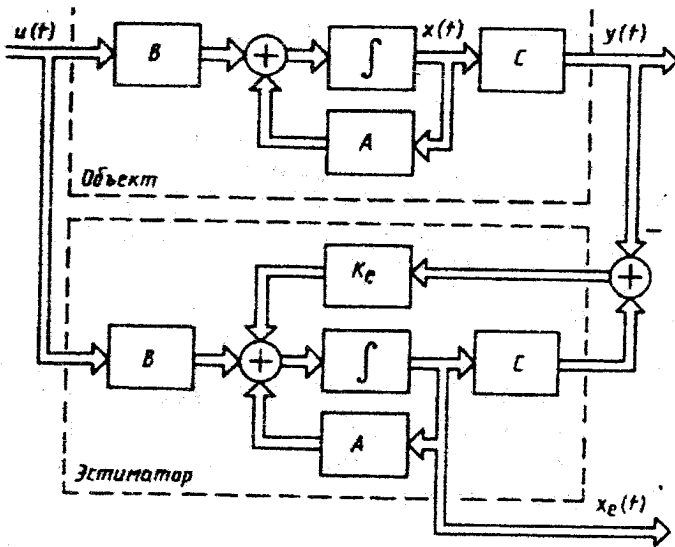


Рис. 8.4. Схема з'єднання об'єкта із естиматором, що використовує принцип моделювання об'єкта

Естиматор можна розглядати як модель об'єкта із додатковим контуром, що формує похибку між виходом об'єкта  $y = Cx$  і виходом естиматора. Цей контур забезпечує прагнення  $x_e \rightarrow x$ . Отримати будь-які бажані власні значення матриці  $(A + K_e C)$  шляхом відповідного вибору матриці  $K_e$  можна тоді, коли пара  $(A, C)$  сповна спостережна.

Розглянемо тепер вплив шуму на роботу естиматора. Якщо на вхід  $u(t)$  і вихід  $y(t)$  накладаються шуми, вони так чи інакше будуть згладжені естиматором, причому ступінь згладжування залежатиме від  $K_e$ . Вибір величини  $K_e$  впливає також на швидкість збіжності  $x_e \rightarrow x$ , оскільки він залежить від власних значень матриці  $(A + K_e C)$ . Чим далі від уявної осі розташовано власні значення, тим вища швидкість збіжності, але тим ширша смуга частот естиматора і тим вищий рівень шумів на його виході. Тому  $K_e$  належить вибирати так, щоб досягти компромісу між швидкістю оцінювання вектора  $x(t)$  і впливом шумів. Покажемо, яким чином можна знайти  $K_e$ , якщо власні значення матриці  $(A + K_e C)$  задано.

### 8.5.2. Спостерігачі повної розмірності

Нехай рівняння одновимірного об'єкта (один вхід, один вихід) має вигляд (8.12)–(8.13), а характеристичний поліном об'єкта

$$D(p) = |pI - A| = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0. \quad (8.16)$$

Приведемо матрицю  $A$  і вектор  $C$  до супроводжуючої канонічної форми. Для цього завпровадимо матрицю перетворення

$$\Pi = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Матриця перетворення переводить рівняння (8.12), (8.13) до

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{A}\tilde{x} + Bu; \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

де

$$\tilde{A} = \Pi A \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = (\Pi^{-1})'C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Розглянемо тепер рівняння спостерігача (8.15). Задача полягає у відшуванні матриці  $K_e$ , а у разі одновимірного об'єкта вектор  $k_e = [k_{0e}, k_{1e}, \dots, k_{(n-1)e}]$ .

Для цього вирішимо цю задачу у новому базисі (8.18), тобто знайдемо вектор  $\tilde{k}_e$  так, щоб матриця  $(\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C})$  мала задані власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Згідно рівнянню (8.16) та матриці (8.19) маємо

$$|pE - (\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C})| = p^n + (\tilde{a}_{n-1} - \tilde{k}_{(n-1)e})p^{n-1} + \dots + (\tilde{a}_0 - \tilde{k}_{0e}) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n); \quad (8.20)$$

$$\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(\tilde{a}_0 - \tilde{k}_{0e}) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(\tilde{a}_1 - \tilde{k}_{1e}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(\tilde{a}_2 - \tilde{k}_{2e}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(\tilde{a}_{n-1} - \tilde{k}_{(n-1)e}) \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Із рівняння (8.20) випливає, що коли власні значення матриці  $(\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C})$ , а отже, і коефіцієнти  $\alpha_i = a_i - k_{ie}$  задано, а коефіцієнти  $a_i$  відомі, вектор  $\tilde{k}_e$  легко визначється із співвідношень  $\tilde{k}_{ie} = a_i - \alpha_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

Матриця  $(\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C})$  матиме ті самі власні значення, що й матриця  $\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C}$ , коли складові вектора  $k_e$  вычислить за формулою  $k_e = \Pi^{-1} \tilde{k}_e$ .

Приклад. Нехай рівняння об'єкту має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [2 \quad -1]x.$$

Знайдемо естиматор шляхом завдання для нього двох однакових власних значень матриці  $(A + k_e C)$ , що дорівнюють  $-10$ . Тоді різниця  $(x - x_e)$  прямуватиме до нуля згідно  $e^{-10t}$ . Знайдемо матрицю  $\Pi$ , яка переводить  $C$  і  $A$  до вигляду (8.19).

Маємо  $|pE - A| = p^2 - p$ . Отже, користуючись виразом (8.17), знайдемо

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

звідки

$$\tilde{A} = \Pi A \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\Pi^{-1})' C.$$

Оскільки

$$|pI - (\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C})| = p^2 + 20p + 100 = (p + 10)(p + 10),$$

то

$$\tilde{k}_e = \begin{bmatrix} -100 \\ -21 \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

й, отже, матриця

$$\tilde{A} + \tilde{k}_e \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$$

має два власних значення, що дорівнюють  $-10$ .

Користуючись значеннями (8.21), (8.22), знайдемо

$$k_e = \Pi^{-1} \tilde{k}_e = \begin{bmatrix} -60,5 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Отже, рівняння естиматора (8.14) у даному випадку має вигляд

$$\frac{dx_e}{dt} = \begin{bmatrix} -120 & 60,5 \\ -200 & 100 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 60,5 \\ 100 \end{bmatrix} y.$$

### 8.5.3. Спостерігачі зниженої розмірності

Нехай як і раніше, многовимірний лінійний стаціонарний об'єкт описується рівняннями (8.12), (8.13). Для зниження порядку естиматора використаємо вихід об'єкта. Об'єкт, що розглядається, являє собою лінійну систему  $(n - q)$ -го порядку, динамічні властивості якої (для об'єкту спостереження, що має  $q$  лінійно незалежні виходи) можуть бути задані проектувальником. Причому конструювання естиматора для системи із  $q$  виходами може бути зведено до конструювання  $q$  окремих естиматорів для об'єктів із одним виходом.

Розглянемо загальний випадок розрахунку естиматора пониженої розмірності, в яких матриця естиматора  $A_e$  має розмірність меншу за розмірність матриці об'єкта  $A$ . Зважаючи на те, що естиматор має використовувати вхід  $u(t)$  і вихід  $y(t)$  об'єкта і що виходом естиматора, що має власну динаміку, має бути значення, що оцінюється,  $x_e(t)$  вектора стану  $x(t)$ , представимо рівняння естиматора у такій формі:

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + B_1y(t) + B_2u(t); \quad (8.23)$$

$$x_e(t) = C_1z(t) + C_2y(t), \quad (8.24)$$

де  $z(t) \in R^{n-q}$ ,  $x_e(t) \in R^n$ . Рівняння естиматора приводиться для об'єкта, в якому пара матриць  $(A, C)$  відповідає системі, що спостерігається, і  $C$  має ранг  $q$ . При цьому треба знайти такий спосіб отримання оцінки  $x_e(t)$  за векторами  $z(t)$  і  $y(t)$ , щоб:

різниця  $x(t) - x_e(t) \rightarrow 0$  за експоненційним законом і  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t) - x_e(t)\} = 0$ ;

оцінка  $x_e(t)$  залежала тільки від значень  $z(t)$  і  $y(t)$  у поточний момент часу  $t$ , тобто щоб оцінку  $x_e(t)$  можна було отримати за допомогою лінійного безінерційного перетворення  $z(t)$  і  $y(t)$ .

У нашому випадку рівняння (8.24) відповідає другій вимозі. Умова першої вимоги виконується, тоді, коли:

- 1)  $A_e$  – стійка матриця;
- 2) існує  $(n - q)n$  матриця  $\Pi$  така, що  $\Pi A - A_e \Pi = B_1 C$ ;
- 3)  $\Pi B = B_2$ ;
- 4) матриця  $[C_1 C_2]$  задовольняє умову  $C_1 \Pi + C_2 C = I_n$ ,  $I_n$  – одинична матриця розмірності  $(n, n)$ .

Основна задача конструювання естиматорів полягає у виборі таких матриць  $A_e$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , щоб виконувалась рівність  $\Pi A - A_e \Pi = B_1 C$ ,  $\Pi B = B_2$ , а матриця  $A_e$  мала задані власні значення.

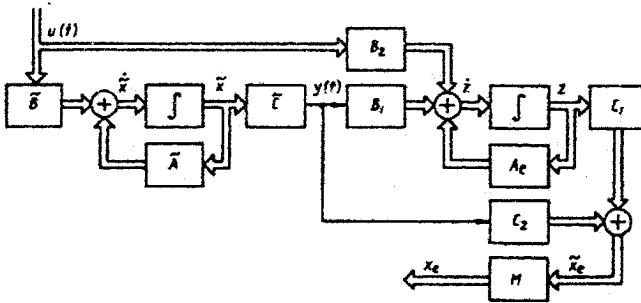


Рис. 8.5. Принцип побудови редукованого естиматора для  $y \in R^1$

Загальна схема, що пояснює постановку задачі, наведена на рис. 8.5, де  $z$  – вектор стану естиматора, а  $x_e$  – його вектор-вихід, який ми прагнемо зробити таким,

щоб якомога менше відрізнявся від  $x$ . Ідею побудови естиматора пониженої розмірності легко пояснити на прикладі систем із одним виходом. За належного вибору координатного базису вихід об'єкта пониженої розмірності можна розглядати як один із відомих елементів вектора стану. Тому, якщо вектор стану має розмірність  $n$ , оцінці підлягає не  $n$ , а  $(n - 1)$  складових.

Отже, об'єкт та естиматор передбачаються лінійними ситемами, тому зв'язок між  $z$  і  $x$  також є лінійний і може бути представлений у вигляді

$$\varepsilon = z - \Pi x, \quad (8.25)$$

де  $\Pi$  – матриця перетворення.

Для існування  $\Pi$  необхідно, щоб рівняння (8.23)–(8.25) були сумісні. Шляхом диференціювання останнього рівняння із урахуванням рівнянь (8.12), (8.13) і (8.23) отримуємо

$$z\Pi\dot{x} + \dot{\varepsilon} = A_e z + B_1 u + B_2 u.$$

Після підстановки  $\dot{x} = Ax + Bu$  і  $y = Cx$ , маємо

$$\Pi Ax + \Pi Bu + \dot{\varepsilon} = A_e z + B_1 Cx + B_2 u,$$

або

$$(\Pi A - A_e \Pi - B_1 C)x + (\Pi B - B_2)u + \dot{\varepsilon} - A_e \varepsilon = 0.$$

Звідси отримуємо рівняння сумісності:

$$\dot{\varepsilon} = A_e \varepsilon; \quad (8.26)$$

$$\Pi A - A_e \Pi = B_1 C; \quad (8.27)$$

$$\Pi B = B_2.$$

Із рівняння (8.25) і умови (8.26) випливає, що

$$\varepsilon = z - \Pi x = e^{A_e(t-t_0)}(z_0 - \Pi x_0). \quad (8.28)$$

Отже, лінійний зв'язок між векторами стану об'єкта  $x(t)$  і естиматора  $z$  існує, якщо:

рівняння (8.27) має розв'язок за довільного вибору матриці  $B_1$ , що можливе коли матриці  $A$  та  $A_e$  не мають загальних власних значень.

початкові умови задовольняють співвідношенню

$$z_0 = \Pi x_0. \quad (8.29)$$

Цю умову виконати складніше. Дійсно, за припущення, що  $\Pi$  існує, умова (8.29) для завдання початкових умов естиматора вимагає визначення початкових умов  $x_0$  об'єкта, що неможливо.

Із рівняння (8.25) і умови (8.26), легко бачити, що коли динаміка естиматора, що визначається власними значеннями матриці  $A_e$ , характеризується досить малими

сталими часу, різниця  $\varepsilon$  між  $z$  та  $\Pi x$  із часом швидко зменшується, а після завершення перехідного процесу нею можна знехтувати.

Розглянемо докладніше умови існування лінійного зв'язку між  $x$  та  $z$ . На ґрунті рівнянь (8.24) і (8.25), виконавши заміну  $z = \Pi x + \varepsilon$ ,  $y = Cx$ , можна записати

$$x_e = C_1 z + C_2 y = C_1 \Pi x + C_2 C x + C_1 \varepsilon.$$

Якщо прийняти до уваги вираз (8.28), замість

$$x_e = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} \Pi \\ C \end{bmatrix} x + C_1 \varepsilon,$$

запишемо

$$x_e = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} \Pi \\ C \end{bmatrix} x + C_1 \varepsilon^*,$$

де

$$\varepsilon^* = C_1 \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^{A_e(t-t_0)} \varepsilon_0(t_0) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вочевидь, власні значення матриці естиматора  $A_e$  повинні мати від'ємні дійсні частини, тобто у цьому випадку при  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon^* \rightarrow 0$ .

Отже, в усталеному режимі із співвідношення  $z_e = \Pi x$  маємо

$$x_e = (C_1 \Pi + C_2 C) x,$$

и, значить, для точної оцінки вектора стану  $x(t)$  має виконуватися умова

$$[C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} \Pi \\ C \end{bmatrix} = I_n.$$

Це можливо тільки тоді, коли  $\text{rank } [C_1 \ C_2] = n$ ,  $\text{rank } \begin{bmatrix} \Pi \\ C \end{bmatrix} = n$ . Звідси випливає, що у найсприятливішому випадку, коли  $\text{rank } C = q$ , мінімальна кількість рядків, тобто кількість змінних стану спостерігача дорівнює  $n - q$ .

#### 8.5.4. Приклад синтезу естиматора для одновимірного об'єкта

Рівняння об'єкта має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \ 0 \ 2]x.$$

Синтез спостерігача здійснюється таким чином:

1) обчислюються коефіцієнти характеристичного полінома  $D(p)$ :

$$D(p) = |pI_N - A|.$$

$$H_1 = A - p_1 I_N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \text{Sp}A = -4;$$



$$H_2 = AH_1 - p_2 I_N = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \text{Sp}(AH_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} = -5;$$

$$H_3 = AH_2 - p_3 I_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$p_3 = \frac{1}{3} \text{Sp}(AH_2) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2;$$

### 8.5.5. Модальні регулятори

Визначення закону регулювання, що забезпечує задане розташування полюсів системи (модальне управління) складається із таких етапів:

вибору розташування полюсів з метою задоволення заданим технічним вимогам;

проектування регулятора, що забезпечує бажане розташування полюсів.

Застосування методу модального регулювання, що розглядається, для багатовимірних систем ґрунтується на опису лінійних стаціонарних систем за допомогою змінних стану і поняття зворотного зв'язку за змінними стану, що надає можливість отримати більшу кількість ступенів свободи при виборі розташування полюсів, ніж у класичному методу кореневого годографа.

Розглянемо лінійний стаціонарний об'єкт, що описується векторним диференціальним рівнянням вигляду (8.12), (8.13).

Сутність методу модального регулювання або корекції динамічних властивостей об'єкта за допомогою зворотного зв'язку аз веткором стану полягає у запровадженні закону регулювання вигляду

$$u(t) = g(t) - Kx(t),$$

де  $g(t) \in R^m$  - вектор зовнішніх впливів,  $K$  - матриця розмірності  $(m, n)$ , такого, щоб замкнена система

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BK)x(t) + Bg(t)$$

мала бажане розташування полюсів (власних значень матриці  $A - BK$ ).

### 8.6. Фільтри Калмана

Розглядаються питання автоматизованого проектування, аналізу і синтезу оптимальних САУ, що функціонують в умовах випадкових збурень. Теорію стохастично оптимальних САУ у наш час розвинуто досить гарно. Але питання практичного застосування, зокрема, реалізації алгоритмів статистичної фільтрації і управління,

моделювання і автоматизованого проектування стохастично оптимальних САУ розвинуто ще далеко не повно. Значний інтерес являють чисельно стійкі алгоритми, що працюють у реальному часі, моделювання різноманітних структур САУ, створення пакетів прикладних програм для автоматизованого проектування.

Основними елементами структурної схеми оптимальної САУ є об'єкт управління 1, вимірювач 2, фільтр 3 і регулятор 4 (рис. 8.6). Фільтри, що використовуються в оптимальних САУ, мають такі достоїнства:

- можливість відновлення безпосередньо не вимірюваних компонент вектора стану об'єкта;
- комплексування різнотипних джерел інформації;
- можливість отримання оцінок компонент вектора стану, точність яких перевищує точність безпосередніх вимірювань;
- можливість роботи у реальному часі.

Це обумовило широке впровадження алгоритмів фільтрації в САУ, які функціонують в умовах завад, що поставило задачу розробки алгоритмічного і програмного забезпечення для моделювання і автоматизованого проектування систем реального часу.

### 8.6.1. Попередні зауваження

Розглянемо САУ, наведену на рис. 8.6.

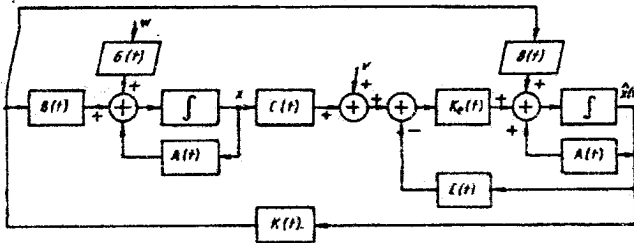


Рис. 8.6. Структурна схема стохастичної оптимальної САУ

Рівняння об'єкта і вимірювача мають вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t); \quad (8.30)$$

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (8.31)$$

де  $w(t)$  та  $v(t)$  – збурення (завади) – випадкові функції часу відповідно розмірностей  $r$  і  $l$ ;  $z$  – вектор вимірюваних змінних розмірності  $l$ .

В якості критерію якості вибирають функціонал

$$\bar{J} = \mathcal{M} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)\bar{Q}(t)x(t) + u^T(t)\bar{R}(t)u(t)] dt + x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) \right\}, \quad (8.32)$$

де  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{F}$  – вагові матриці відповідної розмірності.

Вирішення задачі у такій постановці згідно теореми розділення, яка справджується для лінійних систем і квадратичного критерію оптимізації, зводиться до двох самостійних етапів.

*Перший етап.* Обчислення матриці регулятора  $K(t)$  для закону регулювання за відсутності завад

$$u(t) = K(t)x(t).$$

*Другий етап.* Обчислення матриці  $K_e(t)$  пристрою, що оцінює, і який забезпечує мінімум середнього квадрату похибки оцінювання.

Після цього у законі регулювання слід замінити вектор  $x(t)$  його оцінкою  $\hat{x}(t)$ . Закон регулювання

$$u(t) = K(t)\hat{x}(t)$$

у даному разі залишається оптимальним і за наявності шумів  $w, v$ .

Нижче викладається метод синтезу пристроїв спостереження, що ґрунтується на ідеях фільтрації, запропонованих Калманом, що базуються на стохастичних моделях динамічних систем у просторі станів.

### 8.6.2. Стохастичні моделі динамічних систем

#### Неперервний випадок

Принциповою відмінністю стохастичних МСАР від детермінованих є наявність випадкових збурень в об'єкті та вимірювачі. Опишемо моделі (8.30), (8.31) і наведемо розв'язання рівняння (8.30).

Як правило, вважається, що збурення  $w(t)$  і  $v(t)$  являють собою гаусові білі шуми із нульовим середнім і матричними корельованими функціями вигляду

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}[w(t)w^T(t)] &= Q(t)\delta(t - \tau), \\ \mathcal{M}[v(t)v^T(t)] &= QR(t)\delta(t - \tau), \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Матриці  $Q(t)$  і  $R(t)$  є неперервні і додатно визначені для  $t > 0$ . Випадок ненульових середніх враховується також, як і ненульовий вектор управління у рівнянні (8.30). Передбачається також, що збурення  $w(t)$  і  $v(t)$  некорельовані, тобто  $\mathcal{M}[w(t)v^T(t)] = 0$  для всіх  $t, \tau \geq t_0$ .

Початковий стан  $x(t_0)$  є гаусів випадковий вектор із середнім  $\bar{x}(t_0) = \mathcal{M}[\bar{x}(t_0)]$  і невід'ємно визначеною матрицею коваріації

$$P(t_0) = \mathcal{M}\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\};$$

возмущення  $w(t)$  і  $v(t)$  не зависят от вектора  $x(t_0)$ .

На відміну від детермінованого випадку розв'язання стохастичного рівняння (8.30) представляється у вигляді сукупності розв'язань для середнього вектора  $x(t)$  та його матриці коваріації  $P(t)$ . Загальне розв'язання рівняння (8.30) має вигляд

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) + G(\tau)w(\tau)]d\tau, \quad (8.34)$$

де  $\Phi(t, \tau)$  – перехідна матриця стану.

Оскільки система, що описується рівнянням (8.30), є лінійна, а збурення  $w(t)$  гаусово, вектор стану  $x(t)$  є гаусів марковський процес. Із (8.34) можна отримати вираз для середнього  $\bar{x}$

$$\bar{x}(t) = \mathcal{M}[x(t)] = \Phi(t, t_0)\bar{x}(t_0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) + G(\tau)\bar{w}(\tau)]d\tau.$$

Матриця коваріації  $P(t)$  визначається виразом

$$P(t) = \mathcal{M}\{[x(t) - \bar{x}(t)][x(t) - \bar{x}(t)]^T\}.$$

Еволюція цієї матриці описується диференціальним рівнянням, яке можна отримати шляхом диференціюванням останнього виразу. Запишемо

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (8.35)$$

Рівняння типу (8.35) часто називають *рівнянням типу Ляпунова*, його розв'язання має вигляд

$$P(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau. \quad (8.36)$$

Обчислення цього інтегралу являє суттєві складності, тому на практиці користуються чисельним інтегруванням рівняння (8.35) або аналітично точним методом – частинним випадком розв'язання матричного рівняння Ріккати, підґрунтям якого є перехід до системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь порядку  $2n$ . Для стаціонарної стійкої системи (8.30) існує усталений режим, де  $\dot{P}(t) = 0$ , і тоді рівняння (8.35) переходить в алгебраїчне (типу Ляпунова).

### Дискретний випадок

Наведені вище співвідношення зручно використовувати при теоретичному аналізі стохастичних систем, зокрема, при вивченні асимптотичної поведінки і виконання кореляційного аналізу. На практиці, особливо у системах реального часу із дискретними змінюваннями, ефективнішими є дискретні моделі; вони необхідні також при проведенні статистичного моделювання динамічних систем.

Наведемо співвідношення, що описують дискретні динамічні системи; від детермінованого випадку вони відрізняються наявністю членів, що враховують випадкові збурення.

Моделі об'єкта і вимірювань

$$x(k+1) = A_d(k)x(k) + B_d(k)u(k) + G_d(k)w(k), \quad (8.37)$$

$$z(k) = C(k)x(k) + v(k), \quad (8.38)$$

де  $x, u, z$  – вектори тих самих розмірностей, що й у неперервному випадку;  $A_d, B_d, G_d$  – відповідно перехідні матриці стану, управління і збурення об'єкта.

Матрицю  $G_d$  визначають за аналогією із матрицями  $A_d$  і  $B_d$ :

$$G_d(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\tau.$$

За досить малого інтервалу квантування  $G_d(k) \approx G(t_k) \Delta t$ , де  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ .

Збурення  $w(k)$  і  $v(k)$  являють собою гаусові білі послідовності із математичними сподіваннями

$$\mathcal{M}\{w(k)\} = \bar{w}(k), \quad \mathcal{M}\{v(k)\} = \bar{v}(k). \quad (8.39)$$

і матричними кореляційними функціями

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}\{[w(k) - \bar{w}(k)][w(j) - \bar{w}(j)]^T\} &= Q(k) \delta_{jk}; \\ \mathcal{M}\{[v(k) - \bar{v}(k)][v(j) - \bar{v}(j)]^T\} &= R(k) \delta_{jk}. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Матриці  $Q(k)$  і  $R(k)$  невід'ємно визначені. Передбачається, що збурення  $w(k)$  і  $v(k)$  некорельовані.

Початковий стан  $x(0)$  – гаусів випадковий вектор із середнім  $\bar{x}(0) = \mathcal{M}\{x(0)\}$  і невід'ємно визначеною матрицею коваріації  $P(0) = \mathcal{M}\{[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]^T\}$ , збурення  $w(k)$  і  $v(k)$  не залежать від вектора  $x(0)$ .

За аналогією із неперервним випадком вектор стану  $x(k)$  із середнім  $\bar{x}(k)$  і матрицею коваріації  $P(k) = \mathcal{M}\{[x(k) - \bar{x}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T\}$ , рівняння для яких мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_d(k) \bar{x}(k) + B_d(k) u(k) + G_d(k) \bar{w}(k); \\ P(k+1) &= a_d(k) P(k) A_d^T(k) + G_d(k) Q(k) G_d^T(k). \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Матриці коваріацій збурень дискретних і неперервних систем зв'язані співвідношенням

$$G_d(k) Q(k) G_d^T(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau. \quad (8.42)$$

Для досить малих інтервалів дискретності справджуються наближені рівності  $Q(k) \approx Q/\Delta t$ ,  $R(k) \approx R/\Delta t$ .

### 8.6.3. Розв'язання задачі фільтрації за Калманом

У структурній схемі оптимальної САУ рис. 8.7. фільтр є одна із найважливіших її складових. Фільтрація широко застосовується в інформаційно - вимірювальних системах різного типу, де процес вимірювання супроводжується похибками.

Розглянемо різні модифікації алгоритмів фільтрації, що орієнтовано на врахування конкретних умов реалізації, характер моделей об'єкта та вимірювань, особливості реалізації на ЕОМ. Ці алгоритми можуть бути реалізовані у системах реального часу, що функціонують в умовах невизначеності, а також використані ждя моделювання і автоматизованого проектування таких систем.

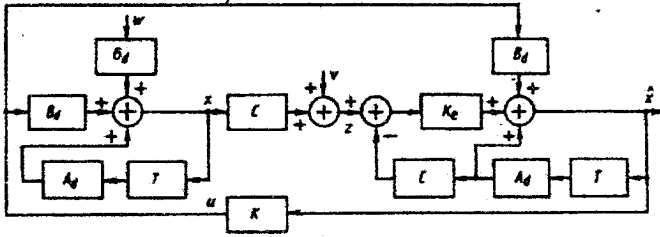


Рис. 8.7. Структурна схема дискретного фільтра.

### Дискретний (рекурентний) фільтр Калмана

На основі наведених вище моделей об'єкта (8.37), вимірювань (8.38), збурень (8.39), початкових умов і квадратичного критерію якості можна отримати співвідношення дискретного фільтра Калмана. Їх виведення досить широко описаний в літературі, тому нижче наведено тільки основні результати:

оцінка екстраполяції

$$\hat{x}(k|k-1) = A_d(k-1)\hat{x}(k-1) + B_d(k-1)u(k-1); \quad (8.43)$$

матриця коваріації похибки оцінки екстраполяції

$$P(k|k-1) = A_d(k-1)P(k-1)A_d^T(k-1) + G_d(k-1)Q(k-1)G_d^T(k-1); \quad (8.44)$$

матриця підсилення фільтра

$$K_e(k) = P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1}; \quad (8.45)$$

оцінка фільтрації

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k-1) + K_e(k)[z(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)]; \quad (8.46)$$

матриця коваріації похибки оцінки фільтрації

$$\begin{aligned} P(k) &= [I - K_e(k)C(k)]P(k|k-1) = \\ &= P(k|k-1) - P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1}C(k)P(k|k-1). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Структурная схема фильтра приведена на рис.

