

В.А. Баженов
М.О. Вабішевич
Ю.В. Ворона
А.В. Перельмутер
С.О. Пискунов
І.І. Солодей

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ
РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВИХ
КОНСТРУКЦІЙ ПРИ
СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ**

Київ-2018

19 539.3:004
К63

**Баженов В.А., Вабіщевіч М.О., Ворона Ю.В.,
Перельмутер А.В., Пискунов С.О., Солодей І.І.**

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ
РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВИХ
КОНСТРУКЦІЙ ПРИ СТАТИЧНИХ
І ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

НТБ ВНТУ



484333

539.3:004

К63

2018

Комп'ютерні технології розрахунку просторових



2018

539.3:004.

УДК 539.3: 539.375, 539.376; 539.4

Рекомендовано до друку
Вченою радою Київського
національного університету
будівництва і архітектури,
протокол № 15 від 28.09.2018 р.

ББК 22.251
Б-16

Рецензенти:

В. Г. Карнаухов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу термопружності Інституту механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ;

О. Ф. Дашенко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри динаміки, міцності машин і опору матеріалів, директор Інституту машинобудування Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса.

Баженов В.А., Вабішевич М.О., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В., Пискунов С.О., Солодей І.І.

Б16 Комп'ютерні технології розрахунку просторових конструкцій при статичних і динамічних навантаженнях / В.А. Баженов та ін. – Київ: Вид-во "Каравела", 2018. – 312 с.

ISBN 978-966-2229-90-5

В книзі викладені теоретичні основи методу скінченних елементів (МСЕ), принципи його застосування при формуванні розрахункових моделей та висвітлені явища і ефекти, які мають місце при чисельному розв'язанні задач. Розглянуті питання побудови розв'язків задач динаміки і їх практичного застосування та постановки і особливості розв'язання задач нелінійного деформування, які здебільшого не висвітлюються в стандартних курсах підготовки фахівців в профільних технічних університетах. Описана ефективна модифікація МСЕ – напіваналітичний МСЕ, наведено приклади його використання в задачах статичного і динамічного деформування для фізично і геометрично неоднорідних просторових тіл – відповідальних об'єктів енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва, а також інших галузей промисловості.

Книга розрахована на науково-технічних працівників у галузі механіки деформівного твердого тіла, будівельної комп'ютерної механіки, проєктувальників, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів старших курсів вищих технічних навчальних закладів.

© Баженов В.А., Вабішевич М.О., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.,
Пискунов С.О., Солодей І.І., 2018

ISBN 978-966-2229-90-5

**НТБ ВНТУ
м. Вінниця**

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
ГЛАВА 1	
МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ.....	9
1.1. Основна ідея і загальні принципи реалізації методу скінченних елементів	9
1.2. Параметри скінченноелементної моделі. Збіжність і достовірність розв'язку методом скінченних елементів	27
1.3. Сполучення різних типів скінченних елементів у скінченноелементній моделі	48
1.4. Побудова і можливості сучасних скінченноелементних програмних комплексів.....	59
1.5. Короткий опис обчислювального комплексу Structure CAD.....	65
ГЛАВА 2	
ПОСТАНОВКА ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ.....	77
2.1. Загальні відомості про нелінійні задачі, види нелінійності	77
2.2. Фізично-нелінійні задачі	84
2.2.1. Вихідні співвідношення і обчислення параметрів напружено-деформованого стану при пружнопластичному деформуванні.....	85
2.2.2. Вихідні співвідношення і обчислення параметрів напружено-деформівного стану в умовах повзучості... ..	93
2.3. Геометрична нелінійність	100
2.4. Конструктивна нелінійність	110
2.5. Генетична нелінійність.....	118

ГЛАВА 3.	
ПОБУДОВА РІВНЯНЬ РУХУ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ	125
3.1. Побудова рівнянь руху пружних систем	125
3.1.1 Основні поняття динаміки споруд	125
3.1.2 Побудова рівнянь руху пружних систем на основі дискретних моделей	132
3.1.3 Принцип Гамільтона-Остроградського.....	142
3.1.4 Побудова рівнянь руху на основі моделей з розподіленими параметрами	146
3.2 Деякі питання щодо коливань системи з одним ступенем вільності.....	160
3.2.1 Реакція системи з одним ступенем вільності на довільне імпульсивне навантаження малої тривалості.....	160
3.2.2 Реакція системи з одним ступенем вільності на навантаження загального вигляду.....	164
3.2.3 Урахування розсіювання енергії при коливаннях пружних систем	165
3.2.4 Динаміка системи з одним ступенем вільності при кінематичному впливі	172
3.3 Коливання систем з багатьма ступенями вільності	176
3.3.1 Рівняння руху систем з кількома ступенями вільності	176
3.3.2. Вільні коливання систем зі скінченною кількістю ступенів вільності	184
3.3.3. Вимушені коливання систем з багатьма ступенями вільності	196
3.3.4. Метод нормальних координат.....	203
3.4 Дослідження сейсмостійкості будівельних конструкцій.	215
3.4.1. Сейсмічні навантаження і сейсмічні коливання	215
3.4.2. Спектральний метод розрахунку на сейсмічний вплив	226
3.5. Особливості виконання динамічного аналізу в обчислювальному комплексі Structure CAD.....	241

ГЛАВА 4

НАПІВНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ
ЕЛЕМЕНТІВ (НМСЕ) ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ
ДО ЗАДАЧ СТАТИЧНОГО І ДИНАМІЧНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

4.1. Основна ідея, скінченноелементна база та розв'язувальні співвідношення НМСЕ.....	243
4.2. Алгоритми розв'язання систем рівнянь НМСЕ.....	260
4.3. Результати розв'язання фізично-нелінійних та динамічних задач із використанням НМСЕ.....	266
4.3.1. Напружено-деформований стан призматичних тіл змінної площі поперечного перерізу.....	266
4.3.2. Дослідження пружно-пластичного напружено- деформованого стану демпферного елемента.....	269
4.3.3. Визначення розрахункового ресурсу хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах повзучості.....	272
4.3.4. Аналіз стаціонарних коливань резервуару для зберігання пальмового стеарину під дією вітрового навантаження.....	281
4.3.5. Дослідження напружено-деформованого стану підземного тунелю під дією потягу, що рухається зі сталю швидкістю.....	286
4.3.6. Дослідження впливу часткової втрати жорсткості монолітної градирні АЕС на власні коливання конструкції.....	294
ЛІТЕРАТУРА.....	301

ПЕРЕДМОВА

Визначення несучої здатності широкого кола об'єктів будівництва, машинобудування, енергетики та інших галузей техніки потребує розв'язання задач із аналізу напружено-деформівного стану просторових тіл і конструкцій, які знаходяться під впливом статичних і динамічних навантажень. При цьому в багатьох випадках недостатнім є розгляд задачі лише в лінійній постановці, а виникає потреба урахування нелінійного деформування, пов'язаного як із проявом властивостей матеріалу, так і особливостями деформування конструкції в цілому. Найбільш ефективним засобом розв'язання таких задач є метод скінчених елементів (МСЕ).

Сучасний рівень розвитку комп'ютерних технологій, їх широке розповсюдження, а також наявність значної кількості сучасних скінченноелементних програмних комплексів, розроблених як в Україні (SCAD, ЛИРА [26, 49]) так і за кордоном (ANSYS, NASTRAN, ABAQUS та ін. [17, 43, 113]), дозволяє проводити розв'язання зазначених задач із максимальним рівнем деталізації досліджуваних об'єктів. Зважаючи на розвинений і інтуїтивно зрозумілий інтерфейс цих програмних комплексів, наявність потужних засобів візуалізації розрахункових моделей і представлення результатів розрахунку, користувач, навіть при недостатньому рівні володіння фундаментальними знаннями механіки деформівного тіла, механіки матеріалів і будівельної механіки та теоретичними основами МСЕ, має можливість утворювати скінченноелементні моделі, проводити на їх основі розв'язання задач, представляти результати цих розрахунків і використовувати їх для обґрунтування тих чи інших технічних рішень. Дійсно, промислові програмні комплекси дозволяють швидко і з високим рівнем точності виконати певну частину розрахункової роботи, але для правильного застосування цих програмних засобів і отримання достовірних результатів користувач має знати і розуміти методики, які покладені в основу програмного забезпечення, а не використовувати його як «чорну скриньку». При цьому відкритим залишається питання адекватності

таких результатів реальній картині деформування досліджуваного об'єкта.

Зазначена ситуація в певній мірі обумовлена тим, що викладання цикла дисциплін, у яких розглядаються основи розрахунків несучої здатності конструкцій (зокрема опір матеріалів, будівельна механіка, тощо) зводиться до окремих курсів, в яких розглядаються питання міцності елементів конструкцій. Відповідно значна кількість пропонованих у межах цих курсів розрахункових схем недостатньо прив'язані до реальних конструкцій і споруд. Крім того, при вивченні цих та інших дисциплін переважна увага приділяється не розумінню теоретичних основ методів, що розглядаються, а набуттю навичок користування окремими формулами. При цьому низка спрощень, деталізація та ділення задачі на окремі складові частини залишає поза увагою загальне розуміння закономірностей роботи матеріалів і конструкцій

У зв'язку з цим виникає необхідність спеціалізованого викладання теоретичних основ методу скінченних елементів, принципів його застосування при формуванні розрахункових моделей із акцентуванням уваги на певних властивостях, явищах, ефектах, які мають місце в ході чисельного розв'язання задачі методом скінченних елементів. Доцільним є викладання постановок і особливостей побудови алгоритмів розв'язання задач нелінійного деформування, а також деяких теоретичних питань побудови розв'язків задач динаміки і їх практичного застосування. Зазначені питання, як правило, не висвітлюються в стандартних курсах підготовки фахівців у профільних технічних університетах. Викладенню цих питань присвячені глави 1-3 даної книги.

Не дивлячись на високий рівень обчислювальної потужності сучасної комп'ютерної техніки, актуальним залишається питання ефективності МСЕ і скорочення обчислювальних витрат. При цьому для підвищення ефективності методу доцільним є розробка модифікацій МСЕ, орієнтованих на досить широке коло тіл, які мають спільні риси. Зокрема, значна кількість просторових тіл геометрично можуть бути подані як результат руху плоскої геометричної фігури, контур якої відповідає поперечному перерізу тіла, вздовж незамкненої, в загальному випадку криволінійної, утворюючої. Це дозволяє поєднати традиційну скінченно-елементну дискретизацію досліджуваного об'єкта в межах поперечного перерізу із поданням переміщень в напрямку

Передмова

утворюючої у вигляді розкладу в ряд за спеціально обраною системою координатних функцій. Такий підхід, згідно із [36, 126] отримав назву напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ). При цьому за рахунок оптимального вибору апроксимуючих координатних функцій МСЕ, досягається оптимізація структури отримуваних систем рівнянь МСЕ і способів їх розв'язання. Крім того створюються додаткові можливості зменшення обсягів вихідної інформації для опису геометрії просторових тіл. В четвертій главі книги викладена загальна концепція напіваналітичного варіанту МСЕ, який ґрунтується на застосуванні в якості координатних функцій як рядів Фур'є так і поліномів Лагранжа, Міхліна. Наведені алгоритми розв'язання задач статичної і динамічної просторових тіл та результати розв'язання задач, застосування НМСЕ в яких дозволяє суттєво підвищити ефективність розрахунків.

При підготовці даної книги використаний багаторічний досвід викладання спеціального курсу «Сучасні підходи до розрахунку просторових конструкцій при статичних і динамічних впливах» на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури для магістрів спеціалізації «Будівельна механіка» спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія».

ГЛАВА 1

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

1.1: Основна ідея і загальні принципи реалізації методу скінченних елементів

Ідея методу скінченних елементів. Метод скінченних елементів (МСЕ) - основний метод сучасної будівельної механіки, лежить в основі переважної більшості сучасних програмних комплексів. Він дозволяє з єдиних позицій проводити розрахунок стрижневих систем, пластинчастих і оболонкових конструкцій, безперервних масивних тіл, а також складних конструкцій, що є важливою характеристикою ефективності МСЕ.

Значна кількість задач будівельної механіки або прикладної теорії пружності призводять до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь в часткових похідних.

Наприклад, задача про згин пластинки, що має товщину h , і навантаженої поперечним навантаженням $q(x, y)$ вимагає розв'язання диференціального рівняння Софі Жермен-Лагранжа [98]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}$$

в якому невідомим є функція прогинів $w = w(x, y)$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$

- циліндрична жорсткість пластини, E - модуль Юнга (модуль пружності I роду), μ - коефіцієнт Пуассона.

Як правило, точний розв'язок таких задач математики є невідомим і можна говорити тільки про той чи інший варіант пошуку наближеного розв'язку. Так, наприклад, при відшукуванні

розв'язку методом скінченних різниць на область пластини наноситься рівномірна сітка, яка має певний крок розбиття і у вузлах якої значення функції прогинів пластини передбачаються невідомими. За допомогою подання похідних функції прогинів, що входять до диференціального рівняння згину пластини, через значення прогинів у вузлах сітки здійснюється запис диференційного рівняння та складається система алгебраїчних лінійних рівнянь відносно значень функції прогинів [2].

Невідомий розв'язок також може відшукуватись у деякому заздалегідь заданому вигляді - у формі функції, що задається з точністю до відносно невеликого числа параметрів. Наприклад, для прямокутної шарнірно-обпертої пластинки зі сторонам a і b заздалегідь передбачається, що прогини мають форму добутку синусоїд [2, 98]:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Функція такого вигляду за своїми властивостями задовольняє шарнірному обпиранню країв пластини (власне функція та її друга похідна, що визначає величину згинаючого момента в пластині, дорівнює нулю на краях пластини при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$), а виходячи із навантаження розшукується величина, що характеризує форму прогину - стріла прогину f (один невідомий параметр). У більш складних випадках завантаження пластини розв'язок відшукується у вигляді розкладу функції прогинів у тригонометричний ряд, але кількість відшуканих параметрів - коефіцієнтів розкладу в ряд - теж залишається обмеженою і визначається заданою точністю розв'язку.

Однак вгадування форми невідомої нам функції є досить важкою задачею, особливо, якщо згадати, що така функція має бути придатною для всіх точок області, яку займає конструкція, що розраховується, і, крім вищезгаданого, має задовольняти цілком певним умовам на границях області (приймати, наприклад, нульові значення і мати нульові перші похідні у випадку жорсткого защемлення країв пластини). Набагато легше вгадати вигляд такої функції для малої частини області, більш того, саме в силу малості такої ділянки можна дозволити собі певну свободу вибору. Наприклад, важко вгадати форму деякої кривої, по якій зігнеться

дуже гнучка сталева рулетка, але майже очевидно, що, замінивши її справжню форму деякої ламаною лінією з малими ланками, можна сподіватися, що ми відшукаємо наближене уявлення про форму такої кривої.

Ми опинилися тут дуже близько до ідеї методу скінченних елементів, зокрема, до одного з основних принципів цього методу: використовуючи дроблення області пошуку розв'язку на малі ділянки (скінченні елементи), можна дозволити собі заздалегідь задати вид шуканої функції всередині цієї ділянки, не ризикуючи зробити велику помилку для розв'язання задачі в цілому

Отже, ідея методу скінченних елементів може бути представлена наступним чином. Припустимо, що деяке досліджуване пружне тіло займає область Ω (рис. 1.1, а). Цікавить нас невідома величина (наприклад, переміщення точок тіла, або напруження, або інший параметр), що змінюється безперервно по всьому тілу. При розв'язанні задачі методом скінченних елементів ця величина приблизно представляється своїми значеннями в скінченному числі обраних нами точок тіла (вузлів). Саме ці невідомі нам величини будуть визначені. Далі, область Ω ділиться на скінченне число частин (скінченних елементів) так, щоб границі скінченних елементів проходили через вузли, і вся область була покрита скінченними елементами. Вважається, що скінченні елементи взаємодіють одне з одним тільки у вузлах і визначувана нами невідома величина є спільною для точок всіх елементів, що контактують із цим вузлом (для «зірки» елементів цього вузла).

Розглянемо тіло, навантажене довільним чином. За допомогою сітки січних поверхонь розіб'ємо його на окремі частини. Приклад такого розбиття для двовимірного тіла показаний на рис. 1.1, б. Отримувані підобласті мають, хоча і малі, але все ж скінченні (не нескінченно малі) розміри, звідки й походить їхня назва «скінченні елементи».

Таким чином, безперервне тіло представляється у вигляді сукупності скінченних елементів, властивості кожного з яких розглядаються потім незалежно від інших. На границях між скінченними елементами обираються деякі точки (вузли), переміщення яких приймаються в якості основних невідомих.

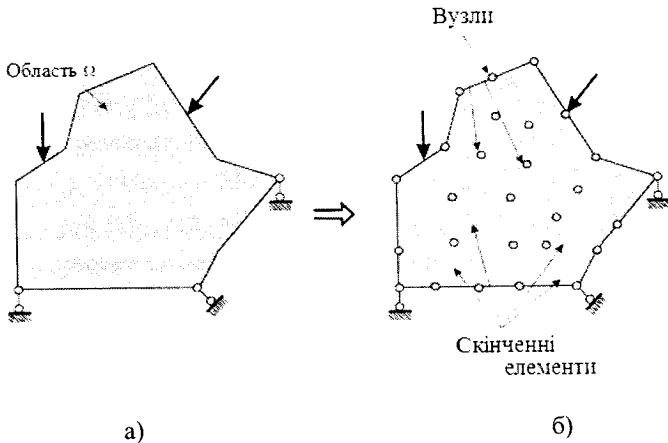


Рис. 1.1.

Такий вибір невідомих формує процедури розв'язанні задачі в переміщеннях (формування методу скінченних елементів в переміщеннях). Тут можна відразу побачити аналогію з методом переміщень для стрижневих систем, в якому за основні невідомі також беруть вузлові переміщення. Існує різновид методу скінченних елементів, в якому в якості основних невідомих приймають сили взаємодії між елементами (метод скінченних елементів у формі методу сил). Можливе також змішане формування.

Функції форми скінченного елемента. В порівнянні зі реалізацією методу переміщень для стрижневих систем, при реалізації методу скінченних елементів в разі розгляду безперервних тіл виникає низка труднощів, які можна подолати лише за допомогою введення ряду додаткових гіпотез.

Перш за все, постає питання про те, як знайти переміщення (отже, деформації та напруження) всередині кожного скінченного елемента, знаючи переміщення його вузлів. Нагадаємо, що в разі стрижневих систем розрахунок базується на використанні технічної теорії розтягування, згину і кручення бруса, яка і дозволяє подати переміщення і напруження в будь-якому перетині бруса через

вузлові переміщення. Для двовимірного (пластина) або тривимірного (масив) суцільного тіла ця задача може бути вирішена тільки наближено, наприклад, з використанням тих чи інших припущень про характер поля переміщень в елементі.

Точніше, необхідно вибрати певну сукупність апроксимуючих функцій, які дозволяють наближено подати поле переміщень усередині скінченного елемента по відомим вузловим переміщенням. Зазвичай при побудові скінченно-елементного розв'язку набір локальних функцій, що визначають поле переміщень в межах скінченного елемента, задають так, щоб з кожною локальною функцією було пов'язано одне з вузлових переміщень або поворотів. Тоді поле переміщень буде точно визначено, якщо задані всі переміщення у всіх вузлах, до яких примикає елемент.

Особливо зручно вибирати такі апроксимуючі функції, які приймають середнє арифметичне значення в деякому вузлі і нульове значення у всіх інших вузлах елемента. У методі скінченних елементів їх прийнято називати функціями форми. При виборі функцій форми істотну допомогу надає припущення про малість скінченного елемента. При цьому в малій області простору похибка наближеного опису поля переміщень швидше за все буде відносно малою, а зі зменшенням розмірів скінченних елементів помилка апроксимації буде зменшуватися.

Якщо, наприклад, скінченні елементи мають форму трикутника і вузли, в яких визначаються невідомі переміщення, є його вершинами (рис. 1.2.а), то можна уявити собі, що в межах скінченного елемента поле переміщень (сума цих площин), теж є площиною (рис. 1.2.б), і, отже, невідомий розподіл переміщень у всьому тілі апроксимується деяким многогранником, близьким до шуканого розподілу переміщень. Аналогічне міркування може бути застосоване до стрижневого двовузлового скінченного елемента із лінійним розподілом переміщень (рис.1.3, а). У разі припущення про нелінійний розподіл переміщень в межах стрижневого скінченного елемента необхідно використовувати тривузловий скінчений елемент і відповідно квадратичні функції форми (рис.1.3,б).

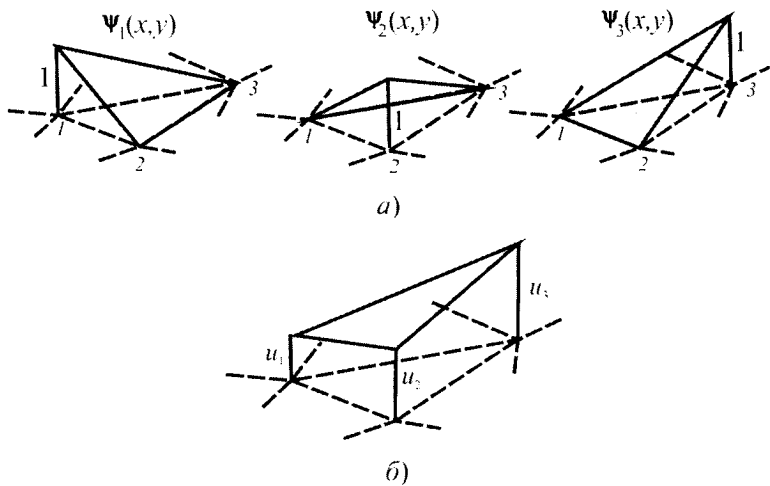


Рис. 1.2.

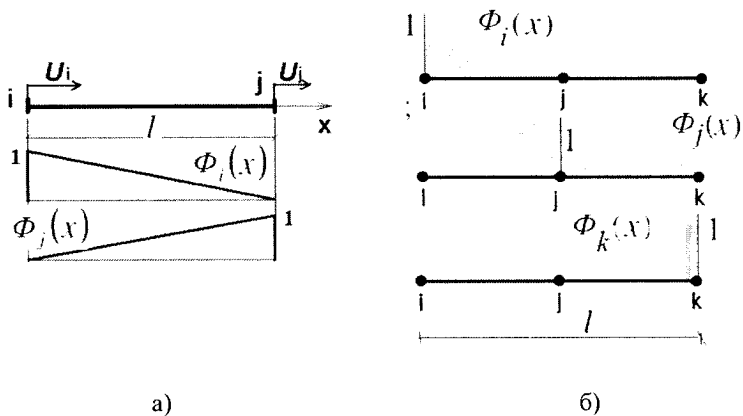


Рис. 1.3.

Вибір функцій форми є одним з найбільш відповідальних і важливих етапів в методі скінченних елементів, оскільки цим багато в чому визначається точність розв'язку. Тому під скінченним елементом слід розуміти не просто деяку малу область тіла, а область тіла в сукупності із заданими в ній апроксимуючими функціями.

Друга проблема виникає при формулюванні умов об'єднання скінченних елементів в єдину систему. У розрахунку стрижневих систем це вироблялося шляхом складання рівнянь рівноваги для вузлових точок, в яких елементи з'єднуються один з одним. У суцільному тілі число точок з'єднання між елементами нескінченно велике. Переймаючись розподілом переміщень усередині кожного елемента, тим самим встановлюємо і розподіл напружень у всіх точках межелементних границь. На границях розділу суміжних елементів напруження, знайдені для кожного елемента незалежно, в загальному випадку не збігатимуться. Отже, забезпечити точне виконання умов рівноваги на всій поверхні розділу не уявляється можливим. Тому в методі скінченних елементів напруження, що діють за межами кожного елемента, можна умовно замінити деякими зведеними до вузлів еквівалентними силами; і рівняння рівноваги складаються для вузлів, на які діють зазначені еквівалентні сили.

