

532
А 58
А.Д. Альтшуль, П.Г. Киселев

ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА



А. Д. АЛЬТШУЛЬ, П. Г. КИСЕЛЕВ

532
А 58

ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА

(ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ)

Издание 2-е, переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция»

1855627

АБОНЕМЕНТ-3

Научная библиотека
Единичного
политехнического института



МОСКВА СТРОИЗДАТ 1975

Рецензент — д-р техн. наук, проф. В. В. Смыслов (Киевский инженерно-строительный институт)

Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости). Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Стройиздат, 1975. 323 с.

В книге рассмотрены основные вопросы механики жидкостей (капельных и газообразных): физические свойства жидкостей, общие законы равновесия и движения жидкостей, гидравлические сопротивления, движения жидкостей по трубам и истечение их из отверстий, обтекание твердых тел потоком, моделирование гидроаэродинамических явлений. По сравнению с первым изданием, вышедшим в 1965 г., все практические разделы книги существенно расширены.

Книга предназначена для студентов строительных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция».

Табл. 29, ил. 212, список лит.: 27 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание учебника «Гидравлика и аэродинамика» для студентов строительных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция», вышло в свет в 1965 г.

Второе издание значительно переработано и дополнено с учетом данных новейших исследований, а также в соответствии с пожеланиями, высказанными преподавателями высшей школы и работниками научно-исследовательских и проектных организаций.

Книга содержит основные теоретические вопросы лекционного курса и дополнительные данные, которые могут представлять также интерес для аспирантов и инженеров.

Первый раздел (гл. I—IX), а также § 75 второго раздела составлены проф. П. Г. Киселевым, введение и второй раздел (гл. X—XVII, за исключением § 75) д-ром техн. наук А. Д. Альтшулем.

При подготовке к печати второго издания авторы учли ценные замечания проф. Киевского инженерно-строительного института, д-ра техн. наук В. В. Смыслова. Авторы приносят благодарность за помощь в подготовке учебника кандидатам техн. наук Ф. Г. Майрановскому, В. С. Боровкову, Н. В. Данильченко и Ю. А. Войтинской.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет механики жидкости и ее задачи

Механика жидкости — наука, рассматривающая основные законы движения и равновесия жидкостей (как капельных, так и газообразных), а также их силовое взаимодействие с твердыми телами.

Механика жидкости является инженерной (технической) дисциплиной, так как ее выводы направлены на решение технических задач. Это — одна из наук, составляющих фундамент инженерных знаний. Она выросла из двух отраслей научного знания: эмпирической гидравлики и классической гидромеханики. Указанные дисциплины (так же как аэродинамика и газовая динамика) в настоящее время могут рассматриваться как разделы единой науки — механики жидкости¹.

Исторически накопление знаний о законах движения жидкостей шло по двум путям: инженеры создавали гидравлику, основанную, главным образом на экспериментах, а математики — теоретическую гидромеханику, построенную на математическом анализе непрерывной деформации сплошной жидкой среды. Эти две науки имели один и тот же объект изучения — движение жидкости, но методы их, так же как и задачи, были различными.

Гидравлика отличалась прикладным характером; она ставила прежде всего задачу — дать ответ на запросы инженерной практики. Если точное решение оказывалось невозможным, гидравлика довольствовалась приближенным решением; если общего закона не удавалось установить, гидравлика стремилась найти частный закон. Для гидравлики был типичен упрощенный подход к рассмотрению явлений движения жидкости (она, как правило, не интересовалась действительным распределением скоростей во всех точках потока, а лишь средней скоростью — скоростью потока в целом). Наконец, гидравлика широко пользовалась данными опыта, и в большинство гидравлических зависимостей входят эмпирические коэффициенты.

В противоположность гидравлике теоретическая гидромеханика имела строго математический характер и при решении задач исходила из дифференциальных уравнений движения жидкости. Гидромеханика преследовала строгость постановки задачи, точность получаемых решений и стремилась обойтись без опытных данных. Однако не всегда оказывалось возможным получить решения уравнений гидромеханики, а в ряде случаев полученные решения, несмотря на свою строгость и общность, не давали достаточного совпадения с опытными данными. Гидромеханика часто не могла дать ответа на насущные задачи инженерной практики.

¹ Гидравлика занимается изучением законов движения капельных жидкостей (преимущественно так называемой внутренней задачей — движение жидкостей в трубах, каналах и пр.); аэродинамика — изучением законов движения газов (преимущественно так называемой внешней задачей — обтекание потоком твердых тел); газовая динамика — изучением законов движения газов с большими скоростями.

В настоящее время эти две науки — гидромеханика и гидравлика — сливаются в одну — механику жидкости, построенную на синтезе достижений теоретического анализа и экспериментальных исследований. В эту дисциплину, по выражению акад. Н. Н. Павловского, «гидромеханика внесла свою теоретическую строгость и полноту исследования, а гидравлика — свой живой практический дух».

Механика жидкости исходит из основных принципов физики и механики, причем полученные выводы она согласует с экспериментальными исследованиями, которые одновременно дополняют и подтверждают эти выводы.

Механику жидкости можно разделить на две части:

1) теоретическая механика жидкости, где излагаются основные положения теории равновесия и движения капельных жидкостей и газов (общие законы гидроаэростатики и гидроаэродинамики);

2) прикладная (или техническая) механика жидкости, в которой рассматривается приложение этих законов к ряду практических случаев (движение в трубопроводах, истечение из отверстий и насадков, обтекание твердых тел и др.).

Знание механики жидкости необходимо для решения многих технических вопросов в области санитарной техники, в частности теплогазоснабжения и вентиляции. Расчет всевозможных трубопроводов (воздухопроводы, водопроводы, газопроводы, паропроводы и т. д.), конструирование гидравлических и воздуходувных машин (насосы, компрессоры, вентиляторы и пр.), проектирование котельных агрегатов, печных и сушильных установок, воздухо- и газоочистных аппаратов, теплообменных аппаратов, расчет многих отопительных и вентиляционных устройств требуют отчетливого понимания законов механики жидкости.

§ 2. Исторический обзор развития механики жидкости

Механика жидкости в своем историческом развитии прошла длинный путь. Некоторые принципы гидростатики были установлены еще Архимедом в трактате «О плавающих телах» (250 лет до н. э.), а затем возрождены и развиты Стевиным (1548—1620 гг.), Галилеем (1564—1642 гг.) и Паскалем (1623—1662 гг.).

Первые зачатки гидродинамики также относятся к античному периоду. В середине XV в. Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.) поставил первые лабораторные опыты и положил начало экспериментальной гидравлике, исследовав некоторые вопросы движения воды в каналах, через отверстия и водосливы. Торичелли (1608—1647 гг.) дал известную формулу для скорости жидкости, вытекающей из отверстия, а Ньютон (1642—1724 гг.) высказал основные положения о внутреннем трении в движущихся жидкостях.

Следующий этап в развитии механики жидкости относится к XVIII в. и связан с именами членов Петербургской академии наук Даниила Бернулли (1700—1782 гг.) и Леонарда Эйлера (1707—1783 гг.), разработавших общие уравнения движения идеальной жидкости и тем самым положивших начало теоретической гидроаэродинамике. Однако применение этих уравнений (так же как и разработанных несколько позже уравнений движения вязкой жид-

кости) к практическим задачам, которые выдвигала бурно развивавшаяся техника, приводило к удовлетворительным результатам лишь в немногих случаях. В связи с этим с конца XVIII в. многочисленные ученые и инженеры (Шези, Дарси, Базен, Вейсбах и др.) опытным путем изучали движение воды в различных частных случаях и получили значительное количество эмпирических формул гидравлики. Создававшаяся таким путем чисто практическая гидравлика все более отдалялась от теоретической гидродинамики. Сближение между ними наметилось лишь к концу XIX в., когда развитие авиации сформировало новые взгляды на движение жидкости, основанные на исследовании структуры потока. Тонкие экспериментальные исследования закона внутреннего трения в жидкостях при ламинарном течении (в работах Н. П. Петрова, 1836—1920 гг.) и условий перехода от ламинарного к турбулентному течению (в работах Рейнольдса, 1848—1912 гг.) позволили глубже проникнуть в физическую природу гидравлических сопротивлений и положили начало учению о турбулентном движении. К этому же периоду относятся блестящие исследования в различных областях механики жидкости, выполненные Н. Е. Жуковским (1847—1921 гг.), основателем крупнейшей научной школы в аэродинамике.

Несколько позже работы Л. Прандтля (1875—1953 гг.) продвинули вперед изучение турбулентных потоков, которое завершилось созданием полумпирических теорий турбулентности, получивших широкое практическое применение.

В XX в. стремительный рост авиационной техники, гидромашиностроения, гидротехнического строительства и теплоэнергетики (особенно в СССР) привел к бурному развитию механики жидкости, которое основывается на синтезе теоретических и экспериментальных методов.

§ 3. Основные физические свойства жидкостей

Определение жидкости. Основные законы, используемые в механике жидкости, — те же, что и в механике твердых тел. Однако применение этих законов к задачам механики жидкости отличается некоторыми особенностями благодаря разнице между свойствами жидкостей и твердых тел. Поэтому изучение механики жидкости целесообразно начать с определения и оценки ее основных свойств.

Жидкости (в широком смысле слова) отличаются от твердых тел легкой подвижностью частиц. В то время как для изменения формы твердого тела к нему нужно приложить конечные, иногда очень большие, силы, изменение формы жидкости может происходить под действием даже самых малых сил. Так, жидкость течет под действием собственного веса, если для этого представляется возможность.

Жидкость, как и всякое физическое тело, имеет молекулярное строение, т. е. состоит из отдельных частиц — молекул, объем пустот между которыми во много раз превосходит объем самих молекул. Однако ввиду чрезвычайной малости не только самих молекул, но и расстояний между ними (по сравнению с объемами, рассматриваемыми при изучении равновесия и движения жидкости) в механике жидкости ее молекулярное строение не рассматривается; предполагается, что жидкость заполняет пространство сплошь, без образования каких бы то ни было пустот. Тем самым вместо самой жидкости изучается ее модель, обладающая свойством непрерывности (фиктивная сплошная среда — континуум). В этом состоит гипотеза о непрерывности или сплошности жидкой среды. Эта гипотеза упрощает исследование, так как позволяет рассматривать все механические характеристики жидкой

среды (скорость, плотность, давление и т. д.) как функции координат точки в пространстве и времени, причем в большинстве случаев эти функции предполагаются непрерывными и дифференцируемыми. Непрерывную модель жидкости можно применять до тех пор, пока в достаточно малых объемах жидкости содержится большое количество молекул.

Интересуясь, например, вопросом, как велики в данной точке давление внутри жидкости или скорость ее движения практически важно знать давление и скорость в некотором весьма малом объеме, а не строго именно в данной геометрической точке. Этот объем действительно может быть очень малым. Так, известно, что в $1 \cdot 10^{-6}$ м³ воздуха находится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Даже в таком малом объеме, как в кубике со стороной размером 0,001 мм, находится $2,7 \cdot 10^7$ молекул.

Этот пример показывает, что, заменяя реальную жидкость ее моделью в виде непрерывной жидкой среды, мы действительно не делаем никакой ошибки до тех пор, пока не будем интересоваться движением молекул или состоянием жидкости внутри межмолекулярного пространства.

Жидкости с точки зрения механических свойств разделяются на два класса: малосжимаемые (капельные) и сжимаемые (газообразные).

С позиций физики капельная жидкость значительно отличается от газа; с позиций механики жидкости различие между ними не так велико, и часто законы, справедливые для капельных жидкостей, могут быть приложены и к газам в случаях, когда сжимаемостью последних можно пренебречь (например, при расчете вентиляционных каналов).

В связи с отсутствием специального термина, который обозначал бы жидкость в широком смысле слова, в дальнейшем мы будем пользоваться терминами «капельная жидкость» (малосжимаемая), «сжимаемая жидкость» (газ) и «жидкость», применяя последний в широком смысле, охватывающем как капельную жидкость, так и газ (т. е. под жидкостью будем понимать всякую среду, обладающую свойством текучести).

Капельные жидкости обладают вполне определенным объемом, величина которого практически не изменяется под действием сил. Газы же, занимая все предоставленное им пространство, могут значительно изменять объем, сжимаясь и расширяясь под действием сил. Таким образом, капельные жидкости легко изменяют форму (в отличие от твердых тел), но с трудом изменяют объем (в отличие от газов), а газы легко изменяют как объем, так и форму.

Основные свойства жидкостей, существенные при рассмотрении задач механики жидкости, — плотность и вязкость. В некоторых случаях (при образовании капель, течении тонких струй, образовании капиллярных волн и др.) имеет значение также поверхностное натяжение жидкостей.

Единицы измерения. Прежде чем перейти к изучению основных свойств жидкости, остановимся на единицах измерения, принятых в гидравлике и аэродинамике.

За основу принята Международная система единиц измерения СИ (наряду со внесистемными единицами), однако в инженерной практике теплогазоснабжения и вентиляции используется

также система МКГСС, положенная в основу технических нормативных документов (ГОСТ, СНиП и т. д.) и каталожных данных, а в ряде случаев система CGS.

Основными единицами системы СИ являются единицы длины (метр, м), массы (килограмм, кг), времени (секунда, с), термодинамической температуры (кельвин, К).

Производные единицы системы СИ, употребляемые в гидравлике и аэродинамике, приведены в табл. В.1.

Таблица В.1

Производные единицы Международной системы СИ

Величина	Наименование	Обозначение
Объемный расход	кубический метр в секунду	м ³ /с
Массовый расход	килограмм в секунду	кг/с
Скорость течения	метр в секунду	м/с
Ускорение	метр на секунду в квадрате	м/с ²
Сила	ньютон	Н
Давление, напряжение, модуль упругости	паскаль (ньютон на квадратный метр)	Па (Н/м ²)
Динамическая вязкость	паскаль — секунда (ньютон — секунда на квадратный метр)	Па · с (Н · с/м ²)
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду	м ² /с
Плотность	килограмм на кубический метр	кг/м ³
Удельный вес	ньютон на кубический метр	Н/м ³
Работа, энергия	джоуль	Дж (Н · м)
Мощность	ватт	Вт
Удельная газовая постоянная	джоуль на килограмм — градус	Дж/(кг · К)

До сих пор широко используются в практике инженерных расчетов измерение давления (напоров) в технических атмосферах (ат), метрах водяного и миллиметрах ртутного столба (м вод. ст. и мм рт. ст.), измерение температуры в градусах Цельсия (°С), динамической вязкости в пуазах (П) и кинематической в стоксах (Ст), работы и энергии в киловатт-часах (кВт · ч). Соотношения между наиболее употребительными единицами применяемых систем измерения приведены в тексте и приложении.

Плотность жидкостей. Плотностью жидкости ρ называется ее масса, заключенная в единице объема:

$$\rho = M/W, \quad (B.1)$$

где M — масса жидкости в объеме W .

Плотность воды при 4°C $\rho_B^4 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ($102 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$).

Если жидкость неоднородна, то формула (B.1) определяет лишь среднюю плотность жидкости. Для определения плотности в данной точке следует пользоваться формулой

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}. \quad (B.2)$$

В практических приложениях о массе жидкости судят по ее весу. Вес жидкости, приходящийся на единицу объема, называется удельным весом:

$$\gamma = G/W, \quad (B.3)$$

где G — вес жидкости в объеме W .

Удельный вес воды при 4°C $\gamma_B^4 = 9810 \text{ Н/м}^3$ (1000 кгс/м^3).

Если жидкость неоднородна, то формула (B.3) определяет лишь средний удельный вес жидкости. Для определения удельного веса жидкости в данной точке следует пользоваться формулой

$$\gamma = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta W}, \quad (B.4)$$

где ΔG — вес жидкости в объеме ΔW .

Плотность и удельный вес связаны между собой известным соотношением

$$\gamma = \rho g, \quad (B.5)$$

где g — ускорение свободного падения.

Относительным удельным весом жидкости (или относительным весом) δ называется отношение удельного веса данной жидкости к удельному весу воды при 4°C

$$\delta = \gamma_{\text{ж}}/\gamma_B^4. \quad (B.6)$$

В отличие от удельного относительный удельный вес представляет собой отвлеченную (безразмерную) величину, численное значение которой не зависит от выбранной системы единиц измерения. Так, для пресной воды при 4°C имеем

$$\delta_B^4 = 1. \quad (B.7)$$

В табл. B.2 в качестве примера приведены значения удельного веса и плотности некоторых капельных, а в табл. B.3 — сжимаемых жидкостей (газов).

Таблица В.2

Плотность ρ и удельный вес γ капельных жидкостей при 20° С

Жидкость	γ , Н/м ³	ρ , кг/м ³
Анилин	9 270	1040
Бензол	8590—8630	876—880
Бензин авиационный	7250—7370	739—751
Вода пресная	9 790	998,2
» морская	10 010—10 090	1002—1029
Глицерин безводный	12 260	1250
Керосин	7770—8450	792—840
Масло касторовое	9520	970
» минеральное	8000—8750	877—892
Нефть	8340—9320	850—950
Ртуть	132 900	13 547
Спирт этиловый безводный	7440	789,3
Хлористый натрий (раствор)	10 690	1200
Эфир этиловый	7010—7050	715—719

Таблица В.3

Приближенные значения плотности ρ и удельного веса γ газов при давлении 740 мм рт. ст. и $t=15^\circ\text{C}$

Газ	γ , Н/м ³	ρ , кг/м ³
Водород	0,81	0,08
Водяной пар	7,25	0,74
Окись углерода	11,3	1,15
Азот	11,3	1,15
Воздух	11,6	1,2
Кислород	12,8	1,3
Углекислота	17,6	1,8

Плотность, а следовательно, удельный и относительный удельный вес жидкостей меняются с изменением давления и температуры. Эта зависимость существенно различна для капельных жидкостей и газов.

Сжимаемость капельных жидкостей под действием давления характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_w , который представляет собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления

$$\beta_w = -\frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta p}, \quad (\text{В.8})$$

где W — первоначальный объем жидкости;
 ΔW — изменение этого объема при увеличении давления на величину Δp .

Коэффициент объемного сжатия в системе СИ имеет размерность Па⁻¹.

Знак минус в этой формуле обусловлен тем, что положительному приращению давления p соответствует отрицательное приращение (т. е. уменьшение) объема жидкости.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости

$$E_0 = 1/\beta_w. \quad (B.9)$$

Коэффициент объемного сжатия капельных жидкостей мало меняется при изменении температуры и давления (см., например, табл. В.4); в среднем для воды

$$\beta_w = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \text{ Па}^{-1} \text{ или } \frac{1}{20\,000} \text{ см}^2/\text{кгс}, \quad (B.10)$$

$$E_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Таблица В.4

Значения коэффициента объемного сжатия воды при разных температурах и давлениях

$t, ^\circ\text{C}$	$\beta_w \cdot 10^9, \text{ Па}^{-1}$ при давлениях в Па $\cdot 10^4$				
	50	100	200	390	780
0	5,4	5,37	5,31	5,23	5,15
5	5,29	5,23	5,18	5,08	4,93
10	5,23	5,18	5,08	4,98	4,81
15	5,18	5,1	5,03	4,88	4,7
20	5,15	5,05	4,95	4,81	4,6

Таким образом, при повышении давления на $9,8 \cdot 10^4$ Па (1 ат) объем воды уменьшается на $1/20000$ часть первоначальной величины. Коэффициент объемного сжатия для других капельных жидкостей имеет примерно тот же порядок. В подавляющем большинстве случаев, встречающихся в практической деятельности инженера-сантехника, изменения давления не достигают больших величин, и поэтому сжимаемостью воды можно пренебрегать, считая удельный вес и плотность ее не зависящими от давления.

Прочность жидкости на разрыв при решении практических задач не учитывается.

Температурное расширение капельных жидкостей характеризуется коэффициентом температурного расширения β_t , выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на 1 град, т. е.

$$\beta_t = \frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta T}, \quad (B.11)$$

где W — первоначальный объем жидкости;

ΔW — изменение этого объема при повышении температуры на величину ΔT .

Коэффициент температурного расширения воды

Давление, Па·10 ⁵	β_t , 1/град при температуре, °С				
	1—10	10—20	40—50	60—70	90—100
10	0,000014	0,00015	0,000422	0,000556	0,000719
980	0,000043	0,000165	0,000422	0,000548	0,000714
1960	0,000072	0,000183	0,000426	0,000539	—
4900	0,000149	0,000236	0,000429	0,000523	0,000661
8830	0,000229	0,000294	0,000437	0,000514	0,000621

Коэффициент температурного расширения капельных жидкостей, как это видно из табл. В.5, незначителен.

Так, для воды при температуре от 10 до 20° С и давлении 10⁵ Па

$$\beta_t = 0,00015 \text{ 1/град.} \quad (\text{В.12})$$

Однако влияние температуры на удельный вес в ряде случаев (при значительных разностях температур) приходится учитывать.

Плотность и удельный вес капельных жидкостей, как это следует из предыдущих рассуждений, мало изменяются с изменением давления и температуры. Можно приближенно считать, что плотность не зависит от давления, а определяется только температурой. Из выражений (В.11) и (В.1) можно найти приближенное соотношение для расчета изменения плотности капельных жидкостей с изменением температуры:

$$\rho_t = \rho_{t^0} \frac{1}{1 + \beta_t (T - T_0)} \quad (\text{В.13})$$

Значения коэффициента β_t в (В.13) находятся из таблиц в пределах заданного интервала температур (см., например, табл. В.5).

Способность жидкостей менять плотность (удельный вес) при изменении температуры широко используется для создания естественной циркуляции в котлах, отопительных системах, для удаления продуктов сгорания и т. д.

В табл. В.6 приведены значения плотности воды при разных температурах.

В отличие от капельных жидкостей газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газов от давления и температуры устанавливается уравнением состояния.

Наиболее простыми свойствами обладает газ, разреженный настолько, что взаимодействие между его молекулами может

Зависимость плотности ρ , кинематической ν и динамической μ вязкости воды от температуры

Температура, °С	ρ , кг/м ³	$\nu \cdot 10^4$, м ² /с	$\mu \cdot 10^3$, Па·с
0	999,9	0,0179	1,79
4	1000	0,0152	1,57
20	998	0,0101	1,01
40	992	0,0066	0,65
60	983	0,0048	0,48
80	972	0,0037	0,36
90	965	0,0033	0,31
99	959	0,0028	0,27

не учитываться — так называемый совершенный (идеальный) газ.

Для совершенных газов справедливо уравнение Клапейрона, позволяющее определять плотность газа при известных давлении и температуре, т. е.

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (\text{В.14})$$

где p — абсолютное давление;

R — удельная газовая постоянная, различная для разных газов, но не зависящая от температуры и давления [для воздуха $R=287$ Дж/(кг·К)];

T — абсолютная температура.

Поведение реальных газов в условиях, далеких от сжижения, лишь незначительно отличается от поведения совершенных газов, и для них в широких пределах можно пользоваться уравнениями состояния совершенных газов.

В технических расчетах плотность газа обычно приводят к нормальным физическим условиям ($t=0^\circ$; $p=101\,325$ Па) или к стандартным условиям ($t=20^\circ\text{C}$; $p=101\,325$ Па).

Плотность воздуха при $R=287$ Дж/(кг·К) в стандартных условиях по формуле (В.14) будет равна:

$$\rho_0 = \frac{101\,325}{287(273+20)} = 1,2 \text{ кг/м}^3. \quad (\text{В.15})$$

Плотность воздуха при других условиях определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}. \quad (\text{В.16})$$

На рис. В.1 приведены определенные по этой формуле графики зависимости плотности воздуха от температуры при разных давлениях.

Для изотермического процесса ($T = \text{const}$) из формулы (В.16) имеем

$$\rho/\rho = \text{const}; \quad (\text{В.17})$$

для адиабатического процесса

$$\rho/\rho^k = \text{const}, \quad (\text{В.18})$$

где $k = c_p/c_v$ — адиабатическая постоянная газа, причем c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, а c_v — то же, при постоянном объеме.

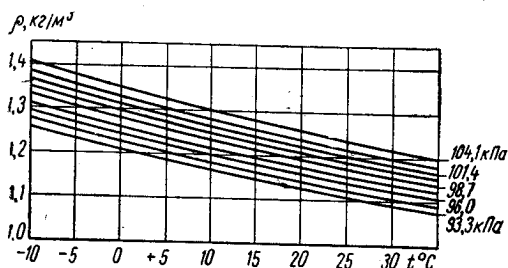


Рис. В.1. Зависимость плотности воздуха от барометрического давления и температуры

Сжимаемость газов зависит от характера процесса изменения состояния.

Для изотермического процесса

$$E_0 = p. \quad (\text{В.19})$$

а для адиабатического

$$E_0 = kp. \quad (\text{В.20})$$

Из выражения (В.19) следует, что изотермическая сжимаемость для атмосферного воздуха составляет $\sim 9,8 \cdot 10^4$ Па (около 1 ат), что примерно в 20 тыс. раз превышает сжимаемость воды.

Важной характеристикой, определяющей зависимость изменения плотности газа при изменении давления в движущемся потоке, является скорость распространения звука c . В однородной среде скорость распространения звуковых колебаний определяется из выражения

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (\text{В.21})$$

С учетом соотношений (В.8) и (В.9) из выражения (В.21) находим скорость звука в виде

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}. \quad (\text{В.22})$$

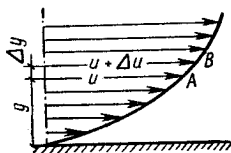
Для адиабатического процесса из выражений (В.18) и (В.14) следует $\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} = kRT$, откуда для газов

$$c = \sqrt{kRT}. \quad (\text{В.23})$$

Приведем значения скорости распространения звука в м/с в некоторых жидкостях (при $t=20^\circ\text{C}$); в воздухе — 330, в углекислом газе — 261, в воде — 1480.

Так как объем газа в большой мере зависит от температуры и давления, выводы, полученные при изучении капельных жидкостей, можно распространять на газы лишь в том случае, если в пределах рассматриваемого явления изменения давления и температуры незначительны. Значительные разности давлений, вызывающие существенное изменение плотности газов, могут возникнуть при их движении с большими скоростями. Соотношение между скоростью движения жидкости и скоростью звука в ней позволяет судить о необходимости учета сжимаемости в каж-

Рис. В.2. Распределение скоростей при течении жидкости вдоль твердой стенки



дом конкретном случае. Практически газ можно принимать несжимаемым при скоростях движения, не превышающих 100 м/с.

Вязкость жидкостей. Вязкостью называется свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу. Все реальные жидкости обладают определенной вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при относительном перемещении смежных частиц жидкости. Наряду с легко подвижными жидкостями (например, водой, воздухом) существуют очень вязкие жидкости, сопротивление которых сдвигу весьма значительно (глицерин, тяжелые масла и др.). Таким образом, вязкость характеризует степень текучести жидкости или подвижности ее частиц.

Пусть жидкость течет вдоль плоской стенки параллельными ей слоями (рис. В.2), как это наблюдается при ламинарном движении. Вследствие тормозящего влияния стенки слои жидкости будут двигаться с разными скоростями, значения которых возрастают по мере отдаления от стенки.

Рассмотрим два слоя жидкости,двигающиеся на расстоянии Δy друг от друга. Слой A движется со скоростью u , а слой B — со скоростью $u + \Delta u$. Вследствие разности скоростей слой B сдвигается относительно слоя A на величину Δu (за единицу времени). Величина Δu является абсолютным сдвигом слоя A по слою B , а $\Delta u/\Delta y$ есть градиент скорости (относительный сдвиг). Появляющееся при этом движении касательное напряжение (силу трения на единицу площади) обозначим через τ . Тогда аналогично явлению сдвига в твердых телах мы получим следующую зависимость между напряжением и деформацией:

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y}, \quad (\text{В.24})$$

или, если слои будут находиться бесконечно близко друг к другу,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (\text{В.25})$$

Величина μ , аналогичная коэффициенту сдвига в твердых телах и характеризующая сопротивляемость жидкости сдвигу, называется динамической или абсолютной вязкостью. На существование соотношения (В.25) первое указание имеется у Ньютона, и потому оно называется законом трения Ньютона.

Сила внутреннего трения в жидкости

$$T = \tau \omega = \mu \omega \frac{du}{dy},$$

т. е. прямо пропорциональна градиенту скорости, площади трущихся слоев ω и динамической вязкости (тем самым трение в жидкости отличается от трения в твердых телах, где сила трения зависит от нормального давления и не зависит от площади трущихся поверхностей).

Для определения размерности динамической вязкости из уравнения (В.24) получим

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{\frac{du}{dy}} \right] = [FTL^{-2}] = [ML^{-1} T^{-1}].$$

В международной системе единиц динамическая вязкость выражается в Н·с/м² или Па·с.

В технической системе единиц динамическая вязкость имеет размерность кгс·с·м⁻². В системе CGS за единицу динамической вязкости принимается пуаз (П) в память французского врача Пуазейля, исследовавшего законы движения крови в сосудах человеческого тела, равный 1 г·см⁻¹·с⁻¹.

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 10 \text{ П}.$$

Вязкость жидкостей в сильной степени зависит от температуры; при этом вязкость капельных жидкостей при увеличении температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает.

Это объясняется тем, что природа вязкости капельных жидкостей и газов различна. В газах средняя скорость (интенсивность) теплового движения молекул с повышением температуры возрастает, следовательно, возрастает и вязкость. В капельных жидкостях молекулы не могут двигаться, как в газе, по всем направлениям, они могут лишь колебаться возле своего среднего положения. С повышением температуры средние скорости колебательных движений молекул увеличиваются, благодаря чему легче преодолеваются удерживающие их связи, и жидкость приобретает большую подвижность (ее вязкость уменьшается).

Так, для чистой пресной воды зависимость динамической вязкости от температуры определяется по формуле Пуазейля

$$\mu = \frac{0,0179}{1 + 0,0368t + 0,000221t^2}, \quad (\text{В.26})$$

где μ — абсолютная (динамическая) вязкость жидкости в П;
 t — температура в °С.

С увеличением температуры от 0 до 100°С вязкость воды уменьшается почти в 7 раз (см. табл. В.6). При температуре 20°С динамическая вязкость воды равна 0,001 Па·с = 0,01 П.

Вода принадлежит к наименее вязким жидкостям. Лишь немногие из практически используемых жидкостей (например, эфир и спирт) обладают несколько меньшей вязкостью, чем вода. Наименьшую вязкость имеет жидкая углекислота (в 50 раз меньше вязкости воды). Все жидкие масла обладают значительно более высокой вязкостью, чем вода (касторовое масло при температуре 20°С имеет вязкость в 1000 раз большую, чем вода при той же температуре). В табл. В.7 приведены значения вязкости некоторых жидкостей.

Таблица В.7

Кинематическая и динамическая вязкость капельных жидкостей
 (при $t = 20^\circ\text{C}$)

Жидкость	μ , Па·с	$\nu \cdot 10^4$, м ² /с
Вода пресная	0,00101	0,01012
Глицерин безводный	0,512	4,1
Керосин (при 15°С)	0,0016—0,0025	0,02—0,03
Бензин (при 15°С)	0,0006—0,00065	0,0083—0,0093
Масло касторовое	0,972	10,02
» минеральное	0,0275—1,29	0,313—14,5
Нефть при 15°С ($\delta_4^{15} = 0,86$)	0,007—0,008	0,081—0,093
Ртуть	0,0015	0,00111
Спирт этиловый безводный	0,00119	0,0151

Для определения величины динамической вязкости воздуха в системе МКГСС применяется формула Милликена

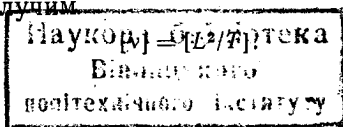
$$\mu = 1,745 \cdot 10^{-6} + 5,03 \cdot 10^{-9} t,$$

что дает при $t = 15^\circ\text{C}$ $\mu = 1,82 \cdot 10^{-6}$ кгс·с/м² ($\sim 1,82 \cdot 10^{-5}$ Па·с). Динамическая вязкость других газов имеет примерно тот же порядок величины.

Наряду с понятием абсолютной или динамической вязкости в гидравлике находит применение понятие кинематической вязкости, представляющей собой отношение абсолютной вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \mu / \rho. \quad (\text{В.27})$$

Эта вязкость названа кинематической, так как в ее размерности отсутствуют единицы силы. В самом деле, подставив размерность μ и ρ , получим



В международной системе единиц кинематическая вязкость измеряется в $\text{м}^2/\text{с}$; единицей для измерения кинематической вязкости в системе CGS служит стокс (в честь английского физика Стокса): $1 \text{ Ст} = 1 \text{ см}^2/\text{с} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Сотая часть стока называется сантистоксом (сСт): $1 \text{ м}^2/\text{с} = 1 \cdot 10^4 \text{ Ст} = 1 \cdot 10^6 \text{ сСт}$.

В табл. В.7 приведены численные значения кинематической вязкости капельных жидкостей, а на рис. В.3 — зависимость кинематической вязкости воды и индустриального масла от температуры. Для предварительных подсчетов величину кинематической вязкости воды ν можно принять равной $0,01 \text{ см}^2/\text{с} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, что отвечает температуре 20°С .

Кинематическая вязкость капельных жидкостей при давлениях, встречающихся в большинстве случаев на практике (до

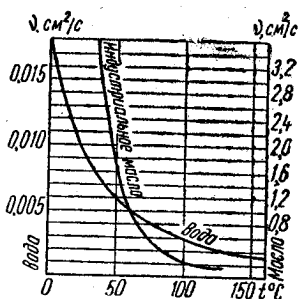


Рис. В.3. Зависимость кинематической вязкости воды и масла от температуры

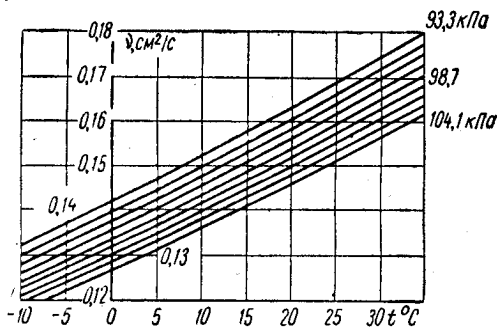


Рис. В.4. Зависимость кинематической вязкости воздуха от давления и температуры

200 ат), весьма мало зависит от давления, и этим изменением в обычных гидравлических расчетах пренебрегают.

Кинематическая вязкость газов зависит как от температуры, так и от давления, возрастая с увеличением температуры и уменьшаясь с увеличением давления (табл. В.8).

Кинематическая вязкость воздуха для нормальных условий (температура 20°С , давление $\sim 1 \text{ ат}$) $\nu = \mu/\rho = 1,57 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$,

Таблица В.8
Значения кинематической вязкости ν и удельной газовой постоянной R для некоторых газов

Газ	$\nu \cdot 10^4, \text{ м}^2/\text{с}$ при температуре в $^\circ \text{С}$				$R, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
	0	20	50	100	
Воздух	0,133	0,151	0,178	0,232	287
Метан	0,145	0,165	0,197	0,256	520
Этилен	0,075	0,086	0,104	0,138	296

т. е. примерно в 15 раз больше, чем для воды при той же температуре. Это объясняется тем, что в знаменатель выражения для кинематической вязкости (В.27) входит плотность, которая у газов значительно меньше, чем у капельных жидкостей. Для вычисления кинематической вязкости воздуха при разных температурах и давлениях можно пользоваться графиком (рис. В.4).

Экспериментально вязкость жидкостей определяют вискозиметрами.

Для определения вязкости капельных жидкостей широкое распространение получил вискозиметр Энглера (рис. В.5), который представляет собой сосуд 1, окруженный водяной ванной 2 с водой определенной температуры. Ко дну резервуара припаяна латунная цилиндрическая трубка 3, в которую вставлен платиновый насадок. Размеры насадки, как и всего прибора, стандартные. Температуру изучаемой жидкости измеряют термометром 4.

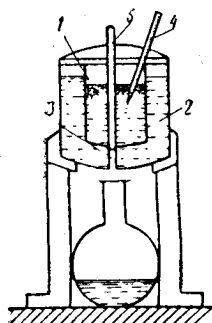


Рис. В.5. Вискозиметр Энглера

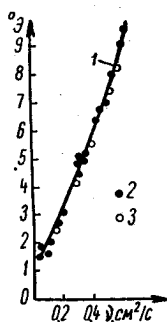


Рис. В.6. Связь условной вязкости (в градусах Энглера) и кинематической вязкости

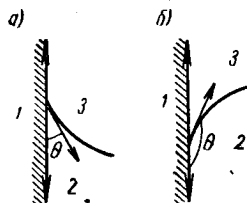


Рис. В.7. К определению краевого угла

В сосуд 1 наливают испытуемую жидкость, подогревают ее до заданной температуры и затем выпускают из сосуда через насадок (стопорный стержень 5 служит для перекрытия насадки). Снизу ставят колбу и замечают время ее наполнения до заданной метки.

За вязкость по Энглеру принимается отношение времени t_v истечения 200 см³ испытуемой жидкости ко времени t_v истечения того же объема воды. Таким образом, вязкость по Энглеру (условная вязкость в градусах Энглера), обозначаемая обычно через Θ , определяется зависимостью

$$\Theta = t/t_v. \quad (\text{В.28})$$

Для перехода от условной вязкости в градусах Энглера к кинематической вязкости имеется несколько эмпирических формул, например формула Убеллоде:

$$\nu = \left(0,0732\Theta - \frac{0,0631}{\Theta} \right) \text{см}^2/\text{с}. \quad (\text{В.29})$$

а также теоретическая формула А. Д. Альтшуля

$$\begin{aligned} \circ\Theta = 24 \left[2,3 \lg \frac{\sqrt{v^2 + 0,0294} - v}{\sqrt{v^2 + 0,0166} - v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{v} (\sqrt{v^2 + 0,0294} - \sqrt{v^2 + 0,0166}) \right] v. \end{aligned} \quad (\text{В.30})$$

На рис. В.6 приведено сравнение кривой 1, построенной по уравнению (В.30), с опытными данными (точки 2) и с эмпирической формулой Убеллоде (точки 3). При значениях вязкости $v > 0,5 \text{ см}^2/\text{с}$ кривая 1 приближается к прямой линии (член в квадратных скобках обращается в постоянную величину). Поэтому для жидкостей значительной вязкости можно пользоваться приближенной зависимостью $\circ\Theta = 13,67 v$.

Капиллярные явления. Молекулы жидкости, расположенные у поверхности контакта с другой жидкостью, газом или твердым телом, находятся в условиях, отличных от условий внутри некоторого объема жидкости. Внутри объема жидкости молекулы окружены со всех сторон такими же молекулами, вблизи поверхности — лишь с одной стороны. Поэтому энергия поверхностных молекул отличается от энергии молекул в объеме на некоторую величину, называемую поверхностной энергией. Эта энергия пропорциональна площади поверхности раздела s :

$$\Theta_n = \sigma s. \quad (\text{В.31})$$

Коэффициент пропорциональности σ , называемый коэффициентом поверхностного натяжения, зависит от природы соприкасающихся сред. Этот коэффициент можно представить в виде

$$\sigma = \dots F/l, \quad (\text{В.32})$$

где F — сила поверхностного натяжения;

l — длина линии, ограничивающей поверхность раздела.

Исходя из определения σ имеет размерность энергии на единицу площади или силы на единицу длины. Для границы раздела вода — воздух при $t = 20^\circ \text{С}$ коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,073 \text{ Дж/м}^2$, для границы раздела ртуть — воздух коэффициент $\sigma = 0,48 \text{ Дж/м}^2$.

Поверхностное натяжение жидкости чувствительно к ее чистоте и температуре. Вещества, способные в значительной степени снизить силы поверхностного натяжения, называются поверхностно-активными веществами (ПАВ). При повышении температуры величина поверхностного натяжения уменьшается, а в критической точке перехода жидкости в пар обращается в нуль.

На поверхности раздела трех фаз, например, твердой стенки 1, жидкости 2 и газа 3 между поверхностью жидкости и твердой стенкой образуется так называемый краевой угол θ (рис. В.7). Величина краевого угла зависит от природы соприкасаю-

щихся сред (от поверхностных натяжений на их границах) и не зависит ни от формы сосуда, ни от действия силы тяжести. Если край жидкости приподнят, ее поверхность имеет вогнутую форму (рис. В.7, а) — краевой угол острый. В этом случае жидкость смачивает твердую поверхность. Чем хуже смачивающая способность жидкости, тем больше краевой угол. При $\theta > 90^\circ$ жидкость считается несмачивающей, при полном несмачивании $\theta = 180^\circ$. Капли такой жидкости как бы поджимаются, стараясь уменьшить площадь контакта с твердой поверхностью.

От явления смачивания зависит поведение жидкости в тонких (капиллярных) трубках, погруженных в эту жидкость. В случае смачивания жидкость в трубке поднимается над уровнем свободной поверхности, в случае несмачивания — опускается. Высота капиллярного поднятия (опускания) жидкости находится по формуле

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{\gamma r} \cos \theta, \quad (\text{В.33})$$

где γ — удельный вес жидкости;
 r — радиус трубки.

Во всех явлениях, происходящих при совместном действии сил поверхностного натяжения и сил тяжести, значительную роль играет капиллярная постоянная $\sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma}}$, входящая в выражение (В.33) и имеющая линейную размерность; для воды при 20°C капиллярная постоянная равна 0,0039 м.

Многофазные системы. Как уже указывалось, в гидравлике и аэродинамике реальная жидкость обычно заменяется моделью в виде непрерывной среды. Однако в некоторых особых случаях приходится сталкиваться с нарушением сплошности (непрерывности) жидкости. В таких случаях можно, как правило, выделить границы раздела, отделяющие одну непрерывную среду (фазу) от другой, причем при переходе через такие границы свойства жидкости меняются скачкообразно.

Системы, состоящие из нескольких фаз, называются многофазными (полифазными). Простейшим случаем многофазной системы являются двухфазные системы.

Для примера можно назвать следующие многофазные системы: газ — твердые частицы (пневмотранспорт, пылеулавливание); газ — капли жидкости (распылители, сушилки, газовое охлаждение, испарение); жидкость — пузырьки пара (испарители, эрлифты); жидкость — твердые частицы (гидротранспорт, осаждение).

Во всех этих примерах первая из указанных фаз (основная) условно называется непрерывной, вторая — дискретной. При некоторых условиях многофазные системы могут переходить в однородные (гомогенные) и наоборот. Например, в воде при обычных условиях находится растворенный воздух. При снижении давления и повышении температуры воздух начинает выделяться, образуя воздушные пузырьки значительных размеров; иными словами, наблюдается переход однофазной системы (вода) к двухфазной (вода+газ).

С образованием двухфазных систем связаны процессы фазовых переходов. Так, в воде при повышении давления и понижении температуры зарождаются кристаллы льда, т. е. образуется двухфазная система — вода+твердые частицы. Наоборот, при понижении давления жидкости до уровня так назы-

ваемого давления насыщенного пара $p_{н.п}$ жидкость вскипает, образуя пузыри, заполненные насыщенными парами воды.

Количество дискретной фазы в непрерывной определяется величиной объемной концентрации. Обычно за объемную концентрацию принимается отношение объема, занятого дискретной фазой, к общему объему многофазной системы:

$$\beta = \frac{W_2}{W_2 + W_1} \quad (B.34)$$

где W_2 и W_1 — объемы дискретной и непрерывной фаз в многофазной системе. Среднюю плотность многофазной системы можно представить в следующем виде:

$$\rho = \beta \rho_2 + (1 - \beta) \rho_1 \quad (B.35)$$

где ρ_2 и ρ_1 — плотности соответственно дискретной и непрерывной фаз.

Аномальные жидкости. К жидкостям, не подчиняющимся закону вязкости Ньютона (B.25), так называемым «неньютоновским» (или аномальным) жидкостям, можно отнести, например, литой бетон, глинистый раствор, употребляемый при бурении

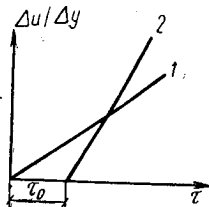


Рис. В.8. Зависимость касательного напряжения от градиента скорости

скважин, нефтепродукты при температуре, близкой к температуре застывания, коллоиды и др.

Опытами установлено, что движение неньютоновских жидкостей начинается только после того, как касательные напряжения достигнут некоторого предельного минимального значения (так называемое начальное напряжение сдвига); при меньших напряжениях эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации.

В аномальных жидкостях касательное напряжение определяется по формуле Бингема

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dy} \quad (B.36)$$

где τ_0 — начальное напряжение сдвига.

Таким образом, в аномальных жидкостях сила трения возникает еще в покоящихся жидкостях, но при стремлении этих жидкостей прийти в движение. На рис. В.8 показана зависимость между касательным напряжением и градиентом скорости для нормальных 1 и аномальных 2 жидкостей.

Вязкость аномальных жидкостей (так называемая структур-

ная вязкость) в отличие от вязкости ньютоновских жидкостей при заданной температуре и давлении непостоянна и изменяется в функции от градиента скорости $\frac{du}{dy}$.

Поведение различных аномальных жидкостей под нагрузкой и их динамические свойства излагаются в реологии, выводы которой имеют одинаково важное значение как для механики жидкости, так и для теории пластичности.

Идеальная жидкость. В механике жидкости для облегчения решения некоторых задач используется понятие об идеальной (совершенной) жидкости.

Под идеальной жидкостью понимают воображаемую жидкость, обладающую абсолютной подвижностью (т. е. лишенную вязкости), абсолютно несжимаемую, не расширяющуюся с изменением температуры, абсолютно неспособную сопротивляться разрыву. Таким образом, идеальная жидкость представляет собой некоторую модель реальной жидкости. Выводы, полученные исходя из свойств идеальной жидкости, приходится, как правило, корректировать, вводя поправочные коэффициенты.

Примеры к введению

Пример В.1. Определить плотность воздуха при избыточном давлении $p = 4900$ Па и температуре $t = 200^\circ \text{C}$.

Решение. Находим абсолютное давление воздуха

$$p_{\text{абс}} = 98100 + 4900 = 103000 \text{ Па.}$$

Определяем абсолютную температуру воздуха

$$T = 273 + 200 = 473 \text{ К.}$$

Находим плотность воздуха из уравнения состояния

$$\rho = \frac{p_{\text{абс}}}{RT} = \frac{103000}{287 \cdot 473} = 0,76 \text{ кг/м}^3.$$

Пример В.2. Для периодического аккумулирования прироста воды, получающегося при изменении температуры, в системах центрального водяного отопления устраивают расширительные резервуары, которые присоединяются к системе в верхней ее точке и сообщаются с атмосферой. Определить наименьший объем расширительного резервуара, чтобы он полностью не опорожнялся. Допустимое колебание температуры воды во время перерывов в топке $\Delta t = 95 - 70 = 25^\circ$. Объем воды в системе $W = 0,55 \text{ м}^3$. Коэффициент температурного расширения воды $\beta_t = 0,0006 \text{ 1/град}$ (при $t = 80^\circ \text{C}$).

Решение. Наименьший объем расширительного резервуара должен быть равен изменению объема воды при изменении ее температуры на 25° . Изменение объема воды из формулы (В.11).

$$\Delta W = \beta_t W \Delta t = 0,0006 \cdot 0,55 \cdot 25 = 0,0083 \text{ м}^3 = 8,3 \text{ л.}$$

Пример В.3. В отопительный котел поступает вода в объеме $W = 50 \text{ м}^3$ при температуре $t = 70^\circ \text{C}$. Сколько кубометров воды W_1 будет выходить из котла, если доводить нагрев до температуры $t_2 = 90^\circ \text{C}$ (коэффициент температурного расширения воды $\beta_t = 0,00064 \text{ 1/град}$)?

Решение.

$$\Delta W = 0,00064 \cdot 50 \cdot 20 = 0,64 \text{ м}^3;$$

$$W_1 = W + \Delta W = 50,64 \text{ м}^3.$$

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ОСНОВЫ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Глава I

РАВНОВЕСИЕ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 4. Равновесное состояние жидкости и действующие силы

Равновесное состояние. Если на некоторую массу жидкости не действовали и не действуют внешние силы, то каждая частица этой массы или остается неподвижной относительно данной системы координат, или движется прямолинейно с одинаковой для всех частиц скоростью, так что взаимное расположение частиц этой массы жидкости остается неизменным. Такое механическое состояние массы жидкости называется *равновесным*.

При действии внешних сил рассматриваемая масса жидкости может или сохранить равновесное положение, или перейти в состояние движения. Для равновесия необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли некоторым условиям, которые будут рассмотрены далее.

Внешние силы могут быть поверхностными и объемными (массовыми).

Поверхностные силы — это силы, действующие в точках граничной поверхности данной массы. Они пропорциональны размеру площадки $\Delta\omega$, взятой на этой поверхности, для которой можно написать равенство:

$$\Delta P = p\Delta\omega,$$

где ΔP — действующая поверхностная сила, а p — коэффициент пропорциональности, физический смысл которого очевиден из отношения $p = \Delta P / \Delta\omega$, т. е. этот коэффициент представляет собой так называемое «напряжение».

Объемные (или массовые) силы — это внешние силы, пропорциональные объему жидкости (если данная масса однородна, т. е. плотность ее одинакова во всем объеме). Для объемных сил справедлива зависимость

$$\Delta R = k\Delta W,$$

где k — коэффициент пропорциональности, физический смысл которого заключается в условии $k = \rho j$ (здесь ρ — плотность, а j — ускорение данной объемной силы).

Условия действия поверхностных сил при равновесии жидкости. Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять поверхностные силы при равновесии жидкости.

Представим некоторую массу жидкости, находящуюся в рав-

новесном состоянии (рис. I.1). Пусть в некоторой точке M ее граничной поверхности действует сила R^* . Разлагая эту силу по направлению нормали и касательной к граничной поверхности в этой точке, мы найдем две силы: силу N — нормальную к указанной поверхности и силу T — касательную к той же поверхности.

Сила N сжимает частицу M , и, поскольку жидкость сопротивляется сжатию, в этой точке (где расположена частица) может возникнуть реакция, которая уравновесит силу N ; следовательно, частица M останется в равновесии. Сила T — касательная сила — стремится сдвинуть частицу M . Чтобы сдвига не произошло и равновесное состояние не нарушалось, необходимо соблюдение условия $T=0$, или, иначе, для равновесия частицы M необходимо, чтобы равнодействующая сила R , действующая на частицу M , была направлена (по внутренней нормали n) к граничной поверхности, т. е. была *сжимающей*, а не растягивающей силой. Отсюда следует вывод — для сохранения равновесия массы жидкости необходимо, чтобы внешние силы, действующие в точках ее граничной поверхности, были направлены только по внутренним нормальям к этой поверхности.

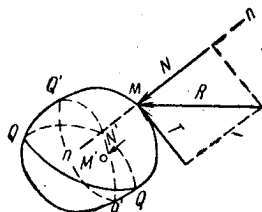


Рис. I.1

Взаимодействие между частицами покоящейся жидкости. Рассмотрим силовое взаимодействие между частицами внутри массы жидкости. С этой целью пересечем пространство, занятое покоящейся жидкостью, произвольной поверхностью Q (см. рис. I.1), которая разделит массу жидкости на две части — верхнюю и нижнюю. Рассмотрим затем равновесие, например, нижней части.

Поверхность Q в пределах сечения является граничной поверхностью этой части. Поэтому на частицу M' , лежащую на этой поверхности, окружающие ее частицы верхней части действуют с некоторой сжимающей силой N' . Ввиду произвольности выбора секущей поверхности Q можем (проводя через точку M' произвольные поверхности Q_1, Q_2 и т. д.) сделать вывод, что все частицы внутри покоящейся массы жидкости испытывают всестороннее сжатие.

§ 5. Гидростатическое давление в точке

Рассмотрим площадку $\Delta\omega$, на которую действует сила ΔP (рис. I.2). Отношение $p = \Delta P / \Delta\omega$, очевидно, представляет собой «напряжение», т. е. силу, приходящуюся на единицу площади.

* Силу R можно рассматривать и как равнодействующую всех сил, действующих в этой точке.

Так как при равновесии жидкости ΔP является сжимающей силой, то p представляет собой среднее для данной площадки напряжение сжатия, которое называют *средним гидростатическим давлением* на площадке. Для получения точного значения p в данной точке надо определить предел этого отношения при $\Delta\omega \rightarrow 0$, что и определит гидростатическое давление в данной точке:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}.$$

Размерность $[p]$ равна размерности напряжения, т. е.

$$[p] = \frac{[\Delta p]}{[\Delta\omega]} = [\text{Па}] \text{ или } [\text{кгс/м}^2].$$

Основная теорема гидростатики. Величина гидростатического давления в данной точке не зависит от ориентации в пространстве площадки, на которой она расположена, т. е.

$$p_x = p_y = p_z = p_n,$$

где p_x, p_y, p_z — гидростатические давления по направлению координатных осей, а p_n — то же, по произвольному направлению n .

Для доказательства выберем внутри массы жидкости, находящейся в равновесии, объем в форме тетраэдра (рис. 1.3) и,

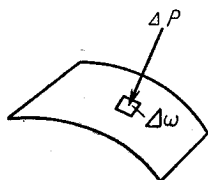


Рис. 1.2

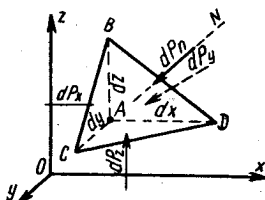


Рис. 1.3. К теореме о независимости гидростатического давления от направления

полагая его отвердевшим, напишем для него (как для твердого тела) условия равновесия в виде трех уравнений проекций действующих сил и трех уравнений моментов:

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma M_x = 0;$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma M_y = 0;$$

$$\Sigma Z = 0 \text{ и } \Sigma M_z = 0.$$

При уменьшении объема тетраэдра в пределе до нуля система действующих сил преобразуется в систему сил, проходящих через одну и ту же точку, и, таким образом, уравнения моментов теряют смысл.

Составим уравнение проекций сил на ось Ox .

На рассматриваемый тетраэдр действуют четыре поверхностные силы (по числу граней тетраэдра), направленные по нор-

малям к соответствующим граням, и объемная сила dF . Проектируя эти силы на ось Ox , получим

$$dP_x - dP_n \cos(\widehat{N, Ox}) + dF \cos \alpha = 0, \quad (I.1)$$

где

$$dP_x = \rho_x \frac{dydz}{2},$$

$$dP_n \cos(N, Ox) = \rho_n d\omega \cos(\widehat{N, Ox}) = \rho_n \frac{dydz}{2},$$

так как $d\omega \cos \alpha$ представляет собой проекцию площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси Ox .

Объемная сила $dF = dmj$, где dm — масса тетраэдра, равная $\rho \frac{1}{6} dx dy dz$, а j — ускорение, создаваемое этой силой.

Тогда

$$dF \cos \alpha = dmj \cos \alpha.$$

Введем обозначение $j \cos \alpha = X$, $j \cos \beta = Y$, $j \cos \gamma = Z$, где X , Y и Z — проекции ускорения внешней объемной силы (эти обозначения будут использоваться и далее).

После соответствующих подстановок получим уравнение

$$\rho_x \frac{dydz}{2} - \rho_n \frac{dydz}{2} + \frac{1}{6} \rho dx dy dz X = 0,$$

сокращая которое на $\frac{1}{2} dy dz$, найдем

$$\rho_x - \rho_n + \frac{1}{3} \rho dx X = 0, \quad (I.2)$$

Опуская третье слагаемое как величину высшего порядка малости по сравнению с двумя первыми, получим

$$\rho_x - \rho_n = 0.$$

Очевидно, по аналогии можем написать

$$\rho_y - \rho_n = 0 \quad \text{и} \quad \rho_z - \rho_n = 0$$

или, наконец,

$$\rho_x = \rho_y = \rho_z = \rho_n, \quad (I.3)$$

что доказывает теорему.

Гидростатическое давление в точке, будучи одинаковым по любому направлению, неодинаково в различных точках пространства, т. е. p есть функция координат:

$$p = f(x, y, z).$$

§ 6. Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Уравнение Эйлера. Выберем внутри покоящейся жидкости параллелепипед с ребрами, расположенными параллельно координатным осям Ox , Oy и Oz (рис. I.4) и равными соответственно dx , dy и dz . Составим уравнения равновесия этого параллелепипеда в виде уравнений проекций сил (согласно предыдущим рассуждениям уравнения моментов теряют смысл):

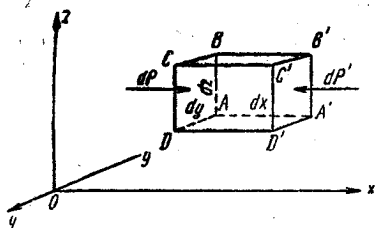


Рис. I.4. К выводу уравнений равновесия жидкости

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma Z = 0.$$

Проектируя силы на ось Ox , согласно рис. I.4 имеем

$$\Sigma X = dP - dP' + dF \cos \alpha = 0. \quad (I.4)$$

Определим каждое из слагаемых. Поверхностные силы равны:

$$dP = p \, dy \, dz \text{ и } dP' = p' \, dy \, dz,$$

где p и p' — средние гидростатические давления соответственно на площадки $ABCD$ и $A'B'C'D'A'$.

Так как гидростатическое давление является функцией координат, среднее гидростатическое давление на площадке $A'B'C'D'A'$ будет равно:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} \, dx,$$

потому что при переходе от площадки $ABCD$ к площадке $A'B'C'D'A'$ изменяется только координата x . Следовательно, сила

$$dP' = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \right) \, dy \, dz.$$

Объемная сила для массы $dm = \rho \, dx \, dy \, dz$ равна:

$$dF \cos \alpha = dm \, j \cos \alpha = dm \, X = \rho \, dx \, dy \, dz \, X.$$

Подставляя в (I.4) значения слагаемых, запишем

$$p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \right) \, dy \, dz + \rho \, X \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Раскрывая скобки и (после приведения подобных членов) сокращая на $dx \, dy \, dz$, получим уравнение проекций сил на ось Ox в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0.$$

Аналогично можно получить и уравнения проекций сил на оси Oy и Oz , в результате чего система трех уравнений равновесия жидкости (уравнения Эйлера) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Основное дифференциальное уравнение гидростатики. Перепишем уравнения Эйлера в несколько другом порядке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Умножив каждое из этих уравнений соответственно на dx , dy и dz и произведя сложение правых и левых частей уравнений, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz.$$

Так как гидростатическое давление p зависит только от трех независимых переменных координат x , y и z , левая часть этого равенства представляет собой полный дифференциал функции $p = f(x, y, z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (1.7)$$

Делая подстановку, находим окончательно

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называется **основным дифференциальным уравнением гидростатики**, так как его использование позволяет решать основные задачи гидростатики.

Рассмотрим это уравнение более подробно.

Прежде всего отметим, что так как dp есть полный дифференциал¹, то выражение в скобках правой части будет также

¹ Величина $\frac{dp}{\rho}$ — также полный дифференциал.

полным дифференциалом некоторой функции координат, т. е.

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z). \quad (I.9)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (I.10)$$

Здесь величины X , Y и Z , т. е. проекции ускорения объемной силы, можно рассматривать как проекции самой объемной силы, отнесенной к единице массы данной жидкости, так как

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{dF \cos \alpha}{\rho dW} = \frac{dF}{dm} \cos \alpha; \\ Y &= \frac{dF}{dm} \cos \beta; \\ Z &= \frac{dF}{dm} \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

а поэтому функция $U(x, y, z)$ является потенциалом сил или так называемой «силовой функцией». Таким образом, **равновесие жидкости возможно, если объемные силы имеют потенциал.**

Правую часть уравнения (I.8) можно рассматривать и как уравнение элементарной работы dT , т. е. можем написать

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = dT. \quad (I.12)$$

Действительно, работа силы $\frac{dF}{dW}$ (силы, отнесенной к единице объема) на пути ds (рис. I.5) равна:

$$dT = \frac{dF}{dW} ds \cos A, \quad (I.13)$$

где A — угол между направлением действия силы dF/dW и линией перемещения ds .

Но из (I.11) следует:

$$\rho X = \frac{dF}{dW} \cos \alpha;$$

$$\rho Y = \frac{dF}{dW} \cos \beta;$$

$$\rho Z = \frac{dF}{dW} \cos \gamma.$$

и кроме того

$$dx = ds \cos a; \quad dy = ds \cos b; \quad dz = ds \cos c.$$

С учетом последнего слагаемые левой части уравнения (I.12) равны по отдельности:

$$\rho X dx = \frac{dF}{dW} \cos \alpha ds \cos a;$$

$$\rho Y dy = \frac{dF}{dW} \cos \beta ds \cos b;$$

$$\rho Z dz = \frac{dF}{dW} \cos \gamma ds \cos c,$$

а в сумме

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = \frac{dF}{dW} ds (\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c).$$

Если учесть, что $\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c = \cos A$, приходим к равенству:

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = \frac{dF}{dW} ds \cos A = dT.$$

Это и доказывает справедливость уравнения (I.12).

Отсюда заключаем, что изменение гидростатического давления dp равно работе внешних объемных сил, совершаемой на пути изменения давления от p_1 до p_2 (при $p_2 - p_1 = dp$).

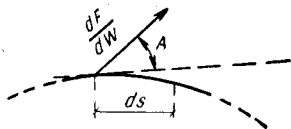


Рис. I.5

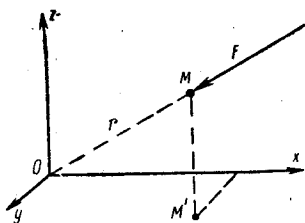


Рис. I.6

Характеристическое уравнение. В основном дифференциальном уравнении гидростатики (I.7) неизвестны две величины: p и ρ (значения X , Y и Z , а также координаты точки обычно заданы.) Таким образом, для определенности решения необходимо иметь еще одно независимое уравнение, в качестве которого используется так называемое характеристическое уравнение, определяющее собой особенности данной жидкости.

Например, рассматривая равновесие капельной жидкости и

считая ее абсолютно несжимаемой, характеристическим уравнением будет условие

$$\rho = \text{const}, \quad (I.14)$$

а для газа — уравнение Бойля — Мариотта

$$p\omega = RT, \text{ или } \frac{p}{\rho} = RT.$$

В общем виде условия равновесия можно записать в виде функции, характеризующей особенности сжатия данной жидкости:

$$\rho = \Phi(p, t^\circ). \quad (I.15)$$

Поверхность уровня. Поверхностью уровня называется такая поверхность, все точки которой имеют одно и то же значение рассматриваемой функции: например, поверхность равной температуры (изотермическая поверхность), поверхность равного потенциала и т. д. Для рассмотрения задач гидравлики особо важное значение имеет поверхность равного давления. Имея в виду в дальнейшем изложении именно поверхность равного давления, будем условно называть ее кратко поверхностью уровня.

Уравнение поверхности уровня и свойства этой поверхности. Так как во всех точках поверхности уровня гидростатическое давление одинаково, т. е. $p = \text{const}$, то $dp = 0$ и из основного дифференциального уравнения гидростатики получим

$$\rho (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Так как плотность $\rho \neq 0$, то

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad (I.16)$$

где X , Y и Z — функции координат.

Уравнение (I.16) представляет собой дифференциальное уравнение поверхности, для которой $p = \text{const}$, т. е. уравнение поверхности уровня.

Рассмотрим свойства поверхности уровня:

1. Две поверхности уровня не пересекаются между собой. Действительно, допустим, что поверхность давления p_1 пересекается с поверхностью давления p_2 . Тогда в точках линии пересечения этих поверхностей давление было бы одновременно равным и p_1 и p_2 , что невозможно, так как $p_1 \neq p_2$. Следовательно, пересечение этих поверхностей невозможно.

2. Внешние объемные силы направлены нормально к поверхности уровня. Подтвердить это положение можно так. Работа силы F на элементарном пути ds согласно (I.12) равна:

$$dT = \rho (X dx + Y dy + Z dz).$$

Но для поверхности уровня трехчлен в скобках равен нулю, поэтому работа силы F на пути ds вдоль поверхности уровня равна нулю ($dT=0$).

С другой стороны, согласно рис. 1.5 работа силы $F=dT=$
 $=F \cos A ds$, и поскольку $dT=0$, а $F \neq 0$ и $ds \neq 0$, то $\cos A$ должен быть равен нулю, т. е. угол $A=\pi/2$.

Пусть, например, свободная поверхность воды в резервуаре испытывает одно и то же атмосферное давление p_0 , следовательно, свободная поверхность является поверхностью уровня. В условиях равновесия она неподвижна. Волновая поверхность водоема есть также поверхность уровня p_0 , но волновая поверхность изменяется во времени, т. е. подвижна.

Попытаемся определить форму поверхности уровня, если жидкость находится в равновесии под действием объемных сил, направленных к центру координат (рис. 1.6) и равных $F=m/r$, где m — коэффициент пропорциональности.

Для решения этой задачи воспользуемся общим дифференциальным уравнением поверхности уровня (1.16) и определим первое слагаемое этого уравнения Xdx .

Имеем последовательно:

$$X = F \cos \alpha = \frac{m}{r} \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Тогда

$$Xdx = \frac{m}{r} \cdot \frac{x}{r} dx = \frac{m}{r^2} xdx$$

и аналогично:

$$Ydy = \frac{m}{r^2} ydy;$$

$$Zdz = \frac{m}{r^2} zdz.$$

Следовательно, в данном случае дифференциальное уравнение поверхности уровня получим в виде

$$\frac{m}{r^2} (xdx + ydy + zdz) = 0.$$

Но $m/r^2 \neq 0$, поэтому

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const},$$

представляющее собой уравнение сферы. Следовательно, поверхность уровня в данном случае имеет вид сферы.

§ 7. Равновесие капельной жидкости в поле земного тяготения

Поверхность уровня. Рассмотрим равновесие жидкости в поле земного тяготения в пределах небольшой ограниченной обла-

сти. Тогда ускорения свободного падения в различных точках этого пространства будут параллельны и направлены вертикально. Расположим координатную ось Oz вертикально; при этом ускорение свободного падения $g=9,81 \text{ м/с}^2$ будет направлено параллельно оси Oz .

Составим уравнение поверхности уровня, учитывая, что для данного случая равновесия жидкости величины X , Y и Z , входящие в общее дифференциальное уравнение поверхности уровня (I.16), будут равны соответственно:

$$X = g_x = 0; \quad Y = g_y = 0; \quad Z = g_z = -g.$$

где g_x , g_y и g_z — проекции ускорения g по координатным осям.

Подставляя эти значения в уравнение (I.16), получим дифференциальное уравнение поверхности уровня для рассматриваемых условий

$$-g dz = 0, \text{ или } dz = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$-gz = \text{const или } z = \text{const} = C. \quad (\text{I.17})$$

Так как $C = \text{const}$ — произвольная постоянная, то это уравнение будет уравнением семейства горизонтальных плоскостей (параллельных осям Ox и Oy).

Итак, поверхность уровня есть горизонтальная плоскость.

Пусть, например, резервуар заполнен водой или иной жидкостью (рис. I.7, а).

Так как во всех точках свободной поверхности гидростатическое давление одинаково и равно атмосферному, то свободная поверхность жидкости будет поверхностью уровня и, следовательно, будет горизонтальной плоскостью.

Проведем произвольную горизонтальную плоскость $n-n$. Эта плоскость также будет поверхностью уровня, и, следовательно, во всех точках этой плоскости давление будет одинаковым (что справедливо и для любой плоскости n_1-n_1).

Так как плоскости $n-n$ и свободной поверхности параллельны между собой, то все точки плоскости $n-n$ находятся на одной и той же глубине. Следовательно, величина гидростатического давления зависит только от глубины точки погружения и на одинаковой глубине гидростатическое давление в любой точке будет одним и тем же.

Кроме того, гидростатическое давление в точке не зависит от формы резервуара (рис. I.7, б). Действительно, давления в точках A и B будут равны между собой: $p_A = p_B$.

Распределение гидростатического давления. Воспользуемся основным дифференциальным уравнением гидростатики

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz).$$

В случае равновесия жидкости в поле земного тяготения $X=0$, $Y=0$, а $Z=-g$. Поэтому основное уравнение получим в виде

$$dp = -\rho g dz. \quad (\text{I.18})$$

Но произведение $\rho g = \gamma$, где γ — удельный вес данной жидкости.

Деля подстановку и деля обе части уравнения (I.18) на γ , перепишем его в следующем виде:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz = 0$$

и, интегрируя, найдем (при $\gamma = \text{const}$)

$$\frac{p}{\gamma} + z = C = \text{const.} \quad (\text{I.19})$$

Чтобы определить постоянную интегрирования C , рассмотрим резервуар, наполненный водой (рис. I.8), со свободной поверхностью (атмосферное давление).

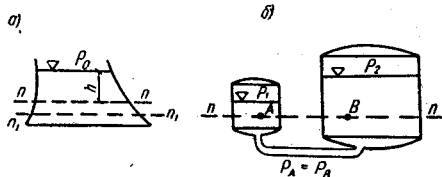


Рис. I.7

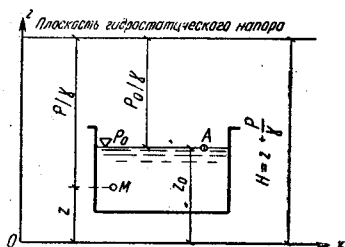


Рис. I.8

Тогда для точки A , лежащей на поверхности, $p = p_0$ и $z = z_0$.

Подставляя эти значения в (I.19), находим, что произвольная постоянная интегрирования

$$C = \frac{p_0}{\gamma} + z_0$$

и уравнение (I.19) запишется в виде

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \quad (\text{I.20})$$

или

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z). \quad (\text{I.21})$$

Последнее уравнение называют **основным уравнением гидростатики**.

Рассмотрим уравнение (I.20) более подробно.

Все слагаемые, входящие в него, имеют линейную размерность: z и z_0 — координаты свободной поверхности и произвольной точки M , т. е. высоты расположения свободной поверхности и точки M ; p_0/γ и p/γ — высоты, соответствующие гидростатическому давлению на поверхности p_0 и p в точке M .

Можно проверить размерность величины $\left[\frac{p}{\gamma} \right]$:

$$\left[\frac{p}{\gamma} \right] = \frac{[\text{Па}]}{[\text{Н/м}^3]} = \frac{[\text{Н/м}^2]}{[\text{Н/м}^3]} = [\text{м}].$$

Очевидно, что постоянная интегрирования C имеет также линейную размерность; обозначим ее через H .

Величины z и p/γ часто называют в гидравлике *геометрической и пьезометрической высотами*¹, тогда H как сумма двух высот будет также высотой — ее называют *гидростатическим напором*. Согласно рис. 1.8, величина H представляет собой ординату горизонтальной плоскости, именуемой плоскостью гидростатического напора. Эта плоскость расположена выше плоскости свободной поверхности на высоту p_0/γ .

Если измерять гидростатическое давление в Па и принять атмосферное давление равным $p_0 = 9,8 \cdot 10^4$ Па, а объемный вес воды $\gamma = 9,8 \cdot 10^3$ Н/м³, то приведенная высота

$$h_{\text{пр}} = \frac{9,81 \cdot 10^4}{9,81 \cdot 10^3} = 10 \text{ м вод. ст.}$$

Если бы мы измеряли эту высоту в метрах ртутного столба, то получили бы

$$h_{\text{пр}} = \frac{9,81 \cdot 10^4}{13,6 \cdot 9,81 \cdot 10^3} = \frac{10}{13,6} = 0,735 \text{ м} = 735 \text{ мм рт. ст.}$$

Атмосферное давление $p = 9,81 \cdot 10^4$ Па называют атмосферой.

Уравнение (1.19) можно рассматривать и как уравнение энергии.

Действительно, все слагаемые в этом уравнении имеют линейную размерность.

Умножим это уравнение на размерную величину 1 Н (силу); тогда (не записывая единицы) все слагаемые приобретут размерность работы или энергии [Дж]. Очевидно, что уравнение это будет определять *потенциальную энергию*, подсчитанную для массы жидкости весом 1 Н. Назовем ее *удельной энергией*. В этом случае уравнение (1.19) можно прочитать так: **сумма удельной потенциальной энергии положения z и удельной потенциальной энергии давления p/γ есть величина постоянная во всех точках данной покоящейся массы жидкости.**

Измерение давления в данной точке. Гидростатическое давление более удобно вычислять по формуле (1.21). Так как разность ($z_0 - z$) представляет собой глубину h погружения данной точки под уровень свободной поверхности, то можно написать уравнение (1.21) в виде

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (1.22)$$

¹ Существует и другая терминология — «геометрический» или «пьезометрический» напор.

Именно в такой записи и используют это уравнение для вычисления гидростатического давления.

Итак, давление можно измерить двумя способами: по уравнению (1.22) в единицах напряжения сжатия p или по уравнению (1.20) в линейных единицах высоты столба данной жидкости p/γ .

Закон Паскаля. Из уравнения (1.22) видно, что в любой точке жидкости (на любой глубине h) гидростатическое давление p зависит от величины внешнего давления p_0 на свободной поверхности. При увеличении внешнего давления точно на ту же величину увеличится и давление в данной точке. Таким образом, жидкость обладает свойством передавать внешнее давление всем расположенным внутри ее частицам жидкости без изменения. В этом заключается закон Паскаля.

§ 8. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум

Абсолютным давлением p называется гидростатическое давление, определяемое по формуле (1.22).

Из этой формулы следует, что абсолютное давление складывается из двух составляющих: внешнего давления p_0 , передаваемого жидкостью по закону Паскаля, и давления, определяемого величиной γh . Последнее называют *относительным* или, если на свободной поверхности жидкости действует атмосферное давление, *избыточным давлением*. Исходя из принятой формулировки формулу (1.22) можно переписать в следующем виде:

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{вн}} + p_{\text{изб}} \quad \text{или} \quad \frac{p_{\text{абс}}}{\gamma} = \frac{p_{\text{вн}}}{\gamma} + \frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} \quad (1.23)$$

где избыточное давление

$$p_{\text{изб}} = \gamma h. \quad (1.24)$$

Из последнего равенства следует, что избыточное давление изменяется с глубиной по линейному закону

$$\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = h \quad (1.25)$$

и в координатах p/γ и h изобразится в виде биссектрисы координатного угла (рис. 1.9).

Абсолютное давление не может быть отрицательным, так как жидкость не сопротивляется растяжению. Поэтому

$$p \geq 0 \quad (\text{или} \quad p/\gamma \geq 0).$$

Избыточное давление как разность ($p_{\text{абс}} - p_{\text{вн}}$) может быть и больше, и меньше нуля, т. е.

$$p_{\text{изб}} \leq 0 \quad \left(\text{или} \quad \frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} \leq 0 \right).$$

Отрицательное избыточное давление называют *вакуумметрическим давлением*, т. е.

$$-p_{\text{изб}} = p_{\text{вак}} \quad \text{или} \quad -\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = h_{\text{вак}}$$

(здесь $h_{\text{вак}}$ называется *вакуумметрической высотой*). Можно написать

$$h_{\text{вак}} = -\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = -\left(\frac{p_{\text{абс}}}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \right) = \frac{p_0 - p_{\text{абс}}}{\gamma};$$

тогда вакуумметрическая высота выразится формулой

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_0 - p}{\gamma}. \quad (1.26)$$

Вакуумметрическая высота $h_{\text{вак}}$ возрастает по величине с уменьшением абсолютного давления и в пределе, когда $p_{\text{абс}} = 0$

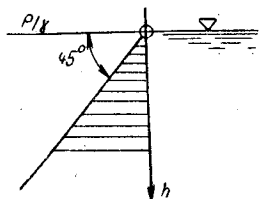


Рис. 1.9. Эпюра распределения гидростатического давления по высоте

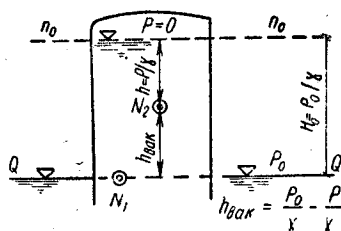


Рис. 1.10. К понятию о вакууме и вакуумметрической высоте

(отрицательным абсолютное давление быть не может), достигает максимума

$$h_{\text{вак.макс}} = \frac{p_0}{\gamma},$$

т. е. величины атмосферного давления.

Допустим, например, что закрытый сверху цилиндр большого диаметра опущен в воду (рис. 1.10) и из него полностью удален воздух, так что на свободной поверхности n_0-n_0 внутри цилиндра абсолютное давление $p=0$. В пределах плоскости $Q-Q$ (например, в точке N_1) абсолютное давление равно атмосферному. Поэтому во всех точках жидкости, находящейся в цилиндре выше плоскости $Q-Q$, абсолютное давление будет меньше атмосферного. Следовательно, в этом пространстве имеется вакуум. Определим величину вакуума в точке N_2 на высоте h_N над плоскостью $Q-Q$. Высота столба воды в цилиндре

$$H_0 = \frac{p_0}{\gamma} \quad \text{и} \quad p_0 = \gamma H_0.$$

Абсолютное давление в точке N_2

$$p = 0 + \gamma h = \gamma h.$$

откуда

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{\gamma H_0 - \gamma h}{\gamma} = H_0 - h.$$

Но из рис. I.10 видим, что $H_0 - h = h_N$, т. е.

$$h_{\text{вак}} = h_{N_2}.$$

Итак, вакуумметрическая высота равна высоте расположения данной точки над плоскостью, где давление равно атмосферному (на внешней свободной поверхности). Очевидно, что в точке N_1 вакуум равен нулю, а в точке, где $p_{\text{абс}} = 0$, $H_{\text{вак}} = H_0$.

§ 9. Равновесие несмешивающихся жидкостей

Предположим, что две несмешивающиеся между собой жидкости с различной плотностью помещены в одном и том же резервуаре и находятся в равновесии. В таком случае и поверхность

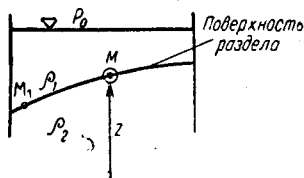


Рис. I.11. Равновесие несмешивающихся жидкостей

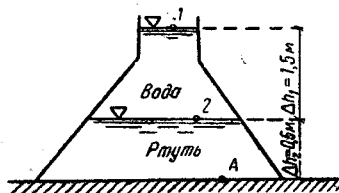


Рис. I.12

их раздела будет также неподвижна. Определим вид такой поверхности. Свободная поверхность является поверхностью уровня (во всех ее точках давление равно p_0), т. е. представляет собой горизонтальную плоскость.

Рассмотрим условия равновесия на неподвижной поверхности раздела жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Предположим, что поверхность раздела занимает положение, как показано на рис. I.11.

Напишем основное дифференциальное уравнение для жидкости: с плотностью ρ_1

$$dp = -\rho_1 g dz$$

и с плотностью ρ_2

$$dp = -\rho_2 g dz.$$

Возьмем на поверхности раздела две точки (точки M и M_1 на рис. I.11). При переходе от одной точки к другой давление p

меняется на величину dp и поэтому в указанных выше равенствах dp будет одним и тем же по величине.

Тогда

$$\rho_1 g dz = \rho_2 g dz$$

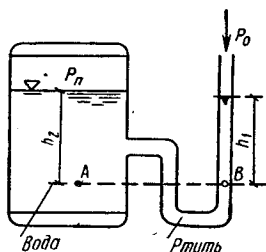
или

$$g dz (\rho_1 - \rho_2) = 0. \quad (1.27)$$

Так как $g \neq 0$, то, если $\rho_1 \neq \rho_2$, то $dz = 0$ и, следовательно, для поверхности раздела справедливо $z = \text{const}$, т. е. поверхность раздела в этом случае может быть только горизонтальной. Тот же результат был бы получен и при рассмотрении условий равновесия на поверхностях раздела других жидкостей, находящихся в резервуаре.

Итак, приходим к общему заключению, что при равновесии несмешивающихся жидкостей поверхности их раздела будут горизонтальными плоскостями. Жидкости при этом расположатся по высоте (считая сверху вниз) в порядке возрастания их плотностей, что следует непосредственно из общих условий устойчивого равновесия механической системы в поле тяготения: центр тяжести системы расположится в наиболее низкой точке, или, иначе, потенциальная энергия системы должна быть минимальной.

Рис. 1.13



Определим для примера давление в точке A на дне резервуара, если в нем находятся ртуть и вода. Толщина верхнего слоя $\Delta h_1 = 1,5$ м (рис. 1.12) и нижнего $\Delta h_2 = 0,5$ м. Давление в точке I равно атмосферному, т. е.

$$p_1 = p_0.$$

Давление в точке 2 по формуле (1.22) равно

$$p_2 = p_0 + \gamma_B \Delta h_1.$$

Давление в точке A определится также по формуле (1.22)

$$p_A = p_2 + \gamma_{PT} \Delta h_2.$$

или

$$p_A = p_0 + \gamma_B \Delta h_1 + \gamma_{PT} \Delta h_2.$$

Полагая $p_0 = 9,81 \cdot 10^4$ Па, $\gamma_B = 9,81 \cdot 10^3$ Н/м³ и $\gamma_{PT} = 13,6 \cdot 10^4$ Н/м³, получим $p_A = 9,81 \cdot 10^4 + 9,81 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 13,6 \cdot 10^4 \cdot 0,5 = 17,93 \cdot 10^4$ Па, или $p_A \approx 1,8$ ат. Определим затем абсолютное давление в замкнутом резервуаре p_n (рис. 1.13), если показания ртутного пьезометра $h_1 = 0,3$ м, а глубина $h_2 = 0,5$ м.

Давление в точке A (внутри резервуара): $p_A = p_n + \gamma h_2$.

Давление в точке B : $p_B = p_0 + \gamma_{PT} h_1$.

Но $p_A = p_B$, так как точки A и B лежат в пределах одной и той же поверхности уровня (поверхность равного давления), поэтому $p_n + \gamma h_2 = p_0 + \gamma_{PT} h_1$, откуда и находим

$$p_n = p_0 + \gamma_{рт} h_1 - \gamma h_2 = 9,81 \cdot 10^4 + 13,6 \cdot 10^4 \cdot 0,3 - 9,81 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 13,34 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Избыточное давление

$$p_{\text{изб}} = p_n - p_0 = 3,52 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 0,36 \text{ ат.}$$

§ 10. Относительное равновесие

Относительным равновесием жидкости называется такой случай ее движения, при котором отдельные ее частицы не смещаются одна относительно другой и вся масса жидкости движется как твердое тело. Например, вообразим, что некоторый замкнутый резервуар (наполненный жидкостью) движется с постоянной скоростью (или постоянным ускорением) в любом направлении и с этой же скоростью (или ускорением) движется также и каждая частица жидкости, находящейся в резервуаре. Очевидно, что рассматриваемая масса жидкости будет неподвижна в координатной системе, связанной с движущимся резервуаром. Такое движение жидкости представляет собой относительное ее равновесие.

Рассмотрим два практически наиболее интересных случая: движение по вертикали и вращательное движение относительно вертикальной оси.

Случай первый. Допустим, что открытый резервуар вместе с находящейся в ней жидкостью движется в вертикальном на-

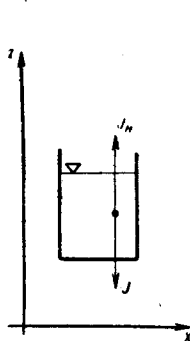


Рис. I.14. Относительное равновесие жидкости при движении по вертикали

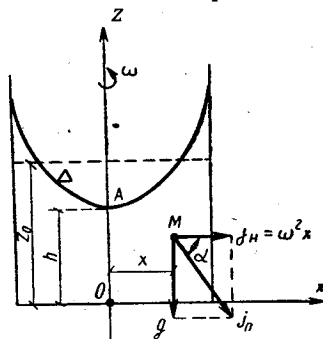


Рис. I.15. Относительное равновесие при вращении жидкости вокруг вертикальной оси

правлении сверху вниз с некоторым постоянным ускорением j , меньшим ускорения свободного падения g или равным ему (рис. I.14).

Определим вид поверхности уровня и закон распределения гидростатического давления. Заметим предварительно, что, согласно принципу Даламбера, при любом движении тела можно

пользоваться уравнениями статики, если к системе действующих сил прибавить силы инерции (они направлены в сторону, противоположную направлению движения). Такая система сил будет уравновешена, и тело можно считать находящимся в равновесном состоянии. Следовательно, мы можем воспользоваться уравнением поверхности уровня

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Чтобы написать уравнение поверхности уровня для данного случая, определим X , Y и Z . Ускорениями действующих сил будут ускорения свободного падения g ($9,81 \text{ м/с}^2$) и ускорение сил инерции j_n . Оба ускорения направлены параллельно оси Oz . Следовательно, проекции этих ускорений на оси x и y равны нулю: $X=0$ и $Y=0$, а

$$Z = -g + j_n = -(g - j_n) = -g \left(1 - \frac{j_n}{g}\right).$$

Итак, уравнение поверхности уровня в дифференциальной форме примет следующий вид:

$$-g \left(1 - \frac{j_n}{g}\right) dz = 0.$$

Если

$$j \neq g, \text{ т. е. } g \left(1 - \frac{j_n}{g}\right) \neq 0, \text{ то } dz = 0.$$

Интегрируя, находим $z = \text{const}$. А это значит, что поверхность уровня будет горизонтальной плоскостью.