#### 8.6.4. Непрерывный фильтр Калмана

Дискретний фільтр використовують рпи практичній реалізації алгоритму фільтрації на ЕОМ. У теоретичних дослідженнях зручніше використовувати неперервний фільтр.

Відповідні формули класичного неперервного фільтру Калмана можна отримати, зокрема, із формул для дискретного фільтру підстановкою  $A_d(k) = I + A(t_k)/\Delta t$ ,  $G_d(k) = G(t_k)/\Delta t$ ,  $Q(k) = Q(t_k)/\Delta t$ ,  $R(k) = R(t_k)/\Delta t$ , яка впливає із зв'язку неперервної та дискретної моделей із подальшим граничним переходом при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K_e(t)[z(t) - C(t)\hat{x}(t)]; \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - \\ & - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t); \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$K_e(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t), \quad P(t_0) = P_0, \quad \hat{x}(t_0) = x_0. \quad (8.50)$$

Для стаціонарних стохастично стійких систем матриця коваріації  $P(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує до усталеного значення, отже, в усталеному режимі  $P(t) = 0$  і рівняння (8.49) стає алгебраїчним. Як ітог приходимо до стаціонарного фільтру Калмана зі сталою матрицею підсилення  $K_e$ .

Оцінка  $\hat{x}(t)$  і похибка  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  некорельовані, тобто  $\mathcal{M}[\hat{x}(t)\tilde{x}(t)] = 0$ .

Структурна схема неперервного фільтру наведена на рис.

### Алгоритм на ґрунті інформаційної матриці

У деяких випадках, коли розмірність вектора вимірювань перевищує розмірність вектора станів, процедуру фільтрації зручніше побудувати відносно вектора  $y$ , який називають інформаційним, що визначається співвідношенням

$$y = P^{-1}\hat{x} = \Lambda\hat{x},$$

де  $\Lambda(t) = P^{-1}(t)$  – інформаційна матриця (зворотна до матриці коваріації). Тоді формули алгоритму фільтрації відносно  $y$  і  $\Lambda$  набувають вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = -[A^T(t) + \Lambda(t)G(t)Q(t)G^T(t)]y(t) + C^T(t)R^{-1}(t)z(t), \quad (8.51)$$

$$\frac{\Lambda(t)}{dt} = -A^T(t)\Lambda(t) - \Lambda(t)A(t) + C^T(t)R^{-1}(t)C(t) - \Lambda(t)G(t)G^T(t)\Lambda(t), \quad (8.52)$$

$$y(t_0) = 0, \quad \Lambda(t_0) = P^{-1}(t_0). \quad (8.53)$$

На практиці являє інтерес дискретний аналог інформаційного фільтру, що визначається співвідношенням

$$y(k) = C^T(k)R^{-1}(k)z(k) + [I - T(k)][A_d^T(k-1)]^{-1}y(k-1); \quad (8.54)$$

$$\Lambda(k) = C^T(k)R^{-1}(k)C(k) + [I - T(k)][A_d^T(k-1)]^{-1}, \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} T(k) = & [A_d(k-1)\Lambda^{-1}(k-1)A_d^T(k-1) + \\ & + G_d(k-1)Q(k-1)G_d^T(k-1)]^{-1}G_d(k-1)Q(k-1)G_d^T(k-1), \end{aligned} \quad (8.56)$$

$$\Lambda(0) = P^{-1}(0), \quad y(0) = \Lambda(0)\hat{x}(0). \quad (8.57)$$

Основною перевагою інформаційного фільтра є його ефективна робота у випадку, коли розмірність вектору вимірювань перевищує розмірність вектора стану, що впливає із вигляду обернених матриць у наведених співвідношеннях. Особливо ефективно фільтр працює при  $Q(t) = 0$ , оскільки обсяг обчислень при цьому різко скорочується. Вектор стану  $\hat{x}$  розраховують за формулою

$$\hat{x}(k) = \Lambda^{-1}(k)y(k). \quad (8.58)$$

Коли нема потреби в оцінці вектора на кожному кроці, обчислення за формулою (8.58) можна не виконувати. У цьому разі інформаційний фільтр по мірі надходження вимірювань наче здійснює накопичення інформації, яка може використовуватися у подальшому.

Крім того, інформаційний фільтр є зручний за відсутності інформації про апріорну оцінку, коли  $P(0)$  не визначене, у цьому разі вважають  $\Lambda(0) = 0$ .

Перелічені переваги інформаційного фільтра дають можливість ефективно використовувати його у схемах попередньої обробки вимірювальної інформації (наприклад, вимірювання спочатку статистично обробляються і накопичуються, а потім надходять у схему динаміної фільтрації).

### 8.6.5. Субоптимальні алгоритми фільтрації

Вище розглядалися оптимальні алгоритми фільтрації, в яких передбачалося точне знання моделей об'єкту, вимірювань і збурень.

Але на практиці отримання точних моделей утруднено, крім того, часто точні моделі мають вельми високу розмірність, тому для скорочення обчислювальних затрат йдуть на спрощення моделі, У такому разі важливе значення має аналіз алгоритмів фільтрації, що побудовано за спрощеними моделями, на чутливість до параметрів, що не враховано, та особливостям моделей до неточності завдання матриць коваріації  $Q$ ,  $R$ ,  $P(0)$  та початкової оцінки  $\hat{x}(0)$ , неточності ідентифікації матриць  $A$ ,  $G$ ,  $B$ ,  $C$ , різного роду нелінійностям. Аналіз чутливості, як правило, виконується шляхом моделювання на ЕОМ, у процесі якого з'ясовується вплив різних факторів на точність та збіжність алгоритмів фільтрації.

Вазливим напрямом у теорії проектування фільтрів є побудова так званих грубих алгоритмів фільтрації, які не забезпечують оптимальності у сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки, але є суттєво нечутливішими порівняно із оптимальними алгоритмами.

Із чутливістю тісно пов'язане питання збіжності алгоритмів, яке має багато аспектів як теоретичних, так і практичних. Теоретичні аспекти пов'язані із стохастичною стійкістю. До практичних належать обчислювальні аспекти, що пов'язані із чисельно стійкими процедурами, до яких, зокрема, належать обчислення із подвоєною точністю і алгоритми на ґрунті факторизації матриць коваріації, а також симетризовані обчислювальні процедури, що здійснюють, наприклад, за формулою

$$P(k) = [I - K_e(k)C(k)P(k|k-1)][T - K_e(k)C(k)]^T - K_e(k)R(k)K_e^T(k),$$

яка теоретично еквівалентна співвідношенню (8.47).



Визначальним при реалізації алгоритмів фільтрації є питання швидкодії, особливо при реалізації алгоритмів у реальному часі.

Наведемо низку субоптимальних схем фільтрації, що найчастіше використовуються. Відносно швидкодії максимально ефективним являються фільтри із кусково-сталого апроксимацією матриці підсилення  $K_e$ , граничний випадок яких – фільтри із сталою матрицею  $K_e P_\infty C^T R^{-1}$ , де  $P_\infty$  – усталене значення матриці коваріації.

Вельми ефективними є так звані *розв'язані* фільтр, коли фільтр високої розмірності вдається озбити на кілька незалежних фільтрів зниженої розмірності.

Відносно збіжності слід відзначити фільтри із запровадженням додаткового шуму (псевдошуму) у модель об'єкта з метою запобігання виродженості фільтра, коли окремі компоненти матриці  $K_e(k)$  прямують до нуля, та (або) у модель вимірювань для покращання умов обчислення зворотних матриць  $Q$  та  $R$  замінюють їх на  $Q + \Delta Q_f$  та  $R + \Delta R_f$  відповідно.

Крім того, задачі збіжності можна вирішити шляхом застосування фільтра зі скінченною пам'яттю, коли оцінка обчислюється на ґрунті тільки кількох останніх вимірювань, фільтрів із експоненційно зваженими вимірюваннями, мінімаксних та мінімально чутливих фільтрів, коли параметри фільтру вибираються за умови мінімальної чутливості вибраного критерію до відхилень моделей об'єкта, вимірювань та збурень від розрахункових.

У ситуаціях, коли моделі апріорі невідомі або змінюються у процесі роботи, гарно працюють адаптивні фільтри, в яких процес оцінювання сполучається із ідентифікацією параметрів та (або) структури моделей.

## 8.7. Алгоритми стохастично оптимального управління

Задачу синтезу стохастично оптимальних систем можна рзбити на дві: синтез детермінованого регулятора та синтез стохастичного спостерігача (фільтра), алгоритмічні і програмні аспекти яких значною мірою зв'язані, що дає можливість перенести результати, що отримано в оптимальній фільтрації, у теорію і практику оптимального регулювання і навпаки. Ця задача вирішується на ґрунті дуальності задач фільтрації і регулювання.

Наведемо співвідношення, що описують склаові стохастичної системи: рівняння об'єкту, що регулюється зі зворотним зв'язком:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)K(t)\hat{x}(t) + G(t)w(t), \quad (8.59)$$

де  $K(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  відповідають управлінню  $u(t)$ ;  
рівняння для оцінки фільтрації

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)K(t)\hat{x}(t) + K_e(t)[z(t) - C(t)\hat{x}(t)]. \quad (8.60)$$

Матриця підсилення регулятора  $K(t)$  визначається як й у детермінованому випадку

$$K(t) = -\bar{R}^{-1}B^T(t)S(t), \quad (8.61)$$

де матриця  $S(t)$  є розв'язання рівняння Ріккати

$$\frac{dS(t)}{dt} = -A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + S(t)B(t)\bar{R}^{-1}(t)B^T(t)S(t) - \bar{Q}(t), \quad S(t_f) = S_f. \quad (8.62)$$

Структурна схема неперервної оптимальної стохастичної системи управління наведена на рис.

Із порівняння рівняння Ріккати для фільтра і регулятора можна зробити висновок про дубльність задач синтезу фільтра і регулятора.

Рівняння для похибки оцінювання має вигляд

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = [A(t) - K_e(t)C(t)]\tilde{x}(t) - K_e(t)v(t) + G(t)w(t); \quad (8.63)$$

воно отримане шляхом віднімання рівняння (8.60) із (8.59) із урахуванням виразу (8.31).

Випишемо співвідношення, що описує поведінку стохастичної замкненої системи к цілому, яка містить у собі динаміку об'єкта і динаміку фільтра:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) + B(t)K(t) & -B(t)K(t) \\ 0 & A(t) - K_e(t)C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G(t) \\ -K_e(t) & G(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (8.64)$$

На ґрунті наведених рівнянь можна виконати повний коваріаційний аналіз замкненої динамічної системи.

---

## Адаптивні системи управління

---

### 9.1. Огляд

Ми будемо розглядати тільки такі системи адаптивних регуляторів, що ґрунтуються на описові систем управління за їхніми вхідними та вихідними сигналами. З метою спрощення викладок розглядаються тільки об'єкти із одним входом і одним виходом.

Головна відмінність *адаптивних* систем управління від систем із фіксованими параметрами і структурою полягає у тому, що вони можуть пристосовуватися (підстроюватися) до умов функціонування об'єктів, що змінюються.

Динамічні властивості деяких об'єктів сповна визначаються зовнішніми факторами, що досяжні для прямого вимірювання (наприклад, інтенсивністю потоку, швидкістю об'єкта тощо). Якщо відомо, як має настроюватися регулятор залежно від цих факторів, можна застосовувати прямий метод настроювання, або адаптацію за розімкненим циклом. У цьому разі сигнали зворотного зв'язку, що надходять від замкненого контура управління, відсутні.

В умовах, коли безпосередньо неможливо оцінити динамічні властивості об'єкта, приходиться використовувати процедуру настроювання із зворотним зв'язком, або адаптацію за замкненим контуром. При цьому необхідний мінімум інформації про об'єкт (його порядок, параметри тощо) отримують шляхом обробки вимірювань вхідних і вихідних сигналів. Для оцінки характеристик об'єкта можуть застосовуватися методи ідентифікації (за вимірюваннями входу  $u$  і виходу  $y$ ) або методи визначення показників якості управління (за вимірюванням  $e_w$  і  $u$ ). Виходячи із отриманих даних виконується розрахунок і настройка регулятора.

Структурно це рівнозначно запровадженню другого зворотного зв'язку і відповідно другого замкненого контуру, в якому інформація проходить за такою схемою: сигнали у контурі управління – алгоритм настройки – регулятор – сигнали у контурі управління.

Усі адаптивні регулятори можна поділити на два класи:

- регулятори, що самооптимізуються, задачею яких є досягнення найкращої якості управління при заданому критерії оптимальності і наявності визначеної ін-

формації про об'єкт та його сигналах;

- регулятори із еталонною моделлю, задачею яких є отримання такої реакції замкнутого контуру управління на визначений вхідний сигнал, яка була б максимально близькою до реакції на цей самий сигнал заданої еталонної моделі.

Процес адаптації у системах управління із регулятором першого типу проходить у три етапи.

1. Ідентифікація об'єкта або системи управління у цілому.
2. Розрахунок регулятора.
3. Налаштування регулятора (або змінювання його структури).

У другому випадку процес адаптації також складається із трьох етапів.

1. Порівняння реакцій замкнутого контура управління і еталонної моделі.
2. Розрахунок регулятора.
3. Налаштування регулятора.

Далі розглядатимемо тільки регулятори, що само оптимізуються, що ґрунтуються на ідентифікації параметрів об'єкту.

## **9.2. Ідентифікація об'єктів управління і моделей випадкових сигналів**

Задачею ідентифікації є експериментальне визначення характеристик динамічного об'єкта і зв'язаних із ним сигналів. Оцінювання параметрів системи виконується у рамках математичної моделі визначеного класу. При цьому різниця між реальним об'єктом і відповідною математичною моделлю має бути, можливо, мінімальною.

Поточною ідентифікацією називатимемо процедуру визначення параметрів об'єкта шляхом обробки на комп'ютері даних, які надходять безпосередньо від об'єкта ідентифікації у процесі його функціонування. Якщо сигнали обробляються після кожного такту квантування, то говорять, що обробка ведеться у реальному масштабі часу.

В області адаптивних систем управління основна увага приділяється методам поточної ідентифікації у реальному часі. Крім того, під час синтезу регуляторів в основному використовують параметричні моделі об'єктів і збурень. Такі моделі характеризуються Скінченним числом параметрів. Для них розроблені ефективні алгоритми розрахунків, що потребують відносно невеликих витрат обчислювальних ресурсів.

Для ідентифікації у реальному часі створено рекурентні алгоритми оцінювання параметрів стаціонарних та нестаціонарних лінійних об'єктів, нелінійних об'єктів визначеного класу, а також стаціонарних і нестаціонарних випадкових сигналів.

### 9.2.1. Моделі об'єктів і випадкових сигналів

Вважаємо, об'єкт дослідження описується лінеаризованою моделлю у формі лінійного різницевого рівняння

$$y_u(k) + a_1 y_u(k-1) + \dots + a_m y_u(k-m) = b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m), \quad (9.1)$$

де

$$\left. \begin{aligned} u(k) &= U(k) - U_{00}; \\ y(k) &= Y(k) - Y_{00}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Змінні  $u(k), y(k)$  є варіації, тобто відхилення "абсолютних" сигналів  $U(k), Y(k)$  від їхніх ustalених значень  $U_{00}, Y_{00}$ . Величина  $d$  визначає запізнювання, що дорівнює цілому числу тактів квантування. Рівнянню (9.2) відповідає дискретна передаточна функція

$$G_O(z) = \frac{y_u(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}. \quad (9.3)$$

Вимірюваний вихід  $y(k)$  містить адитивну випадкову заваду  $n(k)$ :

$$y(k) = y_u(k) + n(k). \quad (9.4)$$

Сигнал завади  $n(k)$  розглядається як авторегресійний процес із ковзним середнім (мішана модель авто регресії – ковзного середнього (АРСС)).

$$n(k) + c_1 n(k-1) + \dots + c_p n(k-p) = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \quad (9.5)$$

У цьому рівнянні  $v(k)$  – послідовність нормально розподілених статистично незалежних випадкових величин (дискретний білий шум) із математичним сподіванням  $M\{v(k)\} = 0$  та коваріаційною функцією

$$\text{cov}[v(k), \tau] = M\{v(k)v(k+\tau)\} = \sigma_v^2 \delta(\tau),$$

де  $\sigma_v^2$  – дисперсія,  $\delta(\tau)$  – функція Кронекера.

Запишемо дискретну передаточну функцію фільтра шуму.

$$G_v(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_p z^{-p}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_p z^{-p}}. \quad (9.6)$$

Об'єднаємо рівності (9.2) і (9.6). Отримаємо модель виходу об'єкта у вигляді

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} v(z). \quad (9.7)$$

Задача параметричної ідентифікації полягає в отриманні оцінок параметрів моделі (9.7), тобто коефіцієнтів поліномів  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ , а також  $C(z^{-1})$ ,  $D(z^{-1})$  за результатами вимірювань входу  $u(k)$  і виходу  $y(k)$ . Вважається, що завада є стаціонарна і корені поліному  $C(z^{-1})$  розташовано всередині одиничного кола на площині  $z$ .

### 9.2.2. Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК)

#### Ідентифікація динамічного об'єкта моделлю

Підставимо у рівняння (9.2) значення вимірених сигналів входу  $u(k)$  і виходу  $y(k)$ , які відповідають такту  $k$ , а також оцінки параметрів, що отримані після  $(k-1)$ -го такту:

$$y(k) + \hat{a}_1(k-1)y(k-1) + \dots + \hat{a}_m(k-1)y(k-m) - \hat{b}_1(k-1)u(k-d-1) - \dots - \hat{b}_m(k-1)u(k-d-m) = e(k). \quad (9.8)$$

Тут  $e(k)$  – похибка управління, або нев'язка. Запровадження цієї похибки відображає наявність похибок вимірювань виходу та неточність оцінки параметрів. Представимо рівняння (9.8) у такому вигляді

$$y(k) = \hat{y}(k|k-1). \quad (9.9)$$

$\hat{y}(k|k-1)$  можна трактувати як передбачене у момент  $(k-1)$  значення вихідного вимірювання  $y(k)$ .

$$\hat{y}(k|k-1) = -\hat{a}_1(k-1)y(k-1) - \dots - \hat{a}_m(k-1)y(k-m) + \hat{b}_1(k-1)u(k-d-1) + \dots + \hat{b}_m(k-1)u(k-d-m) = \boldsymbol{\psi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1). \quad (9.10)$$

У цьому виразі позначено: вектор даних –

$$\boldsymbol{\psi}^T(k) = [-y(k-1) \dots - y(k-m) \ u(k-d-1) \ \dots \ u(k-d-m)];$$

вектор оцінок параметрів –

$$\boldsymbol{\theta}^T(k-1) = [\hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_m \ \hat{b}_1 \ \dots \ \hat{b}_m].$$

Запишемо тепер вираз для похибки управління

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1). \quad (9.11)$$

Припустимо тепер, що вимірювання виконано на інтервалі  $k = 1, 2, \dots, m+d+N$ . Тоді сукупність із  $(N+1)$  рівнянь вигляду

$$y(k) = \boldsymbol{\psi}^T(k)\boldsymbol{\theta}^T(k-1) + e(k)$$

можна представити у формі

$$y(m+d+N) = \boldsymbol{\Psi}(m+d+N)\boldsymbol{\theta}^T(m+N+d-1) - \mathbf{e}(m+d+N), \quad (9.12)$$

де

$$y(m+d+N) = [y(m+d) \ y(m+d+1) \ \dots \ y(m+d+N)],$$

$$\Psi(m+d+N) = \begin{bmatrix} -y(m+d-1) & \dots & -y(d) & u(m-1) & \dots & u(0) \\ -y(m+d) & \dots & -y(d+1) & u(m) & \dots & u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(m+d+N-1) & \dots & -y(N+d) & u(m+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$\mathbf{e}^T(m+d+N) = [e(m+d) \ e(m+d+1) \ \dots \ e(m+d+N)]. \quad (9.14)$$

Функціонал якості настройки – мінімум функції втрат

$$V = \mathbf{e}^T(m+d+N)\mathbf{e}(m+d+N) = \sum_{k=m+d}^{m+d+N} e^2(k). \quad (9.15)$$

находиться із умови

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0. \quad (9.16)$$

Нехай  $N \geq 2m$ . Позначимо

$$\mathbf{P}(m+d+N) = [\Psi^T(m+d+N)\Psi(m+d+N)]^{-1}. \quad (9.17)$$

Тоді оцінка, що мінімізує функцію 9.17), має вигляд

$$\hat{\theta}(m+d+N-1) = \mathbf{P}(m+d+N)\Psi^T(m+d+N)\mathbf{y}(m+d+N). \quad (9.18)$$

Це рівняння описує нерекурентний алгоритм ідентифікації, оскільки обчислення оцінок параметрів виконується після того, як сформовано масив, що містить усі вимірювання вхідних і вихідних сигналів. Для отримання рекурентного алгоритму досить записати вираз для  $\hat{\theta}(k+1)$  і відняти із нього  $\hat{\theta}(k)$ . Отримуємо:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[\mathbf{y}(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)]. \quad (9.19)$$

Остання складова у цьому рівнянні являє собою передбачене значення нового вимірювання вихідного сигналу,  $\gamma$  – вектор корекції, який визначається співвідношенням

$$\gamma(k) = \mathbf{P}(k+1)\Psi(k+1) = \mathbf{1}\Psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\Psi(k+1) + \mathbf{1}\mathbf{P}(k)\Psi(k+1). \quad (9.20)$$

Матриця

$$\mathbf{P}(k+1) = [E - \gamma(k)\Psi^T(k+1)]\mathbf{P}(k). \quad (9.21)$$

Вхідними значеннями для рекурентного алгоритму слугують

$$\hat{\theta}(0) = 0; \quad \mathbf{P}(0) = \alpha E. \quad (9.22)$$

Параметр  $\alpha$  має бути досить великим. Загальна схема рекурентних алгоритмів ідентифікації, у тому числі й МНК, має вигляд

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)\mathbf{e}(k+1), \quad (9.23)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1)\mathbf{P}(k)\varphi(k+1), \quad (9.24)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k). \quad (9.25)$$

Відмітимо, що математичне сподівання матриці  $\mathbf{P}$  із точністю до скалярного множника дорівнює коваріаційній матриці вектора оцінок параметрів:

$$M\{\mathbf{P}(k+1)\} = \frac{1}{\sigma_e^2} \text{cov}[\Delta\boldsymbol{\theta}(k)].$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}(k) - \boldsymbol{\theta}_0.$$

Отже, рекурентний алгоритм оцінювання дозволяє контролювати дисперсії окремих оцінок, які визначаються відповідними діагональними елементами коваріаційної матриці.

У загальному випадку будь-який метод параметричної ідентифікації має задавати оцінки параметрів, які є незміщені, тобто (за скінченних  $N$ )

$$M\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)\} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (9.26)$$

і спроможними у середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)\} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (9.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{[\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) - \boldsymbol{\theta}_0][\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) - \boldsymbol{\theta}_0]^T\} = 0. \quad (9.28)$$

Для отримання незміщених оцінок параметрів (відсутність кореляції між елементами послідовності похибок  $e(k)$ ) необхідно, щоб фільтр, що формує шум, мав вигляд

$$G_v(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = \frac{1}{A(z^{-1})}. \quad (9.29)$$

Ця умова виконується рідко. Тому для ідентифікації об'єктів із шумами високої інтенсивності слушно застосовувати інші методи. Проте, при побудові адаптивних систем управління метод найменших квадратів виявляється найефективнішим.

### Приклад.

Модель об'єкту описується різницеvim рівнянням

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u(k-1) + v(k).$$

Для побудови алгоритму ідентифікації запишемо це рівняння у вигляді

$$y(k) = \Psi^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + e(k),$$

где  $\Psi^T(k) = [-y(k-1) \ u(k-1)]$ ;  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\hat{a}_1 \ \hat{b}_1]^T$ .

Алгоритм обчислення оцінок параметрів містить такі кроки:

1. Визначаються нові значення  $y(k)$  и  $u(k)$ , що відповідають моменту часу  $k$ . Для цього обчислюємо:

$$2. e(k) = y(k) - [-y(k-1) \ u(k-1)] \begin{bmatrix} \hat{a}_1(k-1) \\ \hat{b}_1(k-1) \end{bmatrix}.$$



3. Обчислюються нові оцінки параметрів

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \hat{b}_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(k-1) \\ \hat{b}_1(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(k-1) \\ \gamma_2(k-1) \end{bmatrix} e(k).$$

4. Формується новий вектор даних

$$\Psi^T(k+1) = [-y(k) \ u(k)].$$

$$5. \mathbf{P}(k)\Psi(k+1) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11}(k)y(k) + p_{12}(k)u(k) \\ -p_{21}(k)y(k) + p_{22}(k)u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(k) \\ i_2(k) \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

$$6. \Psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\Psi(k+1) = [-y(k) \ u(k)] \begin{bmatrix} i_1(k) \\ i_2(k) \end{bmatrix} = J.$$

$$7. \begin{bmatrix} \gamma_1(k+1) \\ \gamma_2(k+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{j + \lambda} \begin{bmatrix} i_1(k) \\ i_2(k) \end{bmatrix}.$$

$$8. \mathbf{P}(k+1) = 1\lambda[\mathbf{P}(k) - \gamma(k)\mathbf{I}^T] = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} p_{11}(k) - \gamma_1 i_1 & p_{12}(k) - \gamma_2 i_2 \\ p_{21}(k) - \gamma_2 i_1 & p_{22}(k) - \gamma_2 i_2 \end{bmatrix}.$$

9.  $k$  збільшується на 1.  $\lambda < 1$  – ваговий коефіцієнт для визначення усталеного значення  $Y_{00}$ .

$$\hat{Y}_{00}(k) = \hat{Y}_{00}(k-1) + (1-\lambda)Y(k).$$

### Випадкові сигнали

Вважатимемо, що випадковий сигнал представляється процесом АРСС ( ).

$$y(k) + c_1 y(k-1) + \dots + c_p y(k-p) = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \quad (9.30)$$

У цьому рівнянні завада  $n$ , що не вимірюється, замінена вимірюваним сигналом  $y$ . Перетворимо це рівняння згідно із формулами (9.8)–(9.10):

$$y(k) = \Psi^T(k)\hat{\theta}(k-1) + v(k). \quad (9.31)$$

Застосування рекурентного методу найменших квадратів (9.18)–(9.21) до рівняння (9.31) було б можливе за відомих значеннях  $v(k-1), \dots, v(k-p)$ . Якщо припустити, що до моменту  $k$  величини  $y(k_1), y(k-2), \dots, y(k-p)$ , а також отримано оцінки  $\hat{v}(k-1), \hat{v}(k-2), \dots, \hat{v}(k-p)$  та  $\hat{\theta}(k-1)$  уже відомі, оцінку поточного значення сигналу  $\hat{v}(k)$  Можна визначити із рівняння (9.32).

$$\hat{v}(k) = y(k) - \hat{\Psi}^T(k)\hat{\theta}(k-1), \quad (9.32)$$

де

$$\hat{\Psi}(k) = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-p) \ \hat{v}(k-1) \ \dots \ \hat{v}(k-p)]. \quad (9.33)$$

Після цього обчислюють нову оцінку

$$\hat{\Psi}(k+1) = [-y(k) \dots -y(k-p+1) \hat{v}(k) \dots \hat{v}(k-p+1)]. \quad (9.34)$$

Отже, за допомогою рекурентного алгоритму (9.18)–(9.21) можна отримати й оцінку вектора параметрів фільтра  $\hat{\theta}(k+1)$ , що формує, якщо використати в алгоритмі замість точного вектора даних його оцінку  $\hat{\Psi}(k+1)$ . Потім визначають оцінки  $\hat{v}(k+1)$  и  $\hat{\theta}(k+2)$  тощо.

### 9.2.3. Узагальнений РМНК (УРМНК)

Якщо об'єкт описується моделлю, в яку входить корельований сигнал  $\varepsilon(z) = D(z^{-1})e(z)$ , варто застосувати узагальнений метод найменших квадратів, який об'єднує рекурентні методи параметричної ідентифікації динамічних об'єктів і випадкових сигналів.