При цьому еквівалентні вузлові сили визначаються з умови, щоб здійснена ними на вузлових переміщеннях робота дорівнювала роботі дійсних напружень на переміщеннях точок граничної поверхні елемента.

Ще одна проблема виникає при обчисленні навантаження пружного тіла розподіленими поверхневими і об'ємними силами. Ці сили можуть бути враховані також заміною їх на еквівалентні в енергетичному сенсі зовнішні вузлові сили.

Після введення зазначених спрощень тіло можна розглядати як дискретну систему, тобто як сукупність елементів, з'єднаних між собою в вузлових точках. Розбиття конструкції на підобласті і вибір апроксимуючих функцій для кожної з них можна здійснити різними способами. При цьому мають бути враховані особливості геометрії тіла і забезпечена хороша апроксимація переміщень і

визначуваних через переміщення деформацій і напружень для всього тіла в цілому.

Для більш докладного пояснення поняття функцій форми в якості прикладу розглянемо розв'язок плоскої задачі теорії пружності з використанням чотирикутних скінченних елементів. Кожен скінченний елемент визначається набором його чотирьох вузлів. У випадку плоскої задачі розв'язком є два поля переміщень зсувів $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$, Отже, в кожному вузлі скінченно-елементної моделі є дві компоненти переміщень U_i і V_i , які є шуканими ступенями вільності. Для цих переміщень будемо використовувати лінійну інтерполяцію, задану в чотирьох вузлах:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i(x, y)U_i, \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i(x, y)V_i,$$

де $f = f(x, y)$ - інтерполюючі функції, або функції форми елемента.

Ці функції мають ряд специфічних властивостей. Одна з основних властивостей – локальність, що означає, що ці функції задані тільки в межах даного елемента.

Введемо в розгляд природну локальну систему координат на елементі, відповідну геометрії даного типу елемента. Природною системою координат плоского чотиристороннього елемента є система координат (ξ, η) , яка показана на рис. 1.4, а

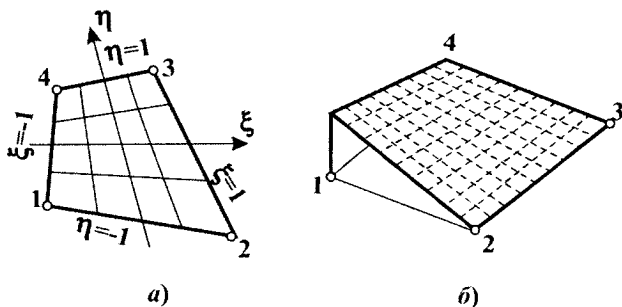


Рис. 1.4

Функції форми елемента подані наступними співвідношеннями через локальні природні координати:

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= 0,25(1-\xi)(1-\eta), & f_2(\xi, \eta) &= 0,25(1+\xi)(1-\eta), \\ f_3(\xi, \eta) &= 0,25(1+\xi)(1+\eta), & f_4(\xi, \eta) &= 0,25(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned}$$

Ці функції змінюються лінійно уздовж координатних ліній. $\xi = const, \eta = const$. Функція $f_i(\xi, \eta)$ дорівнює одиниці у вузлі і та дорівнює нулю у всіх інших вузлах. Ці функції не є лінійними і зветься білінійними поліномами. На рис. 1.4.6 наведено графічний вигляд однієї з функцій форми.

Система розв'язувальних рівнянь МСЕ. Матриця жорсткості. Розв'язок задачі методом скінченних елементів реалізується в переміщеннях. Зв'язок вектора невідомих переміщень і вектора вузлових навантажень встановлюється за допомогою матриці жорсткості, компоненти якої являють собою величини реакцій, що виникають у вузлах скінченного елемента в напрямку його ступенів вільності при одиничному зсуві вузлів у напрямку будь-якої з його ступенів вільності за умови, що переміщення по напрямку інших ступенів свободи дорівнюють нулю. Для отримання компонент матриці жорсткості необхідно здійснити відповідний перехід від функцій форми до величин відповідних вузлових реакцій.

Аби не заглиблюватися в загальну теорію, розглянемо приклад побудови матриці жорсткості найпростішого стрижневого скінченного елемента, розглядаючи при цьому плоский випадок (рис. 1.5). Для обчислення компонент матриці жорсткості скористаємося варіаційним принципом Лагранжа:

Якщо система знаходиться під дією потенційних сил, то її положення, в якому потенційна енергія досягає екстремуму, є положенням рівноваги.

Повна енергія U складається з потенційної енергії деформації тіла (потенціалу внутрішніх сил) E і енергії зовнішніх сил (потенціалу зовнішніх сил) $W = -P$:

$$U = E + P.$$

484333

НТБ ВНТУ
м. Вінниця

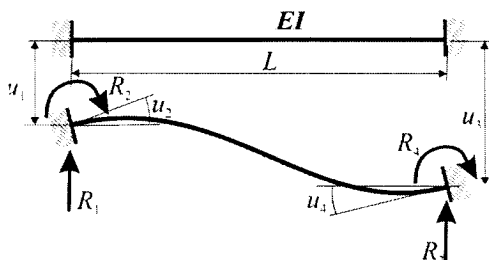


Рис.1.5

Зовнішні сили, які прикладені статично до пружного тіла і викликають зміну геометрії тіла, здійснюють роботу Π на відповідних переміщеннях. Одночасно з цим в пружному тілі накопичується потенційна енергія його деформування E .

Якщо розглянута механічна система ізольована, тобто не в ній не відбувається обміну енергією зі зовнішнім середовищем, то при статичному навантаженні цієї пружної системи її повна потенційна енергія залишається сталою і лише переходить з потенційної енергії зовнішніх сил в потенційну енергію внутрішніх сил.

Частковими похідними від виразу повної потенційної енергії системи є сумарні сили, що діють на вузли системи (пружні і зовнішні), отже, умовою рівноваги є

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{\partial E}{\partial u_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = R_i + P_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

З іншого боку умови

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

визначають стаціонарну точку функції повної потенційної енергії U . Стаціонарність, як відомо, є необхідною, але недостатньою умовою екстремуму функції.

Якщо враховувати тільки деформації вигину, то повна потенційна енергія системи, що складається всього з одного стрижня, буде представлена як

$$U = E + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \vartheta^2 dx - \sum_{i=1}^4 P_i u_i,$$

де ϑ — кривизна деформованої вісі стрижня.

Рівняння для опису зігнутої осі стрижня виражається через кінцеві переміщення за допомогою функцій форми $\Psi_i(x)$, які за змістом являють собою переміщення точок стрижня при $u_i = 1$, $u_j = 0$ ($i \neq j$). Тоді рівняння вісі подається у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(x) \cdot u_i,$$

а кривизна як

$$\vartheta(x) = u''(x) = \sum_{i=1}^4 \Psi_i''(x) u_i.$$

Умова стаціонарності повної потенційної енергії (1.2) отримає вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} dx - P_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Якщо підставити сюди вираз для кривизни, то отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_i} &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\sum_{j=1}^4 \Psi_j''(x) u_j \right) \Psi_i'' \cdot dx - P_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left(\int_0^L EI \cdot \Psi_i''(x) \cdot \Psi_j''(x) \cdot dx \right) \cdot u_j - P_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4). \end{aligned}$$

Розв'язок цих рівнянь, визначає форму зігнутої осі стрижня і, отже, набір внутрішніх зусиль: згинальних моментів і поперечних сил.

Задамо функції форми в вигляді поліномів Ерміта (рис. 1.6):

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; & \Psi_3(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2; \\ \Psi_2(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; & \Psi_4(x) &= \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right). \end{aligned}$$

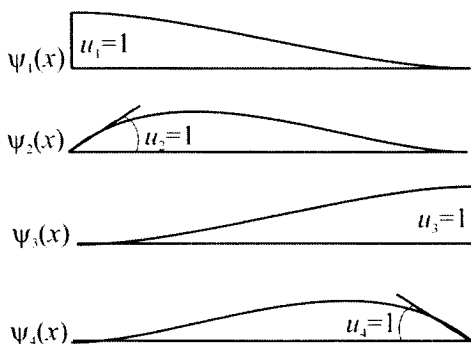


Рис. 1.6

Елементи матриці жорсткості стрижневого елемента визначаються як

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx.$$

Тоді після підстановок і інтегрування отримаємо

$$[r_{ij}] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}.$$

За аналогічною схемою знаходять матриці жорсткості для скінченних елементів іншого типу. Вибором функцій форми займаються розробники програмного забезпечення, а практикуючі інженери використовують уже готові результати. Але для усвідомленого аналізу цих результатів інженери повинні знати, які функції форми використовуються програмою, і в тих випадках, коли в бібліотеці скінченних елементів є конкуруючі варіанти, вибирати для використання при розрахунку конкретної задачі найбільш доречний варіант.

У загальному випадку розв'язання задачі МСЕ наближеним. Однак, якщо в якості функцій форми використовувати такі функції,

які за відомих вузлових переміщень визначають точне (відповідне рівнянням теорії пружності або опору матеріалів) розподілення переміщень усередині скінченного елемента, то отриманий з їх допомогою розв'язок буде точним. Це вдається зробити для стрижневих скінченних елементів, та й то не завжди.

Зокрема, традиційно використовувані кубічні залежності (поліноми Ерміта) є точними розв'язками для стрижня, але лише в статичних задачах і без урахування пружної основи. Форми власних коливань за допомогою цих поліномів представляються вже наближено, а для двомірних і тривимірних задач точних розв'язків які могли б виконувати роль функцій форми, ми просто не знаємо.

Ілюстрацією до принципу накладення сітки вузлів на простір досліджуваної конструкції може служити зіставлення з растровим зображенням, коли його якість визначається кількістю точок (пікселів) на одиницю довжини або площі. Якщо влаштовує грубе зображення (тобто досліджуваний результат розрахунку) - число пікселів (вузлів) можна прийняти мінімальним. При детальному дослідженні результату статичного розрахунку (тобто детальному розгляді зображення) число вузлів (пікселів зображення) повинно бути збільшено до необхідного рівня.

Важко визнати задовільним зображення, що складається з малого числа пікселів (в абсолютному мінімумі - з одного пікселя) - таке зображення може відповідати якому завгодно оригіналу.

Однак для скінченних елементів, для яких існує точний опис апроксимуючих функцій (наприклад - просторовий стрижень) застосування одного скінченного елемента для апроксимації одного конструктивного елемента цілком можливо за умови відсутності взаємодії такого конструктивного елемента з іншими частинами конструкції в проміжних точках.

Більш докладне викладення теоретичних основ МСЕ, в тому числі питання побудови функцій форми і матриць жорсткості скінченних елементів різної вимірності викладені, зокрема у [18, 34-36, 66, 84].

Точність обчислення параметрів напружено-деформованого стану. Необхідно відзначити ще одну важливу особливість розв'язку задачі МСЕ. Як вже було сказано, первинним результатом розв'язання задачі МСЕ є поля переміщень точок

досліджуваного об'єкта. Однак для подальшого аналізу необхідними є величини напружень. В класичному варіанті МСЕ, заснованому на розв'язку в переміщеннях, поле напружень отримується на основі поля деформацій (закон Гука),

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

яке в свою чергу знаходиться шляхом диференціювання поля переміщень (співвідношенні Коші) [19, 52, 56]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right)$$

Диференціювання, присутнє в цьому процесі, знижує точність отриманих величин напружень. Цю обставину необхідно враховувати при оцінці точності отриманого розв'язку.

Це можна продемонструвати таким чином. Нехай, наприклад, скінченні елементи мають трикутну форму, а в якості функцій форми використовуються лінійні функції. Тоді невідома функція переміщень постане у вигляді багатогранника з плоскими гранями (рис.1.7. а).

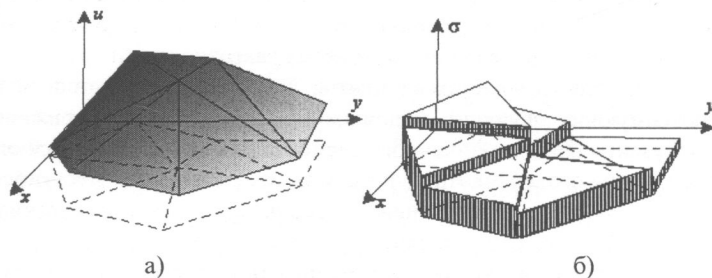


Рис. 1.7

Зауважимо, що вузлові переміщення належать одночасно всім трикутним скінченним елементам, що сходяться в одному вузлі, тобто забезпечується спільність переміщень у вузлах скінченноелементної сітки. Але, внаслідок лінійності функцій форми, спільність в парі вузлів означає і збіг переміщень у всіх

точках міжелементних границь, що є відрізком прямої між розглянутою парою вузлів.

Зважаючи, що деформації (і, отже, напруження) визначаються першими похідними від перемішень, і в даному випадку лінійних функцій форми вони, як похідні від перемішень, дорівнюватимуть константі всередині елемента, причому ці константи не обов'язково будуть збігатися на сусідніх елементах. Отже, по лінії сполучення скінченних елементів функція напружень матиме розриви, а епюра напружень набуде ступінчастої форми (рис. 1.7.б).

Як вже обговорювалося вище, скінченні елементи являють собою малі області досліджуваного об'єкта, які, однак, мають властивості цього об'єкта. При цьому може здатися, що при досить дрібному розбитті виникає суперечність між класичним визначенням стрижня як об'єкта, один з розмірів якого (довжина) помітно перевищує інші, що визначали габарити поперечного перерізу. Те ж відноситься до пластин і оболонок. Припущення про достатню видовженість стрижня або про малість товщини оболонки, введене в будівельній механіці, необхідно для обґрунтування виду відповідного диференціального рівняння. При цьому при виведенні відповідного диференціального рівняння розглядався нескінченно малий елемент. Що ж стосується способу розв'язання отриманого диференціального рівняння, то тут слід пам'ятати, що уявлення розрахункової моделі об'єкта у вигляді ансамблю скінченних елементів не відповідає «реальному моделюванню», коли об'єкт монтується з набору маленьких пластинок, стрижнів і т.п. Скінченний елемент – не пластинка або стрижень в реально-механічному сенсі цього слова, а якийсь образ пластинки або стрижня, з якого запозичена геометрична форма, наділена набором функцій, що апроксимують деформований стан всередині елемента по переміщенням його вузлів. Властивості стрижня, пластини або оболонки мають біти притаманними об'єкт розрахунку в цілому, а не ті скінченні елементи, на які він розбитий.

При дуже дрібному розбитті на скінченні елементи деякі програми дають розв'язок із помилкою більшою, ніж при використанні більш грубої сітки. Це можливо в разі, коли в результаті розбиття ми отримуємо погано обумовлену задачу.

Відповідним прикладом для пояснення зазначеного ефекту може служити консольна балка, довжиною L завантажена силою на вільному кінці.

Балка згинається по гладкій кривій, що нагадує першу власну форму вигину, при цьому характеристик жорсткості балки пропорційна величині $G = EJ/L^3$, де E – модуль пружності матеріалу, J – момент інерції поперечного перерізу. Помилки в обчислених прогибах здатні надати лінії вигину коливальний характер, близький до вищої власної форми згину, при цьому жорсткістні параметр пропорційний $K = EJ/(Ln)^3$, де n – число напівхвиль або число скінченних елементів по довжині балки.

Число обумовленості матриці жорсткості χ , яке дорівнює відношенню екстремальних власних значень, приблизно відповідає відношенню G/K і має порядок $\chi \approx 1/n^3$, що вже при кількості скінченних елементів $n = 50$ дає $\chi \sim 10^5$. Для чисельної ілюстрації накопичення помилки розглянемо результати чисельного експерименту, проведеного для балки при $L = 10$ м, навантаженою на вільному кінці силою $P = 1$ т. Момент в защемленні має дорівнювати 10 Тм. При використанні 2000 елементів отримуємо момент 10,001 Тм, при 8000 елементів – 9,619 Тм. Щоб переконатися в тому, що справа тут не в малій довжині скінченого елемента, розрахуємо ту ж консольну балку із довжиною 8000 м, при її розбивці на 8000 елементів замість моменту 8000 Тм ми отримуємо 7187,6 Тм.

Цікаво відзначити ще один факт: зміна використовуваних одиниць виміру може привести до зміни числа обумовленості системи розв'язувальних рівнянь і до втрати точності розрахунку в разі, коли така зміна підвищує число обумовленості. Здавалося б, загальне масштабування, що відбувається при зміні одиниць вимірювання довжини з метрів на міліметри, не повинно впливати на обчислення. Але справа в тому, що при такій заміні залишаються незмінними величини вимірювання кутів повороту (вони були і залишилися радіанами), тому для стрижневих елементів, наприклад, компоненти матриці жорсткості EA/L (A – площа поперечного перерізу), які відповідають лінійним переміщенням, і $6EJ/L^2$, що відповідають кутам повороту, змінюються в різному

ступені, що і призводить до інших співвідношень між максимальним і мінімальним власними числами матриці, тобто до зміни числа обумовленості.

В'язі. Граничні умови. Важливими і відповідальними характеристиками розрахункової моделі МСЕ є в'язі. Зрозуміло, що не всі шукані переміщення вузлів системи є незалежними, частина з них заздалегідь зумовлена граничними умовами (умовами обпирання конструкції) або, скажімо, умовами симетрії (при побудові дискретної скінченоелементної моделі для однієї із симетричних частин розрахункової схеми). Можливі й інші, більш складні залежності між компонентами вектора невідомих переміщень, що реалізують особливості поведінки конструкції, пов'язані з тими обмеженнями, які виникають в силу дії в'язей (наприклад умови пружного обпирання і т.і.). В лінійних системах математично рівняння в'язей записуються у вигляді лінійних однорідних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} \Delta_j = 1, \quad (i=1, \dots, p)$$

де Δ_j — переміщення вузлів системи, c_{ij} — коефіцієнти, p — кількість в'язей. Наведене рівняння вказує на взаємозв'язок окремих переміщень і найчастіше відноситься до внутрішніх в'язів. Наприклад, якщо в'язь забороняє взаємну зміну відстані між вузлами k і s вздовж вісі X , то ми будемо мати умову вигляду $\Delta_{kx} - \Delta_{sx} = 0$, а якщо заборонено переміщення 16-го вузла під кутом 45° до координатних вісей X і Y , то відповідний запис буде такий $(\sqrt{2}/2)\Delta_{16,x} + (\sqrt{2}/2)\Delta_{16,y} = 0$.

Найпростішим варіантом таких рівнянь є умова заборони на деякі переміщення

$$\Delta_j = 0,$$

де індекс j пробігає деяку кількість значень.

Цей варіант в'язей описує приєднання системи до «землі» (нерухомої основи), тобто відноситься до зовнішніх в'язей конструкції і описує її граничні умови.

У зазначеному випадку зовнішньої в'язі мова йде про нерухомі в'язі, і саме тому права частина рівності є нульовою. Якщо ж

внаслідок прикладених до системи зовнішніх впливів реалізується деякий примусовий зсув в'язі (випадок заданого переміщення), то в правій частині повинна фігурувати величина примусового зміщення. Слід ще раз підкреслити, що заданий зсув реалізується тільки як зміщення зв'язку, зміщення вільних вузлів підкоряються впливу навантажень в системі і не зобов'язані бути рівними заданій зовнішній величині.

Розглянуті обмеження, що накладаються в'язями на переміщення системи Δ_j , реалізуються деякими матеріальними тілами або пристроями, які об'єктивно присутні в системі, і факт їх існування не залежить навантаження, що діє на конструкцію.

Незміщувана внутрішня в'язь може бути уявлена як включене в конструкцію абсолютного жорсткого тіла. З деякої точки зору його доречно розглядати як деякий специфічний тип скінченного елемента. З скінченим елементом його ріднить хоча б те, що абсолютно жорстке тіло об'єднує вузли, що належать до цього тіла. Грубо кажучи, абсолютно тверде тіло може розглядатися як граничний випадок деякого скінченного елемента при прямуванні характеристик жорсткості цього елемента до нескінченності.

Часто ефект нескінченно жорсткого тіла намагаються описати як об'єднання переміщень різних вузлів схеми, тобто як примусове нав'язування значень переміщень одного вузла іншому. Цей прийом використовується найчастіше для того, щоб промоделювати нехтування деякими деформаціями системи. Так, наприклад, якщо об'єднати горизонтальні переміщення вузлів в місцях примикання ригеля до колон одноповерхової рами, то це буде еквівалентно використанню гіпотези про абсолютну жорсткість ригеля по відношенню до деформацій розтягування-стиснення.

Але об'єднання переміщень описує в повному обсязі властивості жорсткого тіла. Так, для багатопверхового просторового каркаса часто можна знехтувати піддатливістю перекриттів, вважаючи їх абсолютно жорсткими дисками. Якщо в такій схемі об'єднати горизонтальні компоненти переміщень всіх вузлів кожного перекриття, то при цьому виявляться неможливими і закручування перекриттів, які викликають різні переміщення в різних точках перекриття.

На закінчення ще раз зауважимо, що конструкція яка розраховується завжди є частиною більш загальної системи і, виділяючи конструкцію з навколишнього середовища, ми або ідеалізуємо її взаємодію із ним у формі абсолютної заборони на деякі види перемішень (приєднання системи до «землі»), або ж описуємо цей вплив в формі зовнішнього навантаження на систему. Це навантаження може бути задане явно або ж реалізуватися у вигляді реакції деяких пружних пристроїв (пружин), за допомогою яких конструкція прикріплена до «землі». В останньому випадку говорять, що на вузлові переміщення накладені пружні в'язі (в'язі скінченної жорсткості). Сюди ж відноситься спирання елементів системи на пружну основу, жорсткість якої характеризується параметром, що носить назву «коефіцієнт постілі».

В'язі скінченної жорсткості є пружними елементами системи такими ж, як і інші пружні елементи (стрижні, пластини і т.п.). Використовуючи поняття в'язі скінченної жорсткості, ми уникаємо докладного опису тих пружних пристроїв, за допомогою яких такі в'язі реалізуються (наприклад, пружного масиву, яким є фундамент споруди).

Таким чином, при моделюванні умов закріплення (обпирання) конструкції моделюється не геометричний образ, а функція (вплив) опорного пристрою на розглядуваний об'єкт.

1.2. Параметри скінченноелементної моделі.

Збіжність і достовірність розв'язку МСЕ

Способи побудови скінченно-елементної моделі. При побудові скінченноелементної моделі відбувається подання розрахункової схеми конструкції у вигляді сукупності окремих фрагментів - скінчених елементів. При цьому вважається, що скінченні елементи взаємодіють один з одним лише у вузлах, а невідома величина, яка відшукується, у вузлах має однакове значення. При відшукуванні розв'язку відбувається заміна крайової задачі (диференційне рівняння, граничні умови, при необхідності – початкові умови) системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно

прийнятих невідомих. Отриманий таким чином розв'язок задовільнює поставленій задачі лише в окремих точках розрахункової схеми.

Таким чином розбивка на скінченні елементи є найбільш відповідальним етапом розрахунку при застосуванні методу скінченних елементів.

Розглянемо яким чином утворюється скінченно-елементна сітка на площині або на криволінійній поверхні. Найпростішим способом є пряме завдання координат вузлів, за допомогою яких потім формуються скінченні елементи. Для цього слід вказати які з вузлів і в якій послідовності створюють контур скінченного елемента. Такий спосіб застосовується переважно в нескладних моделях або ж в тих випадках, коли потрібно розширити вже наявну скінченно-елементну модель.

Основним способом створення скінченно-елементних моделей є автоматичний спосіб їх формування. Сучасні скінченно-елементні програмні комплекси передбачають можливість розгляду дискретних моделей із кількістю вузлів, що вимірюється тисячами і десятками тисяч. Природно, що в таких умовах неможливо собі уявити «ручне» складання скінченно-елементної сітки, і більшість сучасних програмних засобів має ті чи інші автоматичні сіткові генератори.

Найпростішим варіантом генерації є випадок створення прямокутної сітки елементів на прямокутній області площині. При цьому може бути створена сітка зі змінним або постійним кроком, наприклад, в площині XoY . Введення установок сітки виконується завданням величини кроків і кількості повторень по кожному напрямку.