Если $j = g$, то $j_n/g = 1$ и тогда dz может быть и не равным нулю, следовательно, форма свободной поверхности может быть произвольной.

Определим теперь закон распределения гидростатического давления для этого случая. Имеем

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

где $X=0$, $Y=0$ и $Z = (j_n - g)$.

Тогда

$$dp = \rho (j_n - g) dz = -\rho g \left(1 - \frac{j_n}{g}\right) dz.$$

Но известно, что $\rho g = \gamma$, откуда

$$\frac{dp}{\gamma \left(1 - \frac{j_n}{g}\right)} + dz = 0.$$

Введем обозначение

$$\gamma' = \gamma \left(1 - \frac{j_n}{g}\right).$$

Величина $\left(1 - \frac{j_n}{g}\right)$ является безразмерной, поэтому $\gamma \left(1 - \frac{j_n}{g}\right)$ и γ' имеют размерность удельного веса (например, Н/м³).

Таким образом, γ' представляет собой объемный вес жидкости в условиях вертикального спуска с ускорением $j = \text{const} < g$. Делая подстановку, получим

$$\frac{dp}{\gamma'} + dz = 0,$$

и после интегрирования найдем

$$\frac{p}{\gamma'} + z = C.$$

Таким образом, в условиях спуска по вертикали с ускорением j закон распределения гидростатического давления будет та-ким же, как и в обычных условиях равновесия жидкости в поле земного тяготения, но с тем отличием, что в подвижной системе координат удельный вес меньше, причем, если $j = g$, т. е. при свободном падении, объемный вес $\gamma' = 0$. Жидкость стала «невесомой».

Статическое вращение жидкости. Предположим, что цилиндр с водой, налитой до глубины z_0 , приведен во вращательное движение вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω , с⁻¹ (рис. I.15).

Вращающиеся стенки цилиндра приведут во вращательное движение ближайшие к стенкам слои жидкости, а затем, вследствие вязкости жидкости — и всю ее массу. По истечении известного времени все частицы жидкости будут вращаться примерно с одной и той же угловой скоростью ω .

Допустим, что такой момент времени наступил. Определим форму поверхности уровня и, в частности, свободной поверхности.

Как и в первой задаче, будем исходить из общего дифференциального уравнения поверхности уровня

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Так как движение симметрично относительно оси вращения, то рассмотрим равновесие частиц жидкости, расположенных в плоскости координат xOz , вращающейся с угловой скоростью ω . Как и в предыдущей задаче, объемными силами будут силы земного тяготения и силы инерции. Последняя представляет собой центробежную силу, направленную параллельно оси Ox и в сторону от оси вращения.

В точке M на расстоянии x от оси Oz линейная скорость частицы $u = x\omega$, поэтому для нее центробежное ускорение

$$j_n = \frac{(x\omega)^2}{x} = \omega^2 x$$

и, следовательно, полное ускорение внешних объемных сил

$$j_n = \sqrt{g^2 + (x\omega^2)^2}.$$

Очевидно, что в данном случае:

$$X = x\omega^2; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Делая подстановку, получим:

$$\omega^2 x dx - g dz = 0$$

или

$$dz = \frac{\omega^2}{g} x dx,$$

и после интегрирования

$$z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C,$$

что представляет собой уравнение параболы с вершиной на оси Oz в точке A , имеющей координату $z_i = h$.

Поскольку уравнение симметрично относительно оси Oz , постольку поверхность уровня будет представлять собой параболоид вращения.

Закон распределения давления найдем, пользуясь основным дифференциальным уравнением гидростатики.

Имеем

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz),$$

и так как

$$X = \omega^2 x; \quad Y = 0; \quad Z = -g,$$

то

$$dp = \rho (\omega^2 x dx - g dz),$$

или

$$dp = \rho g \left(\frac{\omega^2}{g} x dx - dz \right) = \gamma \left(\frac{\omega^2}{g} x dx - dz \right),$$

или

$$\frac{dp}{\gamma} + dz - \frac{\omega^2}{g} x dx = 0.$$

Интегрируя, находим (при $\gamma = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$)

$$\frac{p}{\gamma} + z - \frac{\omega^2 x^2}{2g} = C = \text{const.}$$

Для определения C возьмем точку A на свободной поверхности при $x=0$. Для этой точки $p=p_0$ (давление атмосферное), $z=h$ (координата вершины параболы).

Тогда

$$C = \frac{p_0}{\gamma} + h.$$

или

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + h + \frac{(\omega x)^2}{2g}.$$

Для всех точек любой вертикали на расстоянии x от оси Oz абсцисса $x = \text{const}$, т. е.

$$\frac{p_0}{\gamma} + h + \frac{(\omega x)^2}{2g} = \text{const.}$$

Следовательно, закон распределения давления по этой вертикали определяется уравнением

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const} = H'_x \text{ и } p = \gamma(H'_x - z).$$

Таким образом, и в данном случае распределение давления происходит по линейному закону (по закону треугольника).

Для избыточного давления

$$\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} + z = h + \frac{(\omega x)^2}{2g} = H,$$

или

$$p_{\text{изб}} = \gamma(H - z).$$

§ 11. Давление жидкости на плоские стенки.

Центр давления

Определение силы давления. Предположим, что плоская стенка, ограждающая некоторую массу неподвижной жидкости, наклонена к горизонту под углом α . Определим силу P , с которой жидкость действует на выбранную в пределах этой стенки площадку ω (рис. I.16).

В каждой точке на этой площади гидростатическое давление равно p и отвечает формуле $p = \frac{dP}{d\omega}$, где dP — элементарная сила, а $d\omega$ — элементарная площадка.

Следовательно сила, с которой жидкость действует на элементарную площадку $d\omega$, будет равна $dP = p d\omega$. Эта сила направлена по нормали к плоскости стенки. Аналогично будет определяться сила давления жидкости на любую другую элементарную площадку $d\omega$. Поэтому искомую силу P , с которой покоящаяся жидкость действует на площадь ω , можно найти как равнодействующую системы параллельных сил dP , равную их алгебраической сумме.

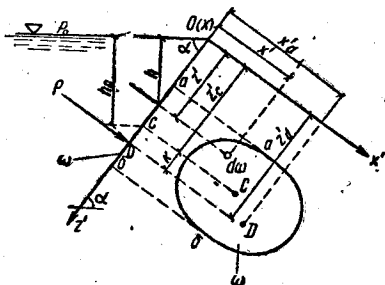


Рис. 1.16. К определению силы давления жидкости на плоскую стенку

Итак, искомая сила

$$P = \int_{\omega} dP = \int_{\omega} p d\omega. \quad (1.28)$$

Но в любой точке гидростатическое давление

$$p = p_0 + \gamma h,$$

откуда

$$P = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega. \quad (1.29)$$

Ориентируем данную площадь относительно соответственно расположенных координат осей. Примем за ось Ox линию пересечения свободной поверхности воды с плоскостью стенки и направим координатную ось Oz' вниз вдоль стенки (рис. 1.16).

В этой координатной системе все точки определяются координатами x' и z' , поэтому глубину h выразим через z' , а именно: $h = z' \sin \alpha$.

Итак, силу P можно определить по формуле

$$P = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega = \int_{\omega} (p_0 + \gamma z' \sin \alpha) d\omega,$$

или

$$P = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z' d\omega. \quad (1.30)$$

Для определения интеграла $\int_{\omega} z' d\omega$ обратим внимание на то, что подынтегральное выражение можно рассматривать как статический момент площадки $d\omega$ относительно координатной оси Ox (или оси Ox'). Тогда этот интеграл представит собой сумму статических моментов элементов площади ω , т. е. статический момент самой площади ω относительно той же оси Ox .

* Здесь принято обозначение Oz' вместо Oz (без штриха), так как эта ось расположена не вертикально.

Известно, что статический момент площади относительно любой оси, лежащей в той же плоскости, равен произведению этой площади на расстояние от центра ее тяжести до оси моментов.

Таким образом,

$$\int_{\omega} z' d\omega = z'_c \omega,$$

где z'_c — расстояние от точки c (центра тяжести площади ω) до оси Ox' (оси моментов).

Делая соответствующие подстановки в формулу (I.30), получим

$$P = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha z'_c \omega. \quad (\text{I.31})$$

Здесь первое слагаемое $p_0 \omega$ представляет собой атмосферное давление на свободную поверхность, передаваемое жидкостью по закону Паскаля, а второе — давление, оказываемое на стенку уже самой жидкостью (можно сказать — избыточное давление).

Перепишем формулу (I.31) в более удобном для практических расчетов виде. Заметим, что произведение $z'_c \sin \alpha$ равно глубине погружения центра тяжести площади ω под уровень свободной поверхности h_c , поэтому

$$P = p_0 \omega + \gamma h_c \omega, \quad (\text{I.32})$$

или, за вычетом атмосферного давления,

$$P = \gamma h_c \omega. \quad (\text{I.33})$$

Произведение $h_c \omega$ представляет собой объем цилиндра с площадью основания, равной ω , и высотой, равной h_c , с учетом чего формулу (I.33) можно прочесть так: сила, с которой жидкость действует на плоскую стенку, равна весу жидкости в объеме цилиндра с основанием, равным площади данной стенки, и высотой, равной глубине погружения центра тяжести этой площади под уровень свободной поверхности.

Формулу (I.33) можно еще упростить.

Так как γh_c представляет собой гидростатическое давление в центре тяжести площади ω , то справедливо равенство

$$P = p_c \omega. \quad (\text{I.33a})$$

Подобно тому как гидростатическое давление p не зависит ни от формы, ни от размеров резервуара, в котором находится покоящаяся жидкость, так и сила P давления жидкости на плоскую стенку, определяемая по формулам (I.32) или (I.33), также не зависит ни от объема жидкости в резервуаре, ни от размеров боковых стенок резервуара, а только от величины данной площади, на которую действует жидкость, и от глубины погружения ее центра тяжести под уровень свободной поверхности.

Давление жидкости на горизонтальное дно сосуда. Частный случай. Согласно формуле (I.33) сила давления жидкости на горизонтальное дно сосуда равна весу жидкости в объеме цилиндра с основанием, равным площади дна, и высотой, равной глубине в этом сосуде.

На рис. I.17 изображены три различных по форме сосуда (резервуара) с одинаковой по величине площадью их горизон-

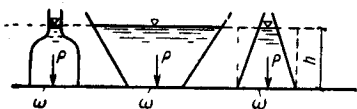


Рис. I.17

тального дна ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$). Поэтому, несмотря на разную форму сосудов, давление жидкости на дно будет одинаковым во всех трех случаях.

Центр давления. Выше были определены сила давления жидкости на плоскую стенку и направление этой силы. Определим теперь точку D ее приложения (см. рис. I.16). Эта точка лежит в плоскости стенки, т. е. в плоскости координатных осей xOz' , а поэтому необходимо определить только две ее координаты: x_d и z'_d . Определим сначала координату z'_d .

Воспользуемся с этой целью теоремой Вариньона, согласно которой момент равнодействующей системы параллельных сил равен сумме моментов сил ее составляющих. За ось моментов примем ось Ox , и тогда уравнение моментов запишется в следующем виде:

$$m(P)_{Ox} = \Sigma m(dP)_{Ox}. \quad (I.34)$$

Момент силы P равен:

$$m(P)_{Ox} = Pz'_d.$$

Момент элементарной силы dP равен:

$$m(dP)_{Ox} = z' dP.$$

Итак, уравнение (I.34) переписывается в виде

$$z'_d P = \int_{\omega} z' dP. \quad (I.35)$$

Но по формуле I.33

$$P = \gamma h_c \omega = \gamma z'_c \sin \alpha \omega,$$

а

$$dP = \gamma z'_c \sin \alpha d\omega,$$

Делая подстановку в уравнение (I.35) и решая его относительно z'_d , находим

$$z'_d = \frac{\int \gamma \sin \alpha z'^2 d\omega}{\gamma \sin \alpha z'_c \omega}$$

и, сокращая дробное выражение на постоянные множители γ и $\sin \alpha$, получим

$$z'_d = \frac{\int z'^2 d\omega}{z'_c \omega} \quad (I.36)$$

Здесь числитель представляет собой момент инерции площади ω относительно координатной оси Ox :

$$\int_{\omega} z'^2 d\omega = J_{0x}$$

а по теореме о моментах инерции относительно параллельных осей можем написать

$$J_{0x} = J_0 + z'^2_c \omega,$$

где J_0 — момент инерции площади ω относительно оси, проходящей через центр тяжести площади ω и параллельной оси Ox ;

z'_c — расстояние от центра тяжести площади ω до той же оси Ox .

Делая соответствующие подстановки в уравнение (I.36), получим последовательно

$$z'_d = \frac{J_{0x}}{z'_c \omega} = \frac{J_0 + z'^2_c \omega}{z'_c \omega}.$$

или

$$z'_d = \frac{J_0}{z'_c \omega} + z'_c. \quad (I.37)$$

Обозначив первое слагаемое правой части через K :

$$\frac{J_0}{z'_c \omega} = K, \quad (I.38)$$

получим

$$z'_d = z'_c + K.$$

где K имеет размерность длины и иногда называется эксцентриситетом.

Величина K всегда положительна, так как момент инерции J_0 и произведение $z'_c \omega$ всегда положительны. Отсюда можно сделать вывод, что $z'_d > z'_c$ или $h_d > h_c$, т. е. центр давления (точка D) лежит на большей глубине, чем центр тяжести (точка c) данной площади ω .

Обе точки совпадают, если площадка (любой формы) расположена горизонтально или если площадка (симметричная относительно линии, параллельной координатной оси Oz') расположена на бесконечно большой глубине.

Пример 1.1. Определить давление жидкости на плоские боковые стенки цилиндрического резервуара, если его диаметр $D=3$ м (рис. 1.18).

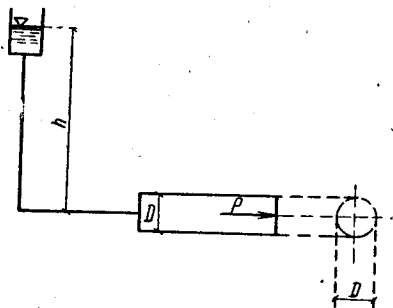


Рис. 1.18

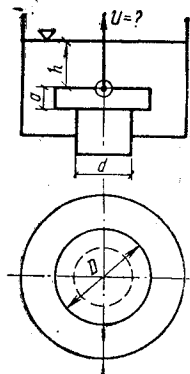


Рис. 1.19

Решение. Для этого сначала найдем силу давления P (для избыточного давления) по формуле (1.33а).

Давление в центре тяжести площади стенки $p = \gamma h_c = 9,81 \cdot 10^3 \cdot 1,5 = 1,47 \times 10^4$ Па, откуда

$$P = p_c \omega = 1,47 \cdot 10^4 \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Пример 1.2. Определить усилие U , необходимое для того, чтобы поднять клапан (рис. 1.19), если диаметр головки $D=0,5$ м, диаметр цилиндрического ствола $d=0,3$ м, высота головки $a=0,25$ м и глубина погружения клапана $h=1,25$ м. Вес клапана $G=29,4$ Н.

Решение. Необходимое усилие U находим из условия предельного равновесия

$$U = P_1 - P_2 + G,$$

где P_1 и P_2 — силы давления жидкости на верхнюю и нижнюю (кольцевую) поверхности головки клапана.

Вычисляем последовательно:

$$P_1 = \gamma h \frac{\pi D^2}{4} = 9,81 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} \approx 2400 \text{ Н;}$$

$$P_2 = \gamma \frac{(h+a) \pi (D^2 - d^2)}{4} = 1860 \text{ Н.}$$

Искомое усилие

$$U = 2400 - 1860 + 29,4 \approx 570 \text{ Н.}$$

Пример 1.3. Определить силу R давления жидкости на горизонтальное дно резервуара (внутреннее давление снизу вверх) в соответствии с рис. 1.20, если $p_0 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$; $d = 2 \text{ м}$.

Решение. Искомая сила $R = p\omega$, где p — гидростатическое давление в центре тяжести площади ω (в точке M).

По формуле (1.21)

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z) = 9,81 \cdot 10^4 + 9,81 \times 10^3(-2,5) \approx 7,36 \cdot 10^4 \text{ Па,}$$

откуда

$$R = p\omega = p \frac{\pi d^2}{4} = 7,36 \cdot 10^4 \times$$

$$\times \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 23,1 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

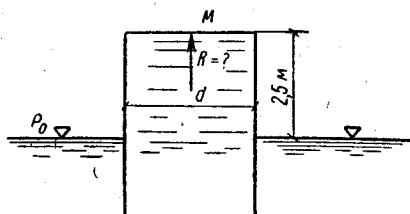


Рис. 1.20

§ 12. Давление жидкости на криволинейные поверхности. Закон Архимеда.

Расположим оси координат Ox и Oy в плоскости свободной поверхности жидкости, а ось Oz направим вертикально вниз (рис. 1.21). Допустим, что внутри жидкости расположена жесткая, непроницаемая криволинейная пластинка, не имеющая толщины (толщина $\delta = 0$) и к тому же невесомая. Очевидно, такая пластинка будет неподвижной. Требуется определить, с какой силой жидкость давит на эту пластинку.

Пусть на верхнюю сторону пластинки жидкость оказывает давление с силой R , а на нижнюю — с силой R' . Эти силы по величине равны между собой, действуют по одной прямой и противоположно одна другой по направлению, так что безразлично, какую из них мы будем определять. Найдем, например, силу R , равнодействующую элементарных сил dP .

Так как поверхность пластинки криволинейна, то силы dP образуют систему непараллельных сил. Такая система в общем случае приводится к главному вектору и одной паре сил. Разложим каждую элементарную силу dP на три составляющие по координатным осям, т. е. на dP_x , dP_y и dP_z . Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= pd\omega \cos \alpha; \\ dP_y &= pd\omega \cos \beta; \\ dP_z &= pd\omega \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

где α, β и γ — углы наклона элементарных сил dP к координатным осям, различные для разных площадок $d\omega$.

Суммируя проекции элементарных сил, найдем соответствующие проекции равнодействующей силы R :

$$R_x = \Sigma p d\omega \cos \alpha;$$

$$R_y = \Sigma p d\omega \cos \beta;$$

$$R_z = \Sigma p d\omega \cos \gamma.$$

Сила R по величине будет равна:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

а направление линии ее действия найдем по направляющим косинусам:

$$\cos \alpha = R_x/R, \quad \cos \beta = R_y/R, \quad \cos \gamma = R_z/R.$$

Понятно, что указанный здесь способ решения осложняется или даже становится невозможным, если поверхность S не мо-

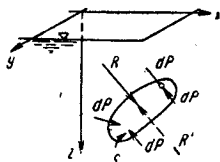


Рис. 1.21. Давление жидкости на криволинейную стенку

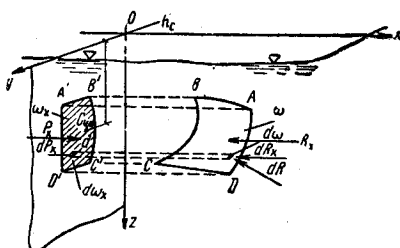


Рис. 1.22. Давление жидкости на криволинейную стенку по горизонтальному направлению

жет быть выражена алгебраически в виде функции $S(x, y, z)$. Упростим это решение.

Систему уравнений (1.39) можно записать так:

$$dR_x = p d\omega \cos \alpha = p d\omega_x;$$

$$dR_y = p d\omega \cos \beta = p d\omega_y;$$

$$dR_z = p d\omega \cos \gamma = p d\omega_z,$$

где $d\omega_x$ — проекция площадки $d\omega$ на любую вертикальную плоскость, перпендикулярную оси Ox (в частности, например, на плоскость yOz); аналогично $d\omega_y$ и $d\omega_z$ — суть проекции площадки $d\omega$ на плоскости, перпендикулярные осям Oy и Oz .

Выражение $p d\omega_x$ представляет собой силу давления жидкости на элементарную площадку $d\omega_x$ (рис. 1.22).

Интегрируя, получим

$$R_x = \int_{\omega_x} dR_x = \int_{\omega_x} p d\omega_x.$$

Но интеграл $\int_{\omega_x} pd\omega_x$ представляет собой силу давления жидкости на всю плоскую площадку ω_x (см. рис. 1.22), поэтому $\int_{\omega_x} pd\omega_x = \gamma h'_c \omega_x$, где h'_c — глубина погружения центра тяжести площадки ω_x под уровень свободной поверхности. Итак, получим силу

$$R_x = P_x = \gamma h'_c \omega_x.$$

По аналогии

$$R_y = P_y = \gamma h''_c \omega_y.$$

Таким образом, проекции на горизонтальные оси силы давления жидкости R на криволинейную поверхность ($ABCD$ на рис. 1.22) равны силам давления на проекции ω_x ($A'B'D'C'$ на рис. 1.22) и ω_y этой поверхности на вертикальные плоскости, соответственно перпендикулярные осям.

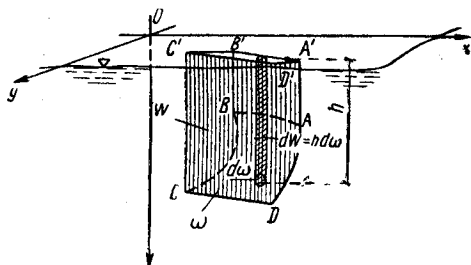


Рис. 1.23. Давление жидкости на криволинейную стенку по вертикальному направлению

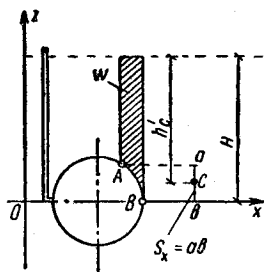


Рис. 1.24

Определим теперь вертикальную проекцию силы R , т. е. силу R_z . Последняя, очевидно, равна:

$$R_z = \int_{\omega_z} pd\omega_z = \int_{\omega_z} \gamma h d\omega_z.$$

где h — глубина погружения площадки $d\omega$ под уровень свободной поверхности (рис. 1.23). Произведение $hd\omega_z$ можно рассматривать как элементарный объем dW . Поэтому силу R_z можно выразить как

$$R_z = \int_{\omega_z} \gamma dW = \gamma \int_{\omega_z} dW = \gamma W.$$

где W — объем вертикального цилиндра ($ABCD A'B'C'D'$). Следовательно, сила R_z равна весу жидкости в объеме вертикального столба, опирающегося на заданную криволинейную поверхность и ограниченного плоскостью свободной поверхности.

Пусть цилиндрический напорный резервуар снабжен съёмной цилиндрической крышкой AB , длина которой вдоль образующей резервуара равна единице (рис. 1.24). Определить силу R давления жидкости на эту крышку. Из предыдущего

$$R \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

При указанном на рис. 1.24 расположении осей сила $R_y = 0$, а сила $R_x = \gamma h'_c S_x$ (где S_x — проекция крышки AB на плоскость zoy имеет форму прямоугольника).

Глубина погружения центра тяжести этой площади (точки c)

$$h'_c = H - \frac{ab}{2}.$$

откуда

$$R_x = \gamma \left(H - \frac{ab}{2} \right) S_x.$$

Вертикальная составляющая R_z находится по формуле

$$R_z = \gamma W,$$

где объем W показан штриховкой на рис. 1.24 (этот объем всегда можно вычислить с той или иной степенью точности).

Линия действия полной силы давления R пересекает ось цилиндра под углом наклона к горизонту α , величина которого определяется из условия $\operatorname{tg} \alpha = R_z/R_x$.

Закон Архимеда. Определим давление жидкости на погруженное в него тело (рис. 1.25).

При изображенном на рис. 1.25 расположении координатных осей компоненты R_x и R_y равны нулю и сила давления на всю поверхность погруженного тела

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{R_z^2} = R_z.$$

Определим значение R_z . Проведя контурную линию AB (смотря на тело сверху), разделим поверхность тела на две части — верхнюю и нижнюю. На верхнюю часть поверхности жидкость давит с силой R'_z , а на нижнюю — с силой R''_z , причем

$$R_z = R'_z - R''_z,$$

где

$$R'_z = \gamma W (AA' B' BCA), \text{ а } R''_z = \gamma W (AA' B' BDA).$$

Тогда

$$R_z = R'_z - R''_z = \gamma [W (AA' B' BCA) - W (AA' B' BDA)] = -\gamma W (AC BDA),$$

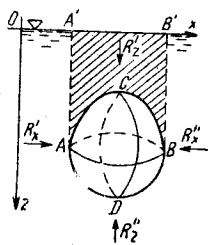


Рис. 1.25. К закону Архимеда

или короче

$$R = -\gamma W, \quad (I.40)$$

где W — объем тела.

Таким образом, по закону Архимеда сила, с которой жидкость действует на погруженное в нее тело, равна весу жидкости в объеме погруженного тела. Эта сила называется Архимедовой подъемной силой.

Глава II

РАВНОВЕСИЕ ГАЗОВ

§ 13. Основные уравнения и поверхность уровня

Как отмечалось выше, газы относятся к сжимаемым жидкостям, и уравнения равновесия и движения газов отличаются от таковых для капельной жидкости лишь тем, что они должны учитывать сжимаемость газов. Поэтому полученные ранее дифференциальные уравнения равновесия являются общими для капельной жидкости и газов.

Итак, для газов справедливы:

дифференциальное уравнение равновесия

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz);$$

характеристическое уравнение

$$\rho = f(p, t^0)$$

и уравнение поверхности уровня

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Рассмотрим равновесие газов в условиях земного тяготения и решим основную задачу — распределение гидростатического давления; т. е. определим функцию $p = f(x, y, z)$.

Поверхность уровня. Расположим координатную систему так, чтобы оси Ox и Oy были горизонтальны, а ось Oz была направлена вверх. Тогда проекции ускорения объемной силы (силы земного тяготения) соответственно равны: $X=0$, $Y=0$ и $Z=-g$ (рис. II.1).

Подставляя эти значения в уравнение поверхности уровня, получим (так же, как и для капельной жидкости)

$$-gdz = 0 \quad (II.1)$$

и, интегрируя это уравнение, найдем $-gz = \text{const}$ или $z = C$, т. е. уравнение семейства горизонтальных плоскостей (например, A на рис. II.1). Следовательно, в пределах любой горизонтальной плоскости, проведенной через область, занятую покоящимся газом, давление остается неизменным. Например, в не-

которой замкнутой камере (рис. II.2) давления в точках A и B плоскости $n-n$ равны между собой ($p_A = p_B$). Но эти давления могут отличаться от давления наружного воздуха p_c в точке C .

Итак, при равновесии газа гидростатическое давление в точке изменяется только с высотой расположения этой точки $p = f(z)$.

Эту зависимость находим путем совместного решения основного дифференциального уравнения гидростатики и характеристического уравнения. Как известно из введения, последнее определяет собой связь между плотностью, давлением и темпера-

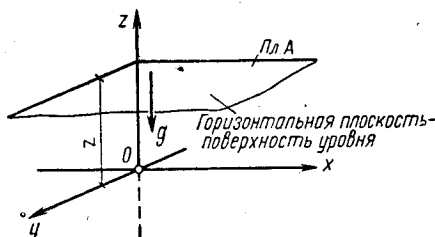


Рис. II.1

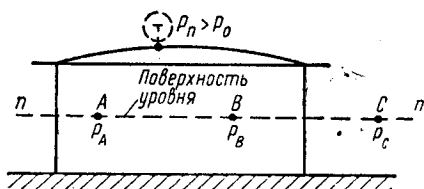


Рис. II.2. Газгольдер (внутреннее давление p_0 ; $p_A = p_B > p_C$).

турой, которая устанавливается законами термодинамики. Напомним еще раз эти законы.

Уравнение состояния газа записывается в виде

$$\frac{p}{\rho} = RT \text{ или } \frac{p}{\rho} = R' T^*.$$

Здесь R — удельная газовая постоянная [для воздуха $R = 287,14$ Дж/(кг·К)];

$R' = R/g$ (для воздуха $R' = 29,27$ м/К);

p — гидростатическое давление в точке, Па;

T — температура, К ($T = 273 + t$ °С);

γ — удельный вес, Н/м³;

ρ — плотность, кг/м³.

Изотермический процесс — процесс изменения давления и объема газа при поддержании одной и той же его температуры.

В уравнении состояния

$$p v_r = R' T$$

(где v_r — удельный объем, т. е. объем массы газа, вес которой равен 1 Н; $[v] = [\text{м}^3/\text{Н}]$ и температура $T = \text{const}$). Тогда уравнение состояния определяется законом Бойля — Мариотта

* Во многих случаях удобно пользоваться последней записью.

$$p v_{\Gamma} = \text{const} \text{ или } \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

В этом случае масса газа при изменении объема или отдает тепловую энергию (при сжатии), или получает ее извне (при расширении).

Таким образом, изотермический процесс сопровождается теплообменом.

Адиабатический процесс представляет собой случай изменения давления в условиях отсутствия теплообмена.

Уравнение адиабаты имеет вид

$$\frac{p}{\gamma^k} = \frac{p_0}{\gamma_0^k} = \text{const} \text{ или } \frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} = \text{const},$$

где k — показатель адиабаты (для воздуха обычно принимают $k = 1,4 = \text{const}$).

Адиабатический процесс является частным случаем более общего **политропического процесса**, уравнение которого записывается в виде

$$\frac{p}{\gamma^n} = \frac{p_0}{\gamma_0^n} = \text{const} \text{ или } \frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}.$$

Так как политропический процесс происходит с теплообменом и может быть различным, показатель политропы может быть также различным.

Во всех указанных условиях при изменении давления плотность газа изменяется. Однако во многих практических случаях изменение плотности бывает столь незначительным, что без существенной погрешности можно принять $\rho = \text{const}$.

§ 14. Распределение давления и температуры

В связи с указанными особенностями характеристического уравнения рассмотрим закон распределения давления в следующих трех предположениях: а) плотность постоянна ($\rho = \text{const}$) независимо от теплового режима; б) плотность изменяется, подчиняясь изотермическому закону ($T = \text{const}$), при этом

$$\rho = \frac{p}{gR'T} = \frac{p}{RT};$$

в) плотность изменяется по политропическому закону, при этом

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n}.$$

Распределение давления при $\rho = \text{const}$. В этом случае распределение давления в покоящейся газовой среде аналогично

таковому для капельной жидкости. Действительно, так как в поле земного тяготения и принятом нами расположении координатных осей проекции ускорения объемной силы (силы земного тяготения) соответственно равны $X=0$, $Y=0$ и $Z=-g$, то основное дифференциальное уравнение гидростатики имеет вид

$$dp = -\rho g dz$$

или

$$\frac{dp}{\rho} + g dz = 0.$$

Интегрируя это выражение с учетом $\rho = \text{const}$, получим

$$\frac{p}{\rho} + gz = C. \quad (\text{II.2})$$

Постоянная интегрирования C определяется из условий на границе; если, например, на некоторой заданной высоте z_0 известно давление p_0 , то, подставляя эти значения в уравнение (II.2), найдем

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 = C$$

и, следовательно,

$$\frac{p}{\rho} + gz = \frac{p_0}{\rho} + gz_0,$$

или

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g(z_0 - z).$$

Из этого уравнения видно, что давление убывает с увеличением высоты расположения данной точки.

Пример II.1. Допустим, что на уровне моря в данной точке земной поверхности атмосферное давление $p_0 = 10,1 \cdot 10^4$ Па, температура воздуха $t = 27^\circ \text{C}$. Определить давление на высоте $h = 500$ м.

Решение. Искомое давление

$$p = p_0 + \rho(z_0 - z)g,$$

где

$$z = z_0 + h = z_0 + 500.$$

Плотность

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101 \cdot 10^3}{287,14(273 + 27)} = 1,175 \text{ кг/м}^3.$$

Находим искомое давление

$$p = 101 \cdot 10^3 + 1,175 [z_0 - (z_0 + 500)] 9,8 = 101 \cdot 10^3 + 11,5 (-500) = 9,525 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Пример II.2. Определить высоту границы воздушного слоя над земной поверхностью в предположении, что плотность воздуха $\rho = 1,175 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Из основного уравнения

$$h = (z - z_0) = \frac{p_0 - p}{\rho g} = \frac{p_0 - 0}{\rho g} = \frac{10,1 \cdot 10^4}{11,5} = 8800 \text{ м.}$$

Примечание. Такой результат не соответствует реальным условиям и показывает, что использование предположения о постоянстве плотности при очень больших разностях высот может приводить к существенным погрешностям.

Распределение давления при изотермическом процессе.

В этом случае основное дифференциальное уравнение получит вид

$$dp = -\rho g dz = -g \frac{\rho}{RT} dz$$

или после разделения переменных

$$g dz = -RT \frac{dp}{p}$$

Интегрируя это уравнение, находим (при $RT = \text{const}$)

$$g(z_2 - z_1) = -RT(\ln p_2 - \ln p_1) = RT(\ln p_1 - \ln p_2) = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (\text{II.3})$$

Обозначая $z_2 - z_1 = h$, где h — превышение интересующей нас точки 2 над точкой 1, то же уравнение запишем в виде

$$gh = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (\text{II.4})$$

В этом уравнении для воздуха $R = 287,14 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Таким образом, при изотермическом процессе увеличение высоты расположения точки при изменении давления следует логарифмическому закону.

Эта же зависимость может быть представлена и в такой форме:

$$e^{gh/RT} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (\text{II.5})$$

Полагая давление $p_1 = p_0$, т. е. равным атмосферному на уровне моря, и, следовательно, понимая h как превышение данной точки над уровнем моря, можем написать в общей форме

$$p = p_0 e^{-gh/RT}, \quad (\text{II.6})$$

откуда видно, что изменение давления при изменении высоты следует экспоненциальному закону и при $p \rightarrow 0$ высота $h \rightarrow \infty$.

Пример II.3. Определить давление p на высоте $h = 500 \text{ м}$ над уровнем моря, если давление на уровне моря равно $p_0 = 10,1 \cdot 10^4 \text{ Па}$ и температура $T = 273 + 27 = 300 \text{ К}$.

Решение. Вычисляем RT [при $R=287,14$ Дж/(кг·К)]

$$RT = 287,14 \cdot 300 = 86,2 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$\frac{hg}{RT} = \frac{500 \cdot 9,8}{86,2 \cdot 10^3} = 0,057;$$

$$e^{0,057} = 1,005,$$

и тогда искомое давление

$$p = \frac{p_0}{e^{gh/RT}} = \frac{10,1 \cdot 10^4}{1,005} \approx 10,1 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Заметим, что в предыдущем примере при тех же условиях, но при $\rho = \text{const}$, давление оказалось равным $9,525 \cdot 10^4$ Па, т. е. отличается от давления при изотермическом процессе на величину

$$\frac{\Delta p}{p} 100 = \frac{5750}{10,1 \cdot 10^4} 100 \approx 5,7 \text{ \%}.$$

Распределение давления при политропическом процессе.
В этом случае

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n}.$$

Делая необходимую подстановку, находим

$$dp = -\rho g dz = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n} g dz,$$

откуда

$$dz = -\frac{\rho_0^{1/n}}{\rho_0 g} \cdot \frac{dp}{p^{1/n}} = A p^{-1/n} dp.$$

Интегрируя, получим

$$z_2 - z_1 = -A \frac{\frac{n-1}{p_2^{n-1}} - \frac{n-1}{p_1^{n-1}}}{\frac{n-1}{n}} = A \frac{n}{n-1} \left(\frac{n-1}{p_1^{n-1}} - \frac{n-1}{p_2^{n-1}} \right),$$

где

$$A = \frac{\rho_0^{1/n}}{\rho_0 g}.$$

Вводя это значение A , имеем

$$z_2 - z_1 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\rho_0^{1/n}}{g \rho_0} \frac{n-1}{p_1^{n-1}} - \frac{\rho_0^{1/n}}{g \rho_0} \frac{n-1}{p_2^{n-1}} \right)$$

или, так как для политропического процесса

$$\frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} = \frac{p_1^{1/n}}{\rho_1} = \frac{p_2^{1/n}}{\rho_2},$$

$$z_2 - z_1 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_1^{1/n}}{\rho_1 g} \frac{\rho_1^{n-1}}{\rho_1^n} - \frac{p_2^{1/n}}{g \rho_2} \frac{\rho_2^{n-1}}{\rho_2^n} \right).$$

Замечая, что для слагаемых в правой части справедливо равенство:

$$\frac{p_1^{1/n}}{g \rho_1} \frac{\rho_1^{n-1}}{\rho_1^n} = \frac{p_1}{g \rho_1} \quad \text{и} \quad \frac{p_2^{1/n}}{g \rho_2} \frac{\rho_2^{n-1}}{\rho_2^n} = \frac{p_2}{g \rho_2},$$

получим уравнение

$$z_2 - z_1 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_1}{g \rho_1} - \frac{p_2}{g \rho_2} \right), \quad (\text{II.7})$$

которое можем записать в форме

$$gz_1 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = gz_2 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} \quad (\text{II.8})$$

или в более общей форме

$$gz + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p}{\rho} = gz_0 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (\text{II.8a})$$

Это уравнение и определяет собой закон распределения давления при политропическом процессе.

Для адиабатического процесса, как известно, $n = k \approx 1,41$ и, следовательно,

$$\frac{n}{n-1} = \frac{1,41}{0,41} \approx 3,4.$$

Поэтому можно написать

$$gh = (z - z_0) g = 3,4 \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right).$$

Но, пользуясь уравнением адиабаты

$$\frac{p}{\rho^{1,41}} = \frac{p_0}{\rho_0^{1,41}},$$

имеем соотношение

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/1,41} \approx \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0,71}.$$

Делая соответствующие подстановки и преобразования, получим

$$h = 3,4 \frac{p_0^{0,71}}{g \rho_0} \left(\rho_0^{0,29} - \rho^{0,29} \right). \quad (\text{II.9})$$

Очень часто на практике такое приближенное вычисление оказывается вполне достаточным.

Пример II.4. Определить давление p_1 на высоте $h=500$ м при $p_0=10,1 \times 10^4$ Па и $g \rho_0=11,5$ Н/м³. Для адиабатического процесса имеем

$$p^{0,29} = p_0^{0,29} - \frac{g \rho_0 h}{3,4 p_0^{0,71}}.$$

Вычисляя, получим $p_0^{0,29}=28,2$ и $p_0^{0,71}=3560$, откуда

$$p^{0,29} = 28,2 - \frac{500 \cdot 11,5}{3,4 \cdot 3560} = 27,73$$

и, следовательно, $p=9,6 \cdot 10^4$ Па.

Распределение температуры. Пользуясь формулой (II.8a), можно составить уравнение, определяющее собой закон распределения температуры в покоящейся газовой среде.

По уравнению состояния имеем

$$\frac{p}{\rho} = RT \text{ и } \frac{p_0}{\rho} = RT_0.$$

Подставляя эти значения в уравнение (II.8a), найдем

$$gz + \frac{n}{n-1} RT = gz_0 + \frac{n}{n-1} RT_0.$$

что и представит собой закон распределения температуры.

Обозначая, как правило, буквой h разность $(z-z_0)$, находим

$$\frac{n}{n-1} RT = \frac{n}{n-1} RT_0 - hg.$$

откуда

$$T = T_0 - \frac{n-1}{nR} hg. \quad (\text{II.10})$$

Из формулы (II.10) следует, что изменение температуры по высоте происходит по линейному закону.

Для адиабатического процесса $n=1,4$ и тогда при $R=287,14$ Дж/(кг·К) получим

$$T \approx T_0 - 0,01h.$$

Отсюда видим, что с увеличением высоты на 100 м температура воздуха понижается на 1°.

На практике очень часто при производстве технических расчетов принимают для воздуха (газа) условие зависимости плотности от температуры $\rho = \rho_0 T/T_0$ и независимость ее от давления. Это условие, понятно, допустимо только при малой разности давления в данной ограниченной области, занятой воздухом (газом). Так, если рассматривается равновесие воздуха в замк-

нутой камере высотой ~ 50 м, то разность давления в нижней и верхней точках этой камеры составит всего

$$\Delta p \cong p_1 - p_2 = \rho (h_2 - h_1)g = 11,5 \cdot 50 = 575 \text{ Па},$$

т. е. весьма малую долю атмосферного давления;

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{575}{10,1 \cdot 10^4} \approx 0,006, \text{ или } 0,6 \text{ \%}.$$

Пример II.5. Определить разность давления внутреннего и наружного воздуха на высоте точек A и B для замкнутой камеры, имеющей небольшое отверстие в стенке (рис. II.3). Температура воздуха внутри камеры $T_1 = 273 + 22 = 295$ К, а снаружи $T_0 = 250$ К; высоты $h_1 = 10$ м и $h_2 = 2$ м. Давление наружного воздуха для уровня отверстия p_0 . Считать, что воздух внутри и снаружи находится в равновесии. Плотность наружного воздуха $\rho_0 = 1,175$ кг/м³.

Решение. Давление в точке A внутри камеры

$$p_A = p_0 - \rho_1 h_1 g.$$

Давление наружного воздуха на высоте точки A

$$p'_A = p_0 - \rho_0 h_1 g.$$

Разность давлений

$$\Delta p_A = p_A - p'_A = gh_1 (\rho_0 - \rho_1) = \rho_0 h_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) g.$$

Аналогично находим для точки B

$$\Delta p_B = \rho_0 h_2 g \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right).$$

Вычисляем отношение ρ_1/ρ_0 по формуле $\rho_1/\rho_0 = T_0/T_1$. По условию задачи $T_1 = 295$ К, а $T_0 = 250$ К, поэтому $\rho_1 : \rho_0 = 250 : 295 = 0,85$.

Тогда $\Delta p_A = 11,5 \cdot 10 (1 - 0,85) = 97,75$ Па, а $\Delta p_B = 11,5 \cdot 2 (0,85 - 1) = -3,45$ Па, так как $1,175 \cdot 9,8 = 11,5$ Н/м³.

График распределения разности Δp по высоте показан на рис. II.3.

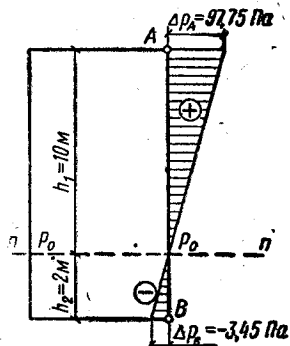


Рис. II.3. Распределение давления в замкнутой камере

Глава III

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ И ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ

§ 15. Основные понятия и определения движения жидкости

Движение жидкостей может быть разделено на установившееся и неустановившееся.

Движение называется *установившимся*, если все характеристики движения в одной и той же точке пространства (в том числе и скорость) не меняются во времени.

Движение, не удовлетворяющее этому определению, называется *неустановившимся*.

Примером установившегося движения может служить истечение жидкости из отверстия в стенке резервуара под постоянным напором ($H = \text{const}$) или истечение газа из отверстия замкнутого резервуара, давление и температура в котором поддерживаются неизменными.

Примером неустановившегося движения является опорожнение резервуара при переменных значениях напора или давления.

В настоящей главе мы рассмотрим законы только установившегося движения. Но и в этом случае движение жидкости как сплошной, легко деформируемой среды представляет собой

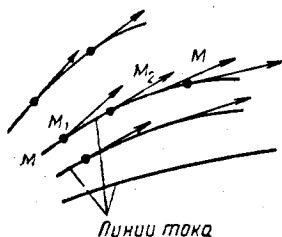


Рис. III.1. Линии тока

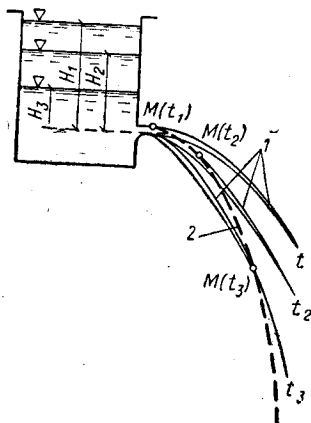


Рис. III.2. Линии тока, не совпадающие с траекториями при неустановившемся движении

сложный физический процесс, точное математическое описание которого связано с чрезвычайными трудностями. Поэтому для облегчения теоретических решений обычно вводятся различные схемы и модели, заменяющие реальный поток жидкости. Существенно важным является понятие о струйчатой структуре течения жидкости, в соответствии с которым поток представляется как совокупность элементарных струек, вплотную прилегающих друг к другу и образующих сплошную массу движущейся жидкости.

Изучив законы движения элементарной струйки, легче установить основные законы движения всего потока в целом.

Линия тока и элементарная струйка. Линией тока называется линия, проходящая через последовательно движущиеся одна за другой частицы жидкости, векторы скоростей которых направлены по касательным к этой линии $M-M$ (рис. III.1). Линия тока и траектория движения частицы в общем случае (т. е. при неустановившемся движении) не совпадают одна с другой, но совпадают при установившемся движении.

Это положение удобно иллюстрировать на примере, изображенном на рис. III.2. Здесь при истечении жидкости из отверстия резервуара вытекающая струя непрерывно меняет свое положение во времени. На рисунке даны три положения струи соответственно для трех моментов времени t_1 , t_2 и t_3 , для которых условно изображены три линии тока l , и, кроме того, отмечены три положения частицы M для тех же моментов времени и пунктиром указана траектория 2 этой частицы.

Две различные линии тока не пересекаются между собой.

Элементарной струйкой называется струйка, боковая поверхность которой образована линиями тока, проходящими через точки очень малого (в пределе — бесконечно малого) замкнутого контура. Таким образом, эта струйка оказывается изолированной от окружающей ее массы жидкости и имеет малую площадь поперечного сечения $\Delta\omega$ (в пределе $d\omega$), которая может меняться по длине. Длина этой струйки неограниченна. Боковая поверхность струйки непроницаема для жидкости, т. е. ее можно представить в виде трубки, внутри которой течет жидкость.

Основные виды движения. Расход жидкости. Движение может быть равномерным и неравномерным, сплошным и прерывистым. При равномерном движении величина скорости не меняется по длине струйки, в противном случае движение называется *неравномерным*.

Обратимся к понятию о расходе жидкости.

Пусть в некотором поперечном сечении элементарной струйки скорость равна u . За время dt частицы жидкости переместятся на расстояние $ds = udt$. Следующие за ними частицы жидкости заполнят все освобождаемое пространство, и поэтому за указанное время dt через поперечное сечение пройдет объем жидкости

$$dW = dsd\omega = u\omega dt.$$

Объем жидкости, протекающей через сечение за единицу времени, называют *объемным расходом жидкости*. Обозначая расход элементарной струйки через dQ , получим для него выражение

$$dQ = u\omega. \quad (\text{III.1})$$

Рассмотрим такое движение жидкости, при котором в потоке не возникает пустот (т. е. текущая жидкость представляется сплошной средой). В этом случае для двух соседних сечений элементарной струйки несжимаемой жидкости I и II (на рис. III.3) можем написать

$$dQ_1 = u_1 d\omega_1$$

и аналогично

$$dQ_2 = u_2 d\omega_2.$$

По условию сплошности течения dQ_1 не может быть меньше dQ_2 , иначе между сечениями I и II образовалась бы пустота, так как в этом случае из сечения II выходило бы большее количество жидкости, чем входит через сечение I . Точно так же dQ_1 не может быть больше dQ_2 . Следовательно, единственно возможное условие: $dQ_1 = dQ_2$. Повторяя эти рассуждения применительно к другим сечениям струйки, можем написать

$$dQ_1 = dQ_2 = \dots = dQ_n = dQ, \quad (III.2)$$

или

$$dQ = u d\omega = \text{const.} \quad (III.3)$$

Таким образом, объемный расход жидкости остается неизменным на всем протяжении данной элементарной струйки. В случае сжимаемой (газообразной) жидкости требование

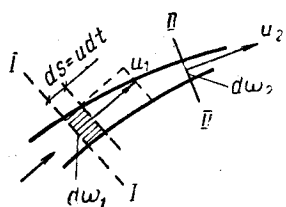


Рис. III.3

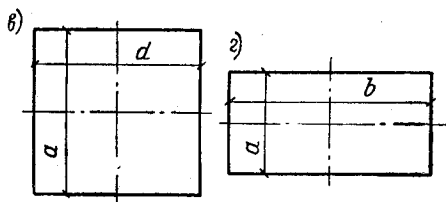
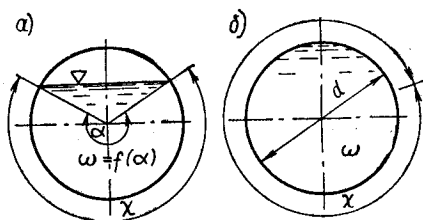


Рис. III.4

сплошности приводит к установлению равенства между собой количества массы жидкости, протекающей через соседние сечения (массового расхода), или равенства весового расхода, т. е.

$$dQ_p = \rho u d\omega$$

или

$$dQ_\gamma = \gamma u d\omega.$$

Расход потока жидкости равен алгебраической сумме расходов элементарных струек, составляющих данный поток.

Скорость жидкости в различных точках поперечного сечения потока, так называемая местная скорость, очевидно, может быть неодинаковой, поэтому для характеристики движения всего по-

тока вводится в рассмотрение средняя по всему сечению скорость потока. Средняя скорость определяется выражением

$$v = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega}. \quad (\text{III.4})$$

из которого следует, что расход потока жидкости равен средней скорости, умноженной на площадь его поперечного сечения:

$$Q = v\omega.$$

В связи с этим условие сплошности потока (или неразрывности течения) для несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$Q = v\omega = \text{const}. \quad (\text{III.5})$$

Для газообразной жидкости, обозначая через Q_p массовый и через Q_v весовой расходы, имеем

$$Q_p = \rho v\omega \text{ и } Q_v = \gamma v\omega. \quad (\text{III.6})$$

и тогда условие сплошности приобретает следующий вид:

$$Q_p = \rho v\omega = \text{const} \text{ и } Q_v = \gamma v\omega = \text{const}.$$

В гидравлических расчетах для характеристики размеров и формы поперечного сечения потока вводятся понятия о живом сечении и его элементах: смоченном периметре и гидравлическом радиусе.

Живым сечением называют часть поперечного сечения канала (трубы), заполненную жидкостью. Так, в круглой трубе диаметром d (рис. III.4, а) живое сечение потока меньше площади круга, если не все сечение трубы заполнено жидкостью, тогда как для случая, когда все поперечное сечение занято жидкостью, живым сечением является площадь круга $\pi d^2/4$ (рис. III.4, б).

Смоченным периметром называют ту часть периметра живого сечения, по которой жидкость соприкасается со стенками канала (трубы). Смоченный периметр обозначают обычно греческой буквой χ . Если, например, все сечение трубы занято жидкостью (т. е. живое сечение $\omega = \pi d^2/4$), то смоченный периметр равен длине окружности: $\chi = \pi d$.

Гидравлическим радиусом называют отношение живого сечения к смоченному периметру, т. е. величину

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

В частности, для круглых труб, заполненных жидкостью, гидравлический радиус равен четверти диаметра. Действительно

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{\pi d} = \frac{d}{4}.$$

В отопительной и вентиляционной практике широко пользуются понятием об «эквивалентном диаметре», который определяют по формуле

$$d_{\text{эКВ}} = 4R = 4 \frac{\omega}{\chi}$$

Очевидно, что эквивалентный диаметр, равный четырем гидравлическим радиусам, для круглого сечения (рис. III. 4, б) равен диаметру трубы:

$$d_{\text{эКВ}} = 4 \frac{\omega}{\chi} = 4 \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d,$$

для квадратного сечения (рис. III. 4, в)

$$d_{\text{эКВ}} = 4 \frac{a^2}{4a} = a,$$

т. е. равен стороне квадрата, а для прямоугольного сечения (рис. III. 4, г)

$$d_{\text{эКВ}} = 4 \frac{ab}{2(a+b)} = 2 \frac{ab}{a+b}.$$

Приведенные здесь основные понятия позволяют решать различные практические задачи.

Пример III.1. Определить скорость потока в трубопроводе диаметром $d=0,2$ м, если расход воды (несжимаемой жидкости) $Q=0,0628$ м³/с.

Решение. Искомая скорость $v=Q/\omega$. Определим площадь живого сечения: $\omega=\pi d^2/4=\pi \cdot 0,2^2/4=0,0314$ м², и тогда $v=2$ м/с.

Пример III.2. Определить необходимый диаметр воздуховода, если задана средняя скорость движения воздуха v , м/с и объемный расход Q , м³/с.

Решение. Так как диаметр $d=\sqrt{4\omega/\pi}$, а площадь живого сечения $\omega=Q/v$, то искомый диаметр воздуховода $d=\sqrt{4Q/\pi v}$.

§ 16. Уравнение Бернулли для элементарной струйки несжимаемой жидкости

Выделим в элементарной струйке (рис. III.5) сечениями I и II некоторую массу жидкости и составим уравнение кинетической энергии для этой массы. (Как известно, приращение кинетической энергии выделенной массы равно работе внешних сил на данном перемещении).

За время dt выделенная масса, переместившись, займет положение, ограниченное сечениями I'—II'. Область между этими сечениями можно разделить на три объема: a , b и c ; при этом по условию сплошности масса объема a равняется массе объема b .

Приращение кинетической энергии $\Delta mv^2/2$ при перемещении

выделенной массы жидкости из положения I—II в положение I'—II'

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = [K.\varepsilon(c) + K.\varepsilon(\theta)]_{t+dt} - [K.\varepsilon(a) + K.\varepsilon(c)]_t. \quad (\text{III.7})$$

Так как движение установившееся, то кинетическая энергия жидкости объема c в моменты t и $t+dt$ будет неизменной.

Поэтому для всей выделенной массы.

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = K.\varepsilon(\theta) - K.\varepsilon(a). \quad (\text{III.8})$$

Определим величину кинетической энергии жидкости в объеме v :

$$K.\varepsilon(\theta) = \frac{dm u_2^2}{2}.$$

Но

$$dm = \rho d\omega_2 ds_2 = \rho d\omega_2 u_2 dt.$$

откуда

$$K.\varepsilon(\theta) = \rho d\omega_2 u_2 dt \frac{u_2^2}{2},$$

и аналогично

$$K.\varepsilon(a) = \rho d\omega_1 u_1 dt \frac{u_1^2}{2}.$$

Приращение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = \rho d\omega_2 u_2 dt \frac{u_2^2}{2} - \rho d\omega_1 u_1 dt \frac{u_1^2}{2} = dQ dt \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}. \quad (\text{III.9})$$

где dQ — массовый расход, одинаковый независимо от рассматриваемого сечения.

В случае невязкой жидкости к выделенному объему приложены силы тяжести, сила давления жидкости на боковую поверхность и силы давления на торцовые площадки объема.

Поскольку жидкость несжимаема, внутренняя энергия рассматриваемого объема не меняется при его перемещении, и в уравнение кинетической энергии входит только работа внешних сил. При перемещении выделенной массы жидкости из положения I—II в положение I'—II' вес жидкости в объеме c работу не совершает, и, следовательно, работа сил тяжести может быть

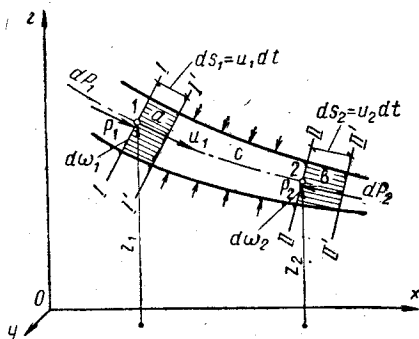


Рис. III.5. К выводу уравнения Бернулли

вычислена как работа при перемещении жидкости, заключенной в объеме a , в положение жидкости, заключенной в объеме b :

$$G(z_1 - z_2) = \gamma d\omega_1 u_1 dt (z_1 - z_2),$$

где z_1 и z_2 — расстояния до центров тяжести объемов a и b от некоторой горизонтальной плоскости или, иначе, ордината этих центров тяжести. Можно также рассматривать z_1 и z_2 с точностью до малых высшего порядка как ординаты центров сечений I и II .

Работа сил давления на боковую поверхность выделенного объема равняется нулю, так как эти силы нормальны к этой поверхности. Работа сил давления на торцы равна разности

$$p_1 d\omega_1 u_1 dt - p_2 d\omega_2 u_2 dt.$$

Уравнение кинетической энергии имеет, таким образом, следующий вид:

$$\rho d\omega_2 u_2 \frac{u_2^2}{2} dt - \rho d\omega_1 u_1 \frac{u_1^2}{2} dt = \rho g d\omega_1 u_1 (z_1 - z_2) dt + p_1 d\omega_1 u_1 dt - p_2 d\omega_2 u_2 dt.$$

Разделим на dt и сгруппируем члены этого уравнения, помещая члены, относящиеся к сечению I , в левую часть, а относящиеся к сечению II — в правую часть равенства. В результате получим:

$$\rho g d\omega_1 u_1 z_1 + p_1 d\omega_1 u_1 + \rho d\omega_1 u_1 \frac{u_1^2}{2} = \rho g d\omega_2 u_2 z_2 + p_2 d\omega_2 u_2 + \rho d\omega_2 u_2 \frac{u_2^2}{2}.$$

Заменив $u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2 = dQ$ и разделив затем левую и правую части на величину $\rho g dQ$, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}, \quad (\text{III.10})$$

где $\rho g = \gamma$.

Это и есть *уравнение Бернулли*, написанное для участка элементарной струйки между сечениями I и II . Его можно представить также в разностной форме:

$$(z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

или, обозначая разности между величинами в скобках в виде приращений,

$$\Delta z + \Delta \frac{p}{\gamma} + \Delta \frac{v^2}{2g} = 0. \quad (\text{III.11})$$

Если неограниченно сближать между собой сечения I и II , то

уравнение (III.11) можно представить в дифференциальной форме:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d \frac{v^2}{2g} = 0. \quad (\text{III.12})$$

Так как сечения *I* и *II* взяты произвольно, то уравнение Бернулли можно записать также в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (\text{III.13})$$

Геометрическое и энергетическое истолкование уравнения Бернулли. Рассмотрим сначала геометрическое истолкование. Отнесем струйку к системе координат *xuz* (рис. III.6) и на-

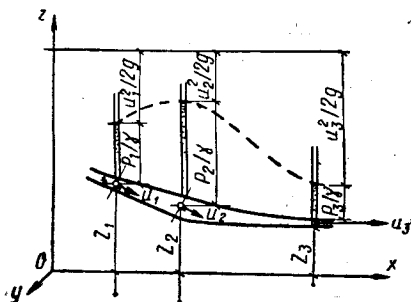


Рис. III.6

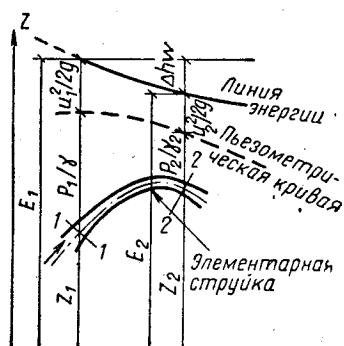


Рис. III.7. К выводу уравнения Бернулли для элементарной струи вязкой жидкости

пишем уравнение Бернулли для трех произвольных сечений струйки:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g} = \dots = H = \text{const.}$$

Здесь *z* — геометрическая высота центра тяжести сечения над плоскостью *xOy*;

$\frac{p}{\gamma}$ — пьезометрическая высота;

$\frac{u^2}{2g}$ — скоростная высота или скоростной напор.

Все эти величины имеют линейную размерность, следовательно, их сумма, обозначаемая через *H*, имеет также размерность длины. Величину *H* называют *полным напором* в данном сечении струйки.

Для каждого поперечного сечения элементарной струйки ве-

личина H может быть представлена совокупностью отрезков z , $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{u^2}{2g}$, как это изображено на рис. III.6.

Соединив между собой концы отрезков H , получим кривую, расположенную в горизонтальной плоскости; эту плоскость и кривую на ней называют *плоскостью и линией полного напора*.

Соединив кривой концы отрезков $\frac{p}{\gamma}$, получим линию, которую называют *пьезометрической линией или пьезометрической кривой*.

Итак, рис. III.6 дает геометрическое истолкование уравнения Бернулли. Можно видеть, как по длине струйки меняются слагаемые этого уравнения. Если сечение расширяется и, следовательно, скорость уменьшается, то уменьшается скоростной напор, но возрастает сумма $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$.

Если рассматривать уравнение Бернулли как уравнение энергии, то каждое слагаемое этого уравнения надо расценивать как некоторую составляющую полной энергии (потенциальную или кинетическую), и каждое из этих слагаемых должно измеряться в единицах работы. Уравнение (III.13) представлено в линейных единицах, поэтому, чтобы перевести его в уравнение работы, надо помножить его на единицу силы; если помножить его, например, на 1 Н, то уравнение не изменится, но размерность каждого слагаемого будет выражена в Н·м (Дж) и, следовательно, представит собой некоторую энергию, отнесенную к 1 Н жидкости, проходящей через данное сечение в 1 с. Такую энергию называют *удельной*. В соответствии с этим z будет удельной потенциальной энергией, обусловленной тем, что данный 1 Н жидкости находится на высоте z (относительно плоскости yOx) и может совершать работу, равную z , Дж.

Аналогично $\frac{p}{\gamma}$ будет удельной потенциальной энергией, зависящей от давления p . Таким образом, тот же 1 Н жидкости, находящейся на высоте z , обладает еще энергией давления, равной $\frac{p}{\gamma}$ Дж. Итак, $\frac{p}{\gamma}$ — потенциальная удельная энергия давления.

Величина $\frac{u^2}{2g}$ зависит от скорости, следовательно, это будет удельная кинетическая энергия.

Пьезометрическая линия отделяет область изменения потенциальной энергии от области изменения кинетической энергии.

Легко видеть, что с энергетической точки зрения уравнение Бернулли показывает, что сумма потенциальной энергии (положения и давления) и кинетической энергии есть величина постоянная, т. е. одинаковая по пути данной элементарной струйки вязкой жидкости. Полная удельная энергия остается неиз-

менной. Таким образом, уравнение Бернулли представляет собой закон сохранения механической энергии при движении идеальной жидкости.

Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости. Вязкая жидкость испытывает сопротивление при движении, и ее удельная энергия не может сохраняться неизменной вдоль струйки.

В соответствии с этим при движении вязкой жидкости в уравнение Бернулли надо ввести поправку на потери напора при переходе от некоторого сечения струйки к сечению, расположенному ниже по течению. Обозначая потери напора через Δh_w , получим следующую запись уравнения Бернулли применительно к некоторым двум произвольным сечениям струйки жидкости:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_w, \quad (\text{III.14})$$

или

$$E_1 = E_2 + \Delta h_w.$$

Линия, проведенная через концы отрезков E (см. рис. III.7), называется и в этом случае линией полного напора, но теперь она не располагается в горизонтальной плоскости, а понижается в направлении течения; чем больше наклон этой линии, тем интенсивнее расходуется энергия по пути. Отметим, что пьезометрическая линия по-прежнему может как снижаться, так и повышаться в зависимости от изменения скорости при изменении площади сечения струйки.

Отношение $\frac{\Delta h_w}{\Delta l}$ потерь напора на длине участка струйки Δl к самой длине называют *средним гидравлическим уклоном* для этого участка.

Гидравлический уклон — величина безразмерная и в общем случае переменная. Обычно его обозначают буквой i . Уклон в данном сечении выражается, очевидно, величиной

$$i = \frac{dh_w}{dl}. \quad (\text{III.15})$$

Понятие об уклоне можно ввести и для пьезометрической линии. Средний пьезометрический уклон тогда определится по формуле

$$i_{\text{ср.пъез}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l_2 - l_1} = - \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right)}{l_2 - l_1}. \quad (\text{III.16})$$

Пьезометрический уклон может быть положительным, равным нулю, и отрицательным.

$$i_{\text{пьеэ}} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0.$$

Пьезометрический уклон в данном сечении определяется по формуле

$$i_{\text{пьеэ}} = \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}{dl}.$$

§ 17. Уравнение Бернулли для потока с поперечным сечением конечных размеров

В случае плавно изменяющегося течения уравнение Бернулли, составленное для элементарной струйки, можно распространить на поток с поперечным сечением конечных размеров (в таком потоке скорости в различных точках поперечного сечения различны). Течение называют плавно изменяющимся, если угол расхождения между соседними элементарными струйками настолько мал, что составляющими скорости в поперечном сечении можно пренебречь. В этих условиях распределение давления по поперечному сечению следует закону гидростатики, т. е. величина $\frac{p}{\gamma} + z$ одинакова для всех точек сечения.

Рассмотрим поток как совокупность элементарных струек. Энергия каждой отдельной элементарной струйки

$$dE = \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) \gamma dQ.$$

Энергия всего потока

$$E = \int \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) \gamma dQ = \gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) dQ + \frac{\gamma}{2g} \int u^2 dQ.$$

Первое слагаемое выражает потенциальную энергию потока; с учетом замечания о плавно изменяющемся течении эта энергия определится следующим образом:

$$\gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) dQ = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \int dQ = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q.$$

Второе слагаемое выражает кинетическую энергию; рассмотрим его более подробно.

Так как $dQ = u d\omega$, то $\frac{\gamma}{2g} \int u^2 dQ = \frac{\gamma}{2g} \int u^3 d\omega$. Местную скорость u можно представить в виде $u = v + \varepsilon$, где v — средняя скорость, а ε — разность $u - v$ ($\varepsilon \geq 0$). Сделав подстановку, получим

$$\frac{\gamma}{2g} \int u^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v + \varepsilon)^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v^3 + 3v^2\varepsilon + 3v\varepsilon^2 + \varepsilon^3) d\omega.$$

или

$$\frac{\gamma}{2g} \int u^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} \left(v^3 \omega + 3v \int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega \right) = \frac{\gamma}{2g} v^3 \omega \left\{ 1 + 3 \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v^2 \omega} \right\}.$$

Здесь учтено, что $\int_{\omega} v^2 \varepsilon d\omega = 0$, так как $\int_{\omega} \varepsilon d\omega = 0$, и что интеграл $\int_{\omega} \varepsilon^3 d\omega \approx 0$, так как малая величина ε^3 для разных точек сечения имеет различный знак.

Обозначив для краткости

$$\left\{ 1 + 3 \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v^2 \omega} \right\} = \alpha,$$

получим для кинетической энергии потока

$$\frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} v^3 \alpha \omega = \gamma Q \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

В результате для энергии всего потока имеем

$$E = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \frac{\alpha v^2}{2g} Q.$$

откуда удельная энергия потока

$$E_{\text{п}} = \frac{E}{\gamma Q} = \frac{\gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \frac{\alpha v^2}{2g} Q}{\gamma Q} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g},$$

что и определяет собой полную энергию (напор) потока.

Таким образом, уравнение Бернулли для потока отличается от такового для элементарной струйки тем, что здесь скоростной напор, определяемый средней скоростью, дополнен коэффициентом α , носящим название *коэффициента Кориолиса*.

Величина этого коэффициента зависит от степени неравномерности распределения скорости по сечению. Этот коэффициент всегда больше единицы (за исключением случая, когда местные скорости в данном сечении равны между собой, тогда $\alpha = 1$) и при обычном распределении скоростей равняется $\sim 1,1$; во многих случаях (например, при расчете трубопроводов) практически можно полагать $\alpha = 1$.

Для потока вязкой жидкости уравнение Бернулли должно быть дополнено четвертым слагаемым — потерянными напором Δh_w , что приводит к записи этого уравнения в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h_w. \quad (\text{III.17})$$

Водомер Вентури. Проиллюстрируем применение уравнения Бернулли на примере водомера Вентури, используемого для измерения расхода воды в водопроводных сетях.

Водомер сконструирован следующим образом: в трубопровод вмонтированы два фасонных участка — сходящийся (конфузор) и расширяющийся (диффузор), соединенные между собой отрезком трубы значительно меньшего диаметра, чем диаметр основного трубопровода (рис. III.8).

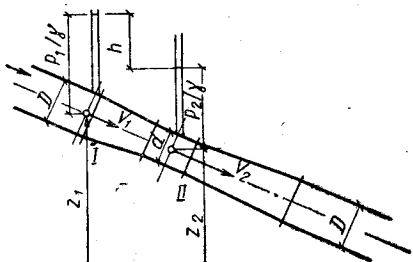


Рис. III.8. Водомер Вентури

В сечениях I и II к водомеру подключаются приборы (пьезометры), по показаниям которых определяют перепад пьезометрического напора на длине конфузора, т. е. величину

$$h = \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right).$$

Составляя для сечений I и II уравнение Бернулли (пренебрегая в нем потерями напора), получим

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда разность показаний пьезометров

$$h = \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}. \quad (\text{III.18})$$

В этом уравнении два неизвестных — v_2 и v_1 . Но из условия сплошности следует, что $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$. Определяя отсюда

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

исключим v_1 из выражения (III.18) и, разрешая затем это выражение относительно v_2 , получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} = \omega_1 \sqrt{\frac{2gh}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}.$$

Расход Q протекающей через водомер жидкости определяется по формуле

$$Q = \omega_2 v_2 = \omega_2 \omega_1 \sqrt{\frac{2gh}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}.$$

§ 18. Уравнение количества движения (импульсов)

Во многих случаях при решении ряда задач гидравлики приходится использовать уравнение об изменении количества движения, или, иначе, уравнения импульсов. Это уравнение позволяет находить характеристики движения на границах рассматриваемой массы жидкости в условиях, когда физические процессы, происходящие внутри этой массы, остаются неизвестными и, следовательно, когда они не являются предметом исследования.

Для материальной точки, движущейся под влиянием действующей на нее переменной силы, уравнение импульсов можно написать в следующем виде:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} P dt, \quad (\text{III. 19})$$

где m — масса данной материальной точки;
 v_2 и v_1 — соответственно скорости движения этой точки в конечный и начальный моменты промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, определенные в проекциях на некоторую ось;
 P — проекция действующей силы на ту же ось. Произведение mv называют количеством движения, а произведение Pdt — импульсом силы.

В приложении к системе материальных точек уравнение импульсов может быть записано так:

$$\sum (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum (m_i \bar{v}_i)_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} P_i dt. \quad (\text{III. 20})$$

Если силы, действующие на частицы, постоянны (не меняются во времени), то предыдущее уравнение для системы материальных точек получит вид

$$\sum (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum (m_i \bar{v}_i)_1 = R \Delta t,$$

где R — проекция равнодействующей сил на ту же координатную ось.

Жидкость представляет собой материальную систему, поэтому основной закон механики может быть применен к любой выделенной из нее массе; так как жидкость рассматривается как непрерывная среда, то уравнение импульсов должно быть записано в интегральной форме

$$\int_{\mathcal{W}} (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt} - \int_{\mathcal{W}} (\bar{u}_i dm_i)_t = \sum P \cos \alpha dt \quad (\text{III. 21})$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} (\bar{u} dm) = R \cos \alpha. \quad (\text{III. 21a})$$

Ограничиваясь рассмотрением только установившегося движения, отметим, что при использовании уравнения импульсов для решения гидравлических задач обычно из потока выделяют некоторую массу жидкости с помощью так называемой контрольной поверхности или с помощью двух сечений, например I и II (на рис. III.9). Выделенная масса в объеме $(1-2-3-4)$,

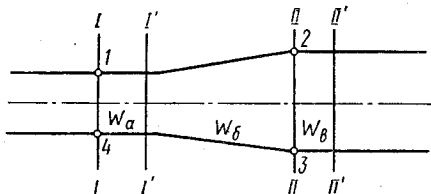


Рис. III.9

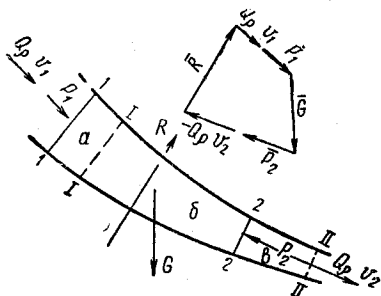


Рис. III.10

находясь в движении, по истечении промежутка времени dt , займет новое положение, ограниченное сечениями I' и II' .

Так как левая часть уравнения (III.21) представляет собой определяемое приращение количества движения, можем написать

$$d(mv) = \int_W (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt} - \int_W (\bar{u}_i dm_i)_t. \quad (\text{III.22})$$

Здесь первое слагаемое правой части уравнения представляет собой количество движения всей выделенной массы в момент $(t+dt)$ и равно сумме количества движения массы в объемах W_b и W_a (см. рис. III.9), т. е.

$$\int_W (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt} = \int_{W_b} (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt} + \int_{W_a} (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt}.$$

Аналогично количество движения той же массы в начальный момент t , т. е. второе слагаемое уравнения (III.21)

$$\int_W (\bar{u}_i dm_i)_t = \int_{W_a} (\bar{u}_i dm_i)_t + \int_{W_b} (\bar{u}_i dm_i)_t.$$

Но при установившемся движении количество движения средней части, т. е. массы в объеме W_b , остается неизменным, и, следовательно,

$$\int_{W_b} (\bar{u}_i dm_i)_{t+dt} = \int_{W_b} (\bar{u}_i dm_i)_t.$$

Оказывается, что искомое приращение количества движения всей выделенной массы равно разности количества движения массы в объемах W_b и W_a , т. е.

$$d(mv) = \int_{W_b} (\bar{u}_i dm_i) - \int_{W_a} (\bar{u}_i dm_i). \quad (\text{III. 22a})$$

Как такие вычисления проводятся на практике, покажем на следующем примере.

Пусть, например, требуется определить реакцию трубы с криволинейной осью (рис. III.10) при протекании по ней жидкости. Выделим в трубе двумя сечениями I и 2 некоторую массу жидкости, которая за время dt перейдет в положение $I-II$.

При установившемся движении в условиях неразрывности масса жидкости m_a в объеме a между сечениями $I-I$ равняется массе m_b в объеме b между сечениями $2-II$, причем

$$m_a = \rho_1 v_1 \omega_1 dt; \quad m_b = \rho_2 v_2 \omega_2 dt.$$

Изменение за время dt количества движения выделенного объема жидкости равняется разности количества движения массы в объемах b и a , так как при установившемся движении количество движения массы в объеме b не меняется во времени. Поэтому приращение количества движения

$$d(mv) = \sum (m_i \bar{v}_i)_{t+dt} - \sum (m_i \bar{v}_i)_t = \rho_2 v_2 \omega_2 dt \bar{v}_2 - \rho_1 v_1 \omega_1 dt \bar{v}_1,$$

где \bar{v}_1 и \bar{v}_2 — векторы средней скорости в сечениях I и 2 .

Величины $\rho_2 v_2 \omega_2$ и $\rho_1 v_1 \omega_1$, равные между собой, представляют собой массовый расход жидкости; обозначив его через Q_p , можем написать для приращения количества движения выражение

$$d(mv) = Q_p \bar{v}_2 dt - Q_p \bar{v}_1 dt. \quad (\text{III. 22b})$$

Внешними силами, приложенными к выделенному объему, являются в рассматриваемом случае его вес G , сила P_1 давления на сечение ω_1 , сила P_2 давления на сечение ω_2 (нормальные к этим сечениям и направленные внутрь объема) и искомая сила реакции R стенок трубы. После сокращения на dt уравнение импульсов может быть записано в таком виде:

$$Q_p \bar{v}_2 - Q_p \bar{v}_1 = \bar{G} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{R}. \quad (\text{III. 23})$$

Составляя проекции этого векторного уравнения на три координатные оси, получим три алгебраических уравнения с тремя неизвестными — проекциями R_x , R_y и R_z . Определив последние, найдем величину и направление силы R .

Л. Эйлер предложил удобный графический способ находде-

ния силы R . Перенос в формуле (III.23) все слагаемые в одну сторону, можно представить его в виде суммы векторов:

$$Q_p \bar{v}_1 + (-Q_p \bar{v}_2) + \bar{G} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{R} = 0, \quad (\text{III.24})$$

где одним из слагаемых является вектор $Q_p \bar{v}_2$, взятый с обратным знаком (т. е. по направлению обратный действительному). В соответствии с формулой (III.24) силу R можно найти, построив замкнутый многоугольник сил, как это показано на рис. III.10.

Сделаем одно замечание в связи с вычислением величины количества движения. Поскольку скорость распределена неравномерно в поперечном сечении, количество движения должно вычисляться как интеграл

$$\int_W u_i dm_i = \int_{\omega} \rho dt u^2 d\omega = \rho dt \int_{\omega} u^2 d\omega,$$

где u — местная скорость.

Полагая $u = v + \varepsilon$, получим $u^2 = v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2$, откуда

$$\int_{\omega} u^2 d\omega = \int_{\omega} (v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2) d\omega = v^2 \omega + \int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega = v^2 \omega \left\{ 1 + \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v^2 \omega} \right\}$$

(здесь $\int_{\omega} 2v\varepsilon d\omega = 0$).

Обозначив

$$\left\{ 1 + \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v^2 \omega} \right\} = \alpha_0,$$

найдем, что величина количества движения определяется как

$$[\rho dt \alpha_0 v^2 \omega]$$

или

$$K \cdot \partial = \rho dt \alpha_0 Q v,$$

где Q — объемный расход жидкости.

Коэффициент α_0 называют *коэффициентом Буссинеска*; он всегда меньше коэффициента Кориолиса в уравнении Бернулли

для потока. Если обозначить $\frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v^2 \omega} = \eta$, то коэффициент Кориолиса $\alpha = 1 + 3\eta$, а коэффициент Буссинеска $\alpha = 1 + \eta$.

Величина обоих коэффициентов зависит от характера распределения скоростей в поперечном сечении. На практике, как об этом уже говорилось, коэффициент Кориолиса $\alpha \approx 1,1$, а коэффициент Буссинеска $\alpha_0 \approx 1,03$. Поэтому обычно полагают $\alpha_0 = 1$.

Однако встречаются отдельные случаи, когда α_0 достигает больших значений, и тогда пренебрежение им может привести к ощутимым погрешностям.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

§ 19. Два метода исследования движения жидкости (Лагранжа и Эйлера)

Движение жидкости, если его рассматривать как движение системы неограниченного множества материальных частиц, представляет собой чрезвычайно сложный процесс; частицы жидкости движутся различно, каждая по своей траектории, с различными скоростями и ускорениями; изучение этого процесса связано с большими трудностями.

Существуют два метода исследования этого движения — метод Лагранжа и метод Эйлера.

В обоих методах жидкость (капельная и газообразная) рассматривается как непрерывная среда, сплошь занимающая данное пространство. В качестве мельчайшего элемента жидкости принимается «частица» бесконечно малых размеров, но не отождествляемая с молекулой или атомом; вследствие этого рассматриваемая схема неприменима к изучению молекулярных движений.

В методе Лагранжа исследованию подлежит движение отдельных частиц жидкости.

В методе Эйлера исследуют поля векторных и скалярных параметров движущейся жидкости, оставляя в стороне вопрос о том, как движется та или иная индивидуальная частица; во многих случаях это оказывается практически вполне достаточным.

В методе Лагранжа положение индивидуальной частицы жидкости описывается законом ее движения, т. е. тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (IV.1)$$

где x , y и z — координаты частицы и t — время.

При составлении уравнений, которые характеризовали бы движение различных частиц потока, надо учитывать положение частиц в начальный момент времени t_0 , т. е. начальные координаты частиц.

Обозначив эти координаты a , b и c и внося их в уравнения (IV.1), можно получить систему уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t); \\ y &= f_2(a, b, c, t); \\ z &= f_3(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \quad (IV.2)$$

В этих уравнениях начальные координаты a, b и c могут рассматриваться как независимые переменные. Следовательно, текущие координаты x, y и z некоторой движущейся частицы являются функциями четырех переменных a, b, c и t . Эти переменные называют переменными Лагранжа.

Выбирая некоторую частицу жидкости, т. е. назначая по собственному усмотрению значения a, b и c , получим текущие координаты x, y и z для выбранной нами частицы (рис. IV.1).

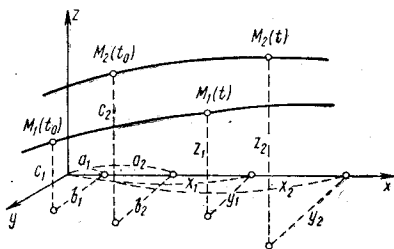


Рис. IV.1

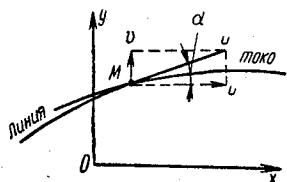


Рис. IV.2. К выводу уравнения линии тока

Таким образом, если система (IV.2) известна, то движение потока жидкости вполне определено. Действительно, скорости частицы определяются (как это известно из кинематики точки) как первые производные по времени от координат x, y и z , а ускорения — как вторые производные по времени, направления же векторов скорости и ускорения находятся по направляющим конусам.

Траектория любой частицы определяется или непосредственно из уравнений (IV.1) путем вычисления координат x, y и z данной выбранной частицы для ряда моментов времени, или путем исключения из этих уравнений времени t , что дает два уравнения:

$$\Phi_1(abcxyz) = 0;$$

$$\Phi_2(abcxyz) = 0.$$

Совместное решение этих уравнений и определяет траекторию частицы.

В методе Эйлера рассматривается скорость в каждой точке области, занятой движущейся жидкостью.

При неустановившемся движении все поле скоростей изменяется во времени, и поэтому для одной и той же точки простран-

ства скорость движения жидкости различна в разные моменты времени.

Обозначим через u , v и w проекции скорости на оси координат; тогда для неустановившегося движения:

$$\left. \begin{aligned} u &= F_1(x, y, z, t); \\ v &= F_2(x, y, z, t); \\ w &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.3})$$

Обозначим полную скорость в этой главе, где рассматриваются неоднородные течения, через \bar{V} ; величина этой скорости равняется, очевидно,

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Для установившегося движения:

$$\left. \begin{aligned} u &= F_1(x, y, z); \\ v &= F_2(x, y, z); \\ w &= F_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.3a})$$

Располагая уравнениями (IV.3) и (IV.3, a), можно определить скорость в данной точке по величине и направлению, а также ускорение \bar{j} . Величина j определяется выражением

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2},$$

где проекции ускорения соответственно равны:

$$j_x = \frac{du}{dt}; \quad j_y = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad j_z = \frac{dw}{dt}.$$

В общем случае неустановившегося движения проекции скорости u , v и w являются функциями координат и времени, поэтому полный дифференциал, например, скорости u равен сумме четырех частных дифференциалов, а именно:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad (\text{IV.4})$$

а ее производная по времени

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (\text{IV.5})$$

Рассматривая dx , dy и dz как проекции элементарного перемещения ds на оси координат, получим:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (\text{IV.6})$$

и тогда уравнение (IV.5) запишется в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{IV.7})$$

Здесь частная производная $\frac{\partial u}{\partial t}$, представляющая собой интенсивность изменения скорости в данной точке (при неизменных координатах x, y, z) и обусловленная неустановившимся характером движения жидкости, называется локальной производной, а сумма $\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, определяющая ускорение при неравномерном движении в пространстве, называется конвективной производной.

При установившемся движении локальная производная $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Аналогичные выражения можно составить также для производных $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dw}{dt}$, в результате чего получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

Эти уравнения и представляют собой выражения для проекций ускорений в координатах Эйлера.

Уравнение линии тока. Рассмотрим случай плоского движения жидкости. Обозначим уравнение линии тока в этом случае через

$$y = f(x). \quad (\text{IV.9})$$

Из рис. IV.2 имеем $v/u = \text{tg } \alpha$, а дифференцируя уравнение (IV.9), находим $dy/dx = \text{tg } \alpha$. Таким образом, $v/u = dy/dx$, или $dx/u = dy/v$, или

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z, t)}. \quad (\text{IV.10})$$

что и является уравнением линии тока в дифференциальном виде.

При пространственном движении дифференциальные уравнения линии тока записываются так:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

или (в развернутом виде)

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z, t)}. \quad (\text{IV.10a})$$

Проинтегрировав уравнения (IV.10), можно получить уравнение линии тока в конечном виде.

Отметим, что для установившегося движения уравнения линий тока являются одновременно уравнениями траекторий.

Оба метода исследования жидкости — и метод Лагранжа, и метод Эйлера — математически связаны между собой и возможен переход от уравнений (IV.2) к уравнениям (IV.3). В практическом применении метод Эйлера более прост, поэтому дальнейшее изложение основано на его применении.

§ 20. Вихревые и безвихревые движения.

Уравнения компонентов вихря .

Жидкая частица в противоположность твердой при движении может изменять форму, т. е. деформироваться. Поэтому движение жидкой частицы может быть разложено на поступательное, вращательное и деформационное (для твердой частицы возможны только поступательное и вращательное движения).

На рис. IV.3 схематически на примере параллелепипеда показано поступательное движение жидкости вдоль прямой и вдоль окружности, на рис. IV.4 — поступательное и вращательное, на рис. IV.5 — поступательное и деформационное, а на рис. IV.6 — комбинированное (поступательное, вращательное и деформационное).

Как видно из схем, вращательное движение характеризуется поворотом параллелепипеда вокруг его центра, причем диагонали параллелепипеда изменяют свое положение относительно координатных осей в то время, как его углы не меняются. Таким образом, вращение частицы можно оценивать величиной и направлением угловой скорости при повороте частицы.

Деформационное движение характеризуется изменением углов между гранями параллелепипеда и оценивается скоростью изменения этих углов (интенсивностью перекашивания).