У цьому разі модель об'єкта описується рівнянням

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z). \quad (9.35)$$

Вхідним для даного метода є таке рівняння.

$$y(k) = \hat{\Psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k). \quad (9.36)$$

У цьому рівнянні запроваджено розширені вектори

$$\hat{\Psi}(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) \ u(k-d-1) \dots u(k-d-m) \ \hat{v}(k-1) \dots \hat{v}(k-p)],$$

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m \ \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m \ \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_m].$$

Оцінки параметрів обчислюються за допомогою формули:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \hat{\Psi}^T(k+1)\hat{\theta}(k)], \quad (9.37)$$

а також допоміжних рівнянь, аналогічних (9.18)–(9.21). Для оцінки значень випадкового сигналу  $\hat{v}(k) = e(k)$  використовують співвідношення (9.33). Корені рівняння  $D(z) = 0$  мають міститися всередині одиничного кола на площині  $z$ . Якщо при цьому усі умови збіжності метода найменших квадратів залишаються справедливими і для моделі (9.36), узагальнений метод дає незміщені оцінки параметрів, що спроможні у середньому квадратичному.

### 9.2.4. Рекурентний метод максимальної правдоподібності (РММП)

Для ідентифікації за методом максимальної правдоподібності найзручніше описувати об'єкт моделлю

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})z^{-d}u(z) + D(z^{-1})v(z). \quad (9.38)$$

Позначимо:

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) \ u(k-d-1) \dots u(k-d-m) \ v(k-1) \dots v(k-m)], \quad (9.39)$$

Тоді модель (9.39) запишеться у вигляді

$$y(k) = \psi^T(k)\theta + v(k). \quad (9.40)$$

Припустимо, що змінна  $v(k)$  відіграє роль похибки  $e(k)$ , а значення сигналу завади  $v(k-1), \dots, v(k-m)$  замінимо їх оцінками, що обчислюються із рівняння (9.31). У результаті отримуємо модель

$$y(k) = \hat{\psi}^T(k)\hat{\theta}(k-1) + e(k). \quad (9.41)$$

У разі нормально розподіленого сигналу похибки метод максимальної правдоподібності дає той самий вираз для функції витрат, що й метод найменших квадратів:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (9.42)$$

Для отримання шуканих оцінок ця функція мінімізується по відношенню до параметрів  $a_i, b_i, d_i$ . Оскільки у функції витрат ці параметри входять нелінійно, її мінімізація здійснюється за допомогою числових ітераційних алгоритмів. Тому метод максимальної правдоподібності може бути реалізований тільки у рекурентній формі. Але шляхом деяких змінювань у градієнтному алгоритмі можна отримати і рекурентний алгоритм метода.

Рекурентний алгоритм метода максимальної правдоподібності отримуємо шляхом розкладання функції витрат у ряд Тейлора із трьома членами розкладання. Отримуємо відомий алгоритм Ньютона–Рафсона:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \mathbf{V}_{\theta\theta}^{-1}(\hat{\theta}(k), k+1) \mathbf{V}_{\theta}(\hat{\theta}(k), k+1). \quad (9.43)$$

Для побудови рекурентного алгоритму ідентифікації запишемо у рекурентній формі функцію витрат:

$$V(\hat{\theta}, k+1) = V(\hat{\theta}, k) + \frac{1}{2} e^2(\hat{\theta}, k+1). \quad (9.44)$$

Запишемо похідні від лівої та правої частин рівняння (9.44), и замістимо їх у формулу Ньютона–Рафсона. Приходимо до такого рекурентного алгоритму ідентифікації за методом максимальної правдоподібності.

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1). \quad (9.45)$$

$$\gamma(k) = \mathbf{P}(k+1)\varphi(k+1) = \mathbf{P}(k)\varphi(k+1)1 + \varphi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\varphi(k+1), \quad (9.46)$$

де

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{V}_{\varphi\varphi}^{-1}(\hat{\varphi}(k-1), k), \quad (9.47)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{E} - \gamma(k)\varphi^T(k+1))\mathbf{P}(k), \quad (9.48)$$

$$\varphi(k+1) = [-\partial e(\theta(k), k+1)\partial\theta], \quad (9.49)$$

$$e(k+1) = y(k+1) - \psi^T(k+1)\hat{\theta}(k), \quad (9.50)$$

$$\hat{v}(k+1) = e(k+1). \quad (9.51)$$

У даному разі вектор  $\psi(k+1)$  має вигляд

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \cdots -y(k-m) \ u(k-d-1) \cdots u(k-d-m) \ e(k) \cdots e(k-m+1)]. \quad (9.52)$$

Вектор

$$\begin{aligned} \varphi^T(k+1) = \\ = - \left[ \frac{\partial e(k+1)}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial e(k+1)}{\partial a_m}, \frac{\partial e(k+1)}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial e(k+1)}{\partial b_m}, \frac{\partial e(k+1)}{\partial d_1}, \dots, \frac{\partial e(k+1)}{\partial d_m} \right]. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Похідні  $\partial e(z)/\partial a_i$  визначимо із рівняння (9.31), якщо покласти у ньому  $e(k) = v(k)$ .

$$\begin{aligned} z \frac{\partial e(z)}{\partial a_i} &= \frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} y(z) z^{-(i-1)} = y'(z) z^{-(i-1)}, \\ z \frac{\partial e(z)}{\partial b_i} &= -\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} u(z) z^{-(i-1)} z^{-d} = -u'(z) z^{-(i-1)} z^{-d}, \\ z \frac{\partial e(z)}{\partial d_i} &= -\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} e(z) z^{-(i-1)} = -e'(z) z^{-(i-1)}. \end{aligned}$$

Запровадимо нові позначення для цих елементів:

$$\varphi^T(k+1) = [-y'(k) \cdots -y'(k-m+1) \ u'(k-d) \cdots u'(k-d-m+1) \ e'(k) \cdots e'(k-m+1)]. \quad (9.54)$$

Розглядатимемо їх як вихідні сигнали однакових фільтрів (знаменник у виразах для похідних один і той самий), що описуються різницевиими рівняннями

$$\left. \begin{aligned} y'(k) &= y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \cdots - \hat{d}_m y'(k-m); \\ u'(k-d) &= u(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \cdots - \hat{d}_m u'(k-d-m); \\ e'(k) &= e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \cdots - \hat{d}_m e'(k-m). \end{aligned} \right\}, \quad (9.55)$$

причому в якості коефіцієнтів  $\hat{d}_i$  беруться поточні оцінки  $\hat{d}_i(k)$

Початкові значення для алгоритму задаються такими:

$$\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{E}; \quad \varphi(0) = \mathbf{0}. \quad (9.56)$$

Рекурентний варіант ММП відрізняється від узагальненого рекурентного методу найменших квадратів УРМНК тим, що замість  $\psi(k+1)$  у ньому при обчисленні матриці корекції  $\gamma$  використовується  $\varphi$ .

Перелічимо умови, що необхідні для отримання незміщених і спроможних оцінок за допомогою даного методу.

1. Мають бути відомі точні значення варіацій  $u(k) = U(k) = -U_{00}$ .
2. Має бути відоме точне усталене значення  $Y_{00}$ , що відповідає  $U_{00}$ .

3. Для того, щоб похибки  $e(k)$  не були корельовані, формуючий фільтр шуму повинна мати передаточну функцію вигляду  $D(z^{-1})/A(z^{-1})$ .
4. Необхідно, щоб рівняння (9.56) були стійкими.

Для ідентифікації параметрів моделі використовують також метод стохастичної апроксимації.

### 9.3. Ідентифікація у замкненому контурі

В адаптивних системах, що самооптимізуються, настройка параметрів регуляторів здійснюється відповідно до оцінок параметрів об'єкта, що отримано у процесі його функціонування всередині замкненого контура управління. Методи параметричної ідентифікації, що розглянуто у попередньому розділі стосовно розімкнених систем, можуть застосовуватися і для ідентифікації у замкненому контурі управління. Для їхньої збіжності досить, щоб сигнал похибки  $e(k)$  не був корельований із елементами вектора  $\psi$ .

#### 9.3.1. Параметрична ідентифікація за відсутності збурень

Розглянемо лінійний стаціонарний об'єкт із дискретною передаточною функцією

$$G_O(z) = \frac{Y_u(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_b} z^{-m_b} + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a} z^{-d}. \quad (9.57)$$

і формуючий фільтр шуму

$$G_{O_v}(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = d_1 z^{-1} + \dots + d_{m_d} z^{-m_d} + c_1 z^{-1} + \dots + c_{m_c} z^{-m_c} z^{-d}. \quad (9.58)$$

Ідентифікація параметрів має проводитись всередині замкнутого контура управління. Задача визначення шуканих оцінок параметрів за відсутності зовнішніх збурень суттєво спрощується, якщо покласти  $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$ . Передаточна функція регулятора має бути такою

$$G_P(z) = \frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = q_1 z^{-1} + \dots + q_{m_q} z^{-m_q} + p_1 z^{-1} + \dots + p_{m_p} z^{-m_p}. \quad (9.59)$$

У контурі формуються такі сигнали:

$$y(z) = y_u(z) + u(z);$$

$$e_w(z) = w(z) - y(z).$$

Припустимо, що випадковий сигнал  $v(k)$  є статистично незалежний шум із математичним сподіванням  $M\{v(k)\}$  і дисперсією  $\sigma_v^2$ .

Реакція замкнутого контура на шум, що відіграє роль вхідного сигналу, визначається функцією

$$y(z)v(z) = \frac{G_{O_v}(z)}{1 + G_P(z)G_O(z)} = \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (9.60)$$

Вираз відносно регульованої змінної  $y(z)$ , що отримано, може трактуватися як випадковий процес *АРСС*, який виробляється у контурі як реакцію на подачу шуму  $v(k)$ , причому замкнений контур діє у цьому випадку як формуючий фільтр шуму. Параметри цього процесу можна оцінити за допомогою одного із методів, Що розглянуто у попередньому розділі. Для цього необхідно, щоб нулі рівняння  $A = 0$  містилися всередині одиничного кола на площині  $z$  і були відсутні однакові корені у поліномів  $A(z^{-1})$  и  $D(z^{-1})$ .

За наявними оцінками параметрів у (60), можна визначити шукані параметри

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{m_a}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{m_b}, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{m_d}].$$

Із вигляду цього вектора шуканих параметрів випливає, що параметри регулятора (59) вважаються заданими. Такий метод називають опосередкованою ідентифікацією. Тому використовуються тільки вимірювання виходу  $y(k)$ , а вхідний сигнал  $u(k)$  однозначно відновлюється за рівнянням регулятора.

Однозначне відновлення цих параметрів можливе лише за додержання визначених умов, які називають умовами ідентифіковності.

### Умови параметричної ідентифіковності

Об'єкт (що входить у склад замкнутого контура управління) будемо називати таким, що параметрично ідентифікується, якщо за допомогою певного методу ідентифікації можна отримати спроможні оцінки цих параметрів. Це означає, що має існувати границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\{\theta(N)\} = \theta_0, \quad (9.61)$$

де  $\theta_0$  означає істинний вектор параметрів,  $N$  – кількість виконаних вимірювань. Вважаємо, що вимірюється тільки вихідний сигнал  $y(k)$ .

Перша умова ідентифіковності полягає у тому, що порядки моделей об'єкта (57) та шуму (58) мають бути відомі заздалегідь.

Друга умова ідентифіковності полягає у тому, що для отримання однозначного розв'язання необхідно, щоб порядок знаменника функції (60)

$$L = \max\{m_a + m_p, m_b + m_q + d\} \geq m_a + m_b. \quad (9.62)$$

Звідси випливають умови яким мають підпорядковуватися порядки поліномів у рівнянні регулятора.

$$\begin{aligned} m_q > m_p - d + m_a - m_b &\rightarrow m_q \geq m_a - d; \\ \text{или } m_q > m_p - d + m_a - m_b &\rightarrow m_p \geq m_b. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Якщо обидві умови ідентифіковності виконуються, оцінку вектора параметрів об'єкта  $\hat{\theta}$  зазвичай визначають шляхом підстановки параметрів, що знайдено раніше, *АРСС*  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_L$  у вираз (refadap1.30). У разі, коли  $d = 0$ ;  $m_a = m_b$  число параметрів *АРСС* дорівнює  $L = 2m$ . Тому для того, щоб задовольнити умову (refadap1.62),

порядки поліномів у передаточній функції регулятора мають підпорядковуватися співвідношенням  $m_q = m$ ;  $m_p \leq m$ . Для  $p_0 = 1$ , маємо таку систему рівнянь

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & q_0 & 0 & \dots & 0 \\
 p_1 & 1 & \dots & 0 & \vdots & q_1 & q_2 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & p_1 & \dots & \dots & \vdots & \dots & q_1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 p_{m_p} & \dots & 0 & \dots & 1 & \vdots & \dots & \dots & q_0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & p_{m_p} & \dots & p_1 & \vdots & q_m & \dots & \dots & q_1 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & q_m & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & p_{m_p} & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & q_m
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a_m \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 - p_1 \\
 \alpha_2 - p_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_{m_p} - p_{m_p} \\
 \alpha_{m_p+1} \\
 \alpha_{m_p+2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_m
 \end{bmatrix}
 = \mathbf{S}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}^*.$$

Якщо матриця  $\mathbf{S}$  є квадратна, вектор параметрів об'єкту знаходиться за формулою

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\alpha}^*. \quad (9.65)$$

Із рівняння (64) випливає, що однозначний розв'язок можна отримати тільки коли матриця  $\mathbf{S}$  має ранг  $r \geq 2m$ . Якщо виконується строга рівність, система (64) стає перевизначеною і для її розв'язання використовується формула псевдообертання

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\alpha}^*. \quad (9.66)$$

### Пряма ідентифікація об'єкта управління

Можна проводити ідентифікацію об'єкта управління без розкладання рівняння замкнутого контура, а включити у процедуру обчислення оцінки вимірювання входу  $u(k)$ . При цьому відпадає необхідність у знанні параметрів регулятора.

Для виконання прямої ідентифікації об'єкта із передаточною функцією  $G_O(z)$  необхідно визначати параметри формуючого фільтра шуму  $n(z)/v(z)$ .

Тому необхідно використовувати модель, яка об'єднує рівняння об'єкта і шуму

$$\hat{A}(z^{-1})y(z) = \hat{B}(z^{-1})z^{-d}u(z) + \hat{D}(z^{-1})v(z). \quad (9.67)$$

Запишемо співвідношення (9.31), що визначає модель процесу АРСС у такому, аналогічному останньому рівнянню, вигляді

$$[\hat{A}(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})]y(z) = \hat{D}(z^{-1})P(z^{-1})v(z), \quad (9.68)$$

а також рівняння регулятора

$$Q(z^{-1})y(z) = -P(z^{-1})u(z). \quad (9.69)$$

Підставимо (9.69) у (9.68). Отримуємо

$$\hat{A}(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = \hat{D}(z^{-1})P(z^{-1})v(z). \quad (9.70)$$

Скоротимо у цьому рівнянні  $P(z^{-1})$ . Отримуємо рівняння, що за формою аналогічне рівнянню моделі об'єкта у розімкненому контурі. Але між ними існує принципова різниця, що полягає у тому, що управління  $u(z)$  або  $P(z^{-1})u(z)$  залежить від виходу  $y(z)$  або  $Q(z^{-1})y(z)$  і не може задаватися довільно.

*Умова ідентифіковності* для випадку прямої ідентифікації у замкнутому контурі управління розглядатимемо із двох точок зору. Спочатку розглянемо умови існування єдиного мінімуму функції витрат

$$V = \sum_{k=1}^N e^2(k), \quad (9.71)$$

Вважаючи, що модель об'єкта має вигляд

$$\hat{A}(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = \hat{D}(z^{-1})e(z), \quad (9.72)$$

а сигнал, що управляє, визначається рівнянням (69). Підставивши його у (72), отримаємо рівняння для похибки

$$e(z) = \frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} \left[ \hat{A}(z^{-1}) + \hat{B}(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y(z). \quad (9.73)$$

Для того, щоб функція витрат  $V$  мала єдиний мінімум у просторі невідомих параметрів об'єкта, ці параметри, об'єднані у вираз

$$\frac{1}{\hat{D}} \left[ \hat{A} + \hat{B}z^{-d}QP \right] = \frac{\hat{A}P + \hat{B}z^{-d}Q}{\hat{D}P} = \frac{A}{B}, \quad (9.74)$$

Мають однозначно залежати від сигналу похибки  $e(z)$ . Права частина (9.74) і, відповідно, (9.31), містить поліноми  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}$ , параметри яких однозначно визначаються, виходячи із передаточної функції  $y(z)/u(z)$ , якщо виконано обидві умови ідентифіковності (62), (63).

Отже, для оцінок, що збігаються, при  $e(z) = v(z)$  у разі прямої ідентифікації умови параметричної ідентифікації не зберігають попередній вигляд.

Згідно (9.10) для методу найменших квадратів нев'язка або похибка передбачення на один такт ідентифікації задається рівнянням

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \psi^T(k)\theta(k). \quad (9.75)$$



Умовою збіжності оцінок є відсутність статистичної залежності між похибкою  $e(k)$  та елементами вектора даних  $\psi(k)$ . Цей вектор для МНК має вигляд:

$$\psi^T(k) [-y(k-1) \dots y(k-m_a) \quad u(k-d-1) \dots u(k-d-m_b)];$$

а для методу максимальної правдоподібності:

$$\psi^T(k) [-y(k-1) \dots y(k-m_a) \quad u(k-d-1) \dots u(k-d-m_b) \quad \hat{v}(k-1) \dots].$$

Якщо оцінки параметрів збігаються, можна покласти  $e(k) = v(k)$ . Оскільки сигнал  $v(k)$  впливає тільки на  $y(k), y(k+1), \dots$ , а ці значення не входять у  $\psi(k)$ , похибка  $e(k)$  не може залежати від елементів вектора  $\psi(k)$ . Цей висновок стосується і випадку, коли на вхід  $u(k)$  діє зворотний зв'язок через регулятор. Значить, у замкнутому контурі вектор похибки  $e(k)$  й елементи вектора  $\psi(k)$  статистично незалежні.

Отже, якщо виконуються умови ідентифіковності, всі методи оцінювання параметрів, що ґрунтуються на мінімізації нев'язок, можуть використовуватися для ідентифікації у замкнутому контурі точно так, як й у розімкненому.

Якщо структура регулятора не відповідає другій умові ідентифіковності (він має не досить високий порядок), для отримання збіжних оцінок параметрів рекомендуються такі способи:

- поперемінне підключення двох регуляторів із різними параметрами;
- запровадження запізнювання  $d \geq m_a - m_q + p$  у зворотному зв'язку;
- використання нелінійних або нестационарних регуляторів.

### 9.3.2. Параметрична ідентифікація при зовнішніх збуреннях

Припустимо, що на замкнутий контур діє зовнішнє збурення  $u_s(k)$ . У цьому разі на вході об'єкта наявний сигнал

$$u(k) = u_R(k) + u_s(k), \quad (9.76)$$

причому

$$u_R(k) = -\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}y(k). \quad (9.77)$$

Можна вважати, що додатковий вплив  $u_s(k)$  виникає у результаті подачі сигналу  $s(k)$ , що проходить через деякий фільтр

$$u_s(z) = G_s(z)s(z). \quad (9.78)$$

Якщо

$$G_s(z) = G_R(z) = Q(z^{-1})/P(z^{-1}),$$

сигнал  $s(k)$  відіграє роль впливу, що задає,  $w(k)$ . Збурення  $u_s(k)$  як зовнішній сигнал має бути некорельований із шумом об'єкта  $v(k)$ .

Оскільки непряма ідентифікація є не ефективна, розглядатимемо тільки пряму ідентифікацію об'єкта. Вихід замкнутого контура управління описується виразом

$$y(z) = \frac{DP}{AP + Bz^{-d}Q}v(z) + \frac{Bz^{-d}P}{AP + Bz^{-d}Q}u_s(z). \quad (9.79)$$

або еквівалентним йому рівнянням

$$[AP + Bz^{-d}Q]y(z) = DPv(z) + Bz^{-d}Pu_s(z).$$

Підставимо у це рівняння співвідношення (9.77) і (9.78):

$$A(z-1)P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})v(z). \quad (9.80)$$

Після скорочення обох частин цього рівняння на  $P$  отримуємо таке рівняння об'єкта.

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})v(z). \quad (9.81)$$

Це рівняння не тотожне рівнянню (9.71), оскільки в  $u(k)$  наявна не тільки складова, що виробляється регулятором із сигналу  $y(k)$ , але й збурення  $u_s(k)$ . Отже, сигнал зворотного зв'язку у даному випадку дорівнює

$$u(k-d-1) = -p_1u(k-d-2) - \dots - p_{m_p}u(k-m_p-d-1) - q_0y(k-d-1) - \dots - q_{m_q}y(k-q_{m_q}-d-1) + u_s(k-d-1) + p_1u_s(k-d-2) - \dots - p_{m_p}u_s(k-m_p-d-1).$$

Якщо  $u_s(k) \neq 0$ ,  $u(k-1)$ , за будь-яких порядках поліномів передаточної функції регулятора  $m_q, m_p$  не є лінійна комбінація елементів вектора даних  $\psi(k)$ . Отже, пряма ідентифікація об'єкта, що описується рівнянням (9.81), завжди можлива, коли зовнішній вплив являє собою процес, що збурює, досить високого порядку. При цьому виконання другої умови ідентифіковності уже не є обов'язковим. Сигнал збурення можна не вимірювати і спроможність результатів забезпечується за будь-якого формуючого фільтру шуму  $D/C$ .

Для отримання оцінок можуть застосовуватися ті самі методи ідентифікації, що ґрунтуються на передбаченні вихідного сигналу, які використовуються для оцінювання параметрів у розімкнутому контурі.

## Література

1. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Моделирование на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ. - К.: Вища школа, 1983.
2. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання фізичних систем і процесів. - Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2002.
3. Бенькович Е., Колесов Ю., Сениченков Ю. Практическое моделирование динамических систем. - СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
4. Березин Ю.А. Моделирование нелинейных волновых процессов. - Нов-ск: Наука, 1982.
5. Бубенников А.Н. Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем. - М.: Высшая школа, 1989.
6. Васильев В.В., Кузьмук В.В. Сети Петри, параллельные алгоритмы и модели мультипроцессорных систем. - Киев: Наукова думка, 1990. - 216 с.
7. Вознесенский В.А., Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям. - М: Статистика, 1978: - 192 с.
8. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: Специальный справочник. -СПб.: Питер, 2001.
9. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. - М.: Наука, 1983.
10. Дикий Н.А., Халатов А.А. Основы научных исследований. - К.: Вища школа, 1985.
11. Дорохина Е.Ю., Халиков М.А. Моделирование микроэкономики. - М.: Экзамен, 2003.
12. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2 т. - М.: Финансы и статистика, 1987.
13. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - М.: Наука, 1971.
14. Закгейм А.Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов. - М.: Химия, 1982.
15. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. - М.: Наука, 1979.
16. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. - Киев: Наукова думка, 1982. - 296с.
17. Ивахненко А.Г., Мюллер Й. Самоорганизация прогнозирующих моделей. - Киев: Наукова думка, 1985. - 221с.
18. Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. - М.: Радио и связь, 1986.
19. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химического производства. - М.: Высшая школа, 1991.
20. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика С8 . 3-е издание. - СПб.: Питер; Киев: BHV, 2004. - 847с.

21. Кирсанов В.В. ЭВМ-эксперимент в атомном материаловедении. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
22. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища. – К.: Либідь, 2003.
23. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
24. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997.
25. Лескин А.Л., Мальцев П.А., Спиридонов А.М. Сети Петри в моделировании и управлении. – Л.: Наука, 1989. – 133 с.
26. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М., 1984.
27. Малыхин В. И. Математическое моделирование. – М.: УРАО, 1997.
28. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983.
29. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблемах окружающей среды. – М.: Наука, 1982.
30. Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А.А. Петрова. – М., 1986.
31. Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: Синергетика и самоорганизация. – М.: УРСС, 2001.
32. Общая теория статистики: Статистическая методология в изучении коммерческой деятельности: Учебник / Под ред. О. Э. Башиной. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 440с.
33. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения: Введение в теорию и приложения. – М.: Мир, 2003.
34. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
35. Прицкер А. Введение в язык имитационного моделирования и язык SLAM II. – М.: Мир, 1987. – 646с.
36. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997.
37. Семенов М.Г. Введение в математическое моделирование. – М.: СОЛОН-Р, 2002.
38. Сергеева Л.Н. Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). – Запорожье: ЗГУ, 2002.
39. Ситник В.Ф. Основы научных исследований. – К.: Вища школа, 1978.
40. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. Імітаційне моделювання: Навчальний посібник. – К: КНЕУ, 1998. – 230с.
41. Советов Б.Я., Яковлев С. А. Моделирование систем: Учебник для вузов – М., 1985. – 271с.
42. Стеценко І.В. Методичні вказівки до курсової роботи з дисципліни «Моделювання систем». – ЧІТІ, 2000. – 38с.

43. Стеценко І.В. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання систем». – ЧДТУ, 2003. – 51с.
44. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів: Підручник для студентів вищих закладів освіти/За ред. В.І.Бикова – К.: Либідь, 2000. – 270с.
45. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990.
46. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К. : Видавнича група ВНУ, 2005. –352с.
47. Томашевський В.М., Жданова О.Г., Жолдакова О.О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. – К.: Корнійчук, 2001. – 267с.
48. Трудоношина В.А., Пивоварова Н.В. Математические модели технических объектов. – Минск: Высшая школа, 1988.
49. Харин Ю.С., Мальгин В.И., Кирлица В.П. Основы имитационного и статистического моделирования. – Минск: Дизайн ПРО, 1997.
50. Шеннон Р., Имитационное моделирование систем - искусство и наука. – М., Мир, 1986. – 418 с.
51. Шрайбер Т. Дж. Моделирование на GPSS. – М.: Машиностроение, 1980. – 593с.
52. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999.
53. Элиенс, Антон Принципы объектно-ориентированной разработки программ. 2-е издание. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2002. – 496с.
54. Kelton W.D., R.P. Sadowski, and D.A. Sadowski: Simulation with Arena, Mc Graw-Hill, New York (1998).

---

## Лабораторний практикум

---

### А.1. Вступ

Метою виконання лабораторного практикуму з математичного моделювання фізичних систем і процесів є набуття студентами практичних навичок розробки й дослідження математичних моделей,

#### **Завдання та основні етапи виконання лабораторних робіт**

При виконанні лабораторних робіт студенти мають:

1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом, що стосується фізичної системи або процесу, модель якого буде розроблятися, Зокрема, вивчити основні визначення, закони, рівняння, формули відповідного розділу фізики, межі їх застосування,

2. Визначити мету дослідження системи (процесу),

3. Розробити фізичну модель досліджуваних системи або процесу, Розроблення фізичної моделі системи передбачає виділення основних елементів системи, що досліджується, основних зв'язків (взаємодій) між цими елементами, а також суттєвих для процесів, що досліджується, взаємодій системи із зовнішнім середовищем, Розроблення фізичної моделі процесу додатково має включати визначення механізму процесу, тобто його елементарних стадій та їх послідовності, факторів, що впливають на швидкість процесу, Розроблення фізичної моделі передбачає також визначення тих фізичних законів, які необхідно враховувати при аналізі досліджуваних системи або процесу,

4, Розробити математичну модель системи, що вивчається. Це передбачає вибір основних рівнянь, нерівностей та інших співвідношень, які характеризують систему, що досліджується, та її динаміку, визначення початкових і межових умов, інших обмежень на параметри системи. Слід мати на увазі, що форма запису деяких рівнянь може залежати від обраної системи одиниць вимірювань. При аналізі моделей фізичних систем далі використовується тільки система СІ.

5, Обрати метод чисельного аналізу математичної моделі, побудувати алгоритм аналізу, написати комп'ютерну програму, яка реалізує цей алгоритм, і дослідити поведінку системи в заданих умовах, Обрання методу чисельного аналізу має бути обґрунтованим з точки зору його збіжності, стійкості, точності та ефективності, Для

написання програм рекомендується використовувати мову C++. Дозволяється використання інших мов високого рівня (C, Pascal, Fortran тощо), а також прикладних математичних пакетів MathCad, MathLab, Maple та інших.