Так, наприклад, при завданні наведених у таблиці нижче параметрів розбиття отримаємо сітку з прямокутних скінченних елементів, показано на рис. 1.8.

Крок вздовж вісі X	Кількість кроків	Крок вздовж вісі Y	Кількість кроків
0.5	6	0.25	8
0.25	8	0.5	6
1	5		

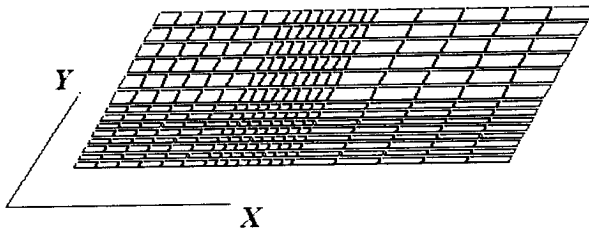


Рис. 1.8.

В такий спосіб можуть задаватись вихідні дані і для створення стержневої дискретної моделі. В цьому випадку «кількість кроків» відповідатиме кількості стержневих скінченних елементів у напрямку відповідної осі.

Одним з найбільш універсальних засобів формування сіток скінченних елементів є створення сітки трикутних скінченних елементів (триангуляція) в замкнутій області довільної форми на площині. Ця операція автоматично виконується практично в будь-якій сучасній програмній системі.

Зручність застосування трикутників в якості елементарних областей, займаних окремими скінченними елементами, визначається тим, що за їх допомогою легко описувати межі тіл досить складної форми. Крім того, трикутна сітка корисна при згущенні елементів в тій частині розрахункової області, де передбачаються високі градієнти напруженого стану конструкції, наприклад, в місцях концентрації напружень у вирізів, вхідних кутів і т.п. Трикутники добре пристосовані для автоматичної побудови сітки скінченних елементів, причому більшість відомих генераторів сіток, включених в розвинені програмні комплекси, засновані на триангуляції області. Саме ці переваги трикутних скінченних елементів і обумовлюють їх широке використання в програмних комплексах.

Для триангуляції області найчастіше використовується метод, заснований на побудові діаграми Вороного (рис. 1.9, а), за допомогою якої можна розділити площину на області тяжіння заданої множини вузлів. Кожне ребро цієї діаграми є відрізком прямої, яка перпендикулярна відрітку, що з'єднує пару найближче

розташованих точок, і ділить цей відрізок навпіл. Якщо тепер з'єднати відрізками кожен пару точок, що мають загальне ребро в діаграмі Вороного (рис. 1.13, б), то ми отримаємо систему трикутних фігур, які покривають розглядувану множину вузлів (триангуляція Делоне).

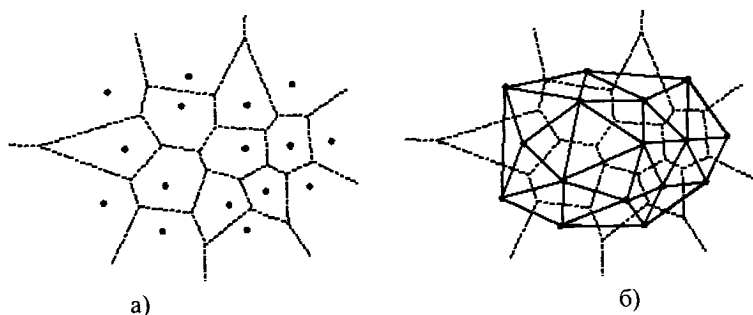


Рис. 1.9.

Оцінка якості скінченно-елементної сітки. Важливою властивістю скінченно-елементної сітки є її гладкість (поступова зміна розмірів елементів), оскільки різка зміна характерних розмірів елемента вносить суттєві збурення в картину напружено-деформованого стану. Особливо це помітно при розгляді напружень, представлених у вигляді ізоліній. У хороших сіткових генераторах є можливість управління згущенням (до точки, до лінії, до центру або периметру області та ін.), які дозволяють витримати заздалегідь задану ступінь гладкості розбиття. Сам механізм згущення сітки дає можливість більш детально дослідити місця концентрації напружень, зони крайового ефекту в пластинах або оболонках і т.п.

Густина розбиття сітки в автоматичних генераторах управляється такими параметрами, як задана максимальна відстань між вузлами і припустимий мінімальний кут у вершині трикутника.

З точки зору скінченно-елементного аналізу можна сміливо говорити про те, що оптимальним є розбиття на елементи, які мають форму простих рівносторонніх фігур (рівносторонній трикутник або квадрат - для плоских задач, рівносторонній тетраедр або куб - для просторових). Практично ця вимога

досягається дуже рідко і отримуване розбиття на скінченні елементи відрізняється від оптимального. Тому виникає задача оцінки якості отриманого сіткового розбиття, для чого використовуються різні параметри (див. табл. 1.1). На їх основі проводиться обчислення деяких числових характеристик - мір якості скінченно-елементної сітки. Однією з таких мір якості є коефіцієнт форми, який обчислюється в такий спосіб: для кожної сторони елемента L_i визначається площа побудованого на ній ідеального скінченного елемента (для рівнобічного трикутника вона дорівнює $0,433(L_i)^2$, для квадрата - $(L_i)^2$), які потім усереднюються. Відношення цієї усередненої «ідеальної» площі до дійсної площі відповідного елемента приймається в якості міри якості.

Ще однією з найважливіших характеристик скінченно-елементної моделі є максимальний діаметр елементів

$$h = \max_e \left(\sup_{x, y \in \Omega_e} |x - y| \right),$$

з яким часто пов'язують оцінки похибки методу. Інакше кажучи, h - це мінімальний діаметр кулі, в яку можна вкласти будь-який скінченний елемент розрахункової схеми (рис. 1.10). Крім того, зазвичай передбачається, що при нескінченному зменшенні діаметра, тобто при $h \rightarrow 0$, дотримуються наступні умови регулярності - в кожен скінченний елемент можна вписати кулю радіуса $\rho \leq Ch$, де константа C не залежить від h . Це запобігає використанню «неправильних», або так званих «голчастих» елементів (занадто витягнутих прямокутників, трикутників з дуже малими кутами і т.п.).

Для оцінки форми чотирикутних елементів що до їх «голчастості» використовується така міра якості як витягнутість (табл.1.1).

Такі «неправильні» елементи можуть сильно спотворити результати скінченно-елементного аналізу. При їх використанні навіть мала похибка в обчислених переміщеннях призводить до значних помилок в кутах нахилу і кривизні (а вони пропорційні згинним моментам), що ілюструється схематичним рис. 1.11, де мала помилка в прогині навіть змінила знак кривизни.

Таблиця 1.1

Параметр	Трикутники		Чотирикутники	
	Оптимум	Рекомендовано	Оптимум	Рекомендовано
Коефіцієнт форми		1 ... 1,3		1 ... 4
Мінімальний кут, градуси	60	30 ... 60	90	45 ... 90
Максимальний кут, градуси	60	60 ... 90	90	90 ... 135
Відношення максимального кута до мінімального	1		1	
Відношення максимальної сторони до мінімальної	1	1 ... 4	1	1 ... 4
Відношення площі до квадрату периметра	$2/\sqrt{3}$	0,5 ... 2	0,0625	0,04 ... 0,1
Витягнутість (співвідношення сторін)	—	—	1	0,25 ... 1

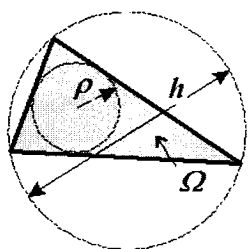


Рис. 1.10

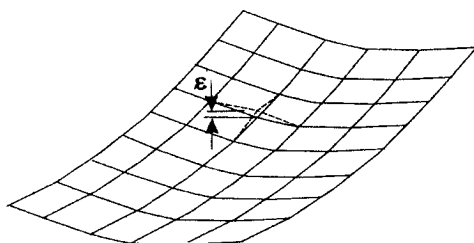


Рис. 1.11

Одна з причин різкого підвищення похибок результатів при використанні скінченних елементів «неправильної» форми є значна похибка чисельного диференціювання при обчисленні компонент

тензора перетворення координат $z_{,j}^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}$. Проілюструємо це на прикладі зображеного на рис.1.12 чотирикутного «голчастого» («косокутного») скінченного елемента. Характерні розміри такого елемента в напрямку однієї з осей глобальної системи координат, обчислені як різниця відповідних координат вузлів $\Delta Z_{13}, \Delta Z_{24}$ і по середнім точкам протилежних сторін ΔZ , істотно відрізняються в залежності від способу їх обчислення. Зважаючи що $z_{,j}^i \approx \frac{\Delta z^i}{\Delta x^j}$, а в місцевій системі координат $\Delta x^j = 1$, не урахування цієї різниці призводить до істотних похибок визначення компонент напружено-деформованого стану.

Так для найпростішої тестової задачі про визначення напружено-деформованого стану квадратної плити в умовах плоскої деформації під впливом двовісного стиску (рис.1.13, а) розв'язок МСЕ, отриманий із використанням ортогональних (прямокутних) скінченних елементів (рис.1.13,б) збігається із аналітичним результатом. Похибка визначення переміщення незакріпленого вузла плити, визначеного із використанням сітки, зображеної на рис.1.13 в, становить близько 12%. У разі розв'язання складніших задач похибка результатів може бути ще більшою. Запобігання таких похибок можливе або згущенням скінченноелементної сітки або введенням до розв'язувальних співвідношень скінченного елемента операторів, що ураховують змінність компонент метричного тензора в межах скінченного елемента [7, 9].

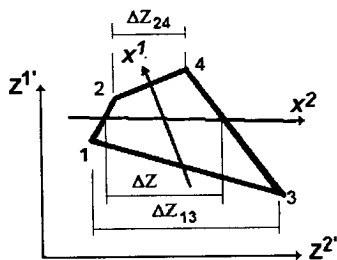


Рис.1.12

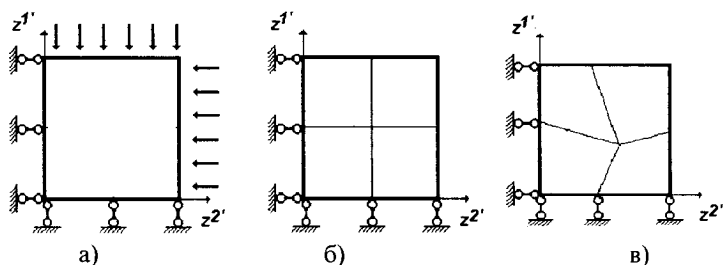


Рис.1.13

Перевірка достовірності, збіжність і оцінка похибки скінченно-елементного розв'язку. Як було зазначено вище, розв'язок задачі із використанням методу скінченних елементів здебільшого має наближений характер. Помилки у вихідних даних – описі геометрії досліджуваного об'єкта, навантажень, граничних умов ті інші – можуть привести до серйозних похибок кінцевого результату, які можуть мати як кількісний так і якісний характер. Тому важливим етапом аналізу достовірності розв'язку є його верифікація, тобто перевірка відповідності отриманих результатів вихідній розрахунковій схемі. Чим більш скланою є дискретна модель, тим вище ймовірність помилок.

В якості первісної перевірки правильності опису вихідних даних, які здійснюються шляхом перегляду властивостей скінченних елементів, даних про навантаження і первісного перегляду результатів розрахунку в вигляді деформованої схеми конструкції і числових даних про величини переміщень в характерних областях дискретної моделі, можна сформулювати такий перелік перевірок:

- співставлення основних розмірів - моделі із фізичними розмірами об'єкта;
- правильність числових значень і розмірностей фізико-механічних властивостей матеріалу і їх відповідність вихідним даним;
- відсутність розривів в скінченноелементній сітці;
- правильність опису силових навантажень з точки зору місця, напрямків, величин і розмірностей величин;

- правильність задання температур у вузлах (при наявності температурного навантаження);
- правильність опису закріплень з точки зору місця і напрямків обмежених переміщень; або величин вимушених переміщень (якщо такі передбачені вихідними даними);
- Відповідність результатів моделювання таким розрахунковим вимогам, як наприклад малість деформацій.

Подальші питання, які необхідно з'ясувати при аналізі достовірності розв'язку, потребують певної обробки результатів. До них зокрема відносяться наступні:

- виконання природних граничних умови для напружень, зокрема дорівнювання нулю (або наближення до нуля) напружень на вільній від зовнішніх силових навантажень поверхні досліджуваного об'єкта;
- врівноважування напруженнями (вузловими реакціями) прикладених зовнішніх навантажень в кожному з напрямків;
- відповідність величини і напрямку деформацій і напружень скінченноелементної моделі реальним властивостям об'єкта і їх узгодження із даними аналітичного розрахунку, отриманого із використанням спрощених геометричних моделей об'єкта.

Для ілюстрації першого з перелічених питань наведемо приклад розв'язку задачі про деформування нескінченного товстостінного циліндру, який знаходиться під впливом внутрішнього тиску p (рис.1.14,а). Один із варіантів розрахункової схеми – чверть поперечного перерізу циліндра, розглядувана в умовах плоскої деформації і представлена із використанням прямокутних СЕ (рис.1.14,б), граничні умови: $U_x|_{AC} = 0$, $U_z|_{BD} = 0$. Розподілення радіальних напружень по товщині стінки циліндра наведено на рис.1.14,в. Тиск прикладений на внутрішній поверхні, отже для скінченних елементів, розташованих на внутрішньому контурі циліндра біля вісі z (біля точки А) мають виконуватись умови $\sigma_{zz} \approx -p$, $\sigma_{xx} \approx \sigma_\theta(r=a) = 1,67p$, а біля вісі x (біля точки В) $\sigma_{xx} \approx -p$, $\sigma_{zz} \approx \sigma_\theta(r=a) = 1,67p$. Зовнішня поверхня циліндра є вільною від навантажень, відповідно в скінченному елементі біля точки С $\sigma_{zz} \approx 0$, $\sigma_{xx} \approx \sigma_\theta(r=b) = 0,67p$, біля точки D $\sigma_{xx} \approx 0$,

$\sigma_{zz} \approx \sigma_{\theta}(r=b) = 0,67p$. В цих виразах σ_{θ} – колове напруження в циліндрі, обчислене із використанням відомих формул, наведених наприклад у [74].

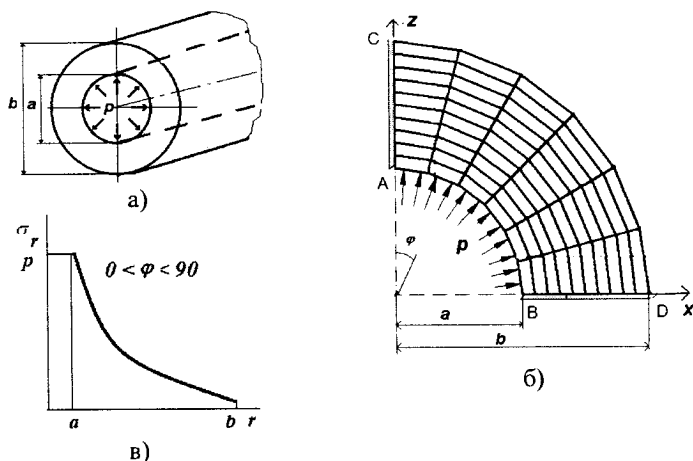


Рис.1.14.

Для перевірки положення про зрівноважування напруженнями прикладених зовнішніх навантажень доцільним є розгляд рівноваги відсічених частин конструкції під дією напружень різного напрямку, в першу чергу – спрямованих відповідно до зовнішніх навантажень і прикладених до відсічених частин конструкції. Їх рівнодіюча яких може бути визначена їх використанням чисельного інтегрування відповідної епюри розподілення напружень вздовж перерізу. Розглянемо пластину, завантажену самозрівноваженим локально прикладеним розтягуючим навантаженням (рис.1.15). Характер розподілення напруження σ_{zz} , що діє в напрямку прикладеного навантаження вздовж перерізу А-А наведений на рис.1.16.

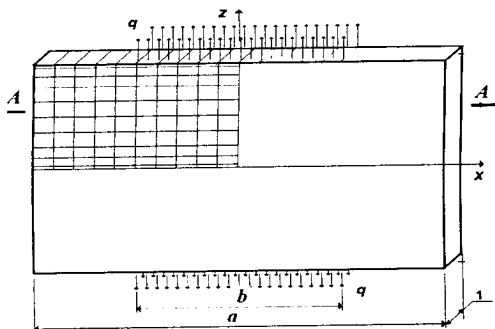


Рис.1.15.

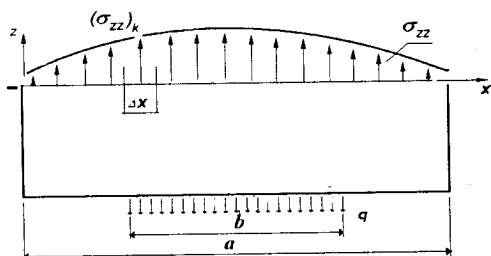


Рис.1.16.

Величини $(\sigma_{zz})_k$, визначені в кожному скінченному елементі, а їх рівнодіюча

$$R_z = \int_0^a \sigma_{zz} dx \approx \sum_x (\sigma_{zz})_k \Delta x = qb$$

де Δx - характерний розмір скінченного елемента.

Зазначені перевірки дозволяють запобігти грубих помилок, які можуть бути наслідком насамперед некоректного задання вихідних даних і можуть спричиняти суттєві кількісні та навіть якісні спотворення відмінності результатів.

В результатах скінченно-елементного розв'язку можуть виникнути також і менш суттєві похибки здебільшого - кількісного характеру, які обумовлені недостатньою апроксимацією дійсних

розподілень параметрів напружено-деформованого стану із використанням розглядуваної скінченно-елементної моделі. Такі відхилення результатів обчислення напружень, наприклад в межах до 10% , є більш-менш прийнятними з точки зору визначення несучої здатності по величинам допустимих напружень або розрахункового опору. Але такі відхилення можуть призводити до значних помилок в визначенні, наприклад, довговічності конструкцій в умовах втомних навантажень, тривалого деформування в умовах повзучості і т.і.

Зважаючи на це важливою властивістю достовірного скінченноелементного розв'язку є його збіжність – поступове уточнення результатів при послідовному збільшенні ступеня дискретизації задачі. При цьому відбувається наближення отриманих результатів до заздалегідь відомого точного (аналітичного) розв'язку або до результату, отриманого при найбільшій дискретизації.

В загальному випадку під дискретизацією слід розуміти подання характеристик певного безперевного у просторі об'єкту (або безперевного в часі процесу або явища) множиною значень цих характеристик в певних точках простору (або часу). Як було зазначено вище, при побудові скінченноелементної моделі відбувається подання безперевного середовища сукупністю скінченних елементів, тобто відбувається дискретизація по просторовим координатам. Відповідно дослідження збіжності потребує згущення скінченноелементної сітки. Для розв'язання задач, що мають певну тривалість в часі (задачі тривалого фізично-нелінійного деформування, задачі динаміки) використовуються крокові алгоритми за часом, тобто здійснюється дискретизація процесу в часі. В цих випадках додатково необхідним є проведення дослідження збіжності в залежності від величини кроку за часом. Ці питання докладніше розглядаються у главі 2.

Зупинимось докладніше на поясненні теоретичних аспектів і умов збіжності скінченно-елементного розв'язку і його.

Аппроксимууючі функції МСЕ як правило є поліноміальними або кусково-поліноміальними (метод підобластей), хоча і існують елементи з дрібно-раціональними (так звані ізопараметричні елементи), тригонометричними, логарифмічними та іншими

апроксимаціями поля переміщень. Вибір ступенів вільності елемента і відповідних апроксимуючих функцій повністю визначає швидкість збіжності і оцінку похибки МСЕ.

Якщо зафіксувати всі параметри скінченно-елементної розрахункової моделі, за винятком характерного розміру скінченних елементів h , то можна уявити, що, змінюючи цей розмір, ми отримаємо послідовність наближених рішень задачі $u(h)$. Коли говорять про збіжність МСЕ, то мають на увазі, що ця послідовність спрямовується до точного розв'язку задачі u^* , коли $h \rightarrow 0$.

Інтуїтивно здається очевидним, що чим густіше сітка скінченних елементів, тим точніше отримується розв'язок. Насправді така збіжність наближеного розв'язку до точного має місце лише при використанні скінченних елементів, які відповідають певним вимогам (наприклад [83, 96]).

Будь-яке пружне тіло має нескінченно велику кількість ступенів вільності. Обмеження числа ступенів вільності набором вузлових переміщень, розглядуваних для вузлів скінченноелементної моделі, зменшує можливість деформування, що рівносильно введенню додаткових в'язів. Це призводить до завищення жорсткості тіла в порівнянні з істинною жорсткістю. Переміщення, одержувані МСЕ, будуть в середньому менше їх точних значень.

При згущенні сітки число вузлових переміщень (тобто ступенів вільності тіла) збільшується. Важливо встановити, за яких умов це буде супроводжуватися покращенням точності розв'язку, тобто його збіжністю до точного.

Доведено, що для забезпечення збіжності достатньо, щоб кожна компонента переміщення могла бути в межах скінченного елемента представлена поліномом не нижче першого ступеня. Цю вимогу називають іноді умовою повноти скінченного елемента. Умову повноти можна сформулювати наступним чином: елемент вважається повним, якщо, по-перше, в апроксимуючі функції включені його переміщення як жорсткого цілого і, по-друге, якщо в елементі може існувати однорідний (тобто незалежний від координат) деформований стан з довільними компонентами деформації.

Пояснимо ці умови докладніше. Припустимо, що вузли скінченного елемента отримують переміщення, відповідні його переміщенню в просторі як абсолютно жорсткого тіла. Якщо при цьому деформації, знайдені за формулами теорії пружності, виявляться нульовими, то це означає, що жорсткі зміщення точно представлені в використовуваних апроксимуючих функціях.

Друга вимога ґрунтується на таких міркуваннях. При зменшенні розмірів скінченних елементів зміни деформацій у межах кожного з них будуть все менш істотними в порівнянні з самими деформаціями, тобто деформований стан буде наближатися до однорідного. Для збіжності розв'язку необхідно, щоб апроксимуючі функції дозволяли відтворити такий граничний стан.

Звернемося тепер до несумісних елементів. Збіжність розв'язку до точного має місце і в цьому випадку, якщо в межі (тобто по мірі згущення сітки) в апроксимуючих функції зникають члени, що створюють несумісність. Отже, збіжність буде гарантована, якщо несумісні скінченні елементи, по-перше, здатні відтворити лінійне поле переміщень i , по-друге, виявляються при цьому спільними. Зазвичай використовують більш жорстку вимогу, відповідно до якої повинна забезпечуватися суцільність тіла в умовах лінійного поля переміщень при будь-яких розмірах елемента, а не тільки в межі.

Корисно мати на увазі також наступне міркування. Якщо елементи несумісні, то по їх границям можливі деякі переміщення, яких не існує в континуальній розрахунковій моделі (наприклад, взаємні кути повороту пластин), які відповідають відсутності деяких в'язів.

При збільшенні числа скінченних елементів і зменшенні їх розмірів зростає загальне число ступенів свободи конструкції і, отже, зменшується вплив накладених вузлових в'язів. Цей процес при виконанні певних умов і забезпечує збіжність методу для сумісних скінченних елементів. З іншого боку, цей же процес веде до того, що зменшуються взаємні переміщення на межелементних межах в несумісних елементах, що можна трактувати як певний замикання раніше знятих зв'язків. Отже, збіжність несумісних елементів може мати місце лише в тих випадках, коли позитивні тенденції від подолання накладених зв'язків превалюють над цією

негативною тенденцією накладення зв'язків на межелементних межах.

Тут корисно помітити, що відсутність (зняття) зв'язків на межелементних межах несумісних елементів не дозволяє стверджувати, що збіжність розв'язку при згущенні сітки матиме монотонний характер і наведене вище твердження, що переміщення, одержувані МСЕ, будуть в середньому менше їх точних значень, втрачає свою справедливність. Якщо для сумісних елементів у міру згущення сітки переміщення тільки збільшувалися, монотонно наближаючись до точного розв'язку знизу, то для несумісних елементів можуть мати місце розв'язки із наближенням до точного розв'язку з двох сторін.