Вектор ω угловой скорости вращения частицы жидкости называется вихрем¹. Величина и направление этого вектора определяются его проекциями на оси координат. Примем следующие обозначения этих проекций:

$$\xi = \omega \cos \alpha;$$

$$\eta = \omega \cos \beta;$$

$$\zeta = \omega \cos \gamma.$$

¹ В гидромеханике вихрем называется вектор, равный удвоенной угловой скорости.

Рассмотрим движение частицы жидкости, имеющей первоначально форму кубика с ребрами, параллельными координатным осям. На рис. IV.7 этот кубик изображен в проекции на плоскость xOy квадратом $MACB$.

Пусть за время dt кубик переместился, и его проекцией стала фигура $MA'C'B'$. Диагональ MC при этом переместилась в

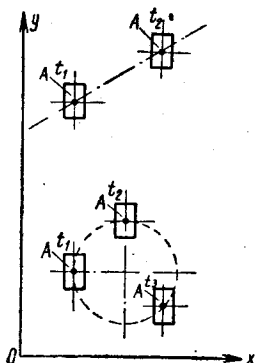


Рис. IV.3. Движение частиц без вращения

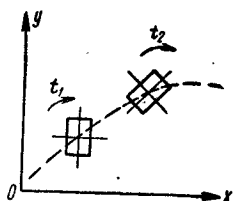


Рис. IV.4. Движение частиц с вращением

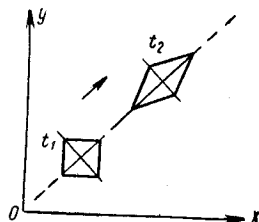


Рис. IV.5. Движение с деформацией частицы

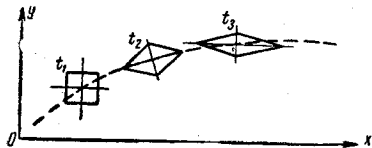


Рис. IV.6. Движение с вращением и деформацией частицы

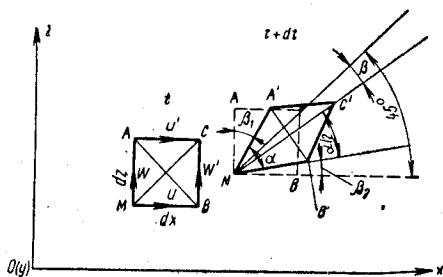


Рис. IV.7. К выводу уровней компонентов вихря

положение MC' , изменив свое начальное направление на угол β . Скорость этого поворота и представляет собой угловую скорость вращения относительно координатной оси Oy , т. е. проекцию η вихря.

Найдем выражение угла поворота β . Из рис. IV.7 следует

$$\beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta_2.$$

Угол $\alpha = 90^\circ - \beta_1 - \beta_2$, и поэтому

$$\beta = 45^\circ - \frac{90^\circ - \beta_1 - \beta_2}{2} - \beta_2 = \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2).$$

Принимая $\beta_1 \approx \text{tg } \beta_1$ и $\beta_2 \approx \text{tg } \beta_2$ (что допустимо по малости углов), получим

$$\beta_1 \approx \text{tg } \beta_1 = \frac{AA'}{MA} = \frac{(u' - u) dt}{dz},$$

где u и u' — соответственно проекции на ось Ox скоростей точек M и A .

Но $u' = u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, поэтому

$$u' - u = \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) - u = \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

и тогда

$$\beta_1 = \frac{(u' - u) dt}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} dz dt}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z} dt.$$

Аналогично получим

$$\beta_2 = \frac{\partial w}{\partial x} dt.$$

и, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt.$$

Отсюда компонент вихря — угловая скорость вращения вокруг оси Oy — равняется:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

Проводя аналогичные рассуждения по отношению к углам поворота вокруг двух других координатных осей, можно получить следующие выражения для проекций вихря на три оси:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.11})$$

Величина вихря, т. е. угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси, очевидно, равна:

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (\text{IV.12})$$

Из рис. IV.7 можно также получить выражение для угла перекашивания фигуры $MACB$:

$$\angle \eta_z = \angle \eta_x + \angle \eta_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt.$$

Назовем скоростью деформации относительно оси Oz величину

$$\gamma_z = \frac{1}{2} \frac{\angle \eta_z}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\angle \eta_x + \angle \eta_y}{dt}.$$

характеризующую скорость деформации двухгранного угла, ребро которого параллельно координатной оси Oz .

Тогда для γ_z и аналогично для величин γ_x и γ_y можно написать выражения:

$$\gamma_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Рассмотрим такое движение, когда $\omega=0$, с учетом, что при этом каждый из компонентов вихря порознь равняется нулю, т. е. $\xi=\eta=\zeta=0$. Такое движение называется безвихревым. Тогда из (IV.11) получатся следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.13)$$

Выражения (IV.13) указывают на существование функции $\varphi(x, y, z) = 0$, частные производные которой по координатам определяют собой величину проекций скорости; таким образом:

$$u = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x};$$

$$v = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y};$$

$$w = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}.$$

Это свойство функции φ аналогично свойству силовой функции, для которой, как известно, частные производные по коорди-

натам определяют проекции внешней объемной силы. Поэтому безвихревое движение называют также потенциальным, или движением с потенциалом скорости.

§ 21. Уравнение неразрывности

Пусть гранями параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ на рис. IV.8 ограничивается некоторое неподвижное относительно координатных осей пространство, через которое протекает жидкость.

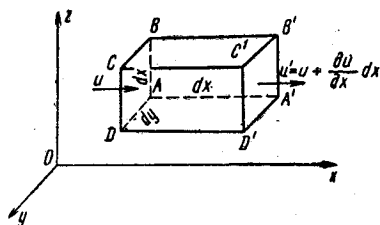


Рис. IV.8. К выводу уравнений движения невязкой жидкости

За время dt через грань $ABCD$ внутрь параллелепипеда втекает масса жидкости $\rho u dt dy dz = \delta M_x^*$, а вытекает масса $\rho' u' dt dy dz = \delta M_x^*$.

Плотность ρ и скорость u на входе (в плоскости грани $ABCD$) в общем случае сжимаемой жидкости не равны плотности ρ' и скорости u' на выходе (в плоскости грани $A'B'C'D'$). При этом изменения ρ и u обуславливаются только тем, что при переходе от одной грани к другой для сходственных точек этих граней изменяется лишь координата x независимо от времени, так как втекание и вытекание жидкости происходят одновременно. Поэтому:

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx;$$

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

$$\begin{aligned} \delta M_x^* = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt dy dz &= \left(\rho u + u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt dy dz. \end{aligned}$$

Но

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx,$$

а последнее слагаемое

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx \frac{\partial u}{\partial x} dx -$$

бесконечно малая величина высшего порядка относительно других слагаемых, и ею можно пренебречь.

Потому

$$\delta M'_x = \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dt dy dz.$$

Если за время dt масса жидкости внутри параллелепипеда увеличилась за счет притока на величину $\delta M'_x$, а уменьшилась за счет вытекания на величину $\delta M''_x$, то результирующее изменение массы в этом движении вдоль координатной оси Ox равняется:

$$\delta M_x = \delta M'_x - \delta M''_x = \rho u dt dy dz - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dt dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогично найдем, что изменения массы в итоге движения вдоль осей Oy и Oz равняются соответственно:

$$\delta M_y = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$\delta M_z = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt,$$

а следовательно, общее изменение массы за время dt равно:

$$\begin{aligned} \delta M &= \delta M_x + \delta M_y + \delta M_z = \\ &= - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt. \end{aligned}$$

Это изменение массы δM в условиях сплошности потока должно равняться изменению массы, обусловленному изменением плотности.

Плотность ρ есть функция $F(x, y, z, t)$. Определим величину δM в зависимости от изменения плотности ρ .

В начальный момент t масса внутри параллелепипеда $\delta m' = \rho dx dy dz$. По прошествии промежутка времени dt , т. е. в конечный момент $t_1 = t + dt$, средняя для объема плотность ρ изменится и будет равна ρ' . Это изменение происходит независимо от координат x, y и z , так как параллелепипед неподвижен, а потому

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

Следовательно, в конечный момент t_1 масса жидкости в объеме параллелепипеда

$$\delta m'' = \rho' dx dy dz = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz.$$

Таким образом, приращение массы за время dt будет равно:

$$\delta m = \delta m'' - \delta m' = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Так как $\delta M = \delta m$, то

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt,$$

что дает после сокращения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.14})$$

Это и есть искомое уравнение неразрывности.

В частном случае установившегося движения плотность (как и все остальные параметры движения) от времени не зависит и, следовательно, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Поэтому уравнение неразрывности получает в этом случае вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.15})$$

И, наконец, для несжимаемой жидкости как при установившемся, так и при неустановившемся движении уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.16})$$

Отметим здесь, что уравнение неразрывности (IV.16) может быть записано и в другой форме.

Рассмотрим входящие в это уравнение производные, каждая из которых представляет собой частную производную произведения плотности ρ на соответствующие компоненты скорости u , v и w . Так как все эти величины являются функциями координат и времени, то, следовательно:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Делая подстановку в уравнение (IV.14) и группируя слагаемые, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.17})$$

Но

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

(если dx , dy и dz рассматриваются как соответствующие проекции элементарного перемещения ds). Тогда, вводя эти обозначения в (IV.17), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) = 0$$

или, умножая на dt ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \rho dt \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Так как первые четыре члена представляют собой полный дифференциал функции $\rho = F(x, y, z, t)$, то, деля на ρdt , получим окончательно

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.18})$$

Глава V

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

§ 22. Основные дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости

Выделим в потоке жидкости элементарный объем в форме параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz (рис. V.1).

Напишем второй закон Ньютона для массы жидкости в этом объеме сначала в проекциях на ось Ox :

$$mj_x = R_x, \quad (\text{V.1})$$

где масса

$$m = \rho dx dy dz,$$

а проекция ускорения

$$i_x = \frac{du}{dt}.$$

Ранее уже отмечалось, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

следовательно,

$$mj_x = \rho dx dy dz \frac{du}{dt} = \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (\text{V.1a})$$

Определим проекцию равнодействующих внешних сил (см. рис. V.1).

Проекция силы давления на боковую грань $ABCD$

$$dP_1 = p dy dz,$$

где p — среднее давление в пределах указанной грани.

Среднее давление в пределах грани $A'B'C'D'$

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

и, следовательно, сила давления на эту грань

$$dP_2 = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

С учетом того, что проекции на ось Ox силы давления на другие грани параллелепипеда равны нулю, сумма проекции сил давления на боковые грани

$$dP_1 - dP_2 = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Проекцию объемных сил F_x на ось Ox можно представить в виде

$$F_x = \rho dx dy dz X,$$

где X — проекция ускорения.

Подставляя выражения для сил в формулу (V.1), получим

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho dx dy dz X = \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

или после сокращения на $\rho dx dy dz$ (т. е. относим уравнение к единице массы)

$$- \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогичные уравнения можно написать также и для других осей. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (V.2)$$

которая называется системой уравнений Эйлера для движения сплошной изотропной среды; эта система описывает движение и капальной и газообразной жидкости.

В систему из трех уравнений входят пять неизвестных функций: u , v , w , p и ρ . Поэтому для ее решения необходимо иметь

еще два условия, которые связали бы между собой названные функции. Такими условиями являются рассмотренные выше уравнение неразрывности (или сплошности) и характеристическое уравнение (или уравнение состояния).

§ 23. Интегрирование уравнений движения

Интегрирование уравнений Эйлера возможно для двух случаев: потенциального движения в поле сил, имеющих потенциал, и для установившегося движения (не обязательно потенциального), но также в поле сил, имеющих потенциал.

Интегрирование уравнений Эйлера для потенциального потока. Приведем уравнения (V.2) к виду, позволяющему из всех возможных типов движения выделить группу (класс) потенциальных потоков, т. е. движение жидкости с потенциалом скорости. Напомним, что для потенциального движения компоненты вихря, т. е. ξ , η и ζ , каждый порознь равны нулю. В связи с этим уравнения Эйлера надо преобразовать так, чтобы в него вошли эти компоненты. Тогда слагаемые, имеющие сомножителями ξ , η и ζ , исключатся, а остающиеся слагаемые составят уравнение потенциального потока.

Напишем выражение для полной скорости V через ее проекции в виде

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Беря частные производные от этого выражения по x , y и z , можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.3})$$

Вычитая соответственно из левой и правой частей первого из уравнений (V.2) выражение для частной производной по x , получим

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} - \\ &- w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Выражения в скобках в правой части уравнения (V.4) равны удвоенным компонентам вихря соответственно по осям Oz и Oy , т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta, \quad \text{а} \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\eta.$$

с учетом чего из формулы (V.4) получим

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega\eta - v\zeta).$$

Аналогично в проекциях на оси y и z :

$$Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\zeta - w\xi);$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\xi - u\eta).$$

Записанные в такой форме уравнения Эйлера позволяют отделить вихревые движения от безвихревых (т. е. потенциальных).

Для потенциальных движений $\xi=0$, $\eta=0$ и $\zeta=0$, и, следовательно, система уравнений Эйлера получает вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial w}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.5})$$

Пусть объемные силы имеют потенциал; тогда проекции ускорения объемных сил X , Y и Z определяются выражениями:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где U — силовая функция.

Далее можно определить функцию $P(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.6})$$

т. е. условию

$$dP = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right).$$

или

$$dP = \frac{1}{\rho} dp.$$

Такой будет функция

$$P = \int \frac{dp}{\rho} + C. \quad (V.7)$$

Функция P , удовлетворяющая условиям (V.6), может быть найдена для $\rho = \text{const}$ или для $\rho = f(p)$.

Рассмотрим далее производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$. Так как движение потенциальное, то существует функция Φ , для которой

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right);$$

и аналогично

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

С учетом всего отмеченного можно, например, первую строчку системы (V.5) привести к виду

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Вся же система уравнений (V.5) запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (V.8)$$

Введя обозначение

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi(x, y, z),$$

вместо (V.8) получим:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Умножая эти уравнения соответственно на независимые величины dx , dy и dz и затем складывая их, найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = d\Phi = 0.$$

Отсюда следует $\Phi = C(t)$ или

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t). \quad (\text{V.9})$$

Это есть так называемый *интеграл Лагранжа*, из которого следует, что величина четырехчлена, стоящего в левой части равенства, постоянна для некоторого конкретного момента времени во всей области движения жидкости, но может меняться с течением времени.

Если из объемных сил действуют только силы тяжести, координатная ось Oz вертикальная и направлена вверх, то $X=0$, $Y=0$ и $Z=-g$, откуда:

$$dU = X dx + Y dy + Z dz = -g dz;$$

$$U = -gz$$

(произвольную постоянную здесь можно принять равной нулю).

Рассмотрим установившееся потенциальное движение несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. В этом случае

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

так как $\rho = \text{const}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ (движение установившееся).

Подставляя эти величины в уравнение (V.9), найдем

$$-gz - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

или, деля на g ,

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const};$$

поскольку $\rho g = \gamma$, то окончательно

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{const}. \quad (\text{V.10})$$

Уравнение (V.10) по написанию идентично полученному ранее уравнению Бернулли. Однако между ними имеется существенное различие. Уравнение Бернулли показывает, что сумма трех слагаемых левой части не меняется только вдоль данной элементарной струйки, но может меняться для различных струек; при этом движение жидкости может быть как вихревым, так и потенци-

альным. Уравнение же (V.10), полученное из интеграла Лагранжа, справедливо только для потенциального потока, для которого постоянная H не зависит от координат, а потому остается неизменной в пределах всего потока.

Интегрирование в случае установившегося движения. При установившемся движении частные производные скорости по времени равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

и уравнение (V.2) записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.11})$$

Вспомним, что при установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц жидкостей и, следовательно, с элементарными струйками. Поэтому, например, проекция dx перемещения частицы жидкости вдоль элементарной струйки за время dt равняется $u dt$.

Умножив первое из уравнений (V.11) на проекцию перемещения частицы, т. е. на dx , приведем его к виду

$$X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx. \quad (\text{V.12})$$

Преобразуем правую часть с учетом замечания, сделанного выше:

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) u dt = \\ &= \left(u dt \frac{\partial u}{\partial x} + v dt \frac{\partial u}{\partial y} + w dt \frac{\partial u}{\partial z} \right) u. \end{aligned}$$

Но $v dt$ и $w dt$ являются проекциями на оси Oy и Oz перемещения частицы вдоль элементарной струйки, т. е. соответственно равны dy и dz (на том же основании, на котором $dx = u dt$), поэтому исследуемое выражение можно представить в виде

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = u du,$$

где du — полный дифференциал компонента u скорости частицы, определяемый вдоль элементарной струйки.

Имея в виду, что $udu = du^2/2$ и заменяя на это выражение правую часть уравнения (V.12), получим

$$X dx - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{du^2}{2}.$$

Аналогично второе и третье уравнения системы (V.11) можно привести к виду:

$$Y dy - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{dv^2}{2};$$

$$Z dz - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{dw^2}{2}.$$

Сложим полученные уравнения (группируя слагаемые соответственным образом):

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= \\ = \frac{du^2}{2} + \frac{dv^2}{2} + \frac{dw^2}{2} &= \frac{d(u^2 + v^2 + w^2)}{2} = \frac{dV^2}{2}, \end{aligned}$$

где V — полная скорость в данной точке.

Поскольку, по условию, силы имеют потенциал, то

$$X dx + Y dy + Z dz = dU,$$

где U — силовая функция.

Далее в соответствии со сказанным ранее (движение установившееся)

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dp}{\rho},$$

и, следовательно,

$$dU - \frac{dp}{\rho} = d \frac{V^2}{2}. \quad (\text{V.13})$$

Если движение происходит под действием силы тяжести, то силовая функция

$$U = -gz; \quad dU = -gdz,$$

и уравнение (V.13) записывается в виде

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} - \frac{dV^2}{2} = 0$$

или, так как $\rho g = \gamma$,

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dV^2}{2g} = 0. \quad (\text{V.14})$$

Проинтегрировав (V.13), получим

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{V.15})$$

Это выражение называется *интегралом Бернулли — Эйлера*.

Если движение происходит под действием только сил тяжести и жидкость несжимаема (плотность $\rho = \text{const}$), то

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \quad \text{и} \quad -gz - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} = \text{const.},$$

или

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{const.}$$

т. е. получим известное нам уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости.

Для сжимаемых жидкостей соответственно

$$z + \int \frac{dp}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{const.}, \quad (\text{V.16})$$

или

$$z + P + \frac{V^2}{2g} = \text{const.}, \quad (\text{V.16a})$$

где принято $P = \int \frac{dp}{\rho g}$.

§ 24. Уравнение движения вязкой жидкости

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости могут быть составлены путем дополнения уравнений Эйлера (V.2) теми слагаемыми, которые определяют собой силы сопротивления движению, обусловленные вязкостью жидкости. Тогда уравнения Эйлера запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du}{dt} - F_x &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{dv}{dt} - F_y &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{dw}{dt} - F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.17})$$

где F_x , F_y и F_z — проекции сил вязкости на координатные оси, отнесенные к единице массы жидкости, т. е. записанные в виде ускорений $F_x = F'_x / \rho \Delta W$ (здесь F'_x — проекция силы, действующей на массу $\rho \Delta W$, а F_x — проекция ускорения).

Под действием сил вязкости (сил сопротивления смещению одних частиц жидкости относительно других, смежных с ними) возникают как тангенциальные (касательные), так и нормальные напряжения (напряжения сжатия или растяжения).

Найдем силы F'_x , F'_y и F'_z , предполагая, что жидкость движется слоями без перемешивания движущейся массы. В общем случае направление движения не совпадает с направлением координатных осей, вследствие чего не совпадает с направлением этих осей и сила вязкости.

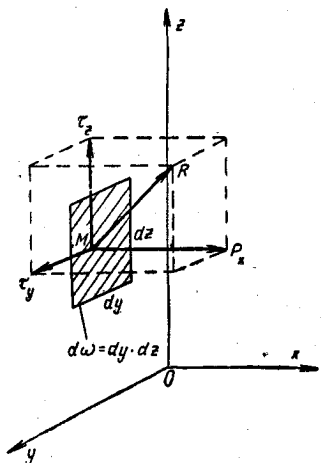


Рис. V.2

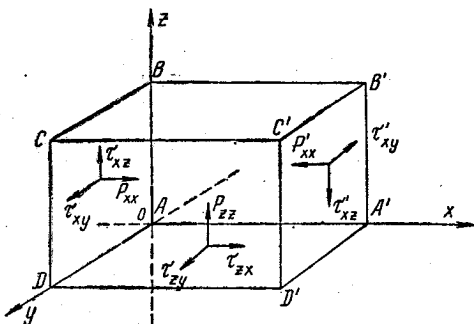


Рис. V.3

Рассмотрим площадку $d\omega$ площадью $dydz$, лежащую в плоскости yOz (рис. V.2). Пусть в некоторой точке M этой площадки действует сила вязкости R , отнесенная к единице площади (как напряжение). Разложим эту силу по координатным осям на три составляющих. Тогда получим силу P_x , нормальную к данной площадке $d\omega$, и две касательные силы: τ_y и τ_z . В соответствии с этим для всей площадки $d\omega$ получим три силы: нормальную $P_x = P_x dydz$ (параллельную оси Ox) и две касательные $T_y = \tau_y dydz$ и $T_z = \tau_z dydz$, соответственно параллельные осям Oy и Ox . Понятно, что из этих трех сил только сила P_x проектируется на ось Ox в натуральную величину, а силы T_y и T_x проектируются на ось Ox в нуль. Сказанное справедливо для любой площадки, выбранной в любой координатной плоскости.

Теперь выделим элемент жидкости в форме параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям, и определим сумму проекций сил вязкости, действующих только на те три грани

параллелепипеда, которые образуют трехгранный угол с вершиной A (рис. V.3).

Отметим, что для каждой координатной оси мы получим проекции только трех сил (из девяти); остальные будут проектироваться в точку. Так, для оси Ox :

$$P_x = p_x dydz; T_{x,1} = \tau_x dx dy \text{ и } T_{x,2} = \tau_x dx dz.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем двойную индексацию напряжений: например, для нормального напряжения p_{xx} , для касательного напряжения τ_{xy} и т. д.; здесь первый индекс указывает на то, что площадка, для которой определяется напряжение, расположена нормально к данной оси координат, а второй — направление действия напряжения. С учетом этого получим следующую запись проекции сил на ось Ox :

Проекция нормальной силы на грань $ABCD$	$p_{xx} dydz$
» касательной » » » $ABB'A'A$	$\tau_{yx} dx dz$
» » » » » $AA'D'D$	$\tau_{zx} dx dy$

Аналогичные выражения можем составить и для двух других координатных осей, в результате чего получим следующие выражения для проекций сил, действующих на грани трехгранного угла с вершиной A :

$$\begin{aligned} \text{Для оси } Ox & . . . p_{xx} dydz; \tau_{yx} dx dz; \tau_{zx} dx dy \\ \text{» » } Oy & . . . p_{yy} dx dz; \tau_{xy} dy dz; \tau_{zy} dx dy \\ \text{» » } Oz & . . . p_{zz} dx dy; \tau_{xz} dy dz; \tau_{yz} dx dz \end{aligned}$$

Переходя затем к проекциям сил, действующих на грани трехгранного угла с вершиной C' , отметим, что напряжения на этих гранях будут отличаться от напряжений на гранях первого угла (с вершиной в точке A) на величину соответствующих частных дифференциалов этих напряжений. Следовательно:

$$\begin{aligned} \text{Для оси } Ox & . . . p_{xx}^* dydz; \tau_{yx}^* dx dz; \tau_{zx}^* dx dy \\ \text{» » } Oy & . . . p_{yy}^* dx dz; \tau_{xy}^* dy dz; \tau_{zy}^* dx dy \\ \text{» » } Oz & . . . p_{zz}^* dx dy; \tau_{xz}^* dy dz; \tau_{yz}^* dx dz, \end{aligned}$$

где для оси Ox :

$$\begin{aligned} p_{xx}^* &= p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx; \\ \tau_{yx}^* &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy; \\ \tau_{zx}^* &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить и для двух других осей.

Составим теперь выражение для силы F'_x , представляющей собой, как сказано выше, сумму проекций на ось Ox всех сил вязкости, действующей на массу жидкости в объеме выделенного параллелепипеда.

Полагая, что направление сил, действующих на грани угла с вершиной C (см. рис. V.3), противоположно направлению сил, действующих на грани трехгранного угла с вершиной A , получим

$$F'_x = (p_{xx} - p'_{xx}) dy dz + (\tau_{yx} - \tau'_{yx}) dx dz + (\tau_{zx} - \tau'_{zx}) dx dy. \quad (V.18)$$

Но:

$$p_{xx} - p'_{xx} = - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx;$$

$$\tau_{yx} - \tau'_{yx} = - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy;$$

$$\tau_{zx} - \tau'_{zx} = - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz,$$

в силу чего, делая соответствующую подстановку, найдем

$$F'_x = - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (V.19)$$

Сила F_x , входящая в уравнение Эйлера, как указано выше, представляет собой проекцию силы вязкости, отнесенную к единице массы жидкости, т. е. $F_x = F'_x / \rho \Delta W$, где в данном случае $\Delta W = dx dy dz$, а поэтому для силы F_x получим следующее выражение:

$$F_x = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right). \quad (V.20)$$

Здесь p_{xx} — нормальные, а τ_{yx} и τ_{zx} — касательные напряжения.

Касательные напряжения τ_{yx} в пределах грани $dx dz$ остаются одинаковыми для всех точек этой площадки, т. е. не зависят от координат x и z и изменяются только при перемещении этой площадки вдоль оси Oy , т. е. зависят от координаты y . Другими словами, τ_{yx} — это касательные напряжения, зависящие только от градиента скорости $\frac{\partial u}{\partial y}$. Поэтому в соответствии с законом

Ньютона $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, и по аналогии $\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$,

откуда

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}$. Здесь p_{xx} представляет собой нормальное к площади $dy dz$ напряжение, обусловленное

влиянием вязкости (сжатия — в условиях торможения и растяжения — в условиях ускоренного движения) в зависимости от изменения скорости вдоль оси Ox , т. е. в зависимости от градиента скорости $\frac{\partial u}{\partial x}$. Поэтому можно допустить, что напряжение p_{xx}

может также определяться по закону Ньютона: $p_{xx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$, а тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Делая соответствующие подстановки в уравнение (V.20), получим

$$F_x = -\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

или, так как $\mu/\rho = \nu$ (кинематической вязкости),

$$F_x = -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Аналогично получим:

$$F_y = -\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right);$$

$$F_z = -\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

Вводя теперь полученные выражения сил F_x , F_y и F_z в систему уравнений (V.17), после некоторой перестановки слагаемых в окончательной форме запишем дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.21})$$

Эти уравнения именуются *уравнениями Навье — Стокса*.

§ 25. Уравнение Бернулли для газов

Уравнение (V.16) в дифференциальной форме имеет вид

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d \frac{v^2}{2g} = 0.$$

Для газов, обладающих вязкостью, необходимо учитывать потери энергии на сопротивление, в связи с чем для элементарной струйки

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d \frac{v^2}{2g} + dh_w = 0,$$

где v — скорость элементарной струйки.

Интегрируя это уравнение вдоль элементарной струйки на длине Δl (от сечения 1 до сечения 2), получим

$$z_2 - z_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \Delta h_w = 0,$$

где через Δh_w , как обычно, обозначены потери напора по длине Δl .

Величину $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g}$ можно найти, если плотность ρ является

функцией от давления p . Вид этой функции зависит от характера термодинамического процесса, происходящего в том или другом случае движения газа. Так, истечение газа из отверстия в резервуаре можно (без существенной погрешности) считать происходящим при адиабатическом процессе, т. е. без обмена тепла между выходящим газом и внешней средой; движение газа по трубам с большой разностью давления в известных условиях можно рассматривать как изотермическое. Наиболее общим случаем, как известно, является политропический процесс. Из уравнения политропы $\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}$ находим функцию $\rho = f(p)$, которая имеет вид $\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n}$.

После подстановки найдем

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} &= \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-1/n} dp = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} \left(\frac{p^{1-1/n} - p_0^{1-1/n}}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} p^{1-1/n} - \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} p_0^{1-1/n} \right). \end{aligned}$$

Но второе слагаемое в скобках

$$\frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} p_0^{1-1/n} = \frac{p_0}{\rho_0},$$

а первое слагаемое

$$\frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} p^{1-1/n} = \frac{p}{\rho}$$

(в чем легко убедиться, заметив, что $\frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} = \frac{p^{1/n}}{\rho}$ в соответствии с уравнением политропы). Таким образом, искомая величина интеграла

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Делая подстановку в уравнение Бернулли, получим это уравнение в виде

$$g(z_2 - z_1) + \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + gh_{w_{1-2}} = 0$$

или

$$z_1 g + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 g + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}. \quad (V.22)$$

Замечая, что $\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1$, а $\frac{p_2}{\rho_2} = RT_2$, можно придать этому уравнению также вид

$$gz_1 + \frac{n}{n-1} RT_1 + \frac{v_1^2}{2} = z_2 g + \frac{n}{n-1} RT_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}, \quad (V.22a)$$

где $h_{w_{1-2}}$ — потерянная удельная энергия;
 R — удельная газовая постоянная;
 g — ускорение свободного падения.

При адиабатическом процессе движение газа описывается теми же основными уравнениями, но при этом показатель политропы n заменяется показателем адиабаты k , поэтому при адиабатическом процессе уравнение Бернулли будет записано в виде

$$gz_1 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}, \quad (V.23)$$

или

$$gz_1 + \frac{k}{k-1} RT_1 + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{k}{k-1} RT_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}. \quad (V.23a)$$

Обратимся к движению газа при изотермическом процессе, когда соблюдается условие

$$\frac{p}{\rho} = RT = \text{const} \text{ и } \rho = \frac{p}{RT}.$$

В таком случае, учитывая постоянство температуры,

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 \frac{dp}{p/RT} = RT \int_1^2 \frac{dp}{p} = RT \ln \frac{p_2}{p_1},$$

и тогда для изотермического процесса уравнение Бернулли примет вид

$$gz_1 + RT \ln p_1 + \frac{v_1^2}{2} = z_2 g + RT \ln p_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}. \quad (\text{V. 24})$$

На практике очень часто при расчете газопроводов можно пренебречь величиной $z_1 - z_2 = \Delta z$, полагая $\Delta z = 0$; тогда уравнение Бернулли получит более короткую запись:

$$RT \ln p_1 + \frac{v_1^2}{2} = RT \ln p_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_{w_{1-2}}. \quad (\text{V. 25})$$

Рассмотрим условия применимости этого уравнения.

При адиабатическом процессе уравнение Бернулли в такой же краткой форме (т. е. полагая $\Delta z = 0$, а также пренебрегая величиной $gh_{w_{1-2}}$) будет записываться в виде

$$\frac{k}{k-1} RT_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_2 + \frac{v_2^2}{2},$$

откуда

$$\frac{k}{k-1} R (T_1 - T_2) = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2},$$

или

$$T_1 - T_2 = \frac{k-1}{kR} \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right).$$

Но для показателя адиабаты можно считать $k = 1,4$, а газовая постоянная R при принятой нами форме записи уравнения состояния $\left(\frac{p}{\rho} = RT\right)$ равняется, как известно, 287,14 Дж/(кг·К). Вычисляя, получим

$$\frac{k-1}{kR} = \frac{0,4}{1,4 \cdot 287,14} \approx 0,001,$$

откуда

$$T_1 - T_2 = 0,001 \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right).$$

Это уравнение показывает, что температура изменится на 1 град, если разность половин квадратов скоростей в начальном и конечном сечениях данного участка газопровода составит ~ 1000 м. Таким образом, газопроводы без тепловой изоляции на практике можно рассчитывать как при изотермическом процессе.

Во многих случаях приходится встречаться с движением газа с большими скоростями (например, в ракетной технике, в газовых турбинах и т. д.). Физический процесс таких течений очень сложен, и изучение закономерностей его обычно является предметом особой дисциплины, называемой газовой аэродинамикой. Здесь рассмотрим лишь одну характерную особенность течения газа с большой скоростью по трубам переменного сечения, заключающуюся в том, что скорость газа с увеличением площади сечения трубопровода не всегда убывает, как то имеет место при движении несжимаемой жидкости, а может и возрастать (если скорость газа превышает скорость звука). Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Как известно, при движении несжимаемой жидкости по трубе переменного диаметра d , а следовательно, и переменной площади поперечного сечения ω средняя скорость в соответствии с уравнением сплошности увеличивается с уменьшением d (т. е. с уменьшением ω), и, наоборот, уменьшается с увеличением d .

При движении газа такое соотношение может и не сохраниться. Рассмотрим, например, случай установившегося движения невязкой газообразной жидкости. По условию постоянства массового расхода вдоль трубопровода (уравнение неразрывности) $Q_p = \rho v \omega = \text{const}$. Дифференцируя это уравнение, получим

$$dQ_p = \omega v dp + \rho v d\omega + \rho \omega dv = 0$$

и, разделив его на произведение $\rho v \omega$, найдем

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dv}{v} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dp}{\rho} - \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} \left(-\frac{dp}{\rho} \cdot \frac{v}{dv} - 1 \right). \quad (\text{V. 26})$$

Определим теперь, чему равно dv , пользуясь уравнением Бернулли, которое для невязкой газообразной жидкости, как известно, имеет вид

$$gz + \frac{dp}{\rho} + \frac{dv^2}{2} = 0.$$

Если для упрощения задачи принять трубу горизонтальной, то $z = \text{const}$ и $dz = 0$. В этом случае уравнение Бернулли упрощается:

$$\frac{dp}{\rho} + v dv = 0,$$

откуда

$$dv = -\frac{dp}{\rho v}.$$

Делая подстановку в (V.26), найдем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left[-\frac{dp}{\rho} \cdot \frac{v}{\left(-\frac{dp}{\rho v} \right)} - 1 \right] = \frac{dv}{v} \left[\frac{v^2}{\left(\frac{dp}{\rho} \right)} - 1 \right]. \quad (\text{V. 27})$$

Как известно, скорость звука c (скорость распространения упругих деформаций) определяется формулой $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, с учетом чего $\frac{dp}{d\rho} = c^2$.
Имея это в виду, вместо (V.27) напишем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right).$$

Отношение скорости движения газа v к скорости звука c называют *числом Маха* и обозначают буквой M ; таким образом $v/c = M$ и $v^2/c^2 = M^2$.
Введя это обозначение, получим

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1). \quad (\text{V.28})$$

Из этого уравнения следуют два вывода.

1. Если $v < c$, т. е. если скорость газа меньше скорости звука (такую скорость называют дозвуковой), то $M < 1$ и $(M^2 - 1) < 0$, т. е. выражение в скобках будет отрицательным, а тогда при $d\omega > 0$ $dv < 0$. Другими словами, при увеличении площади сечения ω скорость движения газа v уменьшается (как и для несжимаемой жидкости).

2. Если $v > c$ и $M > 1$ и, следовательно, $(M^2 - 1) > 0$, т. е. при скоростях, больших скорости звука (при сверхзвуковой скорости), при $d\omega > 0$ имеем $dv > 0$. Следовательно, при увеличении площади сечения (при расширении трубы) скорость движения газа будет возрастать.

Глава VI

ПЛОСКОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 26. Потенциал скорости и функция тока

Движение жидкости называется плоским, если траектории всех частиц являются плоскими кривыми.

Если провести оси координат Ox и Oy в плоскости, параллельной некоторой плоскости течения, то дифференциальные уравнения движения запишутся в следующем виде:
динамические

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y},$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Для плоского потока проекции компонентов вихря ξ и η равны нулю и в том случае, если бы движение было вихревым [это

следует из выражений (IV.11)]. Поэтому аналитическим условием потенциальности в рассматриваемом случае является

$$\zeta = 0$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (VI.1)$$

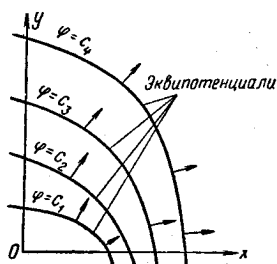


Рис. VI.1. Изображение эквипотенциали (линии равного потенциала)

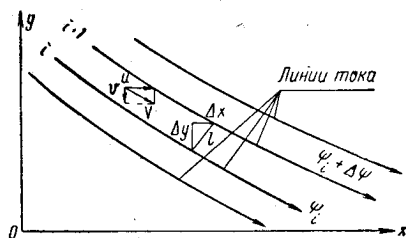


Рис. VI.2. Линии тока

Ранее было указано, что существует функция $\varphi(xy)$, для которой

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

и что такая функция называется потенциалом скорости.

Плоская кривая

$$\varphi(x, y) = C,$$

где постоянная C называется эквипотенциальной линией.

Давая C ряд значений, получим семейство эквипотенциальных линий (рис. VI.1).

Потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (VI.2)$$

Действительно, обратимся к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для компонентов скорости $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} = 0. \quad (VI.3)$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

т. е. уравнение Лапласа.

Использование уравнения Лапласа формально упрощает задачу исследования потока жидкости, так как приводит к определению одной только функции φ (вместо двух: u и v). Однако решение уравнения Лапласа очень часто представляет собой более сложную задачу, нежели прямое определение упомянутых функций.

При исследовании плоского потенциального движения наряду с потенциалом скорости большое значение имеет еще одна функция координат, называемая *функцией тока* ψ , которая удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \text{ и } \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad (\text{VI.4})$$

Пусть такая функция существует для некоторого потока. Тогда ее полный дифференциал

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy. \quad (\text{VI.5})$$

Из уравнения линии тока для того же движения $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ можно получить $-v dx + u dy = 0$.

Следовательно, проследивая значения функции ψ вдоль линии тока, заметим, что $d\psi = 0$. Иными словами, значение функции тока вдоль линии тока неизменно и равно ее значению на границе области движения. Будем давать функции ряд постоянных значений, т. е. представим ее в виде

$$\psi(x, y) = C, \quad (\text{VI.6})$$

где C — какой-то параметр. В плоскости движения этому выражению будет соответствовать семейство кривых (рис. VI.2), совпадающих с линиями тока. Рассмотрим поток, представленный линиями тока на этом рисунке, принимая его размер в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, равным единице. Выделим две соседние линии тока, обозначив их через i и $i+1$; значения функции тока на этих линиях обозначим через ψ_i и $\psi_{i+1} + \Delta\psi$.

Расход жидкости, протекающей в элементарной струйке между двумя выделенными линиями тока, равняется $V\Delta l$, где Δl — ширина элементарной струйки в некотором ее сечении, проведенном нормально к скорости в этом сечении, и V — средняя в этом сечении скорость струйки.

Прежде чем перейти к дальнейшим рассуждениям, обратимся к вспомогательной фигуре на рис. VI.3. На этом рисунке сечение

элементарной струйки проведено под углом к направлению скорости V . Пусть высота этого косо́го сечения равна d ; расход $q = Va$, где a — размер сечения в плоскости, перпендикулярной к скорости V . Но $a = d \cos \alpha$, где α является, как это видно из рис. VI.3, углом между вектором скорости и нормалью к косо́му сечению. Записывая цепочку тождественных выражений, получим

$$q = Va = Vd \cos \alpha = V \cos \alpha d = V_n d,$$

где V_n — проекция вектора скорости V на внутреннюю нормаль к сечению d , которую мы будем называть нормальной скоростью.

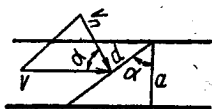


Рис. VI.3

Возвращаясь к рис. IV.2, заменим сечение Δl составным, состоящим из двух частей: Δy и Δx . Расход, проходящий через составное сечение (по аналогии с рассуждениями применительно к случаю, представленному на рис. VI.3 и с учетом знаков проекции скорости V), будет равен:

$$q = -v\Delta x + u\Delta y.$$

Переходя к пределу при неограниченном сближении линий тока i и $(j+1)$ и рассматривая расход элементарной струйки как приращение расхода всего потока при возрастании его сечения, получим

$$dq = -vdx + udy.$$

С учетом (VI.5) приходим к выражению

$$dq = d\psi,$$

интегрируя которое, например, в пределах расстояния между двумя линиями тока, получим

$$\Delta q_{i+1} - q_i = \psi_2 - \psi_1.$$

Таким образом, разность значений функции тока, соответствующих двум линиям тока, равняется расходу струи, ограниченной этими двумя линиями тока.

Потенциал скорости и функция тока взаимозависимы. Эту зависимость можно обнаружить из приводимого ниже сопоставления:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

с другой стороны,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Сравнивая между собой эти выражения, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Большое значение в теории плоского потенциального движения имеет также то обстоятельство, что линии тока и эквипотенциальные линии ортогональны между собой.

Действительно, из уравнения эквипотенциальных линий следует

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Следовательно, тангенс угла, образуемого касательной к эквипотенциалам с осью абсцисс, равняется:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Тангенс же угла, образуемого с осью абсцисс касательной к линии тока, равняется:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Перемножая эти выражения, получим

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = -1,$$

что, как известно, является признаком взаимной перпендикулярности касательных.

Таким образом, семейство линий тока и семейство линий равного потенциала образуют ортогональную сетку (рис. VI.4).

В общем случае эта сетка представляет собой систему криволинейных прямоугольников, а в частном (если линии φ и ψ построены с одинаковыми интервалами, т. е. если $\Delta\varphi = \Delta\psi$) — сетку криволинейных квадратов. Эта сетка называется гидродинамической сеткой, или сеткой движения.

Гидродинамическая сетка имеет большое практическое значение; если она построена, то можно считать задачу о движении данного потока полностью решенной.

Сетку можно построить приближенно, не зная алгебраического выражения функций φ и ψ , а зная только границы потока, т. е. расположение жест-

ких неподвижных стенок канала, в пределах которого движется рассматриваемая жидкость.

Жесткие стенки являются крайними линиями тока (на рис. VI.5 линии ψ_0 и ψ_n), между которыми для построения гидродинамической сетки надо расположить промежуточные линии тока (линии $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$). Линии равного потенциала ($\varphi_1=C_1, \varphi_2=C_2, \dots$) должны быть перпендикулярны линиям

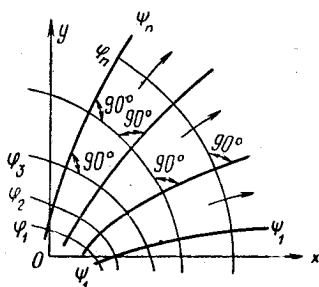


Рис. VI.4. Гидродинамическая сетка

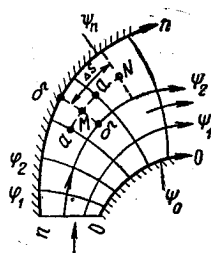


Рис. VI.5. К построению гидродинамической сетки

тока, а следовательно, и границам канала и отстоять друг от друга на таком расстоянии, чтобы сетка состояла из криволинейных квадратов. Проверкой правильности построения явится равенство средних линий в каждом квадрате. Так, средняя линия *a-a* должна быть равна по длине линии *b-b*.

Предположим, что гидродинамическая сетка (на рис. VI.5) построена для некоторого конкретного потенциального потока, расход которого известен (или задан). Тогда, пользуясь этой сеткой, можно приближенно определить скорость движения жидкости в любой точке. Так, для точки *M* скорость приближенно

$$u_m \approx \frac{\Delta Q}{\Delta b},$$

где ΔQ — расход, проходящий между соседними линиями тока (на рис. VI.5) между линиями ψ_n и ψ_2 , а Δb — длина отрезка $b=b$, величину которой можно определить непосредственно по чертежу.

Таким путем можно найти скорости движения жидкости во всем пространстве, а зная поле скоростей, определить и ускорения. Например, для участка линии тока от точки *M* до точки *N* (см. рис. VI.5) среднее ускорение

$$i_{M-N} = \frac{u_N^2 - u_M^2}{2\Delta s}.$$

Из условия, что семейства линий функций тока ψ и функций потенциала скорости φ образуют ортогональную сетку, следует, что, меняя смысл этих линий, можно получить другой поток, для которого семейство линий функции тока первого потока будет семейством линий функции равного потенциала.

Таким образом, в любой гидродинамической сетке всегда заключены два потока, а потому всякий раз, решая задачу о конкретном движении, мы определяем как бы два потока.

Рассмотрим некоторые примеры потенциального движения.

Равномерное движение, параллельное координатной оси Ox . Пусть скорость движения v_0 . Определим потенциал скорости φ и функцию тока ψ (рис. VI.6).

Имеем $d\varphi = udx + vdy$. Проекциями скорости v_0 на координатные оси Ox и Oy являются соответственно $v_0 \cos \alpha = v_0$, $v_0 \sin \alpha = 0$. В данном случае $u = v_0$, $v = 0$ и, следовательно, $d\varphi = v_0 dx$, где $v_0 = \text{const}$.

Интегрируя, получим

$$\varphi = v_0 x + C.$$

Полагая постоянную интегрирования C равной нулю, находим окончательно

$$\varphi = v_0 x.$$

Аналогично, пользуясь уравнением

$$d\psi = -vdx + udy,$$

можно найти

$$\psi = v_0 y.$$

Так как функции φ и ψ обратимы, то для равномерного движения, параллельного оси Oy (рис. VI.7), найдем $\varphi_1 = \psi$ и $\psi_1 = \varphi$, т. е.:

$$\varphi_1 = v_0 y;$$

$$\psi_1 = v_0 x.$$

В обоих случаях гидродинамическая сетка состоит из квадратов, стороны которых соответственно параллельны координатным осям Ox и Oy .

Источники и стоки. Источником называется точка (а в случае плоскопараллельного течения — прямая), из которой непрерывно

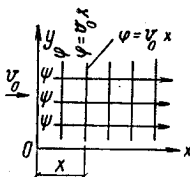


Рис. VI.6

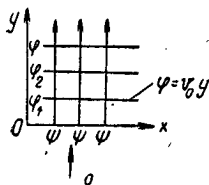


Рис. VI.7

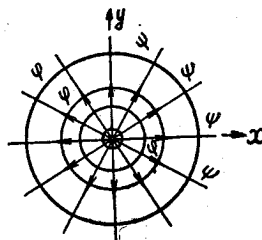


Рис. VI.8. Источник

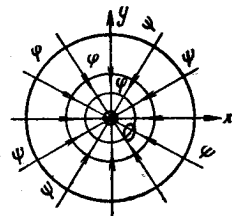


Рис. VI.9. Сток

но и равномерно вытекает жидкость по радиальным прямым, а стоком — точка (прямая), к которой, наоборот, стекает жидкость. Определим потенциал скорости φ и функцию тока ψ для источника. Непосредственно из определения очевидно, что линии тока будут радиальными прямыми, а в таком случае линии

равного потенциала скорости должны быть окружностями (рис. VI.8 и VI.9).

Уравнением функции тока является $\psi = C\alpha$ (где α — угол, образуемый данной радиальной прямой с осью Ox). Чтобы записать ψ как функцию координат, заметим, что угол $\alpha = \text{arctg } y/x$, и тогда получим

$$\psi = C \text{arctg } \frac{y}{x}.$$

Определяя потенциал скорости φ , напишем

$$d\varphi = udx + vdy.$$

Обозначив расход источника на единицу длины через Q , находим скорость V любой частицы жидкости в расстоянии r от центра

$$V = \frac{Q}{2\pi r}.$$

Проекциями этой скорости будут

$$u = V \cos \alpha = V \frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} x;$$

$$v = \frac{Q}{2\pi r^2} y.$$

После подстановки получим

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (xdy + ydx) = 0,$$

но

$$xdx + ydy = rdr,$$

поэтому

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} rdr = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\varphi = \int \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C.$$

Полагая $C=0$, найдем выражение для потенциала скорости

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

или

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Циркуляционное движение. В качестве еще одного примера рассмотрим циркуляционное движение — так называют движе-

ние, в котором линиями тока являются концентрические окружности, а радиальные прямые соответствуют линиям равного потенциала скорости (рис. VI.10).

Пользуясь обратимостью функций φ и ψ , получим для потенциала скорости $\varphi = C \operatorname{arctg} y/x$.

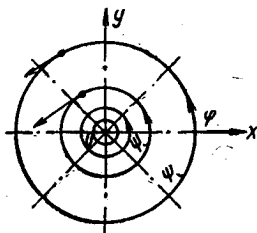


Рис. VI.10

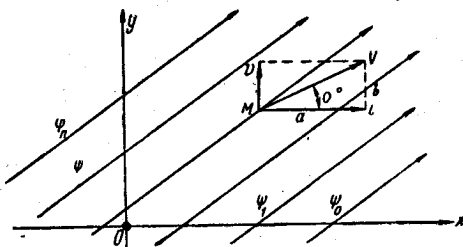


Рис. VI.11

Тогда можно найти проекции скорости на оси координат:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = -C \frac{y}{r^2}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = C \frac{x}{r^2}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Полная скорость

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(-C \frac{y}{r^2}\right)^2 + \left(C \frac{x}{r^2}\right)^2} = \frac{C}{r^2} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{C}{r^2} r = \frac{C}{r}$$

Отсюда получаем

$$Vr = \text{const}$$

или, иначе, скорость меняется в зависимости от расстояния от центра вращения, следуя гиперболическому закону ($u_1 < u_2$, так как $r_1 > r_2$). Такое движение называют иногда вращением жидкости по закону площадей.

§ 27. Сложение потенциальных потоков

Если данный поток является результатом сложения двух потенциальных течений, то можно показать, что он также будет потенциальным и его потенциал скорости будет равен алгебраической сумме потенциалов скоростей слагаемых движений.

Сложение двух плоскопараллельных движений. Определим скорость движения жидкости по величине и направлению в точке M с координатами x, y , если движение является результатом

сложения двух течений, для которых заданы соответствующие потенциалы скорости $\varphi_1 = ax$ и $\varphi_2 = by$.

Определим сначала потенциал скорости результирующего потока φ . Согласно принятому определению,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = ax + by.$$

Найдем проекции скоростей u и v сложного движения:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ax + by) = a;$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (ax + by) = b,$$

откуда скорость

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = C.$$

Таким образом, скорость V не зависит ни от координат x и y , ни от времени t . Поэтому движение будет установившимся и равномерным с одинаковой для всех частиц жидкости скоростью $V = C = \text{const}$.

Определим далее траекторию частиц.

Так как в данном случае движение установившееся, то линии тока совпадают с траекторией, а потому мы можем воспользоваться уравнениями линий тока

$$dx/u = dy/v.$$

Выше было найдено, что $u = a$ и $v = b$, откуда или $dx/a = dy/b$, или $dy = b/a \cdot dx$.

Интегрируя dy , находим

$$y = \frac{b}{a} x + C.$$

Это уравнение описывает семейство параллельных прямых (рис. VI.11), угол наклона которых к координатной оси Ox определяется из равенства $\text{tg } \alpha = b/a$.

Движение, определяемое двумя источниками равного напряжения (или равного расхода). Определим потенциал скорости такого движения. В точке M под влиянием левого источника потенциал $\varphi_1 = C_1 \ln r_1$, а под влиянием правого источника $\varphi_2 = C_1 \ln r_2$ (рис. VI.12).

Следовательно, потенциал скорости искомого сложного движения будет равен:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C_1 (\ln r_1 + \ln r_2) = C_1 \ln (r_1 r_2),$$

но

$$r_1 = \sqrt{(b+x)^2 + y^2},$$

а

$$r_2 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2},$$

откуда

$$\varphi = C_1 \ln \sqrt{[(b+x)^2 + y^2][(b-x)^2 + y^2]}.$$

Далее находим проекции u и v полной скорости, вычисляя соответствующие производные:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1(x, y) \text{ и } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2(x, y).$$

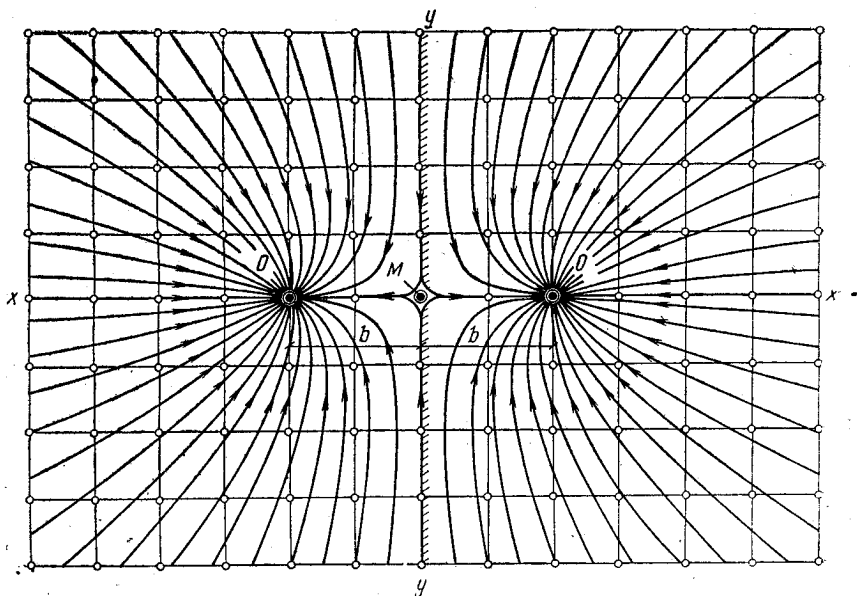


Рис. VI.12

Определив таким образом скорости u и v , находим затем уравнения линий тока

$$\frac{dx}{F_1(x, y)} = \frac{dy}{F_2(x, y)};$$

системы таких линий показаны на рис. VI.12. Аналогичной будет картина линий тока для движений, определяемых двумя стоками, с той лишь разницей, что в последнем случае направление движения будет противоположным предыдущему.

Движение, определяемое стоком и вращением по закону площадей. Подобно предыдущему, запишем потенциал скорости

для стока в точке $M \varphi_1 = C \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. VI.13) и потенциал скорости для вращения по закону площадей $\varphi_2 = C \operatorname{arctg} y/x$. Потенциал скорости данного сложного движения

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \\ &= C \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Определяем

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 \text{ и } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2.$$

и тогда уравнение линий тока выразится зависимостью

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2}.$$

Интегрируя, находим $\Phi(x, y) = C$; при этом линии тока будут изображаться семейством спиралей (см. рис. VI.13).

Рис. VI.13

Движение, определяемое потенциалом скорости для вращения по закону площадей $\varphi = C \operatorname{arctg} y/x$ и потенциалом плоскопараллельного движения с постоянной скоростью u_0 . На

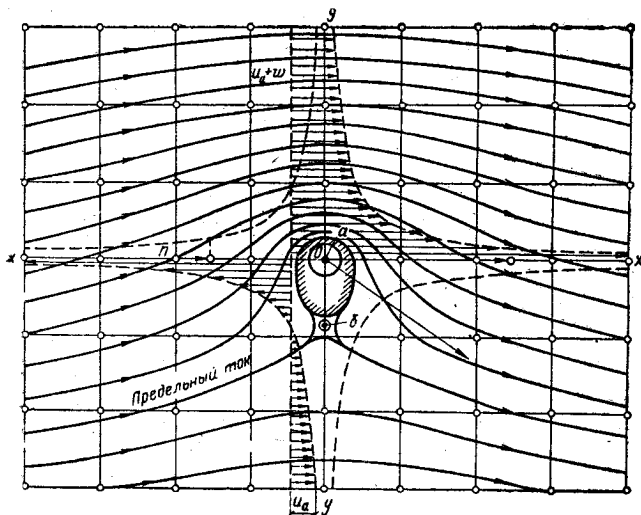


Рис. VI.14

рис. VI.14 заштрихованная площадь определяет область замкнутой циркуляции. Давление p_a в точке a больше давления p_b в точке b , что определяет возникновение силы ΔP , под действием которой масса жидкости (в заштрихованной области) перемещается снизу вверх (рис. VI.14).

Глава VII

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЯХ

§ 28. Основные понятия и определения

Понятие о вихревом движении связано с представлением о вращении ограниченной массы жидкости относительно некоторой оси, именуемой вихревой линией. В связи с этим вихревое движение определяется двумя параметрами — осью и угловой скоростью вращения.

Как было указано ранее, вектор угловой скорости вращения определяется его проекциями по координатным осям Ox , Oy , Oz (см. гл. IV):

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

Следовательно, поле скоростей будет вихревым в том случае, если хотя бы одна из этих проекций не будет равной нулю или если

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \neq \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для заданного поля скоростей в форме уравнений Эйлера

$$\left. \begin{aligned} u &= F_1(x, y, z, t); \\ v &= F_2(x, y, z, t); \\ w &= F_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}$$

этот вопрос решается с помощью соответствующего дифференцирования этих уравнений.

Вихревая линия (ось вращения) представляет собой линию, касательную к направлению векторов угловой скорости ω . Эта линия аналогична линии тока (рис. VII.1), а потому определяется уравнением

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

При изучении вихревых движений вводим понятия о вихревой трубке, вихревом шнуре и напряжении вихря, аналогичные понятиям о трубке тока, элементарной струйке и расходе жидкости элементарной струйки.

Вихревой трубкой называют трубку, образованную системой вихревых линий, проходящих через элементарный замкнутый



Рис. VII.1. Вихревая линия

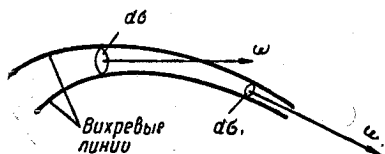


Рис. VII.2. Вихревая трубка

контур (рис. VII.2), а совокупность вихревых линий, заключенных внутри вихревой трубки, называют *вихревым шнуром*.

Напряжением вихря называют произведение площади поперечного сечения вихревой трубки $d\sigma$ на среднюю величину угловой скорости вращения в этом сечении.

Обозначая напряжение вихря j_v , можем написать

$$dj_v = \omega d\sigma. \quad (VII.1)$$

В теории вихревого движения доказывается (теоремы Гельмгольца), что вихревой шнур сохраняется во времени и в пространстве, т. е. нигде не выклинивается, и что его напряжение остается неизменным вдоль шнура.

Таким образом

$$dj_v = \omega d\sigma = \text{const}. \quad (VII.2)$$

Рис. VII.3

Вихревой шнур или образует замкнутое кольцо, или заканчивается на границах данной массы жидкости (рис. VII.3).

Следует отметить, что вихревое движение не возникает самостоятельно, а в невязкой жидкости не исчезает; потенциальное движение всегда остается потенциальным и не переходит в вихревое.

§ 29. Циркуляция скорости и теорема Томсона

Понятие о циркуляции скорости введено В. Томсоном, по предложению которого циркуляция скорости по контуру называют величиной, определяемую равенством:

$$\Gamma = \int_A^B V \cos \theta ds, \quad (VII.3)$$

где V — вектор скорости в данной точке;
 θ — угол, образуемый направлением вектора скорости и касательной к контуру в той же точке;
 ds — элемент контурной линии;
 A и B — пределы интегрирования, определяющие собой участок контурной линии, для которого вычисляется величина циркуляции.

Не трудно провести аналогию между циркуляцией скорости и понятием о работе силы на некотором криволинейном пути (рис. VII.4).

Теорема Томсона о циркуляции скорости. Разложим вектор скорости V на составляющие u , v и w соответственно по координатным осям:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \alpha; \\ v &= V \cos \beta; \\ w &= V \cos \gamma \end{aligned}$$

и определим проекции элементарного отрезка ds на те же оси:

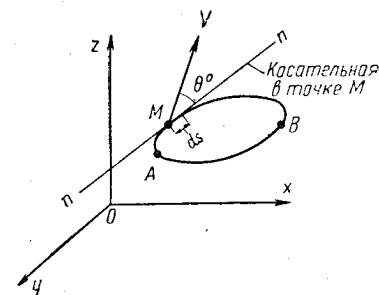


Рис. VII.4

$$dx = ds \cos \alpha; \quad dy = ds \cos \beta \quad \text{и} \quad dz = ds \cos \gamma.$$

Найдем сумму

$$u dx + v dy + w dz.$$

Делая соответствующие подстановки, получим

$$V \cos \alpha ds \cos \alpha + V \cos \beta ds \cos \beta + V \cos \gamma ds \cos \gamma$$

или

$$V ds (\cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma).$$

Но сумма, стоящая в скобках, равна косинусу угла θ между направлением скорости V и направлением отрезка ds (направлением касательной к контурной линии), т. е.

$$\cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma = \cos \theta,$$

с учетом чего

$$V ds (\cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma) = V ds \cos \theta.$$

Тогда получим

$$u dx + v dy + w dz = V \cos \theta ds,$$

и, очевидно, циркуляцию скорости можно представить в виде

$$\Gamma = \int_A^B V \cos \theta ds = \int_A^B u dx + v dy + w dz.$$

Известно, что для потенциального движения жидкости

$$d\varphi = udx + vdy + wdz,$$

поэтому для потенциального движения циркуляция скорости

$$\Gamma = \int_A^B V \cos \theta ds = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A,$$

а для замкнутого контура при однозначности φ

$$\Gamma = \int_B^A d\varphi = \varphi_A - \varphi_A = 0. \quad (\text{VII.4})$$

Отсюда следует теорема Томсона: циркуляция скорости при невихревом движении и однозначности функции потенциала скорости по любому замкнутому контуру равна нулю.

Очевидно, что при многозначности функции потенциала скорости циркуляция скорости не будет равна нулю (например, в случае вращения жидкости по закону площадей, когда $\varphi = C \arctg y/x = Ca$).

В таком случае φ увеличивается при каждом полном обороте на величину 2π , в связи с чем указанное в гл. V циркуляционное течение можно назвать квазипотенциальным.

Глава VIII

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ

§ 30. Основное уравнение одномерного движения жидкости с переменным расходом (массой)

Вопросом о движении тел с переменной массой стали интересоваться в конце XIX в. в связи с развитием ракетной техники и пр.

Основоположителем теории движения тел с переменной массой считают проф. И. В. Мещерского, опубликовавшего в 1897 г. работу «Динамика точки переменной массы». Последующие его исследования были опубликованы в 1952 г. в монографии «Работы по механике переменной массы». Исследования И. В. Мещерского послужили, в частности, базой для изучения законов движения жидкости с переменным расходом по трубам и в открытых каналах. В гидравлике эти вопросы связаны с решением многих задач в области водопроводных и вентиляционных систем, а также в области гидротехники (и, в частности, ирригации) и т. д.

Для составления основного уравнения движения жидкости с переменным расходом (массой) примем следующую упрощен-

ную модель. Пусть к массе жидкости, движущейся в некотором русле (водоводе), непрерывно присоединяется (или отводится) новая масса той же жидкости, причем это присоединение (или отвод) происходит одновременно и равномерно во всех точках основного потока. На практике такая схема, конечно, нереальна.

Изменение расхода основного потока жидкости по пути происходит из-за входа в данное русло нового потока, который, вливаясь в это русло, образует совместно с основным потоком два параллельных течения; их массы перемешиваются по пути, создавая единый общий поток.

В соответствии с принятой упрощенной схемой в любой момент времени в некотором объеме ΔW одновременно находится масса m основного и масса m' присоединенного потоков. Движение предполагается сплошным, так что все параметры движущейся массы являются непрерывными функциями координат пространства и времени.

Составим теперь уравнение движения жидкости с переменной массой для случая отсоединения расхода по пути.

С этой целью воспользуемся уравнением импульсов

$$d(\sum u_i dm_i) = \sum p \cos \beta dt.$$

Предположим, что отходящие частицы жидкости в момент отсоединения имеют скорость, отличную от скорости основного потока и разную в различных точках его поперечного сечения. Допустим также, что поток в целом будет установившимся и отвечающим условиям плавно изменяющегося движения. Очевидно, что при соблюдении этих условий:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

где u — скорость отходящих частиц;
 v и p — скорость и давление основного потока в той же точке;
 Q — расход основного потока.

Но при рассматриваемом неравномерном движении все его параметры являются функцией расстояния s . Тогда выделим в данном потоке сечениями 1 и 2 некоторую его массу (рис. VIII.1).

Приращение количества движения выделенной массы за время dt определяется согласно гл. III по формуле

$$d(mv) = dt(Qv_2 - Qv_1) \rho. \quad (\text{VIII.1})$$

В данном случае через сечение 1 проходит расход Q_1 , через сечение 1—2 расход Q_n и через сечение 2 расход Q_2 .

Очевидно, что

$$Q_1 = Q_n + Q_2.$$

где Q_n — расход, отсоединяемый от основного потока на участке от входного сечения 1 до выходного сечения 2.

Итак, в соответствии со схемой (см. рис. VIII.1) можем записать

$$d(mv) = dt \{ Q_2 v_2 + Q_n v_n \cos \beta - Q_1 v_1 \}, \quad (\text{VIII.2})$$

где v_1, v_2, v_n — соответствующие скорости;
 β — угол между направлением отделившейся массы и направлением скорости основного потока.

Очевидно, что так как $dQ_n = -dQ$, где dQ — приращение расхода основного потока (положительное приращение по пути отводящего потока равно убыли расхода основного потока, т. е. отрицательному его приращению),

$$Q_n v_n \cos \beta = \int_{s_1}^{s_2} dQ_n v_n \cos \beta = - \int_{s_1}^{s_2} dQ v_n \cos \beta.$$

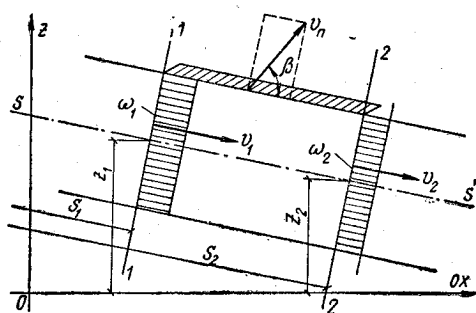


Рис. VIII.1. К выводу основного уравнения движения жидкости с переменной массой (случай отсоединения расхода)

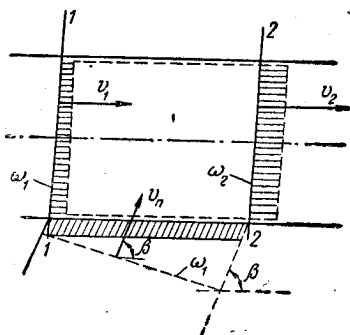


Рис. VIII.2. Схема присоединения расхода

с учетом чего

$$d(mv) = \rho dt \left\{ Q_2 v_2 - \int_{s_1}^{s_2} V_n \cos \beta dQ - Q_1 v_1 \right\}. \quad (\text{VIII.3})$$

Схема перемещения выделенной массы в случае присоединения расхода показана на рис. VIII.2. Согласно этой схеме

$$\begin{aligned} d(mv) &= \rho dt \{ (v_2 \omega_2) v_2 - [(v_1 \omega_1) v_1 + (v_n \omega_n) v_n \cos \beta] \} = \\ &= \rho dt \{ Q_2 v_2 - Q_1 v_1 - Q_n v_n \cos \beta \}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

Но

$$Q_n v_n \cos \beta = \int_{s_1}^{s_2} v_n \cos \beta dQ_n,$$

и так как в этом случае приращение присоединенной массы представляет собой приращение массы основного потока

$$dQ_n = + dQ,$$

то

$$Q_n v_n \cos \beta = \int_{s_1}^{s_2} v_n \cos \beta dQ, \quad (\text{VIII.5})$$

и тогда уравнение приращения количества движения получит вид

$$d(mv) = \rho dt \left\{ Q_2 v_2 - \int_{s_1}^{s_2} v_n \cos \beta dQ - Q_1 v_1 \right\}, \quad (\text{VIII.6})$$

что тождественно уравнению (VIII.3).

Таким образом, уравнение (VIII.6) [или (VIII.3)] будет общим для случаев как отделения, так и присоединения массы. При этом знак второго слагаемого правой части уравнения определяется знаком величины dQ .

Перейдем к рассмотрению импульсов сил (рис. VIII.3). Действующими силами будут: 1) силы тяжести G ; 2) силы давления на торцевые сечения P_1 и P_2 ; 3) силы бокового давления (на боковую поверхность выделенного объема) и 4) касательные силы, действующие по боковой поверхности (реакция твердых стенок). Таким образом,

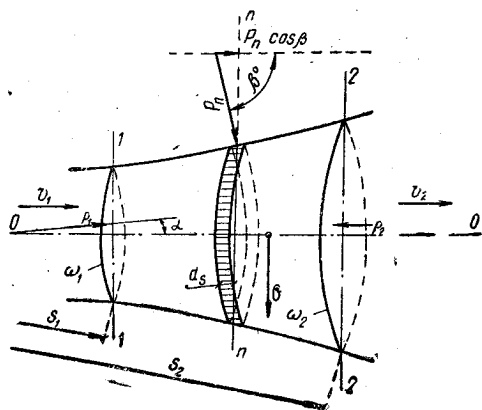


Рис. VIII.3

$$\Sigma P \cos \beta dt = (G \sin \alpha + P_1 - P_2 + P_n \cos \beta) dt.$$

Вычислим эти силы и их проекции:

сила тяжести в проекции на ось движения 0—0 равна:

$$G \sin \alpha = \rho g \int_{s_1}^{s_2} \omega ds \sin \alpha = \rho g \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \omega ts.$$

Силы давления на торцевые сечения:

$$P_1 = p_1 \omega_1; \quad P_2 = p_2 \omega_2.$$

Проекция силы давления на криволинейную боковую поверхность в заданном направлении равна давлению жидкости

на проекцию самой поверхности на плоскость, перпендикулярную этому направлению.

Следовательно,

$$P_n \cos \beta = \int_{s_1}^{s_2} p \chi ds \cos \alpha = \int_{s_1}^{s_2} p d\omega.$$

Силы реакции твердых стенок (сила сопротивления — сила трения), направленные по касательной к поверхности, равны:

$$F = - \int_{s_1}^{s_2} \tau \chi ds.$$

Итак, сумма импульсов действующих сил

$$\Sigma P \cos \beta dt = \left\{ g \rho \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \omega ds + p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2 + \int_{s_1}^{s_2} p d\omega - \int_{s_1}^{s_2} \tau \chi ds \right\} dt. \quad (\text{VIII.7})$$

Итак, с учетом приведенных выкладок и сокращения обеих частей равенства на $\rho g dt$ уравнение импульсов запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{Q_2 v_2}{g} - \frac{Q_1 v_1}{g} - \int_{s_1}^{s_2} \frac{v_n \cos \beta}{g} dQ &= \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \omega ds + \frac{p_1 \omega_1}{\rho g} - \frac{p_2 \omega_2}{\rho g} + \\ &+ \int_{s_1}^{s_2} \frac{p}{\rho g} d\omega - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau \chi}{\rho g} ds. \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

Заметив, что параметры с индексом 1 есть величины постоянные, а также, что $\tau \chi / \rho g = i_f \omega$, можем, опуская индекс 2, переписать уравнение (VIII.9) после перегруппировки слагаемых в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{Qv}{g} + \frac{p\omega}{\rho g} - \int_{s_1}^{s_2} \frac{p}{\rho g} d\omega - \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \omega ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{v_n \cos \beta}{g} dQ + \\ + \int_{s_1}^{s_2} i_f \omega ds = \frac{Q_1 v_1}{g} + \frac{p_1 \omega_1}{\rho g} = \text{const} \end{aligned} \quad (\text{VIII.9})$$

или в дифференциальной форме

$$\left[\frac{d(Qv)}{g} + \frac{d(p\omega)}{\rho g} - \frac{p d\omega}{\rho g} - \sin \alpha \omega ds - \frac{v_n \cos \beta}{g} \right] dQ + i_f \omega ds = 0. \quad (\text{VIII.10})$$

Преобразуем слагаемые этого уравнения.

Первое слагаемое

$$\frac{d(Qv)}{g} = \frac{Qdv + v dQ}{g};$$

второе и третье слагаемые

$$\frac{d(\rho\omega)}{\rho g} - \frac{\rho d\omega}{\rho g} = \frac{\rho d\omega + \omega d\rho - \rho d\omega}{\rho g} = \frac{\omega d\rho}{\rho g};$$

четвертое слагаемое

$$\sin \alpha \omega ds = - \frac{dz}{ds} \omega ds = - \omega dz.$$

Тогда после подстановки в уравнение (VIII.10) и деления его на ω , получим основное дифференциальное уравнение одноразмерного движения жидкости с переменной массой:

$$\frac{Qdv}{\omega g} + \frac{vdQ}{\omega g} + \frac{dp}{\rho g} + dz - \frac{v_n \cos \beta}{g\omega} dQ + i_f ds = 0$$

или, так как

$$\frac{Qdv}{\omega g} = \frac{vdv}{g} = \frac{dv^2}{2g}, \text{ а } i_f ds = dh_w,$$

$$\frac{dv^2}{2g} + \frac{dp}{\rho g} + dz + \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ + dh_w = 0. \quad (\text{VIII.11})$$

Интегрируя (VIII.11) в пределах от $s_1=0$ до s_2 и группируя слагаемые, получим (с учетом $\gamma=\rho g$) основное уравнение одноразмерного движения жидкости с переменным расходом, но уже в конечной форме:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ + h_{w1-2}. \quad (\text{VIII.12})$$

Добавляя к этому уравнению условие присоединения или отсоединения расхода от основного потока, получим полную систему уравнений:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ + h_{w1-2};$$

$$Q = f_1(s);$$

$$v_n \cos \beta = f_2(s).$$

§ 31. О потере напора

При движении реальной жидкости с постоянным расходом уравнение Бернулли для потока, как известно, имеет вид

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta h_{w1-2},$$

где Δh_w — потерянный напор, т. е. величина удельной энергии, расходуемой на работу сил сопротивления и измеряемой в метрах столба данной жидкости.

Потерянный напор Δh_w определяют как разность полного запаса удельной энергии в начальном (E_1) и конечном (E_2) сечениях рассматриваемого участка потока, а именно

$$\Delta h_{w_{1-2}} = \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right),$$

или

$$\Delta h_{w_{1-2}} = E_1 - E_2.$$

При движении жидкости с переменным расходом разности ΔE еще недостаточно для определения потерь энергии. Величина ΔE будет определять потерю энергии только при условии равенства удельных энергий основного потока и потока присоединяемой массы. Если полные запасы удельной энергии основного и присоединяемого потока различны, то возможна передача энергии от одного потока к другому и при этом один поток расходует свою энергию, а другой наряду с расходом энергии одновременно приобретает часть энергии от другого потока (*спутного данному*).

Суммарный расход энергии на некотором участке движущейся жидкости определится по формуле

$$E_{\text{полн.п}} = \frac{E_1 \gamma Q_1 + E_2 \gamma Q_2 - E \gamma (Q_1 + Q_2)}{\gamma (Q_1 + Q_2)},$$

или

$$E_{\text{полн.п}} = \frac{(E_1 Q_1 + E_2 Q_2) - E (Q_1 + Q_2)}{Q_1 + Q_2}. \quad (\text{VIII.13})$$

Тогда для одного потока (например, основного) потерянный напор

$$\Delta h_w = E_w = E_1 - E_{\text{кон}},$$

а для другого (присоединенного)

$$\Delta h_w = E_2 - E_{\text{кон}}.$$

Из основного уравнения движения жидкости с переменной массой (VIII.12) находим

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g \omega} dQ + \Delta h_{w_{1-2}}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.14})$$

откуда видно, что изменение энергии основного потока на участке движения с переменной массой зависит не только от потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений, но и от особенностей процесса смешения масс жидкости.

Найдем полный запас энергии основного потока в конце участка движения с переменной массой

$$E_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ - \Delta h_{w1-2}. \quad (\text{VIII.15})$$

При $v_n \cos \beta > v$

$$- \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ > 0.$$

и для некоторых случаев, если окажется, что (при $v_n \cos \beta > v$)

$$- \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g\omega} dQ > \Delta h_{w1-2},$$

мы встретимся со случаем не уменьшения, а увеличения удельной энергии основного потока.

§ 32. Движение жидкости с переменным расходом в трубопроводе постоянного диаметра

Пользуясь основным уравнением движения жидкости с переменной массой (VIII.12), можем написать для трубопровода, расположенного горизонтально (учитывая, что $z_1 = z_2$ и $dQ = \omega dv$), это уравнение в более краткой форме (рис. VIII.4):

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g} dv + \Delta h_{w1-2}. \quad (\text{VIII.12a})$$

Если присоединение (или отсоединение) массы происходит под углом $\beta = \pi/2$, то $\cos \beta = 0$ и

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{v - v_n \cos \beta}{g} dv = \int_{s_1}^{s_2} \frac{v dv}{g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g},$$

и тогда, после соответствующей подстановки, имеем

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \Delta h_{w1-2} \quad (\text{VIII.16})$$

или

$$\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\gamma} + \Delta h_{w_{1-2}} \quad (\text{VIII.16a})$$

В этом уравнении величину $\left(\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\gamma}\right)$ можно считать заданной, и если, кроме того, задан закон изменения расхода по пути $Q=f(s)$, то для трубопровода постоянного диаметра скорость

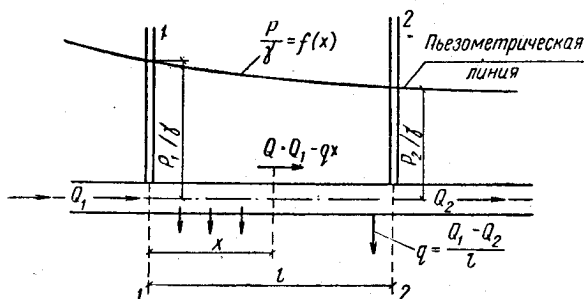


Рис. VIII.4. Отсоединение расхода из трубопровода постоянно-го диаметра

v_2 , зависящую только от длины, можно считать также известной, так как $v_2 = Q/\omega = f(s)/\omega$. Потерянный напор $\Delta h_{w_{1-2}}$ определяют по формулам теории гидравлических сопротивлений, поэтому в уравнениях (VIII.16) или (VIII.16a) неизвестной величиной будет только давление p_2 . Итак, уравнение (VIII.16a) представляет собой закон изменения давления вдоль данного трубопровода.

Примеры к главе VIII

Пример VIII.1. Определить давление p_2 в конце перфорированного участка горизонтально уложенной трубы, если заданы: диаметр трубы $d=0,2$ м; начальный расход $Q_1=0,047$ м³/с; длина перфорированного участка трубы $l=40$ м; боковой расход $Q_{сб}=0,02$ м³/с (проходящий через боковые отверстия перфорированного участка):

Потерянный напор подсчитать по формуле

$$\Delta h_w = \frac{1}{K^2} \left(Q_1^2 - Q_1 Q_{сб} + \frac{1}{3} Q_{сб}^2 \right) l$$

(см. второй раздел). Давление в начальном сечении трубопровода $\frac{p_1}{\rho g} = 10$ м.

Решение. По формуле (VIII.16a) находим

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{g} - \Delta h_w.$$

Вычисляем скорость:

$$v_1 = \frac{Q_1}{\omega_1} = \frac{0,047}{0,0314} = 1,5 \text{ м/с;}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{\omega_2} = \frac{0,02}{0,0314} = 0,63 \text{ м/с.}$$

Тогда

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{g} = \frac{1,5^2 - 0,63^2}{9,81} = 0,19 \text{ м.}$$

Вычисляем потерянный напор при расходной характеристике $K^2 = 0,16 \text{ (м}^6/\text{с}^2)$:

$$\Delta h_w = \frac{1}{0,16} \left(0,047^2 - 0,047 \cdot 0,02 + \frac{0,02^2}{3} \right) 40 = 0,35 \text{ м.}$$

Итак, искомое давление в конце расчетного участка

$$\frac{P_2}{\gamma} = 10 + 0,19 - 0,35 = 9,84 \text{ м.}$$

Пример VIII.2. Составить уравнение пьезометрической линии $h_x = \frac{P_x}{\rho g} = f(x)$ для участка трубы с боковым расходом по данным предыдущего примера.

Решение. Обозначая в формуле (VIII.16a) $P_x/\gamma = h_x$, получим

$$h_x = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{g} - \frac{v_x^2}{g} - \Delta h_{w0-x}.$$

где $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{g} = 10 + \frac{1,5^2}{g} = 10,23 \text{ м.}$

Находим

$$v_x = v_1 - \frac{v_1 - v_2}{l} x = 1,5 -$$

$$- \frac{1,5 - 0,63}{40} x = 1,5 - 0,022 x,$$

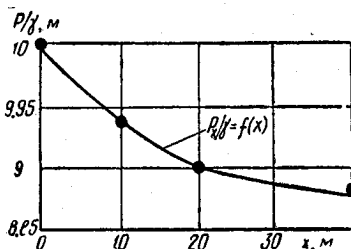


Рис. VIII.5

откуда

$$\frac{v_x^2}{g} = \frac{(1,5 - 0,022 x)^2}{g} = 0,229 - 0,0089 x + 0,000049 x^2.$$

Далее по указанной в задании формуле с учетом того, что величиной $0,00005 x^2$ по малости можно пренебречь, находим потерянный напор

$$\Delta h_w = \frac{1}{0,16} \{ 0,047^2 - 0,047 \cdot 0,0005 x \} x,$$

откуда после соответствующих подстановок получим искомое уравнение пьезометрической линии

$$\Delta h_w = 10 - 0,007 x + 0,0001 x^2.$$

Для построения пьезометрической линии при $x=10, 20, 25$ и 40 м получим соответственно $h_{x_1}=9,94$; $h_{x_2}=9,9$; $h_{x_3}=9,89$ и $h_{x_4}=8,88$ м (рис. VIII.5).

§ 33. Основные сведения о теории свободной струи

Струя, не ограниченная твердыми стенками, называется свободной.

Струю считают затопленной, если она распространяется в пространстве, занятом жидкостью (капельной или газообразной), однородной с данной (например, струя воды, выходящая из отверстия резервуара при истечении «под уровень», или струя

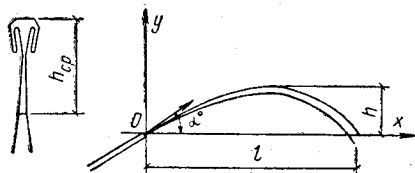


Рис. IX.1

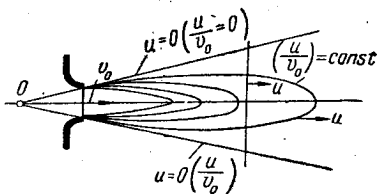


Рис. IX.3. Факел из изо-
тах — линий $u/v_0 = \text{const}$
(u — скорость в данной
точке; v — скорость в вы-
ходном сечении)

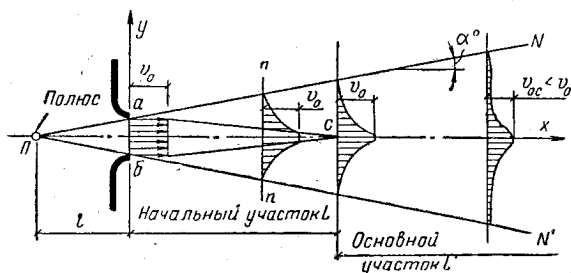


Рис. IX.2. Кинематическая структура свободной затопленной струи

воздуха, выходящая из отверстия замкнутого резервуара в атмосферу в условиях одной и той же плотности воздуха). В противном случае ее считают незатопленной (например, струя воды при истечении из резервуара в атмосферу, когда эта струя находится в свободном полете).

В прошлом в связи с запросами водопроводной техники исследовалась задача о высоте подъема свободной незатопленной струи h и дальности ее полета l в зависимости от угла α наклона струи к горизонту в начальном ее сечении (рис. IX.1), а в связи с запросами турбостроения — вопрос о динамическом воздействии струи на обтекаемые ею пластинки. Развитие современной техники потребовало более глубокого изучения этой области гидродинамики. В настоящее время теория свободных струй и методы их практического приложения составляют обширный

раздел гидравлики. В СССР этот вопрос наиболее подробно (особенно в последние годы) исследовался в ЦАГИ (работы Г. Н. Абрамовича и др.).

Из многочисленных аспектов теории струи, к которым относятся вопрос о ее структуре (т. е. о поле скоростей в струе), о высоте и дальности ее полета и об ее динамическом воздействии на твердые стенки, мы коротко рассмотрим два первых, и то лишь для случая свободной затопленной струи.

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что струя, выходящая из отверстия с насадком в условиях плавного очертания входа в насадок и при условии, что давление на выходе из него не превышает «критического» (в случае истечения газа), постепенно расширяется в виде конуса и благодаря вязкости увлекает в движение окружающую ее жидкость. Вместе с тем между струей и жидкостью внешнего пространства происходит обмен масс, причем в процессе этого обмена струя захватывает несколько большую массу, так что в направлении движения струи ее масса несколько увеличивается.

Структура струи. По исследованиям Г. Н. Абрамовича движение жидкости, образующей струю, можно характеризовать следующим образом (рис. IX.2). В выходном сечении $a-b$ скорости потока во всех точках сечения равны между собой. На протяжении длины L (на так называемом начальном участке) осевая скорость постоянна по величине и равна скорости выходного сечения v_0 . В некотором промежуточном сечении n начального участка эпюра скоростей имеет вид, указанный на рис. IX.2. Далее осевая скорость постепенно уменьшается. Участок струи L' , на котором осевая скорость $v_{oc} < v_0$, называют основным, а сечение струи, отделяющее начальный участок от основного, переходным. В области треугольника abc (рис. IX.2) во всех точках струи скорости жидкости равны между собой и равны v_0 ; эта область образует так называемое ядро струи. На граничных линиях ON и ON' продольные скорости равны нулю; эти линии пересекаются на оси в точке O , называемой «полюсом».