6. Зробити висновок про адекватність обраних фізичної та математичної моделей і можливість застосування обраного методу чисельного аналізу.

7. Підготувати письмовий звіт про виконання роботи. У звіті необхідно навести загальну характеристику об'єкта дослідження, обрану фізичну модель та її обґрунтування, обрану математичну модель та її обґрунтування, загальну характеристику обраного обчислювального методу дослідження математичної моделі, обґрунтування його вибору, алгоритм дослідження математичної моделі, відповідні комп'ютерні програми, основні результати дослідження, висновок про можливість застосування обраного методу для вивчення наданого об'єкта дослідження.

## А.2. Лабораторні роботи № 1–3

*Моделювання випадкових чисел із заданим законом розподілу*

**Мета роботи.** Вивчення методів і отримання навичок складання алгоритмів генерування псевдо випадкових чисел із різними законами розподілу, які найчастіше використовують при імітаційному моделюванні складних систем на ЕОМ.

У процесі аналізу та проектування імітаційних моделей стохастичних систем є необхідність завдання різних випадкових впливів або імітації стохастичних процесів. Такі ситуації передбачають необхідність програмної генерації випадкових чисел із певним законом розподілу.

Нехай треба отримати реалізацію випадкової величини  $X$  із густиною розподілу  $f(x)$ . Така задача вирішується шляхом моделювання випадкової величини  $R$ , що розподілена рівномірно на інтервалі  $[0, 1)$ , та перетворення послідовності випадкових чисел  $r_1, r_2, \dots, r_n$  у послідовність  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

У загальному випадку перетворення можна реалізувати за допомогою деякої функції

$$X = \psi(R), \quad (\text{A.1})$$

Яка зв'язує випадкові числа із рівномірним законом розподілу із заданим законом розподілу. Перетворення (A.1) можна виконати у різний спосіб.

### А.2.1. Метод зворотних функцій

Нехай треба отримати значення випадкової величини  $X$ , що розподілена в інтервалі  $(a, b)$  із густиною ймовірності  $f(x)$ .

Стандартний метод моделювання ґрунтується на тому, що інтегральна функція розподілу  $F(y) = \int_a^y f(x)dx$  будь якої неперервної випадкової величини є рівномірно розподілена в  $(0, 1)$ , тобто для будь якої випадкової величини  $X$  із густиною розподілу  $f(x)$  випадкова величина є рівномірно розподілена в  $(0, 1)$ . Тоді випадкову величину  $X$  із густиною розподілу  $f(x)$  можна вирахувати за такого алгоритму Графічний розв'язок подано на рис А.1:

1. Необхідно згенерувати випадкову величину  $r$  (значення випадкової величини

R), що рівномірно розподілена в (0, 1).

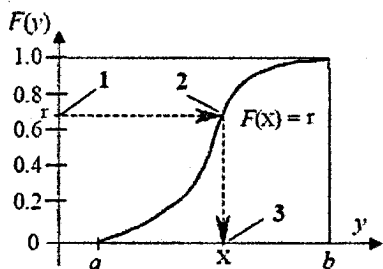


Рис. А.1.

мірною густиною

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

Тоді  $F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} \Big|_a^x = r$  і отримуємо такий вираз:  $x = a + r(b-a)$ . Цю формулу часто використовують для заміни стандартного інтервалу (0, 1) до потрібного інтервалу (a, b).

Слід пам'ятати, що найчастіше аналітичного розв'язку не існує, і тоді рівняння  $x = F^{-1}(r)$  вирішують числовими методами.

**Приклад 2.** Знайти три можливих значення неперервної випадкової величини X, що розподілена рівномірно в інтервалі (2; 10).

**Розв'язання.** Функція розподілу величини X має такий вигляд:  $F(x) = (x - a)/(b - a)$ . За умовою  $a = 2, b = 10$ , отже,  $F(x) = (x - 2)/8$ .

Прирівнюємо  $F(x)$  до вибраного випадкового числа  $r_i$ :  $(x_i - 2)/8 = r_i \rightarrow x_i = 8r_i + 2$ .

Далі відповідно алгоритму виберемо три випадкових числа, що розподілені рівномірно в (0;1). Наприклад,  $r_1 = 0,11; r_2 = 0,17; r_3 = 0,66$ . Замістимо ці числа у рівняння. Отримаємо відповідні можливі значення X:  $x_1 = 8 \cdot 0,11 + 2 = 2,88; x_2 = 8 \cdot 0,17 + 2 = 3,36; x_3 = 8 \cdot 0,66 + 2 = 7,28$ .

**Приклад 3.** Показниковий розподіл. Метод логарифму

Випадкова величина X має експоненційний (показниковий) закон розподілу, якщо

$$F(X) = \int_a^x f(x)dx = 1 - e^{-x/\lambda}, \quad x > 0, \lambda > 0,$$

де  $\lambda$  - параметр розподілу. Вочевидь, якщо  $r = F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$ ,  $X = F^{-1}(r) = -\lambda \ln(1 - r)$ . Оскільки  $1 - r$  має той самий розподіл, що й R, зручніше користуватися формулою

$$X = -\lambda \ln R, \tag{A.2}$$

**Приклад 4.** Зворотну функцію для нормального розподілу не можна подати у вигляді простих формул, що легко обчислюються. Тому для отримання випадкових

2. Прирівняти випадкове число, що згенеровано, до відомої функції розподілу  $F(X)$  й отримати рівняння  $F(X) = \int_a^X f(x)dx$ .

3. Розв'язати рівняння  $X = F^{-1}(r)$  і знайти шукане значення X.

Такий спосіб отримання випадкових величин має назву *метод зворотних функцій*

**Приклад 1.** Нехай треба отримати випадкову величину X, що розподілена в (a, b) із рівно-



чисел із нормальним законом розподілу використовують апроксимацію

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x/2} \approx \frac{2ke^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}, \quad x > 0, \quad (\text{A.3})$$

де  $k = \sqrt{8/\pi}$ .

Якщо скористатися (A.3) для випадкової величини із густиною

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

отримаємо для додатної півосі за методом зворотних функцій величину

$$x = \frac{1}{k} \ln \frac{1+R}{1-R}. \quad (\text{A.4})$$

Якщо значенням  $x$ , що отримано за допомогою (A.4), приписувати із ймовірністю 0,5 знак "+" й із ймовірністю 0,5 знак "-", отримана послідовність випадкових чисел може розглядатися як реалізація випадкових величин  $S \cdot X$  із нормальним розподілом  $N(0; 1)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , де  $S$  - випадкова величина із розподілом  $S = [+1 - 1]$ ,  $p = [0, 50, 5]$ .

**Приклад 5.** Метод зворотного перетворення також можна використовувати, коли величина  $X$  є дискретна. У цьому разі функція розподілу

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \in X} p(x_i),$$

де  $p(x_i)$  - є ймовірнісна міра  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Тоді алгоритм матиме такий вигляд.

1. Генеруємо число  $R$  в інтервалі  $(0, 1)$ .
2. Визначаємо додатне найменше ціле число  $R_i$ , для якого  $R_i < F(x_i)$ ,  $X = x_i$ .

Метод зворотного перетворення для неперервних і дискретних величин можна формально об'єднати в одну загальну формулу

$$X = \min x \cdot F(x) \geq R \quad (\text{A.5})$$

Графічно формула (A.5) подана на рис. ??.

Отже, якщо явний вираз для зворотної функції не вдається отримати, використовують наближені способи моделювання випадкових величин. Вони ґрунтуються на апроксимації функції  $F(x)$  деякою іншою  $G(x)$ , зворотна функція якої  $G^{-1}(x)$  має простіший вигляд і легко обчислюється.

Метод зворотних функцій застосовують також при моделюванні випадкової величини  $X$  за емпіричною функцією її розподілу, що побудовано за результатами вибірки.

На рис. ?? наведено реалізацію випадкової величини  $X$  за емпіричною функцією розподілу, що є ступінчаста ламана лінія. Випадкові числа (реалізація  $X$ ) приймаються рівними  $(x_{k-1} + x_k)/2$ , коли величина  $R$  опиняється в інтервалі  $\left( \sum_{i=0}^{k-1} p_i, \sum_{i=0}^k p_i \right)$ .

### А.2.2. Метод відбору

Метод запропоновано Дж. Нейманом й сутність його зводиться до того, що із області завдання випадкової величини  $X$  "відбирають" точку із координатами, що є фікції випадкових чисел із рівномірним розподілом, якщо ця точка не може бути використана для розрахунку  $X$ , її "відкидають" і "відбирають" нову. Метод відбору можна застосовувати для отримання реалізацій тільки таких випадкових величин, закон розподілу яких може задаватися за допомогою функцій густини.

У рамках методу відбору існує кілька процедур моделювання випадкової величини із заданою густиною розподілу.

#### Метод відбору – процедура № 1

За допомогою даної процедури моделюється одновимірна випадкова величина  $X$ , що визначена в інтервалі із густиною  $f(x)$ . Поза цього інтервалу  $f(x) = 0$  і, крім того, густина розподілу обмежена зверху, тобто  $f(x) \leq C, C = \text{const}$ .

Процедура № 1 отримання значень випадкової величини графічно наведена на рис. А.4 і полягає у такому:

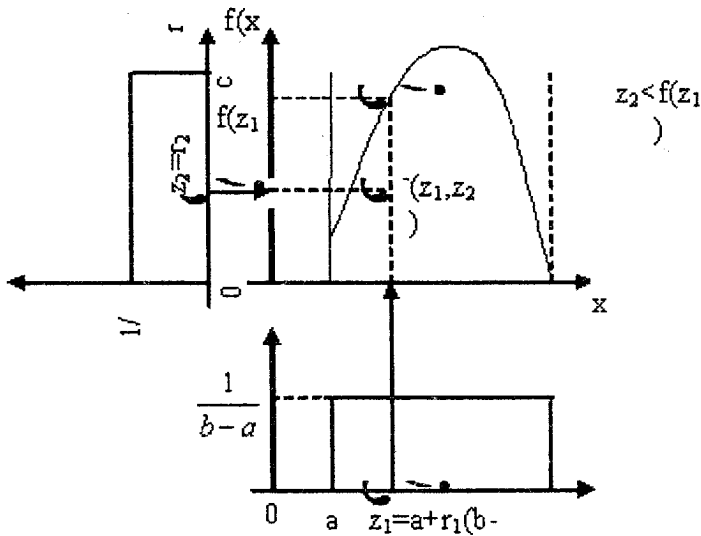


Рис. А.4. Процедура № 1

а) отримуємо два незалежних значення  $r_1$  і  $r_2$  випадкової величини  $R$  із рівномірним розподілом на інтервалі  $[0; 1]$ ;

б) будемо точку із координатами  $(z_1, z_2)$ , де  $z_1 = a + r_1(b - a)$ ;  $z_2 = r_2c$ ;

в) якщо  $z_2 \leq f(z_1)$ , вважаємо, що випадкова величина  $X$  прийняла значення  $z_1$ ; якщо  $z_2 \geq f(z_1)$ , точка  $z = f(z_1, z_2)$  відкидається й обчислення повторюють.

Ефективністю методу відбору називають ймовірність того, що точку  $z = (z_1, z_2)$  використовують для розрахунку  $X$ . У процедурі №1 ефективність методу характеризується відношенням площі, що обмежена кривою  $f(x)$ , віссю  $x$ , прямими  $x = 1$ ,

$x = b$  до площі прямокутника  $C(b - a)$ .

### Метод відбору – процедура № 2

Нехай випадкова величина  $X$  має розподіл із густиною  $f(x)$

$$f(x) = a_1 f_1(x) g_1(x), \quad (\text{A.6})$$

де  $a_1$  – стала;  $f(x)$  – деяка відома густина ймовірності, а функція  $g_1(x)$  задовольняє умову  $0 \leq g_1(x) \leq 1$ .

Значення випадкової величини  $X$  можна отримати за таким алгоритмом.

- а) моделюємо випадкову величину  $Y$  із густиною розподілу  $f_1(x)$ ;
- б) обчислюємо  $g_1(x)$ ;
- в) моделюємо випадкову величину  $R$ , що рівномірно розподілена на інтервалі  $[0; 1)$ ;
- г) якщо  $R < g_1(Y)$ , приймаємо  $x = Y$ , інакше числа, що отримано, відкидаються і обчислення повторюються із п. а).

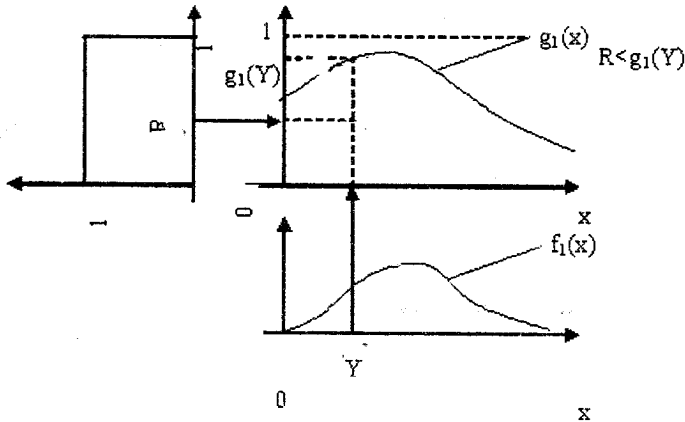


Рис. А.5. Процедура № 2

### Метод відбору – процедура № 3

Процедура № 3 визначає процес моделювання випадкової величини  $X$ , якщо густина  $f(x)$  можна подати у вигляді

$$f(x) = a_1 f_1(x) (1 - g_1(x)), \quad (\text{A.7})$$

де  $g_1(x) = g[t(x)]$ ,  $g_1 \geq 0$ , а  $g$  – деяка відома функція розподілу. Тоді значення випадкової величини  $X$  можна отримати за таким алгоритмом:

- а) моделюємо випадкову величину  $Y$  із густиною розподілу  $f_1(x)$ ;
- б) обчислюємо величину  $t(Y)$ ;
- в) моделюємо випадкову величину  $\gamma$  із функцією розподілу  $g$ ;
- г) якщо  $\gamma > t(Y)$ , приймаємо  $x = Y$ , інакше числа, що отримано, відхиляються і повторюються обчислення із п. а).

Приклад 6. Для усікненого нормального розподілу ( $x > 0$ ) із урахуванням апроксимації (А.3) густину розподілу можна подати у вигляді

$$\sqrt{\frac{2e}{\pi}} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-(x-1)^2/2} \right) \right] e^{-k}. \quad (\text{A.8})$$

Якщо позначити  $a_1 = \sqrt{2e/\pi}$ ;  $g_1(x) = 1 - e^{-(x-1)^2/2}$ ;  $f_1(x) = e^{-k}$ ;  $t(x) = (x-1)^2/2$ ;  $g(t) = 1 - e^{-t}$ , можна пересвідчитися у виконанні розкладання  $f(x)$  у вигляді (А.7).

### А.2.3. Метод суперпозицій

Нехай умовна густина випадкової величини  $X$  при  $Y = y$  дорівнює  $f(x, y)$ , причому для випадкового параметра відома функція розподілу  $F(y)$ . Тоді густина розподілу  $X$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dF(y). \quad (\text{A.9})$$

Отже, якщо  $f(x)$  може бути подана у вигляді (А.8), випадкову величину  $X$  можна моделювати у два етапи:

- а) вибираємо значення  $Y$  відповідно функції розподілу  $F(y)$ ;
- б) вибираємо  $X$  відповідно густині  $f(x, y)$ .

Якщо  $Y$  приймає тільки цілі значення,

$$f(x) = \sum_i p_i f_i(x) = \sum_i p_i f(x, i), \quad (\text{A.10})$$

де  $p_i = p(Y = i)$ .

Приклад Нехай

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad a_n > 0.$$

Перетворимо  $f(x)$  таким чином:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (n+1)x^n.$$

$$p_n = P(Y = n), \quad f_n(x) = f(x, n) = (n+1)x^n, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Звідси отримуємо алгоритм моделювання:

- а) для розподілу  $p_0, p_1, p_2, \dots$  вибираємо  $Y$ ;
- б) якщо  $Y = n$ ,  $X = R^{1/(n+1)}$ .

### А.2.4. Комбінація метода суперпозицій і методу відбору

Вираз (А.10) надає можливість реалізувати комбінований метод, якщо кожному із густин  $f_i(x)$  подати у вигляді

$$f_i(x) = a_1 \omega_i(x) g_i(x), \quad (\text{A.11})$$

де  $a_i$  – обмежені сталі;  $\omega_i(x)$  деякі відомі густини ймовірностей;  $g_i(x)$  – функція, яка для кожного  $x$  задовольняє умову  $0 \leq g_i(x) \leq 1$ . У результаті для отримання послідовності випадкових чисел можна використати такий алгоритм:

а) реалізація випадкової величини  $Y$  по дискретному розподілу  $p(Y = i) = p_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;

б) реалізація випадкової величини  $X$  по густині ймовірності  $\omega_i(x)$  із параметром  $i$ , який отримано у п. а). Ця частина алгоритму збігається із методом суперпозицій. Потім слідує використання методу відбору на ґрунті подання густини  $f_i(x)$  у вигляді формули (А.11);

в) реалізація випадкової величини  $R$ , що рівномірно розподілена на  $[0; 1]$ ;

г) якщо  $R < g_i(x)$ , вважаємо, що значення, яке отримано у п. б), є одне зі значень випадкової величини  $X$  із густиною  $f(x)$ , інакше повторюємо усі обчислення, починаючи із п. а).

Комбінація методу суперпозицій і методу відбору дає можливість реалізувати випадкову величину практично із будь-яким законом розподілу.

*Приклад.* Розглянемо спосіб генерування випадкових чисел із нормальним законом розподілу  $N(0; 1)$ , що ґрунтується на апроксимації (А.3). Подамо  $f(x)$  у вигляді суми:

$$f(x) = p_1\omega_1(x)g_1(x) + p_2\omega_2(x)g_2(x). \quad (\text{А.12})$$

$$p_1 = \sqrt{2/\pi}; \quad \omega_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1; \end{cases}; \quad g_1(x) = e^{-x^2/2};$$

$$p_2 = \sqrt{1/(2\pi)}; \quad \omega_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1; \end{cases}; \quad g_2(x) = e^{-(x-2)^2/2}.$$

Для виконання в (А.12) умови  $\sum p_i = 1$  пронормуємо  $p_1$  і  $p_2$ . Внаслідок цього у п. а) алгоритму реалізація випадкової величини  $Y$  буде виконуватися із ймовірністю  $p_1/(p_1+p_2) = 2/3$  по густині  $\omega_1(x)$ . Причому при  $R > g_1(Y)$  значення  $Y$  буде відкидатися. Із ймовірністю  $p_2/(p_1+p_2) = 1/3$  буде виконуватися за густиною  $\omega_2(x)$ . Виключатися будуть ті числа, які задовольняють умову  $R > g_1(x)$ . Реалізуючи випадкову величину  $S$ , що приймає значення “+1” і “-1” із ймовірністю 0,5 та обчислюючи  $s \cdot X$ , отримуємо випадкові числа, що розподілені за  $N(0; 1)$ ,  $-\infty < x < \infty$

### А.2.5. Моделювання деяких спеціальних розподілів

#### Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл є розподіл ймовірностей появи  $m$  подій в  $n$  незалежних випробуваннях, у кожному із яких поява події є стала і дорівнює  $p$ . Ймовірність можливої появи події обчислюється за формулою

$$P(x = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad (\text{А.13})$$

$$\text{де } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Алгоритм, що моделює, ґрунтується на поданні випадкової величини  $X$ , що підпорядковується біноміальному закону розподілу, у вигляді суми  $n$  незалежних випадкових величин  $X_i$ , кожна із яких має розподіл  $X_i = [1; 0]$ ,  $p_i = [p \ q = 1 - p]$ .

Процедура отримання випадкової величини  $X$  із розподілом ймовірностей (А.13) полягає у такому:

- а) реалізується випадкова величина  $R$ ;
- б) для кожного члена послідовності  $r_1, r_2, \dots, r_n$  перевіряється виконання нерівності  $r_i < p$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Якщо нерівність справджується, приймається  $X_i = 1$ , інакше  $X_i = 0$ .
- в) обчислюється сума  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  значень  $X_i$ , яка вважається значенням випадкової величини  $X = S$ .

Повторювання цієї процедури  $k$  разів дає послідовність значень  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , які є реалізація біноміально розподіленої випадкової величини.

### Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона – це розподіл випадкової величини, що дорівнює кількості подій за одиницю часу. Випадкова величина  $X$  має розподіл Пуассона, коли

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{А.14})$$

де  $\lambda$  – параметр розподілу.

Алгоритм, що моделює, ґрунтується на такому: якщо випадкові величини  $X_1, X_2, \dots$  є незалежні і всі мають експоненційний розподіл із математичним сподіванням, що дорівнює 1, невід’ємне ціле число  $n$ , для якого виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \lambda < \sum_{i=1}^{n+1} x_i, \quad (\text{А.15})$$

має розподіл Пуассона із параметром  $\lambda$ .

Оскільки  $X_i = -\ln r_i$ , де  $r_i$  – випадкова величина  $R$  із рівномірним розподілом на  $[0; 1)$ , ((А.15) можна записати як:

$$\prod_{i=1}^n r_i \leq e^{-\lambda} < \prod_{i=1}^{n+1} r_i, \quad (\text{А.16})$$

Алгоритм отримання випадкової величини, що розподілена за законом Пуассона, має вигляд:

- а) реалізують послідовності  $r_1, r_2, \dots$  незалежних випадкових величин, що рівномірно розподілені на  $[0; 1)$ ;
- б) обчислюються добутки  $r_1, r_1 r_2, r_1 r_2 r_3 \dots$  доти, доки не виконається умова (А.16).

В якості значення випадкової величини  $X$  приймається число  $n$ . Якщо нерівність задовольняє перше із рівномірно розподілених чисел  $r_1$ ,  $X = 0$ .

### Моделювання нормального розподілу

Видом розподілу, що трапляється найчастіше, є нормальний. Отже, при моделюванні різних явищ виникає потреба мати у розподілі послідовності випадкових чисел, що відповідають нормальному закону розподілу. Реалізація випадкової величини із нормальним законом розподілу  $N(0; 1)$  за допомогою класичних методів продемонстрована на прикладі апроксимації функції (А.3). Крім цих методів розроблено спеціальні методи, що дозволяють отримати із великою швидкістю досить протяжні послідовності випадкових чисел, що відповідають нормальному закону розподілу. На першому етапі виконують реалізацію випадкової величини із густиною  $N(0; 1)$ . За допомогою лінійного перетворення

$$y_i = \mu + \sigma x_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{А.17})$$

За будь-яких  $\mu$  і  $\sigma > 0$  можна потім отримати послідовність випадкових чисел  $y_1, y_2, \dots$ , що відповідають розподілу  $N(\mu, \sigma^2)$  із математичним сподіванням  $M\{Y\} = \mu$  та дисперсією  $D\{Y\} = \sigma^2$ .

Один із найвідоміших методів реалізації випадкової величини із нормальним розподілом на ЕОМ ґрунтується на *центральной граничной теоремі*, згідно якої розподіл суми незалежних випадкових величин  $X_i, i = \overline{1, n}$ , наближається до нормального за необмеженого збільшення  $n$ , якщо виконуються умови:

- а) усі величини мають скінченні математичні сподівання і дисперсії;
- б) жодна із величин за своїми значеннями не відрізняється різко від решти.

Згідно цієї теореми можна сконструювати алгоритм реалізації випадкової величини  $X$  на ґрунті апроксимації розподілу  $N(0; 1)$  сумою незалежних випадкових величин  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , що рівномірно розподілені на інтервалі  $[0; 1)$ . Практика свідчить, що при  $n = 12$  апроксимація уже досить задовільна. У результаті отримуємо формулу для обчислення нормально розподіленої випадкової величини

$$x = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6. \quad (\text{А.18})$$

В іншому відомому генераторі нормально розподілених випадкових величин використовують зворотний метод Бокса і Малера, який дає гарні результати, легко програмується і досить швидко працює. За цим методом генерують пару нормованих нормальних чисел ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) із двох стандартних випадкових чисел ( $R_1, R - 2$ ) за допомогою таких рівнянь

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \ln R_1 \cos(2\pi R_2); \\ x_2 &= -2 \ln R_1 \sin(2\pi R_2). \end{aligned} \quad (\text{А.19})$$

Модифікацією цього методу є процедура Марсалі і Брея, відповідно до якої генеруються два випадкових числа  $R_1, R_2$ . Далі,  $V_1 = -1 + 2R_1, V_2 = -1 + 2R_2$ , обчислюють  $S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ . За  $S \geq 1$  починають цикл знову, тобто

$$\begin{aligned} x_1 &= V_1 \sqrt{-2 \ln S/S}; \\ x_2 &= V_2 \sqrt{-2 \ln S/S} \end{aligned} \quad (\text{А.20})$$

### Моделювання $\beta$ -розподілу

Густина  $\beta$ -розподілу на інтервалі  $(0; 1)$  визначається за формулою

$$f_{p,m}(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{m-1}}{B(p,m)}, \quad 0 < x < 1, \quad (\text{A.21})$$

де  $p > 0$ ,  $m > 0$  – параметри розподілу;  $B(p,m) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{m-1} dx$  –  $\beta$ -функція.

Якщо  $m$  – ціле, а  $p$  – не ціле, формула для моделювання випадкової величини  $X_{p,m}$ , що має  $\beta$ -розподіл із параметрами  $p$  і  $m$ , матиме вигляд

$$X_{p,m} = \prod_{k=1}^m R_k^{1/(p+k-1)} = \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{\ln R_k}{p+k-1}\right), \quad (\text{A.22})$$

де  $R_1, R_2, \dots, R_m$  – випадкові числа, що рівномірно розподілені на інтервалі  $[0; 1)$ . Формулу (A.22) можна використовувати й у разі, коли  $m$  – не ціле, а  $p$  – ціле, виконавши заміну  $y = 1 - x$ .

Для моделювання  $\beta$ -розподілу із нецілими параметрами  $p > 0$  і  $m > 0$  можна використати метод суперпозицій, для якого  $\gamma$  – цілочислова величина, що має дискретний розподіл

$$p(\gamma = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad p_k = \frac{[m]}{B(p,m)} \cdot \frac{a(a+1) \cdots (a+k+1)}{k!(k+p)(k+p+1) \cdots (k+p+[m])};$$

Із урахуванням останнього розподілу отримуємо формулу для  $\beta$ -розподілу

$$X_{p,m} = \exp\left(\sum_{k=1}^{[m]+1} \frac{\ln R_k}{\gamma+p+k-1}\right), \quad (\text{A.23})$$

Австрійський математик Йонк запропонував такий алгоритм моделювання  $\beta$ -розподілу:

- а) вибирають значення  $R_1, R_2$ , що рівномірно розподілені на інтервалі  $[0; 1)$ ;
- б) якщо  $R_1^{1/p} + R_2^{1/m} \geq 1$ , повторити п.а), інакше

$$X_{p,m} = \frac{R_1^{1/p}}{R_1^{1/p} + R_2^{1/m}}.$$

### Моделювання $\gamma$ -розподілу

$\gamma$ -розподіл має вигляд

$$f_\gamma(x) = \frac{x^{\gamma-1}e^{-x}}{\Gamma(\gamma)}, \quad x > 0, \quad (\text{A.24})$$

де  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt$  –  $\gamma$ -функція.



Табл. А.1. Параметри вибірки

Параметр	Позначення	Визначення
Вибіркові дані	$x_i, i = \overline{1, n}$	Значення ВВ
Обсяг вибірки	$n$	Кількість ВЧ у вибірці

$\gamma$ -функція і  $\beta$ -функція зв'язані між собою виразом

$$B(p, m) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(m)}{\Gamma(p+m)},$$

Зокрема,  $\Gamma(m+1) = m!$ .