Таким чином відсутність збіжності ставить під сумнів результати скінченно-елементного аналізу. Однак слід враховувати, що відомі теоретичні оцінки швидкості збіжності орієнтовані на з'ясування асимптотичних властивостей розв'язку, а практичного користувача програмного комплексу цікавить ступінь наближення наближеного розв'язку, отриманого на цілком певній сітці скінченних елементів.

Звичайно, в більшості випадків асимптотична збіжність супроводжується і прийнятною «практичною збіжністю», під якою зазвичай розуміють можливість отримання результатів прийнятної точності при порівняно грубому розбитті, але з цього правила є й винятки. Слід також мати на увазі, що теоретичні оцінки швидкості збіжності будуються виходячи з деяких найгірших припущень про вигляд поля переміщень, які не обов'язково реалізуються в конкретній задачі. Крім того, в процесі доведення теорем збіжності, як правило, використовуються ланцюжки підсилюючих нерівностей і, нарешті, оцінки швидкості збіжності містять невідому константу.

У зв'язку з цим на практиці для дослідження збіжності скінчено елементного розв'язку і забезпечення його достовірності використовується аналіз результатів послідовності розв'язків, отриманих із використанням декількох скінчено елементних сіток. Зазначені сітки отримують послідовним згущенням, тобто збільшенням кількості вузлів і скінченних елементів. Згущення скінченно-елементної сітки може відбуватись або пропорційним діленням кожного скінченного елемента на декілька із меншим

характерним розміром, що найбільш просто реалізується на дискретних моделях регулярної структури (як, наприклад для сітки, утвореної із скінченних елементів прямокутної форми на рис.1.8 при кратному зменшенні величини кроку і відповідному збільшенні кількості кроків). У випадку більш складних дискретних моделей використовується локальне згущення сітки, що є актуальним зокрема при розв'язанні задач по напружено-деформований стан тіл складної форми, із концентраторами напружень і т.і..

При цьому відбувається наближення отриманих результатів до задалегідь відомого точного (аналітичного) розв'язку або до результату, отриманого при найбільшій дискретизації (на найбільш густій скінченноелементній сітці). Для оцінки точності розв'язку обчислюється похибка $\delta_S(N_k)$ визначення параметра напружено-деформованого стану (НДС) на розглядуваній сітці:

$$\delta_S(N_k) = \frac{S(N_k) - S_0}{S_0} \times 100 (\%),$$

де $S(N_k)$ - значення параметра НДС S , отриманого на скінченно елементній сітці, яка характеризується параметром N_k (кількістю вузлів або скінчених елементів); S_0 - значення параметру НДС прийнятого в якості точного результату.

В якості параметра НДС для дослідження збіжності можна використовувати переміщення характерних точок конструкції, або інші параметри, що характеризують поведінку конструкції – компоненти напружень або інваріант тензора напружень – інтенсивність нормальних напружень, власні частоти або амплітуду коливань при розв'язанні задач динаміки, значення параметрів механіки руйнування при розв'язанні задач про деформування тіл з тріщинами та інші. Це залежить від кінцевої мети розв'язання задачі.

При цьому необхідно враховувати, що обчислення напружень здійснюється за величинами деформацій. Так, чисельне диференціювання, використовуване при обчисленні деформацій в ході скінченноелементного розв'язання задачі, знижує точність результатів. Тому припустими величини похибок напружень мають бути меншими, ніж для величин переміщень.

Результати аналізу збіжності звичайно подаються в табличному вигляді або у вигляді графіків, які містять значення досліджуваних параметрів напружено-деформованого стану або їх похибок, отриманих при певних параметрах скінченно-елементної сітки від величин цього параметра – кількості вузлів або скінчених елементів, в дискретних моделях. Типовий вигляд графіка збіжності параметра напружено-деформованого стану має вигляд, наведений на рис.1.17, де $N_1 < N_2 < N_3$, а $\delta_1(N_1)$, $\delta_2(N_2)$, $\delta_3(N_3)$ - відповідні похибки. Можливе також представлення результатів у вигляді розподілення параметра напружено-деформованого стану, отриманих при різних параметрах сітки, вздовж характерного перерізу або тіла (рис.1.18).

Для ілюстрації процедури і результатів дослідження збіжності скінченно-елементного розв'язку розглянемо задачу про згин затисненої по контуру квадратної плити під дією рівномірно-розподіленого навантаження $q = 50 \text{ кН/м}^2$, модуль пружності матеріалу плити $E = 880 \text{ кН/м}^2$, коефіцієнт Пуассона прийнятий рівним нулю (рис.1.19). На рис. 1.20 на чвертях плити показані чотири варіанти скінченно-елементного розбиття. Результати розрахунку і їх похибка в порівнянні з точним (аналітичним) розв'язком для сіток різної густоти наведені в табл.1.1, звідки видно, що результати обчислення прогинів і внутрішніх зусиль стабілізуються з різною швидкістю: для обчислення прогинів з похибкою в межах 2% достатня сітка 8×8 скінчених елементів, то для компонент внутрішніх зусиль потрібна більш густа сітка [70].

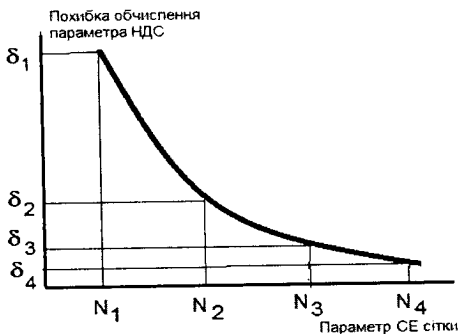


Рис.1.17

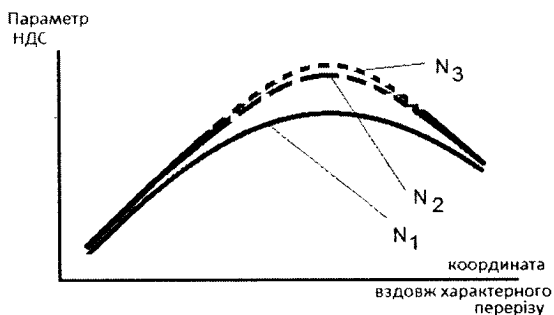


Рис.1.18

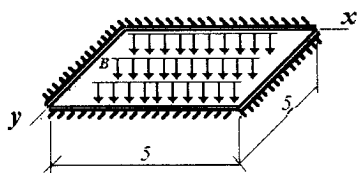


Рис.1.19

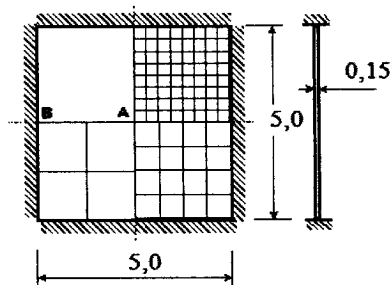


Рис.1.20

Таблиця 1.1

	4 x 4 СЕ	8 x 8 СЕ	16 x 16 СЕ	Точний розв'язок
Прогин середин. точки, мм	17,25 / ~ 8%	16,34 / ~ 2%	16,07 / ~ 0,5%	16,00
Мх в точці А, тм/м	26,46 / ~ 20%	23,41 / ~ 7%	22,69 / ~ 3%	22,01
Мх в точці В, тм/м	59,20 / ~ 8%	63,72 / ~ (-1)%	64,95 / ~ (+1%)	64,43
Qх в точці В, т/м	66,63 / ~ 40%	88,6 / ~ 21%	100,12 / ~ 9%	111,61

Різниця похибок прогинів, згинальних моментів і поперечних сил пов'язана з різним порядком похідних, що використовуються при їх обчисленні. Як відомо, згинальні моменти і поперечні сили для прямокутної пластини описуються співвідношеннями:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Наявність в виразах моменту і поперечної сили похідних від переміщень відповідно другого і третього порядку, які обчислюються шляхом чисельного диференціювання, пояснює збільшення похибок моменту і порівняно із похибкою обчислення прогину і ще більшу похибку обчислення поперечної сили. Необхідно відзначити також, що збіжність може здійснюватись як згори (величини прогинів, отримані на рідких сітках більші за точні значення) так і знизу (величини моментів і поперечних сил, отримані на найрідшій сітці є меншими за точні значення).

Взагалі операція диференціювання є некоректною в тому сенсі, що незначної зміни функції може відповідати значна зміна її похідної.

Дійсно, уявімо собі, що деяка функція $y = f(x)$ визначена з похибкою δ . Причому ми вважаємо похибку малою, тобто вважаємо, що значення $y_1 = f(x_1)$ в деякій точці x_1 приблизно дорівнює $y_1 \pm \delta$. Якщо визначати похідну чисельно, приймаючи

$$f'(x_1) \cong [f(y_2) - f(y_1)] / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x,$$

то неважко помітити, що $f'(x_1) = \Delta y / \Delta x \pm 2\delta / \Delta x$.

При малій різниці Δy відносна помилка похідної $\varepsilon = 2\delta / \Delta y$ може виявитися досить помітною. Це відбувається при кожному диференціюванні, наприклад, тричі при визначенні поперечних сил в задачі про згин пластини. При цьому згушення сітки скінченних елементів може абсолютно не допомогти вирішенню проблеми, оскільки при цьому не тільки зменшується значення початкової похибки δ , а й зближуються вузлові значення функції (зменшується Δy). Отже, може зростати і відносна похибка. Саме для оцінки можливої появи ефектів такого роду і важливі дані про асимптотичну збіжність.

Звісно, великі задачі навряд чи варто вирішувати в цілому при послідовному згущенні сітки, але очевидно, що виконання такого аналізу для характерних фрагментів розрахункової схеми є раціональним і необхідним.

Дані про значення параметра збіжності дають можливість приблизно призначити необхідну густоту сітки скінченних елементів, виходячи з міркування, наведеного в [25]: «... при природних обмеженнях на вихідні дані і сітку області збіжність має місце, і похибка визначення напружень та деформацій має порядок $C=C(h/L)$, де через C позначена константа, що залежить від форми області; h – крок сітки; L – характерний розмір області. Ця оцінка служить орієнтиром при призначенні кроку сітки в залежності від бажаної середньої точності, наприклад, задавши точність наближеного розв'язку 5%, потрібно вибрати крок сітки таким, що дорівнює приблизно $1/20$ від характерного розміру ... », тобто для характерного розміру двовимірної області необхідно використовувати близько 400 вузлів, а в тривимірній задачі – приблизно 8000.

Таким чином, при розв'язанні будь-якої досить відповідальної завданчі не можна обійтися без аналізу якості розв'язку, яке необхідно перевірити шляхом повторного розгляду задачі на декількох скінченноелементних сітках, отриманих послідовним збільшенням числа скінченних елементів. У деяких випадках доцільним може бути проведення аналізу результатів на сітках, отриманих з використанням скінченних елементів різних типів (наприклад для плоскої області - з використанням трикутних і чотирикутних скінченних елементів).

Необхідно відзначити ще одну особливість кількісного аналізу похибок результатів розрахунку з використанням декількох скінченноелементних моделей, пов'язану з присутністю серед результатів значень параметрів напружено-деформованого стану, що істотно відрізняються за абсолютною величиною. У цьому випадку для того, щоб більш точно виконати зіставлення, слід використовувати нормування розбіжностей. Наприклад, якщо розбіжності в поздовжньої силі підраховуються як співвідношення

$$\delta_N = \frac{|N_k - N|}{N} \times 100 \%,$$

де N – точне значення поздовжньої сили, то для малих значень зусиль ми отримаємо спотворену картину (для малих значень всі такі оцінки великі). Логічніше зіставляти нормовані величини, наприклад, порівнювати помилку в напруженнях, відносячи її до розрахункового опору матеріалу R_y

$$\delta_{0,N} = \frac{\sigma_{0,N}}{R_y} = \frac{|N_k - N|}{A R_y} \times 100 \%$$

Тоді розбіжності стають фізично значущими, а не обчисленими формально. Це може бути проілюстровано фрагментом результатів розрахунку реального об'єкта (табл.1.2): розбіжність зусиль у другому елементі конструкції, що здається великою при формальному обчисленні похибки, при її нормуванні є доволі незначним з точки зору кінцевих висновків про дотримання умов несучої здатності конструкції [70].

Таблиця 1.2

Елемент конструкції	N_k , кН	N , кН	δ_N , %	$\delta_{0,N}$, %
1	-220,0	-222,4	1,073	0,166
2	-14,9	-12,1	18,403	0,262
3	-460,9	-462,2	0,281	0,168
4	61,7	58,7	4,891	0,181

Аналогічно доцільно обчислювати похибку і для величин згинаючих моментів:

$$\delta_{0,M} = \frac{\sigma_{0,M}}{R_y} = \frac{|M_k - M|}{W R_y} \times 100 \%,$$

де W – момент опору поперечного перерізу.

Використання перелічених прийомів аналізу результатів скінченно-елементного розв'язку дозволяє отримувати адекватні результати для найпростіших скінченноелементних моделей.

1.3. Сполучення різних типів скінченних елементів у скінченноелементній моделі

Можливість виконання практичних розрахунків будь-якої складної конструкції визначається багато в чому тим, які скінченні елементи доступні для використання. Як правило, використовувані елементи або групи елементів, утворюють бібліотеку кінцевих елементів. Це не просто зібрання формул і програм їх реалізують, а в якійсь мірі структурована система, об'єднана прийнятими правилами опису невідомих, побудови матриць жорсткості, обчислення напружень і, в тому числі, можливостями погоджень умов сполучення елементів.

В сучасних універсальних програмних системах бібліотека скінченних елементів представлена елементами стрижнів, мембран, пластинок, оболонок, тривимірних тіл. Загальний вигляд цих СЕ наведений на рис. 1.21, а переліки деяких груп таких скінченних елементів, доступні користувачу програмного комплексу SCAD, наведені на рис.1.22-1.25.

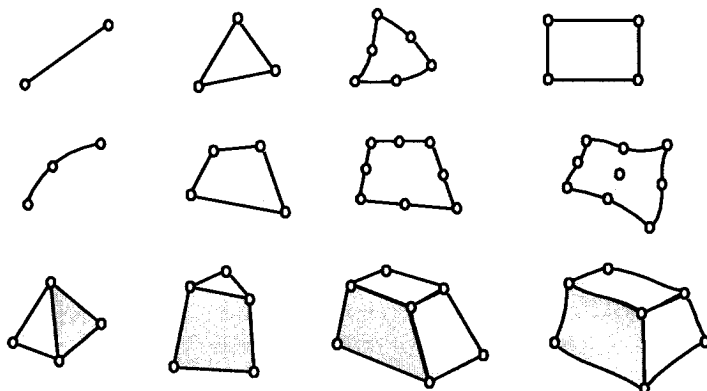


Рис. 1.21

Кожен скінченний елемент, що входить в бібліотеку, характеризується наступними властивостями:

- розмірністю використовуваного простору (одномірне, двомірне, тривимірне);
- геометричною формою, яка найчастіше є однією з найпростіших геометричних фігур (відрізок прямої, трикутник, прямокутник, чотирикутник, тетраедр і т.п.);
- набором вузлів, розташованих на лініях (поверхнях) розділу скінченних елементів (СЕ), які є загальними для СЕ, які межують один з одним;
- набором використовуваних ступенів свободи віднесених найчастіше до вузлів (хоча і не обов'язково до вузлів) - переміщення, повороти і т.п.;
- системою апроксимуючих функцій, що визначають всередині області Ω_e наближені вирази для компонент переміщень, і їх зв'язком зі ступенями свободи скінченного елемента;
- фізичним законом, що пов'язує напруження і деформації;
- визначенням класу задач, до яких застосовується даний тип скінченного елемента (СЕ пластини плоского напруженого стану, СЕ плити Кірхгофа-Лява, СЕ на пружному двухпараметричній основі плити Рейсснера, стрижень Тимошенко для просторової задачі і т.д.).

Однією з найважливіших характеристик сукупності скінченних елементів є набір ступенів свободи, віднесених до їх вузлів. Ця характеристика дозволяє виділити серед інших типів клас скінченних елементів, у яких все ступені свободи мають сенс лінійних переміщень і (або) поворотів вузлів.

Зазвичай скінченні елементи, представлені в бібліотеці будь-якого програмного комплексу, перевірені на збіжність отриманого із їх використанням розв'язку до точного рішення при згущенні сітки. Як приклад в табл. 1.3 представлені відомості про збіжність елементів бібліотеки програмної системи SCAD по переміщенням (u), напруженням (σ), моментам (M) і поперечним силам (Q).

Нагадаємо, що збіжність має асимптотичні властивості, і її наявність не позбавляє від необхідності виконання перевірки розв'язку при згущенні сітки. Асимптотична оцінка збіжності

оперує оцінками похибки типу h^m , де h – максимальний з характерних розмірів скінченного елемента, а показник ступеня m характеризує швидкість зменшення похибки при спрямуванні h до нуля.

Таблиця 1.3.

Найменування елемента	Показник ступеня в оцінках швидкості збіжності по:			
	u	σ	M	Q
Прямокутний елемент плити	2	-	1	-
Трикутний елемент плити	2	-	1	0
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) елемент плити	2	-	1	0
Прямокутний елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	-	-
Трикутний елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	-	-
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	-	-
Чотирикутний (від 4 до 12 вузлів) елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	-	-
паралелепіпед	2	1	-	-
тетраедр	2	1	-	-
тригранна призма	2	1	-	-
Просторовий ізопараметричних шестівузловий елемент	2	1	-	-
Просторовий ізопараметричних восьмивузловий елемент	2	1	-	-
просторовий ізопараметричних двадцятивузловий елемент	2	1	-	-
Прямокутний елемент оболонки	2	1	1	0
Трикутний елемент оболонки	2	1	1	0
Чотирикутний елемент оболонки	2	1	1	0
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) скінченний елемент оболонки	2	1	1	0

З цієї таблиці, наприклад, видно, що при згущенні сітки помилка в переміщеннях зменшується зі квадратичною швидкістю, а в напружених найчастіше лінійно.

Більш груба помилка в моментах, і ще більш груба помилка в поперечних силах пов'язана з тим, що перехід до них пов'язаний з чисельним диференціюванням прогинів.

При побудові скінченноелементної моделі зі скінченних елементів різних типів потрібно враховувати, що скінченні елементи однакової форми можуть мати істотно різні властивості і їх неправильне поєднання може призводити до отримання не достовірних результатів. Наприклад, це може бути обумовлено використанням при побудові однакових за формою скінченних елементів різних функцій форми. Зокрема, існують так звані гібридні моделі методу скінченних елементів, де поле переміщень визначено тільки на границях елементів, а всі інші характеристики визначають, виходячи з передбачуваного розподілу напружень. Треба віддати належне цим елементам, в тому сенсі, що в багатьох чисельних експериментах гібридні скінченні елементи дійсно демонструють прекрасні результати, особливо на помірних за розмірами сітках. Однак, твердження про те, що гібридні елементи в будь-яких ситуаціях перевершують класичні скінченні елементи, побудовані на апроксимації полів переміщень, є невірним.

Розглянемо іншу класифікацію відмінностей між скінченними елементами, пов'язану з тим, що на деякі компоненти вузлових переміщень елемент може не реагувати (відсутня відпорність) і не сприймати відповідні компоненти вузлових навантажень. Наприклад, реакція однакових за формою двовимірних скінченних елементів плити, плоскої задачі теорії пружності або оболонки розрізняються так, як це показано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.4

Скінченні елементи	Переміщення						Навантаження					
	X	Y	Z	φ_x	φ_y	φ_z	Px	Py	Pz	Mx	My	Mz
Плити (згин)			+	+	+				+	+	+	
Плоскої задачі	+	+					+	+				
Оболонки	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	

Цю властивість скінченних елементів слід враховувати, і щоб уникнути геометричній змінності в деяких випадках слід вводити вузлові в'язі за тими напрямками, де використовувані елементи не можуть забезпечити необхідну відсутність переміщень.

Крім того, певні проблеми виникають і при сполученні елементів з різними вузловими силовими реакціями на переміщення вузла. Наприклад, відсутність реакцій у напрямку кута повороту в елементах плоскої задачі (при повороті вузла не виникає пружний момент, який чинить опір цьому повороту), викликає ефект шарнірного прикріплення, якщо до стінки, що моделюється такими елементами, приєднується стрижень (рис. 1.22).

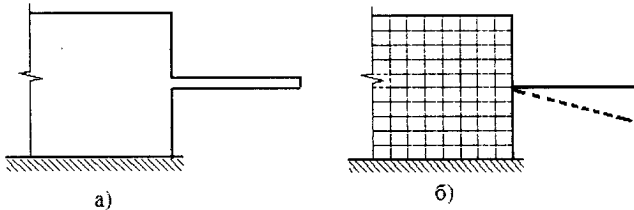


Рис.1.22

У загальному випадку, якщо деякий (наприклад, i -ий) скінченний елемент не має всіх ступенів вільності, передбачених у вузлі розрахункової схеми, то:

- «незв'язаний» ступінь свободи у вузлі надає розрахунковій схемі геометричну змінність і для правильного розв'язання задачі в деяких випадках на таку ступінь свободи необхідно накласти в'язь;
- інші скінченні елементи, що примикають до цього вузла (кажуть, що вони входять в зірку елементів цього вузла), не будуть взаємодіяти з i -им елементом.

Вимога узгодженості властивостей використовуваних в розрахунку скінченних елементів є дуже важливою, а порушення цих вимог, як правило, призводить до серйозних помилок в результатах розрахунку.

Цю властивість скінченних елементів слід враховувати, і, щоб уникнути геометричної змінності, в деяких випадках слід вводити вузлові в'язі за тими напрямками, де використовувані елементи не можуть забезпечити необхідну відсутність переміщень.

Крім того, певні проблеми виникають і при сполученні елементів з різними вузловими силовими реакціями на переміщення вузла. Наприклад, відсутність реакцій у напрямку кута повороту в елементах плоскої задачі (при повороті вузла не виникає пружний момент, який чинить опір цьому повороту), викликає ефект шарнірного прикріплення, якщо до стінки, що моделюється такими елементами, приєднується стрижень (рис. 1.22).

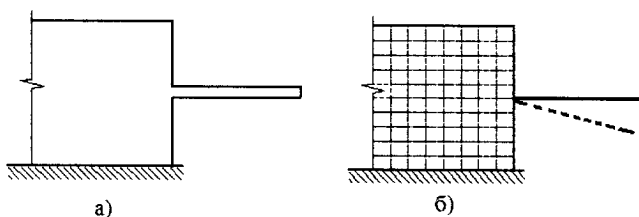


Рис.1.22

У загальному випадку, якщо деякий (наприклад, i -ий) скінченний елемент не має всіх ступенів вільності, передбачених у вузлі розрахункової схеми, то:

- «незв'язаний» ступінь вільності у вузлі надає розрахунковій схемі геометричну змінність і для правильного розв'язання задачі в деяких випадках на таку ступінь вільності необхідно накласти в'язь;
- інші скінченні елементи, що примикають до цього вузла (кажуть, що вони входять в зірку елементів цього вузла), не будуть взаємодіяти з i -им елементом.

Вимога узгодженості властивостей скінченних елементів, що використовуються, є дуже важливою, а порушення цих вимог, як правило, призводить до серйозних помилок у результатах розрахунку.

Однією з основних переваг методу скінченних елементів є можливість розв'язання задач, де в розрахунковій схемі

взаємодіють елементи різного типу (стрижневі, оболонкові, плитні і т.п.). Але потрібно пам'ятати, що метод скінченних елементів є способом наближеного розв'язання деяких диференціальних рівнянь, якими описується точна постановка задачі. Тому слід розуміти, якими властивостями володіють ці диференціальні рівняння і до яких результатів можуть приводити їх розв'язання.

Так, сполучення скінченних елементів різної розмірності (отже, спрямованих на розв'язання різних диференціальних рівнянь) може привести до несподіваних неприємностей. На одну з них ми вже вказали, коли розглядали примикання стрижня, що згинається, до балки-стілки, замодельованій елементами плоскої задачі теорії пружності (див. рис. 1.22). Там причиною була різна розмірність відповідних диференціальних рівнянь (відповідно, і числа ступенів свободи у вузлі). Для стрижня вузол повинен мати три ступені свободи, для плоскої задачі теорії пружності - дві.