Если в пределах струи между указанными граничными линиями ON и ON' построить изотахи (линии равных скоростей), выраженных в относительных координатах, а именно, как отношение u/v_0 (абсолютной скорости к скорости в выходном отверстии), то они (рис. IX.3) образуют систему линий, напоминающую собой пламя свечи или газовой горелки. Эту систему изотак, построенных в указанных относительных координатах, называют факелом, а теорию поля скоростей в этой области — теорией факела.

Заметим, что если изотахи построить также для безразмерных скоростей, но уже в других координатах, а именно, как отношение скорости в данной точке поперечного сечения к максимальной скорости в том же сечении, т. е. как $u/u_{0\text{ макс}}$, то такие линии образуют не факел, а пучок прямых (рис. IX.4).

Распределение (эпюра) абсолютных скоростей в каком-либо поперечном сечении основного участка струи шириной B , полученное опытным путем, показано на рис. IX.5.

Если на одном и том же чертеже в одном и том же масштабе построить эпюры скоростей для ряда поперечных сечений основного участка, то получим картину, указанную на рис. IX.6.

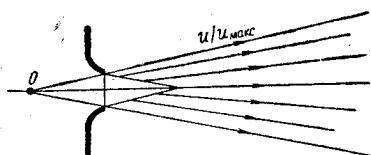


Рис. IX.4. Система изотак — как линий u/u_{\max}

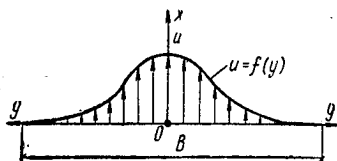


Рис. IX.5. Распределение скоростей в поперечном сечении струи $u=f(y)$

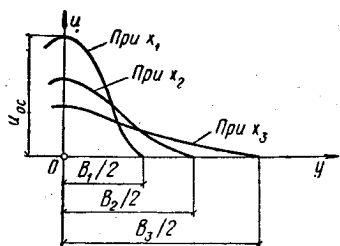


Рис. IX.6

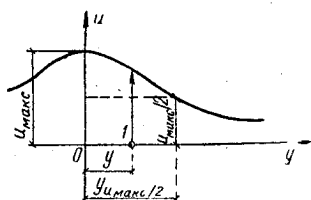


Рис. IX.7

Для всех эпюр скоростей характерно следующее: если вместо абсолютных принять относительные скорости [например, отношение скорости в произвольной точке 1, находящейся на расстоянии y от оси струи (рис. IX.7), к скорости, равной половине осевой, т. е. к скорости $u_{\max}/2$, находящейся на расстоянии $y_{\max}/2$ от оси], то эпюры скоростей во всех поперечных сечениях струи будут тождественны. Алгебраически это будет выражено так: функция u' координаты y' одна и та же для всех поперечных сечений струи, т. е.

$$u' = f(y') \text{ или } \frac{u}{\frac{u_{\max}}{2}} = f\left(\frac{y}{\frac{y_{\max}}{2}}\right),$$

что указывает на известное подобие между собой всех эпюр скоростей.

Эту формулу можно прочесть так: для сходственных точек всех поперечных сечений отношение u/u_{\max} есть величина постоянная:

$$u/u_{\max} = \text{const} \text{ или } u/u_N = \text{const},$$

где u_N — скорость произвольной точки сечения.

Отмеченное здесь подобие эпюр скоростей в различных сечениях струи не следует понимать как простое геометрическое подобие между ними. Это подобие представляет собой некоторое однообразие в форме эпюры, что можно проиллюстрировать рис. IX.8, на котором площади эпюр скоростей представлены в виде соответствующих треугольников (рис. IX.8); через u_m обозначены максимальные скорости.

Для каждого из трех указанных на этом рисунке треугольников скоростей имеем следующие соотношения:

$$\frac{u'}{u_{mI}} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{u''}{u_{mII}} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{и} \quad \frac{u'''}{u_{mIII}} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Если точки A_1 , A_2 и A_3 являются «сходственными»¹, то для них имеем $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ и потому

$$\frac{u'}{u_{mI}} = \frac{u''}{u_{mII}} = \frac{u'''}{u_{mIII}}.$$

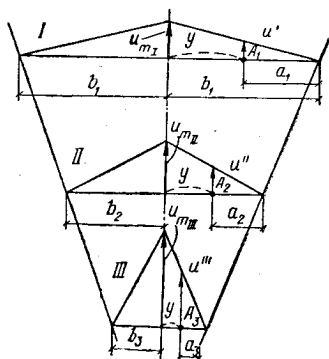


Рис. IX.8

Понятно, что вместо B можно было бы принять координату какой-либо произвольно выбранной точки N , например, $y_N = \alpha b$, где $\alpha = \text{idem}$ (одинаковое для всех эпюр), и тогда мы могли бы написать

$$\frac{u'}{u_{mI}} = \frac{u''}{u_{mII}} = \frac{u'''}{u_{mIII}} = \dots = f\left(\frac{y}{y_N/\alpha}\right) = f_1\left(\frac{y}{y_N}\right).$$

Таким образом, подобие заключается в одной и той же закономерности распределения скоростей во всех случаях основного участка струи.

Замечание. Если известны эпюра скоростей и закономерность изменения скорости в какой-либо характерной точке сечения, например, в осевой точке: $u_m = f(x)$, то этим полностью определяется все поле скоростей струи.

Г. Н. Абрамович дает следующее уравнение для осевой скорости в случае струи круглого поперечного сечения:

$$u_x = v_0 \frac{0,48}{\frac{ax}{d} + 0,145} = \frac{0,48 d}{ax + 0,145d},$$

где x — расстояние от «полюса» до данной точки M (рис. IX.9).

Все параметры круглой струи (по Г. Н. Абрамовичу), указанные на этом же рисунке, определяются по следующим формулам.

¹ Сходственными называют точки, расположенные на одинаковом относительном расстоянии от оси струи.

Расстояние от выходного сечения до полюса

$$x_0 \approx -0,15 \frac{d}{a}.$$

Расстояние от выходного до переходного сечений, т. е. длина начального участка,

$$x_A = 0,335 \frac{d}{a}.$$

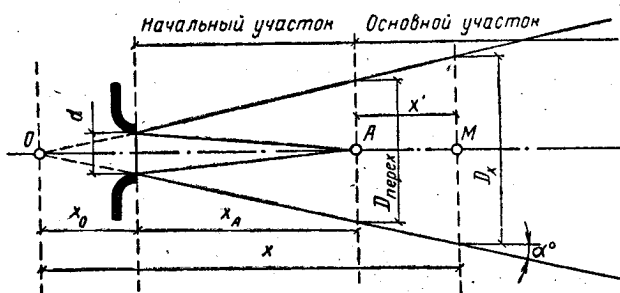


Рис. IX.9. К построению струи

Диаметр переходного сечения

$$D_{\text{перех}} = 3,3 d.$$

Угол расширения α определяется из условия

$$\text{tg } \alpha = 3,4 a.$$

Диаметр струи на расстоянии x' от переходного сечения

$$D_{x'} = D_{\text{перех}} + 6,8 a x'.$$

Во всех приведенных формулах множитель a представляет собой так называемый (по Г. Н. Абрамовичу) коэффициент турбулентности $a=0,07-0,08$. Для практических расчетов можно принимать $a=0,08$.

§ 34. Изгиб воздушных струй

Если температура струи отличается от температуры окружающего воздуха, то возможно искривление струи. Приводим определение параметров такой искривленной струи, предложенное Г. Н. Абрамовичем (рис. IX.10).

Уравнение осевой линии записывается в виде

$$\bar{y} = 0,9 A \frac{\bar{x}}{\cos \alpha} \sqrt{a \frac{x}{\cos \alpha}} - x \text{tg } \alpha,$$

где коэффициент турбулентности $a=0,08$;

$$A = \frac{t_0 - t_{\text{окр}}}{T_{\text{окр}}} \cdot \frac{d}{v_0}$$

(здесь t_0 — начальная температура струи в $^{\circ}\text{C}$; $t_{\text{окр}}$ — температура окружающего воздуха; $T_{\text{окр}} = 273 + t_{\text{окр}}$).

Координаты точки M (рис. IX.10) определяются следующими формулами:

$$\bar{x}_M = 0,585 \cos \alpha \sqrt[3]{\frac{\sin^2 \alpha}{aA^2}};$$

$$\bar{y}_M = 0,35 \sin \alpha \sqrt[3]{\frac{\sin^2 \alpha}{aA^2}};$$

$$\bar{x} = \frac{x}{d}; \quad \bar{y} = \frac{y}{d} \quad \text{и} \quad x_M = \bar{x}_M d;$$

$$y_M = \bar{y}_M d.$$

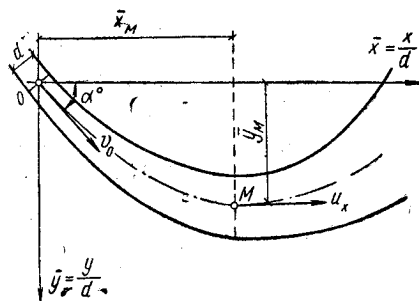


Рис. IX.10. Изгиб струи

При горизонтальном направлении скорости на выходе из сопла, т. е. при $\alpha=0$ $\cos \alpha=1$ и $\text{tg} \alpha=0$, и тогда уравнение осевой линии струи примет вид

$$\bar{y} = 0,9 A \bar{x} \sqrt{\bar{ax}}.$$

§ 35. Воздушная завеса

Теория, разработанная Г. Н. Абрамовичем, широко используется при решении многих задач вентиляционной техники и, в частности, при расчете «воздушной завесы». Как известно, для защиты производственных помещений от холодного наружного воздуха, поступающего через открытые ворота, применяется обдувка этих ворот струей теплого воздуха, который выходит из продольной щели, расположенной вдоль одной из сторон открытых ворот (рис. IX.11).

Допустим, что воздушная струя имеет осевую линию, образованную в итоге сложения двух движений: наружного воздуха со скоростью v_0 , параллельной координатной оси Oy (горизонтальной) и движения осевых частиц струи, выходящей под углом α к вертикальной оси координат (оси Ox). Осевая линия струи, отклоняясь от начального направления, пересекает ось Ox в точке N (рис. IX.12).

Очевидно, что если координата точки N ($x=h$) будет больше высоты H (см. рис. IX.11), то наружный воздух не войдет в ворота.

Таким образом, задача сводится к определению величины начальной скорости v_0 и угла α , при которых $h > H$.

Эта задача решается методом сложения потенциальных потоков.

Известно, что потенциал скорости для плоскопараллельного потока определяется как $\varphi = \int u dx + v dy$, а функция тока как $\Psi = \int -v dx + u dy$.

При указанном расположении координат (см. рис. IX.12) имеем следующие выражения функции тока:

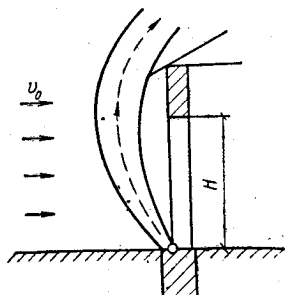


Рис. IX.11. Схема воздушной завесы (H — высота ворот)

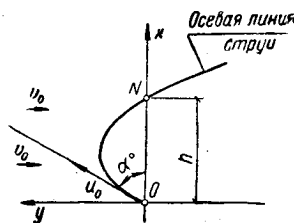


Рис. IX.12. К расчету воздушной завесы

для струи

$$\Psi_1 = \int u dy = u_0 b F \left(a; \frac{x}{b}; \frac{y}{b} \right),$$

а для набегающего наружного потока

$$\Psi_2 = \int -v dx = -vx,$$

где $v = \text{const}$;

b — ширина ворот;

a — коэффициент турбулентности.

Определяя затем функцию тока сложного движения как сумму $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, находим поле скоростей сложного движения

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

что и решает задачу.

При $x = H$ и $y = 0$ Г. Н. Абрамович предлагает следующее выражение для так называемой «характеристики завесы»:

$$r = \Phi \sqrt{\frac{H}{b} + 1}.$$

где функция Φ определяется по формуле

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{a}{\cos \alpha}} \operatorname{th} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha}$$

а в табл. IX.1 приводятся числовые значения этой функции.

Таблица IX.1

Зависимость функции Φ от a и α

a	Значения Φ при α		
	20°	30°	40°
0,1	0,28	0,3	0,31
0,2	0,36	0,41	0,44

Примечание. Обычно при расчетах принимают $\Phi=0,41$.

Характеристика завесы по существу представляет собой отношение

$$r = \frac{Q_{\text{в}} - Q_{\text{н}}}{Q_0}$$

где $Q_{\text{в}}$ — приток наружного воздуха через ворота при бездействии завесы ($Q_{\text{в}} = \omega v$);

$Q_{\text{н}}$ — приток наружного воздуха при работе завесы;

Q_0 — расход воздуха в щели.

Отсюда определяется необходимый расход воздуха в щели при заданных v , H , b . Полагая $Q_{\text{н}}=0$ (полная защита), расход воздуха в щели

$$Q_0 = \frac{Q_{\text{в}}}{r}$$

или, принимая $\Phi=0,41$,

$$Q_0 = \frac{vHb}{0,41 \cdot \sqrt{\frac{H}{b} + 1}}$$

По найденному расходу воздуха в щели рассчитывают параметры подводящего воздухопровода.

§ 36. Виды гидравлических сопротивлений

Для определения давлений и средних скоростей в различных сечениях потока выше были выведены два уравнения: уравнение сохранения энергии или полного напора (уравнение Бернулли) и уравнение сохранения массы (уравнение постоянства расхода), которые для несжимаемой жидкости записываются в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_w = \text{const};$$

$$v\omega = Q = \text{const}.$$

Обычно при решении практических задач полный напор H и расход Q бываю задааны или могут быть определены из известных величин в одном из сечений рассматриваемого потока. Высотное положение центра тяжести сечения z , а также площадь его ω , как правило, известны. Таким образом, в этих уравнениях остаются три неизвестных: v , p и h_w . Для их определения необходимо составить третье уравнение, связывающее между собой неизвестные величины, например, уравнение, дающее зависимость h_w от v . С помощью двух уравнений гидравлики удастся решать лишь некоторые практические задачи, пренебрегая потерями напора (т. е. принимая $h_w=0$). Именно так обстояло дело с рассмотренной выше задачей о трубе Вентури.

Рассмотрим участок трубы, заполненный жидкостью (рис. X.1). Если жидкость в трубе не движется, то ее взаимодействие со стенками приводится к одной равнодействующей, направленной вниз (вес жидкости).

При движении жидкости между нею и стенками трубы возникают дополнительные силы сопротивления, в результате чего частицы жидкости, прилегающие к поверхности трубы, тормозятся. Это торможение благодаря вязкости жидкости передается следующим слоям, причем скорость движения частиц по мере удаления их от оси трубы постепенно уменьшается. Равнодействующая сил сопротивления T направлена в сторону, противоположную движению, и параллельна направлению движения (см. рис. X.1). Это и есть силы гидравлического трения (сопротивления гидравлического трения).

Для преодоления сопротивления трения и поддержания равномерного поступательного движения жидкости необходимо, чтобы на жидкость действовала сила, направленная в сторону ее

движения и равная силе сопротивления, т. е. необходимо затрачивать энергию. Энергию или напор, необходимые для преодоления сил сопротивления, называют потеряннй энергией или потеряннм напором.

Потери напора, затрачиваемые на преодоление сопротивления трения, носят название потерь напора на трение или потерь

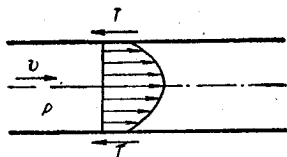


Рис. X.1. К понятию о потерях напора на гидравлическое трение

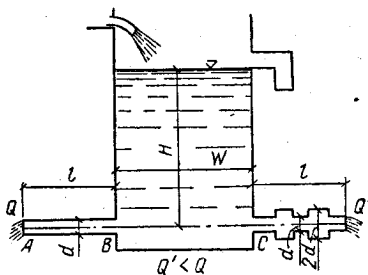


Рис. X.2. К понятию о местных потерях напора

напора по длине потока (линейные потери напора) и обозначают через $h_{\text{тр}}$.

Однако потери напора, возникающие при движении жидкости, зависят не только от трения о стенки. Рассмотрим следующий опыт (рис. X.2).

Бак W наполнен водой при постоянном уровне H и питает горизонтальную трубу AB длиной l одинакового по всей длине диаметра d . Пусть расход воды равен Q . Если трубу AB заменить трубой CD той же длины l , но образованной из последовательно расположенных участков диаметром соответственно d и $2d$, то расход изменится. Пусть новый расход равен Q' . Оказывается, что $Q' < Q$ (иногда $Q' = 0,5 Q$ и даже еще меньше).

Таким образом, трение является не единственной возможной причиной, вызывающей потери напора; резкие изменения сечения также оказывают сопротивление движению жидкости (так называемое сопротивление формы) и вызывают потери энергии. Существуют и другие причины, вызывающие потери напора, например, внезапное изменение направления движения жидкости. Потери напора, вызываемые резким изменением конфигурации границ потока (затрачиваемые на преодоление сопротивления формы), называют местными потерями напора или потерями напора на местные сопротивления и обозначают через h_m .

Таким образом, потери напора при движении жидкости складываются из потерь напора на трение и потерь на местные сопротивления, т. е.

$$h_w = h_{\text{тр}} + h_m. \quad (\text{X.1})$$

вичные размерности, например L , T , F (или M), получим три независимых уравнения: одновременное решение этих трех уравнений дает численное значение для трех показателей. Таким образом, для нахождения числа ПИ нужно:

а) выбрать количество переменных, равное числу основных единиц и включающих все основные единицы;

б) составить уравнения размерностей, объединяющие выбранные переменные с каждой из других переменных по очереди.

§ 38. Общая формула для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах

Используем метод размерности для определения потерь напора на трение, возникающих при равномерном напорном движении жидкости в трубах.

Опыты показывают, что величина потерь напора на трение $h_{тр}$ при движении жидкости в трубах может зависеть от следующих факторов:

диаметра трубы d и ее длины l ;

физических свойств жидкости (плотности ρ и вязкости μ);

средней скорости движения в трубе v ;

средней высоты выступов шероховатости k на стенках трубы.

Напишем интересующую нас функциональную зависимость в виде

$$\Delta p_{тр} = f(v, d, \mu, \rho, k, l), \quad (X.5)$$

где $\Delta p_{тр}$ — потери давления на длине потока, равной l , связанные с потерей напора формулой

$$\Delta p_{тр} = \rho g h_{тр}. \quad (X.6)$$

Вид функции f в уравнении (X.5) неизвестен. Некоторую помощь в установлении его может оказать применение к рассматриваемому случаю ПИ-теоремы.

Перепишем уравнение (X.5) в виде

$$f_1 \left(\frac{\Delta p_{тр}}{l}, \mu, \rho, d, v, k \right) = 0. \quad (X.7)$$

учитывая, что потеря на трение всегда прямо пропорциональна длине рассматриваемого участка.

Для измерения входящих в формулу (X.7) $n=6$ величин требуются $m=3$ основные единицы: масса, время и длина.

В соответствии с ПИ-теоремой уравнение (X.7) может быть представлено в форме, содержащей $n - m = 3$ безразмерных отношений (чисел ПИ), т. е. вместо (X.7) можно записать

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0, \quad (X.8)$$

где π_1 , π_2 и π_3 — безразмерные комплексы.

Для определения чисел π_1 , π_2 и π_3 выберем из всех переменных три (по числу основных единиц измерения), включающие все основные единицы измерения, например v , d и ρ . Составим теперь уравнения размерностей, объединяющие выбранные переменные с каждой из других переменных по очереди, т. е.:

$$\pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu_1 \quad (\text{X.9})$$

$$\pi_2 = d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \frac{\Delta p_{\text{ТР}}}{l} \quad (\text{X.10})$$

$$\pi_3 = d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} k. \quad (\text{X.11})$$

В выражениях для π_1 , π_2 и π_3 нужно подобрать показатели при d , v и ρ таким образом, чтобы числа π не имели размерности.

Нетрудно показать (проверив размерности), что

$$\pi_1 = \frac{vd\rho}{\mu} \quad (\text{X.12})$$

$$\pi_2 = \frac{d \frac{\Delta p_{\text{ТР}}}{l}}{v^2 \rho} \quad (\text{X.13})$$

$$\pi_3 = \frac{k}{d}. \quad (\text{X.14})$$

Так, для числа π_3 из условия однородности размерностей

$$L^{x_3} (LT^{-1})^{y_3} (ML^{-3})^{z_3} L = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда вытекают следующие уравнения:

при L : $x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0$;

при T : $-y_3 = 0$;

при M : $z_3 = 0$, т. е. $x_3 = -1$ и $\pi_3 = k/d$.

Подставляя (X.12) — (X.14) в (X.8), имеем

$$f_2 \left(\frac{vd\rho}{\mu} ; \frac{\frac{\Delta p_{\text{ТР}}}{l} d}{v^2 \rho} ; \frac{k}{d} \right) = 0.$$

Так как нас интересует потеря напора, то разрешаем это уравнение относительно π_2 :

$$\frac{d \frac{\Delta p_{\text{ТР}}}{l}}{v^2 \rho} = \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu} ; \frac{k}{d} \right)$$

или

$$\Delta p_{\text{ТР}} = \frac{v^2 \rho l}{d} \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu} ; \frac{k}{d} \right). \quad (\text{X.15})$$

Учитывая формулу (X.6), имеем

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{\rho g} = \frac{v^2 l}{gd} \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right)$$

или, обозначая

$$\varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right) = \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{X.16})$$

где λ — безразмерное число, речь о котором будет идти ниже, окончательно получим

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (\text{X.17})$$

Из формулы (X.17) следует, что потеря напора на трение при движении жидкости в трубе возрастает с увеличением средней скорости потока и длины рассматриваемого участка трубы и обратно пропорциональна ее диаметру. Кроме того, в формулу (X.17) входит неизвестный безразмерный коэффициент λ — так называемый коэффициент гидравлического трения. Эта формула была получена в XIX в. эмпирическим путем и называется *формулой Дарси — Вейсбаха*.

Приведенный метод можно использовать также для определения вида формулы потерь напора на местные сопротивления. В этом случае, учитывая, что местные потери практически не зависят ни от длины участка трубы, ни от ее диаметра, нетрудно получить формулу

$$h_m = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad (\text{X.18})$$

где ζ — безразмерный коэффициент, так называемый коэффициент местных потерь;

v_2 — скорость потока после прохода через местное сопротивление.

Формулу (X.18), полученную в XIX в. эмпирическим путем, называют *формулой Вейсбаха*.

Таким образом, ПИ-теорема, не позволяя получить полного решения вопроса о потерях напора (ибо смысл коэффициентов λ и ζ остался невыясненным), дает возможность ближе подойти к его выяснению. Дальнейшие сведения о коэффициентах λ и ζ будут получены после ознакомления с некоторыми особенностями движения жидкости, рассмотрению которых посвящен следующий параграф.

§ 39. Ламинарное и турбулентное движение жидкости

Наблюдения показывают, что в природе существуют два различных вида движения жидкости: во-первых, слоистое, упоря-

доченное или ламинарное¹ движение, при котором отдельные слои жидкости скользят друг относительно друга, не смешиваясь между собой, и, во-вторых, неупорядоченное, так называемое турбулентное² движение, когда частицы жидкости движутся по сложным, все время изменяющимся траекториям и в жидкости происходит интенсивное перемешивание. Уже давно было

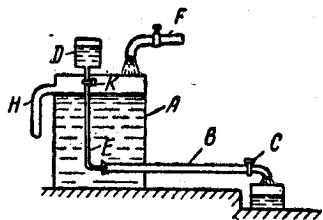


Рис. X.3. Установка Рейнольдса

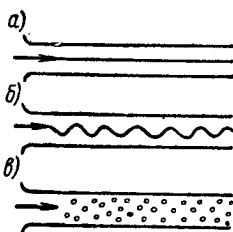


Рис. X.4. Ламинарное и турбулентное движение

известно, что вязкие жидкости (масла) движутся большей частью упорядоченно, а маловязкие жидкости (вода, воздух) почти всегда неупорядоченно. Ясность в вопрос о том, как именно будет происходить движение жидкости в тех или иных условиях, была внесена в 1883 г. в результате опытов английского физика Рейнольдса.

Опытная установка Рейнольдса представлена на рис. X.3. К баку А с водой присоединена стеклянная труба В. Открывая частично вентиль С, можно заставить течь воду по трубе с различными скоростями. Из сосуда D по трубке E в устье трубы В поступает краска. При малых скоростях движения воды в трубе окрашенная струйка не размывается окружающей ее водой и имеет вид натянутой нити (рис. X.4, а). Поток в этом случае называют ламинарным. При увеличении скорости движения воды окрашенные струйки получают вначале волнистое очертание (рис. X.4, б), а затем почти внезапно исчезают, размываясь по всему сечению трубы и окрашивая всю жидкость. Движение жидкости становится неупорядоченным, отдельные частицы окрашенной жидкости разлетаются во все стороны, сталкиваются друг с другом, ударяются о стенки и т. д. (рис. X.4, в). Такое движение жидкости называют турбулентным. Основная особенность турбулентного движения заключается в наличии поперечных составляющих на основную скорость в продольном направлении.

Опыты Рейнольдса показали, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при определенной скоро-

¹ От латинского слова *lamina* — слой, пластинка.

² От латинского слова *turbulentus* — вихревой.

сти (так называемая *критическая скорость*), которая, однако, для труб разных диаметров оказалась различной, возрастающей с увеличением вязкости и уменьшающейся с уменьшением диаметра трубы.

§ 40. Число Рейнольдса

Основываясь на некоторых теоретических соображениях (см. далее гл. XVII), а также на результатах опытов, Рейнольдс установил общие условия, при которых возможны существование ламинарного и турбулентного режима движения жидкости и переход от одного режима к другому. Оказалось, что состояние (режим) потока жидкости в трубе зависит от величины безразмерного числа, которое учитывает основные факторы, определяющие это движение: среднюю скорость v , диаметр трубы d , плотность жидкости ρ и ее абсолютную вязкость μ . Это число (позже ему было присвоено название числа Рейнольдса) имеет вид¹:

$$Re = \frac{v d \rho}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (X.19)$$

Величина d в числе Рейнольдса может быть заменена любым линейным параметром, связанным с условиями течения или обтекания (диаметр трубы, диаметр падающего в жидкости шара, длина обтекаемой жидкостью пластинки и др.).

Значение числа Рейнольдса, при котором происходит переход от ламинарного движения к турбулентному, называют критическим числом Рейнольдса и обозначают $Re_{кр}$.

При $Re > Re_{кр}$ режим движения является турбулентным, при $Re < Re_{кр}$ — ламинарным. Величина критического числа Рейнольдса зависит от условий входа в трубу, шероховатости ее стенок, отсутствия или наличия первоначальных возмущений в жидкости, конвекционных токов и др.

Вопрос о неустойчивости ламинарного движения и его переходе в турбулентное, а также о величине критического числа Рейнольдса подвергся тщательному теоретическому и экспериментальному изучению; но до сих пор не получил еще достаточно полного решения. Наиболее часто в расчетах принимают для критического числа Рейнольдса значение

$$Re_{кр} = 2000, \quad (X.20)$$

отвечающее переходу движения жидкости из турбулентного в ламинарное; при переходе движения из ламинарного в турбулентное критическое число Рейнольдса имеет большую величину (для хорошо закругленного плавного входа оно может быть доведено до 20 000).

¹ Выше это число было уже получено в результате применения анализа размерностей к движению жидкости в трубах.

Проведенные исследования показывают также, что критическое значение числа Рейнольдса увеличивается в сужающихся трубах и уменьшается в расширяющихся. Это можно объяснить тем, что при ускорении движения частиц жидкости в сужающихся трубах их тенденция к поперечному перемешиванию уменьшается, а при замедленном течении в расширяющихся трубах усиливается.

По критическому значению числа Рейнольдса легко можно найти также критическую скорость, т. е. скорость, ниже которой всегда будет иметь место ламинарное движение жидкости:

$$v_{кр} = \frac{Re_{кр} v}{d} = \frac{2000 v}{d}. \quad (X.21)$$

В трубопроводах систем отопления, вентиляции, газоснабжения, теплоснабжения, водоснабжения и др. движение, как правило, является турбулентным, так как движущаяся среда (вода, воздух, газ, пар) имеет малую вязкость. Так, для газопроводов сети домашнего потребления числа Рейнольдса бывают обычно не ниже 3000, в городских сетях — не ниже 200 000, в вентиляционных сетях — не ниже 150 000, сетях сжатого воздуха — не ниже 400 000, в паропроводах центрального отопления — не ниже 30 000, а в паропроводах ТЭЦ достигают $3 \cdot 10^6$ — $5 \cdot 10^6$. Ламинарный режим для воды и воздуха возможен лишь при их движении в трубах очень малого диаметра. Более вязкие жидкости, например масла, могут двигаться ламинарно даже в трубах значительного диаметра.

Число Рейнольдса имеет большое значение при моделировании гидроаэродинамических явлений (см. гл. XVII).

Числу Рейнольдса можно придать весьма простой смысл. Оно может рассматриваться как мера отношения кинетической энергии рассматриваемого элемента жидкости к работе сил вязкого трения.

Действительно, кинетическая энергия элемента жидкости зависит от его объема и пропорциональна $\rho v^2 l^3$, где l — линейные размеры элемента жидкости.

Работа сил вязкого трения зависит от размеров поверхности рассматриваемого элемента жидкости и пропорциональна $\mu^2 v$.

Отношение кинетической энергии элемента жидкости к работе сил вязкости будет равно:

$$\frac{\rho l^3 v^2}{\mu l^2 v} = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = Re.$$

Таким образом, число Рейнольдса характеризует относительную роль сил вязкости. Чем меньше число Рейнольдса, тем большую роль играют силы вязкости в движении жидкости. Чем больше число Рейнольдса, тем больше влияние сил инерции в потоке по сравнению с силами вязкости.

§ 41. Особенности ламинарного и турбулентного движения жидкости в трубах

Опыты показывают, что одновременно с переходом ламинарного движения в турбулентное изменяется характер распреде-

ления скоростей по сечению трубы, а также характер гидравлических сопротивлений. При ламинарном движении распределение скоростей по сечению имеет параболический характер: непосредственно у стенок скорости равны нулю, а при удалении от них непрерывно и плавно возрастают, достигая максимума на оси трубы (рис. X.5).

При турбулентном движении закон распределения скоростей сложнее: в пределах большей части поперечного сечения

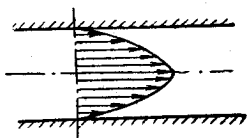


Рис. X.5. Распределение скоростей при ламинарном движении жидкости в трубе

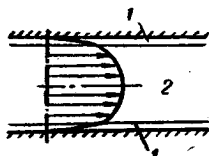


Рис. X.6. Распределение скоростей при турбулентном движении жидкости в трубе

1 — пристенный слой;
2 — ядро потока

скорости лишь незначительно меньше максимального значения (на оси), но зато вблизи стенок величина скорости резко падает (рис. X.6).

Более равномерное распределение скоростей по сечению при турбулентном движении объясняется наличием турбулентного перемешивания, осуществляемого поперечными составляющими скоростей. Благодаря этому перемешиванию частицы с большими скоростями в центре потока и с меньшими скоростями на его периферии, непрерывно сталкиваясь, выравнивают свои скорости. У самой стенки турбулентное перемешивание парализуется наличием твердых границ, и поэтому там наблюдается значительно более быстрое падение скорости.

Измеряя разность уровней в двух пьезометрах, присоединенных к сечениям 1 и 2 трубы постоянного диаметра (рис. X.7), можно определить потерю напора между этими сечениями из уравнения Бернулли, составленного для сечений 1 и 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_{\text{тр}},$$

откуда

$$h_{\text{тр}} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right). \quad (\text{X.22})$$

Таким образом, при равномерном движении уменьшение напора по длине трубы измеряется разностью пьезометрических

высот, отсчитываемых от одной и той же горизонтальной плоскости, и, следовательно, не зависит от расположения трубы в вертикальной плоскости.

Если пропускать воду по трубе с различной скоростью и, измерив при этом потери напора, построить график $h_{тр} = f(v)$, то он будет иметь вид, представленный на рис. X.8. До какого-то значения скорости потери напора изменяются прямо пропорционально скорости, а затем вид кривой внезапно меняется, и по-

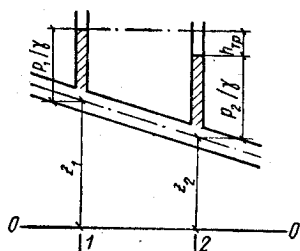


Рис. X.7. К определению потерь напора на трение в трубах

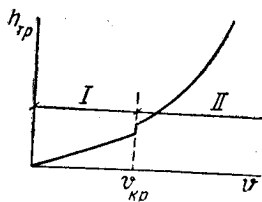


Рис. X.8. Зависимость потерь напора на трение от скорости движения жидкости

I — ламинарный режим;
II — турбулентный режим

тери напора становятся пропорциональными более высокой степени скорости (примерно ее квадрату).

Как и следовало ожидать, переход от одного закона к другому происходит при значении скорости, равном критическому, т. е. в момент перехода от ламинарного движения к турбулентному. Отсюда можно сделать важный вывод о том, что при ламинарном движении потери напора пропорциональны скорости в первой степени, а при турбулентном — скорости в степени, большей единицы.

Таким образом, ламинарный и турбулентный режим по существу отличаются не только характером движения частиц (наличием поперечных скоростей при турбулентном движении), но также особенностями распределения скоростей по сечению и характером зависимости между потерями напора и скоростью.

§ 42. Общее выражение для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах

Найдем общее выражение для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах, справедливое как для ламинарного, так и для турбулентного режимов.

При равномерном движении величина средней скорости и распределение скоростей по сечению должны оставаться неизменными по длине трубопровода. Поэтому равномерное движение возможно лишь в трубах постоянного сечения, так как в

противном случае при заданном расходе будет изменяться средняя скорость в соответствии с уравнением

$$v = \frac{Q}{\omega} = \text{const.} \quad (\text{X.23})$$

Равномерное движение имеет место в прямых трубах или в трубах с очень большим радиусом кривизны R (прямолинейное движение), так как в противном случае средняя скорость может

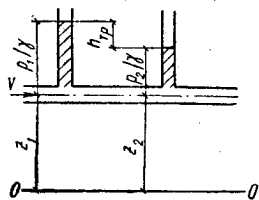


Рис. X.9. Потери напора в горизонтальной трубе

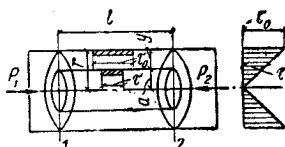


Рис. X.10. К выводу основного уравнения равномерного движения жидкости в трубах

изменяться по направлению. Это условие может быть записано в виде

$$R \rightarrow \infty. \quad (\text{X.24})$$

Наконец, условие неизменяемости по длине трубы характера распределения скоростей по живому сечению можно записать в виде

$$\alpha = \text{const.} \quad (\text{X.25})$$

где α — коэффициент Кориолиса (см. раздел I).

Последнее условие справедливо лишь для участка, находящегося на большом расстоянии от места входа в трубу.

Составляя уравнение Бернулли для двух сечений трубопровода постоянного сечения (см. рис. X.7) и учитывая, что в соответствии с формулами (X.23) и (X.25) члены, зависящие от кинетической энергии, сократятся, мы получим формулу (X.22).

При горизонтальном расположении трубы $z_1 = z_2$ и вместо формулы (X.22) имеем (см. рис. X.9)

$$h_{\text{тр}} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \quad (\text{X.26})$$

Уравнение (X.22) является основным уравнением равномерного движения жидкости в трубопроводах. При известном геометрическом положении трубопровода (z_1 и z_2 заданы) и величин давления в одном из сечений оно позволяет найти давление в другом сечении. Для этого нужно только определить величину потерь энергии $h_{\text{тр}}$.

Основному уравнению равномерного движения жидкости в

трубопроводах можно придать также другой вид. Для этого выделим в трубопроводе сечениями 1 и 2 соосный цилиндр радиусом a и длиной l (рис. X.10).

Так как распределение скоростей в обоих сечениях по предположению одинаково, то частицы жидкости, переходя от первого сечения ко второму, не испытывают ускорения. Поэтому можно считать, что силы, приложенные к цилиндру, находятся в равновесии.

Уравнение динамического равновесия рассматриваемого цилиндра можно записать в виде

$$(p_1 - p_2) \pi a^2 = 2\pi a l \tau,$$

где τ — сила сопротивления на единице поверхности жидкого цилиндра (касательное напряжение).

Разделив обе части этого уравнения на $\gamma \pi a^2$, получим

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\tau}{\gamma} \cdot \frac{2l}{a}.$$

Учитывая формулу (X.26), имеем

$$h_{\text{тр}} = 2 \frac{\tau}{\gamma} \cdot \frac{l}{a}, \quad (\text{X.27})$$

или

$$\frac{h_{\text{тр}}}{l} = i = \frac{2\tau}{\gamma a}, \quad (\text{X.27a})$$

где i — гидравлический уклон.

Уравнение (X.27) представляют также в виде

$$\tau = \frac{\gamma a i}{2} = \frac{\gamma (r - y)}{2} i, \quad (\text{X.28})$$

где y — расстояние от стенки трубы до рассматриваемого слоя. Касательное напряжение в соответствии с формулой (X.28) распределяется по линейному закону (см. рис. X.10). Оно равно нулю на оси трубы и принимает максимальное значение τ_0 на ее стенке ($y=0$), где

$$\tau_0 = \frac{\gamma r i}{2}, \quad (\text{X.29})$$

откуда следует

$$i = \frac{2\tau_0}{\gamma r}. \quad (\text{X.29a})$$

Уравнение (X.29a) представляет собой общее выражение для потерь напора при равномерном движении жидкости в трубопроводах круглого сечения. Это уравнение в одинаковой

мере применимо как к ламинарному, так и к турбулентному режимам.

Наконец, уравнение (X.29) можно представить в виде

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{gri}{2} = \frac{gr}{2} \cdot \frac{h_{\text{тр}}}{l} \quad (\text{X.30})$$

Подставляя сюда значение $h_{\text{тр}}$ из формулы (X.17), получим

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \lambda \frac{v^2}{8} \quad (\text{X.31})$$

Величина τ_0/ρ имеет размерность квадрата скорости. Если ввести обозначение

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 \quad (\text{X.32})$$

где u_* — так называемая скорость касательного напряжения на стенке, или динамическая скорость (она остается постоянной для каждого рассматриваемого случая равномерного движения), то уравнение (X.31) можно представить в виде

$$\lambda = 8 \frac{u_*^2}{v^2} \quad (\text{X.33})$$

или

$$\frac{v}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad (\text{X.34})$$

Таким образом, квадрат отношения динамической скорости к средней скорости прямо пропорционален коэффициенту гидравлического трения λ .

Примеры к главе X

Пример X.1. Определить критическую скорость при движении воды и воздуха по трубе диаметром $d=10^{-2}$ м при температуре $t=20^\circ \text{C}$.

Решение. Критическая скорость, отвечающая переходу из ламинарного в турбулентное движение, определяется из формулы

$$v_{\text{кр}} = \frac{\text{Re}_{\text{кр}} v}{d} = \frac{2000 v}{d}$$

в соответствии с которой получим следующие значения критической скорости: для воды ($\nu=0,01$ Ст)

$$v_{\text{кр}} = \frac{2000 \cdot 0,01}{1} = 20 \text{ см/с} = 0,2 \text{ м/с};$$

для воздуха ($\nu=0,157$ Ст)

$$v_{\text{кр}} = \frac{2000 \cdot 0,157}{1} = 314 \text{ см/с} = 31,4 \text{ м/с}.$$

Пример X.2. Конденсатор паровой турбины, установленной на тепловой электростанции, оборудован 8186 охлаждающими трубками диаметром $D = 0,025$ м. В нормальных условиях работы через конденсатор пропускается циркуляционная вода с расходом $3,78$ м³/с и температурой $t = 12,5 - 13^\circ$ С. Будет ли при этом обеспечено турбулентное движение воды по трубкам?

Решение. Расход через каждую трубку

$$q = \frac{3,78}{8186} = 0,000462 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Площадь сечения каждой трубки $\omega = 0,00049$ м².
Скорость движения воды

$$v = \frac{q}{\omega} = 0,945 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса, характеризующее поток в трубках,

$$Re = \frac{94,5 \cdot 2,5}{0,01} = 23\,600,$$

т. е. движение воды по трубкам действительно будет турбулентным.

Глава XI

ЛАМИНАРНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

§ 43. Распределение скоростей по сечению круглой трубы

Рассмотрим установившееся ламинарное движение жидкости в круглой трубе в условиях вполне сформировавшегося потока, т. е. полагая, что начальное сечение потока находится на расстоянии от входа в трубу, достаточном для обеспечения устойчивого распределения скоростей в поперечном сечении. Найдем закон, по которому распределяются скорости по поперечному сечению трубы.

Как известно, ламинарное движение имеет слоистый характер и происходит без перемешивания частиц. Один слой движется по другому, причем между ними возникает сила трения, напряжение τ которой определяется законом внутреннего трения Ньютона

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

где u — местная скорость движения (скорость в рассматриваемой точке).

С другой стороны, для слоя жидкости на расстоянии y от стенки трубы касательное напряжение определяется формулой

$$\tau = \gamma' \frac{r-y}{2}.$$

Сопоставляя эти выражения, найдем

$$du = \frac{\tau}{\mu} dy = \frac{\gamma^i (r-y)}{2\mu} dy. \quad (\text{XI.1})$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (XI.1), получим

$$u = \frac{\gamma^i}{2\mu} \left(ry - \frac{y^2}{2} \right) + C. \quad (\text{XI.2})$$

Естественно допустить, что частицы жидкости, соприкасающиеся со стенками (при $y=0$), прилипают к ним, т. е. что здесь $u=0$, в соответствии с чем $C=0$. Тогда (XI.2) принимает вид

$$u = \frac{\gamma^i}{4\mu} (2ry - y^2). \quad (\text{XI.3})$$

Обозначив через a расстояние от оси трубы до рассматриваемого слоя жидкости ($a=r-y$), приведем уравнение (XI.3) к виду

$$u = \frac{\gamma^i}{4\mu} (r^2 - a^2). \quad (\text{XI.4})$$

Формула (XI.4) известна под названием *закона Стокса*. Она выражает закон изменения скорости в поперечном сечении трубы

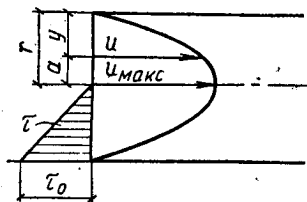


Рис. XI.1. Ламинарное движение жидкости в трубе

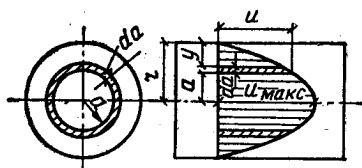


Рис. XI.2. К определению расхода при ламинарном движении жидкости в трубе

в зависимости от расстояния точки от оси трубы. Этот закон описывается параболой второй степени (рис. XI.1).

У стенок трубы ($y=0$) в соответствии с (XI.3) скорость равняется нулю, на оси трубы ($y=r$) скорость имеет максимальное значение, равное:

$$u_{\text{макс}} = \frac{\gamma^i}{4\mu} r^2. \quad (\text{XI.5})$$

Отношение скорости в рассматриваемой точке (местной скорости) к максимальной

$$\frac{u}{u_{\text{макс}}} = \frac{2ry - y^2}{r^2} = \frac{y}{r} \left(2 - \frac{y}{r} \right). \quad (\text{XI.6})$$

Это отношение зависит от положения рассматриваемой точки и не зависит от расхода, рода жидкости и материала стенок трубы.

Расход жидкости в трубе можно найти путем суммирования элементарных расходов, проходящих через кольцевые площадки радиусом a и шириной da (рис. XI.2), т.е. из выражения

$$Q = \int_0^r u 2\pi a da.$$

После подстановки вместо u его значения из (XI.4) получим

$$Q = \frac{\gamma i \pi}{2\mu} \int_0^r (r^2 - a^2) a da = \frac{\gamma i \pi}{2\mu} \left[\int_0^r r^2 a da - \int_0^r a^3 da \right],$$

откуда после интегрирования

$$Q = \frac{\pi}{8} \gamma \frac{i}{\mu} r^4. \quad (\text{XI.7})$$

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi \gamma i r^4}{8\mu \pi r^2} = \frac{\gamma i}{8\mu} r^2. \quad (\text{XI.8})$$

Сопоставляя (XI.8) и (XI.5), приходим к выводу, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{u_{\text{макс}}}{2}. \quad (\text{XI.9})$$

Таким образом, средняя скорость при ламинарном движении жидкости в трубе равна половине максимальной.

Вычислим значение коэффициента Кориолиса; как известно, этот коэффициент имеет выражение

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v_{\text{ср}}^3 \omega}.$$

Подставляя в числитель $d\omega = 2\pi a da$ и величину u из уравнения (XI.4), а в знаменатель значение $v_{\text{ср}}$ из уравнения (XI.8), после простых преобразований получим

$$\alpha = \frac{16}{r^2} \int_0^r (r^2 - a^2) a da = \frac{8}{r^2} \int_0^r (r^2 - a^2)^2 da,$$

что дает

$$\alpha = 2. \quad (\text{XI.10})$$

Таким образом, кинетическая энергия ламинарного потока вдвое больше кинетической энергии, подсчитанной по средней скорости.

Существенно отметить, что ламинарное движение является вихревым. Чтобы убедиться в этом, найдем величину компонентов вихря ξ , η и ζ для этого движения. Для ламинарного потока в цилиндрической трубе

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (r^2 - a^2).$$

в соответствии с чем

$$v = 0;$$

$$w = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Но производные $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ не равны нулю, а потому для компонентов вихря найдем:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0;$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0;$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0.$$

Следовательно, вихрь ω не равен нулю.

Представим выражение для скорости u в функции координат (x, y, z) .

Так как $a^2 = y^2 + z^2$, то $u = \frac{\gamma i}{4\mu} (r^2 - y^2 - z^2)$, откуда

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma i}{4\mu} (r^2 - y^2 - z^2) \right] = -\frac{\gamma i}{4\mu} z;$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\gamma i}{4\mu} (r^2 - y^2 - z^2) \right] = \frac{\gamma i}{4\mu} y;$$

$$\omega = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = \frac{\gamma i}{4\mu} a.$$

Максимальную скорость вращения имеют частицы у стенок трубы ($a = r$), где $\omega = \frac{\gamma i}{4\mu} r^2$. Для частиц, расположенных на оси трубы, $\omega = 0$.

§ 44. Потери напора на трение в круглой трубе

Найдем потери напора на трение при ламинарном движении жидкости в круглой трубе.

С учетом (XI.8) можно получить выражение для гидравлического уклона в виде

$$i = \frac{8\mu v_{\text{ср}}}{\gamma r^2} = \frac{32\mu}{\gamma d^2} v_{\text{ср}}$$

или

$$h_{\text{тр}} = il = \frac{32 \mu l v_{\text{ср}}}{\gamma d^2}. \quad (\text{XI.11})$$

Заменяя абсолютную вязкость μ через кинематическую ν , получаем формулу, называемую *формулой Пуазейля — Гагена*, для потерь напора при ламинарном движении:

$$h_{\text{тр}} = \frac{32\nu l v_{\text{ср}}}{gd^2}. \quad (\text{XI.12})$$

Эта формула показывает, что потери напора на трение при ламинарном режиме пропорциональны средней скорости движения. Эти потери не зависят от состояния внутренней поверхности стенок трубы, так как характеристика состояния стенок в формулу (XI.12) не входит. Отсутствие влияния стенок на сопротивление можно объяснить тем, что жидкость прилипает к стенкам, в результате чего происходит трение жидкости о жидкость, а не жидкости о стенку.

Сопоставляя формулу (XI.12) с общей зависимостью для потерь напора на трение, имеющей (напомним) вид

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

найдем

$$\lambda = \frac{64\nu}{vd} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (\text{XI.13})$$

Отсюда следует, что при ламинарном режиме коэффициент гидравлического трения обратно пропорционален числу Рейнольдса.

Полученные зависимости с большой точностью подтверждаются многочисленными опытами над движением различных жидкостей в условиях ламинарного режима. Тем самым находят подтверждение и сделанные в процессе выводов этих зависимостей допущения о применимости закона Ньютона для ламинарного движения и о том, что скорость у стенки равна нулю. В инженерной практике с ламинарным режимом часто приходится сталкиваться при движении в трубах жидкостей с повышенной вязкостью (нефть, керосин, смазочные масла и пр.).

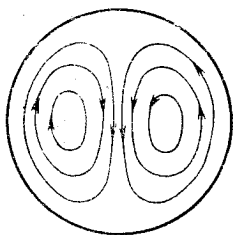
Из формулы (XI.12) видно, что потери напора при ламинарном режиме прямо пропорциональны вязкости жидкости. Поэтому иногда для повышения пропускной способности нефте-

проводов нефть в холодную погоду подогревают, благодаря чему уменьшается ее вязкость, а следовательно и потери напора.

Полученные зависимости требуют внесения в них поправок при движениях со значительным теплообменом, т. е. в случаях, если движение жидкости сопровождается ее нагреванием или охлаждением.

Так в случае движения жидкости по горизонтальной трубе при нагревании или охлаждении жидкости значения коэффициента гидравлического трения возрастают по сравнению с теми, какие имеют место в изотермических условиях. Такое увеличение сопротивления объясняется действием свободной

Рис. XI.3. Вторичные течения при ламинарном неизо­термическом движении жидкости в круглой трубе



конвекции вследствие разности плотностей жидкости в ядре потока и у стенки (рис. XI.3).

Эти зависимости не точны также на начальном участке потока, где сопротивления больше, чем на участках сформировавшегося течения. Определим в связи с этим понятие начального участка.

Пусть поток из какого-либо резервуара входит в трубу, имеющую хорошо закругленный вход (рис. XI.4). Тогда частицы жидкости на входе (за исключением очень тонкой пленки вблизи стенки) будут двигаться с одинаковой скоростью. Частицы, примыкающие к стенке, имеют нулевую скорость, и поэтому в пленке наблюдается большой градиент скорости, а следовательно, и значительное трение. Вследствие этого слой жидкости, прилежащий к стенке, тормозится, а в центральной части потока скорости возрастают (так как заданный расход должен пройти через неизменную площадь сечения, а средняя скорость должна оставаться постоянной). При этом толщина слоев заторможенной жидкости постепенно возрастает, пока не делается равной радиусу трубы, после чего устанавливается характерный для ламинарного режима параболический профиль скорости. Участок трубы, на котором происходит стабилизация параболического профиля скоростей, называют начальным участком ламинарного течения. Длина этого участка $l_{нач}$ зависит от числа Рейнольдса и определяется по формуле Буссинеска

$$\frac{l_{нач}}{d} = 0,065 \text{ Re}, \quad (\text{XI.14})$$

которая хорошо согласуется с наблюдениями.

Наибольшая возможная длина начального участка получается подстановкой в формулу (XI.14) величины $\text{Re}_{кр} = 2000$, в результате чего можно получить $l_{нач}^{макс} \approx 130 d$. Это означает, что в коротких трубах с закругленным входом распределение скоростей по сечению не описывается формулой (XI.4).

На рис. (XI.5) представлено изменение отношения осевой скорости $u_{макс}$ к средней скорости v по длине начального участка круглой трубы. Характерное для стабилизированного ламинарного движения отношение $u_{макс}/v = 2$ имеет место на расстоянии $x/d \cdot 1/\text{Re} \geq 0,065$. Средний по длине начального участка коэффициент гидравлического трения оказывается примерно в 1,2 раза большим, чем коэффициент λ , определенный по зависимости (XI.13).

Теоретические зависимости, полученные выше для ламинарного движения в трубах, используются для нахождения опытным путем численных значений вязкости жидкостей в приборах, называемых вискозиметрами. Существует несколько типов

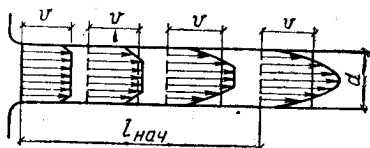


Рис. XI.4. Начальный участок ламинарного движения

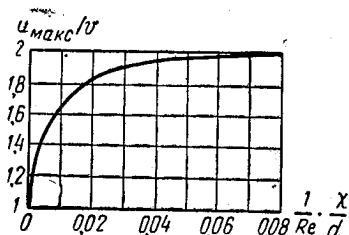


Рис. XI.5. Отношение максимальной скорости к средней на начальном участке трубопровода

вискозиметров¹, позволяющих определить как абсолютную, так и кинематическую вязкость жидкостей.

Простейший, так называемый капиллярный, вискозиметр основан на наблюдении над расходом жидкости, проходящей через калиброванную капиллярную трубку. Измеряя прошедшее через такую трубку за время t количество жидкости W и падение давления $(p_1 - p_2)$ на участке трубки длиной l , нетрудно найти вязкость жидкости μ по формуле (XI.11), которая преобразуется к виду

$$\mu = \frac{\pi r^4 t}{8lW} (p_1 - p_2), \quad (\text{XI.15})$$

где r — радиус трубки.

Для транспорта капельных жидкостей и газов в ряде случаев используются трубопроводы некругового сечения. Обычно в гидравлических расчетах для этого случая вместо диаметра вводится так называемый гидравлический радиус R , представляющий собой, напомним, отношение площади живого сечения трубы ω к ее смоченному периметру χ : $R = \omega/\chi$.

Чем больше гидравлический радиус, тем меньше для заданной площади живого сечения сопротивление движению, т. е. величина этого сопротивления пропорциональна смоченной поверхности стенок. Таким образом, гидравлические сопротивления в трубе квадратного и прямоугольного сечений одной и той же площади неодинаковы (при одинаковой скорости течения, шероховатости стенок и т. д.), ибо гидравлический радиус их различен. Гидравлически наиболее выгоднейшей формой поперечно-

¹ Принцип действия вискозиметра Энглера см. во введении.

го сечения трубы является круговая форма, ибо круглому сечению соответствует наименьший периметр при заданной площади живого сечения.

Часто вместо гидравлического радиуса используют так называемый эквивалентный (или гидравлический) диаметр

$$d_{\text{эKB}} = 4R = 4 \frac{\omega}{\chi}.$$

Напомним, что для круглых труб эквивалентный диаметр равен их геометрическому диаметру: $d_{\text{эKB}} = d$.

Заменяя в формуле Дарси для потери напора диаметр гидравлическим радиусом или эквивалентным диаметром, получаем выражение

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d_{\text{эKB}}} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XI.16})$$

которое принципиально пригодно для расчета труб любого поперечного сечения.

Однако в формуле (XI.16) коэффициент λ зависит уже не только от числа Рейнольдса, но и от формы сечения трубы.

При ламинарном движении коэффициент λ в трубах некругового сечения значительно возрастает по сравнению с движением в круглой трубе (при одном и том же числе Рейнольдса) и может быть выражен формулой

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}_{\square}}, \quad (\text{XI.17})$$

где Re_{\square} — число Рейнольдса, вычисленное по эквивалентному диаметру;

$$\text{Re}_{\square} = \frac{4vR}{\nu} = \frac{vd_{\text{эKB}}}{\nu};$$

A — коэффициент формы, численные значения которого, зависящие от формы сечения, приводятся в табл. XI.1.

Таблица XI.1
Значения эквивалентного диаметра $d_{\text{эKB}}$ и коэффициента формы A

Форма сечения	$d_{\text{эKB}}$	A	Форма сечения	$d_{\text{эKB}}$	A	
Круг диаметром d	d	64	Прямоугольник с отношением сторон a/b :			
Квадрат со стороной a	a	57		0	$2a$	96
Равносторонний треугольник со стороной a	$0,58a$	53		0,1	$1,81a$	85
Кольцевой просвет шириной a	$2a$	96		0,2	$1,67a$	76
				0,25	$1,6a$	73
				0,33	$1,5a$	69
			0,5	$1,3a$	62	

Пусть, например, требуется определить потери давления на трение при движении нефти (относительный удельный вес $\delta=86$) по трубе диаметром $d=0,05$ м, длиной $l=100$ м со скоростью $v=0,3$ м/с. Кинематическая вязкость нефти $\nu=0,2$ Ст.

Сначала находим число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 10^{-4}} = 750,$$

следовательно, движение нефти ламинарное, и для определения потерь напора на трение используем формулу Пуазейля (все значения подставляем в см)

$$h_{\text{тр}} = \frac{32 \nu l v}{gd^2} = \frac{32 \cdot 0,2 \cdot 100 \cdot 0,30}{981 \cdot 5^2} = 79 \text{ см ст. нефти.}$$

Потери давления $\Delta p_{\text{тр}} = \gamma h_{\text{тр}} = 0,79 \cdot 860 = 67,4$ см. вод. ст.

§ 45. Движение жидкостей сквозь пористые среды (фильтрация)

Под действием перепада давлений жидкость может двигаться не только в трубах и каналах, но и сквозь пористые материалы, т.е. передвигаться по каналам-капиллярам между отдельными частицами материала (через его поры). Такое движение жидкости в пористых средах называют фильтрацией.

Величина фильтрующего расхода зависит как от свойств жидкости, так и от структуры материала (размеров пор, их формы, степени замкнутости и пр.). Вследствие изменений сечения капилляров, неоднородности пор и неравномерности их распределения в материале, скорости движения отдельных струек жидкости могут значительно различаться. Поэтому для описания фильтрации принято пользоваться понятием «идеального материала», т.е. такого материала, сечения капиллярных каналов которого принимаются цилиндрическими, а сами каналы параллельными между собой. Учитывая, что фильтрация большей частью происходит при ламинарном режиме, из формулы (XI.8), имея в виду, что $i = h_{\text{тр}}/l$ и обозначая $p_{\text{тр}} = \gamma h_{\text{тр}}$, получим выражение для скорости течения в капилляре

$$v_0 = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{p_{\text{тр}}}{l\mu}, \quad (\text{XI.18})$$

где r — радиус поровой трубки;

$p_{\text{тр}}$ — потери давления по длине l поровой трубки.

Обозначая $r^2/8 = k_0$, получим

$$v_0 = \frac{k_0}{\mu} \cdot \frac{p_{\text{тр}}}{l}. \quad (\text{XI.19})$$

Скорость ламинарной фильтрации v в идеальном материале можно связать со скоростью течения в поровом канале v_0 выражением

$$v = m v_0 = \frac{m k_0}{\mu} \cdot \frac{p_{\text{тр}}}{l} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_{\text{тр}}}{l}, \quad (\text{XI.20})$$

где m — пористость материала, т.е. отношение суммы объемов пор ко всему объему материала; коэффициент $k = m k_0$ в формуле (XI.20) имеет размерность площади и называется проницаемостью.

Выражение (XI.20) можно представить также в форме закона фильтрации Дарси:

$$v = K \frac{h_{\text{тр}}}{l} = K i, \quad (\text{XI.21})$$

где $K = \gamma k / \mu$ — коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости;
 $i = h_{\text{тр}} / l$ — потери напора на единицу длины (гидравлический уклон).

Коэффициент фильтрации характеризует одновременно фильтрационную способность материала и свойства протекающей в нем жидкости.

Расход жидкости Q , протекающей через площадь фильтрации ω , определяется формулами:

$$Q = v\omega = K\omega i, \quad (\text{XI.22})$$

или

$$Q = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_{\text{тр}}}{l} \omega. \quad (\text{XI.22a})$$

При движении жидкости со значительными скоростями в крупнозернистых материалах с большими порами ламинарное течение в порах переходит в турбулентное. Число Рейнольдса Re_{ϕ} , характерное для фильтрационного движения, имеет вид (по М. Д. Миллиончикову)

$$Re_{\phi} = \frac{l}{m^{1,5}} \cdot \frac{v \sqrt{k}}{\nu}. \quad (\text{XI.23a})$$

Критическое значение этого числа лежит в пределах $0,022 < (Re_{\phi})_{\text{кр}} < 0,29$.

При $Re_{\phi} > (Re_{\phi})_{\text{кр}}$ имеет место турбулентная фильтрация, закон Дарси уже недействителен и для определения скорости фильтрации пользуются эмпирическими зависимостями вида

$$v = C p_{\text{тр}}^n, \quad (\text{XI.24})$$

где показатель степени n меняется от 1 до 0,5.

Одним из примеров фильтрации является так называемая инфильтрация воздуха через ограждающие строительные конструкции. Разность давлений по обе стороны ограждающей конструкции определяется гравитационным давлением, являющимся следствием как разности температур, так и ветрового давления на сооружение. Способность ограждений фильтровать сквозь себя воздух называют воздухопроницаемостью.

Расход воздуха, проникающего через ограждающие конструкции, обычно определяют по формуле

$$Q = c_k p_{\text{тр}} \omega, \quad (\text{XI.25})$$

где c_k — коэффициент воздухопроницаемости конструкции.

Из сравнения выражений (XI.22) и (XI.25) следует, что

$$c_k = \frac{k}{\mu l} = \frac{K}{\gamma l}, \quad (\text{XI.26})$$

где l — толщина ограждения.

Таким образом, коэффициент воздухопроницаемости ограждений зависит не только от фильтрационной способности материала и свойств воздуха, но также и от толщины ограждения.

ТУРБУЛЕНТНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ
В ТРУБАХ

§ 46. Общие сведения

Турбулентное движение жидкости в трубах уже давно стало предметом многочисленных исследований, так как в преобладающем большинстве практически важных случаев жидкости движутся в трубах в условиях турбулентного режима. Несмотря на это, до сих пор еще не создано достаточно удовлетворительной теории турбулентного движения, которая непосредственно вытекала бы из основных уравнений гидродинамики и полностью подтверждалась опытом (как для случая ламинарного движения). Это объясняется сложностью структуры турбулентного потока, внутренний механизм которого до сих пор еще не разгадан полностью.

Напомним, что движение жидкости становится турбулентным при достижении числом Рейнольдса критического значения. Тогда от стенок трубы отрываются отдельные жидкие массы, попадающие внутрь потока и своим перемещением нарушающие существовавшее до того упорядоченное (последовательное) движение, характерное для ламинарного режима. В результате возникает диффузия образовавшихся у стенки вихрей, сопровождающаяся гашением заключенной в вихрях кинетической энергии турбулентности; при этом механическая энергия потока переходит частично в тепловую. Этот переход весьма сложен. В общих чертах его можно представить следующим образом: вначале механическая энергия основного (продольного) движения переходит в механическую энергию перемешивания наиболее крупных масс (молей); эта последняя в свою очередь переходит в механическую энергию перемешивания молей более мелкого порядка и т. д. Лишь энергия собственного движения последних в этом ряду наиболее мелких масс непосредственно переходит в тепло.

Вследствие интенсивного вихреобразования частицы жидкости при турбулентном движении описывают весьма сложные траектории, а местные скорости не сохраняются постоянными даже в том случае, когда расход потока постоянен во времени. Таким образом, установившегося движения (в строгом понимании) в турбулентном потоке не существует. Измерения показывают, наоборот, что в каждой точке скорость непрерывно меняется как по величине, так и по направлению. Поэтому скорость в точке турбулентного потока называют *мгновенной* местной скоростью.

Разлагая мгновенную скорость на три взаимно перпендикулярных направления, получим продольную составляющую u_x , направленную по нормали к живому сечению, и две попереч-

ные составляющие u_y и u_z , лежащие в плоскости живого сечения потока (рис. XII.1). Как продольные, так и поперечные составляющие мгновенной скорости все время меняются. Изменение во времени проекции мгновенной местной скорости на какое-либо направление называется пульсацией скорости. С помощью чувствительных приборов можно наблюдать пульсации скоростей и записать их хронограмму.

На рис. XII.2 показана типичная кривая изменения во времени продольной составляющей скорости u_x (график пульса-

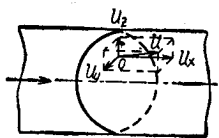


Рис. XII.1. Составляющие пульсационных скоростей в турбулентном потоке

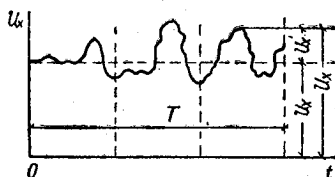


Рис. XII.2. Пульсация мгновенной местной скорости в турбулентном потоке

ции). Изменения скорости кажутся беспорядочными; однако можно отметить, что осредненное за достаточно длинный промежуток времени T значение скорости сохраняется все же постоянным. Это значит, что скорость непрерывно пульсирует около некоторого среднего (осредненного во времени) значения \bar{u}_x (пульсировать — значит подвергаться знакопеременным изменениям относительно какой-то средней величины). Графически осредненная скорость выражается высотой \bar{u}_x прямоугольника, равновеликого площади, заключенной между пульсационной кривой, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими начальному и конечному моменту наблюдения. Так как закономерной периодичности пульсационных кривых не обнаружено, для определения осредненной скорости важно иметь достаточный период наблюдений.

Разность между истинным и осредненным значением местной скорости называется пульсационной составляющей скорости (или пульсационной добавкой). Пульсационные добавки обозначаются теми же буквами, что и сами скорости, но со штрихом; пульсационная составляющая, например, в продольном направлении записывается в виде

$$u'_x = u_x - \bar{u}_x.$$

В турбулентном потоке вместо поля мгновенных можно рассматривать поле осредненных скоростей. Только имея в виду осредненные скорости, можно говорить об установившемся турбулентном движении. Благодаря этому можно уловить некоторую общую закономерность несмотря на видимую беспорядочность движения отдельных частиц.

Связь между осредненной скоростью и мгновенными скоростями может быть выражена зависимостью

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt, \quad (\text{XII.1})$$

где T — период наблюдений.

Эта зависимость непосредственно следует из самого определения осредненной скорости.

Таким же путем можно осреднить и другие компоненты скорости — u_y и u_z , а также любую другую быстро меняющуюся во времени величину, например произведение скоростей u_x и u_y , давление p и т. д. Обычно в задачах инженерной практики рассматриваются не истинная, а только осредненная скорость, а также поле осредненных скоростей.

§ 47. Опытные данные о распределении скоростей и потерях напора

Два основных вопроса, которые интересуют инженера при рассмотрении турбулентного движения жидкости в трубах, — это определение потерь напора и распределения скоростей по поперечному сечению трубы. Опыты показывают, что как распределение скоростей, так и потери напора могут сильно меняться в зависимости от диаметра трубы, скорости движения, вязкости жидкости и шероховатости стенок труб. При этом шероховатость стенок в свою очередь определяется рядом факторов: материалом стенок; характером механической обработки

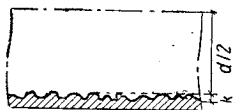


Рис. XII.3. К понятию об абсолютной шероховатости

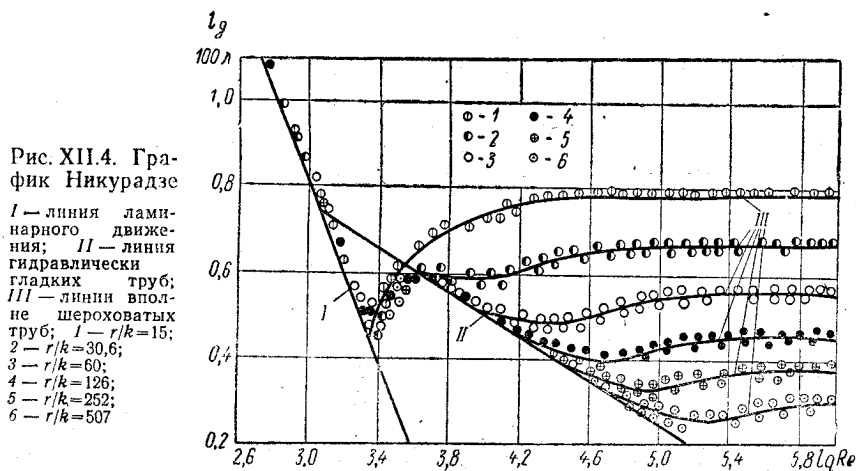
внутренней поверхности трубы, от чего зависят высота выступов шероховатости, их форма, густота и характер их размещения на поверхности; наличием или отсутствием в трубе ржавчины, коррозии, отложения осадков, защитных покрытий и т. д. Для грубой количественной оценки шероховатости вводится понятие о средней высоте выступов (бугорков) шероховатости. Эту высоту, измеряемую в линейных единицах (рис. XII.3), называют *абсолютной шероховатостью* и обозначают буквой k . Опыты показали, что при одной и той же величине абсолютной шероховатости влияние ее на величину гидравлических сопротивлений и распределение скоростей различно в зависимости от диаметра трубы. Поэтому вводится понятие об *относительной шерохова-*

тости, измеряемой отношением абсолютной шероховатости к диаметру трубы, т. е. величиной k/d .

С помощью анализа размерностей в гл. X было установлено, что коэффициент гидравлического трения λ в формуле Дарси — Вейсбаха $h_{тр} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ может зависеть от двух безразмерных параметров: $vd\rho/\mu$ и k/d . Первый из этих параметров представляет собой число Рейнольдса, а второй — относительную шероховатость, а следовательно,

$$\lambda = f\left(\text{Re}; \frac{k}{d}\right). \quad (\text{XII.2})$$

Первые систематические опыты для выявления характера зависимости λ от Re и k/d были проведены в 1933 г. И. Никурадзе в гладких латунных трубах и трубах с искусственной равномерно-зернистой шероховатостью из кварцевого песка. Песок с



различной высотой бугорков шероховатости k наносился сплошным слоем на внутреннюю поверхность труб разного диаметра; при этом были получены различные значения относительной шероховатости (от $k/d=0,00197$ до $k/d=0,066$). В изготовленных таким образом трубах при разных расходах измеряли потерю напора и вычисляли коэффициент λ по формуле Дарси — Вейсбаха.

Результаты опытов Никурадзе представлены в виде графика, показанного на рис. XII.4, где по горизонтальной оси отложены величины $\lg \text{Re}$, а по вертикальной — величины $\lg (100\lambda)$. Из рассмотрения этого графика можно сделать следующие выводы.

При ламинарном движении ($\text{Re} < 2000$ или $\lg \text{Re} < 3,3$) все

опытные точки, независимо от шероховатости стенок, ложатся на прямую линию I; эта линия изображает зависимость (XII.2) для ламинарного режима. Таким образом подтверждается, что при ламинарном движении шероховатость не оказывает влияния на сопротивление.

При турбулентном режиме ($Re > 2000$; $\lg Re > 3,6$) опытные точки до некоторых чисел Рейнольдса совпадают с линией II, полученной при испытании гладких труб без искусственной шероховатости, а затем отклоняются от нее в сторону больших значений λ ; чем меньше шероховатость, тем при больших числах Рейнольдса начинается это отклонение; таким образом, при некоторых условиях (малые числа Re , малые значения k/d или большие r/k , где r — радиус трубы) шероховатость не оказывает влияния на сопротивление также и при турбулентном движении.

При больших числах Рейнольдса коэффициент гидравлического трения перестает зависеть от этого числа (т. е. от вязкости жидкости) и для заданного значения k/d сохраняет постоянную величину.

Трубы, в которых коэффициент гидравлического трения λ вовсе не зависит от вязкости жидкости (числа Рейнольдса), а только от относительной шероховатости, называют *вполне шероховатыми*¹. Трубы же, в которых коэффициент λ вовсе не зависит от шероховатости стенок, а только от числа Рейнольдса, называют *гидравлически гладкими*. Из графика Никурадзе видно, что одна и та же труба в одних условиях может быть гидравлически гладкой, а в других вполне шероховатой. Область движения, в которой λ зависит и от Re , и от k/d , называют *переходной* (область смешанного трения).

Полученным результатам можно дать следующее физическое истолкование. При малых числах Рейнольдса жидкость обтекает выступы шероховатости без образования и отрыва вихрей благодаря значительному влиянию вязкости жидкости; свойства поверхности стенок труб не оказывают при этом влияния на сопротивление и кривые $\lambda = f(Re)$ совпадают с прямой II (для гладких труб). Когда же с увеличением скорости (т. е. числа Рейнольдса) от бугорков шероховатости начинают отрываться вихри, то свойства поверхности уже оказывают влияние на сопротивление и кривые $\lambda = f(Re)$ отклоняются от линии гладкого трения.

В результате опытов Никурадзе и других исследований над сопротивлением трубопроводов были предложены различные эмпирические формулы для определения коэффициента гидравлического трения λ .

¹ Часто эту область называют областью квадратичного сопротивления, так как во вполне шероховатых трубах потери напора пропорциональны квадрату средней скорости движения.

Для гидравлически гладких труб широкое распространение получила формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}} \quad (\text{XII.3})$$

а для вполне шероховатых труб — формула Б. Л. Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k}{d} \right)^{0,25} \quad (\text{XII.4})$$

При использовании кривых, полученных Никурадзе, для практических расчетов встретились, однако, значительные трудности. Применяемые в технике материалы (металлы, дерево, камень) отличаются друг от друга не только средней высотой выступов шероховатости. Опыты показывают, что даже при одной и той же абсолютной шероховатости (средняя высота выступов шероховатости k) трубы из разного материала могут иметь совершенно различную величину коэффициента гидравлического трения λ в зависимости от формы выступов, густоты и характера их расположения и т. д. Учесть влияние этих факторов непосредственными измерениями практически невозможно. В связи с этим в практику гидравлических расчетов было введено представление об эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости k_z . Под эквивалентной шероховатостью понимают такую высоту выступов шероховатости, сложенной из песчинок одинакового размера (шероховатость Никурадзе), которая дает при подсчетах одинаковую с заданной шероховатостью величину коэффициента гидравлического трения. Таким образом, эквивалентная шероховатость трубопроводов из различных материалов определяется не непосредственными измерениями высоты выступов, но находится с помощью гидравлических испытаний трубопроводов.

Опыты, поставленные в 1939 г. Колбруком над трубопроводами с различной неоднородной шероховатостью из зерен песка, показали, что кривые $\lambda = f(\text{Re})$ для этих трубопроводов существенно отличаются от кривых, полученных Никурадзе.

За последние годы рядом авторов (И. А. Исаев, Г. А. Мурин, Ф. А. Шевелев и др.) были проведены систематические экспериментальные исследования гидравлического сопротивления технических трубопроводов (стальные, чугунные и др.). На рис. XII.5 представлены результаты опытов Ф. А. Шевелева над сопротивлением новых стальных труб разного диаметра (т. е. разной относительной шероховатости). Из рисунка видно, что форма кривых $\lambda = f(\text{Re})$ для стальных труб отличается от той, которая была получена Никурадзе. В частности, для стальных труб коэффициент λ в переходной области оказывается всегда больше, чем в квадратичной (а не меньше, как у Никурадзе для искусственной шероховатости), и при увеличении числа

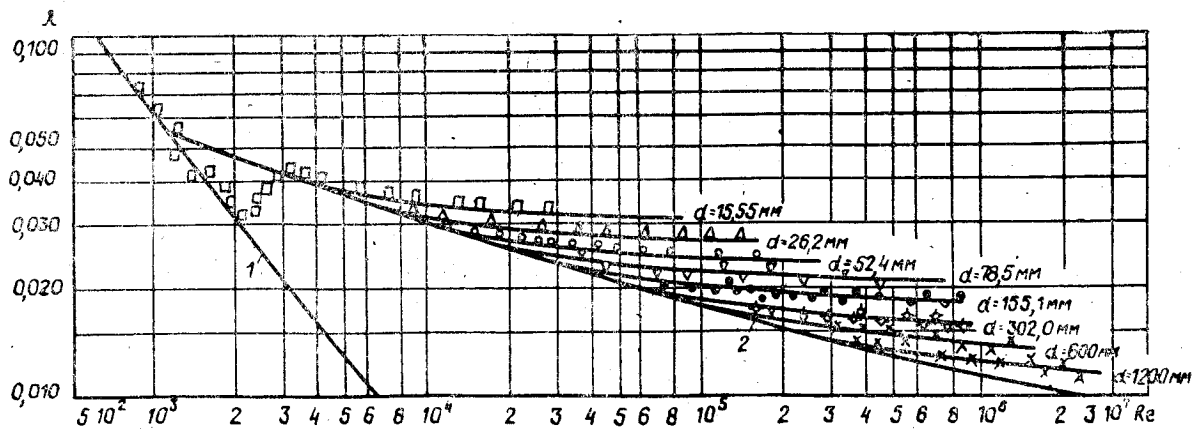


Рис. XII.5. Зависимость коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса для новых стальных труб
 1 — ламинарное движение; 2 — гидравлически гладкие трубы

Рейнольдса непрерывно уменьшается. Полученные кривые не имеют впадины, характерной для кривых Никурадзе. Аналогичные результаты получены и для других технических трубопроводов.

Разная форма кривых $\lambda=f(Re)$ в переходной области для труб с равнозернистой шероховатостью и технических труб объясняется различиями этих шероховатостей.

В случае равнозернистой шероховатости (рис. XII.6, а) с увеличением скорости коэффициент гидравлического трения растет (по сравнению с кривой

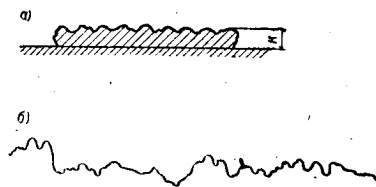


Рис. XII.6. Типы шероховатостей

а — равномерно-зернистая; б — шероховатость технических трубопроводов (профилограмма стального воздуховода; увеличение вертикальное 500-кратное, горизонтальное 25-кратное)

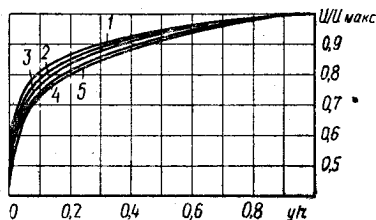


Рис. XII.7. Распределение скоростей в гидравлически гладких трубах (опыты Никурадзе)

для гладких труб) вначале за счет увеличения поверхности трения (по сравнению с поверхностью гладкой трубы). Затем, по достижении определенных чисел Re одновременно на всех выступах шероховатости (по всей поверхности) появляются срывы вихрей, в результате чего λ быстро растет.

Технические трубопроводы характеризуются значительным разбросом величины выступов шероховатости относительно их среднего значения (рис. XII.6, б). Поэтому срывы вихрей, образующиеся вначале на самых больших выступах, с ростом числа Re возникают на остальных элементах, в результате чего кривые $\lambda=f(Re)$ плавно отходят от прямой гладкого трения. По данным М. Д. Миллионщикова¹, шероховатость в опытах Никурадзе характеризовалась дисперсией (среднеквадратичным отклонением от среднего значения) $\sigma \approx (0,23-0,3) k_a$, тогда как для технических труб она достигает $1,5 k_a$. С уменьшением дисперсии отклонение от линии гладких труб становится более резким¹.

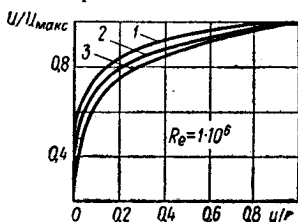
Многочисленные опыты, проводившиеся для установления закона распределения осредненной местной скорости по поперечному сечению турбулентного потока, показали, что при турбулентном движении осредненная скорость мало меняется по сечению трубы, если исключить из рассмотрения небольшую область у стенок, где особо существенную роль играет трение.

Область, где скорости почти не меняются по сечению, называют *ядром течения*, а слой у стенок, характеризующийся быстрым уменьшением значения скорости, — *пристенным слоем*; толщина пристенного слоя обычно очень незначительна (доли мил-

¹ Миллионщиков М. Д. Законы сопротивления, тепло- и массообмена при турбулентном течении в трубах. М., изд. Национального комитета СССР по нефти, 1971.

лиметра). Равномерное распределение скоростей в ядре объясняется интенсивным перемешиванием, которое представляет основную особенность турбулентного движения.

На рис. XII.7 представлены результаты опытов Никурадзе с гидравлически гладкими трубами при различных числах



Рейнольдса; увеличение последнего от 4000 (кривая 1) до $3,24 \cdot 10^6$ (кривая 5) влечет за собой выравнивание скорости; на рис. XII.8 представлены результаты опытов с вполне шероховатыми трубами при различных значениях шероховатости, уменьшающихся от кривой 3 к кривой 1. На этих рисунках по оси абсцисс отложены отношения расстояния от стенки y к радиусу трубы r .

Рис. XII.8. Распределение скоростей во вполне шероховатых трубах (опыты Никурадзе)

1 — гидравлически гладкие трубы; 2 — $r/k_э = 126$; 3 — $r/k_э = 30,6$

В результате исследований распределения скоростей были предложены различные эмпирические формулы. Широкое распространение получила степенная зависимость

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r}\right)^n, \quad (\text{XII.5})$$

где u — скорость на расстоянии y от стенки, u_{\max} — максимальная скорость на оси трубы. Показатель степени n зависит от числа Рейнольдса для гидравлически гладких труб и от относительной шероховатости для труб вполне шероховатых.

§ 48. Касательное напряжение при турбулентном движении

При исследовании закономерностей турбулентного движения в трубах целесообразно исходить, как это было сделано в случае ламинарного движения, из выражения для касательного напряжения.

Природа касательных напряжений, возникающих в турбулентном потоке, более сложна, чем в ламинарном. В процессе турбулентного перемешивания массы жидкости из центральной части трубы попадают в область потока у стенок, и наоборот, частицы, движущиеся у стенок, — в центральную область потока. Массы, перемещающиеся из центральной части потока к периферии, обладают большими продольными скоростями, чем перемещающиеся в противоположном направлении, так как осредненная местная скорость больше в центральной области потока. Массы, движущиеся с меньшими скоростями, попадая в область больших осредненных скоростей, тормозят движение жидкости в этой области. Таким образом, обмен массами жидкости в потоке в поперечном направлении приводит к соответственному обмену количеством движения.

Пусть два слоя движутся один относительно другого (рис. XII.9) со скоростью \bar{u}'_x , причём $\bar{u}'_1 > \bar{u}'_2$. Обозначим через \bar{u}'_y скорость поперечного движения, в результате которого происходит обмен массами между слоями. Через некоторую площадку $\Delta\omega$ в единицу времени от слоя 1 к слою 2 перемещается масса жидкости $\rho \bar{u}'_y \Delta\omega$. Эта масса принесет с собой слою 2 количество движения, равное $\rho \bar{u}'_y \Delta\omega \bar{u}'_x$, в результате чего движение слоя 2 ускорится. Это равносильно действию на слой 1 со стороны слоя 2 силы, направленной против течения, равной:

$$-\tau'_{yx} \Delta\omega = \rho \bar{u}'_y \Delta\omega \bar{u}'_x.$$

Отсюда для касательного напряжения имеем

$$\tau'_{yx} = -\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y. \quad (\text{XII.6})$$

Выражение (XII.6) определяет мгновенное значение касательного напряжения в данной точке, вызванное турбулентным перемешиванием. Осредненное значение напряжения турбулентного течения обозначим

$$\tau_T = -\rho \overline{u'_x u'_y}. \quad (\text{XII.6a})$$

Черточки над буквами здесь означают операцию осреднения. Уравнение (XII.6a) получил Рейнольдс в 1883 г.

Касательное напряжение, обусловливаемое турбулентным перемешиванием, должно быть добавлено к вязкостному; поэтому полное напряжение получает выражение

$$\tau = \tau_v + \tau_T = \mu \frac{du}{dy} - \overline{\rho u'_x u'_y} \quad (\text{XII.7})$$

(здесь τ — суммарное касательное напряжение; τ_v — напряжение, вызываемое действием сил вязкости; τ_T — напряжение, обусловленное турбулентным перемешиванием).

При ламинарном движении перемешивания жидкости не происходит, и выражение (XII.7) приводится к закону Ньютона; таким образом (XII.7) является обобщенным выражением для касательного напряжения в движущейся жидкости.

§ 49. Полуэмпирические теории турбулентности

Величина τ_T в выражении (XII.7) обусловлена пульсационными добавками скорости. Поэтому для ее определения нужно найти зависимость пульсационных добавок от осредненных характеристик потока. Эта зависимость весьма сложна и не до конца изучена. Вследствие случайного характера турбулентно-

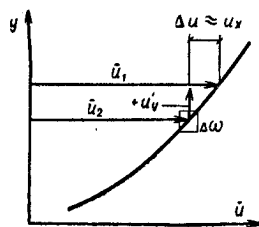


Рис. XII.9. К расчету касательных напряжений в турбулентном потоке

то движения естественнее всего при его изучении применять статистические методы; именно этому пути следуют так называемые статистические теории турбулентности. Однако, несмотря на значительные успехи в разработке этих теорий, до сего времени с их помощью не удалось получить результатов, которые можно было бы использовать в инженерной практике при решении задач о распределении скоростей по сечению или о потерях энергии при турбулентном движении в трубах.

В связи с этим для количественного описания турбулентных потоков получили распространение так называемые полуэмпирические теории, которые основываются на схематизированных моделях турбулентного потока.

Отправным пунктом для развития полуэмпирических теорий явилось предложение Буссинеска о том, чтобы записывать касательное напряжение τ_T , вызванное турбулентным перемешиванием в виде, аналогичном закону вязкости Ньютона, полагая

$$\tau_T = A \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (\text{XII.8})$$

где A — так называемая турбулентная вязкость (коэффициент турбулентного перемешивания), имеющая ту же размерность, что и динамическая вязкость жидкости μ . Однако в отличие от физической вязкости μ турбулентная вязкость A не является свойством жидкости, а зависит от интенсивности турбулентного перемешивания, которая неодинакова при различных скоростях течения и на разных расстояниях от стенки трубы.