Правило моделювання  $\gamma$ -розподілу для  $\gamma = n > 0$  ( $\gamma$  - ціле) має вигляд

$$X = - \sum_{k=1}^n \ln R_k = - \ln \left( \prod_{k=1}^n R_k \right). \quad (\text{A.25})$$

## А.2.6. Первинна обробка статистичних даних

### Вибірка. Емпірична функція розподілу. Гістограма

У математичній статистиці мають справу із статистичними експериментами, сутність яких є здійснення  $n$  повторних незалежних спостережень над деякою випадковою величиною  $X = \{x_i\} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , яка має невідомий розподіл ймовірностей, тобто невідому функцію розподілу  $F_x(x) = F(x)$ . У цьому разі множину  $X$  можливих значень випадкової величини  $X$ , що спостерігається, називають *генеральною сукупністю*, що має функцію розподілу  $F(x)$ .

Числа  $x_1, \dots, x_n, x_i \in X, i = \overline{1, n}$ , що є результат  $n$  незалежних спостережень над випадковою величиною  $X$ , називають *вибіркою* із генеральної сукупності або *вибірковими* (статистичними) даними. Число  $n$  називають *обсягом* вибірки.

У табл. А.1 наведено позначення параметрів вибірки для вибіркових значень.

Вибірка є вхідна інформація для статистичного аналізу і прийняття рішень про невідомі ймовірнісні випадкової величини  $X$ , що спостерігається. Але на основі конкретної вибірки не можна обґрунтувати якість статистичних висновків. Для цього вибірку слід розглядати як апіорні дані, координати якого є незалежні, розподілені так само як і  $X$ , випадковими величинами, й який ще не набув конкретного значення у результаті експерименту. Якщо поміж вибіркових значень наявні такі, що збігаються, статистичний ряд зручніше записувати у вигляді такої таблиці.

Тут  $(y_1, \dots, y_r)$  ( $r < n$ ) – різні значення поміж  $x_1, \dots, x_n, m_i$  – частота значення  $y_i, p^* = m_i/n$  – відносна частота значення  $y_i$ . Вочевидь,

$$\sum_{i=1}^r m_i = n, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Сукупність пар  $(y_i, p_i^*), i = \overline{1, r}$  називають *емпіричним законом розподілу*, а саму таблицю 2 – *таблицею частот*. Вибіркові значення  $x_1, \dots, x_n$ , що упорядковано за

Табл. А.2. Статистичний ряд

Вибіркові дані $y_i$ :	$y_1$	$y_2$	...	$y_r$
Частоти $m_i$ :	$m_1$	$m_2$	...	$m_r$
Відносні частоти $p_i^* = m_i/n$ :	$m_1/n$	$m_2/n$	...	$m_r/n$

Табл. А.3. Інтервальный статистичний ряд

Інтервали $J_k$ :	$[u_0; u_1)$	$[u_1; u_2)$	...	$[u_{L-1}; u_L)$
Частоти $v_i$ :	$v_1$	$v_2$	...	$v_L$
Відносні частоти $\tilde{p}_i^* = v_i/n$ :	$v_1/n$	$v_2/n$	...	$v_L/n$

зростанням, називають *варіаційним рядом*:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)},$$

де  $x_{(j)} = \min[x_1, \dots, x_n]$ . Величина  $R = x_{(n)} - x_{(1)}$  зветься *розмахом вибірки*.

*Емпіричною функцією розподілу*, що відповідає вибірці  $x_1, \dots, x_n$ , називають функцію

$$F_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i < x) = \frac{1}{n} v_n(x),$$

де  $I(A)$  – індикатор множини  $A$ , а  $v_n$  – число вибірових значень, що не перевищують  $x$ . Для кожної вибірки  $x_1, \dots, x_n$  функція  $F_n^*(x)$  є не спадаюча і неперервна зліва. Її графік має ступінчастий вигляд:

– якщо усі значення  $x_1, \dots, x_n$  є різні,  $F_n^*(x) = i/n$  за  $x \in [x_{(i)}, x_{(i+1)})$ ,  $x_{(0)} = -\infty$ ,  $x_{(n+j)} = \infty$ ;

– якщо  $y_1, \dots, y_r$  – різні значення поміж  $x_1, \dots, x_n$ ,  $F_n^*(x) = 1/n \sum_{i: y_i < x} m_i$ .

Емпірична функція розподілу  $F_n^*(x)$  слугує статистичним аналогом (оцінкою) невідомої функції розподілу  $F(x)$ , яку називають *теоретичною*. Якщо  $x_1, \dots, x_n$  – вибірка обсягу  $n$  із генеральної сукупності, що має неперервний розподіл із невідомою густиною ймовірностей  $f(x) = f(x)$ , для отримання статистичного аналогу  $f(x)$  слід виконати групування даних. Воно полягає у такому:

1. За даною вибіркою  $x_1, \dots, x_n$  будують варіаційний ряд  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ .
2. Проміжок  $[x_{(1)}, x_{(n)}]$  розбивають точками  $u_0 = x_{(1)}, \dots, u_L = x_{(n)}$ :  $u_0 < u_1 < \dots < u_L$  на  $L$  інтервалів  $J_k = [u_{k-1}, u_k]$ , що не перетинаються (на практиці  $L \ll n$ ).
3. Підраховують частоти  $v_k$  попадання вибірових значень у  $k$ -й інтервал  $J_k$ .
4. Отриману інформацію заносять у таблицю, яку називають *інтервальним статистичним рядом* (табл.А.3).

Вочевидь,  $\sum_{k=1}^L v_k = n$ ,  $\sum_{k=1}^L \tilde{p}_k^* = 1$ ,  $k = \overline{1, L}$ . Тому сукупність пар  $(\tilde{u}_k, \tilde{p}_k^*)$  із  $\tilde{u}_k = 0,5(u_k + u_{k-1})$ ,  $k = \overline{1, L}$  називають іноді емпіричним законом розподілу, що

отримано за згрупованими даними. Далі у прямокутній системі координат на кожному інтервалі  $J_k$  як основі довжиною  $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$  будують прямокутник висотою  $h_k = \frac{v_k}{n\Delta u_k}$ ,  $k = \overline{1, L}$ . Ступінчасту фігуру, що отримують, називають *гістограмою*. Оскільки за великих  $n$  виконується  $\frac{v_k}{n\Delta u_k} \approx f(u_k)$ , верхню межу гістограми можна розглядати як оцінку невідомої густини  $f(x)$ . Ламан із вершинами у точках  $(\bar{u}_k, h_k)$  називається *полігоном частот* і для гладких густин є точніша оцінка, ніж гістограма.

На практиці при групуванні даних беруть інтервали однакової довжини  $\Delta u = \text{const}$ , а число інтервалів групування визначають за допомогою іт правила Стаджерса, згідно якому  $L = [1 + 3, 32 \ln n] + 1$ , або за такими рекомендаціями:

$$\text{За } n > 1000 \rightarrow L = 11 \dots 15;$$

$$n \geq 400 \rightarrow L = 10;$$

$$n \geq 200 \rightarrow L = 9;$$

$100 < n < 200$  критерій застосовують у виняткових випадках із числом інтервалів  $L = 7 \dots 9$ .

Якщо інтервали вибрано однакової довжини, їхня ширина дорівнює  $x_n - x_1/L$ . За наявності тільки згрупованих даних можна визначити аналог емпіричної функції розподілу таким чином:

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k: \bar{u}_k < x} v_n.$$

Статистичним аналогом (оцінкою) теоретичної числової характеристики

$$g = M\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

є *вибіркова (емпірична) числова характеристика*  $g^*$ , що визначається як середнє арифметичне функції  $g(x)$  для елементів вибірки  $x_1, \dots, x_n$ :

$$g^* = M\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i).$$

Зокрема,  $k$ -й вибірковий момент є величина

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ik}.$$

При  $k = 1$  величину  $\alpha_1^*$  називають вибірковим середнім і позначають  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

При  $k = 2$  величину  $\alpha_2^*$  називають вибірковою дисперсією і позначають  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Між вибіровими початковими і вибіровими центральними моментами зберігаються ті самі співвідношення, що й між теоретичними. Наприклад, справджується рівність

$$s^2 = \alpha_2^* - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2,$$

що є аналог відомої рівності  $\mu_2 = D\{X\} = a_2 - \alpha_1^2 = M\{x^2\} - (M\{x\})^2$ . Для обчислення вибірових моментів  $k$ -го порядку за згрупованими даними використовують формули:

$$\bar{\alpha}_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i^k v_i, \quad \bar{\mu}_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (\tilde{u}_i - \alpha_1^*)^k v_i.$$

Зокрема, вибірове середнє і вибірова дисперсія за згрупованими даними визначається за допомогою формул:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i v_i, \quad \bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (\tilde{u}_i - \bar{x})^2 v_i.$$

### Перевірка статистичних гіпотез

*Статистичною гіпотезою* називають будь-яке твердження про вигляд і властивості випадкових величин, що спостерігаються в експерименті. Правило, що надає можливість за наявними статистичними даними (вибірці) прийняти або відхилити гіпотезу, що припускається, називають *статистичним критерієм*.

Якщо формулюється тільки одна гіпотеза  $H_0$  і треба перевірити, чи узгоджуються статистичні дані із цією гіпотезою або ж вони її спростовують, критерії, що використовують для цього, називають *критеріями згоди*. Якщо гіпотеза  $H_0$  однозначно фіксує закон розподілу випадкових величин, що спостерігаються, вона називається простою, інакше – складною.

Нехай відносно випадкової величини  $X$ , що спостерігається, сформульовано деяку гіпотезу  $H_0$ ;  $x_1, \dots, x_n$  – вибірка обсягом  $n$ , що є реалізація випадкового вектора  $(X_1, \dots, X_n)$ , координати якого незалежні і розподілені так само, як  $X$ .

Загальний метод побудови критерію згоди для перевірки гіпотези  $H_0$  полягає у такому. Спочатку шукають статистику  $T = T(x_1, \dots, x_n)$  (випадкову величину), що характеризує відхилення емпіричного розподілу від теоретичного, розподіл якого у разі справедливості гіпотези  $H_0$  можна визначити (точно або наближено). Далі завдають деяке додатне мале число  $\alpha$ , так що подію із ймовірністю  $\alpha$  можна вважати практично неможливою у даному експерименті. Потім для заданого  $\alpha$  визначають підмножину  $K_\alpha$  у множині  $K = \{t : t = T(x_1, \dots, x_n)\}$  можливих значень статистики  $T$  так, щоб  $P[T(X_1, \dots, X_n) \in K_0/H_0] \leq \alpha$ . Критерій згоди має такий вигляд:

– якщо  $t = T(x_1, \dots, x_n)$  – значення статистики  $T(X_1, \dots, X_n)$ , що відповідає даній вибірці  $x_1, \dots, x_n$  і  $t \in K_\alpha$ , гіпотеза  $H_0$  відкидається.

– якщо  $t \notin K_\alpha$ , гіпотеза  $H_0$  приймається.

Статистика  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  називається статистикою критерію; множина  $K_\alpha$  – критичною областю для гіпотези  $H_0$ , число  $\alpha$  – рівнем значимості критерію.

### Перевірка гіпотези про вигляд розподілу

Нехай  $x_1, \dots, x_n$  – вибірка обсягу  $n$  незалежних спостережень за випадковою величиною  $X$ , відносно розподілу якої висунуто просту гіпотезу  $H_0: F_x(x) = F(x)$ , ( $F(x)$  – теоретична функція розподілу, що відповідає гіпотезі  $H_0$ ).

Найрозповсюдженішим критерієм перевірки цієї гіпотези  $H_0$  є критерій  $\chi^2$  Пірсона. Щоб скористатися критерієм  $\chi^2$ , вибіркові дані  $x_1, \dots, x_n$  слід завчасно згрупувати, тобто подати їх у вигляді інтервального статистичного ряду (див. табл. А.3).

Нехай  $J_k = [u_k, u_{k+1})$ ,  $k = \overline{1, L}$  – інтервали групування;  $v_1, \dots, v_L$  – частоти попадання вибіркових значень в інтервали  $J_1, \dots, J_L$  ( $v_1 + \dots + v_L = n$ ). Позначимо  $p_k$  теоретичну (що відповідає  $H_0$ ) ймовірність попадання випадкової величини  $X$  в інтервал

$$J_k: p_k = P(u_k \leq X < u_{k+1}) = F(u_{k+1}) - F(u_k), \quad k = \overline{1, L},$$

де  $F(u_{k+1})$ ,  $F(u_k)$  – значення теоретичної функції розподілу відповідно на правій та лівій межах  $k$ -го інтервалу гістограми, що побудована по табл. А.3.

При розрахунку приймають  $F(u_1) = 0$ ,  $F(u_{L+1}) = 1$ ,

Статистикою критерію  $\chi^2$  є величина

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^L \frac{(v_k - np_k)^2}{np_k},$$

де  $L$  – кількість інтервалів гістограми;  $v_k$  – кількість реалізацій випадкової величини, що опинилися в  $k$ -у інтервалі;  $p_k$  – ймовірність попадання випадкової величини в  $k$ -й інтервал, що обчислена для теоретичного закону розподілу;  $n$  – обсяг вибірки (кількість випадкових чисел у вибірці).

Вона характеризує відхилення емпіричної функції розподілу  $F_n^*(x)$  ( $v_k/n$  – приріст  $F_n^*(x)$  на інтервалі  $J_k$ ) від теоретичної функції розподілу  $F(x)$  ( $p_k$  – приріст  $f(x)$  на тому самому інтервалі  $J_k$ ). Оскільки відносні частоти  $v_k/n$  зближуються із ймовірностями  $p_k$  при  $n \rightarrow \infty$ , у разі справедливості  $H_0$  значення величини  $\chi^2$  не повинно суттєво відрізнятись від нуля. Тому критична область критерію  $\chi^2$  задається у вигляді  $K_\alpha = (t \geq t_\alpha)$ , де  $t = \chi^2(x_1, \dots, x_n)$  – значення величини  $\chi^2$ , що обчислене для заданої вибірки, а поріг  $t_\alpha$  визначається за заданим рівнем значимості  $\alpha$  так, щоб  $P\{\chi_n^2 \in K_\alpha / H_0\} = \alpha$ . Відшукання  $t_\alpha$  ґрунтується на тому факті (теорема Пірсона), що випадкова величина  $\chi_n^2$  має за  $n \rightarrow \infty$  граничний розподіл  $\chi^2$  із  $L - 1$  ступенем свободи  $\chi^2(L - 1)$ .

Отже, критерій згоди  $\chi^2$  полягає у такому:

1. За табл. А.3 будують інтервальный статистичний ряд.
2. Будується гістограма.
3. За виглядом гістограми формулюється гіпотеза про вигляд закону розподілу.

4. Обчислюються теоретичні ймовірності попадання випадкової величини у кожний із інтервалів гістограми за формулою  $p_k = F(u_{k+1}) - F(u_k)$ ,  $k = \overline{1, L}$ .

5. Обчислюються значення статистики  $\chi^2(x_1, \dots, x_n) = t$ .

6. За таблицею розподілу для значення  $\chi^2$ , що обчислено, та числа ступенів свободи  $n = s = L - k - 1$ , де  $k$  - кількість параметрів теоретичного закону розподілу (для експоненційного дорівнює 1, для нормального і Вейбулла - 2), за заданим рівнем значимості  $\sigma$  знаходиться за табл. А.4 поріг  $\chi_{1-\alpha, L-1}^2$ .

7. Якщо  $t \geq \chi_{1-\alpha, L-1}^2$ , гіпотезу  $H_0$  відкидають.

8. Якщо  $t < \chi_{1-\alpha, L-1}^2$ , гіпотезу  $H_0$  приймають.

Якщо випадкова величина  $X$  є дискретна,  $x_k$ ,  $k = \overline{1, L}$  - різні вибіркові значення, а  $P\{X = x_k\} = p + k$  у разі, коли гіпотеза  $H_0$  справджується, завжди можна визначити  $L$  інтервалів, що містять рівно по одному вибірковому значенню. Тому у даному випадку можна образу вважати, що  $v_k = m_k$ ,  $m_k$  - частота вибіркового значення  $x_k$ .

### А.2.7. Порядок виконання роботи

а) Отримати явну формулу для моделювання випадкової величини із законом розподілу, що задано в табл. При необхідності знайти невідомі параметри.

б) Моделювання випадкової величини  $X = \{x_i\} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  виконати за допомогою послідовності чисел  $R = \{r_i\} = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ , що отримано указаним в таблиці А.4 способом побудови випадкових чисел.

в) Обчислити критерій  $\chi^2$  при  $k = 16$  або  $k = 21$  для послідовних випадкових чисел  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  і зробити висновок про відповідність величини, що змодельована, даному закону розподілу.

г) Вивести на екран таблицю, що заповнена інтервальним статистичним рядом, гістограму, що побудована по табл. А.3, теоретичний і практичний графіки випадкових величин, що моделюються за заданим законом розподілу, значення критерію  $\chi^2$ .

Табл. А.4. Варіанти завдань

Варіант	Закон розподілу	Спосіб побудови
1	Експоненційний, $\lambda = 2$	Метод зворотних функцій, формула (А.2)
2	Нормальний, $N(0; 1)$	Метод відбору
3	Розподіл Пуассона; $\lambda = 9$	Алгоритм - ф-ла (А.16)
4	Нормальний, $(0; 0.81)$	Метод відбору
5	Нормальний, $N(0; 1)$	Апроксимація розподілу ф-ла (А.18)
6	$\Gamma$ -розподіл; $\lambda = 3$	Формула (А.25)
7	Логарифмічно-нормальний, $\sigma_y = 1, m_y = 1$	Метод відбору
8	Закон Вейбулла, $a = 3, \sigma = 2$	Метод відбору
9	$\beta$ -розподіл; $m = 2, p = 1.5$	Формула (А.22)
10	Нормальний, $N(0; 1)$	Апроксимація ф-ла (А.3)
11	$\beta$ -розподіл; $m = 5, p = 2.3$	Метод Йонка
12	Дискретний розподіл $k = 10$ ; $p = [0, 5; 0, 8; 0, 7; 0, 2; 0, 04;$ $0, 09; 0, 3; 0, 95; 0, 97; 0, 35]$	Формула (А.5)
13	Нормальний розподіл, (А.8)	Процедура 4
14	Розподіл Вейбулла $a = 2, 5, \sigma = 2, g_1 = x^{a-1}$	Процедура 3
15	Нормальний, $N(0; 1)$	Методи суперп. і відбору, (А.12)
16	Закон Релея:	Процедура 1
17	Експоненційний, $\lambda = 0, 4$	Метод зворотних функцій, ф-ла (А.2)
18	Нормальний; $N(0; 1)$	Процедура Марсальї і Брея, ф-ла (А.20)
19	$\Gamma$ -розподіл; ф-ла (А.24); $\lambda = 4$	Формула (А.25)

### А.3. Лабораторна робота № 4

Моделювання системи масового обслуговування із одним пристроєм обслуговування

1 Мета роботи

Детально розглянути моделювання системи масового обслуговування (СМО) із одним пристроєм обслуговування – касиром. Реалізувати програмно, згідно своєму варіанту, СМО, визначити задачі, показати схеми системи, що моделюється, після появи кожної події, описати результати моделювання, умови зупинки як спосіб завершення моделювання.

#### А.3.1. Теоретичні відомості.

**Постановка задачі.**

Розглянемо СМО із одним пристроєм обслуговування.

*Вхідні дані:*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – вимоги, що надійшли у систему (клієнти);  $n$  – кількість вимог;  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – час обслуговування вимоги (час обслуговування касиром клієнта);

*Проміжні дані:*  $D_1, d_2, \dots, D_n$  – затримка вимог у черзі (час перебування клієнта у черзі);  $Q(t)$  – число вимог у момент часу  $t$ ;  $T(n)$  – час, що необхідний для спостереження  $n$ -го числа затримок у черзі.

*Вихідні дані:*  $d(n)$  – очікувана затримка у черзі для кожного із  $n$ -вимог (середній час перебування клієнтів у черзі);  $q(n)$  – очікуване число вимог у черзі (середнє число клієнтів, що перебувають у черзі);  $u(n)$  – очікуваний коефіцієнт використання пристрою.

У цій системі інтервали часу між надходженням вимог  $A_1, A_2, \dots, A_n$  є незалежні й однаково розподілені випадкові величини, тобто інтервали часу між надходженням вимог мають однаковий розподіл ймовірностей. Коли вимога надходить, а пристрій вільний, одразу починається обслуговування. Час обслуговування  $S_1, S_2, \dots$  наступних вимог представлено незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, на які не впливають інтервали часу обслуговування. Якщо при надходженні вимоги пристрій зайнятий, вимога стає у чергу. Після завершення обслуговування вимоги пристрій вибирає вимогу із черги за принципом FIFO (First-In, First-Out).

Моделювання починається із стану “порожня і незайнята”, тобто коли у системі не має вимог, і пристрій обслуговується вільно. Із моменту часу, що дорівнює нулю, починається очікування надходження першої вимоги. Швидше за все це станеться після першого інтервалу часу між надходженнями  $A_1$ . Моделювання буде тривати доти, доки для визначеної кількості вимог  $n$  не скінчиться час затримки у черзі, тобто моделювання припиниться, коли обслуговується  $n$ -а вимога. Отже, час завершення моделювання є випадкова величина, яка залежить від значень випадкових змінних, що спостерігаються, що є час між надходженнями вимог і час обслуговування.

Щоб визначити *критерії оцінки роботи системи*, розглянемо три параметри їхньої характеристики.

Перш за все треба знайти очікувану *середню затримку у черзі* для кожної із  $n$



вимог, що завершили очікування за час моделювання; ця величина позначається як  $d(n)$ . Вислів "очікувана" у визначенні  $d(n)$  означає, що за заданого прогону імітаційної моделі середня затримка, що спостерігається для  $n$ -го числа вимог, залежить від спостережень випадкових змінних, що надійшли, які позначають час між надходженнями вимог та часу обслуговування.

За наступного прогону імітаційної моделі вимоги можуть надходити в інші моменти часу, і необхідний час обслуговування може бути іншим. Це призведе до отримання іншого середнього значення затримки для  $n$  вимог. Треба встановити *очікуване значення* випадкової величини. Згідно одній інтерпретації  $d(n)$  є середнє великого (фактично нескінченного) числа вимог. Після одного прогону імітаційної моделі, за якого зафіксовано затримки вимог у черзі  $D_1, D_2, \dots, D_n$  оцінкою  $d(n)$  є формула

$$\hat{d}(n) = \sum_{i=1}^n D_i/n,$$

що являє собою середній час  $n$ -го числа затримок, яке спостерігалось при моделюванні. Варто відмітити, що не виключається можливість того, що час затримки дорівнюватиме нулю у разі надходження вимоги у момент, коли система перебуває у стані незайнятості (у цій моделі точно відомо, що  $D_i = 0$ ). Час затримки, рівний нулю, враховується у середньому, оскільки велика кількість таких випадків, коли час затримки дорівнює нулю, вказує на те, що система надає відповідне обслуговування, і вихідні оцінки критеріїв мають це відображати. Одна із причин того, що береться середнє значення затримок  $D_i$ , а не розглядається кожна із окремо, полягає у тому, що їхній розподіл не буде однаковим (наприклад,  $D_1 = 0$ , але  $D_2$  може мати додатне значення), і середнє є єдиний показник часу затримки усіх вимог у черзі.  $\hat{d}(n)$  – це оцінка, що ґрунтується на вибірці розміром «1», оскільки виконується тільки один повний прогін імітаційної моделі. Із елементарної статистики відомо, що вибірка розміром 1 не має статистичної цінності.

*Другий* необхідний критерій – *очікуване середнє число вимог у черзі* (без урахування тих, що вже є на обслуговуванні), позначене як  $q(n)$ , де  $n$  вказує, що середнє обчислюється за період часу, який необхідний для спостереження  $n$ -го числа затримок, що визначають правило зупинки. Це середнє відрізняється від середнього часу затримки вимог у черзі, оскільки воно береться по відношенню до конкретного (неперервного) періоду часу, ніж по відношенню до вимог (які є дискретні). Отже, треба визначити середнє за часом число вимог у черзі. Із цією метою число вимог у момент часу  $t$  (для будь-якого числа  $t > 0$ ) позначається як  $Q(t)$ , а час, що необхідний для спостереження  $n$ -го числа затримок у черзі, як  $T(n)$ . Тоді для будь-якого часу  $t$  між 0 і  $T(n)$  значення  $Q(t)$  буде невід'ємним цілим числом. Далі, нехай  $p_i$  – очікувана частина (що має значення від 0 до 1) часу, коли  $Q(t)$  дорівнює  $i$ , тоді прийнятним визначенням  $q(n)$  буде

$$q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i.$$

Отже,  $q(n)$  є зважене середнє можливих значень  $i$  для черги довжиною  $Q(t)$ , при цьому вагові коефіцієнти є очікувана частина часу, що витрачається на кожную

із своїх можливих довжин черг. Щоб визначити  $q(n)$ , замінимо значення  $p_i$  їхніми оцінками:

$$\hat{q}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i \hat{p}_i, \tag{A.26}$$

де  $\hat{p}_i$  є частина часу, що вимірюється (а не очікується) у процесі моделювання, коли число вимог у черзі дорівнювало  $i$ . Для обчислення  $\hat{q}_i$  зручніше переписати формулу, використовуючи геометричні методи. Нехай  $T_i$  буде сумарним часом упродовж моделювання черги довжиною  $i$ , тоді  $T(n) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + \hat{p}_i = T_i/T_n$ .

$$\hat{q}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i \hat{p}_i / T(n). \tag{A.27}$$

На рис. А.6 показано можливе змінювання часу або реалізація  $Q(t)$  у системі за умови, що  $n = 6$  (кількість часових проміжків). Вимоги надходять у моменти часу, що дорівнюють 0,4; 1,6; 2,1; 3,8; 4,0; 5,6; 5,8 і 7,2. Ухід вимог (завершення обслуговування) здійснюється у моменти часу, що дорівнюють 2,4; 3,1; 3,3; 4,9 і 8,6. У моменти часу, коли  $T(6) = 8,6$ , моделювання завершується.

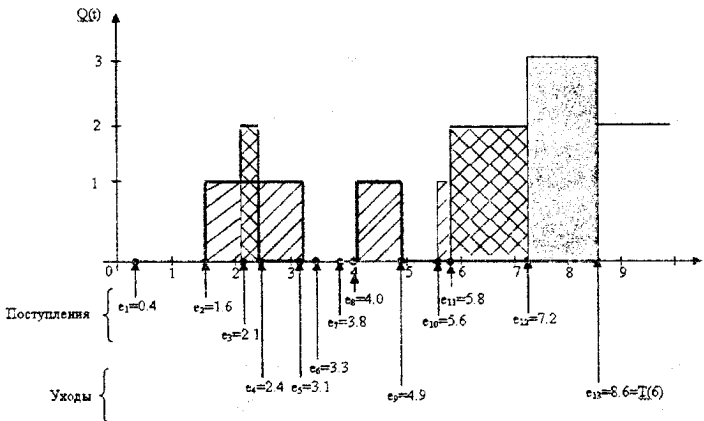
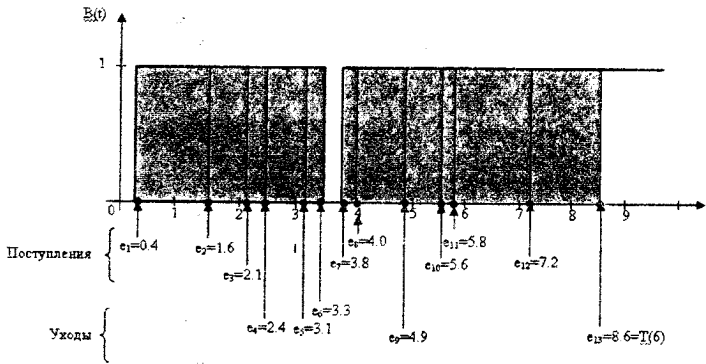


Рис. А.6. Можливе змінювання часу

Слід мати на увазі, що  $Q(t)$  не враховує вимогу, що перебуває на обслуговуванні (якщо таке є), і у період часу між 0,4 і 1,6 черга буде відсутня ( $Q(t) = 0$ ), хоча при цьому одна вимога перебуває на обслуговуванні. Те саме стосується періодів часу від 3,1 до 3,3, від 3,8 до 4,0 і від 4,9 до 5,6. Але у період часу від 3,3 до 3,8 вимоги відсутні взагалі, і система перебуває у стані незайнятості, як і у період часу від 0 до 0,4. На рис. А.7 наведено час надходження і уходу у реалізації СМО із одним пристроєм обслуговування.