Однак виникнення неприємностей може бути пов'язано і з різними властивостями розв'язків, що відповідають різним диференціальним рівнянням. Так, для деяких двовірних задач теорії пружності зосереджені впливи дають нескінченні рішення в точці прикладання такого впливу. До чого це призводить в скінченноелементному поданні задачі, покажемо на прикладі стикування плити, що згинається і стрижневого скінченного елемента.

Розглянемо дискретну розрахункову схему, яка складається із скінченних елементів плити і стрижневих елементів, жорстко приєднаних до плити. Сітка скінченних елементів плити вибирається так, щоб стрижні каркаса будівлі потрапляли у вузли сіткового розбиття плити. Така розрахункова схема забезпечить в вузлах стикування плитних і стрижневих елементів спільність як вертикальних переміщень плити і каркаса (переміщень в напрямку, перпендикулярному площині плити), так і відповідних кутів повороту. Однак, одержувані в цій розрахунковій схемі згинальні моменти в перетинах стійок, що примикають до плити, не відповідають дійсному розподілу внутрішніх зусиль, що позначається на розподілі внутрішніх зусиль в інших елементах каркаса будівлі. Дійсно, при згущенні сітки плити, і враховуючи збіжність використовуваного скінченного елемента плити, можна

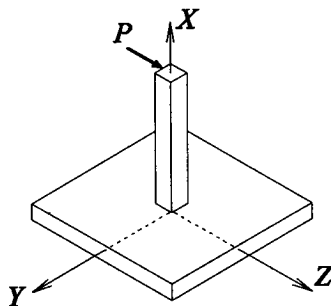


Рис.1.23

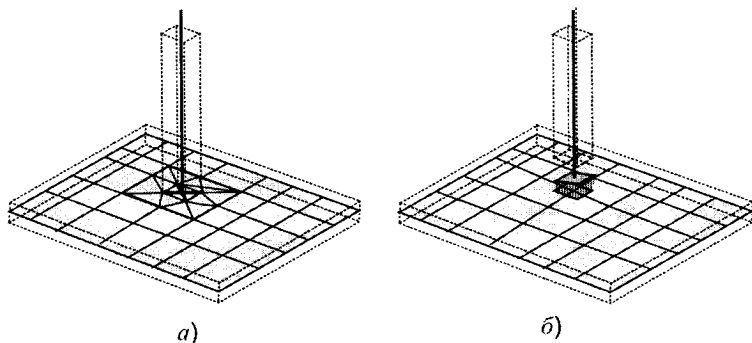


Рис.1.24

Таблиця 1.5.

$n \times n$	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
$w_n \times 10^4$	11,826	11,996	12,162	12,326	12,492	12,659
$w_n \times 10^4$	—	11,209	11,194	11,180	11,172	11,169

У другому рядку табл. 1.5 наведені результати обчислення переміщення w_n вільного кінця стійки в напрямку осі Z в залежності від використовуваної сітки ($n \times n$) скінченних елементів на чверті плану плити [70].

Легко помітити, що при кожному подвоєнні сітки зростання прогину w_n відбувається практично на одну і ту ж величину $\Delta \cong 0,167 \cdot 10^{-4}$, інакше кажучи, прогин стійки зростає лінійно разом із зростанням $\log_2 n$, точніше

$$w_n = w_2 + \Delta \cdot \log_2 (n-1),$$

звідки, як і слід було очікувати, і впливає необмежене зростання кута повороту кореневого перетину стійки разом з подрібненням сітки скінченних елементів .

Звідси впливає важливий практичний висновок: при утворенні розрахункової моделі слід врахувати фактичні умови сполучення колони з плитою. Для цього часто використовують прийом, що полягає у тому, що по контуру габариту колони передбачаються вузли, через які передаються на плиту зусилля від колони (рис. 1.24,а). Альтернативним прийомом є передача навантаження від колони у вигляді розподілення по «плямі контакту» (рис. 1.24,б).

Перейдемо тепер до розгляду поздовжніх і поперечних сил в стрижневих елементах, що примикають до диска. Можна показати, що при дії зосередженої сили в плоскій задачі теорії пружності переміщення точки прикладання цієї сили в напрямку дії сили має особливість. Повторюючи попередні міркування для згинального моменту, ми приходимо до висновку, що при точному розв'язанні задачі з точковим сполученням (тобто сполученням в одиночному вузлі) стержня і плоскої задачі теорії пружності передається на стержень зусилля повинна дорівнювати нулю. І знову таки, відмінні від нуля значення поперечних і поздовжніх сил, які формально отримуються в стрижнях в результаті розрахунку дискретної моделі, зобов'язані своїм походженням виключно похибці дискретизації. Сама ж розрахункова схема (не її дискретний аналог) наводить як нульові моменти, так і нульові зусилля в стрижнях.

До цього ж висновку можна прийти і в результаті числових експериментів, якщо уважно проаналізувати результати розрахунків при згущенні сітки в разі дії зосередженої сили на пластину. З цією метою звернемося до задачі, зображеної на рис. 1.25. Вихідні дані: товщина пластини $h = 1,0$ м; габаритні розміри пластини в площині (X, Y) $16,0 \times 16,0$ м; характеристики матеріалу $E = 3 \cdot 10^5$ т / м², $\nu = 0,25$; діюче навантаження $P = 1000$ кН.

У табл. 1.6 наведені результати розв'язання цієї задачі, де v_n - переміщення точки прикладання сили P в напрямку осі Y , і ясно, що переміщення, як і слід було очікувати, необмежено зростає разом зі згущенням сітки скінченних елементів.

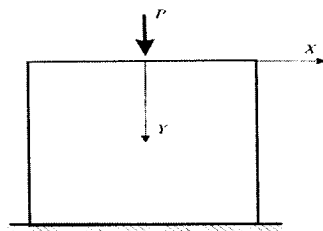


Рис.1.25

Таблиця 1.6.

$n \times n$	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
$v_n \times 104$	55,278	68,282	82,665	97,296	111,989	126,695

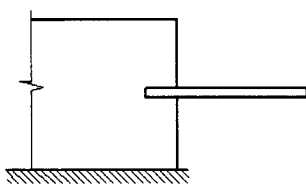
Отже, загальний висновок такий: точкове сполучення стрижневих елементів і елементів плоскої задачі теорії пружності в принципі призводить до некоректної постановки задачі.

Взагалі, поблизу особливих точок, таких, де є суттєва концентрація напружень, застосування скінченних елементів (так само як і інших методів дискретизації) зазвичай утруднено, особливо для визначення поля напружень. При цьому стримке згущення сітки і розмірності задачі може і не привести до результату, що підштовхує до додаткового аналізу ситуації. Одним з найбільш поширених суджень є наступне: зосереджена сила є неіснуюча в природі абстракція і, якби вона була створена, то, не зустрічаючи опору, зруйнувала б конструкцію будь-якої міцності. Виходить, що ця ідеалізація створює штучну складність. Насправді варто було б пам'ятати про те, яким чином фактично реалізована в конструкції та сила, яка ідеалізується у формі зосередженої, тоді

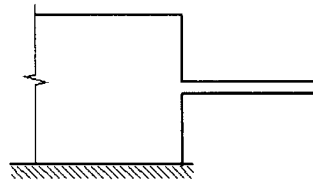
можуть відпасти і питання про збіжність скінченноелементного розв'язку до точного.

Для того щоб уникнути описаних помилок при побудові дискретної моделі необхідно в першу чергу детальніше розглянути конструктивні особливості сполучення елементів конструкції.

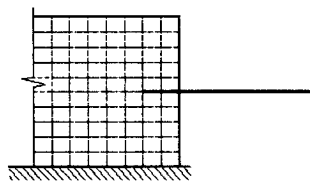
Наприклад, для задачі, про примикання стрижня до стінки (рис.1.22) можливі наступні варіанти. Нехай, наприклад, сталевий ригель двотаврового перетину заведений на частини своєї довжини в цегляну стіну, як це показано на рис. 1.27, а. Тоді в розрахунковій схемі, в тому числі і в дискретному її аналогу, досить врахувати одновимірний елемент-стрижень, який проникає на відповідну довжину в область плоскої задачі, як це показано на рис. 1.17, б.



а)

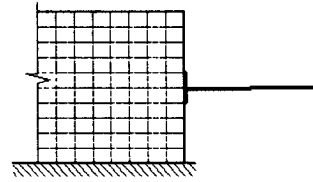


а)



б)

Рис.1.27



б)

Рис.1.28

Інший варіант розрахункової схеми можна запропонувати в разі монолітного сполучення залізобетонної стінової панелі і ригеля каркаса будівлі (рис. 1.28, а). Тут можна врахувати фактичні розміри перетину - висоту ригеля, протягом якої уздовж границі стіни доречно розмістити абсолютно жорстке тіло, як це показано на рис.1.28,б. Це абсолютно жорстке тіло для самого ригеля

кореспондується з гіпотезою плоских перетинів, згідно з якою перетин ригеля залишається після його деформації плоским і не змінює своїх розмірів.

Зрозуміло, наведені тут два варіанти формування розрахункових схем не вичерпують усього різноманіття можливих ситуацій, тому в кожному конкретному випадку при побудові дискретної моделі необхідно виходити зі конструктивних особливостей задачі, а не з певних заздалегідь сформованих схем, які можуть бути використані в усіх випадках.

Разом з тим слід зазначити, що прийом «рознесення області примикання» по типу рис.1.28 може використовуватися і в інших випадках сполучення елементів різної розмірності.

Таким чином, для отримання достовірного розв'язку методом скінченних елементів необхідним є наявність чітких уявлень про властивості скінченних елементів різних типів і, відповідно, можливості їх правильного сполучення в скінченноелементній моделі.

1.4. Побудова і можливості сучасних скінченноелементних програмних комплексів

Розрахунки елементів конструкцій, що базуються на методи скінченних елементів і реалізується в сучасних програмних системах, мають логічну структуру і послідовність дій, яка представлена на рис.1.29. Звичайно частини цієї послідовності називають препроцесором, процесором та постпроцесором. До препроцесора належать модулі, які призначені для завдання вихідних даних про розрахункову схему, та умови її роботи (Інтерпретатор розрахункових схем, Графічний редактор, Інтерпретатор навантажень), до постпроцесора – модулі, призначені для час аналізу і обробки результатів розрахунку. Пре- і постпроцесори, як правило, дають великі можливості графічного відображення і коригування вхідних даних та редагування форми представлення результатів. Майже всякий реальний розрахунок базується на аналізі декількох варіантів розрахункової моделі, тому зручні можливості перегляду, коригування та заміни деяких деталей є важливим фактором впливу на якість програмної системи.

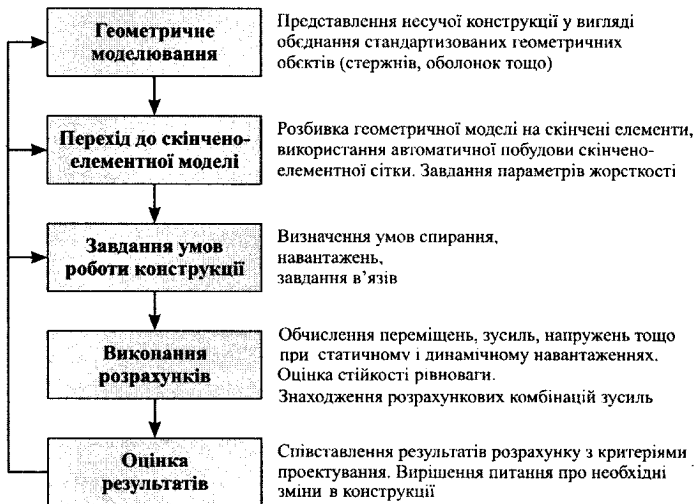


Рис. 1.29

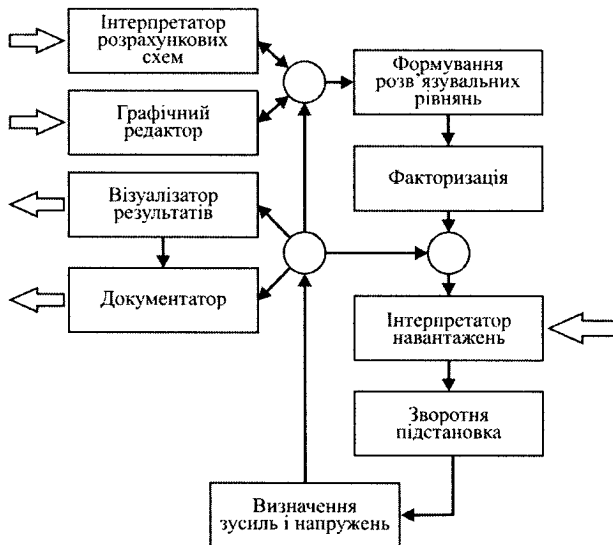


Рис. 1.30

Процесор, що зображений на рис. 1.30, відповідає випадку, коли формування і факторизація матриці розрахункових рівнянь МСЕ відокремлені від обробки правих частин цих рівнянь, що характерно не для всіх варіантів побудови розрахункового програмного комплексу. Якщо використовується ітераційний метод розв'язання, то таке відокремлення найчастіше не передбачено.

У теперішній час проектувальник може скористатися досить широким списком програм, за допомогою яких виконуються розрахунки просторових конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. Найбільш поширеними програмними системами є такі, що орієнтовані на розрахунок сучасних конструктивних просторових схем, зокрема – будівельних і машинобудівних конструкцій. Із вказаних програм на вітчизняному ринку найбільш поширеними є SCAD [26], ЛИРА [49], SELENA, Robot Millenium Micro FE, STARK_ES та інші.

Програмні комплекси ЛИРА і SCAD являють собою багатофункціональні програмні комплекси (програмні середовища), які призначені для проектування і розрахунку машинобудівних та будівельних конструкцій різного призначення, що забезпечується розвиненою бібліотекою скінчених елементів (СЕ) для моделювання стрижневих, пластинчастих, твердотільних і комбінованих конструкцій (стрижневі СЕ, СЕ оболонки, плити, балки-стілки, мембрани). До складу цих комплексів включені модулі аналізу стійкості, формування розрахункових поєднань зусиль, перевірки напруженого стану елементів конструкцій з різних теорій міцності та програми підбору арматури в елементах залізобетонних конструкцій і перевірки перетинів елементів металоконструкцій; розрахунку фундаментів, кам'яних і армокамених конструкцій; розрахунку дерев'яних конструкцій; аналізу стійкості підпорних стін, схилів, откосів, а також інші сервісні програми та додатки (формування довільних перерізів і розрахунок їх геометричних характеристик), довідники (наприклад довідник коефіцієнтів концентрації напружень), базу сталевих сортamentів (використання в проектуванні залізобетонних і сталевих елементів норм країн СНД, Європи і США), а також засоби інтеграції із графічними прикладними програмами (AutoCAD ті ін.).

SELENA універсальний програмний комплекс для розрахунку і проектування будівельних конструкцій, який включає засоби для розрахунку стійкості стержневих і оболонкових систем, широкий спектр динамічних розрахунків (стаціонарні та випадкові впливи, рухомі навантаження, вибір параметрів гасників коливань, сейсмічні навантаження). Robot Millennium - єдина система, що дозволяє виконувати всі етапи проектування і розрахунку будівельних конструкцій.

Також відомі універсальні програмні системи, наприклад, такі як ANSYS [17, 43], NASTRAN [113], ABAQUIS у яких функція знаходження напруженого та деформованого стану є тільки однією з багатьох, а кількість невідомих, якими оперує програма доходить до десятків мільйонів. Крім розв'язання розв'язання лінійних і нелінійних, стаціонарних і нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла і механіки інженерних конструкцій ці програмні системи дозволяють проводити розв'язання задач механіки рідни і газу, теплообміну, тепломасопереносу, електродинаміки, акустики та зв'язаних полів. Відповідно, ці програмні засоби використовується при проектуванні виробів провідними світовими виробниками техніки в автомобілебудуванні (компанії BMW, FORD, General Motors, Mercedes, Toyota, Volvo, GoodYear), авіабудуванні і оборонній промисловості (Boeing, General Dynamics, Lockheed Martin, US Navy,), електроніці (HP, Motorola, IBM, Digital), металургії (British Steel, Dupont), нафтовидобуванні і переробці нафтопродуктів (Exxon/Mobil, Shell, Dow), а також виробниками товарів побутових товарів (3M, Kodak, Gillette);

Сфери застосування різних програмних систем, як правило, перетинаються, але не збігаються. Це означає, що існують розрахункові моделі, засоби обробки яких передбачені в одних програмах і не передбачені в інших програмах. Так, наприклад, у різних програмних комплексах можуть бути реалізовані різні варіанти теорії оболонок. Крім того, у різних програмних системах є функціональні можливості що не збігаються. Це варто враховувати при виборі розрахункового інструментарію. Деяке уявлення про це дає таблиця 1.7.

Таблиця 1.7

Режими розрахунку	Micro FE	SELENA	STARK_ES	SCAD	ЛІРА.	Robot Millenium	ANSYS / Civil FEM	STAAD Pro
Можливість використання суперелементів	+	+	+	-	+	-	+	+
Визначення навантажень на фрагмент схеми	-	-	-	+	+	-	+	-
Нелінійний статичний розрахунок:								
• Нелінійна пружність	+	+	+	-	+	-	+	+
• Урахування пластичності (із пружним розвантаженням)	+	-	+	-	-	+	+	+
• Урахування повзучості	-	-	-	-	-	-	+	-
• Геометрична нелінійність	+	+	+	+	+	+	+	+
• Однобічні зв'язки	+	+	+	+	+	+	+	+
• Генетична нелінійність	-	-	-	+	+	-	+	+
• Розрахунок за деформованою схемою	-	-	-	-	-	+	+	+
• Граничний твердий-пластичний аналіз	+	-	+	-	-	-	-	-
Визначення розрахункових сполучень зусиль								
• найгірших за ДБН В.1.1.-1.2006	-	+	-	+	+	-	-	-
• Екстремальних і відповідних	+	-	+	-	-	-	-	-
Використання різних варіантів розрахункової моделі в рамках однієї задачі	-	-	-	+	+	-	-	-
Перевірка стійкості								
• Пропорційне навантаження	+	+	+	+	+	+	+	+
• Складне навантаження	+	-	+	+	-	-	+	-
Енергетична оцінка ролі елементів	+	-	+	+	-	-	-	-

Продовження табл. 1.7								
Загальні динамічні розрахунки:	+	+	+	+	+	+	+	+
•Модальний аналіз								
•Інтегрування рівнянь руху	+	+	+	+	+	+	+	+
Розрахунок на вітрові пульсації	+	+	+	+	+	+	-	-
Лінійно-спектральна сейсміка:								
•рівномірне поступальне порушення	+	+	+	+	+	+	-	-
•рівномірна ротація основи	+	-	+	+	-	-	-	-
•нерівномірне порушення	+	-	+	-	-	-	-	-
Розрахунок по акселерограмам:	+	+	+	+	+	+	+	+
•рівномірне поступальне порушення		-		-				
•нерівномірне порушення	+		+		-	-	-	-
Розрахунок лінеаризованої системи	-		-	+	-	+	+	-
Розрахунок на прогресуюче руйнування	+	-	-	+	-	-	-	-

Необхідно відзначити, що ця таблиця потребує певних уточнень. Так, наприклад, "Розрахунок на прогресуюче руйнування" – ще не цілком стале поняття, тому можна ставити "плюси" або "мінуси" з деяким допуском. І незважаючи на те, що ANSYS, Robot Millenium або ЛІРА використовувались при проведенні таких розрахунків, вони не мають спеціального режиму перевірки на прогресуюче руйнування.

Корисно вказати на значення деяких функцій. Режим «Визначення навантажень на фрагмент схеми» дозволяє після виконання розрахунку на відносно грубій скінченно-елементній мережі виділити деякий фрагмент розрахункової схеми, передати на нього навантаження від відкинutoї частини схеми й отриману в такий спосіб автономну (і, що важливо, зрівноважену!) задачу піддати більше детальному аналізу. Цей режим дуже зручний для висотних будинків, оскільки з його допомогою здобувається уточнений розв'язок без деталізації всієї задачі.

Досить корисні режими «Використання різних варіантів розрахункової моделі в рамках одного задачі» і «Визначення ролі підсистем». Перший дозволяє враховувати збільшення жорсткості ґрунтової основи при короткочасних впливах (вітер, сейсміка й ін.), враховувати знижені модулі деформації при температурних впливах, у зручному режимі виконувати варіантні розрахунки й багато чого іншого. Другий дає можливість виявити «утримуючі» і «дестабілізуючі» компоненти системи при втраті стійкості й тим самим оптимізувати модифікацію конструкції у випадку її недостатньої стійкості.

1.5. Короткий опис обчислювального комплексу Structure CAD

Структура комплексу Structure CAD (SCAD).
Обчислювальний комплекс реалізований як система міцнісного аналізу та проектування конструкцій на основі методу скінчених елементів. Він дозволяє проводити визначення напружено-деформованого стану конструкцій від статичних та динамічних впливів, а також виконувати ряд функцій проектування елементів конструкцій [12, 26].

В основу комплексу покладено систему функціональних модулів, пов'язаних між собою єдиним інформаційним середовищем. Це середовище називається «Проект» і містить повну інформацію щодо розрахункової схеми, представлену у внутрішніх форматах комплексу. У процесі формування розрахункової схеми відбувається накопичення інформації про розрахункову схему, яка зберігається на диску у файлі з розширенням SPR. Імена проекту (розрахункової схеми) та файлу задаються при створенні нової схеми.

Вхідні дані для виконання розрахунку можна готувати як з допомогою інтерактивних графічних засобів, так і шляхом їхнього опису у текстовому форматі. Вхідну інформацію можна представити у форматах спеціальної вхідної мови, т.зв. «текстового файлу». Текстовий файл є зручним форматом для зберігання даних.

Він добре піддається стисненню за допомогою відомих програм архівації та в разі необхідності може бути перетворений на формати стандартного проекту комплексу SCAD. Другою привабливою рисою текстового формату є його сумісність з DOS-версією комплексу, що дає можливість використовувати його для виконання перевірочних розрахунків раніше спроектованих об'єктів.

Слід відзначити, що в існуючій версії комплексу вся вхідна інформація, необхідна для виконання переважної більшості практичних розрахунків, може бути підготовлена у "графіці" і до текстового опису доводиться вдаватися лише при виконанні унікальних розрахунків.

Функціональні модулі SCAD поділяються на чотири групи. До першої групи входять модулі, які забезпечують введення вхідних даних в інтерактивному графічному режимі (графічні препроцесори) та графічний аналіз результатів розрахунку (графічний постпроцесор).

Модулі другої групи (процесори) служать для виконання статичного та динамічного розрахунків, обчислення розрахункових сполучень зусиль, комбінацій навантажень, головних та еквівалентних напружень, реакцій, навантажень від фрагмента схеми, а також аналізу стійкості, побудови спектрів відповіді та амплітудно-частотних характеристик вузлів.

Структура комплексу та зв'язки між його компонентами показано на рис.1.31.

Документування результатів розрахунку виконують модулі третьої групи. До четвертої групи включаються модулі (проектувальні постпроцесори), які служать для підбору арматури в елементах залізобетонних конструкцій, а також перевірки опору та підбору перерізів елементів сталевих конструкцій.

Усі функціональні модулі реалізовані в єдиному графічному середовищі. Інтерфейс, сценарії взаємодії з користувачем, функції контролю вхідних даних та аналізу результатів повністю уніфіковані, що забезпечує мінімальний час опанування комплексу та логічну послідовність виконання операцій.

Високопродуктивний процесор дозволяє розв'язувати задачі статички й динаміки з великою кількістю ступнів вільності (до

392000). Розрахунок супроводжується докладним протоколом, який може бути проаналізований як під час виконання розрахунку, так і після його завершення. Система контролю вхідних даних виконує перевірку розрахункової схеми та фіксує всі виявлені помилки та попередження.