Помимо дополнительных касательных напряжений, которые возникают в результате переноса количества движения, турбулентное перемешивание вызывает также перенос тепла и (при движении двухфазных потоков) твердых частиц.

Поскольку в разных точках потока температура неодинакова, то частицы жидкости, движущиеся из мест с более высокой температурой, забирают оттуда больше тепла, чем в эти места приносят частицы, приходящие из мест с более низкой температурой. В результате происходит перенос тепла из мест с высокой температурой в зоны с низкой температурой — так называемая *турбулентная теплопроводность*. По аналогии с формулой (XII.8) можно записать

$$Q = c_p A_Q \frac{dt}{dy},$$

где Q — перенос тепла при турбулентном перемешивании, приходящийся на единицу времени и площади;

c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении;

$\frac{dt}{dy}$ — градиент температуры;

A_Q — коэффициент турбулентной теплопроводности.

Если поток переносит твердые частицы с концентрацией C , то при турбулентном перемешивании в единицу времени и через единицу площади переносится масса этих частиц

$$M = A_M \frac{dC}{dy},$$

где A_M — коэффициент турбулентной диффузии.

Механизм переноса тепла или твердых частиц не вполне аналогичен механизму переноса количества движения. Поэтому в количественном отношении величины коэффициентов A , A_Q и A_M неодинаковы. Приближенно можно принимать $A_Q/A \approx 1,4-2$; $A_M/A \approx 1,2-1,4$.

Уравнение (XII.7) с учетом (XII.8) можно представить в виде

$$\tau = \tau_b + \tau_T = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} + A \frac{d\bar{u}_x}{dy} = (\mu + A) \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (\text{XII.9})$$

Имеется несколько полуэмпирических теорий турбулентности, основанных на разных выражениях для турбулентной вязкости A .

Наибольшее распространение получила полуэмпирическая теория турбулентности, развитая немецким физиком Л. Прандтлем. Прандтль исходит из того, что на разных расстояниях от стенки величины μ и A играют различную роль. Вдали от стенки градиенты скорости невелики, а вязкостные напряжения малы по сравнению с напряжениями, обусловленными турбулентным перемешиванием, и, наоборот, вблизи стенки поперечные составляющие скорости пульсации должны иметь малую величину. На этом основании Прандтль разделяет поток на две области: «ламинарный подслой» у стенок, где движение формируется исключительно под действием сил вязкости, и «ядро потока», в пределах которого влиянием вязкости можно пренебречь.

Для величины τ в ядре потока принимается выражение

$$\tau = A \frac{du}{dy} = -\rho \overline{u'_x u'_y}. \quad (\text{XII.10})$$

Для установления связи между напряжением турбулентного трения τ и осредненными скоростями движения Прандтль исходит из следующей схемы пульсационного движения в турбулентном потоке. Пусть частица жидкости A (рис. XII.10), имея поперечную пульсацию скорости u'_y , продвинется в направлении этой пульсации на малое расстояние l' и займет положение A_1 , принося в эту точку избыток скорости

$$\Delta \bar{u}_x = \bar{u}_{x_1} - \bar{u}_{x_2} = l' \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (\text{XII.11})$$

Естественно предположить, что при погашении этого избытка в точке A_1 возникнут пульсации u'_x и u'_y , пропорциональные $\Delta \bar{u}_x$, вследствие чего можно положить

$$|u'_x| \sim |u'_y| \sim l' \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (\text{XII.12})$$

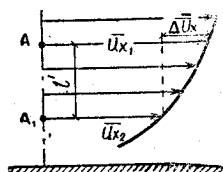


Рис. XII.10. К понятию о длине пути смешения

При этом условии

$$\tau \sim \rho l'^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2. \quad (\text{XII.13})$$

Вводя коэффициент пропорциональности k и полагая для краткости $kl'^2 = l^2$, получим формулу Прандтля для абсолютной величины напряжения трения в ядре турбулентного потока в виде¹

$$|\tau| = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (\text{XII.14})$$

(знак τ совпадает со знаком градиента скорости $\frac{du}{dy}$).

Величина l , характеризующая средний путь пробега частиц жидкости, обусловленный турбулентными пульсациями и имеющая линейную размерность, названа Прандтлем *длиной пути перемешивания* (или пути смешения).

Исходя из уравнения (XII.14) Прандтль нашел закон распределения скоростей по живому сечению трубы. Из опытов известно, что при турбулентном движении основной перепад скорости происходит в узкой области, расположенной у самой стенки. Для этой области Прандтль принимает два допущения: 1) касательное напряжение постоянно и равно касательному напряжению на стенке, т. е.

$$\tau = \tau_0, \quad (\text{XII.15})$$

2) путь перемешивания пропорционален расстоянию от стенки, т. е.

$$l = \kappa y, \quad (\text{XII.16})$$

где κ — универсальная постоянная ($\kappa = 0,4$).

Тогда уравнение (XII.14) принимает вид

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (\text{XII.17})$$

Введя обозначение $\tau_0/\rho = u_*^2$ (u_* — так называемая динамическая скорость), приведем (XII.17) к виду

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y}. \quad (\text{XII.18})$$

Интегрируя (XII.18), получим

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C, \quad (\text{XII.19})$$

¹ В дальнейшем осредненную во времени продольную местную скорость u_x мы будем обозначать u , так как о пульсациях уже не будет речи.

это есть так называемый логарифмический закон распределения скоростей, который Прандтль предложил для ядра турбулентного потока.

В непосредственной близости к стенке первый член выражения (XII.9) превалирует над вторым. Прандтль предлагает считать, что у стенки имеется очень тонкая пленка толщиной δ , где турбулентное перемешивание отсутствует полностью, и определять здесь напряжение по формуле Ньютона

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Эту пленку Прандтль назвал ламинарным подслоем.

В таком случае в пределах ламинарного подслоя ($y \leq \delta$)

$$\tau \approx \tau_0 = \mu \frac{u}{y},$$

или

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 = \frac{\nu u}{y}, \quad (\text{XII.20})$$

или

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}. \quad (\text{XII.21})$$

Скорость течения по высоте ламинарного подслоя изменяется по линейному закону, и для границы ламинарного подслоя и турбулентного ядра потока ($y = \delta$) можно написать

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu} = N, \quad (\text{XII.22})$$

откуда

$$\delta = N \frac{\nu}{u_*}. \quad (\text{XII.23})$$

Число N по своей структуре аналогично числу Рейнольдса и поэтому должно иметь некоторое постоянное значение в условиях перехода от ламинарного к турбулентному движению жидкости.

Записывая уравнение (XII.19) для границы ламинарного подслоя, получим

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \delta + C,$$

откуда

$$C = \frac{u_\delta}{u_*} - \frac{1}{\kappa} \ln \delta.$$

Подставляя в последнее равенство значение δ из (XII.23) и u_δ / u_* из (XII.22), получим

$$C = N - \frac{1}{\kappa} \ln N \frac{v}{u_*}, \quad (\text{XII.24})$$

а подставляя (XII.24) в (XII.19), имеем

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + N - \frac{1}{\kappa} \ln N \frac{v}{u_*},$$

или

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{v} + M,$$

где

$$M = N - \frac{1}{\kappa} \ln N.$$

Коэффициенты $1/\kappa$ и M можно определить опытным путем. Так, в результате опытов, Никурадзе получена формула распределения скорости в гладких трубах в виде

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_* y}{v} + 5,5, \quad (\text{XII.25})$$

или в более простой записи (по А. Д. Альтшулю)

$$\frac{u}{u_*} = 5,33 \lg \text{Re} \frac{y}{r} - 2. \quad (\text{XII.26})$$

Формула (XII.26) дает хорошее совпадение с опытными данными.

Таким образом, согласно полуэмпирической модели Прандтля, весь поток в трубе можно разбить по сечению на две зоны — ламинарный подслои и турбулентное ядро, между которыми предполагается существование переходной зоны.

В качестве безразмерного параметра, характеризующего толщину этих зон, используется комплекс $u_* y / v$. Наиболее распространено следующее деление потока на зоны:

Вязкий (ламинарный) подслои	$0 < u_* y / v < 4$
Переходная зона	$4 < u_* y / v < 70$
Турбулентное ядро	$u_* y / v > 70$

Профиль скоростей по сечению гладкой трубы, согласно схеме Прандтля, приведен на рис. XII.11.

Аналогичным путем Прандтль получил зависимость для распределения скоростей по сечению вполне шероховатых труб; для равномерно-зернистой шероховатости, испытанной Никурадзе, эта зависимость имеет вид

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + 8,48. \quad (\text{XII.27})$$

При расчетах вполне шероховатых труб обычно предполагают существование логарифмического профиля скоростей вплоть до стенки трубы.

Зная закон распределения скоростей, можно найти величину гидравлических сопротивлений. В гидравлически гладких трубах

исходя из формулы (XII.25) для средней скорости потока можно записать

$$\frac{v}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_* y_{\text{ср}}}{\nu} + 5,5, \quad (\text{XII.28})$$

где $y_{\text{ср}}$ — расстояние от стенки до слоя, где скорость равна средней скорости v . Опытным и расчетным путем получено [3]

$$y_{\text{ср}} = 0,223 r. \quad (\text{XII.29})$$

Выше была получена зависимость

$$\frac{v}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}},$$

подставляя которую в (XII.28) найдем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,8. \quad (\text{XII.30})$$

Это известная формула Прандтля для коэффициента гидравлического трения в гладких трубах; без ущерба для точности она может быть представлена в виде (по А. Д. Альтшулю)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,82 \lg \frac{\text{Re}}{100} + 2. \quad (\text{XII.31})$$

Зависимость для коэффициента гидравлического трения при движении жидкости во вполне шероховатых трубах, предложенная Прандтлем, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \lg \frac{d}{k} + B. \quad (\text{XII.32})$$

Коэффициенты A и B в этой формуле были установлены путем обработки опытов Никурадзе, проведенных в трубах с искусственной равномерно-зернистой шероховатостью, в результате чего формула (XII.32) получила вид

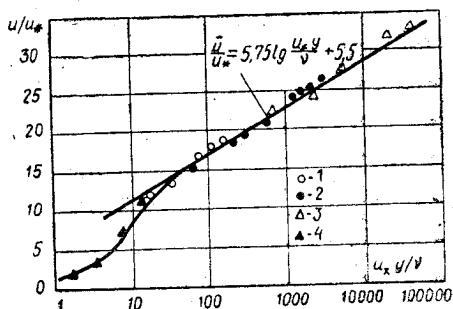


Рис. XII.11. Профиль осредненных скоростей по сечению гидравлически гладкой трубы

1 — $\text{Re} = 4 \cdot 10^3$; 2 — $\text{Re} = 4,1 \cdot 10^5$; 3 — $\text{Re} = 2 \cdot 10^6$; 4 — опыты Рейхардта

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{k} + 1,14 = 2 \lg \frac{3,7 d}{k}. \quad (\text{XII.33})$$

Логарифмический закон сопротивления подтвердился последующими исследованиями, проведенными с другими видами шероховатости, причем величина коэффициента A в этих исследованиях оказалась переменной и зависящей от шероховатости. Это отчетливо видно из рис. XII.12, *a*, где приведено сравнение фор-

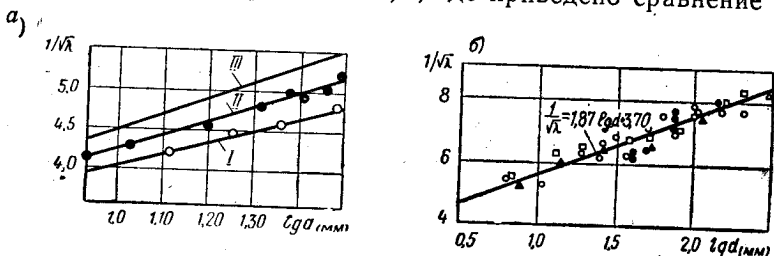


Рис. XII.12. Сопротивление труб с искусственной шероховатостью (*a*) и новых стальных труб (*б*) в квадратичной области
 I — $A=1,54$; II — $A=1,77$; III — $A=2$

мулы (XII.32) с данными опытов в трубах с искусственной шероховатостью, и из рис. XII.12, *б* (аналогичное сравнение, но для стальных труб) [4].

Для переходной области Прандтль аналитических зависимостей для профилей скоростей и коэффициента гидравлического трения не дал.

§ 50. Новые зависимости для расчета турбулентного движения в трубах (по А. Д. Альтшулю)

Новейшие исследования не подтверждают наличия у стенки подслоя со строго ламинарным течением в нем; в действительности турбулентные пульсации существуют и в самой непосредственной близости к стенке.

Измерения показывают, что вблизи стенки периодически за счет прилипания частиц жидкости образуется вязкий подслой, который растет под действием сил вязкости, а затем под воздействием турбулентности, господствующей во внешней зоне, быстро разрушается. При разрушении вязкого подслоя происходит интенсивный выброс жидкости во внешнюю зону, причем после разрушения подслоя скорость у стенки оказывается близкой средней скорости потока. Вследствие прилипания жидкости на стенке снова образуется вязкий подслой, и цикл повторяется снова. Таким образом, жидкость в подслое периодически обменивается и смешивается с жидкостью других областей турбулентного потока. Этот процесс периодического роста и разруше-

ния вязкого подслоя играет решающую роль в явлениях теплопередачи.

Последнее обстоятельство диктует необходимость уточнения модели Прандтля; помимо этого практически важно найти закономерности движения также для переходной области между гидравлически гладким и вполне шероховатым трением, которая осталась неосвещенной в исследованиях Прандтля.

Ниже излагается полуэмпирическая теория, рассматривающая турбулентный поток в трубе как единое целое без разделения его на ядро и ламинарный подслой.

Будем исходить из основного уравнения для касательного напряжения при турбулентном течении (XII.9), которое после деления на плотность жидкости ρ принимает вид

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \psi) \frac{du}{dy}, \quad (\text{XII.34})$$

где $\psi = \frac{A}{\rho}$ — кинематическая турбулентная вязкость;
 ν — кинематическая молекулярная вязкость.

С учетом (XII.15)

$$u_*^2 = (\nu + \psi) \frac{du}{dy}. \quad (\text{XII.35})$$

Для дальнейших выводов необходимо установить характер изменения турбулентной вязкости ψ с удалением от стенки. В первом приближении на основании опытных данных для области, близкой к стенке, можно принять

$$\psi = \kappa u_* y, \quad (\text{XII.36})$$

где κ — универсальная постоянная.

Из рис. XII.13, где приведены данные опытов Лауфера 1 и Нуннера 2 по распределению турбулентной вязкости, видно, что вблизи стенки зависимость (XII.36) подтверждается.

Подставляя (XII.36) в (XII.35), получим следующее уравнение распределения скорости:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu \left(1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}\right)}, \quad (\text{XII.37})$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}\right) + C. \quad (\text{XII.38})$$

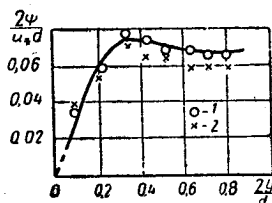


Рис. XII.13. Распределение турбулентной вязкости (по опытным данным)

Скорость $u_{ст}$ на уровне средней высоты выступов шероховатости k определяется из выражения

$$\frac{u_{ст}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa u_* k}{\nu} \right) + C. \quad (\text{XII.39})$$

Из (XII.38) и (XII.39) получаем

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}}{1 + \frac{\kappa u_* k}{\nu}} + \beta, \quad (\text{XII.40})$$

где принято (следуя Прандтлю), что скорость $u_{ст}$ зависит только от касательного напряжения на стенке τ_0 , и введено обозначение

$$\frac{u_{ст}}{u_*} = \beta \quad (\text{XII.41})$$

(здесь β — постоянная).

После подстановки в формулу (XII.40) найденных из опытов Никурадзе значений констант $\kappa=0,4$ и $\beta=7,8$ формула (XII.40) принимает вид

$$\frac{u}{u_*} = 7,8 + 5,75 \lg \frac{1 + 0,4 \frac{u_* y}{\nu}}{1 + 0,4 \frac{u_* k}{\nu}}. \quad (\text{XII.42})$$

При больших числах Рейнольдса $0,4 \frac{u_* y}{\nu} \gg 1$, и уравнение (XII.42) упрощается:

$$\frac{u}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{2,5 \nu}{u_* y} + \frac{k}{y} \right). \quad (\text{XII.43})$$

Формула (XII.43) учитывает влияние на профиль скоростей одновременно вязкости и шероховатости. Как показывают опыты, она пригодна для всей области турбулентного движения в трубах, т. е. как для гидравлически гладких труб, так и для вполне шероховатых, а также и в переходной области.

Из (XII.43) можно получить выражение для средней скорости

$$\frac{v}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{2,5 \nu}{u_* y_{ср}} + \frac{k}{y_{ср}} \right). \quad (\text{XII.44})$$

где $y_{ср}$ — так называемая ордината точки средней скорости, т. е. расстояние от стенки трубы до слоя, движущегося со средней скоростью.

Теоретически установлено, что

$$\frac{y_{ср}}{r} = 0,223. \quad (\text{XII.45})$$

Это соотношение было подтверждено путем обработки опытных данных о распределении скоростей в гладких и шероховатых трубах.

Таким образом, при турбулентном движении жидкости в трубах местная скорость на расстоянии $0,223r$ от стенки трубы равна средней скорости. Это обстоятельство используется для измерения расхода жидкостей и газов в трубопроводах: измерительный прибор (трубка Пито, вертушка) устанавливают в точке средней скорости, а замеренную величину последней умножают на площадь живого сечения трубопровода [3].

В широкой области изменения чисел Рейнольдса этот метод обеспечивает возможность измерения расхода с точностью $\pm 2\%$. При этом ошибка от установки измерительного прибора не в точке средней скорости, а на некотором расстоянии от нее при определении расхода не превышает $\pm 0,5\%$. Определение расхода в трубопроводе путем измерения скорости в одной точке можно рекомендовать для потоков, движущихся с большими скоростями, так как этот метод измерения не вызывает больших потерь напора.

Подставляя (XII.45) в (XII.44), получим

$$\frac{v}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{11,2v}{u_* r} + \frac{4,48k}{r} \right).$$

Учитывая известную связь $u_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$, из этого уравнения можно получить формулу для коэффициента гидравлического трения

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{2,8d} \right),$$

или, вводя обозначение $k = 0,76 k_0^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k_0}{3,7d} \right). \quad (\text{XII.46})$$

Последняя формула учитывает влияние на гидравлическое сопротивление одновременно вязкости и шероховатости и поэтому пригодна для всей области турбулентного движения. Впервые она была предложена английским инженером Колбруком в 1939 г. в качестве эмпирической интерполяционной зависимости и лишь позже получила теоретическое обоснование [3].

Если первый член в скобках в (XII.46) значительно больше второго (при малых значениях Re и k_0/d), эта формула переходит в формулу Прандтля для гидравлически гладких труб (XII.30), а если второй член значительно больше первого (при больших значениях Re и k_0/d) — в формулу Прандтля для вполне шероховатых труб (XII.33).

Проведенное многими авторами сравнение формулы (XII.46) с опытными данными, полученными для технических трубопро-

* Эквивалентная шероховатость k_0 учитывает не только среднюю высоту выступов, но также их форму, расположение в плане и пр.

Таблица XII.1

Значения эквивалентной абсолютной шероховатости k_s
для труб из разных материалов

Трубы	Состояние трубы	k_s , мм
Тянутые из стекла и цветных металлов	Новые, технически гладкие	$\frac{0,002}{0,001}$
	Бесшовные стальные	$\frac{0,01-0,02}{0,014}$
	После нескольких лет эксплуатации	$\frac{0,15-0,3}{0,2}$
Стальные сварные	Новые и чистые	$\frac{0,03-0,1}{0,06}$
	С незначительной коррозией после очистки	$\frac{0,1-0,2}{0,15}$
	Умеренно заржавевшие	$\frac{0,3-0,7}{0,5}$
	Старые заржавевшие	$\frac{0,8-1,5}{1}$
	Сильно заржавевшие или с большими отложениями	$\frac{2-4}{3}$
	Клепаные стальные	Легко клепаные Сильно клепаные
Оцинкованные железные	Новые и чистые	$\frac{0,1-0,2}{0,15}$
	После нескольких лет эксплуатации	$\frac{0,4-0,7}{0,5}$
Чугунные	Новые асфальтированные	$\frac{0-0,16}{0,12}$
	Новые без покрытия	$\frac{0,2-0,5}{0,3}$
	Бывшие в употреблении	$\frac{0,5-1,5}{1}$
	Очень старые	До 3

Трубы	Состояние трубы	k_3 , мм
Деревянные	Из деревянных клепок, тщательно оструганные	$\frac{0,1-0,3}{0,15}$
	Из деревянных клепок, обычные	$\frac{0,3-1}{0,5}$
	Из неоструганных досок	$\frac{1-2,5}{2}$
Фанерные	Новые	$\frac{0,2-0,05}{0,03}$
Асбоцементные	Новые	$\frac{0,5-0,1}{0,085}$
Бетонные	Новые из предварительно-напряженного бетона	$\frac{0-0,05}{0,03}$
	Новые центробежные	$\frac{0,15-0,3}{0,2}$
	Бывшие в употреблении	$\frac{0,3-0,8}{0,5}$
	Из необработанного бетона	1-3

Примечание. В знаменателе приведены средние значения k_3 .

водов из различного материала и разных диаметров в значительном диапазоне чисел Рейнольдса, показало, что она весьма удачно подтверждается опытами.

В табл. XII.1 приведены значения абсолютной эквивалентной шероховатости k_3 для труб из разных материалов.

Формула (XII.46) неудобна для практических расчетов, так как содержит неизвестный коэффициент гидравлического трения и в левой, и в правой частях; при пользовании этой формулой приходится прибегать или к методу последовательных приближений, или построению расчетных графиков. После выражения содержащейся в этой формуле зависимости $\lambda = f(Re, k_3/d)$ в явном виде автором были получены формулы [3]:

логарифмическая

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{Re}{Re \frac{k_3}{10d} + 7} \quad (\text{XII.47})$$

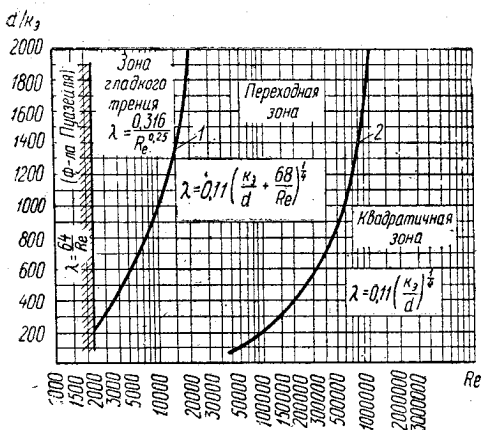


Рис. XII.14. Границы областей применения формул для определения λ

1 — $Re \kappa_3 / d = 10$; 2 — $Re \kappa_3 / d = 500$

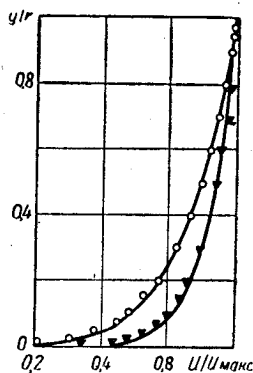


Рис. XII.16. Сравнение степенной формулы распределения скоростей с опытными данными по новым стальным трубам (опыты Ф. А. Шевелева) при двух значениях λ

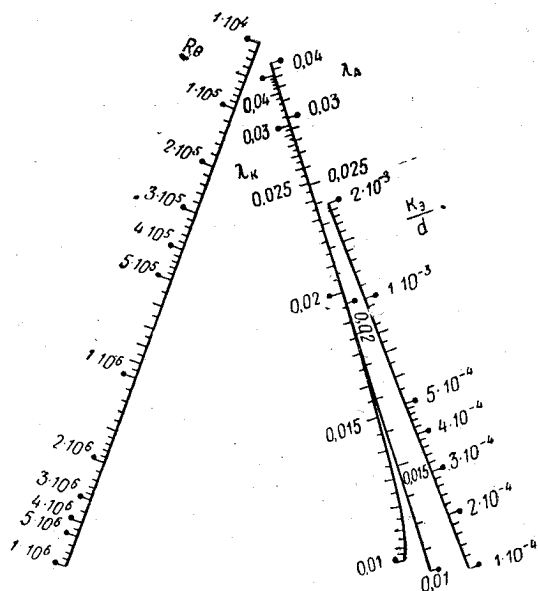


Рис. XII.15. Номограмма для расчета коэффициента гидравлического трения (λ_K) и (λ_A) по формулам соответственно Колбрука и А. Д. Альтшуля

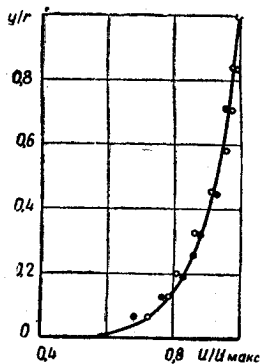


Рис. XII.17. Сравнение степенной формулы распределения скоростей с опытными данными по латунным трубам (опыты Никурадзе)

и степенная

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_3}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} \quad (\text{XII.48})$$

Последняя особенно удобна для расчетов, так как вычисления по ней сводятся к элементарным алгебраическим действиям. На пределах эта формула переходит в известные и хорошо отвечающие опытам зависимости для коэффициента гидравлического трения. Действительно, при условии

$$\text{Re} \frac{k_3}{d} < 10 \quad (\text{XII.49})$$

она практически совпадает с формулой Блазиуса для гидравлических гладких труб:

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$$

а при условии

$$\text{Re} \frac{k_3}{d} > 500 \quad (\text{XII.50})$$

с формулой Б. Л. Шифринсона для вполне шероховатых труб:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_3}{d} \right)^{0,25}$$

Границы областей применения формул для определения λ представлены на рис. XII.14.

Для определения коэффициента гидравлического трения в зависимости от Re и k_3/d используется номограмма, составленная С. Н. Борисовым (рис. XII.15). Эта номограмма позволяет определять коэффициент λ по формулам (XII.46) и (XII.48) (на рисунке соответственно λ_k и λ_A). Номограмма наглядно показывает, что в широкой области изменения значений Re и k_3/d обе формулы дают близкие результаты.

Уравнение (XII.43), характеризующее профиль скоростей в трубах, можно преобразовать к виду

$$\frac{u}{u_{\text{макс}}} = 1 - 2 \frac{\lg \frac{r}{y}}{\frac{0,975}{\sqrt{\lambda}} + 1,35} \quad (\text{XII.51})$$

и приближенно представить простой степенной формулой

$$\frac{u}{u_{\text{макс}}} = \left(\frac{y}{r} \right)^{0,9 \sqrt{\lambda}} \quad (\text{XII.52})$$

справедливой для всей области турбулентного движения [4].

Сравнивая (XII.52) с (XII.5), видим, что значение показателя степени в последней формуле связано с коэффициентом гидравлического трения простым соотношением

$$n = 0,9 \sqrt{\lambda}. \quad (\text{XII.53})$$

На рис. XII.16 и XII.17 в координатах $u/u_{\text{макс}}$ и y/r приведено сравнение кривых, построенных по формуле (XII.52), с опытными данными Никурадзе по распределению скоростей в гладких трубах, а также с данными Ф. А. Шевелева по распределению скоростей в шероховатых (стальных) трубах; использованные опытные данные охватывают трубы диаметром от 1 до 155 см и числа Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до $3,2 \cdot 10^6$.

Из (XII.52) и (XII.53) легко получить расчетные формулы для определения отношения средней скорости к максимальной и коэффициента Кориолиса при турбулентном движении в трубах [4]:

$$\frac{u_{\text{макс}}}{v} = 1 + 1,3 \sqrt{\lambda} \quad (\text{XII.54})$$

и

$$\alpha = 1 + 2,65 \lambda. \quad (\text{XII.55})$$

Таким образом, как $u_{\text{макс}}/v$, так и α зависят только от величины коэффициента гидравлического трения λ .

§ 51. Эмпирические формулы для коэффициента гидравлического трения

Полуэмпирические формулы для определения коэффициента трения (XII.46) и (XII.48), имеющие теоретическое обоснование и охватывающие движение в трубах разного диаметра, при различных скоростях и для различных жидкостей, появились сравнительно недавно. В различных областях техники до сих пор продолжают пользоваться многочисленными эмпирическими формулами, полученными непосредственно путем обработки опытных данных и действительными лишь в ограниченных условиях (для определенных жидкостей, определенных диаметров труб, скоростей течения, температур и т. д.). В этих формулах шероховатость стенок принимается постоянной или учитывается с помощью специальных коэффициентов (так называемые коэффициенты шероховатости), причем для каждой формулы даются особые шкалы коэффициентов шероховатости в зависимости от материала трубы.

Так, для расчета водопроводных труб до последнего времени широко использовалась эмпирическая формула Маннинга

$$\lambda = \frac{124,6n^2}{d^{1,49}},$$

где n — коэффициент шероховатости, который для водопроводных труб обычно принимался равным 0,012;

d — диаметр в м.

Для расчета воздухопроводов использовалась формула Блесса

$$\lambda = 0,0125 + \frac{0,0011}{d},$$

а для расчета газопроводов — формула Веймаута

$$\lambda = \frac{0,094}{d^{1/4}}$$

В обеих формулах d — диаметр в м.

Перечисленные формулы не учитывают влияния вязкости жидкости (или ее температуры) и скорости движения и поэтому пригодны лишь для области вполне шероховатых труб.

Имеются также эмпирические формулы для трубопроводов специального назначения (таких, как деревянные, гибкие или прорезиненные шланги, армированные внутри проволокой, и др.). Каждая из подобных формул справедлива в какой-то определенной, узкой области изменения факторов, определяющих движение жидкости в трубах (скорость движения, диаметр трубы, вязкость жидкости, шероховатость стенки и т. д.), соответственно опытам, на основании которых рассматриваемая формула получена.

Поэтому нельзя экстраполировать эмпирические формулы на области, для которых их применимость не проверена; это может привести к грубым ошибкам и просчетам.

На рис. XII.18 приведено сравнение формулы (XII.33) (кривая 1) с эмпирическими формулами Маннинга (кривая 2) и Блесса (кривая 3). Как и следовало ожидать, эмпирические формулы справедливы лишь в определенных пределах изменения диаметров (или коэффициента гидравлического трения).

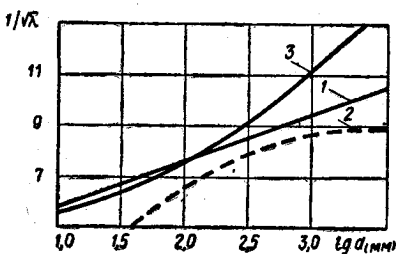


Рис. XII.18. Сравнение логарифмической формулы с эмпирическими формулами [4]

§ 52. Движение жидкости в трубах некругового сечения

Для транспорта капельных жидкостей и газов в ряде случаев используются трубопроводы некругового сечения (например, в вентиляции, в охлаждающих устройствах и пр.). В таких трубах возникают так называемые вторичные течения, которые легко можно наблюдать, например, с помощью подкрашивания потока. На рис. XII.19 показаны линии равных скоростей в турбулентных потоках треугольного сечения.

Вторичные течения происходят в плоскости поперечного сечения трубы: частицы жидкости движутся при этом из центральных районов трубы по направлению к углам (рис. XII.20). Накладываясь на продольное движение, вторичные течения непрерывно переносят количество движения по направлению к углам, в результате чего в угловых участках наблюдаются сравнительно высокие продольные скорости.

Потери на трение при турбулентном движении жидкости в трубе с поперечным сечением некруговой формы можно рассчи-

тывать по формуле Дарси — Вейсбаха (гл. XI), в которую вместо диаметра трубы входит эквивалентный диаметр d_3 :

$$h_{тр} = \lambda \frac{l}{d_3} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{XII.56})$$

При турбулентном движении жидкости коэффициент гидравлического трения в трубах некругового поперечного сечения

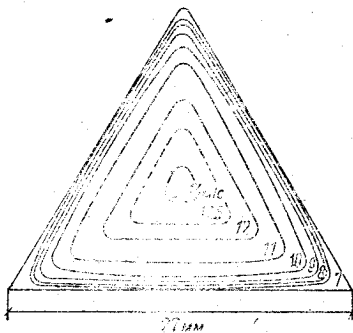


Рис. XII.19. Линии постоянных скоростей (изотакхи) в треугольной трубе (по Никурадзе)

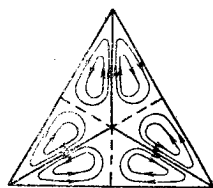


Рис. XII.20. Вторичные течения в треугольной трубе

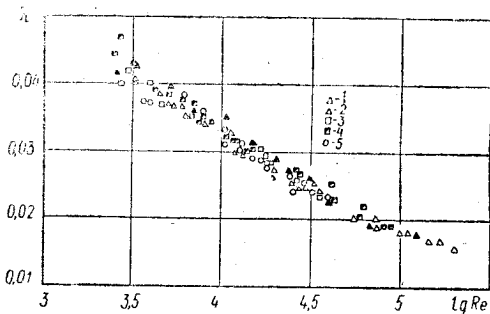


Рис. XII.21. Зависимость коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса для труб различного поперечного сечения

1 — равносторонний треугольник; 2 — равнобедренный треугольник; 3 — квадрат; 4 — прямоугольник (3,5 : 1); 5 — кольцевая щель ($d_1/d_2=0,6/0,8$)

можно определять по формулам для круглых труб. При этом в ряде случаев коэффициенты гидравлического трения оказываются близкими к соответствующим коэффициентам гидравлического трения в круглых трубах (при равенстве эквивалентных диаметров), как это видно из рис. XII.21, на котором приведен график изменения коэффициента гидравлического трения в зави-

симости от числа Рейнольдса для труб различного поперечного сечения. Число Рейнольдса в этом случае имеет вид $Re = vd_a/v$. Однако для некоторых форм поперечных сечений коэффициенты гидравлического трения заметно отличаются от соответствующих коэффициентов для круглых труб с одинаковым эквивалентным диаметром. Так, для прямоугольных гладких труб шириной B и высотой h коэффициент гидравлического трения зависит от отношения B/h , убывая с его ростом, и может отличаться от соответствующего коэффициента для круглых труб при одинаковых d_a на 20%.

На рис. XII.22 показано изменение коэффициента

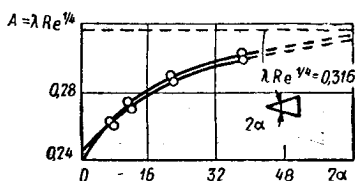


Рис. XII.22. Коэффициенты гидравлического трения при равномерном турбулентном движении в трубах треугольного сечения (кружками обозначены экспериментальные данные для чисел Рейнольдса 5000 и 10 000)

$A = \lambda Re^{1/4}$ для гидравлически гладкой трубы с поперечным сечением в форме равнобедренного треугольника в зависимости от угла 2α . При $2\alpha \approx 40^\circ$ значение A для треугольного сечения отличается от аналогичного значения A для круглого сечения (при одинаковых d_a) всего на 5%, но при $\alpha = 15^\circ$ уже примерно на 15%.

При турбулентном движении в отличие от ламинарного основное изменение скорости происходит в пристенном слое и влияние противолежащих стенок оказывается сравнительно слабым. Этим и объясняется слабое влияние формы сечения на сопротивление при турбулентном движении. При уменьшении расстояния между стенками их взаимное влияние возрастает, как это видно из рис. XII.22.

§ 53. Равномерное безнапорное движение жидкости в трубах

Из формулы (XII.56) можно непосредственно получить выражение для средней скорости движения жидкости в трубе некругового сечения

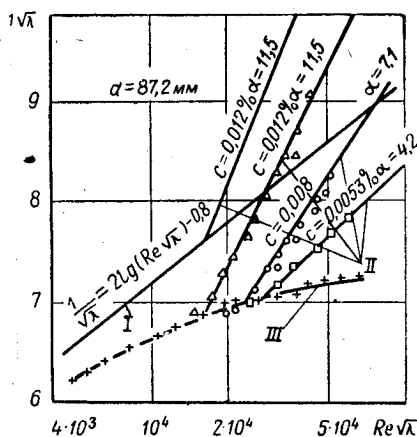


Рис. XII.23. Снижение потерь на трение в трубах полимерными добавками

I — линия гидравлически гладких труб; II — линии по формуле (XII.65) при различных концентрациях полиакриламида (ПАА); III — водопроводная вода

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{4R \frac{h_{\text{тр}}}{l}}$$

Учитывая, что $h_{\text{тр}}/l = i$, где i — гидравлический уклон, имеем

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{Ri}$$

В приложении к безнапорным потокам эта формула обычно записывается в следующем виде (формула Шези):

$$v = C \sqrt{Ri}, \quad (\text{XII.57})$$

где

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (\text{XII.57a})$$

Формула Шези находит широкое применение для расчета средней скорости потока воды в каналах, лотках, реках, безнапорных (канализационных) трубах и в других потоках со свободной поверхностью.

Коэффициент C в формуле Шези имеет размерность корня квадратного из ускорения, что непосредственно следует из уравнения. Этот коэффициент зависит от тех же факторов (число Рейнольдса, шероховатость и т. д.), что и коэффициент λ , и может быть найден пересчетом формул для λ или же по формулам, полученным с учетом особенностей движения воды в открытых руслах (некруговая форма сечения, наличие свободной поверхности). Эти формулы получены (большой частью) в результате опытов, в которых исследовалось движение воды в каналах разного сечения, из разного материала и при различных уклонах дна. Они раскрывают зависимость коэффициента Шези от гидравлического радиуса, шероховатости стенок и уклона дна, которая следует из выражения для этого коэффициента. Действительно

$$C = f(\lambda) = f\left(\text{Re}, \frac{k}{R}\right) = f\left(\frac{C\sqrt{Ri}R}{\nu}, \frac{k}{R}\right),$$

т. е.

$$C = f(R, \nu, k, i).$$

При заданной вязкости жидкости ν

$$C = f(R, k, i).$$

Наиболее простой формулой для определения коэффициента Шези является формула Маннинга

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad (\text{XII.58})$$

где n — коэффициент шероховатости стенок русла;
 R — гидравлический радиус, м.

Формула Маннинга действительна только для квадратичной области сопротивления. Более общий характер имеет так называемая обобщенная формула, действительная для всей области турбулентного движения [4]:

$$C = 25 \left(\frac{R}{k_s + \frac{0,025}{\sqrt{Ri}}} \right)^{1/6}, \quad (\text{XII.59})$$

где R и k_9 — в мм;
 C — в м^{1/2}/с;
 i — уклон дна русла.

При больших уклонах и значительных шероховатостях формула упрощается к виду

$$C = 25 \left(\frac{R}{k_9} \right)^{1/6}. \quad (\text{XII.60})$$

Обычно при гидравлическом расчете каналов известны уклон каналов (определяемый уклоном местности) и поперечное сечение русла. Требуется определить расход (при заданном наполнении) или глубину наполнения канала (при заданном расходе).

В первом случае, задаваясь наполнением, вычисляем последовательно площадь сечения ω , смоченный периметр χ , гидравлический радиус R , коэффициент Шези C , а затем по формуле Шези определяем расход воды Q . Во втором случае, задаваясь различными наполнениями h , вычисляем последовательно ω , χ , R , C и Q и строим кривую зависимости $Q=f(h)$. По этой кривой находим значение h , отвечающее заданному значению расхода Q .

То сечение канала, которое при заданной площади ω пропускает наибольший расход Q , называют *гидравлически наимыгоднейшим*. Из анализа формулы Шези следует, что наибольший расход будет пропускать канал, который при заданной площади сечения ω имеет наибольший гидравлический радиус R или, что то же, наименьший смоченный периметр χ . С этой точки зрения наиболее выгодными сечениями каналов являются круглое и полу-круглое, так как длина окружности короче периметра любого многоугольника (при заданной площади). На практике большей частью применяют каналы трапециевидного сечения, крутизна откосов которых зависит от качества грунта или способа крепления стенок канала.

Формула Шези широко используется при расчете безнапорных труб (канализационных и дренажных), которые с гидравлической точки зрения представляют собой открытые русла. Безнапорные трубы отличаются той особенностью, что наибольший расход и наибольшая скорость в них имеют место при частичном, а не полном наполнении.

§ 54. Начальный участок турбулентного движения

Все изложенные выше соображения относятся к сформировавшемуся турбулентному потоку. Формирование турбулентного потока (так же, как и ламинарного) происходит постепенно. Длина начального участка, на котором заканчивается формирование поля осредненных скоростей (при заданной форме входа), как показывают проведенные исследования, зависит от числа Рейнольдса (для гладких труб) и относительной шероховатости (для вполне шероховатых труб). На основании исследований Г. В. Филиппова для вполне шероховатых труб справедлива зависимость

$$\frac{L_{\text{нач}}}{d} = \frac{2,45}{\sqrt{\lambda}}, \quad (\text{XII.61})$$

где λ — коэффициент гидравлического трения для стабилизированного течения.

Эту формулу можно рекомендовать также для определения длины начального участка в гидравлически гладких трубах и в переходной области турбулентного режима.

Коэффициент гидравлического трения начального участка трубы при турбулентном движении больше, чем той части трубы, где движение стабилизировалось.

Значения $L_{нач}$, вычисленные по формуле (XII.61) для шероховатых труб с большими величинами коэффициента гидравлического трения, невелики. Так, для $\lambda=0,04$ имеем $L_{нач}/d=12$. Однако для гладких труб и больших чисел Рейнольдса, когда коэффициент λ принимает малые значения, длина начального участка заметно возрастает.

§ 55. Потери напора при неизотермическом движении жидкости в трубах¹

Приведенные выше закономерности справедливы лишь для изотермического движения, когда температура жидкости, а следовательно, ее вязкость и плотность во всех точках потока сохраняют одну и ту же величину. При наличии же теплообмена температура жидкости меняется как по сечению трубы, так и по ее длине. Изменение температуры по сечению приводит к изменению плотности жидкости и ее вязкости и, как следствие этого, к изменению профиля скоростей и гидравлических сопротивлений.

Наиболее распространенный метод расчета гидравлических сопротивлений при неизотермическом движении состоит во введении поправочных множителей к коэффициенту гидравлического трения, найденному для условий изотермического движения.

Для капельных жидкостей используется зависимость

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_{ж}} \right)^{0,14} \quad (\text{XII.62})$$

где λ_n и λ_0 — коэффициенты гидравлического трения при неизотермическом и изотермическом движении соответственно (при вычислении λ_0 плотность и вязкость принимаются для средней температуры жидкости);

$\mu_{ст}$ и $\mu_{ж}$ — вязкости жидкости соответственно при температуре стенки трубы $T_{ст}$ и средней температуре жидкости $T_{ж}$.

При охлаждении жидкости $\mu_{ст}/\mu_{ж} > 1$, и из (XII.62) следует, что коэффициент гидравлического трения возрастает по сравнению с изотермическим движением. Наоборот, при нагревании жидкости $\mu_{ст}/\mu_{ж} < 1$ и коэффициент гидравлического трения уменьшается по сравнению с изотермическим движением.

Для определения коэффициента гидравлического трения при турбулентном движении капельных жидкостей в гидравлически гладких трубах используют также формулу А. Д. Альтшуля, обобщенную на случай неизотермического движения²:

$$\lambda_n = \frac{1}{\left[1,82 \lg \left(\text{Re} \sqrt{\frac{\mu_{ст}}{\mu_{ж}}} \right) - 1,64 \right]^2} \quad (\text{XII.63})$$

Результаты расчетов по этой формуле при изменении Re от $2,8 \cdot 10^4$ до $4,5 \cdot 10^5$ и $\mu_{ст}/\mu_{ж}$ от 2,5 до 0,83 отличаются от экспериментальных данных в среднем на 2—3%.

¹ Этот параграф составлен при участии Ф. Г. Майрановского.

² Маяцкий Г. А., Новичкова О. Г. Формула для расчета коэффициента сопротивления при неизотермическом движении жидкости в трубах. «Известия вузов», «Энергетика», 1959, № 10.

Для расчета коэффициента гидравлического трения при неизотермическом турбулентном движении газа можно пользоваться приближенной зависимостью С. С. Кутателадзе

$$\frac{\lambda_{\text{н}}}{\lambda_0} = \left(\frac{T_{\text{ж}}}{T_{\text{ст}}} \right)^{0,5} \quad (\text{XII.64})$$

§ 56. Снижение потерь напора на трение при турбулентном движении

Исследования последних лет указывают на возможность значительного уменьшения потерь напора на трение в трубах путем использования эффекта, открытого Томсом в 1948 г. (так называемый феномен Томса).

Эффект Томса заключается в том, что при добавлении к воде (а также к другим капельным жидкостям) миллионных долей некоторых полимеров (например, полиакриламида) потери напора на трение уменьшаются в несколько раз.

Механизм этого явления еще не вполне ясен. Установлено, что добавки полимеров с высоким молекулярным весом изменяют структуру турбулентного потока (особенно вблизи стенок). Здесь гасятся турбулентные пульсации, уменьшается турбулентный перенос, что приводит к уменьшению потерь напора на трение.

На рис. XII.23 в координатах $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ и $\lg(\text{Re} \sqrt{\lambda})$ приведены результаты опытов, проведенных в стальной трубе диаметром 87 мм при различной концентрации растворенного в воде полиакриламида. Отклонение опытных точек для воды с добавками полиакриламида от кривой сопротивления для чистой воды наступает внезапно при достижении так называемого «порогового» числа Рейнольдса.

Величину коэффициента гидравлического трения при движении воды с добавками полимеров в трубах можно найти по формуле, предложенной Ю. А. Войтинской¹:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{п}}}} = -2 \lg \left[\left(\frac{\text{Re}_{*\text{пор}}}{\text{Re}_*} \right)^{\eta/5,75} \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k_3}{3,7 d} \right) \right] \quad (\text{XII.65})$$

где $\text{Re}_* = u_* d / \nu$, $\text{Re}_{*\text{пор}} = u_{*\text{пор}} d / \nu$, а $u_{*\text{пор}}$ — пороговая динамическая скорость, отвечающая началу снижения сопротивления и зависящая от вида полимера.

Коэффициент η зависит от вида и концентрации полимера. При нулевой концентрации полимера $\eta = 0$ и уравнение (XII.65) переходит в формулу Колбрука.

¹ Войтинская Ю. А. Снижение гидравлических сопротивлений трубопроводов, транспортирующих воду. «Водоснабжение и сантехника», 1973, № 5.

§ 57. Основные понятия о внутреннем механизме турбулентности¹

Важнейшими характеристиками турбулентного движения являются пульсационные составляющие скорости, определяемые

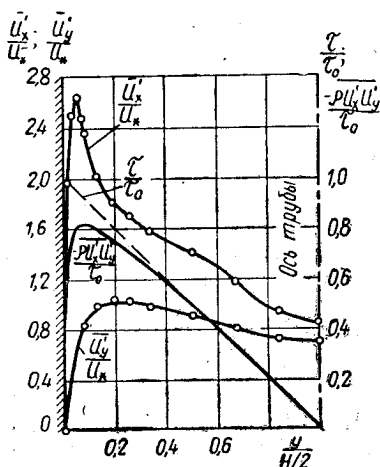


Рис. XII.24. Распределение турбулентных пульсаций скорости и касательных напряжений в потоке (измерения Рейхардта в гидравлически гладкой прямоугольной трубе)

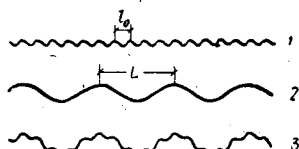


Рис. XII.25. Сложение двух синусоидальных колебаний

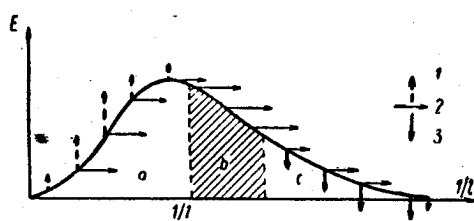


Рис. XII.26. Распределение энергии турбулентности по масштабам
1 — поступление энергии за счет кинетической энергии основного потока; 2 — переход энергии от больших к малым вихрям; 3 — диссипация энергии в тепло благодаря вязкости

среднеквадратичным отклонением мгновенных скоростей в рассматриваемой точке потока от осредненной скорости:

$$u' = u - \bar{u} = \sqrt{\frac{1}{n} [(u_1 - \bar{u})^2 + (u_2 - \bar{u})^2 + \dots + (u_n - \bar{u})^2]}, \quad (XII.66)$$

где u_1, u_2, \dots, u_n — мгновенные значения скоростей в рассматриваемой точке;
 n — число измерений мгновенных значений скоростей.

Экспериментальные исследования показывают, что пульсационные составляющие скоростей меняются с расстоянием от стенки. На рис. XII.24 показано изменение продольной (u'_x) и поперечной (u'_y) пульсационных составляющих скорости по данным измерений в прямоугольной трубе, причем обе составляющие отнесены к динамической скорости u_* . Непосредственно на стенке обе составляющие пульсаций равны нулю.

¹ Этот параграф составлен канд. техн. наук Ф. Г. Майрановским.

Поперечная составляющая пульсаций на некотором расстоянии от стенки достигает максимального значения, равного примерно u_* , а затем слегка уменьшается.

Продольная составляющая пульсаций при удалении от стенки растет быстрее, достигая на расстоянии, равном толщине вязкого подслоя, величины $u'_x \approx 2,5 u_*$, а затем монотонно падает до $u'_x \approx u_*$ на оси трубы. Таким образом, вблизи оси обе составляющие пульсационных скоростей близки между собой и примерно равны u_* . Такая турбулентность, при которой все составляющие пульсаций равны между собой, называется изотропной. Любые реальные течения, имеющие градиенты осредненных скоростей, являются в общем случае анизотропными (пульсационные составляющие различны по величине).

Процессы перемешивания в турбулентном потоке определяют турбулентное касательное напряжение — $\overline{\rho u'_x u'_y}$. Оно равно нулю на стенке (где касательное напряжение определяется вязкостью $\tau = \mu \frac{du}{dy}$), затем достигает максимума на границе вязкого подслоя и далее с удалением от стенки уменьшается по линейному закону. В центре трубы турбулентные касательные напряжения также равны нулю. Изменение турбулентных касательных напряжений $\tau_t = -\overline{\rho u'_x u'_y}$ и суммарных касательных напряжений $\tau = -\overline{\rho u'_x u'_y} + \mu \frac{du}{dy}$, отнесенных к величине касательного напряжения на стенке τ_0 , показано на рис. XII.24.

Турбулентность можно представить состоящей из большого числа наложенных друг на друга пульсаций (вихрей) разных размеров (масштабов), каждый из которых имеет свою амплитуду. Масштаб наибольших вихрей называют макромасштабом L , наименьших вихрей — микромасштабом l_0 .

Предположим для простоты, что турбулентный поток состоит из системы всего двух вихрей 1 и 2 (рис. XII.25). Сложение двух колебаний, вызванных наличием этих вихрей, приводит к более сложному результирующему колебанию 3. Анализ реальной осциллограммы пульсаций скорости позволяет рассматривать их, аналогично предыдущему, как наложение нескольких вихрей, имеющих разные амплитуду и размер. Амплитуда определяет величину пульсации скорости u' . Квадрат пульсационной составляющей прямо пропорционален величине турбулентной энергии

$E = \frac{\rho u'^2}{2}$. Поэтому разделяя турбулентное течение на простые

пульсационные колебания (гармоники), можно найти величину турбулентной энергии, соответствующей каждому из этих колебаний. Таким образом, можно установить величину энергии турбулентности E , соответствующей каждому размеру вихря (так называемый энергетический спектр). Следовательно, пульсаци-

ям определенного размера присуща вполне определенная турбулентная энергия. На типичном энергетическом спектре пульсаций турбулентного потока (рис. XII.26) можно выделить три характерные области.

Область *a* характеризуется наибольшими вихрями, получающими энергию от осредненного течения и передающими ее более мелким вихрям. В этой области спектра с уменьшением размера вихрей (т. е. с ростом $1/l$) их энергия возрастает, достигая максимального значения при размере вихрей l_L (так называемые энергонесущие вихри). По размеру эти вихри близки макромасштабу турбулентности. Энергонесущие вихри передают энергию более мелким вихрям, те в свою очередь — еще более мелким и так далее. Процесс передачи энергии сопровождается распадом крупных вихрей на более мелкие до тех пор, пока в конечном счете вихри не станут настолько малыми (область *c*), что будут уже не турбулентными, а вязкими [19]. Именно в этих наименьших вихрях, имеющих размер, близкий к макромасштабу турбулентности, происходит переход турбулентной энергии в тепло. Между областью крупных вихрей с максимальной энергией и областью наименьших вихрей имеется промежуточная область вихрей средних размеров (область *b*), называемая инерционной областью спектра.

Примеры к главе XII

Пример XII.1. Найти потерю напора на трение при движении воды в стальной новой трубе внутренним диаметром $d=0,05$ м при расходе $Q=1,96$ л/с и температуре $t=20^\circ\text{C}$. Длина трубы $l=1000$ м.

Решение. Находим среднюю скорость потока

$$v = \frac{Q}{\omega} = 1 \text{ м/с (100 см/с)}.$$

По таблице находим при заданной температуре кинематическую вязкость воды $\nu=0,0101$ Ст.

Число Рейнольдса для потока воды в трубе

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{100 \cdot 5}{0,0101} = 50\,000 \quad (Re > 2000).$$

Находим по табл. XII.1 значение абсолютной эквивалентной шероховатости для новых стальных труб: $k_s=0,06$ мм и определяем величину относительной шероховатости $k_s/d=0,06:50=0,0012$.

По обобщенной формуле (XII.48) подсчитываем значение коэффициента гидравлического трения

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_s}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4} = 0,11 (0,0012 + 0,00135)^{1/4} = 0,0247$$

и определяем, наконец, потерю напора

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{0,0247 \cdot 1000 \cdot 1}{0,05 \cdot 19,62} = 25,1 \text{ м}.$$

Пример XII.2. Вода при температуре $t=10^\circ\text{C}$ протекает с расходом $Q=400$ л/с в горизонтальной трубе кольцевого сечения, состоящей из двух

концентрических оцинкованных стальных труб ($k_3 = 0,15$ мм). Наружный диаметр внутренней трубы $d = 75$ мм, а внутренний диаметр наружной трубы $D = 100$ мм. Найти потери напора на трение на участке трубы длиной $l = 300$ м.

Решение. Определяем последовательно:
 площадь живого сечения $\omega = \pi/4(100^2 - 75^2) = 1094\pi$ мм²; смоченный периметр $\chi = \pi(100 + 75) = 175\pi$ мм;
 эквивалентный диаметр $d_3 = 4R = 4\omega/\chi = 4 \cdot 1094\pi/175\pi = 25,2$ мм;
 относительную шероховатость $k_3/d = 0,15/25,2 = 0,0059$.
 Средняя скорость движения

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{400\,000}{60 \cdot 34,5} = 192 \text{ см/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd_3}{\nu} = \frac{192 \cdot 25,2}{0,013} = 370\,000 \quad (Re > 2000),$$

коэффициент гидравлического трения

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_3}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4} = 0,11 \left(0,0059 + \frac{68}{370\,000} \right)^{1/4} = 0,0284$$

и потери напора

$$h_{тр} = \lambda \frac{l}{d_3} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0284 \frac{30\,000}{2,52} \cdot \frac{192}{1962} = 6,3 \text{ м.}$$

Глава XIII

МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 58. Общие сведения

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой и другим оборудованием трубопроводных сетей, которые приводят к изменению величины или направления скорости движения жидкости на отдельных участках трубопровода (при расширении или сужении потока, в результате его поворота, при протекании потока через диафрагмы, задвижки и т. д.), что всегда связано с появлением дополнительных потерь напора.

В водопроводных магистральных трубах потери напора на местные сопротивления обычно весьма невелики (не более 10—20% потерь напора на трение). В воздухопроводах вентиляционных и пневмотранспортных установок, в дутьевых установках котельных потери на преодоление местных сопротивлений часто значительно больше потерь напора на трение. Местные сопротивления являются весьма существенными и при расчете паропроводов.

Потери напора, затраченного на преодоление какого-либо местного сопротивления, принято оценивать в долях скоростного

напора, соответствующего скорости непосредственно за рассматриваемым местным сопротивлением, т. е. определять их из формулы Вейсбаха

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

где ζ — так называемый коэффициент местного сопротивления.

Коэффициенты разных местных сопротивлений находят, как правило, опытным путем; таблицы значений этих коэффициентов (или эмпирические кривые и формулы для них) содержатся во всех инженерных справочниках и руководствах по гидравлике. Для некоторых практически важных случаев значения коэффициентов местных сопротивлений удалось получить также теоретическим путем.

Иногда местные потери напора выражают в виде эквивалентной длины l_3 прямого участка трубопровода, сопротивление трения которого по величине равно рассматриваемым местным потерям напора, т. е. из условия

$$\lambda \frac{l_3}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

или

$$\frac{l_3}{d} = \frac{\zeta}{\lambda}. \quad (\text{XIII.1})$$

Коэффициент гидравлического трения λ , как уже было выяснено, зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости, поэтому одному и тому же значению коэффициента местного сопротивления ζ в общем случае соответствует разная эквивалентная длина. Лишь в квадратичной области сопротивления, когда $\lambda \neq f(\text{Re})$, эквивалентная длина заданного местного сопротивления постоянна.

Основные виды местных потерь напора можно условно разделить на следующие группы:

потери, связанные с изменением сечения потока (или, что то же, его средней скорости). Сюда относятся случаи внезапного расширения, сужения, а также постепенного расширения и сужения потока;

потери, вызванные изменением направления потока. Сюда относятся различного рода колена, угольники, отводы, используемые на трубопроводах;

потери, связанные с протеканием жидкости через арматуру различного типа (вентили, краны, обратные клапаны, сетки, отборы, дроссель-клапаны и т. д.);

потери, связанные с отделением одной части потока от другой или слиянием двух потоков в один общий. Сюда относятся, например, тройники, крестовины и отверстия в боковых стенках трубопроводов при наличии транзитного расхода.

§ 59. Потери напора, связанные с изменениями сечения потока

Внезапное расширение трубопровода. Рассмотрение местных сопротивлений целесообразно начать со случая, который часто встречается на практике, когда трубопровод внезапно расширяется от диаметра d_1 до диаметра d_2 (рис. XIII.1). Как показывают наблюдения, поток, выходящий из узкой трубы, не сразу заполняет все поперечное сечение широкой трубы; жидкость в месте расширения отрывается от стенок и дальше движется в виде свободной струи, отделенной от остальной жидкости поверхностью раздела. Поверхность раздела неустойчива, на ней возникают вихри, в результате чего транзитная струя перемешивается с окружающей жидкостью. Струя постепенно расширяется, пока, наконец, на некотором расстоянии l от начала расширения не заполняет все сечение широкой трубы.

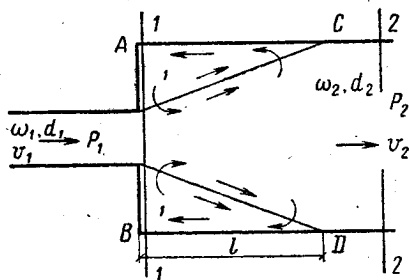


Рис. XIII.1. К выводу теоремы Борда

В кольцевом пространстве между струей и стенками трубы жидкость находится в вихревом движении: жидкость из этой зоны вовлекается в центральную струю; с другой стороны, жидкость из центральной струи попадает в вихревую зону. Благодаря отрыву потока и связанному с ним вихреобразованию на участке трубы между сечениями 1 и 2 теряются значительные потери напора.

Найдем величину этих потерь. Обозначим средние скорости потока в сечениях 1 и 2 через v_1 и v_2 , а давления — через p_1 и p_2 . Давление на торцевой стенке AB , как показывает опыт, практически равно давлению на выходе из узкой части трубы, т. е. p_1 .

По уравнению Бернулли потери напора между сечениями 1 и 2 равны (если положить $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$):

$$h_{\text{вн.р}}^{1-2} = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \quad (\text{XIII.2})$$

Из теоремы импульсов для тех же двух сечений можно получить

$$(p_1 - p_2) \omega_2 = Q \rho (v_2 - v_1) \quad (\text{XIII.3})$$

(учитывая, что участок растекания потока 1—2 имеет малую длину, силами трения в этом уравнении можно пренебречь).

Разделив обе части уравнения (XIII.3) на γ , получим

$$\omega_2 \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2 \omega_2}{g} (v_2 - v_1).$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g}. \quad (\text{XIII.4})$$

Подставляя (XIII.4) в уравнение (XIII.2), найдем

$$h_{\text{вн.р}}^{1-2} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1 v_2}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{2v_1 v_2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g},$$

или

$$h_{\text{вн.р}}^{1-2} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (\text{XIII.5})$$

Отсюда следует, что потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору от потерянной скорости. Этот результат называется *теоремой* или *формулой Борда*.

Формулу (XIII.5) можно привести к виду

$$h_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2. \quad (\text{XIII.6})$$

На рис. XIII.2 показана кривая зависимости ζ_1 от отношения ω_1/ω_2 . Если отнести коэффициент местного сопротивления к скорости в широкой трубе, то

$$h_{\text{вн.р}} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g},$$

где

$$\zeta_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2.$$

Формула (XIII.6) хорошо подтверждается опытами в случае турбулентного движения, если сечение 2 берется достаточно далеко за местом расширения, т. е. там, где устанавливается нормальное распределение скоростей по сечению.

Внезапное сужение трубопровода. Пусть в сечении перехода трубы диаметра d_1 в трубу диаметра d_2 установлена диафрагма с отверстием в ней (рис. XIII.3). Обозначим: через ω_1 и v_1 — площадь сечения и скорость потока в первой трубе; через ω_2 и v_2 — то же, во второй трубе и через ω_3 и v_3 — то же, в отверстии диафрагмы.

Проходя через отверстие, струя жидкости, как показывают многочисленные опыты, сжимается и на некотором расстоянии

от диафрагмы приобретает наименьшую площадь сечения $\omega_{сж}$. Сжатие струи объясняется тем, что частицы жидкости, двигаясь вдоль диафрагмы и достигнув края отверстия, продолжают и дальше двигаться в прежнем направлении, лишь постепенно отклоняясь от него. Достигнув минимального сечения $\omega_{сж}$, струя начинает постепенно расширяться до тех пор, пока площадь ее сечения не станет равна площади сечения трубы ω_2 . Происходящие при этом потери напора связаны главным образом с увеличением сечения струи на участке расширения (потери

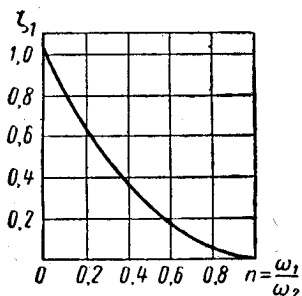


Рис. XIII.2. Зависимость ζ от n при внезапном расширении потока

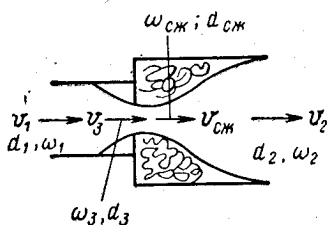


Рис. XIII.3. К определению потерь напора при внезапном изменении сечения

на участке сжатия при турбулентном движении, как показывает опыт, незначительны) и могут быть найдены по формуле Борда, т. е.

$$h = \frac{(v_{сж} - v_2)^2}{2g} \quad (\text{XIII.7})$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$v_{сж} \omega_{сж} = v_2 \omega_2 = v_3 \omega_3 \quad (\text{XIII.8})$$

откуда

$$v_{сж} = \frac{v_3 \omega_3}{\omega_{сж}} \quad (\text{XIII.9})$$

Отношение площади сжатого сечения $\omega_{сж}$ к площади сечения отверстия ω_3 называют *коэффициентом сжатия струи*

$$\varepsilon = \frac{\omega_{сж}}{\omega_3} \quad (\text{XIII.10})$$

Учитывая (XIII.10), уравнение (XIII.9) можно представить в виде

$$v_{сж} = \frac{v_3}{\varepsilon} = \frac{v_2 \omega_2}{\omega_3} \quad (\text{XIII.11})$$

Подставляя найденное выражение для $v_{сж}$ в уравнение (XIII.7), имеем

$$h = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g},$$

где

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon m} - 1 \right)^2 \quad (\text{XIII.12})$$

есть коэффициент рассматриваемого местного сопротивления ($m = \omega_3/\omega_2$ — степень расширения потока).

Таким образом, коэффициент местного сопротивления в этом случае зависит от коэффициента сжатия струи ε и отношения площадей сечения ω_2 и ω_3 .

Величина коэффициента сжатия струи в свою очередь зависит от соотношения площадей сечений ω_1 и ω_3 , т. е.

$$\varepsilon = f \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right) = f(n), \quad (\text{XIII.13})$$

где $n = \omega_3/\omega_1$ — степень сжатия потока.

С увеличением n коэффициент ε возрастает, т. е. само сжатие уменьшается; при $n=1$ $\varepsilon=1$, т. е. сжатие отсутствует.

Для потока жидкости малой вязкости (т. е. при больших числах Рейнольдса) величину коэффициента сжатия струи ε при истечении из отверстий можно найти по теоретической формуле Н. Е. Жуковского:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + 2 \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta}}, \quad (\text{XIII.14})$$

где θ определяют из выражения

$$\operatorname{tg} \theta \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) = n. \quad (\text{XIII.15})$$

Формула Жуковского выведена для случая истечения жидкости из плоской щели, но, как видно из табл. XIII.1, найденные по ней значения коэффициента сжатия (при $n < 0,6$) хорошо согласуются с опытными данными, полученными для круглых отверстий.

Таблица XIII.1
Значения коэффициента сжатия струи ε в функции от степени сжатия [5]

Коэффициент сжатия струи, определенный	Значения ε при n						
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
По формуле (XIII.14)	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644	0,687
Для круглых отверстий (опытные данные)	0,604	0,609	0,616	0,624	0,635	0,644	0,677

Таким образом, форма отверстия оказывает слабое влияние на величину коэффициента сжатия струи. Вместо формул (XIII.14) и (XIII.15) можно пользоваться также приближенной зависимостью [3]

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1-n}. \quad (\text{XIII.16})$$

На рис. XIII.4 кривая 1 построена по формуле (XIII.16); точки — результаты опытов разных авторов.

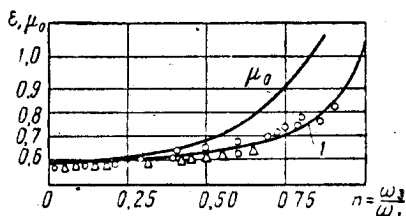


Рис. XIII.4. Зависимость ε и μ_0 от n

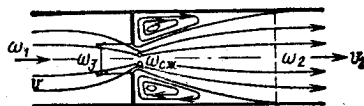


Рис. XIII.5. Диафрагма в трубе постоянного сечения.

Подставив найденные значения ε в уравнение (XIII.12), можно определить теоретические значения коэффициента сопротивления ζ для разных значений ω_3/ω_2 .

Рассмотрим несколько частных случаев.

В случае диафрагмы в трубе постоянного диаметра (рис. XIII.5) $\omega_1 = \omega_2$ и формула (XIII.12) приводится к виду

$$\zeta = \left(\frac{\omega_1}{\omega_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{n \varepsilon} - 1 \right)^2. \quad (\text{XIII.17})$$

Результаты подсчетов по этой формуле даются далее в табл. XIII.4.

При входе в трубу через диафрагму из резервуара значительных размеров (рис. XIII.6) $\omega_3/\omega_1 = 0$ и в соответствии с формулой (XIII.14) Н. Е. Жуковского $\varepsilon = 0,611$. Тогда уравнение (XIII.12) можно записать в виде

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{0,611 \omega_3} - 1 \right)^2. \quad (\text{XIII.18})$$

В случае резкого уменьшения диаметра трубы (рис. XIII.7) формула (XIII.12) приобретает вид

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2. \quad (\text{XIII.19})$$

В табл. XIII.2 даются значения ζ , подсчитанные по формуле (XIII.19) при различных значениях n [ε определялось по формуле (XIII.16)].

Значения коэффициента сопротивления ζ
для случая внезапного уменьшения сечения трубы

n	ζ	n	ζ
0,1	0,4	0,5	0,3
0,2	0,38	0,6	0,27
0,3	0,36	0,7	0,2
0,4	0,34	0,8	0,16

Для входа в трубу из резервуара (рис. XIII.8) имеем $\omega_2/\omega_1 = 0$; $\omega_3 = \omega_2$ и, следовательно,

$$\zeta = \left(\frac{1}{0,611} - 1 \right)^2 \approx 0,41. \quad (\text{XIII.20})$$

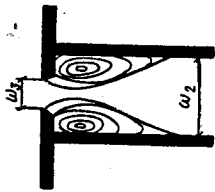


Рис. XIII.6. Вход в трубу через диафрагму

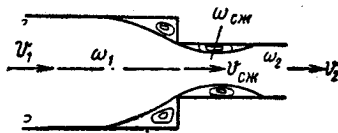


Рис. XIII.7. Внезапное сужение трубы

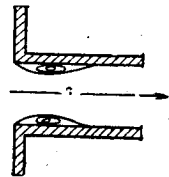


Рис. XIII.8. Вход в трубу из резервуара

Полученные формулы дают значения коэффициента сопротивления, вполне удовлетворительно согласующиеся с опытными данными, и могут быть рекомендованы для расчетов (при $n < 0,6$). Следует, однако, иметь в виду, что если переход сглажен закруглениями, то значения коэффициента ζ будут значительно меньше; так, для случая, показанного на рис. XIII.9, из опытов следует значение $\zeta \approx 0,2$.

Постепенное расширение трубопровода. Если расширение потока происходит постепенно, то потери напора значительно уменьшаются. Плавно расширяющийся участок трубы (см. рис. XIII.10) называется диффузором. При течении жидкости в диффузоре скорость потока постепенно уменьшается, а давление увеличивается. Кинетическая энергия частиц движущейся жидкости уменьшается как вдоль диффузора, так и в направлении от оси к стенкам. Слои жидкости у стенок обладают столь малой кинетической энергией, что не могут преодолеть нарастающего давления, останавливаются и начинают двигаться обратно. При столкновении основного потока с обратными потоками возникают отрыв потока от стены и вихреобразования — явления, которые, как известно, связаны с потерями напора.

Интенсивность этих явлений возрастает с увеличением угла конусности диффузора.

Диффузор характеризуется двумя параметрами: углом конусности α и степенью расширения n , определяемой отношением

$$n = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (\text{XIII.21})$$

Потерю напора в диффузоре можно условно рассматривать как сумму потерь на трение и на расширение

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}} \quad (\text{XIII.22})$$

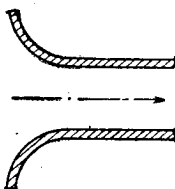


Рис. XIII.9. Плавный вход в трубу

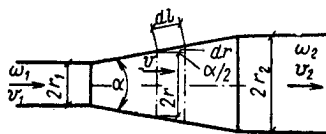


Рис. XIII.10. К расчету потерь напора в диффузоре

Потеря напора на расширение (постепенное) может быть найдена по формуле Борда, но с введением в нее поправочного коэффициента $k_{\text{п.р}}$ (индекс п.р — постепенное расширение), так называемого коэффициента смягчения, зависящего от угла конусности α , т. е.

$$h_{\text{п.р}} = k_{\text{п.р}} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (\text{XIII.23})$$

или

$$\zeta_{\text{п.р}} = k_{\text{п.р}} \zeta_{\text{в.р}} = k_{\text{п.р}} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = k_{\text{п.р}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \quad (\text{XIII.24})$$

Значение $k_{\text{п.р}}$ при турбулентном течении в диффузоре (при $\alpha < 20^\circ$) можно найти по формуле

$$k_{\text{п.р}} \approx \sin \alpha \quad (\text{XIII.25})$$

или по данным, приведенным в табл. XIII.3.

Таблица XIII.3

Значения $k_{\text{п.р}}$ при постепенном расширении трубопровода

α°	$k_{\text{п.р}}$	α°	$k_{\text{п.р}}$
8	0,14	15	0,3
10	0,16	20	0,42
12	0,22	25	0,62

Потери на трение на бесконечно малом участке длины диффузора кругового сечения

$$dh_{\text{тр}} = \lambda \frac{dl}{2r} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XIII.26})$$

где v — средняя скорость в сечении, радиус которого равен r .

С учетом того, что $dl = \frac{dr}{\sin \alpha/2}$, и на основании уравнения расхода можно записать

$$v = v_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2.$$

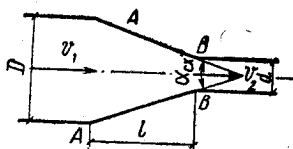


Рис. XIII.11. К расчету потерь напора в конфузоре

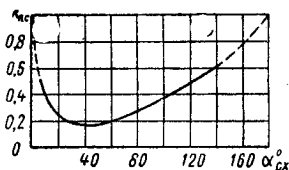


Рис. XIII.12. Зависимость $k_{п,0}$ конфузоров от угла конусности

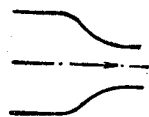


Рис. XIII.13

Подставляя эти выражения в (XIII.26), получим

$$dh_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{2r \sin \alpha/2} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 dr. \quad (\text{XIII.27})$$

Пренебрегая изменением коэффициента λ по длине диффузора и интегрируя в пределах от r_1 до r_2 , т. е. вдоль всего диффузора, после простых преобразований получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha/2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (\text{XIII.28})$$

Суммарный коэффициент сопротивления диффузора получается равным

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha/2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k_{п,р} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (\text{XIII.29})$$

Таким образом, $\zeta_{\text{диф}} = f(\lambda, \alpha, n)$.

Наивыгоднейший угол конусности изменяется в пределах от 5 до 8°.

Постепенное сужение трубы. Постепенно сужающаяся труба называется конфузором (рис. XIII.11). При движении жидкости в конфузоре скорость потока вдоль трубы возрастает, а давление уменьшается. Так как жидкость движется от большего давления к меньшему, то причин для срыва потока (как это име-

ет место в диффузоре) в конфузоре меньше. Отрыв потока от стенки с небольшим сжатием возможен на выходе из конфузора в месте соединения конической трубы с цилиндрической, поэтому сопротивление конфузора всегда меньше, чем сопротивление диффузора с теми же геометрическими характеристиками. Потери в конфузоре также складываются из потерь на постепенное сужение и потерь на трение, т. е.

$$h_{\text{конф}} = h_{\text{п.с}} + h_{\text{тр}}. \quad (\text{XIII.30})$$

Потери напора на трение в конфузоре определяются аналогично тому, как это сделано для диффузора; они равны

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha/2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_2^2}{2g}, \quad (\text{XIII.31})$$

где $n = \omega_1/\omega_2$ — степень сужения конфузора.

Потери напора на сужение становятся ощутимыми при $\alpha > 50^\circ$. Их можно найти по формуле

$$h_{\text{п.с}} = \zeta_{\text{п.с}} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (\text{XIII.32})$$

причем

$$\zeta_{\text{п.с}} = k_{\text{п.с}} \zeta_{\text{вн.с}}, \quad (\text{XIII.33})$$

где $\zeta_{\text{вн.с}}$ — коэффициент местного сопротивления при внезапном сужении трубопровода;

$k_{\text{п.с}}$ — коэффициент смягчения, учитывающий уменьшение коэффициента $\zeta_{\text{п.с}}$ по сравнению с коэффициентом $\zeta_{\text{вн.с}}$.

Коэффициент смягчения $k_{\text{п.с}}$, как показывают исследования, проведенные А. Д. Альтшулем и В. И. Калицуном, зависит главным образом от угла конусности. Зависимость $k_{\text{п.с}}$ от угла конусности $\alpha_{\text{сх}}$ представлена на рис. XIII.12.

Учитывая уравнение (XIII.19), формуле (XIII.33) можно придать вид

$$\zeta_{\text{п.с}} = k_{\text{п.с}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \quad (\text{XIII.34})$$

При выводе формулы (XIII.19) предполагалось, что потери напора при внезапном сужении трубы происходят вследствие того, что струя при входе в трубу меньшего диаметра сжимается, а ее последующее расширение вызывает потери. Если уменьшить сжатие струи, например, путем плавного сопряжения конической части с цилиндрической или замены конической части криволинейной (рис. XIII.13), то потери можно значительно уменьшить. Коэффициент сопротивления такого плавного сужения (его иногда называют соплом) принимается равным 0,01—0,1 в зависимости от степени сужения, его плавности и числа Рейнольдса.

§ 60. Потери напора, связанные с изменением направления потока

Рассмотрим движение жидкости на повороте трубопровода (рис. XIII.14).

В результате искривления потока на вогнутой стороне внутренней поверхности трубы давление больше, чем на выпуклой. В связи с этим в направлении течения создаются различия в скорости, способствующие отрыву потока от стенок, что приво-

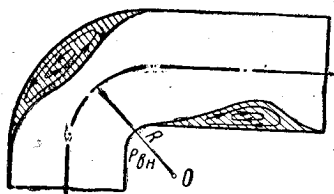


Рис. XIII.14. Схема движения потока на повороте трубопровода

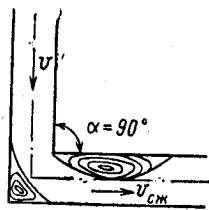


Рис. XIII.15. Внезапный поворот трубы

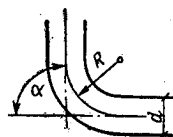


Рис. XIII.16. Закругленное колено

дит сначала к сужению струи, а затем — далее по течению — к ее расширению; при этом возникают значительные потери напора.

При резком повороте трубы (рис. XIII.15), который называется также простым или острым коленом (незакругленное колено), потери напора особенно велики. Их можно оценить, применяя формулу Борда

$$h = \frac{(v_{сж} - v)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{v}{\epsilon} - v\right)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2. \quad (\text{XIII.35})$$

Таким образом, коэффициент местного сопротивления колена

$$\zeta_{\text{кол}} = \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2. \quad (\text{XIII.36})$$

Коэффициент сжатия струи ϵ зависит от величины угла поворота α . Так, при $\alpha = 0^\circ$ $\epsilon = 1$, а при $\alpha = 90^\circ$ (прямоугольное колено) $\epsilon \approx 0,5$, т. е. ширина вихря составляет около половины ширины трубы. Для последнего случая имеем

$$\zeta_{90^\circ} = \left(\frac{1}{0,5} - 1\right)^2 = 1, \quad (\text{XIII.37})$$

что хорошо согласуется с опытными данными.

Для других значений угла поворота коэффициент сопротивления определяется из зависимости [3].

$$\zeta_{\alpha^{\circ}} = \zeta_{90^{\circ}}(1 - \cos \alpha), \quad (\text{XIII.38})$$

где $\zeta_{90^{\circ}}$ — значения коэффициента сопротивления резкого поворота на угол 90° , которые приводятся ниже:

$D, \text{ мм} \dots \dots$	20	25	34	39	49
$\zeta_{90^{\circ}} \dots \dots \dots$	1,7	1,3	1,1	1	0,83

При плавном повороте трубы (закругленное колено, отвод) вихреобразования уменьшаются (рис. XIII.16) и потери напора будут значительно меньше. Коэффициент сопротивления отвода зависит от угла поворота, а также от отношения R/d радиуса закругления к диаметру трубы и от величины коэффициента гидравлического трения λ , т. е.

$$\zeta_{\text{пов}} = f\left(\alpha, \frac{R}{d}, \lambda\right).$$

Для отводов кругового сечения с углом $\alpha=90^{\circ}$ значение $\zeta_{\text{пов}}$ определяется формулой [3]

$$\zeta_{90^{\circ}} = 2000\lambda^{2,5} + 0,106\left(\frac{d}{R}\right)^{2,5}. \quad (\text{XIII.39})$$

или (при больших Re) — формулой Б. Б. Некрасова

$$\zeta_{90^{\circ}} = 0,05 + 0,19 \frac{d}{R}. \quad (\text{XIII.40})$$

При $d/R=1$ из последней формулы имеем $\zeta_{\text{пов}}=0,24$, т. е. значение, меньшее в четыре раза, чем при резком повороте.

При повороте на любой угол α можно приближенно принимать

$$\zeta_{\alpha} = \zeta_{90^{\circ}} a, \quad (\text{XIII.41})$$

где $\zeta_{90^{\circ}}$ — коэффициент сопротивления при повороте на 90° ;
 a — коэффициент, зависящий от угла поворота α .

Величину коэффициента a при $\alpha < 90^{\circ}$ можно определять по формуле А. Я. Миловича

$$a = \sin \alpha,$$

при $\alpha > 90^{\circ}$ — по формуле Б. Б. Некрасова

$$a = 0,7 + 0,35 \frac{\alpha}{90^{\circ}}.$$

Значения коэффициента a по опытным данным Кригера в функции от угла α приведены ниже:

$\alpha^{\circ} \dots \dots \dots$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	140	160	180
$a \dots \dots \dots$	0,4	0,55	0,65	0,75	0,83	0,88	0,95	1	1,05	1,13	1,2	1,27	1,33

Для определения коэффициента местного сопротивления сегментного колена при 5—6 звеньях (рис. XIII.17) А. В. Панченко предложил эмпирическую формулу

$$\zeta = 0,008\alpha^{0,75} \left(\frac{d}{R} \right)^{0,6} \quad (\text{XIII.42})$$



Рис. XIII.17. Сегментное колено

§ 61. Потери напора в арматуре трубопроводов и в сварных стыках

Потери в арматуре трубопроводов. В трубопроводах в ряде случаев приходится устанавливать различные приспособления для искусственного создания сопротивления: задвижки, клапаны, затворы и пр. В этих устройствах происходит сужение потока с его последующим расширением, а также иногда и повороты.

С гидравлической точки зрения подобные устройства (рис. XIII.18) действуют аналогично диафрагме, и поэтому в первом приближении коэффициент местного сопротивления в этих случаях может быть найден по формуле (XIII.17). В табл. XIII.4 приведены значения ζ , подсчитанные по формуле (XIII.17) при разных n . Эти значения, вполне удовлетворительно согласуются с опытными данными для запорных устройств типа задвижек. Таким образом, можно прийти к выводу, что местное сопротивление подобных запорных устройств зависит главным образом от степени их открытия и меньше от конструкции.

Таблица XIII.4
Значения коэффициента местного сопротивления для диафрагмы и запорных устройств на трубопроводах

n	ζ	n	ζ
0,1	284	0,4	9,8
0,2	50,3	0,5	4,4
0,3	19,9	0,6	2,4

Потери напора в дросселе (рис. XIII.19) и кране (рис. XIII.20) зависят от угла поворота δ . При $\delta=0^\circ$ сопротивление как дросселя, так и крана будет наименьшим. С увеличением δ потери возрастают, и при $\delta=90^\circ$ коэффициент сопротивления, отнесенный к скорости течения в трубе, становится бесконечно боль-

Численные значения коэффициента местного сопротивления для дросселя и крана, установленных в круглой трубе

Угол δ	$\zeta_{др}$	$\zeta_{кр}$	Угол δ	$\zeta_{др}$	$\zeta_{кр}$
5	0,24	0,05	40	10,8	17,3
10	0,52	0,29	50	32,6	52,6
20	1,54	1,56	60	118	216
30	3,91	5,47	65	356	486
			70	751	—

шим. Численные значения коэффициента ζ для дросселя и крана, установленных в круглой трубе, приведены в табл. XIII.5.

Таблица XIII.6

Значения коэффициентов местных сопротивлений для некоторых видов трубопроводной арматуры

Вид арматуры	ζ
Приемные клапаны насосов	6—5
Обратные клапаны	6,5—5,5
Вентиль обыкновенный	7—16
Задвижка «Москва» при полном открытии	0,12
Кран проходной	2—4
Вентиль с косым шпинделем (Косва)	2—3
Шибберная задвижка	0,5—1,5
Кран двойной регулировки	2—4
Радиатор двухколонный	2

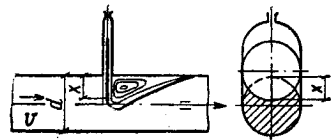


Рис. XIII.18. Задвижка на трубопроводе

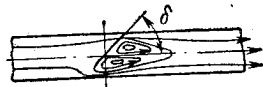


Рис. XIII.19. Дроссель



Рис. XIII.20. Кран

Как правило, коэффициенты местных сопротивлений можно найти из таблиц, составленных на основании опытных данных. В табл. XIII.6 для примера приведены значения коэффициентов местного сопротивления для некоторых видов трубопроводной арматуры.

Потери напора в стыках. Важным вопросом гидравлического расчета трубопроводов является учет потерь напора, вызываемых стыками. Исследования сопротивления сварных стыков (электродуговые, контактной сварки и с подкладными кольцами) показали, что гидравлическое сопротивление трубо-

проводов при наличии стыков возрастает, но кривые $\lambda=f(\text{Re})$ сохраняют тот же вид, что и для труб без стыков; это иллюстрируется кривыми (рис. XIII.21), где кривая 1 относится к случаю трубы без стыков, кривая 4 — к гидравлически гладким трубам, а все другие — к сварным трубам при расстояниях 2 м (кривая 2) и 4 м (кривая 3) между стыками. Последние можно рассматривать как местные сопротивления; естественно, что с уменьшением диаметра трубы влияние стыков на сопротивление увеличивается.