Щоб обчислити значення  $\hat{q}(n)$ , спочатку треба обчислити значення  $T_i$ , які можна трактувати як інтервали часу, упродовж яких  $Q(t) = 0, 1, 2$  (довжина черги клієнтів)

Рис. А.7.  $Q(t)$ 

тощо.

$$T_0 = (1, 6 - 0, 0) + (4, 0 - 3, 1) + (5, 6 - 4, 9) = 3, 2;$$

$$T_1 = (2, 1 - 1, 6) + (3, 1 - 2, 4) + (4, 9 - 4, 0) + (5, 8 - 5, 6) = 2, 3;$$

$$T_2 = (2, 4 - 2, 1) + (7, 2 - 5, 8) = 1, 7;$$

$$T_3 = (8, 6 - 7, 2) = 1, 4.$$

( $T_i = 0, i \geq 4$ , оскільки у даній СМО черга ніколи не досягає такої довжини. Максимальна довжина черги на рис складає  $i = 3$ ). Чисельник у рівнянні (А.27)

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = (0 \cdot 3, 2) + (1 \cdot 2, 3) + (2 \cdot 1, 7) + (3 \cdot 1, 4) = 9, 9. \quad (\text{А.28})$$

Звідси оцінка середнього за часом числа вимог у черзі при даному прогоні імітаційної моделі  $\hat{q}(6) = 9, 9/8, 6 = 1, 15$ . Кожний із членів у лівій частині (А.28), що не дорівнюють нулю, відповідає заштрихованій площі на рис. А.6:  $1 \cdot 2, 3$  відповідає площі, що заштриховано діагональними лініями (у 4-х прямокутниках),  $2 \cdot 1, 7$  – площі, що заштриховано перехресними діагональними лініями (у двох прямокутниках),  $2 \cdot 1, 4$  – закрашеної жовтим площі (один прямокутник). Тобто, підсумовування у чисельнику у рівнянні (А.27) являє собою накопичену площу під кривою  $Q(t)$  між початком і кінцем моделювання. Із урахуванням того, що площа під кривою є інтеграл, можна написати:

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \int_0^{T(n)} Q(t) dt,$$

а оцінка  $q(n)$  може бути виражена як

$$\hat{q}(n) = \int_0^{T(n)} Q(t) dt / T(n). \quad (\text{А.29})$$

Вирази (А.29) і (А.27) є еквівалентні для  $\hat{q}(n)$ , але (А.29) є зручнішим, оскільки у ньому можна розрахувати як накопичення простих площ прямокутників, що з'являються упродовж часу моделювання. Крім того, вираз (А.29) передбачає середнє для неперервного  $Q(t)$ , оскільки операцію інтегрування можна тільки наближено вважати неперервним підсумовуванням.

Третій вихідний критерій оцінки роботи системи – **показник зайнятості пристрою** (зайнятість касира). Очікуваний *коефіцієнт використання* пристрою є відношення часу, коли пристрій перебуває у стані зайнятості, до часу моделювання (від 0 до  $T(n)$ ) й отже, є число між 0 та 1. Позначимо його як  $u(n)$ . За однієї реалізації моделювання оцінкою  $u(n)$  є  $\hat{u}(n)$ , що дорівнює вимірюваному відношенню часу, коли пристрій перебуває у стані зайнятості, до часу моделювання. Тепер  $\hat{u}(n)$  можна обчислити безпосередньо при моделюванні, якщо відмітити моменти часу, коли змінюються стани пристрою (із вільного на зайняте і навпаки), а потім виконати відповідні дії із віднімання та ділення. Але таку величину зручніше розглядати як середнє для неперервного часу, подібно середній довжині черги, визначивши функцію зайнятості як

$$B(t) = \begin{cases} 1 & , \text{якщо пристрій зайнятий у момент часу } t \\ 0 & , \text{якщо пристрій вільний у момент часу } t \end{cases}$$

Отже, коефіцієнт  $\hat{u}(n)$  можна виразити як долю часу, коли  $b(t) = 1$ . На рис. А.7 наведено графік функції  $B(t)$  для реалізації процесу моделювання А.6. У цьому разі отримуємо

$$\hat{u}(n) = \frac{(3,3 - 0,4) + (8,6 - 3,8)}{8,6} = 0,9. \quad (\text{А.30})$$

Результат свідчить про те, що у ході моделювання 90% часу пристрій зайнято. Але чисельник у (А.30) можна також розглядати як площу під функцією  $B(t)$ , оскільки висота  $B(t)$  завжди дорівнює або 0 або 1. Значить,

$$\hat{u}(n) = \int_0^{T(n)} B(t) dt / T(n). \quad (\text{А.31})$$

У багатьох випадках моделювання, що містять різні пристрої обслуговування, статистика коефіцієнта використання надає досить інформації для вирішення проблем нестачі ресурсів (коефіцієнт використання, що дорівнює 100%, зв'язаний із значними перенавантаженнями показників просування черги) або їхнього надлишку (низька зайнятість). Це особливо стосується випадків, коли пристроями обслуговування є такі коштовні прилади як роботи або великі комп'ютери, що задіяні в операціях по обробці даних.

Отже, три критерії оцінки роботи системи містять:

- середню затримку у черзі  $\hat{d}(n)$ ;
- середнє за часом число вимог у черзі  $\hat{q}(n)$ ;
- долю часу, коли пристрій обслуговування перебуває у стані зайнятості  $\hat{u}(n)$ .

Середня затримка вимоги у черзі є *статистикою дискретного часу*, оскільки вона визначається відносно ряду випадкових змінних  $\{D_i\}$ , які мають індекс дискретного часу  $t = 1, 2, \dots$ . Середнє за часом число вимог у черзі і доля часу, коли пристрій обслуговування перебуває у стані зайнятості, – це приклади *статистики неперервного часу*, оскільки вони визначаються відносно сукупності випадкових змінних  $\{Q(t)\}$  і  $\{B(t)\}$  відповідно, кожна із яких індексується по параметру неперервного часу  $t \in [0, \infty)$ . Отже, у цьому разі  $t$  може бути будь-яким невід'ємним числом.

### А.3.2. Процес моделювання

Розглянемо роботу СМО із одним пристроєм обслуговування. Прикладом слугуватиме касо-вий зал банку із одним робітником – касиром.

Умови задачі:

1. Пристрій обслуговування (касир) – 1 особа.
2. Касовий зал починає працювати з 8:00 ( $t = 0$ ).
3.  $\Delta T_{\text{пр}i}^{i-1} = 1 \dots 7$  (випадкове число ід 0 до 7) – час появи  $i$ -го клієнта після  $(i - 1)$ -го, виражається у хвилинах.
4.  $\Delta T_{\text{обсл}i} = 1 \dots 5$  (випадкове число від 0 до 5) – час обслуговування касиром  $i$ -го клієнта.
5. Обмеження на роботу касового зала (*точка зупинки моделі*): кількість клієнтів  $n = 10$  осіб.

**Визначення подій і змінних у системі.**

*Вхідні дані:*

$A_1, A_2, \dots, A_n$  – Вимоги, о надійшли у систему (клієнти);  $n$  – кількість вимог;  
 $T_{\text{пр}i}^{i-1}$  – час появи  $i$ -го клієнта після  $(i - 1)$ -го;  
 $T_{\text{обсл}i} = S_1, S_2, \dots, S_n$  – час обслуговування вимоги (час обслуговування касиром  $i$ -го клієнта);

$\Delta T_{\text{пр}}$  – реальний час появи клієнта ( $T_{\text{пр}i}^{i-1}$  – час появи клієнта відносно попереднього клієнта);

$\Delta T_{\text{обсл}}$  – реальний час обслуговування клієнта.

*Проміжні дані:*

$T_{\text{оч}} = \{D_i\} = D_1, D_2, \dots, D_n$  – затримка вимог у черзі (час перебування клієнта у черзі);  $D = Q(t)$  – число вимог у момент часу  $t$  (довжина черги);

$T(n)$  – час, необхідний для спостереження  $n$ -го числа затримок у черзі;

$T_{\text{поч}}$  – час початку обслуговування клієнта;

$T_{\text{прост}}$  – час простою касира.

*Вихідні дані:*

$d(n)$  – очікувана середня затримка у черзі для кожного із  $n$ -вимог (середній час перебування клієнтів у черзі);

$q(n)$  – очікуване середнє число вимог у черзі (середня кількість клієнтів, що перебувають у черзі);

$u(n)$  – очікуваний коефіцієнт використання пристрою.

Припустимо, що у системі спочатку не містилися жодні вимоги і пристрій обслуговування (касир) був вільний. Змінні стану моделі встановлюються у початкову

№ клієнта	$T_{\text{прі}}^{i-1}$	$T_{\text{обслі}}$	$T_{\text{пр}}$	$D$	$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{прост}}$		
1	1	5	8:01	8:01	8:06	0	0:00	0:01
2	1	4	8:02	8:06	8:10	1	0:04	0:00
3	6	3	8:08	8:10	8:13	1	0:02	0:00
4	6	5	8:14	8:14	8:19	0	0:00	0:01
5	2	3	8:16	8:19	8:22	1	0:03	0:00

позицію: стан пристрою обслуговування дорівнює нулю (стан незайнятості).

Для збереження даних про процес моделювання, що отримують, складається таблиця, що спочатку є порожня, але у ході моделювання вона заповнюється відомостями про поведінку системи. За допомогою даної таблиці будують графіки надходження і обслуговування вимог.

Отже, між моментом часу 0 (8:00) і моментом надходження першої вимоги (клієнта) проходить 1 хвилина ( $T_{\text{прі}}^{i-1}$ ), між надходженням першої і другої вимог – 1 хв. тощо. Час, що необхідний для обслуговування першої вимоги, дорівнює 5 хв. ( $T_{\text{обслі}}$ ), другої – 4 хв. тощо. У реальному моделюванні значення  $T_{\text{прі}}^{i-1}$  і  $T_{\text{обслі}}$  генеруються із відповідних їм розподілів ймовірностей (за потребою) у процесі моделювання. Наведені числові значення  $T_{\text{прі}}^{i-1}$  і  $T_{\text{обслі}}$  вибрано так, щоб можна було згенерувати реалізацію системи, що наведена на рис. А.8, які демонструють процеси  $Q(t)$  і  $B(t)$ .

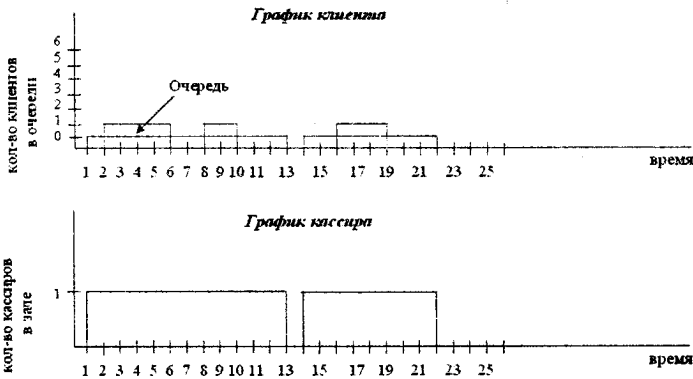


Рис. А.8. Час надходження і уходу вимог

Розглянемо процеси ініціалізації і надходжень вимог (клієнтів) і заповнимо табл. 1.

Час надходження першої вимоги дорівнює  $T_{\text{пр1}} = 8 : 00 + T_{\text{пр10}}(1\text{хв}) = 8 : 01$ . Оскільки у цей момент вимог на обслуговуванні немає, даний клієнт підходить до касира  $T_{\text{поч1}} = T_{\text{пр1}}$ . Час обслуговування клієнта складає  $T_{\text{обсл1}} = 5$  хв., після цього клієнт уходить  $T_{\text{ух1}} = T_{\text{поч1}} + T_{\text{обсл1}} = 8:01 + 0:05 = 8:06$ . Довжина черги складає 0 клі-

ентів. Часу, що витрачений у черзі, немає. Час касира складає 1 хв. (від 8:00 до 8:01). Час надходження другої вимоги дорівнює  $T_{\text{пр}2} = T_{\text{пр}1} + T_{\text{пр}210}(1\text{хв}) = 8:01 + 0:01 = 8:02$ . Оскільки у цей момент перший клієнт у касира, даний клієнт стає у чергу доки касир не вивільниться. Час обслуговування другого клієнта складає  $T_{\text{обсл}1} = 4$  хв., після того, як перший клієнт пішов  $T_{\text{ух}1} = 8:06$ , другий клієнт підходить до касира  $T_{\text{поч}2} = T_{\text{ух}1} + T_{\text{обсл}2} = 8:06 + 0:04 = 8:10$ . Це – так звані одночасні події, які мають здійснюватися в один і той же час, тобто подія надходження нової вимоги здійснюється одразу за подією закінчення обслуговування попередньої вимоги. Довжина черги складає 1 клієнт (період від 8:02 до 8:06). Час, що витрачений у черзі, складає  $T_{\text{оч}} = 0:04$  хв. Час простою касира складає 0 хв. І так до останньої  $n$ -ої вимоги заповнюється вся таблиця.

У процесі моделювання отримують такі статистичні дані:

1. Коефіцієнт зайнятості пристрою обслуговування (долю простою касира від загального часу роботи).
2. Середнє число вимог у черзі.
3. Кількість клієнтів, які відвідали касовий зал за час його роботи.
4. Протяжність періода, що моделюється.
5. Максимальний та мінімальний час перебування клієнта у черзі.
6. Максимальна довжина черги.
7. Середній час перебування клієнта у черзі.
8. Максимальний та мінімальний час роботи пристрою обслуговування (касира) без перерви.
9. Середній час перебування клієнта у залі.

## ДОДАТОК В

---

### Програми реалізації алгоритмів моделювання систем

---

#### ***В.1. Моделювання системи масового обслуговування***

```
unit MO; interface
uses
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,
Graphics, Controls, Forms, Dialogs, StdCtrls, Generator;
type
TForm1 = class(TForm) Label1: TLabel; Edit1: TEdit; Label2: TLabel;
Edit2: TEdit;
Label3: TLabel;
Edit3: TEdit;
Button1: TButton; Label4: TLabel; Edit4: TEdit; Label5: TLabel;
Edit5: TEdit;
Label6: TLabel;
Edit6: TEdit;
Edit7: TEdit;
Label7: TLabel;
Edit8: TEdit; Label8: TLabel; Button2: TButton; Edit9: TEdit; Edit10: TEdit;
Edit11: TEdit; Edit12: TEdit; Edit13: TEdit; Edit14: TEdit; Edit15: TEdit;
procedure Edit1Change(Sender: TObject);
procedure Edit2Change(Sender: TObject);
procedure Edit3Change(Sender: TObject);
  procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure Edit7Change(Sender: TObject);
procedure Button2Click(Sender: TObject); private
TimeMod: Double; { Private declarations }
TimeServ: Double;
TimeEnt: Double;
TimeCurrent: Double;
```



```

NumServ:Double;
NumAll: Double;
NumUnServ:Double;
MaxQue: Integer;
procedure LoadAndDrawPicture(const FileName:String);
procedure EventEnter(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
procedure EventExit(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
public
{ Public declarations } end;
var
Form1: TForm1; implementation {R *.dfm}
procedure TForm1.Edit1Change(Sender: TObject); begin
TimeMod:=StrToFloat(Edit1.Text); end;
procedure TForm1.Edit2Change(Sender: TObject); begin
TimeEnt:=StrToFloat(Edit2.Text);
end;
procedure TForm1.Edit3Change(Sender: TObject); begin
TimeServ:=StrToFloat(Edit3.Text);
end;
procedure TForm1.LoadAndDrawPicture(const FileName:String);
var Picture: TPicture; begin
Picture:=TPicture.Create; Picture.LoadFromFile(FileName);
Canvas.StretchDraw(Classes.Rect(80,200,width,height),Picture.Graphic);
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var Device,sob,CurQue:Integer;
TimeExit,TimeAct,min,AverageQueue,AverageDevice: Double; begin
Randomize;
//Введення початкових даних TimeCurrent:=0;
NumServ:=0; NumUnServ:=0; NumAll:=0;
Device:=0; TimeExit:= TimeMod+1; TimeAct:=5;
min:=TimeAct; sob:=1; CurQue:=0; AverageQueue:=0;
AverageDevice:=0; while TimeCurrent<TimeMod do begin
// Пошук моменту найближчої події min:=TimeExit; sob:=2;
if TimeAct<min then
begin min:=TimeAct;sob:=1; end;
//Збирання статистичних даних про довжину черги
AverageQueue:= AverageQueue+CurQue*(min-TimeCurrent);
AverageDevice:= AverageDevice+Device*(min-TimeCurrent);
//Просування часу TimeCurrent:=min;
if sob=1 then

```

```
EventEnter(Device, TimeExit, TimeAct, CurQue); if sob=2 then
EventExit(Device, TimeExit, TimeAct, CurQue);
//Виведення результатів моделювання Application.ProcessMessages;
Edit4.Text:=FloatToStr(TimeCurrent); Edit14.Text:=FloatToStr(NumServ);
Edit13.Text:=FloatToStr(NumUnServ);
Edit12.Text:=FloatToStr(AverageQueue/TimeMod);
Edit11.Text:= IntToStr(CurQue); Edit10.Text:= IntToStr(Device); end;
Edit5.Text:=FloatToStr(NumUnServ/(NumServ+NumUnServ));
Edit6.Text:= FloatToStr(AverageDevice/TimeMod);
Edit8.Text:=Edit12.Text;
Edit9.Text:=FloatToStr(NumAll); Edit15.Text:= Edit6.Text; end;
//Подія "надходження вимоги до СМО"
procedure TForm1.EventEnter(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
begin
if aDevice=0 then begin
aDevice:=1;
aTimeExit:=TimeCurrent+GenExp(TimeServ); end
else if aCurQue<MaxQue then
aCurQue:=aCurQue+1 else NumUnServ:=NumUnServ+1;
aTimeAct:=TimeCurrent+GenExp(TimeEnt); NumAH:=NumAH+1; end;
//Подія "закінчилась обробка вимоги в каналі СМО"
procedure TForm1.EventExit(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
begin
NumServ:=NumServ+1; if aCurQue>0 then begin
aCurQue:=aCurQue-1; aDevice:=1;
aTimeExit:=TimeCurrent+GenExp(TimeServ); end
else begin
aDevice:=0;
aTimeExit:=TimeMod+1; end; end;
procedure TForm1.Edit7Change(Sender: TObject); begin
MaxQue:=StrToInt(Edit7.Text); end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); begin
LoadAndDrawPicture('SMO3.bmp');
end;
end.
//Функції генераторів випадкових чисел
unit Generator; interface
function GenExp(parametr: Double): Double;
function GenNorm(mean: Double; stdev: Double): Double;
function GenUnif(left: Double; righth: Double): Double;
implementation
```

```

Function GenExp(parametr: Double): Double; begin
result:=-parametr*ln(random); end;
Function GenNorm(mean: Double; stdev: Double): Double; var i: integer;
sum: double; begin sum:=0; for i:=1 to 12 do sum:=sum+random;
result:=stdev*sum+mean; end;
Function GenUnif(left: Double; righth: Double): Double; begin
result:=left+(righth-left)*random; end; end.

```

Спосіб, орієнтований на події, при побудові алгоритмів імітації дискретних систем засобами універсальних мов програмування виявляється найефективнішим.

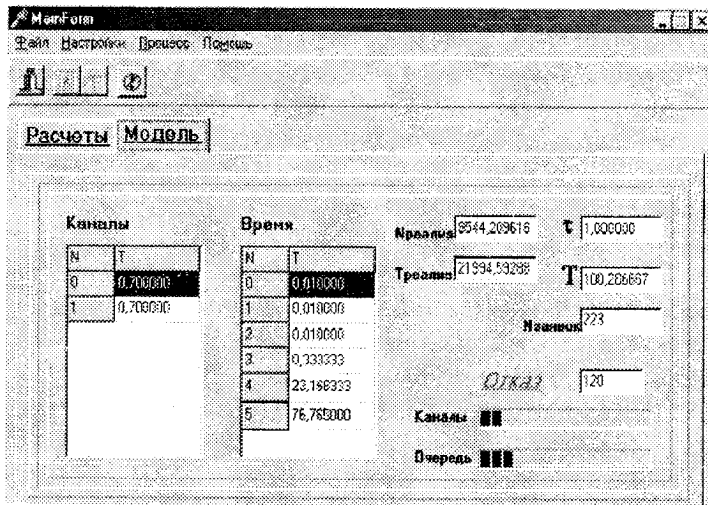


Рис. В.1. Результати моделювання

## В.2. Многоканальна СМО із очікуванням

```

program mazdai;
uses crt;
VAR que:array[1..100] of integer;
    chan:array[1..100] of integer;
    tsk:array[1..100] of real;
    tq,ts:real;
    nq,ns:integer;
    m,a,b:integer;
    niu,lambda,qua,i,tnext:real;
    time:integer;
    j:integer;

```

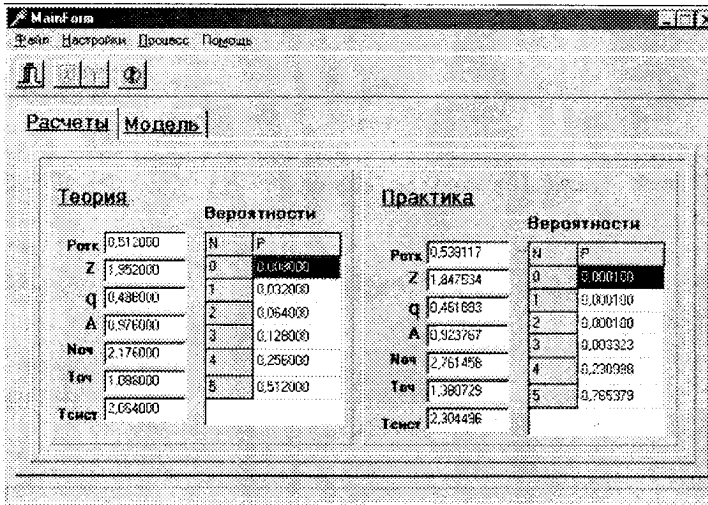


Рис. В.2. Результати моделювання

```

flg:boolean;
tm:integer;

```

```

procedure compressque(ind:integer);
var i:integer;

```

```

begin
  i:=ind;
  while (i<100) do
  begin
    que[i]:=que[i+1];
    i:=i+1;
  end;
  writeln('query compressed');
end;

```

```

function add2chan(ind:integer):boolean;
var flag:boolean;
  i:integer;

```

```

begin
  flag:=true;
  i:=1;
  while ((i<=m)and flag) do
  begin

```

```
if chan[i]=0 then
begin
  tsk[ind]:=0;
  chan[i]:=ind;
  flag:=false;
  writeln('task ',ind,' added to channel ',i);
end;
i:=i+1;
end;
add2chan:=not(flag);
end;
```

```
function canstop(t:real;par:real):boolean;
var x:real;
    y:real;
begin
  x:=1-exp(-par*t);
  y:=random;
  if y<x then canstop:=true
  else canstop:=false;
end;
```

```
function add2sys(ind:integer):boolean;
var flag:boolean;
    i:integer;
begin
  flag:=true;
  i:=1;
  while ((i<=m)and flag) do
  begin
    if chan[i]=0 then
    begin
      tsk[ind]:=0;
      chan[i]:=ind;
      flag:=false;
      ns:=ns+1;
      writeln('task ',ind,' added to channel ',i);
    end;
    i:=i+1;
  end;
  if flag then
  begin
    i:=1;
```

```
while ((i<=100)and flag) do
begin
  if que[i]=0 then
  begin
    que[i]:=ind;
    flag:=false;
    nq:=nq+1;
    ns:=ns+1;
    writeln('task ',ind,' added to query');
  end;
  i:=i+1;
end;
end;
if flag then
begin
  writeln('query overflow!!!');
  halt(0);
end;
end;

procedure processchan;
var i:integer;
begin
  for i:=1 to m do
  begin
    if chan[i]<>0 then
    if canstop(tsk[chan[i]],lambda) then
    begin
      writeln('task ',chan[i],' left the channel ',i);
      tsk[chan[i]]:=-1;
      chan[i]:=0;
    end
    else
    begin
      ts:=ts+qua;
      tsk[chan[i]]:=tsk[chan[i]]+qua;
    end;
  end;
end;

procedure processque;
var i:integer;
begin
```

```

for i:=1 to 100 do
begin
  if que[i]<>0 then
    if add2chan(que[i]) then compressque(i);
end;

for i:=1 to 100 do
begin
  if que[i]<>0 then
    if canstop(tsk[que[i]],niu) then
      begin
        writeln('task ',que[i],' left the query');
        tsk[que[i]]:=-1;
        que[i]:=0;
        compressque(i);

      end
    else
      begin
        tq:=tq+qua;
        tsk[que[i]]:=tsk[que[i]]+qua;
      end;
end;
end;

begin
  randomize;
  writeln('enter a and b');
  readln(a,b);
  writeln('enter niu and lambda');
  readln(niu,lambda);
  writeln('enter number of channels');
  readln(m);
  writeln('enter quanting time');
  readln(qua);
  writeln('enter time of examining');
  readln(time);
  for j:=1 to 100 do
    tsk[j]:=-1;

  i:=0;
  while(i<time) do      {main time cycle}
  begin

```

```
writeln(' > time ',i:3:4,' of ',time);
delay(500);

{readkey;}

if i=0 then          {first time}
begin
  tsk[1]:=0;
  add2sys(1);
  tnext:=random*(b-a)+a;
  writeln('next task should appear at ',tnext:4:4);
end

else
begin
  if i>tnext then {add new task}
  begin
    tnext:=i+random*(b-a)+a;
    writeln('next task should appear at ',tnext:4:4);
    flg:=true;
    j:=1;
    while((j<=100) and flg) do
    begin
      if tsk[j]=-1 then
      begin
        tsk[j]:=0;
        add2sys(j);
        flg:=false;
      end;
      j:=j+1;
    end;
    if flg then
    begin
      writeln('system overflow!!!');
      halt(0);
    end;
  end;

  processchan;
  processque;
end;
i:=i+qua;
end;
```



```
if nq<>0 then
  writeln('average time query ',tq/nq:4:4)
else
  writeln('no tasks were in query');
  writeln('average time system ',ts/ns:4:4);
end.

unit LabUnit;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics,
  Controls, Forms, Dialogs,
  StdCtrls,Math, ComCtrls, Buttons, ExtCtrls, Menus, Grids;

type
//Eps = ('0.80','0.85','0.90','0.96',0.97,0.98,0.99,0.995,0.999,0.9995);
Vec = array[0..100] of real;
TMainForm = class(TForm)
  MainMenu: TMainMenu;
  TurningInitial: TMenuItem;
  PropertiesInitial: TMenuItem;
  ProcessInitial: TMenuItem;
  StepInitial: TMenuItem;
  RunInitial: TMenuItem;
  FileInitial: TMenuItem;
  ExitInitial: TMenuItem;
  Panel1: TPanel;
  StepSB: TSpeedButton;
  RunSB: TSpeedButton;
  ExitSB: TSpeedButton;
  StatusBar1: TStatusBar;
  ResetSpeedButton: TSpeedButton;
  N1: TMenuItem;
  N2: TMenuItem;
  PageControl: TPageControl;
  Teor: TTabSheet;
  Modal: TTabSheet;
  Panel2: TPanel;
  Bevel3: TBevel;
  Bevel2: TBevel;
  Label2: TLabel;
```

```
Label3: TLabel;  
Label4: TLabel;  
Label5: TLabel;  
L11: TLabel;  
Label7: TLabel;  
Label8: TLabel;  
Label9: TLabel;  
StaticText1: TStaticText;  
TeorSGrid: TStringGrid;  
NochEd: TEdit;  
PotkEd: TEdit;  
ZEd: TEdit;  
qEd: TEdit;  
AEd: TEdit;  
TochEd: TEdit;  
TsysEd: TEdit;  
Panell3: TPanel;  
Bevel4: TBevel;  
Bevel1: TBevel;  
Label1: TLabel;  
Label6: TLabel;  
Label11: TLabel;  
Label10: TLabel;  
OtkazLabel: TLabel;  
OcheredPBar: TProgressBar;  
KanalPBar: TProgressBar;  
TimeSGrid: TStringGrid;  
TauEd: TEdit;  
KanalSGrid: TStringGrid;  
OtkEdit: TEdit;  
Bevel7: TBevel;  
Label12: TLabel;  
Label13: TLabel;  
Label14: TLabel;  
Label15: TLabel;  
Label16: TLabel;  
Label17: TLabel;  
Label18: TLabel;  
Label19: TLabel;  
StaticText2: TStaticText;  
PraktSGrid: TStringGrid;  
PrNochEd: TEdit;  
PrPOtkEd: TEdit;
```

```

PrZEd: TEdit;
PrqEd: TEdit;
PrAEd: TEdit;
PrTochEd: TEdit;
PrTsysEd: TEdit;
CurTimeEd: TEdit;
Label20: TLabel;
N3: TMenuItem;
ResetInitial: TMenuItem;
NrEd: TEdit;
Label21: TLabel;
NZayavEd: TEdit;
Label22: TLabel;
Label23: TLabel;
Label24: TLabel;
Label25: TLabel;
TRealizEd: TEdit;
procedure Button2Click(Sender: TObject);
procedure StepInitialClick(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
procedure PropertiesInitialClick(Sender: TObject);
procedure ExitInitialClick(Sender: TObject);
procedure ExitSBClick(Sender: TObject);
procedure StepSBClick(Sender: TObject);
procedure ResetSpeedButtonClick(Sender: TObject);
procedure StepSBMouseUp(Sender: TObject; Button: TMouseButton;
  Shift: TShiftState; X, Y: Integer);
procedure N2Click(Sender: TObject);
procedure RunSBClick(Sender: TObject);
procedure ResetInitialClick(Sender: TObject);
procedure RunInitialClick(Sender: TObject);
private
procedure Ver_PO;
procedure VecToGrid(Input: Vec; Grid: TStringGrid; MaxY: integer);

  { Private declarations }
public
L:real;           //Інтенсивність надходження заявок
M:real;           //Інтенсивність обслуговування
nKanal:integer;  //Кількість каналів
DlinOch:integer; //Дожина черги