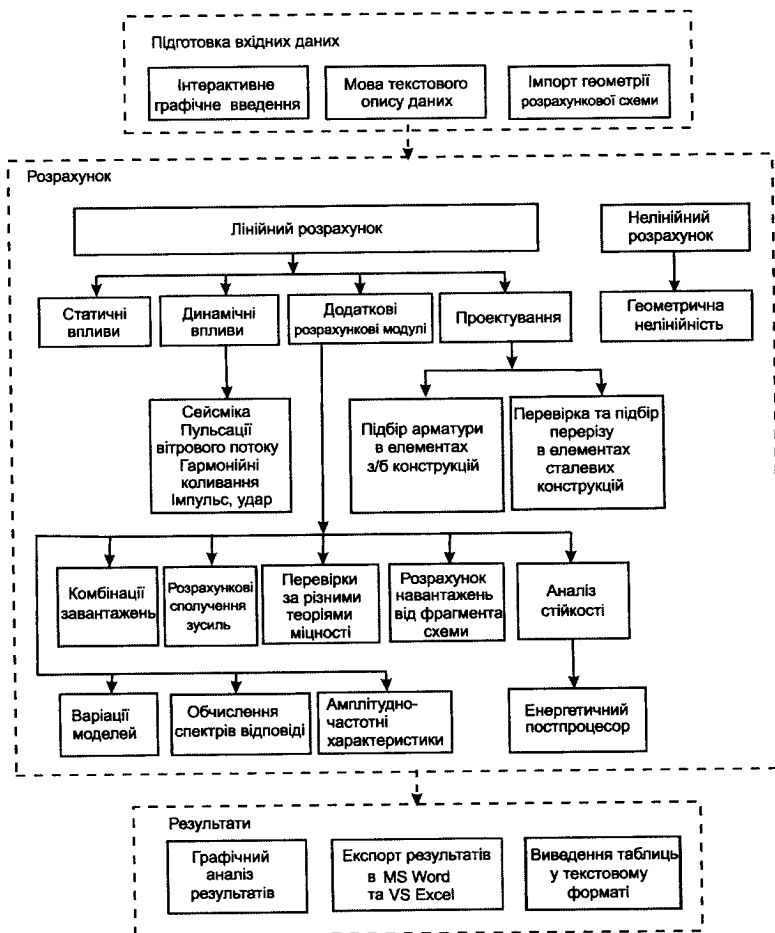


Рис. 1.31

Бібліотека скінченних елементів SCAD містить різні види стержневих елементів (шарнірно-стержневі, рамні, балкового ростверка на пружній основі тощо), Пластинчаті елементи, представлені три- і чотиривузловими елементами плит, оболонки та балок-стінок, вони також можуть містити додаткові вузли на ребрах та забезпечувати розв'язання задач для матеріалів з різними властивостями (з урахуванням ортотропії, ізотропії та анізотропії). Крім того, бібліотека включає різні види об'ємних елементів, набір три- та чотиривузлових багат шарових та вісесиметричних скінченних елементів, а також спеціальні елементи для моделювання в'язей скінченної жорсткості, пружних в'язей та інші.

Бібліотека містить ізопараметричні елементи для розрахунку плоского напруженого стану та просторові, одновимірні і двовимірні вісесиметричні елементи. Крім того, у ній є різні спеціальні елементи, що моделюють в'язь скінченної жорсткості, пружну піддатливість між вузлами та інші фрагменти розрахункових моделей. Список основних скінченних елементів (СЕ), які є в бібліотеці SCAD, подано в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

№№ типу СЕ	Найменування	Обчислювані напруження та зусилля
1-10	Стержні	
	1 – плоскої ферми	N, M (M _y), Q (Q _z)
	2 – плоскої рами	N, M (M _y), Q (Q _z)
	3 – балкового ростверка	M _x (M _x), M _y , Q _z
	4 – просторової ферми	N, M _y , M _z , Q (Q _z)
	5 – просторовий	N, M _x , M _y , Q _z , Q _y
	6 – просторовий з урахуванням зсуву	N, M _x , M _y , Q _z , M _z , Q _y
	7 – балкового ростверка на пружній основі	M _x (M _x), M _y , Q _z
	10 – універсальний	залежно від типу схеми

Продовження табл.1.7.		
11–20	Пластини	MX, MY, MXY, QX, QY, RZ (за наявності пружної основи)
21–30	Елементи для розв'язання плоскої задачі теорії пружності	NX, NZ, NXZ — плоско-напружений стан та плоска деформація; NY – плоска деформація
31–40	Об'ємні скінченні елементи	$NX, NY, NZ, TXY, TXZ, TYZ$
41–50	Оболонки	$NX, NY, TXY, MX, MY, MXY, QX$ и QY, RZ (за наявності пружної основи)
51–60	Пружноподатливі в'язі	реакції по напрямках заданих в'язей

Зусилля та напруження, які виникають у скінченних елементах, за умовчанням обчислюються на початку, у середині та в кінці стержня, а для інших типів СЕ – у центрі тяжіння. Можна замовити обчислення зусиль для стержнів у проміжних перерізах, а для інших типів СЕ – у вузлах. Звичайно зусилля та напруження в СЕ обчислюються у місцевій системі координат. Для стержнів, наприклад, це головні осі поперечних перерізів гнучкої частини. Для всіх плоских та об'ємних СЕ при обчисленні зусиль можливе завдання спеціальної системи координат.

Препроцесор підготовки даних. Графічні засоби формування розрахункової схеми. У комплексі SCAD реалізовано два види графічних модулів створення розрахункових схем. До них належать традиційний для скінченно-елементних систем графічний препроцесор, в якому основний “будівельний” матеріал для формування розрахункової схеми становлять скінченні елементи, та препроцесор ФОРУМ для формування укрупнених моделей.

У традиційному препроцесорі передбачена широка гама засобів для створення моделей, які включають функції формування схем за параметричними прототипами конструкцій, генерування сіток елементів на площині і в просторі, копіювання фрагментів схем, складання з підсхем та груп, різноманітні функції геометричних перетворень. У режимі графічного діалогу задаються всі основні

параметри схем, включаючи жорсткісні характеристики елементів, умови спирання та прилягання, статичні та динамічні навантаження та ін. Графічний інтерфейс максимально наближений саме до технології створення й модифікації розрахункових схем та враховує особливості оброблення інформації цього виду.

До комплексу включено параметричні прототипи багатопверхових та одноповерхових рам, ферм з різним обрисом поясів та грат, балкові ростверки, а також поверхні обертання (циліндр, конус, сфера і тор). У процесі їхнього формування можна автоматично призначити умови спирання, типи та жорсткості скінченних елементів.

Спеціальні засоби передбачені для створення розрахункових моделей, поверхня яких описується аналітично. Ці засоби дозволяють автоматично генерувати мережу елементів на поверхні, заданій як функція двох та трьох змінних. Для формування довільних мереж на площині використовується автоматична триангуляція, з допомогою якої мережа може бути нанесена на будь-яку область розрахункової схеми.

Для забезпечення роботи з розрахунковою схемою у звичному середовищі, використовуються розбивні (координаційні) осі. На цих осях можуть виконуватися операції зі створення схеми та її фрагментації.

Укрупнені розрахункові моделі та зв'язок з іншими системами. Формування розрахункової схеми або її частини можна виконати і на основі інформації, імпортованої з таких популярних архітектурних систем, як ALLPLAN, ArchiCAD та МАЭСТРО, систем проектування сталевих конструкцій, наприклад, StruCAD, HyperSteel, RealSteel, а також шляхом імпорту файлів у форматах DXF і DWG системи AutoCAD і ряду інших форматів.

Очевидно, що архітектурна модель не може бути повністю автоматично перетворена на розрахункову схему. Це зумовлено наявністю в ній "архітектурних надмірностей", які не становлять елементи розрахункової моделі і не впливають на результати розрахунку, не завжди акуратним сполученням елементів моделі, відсутністю даних про умови прилягання та спирання елементів, навантаженнях, матеріалах і т.ін. Трудомісткість доробки одержаної в результаті імпорту моделі до рівня розрахункової

схеми частіше за все залежить від узгодженості дій архітектора та конструктора на стадії створення архітектурної моделі.

Для спрощення цього процесу до складу обчислювального комплексу SCAD включено спеціальний препроцесор ФОРУМ, в якому для формування розрахункової моделі використовуються об'єкти, максимально наближені за призначенням та найменуванням до об'єктів архітектурної моделі. До них належать колони, балки, перекриття, стіни та дахи. Представлення геометрії розрахункової схеми в препроцесорі ФОРУМ (рис.27.2) забезпечує можливість:

- створення структурованої розрахункової моделі з укрупнених елементів;
- збереження структури об'єкта, заданої в архітектурній моделі;
- передавання структури об'єкта до скінченно-елементного препроцесору комплексу SCAD, використовуючи для цього автоматичне перетворення (триангуляцію) укрупненої моделі на розрахункову схему методу скінченних елементів та механізм груп.

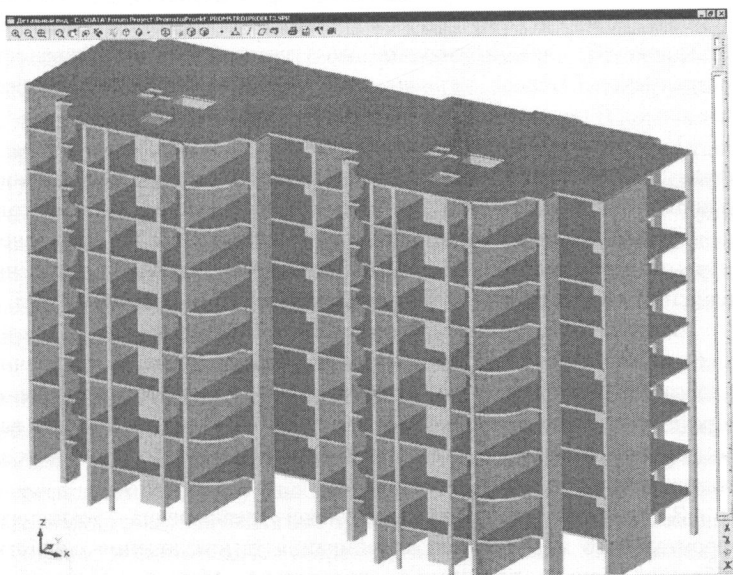


Рис.1.32

Методи розв'язання системи лінійних рівнянь Після того, як задана конструкція представлена у вигляді скінченно-елементної структури, задача про визначення переміщень вузлів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{F}\},$$

де $[\mathbf{K}]$ – симетрична позитивно визначена матриця розміром $N \times N$; $\{\mathbf{Z}\}$ – шукана матриця переміщень розміром $k \times N$; $\{\mathbf{F}\}$, – матриця правих частин (завантажень) розміром $N \times k$ (k – кількість завантажень);

Серед методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями у програмах, які реалізують метод скінченних елементів, звичайно використовуються прямі методи. Вони становлять потужний засіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями, якщо вдається знайти ефективний спосіб упорядкування, який істотно зменшує заповнення при факторизації матриці. Перевага цих методів полягає в тому, що вони мало чутливі до поганій зумовленості системи рівнянь, дозволяють виявити помилки моделювання, які призводять до геометричної змінюваності розрахункової моделі, а тривалість розв'язання майже не залежить від кількості правих частин.

У комплексі **SCAD** використовуються профільний метод і фронтальний метод, які засновані на Гаусовому виключенні. Упорядкування черговості виключення рівнянь (профільний метод) і черговості подання скінченних елементів на збирання (фронтальний метод), спрямоване на зменшення заповнень, здійснюється, як правило, зворотним алгоритмом Катхілла-Маккі.

Завдяки ефективним алгоритмам упорядкування, які істотно зменшують заповнення в процесі факторизації, вдається значно скоротити розмір факторизованої матриці і тривалість обчислень. Проте ці програми ефективні лише в тому випадку, коли вся матриця розташовується в оперативній пам'яті, тобто для відносно невеликих задач.

З огляду на це в комплексі реалізована технологія фронтального методу, в якому збирання та виключення повністю зібраних рівнянь провадяться паралельно. Матриця жорсткості системи у явному вигляді не збирається, а замість цього додається

елемент за елементом. Щойно черговий вузол стає зібраним, тобто всі елементи, прилеглі до нього, включено до ансамблю, невідомі та асоційовані з ними рівняння, належні цьому вузлу, одразу виключаються. При цьому додавання наступних елементів не буде вносити до них жодних змін. У результаті Гаусове виключення здійснюється у щільній (фронтальній) матриці порівняно невеликої розмірності, яка складається з повністю зібраної частини рівнянь та неповністю зібраної. Повністю зібрані рівняння одразу виключаються, і відповідна частина матриці записується на диск. Далі додається черговий скінченний елемент, і знову зібрані рівняння виключаються. Якщо на розрахунковій моделі виділити вузли, асоційовані рівняння для яких утворюють на даному кроці розв'язання фронтальну матрицю, то ці вузли складуть фронт. У процесі розв'язання задачі фронт рухається по вузлах моделі.

Для упорядкування рівнянь використовуються евристичні алгоритми, при використанні яких в поєднанні з технологією фронтального методу звичайно виникає кілька фронтів. Тому й метод називається багатофронтальним.

Якщо в процесі розкладення матриці [K] з'ясується, що вона вироджена (це свідчить про геометричну змінюваність системи), то здійснюється автоматичне накладення додаткової ненапруженої в'язі, яка перетворює систему на незмінювану. При цьому користувачеві надається інформація про номери вузлів і типи ступнів вільності, по яких здійснено накладення в'язей. Зауважимо, що виродження ідентифікується не за точною рівністю нулю розв'язувального елемента, а за появою на головній діагоналі числа, «практично рівного нулю», і вибір цього порогу (параметр точності розв'язання) є одним з параметрів, яким користувач може розпоряджатися сам.

Додатковим сервісним засобом є контроль розв'язання системи. При появі повідомлення про суттєву величину помилки розв'язку, що, як правило, є наслідком поганої зумовленості матриці [K], слід уважно проаналізувати переміщення вузлів і пересвідчитися в тому, що одержаний розв'язок є прийнятним з інженерного погляду. Погана зумовленість найчастіше пов'язана з невдалою конструкцією розраховуваної системи (наприклад, з

випадком “майже змінюваної” системи) або з її невдалою ідеалізацією.

Розрахункові сполучення навантажень. Взаємодію системи з оточуючим середовищем представляють звичайно у вигляді навантажень або впливів, прикладених до вузлів системи (вузлових навантажень) чи до внутрішніх точок її скінченних елементів (місцевих навантажень). Місцеві навантаження можуть бути силами та моментами, зосередженими або розподіленими по лініях, площах та об’ємах. Інколи завантаження системи подається у формі температурних впливів на елементи або заданими зміщеннями у вузлах, тобто ці впливи проявляються не як силові, а як кінематичні фактори.

Якщо впливи змінюються в часі, то викликані ними прискорення мас системи призводять до появи інерційних сил. У тих випадках, коли силами інерції знехтувати неможливо, кажуть про динамічний характер впливу, але завжди слід пам’ятати, що віднесення впливів до статичних або динамічних пов’язане не тільки з їхніми власними властивостями, але й з інерційними характеристиками системи.

У практиці проектування використовуються нормативні та розрахункові значення навантажень. Перехід від одних до інших виконується за допомогою коефіцієнта надійності з навантаження. Взагалі нормативні та розрахункові значення використовуються у розрахунках різного роду: нормативні – для перевірки другого граничного стану, розрахункові – для перевірки першого граничного стану. У комплексі **SCAD** за умовчанням припускається, що навантаження задаються своїми розрахунковими значеннями.

Сукупність навантажень та впливів, одночасно прикладених до системи і розглядуваних сумісно, називають її завантаженням. Іноді до одного завантаження відносять лише ту частину одночасно прикладених навантажень, яка пов’язана спільним походженням (наприклад, тільки сили тиску коліс одного мостового крану або навантаження від снігу на покриття лише в одному прогоні багатопрогонової будівлі) або ж має якісь інші спільні властивості (наприклад, встановлений нормама коефіцієнт надійності з навантаження). Якщо згодом виникає необхідність врахування

ефекту сумісної дії кількох завантажень такого роду (суми завантажень, взятих з певними коефіцієнтами), то кажуть про комбінацію завантажень i , відповідно, про коефіцієнти такої комбінації.

Оскільки завантаження можуть в різні моменти часу утворювати різні комбінації, і можлива кількість таких комбінацій (сполучень) досить велика, то постає нетривіальна задача відшукування таких сполучень зовнішніх впливів, які призводять до найбільш небажаних наслідків для певного обстежуваного елемента або його перерізу. У цьому випадку маємо на увазі відшукування розрахункового сполучення зусиль (РСЗ). Розв'язуючи цю задачу, слід пам'ятати про логічний зв'язок між завантаженнями, визначеними природою діючих на систему навантажень або ж вказівками нормативних документів. Такі логічні зв'язки інколи визначають неможливість одночасної дії (несумісність) деяких навантажень, таких, наприклад, як вітровий напір від вітрів різного напрямку. В інших випадках, навпаки, потрібне обов'язкове врахування якогось завантаження при розгляді певного іншого завантаження (наприклад, сила тертя можлива лише при одночасному врахуванні ще й сили нормального тиску), хоча зворотний зв'язок такого роду може й бути відсутнім (нормальний тиск за відсутності тертя цілком можна розглядати самостійно).

Необхідно відзначити, що використання комбінацій завантажень чи відшукування РСЗ ґрунтується на принципі суперпозиції, а отже, має сенс лише для лінійних систем. При врахуванні нелінійності будь-якого роду необхідно описувати всі діючі на систему навантаження у межах одного завантаження. Отже, основою вибору невідгідних розрахункових сполучень зусиль служить принцип суперпозиції, що передбачає виконання розрахунків для системи як такої, що працює лінійно.

Лінійність передбачає також, що певне завантаження або ввійде до РСЗ повністю, або буде відкинуто (якщо воно створює розвантажувальний ефект), і, таким чином, можна собі уявити всього 2^n сполучень (де n — кількість завантажень), з яких слід зробити вибір. Неважко побачити, що при реальних значеннях параметра n , кількість можливих комбінацій стає настільки великою, що розв'язання задачі прямим перебором варіантів

виявляється нереальним, з огляду на те, що для розв'язання цієї екстремальної задачі використаний спеціальний алгоритм.

Для стержнів як критерій визначення РСЗ прийняті екстремальні значення нормальних і дотичних напружень у контрольних точках перерізу. Крім напружень обчислюються також екстремальні додатні та від'ємні значення поздовжньої сили і поперечної сили, які використовуються при підборі арматури в елементах залізобетонних конструкцій і перевірці несучої здатності елементів сталевих конструкцій.

Для елементів мембранного типу (плоский напружений стан) у загальному випадку головні напруження в одній і тій самій точці конструкції при різних завантаженнях мають різну орієнтацію, тому їхнє використання як критерію добору РСЗ неможливе. Відтак тут визначення РСЗ здійснюється за значеннями нормальних і дотичних напружень, які виникають на в різний спосіб орієнтованих площадках (орієнтація задається значенням кута α в центрі тяжіння скінченного елемента). Нормальні напруження обчислюються в діапазоні зміни кута α від 90° до -90° , а дотичні — від 90° до 0° . Крок перегляду 15° .

Для елементів плити застосовується підхід, аналогічний тому, який описано вище для мембран. Згинальний і крутильний моменти в плиті дають можливість визначити нормальні і дотичні напруження на верхній та нижній поверхнях плити, саме ці напруження використовуються при пошуку РСЗ. Крім того, визначаються екстремальні значення поперечних сил.

Для оболонки також застосовується аналогічний підхід. Проте обчислюються напруження на верхній і нижній поверхнях оболонки з урахуванням мембранних напружень і згинальних зусиль. Крок зміни кута $\alpha=22.5^\circ$.

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

2.1. Загальні відомості про нелінійні задачі, види нелінійності

Лінійні задачі будівельної механіки є найбільш часто використовуваними при оцінці несучої здатності конструкцій. Однак така постановка завдання не охоплює всіх можливих аспектів роботи конструкції. Завдання розрахунку елементів конструкцій, орієнтовані на уточнене передбачування особливостей поведінки системи на всіх етапах її роботи, включаючи і етапи, які передують руйнуванню, найчастіше не можуть бути вирішені виходячи лише ґрунтуючись на розв'язанні лінійних задач будівельної механіки.

Відхилення поведінки матеріалу від закону Гука із виникненням залишкових деформацій (фізична не лінійність – пружнопластичне деформування), відмова від розгляду умов рівноваги в геометричних термінах недеформованого стану (геометрична нелінійність), урахування можливої зміни розрахункової схеми в процесі деформування (конструктивна нелінійність) складають звичайний набір нелінійностей, який розглядається в більшості досліджень і навчальній літературі.

Крім перелічених видів нелінійностей необхідно відзначити ефекти, що виникають при протіканні реологічних процесів в матеріалі (фізична нелінійність, повзучість – накопичення деформацій з плином часом) і нелінійні ефекти опору руху (типу сухого тертя або іншої природи), накопиченням напружень і деформацій в процесі зміни конструкції при її створенні (генетична нелінійність). Останній тип нелінійності, звичайно, можна розглядати як варіант конструктивної нелінійності, оскільки розглядаються системи зі змінною розрахунковою схемою, але тут зміни відбуваються не в результаті дії навантаження, а

цілеспрямовано, за задумом проектувальника, що дає підстави для її окремого розгляду і найменування цього ефекту.

У таблиці 2.1 проводиться зіставлення між лінійними і нелінійними задачами будівельної механіки. Неважко помітити, що при переході до нелінійного аналізу багато звичних підходів стають непридатними, а багато питань, які раніше при розв'язанні лінійних задач не привертають до себе уваги, стають актуальними.

Зокрема, найбільш важливою відмінністю лінійних і нелінійних задач є порушення принципу незалежності дії сил, який в лінійних задачах дає змогу виконувати низку незалежних розрахунків конструкції під впливом окремих навантажень, аналізуючи таким чином декілька характерних розрахункових ситуацій, після чого комбінувати отримані результати, розглядаючи сумісну дію розглянутих навантажень.

Такий підхід широко використовується, зокрема, в будівництві. Більшість підходів до визначення несучої здатності конструкцій, викладених в Держаних будівельних нормах (зокрема ДБН В.1.2.-2.2006, [92]), передбачають проведення окремих розрахунків на кожен з видів зовнішніх навантажень – навантаження власної ваги, снігові, вітрові та ін. Висновки про несучу здатність при цьому робляться на основі розгляду впливу на конструкцію різних сполучень навантажень, які утворюються як лінійна комбінація вищезгаданих окремих результатів. Необхідною умовою для достовірності такого підходу є лінійне (пружне) деформування під як впливом кожного зі розглядуваних навантажень, так і їх сполучень. Іншими словами має реалізовуватися принцип незалежності дії сил, який не виконується у нелінійних задачах. Крім того, в лінійних задачах невігідна комбінація тимчасових навантажень або включає таке навантаження в повному обсязі, або (якщо її дія розвантажує) повністю виключає таке навантаження. У нелінійних задачах така «чорно-біла логіка» впливу тимчасових навантажень може виявитися невірною, є приклади, коли невігідним є урахування деякої частини навантаження, а не її повного значення.

Таблиця 2.1.