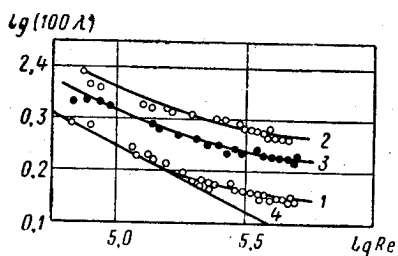


Рис. XIII.21. Влияние сварных стыков на коэффициент гидравлического трения трубопроводов

Возрастание сопротивления, вызываемое стыками, можно определять по формуле

$$K = 1 + \frac{\zeta_{\text{ст}}}{\lambda} \cdot \frac{d}{l}, \quad (\text{XIII.43})$$

где $K = \lambda_1 / \lambda$ — относительное увеличение сопротивления трубопровода (отношение сопротивления трубопровода со стыками к сопротивлению трубопровода без стыков);

l — расстояние между стыками (длина труб);

d — диаметр труб;

λ — коэффициент гидравлического трения трубопровода без стыков.

Таблица XIII.7
Значения коэффициента $\zeta_{\text{ст}}$ для различных видов сварных стыков

Вид стыка	Значения $\zeta_{\text{ст}}$ при диаметре труб в мм							
	200	300	400	500	600	700	800	900
С подкладными кольцами ($\delta = 5$ мм)	0,06	0,03	0,018	0,013	0,009	0,007	0,006	0,005
Электродуговые и контактные ($\delta = 3$ мм)	0,026	0,0135	0,009	0,006	0,004	0,0028	0,0023	0,003

Значения коэффициента $\zeta_{\text{ст}}$ в этой формуле в зависимости от технологии сварки можно находить по табл. XIII.7 или определять по формуле [3]

$$\zeta_{\text{ст}} = 13,8 \left(\frac{\delta}{d} \right)^{3/2}, \quad (\text{XIII.44})$$

где d — диаметр трубопровода в мм;

δ — эквивалентная высота сварного стыка в мм.

§ 62. Потери напора в сетках

Сетчатые фильтры являются местным сопротивлением, поэтому потери напора в них можно найти по формуле Вейсбаха

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{Q^2}{2gm^2\omega^2}.$$

где ζ — коэффициент сопротивления сетки, для сеток с квадратными ячейками (рис. XIII.22), определяемый по формуле Н. С. Краснова [3]

$$\zeta = \frac{92 - 78m}{Re_a} + 0,7(1,05 - m). \quad (\text{XIII.45})$$

Здесь m — коэффициент скважности сетки:

$$m = \frac{a^2}{t^2},$$

где a — размер стороны ячейки сетки;
 t — шаг сетки;

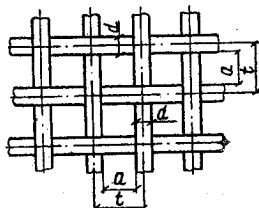


Рис. XIII.22. Сетка с квадратными ячейками

$$Re_a = \frac{va}{\nu},$$

где v — средняя скорость в ячейках сетки ($v = v_1/m$, если v_1 — средняя скорость на подходе к сетке).

§ 63. Потери напора в тройниках

Тройником называется деталь трубопровода, в которой происходит слияние (соединение) или разделение потока. В венти-

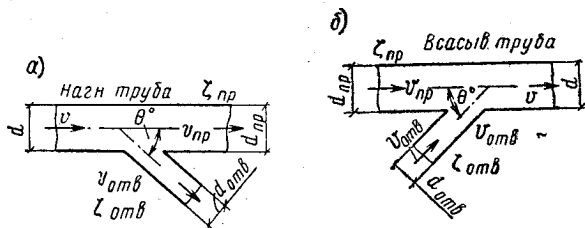


Рис. XIII.23. Тройник

a — нагнетательный; b — всасывающий

ляции тройник, используемый для разделения потока, называют приточным или нагнетательным (рис. XIII.23, a), а для соединения потоков — вытяжным или всасывающим (рис. XIII.23, b).

Изучая потери напора в тройниках, различают потери на проход $h_{пр}$ (и соответствующий им коэффициент сопротивления

$\zeta_{\text{пр}}$), тогда течение рассматривается в направлении основного потока, и потери напора на ответвлении $h_{\text{отв}}$ (и соответствующий им коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{отв}}$), когда рассматривается течение, отделяемое от полного потока или соединяемое с ним. Каждый из коэффициентов сопротивления можно относить как к скорости суммарного потока (т. е. потока перед его разделением или после соединения), так и к скорости потока в ответвлении и, наконец, к скорости проходящего потока (т. е. после ответвления или до соединения). При использовании таблиц и справочников всегда нужно обращать внимание на то, к какой скорости отнесен рассматриваемый коэффициент сопротивления.

Условимся значения всех коэффициентов относить к скоростному напору, соответствующему суммарному расходу Q до ответвления (при разделении потоков) или суммарному расходу Q' после ответвления (при слиянии потоков). Введем следующие обозначения: $Q_{\text{отв}}$ и $Q'_{\text{отв}}$ — расходы в ответвлении, соответственно при разделении и слиянии потоков; $Q_{\text{пр}}$ и $Q'_{\text{пр}}$ — расход проходящего потока (т. е. после ответвления или до соединения). Коэффициенты сопротивления, относящиеся к ответвлению, обозначим через $\zeta_{\text{отв}}$ и $\zeta'_{\text{отв}}$, а относящиеся к прямому направлению — $\zeta_{\text{пр}}$ и $\zeta'_{\text{пр}}$.

При разделении потоков (рис. XIII.24) рассмотрим три случая.

1. Если $Q_{\text{отв}} \gg Q_{\text{пр}}$, т. е. расход через ответвление значительно превышает расход на проход, то в ответвлении возникает вихрь (аналогично вихребразованию в колене); другой вихрь образуется на проходном участке непосредственно после ответвления (за счет диффузорного эффекта). Оба вихря вызывают местное сжатие потока с последующим его расширением (рис. XIII.24, а).

2. Если $Q_{\text{отв}} \ll Q_{\text{пр}}$, т. е. расход через ответвление значительно меньше расхода на проход, то вихрь на проходном участке ослабевает (рис. XIII.24, б).

3. Если, наконец, $Q_{\text{отв}} = 0$, т. е. поток в ответвление не поступает, то в ответвлении возникает вихрь, являющийся причиной местных потерь напора на проход. Следовательно, и в этом случае, несмотря на отсутствие расхода в ответвлении, нет полной идентичности с движением жидкости по прямому участку трубопровода (рис. XIII.24, в).

Таким образом, потери напора в тройнике в случае деления потока складываются в основном из потерь на внезапное расширение после сжатия потока (как на прямом участке, так и в ответвлении).

Потери напора на проход можно приближенно оценить по формуле Борда

$$h_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \frac{(v - v_{\text{пр}})^2}{2g} = K_{\text{пр}} \left(1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v}\right)^2 \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XIII.46})$$

где $K_{пр}$ — опытный коэффициент, зависящий от $v_{отв}/v$ и геометрии тройника.

Коэффициент сопротивления приточного тройника на проход, отнесенный к скорости потока перед его разделением,

$$\zeta_{пр} = K_{пр} \left(1 - \frac{v_{пр}}{v}\right)^2. \quad (\text{XIII.47})$$

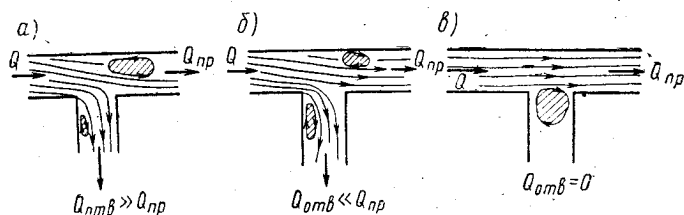


Рис. XIII.24. Схема течения при делении потока

Потери напора в ответвлении с учетом формулы (XIII.38) для потери напора при повороте можно приближенно оценить как

$$h_{отв} = K_{отв} (1 - \cos \theta) \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XIII.48})$$

где θ — угол ответвления относительно оси основного потока; $K_{отв}$ — опытный коэффициент, зависящий от отношения $v_{отв}/v$ и геометрии тройника.

Коэффициент сопротивления приточного тройника в ответвлении, отнесенный к скорости потока перед его разделением, будет равен:

$$\zeta_{отв} = K_{отв} (1 - \cos \theta). \quad (\text{XIII.49})$$

В случае соединения потоков основные потери возникают в результате перемешивания сливающихся потоков, а также поджатия потока с его последующим расширением (рис. XIII.25) [22].

Коэффициенты сопротивления на проход и на ответвление, отнесенные к скорости потока после его соединения, можно приближенно оценить по формулам

$$\zeta_{пр}^* = \zeta_{отв}^* + K' \left[\left(\frac{v'_{пр}}{v'}\right)^2 - \left(\frac{v'_{отв}}{v'}\right)^2 \right]; \quad (\text{XIII.50})$$

$$\zeta_{отв}^* = K' \left[1 + \left(\frac{v'_{отв}}{v'}\right)^2 - 2 \frac{v'_{отв}}{v'} \cdot \frac{Q'_{отв}}{Q'} \cos \theta - 2 \frac{v'_{пр}}{v'} \cdot \frac{Q'_{пр}}{Q'} \right], \quad (\text{XIII.51})$$

где K' — опытный коэффициент, зависящий в основном от соотношения $\omega_{отв}/\omega$.

Таким образом, значения коэффициентов местных сопротивлений, как отнесенных к направлению ответвления, так и к на-

правлению главной магистрали, могут зависеть от геометрической формы тройника (от угла соединения, от соотношения диаметров трубопроводов, образующих тройник, от направления потока) и от соотношения расходов жидкости, проходящих через магистраль и через ответвления, т. е.:

$$\zeta = f\left(\theta; \frac{\omega_{\text{отв}}}{\omega}; \frac{Q_{\text{отв}}}{Q}\right); \quad (\text{XIII.52})$$

$$\zeta' = f'\left(\theta; \frac{\omega'_{\text{отв}}}{\omega'}; \frac{Q'_{\text{отв}}}{Q'}\right). \quad (\text{XIII.53})$$

При ламинарном движении коэффициент ζ зависит также и от числа Рейнольдса.

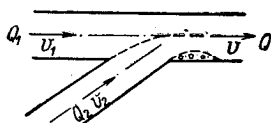
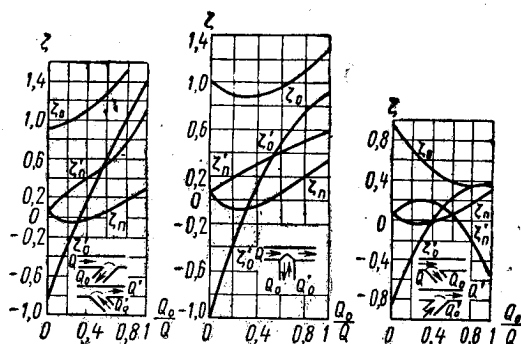


Рис. XIII.25. Схема течения при соединении потоков

Рис. XIII.26. Коэффициент сопротивления тройников



Значения коэффициентов местных сопротивлений при турбулентном движении в тройниках в функции от $Q_{\text{отв}}/Q$ приведены на рис. XIII.26 (для наиболее простых, часто встречающихся на практике тройников при $\omega_{\text{отв}} = \omega = \omega_{\text{пр}}$).

Из кривых, приведенных на этом рисунке, видно, что значения коэффициентов местных сопротивлений в тройниках весьма различны для случая, когда тройник работает на всасывание или на нагнетание.

§ 64. Зависимость коэффициентов местных сопротивлений от числа Рейнольдса

Приведенные данные о коэффициентах местных сопротивлений относятся к турбулентному движению с большими числами Рейнольдса, когда влияние вязкости проявляется себя незначительно. При движении жидкости с малыми числами Рейнольдса коэффициенты местных сопротивлений зависят не только от геометрических характеристик каждого местного сопротивления, но и от числа Рейнольдса.

На рис. XIII.27 приведены зависимости коэффициента ζ некоторых местных сопротивлений (1 — шаровой клапан, 2 — вен-

тель, 3 — задвижка, 4 — тройник) от числа Рейнольдса. В большинстве случаев с увеличением Re коэффициент сопротивления ζ уменьшается. Автомодельность (независимость) коэффициентов ζ от Re при резких переходах наступает при $Re \geq 3000$, а при плавных переходах — при $Re \geq 10000$.

При очень малых числах Рейнольдса жидкость течет через местные сопротивления без отрыва; потери напора обуславливаются непосредственным действием сил вязкого трения и про-

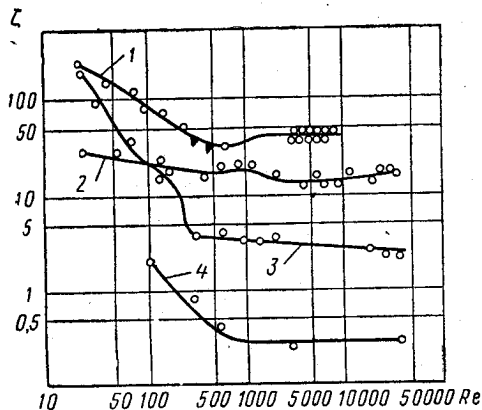


Рис. XIII.27. Зависимость $\zeta=f(Re)$ для некоторых видов местных сопротивлений

порциональны скорости потока в первой степени. Коэффициенты местного сопротивления в этом случае связаны с числом Рейнольдса зависимостью

$$\zeta = \frac{A}{Re}, \quad (\text{XIII.54})$$

где A — коэффициент, зависящий от вида местного сопротивления и степени стеснения потока (табл. XIII.8).

Таблица XIII.8
Значения коэффициентов A и $\zeta_{кв}$ для некоторых местных сопротивлений [3]

Сопротивление	A	$\zeta_{кв}$	Сопротивление	A	$\zeta_{кв}$
Пробочный кран	150	0,4	Задвижка:		
Вентиль обыкновенный	3000	4	полное открытие		
Вентиль Косва	900	2,5	$n=1$	75	0,15
Угловой вентиль	400	0,8	$n=0,75$	350	0,2
Шаровой клапан	5000	45	$n=0,5$	1300	2
Угольник 90°	400	1,4	$n=0,25$	3000	20
Угольник 135°	600	0,4	Диафрагма:		
Колено 90°	130	0,2	$n=0,64$	70	1
Тройник	150	0,3	$n=0,4$	120	7
			$n=0,16$	500	70
			$n=0,05$	3200	800

С увеличением числа Рейнольдса наряду с потерями на трение возникают потери напора, обусловленные отрывом потока и образованием вихрей (переходная область сопротивления). При достаточно больших числах Рейнольдса вихреобразование приобретает основное значение, потери напора становятся пропорциональны квадрату скорости, так как коэффициент ζ перестает зависеть от числа Рейнольдса и определяется только гео-

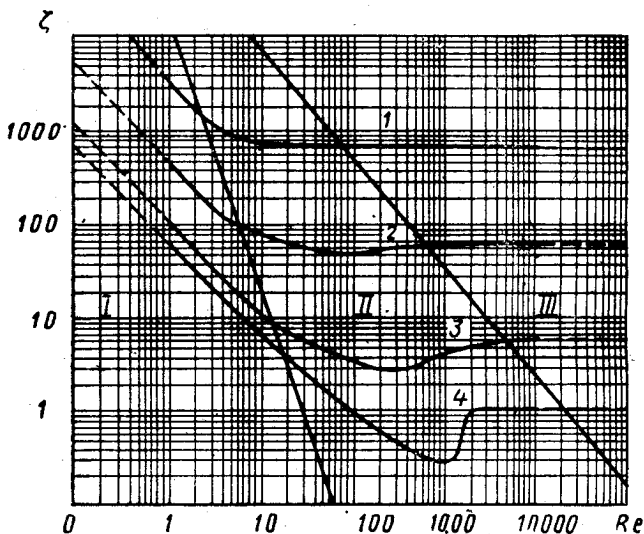


Рис. XIII.28.
Зависимость $\zeta=f(Re)$ для диафрагмы при различной степени открывания

метрией потока (так называемая квадратичная или автомодельная область сопротивления).

Сказанное хорошо иллюстрируется рис. XIII.28, на котором приводятся зависимости коэффициента ζ от числа Рейнольдса на основании опытных данных Н. В. Левкоевой, исследовавшей сопротивление диафрагм с разной степенью открытия ($1-n=0,05$; $2-n=0,16$; $3-n=0,4$; $4-n=0,64$). Опыты проводились в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Наклонные прямолинейные участки соответствуют линейному закону сопротивления (зона I), криволинейные участки — переходной области (зона II), а горизонтальные прямые — квадратичному закону (зона III). Характер кривых $\zeta=f(Re)$ определяется моментом возникновения отрыва потока и вихреобразований и их дальнейшим развитием: чем сильнее деформируется поток в местном сопротивлении, тем раньше (т. е. при меньших числах Рейнольдса) возникают в нем вихреобразования и сопротивления подчиняются квадратичному закону. Наличие в местном сопротивлении острых кромок (внезапное расширение, сужение и т. д.) способствует более раннему отрыву потока и наступлению автомодельности; и, наоборот, если мест-

ное сопротивление имеет обтекаемую форму (постепенное сужение), отрыв потока возникает при значительно больших числах Рейнольдса.

Для ориентировочной оценки коэффициентов местных сопротивлений может служить формула [3]

$$\zeta = \frac{A}{Re} + \zeta_{\text{кв}} \quad (\text{XIII.55})$$

(здесь ζ и Re отнесены к сечению трубопровода); значения A для различных видов местных сопротивлений и различных степеней сжатия и значения $\zeta_{\text{кв}}$ — коэффициента сопротивления и автомодельной области — приведены в табл. XIII.8.

§ 65. Взаимное влияние местных сопротивлений

Приводимые в справочниках экспериментальные данные о коэффициентах местных сопротивлений относятся к движению жидкости с нормальным (выравненным) полем скоростей. В практике местные сопротивления размещены

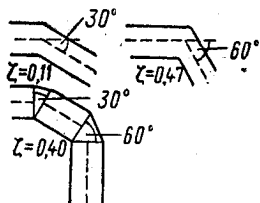


Рис. XIII.29. К расчету взаимного влияния местных сопротивлений

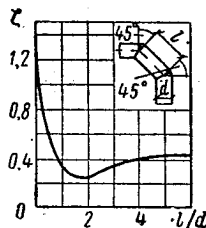


Рис. XIII.30. Зависимость коэффициента суммарного сопротивления двух поворотов от расстояния между ними

иногда настолько близко одно к другому, что поток между ними не успевает выравниваться, поскольку вихреобразования, возникающие при проходе через местное сопротивление, сказываются на значительном протяжении вниз по течению. То расстояние после местного сопротивления, в пределах которого устанавливается нормальная (выравненная) эпюра скоростей и прекращается влияние местного сопротивления на поток, называется длиной влияния местного сопротивления.

Иногда совокупная потеря напора в системе исчисляется путем простого суммирования потерь напора в отдельных местных сопротивлениях, как если бы каждое сопротивление существовало самостоятельно и независимо от других местных сопротивлений. Этот метод простого суммирования (так называемый принцип наложения потерь, или суперпозиция) дает правильные результаты лишь в том случае, если сопротивления расположены на взаимных расстояниях, превышающих длину влияния. В противном случае возмущающее влияние одного местного сопротивления сказывается на других. Так (рис. XIII.29), поворот трубы под углом 30° вызывает сопротивление с коэффициентом $\zeta = 0,11$; поворот под углом 60° дает $\zeta = 0,47$; если же соединить оба поворота последовательно, то вместо увеличения коэффициента сопротивления достигается его уменьшение до $\zeta = 0,4$ [13].

При больших числах Рейнольдса для оценки длины влияния пользуются соотношением

$$l_{\text{вл}} \geq (30 - 40) d. \quad (\text{XIII.56})$$

В действительности длина влияния зависит как от геометрии местного сопротивления, так и от числа Рейнольдса (возрастая с его увеличением) и относительной шероховатости трубопровода, т. е.

$$\frac{l_{\text{вл}}}{d} = f \left(\zeta_{\text{кв}}; \text{Re}; \frac{k_{\text{э}}}{d} \right). \quad (\text{XIII.57})$$

Исследования показали, что длина влияния местного сопротивления во всей области турбулентного движения описывается зависимостями вида

$$\frac{l_{\text{вл}}}{d} = f (\lambda; \zeta_{\text{кв}}). \quad (\text{XIII.58})$$

где λ — коэффициент гидравлического трения трубы, на которой расположены местные сопротивления;

$\zeta_{\text{кв}}$ — коэффициент рассматриваемого местного сопротивления в квадратичной области.

В случаях когда расстояние между отдельными местными сопротивлениями меньше длины влияния, суммарную величину коэффициента местных сопротивлений можно установить с помощью экспериментов. Она может быть как больше, так и меньше суммы соответствующих величин коэффициентов единичных сопротивлений в зависимости от длины прямого участка между ними.

На рис. XIII.30 показано изменение суммарного коэффициента сопротивления двух незакругленных поворотов под углом $\alpha = 45^\circ$ в зависимости от длины вставки между ними.

При $l/d = 0$ суммарное значение ζ для обоих поворотов равно ζ для одного поворота на 90° ($\zeta_{90^\circ} = 1,1$). При увеличении длины вставки [14] суммарная величина ζ уменьшается, достигая минимума при $l/d = 2$, а затем постепенно возрастает, доходя до величины $\zeta = 0,472$, соответствующей удвоенному значению ζ для одного поворота под углом $\alpha = 45^\circ$.

§ 66. Явление кавитации в местных сопротивлениях

На участках многих местных сопротивлений скорости потока резко возрастают, в результате чего давление в нем уменьшается. Если давление становится ниже давления насыщенных паров $p_{\text{н.п}}$ жидкости, протекающей через местное сопротивление, то в этом сопротивлении (или непосредственно за ним) возникает кавитация, которая неблагоприятно отражается на работе оборудования, приводит к вибрации, шумам и эрозионному разрушению материала. При наличии кавитации местные потери напора заметно возрастают. Кавитационные свойства местных сопротивлений оцениваются по критическому значению особого безразмерного числа — числа кавитации κ , при котором в данном местном сопротивлении начинается кавитация. Числом кавитации называют выражение

$$\kappa = \frac{2(p_1 - p_{\text{кр}})}{\rho v_1^2}, \quad (\text{XIII.59})$$

где p_1 — давление перед местным сопротивлением;

$p_{\text{кр}}$ — минимальное давление, при котором возникает кавитация;

v_1 — средняя скорость перед местным сопротивлением.

Обычно кавитация возникает при минимальном давлении, равном давлению насыщенных паров, т. е.

$$\kappa = \frac{2(p_i - p_{н.п})}{\rho v_i^2} \quad (\text{XIII.60})$$

Если известно значение критического числа кавитации $\kappa_{кр}$, то предельно допустимую скорость в трубопроводе перед местным сопротивлением определяют по формуле

$$v_{пр} \leq \sqrt{\frac{2(p_i - p_{н.п})}{\rho \kappa_{кр}}} \quad (\text{XIII.61})$$

Для скоростей, не превышающих $v_{пр}$, коэффициенты местного сопротивления определяют без учета влияния кавитации.

На рис. XIII.31 показана зависимость коэффициента сопротивления регулирующего клапана $\zeta_{усл}$ от числа кавитации. До некоторого критического значения числа κ , как видно из этого рисунка, наблюдается бескавитационное течение, характеризующееся постоянным значением ζ . При $\kappa < \kappa_{кр}$ коэффициент сопротивления резко возрастает.

Критическое число кавитации в значительной степени определяется коэффициентом местного сопротивления в бескавитационном режиме. Зависимость критического числа кавитации от коэффициента местного сопротивления для регулирующих клапанов представлена на рис. XIII.32. Опытные точки для двухседельных клапанов (точки 1—5) при прямом и обратном направлениях потока, а также для угловых клапанов (точки 6—9) при направлении потока на плунжер располагаются возле прямой I, а для угловых клапанов при направлении потока — под плунжер (точки 10—15) возле прямой II.

Для проверочного гидравлического расчета трубопровода на бескавитационную работу необходимо знать коэффициенты местных сопротивлений и критические числа кавитации всех имеющихся в системе местных сопротивлений. Предельно допустимая скорость течения перед каждым местным сопротивлением должна определяться по формуле (XIII.61).

Примеры к главе XIII

Пример XIII.1. В качестве нагревательных приборов системы отопления использованы стальные трубы диаметром $d_1 = 0,1$ м. Стояк, подводящий нагретую воду, и соединительные линии выполнены из труб диаметром $d_2 = 0,025$ м и приварены к торцу труб диаметром 100 мм. Определить потери давления при внезапном расширении трубопроводов, если скорость движения горячей воды в подводящих линиях $v = 0,3$ м/с, а температура воды $t = 80^\circ \text{C}$.

Решение. Кинематическая вязкость и плотность воды в подводящей сети (при $t = 80^\circ \text{C}$) равны соответственно: $\nu = 0,0036$ Ст; $\rho = 972$ кг/м³.

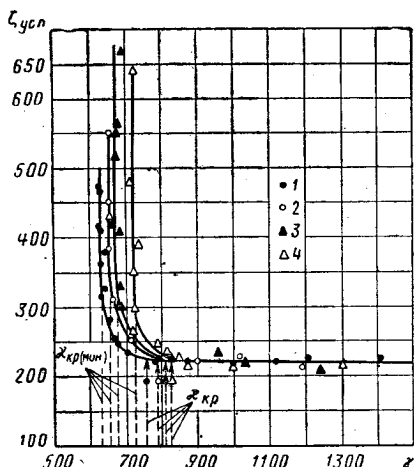


Рис. XIII.31. Зависимость коэффициента сопротивления регулирующего клапана от κ (Э. С. Арзуманов)

1 — при $t = 20^\circ \text{C}$; 2 — при $t = 90^\circ \text{C}$; 3 — при $t = 115^\circ \text{C}$; 4 — при $t = 125^\circ \text{C}$

Находим число Рейнольдса в трубопроводах подводящей сети

$$Re = \frac{vd_2}{\nu} = \frac{30 \cdot 2,5}{0,0036} = 20\,820, \quad \text{т. е. } Re > 2000.$$

Потери давления находим по формуле Борда

$$\Delta p = \frac{0,3^2}{2} \left(1 - \frac{0,025^2}{0,1^2}\right)^2 972 \approx 0,0405 \cdot 972 \approx 41,8 \text{ Па.}$$

Пример XIII.2. Для повышения избыточного давления в трубопроводе диаметром $d=0,1$ м установлена дроссельная шайба (диафрагма) $d_0=0,05$ м. Определить величину потери давления в шайбе, если скорость воздуха в трубе $v=20$ м/с, а температура $t=20^\circ\text{C}$.

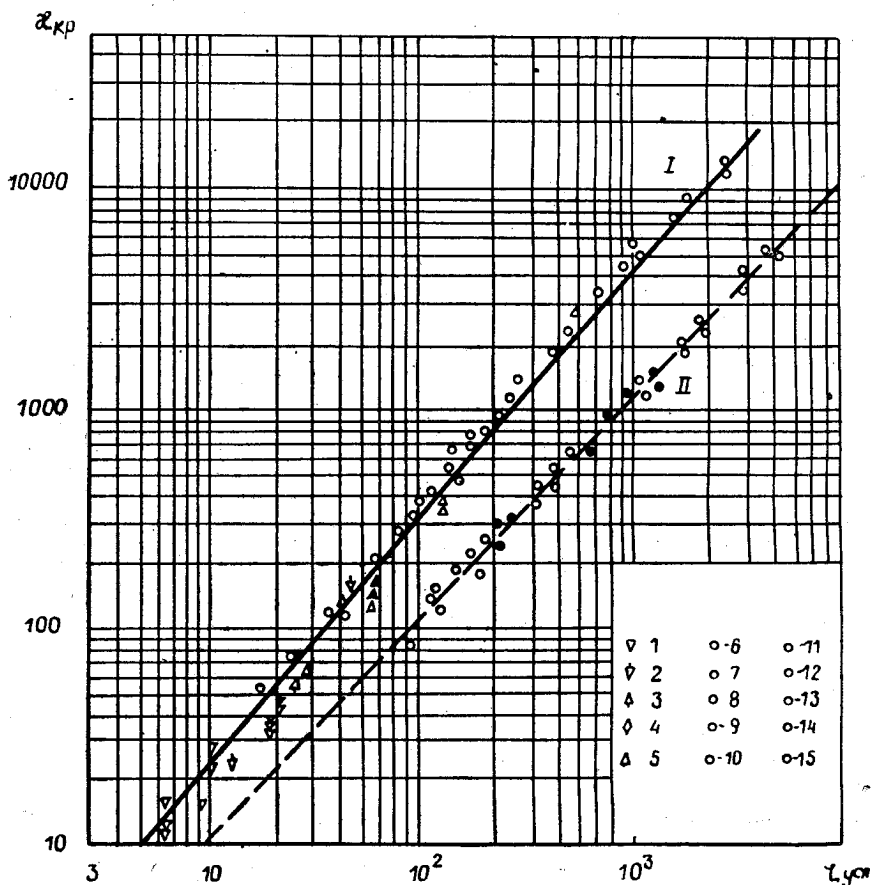


Рис. XIII.32. Зависимость критического числа кавитации от коэффициента местного сопротивления для регулирующих клапанов [3]

1—5 — двухседельные клапаны; 6—9 — угловые клапаны (направление потока на плунжер); 10—15 — угловые клапаны (направление под плунжер)

Решение. Определяем степень сжатия потока, вызванного установкой шайбы на трубопроводе:

$$n = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{d_0^2}{d^2} = \left(\frac{0,05}{0,1}\right)^2 = 0,25.$$

Находим коэффициент сжатия струи при проходе потока воздуха через шайбу по формуле (XIII.16):

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - n} = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - 0,25} = 0,621.$$

Определяем коэффициент местного сопротивления шайбы по формуле (XIII.17):

$$\zeta = \left(\frac{1}{n\varepsilon} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{0,25 \cdot 0,621} - 1\right)^2 = 29,4.$$

откуда находим потерю давления в шайбе

$$\Delta p = \rho \zeta \frac{v^2}{2} = 1,2 \cdot 29,4 \frac{20^2}{2} = 7080 \text{ Па.}$$

Глава XIV

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

§ 67. Общие сведения

Движение твердых тел в жидкости (обтекание жидкостью твердых тел) представляет одну из важнейших проблем гидромеханики. Основной задачей при этом является определение сил, которые возникают при относительном движении тела и жидкости. Тело, движущееся в жидкости, встречает со стороны последней сопротивление, для преодоления которого нужно приложить некоторую силу. Таким будет, например, сопротивление, которое встречает при своем движении самолет, автомобиль или поезд со стороны воздуха, корабль или подводная лодка со стороны воды. В случае когда тело неподвижно, а жидкость обтекает его, наоборот, тело оказывает сопротивление движению жидкости, на преодоление которого затрачивается часть энергии потока обтекающей жидкости. Примером этого является давление ветра на здание, обтекание мостового быка водой и т. п.

Рассмотрим вначале случай обтекания потоком жидкости пластинки, установленной перпендикулярно скорости потока (рис. XIV.1). Струйки жидкости, встречаясь с пластинкой, оказывают дополнительное давление, обусловливаемое изменением направления течения, на поверхность пластинки, обращенную навстречу потоку. Со стороны пластинки на жидкость действует сила сопротивления, равная по величине добавочной силе давления на пластинку.

Непосредственно за пластинкой в результате отрыва струи от пластинки образуется область беспорядочного вихревого движения. В этой области давление оказывается пониженным, в результате чего возникает дополнительная сила сопротивления, также направленная навстречу потоку; поскольку эта сила зависит от формы тела, ее называют *сопротивлением формы*.

Сумму обоих указанных сопротивлений называют *сопротивлением давления*.

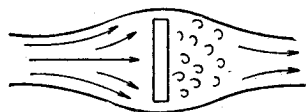


Рис. XIV.1. Обтекание потоком пластинки, перпендикулярной направлению потока

Если пластинка расположена вдоль потока, оказываемое ею сопротивление вызывается главным образом тангенциальными силами трения, возникающими на боковых поверхностях пластинки (так называемое *сопротивление трения*).

Сопротивления давления и трения существуют чаще всего одновременно, и полное сопротивление F , которое возникает при относительном движении тела и жидкости, представляет собой сумму этих сопротивлений; таким образом

$$F = F_{\text{давл}} + F_{\text{тр}}. \quad (\text{XIV.1})$$

Соотношение между компонентами полного сопротивления в различных случаях различно (пластинки, расположенные вдоль или поперек потока, являются предельными случаями).

Полное сопротивление F определяется из формулы, предложенной еще Ньютоном, в виде

$$F = C \omega \rho \frac{v^2}{2}, \quad (\text{XIV.2})$$

где C — коэффициент сопротивления, определяемый обычно из опытов;

ω — характерная площадь тела;

ρ — плотность жидкости;

v — характерная скорость.

Формулу (XIV.2) можно получить также с помощью анализа размерностей. Основными переменными будем считать скорость v , характерный размер тела l , плотность жидкости ρ , вязкость жидкости μ и силу сопротивления F . Таким образом, число переменных $n=5$. Согласно ПИ-теореме должны существовать $5-3=2$ безразмерных комплекса, которые будут иметь следующий вид:

$$\pi_1 = l^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} F;$$

$$\pi_2 = l^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \mu.$$

Значения показателей x , y и z выбираем таким образом, чтобы соблюсти условие безразмерности чисел π :

$$L^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z (MLT^{-2}) = L^0 M^0 T^0;$$

$$L^{x_2} (LT^{-1})^{y_2} (ML^{-3})^{z_2} (ML^{-1}T^{-1}) = L^0 M^0 T^0.$$

Отсюда имеем:
для π_1 :

$$x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0;$$

$$-y_1 - 2 = 0;$$

$$z_1 + 1 = 0.$$

т. е.

$$x_1 = -2; \quad z_1 = -1; \quad y_1 = -2$$

и

$$\pi_1 = \frac{F}{l^2 v^2 \rho};$$

для π_2 :

$$x_2 + y_2 - 3z_2 - 1 = 0;$$

$$-y_2 - 1 = 0;$$

$$z_2 + 1 = 0,$$

т. е.

$$x_2 = y_2 = z_2 = -1]$$

и

$$\pi_2 = \frac{\mu}{l \rho v} = \frac{\nu}{lv}.$$

Общее уравнение будет иметь вид

$$\Phi\left(\frac{F}{l^2 v^2 \rho}; \frac{\nu}{lv}\right) = 0.$$

Разрешая его относительно F , имеем

$$F = f\left(\frac{\nu}{lv}\right) l^2 v^2 \rho.$$

Заменяя $l^2 = \omega$ (характерная площадь), а также замечая, что $\frac{\nu}{lv} = \frac{1}{\text{Re}}$, и

обозначая $f\left(\frac{\nu}{lv}\right) = \frac{C}{2}$, получим вновь формулу (XIV.2).

§ 68. Сопротивление давления

Формулу для определения сопротивления давления обычно записывают в виде

$$F_{\text{давл}} = C_d \omega \rho \frac{v^2}{2}, \quad (\text{XIV.3})$$

где C_d — коэффициент сопротивления давления;
 ω — площадь миделевого сечения тела (проекция тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения).

Рассмотрим обтекание кругового цилиндра потоком невязкой жидкости (без трения). Картина течения (рис. XIV.2) является симметричной: на боковых поверхностях цилиндра течение ускоренное, а на лобовой и кормовой поверхностях — замедленное. В критических точках A и D скорость потока равна нулю,

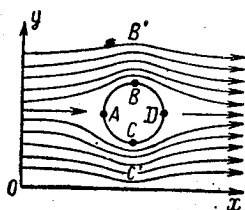


Рис. XIV.2. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью

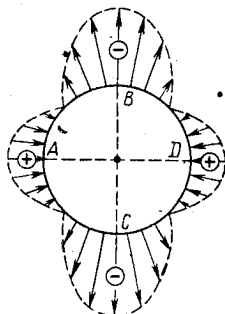


Рис. XIV.3. Распределение давлений при обтекании цилиндра невязкой жидкостью

а давление имеет максимальную величину, одинаковую для обеих точек.

Распределение давлений по поверхности цилиндра представлено на рис. XIV.3. Там, где давление жидкости больше, чем

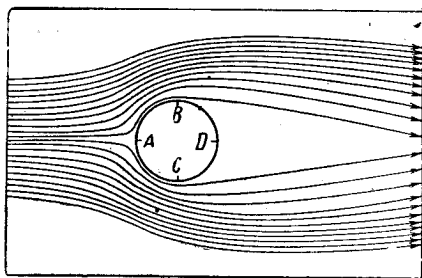


Рис. XIV.4. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью

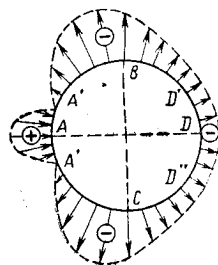


Рис. XIV.5. Распределение давлений при обтекании цилиндра вязкой жидкостью

давление в набегающем потоке, стрелки, изображающие силы давления, направлены к стенкам цилиндра, где оно меньше, — от стенок. Вследствие симметрии этих сил относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей AD и BC равнодействующая их равна нулю. Равномерный поток идеальной жидкости не оказывает силового воздействия на обтекаемый им ци-

линдр, т. е. сопротивление цилиндра равно нулю. Этот вывод, противоречащий реально наблюдаемым явлениям при обтекании, известен под названием парадокса Эйлера — Даламбера.

При обтекании цилиндра реальной (вязкой) жидкостью (рис. XIV.4) частицы, движущиеся в непосредственной близости к его поверхности, теряют часть кинетической энергии под действием сил трения; в результате эти частицы уже не могут далеко продвинуться в зону возрастающего давления на участке BD и останавливаются, не доходя до точки D , а затем под действием давления во внешней зоне потока начинают двигаться назад. По мере увеличения скорости зона возвратного течения возрастает и из нее развивается крупный вихрь, который в дальнейшем отрывается от обтекаемого тела и уплывает вниз по течению. На его месте возникает новый вихрь, который также отрывается, и т. д. Образование вихрей за обтекаемым телом приводит к резкому понижению давления в кормовой части цилиндра по сравнению с давлением в невозмущенном течении. Распределение давления по поверхности цилиндра, обтекаемого вязкой жидкостью, представлено на рис. XIV.5.

В лобовой (носовой) части цилиндра давление практически совпадает с тем, которое возникает при движении идеальной жидкости (см. рис. XIV.3). По мере приближения к кормовой части давление на поверхности цилиндра становится меньше, чем в соответствующих местах цилиндра, обтекаемого идеальной жидкостью.

Таким образом, силы перед цилиндром и за ним не компенсируют друг друга. Равнодействующая сил давления на обтекаемое тело, направленная в сторону течения жидкости, обуславливает собой сопротивление давления.

Аналогичная картина наблюдается и при обтекании жидкостью тел другой формы. При этом форма обтекаемого тела в значительной степени определяет характер распределения давлений, а следовательно, и величину сопротивления давления.

Для тела заданной формы распределение давления при обтекании его потоком зависит от числа Рейнольдса. Поскольку сопротивление давления непосредственно связано с характером обтекания, коэффициент C_d зависит как от формы тела, так и от числа Рейнольдса.

Теоретическое определение коэффициента C_d обычно затруднено и его значение часто находят экспериментально, испытывая тело (или его модель) в аэродинамической трубе. На рис. XIV.6 приведены экспериментальные данные о зависимости коэффициента сопротивления давления от числа Рейнольдса для цилиндра (кривая 1), круглого диска (кривая 2) и шара (кривая 3). Здесь число Рейнольдса $Re = u_\infty l / \nu$, где u_∞ — скорость набегающего потока, l — характерный линейный размер (например, для шара — его диаметр). С увеличением числа Рейнольдса значение коэффициента сопротивления давления

Значения коэффициента сопротивления давления C_d некоторых тел

Форма тела	C_d	Re
1. Плавно очерченные тела		
Шар	0,47	$1 \cdot 10^3 < Re <$ $< 3 \cdot 10^5$
	0,22	$> 3 \cdot 10^5$
Эллипсоид вращения с отношением осей 5:9, с большой осью, направленной перпендикулярно к потоку	0,6	$< 4,5 \cdot 10^5$
	0,2	$> 5,5 \cdot 10^5$
Круглый цилиндр (бесконечной длины)	1,2	$< 2 \cdot 10^5$
	0,3—	$> 5 \cdot 10^5$
	0,4	
Каплеобразный профиль с отношением длины к наибольшей толщине l/d :		
18	0,0196	10^5
3	0,04	—
2. Тела с острыми кромками		
Пластинка круглой формы	1,11	—
Прямоугольная пластинка с отношением сторон a/b :		
1	1,1	—
2	1,15	—
4	1,19	—
10	1,29	—
∞	2,01	—
Полное полушарие, обращенное впадиной навстречу течению	1,33	—
То же, обращенное впадиной по течению	0,34	—
Круглый цилиндр при обтекании в направлении его оси при l/d :		
0	1,12	—
1	0,91	—
2	0,85	—
4	0,87	—
7	0,99	—

уменьшается, принимая практически постоянную величину при больших числах Рейнольдса. Влияние числа Рейнольдса на коэффициент C_d при обтекании диска не обнаруживается.

В табл. XIV.1 приводятся значения коэффициентов сопротивления давления для некоторых тел; эти значения относятся главным образом к той области сопротивлений, в которой коэффициент сопротивления давления мало изменяется с изменением числа Рейнольдса.

Если надо получить возможно малые значения коэффициента C_d (в некоторых случаях, например, для раскрытого парашюта,

наоборот, желательно иметь высокий коэффициент сопротивления), телу придается обтекаемая форма, что способствует уменьшению размеров области отрывного течения.

Если тело несимметрично или его плоскость симметрии расположена наклонно по отношению к потоку (рис. XIV.7), резуль-

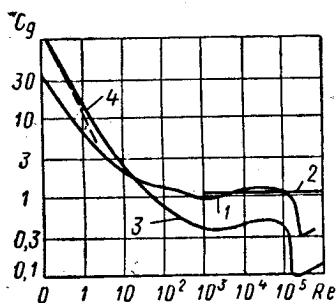


Рис. XIV.6. Зависимость коэффициента сопротивления давления от числа Рейнольдса

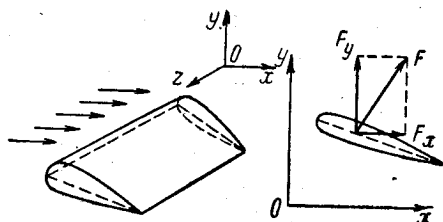


Рис. XIV.7. К понятию о подъемной силе

тирующая сила F , действующая на тело (в нашем случае — крыло самолета) со стороны потока, не совпадает с направлением потока. Тогда эту силу можно разложить на две составляющие: F_x , направленную вдоль потока, и F_y , перпендикулярную потоку. Составляющая F_x — это уже рассмотренное выше лобовое сопротивление. Составляющая F_y называется подъемной силой. При увеличении угла между профилем крыла и направлением потока (так называемый «угол атаки») на подсосывающей стороне крыла возможно образование отрыва потока, в результате которого сопротивление резко возрастает, а подъемная сила падает. Исследования обтекания тел нашли широкое применение при расчетах и конструировании лопаток колес турбокомпрессоров, вентиляторов, насосов, пропеллеров и винтов.

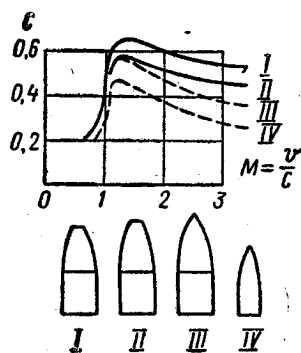


Рис. XIV.8. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха

Весьма важной является задача о движении тела в сжимаемой жидкости при скоростях, близких к скорости звука. В этом случае характер обтекания резко различается при движении с числом Маха $M > 1$ (сверхзвуковое движение) и $M < 1$ (дозвуковое движение). Сопротивление тел также сильно меняется с изменением числа Маха; это можно видеть из кривых на рис. XIV.8, характеризующих зависимость коэффициента сопротивления четырех снарядов различной формы от числа Маха. Как видно из этого рисунка, значения

коэффициента сопротивления резко возрастают по мере того, как число Маха приближается к единице.

При движении жидкости с малыми скоростями (малые числа Маха) для создания минимального сопротивления следует закруглять носовую часть тела и удлинять хвостовую, чтобы уменьшить образование вихрей за телом.

При больших числах Маха (0,7 и более) сопротивление резко возрастает из-за образования ударных волн; их влияние можно уменьшить, если заострить носовую часть тела. В частности, на рис. XIV.8 видно, что наименьший коэффициент сопротивления имеют снаряды с наиболее острыми очертаниями носовой части.

§ 69. Давление ветра на здания и сооружения

Давление ветра на сооружение, а также распределение этого давления по контуру сооружения необходимо учитывать при проектировании сооружений в районах, где действуют ветры значительной силы.

В большинстве случаев, однако, сооружения настолько мало обтекаемы, что коэффициент сопротивления их зависит только от формы и расположения и практически не зависит от числа Рейнольдса. При этом формы зданий и их расположение по отношению к переменному направлению ветра обычно так сложны и несимметричны, что аналитическое определение распределения давления становится невозможным. В этих случаях приходится переходить к продувке моделей сооружений в аэродинамической трубе или к буксировке их в гидравлическом бассейне.

Скорость ветра растет с удалением от поверхности земли по степенному закону

$$u/u_{\infty} = (y/H)^{1/7}, \quad (\text{XIV.4})$$

где u_{∞} — скорость ветра на достаточно большом расстоянии H от поверхности земли;

u — скорость ветра на расстоянии y от поверхности.

Поэтому особенно большим ветровым давлениям подвергаются высокие здания и сооружения. Для уменьшения давления ветра следует, по возможности, уменьшать площадь сечения сооружения в направлении, перпендикулярном направлению господствующих ветров, и придавать сооружениям возможно более обтекаемые очертания. Из-за ветрового воздействия на здание в зимние периоды возникает инфильтрация холодного воздуха в помещения, что приводит к увеличению теплопотерь.

Давление ветра (на единицу площади) на здания и сооружения обычно выражается через скоростной напор свободного ветрового потока в виде

$$p = k_b \frac{\rho u_{\infty}^2}{2}, \quad (\text{XIV.5})$$

где k_b — аэродинамический коэффициент; u_{∞} — скорость ветра на достаточном удалении от сооружения.

В случае повышенного избыточного давления ветра на поверхность сооружения аэродинамический коэффициент k_b принимает положительные значения, в случае разрежения — отрицательные.

Схематическое распределение аэродинамических коэффициентов по контуру здания представлено на рис. XIV.9. Величину аэродинамического коэффициента в масштабе откладывают в виде отрезков, перпендикулярных контуру здания в заданной точке. При этом значения k_x , отвечающие давлению больше атмосферного, откладывают внутри контура [+], а меньше атмосферного — снаружи [-]. Повышенные давления возникают на той стороне здания, на которую набегают ветровой поток. На наветренной стороне здания k_x равно от 0,5 до 0,8; на заветренной торцевой стороне — от -0,2 до -0,3.

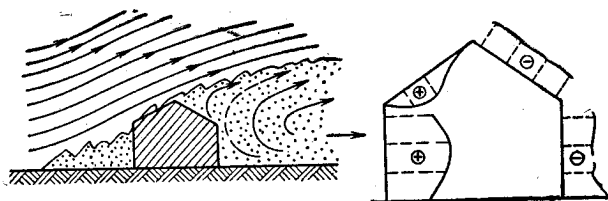


Рис. XIV.9. Распределение давлений при обтекании здания

§ 70. Сопротивление трения. Пограничный слой

При определении величины сопротивления трения формула (XIV.2) записывается в виде

$$F_{\text{тр}} = C_F \omega \frac{u_{\infty}^2}{2}, \quad (\text{XIV.6})$$

где ω — обтекаемая поверхность тела;
 C_F — коэффициент сопротивления трения.

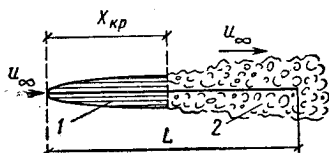


Рис. XIV.10. Продольное обтекание плоской пластинки

1 — ламинарный пограничный слой; 2 — турбулентный пограничный слой

Этот вид сопротивления можно наблюдать в чистом виде при обтекании пластинки, установленной вдоль течения (рис. XIV.10). При этом нет отрыва струи, но вдоль пластинки возникает так называемый пограничный слой жидкости, поперечные размеры которого увеличиваются вниз по течению. Вне этого слоя скорость потока такова, какой она была бы при отсутствии пластинки, т. е. влияние сил вязкости здесь пренебрежимо мало. Наоборот, в пределах пограничного слоя силы вязкости оказываются столь же существенными, как и силы инерции.

Пограничный слой, начинаясь у передней точки обтекаемого тела, распространяется по всей его поверхности; при этом он постепенно расширяется. Практически за толщину слоя принимают то расстояние от пластинки, где скорость отличается не более чем на 1% от скорости невозмущенного потока u_{∞} .

Пограничный слой может быть ламинарным или турбулентным. От состояния пограничного слоя в значительной мере зависит и величина сопротивления трения. Обычно в передней части пластинки пограничный слой имеет ламинарный характер; по мере увеличения толщины ламинарного слоя он теряет устойчивость и переходит в турбулентный пограничный слой. Состояние пограничного слоя (т. е. будет ли он ламинарным или турбулентным) зависит главным образом от числа Рейнольдса, характеризующего движение в этом слое и записываемого в виде

$$Re_x = \frac{u_\infty L}{\nu}, \quad (\text{XIV.7})$$

где L — длина пластинки.

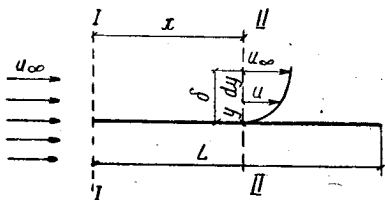


Рис. XIV.11. К расчету пограничного слоя на плоской пластинке

Для плоской пластинки ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный при

$$Re_{кр} = \frac{u_\infty x_{кр}}{\nu} = 485\,000, \quad (\text{XIV.8})$$

где $x_{кр}$ — длина от переднего ребра пластинки до конца ламинарной части пограничного слоя (см. рис. XIV.10). Если длина пластинки L меньше $x_{кр}$ ($L < x_{кр}$), то весь пограничный слой будет ламинарным; при $L > x_{кр}$ часть пограничного слоя будет ламинарной, а часть — турбулентной (так называемый смешанный пограничный слой).

Сопротивление пластинки в потоке при продольном ее обтекании. Рассмотрим пластинку длиной L , обтекаемую потоком жидкости (рис. XIV.11). Размер ее, перпендикулярный плоскости чертежа, примем равным единице.

Выделим два сечения потока: сечение I — перед пластинкой, там, где скорость равна скорости набегающего потока u_∞ , и сечение II — на расстоянии x от носа пластины. Применим теорему о количестве движения, в соответствии с которой разность количеств движения жидкости, протекающей в единицу времени через указанные сечения, должна равняться сумме всех сил, действующих на участок длиной x между сечениями I и II .

Обозначим через u скорость движения жидкости в произвольной точке пограничного слоя толщиной δ , удаленной от

стенки на расстояние y , и рассмотрим элементарную площадку $1 dy$ второго сечения потока. Масса жидкости, протекающей через эту площадку, равна $\rho u \cdot 1 dy$, где $u \cdot 1 dy$ — объем жидкости, проходящей через площадку в единицу времени. Каждая частица жидкости в рассматриваемом объеме имеет в сечении перед пластинкой скорость u_∞ . Таким образом, потеря скорости, вызванная тормозящим действием пластинки, равна $u_\infty - u$.

Уменьшение количества движения за счет сил трения будет равно:

$$(u_\infty - u) \rho u \cdot 1 dy = \rho 1 u (u_\infty - u) dy. \quad (\text{XIV.9})$$

Потеря количества движения коснется только тех частиц, которые находятся внутри пограничного слоя, так как для всей остальной массы жидкости $u = u_\infty$ и, следовательно, $u_\infty - u = 0$. Поэтому искомая разность количеств движения жидкости, протекающей в единицу времени через первое и второе сечения потока, выразится интегралом

$$2 \int_0^{\delta} \rho 1 u (u_\infty - u) dy, \quad (\text{XIV.10})$$

распространенным только в пределах пограничного слоя и притом по обе стороны пластинки (это учитывается множителем 2).

Сопrotивление трения той части пластинки, которая заключена между сечениями I и II,

$$F_{\text{тр}} = 2 \int_0^x \tau_0 \cdot 1 dx, \quad (\text{XIV.11})$$

где τ_0 — напряжение трения на произвольном элементе поверхности.

В соответствии с теоремой импульсов

$$2 \int_0^{\delta} \rho 1 u (u_\infty - u) dy = 2 \int_0^x \tau_0 \cdot 1 dx$$

или

$$\rho \int_0^{\delta} u (u_\infty - u) dy = \int_0^x \tau_0 dx. \quad (\text{XIV.12})$$

Дифференцируя обе части последнего выражения по x , получим

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (u_\infty - u) dy = \tau_0. \quad (\text{XIV.13})$$

Уравнение (XIV.13) представляет собой упрощенную форму так называемого *интегрального соотношения Кармана*, спра-

ведливого как при ламинарном, так и при турбулентном режиме.

При ламинарном обтекании пластинки приближенно примем линейный закон распределения скоростей

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{y}{\delta}. \quad (\text{XIV.14})$$

Согласно закону Ньютона, касательное напряжение на стенке

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}. \quad (\text{XIV.15})$$

Вычислим теперь значение интеграла, входящего в левую часть уравнения (XIV.13):

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} u(u_{\infty} - u) dy &= u_{\infty} \int_0^{\delta} u dy - \int_0^{\delta} u^2 dy = u_{\infty} \int_0^{\delta} u_{\infty} \frac{y}{\delta} dy - \\ &- \int_0^{\delta} \left(u_{\infty} \frac{y}{\delta} \right)^2 dy = \frac{1}{6} u_{\infty}^2 \delta. \end{aligned} \quad (\text{XIV.16})$$

Подставив (XIV.16) в (XIV.13), найдем

$$\frac{\rho}{6} u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \tau_0, \quad (\text{XIV.17})$$

или с учетом (XIV.15)

$$\frac{\rho}{6} u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}. \quad (\text{XIV.18})$$

Разделив обе части последнего равенства на $1/6 \rho u_{\infty}^2$ и умножив на dx , получим

$$\delta d\delta = \frac{6\mu}{\rho u_{\infty}} dx, \quad (\text{XIV.19})$$

откуда после интегрирования найдем

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho u_{\infty}} x + C.$$

При $x=0$, $\delta=0$, т. е. $C=0$, и, следовательно,

$$\frac{\delta^2}{2} = 6 \frac{\mu x}{\rho u_{\infty}}$$

или

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}. \quad (\text{XIV.20})$$

Из последнего равенства нетрудно найти и выражение для напряжения трения на любом элементе поверхности пластинки:

$$\tau_0 = \mu \frac{u_\infty}{\delta} = \mu \frac{u_\infty}{3,46} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 0,289 \sqrt{\frac{u_\infty^3 \rho \mu}{x}}. \quad (\text{XIV.21})$$

Полное сопротивление трения пластинки длиной L

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= 2 \int_0^L \tau_0 dx = 2 \int_0^L 0,289 \sqrt{\frac{u_\infty^3 \rho \mu}{x}} dx = \\ &= 0,58 \sqrt{u_\infty^3 \rho \mu} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1,16 \sqrt{u_\infty^3 \rho L \mu}. \end{aligned} \quad (\text{XIV.22})$$

Коэффициент трения

$$C_F = \frac{F_{\text{тр}}}{\frac{\rho u_\infty^2}{2} \omega} = 1,16 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty L}}. \quad (\text{XIV.23})$$

Формулу (XIV.23) можно переписать в виде

$$C_F = 1,16 / \sqrt{\text{Re}}, \quad (\text{XIV.24})$$

где

$$\text{Re} = u_\infty L / \nu.$$

Проведенный Блазиусом более точный расчет приводит к результату

$$C_F = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (\text{XIV.25})$$

Для определения касательного напряжения трения на пластинке и закона распределения скоростей внутри пограничного слоя в случае турбулентного обтекания можно использовать данные, полученные при исследовании турбулентного движения жидкости в трубах [4].

Касательное напряжение на стенке трубы τ_0 связано с коэффициентом гидравлического трения λ зависимостью

$$\tau_0 = \rho v^2 \lambda / 8,$$

где v — средняя скорость потока в трубе. Используя для λ обобщенную формулу (XII.48), имеем

$$\tau_0 = 0,0275 \left(\frac{k_s}{d} + \frac{68\nu}{vd} \right)^{0,25} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Этим уравнением можно воспользоваться для оценки сопротивления трения, происходящего у поверхности пластины. Для этого переходим от средней скорости потока в трубе v к скорости на оси трубы $u_{\text{макс}}$ ($v \approx 0,816 u_{\text{макс}}$). Далее считаем, что скорость потока, обтекающего пластину, $u_{\infty} = u_{\text{макс}}$, а толщина пограничного слоя δ равна радиусу трубы, т. е. $\delta = r$. После преобразований получим:

$$\tau_0 = 0,015 \left(\frac{k_3}{\delta} + \frac{83v}{u_{\infty}\delta} \right)^{0,25} \frac{\rho u_{\infty}^2}{2}. \quad (\text{XIV.26})$$

Примем далее по аналогии с движением жидкости в трубах распределение скоростей в пограничном слое в виде закона одной седьмой

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (\text{XIV.27})$$

и вычислим интеграл, входящий в левую часть уравнения (XIV.13):

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} u(u_{\infty} - u) dy &= u_{\infty} \int_0^{\delta} u dy - \int_0^{\delta} u^2 dy = \\ &= u_{\infty} \int_0^{\delta} u_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} dy - \int_0^{\delta} u_{\infty}^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2/7} dy = \frac{7}{72} u_{\infty}^2 \delta. \end{aligned} \quad (\text{XIV.28})$$

Подставляя (XIV.28) в (XIV.13), получаем

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (\text{XIV.29})$$

Сравнивая (XIV.29) с (XIV.26), после преобразований имеем

$$\delta^{0,25} d\delta = 0,077 \left(k_3 + \frac{83v}{u_{\infty}} \right)^{1/4} dx. \quad (\text{XIV.30})$$

После интегрирования получаем

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0,077 \left(k_3 + \frac{83v}{u_{\infty}} \right)^{1/4} x + C.$$

При $x=0$ $\delta=0$ и $C=0$, откуда

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0,077 \left(k_3 + \frac{83v}{u_{\infty}} \right)^{1/4} x$$

и

$$\delta = 0,153 \left(k_3 + \frac{83v}{u_{\infty}} \right)^{1/5} x^{4/5}. \quad (\text{XIV.31})$$

Подставляя (XIV.31) в (XIV.26), находим выражение для касательного напряжения на любом элементе поверхности пластинки

$$\tau_0 = 0,024 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \left(\frac{83\nu}{u_\infty x} + \frac{k_3}{x} \right)^{1/5} \quad (\text{XIV.32})$$

Сопротивление трения пластинки при одностороннем обтекании

$$F_{\text{тр}} = \int_0^L \tau_0 dx = 0,03 \left(\frac{k_3}{L} + \frac{83\nu}{u_\infty L} \right)^{1/5} \frac{\rho u_\infty^2}{2} L.$$

Находим формулу для определения коэффициента трения

$$C_F = \frac{F_{\text{тр}}}{L \frac{\rho u_\infty^2}{2}} = 0,03 \left(\frac{k_3}{L} + \frac{83\nu}{u_\infty L} \right)^{1/5}, \quad (\text{XIV.33})$$

или, обозначая $\frac{u_\infty L}{\nu} = \text{Re}$, получим

$$C_F = 0,03 \left(\frac{k_3}{L} + \frac{83}{\text{Re}} \right)^{1/5}. \quad (\text{XIV.34})$$

Это так называемая обобщенная формула А. Д. Альтшуля для коэффициента трения пластинки, действительная во всей области турбулентного течения.

В случае когда

$$\frac{k_3}{L} \ll \frac{83}{\text{Re}} \text{ или } \text{Re} \frac{k_3}{L} = \frac{\nu k_3}{\nu} \ll 83, \quad (\text{XIV.35})$$

что характерно для обтекания моделей (малая шероховатость поверхности, малые скорости), уравнение (XIV.34) принимает вид

$$C_F = 0,072 \text{Re}^{-0,2}. \quad (\text{XIV.36})$$

Эта формула была ранее получена Карманом для гидравлически гладких пластин.

В случае когда

$$\frac{k_3}{L} \gg \frac{83}{\text{Re}} \text{ или } \text{Re} \frac{k_3}{L} = \frac{\nu k_3}{\nu} \gg 83, \quad (\text{XIV.37})$$

что характерно для больших скоростей и значительных шероховатостей, уравнение принимает вид

$$C_F = 0,03 \left(\frac{k_3}{L} \right)^{0,2}. \quad (\text{XIV.38})$$

Формула (XIV.38) служит для определения коэффициента трения вполне шероховатых пластин.

Более строгая логарифмическая зависимость для определения коэффициента трения, полученная исходя из формулы (XII.47), имеет вид [4].

$$C_F = 0,455 \left\{ \lg \left[\left(\frac{k_s}{7,5L} \right)^{1,1} + \frac{1}{Re} \right] \right\}^{-2,58}. \quad (\text{XIV.39})$$

При соблюдении условия (XIV.35) последняя зависимость упрощается к виду

$$C_F = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}}. \quad (\text{XIV.40})$$

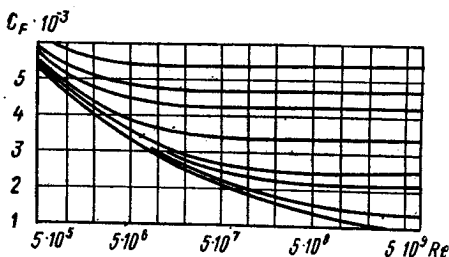


Рис. XIV.12. Зависимость коэффициента сопротивления трения при обтекании плоской пластинки турбулентным пограничным слоем от числа Рейнольдса и относительной шероховатости [4]

При соблюдении условия (XIV.37) зависимость (XIV.39) сводится к формуле

$$C_F = \frac{0,357}{\left(\lg 24,7 \frac{L}{k_s} \right)^{2,58}}, \quad (\text{XIV.41})$$

практически совпадающей с известной формулой Шлихтинга

$$C_F = \left(1,89 + 1,62 \lg \frac{L}{k_s} \right)^{-2}$$

для вполне шероховатых пластинок.

Зависимость коэффициента сопротивления трения C_F при турбулентном пограничном слое от числа Re , найденная по формуле (XIV.34) при разных значениях относительной шероховатости, изображена на рис. XIV.12.

Определим для примера давление ветра, которое испытывает 1 м^2 лобовой площади дымовой трубы. Коэффициент сопротивления трубы, найденный опытным путем на модели, $C_d = 0,67$. Скорость ветра $v = 50 \text{ м/с}$.

Подставляя указанные выше значения в формулу

$$F_d = C_d \omega p \frac{v^2}{2},$$

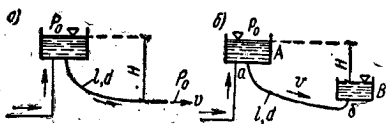
имеем

$$F_d = 0,67 \cdot 1 \frac{1,2 \cdot 50^2}{2} \approx 1050 \text{ Н}.$$

§ 71. Расчет простых трубопроводов для несжимаемых жидкостей (общие сведения)

По способам гидравлического расчета трубопроводы делят на две основные группы: простые и сложные. Простым называют трубопровод, состоящий из одной линии труб, хотя бы и различного диаметра, но с одним и тем же расходом по пути; всякие другие трубопроводы называют сложными.

Рис. XV.1. Схема простого трубопровода



Рассмотрим простой трубопровод одинакового по всей длине диаметра. Его гидравлический расчет сводится к решению трех основных задач.

В первой для заданных расположения трубопровода, длины и диаметра труб требуется определить перепад напора H , необходимый для пропуска заданного расхода Q .

Во второй при тех же прочих условиях требуется определить расход Q , если задан перепад напора H .

В третьей ставится задача об определении диаметра d , если все остальные параметры трубопровода известны.

Рассмотрим решение этих задач.

Пусть трубопровод состоит из труб одного и того же диаметра; при этом могут иметь место два случая: истечение жидкости в атмосферу и истечение под уровень (рис. XV.1, а и б).

Напишем уравнение Бернулли для обоих случаев.

При истечении в атмосферу уравнение Бернулли, записываемое для сечений на поверхности воды в резервуаре и на выходе из трубы, имеет вид

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Пренебрегая здесь величиной $\frac{v_0^2}{2g}$ (по малости в сравнении с другими членами уравнения) и обозначая $z_0 - z = H$, можно привести это уравнение к виду

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right). \quad (\text{XV.1})$$

При истечении под уровень получим аналогично

$$z_A + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - v_B)^2}{2g}.$$

В этом уравнении в отличие от предыдущего местные сопротивления оценены двумя слагаемыми $\Sigma \zeta \frac{v^2}{2g}$ и $\frac{(v - v_B)^2}{2g}$; первое слагаемое так же, как и в предыдущем случае, учитывает потери напора на протяжении трубопровода, начиная от выхода из резервуара *A* в трубу (точка *a*) и до конца трубы (точка *b*), за исключением потерь напора при входе в резервуар *B*. Последние потери оценены вторым слагаемым.

По аналогии с первым случаем, пренебрегая величиной v_A и v_B , можно привести и это уравнение к виду

$$z_A - z_B = H = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta + 1 \right). \quad (\text{XV.1a})$$

Сравнивая формулы (XV.1) и (XV.1a), видим, что они тождественны между собой по написанию, поэтому гидравлические расчеты для обеих схем трубопровода будут одинаковыми. Различие между формулами состоит только в том, что при истечении под уровень единица, стоящая в скобках в правой части, представляет собой коэффициент сопротивления «на выходе» потока под уровень, в то время как при истечении в атмосферу она учитывает кинетическую энергию, оставшуюся в потоке при выходе из трубопровода, которая может быть так или иначе использована.

Таким образом, напор *H* при истечении под уровень равен сумме всех сопротивлений:

$$H = \Sigma h_w;$$

при истечении же в атмосферу он делится на две части: кинетическую энергию, уносимую потоком из трубы, и сумму потерь напора

$$H = \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_w.$$

Перейдем к решению трех основных задач, названных выше.

В первой из них требуется определить напор в начальном сечении трубопровода при известных длине трубопровода *l*, диаметре *d* и расходе *Q*. Он определяется путем прямого использования формулы (XV.1) с предварительным вычислением скорости

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Тогда искомый напор

$$H = \frac{16Q^2}{2g \pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \xi \right). \quad (\text{XV.2})$$

Значение коэффициентов λ и ξ определяют, следуя указаниям гл. XII и XIII, причем определение этих коэффициентов

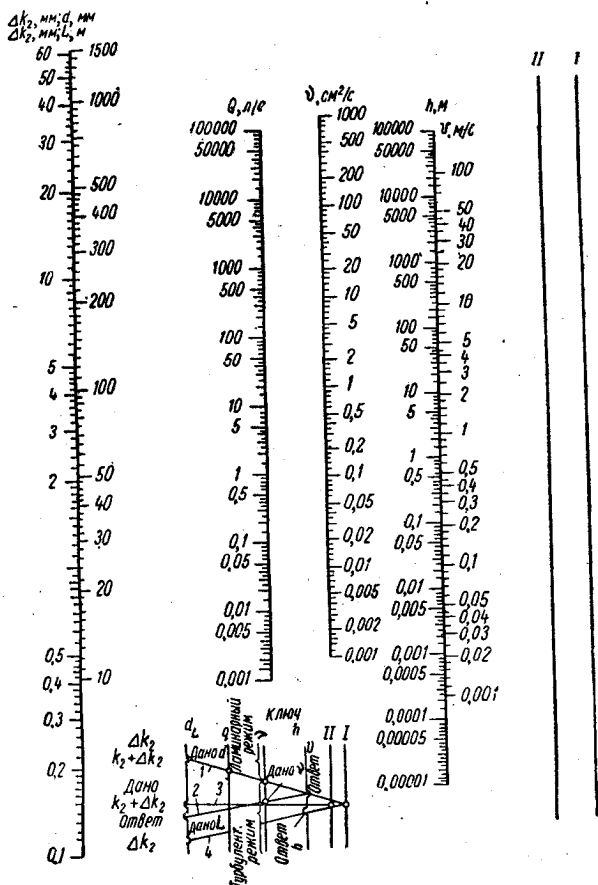


Рис. XV.2. Номограмма для гидравлического расчета трубопроводов [4]

в данной задаче не вызывает затруднений, так как число Рейнольдса заранее известно. Для так называемых «длинных трубопроводов», когда потери напора на трение во много раз превосходят потери на местные сопротивления ($\Sigma \xi \ll \lambda/d$), последними можно пренебречь.

В этом случае для упрощения гидравлических расчетов можно пользоваться номограммой для определения потерь напора на трение в трубопроводах, составленной Г. С. Хованским (рис. XV.2).

Номограмма построена по формуле

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_2}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,1 \left(\frac{k_2}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

при этом $k_2 = 1,46 k_3$.

Режим движения, скорость и потери напора определяем следующим образом.

1. На шкалах номограммы d и Q находим точки с заданными значениями d и Q и отмечаем точку пересечения края линейки с прямой I . Ответ читаем в точке пересечения края линейки со шкалой v .

Край линейки пересекает шкалу v на две части. Нижняя часть соответствует турбулентному режиму, верхняя — ламинарному. Отметка шкалы v в точке пересечения ее с краем линейки определит значение $v_{\text{кр}}$. Следовательно, дальнейшее решение задачи по номограмме возможно лишь в том случае, когда заданное значение v меньше $v_{\text{кр}}$. Предположим, что $v < v_{\text{кр}}$, т. е. режим турбулентный.

2. Прикладываем край линейки к точке шкалы v с найденным значением v и к точке шкалы v с данным значением v . Ответ Δk читаем в точке пересечения края линейки со шкалой Δk .

3. Вычисляем величину

$$k_2 + \Delta k = 1,46 k_3 + \Delta k.$$

4. Прикладываем край линейки к отмеченной ранее точке на прямой I и к точке на шкале $k_2 + \Delta k$ с вычисленным значением $k_2 + \Delta k$ и отмечаем точку пересечения края линейки с прямой II .

5. Прикладываем край линейки к отмеченной точке на прямой II и к точке на шкале L (где L — длина расчетного участка трубопровода) с данной отметкой L . Ответ h читаем в точке пересечения шкалы с краем линейки.

Вторая задача — об определении пропускной способности трубопровода, т. е. расхода Q при условии, что известны напор H , длина трубы l и диаметр трубопровода d , решается с помощью формулы (XV.2), согласно которой

$$Q = \frac{\pi d^3}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta}}. \quad (\text{XV.3})$$

Однако прямое вычисление здесь затруднено, так как коэффициенты λ и ζ являются функциями числа Рейнольдса, а оно в условиях данной задачи оказывается неизвестным (Re связано с неизвестным и искомым здесь расходом Q).

Решение находим методом попыток, полагая в первом приближении квадратичный закон сопротивления, при котором коэффициенты λ и ζ не зависят от числа Re .

Решение третьей задачи — определение диаметра трубопровода при заданных расходе Q , длине трубопровода l и напоре H — производится с помощью формулы (XV.3).

Здесь также встречаемся с затруднениями в вычислениях (и даже значительными), так как в этом случае не только число Re неизвестно, но по отношению к искомому диаметру d уравнение оказывается уравнением высших степеней, не приводимым к логарифмическому виду или даже (например, при ис-

пользовании для определения λ формулы Колбрука) трансцендентным.

В связи с этим решаем задачу методом попыток, полагая в первом приближении, как и ранее, квадратичный закон сопротивления.

При квадратичном законе сопротивления коэффициент λ является функцией диаметра (шероховатость стенок трубы предполагается известной).

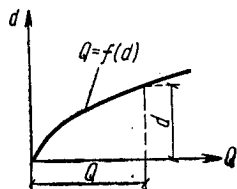


Рис. XV.3. К расчету диаметра трубопровода при заданном расходе

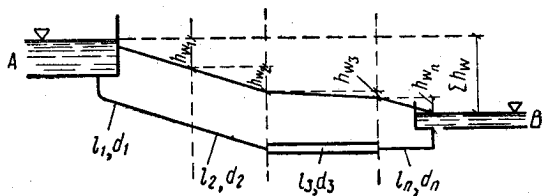


Рис. XV.4. Последовательное соединение трубопроводов

Имея это в виду, уравнение (XV.3) можно привести к виду

$$Q = \frac{\pi d^3}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta}} =$$

$$= \frac{\pi d^3}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + f_1(d) \frac{l}{d} + \Sigma \zeta}} = F(d). \quad (\text{XV.4})$$

Наиболее просто эта задача решается графическим способом, заключающимся в следующем: задаваясь рядом значений диаметра d_1, d_2, \dots, d_n и вычисляя по (XV.4) соответственно ряд значений расхода Q_1, Q_2, \dots, Q_n , строим график $Q=f(d)$ (рис. XV.3), из которого определяем диаметр, отвечающий заданному расходу.

Рассмотрим далее простой трубопровод, составленный из труб разного диаметра (рис. XV.4), уложенных в одну линию одна вслед за другой (последовательное соединение труб). Уравнение Бернулли для этого случая можно написать в виде

$$z_A - z_B = H = h_{w_1} + h_{w_2} + \dots + h_{w_n},$$

где $h_{w_1}, h_{w_2}, \dots, h_{w_n}$ — потери напора на первом, втором и т. д. участках трубопровода.

Потери напора на первом участке с диаметром трубы d_1 равняются:

$$h_{w_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v_1^2}{2g} = \lambda_1 \frac{16l_1 Q^2}{2g\pi^2 d_1^5} + \Sigma \zeta \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d_1^4} = \\ = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \frac{\Sigma \zeta}{d_1^4} \right) = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_1^4} \left[\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \Sigma \zeta \right].$$

Аналогично для последующих участков:

$$h_{w_2} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_2^4} \left[\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \Sigma \zeta \right];$$

$$h_{w_n} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_n^4} \left[\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \Sigma \zeta + 1 \right].$$

В последнем равенстве в скобках добавлено третье слагаемое — единица, учитывающая потери напора на выход (как об этом было сказано выше).

Таким образом, расчетным уравнением будет

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left\{ \frac{1}{d_1^4} \left[\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \Sigma \zeta \right] + \frac{1}{d_2^4} \left[\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \Sigma \zeta \right] + \dots + \frac{1}{d_n^4} \left[\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \Sigma \zeta + 1 \right] \right\}. \quad (\text{XV.5})$$

Уравнение (XV.5) показывает, что решение первой и второй задач будет таким же, как для трубопровода постоянного диаметра.

Третья же задача, если в ней потребовать определения всех диаметров для всех участков, становится неопределенной, так как в этом случае уравнение (XV.5) содержало бы n неизвестных. Очевидно, что для определенности решения надо задавать диаметры труб для всех участков, кроме одного.

§ 72. Расчет простых трубопроводов в квадратичной области сопротивления

В случае квадратичного закона сопротивления, т. е. когда коэффициент гидравлического трения не зависит от числа Re , а определяется только относительной шероховатостью стенок трубопровода, расчеты существенно упрощаются. Во многих случаях (для длинных трубопроводов) можно пренебрегать также местными сопротивлениями и скоростным напором на выходе.

В этих условиях уравнения (XV.1) и (XV.1a) получают вид

$$H = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XV.6})$$

а уравнения (XV.2) и (XV.3)

$$H = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5} Q^2 l$$

и

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gHd}{\lambda l}}$$

или

$$H = A_{\text{КВ}} Q^2 l,$$

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A_{\text{КВ}} l}} \quad (\text{XV.7})$$

где введено обозначение

$$A_{\text{КВ}} = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5}.$$

Уравнение же (XV.5) получает вид

$$H = Q^2 \left\{ \frac{16\lambda_1}{2g\pi^2 d_1^5} l_1 + \frac{16\lambda_2}{2g\pi^2 d_2^5} l_2 + \dots + \frac{16\lambda_n}{2g\pi^2 d_n^5} \right\} = Q^2 \{ A_{1\text{КВ}} l_1 + A_{2\text{КВ}} l_2 + \dots + A_{n\text{КВ}} l_n \} \quad (\text{XV.8})$$

Таблица XV.1

Значения удельного сопротивления
 $A_{\text{КВ}} = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$ при $\lambda = 0,11 (k_a/d)^{0,25}$ (где $k_a = 0,1$ мм)

$d, \text{ м}$	$\omega = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ м}^2$	ω^3	λ	$A_{\text{КВ}} = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$
0,1	0,00785	0,0000615	0,0192	158,6
0,15	0,0177	0,000314	0,0177	19,15
0,2	0,0314	0,00099	0,0164	4,21
0,25	0,0491	0,00241	0,0155	1,32
0,3	0,0707	0,005	0,0148	0,504
0,4	0,1257	0,0158	0,0138	0,111
0,5	0,196	0,0384	0,013	0,0346
0,6	0,283	0,08	0,0124	0,0131
0,7	0,385	0,148	0,012	0,00591
0,8	0,503	0,244	0,0116	0,00303
0,9	0,636	0,405	0,0113	0,00158
1	0,785	0,615	0,011	0,00091

ИЛИ

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A_{1кв} l_1 + A_{2кв} l_2 + \dots + A_n кв l_n}} \quad (XV.9)$$

Для данной шероховатости стенок трубы коэффициент $A_{кв}$, называемый удельным сопротивлением, является функцией диаметра, а потому может быть заранее вычислен для каждого диаметра d , входящего в установленный стандарт. Результативно можно составить таблицу значений удельного сопротивления $A_{кв}$ для всех стандартных значений диаметра труб, что существенным образом облегчит расчет для всех рассмотренных случаев простого трубопровода. Для примера приводим табл. XV.1, составленную для абсолютной шероховатости 0,1 мм.

Кроме удельного сопротивления $A_{кв}$ в практике расчетов трубопроводов широко применяются другие обобщенные гидравлические параметры: модуль расхода $K_{кв} = 1/\sqrt{A_{кв}}$, сопротивление $S_{кв} = A_{кв} l$ и проводимость $\rho_{кв} = 1/\sqrt{S_{кв}} = 1/\sqrt{A_{кв} l}$. Для определения этих параметров также составлены таблицы, что позволяет сократить и ускорить вычислительную работу при гидравлических расчетах трубопроводов. Значения $K_{кв}$ при $k_a = 0,2$ мм приведены ниже.

d , мм	40	50	75	100	125	150	175	200	225	250	300
$K_{кв}$, л/с . . .	6,16	11,1	32	68,5	128	204	303	421	581	780	1235

d , мм	350	400	450	500	600	700	800	900	1000	1200
$K_{кв}$, л/с . . .	1890	2630	3580	4720	7550	1135	1620	2230	2920	4700

Продолжение

§ 73. Расчет трубопроводов в неквадратичной области сопротивления

Во многих случаях движения жидкостей в трубопроводах санитарно-технических систем квадратичный закон сопротивления не соблюдается. Так, более 80% всех городских газопроводов низкого и среднего давления работают в неквадратичной области сопротивления.

Решение первой из рассмотренных выше задач расчета трубопроводов при известном расходе и диаметре трубопровода (т. е. при известном числе Re) не вызывает затруднений. Решения двух остальных задач могут быть получены методами последовательного приближения. Для облегчения расчетов трубопроводов целесообразно ввести поправочный коэффициент ϕ на неквадратичность. Рассмотрим для простоты только длинные трубопроводы. Считая, что местные потери напора в неквадратичной области сопротивления не меняются, можно обобщить предлагаемую методику и на короткие трубопроводы.

Для длинного трубопровода общие потери равны потерям напора по длине и, согласно выражению (XV.6), имеют вид

$$H = 8\lambda \frac{Q^2}{g\pi^2 d^5} l = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{КВ}}} \cdot \frac{8\lambda_{\text{КВ}}}{g\pi^2 d^5} Q^2 l = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{КВ}}} A_{\text{КВ}} l Q^2. \quad (\text{XV.10})$$

В выражении (XV.10) λ — действительный коэффициент гидравлического трения рассматриваемого трубопровода, $\lambda_{\text{КВ}}$ — коэффициент гидравлического трения того же трубопровода в квадратичной области сопротивления, $A_{\text{КВ}}$ — удельное сопротивление трубопровода в квадратичной области сопротивления (см. табл. XV.1).

Обозначив $\lambda/\lambda_{\text{КВ}} = \varphi$, получаем общее соотношение для расчета трубопроводов

$$H = \varphi A_{\text{КВ}} Q^2 l = \varphi S_{\text{КВ}} Q^2. \quad (\text{XV.11})$$

Для определения поправочного коэффициента на неквадратичность φ напомним соотношения для коэффициентов λ и $\lambda_{\text{КВ}}$:

$$\lambda_{\text{КВ}} = 0,11 \left(\frac{k_{\text{Э}}}{d} \right)^{0,25};$$

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_{\text{Э}}}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

используя которые, найдем

$$\varphi = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{КВ}}} = \left(1 + \frac{68v}{vk_{\text{Э}}} \right)^{0,25}. \quad (\text{XV.12})$$

Значения коэффициента φ , вычисленные при движении воды в трубах с разной абсолютной шероховатостью $k_{\text{Э}}$, приведены в табл. XV.2 и при движении воздуха — в табл. XV.3. Приведенные в таблицах данные вычислены по формуле (XV.12).

Таблица XV.2

Значения поправок $\varphi = \lambda/\lambda_{\text{КВ}}$ на неквадратичность при движении воды ($v = 0,01 \text{ Ст}$)

$k_{\text{Э}}, \text{ мм}$	φ при скорости потока $v, \text{ м/с}$											
	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	3	4	5
0,1	2,88	1,67	1,45	1,35	1,28	1,24	1,14	1,1	1,08	1,05	1,04	1,03
1	1,67	1,14	1,08	1,05	1,04	1,03	1,015	1,01	1	1	1	1

Таблица XV.3

Значение поправок $\varphi = \lambda/\lambda_{\text{КВ}}$ на неквадратичность при движении воздуха ($v = 14,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$)

$k_{\text{Э}}, \text{ мм}$	φ при скорости потока $v, \text{ м/с}$							
	0,01	0,1	0,5	1	2	3	4	5
0,1	5,6	3,16	2,14	1,82	1,56	1,44	1,37	1,31

$k_3, \text{ мм}$	φ при скорости потока $v, \text{ м/с}$								
	6	7	8	9	10	15	20	50	100
0,1	1,28	1,25	1,22	1,21	1,19	1,14	1,1	1,05	1,02

Рассмотрим методику решения типовых задач при расчете трубопроводов с использованием поправочного коэффициента φ . Пусть требуется определить пропускную способность трубопровода Q , если заданы напор H , длина трубы l и диаметр трубопровода d (вторая задача расчета).

1. По таблице (XV.1) находим значение удельного сопротивления $A_{\text{кв}}$ при заданных d и k_3 .

2. Находим пропускную способность трубопровода при квадратичном законе сопротивления:

$$Q_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{H}{A_{\text{кв}} l}}.$$

3. По табл. XV.2 и XV.3 или по соотношению (XV.12) определяем значение φ при скорости движения жидкости

$$v = \frac{4Q_{\text{кв}}}{\pi d^2}.$$

4. Вычисляем значение искомого расхода:

$$Q = Q_{\text{кв}} \sqrt{\varphi}.$$

Если требуется определить диаметр трубопровода при заданных Q , H и l (задача третья), то решение находим следующим образом.

1. Вычисляем значение удельного сопротивления по формуле

$$A_{\text{кв}} = \frac{H}{Q^2 l}.$$

2. По табл. XV.1 находим для вычисленного значения $A_{\text{кв}}$ соответствующий диаметр, пользуясь при этом линейной интерполяцией.

3. Определяем скорость, соответствующую квадратичному сопротивлению

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

4. По табл. XV.2, XV.3 или по выражению (XV.12), пользуясь известной скоростью v , определяем коэффициент φ , после чего вычисляем значение $A_{\text{кв}}$ по формуле

$$A_{\text{кв}} = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{H}{lQ^2}.$$

5. По табл. XV.1 находим диаметр d , отвечающий полученному значению $A_{\text{кв}}$.

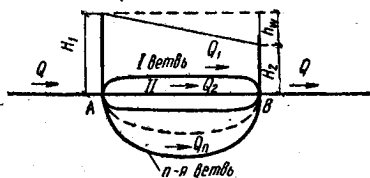
§ 74. Расчет сложных трубопроводов

Сложными трубопроводами называют разомкнутые или замкнутые сети, часто с уравнительными резервуарами. Гидравлический расчет таких сетей с учетом меняющегося во времени рас-

хода в соответствии с производственными требованиями эксплуатации той или иной системы представляет очень сложную задачу. Такие расчеты рассматриваются в специальных курсах (водоснабжение, отопление и др.).