```

```

NZayav:integer;           //Кількість заявок
Psi:real;

NoCh:real;                //Середнє число заявок у черзі
P_Otkaz:real;            //Ймовірність відмови
Sred_Ch_Zanyt_Kanal:real; //Середнє число зайнятих каналів
Q:real;                  //Віносна пропускання спроможність
Ap_Prop_Sposob:real;     //Абсолютна пропускання спроможність
T_OZh:real;              //Середній час очікування
T_System:real;           //Середній час перебування у системі

N_Sv:integer;            //Номер вільного місця у черзі
N_Sv_Chanel:integer;     //Номер вільного каналу
Num_Zan_Chanel:integer;  //Кількість зайнятих каналів
    P:Vec;                //Масив теоретичних ймовірностей
    P_Pract:vec;          //Масив практичних ймовірностей
Chanel:Vec;              //Масив каналів
Ochered:Vec;             //Масив черги
Time:Vec;                //Масив часу обробки подій
    OtkFlag:boolean ;    //Флаг відмови
MaxTime:real;            //Межа часу обслуговування
Epsilon:real;            //Точність
TempTime:real;           // Поточний час
Nr:real;                 //Число реалізацій
UrDov:real;              //Рівень довіри у межах 0.80...0.9999
Ni,NO,Mu,Lam,mm,Number:integer;
function Step(arg:real;st:integer):real; //Піведення у степінь
function Factorial(Arg:integer):integer; //Факторіал
function Search(Index:real):integer;     //Пошук у таблиці довіри
function MyRandom:real;                   //Генератор випадкових чисел

procedure Ver;                             //Підрахунок теоретичних ймовірностей
procedure SrChislZayav(P_0:real);          //Підрахунок середнього числа заявок
procedure SysModal;                         //Моделювання СМО
procedure Rotate;                           //Зсув черги
procedure TeorRasch;                        //Позрахунок теоретичних параметрів системи
procedure Rasch(P_Array:Vec);
procedure PraktRasch;                       //Позрахунок практичних параметрів системи

procedure Reset;                            //Сброс розрахунків
procedure NumRealiz(Index:real);           //Підрахунок числа реалізацій
procedure Zan_Kanal(tau:real);             //Підрахунок зайнятих каналів

```

```

    { Public declarations }
end;

var
    MainForm: TMainForm;
const
    //Значення зворотної функції Лапласа
    QQ:array[1..2,1..12] of real = ((0.80,0.85,0.90,0.95,0.96,0.97,0.98,
        0.99,0.995,0.999,0.9995,0.9999),(1.64,
        2.08,2.71,3.84,4.21,4.49,5.43,6.61,7.9,10.9,12.25,15.2));
implementation

uses PropertDlg, About;

//-----//
function TMainForm.Factorial;
    var
        i:integer;
        Temp:integer;
    begin
        Temp:=1;
        for i:=1 to Arg do
            Temp:=Temp*i;
        Factorial:=Temp;
    end;
//-----//
function TMainForm.Step;
    var
        i:integer;
        Temp:real;
    begin
        Temp:= 1;
        for i:=1 to st do
            Temp:=Temp*arg;
        // Step:=exp(st*Ln(arg));
        Step:=Temp;
    end;
//-----//
function TMainForm.Search;
    var
        i:integer;
    begin
        Search:=-1;

```

```
for i:=1 to 12 do
begin
if QQ[1,i]=Index then
Search := i;
end;
end;
//-----//
procedure TMainForm.VecToGrid;
var
i:integer;
begin
for i:=0 to MaxY do
begin
Grid.Cells[1,i+1]:=FloatToStrF(Input [i],ffFixed,10,6);
Grid.Cells[0,i+1]:= IntToStr(i);
end;
Grid.Repaint;
Grid.RowCount :=MaxY+1;
end;
//-----//
procedure TMainForm.SrChislZayav;
var
i:integer;
begin
NoCh:=0;
for i:=1 to DlinOch do
begin
NoCh := NoCh+i*Step((psi/nKanal),i-1);
end;
NoCh:=NoCh*(Step(psi,nKanal+1)*P_0)/(nKanal*Factorial(NKanal));
//NoCh среднее число заявок в очереди
end;
//-----//
procedure TMainForm.Ver_P0;
var
i,k:integer;
begin
k:=1;
p[0]:=0;
for i:=0 to nKanal+DlinOch do
begin
if i<= nKanal then
```

```

    P[0]:=P[0]+(Step(psi,i)/Factorial(i))
  else
    begin
      P[0]:=P[0]+Step(psi,i)/(Factorial(nKanal)*Step(nKanal,k));
      k:=k+1;
    end;
  end;
  P[0]:=1/P[0];
end;
//-----//
procedure TMainForm.Ver;
var
  i,k:integer;
BEGIN
  Ver_P0;
  k:=1;
  for i:=1 to nKanal+Dlin0ch do
    begin
      if i<= nKanal then
        P[i]:=(Step(psi,i)/Factorial(i))*P[0]
      else
        begin
          P[i]:=(Step(psi,i)/(Factorial(nKanal)*Step(nKanal,k)))*P[0];
          k:=k+1;
        end;
    end;
  end;
END;
//-----//
procedure TMainForm.Rotate; //Зсув черги
var
  i:integer;
begin
  for i:=0 to N_Sv-1 do
    Ochered [i]:=Ochered [i+1];
  Ochered [N_Sv]:=0;
  N_Sv:=N_Sv-1;
end;
//-----//
function TMainForm.MyRandom;
var
  TempReal:real;
begin

```

```

{ Ni:= Round(Mu*Step(Lam,Number-1)/Lam-1);
  Ni:= Ni mod mm;
  Ni:=Round(Step(Lam,Number))*NO+Ni;
  NO:=Ni;
  Number:=Number+1;
  TempReal:=Ni-(Ni div 1000)*1000;
  MyRandom:=Abs(TempReal/1000);
  // MyRandom:= Abs((Ni*pi-Int(Ni*pi))*2*L);}
  MyRandom:=random(Round(2*L));
end;
//-----//
procedure TMainForm.SysModal;
var
  i:integer;
  // NTemp:integer;
  tau:real;
  LTemp:real;
  flag :boolean;
  Dtau:real;
  TempTau:real;
begin
  flag:=true;
  // NTemp:=0;
  Dtau:=0.002*1/M;
  tau:=0.01;//*1/L;
  LTemp := MyRandom;
  if LTemp<> 0 then
    tau := 1/LTemp;

  Dtau:=0.1*1/M;
  if 0.1*tau < Dtau then
    Dtau:=0.05*tau;
  TempTau:=0;
  if Time[0]=0 then Time[0]:= tau;

  TempTime:=TempTime+tau;
  //!!!!!!
  TauEd.Text:= FloatToStrF(tau,ffFixed,10,6);//tau
  TauEd.Repaint;
  CurTimeEd.Text:=FloatToStrF(TempTime,ffFixed,10,6);//TempTime
  CurTimeEd.Repaint;
  while TempTau <= tau do
    begin

```



```

for i:=0 to N_Sv_Chanel-1 do      //Перевірка зайнятих каналів
begin
  Chanel[i]:=Chanel[i] - Dtau;
  if(Chanel[i] <=0) then          //Канал вільний?
  begin
    if (N_Sv > 0 ) then          //Є черга?
      begin
        Chanel[i]:= 1/M; //+Chanel[i];
        Rotate;                //зсув черги
        if (N_Sv < DlinOch) and flag then //Є місце у черзі?
          begin
            Ochered [N_Sv]:=L;
            N_Sv:=N_Sv+1;
            flag:=false;
          end;
        end
      else
        if flag then
          begin
            Chanel[i]:= 1/M;
            flag:=false;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
  if (N_Sv_Chanel < nKanal) and flag then
  begin
    Chanel[N_Sv_Chanel]:= 1/M;
    N_Sv_Chanel:=N_Sv_Chanel+1;
    flag:=false;
  end;
  if (N_Sv < DlinOch) and flag then //Є місце у черзі?
  begin
    Ochered [N_Sv]:=L;
    N_Sv:=N_Sv+1;
    flag:=false;
  end;
  OtkFlag:= flag;
  Num_Zan_Chanel:=0;
  // N_Zan_Och:=0;

  TempTau:=TempTau+Dtau;
  Zan_Kanal(Dtau);

```

```
KanalPBar.Position:=0;
KanalPBar.Step:= Num_Zan_Chanel;
KanalPBar.Stepit;

OcheredPBar.Position:=0;
OcheredPBar.Step:= N_Sv;
OcheredPBar.Stepit;

VecToGrid(Chanel,KanalSGrid,nKanal);
VecToGrid(Time,TimeSGrid,nKanal+DlinOch+1);

end;
if OtkFlag then
begin
OtkazLabel.Visible:=true;
OtkEdit.Text:=IntToStr(StrToInt(OtkEdit.Text)+1);
OtkEdit.Repaint;
end;
NZayavEd.Text:=IntToStr(StrToInt(NZayavEd.Text)+1);
NZayavEd.Repaint;
end;
//-----//
procedure TMainForm.Zan_Kanal;
var
i:integer;
begin
Num_Zan_Chanel:=0;
for i:=0 to nKanal do //N_SV_Chanel-1
if Chanel[i] >0 then
Num_Zan_Chanel:=Num_Zan_Chanel+1;

if (N_Sv = 0) //and (Num_Zan_Chanel > 0)
then
Time[Num_Zan_Chanel]:=Time[Num_Zan_Chanel]+tau
else
Time[Num_Zan_Chanel+N_Sv]:=Time[Num_Zan_Chanel+N_Sv]+tau;

end;
//-----//
procedure TMainForm.Rasch;
begin
```

```

Q:=1-P_Otkaz;
Ap_Prop_Sposob:=L*Q;

// if Noch =10 then L:=2;
T_OZh := Noch/L;
T_System:= T_OZh+Q*1/M;

end;
//-----//
procedure TMainForm.TeorRasch;
begin
  N_Sv:=0;
  Psi:=L/M;
  Ver;
  SrChislZayav(P[0]);
  P_Otkaz:= P[nKanal+DlinOch];
  Sred_Ch_Zanyt_Kanal:= psi*(1-(Step(Psi,nKanal+DlinOch)/(
    Step(nKanal,DlinOch)*Factorial(nKanal)))*P[0]);

  Rasch(P);

  VecToGrid(P,TeorSGrid,nKanal+DlinOch+1);
  NochEd.Text:= FloatToStrF(NoCh,ffFixed,10,6);
  PotkEd.Text:= FloatToStrF(P_Otkaz,ffFixed,10,6);
  ZEd.Text:= FloatToStrF(Sred_Ch_Zanyt_Kanal,ffFixed,10,6);
  qEd.Text:= FloatToStrF(Q,ffFixed,10,6);
  AEd.Text:= FloatToStrF(Ap_Prop_Sposob,ffFixed,10,6);
  TochEd.Text:= FloatToStrF(T_OZh,ffFixed,10,6);
  TsysEd.Text:= FloatToStrF(T_System,ffFixed,10,6);

end;
//-----//
procedure TMainForm.Button2Click(Sender: TObject);
  var i:integer;
begin
  N_Sv_Chanel:=0;
  for i:=1 to 10 do
  begin
    SysModal;
    KanalPBar.Position:=0;
    KanalPBar.Step:= N_Sv_Chanel-1;
  end;
end;

```

```
KanalPBar.Stepit;
end;
  N_Sv_Chanel:=0;
end;
//-----//
procedure TMainForm.NumRealiz;
  var
    TReal:real;
begin
  Nr:= P_Otkaz*(1-P_Otkaz)*QQ[2,Search(Index)]/(Epsilon*Epsilon);
  TReal:= Nr*StrToFloat(PrTsysEd.Text);
  TRealizEd.Text:=FloatToStrF(TReal,ffFixed,10,6);
  NrEd.Text:=FloatToStrF(Nr,ffFixed,10,6);
end;
//-----//
procedure TMainForm.StepInitialClick(Sender: TObject);
begin
  StepSBClick(Sender);
end;
//-----//
procedure TMainForm.FormCreate(Sender: TObject);
begin
  TeorSGrid.Cells[0,0]:= 'N';
  TeorSGrid.Cells[1,0]:= 'P';

  PraktSGrid.Cells[0,0]:= 'N';
  PraktSGrid.Cells[1,0]:= 'P';

  KanalSGrid.Cells[0,0]:= 'N';
  KanalSGrid.Cells[1,0]:= 'T';

  TimeSGrid.Cells[0,0]:= 'N';
  TimeSGrid.Cells[1,0]:= 'T';

  //Параметри системи

  L:= 12;
  M:=4;
  nKanal:=4;
  DlinOch:=0;
  NZayav:=DlinOch+nKanal;
```

```
TempTime:=0;
MaxTime:= 100; //Межа часу обслуговування
Epsilon:=0.02; //Точність
UrDov:=0.97;
TeorRasch;
//NO, Mu, Lam, mm
NO:=5;
Mu:=7;
Lam:=24;
mm:=3;
Number:=0;
end;
//-----//
procedure TMainForm.PropertiesInitialClick(Sender: TObject);
begin
  if PropertiasDlg.ShowModal = mrOk then
    begin
      L:=StrToFloat(PropertiasDlg.LambEd.Text);
      M:=StrToFloat(PropertiasDlg.MuEd.Text);
      nKanal:= StrToInt(PropertiasDlg.nEd.Text);
      DlinOch:=StrToInt(PropertiasDlg.mEd.Text);
      MaxTime:=StrToFloat(PropertiasDlg.TMaxEd.Text);
      Epsilon:=StrToFloat(PropertiasDlg.EpsEd.Text);
      UrDov:=StrToFloat(PropertiasDlg.DoverEd.Text);
      Reset;
      TeorRasch;
    end;
end;
//-----//
procedure TMainForm.ExitInitialClick(Sender: TObject);
begin
  Close;
end;
//-----//
procedure TMainForm.ExitSBClick(Sender: TObject);
begin
  Close;
end;
//-----//
procedure TMainForm.StepSBClick(Sender: TObject);
begin
```

```
if TempTime <=MaxTime then
  begin
    SysModal;
  end
else
  begin
    StepSb.Enabled:=false;
    RunSb.Enabled:=false;
    StepInitial.Enabled:=false;
    RunInitial.Enabled:=false;
    PraktRasch;
    NumRealiz(UrDov);
  end;
end;
//-----//
procedure TMainForm.ResetSpeedButtonClick(Sender: TObject);
begin
  Reset;
end;
//-----//
procedure TMainForm.Reset;
  var
    i:integer;
begin
  StepSb.Enabled:=true;
  RunSb.Enabled:=true;
  StepInitial.Enabled:=true;
  RunInitial.Enabled:=true;
  N_Sv_Chanel:=0;
  N_Sv:=0;
  TempTime:=0;
  for i:=0 to 100 do
    begin
      Chanel[i]:=0;
      Ochered[i]:=0;
      Time[i]:=0;
      P_Pract[i]:=0;
    end;
  NrEd.Text:='0';
  TRealizEd.Text:='0';
  NZayavEd.Text:='0';
  CurTimeEd.Text:='0';
  TauEd.Text:='0';
```

```

OtkEdit.Text:='0';
OtkazLabel.Visible:= false;
KanalPBar.Position:=0;
KanalPBar.Step:= 0;
KanalPBar.Stepit;

OcheredPBar.Position:=0;
OcheredPBar.Step:= 0;
OcheredPBar.Stepit;
    VecToGrid(Chanel,KanalSGrid,nKanal);
    VecToGrid(Time,TimeSGrid,nKanal+DlinOch+1);
end;
//-----//
procedure TMainForm.StepSBMouseUp(Sender: TObject;
    Button: TMouseButton;
    Shift: TShiftState; X, Y: Integer);
begin
    if OtkFlag then
        OtkazLabel.Visible:= false;
end;
//-----//
procedure TMainForm.N2Click(Sender: TObject);
begin
    AboutBox.Show;
end;
//-----//
procedure TMainForm.PraktRasch;
    var
        i:integer;
        TTime:real;
begin
    TTime:=0;
    for i:=0 to nKanal+DlinOch do
        TTime:=TTime+Time[i];
    for i:=0 to nKanal+DlinOch do
        P_Pract[i]:=Time[i]/TTime;
NOch:=0;
    for i:=nKanal+1 to DlinOch + nKanal+1 do
        NOch:=NOch + P_Pract[i]*(i-nKanal);
    P_Otkaz:= StrToInt(OtkEdit.Text)/StrToInt(NZayavEd.Text);
    Sred_Ch_Zanyt_Kanal:= psi*(1-P_Otkaz);

```

```
Rasch(P_Pract);

VecToGrid(P_Pract,PraktSGrid,nKanal+DlinOch+1);
PrNochEd.Text:= FloatToStrF(NoCh,ffFixed,10,6);
PrPotkEd.Text:= FloatToStrF(P_Otkaz,ffFixed,10,6);
PrZEd.Text:= FloatToStrF(Sred_Ch_Zanyt_Kanal,ffFixed,10,6);
PrqEd.Text:= FloatToStrF(Q,ffFixed,10,6);
PrAEd.Text:= FloatToStrF(Ap_Prop_Sposob,ffFixed,10,6);
PrTochEd.Text:= FloatToStrF(T_OZh,ffFixed,10,6);
PrTsysEd.Text:= FloatToStrF(T_System,ffFixed,10,6);

end;
//-----//
procedure TMainForm.RunSBClick(Sender: TObject);
begin
  OtkazLabel.Visible:= true;
  OtkazLabel.Repaint;
  while (TempTime <=MaxTime) do
    begin
      SysModal;
    end;
  StepSb.Enabled:=false;
  RunSb.Enabled:=false;
  StepInitial.Enabled:=false;
  RunInitial.Enabled:=false;

  PraktRasch;
  NumRealiz(UrDov);
end;
//-----//
procedure TMainForm.ResetInitialClick(Sender: TObject);
begin
  Reset;
end;
//-----//
procedure TMainForm.RunInitialClick(Sender: TObject);
begin
  RunSBClick(Sender);
end;
end.
```



### **В.3. Імітаційне моделювання мереж масового обслуговування**

Алгоритм імітації мережі масового обслуговування складається з опису елементів моделі, опису стану елементів моделі та опису множини подій.

Елементами мережі масового обслуговування являються:

- вхідний потік,
- система масового обслуговування,
- зв'язок.

Вхідний потік описується інтервалом надходження вимог у мережу, що може бути випадковою або детермінованою величиною, а також номером СМО, до якої надходить вимога. Стан вхідного потоку описується моментом часу надходження наступної вимоги у мережу масового обслуговування. Якщо інтервал часу надходження вимог до мережі є випадкова величина з відомим законом розподілу, то для її розрахунку будується генератор випадкових чисел.

Система масового обслуговування, що складається з паралельно з'єднаних пристроїв та черги перед ними, описується кількістю пристроїв та обмеженням на максимальну довжину черги. Черга характеризується обмеженням на максимальну кількість вимог, що може міститись у ній, та, можливо, правилом упорядкування вимог у черзі (FIFO, LIFO, пріоритети). Стан черги описується кількістю вимог, що містяться у черзі, та, можливо, порядком їх розташування у черзі і моментами надходження вимог до черги.

Кожний пристрій системи масового обслуговування характеризується тривалістю обслуговування вимоги та станом пристрою. Стан пристрою описується його станом на поточний момент часу - вільний, зайнятий або заблокований та моментом виходу з пристрою вимоги, для якої процес обслуговування закінчився. Якщо пристрій вільний, то вимоги в пристрої не має і тому вихід вимоги з пристрою не очікується, звідси, момент виходу вимоги з пристрою, що знаходиться у стані вільний, - нескінченність. Якщо пристрій заблокований, то хоч вимога у пристрої присутня, вихід вимоги з пристрою залежить від перебігу подій в сусідніх елементах мережі масового обслуговування і не залежить від пристрою. Звідси, момент виходу вимоги з пристрою, що заблокований, - нескінченність.

Зв'язок призначений для опису маршруту вимог між системами масового обслуговування. Зв'язок описується указуванням СМО, від якої рухається вимога, та указуванням СМО, до якої рухається вимога. Стан зв'язка може бути заблокований та неблокований. Блокування зв'язку може здійснюватись з різних причин і може відноситись до різних елементів мережної імітаційної моделі. Умова блокування може бути задана також за станом не одного, а кількох елементів мережі масового обслуговування, і взагалі може бути дуже складною. Зв'язок може мати розгалуження. В цьому разі указується не одна СМО, до якої рухається вимога, а кілька СМО разом із значеннями ймовірностей, заданими для кожної гілки маршруту вимог. Рішення про вибір маршруту приймається за значенням рівномірно розподіленого на інтервалі (0;1) випадкового числа.

Множина подій мережі масового обслуговування складається з подій двох типів:

- надходження вимоги в мережу масового обслуговування;
- вихід вимоги, для якої закінчився час обслуговування, з системи масового обслуговування.

Упорядкування подій у часі здійснюється способом, орієнтованим на події. Просування часу здійснюється за принципом до найближчої події.

### Об'єктно-орієнтований підхід

Об'єктно-орієнтований підхід до побудови імітаційних моделей мереж масового обслуговування дозволяє складати програми, що можуть легко стати універсальними програмами імітації мереж масового обслуговування. Час, що витрачається на побудову одного об'єкта, надолужується під час створення однотипних екземплярів об'єкта.

Розглянемо побудову алгоритму імітації мережі масового обслуговування на основі об'єктно-орієнтованого підходу. Виберемо об'єкти, з яких складається мережа масового обслуговування:

- об'єкт «вхідний потік»,
- об'єкт «СМО»,
- об'єкт «маршрут»
- об'єкт «маршрут входу»
- об'єкт «маршрут виходу»

Об'єкт «вхідний потік» призначений для створення вхідного потоку вимог із заданим середнім значенням інтервалу надходження вимог у мережу МО. Об'єкт «СМО» призначений для створення системи масового обслуговування, що характеризується заданою кількістю пристроїв, обмеженням на довжину черги, тривалістю обслуговування вимоги в пристрої. Дані про значення цих змінних присвоюються екземпляру об'єкта у момент його створення за допомогою методу Create.

Об'єкт «маршрут» призначений для створення зв'язків між СМО. Об'єкти «маршрут входу» та «маршрут виходу» призначені для створення зв'язків між зовнішнім середовищем та мережею масового обслуговування.

Кожний об'єкт має поле «вхід» та «вихід». Передача вимоги уздовж маршруту від однієї СМО до іншої означає, що вимога, яка знаходиться на виході об'єкта, що означений на початку маршруту, передається на вхід об'єкта, що означений на кінці маршруту. Наприклад, передача зі СМО1 до СМО2 означає зникнення вимоги на виході СМО1 і поява вимоги на вході СМО2.

Об'єкти мають методи, що виконують властиві об'єктам дії. Так, об'єкт «СМО» містить методи «зайняти СМО» та «звільнити СМО», а також методи «повідомити про середню кількість зайнятих пристроїв у СМО», «повідомити про стан черги СМО» та інші. Об'єкт «маршрут» має метод «передати вимогу», а також метод «повідомити про кількість не обслуговуваних вимог». Після того як об'єкт «СМО» полагоджений, до головної програми, яка здійснює імітаційне моделювання, підключається модуль, що містить опис об'єкта «СМО», і різні СМО створюються як екземпляри об'єкту «СМО» в результаті виконання двох рядочків програми:

```
var sm01: TSMO;
```

```
.....
```

```
smo1:=TSMO.Create(5,10,GetTimeMod,2);
```

Перший параметр конструктора об'єкта TSMO задає кількість пристроїв у СМО, другий – обмеження на довжину черги, третій – час моделювання, четвертий – середній час обслуговування. Аналогічно створюються екземпляри об'єкту «маршрут»:

```
var join: TJoin;
```

```
.....
```

```
join:=TJoin.Create(smo1,smo2);
```

Перший параметр конструктора об'єкта Tjoin указує СМО, що являється «входом» маршруту, другий параметр – СМО, що являється «виходом» маршруту. Таким чином, створюючи СМО та маршрути між ними, можна створити будь-яку мережу масового обслуговування.

Об'єктно-орієнтований підхід до побудови алгоритму імітації розглянемо на прикладі мережі масового обслуговування, що складається з трьох СМО (рис. В.3), і має розгалуження маршруту після першої СМО.

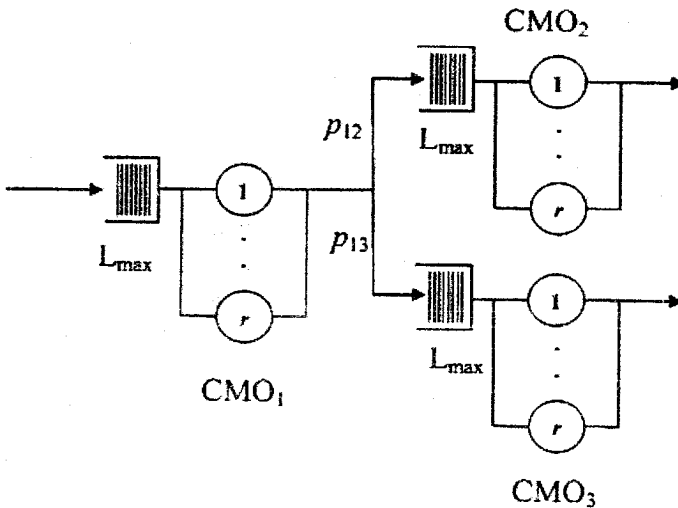


Рис. В.3. Мережа МО

Реалізація алгоритму мовою Object Pascal представлена в лістингу. Об'єкт «вхідний потік» описаний у модулі SystEntry. Об'єкт «СМО» описаний у модулі SystService і має назву TSMO. Об'єкти «маршрут», «маршрут входу» та «маршрут виходу» описані в модулі Join.