особливість	лінійні задачі	нелінійні задачі
Залежність переміщень від навантаження	Переміщення лінійно залежать від прикладеного навантаження	Залежність переміщень від навантаження нелінійна
Зв'язок між напруженнями і деформаціями	Приймається лінійна залежність між напруженнями і деформаціями	У фізично нелінійних задачах залежність "напруження-деформація" є нелінійною функцією напруження, деформації та / або часу
Величина переміщень	Зміна в геометрії завдяки переміщенню вважається малою і ігнорується при перевірці рівноваги	Переміщення можуть бути не малими, для перевірки рівноваги необхідно використовувати деформований стан
Зворотність процесу деформування	Всі деформації повністю зворотні і зникають при розвантаженні системи	Після зняття навантаження стан системи може відрізнятись від вихідного
Граничні умови	Граничні умови впродовж розрахунку залишаються-змінити	Граничні умови можуть змінюватись (наприклад змінення площадки контакту складових частин конструкції)
Послідовність прикладання навантажень	Послідовність прикладання навантажень не важлива, заключний стан від неї не залежить	Стан конструкції може залежати від послідовності прикладання навантажень
Адитивність результатів	Результати розрахунку на різні навантаження допускають додавання та/або множення на деякі коефіцієнти з метою утворення розрахункових станів	Розкладання задачі на складові навантажень і подальше об'єднання результатів неможливо
Урахування початкового напружено-деформованого стану	Початковий напружено-деформований стан несуттєвий	Початковий напружено-деформований стан зазвичай потрібно задати, особливо для нелінійності, пов'язаної з поведінкою матеріалу

Не зупиняючись на подробицях, сформулюємо хоча б деякі застереження загального плану з проблематики нелінійного розрахунку. Зокрема, корисно навести тут перелік питань [71], які повинен задати собі інженер-проектувальник перед спробою розв'язання нелінійної задачі. Ці питання виникають внаслідок цілої низки особливостей нелінійних задач, багато з яких незвичні для тих, хто не має належного досвіду розв'язання нелінійних задач.

- Наскільки точно вивчені властивості матеріалу?
- Чи впливає на результат початковий напружено-деформований стан, наприклад, наявні в системі залишкові напруження? Якщо так, як вони можуть бути визначені?
- Чи є можливість існування неоднозначності розв'язку, наприклад різні шляхи в проблемах випучування або більше ніж один післякритичний стан? Якщо так, то можливо знадобиться створити деякі штучні початкові недосконалісті, за допомогою яких буде досягатися тільки один розв'язок, який цікавить користувача?
- Чи впливає на поведінку конструкції історія навантаження?
- Чи буде поведінка матеріалу однаковою при навантаженні і розвантаженні?
- При великих зсувах або великих поворотах чи залишатиметься постійним напрямок дії навантаження або воно буде прямувати за спотворенням форми?
- Чи повинен використовуватися більший коефіцієнт запасу для компенсації можливої похибки або невпевненості в адекватності розв'язку?
- Яким чином буде перевірятися розв'язок?

Слід мати на увазі, що, яким би не було походження нелінійності, при практичному розв'язанні задачі виникає проблема розв'язання відповідної системи нелінійних рівнянь рівноваги

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Є багато методів їх розв'язання, але, мабуть, найбільш популярною є крокова процедура, яка стала невід'ємною частиною нелінійного скінченноелементного аналізу [1].

Загальні опису крокової процедури добре відомі, і пов'язані з розв'язання лінеаризованих рівнянь при поступовому зростанні деякого параметра навантаження t (наприклад, величини зовнішнього навантаження розв'язанні задач пружнопластичного деформування або часу в реологічних задачах). В першу чергу, необхідно відзначити, що сам перехід від системи нелінійних рівнянь рівноваги до рівнянь з параметром

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

і далі до ланцюжку лінеаризованих рівнянь крокового методу залежить від способу введення в систему параметра t , збільшення якого реалізує при перехід від кроку до кроку.

Якщо такий параметр обраний так, що розв'язок системи (2.2) при деякому значенні $t = t_0$ відомий, а при $t = t^*$ система (2.2) тотожно збігається з (2.1), то диференціювання по t призводить до системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

з відомими при $t = t_0$ початковими умовами. Вирішуючи для системи рівнянь (2.3) задачу Коші, отримуємо інтегральну криву

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad (2.4)$$

яка при $t = t^*$ призводить до розв'язку початкової задачі (2.1).

Відомо декілька варіантів крокової процедури, які, по суті, розрізняються лише способами введення параметра t і / або використовуваними методами чисельного розв'язання зазначеної вище задачі Коші. Зокрема є можливість скористатися наступними модифікаціями крокового методу:

- простий кроковий метод;
- кроковий процес з уточненнями;
- кроково-ітераційний метод.

У першому випадку на кожному кроці, коли реалізується прирощення навантаження ΔP , вирішується лінеаризована задача, і в припущенні, що цей розв'язок є досить точним, реалізується перехід до наступного кроку навантаження. Практично, ця

процедура відповідає найпростішому способу розв'язання системи диференціальних рівнянь, що ґрунтується на побудові ламаної Ейлера (рис. 2.1) замість побудови інтегральної кривої (2.4). Похибка розв'язку нелінійної задачі, тобто відхилення ламаної Ейлера в процесі розв'язання задачі не контролюється - передбачається, що похибка мала за рахунок вибору малого кроку чисельного інтегрування. При цьому жорсткість лінеаризованої системи (тангенс кута нахилу φ) приймається без урахування нев'язок в зусиллях.

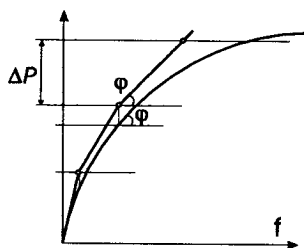


Рис.2.1.

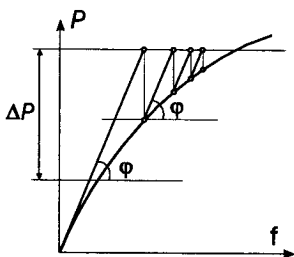


Рис.2.2.

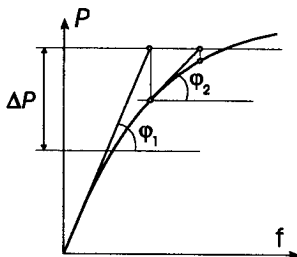


Рис.2.3.

Другий варіант передбачає контроль нев'язок на кожному кроці і ітеративне уточнення навантаження чергового кроку за рахунок урахування нев'язки в рівняннях рівноваги. При цьому ітерації виконуються з незмінним значенням лінеаризованої матриці жорсткості (рис. 2.2), яка була обчислена на початку чергового кроку (кут φ залишається незмінним на кроці).

Нарешті, в третьому випадку (рис. 2.3) проводиться ітераційне уточнення розв'язку на кожному кроці ΔP з коригуванням лінеаризованої матриці жорсткості на кожній ітерації (кут φ змінюється всередині кроку).

Описані варіанти крокової процедури стають непридатними, коли нахил дотичної наближається до нуля. У цих випадках часто застосовують зміну параметра навантаження, переходячи від нарощування інтенсивності навантаження до збільшення переміщення, але найкращий ефект дає метод довжини дуги (Arc Length Method), відомий у вітчизняній літературі як метод продовження по найкращому параметру. Метод заснований на ідеї просування уздовж безлічі можливих рішень (по кривій станів рівноваги) з урахуванням на кожному кроці інформації щодо розв'язків, отриманих на попередніх етапах.

Слід зазначити, що, варіюючи спосіб введення параметра t , можна отримати змістовну інформацію про поведінку системи під навантаженням. Якщо вважати, що такий параметр присутній в якості множника у всіх членів рівнянь (2.1), які безпосередньо описують зовнішні впливи, то його монотонне збільшення від $t_0 = 0$ до $t^* = 1$ відповідає пропорційному збільшенню навантажень, а інтегральна крива (2.4) описує поведінку узагальнених координат в процесі такого навантаження. Можна уявити собі й інші, більш складні і більш реалістичні способи застосування і чергування навантажень. Варіюючи їх, можна виконати серію «математичних експериментів» з аналізу поведінки конструкції при різних режимах навантаження.

Важливою особливістю крокової процедури і її привабливою відмінністю від інших методів розв'язання нелінійних рівнянь є те, що лінеаризована в околиці деякого навантаження система може аналізуватися звичайними методами лінійної будівельної механіки. Мають сенс оцінки коефіцієнта запасу стійкості (природно, що вони характеризують можливість зростання інтенсивності навантаження від вже досягнутого рівня) або частоти і форми власних коливань такої лінеаризованої системи. Зазначені особливості крокової процедури характеризують її не тільки як спосіб отримання розв'язку задачі, але і як інструмент аналізу властивостей конструкції.

2.2 Фізично-нелінійні задачі

Необхідність розв'язання фізично-нелінійних задач виникає у випадку наявності нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями, яка обумовлена властивостями матеріалу. Але виконання цієї умови не є єдиною ознакою фізично-нелінійного деформування. Справа в тому, що часто розглядається задача, яка відрізняється від лінійної лише тим, що функціональна лінійна залежність між напруженнями і деформаціями замінена деякою нелінійною функцією. При цьому така функція приймається однозначною та однаковою для навантаження та розвантаження (рис 2.4, а). Іншими словами навантаження і розвантаження матеріалу відбувається по одній і тій самі траєкторії в координатах σ - ϵ . Аналогічна діаграма може бути побудована також в координатах P - Δl . Однак такі нелінійно-пружні матеріали у природі майже не зустрічаються. Відхилення від закону Гука у більшості конструкційних матеріалів пов'язані саме із явищами пластичності, які полягають у утворенні залишкової деформації після розвантаження (рис.2.4,б). Наявність залишкових (пластичних) деформацій і є наочним виявленням явища, яке ми називаємо пластичною течією.

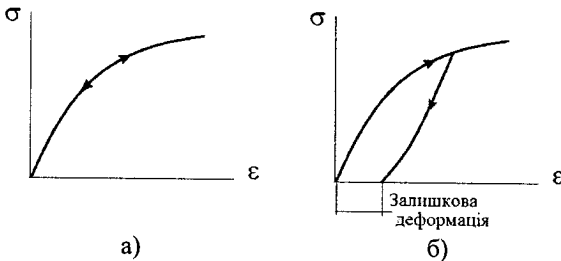


Рис.2.4

Наведене вище зауваження часто спростовується посиланням на те, що будуть розглянуті тільки такі історії навантаження і поведінки конструкції, коли всі навантаження тільки зростають. Але справа в тому, що зростання навантажень не гарантує зростання

напруження у всіх точках тіла, тому, навіть прийнявши таке обмеження, не можна гарантувати відсутність помилок.

Необхідно чітко уявляти собі, що пружнопластична поведінка матеріалу відрізняється від поведінки нелінійно-пружного матеріалу, і заздалегідь невідомо, що заміна однієї задачі на іншу є розв'язком у запас надійності.

Крім того необхідно ще раз нагадати (див.п.2.1), що при проведенні нелінійного аналізу, ми позбавляємо себе можливості використовувати принцип незалежності дії сил, на використанні якого побудовані всі методи виявлення невідгідної (небезпечної) комбінації навантажень. Навіть само поняття комбінованої дії навантажень потребує уточнення, оскільки важливу роль може грати не тільки склад комбінації, але і послідовність дії її компонентів.

2.2.1. Вихідні співвідношення і обчислення параметрів напружено-деформованого стану при пружнопластичному деформуванні

Розглянемо основні поняття і вихідні співвідношення теорії пружнопластичного деформування [39, 44, 63, 64] та ін.:

Як відомо, напружено-деформований стан в точці характеризується тензором напружень :

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = S_{\sigma} + T_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

де S_{σ} - девіатор напружень, $T_{\sigma 0}$ - шаровий тензор,

$\sigma_0 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ - перший інваріант тензора напружень.

Пластичні деформації виникають при досягненні напруженнями межі текучості, що визначається із

експериментальних досліджень. У випадку одновісного напруженого стану умова початку пластичного течіння має вигляд:

$$\sigma > \sigma_T, \quad (2.6)$$

де σ_T – експериментально визначена межа текучості (рис.2.4,б).

У випадку складного напруженого стану умова початку пластичності має вигляд:

$$\Phi_T(\sigma_{ij}) = \sigma^*(\sigma_T), \quad (2.6 \text{ а})$$

де $\sigma^*(\sigma_T)$ – константа матеріалу, пов'язана із експериментально визначеною межею текучості σ_T .

Закони і рівняння теорії пластичності, що описують деформування матеріалів за межами пружності при малих деформаціях, ґрунтуються на таких гіпотезах.

1. Матеріал є однорідним і ізотропним.

2. Матеріал після пружнопластичного деформування залишається суцільним.

3. Матеріал в процесі пружно-пластичного деформування не змінює свого об'єму, при цьому, при малих деформаціях об'ємна деформація пропорційна середньому напруженню (закон зміни об'єму):

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (2.7)$$

Малість змінення об'єму за рахунок пластичних деформацій доведена експериментально, в зв'язку з чим $\varepsilon_0^{(p)} = 0$. Зважаючи, що прирошення повної середньої деформації є сумою пружної і пластичної складових:

$$d\varepsilon_0 = d\varepsilon_0^{(e)} + d\varepsilon_0^{(p)} = d\varepsilon_0^{(e)}.$$

Девіатор і тензор прирошень пластичних деформацій є тотожними:

$$D_{d\varepsilon^{(p)}} = T_{d\varepsilon^{(p)}}.$$

4. Для кожного матеріалу при малих пружно-пластичних деформаціях між інтенсивністю напружень і інтенсивністю деформацій існує функціональна залежність $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, яка для даного матеріалу не залежить від вигляду напруженого стану і є

подібною до експериментально визначеної залежності між напруженнями і деформаціями при одновісному розтягу.

5. Розглядаються лише прості процеси навантаження, при яких змінення в часі всіх прикладених до тіла навантажень здійснюється пропорційно до одного параметра. Відповідно при малих пружно-пластичних деформаціях компоненти девіатора деформації є пропорційними компонентам девіатора напружень (закон зміни форми):

$$D_{\varepsilon} = \frac{D_{\sigma}}{2G}. \quad (2.8)$$

Формулювання закону змінення форми у термінах головних напружень і деформацій дозволяє зробити висновок про подібність кругових діаграм напружень і деформацій (діаграм Мора) для всіх напружених станів.

Наведені гіпотези пластичного деформування дозволяють встановити взаємозв'язок між напруженнями і деформаціями (теорії пластичності деформаційного типу) або швидкостями деформацій (теорії пластичного плинину).

Згідно до теорії малих пружно-пластичних деформацій (теорії деформаційного типу) встановлюється зв'язок між компонентами деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}, \quad (2.9)$$

де s_{ij} – компоненти девіатора напружень.

Згідно до теорії пластичного плинину прирошення пластичних деформацій пов'язані із напруженнями співвідношенням:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{(p)}}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{(p)}}{\sigma_i} s_{ij}. \quad (2.10)$$

Найпростішим законом пластичного деформування є ідеально пластичне деформування, коли величина межі текучості є сталою величиною, після досягнення якої матеріал не сприймає додаткових навантажень і, фактично, не чинить опору прикладеному навантаженню. У випадку одновісного деформування діаграма деформування матеріалу в цьому випадку має гілку, паралельну до вісі деформацій, тобто деформація нескінченно зростає без

підвищення неапруження. В більшості випадків внаслідок пластичного деформування спостерігається підвищення межі текучості матеріалу у напрямку деформування – зміцнення, якому відповідає ділянка на діаграмі деформування при $\sigma > \sigma_T$ (рис.2.4,б). Тому при описі властивостей матеріалу і відповідно при розв'язанні задач пластичного деформування часто використовують термін «поточна межа текучості». В той же час при подальшому деформуванні в зворотному напрямку (стиск після розтягу) спостерігається зменшення опору матеріалу пластичному деформуванню (ефект Баушингера).

Розв'язання задачі пружнопластичного деформування здійснюється на основі покрокового алгоритму. В якості параметра « l » при переході від системи рівнянь (2.1) до (2.2) використовується параметр, що визначає величину зовнішнього навантаження. В якості початкового навантаження обирається таке його значення, при якому відбувається пружне деформування конструкції. В подальшому при послідовному (покроковому) зростанні навантаження на Δp (в загальному випадку ці величини можуть бути різними від кроку до кроку) проводиться визначення напружено-деформованого стану, в тому числі із урахуванням виникнення деформацій пластичності.

Необхідно відзначити, що доцільним є проведення дослідження збіжності результатів за величиною Δp , зокрема шляхом проходження процесу навантаження із різними за величиною кроками, наприклад із сталим кроком Δp і $\Delta p/2$.

Нехай на кожному кроці m величина навантаження збільшується на задану величину $(\Delta p)_m$. На початку кожної ітерації n кроку m припущення напружень $(\Delta \sigma_{ij})_n^m$, які виникають за рахунок припущення навантаження на кроці $(\Delta p)_m$, визначаються згідно з законом Гука за величиною припущення повних деформацій.

Повні напруження

$$(\sigma^{ij})_n^m = (\sigma^{ij})_{n-1}^m + (\Delta \sigma^{ij})_n^m, \quad (2.11)$$

отримані як сума наявних напружень і їх прирощень, при цьому можуть перевищувати межу текучості згідно з умовою (2.6 а), яка, зокрема може бути подана у вигляді:

$$\tau_i > \tau_s \quad (2.12),$$

де $\tau_i = \sigma_i / \sqrt{3}$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень, $\tau_s = \tau_s(\vartheta, T)$ – поточна межа текучості, яка визначається на основі експериментаних результатів і у загальному випадку залежить від рівня накопичених пластичних деформацій ϑ (що обумовлено спрочненням матеріалу) і температури T .

Для обчислення напружень із урахуванням деформацій пластичності використовується алгоритм, що ґрунтується на положеннях, викладених у [102].

Пластичне течіння матеріалу описується шляхом зберігання девіатора напружень на межі текучості (межі пружного деформування). На рис. 2.5 показані напруження в стані n . У просторі головних напружень $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3$, відповідно з умовою текучості Мізеса, поверхня текучості являє собою прямий круговий циліндр, слід якого на девіаторній площині ($S_1 + S_2 + S_3 = 0$, де S_1, S_2, S_3 - девіатори головних напружень) - коло радіусом τ_s .

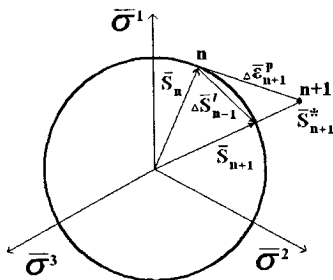


Рис.2.5.

Після збільшення деформацій напруження змінюються і переходять у стан $(n+1)$. Проте стан $(n+1)$ знаходиться за колом текучості і, у відповідності з прийнятою умовою текучості, не

реалізується. Замість цього в матеріалі відбувається пластичне течіння, а напруження перебувають на межі пружності, тобто на колі текучості.

Пластична частина деформацій перпендикулярна до кривої текучості і необхідно обмежити саме ті напруження, які пов'язані з цією частиною деформацій. Тому напружений стан замість стану $(n+1)$ відповідатиме точці, яка знаходиться на перпендикулярі до кола, проведеному з точки, що відповідає стану $(n+1)$.

Таким чином, дійсні значення напружень $(\overline{\sigma_{ij}})_n^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \quad (2.13)$$

де $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ – компоненти девіатора дійсних напружень, що враховують приращення нелінійних деформацій пластичності.

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s(G, T)}{\tau_i}.$$

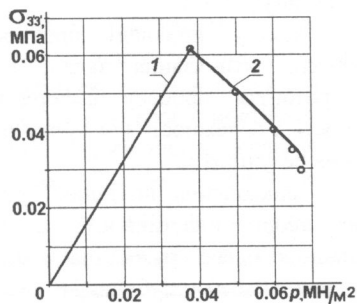
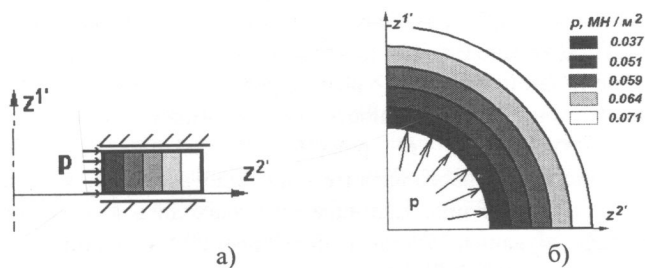
Отримані напруження $\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m$ використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою збіжності ітераційного процесу. При її виконанні ітераційний процес визначення миттєвих деформацій пластичності припиняється. Далі проводиться обчислення дійсних значень приращень деформацій пластичності $\left(\Delta \varepsilon_{ij}^p\right)_m$ та повних величин деформацій пластичності:

$$\left(\Delta \varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) \left(s_{ij}\right)_m / G_1, \quad \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta \varepsilon_{ij}^p\right)_m.$$

Цей алгоритм розроблений та апробований зокрема у [6, 7, 9, 10, 33].

Основним результатом розв'язання задачі пружнопластичного деформування є розподілення напружень в межах досліджуваного об'єкта або їх змінення в залежності від зовнішнього навантаження, величин деформацій пластичності та форми і розмірів зони пружнопластичного деформування матеріалу.

В якості прикладу розв'язання задачі пластичності із використанням МСЕ наведемо приклад модельної задачі про пружнопластичне деформування нескінченного товстостінного циліндра (рис.1.14,а) під впливом внутрішнього тиску, розв'язок якої розглянутий в книзі [97]. Внутрішній тиск змінюється від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН/м}^2$, $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$. Дискретна модель фрагмента труби, обмеженого двома паралельними площинами, перпендикулярними до вісі циліндра, може бути побудована для плоскої розрахункової схеми у вигляді сектора фрагмента (рис.1,14,в) так і для вісесиметричної розрахункової схеми (рис.2.5,а). При зростанні навантаження до $p_i = 0,037 \text{ МН/м}^2$ на внутрішній поверхні труби виникає зона пластичних деформацій (зона пластичності), діаметр якої збільшується із зростанням навантаження. При $p = p_{\max}$ зона пластичності розповсюджується на всю товщину стінки труби [97].



в)
Рис.2.6

При чисельному розв'язанні задачі розподілення напружень, що відповідає пружному деформуванню, отримане при $p_0 = 0,03 \text{ МН/м}^2$, величини навантаження на наступних кроках становили $p_1 = 0,037$, $p_2 = 0,051$, $p_3 = 0,059$, $p_4 = 0,064$, $p_5 = p_{\text{max}} = 0,07 \text{ МН/м}^2$. При цьому на кожному з кроків за навантаженням прирощення радіуса зони пластичності становило $1/5$ товщини стінки труби (рис.2.5,6). Для дослідження збіжності результатів в залежності від кроку за навантаженням значення навантажень на кроках становили $p_0 = 0,03$, $p_1 = 0,037$, $p_2 = (0,037 + 0,051)/2 = 0,044$, $p_3 = 0,051$ і т.д. Розбіжність результатів, одержаних у цих двох випадках, становила менше 1%. На рис.2.5,в наведено змінення величин колового напруження на внутрішній поверхні труби $\sigma_{z'z'}(z^2 = a)$ (лінія «1» – пружне деформування, лінія «2» – пружнопластичне).

Необхідно відзначити, що в процесі пружнопластичного деформування по мірі зростання зони пластичних деформацій відбувається перерозподілення напружень в об'ємі конструкції. Так, на внутрішній поверхні розглядуваного циліндра після виникнення зони пластичності напруження поступово зменшуються (лінія «2» га рис.2.6). В той же час для зрівноважування зовнішнього навантаження відбувається зростання напружень в частині стінки циліндра, яка знаходиться в умовах пружного деформування. З подальшим зростанням зовнішнього навантаження ця частина стінки поступово переходить до пружнопластичного стану.

В цілому на цьому прикладі проілюстровані основні методологічні аспекти розв'язання задачі пружнопластичного деформування – розбиття процесу деформування на кроки, дослідження збіжності в залежності від кроку по навантаженню і спосіб представлення результатів.

Більш докладне викладення вихідних положень і методик розв'язання задач теорії пластичності, а також результати розв'язання прикладних задач пружнопластичного деформування просторових тіл можна знайти у публікаціях [38-40, 56, 80, 86, 97, 106, 112, 123, 124].

2.2.2. Вихідні співвідношення і обчислення параметрів напружено-деформованого стану при повзучості

Повзучість – явище незворотнього зростання деформації твердих тіл з часом при сталому навантаженні. Явище повзучості притаманне багатьом матеріалам – металам, полімерам та іншим. Особливо інтенсивним перебіг повзучості є при підвищених температурах. Так, у вуглецевих сталях і чавуні повзучість починає проявлятися при температурах 300...400 °С, в легованих сталях при температурах, вищих за 500 С. За порівняно невисоких температур (150-200 °С) повзучість виникає у легких алюмінієвих сплавах, які широко застосовуються в авіабудуванні. В пластмасах, текстилі, гумі повзучість проявляється вже при температурах до 100°С. При розрахунку будівельних конструкцій важливою проблемою є повзучість бетону.