Из множества возможных схем сложных трубопроводов рассмотрим основные: параллельное соединение, трубопроводы с непрерывной раздачей расхода по пути, кольцевой трубопровод и простую разветвленную сеть (именуемую иногда тупиковой); эти схемы можно рассматривать в качестве элементов более слож-

Рис. XV.5. Параллельное соединение трубопроводов



ных сетей. Рассмотрим эти задачи в условиях, когда удельное сопротивление трубопровода A_{KB} являются функцией только диаметра трубы, т. е. в области квадратичного сопротивления.

Параллельное соединение (рис. XV.5) — это случай, когда трубопровод в некоторой точке (например, A) разветвляется на несколько труб, которые затем вновь объединяются в точке B ; расход Q основного трубопровода до деления и после объединения труб, очевидно, один и тот же.

Основной задачей при расчете трубопровода с параллельным соединением является определение расходов Q_1, Q_2, \dots, Q_n параллельных труб и в определении перепада напора между точками A и B , если известны общий расход Q , диаметры и длины параллельных труб (d_1, d_2, \dots, d_n и l_1, l_2, \dots, l_n).

Поскольку величина потеряннного напора для каждой параллельной ветви одна и та же, равная $h_w = H_1 - H_2$, то для первой ветви можно написать

$$h_w = \lambda_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} + \sum \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = Q_1^2 \left[\lambda_1 \frac{l_1}{d_1 2g \omega_1^2} + \sum \zeta_1 \frac{1}{2g \omega_1^2} \right]$$

или, обозначая

$$\left[\lambda_1 \frac{l_1}{d_1 2g \omega_1^2} + \sum \zeta_1 \frac{1}{2g \omega_1^2} \right] = B_1.$$

$$h_w = B_1 Q_1^2.$$

Аналогично для других ветвей:

$$\left. \begin{aligned} h_w &= B_2 Q_2^2; \\ h_w &= B_3 Q_3^2; \\ &\dots \dots \dots \\ h_w &= B_n Q_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (XV.13)$$

Так получаются n уравнений (по числу веток трубопровода). Но в этих уравнениях число неизвестных равняется $(n+1)$: это суть искомые расходы и потерянный напор h_w . Следовательно, система (XV.13) должна быть дополнена еще одним уравнением. Таким недостающим уравнением будет

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n. \quad (\text{XV.14})$$

Решение проводим в следующем порядке. Из системы (XV.13) определяем все расходы выраженными через один из них (например, через расход Q_1), т. е.:

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}};$$

$$Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_3}};$$

.....

$$Q_n = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_n}}.$$

Делая подстановку в уравнение (XV.14), имеем

$$Q = Q_1 + Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + \dots + Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_n}},$$

откуда расход первой ветви

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^n \sqrt{\frac{B_1}{B_i}}}.$$

После этого можно определить последовательно

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}, \quad Q_3, \dots, Q_n.$$

Потерянный напор h_w найдем по одному из уравнений системы (XV.13); например,

$$h_w = Q_1^2 B_1.$$

Приведенное решение предполагает квадратичный закон сопротивлений.

Для проверки этого предположения определяем число Re для каждой ветви в отдельности (по найденным расходам Q_1, Q_2, \dots). Для первой ветви получаем

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{Q_1 d_1^4}{\pi d_1^2 \nu} = \frac{4Q_1}{\pi d_1 \nu};$$

для второй

$$Re_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2 v} \text{ и т. д.}$$

По найденным числам Re можно уточнить все коэффициенты гидравлического трения λ и коэффициенты местных сопротивлений ζ и затем уточнить значения коэффициентов B_1, B_2, \dots, B_n . Повторяя расчет аналогично указанному выше, но при уточненных коэффициентах B'_1, B'_2, \dots, B'_n , найдем уточненные расходы

$$Q'_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^{i=n} \sqrt{\frac{B'_1(Re_1)}{B'_i(Re_i)}}},$$

а затем

$$Q'_2 = Q'_1 \sqrt{\frac{B'_1(Re_1)}{B'_2(Re_2)}} \text{ и т. д.}$$

для всех ветвей. При необходимости можно внести дальнейшие уточнения повторным аналогичным расчетом.

Для упрощения расчетов параллельных трубопроводов в неквадратичной области сопротивлений оказывается целесообразным использовать поправочные коэффициенты φ , подобно тому, как это было сделано для расчета простых трубопроводов. Как и прежде, для простоты рассмотрим длинные трубопроводы.

Для каждой из n параллельных ветвей

$$B_i = \frac{8^3}{g\pi^2} \varphi_i \frac{\lambda_{i \text{ кв}} l_i}{d_i} = \varphi_i A_{i \text{ кв}} l_i,$$

где $i=1, 2, 3, \dots, n$ — порядковый номер ветви;

φ_i — поправочный коэффициент на неквадратичность для i -той ветви;

$A_{i \text{ кв}}$ — удельное сопротивление (см. табл. XV.1).

Поправочный коэффициент φ_i вычисляем по формуле

$$\varphi_i = \left(1 + \frac{68v}{k_3 v_i}\right)^{0.25}$$

или по данным табл. XV.2 и XV.3.

После определения значений φ_i можно уточнить расходы в каждой из ветвей трубопровода.

$$Q'_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{B_1}{B_i} \cdot \frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)^{1/2}};$$

$$Q'_i = Q'_1 \sqrt{\frac{B_1 \varphi_i}{B_i \varphi_1}}.$$

Потери напора определяются по формуле $h_w = B_1 \phi_1 Q_1^2$.

Непрерывная раздача по пути. Рассмотрим второй случай — непрерывную раздачу расхода на некотором участке трубопровода. Очевидно, что при этом расход вдоль трубы непрерывно уменьшается и движение жидкости происходит с переменным расходом, т. е. $Q = \omega v \neq \text{const}$.

Основным вопросом является определение величины потерян-ного напора.

Точное решение задачи связано с теорией движения жидкости с переменным расходом, изложение которого мы здесь не приводим, ограничиваясь прибли-

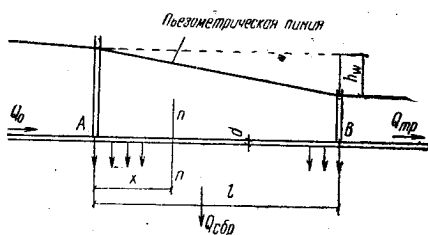


Рис. XV.6. Непрерывная раздача расхода по пути

равна l , то отток воды на длине l — сбросный расход $Q_{\text{сбр}} = ql$, а расход, остающийся в трубопроводе ниже точки B , $Q_{\text{тр}} = Q_0 - ql$; этот расход называют транзитным.

Определим величину потерян-ного напора на участке от A до B .

В сечении $n-n$ на расстоянии x от узла A расход

$$Q_x = Q_0 - qx.$$

На элементарном пути dx потеря напора

$$dh_w = A Q_x^2 dx,$$

где A — удельное сопротивление трубопровода.

В области квадратичного сопротивления величина параметра $A = A_{\text{кв}}$ зависит только от диаметра трубопровода и не зависит от его длины x .

Подставляя вместо Q_x его значение $(Q_0 - qx)$, получим

$$dh_w = A_{\text{кв}} (Q_0 - qx)^2 dx = A_{\text{кв}} (Q_0^2 - 2Q_0 qx + q^2 x^2) dx.$$

Интегрируя от $x=0$ до $x=l$ (для участка трубы от A до B), на-ходим

$$h_w = \int_{x=0}^{x=l} A_{\text{кв}} (Q_0^2 - 2Q_0 qx + q^2 x^2) dx = A_{\text{кв}} \left(Q_0^2 l - Q_0 q l^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right),$$

и так как

$$ql = Q_{\text{сбр}}$$

то

$$h_w = A_{\text{кв}} \left(Q_0^2 - Q_0 Q_{\text{сбр}} + \frac{Q_{\text{сбр}}^2}{3} \right) l. \quad (\text{XV.15})$$

В частном случае, когда на данном участке сбрасывается весь расход, т. е. транзитный расход $Q_{\text{тр}} = 0$, потерянный напор

$$h_w = A_{\text{кв}} \left(Q_0^2 - Q_0 Q_0 + \frac{Q_0^2}{3} \right) l = \frac{A_{\text{кв}} Q_0^2 l}{3}. \quad (\text{XV.16})$$

Эта формула показывает, что в случае непрерывной раздачи расхода из трубопровода потерянный напор в три раза меньше того, который имел бы место при отсутствии раздачи.

Если трубопровод с непрерывной раздачей расхода по пути работает в неквадратичной области сопротивления, то коэффициент трения λ зависит от числа Re . В этом случае расход вдоль трубы постоянно уменьшается, а следовательно, снижаются скорость и число Re . Согласно выражению для коэффициента гидравлического трения

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{k_s}{d} \right)^{0,25}$$

снижение числа Re приводит к увеличению коэффициента λ . Таким образом, в неквадратичной области сопротивления коэффициент гидравлического трения оказывается шероховатым по длине трубопровода x .

В этом случае вместо выражения (XV.15) получаем

$$h_w = A_{\text{кв}} \varphi B \left(Q_0^2 - Q_0 Q_{\text{сбр}} + \frac{Q_{\text{сбр}}^2}{3} \right) l. \quad (\text{XV.16a})$$

В этом соотношении удельное сопротивление $A_{\text{кв}}$, как и в (XV.16), вычисляется при условии квадратичного закона сопротивления (табл. XV.1), φ вычисляется по (XV.12), а множитель B представляет собой поправку к коэффициенту гидравлического трения в связи с изменением средней скорости движения жидкости. Коэффициент B в зависимости от области сопротивления меняется от 1 для вполне шероховатых труб до 1,09 для труб гидравлически гладких [3].

Кольцевой трубопровод. Схема кольцевого трубопровода показана на рис. XV.7, а. Основной расчетной задачей является определение напора H в условиях, когда заданы значения расхода в точках отбора (так называемые узловых расходы) Q_1, Q_2, \dots, Q_n , расположение трубопровода, длины отдельных участков и диаметры всех труб.

Рассмотрим сначала простейший случай (рис. XV.7, б), когда трубопровод имеет два узловых расхода: q_1 (в точке 1) и q_2 (в точке 2).

Определение напора H в начальном сечении магистрали затруднено тем, что неизвестны ни расход, ни направление потока на замыкающем участке между узлами 1 и 2, в связи с чем неизвестны расходы на других участках трубопровода. Если, например, течение происходит от узла 1 к узлу 2, то расход трубопровода на участке $A-1$ будет $Q_1 = q_1 + q_2$, а если течение направлено от узла 2 к узлу 1, то расход на участке $A-1$ будет $Q = q_1 - q_2$.

Поэтому надо предварительно решить вопрос о направлении течения на замыкающем участке трубопровода.

Назовем точкой схода узел, к которому вода притекает с двух сторон. Так, на рис. XV.8 точкой схода является узел 2 в случае *a* и узел 1 в случае *б*. Положение точки схода определяет направление течения во всем кольце.

Потери напора от магистральной узловой точки *A* до точки схода одинаковы по обоим направлениям «кольца». Так, в случае, когда точкой схода является узел 2,

$$\sum_{A-2} h_w = \sum_{A-1} h_w + \sum_{1-2} h_w. \quad (\text{XV.17})$$

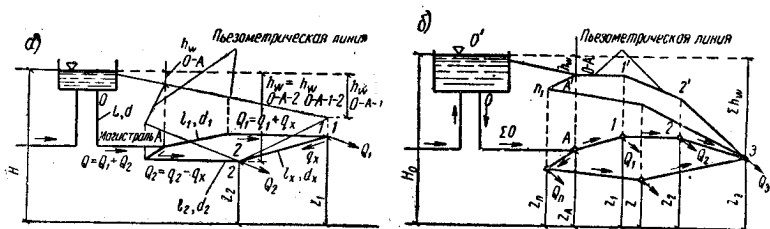


Рис. XV.7. К расчету кольцевого трубопровода
a — схема кольцевого трубопровода; *б* — схема кольцевого трубопровода с двумя узловыми точками

Для этого случая, если пренебречь местными сопротивлениями, можно написать неравенство:

$$\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{(q_2 - q_x)^2}{2g\omega_2^2} > \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{(q_1 + q_x)^2}{2g\omega_1^2}$$

и тем более (опуская q_x)

$$\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{q_2^2}{2g\omega_2^2} > \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{q_1^2}{2g\omega_1^2}$$

или

$$A_2 q_2^2 l_2 > A_1 q_1^2 l_1,$$

где A_1 и A_2 — удельные сопротивления.

Если окажется, что

$$A_2 q_2^2 l_2 < A_1 q_1^2 l_1,$$

то точкой схода является узел 1.

Таким образом, положение точки схода определяется величиной потерь напора от магистрального узла (узла *A*) до узла 1 и узла 2.

После того как решен вопрос о точке схода, искомый начальный напор определяется путем вычисления в каком-нибудь одном направлении потерь напора до точки схода от начального сечения трубопровода.

Например, если для схемы, показанной на рис. XV.7, точкой схода является точка 2, то

$$H = z_2 + \sum_{0-A-2} h_w.$$

Простая разветвленная сеть. Схема простой разветвленной сети показана на рис. XV.9.

Основными задачами можно считать: определение конечных расходов Q_1 и Q_2 при заданном напоре в начальном сечении или определение напора при заданных конечных расходах Q_1 и Q_2 . В качестве примера рассмотрим первую задачу. Составим уравнение Бернулли для потока по линии от начального сечения магистральной трубы до выходного сечения первой ветви (вдоль линии $0-A-1$), а затем до выходного сечения второй ветви (вдоль линии $0-A-2$). В первом случае

$$H_0 = z_1 + h_{w_{0-A}} + h_{w_{A-1}} \quad (\text{XV.18})$$

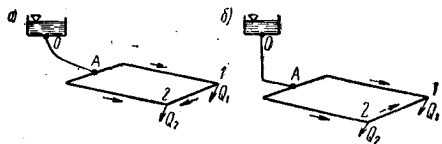


Рис. XV.8. К определению направления течения на замыкающем участке трубопровода

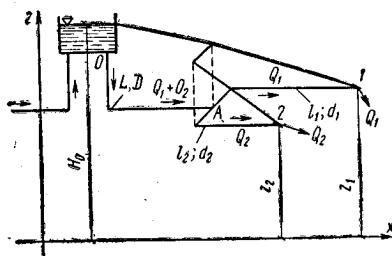


Рис. XV.9. Простая разветвленная сеть трубопроводов

а во втором (по линии $0-A-2$)

$$H_0 = z_2 + h_{w_{0-A}} + h_{w_{A-2}} \quad (\text{XV.19})$$

где $h_{w_{0-A}}$ — потери напора на участке $0-A$ (на магистрали);

$h_{w_{A-1}}$ и $h_{w_{A-2}}$ — соответственно потери напора на первой и второй ветвях.

Обозначим расход в первой ветви через Q_1 , а во второй — через Q_2 . Очевидно, в магистрали расход будет равен их сумме ($Q_1 + Q_2$). Имея это в виду, напомним равенства (XV.18) и (XV.19) иначе (пренебрегая местными сопротивлениями и скоростными напорами на выходе).

Потери напора на магистральной линии

$$\begin{aligned} h_{w_{0-A}} &= \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left\{ \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right\} = \\ &= \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} \left\{ \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right\} = \frac{8(Q_1 + Q_2)^2}{g\pi^2 D^4} \left\{ \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right\} \end{aligned}$$

или, обозначив

$$\begin{aligned} B &= \frac{8}{g\pi^2 D^4} \left\{ \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right\}, \\ h_{w_{0-A}} &= B(Q_1 + Q_2)^2. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$h_{w-1} = \frac{8Q_1^2}{g\pi^2 d_1^4} \left\{ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \Sigma \zeta \right\} = B_1 Q_1^2;$$

$$h_{w-2} = \frac{8Q_2^2}{g\pi^2 d_2^4} \left\{ \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \Sigma \zeta \right\} = B_2 Q_2^2.$$

Коэффициенты B , B_1 и B_2 , очевидно, связаны с величиной «удельного сопротивления трубопровода».

Действительно

$$B = \frac{8}{g\pi^2 D^4} \left\{ \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right\} = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5} L + \frac{8}{g\pi^2 D^4} \Sigma \zeta;$$

но $\frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5} = A$, поэтому $B = AL + \frac{16}{2g\pi^2 D^4} \Sigma \zeta$ и соответственно:

$$B_1 = A_1 l_1 + \frac{16}{2g\pi^2 d_1^4} \Sigma \zeta$$

и

$$B_2 = A_2 l_2 + \frac{16}{2g\pi^2 d_2^4} \Sigma \zeta.$$

При отсутствии же местных сопротивлений или пренебрежении ими в сравнении с потерями по длине, т. е. для длинных трубопроводов:

$$B = AL;$$

$$B_1 = A_1 l_1;$$

$$B_2 = A_2 l_2.$$

В условиях квадратичного закона сопротивлений коэффициенты λ и ζ , а следовательно, B , B_1 и B_2 вычисляются однозначно, и их можно считать известными.

Тогда исходные уравнения (XV.18) и (XV.19) переписутся так:

$$H_0 = z_1 + B(Q_1 + Q_2)^2 + B_1 Q_1^2 \quad (\text{XV.20})$$

и

$$H_0 = z_2 + B(Q_1 + Q_2)^2 + B_2 Q_2^2. \quad (\text{XV.21})$$

Решая эти два уравнения, находим Q_1 и Q_2 .

В неквадратичной области сопротивления расчеты можно производить методом последовательных приближений с использованием поправки на неквадратичность φ .

§ 75. Гидравлический удар в трубах

Резкое повышение давления воды в трубах при внезапном перекрытии трубопровода было известно в водопроводной технике давно; это явление было названо «гидравлическим ударом» (по-

тому что оно часто сопровождается появлением звука, сходного со звуком при ударе молотка по твердому телу, а иногда и сильным сотрясанием трубы).

Теоретические исследования явления гидравлического удара были начаты также давно, однако только в конце прошлого столетия эта задача была решена Н. Е. Жуковским.

Исследования Н. Е. Жуковского показали, что гидравлический удар представляет собой сложный физический процесс и что все явления гидравлического удара объясняются возникновением и распространением ударной волны, происходящей от сжатия воды и от расширения стенок трубы.

Упрощенно (пренебрегая рядом факторов, и в том числе потерями напора) процесс гидравлического удара можно представить себе так.

Пусть из резервуара большой емкости выходит горизонтальная труба, по которой в стационарных условиях протекает вода со скоростью v . На расстоянии l от входного сечения находится задвижка, которую можно закрыть как угодно быстро. Предположим это закрытие мгновенным. Тогда частицы жидкости, которые непосредственно соприкасаются с поверхностью задвижки, мгновенно остановятся, затем остановится ближайший к ним слой жидкости. Произойдет очень быстрое сжатие этого слоя, и давление в нем увеличится. Назовем это увеличение давления ударным давлением. Затем остановится и сожмется следующий слой жидкости, и в нем также увеличится давление; далее сжатие жидкости, сопровождающееся увеличением давления, будет распространяться по всей длине трубы в направлении от задвижки к резервуару.

Пусть за интервал времени Δt повышенное, т. е. ударное давление достигнет резервуара. Если обозначить расстояние от резервуара до задвижки через l , то скорость распространения ударного давления

$$c = l/\Delta t.$$

Величину c называют скоростью ударной волны.

В момент достижения ударной волной входного отверстия (т. е. резервуара) вся вода в трубе окажется сжатой, скорости всех частиц равными нулю и давление повышенным против первоначального, т. е. большим давления, обусловливаемого уровнем воды в резервуаре. Поэтому начнется отток жидкости из трубы в резервуар и постепенно вся жидкость в трубе придет в движение в направлении к резервуару; при этом давление будет уменьшаться до его первоначального значения. Когда это давление достигает задвижки, жидкость движется в трубе в сторону резервуара с некоторой скоростью, после чего начинается ее сплошная остановка (начиная от сечения у задвижки) с понижением давления. Когда скорость во всей трубе станет равной нулю, пониженное давление достигнет входного сечения трубы; после

этого наступит стадия послынного восстановления движения с первоначальной скоростью в сторону задвижки. Через промежуток времени Δt эту начальную скорость v приобретает последний у задвижки слой жидкости, и так как задвижка является препятствием для передвижения жидкости, то снова возникнет «гидравлический удар», т. е. описанное явление повторится.

В действительности явление удара гораздо более сложное, так как стенки трубы обладают упругостью (расширяются и сжимаются при изменениях давления в жидкости); жидкость также обладает упругостью, и, кроме того, в потоке возникают сопротивления движению жидкости, в результате чего колебания давления в трубе затухают. Расчеты этих колебаний довольно сложны, и мы их здесь не будем касаться, ограничиваясь определением повышения давления Δp в горизонтальной трубе у задвижки при мгновенном ее закрытии. С этой целью составим уравнение количества движения, отнеся его ко всей массе жидкости в трубе, т. е. к массе, равной $\rho \frac{\pi d^2}{4} l$, и ко времени Δt , в течение которого ударное давление, возникшее у задвижки, достигнет резервуара.

Количество движения указанной массы в начальный момент будет равно:

$$[KD]_t = \rho \frac{\pi d^2}{4} lv.$$

Количество движения этой же массы в конечный момент (через промежуток времени Δt) будет равно нулю, так как в этот момент все частицы указанной массы останавливаются (их скорость $v=0$). Следовательно,

$$[KD]_{t+\Delta t} = \rho \frac{\pi d^2}{4} l \cdot 0 = 0.$$

Итак, приращение количества движения за время Δt

$$[KD]_{t+\Delta t} - [KD]_t = 0 - \rho \frac{\pi d^2}{4} lv = -\rho \frac{\pi d^2}{4} lv.$$

Определим сумму импульсов всех сил, действовавших на эту массу в течение времени Δt . Импульс силы тяжести и силы давления со стороны стенок трубы равен нулю, так как эти силы нормальны оси трубы. Силы давления на торцовые сечения дают в сумме импульс, равный:

$$(P_1 - P_2) \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} [\rho_1 - (\rho_1 + \Delta \rho)] \Delta t = -\frac{\pi d^2}{4} \Delta \rho \Delta t.$$

Импульсами касательных напряжений на стенку пренебрегаем по малости.

Итак, имеем

$$-\rho \frac{\pi d^2}{4} lv = -\frac{\pi d^2}{4} \Delta \rho \Delta t.$$

откуда

$$\Delta p = \rho v \frac{l}{\Delta t}.$$

Но $l/\Delta t = c$, т. е. скорости распространения ударной волны, а поэтому

$$\Delta p = \rho v c. \quad (\text{XV.22})$$

Это есть формула Н. Е. Жуковского для определения величины гидравлического удара.

Из этой формулы следует, что величина ударного давления зависит от начальной скорости движения воды в трубе и от скорости распространения ударной волны.

В то же время скорость c зависит от упругих свойств жидкости и от упругих свойств трубопровода.

Если бы стенки трубы были абсолютно жесткими, то скорость распространения ударной волны совпадала бы со скоростью распространения звука в жидкости; последняя равняется, как об этом уже упоминалось,

$$c_* = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}},$$

где E_0 — модуль упругости жидкости.

Для воды $E_0 = 1,96 \cdot 10^9$ Па и $c_* = 1400$ м/с.

В действительности стенки трубы упруги; поэтому скорость распространения ударной волны определяется из формулы

$$c = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}},$$

где E_1 — кажущийся модуль упругости жидкости, определяемый из формулы

$$E_1 = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta}} \quad (\text{XV.23})$$

(здесь d — диаметр трубы; E — модуль упругости материала стенок трубы, например, для стали $E_0 = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па; δ — толщина стенок трубы).

Таким образом, в развернутом виде формула Жуковского записывается в виде

$$\Delta p = \rho v \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right)}}. \quad (\text{XV.23a})$$

Из этой формулы видно, что чем выше эластичность материала (т. е. чем меньше модуль упругости материала стенок

трубы) и чем больше диаметр трубы и меньше толщина стенок, тем меньше величина гидравлического удара.

Явление гидравлического удара носит периодический характер. Действительно, после достижения резервуара ударная волна отразится и со скоростью c будет распространяться к задвижке. Общее время пробега прямой и отраженной (обратной) ударных волн составляет длительность фазы гидравлического удара $T_{\phi} = 2l/c$. Далее циклы повышений и понижений давления будут чередоваться с промежутками времени T_{ϕ} до тех пор, пока под влиянием гидравлических сопротивлений этот колебательный процесс не затухнет.

Рассмотренные выше решения справедливы при мгновенном закрытии задвижки ($t_3 = 0$). Если время полного закрытия задвижки t_3 больше, чем длительность фазы гидравлического удара T_{ϕ} , то повышение давления в этом случае можно определять по формуле

$$\Delta p = \rho v c \frac{T_{\phi}}{t_3}.$$

Для предохранения трубопровода следует или не допускать быстрых закрытий запорных устройств трубопроводов, или устанавливать демпфирующие воздушные колпаки. Для газопроводов и воздухопроводов величина гидравлического удара обычно мала.

§ 76. Расчет трубопроводов для газов

Расчет трубопроводов для газов при малых перепадах давления. Перекачка по трубам газов (природный и искусственный газы, воздух, пар) широко используется для различных целей (бытовых и технических). По сравнению с движением капельных жидкостей движение газов характеризуется рядом особенностей, обусловливаемых различиями физических свойств капельных и газообразных жидкостей.

Под углом зрения гидравлических расчетов следует различать два случая: движение при малых относительных перепадах давления и движение при больших перепадах (имеется в виду перепад давления Δp между начальным и конечным сечениями труб, отнесенный к среднему давлению). В первом случае возможно пренебрегать сжимаемостью газов, т. е. считать плотность транспортируемого газа неизменной по всей длине трубопровода; тогда расчеты воздухопроводов и газопроводов принципиально не отличаются от расчетов для несжимаемых жидкостей.

При больших относительных перепадах (если $\Delta p/p > 5\%$) пренебрегать сжимаемостью газа нельзя и нужно учитывать непрерывный характер изменения плотности газа в зависимости от давления.

Рассмотрим сначала случай движения газа при малых перепадах давления, учитывая, что в расчетах здесь обычно рассматриваются потери не напора, а давления.

Формулы для определения потерь на трение и местных потерь в этом случае принимают вид:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \gamma h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2}; \quad (\text{XV.24})$$

$$\Delta p_{\text{м}} = \gamma h_{\text{м}} = \zeta \rho \frac{v^2}{2}, \quad (\text{XV.25})$$

где Δp — потерянное давление;

ρ — средняя плотность газа, определяемая из формулы

$$\rho = \frac{p_{\text{ср}}}{RT},$$

где

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2};$$

p_1 и p_2 — давления в концевых сечениях трубопровода. Величину $\rho v^2/2$ называют *динамическим давлением*.

Формулу (XV.24) представляют также в виде

$$R_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{l} = \lambda \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rho,$$

где $R_{\text{тр}}$ — так называемое удельное сопротивление трения (сопротивление трения 1 м длины трубопровода).

Эта величина аналогична гидравлическому уклону и связана с ним соотношением

$$R_{\text{тр}} = \rho g i_{\text{тр}}.$$

Уравнение Бернулли записывается в виде

$$\rho g (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \Delta p_{\text{пот}}. \quad (\text{XV.25a})$$

В большинстве практически важных случаев слагаемым $\rho g (z_1 - z_2)$ в этом уравнении можно пренебречь, так как вследствие очень малой плотности газа эта величина мала по сравнению с другими членами уравнения.

Пусть, например, для трубопровода $\Delta z = 20$ м, а давление, развиваемое вентилятором, $\Delta p = 25\,000$ Па. Тогда $\rho g \Delta z = 1,2 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \cdot 20 \text{ м} = 240$ Па, что составляет всего 0,01 Δp , и, следовательно, членом $\rho g \Delta z$ можно пренебречь.

Тогда уравнение Бернулли можно записать в виде

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}}.$$

а при постоянном сечении трубопровода в виде

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{\text{пот.}} \quad (\text{XV.26})$$

Вентиляционные трубы часто имеют некруговое сечение, поэтому вместо диаметра в уравнение (XV.24) вводят эквивалент-

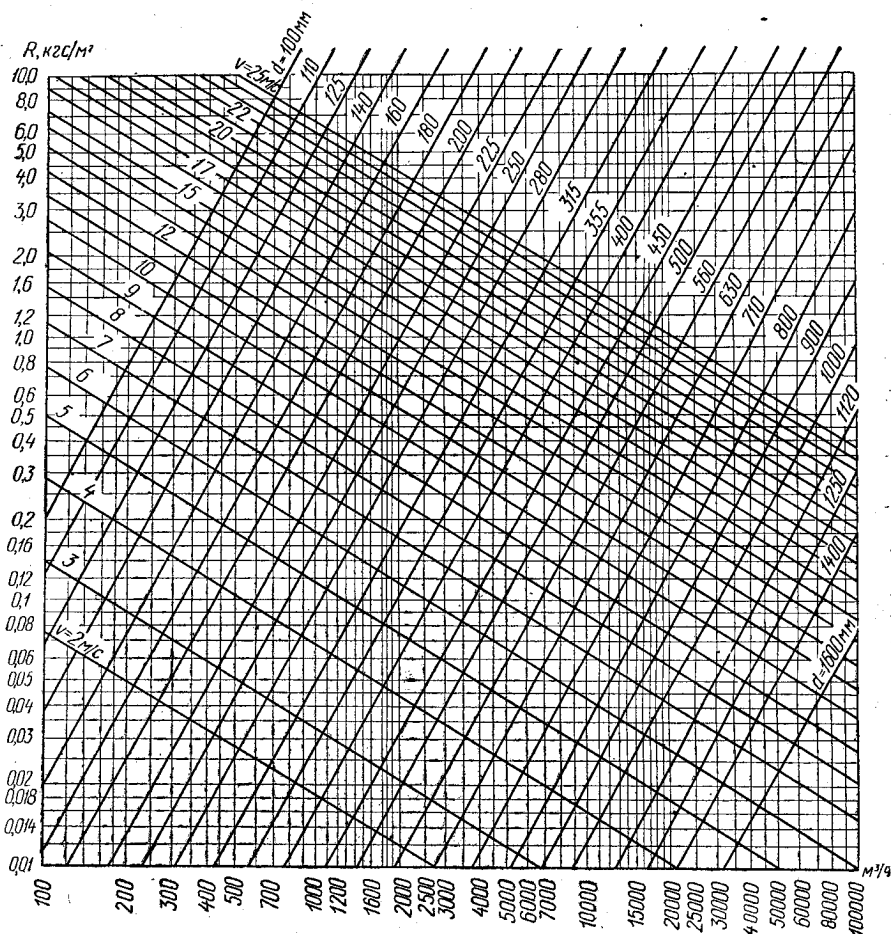


Рис. XV.10. Номограмма для гидравлического расчета воздухопроводов

ный диаметр; отметим попутно, что при расчетах вентиляции потери на местные сопротивления имеют, как правило, большую величину, чем потери на трение. Величину коэффициента гидравлического трения λ при расчете вентиляционных воздухопроводов в соответствии с указаниями Сантехпроекта определяют по формуле А. Д. Альтшуля (XII.48).

Расчет воздуховодов облегчается при использовании номограммы (рис. XV.10), составленной С. С. Лазевником по этой формуле при $k_3 = 0,1$ мм. При других значениях k_3 потерю давления на трение, найденную по номограмме, следует умножить на поправочный коэффициент $K_{ш}$, приведенный в табл. XV.4.

Таблица XV.4

Поправочный коэффициент на шероховатость (по М. Я. Кавалерчику)

k_3 , мм	Значения $K_{ш}$ при скорости воздуха в м/с										
	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
0,05	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,92	0,91	0,91	0,9	0,9	0,9
0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,2	1,07	1,09	1,1	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14
0,4	1,19	1,22	1,25	1,27	1,28	1,29	1,3	1,31	1,32	1,33	1,33
0,6	1,28	1,32	1,35	1,38	1,4	1,41	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46
0,8	1,35	1,4	1,43	1,47	1,49	1,51	1,52	1,54	1,56	1,56	1,56
1	1,41	1,47	1,51	1,54	1,59	1,61	1,62	1,63	1,63	1,64	1,65

В длинных газопроводах потери давления на местные сопротивления невелики по сравнению с потерями давления на трение, и здесь можно полагать

$$\Delta p_{\text{пот}} \approx \Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rho. \quad (\text{XV.27})$$

Коэффициент гидравлического трения λ , входящий в эту формулу, может определяться по тем же формулам, что и при движении несжимаемых жидкостей по трубам.

Подставляя в (XV.27) λ из (XII.48), получаем рекомендуемую СНиП II-Г.13-62 формулу А. Д. Альтшуля [9].

$$\Delta p_{\text{тр}} = 7 \left(\frac{k_3}{d} + 1922 \frac{dv}{Q} \right) \frac{Q^2}{d^5} \gamma l, \quad (\text{XV.28})$$

где $\Delta p_{\text{тр}}$ — потеря давления в мм вод. ст.;

l — расчетная длина газопровода в м;

k_3 — эквивалентная шероховатость в см;

d — диаметр трубопровода в см;

v — кинематический коэффициент вязкости газа в $\text{м}^2/\text{с}$;

Q — расход газа в $\text{м}^3/\text{ч}$;

γ — удельный вес газа в $\text{кгс}/\text{м}^3$ (при температуре 0°C и давлении 760 мм рт. ст.).

Для расчета газопроводов низкого давления составлены номограммы, одна из которых представлена на рис. XV.11. Номограмма охватывает все возможные режимы (турбулентный, ламинарный, переходный). В области турбулентного режима номограмма построена по формуле (XV.28).

Представляют интерес два частных случая.

1. Если $\frac{k_3}{d} \ll 1922 \frac{dv}{Q}$ (что имеет место при движении газа с малыми скоростями в гладких трубах), формула (XV.28) упрощается к виду

$$\Delta p_{\text{тр}} = 46,5 v^{0,25} \frac{Q^{1,75}}{d^{4,75}} \gamma l. \quad (\text{XV.29})$$

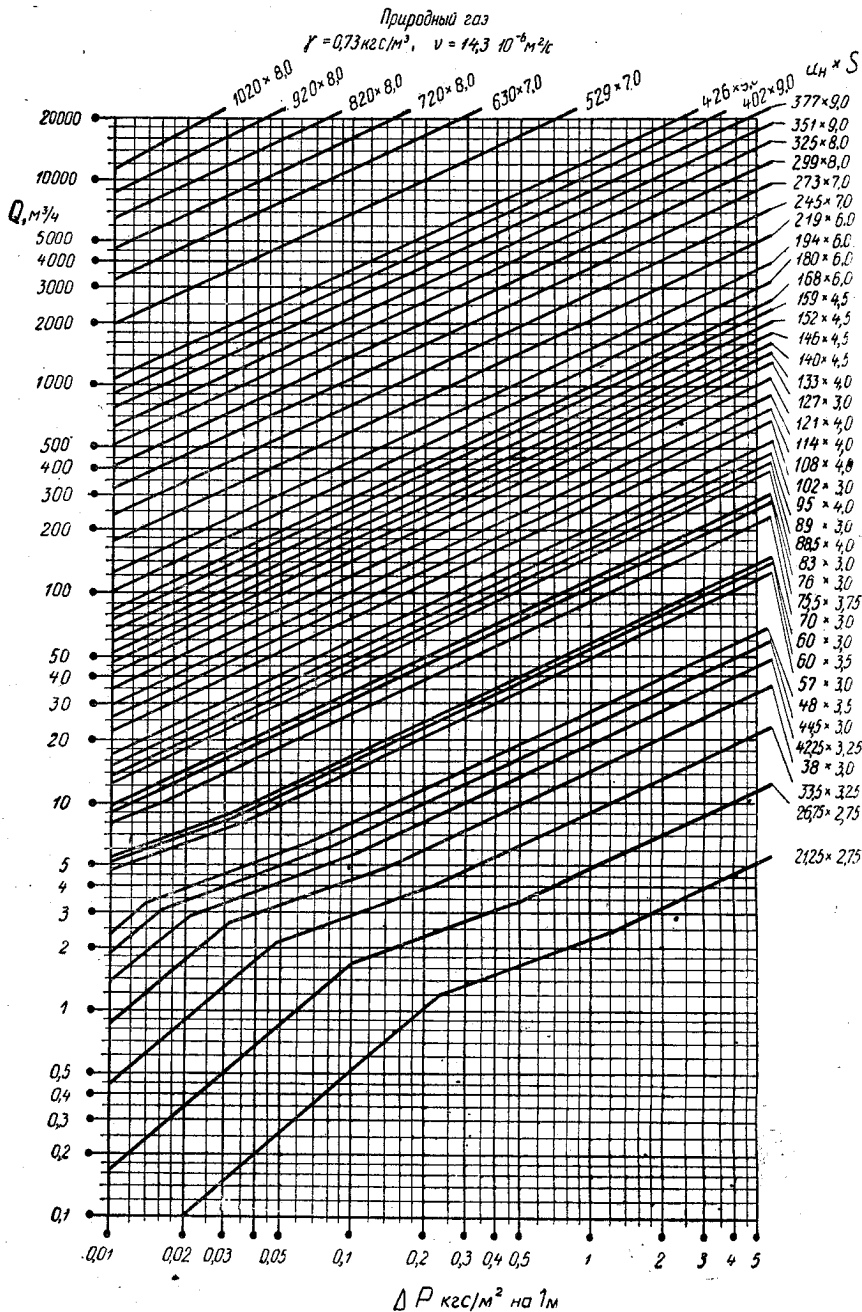


Рис. XV.11. Номограмма для определения потерь напора в газопроводах низкого давления [9]

При обычных условиях расчета газопроводов этой формулой можно пользоваться при скоростях течения газа $v \leq 3$ м/с.

Если же $\frac{k_3}{d} \gg 1922 \frac{d}{Q}$, что имеет место при движении газа с большими скоростями в трубопроводах со значительной шероховатостью, то

$$\Delta p_{\text{тр}} = 7k_3^{0,25} l \frac{Q^2}{d^{5,25}} \gamma. \quad (\text{XV.30})$$

В частности, для новых стальных труб при $k_3 = 0,1$ мм имеем

$$\Delta p_{\text{тр}} = 2,22l \frac{Q^2}{d^{5,25}} \gamma.$$

Расчеты трубопроводов для газов при больших перепадах давления. При расчете длинных газопроводов (имеющих часто длину, равную десяткам и сотням километров), а также трубопроводов сжатого воздуха необходимо учитывать значительные перепады давления в начале и в конце трубопровода.

В этом случае нельзя без больших погрешностей полагать плотность газа постоянной по длине трубопровода, как это делается при расчете газопроводов низкого давления; кроме того, даже при сохранении постоянства диаметра по длине газопровода движение газа в таких трубопроводах является неравномерным. Действительно, в соответствии с уравнением неразрывности $\rho v \omega = \text{const}$ или при $\omega = \text{const}$ $\rho v = \text{const}$. Но давление газа по длине газопровода уменьшается (т. е. уменьшается его плотность), следовательно, возрастает скорость движения газа, которая в конце газопровода всегда выше, чем в его начале.

Далее при расчетах таких газопроводов можно пренебрегать не только изменениями удельной энергии положения, т. е. членом $(z_1 - z_2)$ в уравнении Бернулли (об этом уже говорилось выше), но также изменениями удельной кинетической энергии газа.

Пусть, например, $p_1 - p_2 = 196\,000$ Па ($p_1 = 294\,000$ Па); $\Delta z = z_1 - z_2 = 20$ м; $v_1 = 20$ м/с; $v_2 = 25$ м/с; $t = 27^\circ \text{C} = 300$ К; $R = 287$ Дж/(кг·К)

$$\rho = \frac{p_1}{RT} = \frac{294\,000}{287 \cdot 300} = 3,4 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho g \Delta z = 3,4 \cdot 9,81 \cdot 20 = 680 \text{ Па};$$

$$\rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = 3,4 \left(\frac{625 - 400}{2} \right) = 390 \text{ Па}.$$

Таким образом, перепад давления в 500 раз больше скоростного напора и в 300 раз больше изменения удельной энергии положения.

Поэтому при расчетах движения газов с большими перепадами давления уравнение Бернулли сводится к зависимости (для бесконечно малого участка трубопровода, на котором удель-

ный вес газа и скорость его движения можно считать постоянными)

$$-dp = dp_{\text{тр}}. \quad (\text{XV.31})$$

С учетом формулы Дарси — Вейсбаха формула (XV.31) получает вид

$$-dp = \lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{v^2}{2} \rho. \quad (\text{XV.32})$$

Для интегрирования этого уравнения нужно знать характер изменения скорости, плотности и коэффициента гидравлического трения вдоль газопровода, т. е. зависимости:

$$\rho = f(l); \quad v = f_1(l); \quad \lambda = f_2(l).$$

Эти зависимости определяются термодинамическими процессами, протекающими при движении газа по трубопроводу. Если теплообмен между газом и окружающей средой отсутствует, газ будет расширяться адиабатически и его температура будет непрерывно понижаться. При наличии теплообмена между газом и окружающей средой температура газа T может сохраняться постоянной по всей длине газопровода (изотермическое течение), равной температуре окружающей среды. Это обычно имеет место для длинных трубопроводов без тепловой изоляции, и поэтому большинство промышленных газопроводов работает в условиях изотермического режима.

Как известно, коэффициент гидравлического трения

$$\lambda = f\left(\text{Re}; \frac{k_s}{d}\right).$$

Относительная шероховатость по длине газопровода не меняется (для данных k_s и d). Число Рейнольдса можно представить в виде

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi d \mu} = \frac{4M}{\pi d \mu},$$

где M — массовый расход.

При изотермическом режиме динамическая вязкость μ сохраняется неизменной по длине трубопровода (так как температура газа не меняется), а следовательно, остается постоянным и число Рейнольдса. Таким образом, несмотря на изменение средней скорости движения газа и его удельного веса, величина коэффициента гидравлического трения вдоль газопровода не меняется.

Скорость v и плотность ρ в любом сечении газопровода связаны со скоростью и плотностью в начальном сечении v_1 и ρ_1 уравнением неразрывности

$$v = v_1 \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Подставляя это выражение в (XV.32), получим

$$-dp = \lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho} \cdot \frac{v_1^2}{2}. \quad (\text{XV.33})$$

С другой стороны, из уравнения состояния газа $\rho = p/RT$ имеем

$$\frac{\rho_1^2}{\rho} = \frac{p_1^2}{pRT}, \quad (\text{XV.34})$$

в соответствии с чем (XV.33) можно привести к виду

$$-pdp = \left(\frac{\lambda}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{p_1^2}{RT} \right) dl. \quad (\text{XV.35})$$

Интегрируя это уравнение от p_1 до p_2 (p_2 — давление в конце рассматриваемого участка газопровода), получим

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{p_1^2}{RT},$$

откуда

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} p_1 \rho_1,$$

и далее

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} \cdot \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (\text{XV.36})$$

Уравнение (XV.36) можно представить в виде

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} \rho_1. \quad (\text{XV.36a})$$

Левая часть последнего уравнения может быть затем преобразована к виду

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2p_1} = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right),$$

и поэтому

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} \rho_1.$$

Так как

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 - \Delta p}{p_1} = 1 - \frac{\Delta p}{p_1},$$

то, подставляя последнее выражение в (XV.36), получим окончательно

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{\rho_1}} \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} \rho_1. \quad (\text{XV.37})$$

Уравнение (XV.37) отличается от формулы Дарси — Вейсбаха для определения потерь давления при движении несжимаемой жидкости лишь множителем, зависящим от величины отношения $\Delta p/\rho_1$. До тех пор, пока сохраняется условие

$$\frac{\Delta p}{\rho_1} < 5\%. \quad (\text{XV.38})$$

пренебрежение этим множителем дает ошибку около 2,5%, что допустимо в большинстве инженерных расчетов. Таким образом, можно прийти к выводу, что не абсолютная величина начального давления газа p_1 определяет, можно ли при расчете газопровода пользоваться формулой Дарси — Вейсбаха, а относительная величина изменения этого давления по длине газопровода в целом.

Формула для определения весового расхода газа имеет вид

$$G = \omega \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\lambda l} \cdot \frac{g D \gamma_1}{\rho_1}} = \frac{\pi}{4} g \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\lambda l} \cdot \frac{D^5 \rho_1}{\rho_1}}. \quad (\text{XV.39})$$

Коэффициент гидравлического трения λ , входящий в полученные зависимости, определяется по тем же формулам, что и при движении несжимаемых жидкостей. В случае турбулентного режима, подставив в (XV.36) значение λ из (XII.48) и приведя к нормальным условиям (температура 0° С и давление 760 мм рт. ст.), получаем рекомендуемую СНиП II-Г.13-62 формулу А. Д. Альтшуля [9]:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 1,45 \left(\frac{k_3}{d} + 1922 \frac{dv}{Q} \right)^{0,25} \frac{Q^2}{d^5} \gamma, \quad (\text{XV.40})$$

где p_1 и p_2 — абсолютное давление газа в начале и конце газопровода в ат;

L — длина трубопровода в км;

d — диаметр трубопровода в см;

k_3 — эквивалентная шероховатость в см;

γ — удельный вес газа в кгс/м³;

Q — расход газа в м³/ч;

ν — кинематический коэффициент вязкости газа в м²/с.

Значения γ , Q и ν приводятся к нормальным условиям.

Уравнение (XV.40) представляет собой обобщенную формулу, действительную во всей области турбулентного режима.

Природный газ
 $(\gamma = 0,73 \text{ кгс/м}^3; \nu = 14,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с})$

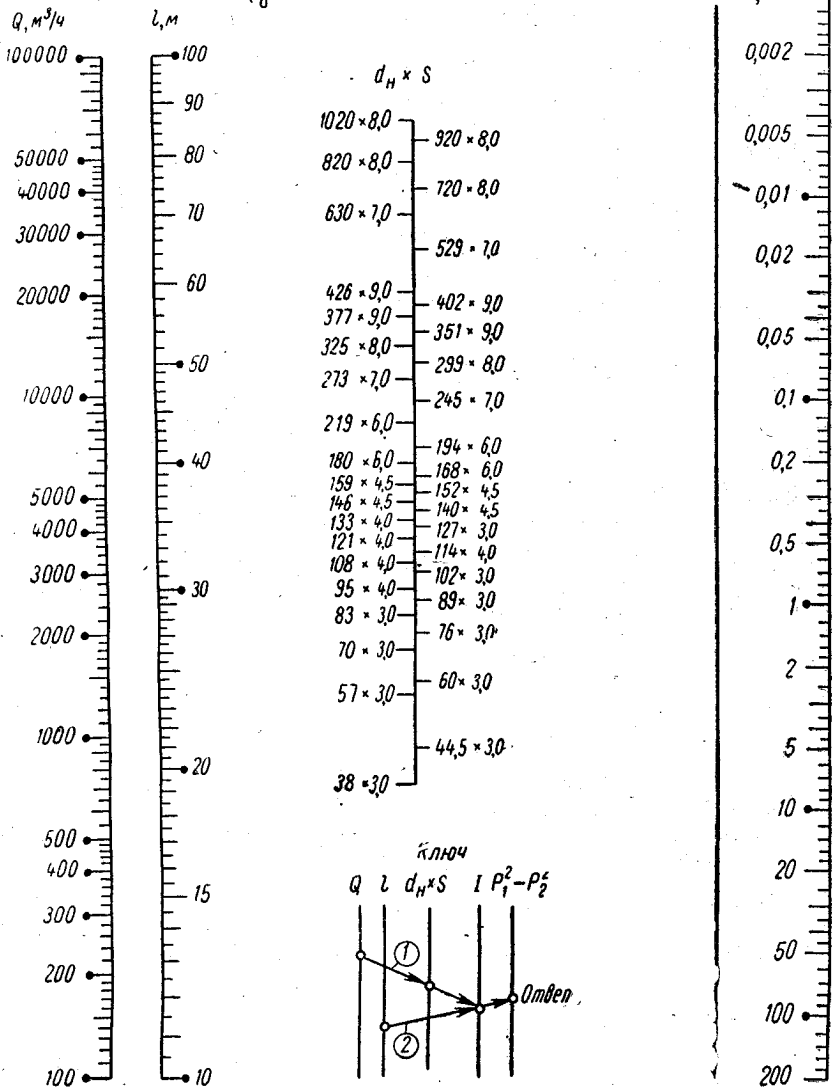


Рис. XV.12. Номограмма для определения потерь напора в газопроводах высокого давления [9]

Для случаев, когда $k_9/d \ll 1922 dv/Q$ и $k_9/d \gg 1922 dv/Q$, уравнение (XV.40) приводится соответственно к виду:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 9,6 \frac{Q^{1,75}}{d^{4,75}} v^{0,25} \gamma; \quad (\text{XV.41})$$

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 1,45 \frac{k_9^{0,25}}{d^{5,25}} Q^{2\gamma}. \quad (\text{XV.42})$$

Формула (XV.42) справедливая для области квадратичного сопротивления, применима при больших скоростях газа ($v > 50$ м/с).

Для расчета потерь давления в газопроводах высокого и среднего давления по соотношению (XV.40) построена номограмма, представленная на рис. XV.12. Определение потерь давления ведем в следующем порядке.

1. На шкалах номограммы Q и d находим точки с заданными значениями и отмечаем точку пересечения края линейки с прямой I .

2. Прикладываем край линейки к отмеченной точке на шкале l и к точке на шкале l с данной отметкой. Ответ читаем в точке пересечения шкалы $p_1^2 - p_2^2$ с краем линейки.

О расчете паропроводов. При проектировании обычных паропроводов, как правило, назначают возможно меньший диаметр трубы с целью уменьшения тепловых потерь. При этом получают сравнительно высокие скорости движения пара (от 10 до 60 м/с), вследствие чего даже в коротких паропроводах возникают значительные потери давления.

При перекачке перегретых паров трубопроводы самым тщательным образом изолируют, и их тепловые потери незначительны. Характер изменения состояния перегретого пара в результате устранения теплообмена между потоком и наружной средой уже не является изотермическим. Не будет он и строго адиабатическим, так как даже в хорошо изолированной трубе условия будут отличаться от условий при обратимом адиабатическом изменении объема, так как турбулентность, возникающая при движении, переходит частично в тепло, которое изменяет уравнение энергии (энергия, переходящая в потери, возвращается в виде механической энергии). Таким образом, с одной стороны, температура пара имеет тенденцию к снижению по длине трубопровода в результате расширения пара, с другой же стороны — к возрастанию благодаря поступлению тепла от потерь напора. В результате режим движения находится между изотермическим и адиабатическим. Так как температура пара меняется по длине паропровода, то меняются также динамическая вязкость μ , число Рейнольдса и в общем случае коэффициент гидравлического трения λ ; однако вследствие значительных скоростей движения пара в паропроводах сопротивление относится чаще всего к квадратичной области, где λ постоянно.

В паропроводах низкого давления (например, в отопительных системах) удельный вес пара и его температура в процессе движения изменяются так мало, что расчеты можно производить по формулам для несжимаемых жидкостей.

§ 77. Влияние срока службы трубопроводов на их гидравлическое сопротивление

При проектировании трубопроводов разного назначения их диаметр назначается с таким расчетом, чтобы полностью обеспечить потребителей транспортируемой жидкостью или газом; при этом обычно предполагается, что гидравлическое сопротив-

ление труб в течение всего срока эксплуатации остается постоянным: В действительности же во многих случаях пропускная способность трубопроводов постепенно сокращается в процессе их эксплуатации, снижаясь в некоторых случаях (например, для трубопроводов водоснабжения) до 50% расчетной и даже более. Это связано с увеличением шероховатости труб по мере их использования вследствие коррозии и инкрустации. Эти процессы происходят с интенсивностью, которая зависит от материала стенок трубы, свойств перекачиваемой жидкости и пр.

Увеличение шероховатости трубопроводов в процессе их эксплуатации в первом приближении можно оценить по формуле

$$k_t = k_0 + \alpha t, \quad (\text{XV.43})$$

где k_0 — абсолютная эквивалентная шероховатость в мм для новых труб (в начале эксплуатации);

k_t — абсолютная эквивалентная шероховатость через t лет эксплуатации;

α — коэффициент, характеризующий быстроту возрастания шероховатости, в мм/год.

Значение коэффициента α зависит от материала труб и свойств жидкости. В табл. XV.5 приведены значения α в зависимости от физико-химических свойств транспортируемой воды.

Таблица XV.5

Значения коэффициента α в формуле (XV.43) для природных вод, протекающих по стальным трубам (по А. Д. Альтшулю и А. Г. Камерштейну)

Природные воды	α^* , мм/год
Слабо минерализованные некоррозионные; с незначительным содержанием органических веществ и растворенного железа	0,005—0,055 (0,025)
Слабо минерализованные коррозионные; содержащие органические вещества и растворенное железо в количестве меньше 3 мг/л	0,055—0,18 (0,07)
Весьма коррозионные, но с малым содержанием хлоридов и сульфатов; с содержанием железа более 3 мг/л	0,18—0,4 (0,2)
Коррозионные с большим содержанием хлоридов и сульфатов (больше 500 мг/л); необработанные с большим содержанием органических веществ	0,4—0,6 (0,51)
Со значительной карбонатной и малой постоянной жесткостью, с плотным остатком (более 2000 мг/л); сильно минерализованные и коррозионные	От 0,6 до 1 и более

* В скобках — среднее значение α .

Значение коэффициента α в формуле (XV.43) возрастает с уменьшением диаметра трубопровода.

В процессе эксплуатации воздухопроводов удаляемые аэрозоли осаждаются на их стенках в виде конденсата или пылевых частиц, существенно изменяя шероховатость труб. Изменение внутренней поверхности воздухопроводов происходит также за счет корродирующего действия агрессивных паров и газов. В зависимости от вида производства, на котором эксплуатируются вентиляционные системы, коэффициент α может изменяться в существенных пределах (см. табл. XV.6). Для газопроводов можно принимать $\alpha = 0,04—0,05$.

Таблица XV.6

Значение коэффициента α в формуле (XV.43) для различных воздухопроводов (по Г. Я. Крупкину)

Производство или условия эксплуатации воздухопроводов	α , мм/год
Вытяжные шахты, подверженные атмосферным воздействиям (из нецинкованной стали); гальванические участки (никелирование, воронение и окислирование, травление)	0,36—0,96
Гальванические участки хромирования, полирования; заточные, наждачные, полировальные участки и участки сухой шлифовки	1,8—4,8
Пропиточные машины для приготовления пластика, участки бакелизации; кольцевые воздухопроводы над плитами в кухнях; кондитерские печи; масляные ванны термических участков	3,6—14,4
Пulверизационная окраска; шлифовальные (мокрая шлифовка)	8,4—26
Пайка радиодеталей на конвейере (флюсканифоль стеариновая)	24—60

§ 78. Понятие о движении двухфазных потоков в трубах¹

Расчет трубопроводов при движении в них двухфазных жидкостей (взвесенесущие потоки — пневмотранспорт и гидротранспорт, Газожидкостные потоки) обладает специфическими особенностями. Основными вопросами, интересующими инженера, являются определение необходимой скорости транспортирования и потерь давления.

К одной из важнейших характеристик двухфазных потоков относятся объемная концентрация β и расходная концентрация x , т. е. отношение весового расхода дискретного компонента к весовому расходу смеси:

$$x = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_2}{G} \quad (\text{XV.44})$$

где G_2 , G_1 и G — весовые расходы дискретной фазы, непрерывной фазы и смеси соответственно.

Формула, связывающая объемную и расходную концентрации двухфазного потока, имеет вид

$$\beta = \frac{x}{(1-x) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \right)} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \quad (\text{XV.45})$$

¹ Этот параграф составлен при участии Ф. Г. Майрановского.

где v_2 и v_1 , ρ_2 и ρ_1 — соответственно истинные скорости и истинные плотности движения дискретной (индекс 2) и непрерывной (индекс 1) фазы.

Особенности взвесенесущих потоков в значительной степени определяются характером обтекания твердых частиц потоком жидкости или газа.

Рассмотрим движение твердой частицы, которую для простоты представим в виде шара диаметром d в вертикальной трубе диаметром D , в которой поток направлен снизу вверх. Будем считать, что $d \ll D$. В зависимости от соотношения веса частицы G и силы давления на нее со стороны жидкости R частица будет подниматься вверх или опускаться (рис. XV.13). Может, од-

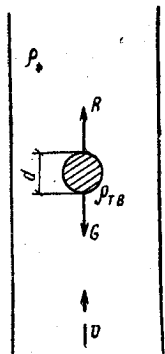


Рис. XV.13.
К расчету скорости витания

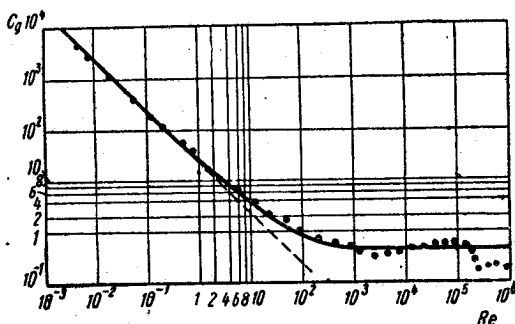


Рис. XV.14. Коэффициент сопротивления шара

нако, наблюдаться также случай, когда частица будет находиться в равновесии, т. е.

$$R = G. \quad (\text{XV.46})$$

Это случай так называемого *витания частицы*. Кажущийся вес шара в неподвижной жидкой среде

$$G = \frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_{ТВ} - \rho_{Ж}) g, \quad (\text{XV.47})$$

где $\rho_{ТВ}$ — плотность твердой частицы;
 $\rho_{Ж}$ — плотность жидкости.

Сила давления жидкости на движущуюся частицу находится из формулы

$$R = C_d \omega \rho_{Ж} \frac{v^2}{2}, \quad (\text{XV.48})$$

где C_d — коэффициент сопротивления шара, причем для шара $\omega = \pi d^2/4$. Подставляя значения R и G (XV.46), находим формулу для определения скорости витания:

$$v_{в} = \sqrt{\frac{4g}{3}} \sqrt{\frac{d(\rho_{ТВ} - \rho_{Ж})}{C_d \rho_{Ж}}}. \quad (\text{XV.49})$$

При падении частицы в воздухе без заметной погрешности можно полагать $\rho_{ТВ} - \rho_{Ж} = \rho_{ТВ}$, так как плотность воздуха по сравнению с плотностью

твёрдого тела очень мала. В этом случае формула для скорости витания упрощается к виду

$$v_b = 3,62 \sqrt{\frac{\rho_{гв} d}{\rho_{ж} C_d}}, \quad (XV.50)$$

где v_b — в м/с, а d — в м.

Зависимость коэффициента сопротивления шара C_d от числа Рейнольдса имеет сложный вид (рис. XV.14) и в первом приближении описывается формулой [3].

$$C_d = \frac{24}{Re} + 0,67 \sqrt{C_d}, \quad (XV.51)$$

которая действительна при $Re < 10^5$.

В реальных взвесенесущих потоках необходимо вводить поправку в эти формулы для учета влияния стенок труб и соседних частиц на скорость витания и коэффициент сопротивления частиц (так называемый коэффициент стеснения $E_{ст}$). В результате имеем

$$v_{вст} = E_{ст} v_b; \quad C_{дст} = E_{ст}^{-2} C_d,$$

где $v_{вст}$ и $C_{дст}$ — скорость витания и коэффициент сопротивления в стеснённых условиях.

Коэффициент стеснения можно найти по эмпирической формуле

$$E_{ст} = \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]^{3/2} (1 - \beta)^3, \quad (XV.52)$$

где β — объёмная концентрация.

Совершенно очевидно, что расчетная скорость потока жидкости (газа) при движении твёрдых частиц в вертикальных трубах для надежного перемещения материала должна быть больше скорости витания. В системах пневматического транспорта в зависимости от весовой концентрации расчетная скорость воздуха обычно превышает скорость витания в 1,5—2 раза.

Более сложный характер имеет движение твёрдых частиц в горизонтальной трубе. Для эффективного транспортирования взвесей необходимо, чтобы скорость потока превышала так называемую критическую скорость, т. е. минимальную скорость потока, при которой твёрдые частицы движутся в жидкости без осаждения. При скоростях меньше критической начинается осаждение твёрдого материала.

Величина критической скорости зависит от размеров твёрдых частиц, их плотности и концентрации. Для пневмотранспорта она может быть найдена по эмпирической формуле

$$v_{кр} = 5,6 D^{0,34} d^{0,36} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{0,5} x^{0,25}, \quad (XV.53)$$

(здесь $[D$ и $d]$ — в м, $[v_{кр}]$ — в м/с).

Потери давления во взвесенесущем потоке можно найти по формуле Дарси — Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda_{взв} \frac{l}{d} \rho_1 \frac{v_1^2}{2}, \quad (XV.54)$$

где v_1 и ρ_1 — соответственно скорость и плотность непрерывной фазы (жидкости или газа).

Коэффициент гидравлического трения $\lambda_{взв}$ [11] при движении взвесенесущего потока, как правило, превосходит коэффициент гидравлического трения

для чистой (однофазной) жидкости, так как перемещение материала и подъем его на вертикальных участках вызывают дополнительные потери. При небольших концентрациях взвеси и малых размерах твердых частиц взвесенесущий поток можно рассматривать как однородную (континуальную) среду, плотность и вязкость которой зависят от концентрации твердых частиц. Движение такой условной жидкости (так называемый «дисперсоид») приближенно описывается закономерностями, полученными для чистой воды. Так, для определения коэффициента гидравлического трения можно использовать формулу

$$\lambda_d = 0,11 \left(\frac{k_2}{d} + \frac{68}{Re_d} \right)^{0,25}, \quad (XV.55)$$

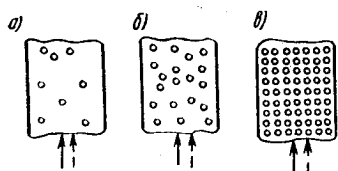


Рис. XV.15. Изменение структуры потока при пневмотранспорте с возрастанием концентрации

а — поток малой концентрации взвеси; б — флюидный поток; в — плотный поток

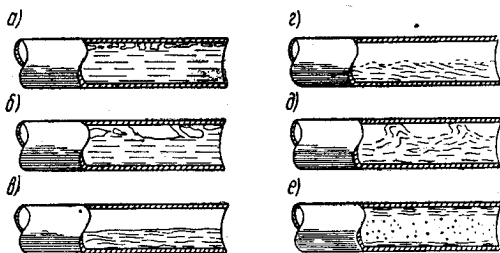


Рис. XV.16. Структуры газожидкостных потоков

где $Re_d = \rho v d / \mu$ — число Рейнольдса для дисперсоида. При этом плотность дисперсоида ρ определяют по формуле

$$\rho = \rho_2 \beta + \rho_1 (1 - \beta), \quad (XV.56)$$

а динамическую вязкость дисперсоида — по формуле

$$\mu = \mu_1 (1 - \beta)^{-2,8}. \quad (XV.57)$$

Если скорости твердой и жидкой фаз различны, то истинную объемную концентрацию β определить невозможно и использование формул типа (XV.57) затруднительно.

Для практических расчетов в пневмо- и гидротранспорте широкое применение получила эмпирическая формула

$$\Delta p = \Delta p_1 (1 + \alpha x),$$

где Δp и Δp_1 — потери давления взвесенесущего потока и чистой жидкости (газа) соответственно;

α — эмпирический коэффициент, зависящий от вида транспортируемого материала, относительной крупности d/D (d — средний диаметр транспортируемых частиц, D — диаметр трубопровода) и относительной скорости v/v_a , где v_a — скорость витания.

При увеличении объемной концентрации твердых частиц сверх $\beta \geq 0,3$ расстояние между ними уменьшается, турбулентные пульсации заметно падают и начинается образование «флюидного» потока (рис. XV.15), который характеризуется уже не движением отдельных частиц в жидкости, а общим движением всей массы твердой фазы. При дальнейшем увеличении концен-

трации твердых частиц ($\beta > 0.4$), образуется так называемая «объемная решетка» движущегося фильтрующего слоя — формируется плотный поток (рис. XV.15). Перепад давления в этом случае расходуется лишь на трение частиц о стенки трубы и на преодоление веса транспортируемого материала в восходящих участках.

В газожидкостных потоках дискретной фазой является газ, непрерывной средой — жидкость. Потери давления при движении таких потоков складываются из потерь на трение и потерь на подъем газожидкостной смеси. Так как дискретная фаза в газожидкостных системах в процессе движения подвергается деформациям, то в отличие от взвесенесущих потоков газожидкостные потоки отличаются большим разнообразием режимов движения

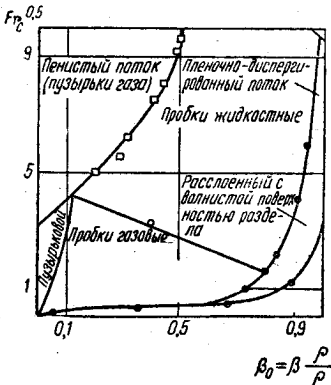


Рис. XV.17. Диаграмма структур потока

(рис. XV.16). При малых скоростях потока и малых объемных концентрациях почти все сечение занято жидкостью. Отдельные пузыри газа движутся в верхней части трубы со скоростью, близкой скорости жидкости (так называемый «пузырьковый» режим на рис. XV.16, а). При увеличении газосодержания газовые пузыри объединяются в пробки значительных размеров («пробковый» режим на рис. XV.16, б). Дальнейшее увеличение газосодержания приводит к расслоенному (стратифицированному) режиму, при котором газ и жидкость разделены плоской поверхностью раздела (рис. XV.16, в). При увеличении скорости газа на поверхности раздела образуются волны (рис. XV.16, г). При дальнейшем увеличении скорости газа волны достигают верхней части трубы — «снарядный» режим течения (рис. XV.16, д). Дальнейшее увеличение скоростей или снижение газосодержания способствует разрушению

границы раздела жидкость — газ. В этом режиме, называемом пленочно-диспергированным, часть жидкости в виде мелких капель взвешена в потоке газа, а часть жидкости в виде пленки движется по стенкам трубы (рис. XV.16, е). Переход от одного вида движения к другому зависит от концентрации газа и числа Фруда $Fr = v^2/gd$, где v — скорость газожидкостной смеси (рис. XV.17).

Локкарт и Мартинелли предложили метод, позволяющий с достаточной для инженерной практики точностью определить потери давления во всем диапазоне режимов движения газожидкостного потока, связывая эти потери с потерями давления однофазного потока жидкости при тех же условиях в виде

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_{ж}} = \Phi_{ж}^2.$$

Коэффициент $\Phi_{ж}^2$ зависит от режима течения газожидкостного потока и концентрации и может быть найден по формуле Чисхолма

$$\Phi_{ж}^2 = 1 + \frac{C}{B} + \frac{1}{B^2},$$

где параметр B , равный корню квадратному из отношения потерь напора жидкости к потерям напора газа, определяется из зависимости

$$B = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}-n} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{n}{2}-n} \left(\frac{1-x}{x}\right)$$

(здесь μ_1 и μ_2 ; ρ_1 и ρ_2 — динамические вязкости и плотности жидкости и газа соответственно).

Значения коэффициентов C и n зависят от гидравлических режимов движения каждой фазы.

Примеры к главе XV

Пример XV.1. В стальной трубопровод диаметром $d=0,1$ м и длиной 100 м поступает сжатый воздух при давлении (избыточном) $p_1=8,81 \cdot 10^5$ Па и температуре $t=20^\circ\text{C}$. Скорость в начале трубопровода $v_1=30$ м/с. Определить расход воздуха и давление в конце трубы. Вязкость воздуха $\nu=15,7 \times 10^{-6}$ м²/с. Абсолютная шероховатость стенок трубопровода $k_s=0,3$ мм.

Решение. Плотность воздуха в начале трубы

$$\rho_1 = \frac{981\,000}{287 \cdot 293} = 11,6 \text{ кг/м}^3.$$

Массовый расход сжатого воздуха

$$M = \rho_1 \omega v_1 = 11,6 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} 30 = 2,65 \text{ кг/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{30 \cdot 0,1 \cdot 10^6}{15,7} = 1,92 \cdot 10^5.$$

Относительная шероховатость

$$\frac{k_s}{d} = \frac{0,3}{100} = 0,003.$$

Коэффициент гидравлического трения

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_s}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4} = 0,11 (0,003 + 0,00035)^{1/4} = 0,0267.$$

Перепад давления по формуле (XV.36) равен:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1}; \quad \frac{(98 \cdot 10^4)^2 - p_2^2}{2} = 0,0267 \frac{100 \cdot 2,65^2 \cdot 4^2 \cdot 981\,000}{0,1 \cdot 2\pi^2 \cdot 0,1^4 \cdot 11,6} =$$

$$= 12,8 \cdot 10^{10} \text{ Па}^2,$$

откуда абсолютное давление в конце трубы $p_2 \approx 8,4 \cdot 10^5$ Па.

Пример XV.2. Газ с удельным весом $\gamma=1$ кгс/м³ от газгольдерной станции с расходом $Q=40\,000$ м³/ч поступает в основную магистраль диаметром $d=600$ мм, питающую распределительные сети. Определить конечное давление в магистрали p_2 , если длина ее $L=4$ км, а начальное давление $p_1=1,8$ ат. Кинематическая вязкость газа $\nu=16 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Трубопровод стальной ($k_s=0,01$ см).

Решение. Расчет ведем по формуле (XV.40), рекомендуемой СНиП, в соответствии с которой следует

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 1,45 \left(\frac{0,01}{60} + \frac{1922 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}{40\,000} \right)^{0,25} \frac{40\,000^2}{60^2} =$$

$$= 0,386 \text{ кгс}^2/\text{см}^4 \text{ на } 1 \text{ км.}$$

Конечное давление в магистрали

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - 0,386 L} = \sqrt{1,8^2 - 0,386 \cdot 4} = 1,32 \text{ ат.}$$

с учетом чего

$$\Delta p = p_1 - p_0 = 1,8 - 1,32 = 0,48 \text{ ат.}$$

Таким образом, действительно мы имеем дело с газопроводом с большим перепадом давления, так как

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{0,48}{1,8} 100\% = 26,6\%.$$

Пример XV.3. Найти потери давления на трение при движении воздуха в бетонной трубе диаметром $d=1$ м при давлении близком к атмосферному и температуре $t=20^\circ\text{C}$. Расход воздуха при заданных условиях $Q=15,6$ м³/с.

Решение. Заданному состоянию воздуха соответствуют кинематическая вязкость $\nu=15,7 \cdot 10^{-6}$ м²/с и плотность $\rho=1,16$ кг/м³.

Определяем скорость движения воздуха в трубе

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{15,6 \cdot 4}{\pi \cdot 1^2} = 20 \text{ м/с.}$$

Находим число Рейнольдса, характеризующее поток воздуха в трубе:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{20 \cdot 1}{15,7 \cdot 10^{-6}} = 1,28 \cdot 10^6.$$

Определяем относительную шероховатость трубопровода (при абсолютной эквивалентной шероховатости $k_a=0,5$ мм)

$$\frac{k_a}{d} = \frac{0,5}{1000} = 0,0005.$$

Находим величину коэффициента гидравлического трения по обобщенной формуле

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_a}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4} = 0,0164.$$

Определяем потерю давления на трение на 1 м длины трубы

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rho = 0,0164 \frac{1 \cdot 20^2 \cdot 1,16}{1 \cdot 2} = 3,8 \text{ Па на 1 м.}$$

Пример XV.4. Определить величину повышения давления в стальной водопроводной трубе, если скорость воды в трубе до удара $v=1$ м/с; диаметр трубы $d=0,5$ м; толщина стенок $\delta=5$ мм.

Решение. Находим величину скорости распространения ударной волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{1000 \left(\frac{1}{2 \cdot 10^9} + \frac{100}{2 \cdot 10^{11}} \right)}} = 1000 \text{ м/с;}$$

$$\Delta p = \rho c v = 1000 \cdot 1000 \cdot 1 = 1 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В том же трубопроводе при скорости $v=2$ м/с ударное давление было бы равно: $\Delta p=20 \cdot 10^5$ Па. Таким образом с повышением скорости давление повышается и возникает опасность аварии в трубопроводе.

Пример XV.5. Найти потерю давления на трение в воздуховоде диаметром $D=0,2$ м при скорости воздуха $v=15$ м/с, если шероховатость стенок воздуховода $k_a=0,2$ мм.

Решение. По номограмме на рис. XV.10 потеря давления для указанных условий $\Delta p = 1,29 \text{ кгс/м}^2$. При значении $k_3 = 0,2 \text{ мм}$ эта величина будет равна:

$$\Delta p = 1,29 \cdot 1,12 = 1,45 \text{ кгс/м}^2$$

(см. табл. XV.4).

Пример XV.6. Определить скорость витания в воздухе частицы, имеющей форму шара, если диаметр частицы $d = 0,0001 \text{ м}$, плотность материала частицы $\rho_{ТВ} = 600 \text{ кг/м}^3$, плотность воздуха $\rho_{Ж} = 1,2 \text{ кг/м}^3$, температура $t = 10^\circ \text{ С}$.

Решение. Задача решается последовательными приближениями.

Скорость витания находим по формуле

$$v_{в} = 3,62 \sqrt{\frac{\rho_{ТВ} d}{\rho_{Ж} C_{д}}}$$

Имея в виду малый размер частицы, в первом приближении пренебрегаем вторым членом в формуле (XV.51) и имеем

$$v_{в_1} = 0,545 \frac{d^2 \rho_{ТВ}}{\nu \rho_{Ж}} = 0,18 \text{ м/с.}$$

Затем определяем соответствующее этой скорости число Рейнольдса

$$Re = \frac{0,18 \cdot 0,0001 \cdot 10^6}{14,7} = 1,22$$

и находим уточненное значение коэффициента сопротивления

$$C_{д} = \frac{24}{1,22} + 0,67 \sqrt{C_{д}} = 21,8 + 0,67 \sqrt{C_{д}}, \text{ откуда } C_{д} = 25.$$

Скорость витания во втором приближении равняется:

$$v_{в_2} = 3,62 \sqrt{\frac{600 \cdot 0,0001}{1,2 \cdot 25}} \approx 0,16 \text{ м/с.}$$

Находим число Рейнольдса и коэффициент сопротивления, соответствующие этой скорости:

$$Re_2 = \frac{0,16 \cdot 0,0001 \cdot 10^6}{14,7} = 1,09;$$

$$C_{д} = \frac{24}{1,09} + 0,67 \sqrt{C_{д}} \approx 25,5,$$

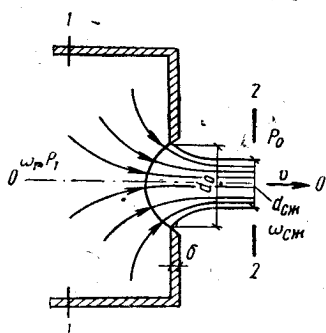
откуда скорость витания $v_{в_3} = 0,158 \text{ м/с}$, что практически совпадает с ее значением, определенным во втором приближении, поэтому дальнейших приближений можно не делать.

§ 79. Истечение жидкости из отверстий в тонкой стенке

Исследования истечения жидкости из отверстий и насадков имеют большое практическое значение, так как результаты этих исследований находят применение при решении многих технических задач (при измерении количества проходящей жидкости, при расчете и создании сильной, дальнобойной и компактной струи, при расчете распространения свободной струи в массе жидкости, расчете воздушных завес, обеспечении быстрого опорожнения резервуаров, при конструировании сопел и форсунок и в ряде других случаев).

Рассмотрим вначале явление истечения капельной жидкости из круглого отверстия диаметром d_0 в вертикальной тонкой стенке сосуда (рис. XVI.1). Стенку можно считать тонкой, если ее толщина $\delta < 0,2 d_0$. Давление в сосуде полагаем постоянным (движение установившееся) и равным p_1 . Истечение происходит в атмосферу, т. е. наружное давление равно p_0 ; площадь отверстия ω_0 , площадь сечения сосуда ω_1 . Основные задачи, интересующие инженера, — определение скорости истечения и расхода вытекающей жидкости.

Как показывают опыты, струя жидкости по выходе из отверстия сжимается и на некотором расстоянии от последнего (обычно равном 0,5 диаметра струи) приобретает наименьшую площадь сечения $\omega_{сж}$ (при диаметре $d_{сж}$). На рис. XVI.1 показаны линии токов, сходящиеся к отверстию в тонкой стенке.



Величина коэффициента сжатия струи

$$\varepsilon = \frac{\omega_{сж}}{\omega_0} \quad (\text{XVI.1})$$

зависит от отношения

$$n = \frac{\omega_0}{\omega_1}, \quad (\text{XVI.2})$$

называемого степенью сжатия.

Вид функции

$$\varepsilon = f(n) \quad (\text{XVI.3})$$

Рис. XVI.1. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке

определяется формулами, которые были приведены в гл. XIII.

Если площадь сечения отверстия ω_0 мала по сравнению с площадью сечения сосуда ω_1 (т. е. при $n \rightarrow 0$, что соответствует слу-

чаю так называемого совершенного сжатия), формула Жуковского упрощается к виду

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611. \quad (\text{XVI.4})$$

Это так называемая формула Кирхгофа.

Совершенное сжатие наблюдается практически при $n < 0,1$.

В обычных условиях при истечении воды из малых отверстий в больших резервуарах опыт дает значения коэффициента сжатия струи, находящиеся в пределах

$$\varepsilon = 0,61 \div 0,63, \quad (\text{XVI.5})$$

т. е. близкие к значению, определяемому формулой (XVI.4).

Скорость истечения. Для определения скорости истечения напишем уравнение Бернулли для сечений 1 и 2, причем сечение 2 проведем через наиболее сжатый участок струи $\omega_{сж}$:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha \omega^2}{2g} + h_w. \quad (\text{XVI.6})$$

Давление в сжатом сечении p/γ можно принять равным атмосферному, т. е. p_0/γ . Потери напора между сечениями 1 и 2 определяются формулой Вейсбаха

$$h_w = \zeta_0 \frac{v^2}{2g}, \quad (\text{XVI.7})$$

где ζ_0 — коэффициент сопротивления отверстия.

Тогда (принимая $\alpha_1 = \alpha \approx 1$)

$$\frac{v^2}{2g} (1 + \zeta_0) = \frac{p_1 - p_0}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}.$$

Решая это уравнение относительно v , находим

$$v = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0}} \sqrt{2g \left(\frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right) + v_1^2}.$$

Разделим обе части предыдущего равенства на v :

$$1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0}} \sqrt{\frac{2g}{v^2} \left(\frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right) + \frac{v_1^2}{v^2}}. \quad (\text{XVI.8})$$

Уравнению (XVI.8) можно придать также вид

$$1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0}} \sqrt{\frac{2g}{v^2} \left(\frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{сж}^2}{\omega_1^2}}. \quad (\text{XVI.9})$$

Имея в виду, что

$$\frac{\omega_{сж}^2}{\omega_1^2} = \frac{\omega_{сж}^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = \varepsilon^2 n^2 \quad (\text{XVI.10})$$

и возводя обе части уравнения (XVI.9) в квадрат, получим

$$1 = \frac{1}{1 + \zeta_0} \left[\frac{2g}{v^2} \left(\frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right) + \varepsilon^2 n^2 \right],$$

откуда имеем

$$v = \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}}}. \quad (\text{XVI.11})$$

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}}, \quad (\text{XVI.12})$$

где φ — так называемый коэффициент скорости.

В результате формула для скорости истечения принимает вид

$$v = \varphi \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma}}. \quad (\text{XVI.13})$$

Для случая малого отверстия ($n \rightarrow 0$)

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma}}. \quad (\text{XVI.14})$$

При малом влиянии вязкости (т. е. при истечении идеальной жидкости) $\zeta_0 = 0$; $\varphi = 1$ и вместо (XVI.14) получим

$$v = \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma}} = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_0}{\rho}}. \quad [(\text{XVI.15})]$$

т. е. известную формулу Торичелли.

При истечении воздуха и воды обычно

$$\varphi \approx 0,97 \div 0,98; \quad \zeta_0 \approx 0,06, \quad (\text{XVI.15a})$$

т. е. всего около 2—3% располагаемой разности давлений затрачивается на преодоление сопротивлений.

Расход жидкости, выходящей из отверстия, находим по формуле

$$Q = \omega_{сж} v. \quad (\text{XVI.16})$$

Подставляя вместо $\omega_{сж}$ и v их значения, имеем

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} \varepsilon \omega_0 \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma}}$$

Введем обозначение

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} = \varphi \varepsilon, \quad (\text{XVI.17})$$

где μ_0 — коэффициент расхода отверстия.

Тогда получим выражение для расхода в виде

$$Q = \mu_0 \omega_0 \sqrt{2g \frac{p_1 - p_0}{\gamma}}. \quad (\text{XVI.18})$$

В соответствии с формулой (XVI.17) коэффициент расхода отверстия μ_0 представляет собой произведение коэффициента сжатия струи ε на коэффициент скорости φ . Учитывая зависимость ε от n , можно найти также зависимость $\mu_0 = f(n, \zeta_0)$.

Значения μ_0 для разных n при истечении жидкости с большими числами Рейнольдса (когда можно пренебречь влиянием вязкости, т. е. принимать $\zeta_0 = 0$) приведены в табл. XVI.1.

Таблица XVI.1

Значения коэффициента расхода отверстия μ_0 при различной степени сжатия (при $Re \rightarrow \infty$)

n	μ_0	n	μ_0
0	0,611	0,5	0,678
0,1	0,614	0,6	0,724
0,2	0,622	0,7	0,787
0,3	0,634	0,8	0,888
0,4	0,65	0,9	1,09

При истечении из малых отверстий ($n \rightarrow 0$) из формулы (XVI.17) имеем

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \zeta_0}}. \quad (\text{XVI.19})$$

При истечении воды и воздуха [учитывая (XVI.5) и (XVI.15 а)] для рассматриваемого случая коэффициент расхода

$$\mu_0 \approx 0,6.$$

В случае истечения из сосудов со свободной поверхностью (рис. XVI.2) уравнение расхода записывается в виде

$$Q = \mu_0 \omega_0 \sqrt{2gH}, \quad (\text{XVI.20})$$

где H — высота уровня жидкости в сосуде над центром отверстия.

Если пространство, куда вытекает жидкость, также заполнено жидкостью (рис. XVI.3), то истечение происходит под уровень (иное название — истечение через затопленное отверстие). В этом случае в выходящей из отверстия струе давление отличается от атмосферного и формула расхода принимает вид

$$Q = \mu_3 \omega_0 \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} = \mu_3 \omega_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu_3 \omega_0 \sqrt{2gH}, \quad (\text{XVI.21})$$

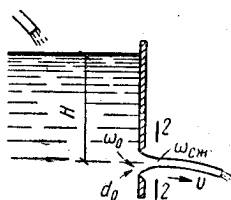


Рис. XVI.2. Истечение жидкости из сосуда со свободной поверхностью

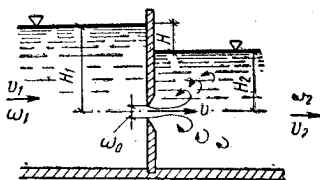


Рис. XVI.3. Истечение жидкости под уровень (затопленное истечение)

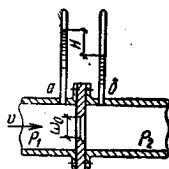


Рис. XVI.4. Схема измерительной диафрагмы

где p_2 — давление в сосуде, куда вытекает жидкость;
 H — разность уровней в обоих сосудах;
 μ_3 — коэффициент расхода при истечении под уровень, который может быть найден из формулы [5]

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon^2 m^2 - \varepsilon^2 n^2 + \zeta_0 + 1 - 2\varepsilon m}}, \quad (\text{XVI.22})$$

где $m = \omega_0/\omega_2$, т. е. отношение площади отверстия к площади сосуда, в который вытекает жидкость. Коэффициент сжатия при затопленном истечении практически не отличается от коэффициента сжатия при истечении через незатопленное отверстие.

В случае отверстия малых размеров по сравнению с размерами сосуда ($n \rightarrow 0$ и $m \rightarrow 0$)

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \zeta_0}},$$

т. е. совпадает со значением коэффициента расхода при незатопленном истечении.