### В.3.1. Програма реалізації мережі МО

```
unit imitMO;
```

interface uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics,  
Controls, Forms, Dialogs, StdCtrls, SystService, SystEntry, join;

```
TForm1 = class(TForm) Edit1: TEdit; Label1: TLabel; Edit2: TEdit;  
Label2: TLabel; Button1: TButton; Edit3: TEdit;  
Edit4: TEdit; Edit5: TEdit; Edit6: TEdit;  
Edit7: TEdit; Label3: TLabel; Label4: TLabel;  
Label5: TLabel; Label6: TLabel;  
Label7: TLabel;  
Label8: TLabel;  
Edit8: TEdit;  
Label9: TLabel; Label10: TLabel;  
Edit9: TEdit;  
Edit10: TEdit; Label11: TLabel;  
Edit11: TEdit; Label12: TLabel; Label13: TLabel;  
procedure Edit1Change(Sender: TObject);  
procedure Button1Click(Sender: TObject);  
private  
TimeMod,t: Double;{ Private declarations } public  
function GetTimeMod: Double; function GetTimeNow: Double;  
{ Public declarations } end;  
var  
Form1: TForm1; implementation {R *.dfm}  
function TForm1.GetTimeMod: Double; begin  
result:=TimeMod; end;  
function TForm1.GetTimeNow: Double; begin  
result:=t; end;  
procedure TForm1.Edit1Change(Sender: TObject); begin  
TimeMod:=StrToFloat(Edit1.Text);  
t:=0;  
end;  
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); var smo: array of TSMO;  
NumSMO: integer;  
systEntry: TSystEntry;  
join: array of TJoin;  
join In: TJoinIN;  
joinOut: TJoinOUT;  
tmin: double;  
event: integer;  
AverQue,AverDevices: array of double; i: integer;  
prob,choice: double; begin  
NumSMO:=3; //кількість СМО choice:=0.7; //ймовірність вибору маршруту
```

```

SetLength(smo,NumSMO); SetLength(join,NumSMO-1);
SetLength(AverQue,NumSMO); SetLength(AverDevices,NumSMO); prob:=0;
for i:=0 to NumSMO-1 do
AverQue[i]:=0;
for i:=0 to NumSMO-1 do
AverDevices[i]:=0;
//структура мережі масового обслуговування
systEntry:=TsystEntry.Create(0.1);
//створення вхідного потоку вимог
smo[0]:=TSMO.Create(5,10,GetTimeMod,1.2);
//створення CMO1 joinIn:=TJoinIN.Create(systEntry,smo[0]);
// створення маршруту до CMO1 smo[1]:=TSMO.Create(7,8,GetTimeMod,2);
//створення CMO2 join[0]:=TJoin.Create(smo[0],smo[1]);
//створення маршруту від CMO1 до CMO2
smo[2]:=TSMO.Create(2,1,GetTimeMod,1);
//створення CMO3 join[1]:=TJoin.Create(smo[0],smo[2]);
//створення маршруту від CMO2 до CMO3
joinOut:=TJoinOUT.Create(smo[NumSMO-1]);
//створення маршруту на вихід системи
t:=0; // початкове значення модельного часу
while t<GetTimeMod do
begin
tmin:=systEntry.GetMinTime; event:=0;
for i:=0 to NumSMO-1 do if smo[i].GetMinTime<tmin then
begin
tmin:=smo[i].GetMinTime; event:=i+1;
end;
for i:=0 to NumSMO-1 do begin
AverQue[i]:=AverQue[i]+((tmin-t)/GetTimeMod)*smo[i].GetStateQue;
AverDevices[i]:=AverDevices[i]+
((tmin-t)/GetTimeMod)*smo[i].GetAverLoadChannel;
end;
t:=tmin; //просування часу в момент найближчої події case event of 0:
begin
systEntry.Arrival(GetTimeNow);
joinIn.send;
smo[0].Seize(GetTimeNow);
end; 1:
begin
if random<choice then //вибір маршруту слідування begin
smo[0].Releize(smo[0].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow); join[0].send;
smo[1].Seize(GetTimeNow); end else begin
smo[0].Releize(smo[0].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow); join[1].send;

```

```
smo[2].Seize(GetTimeNow); end ;
end; 2: begin
smo[1].Releize(smo[1].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow); joinOut.send;
end ; 3: begin
smo[2].Releize(smo[2].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow); joinOut.send;
end ; end;
prob:=joinIn.GetNumUnServ; for i:=0 to NumSMO-2 do
prob:=prob+join[i].GetNumUnServ; prob:=prob/systEntry.GetNumArrival;
Application.ProcessMessages;
Edit2.Text:=FloatToStr(GetTimeNow);
Edit3.Text:=FloatToStr(prob);
Edit4.Text:=FloatToStr(joinOut.GetNumService);
Edit5.Text:=IntToStr(systEntry.GetNumArrival);
Edit6.Text:=FloatToStr(AverQue[0]);
Edit7.Text:=FloatToStr(AverDevices[0]);
Edit8.Text:=IntToStr(joinIn.GetNumUnServ);
Edit9.Text:=FloatToStr(AverQue[1]);
Edit10.Text:=FloatToStr(AverDevices[1]);
Edit11.Text:=IntToStr(join[0].GetNumUnServ);
Edit12.Text:=FloatToStr(AverQue[2]);
Edit13.Text:=FloatToStr(AverDevices[2]);
Edit14.Text:=IntToStr(join[1].GetNumUnServ);
end;
for i:=0 to NumSMO-1 do smo[i].Free; //знищення об'єктів
for i:=0 to NumSMO-2 do join[i].Free;
systEntry.Free;
joinIn.Free;
joinOut.Free;
end;
end.
unit SystEntry; interface uses Generator;
Type
TsysEntry=class // об'єкт «вхідний потік вимог»
private
Exit:boolean;
Entry:boolean;
Interval:double;
//інтервал часу, з яким мають надходити вимоги з вхідного потоку
TimeExit:double;//момент часу, в який вимога має вийти з вхідного потоку
NumArrival: integer;
//загальна кількість вимог, що створена вхідним потоком вимог public
Constructor Create(aInterval:double);
//в конструкторі об'єкта «вхідний потік вимог» задається
```

```

// значення середнього інтервалу часу aInterval,
//з яким надходять вимоги procedure Arrival(at:double);
//формує момент часу TimeExit залежно від поточного моменту часу
at procedure EntryInSyst;
function GetMinTime:double; function GetNumArrival:integer;
  procedure SetExit(aEnt:boolean); procedure SetEntry(aEx:boolean); end;
implementation
Constructor TsystEntry.Create; begin
inherited Create;
Entry:=true;
Exit:=false;
Interval:=aInterval;
end;
procedure TsystEntry.Arrival(at:double); begin
TimeExit:=at+GenExp(Interval);
  //інтервал часу між надходження вимог
//заданий за експоненціальним законом розподілу
Exit:=true;
NumArrival:=NumArrival+1;
end;
procedure TsystEntry.EntryInSyst; begin
Exit:=true;
Entry:=true;
end;
function TsystEntry.GetMinTime:double; begin
result:=TimeExit; end;
function TsystEntry.GetNumArrival:integer; begin
result:=NumArrival; end;
procedure TsystEntry.SetExit(aEnt:boolean); begin
Exit:=aEnt; end;
procedure TsystEntry.SetEntry(aEx:boolean); begin
Entry:=aEx; end; end.
unit SystService; interface
uses Generator;
Type
TSMO=class //об'єкт «система масового обслуговування» private
NumChannel, MaxQueue: integer;
//кількість пристроїв обслуговування TimeFinServ: Array of Double;
StateChannel: Array of integer; //поточний стан пристроїв
StateQueue: integer; //поточний стан черги
Serv: double;
Entry: boolean;
Exit: boolean;

```

```
tmin:double;
minChannel:integer;
block: boolean;
public
Constructor Create(aNum:integer;aMax:integer;aTimeMod:double;aServ:double);
// в конструкторі об'єкта «система масового обслуговування» задаються
// значення кількості пристроїв обслуговування aNum,
// обмеження на довжину черги aMax,
// середня тривалість обслуговування aServ,
// значення часу моделювання aTimeMod
procedure Seize(at:double); // зайняти СМО
procedure Releize(aChannel:integer;aTimeMod:double;at:double);
//звільнити СМО function GetStateQue:integer;
procedure SeizeChannel(aChannel:integer;at:double);
//зайняти пристрій з номером aChannel
procedure ReleizeChannel(aChannel:integer;aTimeMod:double);
//звільнити пристрій з номером aChannel
procedure NextTime; //запам'ятати найближчу подію у СМО
function GetStateChannel(aNum:integer):integer;
procedure SetExit(aEnt:boolean);
procedure SetEntry(aEx:boolean);
function GetMinTime:double;
function GetMinChannel:integer;
function GetNumChannel:integer;
function GetAverLoadChannel:double;
//підрахувати середню кількість зайнятих пристроїв
function GetBlock:boolean; //повідомити про стан блокування end;
implementation
Constructor TSMO.Create; var i: integer; begin inherited Create;
StateQueue:=0; //початковий стан черги
MaxQueue:=aMax;
NumChannel:=aNum;
Serv:=aServ;
Entry:=False;
Exit:=False;
block:=false; // в початковий момент блокування маршруту відсутнє
SetLength(TimeFinServ, NumChannel);
SetLength(StateChannel, NumChannel);
for i:=0 to NumChannel-1 do begin
TimeFinServ[i]:=aTimeMod;
StateChannel[i]:=0; //початковий стан пристроїв - вільний
end;
NextTime; // формувати найближчу подію в СМО end;
```



```
procedure TSMO.Seize(at:double);
var j:boolean; i:integer;
begin
if Entry=true then begin
j:= false; i:=1;
while (i<=NumChannel) and (j=false) do
if StateChannel[i-1]=0 then begin j:=true;
SeizeChannel(i,at);
NextTime; // змінити найближчу подію в СМО
Entry:=false;
end else i:=i+1;
end;
if (j=false) and (MaxQueue>0) then begin StateQueue:= StateQueue+1;
Entry:=false;
if StateQueue=MaxQueue then block:=true; end;
end;
procedure TSMO.Releize(aChannel:integer;aTimeMod:double;at:double);
begin
if StateQueue>0 then begin
StateQueue:= StateQueue-1;
if block=true then block:=false; SeizeChannel(aChannel,at); NextTime; end
else begin
ReleizeChannel(aChannel,aTimeMod);
NextTime;
end;
Exit:=true; end;
function TSMO.GetStateQue:integer; begin
result:=StateQueue; end;
procedure TSMO.SeizeChannel(aChannel:integer;at:double); begin
StateChannel[aChannel-1]:=1;
TimeFinServ[aChannel-1]:=at+GenExp(Serv);
end;
procedure TSMO.ReleizeChannel(aChannel:integer;aTimeMod:double); begin
StateChannel[aChannel-1]:=0;
TimeFinServ[aChannel-1]:=aTimeMod;
end;
function TSMO.GetStateChannel(aNum:integer):integer; begin
result:=StateChannel[aNum-1]; end;
function TSMO.GetAverLoadChannel:double;
var sum,i: integer;
begin
sum:=0;
for i:=1 to GetNumChannel do begin
```

```
sum:=sum+StateChannel[i-1]; end;
result:=sum; end;
function TSMO.GetNumChannel:integer; begin
result:=NumChannel; end;
function TSMO.GetBlock:boolean; begin
result:=block; end;
procedure TSMO.SetExit(aEnt:boolean); begin
Exit:=aEnt; end;
procedure TSMO.SetEntry(aEx:boolean); begin
Entry:=aEx; end;
procedure TSMO.NextTime;
var i: integer;
begin
tmin:=TimeFinServ[0]; minChannel:=1; if NumChannel>1 then begin
for i:=1 to NumChannel do begin
if TimeFinServ[i-1]<tmin then begin
tmin:=TimeFinServ[i-1];
minChannel:=i;
end;
end;
end; end;
function TSMO.GetMinTime:double; begin
result:=tmin; end;
function TSMO.GetMinChannel:integer; begin
result:=minChannel; end;
end.
unit join;
interface
uses SystService,SystEntry; Type
TJoin=class //об'єкт «маршрут», що передає вимогу
від CMO (EntrySmo) до CMO (ExitSmo) private
EntrySmo: TSMO; ExitSmo: TSMO; State:boolean; NumUnServ: integer; public
Constructor Create(aSmoEntry:TSMO;aSmoExit:TSMO);
//у конструкторі об'єкту «маршрут» задаються CMO EntrySmo,
// з якої вимога виходить, та CMO ExitSmo, до якої вимога надходить
procedure send; //здійснює передачу вимоги уздовж заданого маршруту
function GetState: boolean; function GetNumUnServ: integer; end;
Type
TJoinIN=class //об'єкт «маршрут входу»,
що передає вимогу від вхідного потоку
до CMO
private
Entry: TsystEntry;
```

```
ExitSmo: TSMO;
State:boolean; NumUnServ: integer; public
Constructor Create(aEntry:TsysEntry;aSmoExit:TSMO);
//у конструкторі задається вхідний потік, з якого вимога виходить,
// та СМО, до якої вимога надходить procedure send;
function GetState: boolean;
function GetNumUnServ: integer; end;
Type
TJoinOUT=class
//об'єкт «маршрут виходу», що передає
вимогу із СМО на вихід із мережі MO private
EntrySmo: TSMO;
State:boolean;
NumService:integer;
public
Constructor Create(aSmoEntry:TSMO);
//у конструкторі задається СМО, з якої вимога виходить procedure send;
function GetNumService: integer; end;
implementation
Constructor TJoin.Create; begin
EntrySmo:=aSmoEntry;
ExitSmo:=aSmoExit;
State:=true;
NumUnServ:=0;
end;
Constructor TJoinOUT.Create; begin
EntrySmo:=aSmoEntry;
NumService:=0;
State:=true;
end;
Constructor TJoinIN.Create; begin
Entry:=aEntry;
ExitSmo:=aSmoExit;
State:=true;
NumUnServ:=0;
end;
procedure TJoin.send; begin
if GetState=true then begin
EntrySmo.SetExit(false); ExitSmo.SetEntry(true); end
else NumUnServ:=NumUnServ+1;
end;
procedure TJoinIN.send; begin
if GetState=true then begin
```

```

Entry.SetExit(false);
ExitSmo.SetEntry(true);
end else NumUnServ:=NumUnServ+1;
end;
procedure TJoinOUT.send; begin
if State=true then begin
EntrySmo.SetExit(false);
NumService:=NumService+1;
end;
end;
function TJoinIN.GetState: boolean; begin
if ExitSmo.GetBlock=true then result:=false else result:= true; end;
function TJoinIn.GetNumUnServ: integer; begin
result:=NumUnServ; end;
function TJoin.GetState: boolean; begin
if ExitSmo.GetBlock=true then result:=false else result:= true; end;
function TJoin.GetNumUnServ: integer; begin
result:=NumUnServ; end;
function TJoinOUT.GetNumService: integer; begin
result:=NumService; end;
end.

```

#### ***В.4. Програма реалізації алгоритму оптимального управління***

```

%\dot{x}_1=x_2;
%\dot{x}_2=-2x_1-3x_2+u;
% Variant 1
%J=1/2[x^2_1(3)+2*x^2_2(3)]+1/2\int\limits_0^T\left [2x^2_1(t)+
%      +2x_1(t)x_2(t)+1/4x^2_2(t)+1/2u^2(t)\right ]dt.
% Variant 2
%J=1/2[x^2_1(3)+2*x^2_2(3)]+1/2\int\limits_0^T\left [2x^2_1(t)+
%      +2x_1(t)x_2(t)+x^2_2(t)+1/2u^2(t)\right ]dt.
% Variant 3
%J=1/2[x^2_1(3)+2*x^2_2(3)]+1/2\int\limits_0^T\left [2x^2_1(t)+
%      +2x_1(t)x_2(t)+4x^2_2(t)+1/2u^2(t)\right ]dt.

%\dot{K}=-KA-A^TK+KBR^{-1}B^TK-Q.
%\dot{k}_1(t)-4k_2(t)=-2+2k_2^2; k_1(T)=1.
%\dot{k}_2(t)-3k_2(t)+k_1(t)-2k_3(t)=-1+2k_2(t)k_3(t); k_2(T)=0.
%\dot{k}_3(t)+6k_3(t)-2k_2(t)=-4+2k_2^2(t); k_3(T)=2.

```

```

q1=2;
q2=1;
q3=1;
tt=3.;
a=[1,9,26,24;1,7,12,0;1,6,8,0;1,5,6,0];
d1=[1,9+q1,38+9*q1-4*q2,22*q1-24*q2+8*q3];
a1=d1/a;
d2=[0,q2-3,6*q2-2*q3+q1+6,6*q1];
a2=d2/a;
d3=[2,6+q3,10+q2,2*q1+2*q2+4*q3];
a3=d3/a;

t=0:.05:tt;
k1=a1(1)+a1(2)*exp(-2*t)+a1(3)*exp(-3*t)+a1(4)*exp(-4*t);
k2=a2(1)+a2(2)*exp(-2*t)+a2(3)*exp(-3*t)+a2(4)*exp(-4*t);
k3=a3(1)+a3(2)*exp(-2*t)+a3(3)*exp(-3*t)+a3(4)*exp(-4*t);

plot(t,k1,t,k2,t,k3);
grid on
title('Rikkati  $K^{-1}(0)_i(t):$ ');
grid on
print -deps2 c:\apco\fig\nau_qdk0_3;
figure(1);

b1(1)=a2(1)*a2(1);
for k=2:4
    b1(k)=2*a2(1)*a2(k);
end
b1(4)=b1(4)+a2(2)*a2(2);
b1(5)=2*a2(2)*a2(3);
b1(6)=2*a2(2)*a2(4)+a2(3)*a2(3);
b1(7)=2*a2(3)*a2(4);
b1(8)=a2(4)*a2(4);
c1(1)=a1(1)-b1(1)/12;
c1(2)=-b1(2);
c1(3)=2*b1(3);
c1(4)=-b1(4);
r1=0.;
for k=3:8
    r1=r1+b1(k)/(k-2);
end
c1(5)=a1(2)-(r1-b1(1)/2-1.5*b1(2))-tt*c1(2);
r1=0.;

```

```
for k=4:8
    r1=r1+b1(k)/(k-3);
end
c1(6)=a1(3)-2*(b1(1)/3+b1(2)-b1(3)-r1)-tt*c1(3);
r1=0.;
for k=5:8
    r1=r1+b1(k)/(k-4);
end
c1(7)=a1(4)-(r1-b1(2)/2+1.5*b1(4)-b1(1)/4+b1(3))-tt*c1(4);
for k=5:8
    c1(k+3)=b1(k)*(-2/(k-3)+1/(k-2)+1/(k-4));
end
b2(1)=a3(1)*a2(1);
for k=2:4
    b2(k)=a3(1)*a2(k)+a2(1)*a3(k);
end
b2(4)=b2(4)+a2(2)*a3(2);
b2(5)=a3(2)*a2(3)+a3(3)*a2(2);
b2(6)=a3(2)*a2(4)+a3(3)*a2(3)+a3(4)*a2(2);
b2(7)=a3(3)*a2(4)+a3(4)*a2(3);
b2(8)=a3(4)*a2(4);
c2(1)=a2(1)-b2(1)/12;
c2(2)=-b2(2);
c2(3)=2*b2(3);
c2(4)=-b2(4);
r1=0.;
for k=3:8
    r1=r1+b2(k)/(k-2);
end
c2(5)=a2(2)-(r1-b2(1)/2-1.5*b2(2))-tt*c2(2);
r1=0.;
for k=4:8
    r1=r1+b2(k)/(k-3);
end
c2(6)=a2(3)-2*(b2(1)/3+b2(2)-b2(3)-r1)-tt*c2(3);
r1=0.;
for k=5:8
    r1=r1+b2(k)/(k-4);
end
c2(7)=a2(4)-(r1-b2(2)/2+1.5*b2(4)-b2(1)/4+b2(3))-tt*c2(4);
for k=5:8
    c2(k+3)=b2(k)*(-2/(k-3)+1/(k-2)+1/(k-4));
end
```

```
b3(1)=a3(1)*a3(1);
for k=2:4
    b3(k)=2*a3(1)*a3(k);
end
b3(4)=b3(4)+a3(2)*a3(2);
b3(5)=2*a3(2)*a3(3);
b3(6)=2*a3(2)*a3(4)+a3(3)*a3(3);
b3(7)=2*a3(3)*a3(4);
b3(8)=a3(4)*a3(4);
c3(1)=a3(1)-b3(1)/12;
c3(2)=-b3(2);
c3(3)=2*b3(3);
c3(4)=-b3(4);
r1=0.;
for k=3:8
    r1=r1+b3(k)/(k-2);
end
c3(5)=a3(2)-(r1-b3(1)/2-1.5*b3(2))-tt*c3(2);
r1=0.;
for k=4:8
    r1=r1+b3(k)/(k-3);
end
c3(6)=a3(3)-2*(b3(1)/3+b3(2)-b3(3)-r1)-tt*c3(3);
r1=0.;
for k=5:8
    r1=r1+b3(k)/(k-4);
end
c3(7)=a3(4)-(r1-b3(2)/2+1.5*b3(4)-b3(1)/4+b3(3))-tt*c3(4);
for k=5:8
    c3(k+3)=b3(k)*(-2/(k-3)+1/(k-2)+1/(k-4));
end
r1=0.;
for k=2:8
    r1=r1+c1(k+3)*exp(-k*(tt-t));
end
r0=0.;
for k=2:4
    r0=r0+c1(k)*exp(-k*(tt-t));
end
k11=c1(1)+t.*r0+r1;
r1=0.;
for k=2:8
```

```
r1=r1+c2(k+3)*exp(-k*(tt-t));
end
r0=0.;
for k=2:4
    r0=r0+c2(k)*exp(-k*(tt-t));
end
k21=c2(1)+t.*r0+r1;
r1=0.;
for k=2:8
    r1=r1+c3(k+3)*exp(-k*(tt-t));
end
r0=0.;
for k=2:4
    r0=r0+c3(k)*exp(-k*(tt-t));
end
k31=c3(1)+t.*r0+r1;

plot(t,k11,t,k21,t,k31);
grid on
title('Rikkati  $K^{(1)}_i(T-t)$ :  $x_{10}=2$ ;  $x_{20}=-2$ .');
grid on
print -deps2 c:\apco\fig\nau_qdk2_3;
figure(2);

x10=2;
x20=-2;
d1=2+c2(1);
d2=-(3+c3(1))/2;
r1=sqrt(d2*d2-d1);
a11=-(d2+r1);
a12=-(d2-r1);
r1=x10*(3+c3(1))+x20;
ax1=(r1-a11*x10)/(a12-a11);
bx1=x10-ax1;
r1=2*x10*(1+c2(1));
ax2=(r1+a11*x20)/(a11-a12);
bx2=x20-ax2;
x1=ax1*exp(-a11*t)+bx1*exp(-a12*t);
x2=ax2*exp(-a11*t)+bx2*exp(-a12*t);

plot(t,x1,t,x2);
grid on
title('Trajectory  $X^{(0)}(t)$ :  $x_{10}=2$ ;  $x_{20}=-2$ .');
```



```

grid on
print -deps2 c:\nau\fig\nau_qdx0_3;
figure(3);

r1=0.;
r2=0.;
for k=2:4
    r1=r1+c2(k)*exp(-k*(tt-t));
    r2=r2+c3(k)*exp(-k*(tt-t));
end
r3=0.;
r4=0.;
for k=2:8
    r3=r3+c2(k+3)*exp(-k*(tt-t));
    r4=r4+c3(k+3)*exp(-k*(tt-t));
end
uk=-2*((ax1*exp(-al1*t)+bx1*exp(-al2*t)).*(c2(1)+t.*r1+r3)...
    +(ax2*exp(-al1*t)+bx2*exp(-al2*t)).*(c3(1)+t.*r2+r4));

plot(t,uk);
grid on;
title('control U^{(0)}(T): x_{10}=2; x_{20}=-2.; T_{opt}=2');
grid on
print -deps2 c:\nau\fig\nau_qdc_3;
figure(4);
al(1)=al1;
al(2)=al2;

%Вычисление нелинейных траекторий и управления.

for k=1:10
    g(1,k)=ax1*c2(k+1)+ax2*c3(k+1);
    g(2,k)=bx1*c2(k+1)+bx2*c3(k+1);
    h(1,k+1)=0.;
    h(2,k+1)=0.;
end
r3=0.;
r4=0.;
for m=1:2
    for k=1:3
        bt=al1-(k+1)-al(m);
        gt=al2-(k+1)-al(m);
        r3=r3+(g(1,k)/(bt*bt)+g(2,k)/(gt*gt))*exp(-(k+1)*tt);
    
```

```

h(m,k+1)=g(m,k)*(ax1/bt+bx1/gt);
h(m,k+4)=g(m,k)*(ax1/(bt*bt)+bx1/(gt*gt));
end
for k=2:8
    bt=a11-k-a1(m);
    gt=a12-k-a1(m);
    r4=r4+(g(1,k+2)/bt+g(2,k+2)/gt)*exp(-k*tt);
    h(m,k+3)=h(m,k+3)-g(m,k+2)*(ax1/bt+bx1/gt);
end
h(m,1)=r3+r4;
end
h(1,1)=ax1*(1-h(1,1));
h(2,1)=bx1*(1-h(2,1));
t=0:0.05:2.5;
r1=0.;
r3=0.;
r4=0.;
for k=2:4
    bt=a11-k;
    gt=a12-k;
    r1=r1+h(1,k)*exp(-bt*t-k*tt)+h(2,k)*exp(-gt*t-k*tt);
    r3=r3-bt*h(1,k)*exp(-bt*t-k*tt)-gt*h(2,k)*exp(-gt*t-k*tt);
    r4=r4+(h(1,k)-bt*h(1,k+3))*exp(-bt*t-k*tt)+
        (h(2,k)-gt*h(2,k+3))*exp(-gt*t-k*tt);
end
r2=0.;
for k=2:8
    bt=a11-k;
    gt=a12-k;
    r2=r2+h(1,k+3)*exp(-bt*t-k*tt)+h(2,k+3)*exp(-gt*t-k*tt);
end
for k=5:8
    bt=a11-k;
    gt=a12-k;
    r4=r4-bt*h(1,k+3)*exp(-bt*t-k*tt)-gt*h(2,k+3)*exp(-gt*t-k*tt);
end
xn1=h(1,1)*exp(-a11*t)+h(2,1)*exp(-a12*t)+t.*r1+r2;
xn2=-a11*h(1,1)*exp(-a11*t)-a12*h(2,1)*exp(-a12*t)+t.*r3+r4;

plot(t,xn1,t,xn2);
grid on
title('Trajectory X{(1)}(t): x{10}=2; x{20}=-2.');
```

```
grid on
```

```
print -deps2 c:\nau\fig\nau_qdxn_3;
figure(5);

r1=0.;
r2=0.;
for k=2:4
    r1=r1+c2(k)*exp(-k*(tt-t));
    r2=r2+c3(k)*exp(-k*(tt-t));
end
r3=0.;
r4=0.;
for k=2:8
    r3=r3+c2(k+3)*exp(-k*(tt-t));
    r4=r4+c3(k+3)*exp(-k*(tt-t));
end
uk1=-2*(xn1.*(c2(1)+t.*r1+r3)+xn2.*(c3(1)+t.*r2+r4));

plot(t,uk1);
grid on;
title('control  $U^{\{1\}}(T)$ :  $x_{\{10\}}=2$ ;  $x_{\{20\}}=-2.$ ;  $T_{\{opt\}}=2$ ');
grid on
print -deps2 c:\nau\fig\nau_qdcn_3;
figure(6);
```

*Навчальне видання.*

*Зеленський Кирило Харитонович  
Кіт Григорій Васильович  
Чумаченко Олена Іллівна*

**Комп'ютерне моделювання систем**

Навчальний посібник

*В авторській редакції*

Комп'ютерне верстання Зеленський К.Х.  
Дизайн обкладинки Афоніна А.А.

Формат 70 × 100/16. Ум. друк. арк. 27,5.  
Наклад 100 прим. Зам. № 33.04-14.

*Видавець і виготовлювач Університет "Україна".  
03115, Київ, вул. Львівська, 23, тел/факс (044) 424-40-60, 424-56-26  
E-mail: [ukraina.vdk@mail.ru](mailto:ukraina.vdk@mail.ru)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серії ДК № 405 від 06.04.2001*