Зависимость (XVI.21) между проходящими через отверстие расходом и перепадом давления может быть использована для измерения расхода жидкости с помощью измерительной диафрагмы (рис. XVI.4). Измерительная диафрагма обычно выпол-

няется в виде плоской перегородки с круглым отверстием в центре и устанавливается между фланцами трубопровода. Края отверстия имеют острые входные кромки под углом 45° или же закругляются примерно по форме втекающей в отверстие струи жидкости. Для измерения перепада давления до и после диафрагмы служат два пьезометра a и b или дифференциальный манометр. Коэффициент расхода можно определить по формуле (XVI.22), положив в ней $m=n$ (так как площади сечения трубы до и после диафрагмы одинаковы), в результате чего она получает вид

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 n^2 + \zeta_0 + 1 - 2\varepsilon n}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon n)^2 + \zeta_0}}$$

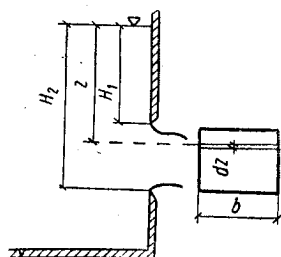


Рис. XVI.6. Схема здания с двумя отверстиями

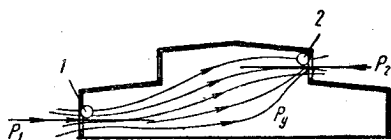


Рис. XVI.5. Истечение жидкости через прямоугольное отверстие больших размеров

При больших числах Рейнольдса $\zeta_0=0$ и коэффициент расхода диафрагмы определяется из формулы

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon n}$$

Таким образом, в этом случае коэффициент расхода зависит только от степени стеснения сечения трубопровода. Практически коэффициент расхода определяют для каждого типа диафрагмы опытным путем.

При определении расхода жидкости, вытекающей через прямоугольные отверстия больших размеров (рис. XVI.5), формула (XVI.18) уже не может быть использована, так как в этом случае давление различно для разных точек сечения отверстия.

Выделим в отверстии элементарную полоску шириной b и высотой dz . Расход через такую полоску составляет

$$dQ = \mu b dz \sqrt{2gz}$$

где z — расстояние от элементарной полоски до поверхности жидкости в сосуде.

Полный расход отверстия определяем интегрированием по высоте отверстия, полагая μ постоянным (т. е. не зависящим от напора z):

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} dQ = \mu b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} z^{1/2} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} [H_2^{3/2} - H_1^{3/2}]. \quad (\text{XVI.23})$$

Аналогично (интегрированием) можно найти расход через круглое отверстие больших размеров.

При обтекании зданий ветром разность статических давлений на наветренной и подветренной поверхностях здания приводит к перетеканию воздуха. Рассмотрим воздухообмен в помещении, обтекаемом ветром. Пусть на этих поверхностях имеются отверстия 1 и 2 (рис. XVI.6). Предположим для простоты, что температура воздуха в помещении равна температуре наружного воздуха. В этом случае количество (массовый расход) воздуха, поступающего в помещение через отверстие 1,

$$M_1 = \mu_1 \omega_1 \sqrt{2\rho (p_1 - p_y)},$$

где μ_1 — коэффициент расхода отверстия 1;
 ω_1 — площадь отверстия 1;
 ρ — плотность воздуха;
 p_1 — давление ветра в области отверстия 1;
 p_y — внутреннее давление в помещении.

Массовый расход воздуха, выходящего из помещения через отверстие 2,

$$M_2 = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2\rho (p_y - p_2)}.$$

В этом соотношении все величины относятся к отверстию 2. По уравнению неразрывности $M_1 = M_2$. В результате получаем

$$p_y = \frac{\omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (\text{XVI.24})$$

Принимая во внимание, что [см. формулу (XIV.5)]

$$p_1 = k_1 \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \quad p_2 = k_2 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \quad \text{и} \quad p_y = k_y \frac{\rho u_\infty^2}{2},$$

можно переписать соотношение (XVI.24) в виде

$$k_y = \frac{k_1 \omega_1^2 + k_2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (\text{XVI.24a})$$

Тогда выражения для расхода воздуха принимают вид [7]:

$$M_1 = \mu_1 \omega_1 \rho u_\infty \sqrt{k_1 - k_y};$$

$$M_2 = \mu_2 \omega_2 \rho u_\infty \sqrt{k_y - k_2}.$$

После подстановки выражения для k_v в эти формулы находим

$$M_1 = M_2 = \mu r u_\infty \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \sqrt{k_1 - k_2}. \quad (\text{XVI.25})$$

Из полученного соотношения следует, что интенсивность воздухообмена прямо пропорциональна скорости ветра и корню квадратному из алгебраической суммы аэродинамических коэффициентов в обоих отверстиях.

При большом числе отверстий регулировкой их площадей можно добиться оптимального воздухообмена в помещении, когда все нижние отверстия работают на приток, а верхние — на вытяжку воздуха из помещения.

§ 80. Истечение жидкости через насадки.

Если стенка, через отверстие в которой происходит истечение, имеет значительную толщину по сравнению с размерами отверстия, то характер истечения существенным образом меняется



Рис. XVI.7. К расчету истечения жидкости из насадка. Типы насадков (а); истечение из наружного цилиндрического насадка (б)

1 — наружный цилиндрический; 2 — внутренний цилиндрический; 3 — конический сходящийся; 4 — конический расходящийся; 5 — конический

вследствие направляющего влияния, оказываемого стенкой на струю. Такое же явление наблюдается, если к отверстию в тонкой стенке присоединить (насадить) короткую трубку того же диаметра, что и отверстие. Такие трубки, называемые насадками или соплами, имеют обычно длину не меньше 2,5—3 диаметров отверстия.

На рис. XVI.7, а показаны наиболее распространенные типы насадков.

Присоединение насадка к отверстию изменяет вытекающий из сосуда расход, а следовательно, оказывает влияние на время опорожнения сосуда, дальность полета струи и т. д.

Начнем рассмотрение с наружного цилиндрического насадка (рис. XVI.7, б). Струя жидкости при входе в насадок сжимается, после чего вновь расширяется и заполняет все его сечение. В промежутке между сжатым сечением и стенками насадка образуется вихревая зона. Так как струя выходит из насадка полным сечением, то коэффициент сжатия струи $\epsilon = 1$, а коэффициент расхода $\mu = \epsilon \varphi = \varphi$, т. е. для насадка коэффициент расхода и коэффициент скорости имеют одинаковую величину. Составим

уравнение Бернулли для сечений 1 и 2, показанных на рис. XVI.7, б:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w^{1-2}.$$

Так же как и при истечении из отверстия, в этом случае можно получить

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + h_w^{1-2}. \quad (\text{XVI.26})$$

Потери напора в насадке складываются из потерь на вход в насадку и на внезапное расширение сжатой струи внутри насадки, т. е.

$$h_w^{1-2} = \zeta_0 \frac{v_{сж}^2}{2g} + \frac{(v_{сж} - v_2)^2}{2g}. \quad (\text{XVI.27})$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$v_{сж} = \frac{v_2 \omega_2}{\omega_{сж}} = \frac{v_2}{\varepsilon}. \quad (\text{XVI.28})$$

Подставляя (XVI.28) в (XVI.27), получим

$$\begin{aligned} h_w^{1-2} &= \zeta_0 \frac{v_2^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \\ &= \frac{v_2^2}{2g} \left[\frac{\zeta_0}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} + 1 \right] = \zeta_c \frac{v_2^2}{2g}. \end{aligned} \quad (\text{XVI.29})$$

Уравнение (XVI.26) с учетом (XVI.29) запишется в виде

$$H = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 + \frac{\zeta_0}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \right] = \frac{v_2^2}{2g} (1 + \zeta_c),$$

а скорость истечения из насадка

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_c}} \sqrt{2gH}. \quad (\text{XVI.30})$$

или

$$v_2 = \varphi_H \sqrt{2gH}, \quad (\text{XVI.31})$$

где введено обозначение

$$\varphi_H = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_c}}.$$

Для расхода получим формулу

$$Q = v_2 \omega_2 = \omega_2 \Phi_H \sqrt{2gH}.$$

Сравнивая со стандартной формулой

$$Q = \mu_H \omega_2 \sqrt{2gH},$$

приходим к заключению, что

$$\mu_H = \Phi_H. \quad (\text{XVI.32})$$

Таким образом, формулы скорости и расхода для насадка имеют тот же вид, что и для отверстия в тонкой стенке, но значения коэффициентов будут другими.

При истечении с большими числами Re ($\zeta_0 \approx 0$) для коэффициента сжатия струи приближенно принимаем $\varepsilon \approx \frac{\pi}{\pi+2}$, в результате чего

$$\mu_H = \Phi_H = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \approx 0,845. \quad (\text{XVI.33})$$

При истечении воды и воздуха в обычных условиях можно полагать

$$\mu_H = \Phi_H \approx 0,82. \quad (\text{XVI.34})$$

что отвечает значению $\zeta_0 = 0,06$.

Сравнивая коэффициенты расхода и скорости для насадка и отверстия в тонкой стенке, видим, что насадок увеличивает расход и уменьшает скорость истечения. Действительно, для больших значений Re :

$$\frac{\mu_H}{\mu_{отв}} = \frac{0,845}{0,611} = 1,38;$$

$$\frac{\Phi_H}{\Phi_{отв}} = \frac{0,845}{1} = 0,845,$$

т. е. насадок увеличивает расход более чем на 35% и уменьшает скорость примерно на 15%.

Для насадка характерно, что давление в сжатом сечении струи внутри насадка меньше атмосферного. Действительно,

$$\frac{v_{сж}}{v_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{сж}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi+2}{\pi} \approx 1,64,$$

т. е. скорость в сжатом сечении насадка на 64% больше скорости истечения из него. Это означает, что давление внутри насадка должно быть меньше давления на выходе из него. А так как давление на выходе из насадка атмосферное, то внутри него должен

быть вакуум. Для определения величины вакуума в сжатом сечении насадка напишем уравнение Бернулли, связывающее это сечение с выходным сечением:

$$\frac{p_{сж}}{\gamma} + \frac{v_{сж}^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_{сж} - v_2)^2}{2g}, \quad (\text{XVI.35})$$

где $\frac{(v_{сж} - v_2)^2}{2g}$ — потери напора на внезапное расширение струи

$$\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_{сж}}{\gamma} = \frac{p_{\text{вак}}}{\gamma} = \frac{2v_{сж} v_2}{2g} - \frac{2v_2^2}{2g};$$

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\gamma} = 2 \frac{v_2^2}{2g} (v_{сж} - 1) = 2 \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right).$$

Подставляя значение $\varepsilon = \frac{\pi}{\pi+2}$, получим

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\gamma} = 2 \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\pi+2}{\pi} - 1 \right) = \frac{4}{\pi} \frac{v_2^2}{2g}.$$

Но

$$\frac{v_2^2}{2g} = \varphi_{\text{н}}^2 H.$$

Подставляя сюда значение $\varphi_{\text{н}}$ из (XVI.33), имеем

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} H.$$

Обозначим $p_{\text{вак}}/\gamma = h_{\text{вак}}$. Тогда

$$h_{\text{вак}} = \frac{4\pi H}{\pi^2 + 4} \approx 0,9H. \quad (\text{XVI.36})$$

При истечении воды обычно принимают $h_{\text{вак}} \approx 0,75 H$.

В соответствии с уравнением (XVI.36) величина вакуума зависит от напора, возрастая с его увеличением. Однако существует максимальная возможная величина для вакуума

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = 10,33 \text{ м вод. ст.} \quad (\text{XVI.37})$$

Эта предельная величина вакуума будет достигнута при некотором предельном напоре $H_{\text{пр}}$, величина которого может быть найдена для больших Re из уравнения (XVI.36) при подстановке туда вместо $h_{\text{вак}}$ его максимального значения:

$$H_{\text{пр}} = \frac{\pi^2 + 4}{4\pi} 10,33 \approx 11,6 \text{ м.}$$

Увеличение напора сверх $H_{пр}$ приведет к отрыву струи от стенок насадка, причем вакуум исчезнет и насадок будет работать как отверстие в тонкой стенке.

Все сказанное в отношении наружного цилиндрического насадка справедливо лишь для случая, когда

$$\frac{l}{d} \geq 2 + 3, \quad (\text{XVI.38})$$

где l — длина насадка.

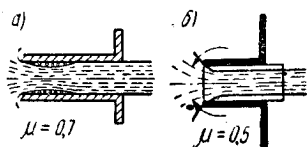


Рис. XVI.8. Истечение жидкости через внутренний цилиндрический насадок

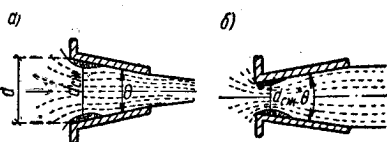


Рис. XVI.9. Истечение жидкости через конические насадки

При меньших значениях l/d вихревая зона соединяется с наружной атмосферой, вакуум пропадает, струя отрывается от стенок и истечение происходит так же, как из отверстия в тонкой стенке (т. е. насадок не дает увеличения расхода по сравнению с отверстием). Поэтому соотношение (XVI.38) является критерием, позволяющим установить, какой характер имеет истечение — как из насадка или как из отверстия, чем и определяется выбор коэффициентов скорости и расхода.

С другой стороны, при увеличении длины насадка начинают играть роль потери напора на трение, в результате чего коэффициент расхода насадка уменьшается с увеличением l/d . При $l/d > 60$ расход через насадок может оказаться меньше, чем расход через отверстие в тонкой стенке. Ниже приведены значения коэффициента расхода μ для наружного цилиндрического насадка при разном отношении l/d (при истечении с большими Re).

l/d	1,66	3,33	5	6,66	8,33	10	13,33	16,66	20
μ	0,809	0,814	0,799	0,796	0,787	0,778	0,761	0,743	0,725

Если насадок присоединяется к отверстию с внутренней стороны (рис. XVI.8, а), то струя на входе испытывает большее сжатие, чем в наружном цилиндрическом насадке; поэтому коэффициенты скорости и расхода здесь меньше; в опытах эти коэффициенты для воды равны:

$$\varphi = \mu = 0.71. \quad (\text{XVI.39})$$

При малой длине внутреннего цилиндрического насадка ($l < 1,5 d$) струя вытекает из насадка, не касаясь его стенок (рис. XVI.8, б). В этом случае $\varphi = 0,98$; $\varepsilon = 0,5$; $\mu = 0,49$.

Таким образом, коэффициент расхода внутреннего цилиндри-

ческого насадка меньше, чем наружного. Поэтому для уменьшения потерь при входе в трубу нужно следить за тем, чтобы труба не выступала за внутреннюю поверхность резервуара. Более рационально крепить трубы к стенкам резервуаров с помощью наружных колец.

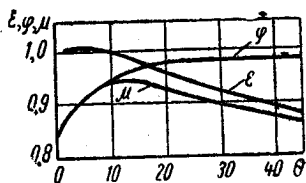


Рис. XVI.10. Зависимость коэффициентов истечения для сходящегося насадка от угла конусности θ

В случае конического сходящегося насадка (рис. XVI.9, а) сжатие струи на входе меньше, чем в наружном цилиндрическом, но зато появляется внешнее сжатие на выходе из насадка, после чего в дальнейшем жидкость течет параллельными струйками. Вследствие меньшего внутреннего сжатия потери напора в этом насадке меньше, чем в наружном цилиндрическом, скорость больше, коэффициент сжатия струи на входе меньше.

Коэффициенты ξ , φ , μ , ε насадка зависят от угла конусности θ . На рис. XVI.10 представлены кривые, из которых видно, что с увеличением θ коэффициент расхода μ вначале возрастает, достигает максимума ($\mu = 0,945$) при $\theta \approx 13^\circ$, а затем начинает убывать.

Отметим, что приведенные значения коэффициентов относятся к выходному сечению насадка; если же эти коэффициенты отнести к сечению отверстия в стенке, то мы получим более низкие значения, как это следует из зависимости

$$\mu_0 = \mu_{\text{вых}} \frac{\omega_{\text{вых}}}{\omega_0} \quad (\text{XVI.40})$$

Конические сходящиеся насадки применяют в тех случаях, когда при данном напоре нужно получить большую скорость истечения, большие дальность полета струи и силу ее удара (например, в пожарных брандспойтах, в гидромониторах при гидромеханизации и т. п.).

Конический расходящийся насадок. Для конически расходящегося насадка (рис. XVI.9, б) внутреннее сжатие значительно больше, чем в конически сходящемся и цилиндрическом насадках, поэтому здесь сильно возрастают потери и уменьшается коэффициент скорости φ ; внешнего сжатия при выходе из насадка здесь нет, т. е. $\varepsilon = 1$.

Коэффициент истечения зависит от угла конусности θ . При $\theta < 8^\circ$ в среднем можно принимать $\varphi_{\text{вых}} = \mu_{\text{вых}} = 0,45$; при $\theta = 12^\circ$ (предельный угол) $\mu_{\text{вых}} = \varphi_{\text{вых}} = 0,26$. При $\theta > 12^\circ$ насадок перестает работать полным сечением; происходит отрыв струи, струя вытекает, не касаясь стенок, и истечение происходит, как из отверстия в тонкой стенке.

Если отнести коэффициент расхода не к выходному сечению, а к входному, то мы получим значительно более высокие значения коэффициента расхода.

Конически расходящиеся насадки целесообразно применять в тех случаях, когда при заданном напоре нужно увеличить расход и в то же время уменьшить скорость истечения жидкости (например, желая избежать размыв грунта). Форму расходящихся насадков имеют трубы под насыпями дорог, расходящиеся насадки применяют для замедления подачи смазочных веществ и пр.

В конически расходящихся насадках в месте сжатия струи создается больший вакуум, чем в наружных цилиндрических насадках, и поэтому их используют там, где необходимо достичь значительный всасывающий эффект (в инжекторах, эжекторах и других аналогичных устройствах).

Средние значения коэффициентов истечения воды из отверстий и насадков

Тип отверстия и насадка	φ	ϵ	μ
Круглое отверстие в тонкой стенке	0,97	0,62—0,64	0,61
Наружный цилиндрический насадок	0,82	1	0,82
Внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда)	0,71	1	0,71
Внутренний короткий насадок	0,98	0,5	0,49
Конический сходящийся насадок ($\theta=13^{\circ}24'$)	0,963	0,982	0,946
Конический расходящийся насадок ($\theta=8^{\circ}$)	0,45	1	0,45
Коноидальный насадок	0,98	1	0,98

Примечание. Для конических насадков коэффициенты относятся к сечению выходного отверстия.

В коноидальном насадке (рис. XVI.7), повторяющем очертание струи, вытекающей из отверстия в тонкой стенке, коэффициенты скорости и расхода больше, чем во всех случаях, рассмотренных ранее, а именно: $\varphi = \mu = 0,97 - 0,995$. На практике коноидальные насадки применяются сравнительно редко из-за большой трудности их изготовления; вместо них обычно используют конически сходящиеся насадки.

В табл. XVI.2 приводятся средние значения коэффициентов истечения воды для насадков различных типов.

§ 81. Влияние вязкости жидкости на истечение из отверстий

Приведенные выше значения коэффициентов истечения для отверстий и насадков различной формы справедливы для условий, когда влияние вязкости на истечение не проявляет себя в сколько-нибудь заметной степени. Для этого должно соблюдаться неравенство:

$$Re_0 \geq 100\,000, \quad (XVI.41)$$

где Re_0 — число Рейнольдса для отверстий, имеющее выражение

$$Re_0 = \frac{\sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma} d}}{\nu} = \frac{\sqrt{2gHd}}{\nu}. \quad (XVI.42)$$

При истечении из отверстий и насадков жидкостей повышенной вязкости (например, при подаче смазочных масел, при подаче топлива в форсунках и др.) условие (XVI.41) не соблюдается.

ется и все коэффициенты истечения (μ , φ , ε , ζ) могут меняться в зависимости от числа Re_0 . Зависимость коэффициентов истечения от Re_0 наблюдается также при истечении воды из отверстий малого диаметра, когда числа Рейнольдса, характеризующие истечение, также малы.

На рис. XVI.11 приведены зависимости коэффициентов μ , φ и ε от числа Re_0 для случая истечения из малого отверстия в тонкой стенке. Из рисунка видно, что значения коэффициента скоро-

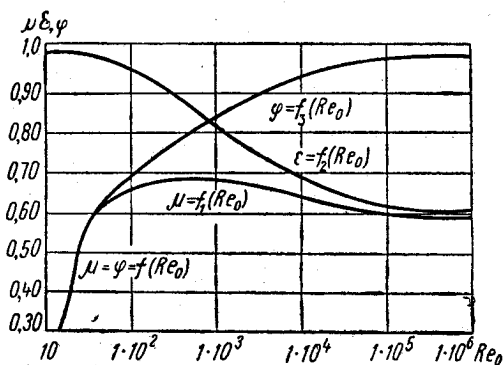


Рис. XVI.11. Зависимость коэффициентов истечения из отверстия в тонкой стенке от числа Рейнольдса (график А. Д. Альтшуля)

сти φ возрастают с увеличением Re_0 , приближаясь к 1 при больших Re_0 . Значения коэффициента ε уменьшаются от 1 до 0,6, а изменение коэффициента μ имеет более сложный характер (сначала увеличивается, а затем уменьшается после достижения максимума). Для сравнительно больших чисел Рейнольдса ($Re_0 > 10\,000$) изменение коэффициента расхода μ можно выразить эмпирической формулой [5]

$$\mu = 0,592 + \frac{5,5}{\sqrt{Re_0}} . \quad (XVI.43)$$

§ 82. Истечение жидкости при переменном напоре

Значительный интерес представляет случай истечения жидкости при переменном уровне. Подобные задачи встречаются при вытекании жидкости из баков, бассейнов, резервуаров. Обычно требуется определить время, необходимое для наполнения или опорожнения той или иной емкости.

Рассмотрим простейший случай истечения жидкости в атмосферу через отверстие площадью ω в дне сосуда призматической формы (рис. XVI.12) площадью Ω .

Движение жидкости при этом является неустановившимся, так как напор изменяется с течением времени, а следовательно, меняется со временем и расход вытекающей жидкости.

Допустим, что уровень в данный момент времени находится на высоте h . За бесконечно малый промежуток времени dt , в течение которого уровень в сосуде опустится на величину dh , течение можно считать установившимся. За это время из отверстия вытекает объем жидкости $dW = Q dt$, или

$$dW = \mu\omega \sqrt{2gh} dt. \quad (\text{XVI.44})$$

С другой стороны, вытекающий объем можно представить также в виде

$$dW = -\Omega dh \quad (\text{XVI.45})$$

(знак минус здесь нужно брать потому, что dW есть величина положительная, а dh — отрицательная).

Приравнявая (XVI.44) и (XVI.45), имеем

$$-\Omega dh = \mu\omega \sqrt{2gh} dt,$$

откуда

$$dt = -\frac{\Omega dh}{\mu\omega \sqrt{2gh}}.$$

Для определения времени опорожнения сосуда от уровня H_1 до уровня H_2 интегрируем это уравнение от $h = H_1$ до $h = H_2$:

$$t = -\int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega dh}{\mu\omega \sqrt{2gh}} = \int_{H_2}^{H_1} \frac{\Omega dh}{\mu\omega \sqrt{2gh}}.$$

или

$$t = \frac{\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{2\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} [V\overline{H_1} - V\overline{H_2}]. \quad (\text{XVI.46})$$

При полном опорожнении сосуда $H_2 = 0$, и, следовательно,

$$t = \frac{2\Omega \sqrt{H_1}}{\mu\omega \sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega \sqrt{2gH_1}} = \frac{2\Omega H_1}{Q} = 2t_1, \quad (\text{XVI.47})$$

так как $\mu\omega \sqrt{2gH_1} = Q$ — расход, вытекающий при постоянном напоре H_1 , а $t_1 = \frac{\Omega H_1}{Q}$ — время, потребное для того, чтобы тот же объем жидкости вышел из сосуда при сохранении постоянного уровня. Как видим, для этого требуется вдвое больше времени.

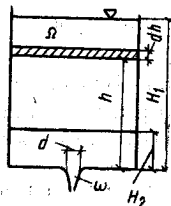


Рис. XVI.12.
Истечение жидкости при переменном уровне

Для резервуара с переменной площадью поперечного сечения $\Omega = f(h)$ и уравнение (XVI.47) принимает вид

$$t = \int_{H_2}^{H_1} \frac{f(h)}{\mu \omega \sqrt{2gh}} dh. \quad (\text{XVI.48})$$

Отметим, что при сделанном рассмотрении коэффициент расхода μ предполагается постоянным. Это предположение справедливо при больших числах Рейнольдса, но не отвечает действительности при малых числах Re_0 , когда $\mu = f(Re_0)$ и, следовательно, $\mu = f(h)$, поскольку

$$Re_0 = \frac{\sqrt{2g} d \sqrt{h}}{\nu}.$$

Поэтому для малых значений Re_0 ($Re_0 < 10$) время опорожнения следует определять из формулы [5]

$$t = \frac{29 \Omega \nu}{g \omega d} \lg \frac{H_1}{H_2}, \quad (\text{XVI.49})$$

которая хорошо подтверждается опытными данными.

§ 83. Влияние поверхностного натяжения и воронкообразования на истечение жидкостей из отверстий

Влияние поверхностного натяжения на коэффициент расхода проявляется при истечении жидкости из отверстий малого диаметра. Опыты показывают, что с ростом влияния поверхностного натяжения уменьшается коэффициент скорости φ (т. е. растут потери напора) и возрастает коэффициент сжатия струи ϵ . Увеличение потерь напора с ростом влияния поверхностного натяжения объясняется снижением эффективного напора на величину (см. § 3 введения)

$$h_s = \frac{2\sigma}{\gamma d_{сж}},$$

где $d_{сж}$ — диаметр струи в сжатом сечении;
 γ — удельный вес жидкости.

Из этой формулы следует, что при малых диаметрах отверстия напор может заметно уменьшиться, что особенно чувствительно при малых напорах.

Относительное влияние сил поверхностного натяжения определяется числом Вебера

$$We = \frac{\rho v^2 d}{\sigma},$$

где v — скорость в сжатом сечении струи; d — диаметр отверстия.

Чем меньше число Вебера, тем больше относительное влияние сил поверхностного натяжения. При больших значениях числа Рейнольдса и числа Фруда коэффициент расхода отверстия зависит только от числа Вебера, уменьшаясь с увеличением этого числа (см. рис. XVI.13). Эта зависимость может быть представлена формулой [5]

$$\mu = 0,59 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{We}} \right). \quad (\text{XVI.50})$$

При асимметричном подходе потока к отверстию жидкость приобретает вращательное движение, возникает вихревая воронка с воздушным ядром, проникающая в сливное отверстие. При этом коэффициент расхода может в несколько раз уменьшиться по сравнению с течением без воронки. В технике используются сооружения и устройства (например, гидроциклоны-классификаторы, циклоны для очистки воздуха от пыли и др.), работа которых основана на гидродинамических особенностях вращающейся жидкости.

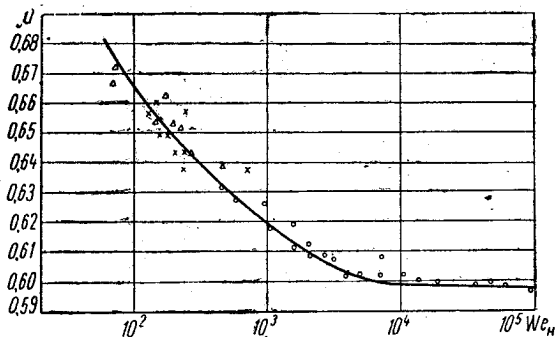


Рис. XVI.13. Влияние поверхностного натяжения на коэффициент расхода отверстия

Отметим, что вращение жидкости само по себе не влияет на коэффициент расхода. Снижение коэффициента расхода наступает при проникании воздушного ядра воронки в сливное отверстие (рис. XVI.14).

Это явление наступает при определенном значении так называемой интенсивности воронки

$$E = \frac{V}{\sqrt{gH}} \left(\frac{d}{R} + 4 \frac{R}{d} \right),$$

где V — окружная составляющая вектора скорости на расстоянии R от оси вращения;

d — диаметр сливного отверстия;

H — напор.

При $E > 0,6 - 0,7$ начинается снижение коэффициента расхода отверстия.

Коэффициент расхода горизонтального донного отверстия с острыми кромками в случае воронкообразования можно найти по формуле М. С. Марголина [5]

$$\mu = 0,795 - 0,256 E,$$

действительной при $E = 0,8 - 2,2$.

§ 84. Истечение газов из отверстий

Рассмотрим истечение газа из резервуара через небольшое отверстие при поддержании в резервуаре постоянного давления. Прежде всего найдем скорость истечения. Пусть (рис. XVI.15) внутри сосуда (сечение 1) давление равно p_1 , плотность газа ρ_1 , температура его T_1 , а у выхода из отверстия (сечение 2) соответственно p_2 , ρ_2 и T_2 . Скорость газа у выхода из отверстия v_2 , а внутри сосуда $v_1 \approx 0$.

Процесс истечения газа с термодинамической точки зрения можно считать адиабатическим, так как на весьма коротком пути от резервуара до сечения 2 влиянием теплообмена между выходящим газом и внешним пространством можно пренебречь (нет ни отвода, ни подвода тепла).

Запишем уравнение Бернулли (при адиабатическом процессе) для сечений 1 и 2, временно пренебрегая потерями

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1 g} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Пренебрегая геометрической высотой и скоростью подхода, имеем

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

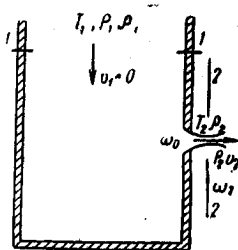
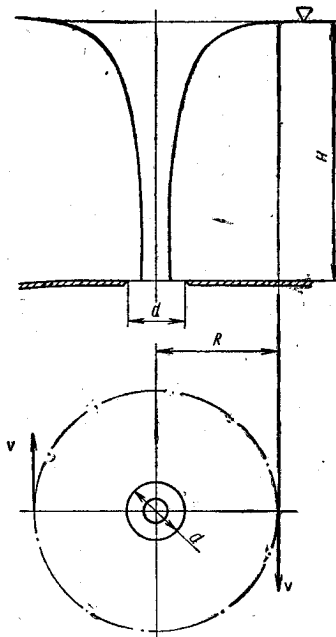


Рис. XVI.15. Истечение газа из отверстия в тонкой стенке

Рис. XVI.14. Воронкообразование при истечении из отверстия в тонкой стенке

или

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (\text{XVI.51})$$

Это выражение носит название формулы Сен-Венана для скорости истечения газа.

После преобразования (XVI.51) имеем

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{v_2^2}{2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\rho_1}{p_1}$$

и, наконец,

$$\rho_2 = \rho_1 \left[1 - \left(\frac{k-1}{2} \right) \frac{v_2^2}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \right]^{k-1}. \quad (\text{XVI.52})$$

Разложив выражение в квадратных скобках по формуле бинома Ньютона и оставив только три первых члена разложения, получим

$$\left[1 - \left(\frac{k-1}{k} \right) \frac{v_2^2}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \right]^{k-1} = 1 - \frac{v_2^2}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} + \frac{1}{2k} \left(\frac{v_2^2}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \right)^2.$$

Тогда

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{v_2^2}{2} \rho_1 + \frac{1}{2k} \left(\frac{v_2^2}{2} \right) \frac{\rho_1^2}{\rho_1},$$

или

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho_1 \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{4k} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \right).$$

Имея в виду, что $k \frac{\rho_1}{\rho_1} = c_1^2$,

где c_1 — скорость распространения звука в покоящемся газе, имеем

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho_1 \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{4c_1^2} \right)$$

и

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{v_2}{2c_1} \right)^2 \right]}. \quad (\text{XVI.53})$$

Во всех случаях, когда отношение $\frac{v_2}{2c_1}$ значительно меньше 1 (т. е. при $v_2 \ll c_1$), этим отношением можно пренебречь и скорость можно определять по формуле

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}},$$

т. е. по полученной ранее формуле теоретической скорости истечения капельной жидкости.

Исходя из уравнения (XVI.17) находим массовый расход вытекающего газа (пренебрегая сжатием струи)

$$M = v_2 \omega \rho_2 = \rho_2 \omega \sqrt{2 \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{v_2}{\rho_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

где ω — площадь сечения отверстия, а с учетом того, что

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k}$$

$$M = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k} \omega \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \rho_1 \rho_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

или

$$M = \omega \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \rho_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (\text{XVI.54})$$

Влияние сжатия струи, скорости на подходе к отверстию и других неучтенных факторов учитывается, как при истечении несжимаемой жидкости, введением коэффициента расхода μ . Тогда окончательно получим

$$M = \mu \omega \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \rho_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (\text{XVI.55})$$

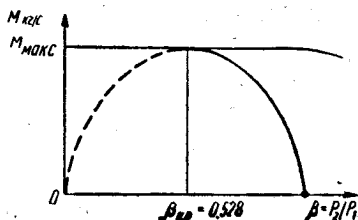


Рис. XVI.16. Зависимость массового расхода газа M от коэффициента μ

Исследуем формулу (XVI.54). При заданных ω , p_1 и ρ_1 массовый расход зависит от давления среды, куда происходит истечение, т. е. от величины отношения $\beta = p_2/p_1$. При $\beta=0$ $M=0$, при $\beta=1$ $M=0$.

Это означает, что при некотором критическом значении $\beta_{кр} = (p_2/p_1)_{кр}$ расход M достигает максимального значения $M_{макс}$. Зависимость $M=f(\beta)$ показана на рис. XVI.16. Для определения $\beta_{кр}$ найдем производную $dM/d\beta$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dM}{d\beta} = \frac{\omega}{2} \frac{\sqrt{2 \frac{k}{k-1} \rho_1 \rho_1 \left[\frac{2}{k} \beta^{\frac{2-k}{k}} - \frac{k+1}{k} \beta^{1/k} \right]}}{\sqrt{\beta^{2/k} - \beta^{\frac{k+1}{k}}}} = 0,$$

откуда

$$\frac{2}{k} \beta_{кр}^{\frac{2-k}{k}} = \frac{k+1}{k} \beta_{кр}^{1/k}$$

и

$$\beta_{кр} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{XVI.56})$$

То, что функция в квадратных скобках действительно имеет максимум при $p_2 = p_{кр}$, устанавливаем, взяв ее вторую производную и определив, что она меньше нуля.

Для воздуха $k = 1,405$ и формула (XVI.56) принимает вид

$$\beta_{кр} = \left(\frac{2}{2,41} \right)^{1,41/0,41} = 0,528 \approx 0,53, \quad (\text{XVI.57})$$

или

$$(p_2)_{кр} = 0,53 p_1. \quad (\text{XVI.58})$$

т. е. грубо говоря, критическое давление равно примерно половине давления в резервуаре. Подставляя полученное значение $\beta_{кр}$ в формулу для массового расхода, имеем

$$M_{\text{макс}} = \omega \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} - \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]},$$

или

$$M_{\text{макс}} = \omega \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} p_1 \rho_1} = \psi_{\text{макс}} \omega \sqrt{p_1 \rho_1}, \quad (\text{XVI.59})$$

где для воздуха и двухатомных газов $\psi_{\text{макс}} = 0,685$.

Скорость истечения, соответствующую максимальному расходу, называют критической скоростью:

$$v_{кр} = \frac{M_{\text{макс}}}{\omega \rho_2} = \frac{\sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} p_1 \rho_1}}{\rho_2} = \sqrt{k \frac{p_2}{\rho_2}} = c_2, \quad (\text{XVI.60})$$

так как $\sqrt{k \frac{p_2}{\rho_2}} = c_2$,

где c_2 — скорость звука, соответствующая условиям на выходе из отверстия (т. е. при заданной плотности и температуре газа).

Таким образом, максимальный расход соответствует критической скорости, которая вполне определяется состоянием газа в сосуде (p_1, T_1, ρ_1) и совершенно не зависит от противодействия p_2 той среды, куда происходит истечение.

В этом кроется существенное различие между истечением газов и капельных жидкостей.

При истечении капельных жидкостей давление в выходном сечении всегда равно давлению внешней среды $p_{вн}$, а скорость истечения и расход непрерывно возрастают с увеличением разности давлений $\Delta p = p_1 - p_{вн}$. При истечении газов давление в выходном сечении может быть различным в зависимости от величины отношения $p_{вн}/p_1$.

Если давление внешней среды больше критического давления (т. е. $p_{вн} > p_{кр}$ или $p_{вн}/p_1 > \beta_{кр}$), то внешнее давление передается внутрь выходящей струи и в выходном сечении устанавливается внешнее давление $p_{вн}$. Истечение происходит под действием разности давлений $\Delta p = p_1 - p_{вн}$. Скорость истечения и расход можно найти по формулам (XVI.51) и (XVI.55), подставляя в эти формулы вместо p_2 давление $p_{вн}$ той среды, куда происходит истечение газа.

С возрастанием разности $\Delta p = p_1 - p_{вн}$ (а при заданном значении $p_{вн}$ с возрастанием p_1) будут расти скорость истечения и расход газа.

Когда давление газа в резервуаре p_1 , повышаясь, достигнет такого значения, при котором соответствующее ему критическое давление $p_{кр}$ станет равным внешнему давлению, то скорость истечения достигнет критического значения, равного скорости звука, а расход — максимальной величины. Начиная с этого момента скорость и расход следует определять по тем же формулам (XVI.51) и (XVI.55), подставляя в них вместо отношения p_2/p_1 критическое значение

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{кр} = \beta_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Массовый расход газа при этом зависит от давления в резервуаре p_1 и возрастает с его увеличением, но не зависит от давления внешней среды $p_{вн}$, а следовательно, от величины отношения $p_{вн}/p_1$. Коэффициент расхода μ в формуле (XVI.55) можно представить, как обычно, в виде $\mu = \varphi \epsilon$, где φ — коэффициент скорости, который, как и в случае истечения несжимаемых жидкостей, зависит от числа Рейнольдса. При значительных числах Рейнольдса можно принимать (для отверстий в тонкой стенке) $\varphi = 0,98$.

Коэффициент сжатия струи ϵ при истечении из отверстий, сечение которых ω соизмеримо с сечением резервуара Ω , зависит от величины $n = \omega/\Omega$ и от перепада давлений p_2/p_1 . Для случая малого отверстия ($n \rightarrow 0$) можно принимать следующие значения ϵ :

p_2/p_1	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,53	0,5	0,4	0,3	0,2	0
ϵ	0,59	0,6	0,62	0,66	0,7	0,73	0,74	0,78	0,81	0,84	0,86

При критическом перепаде давлений $\epsilon \approx 0,73$.

Массовый расход воздуха, вытекающего из круглого отверстия в тонкой стенке сосуда, может быть найден также по приближенной формуле А. В. Теплова

$$M = 0,0348\omega \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{T_1}},$$

где T_1 — абсолютная температура внутри сосуда, К.

Примеры к главе XVI

Пример XVI.1. Определить расход и скорость вытекания воды из круглого отверстия диаметром $d = 0,03$ м в боковой стенке резервуара больших размеров. При этом напор воды над центром отверстия $H = 1$ м, температура воды $t = 20^\circ\text{C}$ ($\nu_B^{20} = 0,01$ Ст).

Решение. Определяем число Рейнольдса, характеризующее истечение,

$$Re_0 = \frac{\sqrt{2gH} d}{\nu} = \frac{\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 100} \cdot 3}{0,01} = 133\,000.$$

По графику (рис. XVI.11) находим значения коэффициентов истечения при найденном числе Рейнольдса: $\mu = 0,59$; $\varphi = 0,98$.

Определяем скорость истечения воды из отверстия

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = 0,98 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,3 \text{ м/с.}$$

Находим расход вытекающей воды

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,59 \frac{3,14 \cdot 0,03^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 0,00191 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Пример XVI.2. Воздух в резервуаре находится под давлением $p_1 = 108 \cdot 10^3$ Па при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Истечение происходит через отверстие с закругленными кромками в атмосферу ($p_{\text{ат}} = 101,5 \cdot 10^3$ Па). Определить величину вытекающего расхода и скорость истечения, если диаметр отверстия $d = 0,1$ м.

Решение. Находим величину критического давления $p_{\text{кр}} = 0,525 p_1 = 57\,000$ Па.

Так как $p_{\text{вн}} > p_{\text{кр}}$, то на выходе устанавливается давление $p_2 = p_{\text{ат}}$. Находим скорость истечения газа по формуле Сен-Венана

$$v = \sqrt{2 \frac{1,41}{0,41} 287 (273 + 27) \left[1 - \left(\frac{101\,500}{108\,000} \right)^{0,29} \right]}$$

откуда $v = 110$ м/с.

При столь малой разности давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 108 \cdot 10^3 - 101,5 \cdot 10^3 = 6500 \text{ Па}; \quad \Delta p / p_{\text{ат}} = \frac{6500}{101\,500} \approx 0,06$$

скорость истечения можно было бы найти и по формуле для несжимаемой жидкости:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101\,500}{287 \cdot 300} = 1,17 \text{ кг/м}^3;$$

$$v = \sqrt{2 \frac{6500}{1,17}} = 106 \text{ м/с.}$$

Расхождение со значением v , определенным по точной формуле, составляет всего 3,6%.

Находим объемный расход вытекающего газа (сжатие струи отсутствует):

$$Q = v\omega = 106 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,863 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Массовый расход газа при $\rho = 1,17$ кг/м³

$$M = 0,863 \cdot 1,17 \approx 1 \text{ кг/с.}$$

Более точно

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/k}$$

При $p_1 = 108\,000$ Па и $t = 27^\circ\text{C}$ (т. е. при $T = 300$ К)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{108\,000}{287 \cdot 300} = 1,25 \text{ кг/м}^3.$$

Поэтому

$$\rho = 1,25 \left(\frac{101\,500}{108\,000} \right)^{1/1,41} = 1,22 \text{ кг/м}^3$$

$$M = 1,22 \cdot 0,863 = 1,05 \text{ кг/с.}$$

Пример XVI.3. Определить расход и скорость истечения нефти из бака через отверстие диаметром $d=0,01$ м, если напор в баке поддерживается постоянным и равным $H=4$ м. Кинематическая вязкость нефти $\nu=0,2$ Ст.

Решение. Находим число Рейнольдса Re_0 , характеризующее истечение,

$$Re_0 = \frac{\sqrt{2gHd}}{\nu} = \frac{44,3 \cdot 20 \cdot 1}{0,2} \approx 4430.$$

Из рис. XVI.11 при $Re_0=4430$ имеем $\mu_n \approx 0,66$; $\varphi_n \approx 0,9$.
Определяем скорость истечения нефти из отверстия

$$v_n = \varphi_n \sqrt{2gH} = 0,9 \cdot 4,43 \sqrt{4} = 8 \text{ м/с.}$$

Находим объемный расход нефти

$$Q_n = \mu_n \omega \sqrt{2gH} = 0,66 \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} 4,43 \sqrt{4} \approx 460 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Для воды при тех же условиях

$$Re_0 = \frac{44,3 \cdot 1}{0,01} \sqrt{400} = 88\,600 \text{ и } \mu_b = 0,6,$$

откуда объемный расход воды

$$Q_b = 0,6 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH} = 420 \text{ см}^3/\text{с.}$$

т. е. примерно на 10% меньше, чем расход нефти.

Глава XVII

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

§ 85. Критерии механического подобия

Выше уже отмечалось, что дифференциальные уравнения движения жидкости интегрируются лишь для сравнительно небольшого числа простейших случаев. Поэтому для решения большинства сложных инженерных задач в механике жидкости необходимо прибегать к экспериментальным исследованиям.

Экспериментальные исследования проводятся в лабораторной обстановке на моделях, выполняемых, как правило, в меньшем масштабе, чем натурные сооружения.

Эти исследования дают возможность выявить на модели гидравлическую картину работы сооружения и при наличии каких-либо недостатков в его работе устранить их. Тем самым исследования на модели приводят к значительной экономии. Исследования на моделях позволяют также вносить коррективы в форму-

лы, полученные теоретическим путем, а также устанавливать эмпирические зависимости между отдельными элементами изучаемого явления.

В настоящее время большинство крупных сооружений (установок) предварительно исследуют на моделях, в результате чего устанавливаются экспериментальным путем такие важные элементы, как потери напора в элементах этих сооружений, распределение скоростей, направление токов и др. Измеряя величины на модели и используя правила перехода от модели к натуре для сходственных явлений, удается со значительной степенью точности предусмотреть условия работы будущих сооружений и разработать их наиболее эффективные типы.

Подобные исследования проводятся в гидравлических и аэродинамических лабораториях, располагающих опытными установками (трубами, лотками и пр.).

Для переноса результатов этих исследований на натуру необходимо, чтобы модель была механически подобна натуре, а для этого нужно знать условия, определяющие подобие между явлениями, происходящими в модели и в натуре, так называемые *условия подобия*. Эти условия подробно рассматриваются в теории подобия.

Для того чтобы модель была механически подобна натуре, прежде всего должно соблюдаться *геометрическое подобие* между моделью и натурой; для этого все соответственные размеры модели должны быть в одинаковое число раз уменьшены по сравнению с размерами природы, т. е. должно быть выдержано отношение

$$\frac{L_n}{L_m} = \alpha_L, \quad (\text{XVII.1})$$

где L_n — некоторый линейный размер натурального потока;

L_m — соответствующий размер потока в модели;

α_L — коэффициент пропорциональности или линейный масштаб модели.

Из этой формулы следуют также условия для отношения площадей и объемов в натуре и на модели:

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} = \alpha_L^2; \quad (\text{XVII.2})$$

$$\frac{W_n}{W_m} = \alpha_L^3. \quad (\text{XVII.3})$$

Однако одного геометрического подобия недостаточно для того, чтобы модель правильно отражала работу натурального сооружения или потока. Так, движение жидкости в двух геометрически подобных трубах может иметь совершенно различный характер, так как в одной трубе поток может быть ламинарным, а в другой — турбулентным. При этом скорости по сечению будут рас-

пределены по разным законам, по разным законам будут определяться потери напора и т. д. Таким образом, при устройстве модели кроме геометрического подобия нужно соблюдать еще дополнительные условия, обеспечивающие подобие между моделью и натурой, так называемые условия *динамического подобия*.

Потоки будут динамически подобными, если все силы, вызывающие рассматриваемое движение в модели, будут уменьшены по сравнению с аналогичными силами в натуре в одно и то же число раз.

Поскольку размерностью силы является произведение размерностей массы $M = \rho L^3$ и ускорения $j = LT^{-2}$, т. е.

$$P = \rho L^3 LT^{-2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho L^2 v^2, \quad (\text{XVII.4})$$

то для динамического подобия необходимо соблюдение отношения

$$\frac{P_H}{P_M} = \frac{\rho_H L_H^2 v_H^2}{\rho_M L_M^2 v_M^2} = \alpha_p \quad (\text{XVII.5})$$

или

$$\alpha_p = \alpha_\rho \alpha_L^2 \alpha_v^2, \quad (\text{XVII.5a})$$

где

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_H}{\rho_M};$$

$$\alpha_v = \frac{v_H}{v_M}.$$

Условие (XVII.5) представляет собой математическое выражение общего закона динамического подобия, сформулированное еще Ньютоном; его можно представить, вводя в рассмотрение число Ньютона Ne , в виде

$$Ne = \frac{\rho_H v_H^2 L_H^2}{\rho_M v_M^2 L_M^2} = \text{idem} \quad (\text{XVII.6})$$

и сформулировать так: в динамически подобных потоках безразмерное число Ньютона имеет одно и то же значение.

В теории подобия доказывается, что при соблюдении геометрического и динамического подобия будет иметь место также кинематическое подобие (скорости, ускорения, перемещения частиц в модели будут соответственно в одних и тех же отношениях уменьшены по сравнению с натурой), т. е.

$$\frac{v_H}{v_M} = \alpha_v = \alpha_L \alpha_T^{-1}; \quad (\text{XVII.7})$$

$$\frac{j_H}{j_M} = \alpha_j = \alpha_L \alpha_T^{-2}; \quad (\text{XVII.8})$$

$$\frac{T_H}{T_M} = \alpha_T, \quad (\text{XVII.9})$$

где α_v , α_j , α_T — множители, постоянные для любой пары сходственных точек.

Таким образом, все кинематические элементы можно выразить через масштабы L и T , которые являются основными.

Основными силами, определяющими гидроаэродинамические процессы, являются силы тяжести (объемная сила), силы трения и силы упругости. Рассмотрим случай, когда решающее значение имеют силы трения, а силы тяжести и силы упругости по сравнению с ними малы так, что ими можно пренебречь. Это характерно, например, для напорного движения жидкости в горизонтальном трубопроводе. Силы трения можно представить в виде

$$P_{\text{тр}} = \tau_0 L^2, \quad (\text{XVII.10})$$

где τ_0 — касательное напряжение на стенке трубы [6]. При этом основное уравнение динамического подобия примет вид

$$\frac{\rho_H v_H^2 L_H^2}{\rho_M v_M^2 L_M^2} = \frac{\tau_{0H} L_H^2}{\tau_{0M} L_M^2}. \quad (\text{XVII.11})$$

Отсюда находим

$$\frac{\tau_{0H}}{\rho_H v_H^2} = \frac{\tau_{0M}}{\rho_M v_M^2}. \quad (\text{XVII.12})$$

Учитывая (X.32), имеем

$$\frac{u_{*H}}{v_H} = \frac{u_{*M}}{v_M}, \quad (\text{XVII.13})$$

а так как (см. X.32)

$$v_* = v \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}},$$

имеем окончательно

$$\lambda_H = \lambda_M, \quad (\text{XVII.14})$$

т. е. потоки (равномерные) будут динамически подобны, если коэффициенты гидравлического трения для этих потоков равны (при наличии геометрического подобия потоков).

Этим еще раз подчеркивается значение коэффициента гидравлического трения λ при изучении движения жидкостей в трубах. Ряд важнейших характеристик потока существенно зависит от

величины этого коэффициента. Так, выше было показано, что распределение скоростей в трубах полностью определяется величиной λ ; от коэффициента λ зависят длина начального участка при выходе потока в трубы, длина влияния местного сопротивления, коэффициент теплоотдачи и другие важнейшие характеристики потока.

Если касательные напряжения определяются законом трения Ньютона, то

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Но так как при кинематическом подобии имеет место пропорциональность

$$\frac{du}{dy} \sim \frac{v}{L},$$

то

$$\tau \approx \mu \frac{v}{L},$$

и, подставляя в (XVII.12), имеем

$$\frac{\mu_n v_n}{L_n \rho_n v_n^2} = \frac{\mu_m v_m}{L_m \rho_m v_m^2},$$

или

$$\frac{v_n L_n}{\nu_n} = \frac{v_m L_m}{\nu_m}. \quad (\text{XVII.15})$$

Параметр vL/ν есть число Рейнольдса; величина L может быть любым характерным линейным размером, связанным с условиями движения. Поэтому (XVII.15) можно записать в виде

$$\text{Re}_n = \text{Re}_m. \quad (\text{XVII.16})$$

Таким образом, для получения динамического подобия при превалировании сил вязкого трения должно соблюдаться равенство чисел Рейнольдса в натуре и модели. В этом заключается закон подобия Рейнольдса.

Из (XVII.15) следует

$$\alpha_v = \alpha_v \alpha_L^{-1}. \quad (\text{XVII.17})$$

а в случае $\alpha_v = 1$

$$\alpha_v = \alpha_L^{-1}. \quad (\text{XVII.18})$$

Моделирование напорных трубопроводов в соответствии с уравнением (XVII.15) связано с некоторыми неудобствами. Во-первых, использование этого уравнения требует, чтобы геометрическое подобие между натурой и

моделью было распространено и на выступы шероховатости, а с практической точки зрения это требование невыполнимо. Во-вторых, соблюдение условия (XVII.15) может оказаться выше технических возможностей лаборатории, так как в соответствии с этим условием скорость в модели должна быть в L раз больше скорости в натуре (при использовании на модели той же жидкости, что и в натуре). Поэтому в практике моделирования часто прибегают к приближенным методам моделирования, в частности, к моделированию в соответствии с условием (XVII.14), которое достаточно для обеспечения приближенного подобия даже в тех случаях, когда отсутствует геометрическое подобие шероховатости.

Если преобладающей является сила тяжести (например, при истечении жидкости из отверстия), условие (XVII.16) уже не является определяющим. В этом случае в основное уравнение динамического подобия Ньютона (XVII.6) нужно внести силы тяжести, которые можно представить в виде

$$P = mg = \rho L^3 g. \quad (\text{XVII.19})$$

Уравнение (XVII.6) получает при этом вид

$$\frac{\rho_H v_H^2 L_H^2}{\rho_M v_M^2 L_M^2} = \frac{\rho_H L_H^3 g_H}{\rho_M L_M^3 g_M}$$

или после сокращений

$$\frac{g_H L_H}{v_H^2} = \frac{g_M L_M}{v_M^2}. \quad (\text{XVII.20})$$

Безразмерная величина

$$\frac{v^2}{gL} = Fr \quad (\text{XVII.21})$$

называется числом (критерием) Фруда.

Уравнение (XVII.21) можно записать поэтому в виде

$$Fr_H = Fr_M. \quad (\text{XVII.22})$$

Таким образом, достижение динамического подобия при преобладающем значении сил тяжести требует равенства чисел Фруда в натуре и на модели. Из (XVII.21) следует

$$\alpha_v = \alpha_L^{\frac{1}{2}} \alpha_g^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{XVII.23})$$

И если $\alpha_g = 1$,

$$\alpha_v = \alpha_L^{1/2}. \quad (\text{XVII.24})$$

Таким образом, скорости на модели уменьшаются прямо пропорционально корню квадратному из линейного масштаба модели.

Если преобладающее влияние в рассматриваемом гидравлическом явлении принадлежит силам поверхностного натяжения

(например, при истечении жидкости из капиллярных отверстий), определяющим подобие является так называемый критерий Вебера

$$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma} \quad (XVII.25)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Существуют также другие критерии подобия, применяемые при других комбинациях сил.

Так, если преобладающее влияние принадлежит сжимаемости жидкости (например, при обтекании тел с большими скоростями потоком сжимаемой жидкости), то в основное уравнение динамического подобия Ньютона нужно ввести силы упругости, которые можно представить в виде

$$P = E_0 \omega, \quad (XVII.26)$$

где E_0 — модуль упругости жидкости.

Модуль упругости жидкости связан, как известно, с ее плотностью соотношением

$$E_0 = \rho c^2, \quad (XVII.27)$$

где c — скорость распространения звука в жидкости.

Поэтому условие (XVII.6) принимает вид

$$\frac{\rho_n v_n^2 L_n^2}{\rho_m v_m^2 L_m^2} = \frac{\rho_n c_n^2 L_n^2}{\rho_m c_m^2 L_m^2}$$

или

$$\frac{v_n}{c_n} = \frac{v_m}{c_m} = M. \quad (XVII.28)$$

Безразмерная величина v/c называется, как известно, числом Маха. Поэтому условие (XVII.28) можно записать в виде

$$M_n = M_m. \quad (XVII.29)$$

Таким образом, для достижения динамического подобия в этих условиях должно соблюдаться равенство чисел Маха в натуре и модели.

При изучении конвекции важное значение приобретает критерий Архимеда, применяемый в тех случаях, когда необходимо учитывать подъемную силу нагретого воздуха. Этот критерий представляет собой отношение подъемной силы

$$P = (\rho - \rho_1) L^3 g \quad (XVII.30)$$

к силе инерции. Уравнение (XVII.6) получает при этом вид

$$\frac{\rho_{1n} v_n^2 L_n^2}{\rho_{1m} v_m^2 L_m^2} = \frac{(\rho - \rho_1)_n L_n^3 g_n}{(\rho - \rho_1)_m L_m^3 g_m}, \quad (XVII.31)$$

или после сокращений

$$\frac{v_n^2 \rho_{1n}}{g_n L_n (\rho - \rho_1)_n} = \frac{v_m^2 \rho_{1m}}{g_m L_m (\rho - \rho_1)_m} \quad (\text{XVII.32})$$

Безразмерная величина

$$\frac{gL}{v^2} \cdot \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} = \text{Ar} \quad (\text{XVII.33})$$

называется числом (критерием) Архимеда, с учетом которого уравнение (XVII.33) можно записать в виде

$$\text{Ar}_n = \text{Ar}_m \quad (\text{XVII.34})$$

Кроме рассмотренных критериев подобия существует еще ряд других безразмерных критериев, отражающих ту или иную специфику рассматриваемых явлений. При изучении неустановившихся движений используется критерий Струхала; при моделировании конвективных потоков воздуха, когда разность плотностей вызвана разностью температур, — критерий Грасгофа; при рассмотрении вопросов теплопередачи и диффузии пользуются критериями Пекле, Нуссельта и др.

Для пересчета основных параметров модели на условия природы удобно пользоваться масштабными коэффициентами, которые принято выражать в зависимости от геометрического масштаба модели. Связь масштабных коэффициентов для различных параметров с линейным масштабом зависит от условия моделирования. Масштабные коэффициенты для основных величин приведены в табл. XVII.1.

Таблица XVII.1

Значения масштабных коэффициентов

Условия моделирования	Масштабные коэффициенты							
	длины	площади	объема	времени	скорости	ускорения	расхода	силы
Fr	α_L	α_L^2	α_L^3	$\alpha_L^{0,5}$	$\alpha_L^{0,5}$	1	$\alpha_L^{2,5}$	α_L^3
Re	α_L	α_L^2	α_L^3	α_L^2	α_L^{-1}	α_L^{-3}	α_L	1
Ar	α_L	α_L^2	α_L^3	$\alpha_L^{3,5}$	$\alpha_L^{-2,5}$	α_L^{-6}	$\alpha_L^{-0,5}$	α_L^{-3}
We	α_L	α_L^2	α_L^3	$\alpha_L^{1,5}$	$\alpha_L^{-0,5}$	α_L^{-2}	$\alpha_L^{1,5}$	α_L

§ 86. О подобии в случае одновременного действия нескольких сил

При одновременном действии нескольких сил для обеспечения подобия необходимо, чтобы в природе и на модели величины соответствующих критериев подобия были равны. Как правило, добиться этого бывает очень трудно или даже невозможно. Рассмотрим, например, случай, когда одновременно приложены силы вязкости и силы тяжести. Тогда для обеспечения подобия нужно добиться равенства в природе и модели чисел Рейнольдса и Фруда, т. е. одновременного соблюдения условий (учитывая, что $g_n = g_m$)

$$\left(\frac{vL}{\nu}\right)_H = \left(\frac{vL}{\nu}\right)_M;$$

$$\left(\frac{v^2}{L}\right)_H = \left(\frac{v^2}{L}\right)_M;$$

первое из которых можно представить также в виде

$$\frac{v_H}{v_M} = \frac{\nu_H}{\nu_M} \cdot \frac{L_M}{L_H} = \frac{\nu_H}{\nu_M} \alpha_L^{-1},$$

а второе — в виде

$$\frac{v_H}{v_M} = \left(\frac{L_H}{L_M}\right)^{1/2} = \alpha_L^{1/2}.$$

Из сопоставления можно найти

$$\frac{\nu_H}{\nu_M} \alpha_L^{-1} = \alpha_L^{1/2}$$

или

$$\frac{\nu_H}{\nu_M} = \alpha_L^{3/2}. \quad (\text{XVII. 35})$$

Таким образом, для обеспечения динамического подобия кинематическая вязкость жидкости на модели должна быть в $\alpha_L^{1,5}$ раза меньше кинематической вязкости жидкости в натуре; например, при $\alpha_L = 100$ будем иметь $\nu_H/\nu_M = 100^{3/2} = 1000$. Практически невозможно найти жидкость с такой малой вязкостью, вследствие чего нельзя обеспечить полного подобия явлений в рассматриваемом случае.

Обычно в каждом частном случае значимость различных сил неодинакова и силы одного рода преобладают над силами другого рода; тогда ограничиваются применением критерия подобия, соответствующего преобладающей силе. Так, при движении жидкости в трубах под напором силы тяжести не играют сколько-нибудь значительной роли; то же справедливо и для насосов, вентиляторов, турбин, водомеров — короче, для всех случаев, когда свободная поверхность жидкости не входит в рассмотрение. В этих случаях можно при моделировании пренебречь равенством чисел Фруда и все расчеты модели проводить по числу Рейнольдса, которое и определяет характер потока жидкости.

Наоборот, в тех случаях, когда движение складывается в основном под воздействием силы тяжести и влияние вязкости оказывается незначительным, характер движения будет вполне определяться числом Фруда. Такие условия характерны для многих открытых потоков, истечения жидкости из отверстий и через водосливы и в ряде других случаев, когда в практике моделирования руководствуются критерием Фруда, влияние же сил вязкости (если оно является существенным) учитывается специальными поправками.

Примеры к главе XVII

Пример XVII.1. Для изучения движения дымовых газов в дымоходе парового котла устроена водяная модель в масштабе 1 : 10 ($\alpha_L = 10$). Определить необходимую скорость течения воды на модели при следующих данных: скорость газов $v_r = 10$ м/с; кинематическая вязкость газов $\nu_r = 1,3$ Ст (при тем-

пературе $t_n = 800^\circ \text{C}$). Температура воды на модели $t_m = 10^\circ \text{C}$. Диаметр дымохода $d_n = 0,5$ м, а шероховатость его внутренней поверхности $k_n = 0,005$ см.

Решение. Для гидродинамического подобия модели натуре необходимо, чтобы коэффициенты гидравлического трения на модели и в натуре были одинаковыми, т. е. $\lambda_m = \lambda_n$.

Это условие с учетом формулы (XII.48) можно представить в виде:

$$\frac{k_n}{d_n} + \frac{68v_n}{v_n d_n} = \frac{k_m}{d_m} + \frac{68v_m}{v_m d_m}$$

или

$$\frac{v_m}{v_n} = \alpha_L \frac{68v_m}{68v_n + v_n (k_n - \alpha_L k_m)},$$

где $\alpha_L = d_n/d_m$.

Материал трубопровода в модели тот же, что и в натуре, т. е. $k_n = k_m = k_n$, с учетом чего

$$\frac{v_m}{v_n} = 10 \frac{68 \cdot 0,013}{68 \cdot 1,3 + 5(1 - 10)} = 0,204,$$

т. е.

$$v_m = 0,204 v_n = 0,204 \cdot 10 = 2,04 \text{ м/с.}$$

где v_m — скорость движения воды в модели дымохода.

Пример XVII.2. Необходимо проверить в лаборатории процесс промывки горизонтального котла, имеющего в натуре следующие размеры: диаметр $d_n = 1,65$ м, длину $l_n = 10,5$ м. Промывка производится при температуре $t_n = 60^\circ \text{C}$ ($\nu_n = 0,0048$ Ст) и с расходом через продувочный вентиль $Q_n = 70$ л/с.

Решение. Задача исследований на модели состоит в установлении характера обтекания водой дымогарных труб, связанного с появлением вихрей и очисткой труб от шлама, накапливающегося в котле. Модель будем рассчитывать по правилу Рейнольдса: $Re_m = Re_n$, так как при равенстве чисел Рейнольдса в натуре и на модели можно ожидать одинаковой картины обтекания, а следовательно, и близкого к действительным условиям эффекта от действия промывки.

Примем масштаб модели $\alpha_L = 20$, т. е. длина котла в модели будет равна: $l_m = 10,5 : 20 = 0,525$ м, диаметр $d_m = 1,65 : 20 = 0,0825$ м.

Моделирование проводим с водой при температуре $t_m = 20^\circ \text{C}$ ($\nu_m = 0,0101$ Ст).

Скорость опускания уровня воды в котле

$$v_n = \frac{Q_n}{\omega_n} = \frac{70 \cdot 10^{-3}}{10,5 \cdot 1,65} = 0,00404 \text{ м/с} = 0,404 \text{ см/с.}$$

Исходя из правила Рейнольдса, определяем скорость опускания уровня на модели

$$v_m = \frac{v_n}{\nu_n} \cdot \frac{l_n \nu_m}{l_m} = \frac{0,404 \cdot 20 \cdot 0,0101}{0,0048} = 0,168 \text{ м/с.}$$

т. е. значительно больше, чем в натуре.

Расход воды на модели

$$Q_m = \omega_m v_m = 52,5 \cdot 8,25 \cdot 16,8 = 7,26 \text{ л/с.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПЕРЕВОД ОСНОВНЫХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ, ПРИНЯТЫХ В ГИДРАВЛИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ

1. Температура по абсолютной термодинамической шкале

$$T = (t^{\circ} \text{C} + 273,16)) \text{ К.}$$

2. Сила. Ньютон — сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с²;

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \approx 0,102 \text{ кгс}; 1 \text{ кгс} \approx 9,81 \text{ Н.}$$

3. Давление. Паскаль — давление силы 1 Н на 1 м²:

1 Па $\approx 0,1 \text{ кгс}/\text{м}^2 = 0,102 \text{ мм рт. ст.}$, или 0,0075 мм вод. ст. (если давление в капельной жидкости отнесено к единице веса — так называемый напор);

$$1 \text{ кгс}/\text{м}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ кгс}/\text{см}^2 = 9,8 \text{ Па.}$$

4. Динамическая вязкость — сила в ньютонах, проявляющаяся на 1 м² площади соприкосновения двух смежных слоев жидкости при градиенте скорости 1 $\frac{\text{м}/\text{с}}{\text{м}}$.

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = 10 \text{ П.}$$

5. Кинематическая вязкость — отношение динамической вязкости к плотности жидкости:

$$1 \text{ м}^2/\text{с} = 10^4 \text{ см}^2/\text{с} (\text{Ст.});$$

$$1 \text{ Ст} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с.}$$

6. Коэффициент объемного сжатия — относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления:

$$1 \text{ Па}^{-1} = 9,8 \text{ м}^2/\text{кгс};$$

$$1 \text{ м}^2/\text{кгс} = 0,102 \text{ Па}^{-1}.$$

7. Модуль упругости — величина, обратная коэффициенту объемного сжатия:

$$1 \text{ Па} = 0,102 \text{ кгс}/\text{м}^2;$$

$$1 \text{ кгс}/\text{м}^2 = 9,8 \text{ Па.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
2. Александров В. Л. Техническая гидромеханика. М., Госэнергоиздат, 1948.
3. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М., «Недра», 1970.
4. Альтшуль А. Д. Гидравлические потери на трение в трубопроводах. М., Госэнергоиздат, 1963.
5. Альтшуль А. Д. Местные гидравлические сопротивления при движении вязких жидкостей. М., Гостехиздат, 1962.
6. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика (основы механики жидкости). М., Стройиздат, 1965.
7. Батурин В. В. Основы промышленной вентиляции. Л., изд. ВЦСПС, 1965.
8. Богомолов А. И., Михайлов К. А., Гидравлика, М., Стройиздат, 1973.
9. Борисов С. Н. и Даточный В. В. Гидравлические расчеты газопроводов, М., «Недра», 1972.
10. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
11. Горбис З. Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М., «Энергия», 1970.
12. Идельчик И. Е. Аэродинамика промышленных аппаратов. М., «Энергия», 1964.
13. Идельчик И. Е. Гидравлические сопротивления. М., Госэнергоиздат, 1954.
14. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М., Госэнергоиздат, 1960.
15. Киселев П. Г. Справочник по гидравлическим расчетам. М., «Энергия», 1972.
16. Киселев П. Г. Гидравлика. М., Госэнергоиздат, 1963.
17. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика. М., Госэнергоиздат, 1948.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1972.
19. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967.
20. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М., ИЛ, 1949.
21. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1954.
22. Смыслов В. В. Гидравлика и аэродинамика. Київ, «Вища школа», 1971.
23. Талиев В. Н. Аэродинамика вентиляции. М., Госстройиздат, 1963.
24. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М., Физматгиз, 1964.
25. Френкель Н. З. Гидравлика. М., Госэнергоиздат, 1956.
26. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л., «Энергия», 1970.
27. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Физматгиз, 1972.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельность 24
Анализ размерностей 144
Аналогия процессов переноса 176
Арматура трубопровода 214
Аэродинамика 4
- Безразмерные параметры 144
Быстрота возрастания шероховатости 275
- Вакуум 37
Взаимное влияние сопротивлений 223
Вискозиметры 162
— Энглера 19
Влияние вязкости 297
Водомер Вентури 76
Воздушная завеса 139
Воронка вихревая 301
— с воздушным ядром 301
Время опорожнения 299
Вторичные течения 161
Высота вакуумметрическая 38
— геометрическая 36, 71
— пьезометрическая 36, 71
— скоростная 71
Вязкость жидкости 15
— динамическая 16
— кинематическая 17
— структурная 22
— турбулентная 183
— условная 20
- Газ 7
— совершенный 13
Газовая динамика 4
— постоянная 13
Газожидкостные потоки 279
Гашение турбулентных пульсаций 197
Гидравлика 4
Гидромеханика 4
Гидротранспорт 279
Градиент скорости 16
График Альтшуля 298
— Никурадзе 169
- Давление абсолютное 37
— атмосферное 35, 59
— вакуумметрическое 38
— ветра 234
— гидростатическое 25, 35
— динамическое 265
— избыточное 37
— критическое 305
- на плоские стенки 45
— насыщенных паров 224
Движение безвихревое 85
— безнапорное 193
— вихревое 63, 85, 121
— вращательное 301
— газов в трубах 264
— изотермическое 270
— неизотермическое 196
— неравномерное 65
— неустановившееся 64
— относительное 227
— плоское 109
— потенциальное 45, 109
— равномерное 65, 145
— с переменным расходом 224
— сверхзвуковое 233
— твердых тел в жидкости 227
— турбулентное 147
— установившееся 63
— циркуляционное 115
Двухфазные потоки 276
Диаметр эквивалентный 68, 163
Дифференциальные уравнения движения 92
— — вязкой жидкости 100
— — невязкой жидкости 92
— — неразрывности 89
— — равновесия жидкости 28
Диффузия турбулентная 177
Диффузор 209
Длина влияния 223
— начального участка 195
— пути перемешивания 178
— эквивалентная 202
- Единицы измерения 319
- Жидкость 6
— аномальная (неньютоновская) 22
— идеальная 23
— капельная 7
— реальная 23
- Задача внешняя 4
— внутренняя 4
Закон Архимеда 51
— Бойля—Мариотта 32
— Паскаля 37
— подобия Вебера 314
— подобия Ньютона 313
— Подобия Рейнольдса 312
— Стокса 157
— трения Ньютона 16
— фильтрации Дарси 164
— подобия Фруда 313

- Измерительная диафрагма 288
 Инкрустация труб 275
 Интеграл Бернулли 100
 — Лагранжа 97
 Интегральное соотношение Кармана 237
 Интенсивность воронки 301
 Инфильтрация 165
 Истечение газов 301
 — из насадков 291
 — из отверстий 284
 — под уровень 288
 — при переменном напоре 298
 Источники 115
- Кавитация в местных сопротивлениях 224
 Каналы 194
 Капиллярность 21
 Касательное напряжение 174
 — турбулентное 175
 Кинематика жидкости 81
 Колено острое 212
 Континуум 6
 Конфузор 211
 Концентрация твердой фазы 276
 Коррозия труб 275
 Коэффициент Буссинеска 80
 — быстроты увеличения шероховатости 275
 — внезапного расширения 204
 — гидравлического трения 169
 — сопротивления давления 229
 — Кориолиса 75, 153, 158, 190
 — масштабный 315
 — местного сопротивления 202
 — объемного сжатия 10
 — расхода отверстия 287
 — сжатия струи 284
 — скорости 286
 — смягчения 209, 211
 — температурного расширения 11, 12
 — фильтрации 165
 — формы 163
 — Шези 194
 — шероховатости 190
 Критерий Архимеда 315
 — Фруда 313
- Линия тока 64, 84
 Логарифмическая формула для λ 187
 — — распределения скоростей 189
- Метод Лагранжа 81
 — размерностей 144
 — Эйлера 82
 Механика жидкости 4
 Моделирование трубопроводов 311
 Модуль расхода 250
 — упругости 11
- Напор гидростатический 36
 — полный 71
 — потерянный 143
 — предельный 294
 — пьезометрический 3f
 — скоростной 71
 Насадок 291
 — Борда 297
 — конический 296
 — конoidalный 297
- Натяжение поверхности 20, 300
 Непрерывная раздача по пути 256
 — среда 6
 Неравномерность распределения скоростей 75, 190
 Номограмма Борисова 188, 189
 — Хованского 245
- Область переходная 170
 Обобщенная формула для C 194
 Обтекание пластинки 227
 — — ламинарное 238
 — — турбулентное 239
 — цилиндра 230
 — шара 231
 Опыты Колбрука 171
 — Лауфера 183
 — Левкоевой 222
 — Никурадзе 169
 — Нуннера 183
 — Рейнольдса 148
 — Рейхардта 181
 — Шевелева 172
 Основное уравнение гидростатики 34
 Основной участок струи 134
 Отверстие большое 289
 — затопленное 288
 — малое 284
 Отвод 213
 Отношение средней скорости к максимальной 190
 Отрыв струи 203
- Параллельное соединение труб 253
 Паропроводы 27
 Периметр смоченный 67
 Пи-теорема 144
 Пластина гладкая 241
 — шероховатая 242
 Плотность воды 12
 — воздуха 13
 — жидкости 9
 Площадь живого сечения 67
 — миделевого сечения 229
 Пневмотранспорт 278
 Поверхностно-активное вещество 20
 Поверхность уровня 32, 55
 Поворот трубы 212
 — — плавный 213
 — — резкий 212
 Подобие геометрическое 309
 — гидромеханическое 308
 — динамическое 310
 — кинематическое 310
 Подслой вязкий 182
 — ламинарный 177, 179
 Полимерные добавки 197
 Полуэмпирическая теория Альтшуля 177, 182
 — — Прандтля 182
 — — турбулентности 175
 Полюс струи 135
 Поправка на неквадратичность 251
 Пористость 164
 Потенциал скорости 109
 Потери напора 145
 — — в сетке 217
 — — местные 147, 201
 — — по длине 168
 Прикладная механика жидкости 142
 Принцип наложения потерь 223
 Проводимость трубопровода 290
 Процесс адиабатический 57
 — политропический 57

Прочность на разрыв 11
Пуаз 16
Пульсационная добавка 167
Пульсация 167
Путь смешения (перемешивания) 178
Равновесие газов 55
— относительное 41

Радиус гидравлический 67, 162
Разделение потоков 218
Распределение скоростей 189
Расход потока объемный 65
— максимальный 304
— транзитный 256
Расширение внезапное 203
— постепенное 208
Режим движения 149
— — ламинарный 147, 156
— — турбулентный 166
Реология 23

Связь кинематической и условной вязкости 20

Сетка гидродинамическая 113
Сечение гидравлически наиболее выгодное 195
— живое 67
— миделево 229
— сжатое 284
Сжатие струи 284
Сжимаемость газов 12
— жидкостей 10
Сила массовая 24
— объемная 24
— поверхностного натяжения 300, 314
— поверхностная 24
— подъемная 233
— трения 311
— тяжести 313
— упругости 314
Система СИ 8
Скорость витания 277
— динамическая 155
— звука 14
— истечения 285
— критическая 149, 278
— мгновенная 166
— осредненная 167, 168
— пороговая динамическая 197
— ударной волны 261
Сложение потерь напора 223
Слой пограничный 235
— — ламинарный 238
— — турбулентный 239
— пристенный 173
Снижение напора 197
Соединение потоков 219
Сопротивление волновое 234
— гидравлическое 142
— давления 228, 229
— лобовое 233
— местное 201, 223
— пластинны 235
— снаряда 233
— стыка 215
— трения 228, 235
— удельное трубопровода 250
— формы 228
Степенная формула для λ 188
— — для профиля скорости 189
Степень сжатия 285
Сток 115
Сток 18
Струя свободная 134

— затопленная 134
Сужение трубы 211
— внезапное 204

Текучесть жидкости 15
Температурное расширение жидкости 11
Теорема импульсов 63
— Томсона 122
Теплопроводность турбулентная 176
Теплообмен 161
Теоретическая гидромеханика 4
Точка средней скорости 184
Трение внутреннее 16
— на стенке 154
Тройники 217
Трубопроводы 243
— кольцевые 257
— простые 243
— разветвленные 259
— сложные 252
Трубы гидравлически гладкие 170
— некругового сечения 192
— шероховатые 170

Увеличение шероховатости 275
Угол конусности 211
Удар гидравлический 260
Ударная волна 261, 234
Удельный вес 9
— — относительный 9
Уклон гидравлический 73, 154
— пьезометрический 74
Уменьшение потерь напора 197
— турбулентного переноса 197
Уравнение Абрамовича 137
— Бернулли 68
— — для газов 101
— Гагена — Пуазейля 160
— Кармана (интегральное) 237
— Клапейрона 13
— количества движения
— Лапласа 111
— Навье—Стокса 100
— равновесия Эйлера 28
— равномерного движения 154
— Рейнольдса 175
— Эйлера 93
— энергии 63
Условия подобия 309
Участок начальный трубы 101, 195
— — струи 138

Феномен Томса 197
Физические свойства воды 11
— — воздуха 14
— — жидкостей 6
Фильтрация 164
— турбулентная 165,
Форма сечения 67
Формула Альтшуля 20, 180, 196, 241, 267,
282
— Бингема 22
— Блазиуса 171, 189, 239
— Блесса 190
— Борда 204
— Буссинеска 161
— Веймаута 191
— Вейсбаха 147, 202
— Войтинской 197
— Дарси—Вейсбаха 147
— Жуковского 206, 261, 285

- Кармана 241
- Кирхгофа 285
- Колбрука 171, 185, 188, 197
- Краснова 217
- Кутателадзе 197
- Маннинга 190, 194
- Марголина 301
- Маяцкого 196
- Милликена 308
- Миловича 213
- Некрасова 213
- Никурадзе 180, 188, 192
- Ньютона 228
- Панченко 214
- Прандтля 178, 181
- Пуазейля 16, 160
- Стокса 157
- Торичелли 286
- Убеллоде 19
- Филиппова 195
- Шези 194
- Шифринсона 171, 189
- Шлихтинга 242
- Функция тока 109

Характеристическое уравнение 31

Центр давления 45

Циркуляция скорости 122

- Число Вебера 314
- кавитации 224
- Маха 233
- Ньютона 310
- Рейнольдса 150, 312
- критическое 149
- пороговое 197
- Фильтрации 165
- Фруда 313

- Шероховатость абсолютная 168
- искусственная 169
- относительная 168
- равномерно зернистая 169
- эквивалентная 170

- Элементарная струйка 65
- Эмпирические формулы для λ 190
- Энергия турбулентная 199
- удельная 72
- полная 75
- Эпюра гидростатического давления 38
- скоростей в трубах 189
- Эффект Томса 197

- Явления переноса 176
- Ядро течения 173, 177

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
§ 1. Предмет механики жидкости и ее задачи	4
§ 2. Исторический обзор развития механики жидкости	5
§ 3. Основные физические свойства жидкостей	6
<i>Раздел первый</i>	
Основы статики и динамики жидкости	24
<i>Глава I. Равновесие капельных жидкостей</i>	<i>24</i>
§ 4. Равновесное состояние жидкости и действующие силы	24
§ 5. Гидростатическое давление в точке	25
§ 6. Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости	28
§ 7. Равновесие капельной жидкости в поле земного тяготения	33
§ 8. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум	37
§ 9. Равновесие несмешивающихся жидкостей	39
§ 10. Относительное равновесие	41
§ 11. Давление жидкости на плоские стенки. Центр давления	45
§ 12. Давление жидкости на криволинейные поверхности. Закон Архимеда	51
<i>Глава II. Равновесие газов</i>	<i>55</i>
§ 13. Основные уравнения и поверхность уровня	55
§ 14. Распределение давления и температуры	57
<i>Глава III. Уравнение энергии и теорема импульсов</i>	<i>63</i>
§ 15. Основные понятия и определения движения жидкости	63
§ 16. Уравнение Бернулли для элементарной струйки несжимаемой жидкости	68
§ 17. Уравнение Бернулли для потока с поперечным сечением конечных размеров	74
§ 18. Уравнение количества движения (импульсов)	77
<i>Глава IV. Уравнения кинематики жидкости</i>	<i>81</i>
§ 19. Два метода исследования движения жидкости (Лагранжа и Эйлера)	81
§ 20. Вихревые и безвихревые движения. Уравнения компонентов вихря	85
§ 21. Уравнение неразрывности	89

	Стр.
Глава V. Уравнения динамики жидкости и газов	92
§ 22. Основные дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости	92
§ 23. Интегрирование уравнений движения	94
§ 24. Уравнение движения вязкой жидкости	100
§ 25. Уравнение Бернулли для газов	104
Глава VI. Плоское потенциальное движение	109
§ 26. Потенциал скорости и функция тока	109
§ 27. Сложение потенциальных потоков	117
Глава VII. Краткие сведения о вихревых движениях	121
§ 28. Основные понятия и определения	121
§ 29. Циркуляция скорости и теорема Томсона	122
Глава VIII. Движение жидкости с переменным расходом	124
§ 30. Основное уравнение одномерного движения жидкости с переменным расходом (массой)	124
§ 31. О потере напора	129
§ 32. Движение жидкости с переменным расходом в трубопроводе постоянного диаметра	131
Глава IX. Свободные струи	134
§ 33. Основные сведения о теории свободной струи	134
§ 34. Изгиб воздушных струй	138
§ 35. Воздушная завеса	139
<i>Раздел второй</i>	
Прикладная механика жидкости	142
Глава X. Общие сведения о гидравлических сопротивлениях	142
§ 36. Виды гидравлических сопротивлений	142
§ 37. Метод анализа размерностей. ПИ-теорема	144
§ 38. Общая формула для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах	145
§ 39. Ламинарное и турбулентное движение жидкости	147
§ 40. Число Рейнольдса	149
§ 41. Особенности ламинарного и турбулентного движения жидкости в трубах	150
§ 42. Общее выражение для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах	152
Глава XI. Ламинарное равномерное движение жидкости	156
§ 43. Распределение скоростей по сечению круглой трубы	156

	Стр.
§ 44. Потери напора на трение в круглой трубе	159
§ 45. Движение жидкостей сквозь пористые среды (фильтрация)	164
Глава XII. Турбулентное равномерное движение жидкости в трубах	166
§ 46. Общие сведения	166
§ 47. Опытные данные о распределении скоростей и потерях напора	168
§ 48. Касательное напряжение при турбулентном движении	174
§ 49. Полуэмпирические теории турбулентности	175
§ 50. Новые зависимости для расчета турбулентного движения в трубах (по А. Д. Альтшулю)	182
§ 51. Эмпирические формулы для коэффициента гидравлического трения	190
§ 52. Движение жидкости в трубах некругового сечения	191
§ 53. Равномерное безнапорное движение жидкости в трубах	193
§ 54. Начальный участок турбулентного движения	195
§ 55. Потери напора при неизотермическом движении жидкости в трубах	196
§ 56. Снижение потерь напора на трение при турбулентном движении	197
§ 57. Основные понятия о внутреннем механизме турбулентности	198
Глава XIII. Местные гидравлические сопротивления	201
§ 58. Общие сведения	201
§ 59. Потери напора, связанные с изменением сечения потока	203
§ 60. Потери напора, связанные с изменением направления потока	212
§ 61. Потери напора в арматуре трубопроводов и в сварных стыках	214
§ 62. Потери напора в сетках	217
§ 63. Потери напора в тройниках	217
§ 64. Зависимость коэффициентов местных сопротивлений от числа Рейнольдса	220
§ 65. Взаимное влияние местных сопротивлений	223
§ 66. Явление кавитации в местных сопротивлениях	224
Глава XIV. Относительное движение тела и жидкости	227
§ 67. Общие сведения	227
§ 68. Сопротивление давления	229
§ 69. Давление ветра на здания и сооружения	234
§ 70. Сопротивление трения. Пограничный слой	235
Глава XV. Гидравлический расчет трубопроводов	243
§ 71. Расчет простых трубопроводов для несжимаемых жидкостей (общие сведения)	243
§ 72. Расчет простых трубопроводов в квадратичной области сопротивления	248
§ 73. Расчет трубопроводов в неквадратичной области сопротивления	250
§ 74. Расчет сложных трубопроводов	252
§ 75. Гидравлический удар в трубах	260
§ 76. Расчет трубопроводов для газов	264

	Стр.
§ 77. Влияние срока службы трубопроводов на их гидравлическое сопротивление	274
§ 78. Понятие о движении двухфазных потоков в трубах	276
Глава XVI. Гидравлический расчет истечения жидкостей	284
§ 79. Истечение жидкости из отверстий в тонкой стенке	284
§ 80. Истечение жидкости через насадки	291
§ 81. Влияние вязкости жидкости на истечение из отверстий	297
§ 82. Истечение жидкости при переменном напоре	298
§ 83. Влияние поверхностного натяжения и воронкообразования на истечение жидкости из отверстий	300
§ 84. Истечение газов из отверстий	301
Глава XVII. Гидродинамическое моделирование	308
§ 85. Критерии механического подобия	308
§ 86. О подобии в случае одновременного действия нескольких сил	315
Приложение. Перевод основных единиц измерения, принятых в инженерной гидравлике : :	318
Список литературы	319
Предметный указатель	320

Адольф Давыдович Альтшуль
Петр Григорьевич Киселев

**ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА
(ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ)**

Научный редактор *Н. М. Борщевская*
Редакция литературы по инженерному оборудованию
Зав. редакцией *И. П. Скворцова*
Редактор *Г. А. Лебедева*
Мл. редактор *А. А. Минаева*
Внешнее оформление художника *В. В. Гарбузова*
Технический редактор *Н. Г. Бочкова*
Корректоры *Г. А. Кравченко, В. А. Быкова*

Сдано в набор 23/IX 1974 г. Подписано к печати 17/II 1975 г.
Т-02892. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 3.
20,5 печ. л. (уч.-изд. 20,15 л.). Тираж 30.000 экз. Изд. № А1-3743.
Зак. № 350. Цена 82 к.

Стройиздат
103006, Москва, Каляевская, 23а

Владимирская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б.