Перебіг процесу повзучості прискорюється з підвищенням температури, що становить небезпеку для нормальної роботи елементів конструкцій машин і обладнання, які працюють при тривалих силових навантаженнях при підвищених температурах. До таких елементів конструкцій відносяться зокрема лопатки і диски газових і парових турбін, які під час роботи зазнають дії великих відцентрових сил і високих температур, що спричиняє їх поступе деформування у радіальному напрямку. Це може привести до вичерпування зазору між лопаткою і корпусом турбіни, руйнування лопатки і виходу з ладу турбіни.

Опис процесу повзучості матеріалів може бути здійснений із використанням кривих повзучості – залежностей величини накопиченої деформації повзучості від часу. Ці дані отримуються на основі результатів експериментальних досліджень матеріалів при різних рівнях прикладеного постійного навантаження, яке викликає відповідне напруження в досліджуваному зразку та при різних температурах. Типові криві повзучості при певній температурі T та напруженнях $\sigma_2 > \sigma_1$ або при певному напруженні σ та температурах $T_2 > T_1$ наведені на рис 2.7,а і рис.2.7,б відповідно: перебіг повзучості є тим більш інтенсивним, чим більшим є прикладене навантаження (рівень напружень) і температура. На кривих повзучості виділяють три типових ділянки,

що відповідають першій стадії невстановленої повзучості («I» на рис.2.7,а, відбувається із зменшенням швидкості повзучості

$\xi_c^i = \frac{\partial \varepsilon_i^c}{\partial t}$), другій стадії встановленої повзучості, яка є найбільш

тривалою і характеризується сталою швидкістю («II» на рис.2.7,а,) і третій стадії повзучості, що відбувається із зростаючою швидкістю («III» на рис.2.7,а). Прогнозування деформування і руйнування матеріалів в умовах повзучості здійснюється здебільшого в межах другої стадії повзучості.

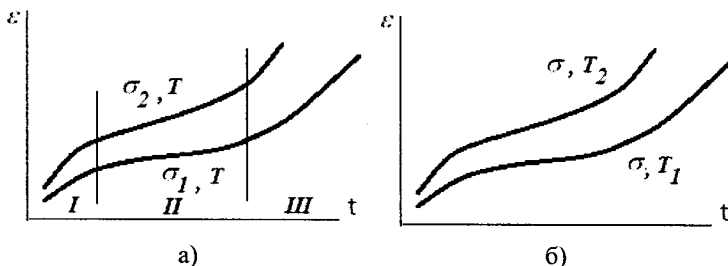


Рис.2.7.

Для математичного опису деформування матеріалу в умовах повзучості найчастіше застосовуються рівняння, що пов'язує інтенсивність швидкості деформацій повзучості з іншими параметрами напружено-деформованого стану. Ці рівняння можуть бути записані у вигляді

$$\xi_c^i = \frac{\partial \varepsilon_i^c}{\partial t} = f(\sigma^{ij}, \vartheta_c, T, \omega), \quad (2.14)$$

де σ^{ij} – напруження, $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c$ – параметр спрочнення Одквіста при повзучості, T – температура, $\omega = \omega(t)$ – феноменологічний параметр пошкодженості матеріалу Ю.М.Работнова, який може бути введений додатково для опису накопичення в матеріалі розсіяних пошкоджень внаслідок накопичення деформацій повзучості. Значення $\omega(t)$ змінюється в

процесі експлуатації від $\omega_0=0$ до 1, що відповідає руйнуванню матеріалу [45, 79, 81].

У випадку використання параметра пошкодженості для опису повзучості необхідно використання ще одного рівняння для визначення залежності швидкості зростання пошкодженості $\omega(t)$, яке приймається, наприклад, у формі рівняння Л.М.Качанова [45]

$$\frac{d\omega}{dt} = C_1 \left[\frac{\sigma}{1-\omega} \right]^m,$$

або іншими рівняннями, які, у сукупності із (2.14), дозволяють уточнити аналітичний опис кривих повзучості [27-29, 46, 62, 79, 120 та ін]. Необхідно відзначити, що ідентифікації пошкодженості матеріалу, формулювання відповідних рівнянь та визначення їх констант являє собою окрему проблему, висвітлену, зокрема у [27, 46, 52, 60, 94,].

Залежності для ξ_i^c вигляду (2.14) формулюються із використанням наступних теорій повзучості [45, 63, 64, 80, 81]:

- теорії течіння

$$\xi_i^c = A \sigma_i^n,$$

- теорії зміцнення

$$\xi_i^c = B \frac{\sigma_i^m}{g_\alpha^\alpha},$$

- теорії пошкодженості Качанова-Работнова, що враховує накопичення пошкоджень у матеріалу

$$\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m,$$

де $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s^{ij}}/2$ – інтенсивність нормальних напружень;

A, B, D, m, n, α – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень приймається у вигляді:

$$\xi_{ij}^c = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^c}{\partial t} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}.$$

Розв'язання задачі повзучості здійснюється на основі покровокового алгоритму. В якості параметра « t » при переході від системи рівнянь (2.1) до (2.2) використовується реальний час перебігу процесу повзучості. На першому кроці розв'язання задачі визначається розподіл напружень при пружному деформуванні конструкції. В подальшому при послідовному зростанні часу від 0 на Δt на кожному кроці (в загальному випадку ця величина може змінюватись від кроку до кроку) проводиться визначення напружено-деформованого стану із урахуванням виникнення деформацій повзучості.

Так само, як і в задачах пружнопластичного деформування необхідним є проведення дослідження збіжності результатів за величиною Δt , зокрема шляхом моделювання процесу деформування із різними за величиною кроками, наприклад із сталими кроками Δt , $\Delta t/2$, $\Delta t/4$ із порівнянням отримуваних результатів обчислення деформацій повзучості та параметрів напружено-деформованого стану.

Нехай на кожному кроці за часом m поточний час перебування конструкції під дією навантаження збільшується на задану величину $(\Delta t)_m$. Для обчислення напружень з урахуванням деформацій повзучості використовується наступний алгоритм [6, 7, 9, 10]. На початку кожної ітерації n кроку m приращення напружень $(\Delta \sigma_{ij})_n^m$ визначаються згідно з законом Гука за величиною приращення повних деформацій, після чого визначаються повні напруження

$$(\sigma^{ij})_n^m = (\sigma^{ij})_{n-1}^m + (\Delta \sigma^{ij})_n^m$$

За їх величинами та відповідними компонентами девіатора напружень визначається:

- інтенсивність деформацій повзучості ξ_i^c і компоненти швидкостей деформацій повзучості

$$\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2} \left[\xi_i^c\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_m^n};$$

- прирощення деформацій повзучості $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m$ на кроці за часом:

$$(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m;$$

- компоненти девіатора $(\bar{s}^{ij})_n^m$ дійсних напружень і дійсні напруження, що враховують деформації повзучості:

$$(\bar{s}^{ij})_n^m = (s^{ij})_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m,$$

$$(\bar{\sigma}^{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\bar{s}^{ij})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\bar{s}^{ij})_n^m.$$

де $G_1 = E / (1 - 2\nu)$.

За величинами отриманих напружень обчислюються вузлові реакції і переміщення. При виконанні умови збіжності ітераційний процес на кроці завершується.

Проводиться обчислення деформацій повзучості

$$(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m.$$

Кінцевим результатом розв'язання задачі повзучості є параметри напружено-деформованого стану, величини деформацій повзучості і їх розподіл в об'ємі досліджуваного об'єкта.

Несуча здатність конструкції в умовах повзучості визначається при досягненні деформаціями повзучості певного наперед заданого рівня.

У випадку використання при розв'язанні задачі повзучості рівнянь стану матеріалу, що містять параметр пошкодженості умовою вичерпання несучої здатності конструкції вважається досягнення в певній точці конструкції умови $\omega > \omega^* \approx 1$ ($\omega^* = 0,9$ $0,99$ – значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу). Цей момент визначає розрахунковий час експлуатації (ресурс) конструкції при повзучості [20, 21, 27, 29, 50, 54, 55, 81].

В якості прикладу розв'язання задачі повзучості із використанням МСЕ наведемо приклад модельної задачі про деформування нескінченного товстостінного циліндру (рис.1.14,а)

під впливом внутрішнього тиску, розв'язок якої розглянутий в книзі [20]. Розрахункова схема і дискретні моделі МСЕ є аналогічними наведеними на рис.1.14, а, рис.1.14,в і рис.2.5,а.

Для опису деформування в умовах повзучості згідно із [20] використані рівняння вигляду :

$$\frac{d\varepsilon_{rc}}{d\tau} = B \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^{k_1}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = D \left(\frac{\sigma_\theta}{1-\omega} \right)^{k_2}$$

де $B = 1$, $D = 1$, $k_1 = 5$; $k_2 = 3.5$ – константи матеріалу; τ – приведений безрозмірний час; $\sigma_\theta = \sigma_{33}$ – кільцеве напруження.

Для дослідження збіжності від величини кроку за часом $\Delta\tau$ був виконаний розв'язок задачі при $\Delta\tau = 8, 4, 2$. Результати визначення часу до вичерпання несучої здатності ($\omega^* \approx 1$) при різних $\Delta\tau$ і наведені в табл. 2.2. Збіжність величини часу до початку руйнування відбувається “згори”, тобто при більших значення $\Delta\tau$, час до початку руйнування завищений, що підкреслює важливість дослідження збіжності за величиною кроку за часом.

Отримані залежності зміни величини безрозмірного кільцевого напруження від часу (рис. 2.7) ілюструють ефект перерозподілення напружень протягом всього процесу деформування. Як наслідок, при максимальних колових напруженнях на внутрішній поверхні циліндра ($r = a$) в початковий момент часу руйнування починається із зовнішньої поверхні циліндра (при $r = b$). Відповідно на зовнішній поверхні циліндра, де несуча здатність матеріалу вичерпана, в момент часу $\tau \approx 250$ колові напруження прямують до нуля.

Таблиця 2.2

$\Delta\tau$	$\tau (\omega^* \approx 1)$
8	258
4	252
2	248

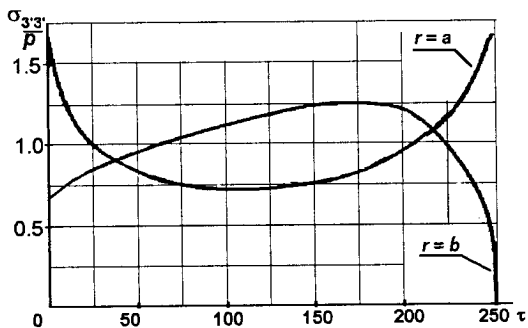


Рис.2.7

Наведені приклади розв'язання найпростіших фізично-нелінійних задач при пружнопластичному деформуванні і при деформуванні в умовах повзучості демонструють характерні особливості цих процесів, притаманні і більш складним конструкціям. Так, на відміну від пружного деформування, коли зростання характеристик напружено-деформованого стану є пропційним навантаженню, при фізично-нелінійному деформуванні відбувається перерозподілення напружень в усьому об'ємі досліджуваної конструкції або між її окремими елементами. Це перерозподілення обумовлено зниженням несучої здатності матеріалу в області більш інтенсивного розвитку фізично-нелінійних деформацій і перерозподіленням зовнішнього навантаження на ті частини конструкції, які зазнають незворотніх деформацій в меншій мірі або знаходяться в умовах пружного деформування.

Більш докладне викладення фізичних співвідношень і методик розв'язання задач теорії повзучості та результати дослідження деформування просторових тіл в умовах повзучості можна знайти у публікаціях [3, 27-29, 45, 46, 50, 54-56, 78, 79, 81,86, 110, 112]. Грунтовний огляд досягнень в дослідженні процесів деформування просторових тіл в умовах повзучості наведено в [109]/

2.3. Геометрична нелінійність

Геометрична нелінійність рівнянь будівельної механіки виникає при великих переміщеннях і деформаціях елементів конструкції. Геометрична нелінійність може відобразитись в розв'язувальних рівняннях задачі двома способами: через рівняння, що зв'язують переміщення з деформаціями, і через рівняння рівноваги.

При цьому відрізняють декілька рівнів геометричної нелінійності. Класифікація геометрично нелінійних постановок задач представлена в класичній праці В.В.Новожилова [65]. Спираючись на цю класифікацію, виділимо наступні чотири рівні геометрично нелінійних постановок задач для скінченновимірних систем.

На нижчому, нульовому рівні природно розташувати всі задачі, в яких можна повністю знехтувати будь-якими геометрично нелінійними ефектами (геометрично лінійні постановки задач).

До першого рівня геометричної нелінійності віднесемо найслабший варіант геометричнонелінійної теорії, для якого вважається, що рівняння рівноваги слід записувати для деформованого стану системи. Що стосується зв'язку деформацій з переміщеннями, то ці співвідношення для першого рівня геометричнонелінійних задач приймаються в лінійному варіанті. У будівельній механіці задачі першого рівня геометричної нелінійності іноді називають розрахунком за деформованою схемою. В англійській літературі вживається назва «теорія другого порядку».

Для конструкцій, що використовуються в будівельному проектуванні, перший рівень геометричної нелінійності охоплює досить широке коло задач, в першу чергу, задачі розрахунку стрижневих систем, згинальні моменти в елементах яких обчислюються з урахуванням поправок від впливу поздовжніх сил.

Другий рівень геометрично нелінійних постановок задач відрізняється від першого насамперед використанням другого способу відображення геометричної не лінійності у рівняннях – змінням геометричних рівняння, що зв'язують переміщення з

деформаціями. У порівнянні з першим рівнем істотним тут є розрізнення порядків малості деформацій і поворотів, при цьому вважається, що квадрати кутів поворотів елементів розглядуваної розрахункової схеми є величинами того ж порядку малості, що і компоненти деформації, якими, в свою чергу, можна знехтувати порівняно з одиницею. Малі в порівнянні з одиницею і самі повороти. Характерний приклад задач цього рівня нелінійності - теорія гнучких пластин на основі рівнянь Кармана.

До третього рівня геометричної нелінійності можна віднести задачі, в яких деформації малі в порівнянні з одиницею, тоді як щодо поворотів таких припущень зробити не можна. Конструкції з гнучкими нитками є характерним прикладом завдань цього рівня задач геометричної нелінійності.

Нарешті, найскладніші задачі - задачі четвертого рівня геометричної нелінійності, коли самі відносні деформації не можна вважати малими величинами в порівнянні з одиницею. Такий опис деформування є необхідним при проведенні розрахунків виробів з гуми і гумоподібних матеріалів.

Для дискретних скінченноелементних розрахункових схем геометрична нелінійність ніяк не позначається на топологічній інформації про розрахунковій схемі, а сама топологія системи нечутлива до взаємин порядків геометричної нелінійності на рівні окремого скінченного елемента. Скориставшись такою можливістю для ілюстрації описаної вище чотирирівневої класифікації геометричної нелінійності, звернемося до найпростішого прикладу скінченного елемента - стрижня ферменного типу. Для спрощення розглянемо плоску задачу.

Нехай у вихідному стані стрижень займає положення MN з початком в вузлі M і кінцем в вузлі N . Під вихідним тут розуміється стан стрижня після отримання ним попередньої витяжки (дислокації) на величину d . В результаті подальшої деформації стрижень, залишаючись прямолінійним, займе положення M^*N^* , як це показано на рис. 2.8.

Введемо наступні позначення:

L_x, L_y - проекції стержня на відповідні осі в початковому стані;

L і L^* - довжина стрижня в вихідному і остаточному станах відповідно; u_M, u_N, v_M, v_N - переміщення вузлів M і N в напрямках осей x і y відповідно; e_x, e_y - подовження проєкцій вихідного стану стрижня на координатні осі; Δ - повне подовження стрижня; N - подовжня сила в стрижні, додатня при розтягуванні.

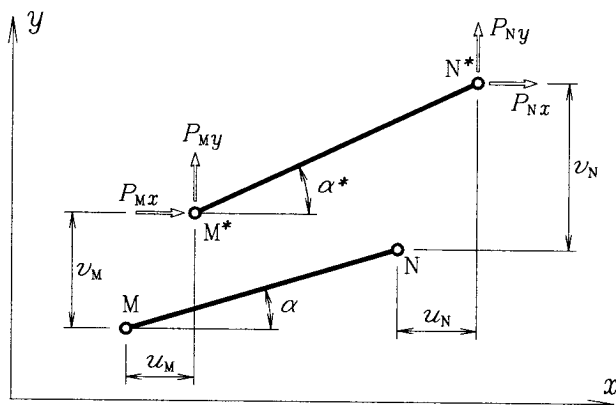


Рис.2.8.

Розглянемо сукупність векторів s (зусилля), Δ (подовження), u (вузлові переміщення), p (вузлові навантаження), що відносяться до окремого елемента (стрижня), у яких для скорочення запису опущений нижній індекс "e", використаний нами раніше, щоб підкреслювати, що мова йде про елемент.

Маємо

$$s = [N], \Delta = [\Delta], \mathbf{u}^T = [u_M \ v_M \ u_N \ v_N], \mathbf{p}^T = [[P_{Mx} \ P_{My} \ P_{Nx} \ P_{Ny}]].$$

$$e_x = u_N - u_M, \quad e_y = v_N - v_M, \quad \Delta = (L^* - L),$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2, \quad L^{*2} = (L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2. \quad (2.15)$$

Позначимо $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_x^*, \lambda_y^*$ — направляючі косинуси відрізків MN і M^*N^* по відношенню до нерухомої системи вісей (x, y) (рис. 2.8), тобто

$$\lambda_x = \cos\alpha = L_x/L, \quad \lambda_y = \sin\alpha = L_y/L, \quad (2.16)$$

$$\lambda_x^* = \cos\alpha^* = (L_x + e_x)/L^*, \quad (2.17)$$

$$\lambda_y^* = \sin\alpha^* = (L_y + e_y)/L^*.$$

Застосуємо до розгляду наступні важливі геометричні параметри, які будуть потрібні нам в подальшому:

$$e = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y, \quad \omega = (\lambda_x e_y - \lambda_y e_x)/L, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon = e + 0,5(e^2 + \omega^2 L^2)/L.$$

Геометричний зміст параметру e – проекція різниці переміщень кінців стрижня на напрямок вісі стрижня в його недеформованому стані. Що стосується параметру ω , то він являє собою кут повороту стержня за умови його малості в порівнянні з одиницею і малості в порівнянні з одиницею відносного параметра e/L .

Параметр e в матричній формі представимо у вигляді

$$e = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Q}^T = [[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y]],$$

при цьому \mathbf{Q} – це матриця рівнянь рівноваги в геометрично лінійній постановці задачі.

Відзначимо, що, вводячи в розгляд матрицю обертання $\mathbf{\Omega}$,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

отримаємо $(\mathbf{\Omega}\mathbf{Q})^T = [[\lambda_y \quad -\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x]]$, так що параметр повороту ω також можна представити в матричній формі

$$\omega L = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \mathbf{u}. \quad (2.21)$$

Виходячи з визначальних співвідношень (2.15) і (2.18), можна отримати формулу, яка б пов'язала деформацію стрижня Δ з переміщеннями його кінців, виражену через введені геометричні параметри, а саме

$$\Delta \left[1 + \frac{\Delta}{2L} \right] = \varepsilon, \quad (2.22)$$

справедливість якої перевіряється безпосередньою підстановкою.

Дійсно, ліва частина в (2.22) низкою перетворень приводиться до вигляду

$$\begin{aligned} (L^* - L) \left[1 + \frac{\Delta}{2L} \right] &= \frac{L^{*2} - L^2}{2L} = \\ &= \frac{(L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2 - L_x^2 - L_y^2}{2L} = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y + \frac{e_x^2 + e_y^2}{2L}, \end{aligned}$$

і до точно такого ж виду наводиться і вираз для ϵ , якщо врахувати, що $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$.

З формули (2.22) впливає вираз для деформації стержня

$$\Delta = L \left(\sqrt{1 + 2\epsilon/L} - 1 \right). \quad (2.23)$$

Звернемо увагу, що при виведенні формули (2.23) ми не користувалися ніякими спрощуючими припущеннями, пов'язаними зі зіставленням порядків малості величин, що входять в цю формулу. Тому формула (2.23) і є тим нелінійним геометричним рівнянням, що пов'яже деформацію Δ з компонентами вектора переміщень \mathbf{u} , яке розташоване на найвищому - четвертому рівні геометричної нелінійності.

Застосовуючи різні спрощуючі припущення, які дозволяють знехтувати тими чи іншими компонентами, можна отримати рівняння, що зв'язують деформацію Δ зі компонентами вектора переміщень для інших рівнів геометричної нелінійності. Відповідні результати представлені в табл. 2.3.

Перейдемо тепер до розгляду рівнянь рівноваги, які використовуються при розгляді різних рівнів геометричної нелінійності. У загальному випадку, записуючи ці рівняння для деформованого стану стержня, отримаємо:

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{s} = \mathbf{p}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{Q}^{*T} = [[-\lambda_x^* \quad -\lambda_y^* \quad \lambda_x^* \quad \lambda_y^*]],$$

і нам залишиться тільки знайти вирази для напрямних косинусів осі стержня в його деформованому стані.

Таблиця 2.3

Рівень задачі	Малі величини	Геометричні рівняння
IV	—	$\Delta = L(\sqrt{1+2e/L} - 1)$
III	$\frac{\Delta-d}{L} \ll 1$	$\Delta = e + 0,5(e^2 + w^2 L^2) / L$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u}$
II	$e/L = 1$ $\omega^2 \approx e/L$	$\Delta = e + 0,5w^2 L$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}$
I	$\omega^2 = e/L$	$\Delta = e$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$
0	$\omega = 1$	$\Delta = e$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$

Скористаємося формулами (2.16) і тією обставиною, що кут β , на який повертається стрижень, може бути представлений як (див. рис. 2.8), отримаємо:

$$\begin{aligned} \lambda_x^* &= \cos(\alpha + \beta) = \lambda_x \cos \beta - \lambda_y \sin \beta, \\ \lambda_y^* &= \sin(\alpha + \beta) = \lambda_y \cos \beta + \lambda_x \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Враховучи, що

$$\operatorname{tg} \alpha^* = (\lambda_y L + e_y) / (\lambda_x L + e_x), \quad \operatorname{tg} \alpha = \lambda_y / \lambda_x, \quad (2.26)$$

і скориставшись формулою для тангенса різниці двох кутів, а також співвідношенням $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$, отримаємо після нескладних перетворень:

$$\operatorname{tg} \beta = (\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha) (1 - \operatorname{tg} \alpha^* \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \omega L (L + e). \quad (2.27)$$

Синус і косинус, які входять у формули (2.15) кута повороту стрижня β можна виразити через тангенс цього ж кута:

$$\cos\beta = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = 1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}, \quad (2.28)$$

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \left[1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2} \right] \omega L / (L+e),$$

так що

$$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y, \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}, \quad (2.29)$$

$$\lambda_y^* = [\lambda_y + \lambda_x \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}.$$

Формули (2.17) для напрямних косинусів осі стержня в деформованому стані є точними, оскільки при їх виведенні не використовувалися будь-які припущення щодо малості параметрів деформації (четвертий рівень). Для інших рівнів результати представлені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Рівень задачі	Малі величини	Параметри рівнянь рівноваги
IV	—	$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y, \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}$ $\lambda_y^* = [\lambda_y - \lambda_x \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}$
III	$\frac{\Delta - d}{L} \ll 1$	$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y, \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}$ $\lambda_y^* = [\lambda_y - \lambda_x \omega L / (L+e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L+e)^2}$
II	$e/L = 1$ $\omega^2 \approx e/L$	$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y, \omega$, $\lambda_y^* = \lambda_y - \lambda_x, \omega$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{2L} \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}$
I	$\omega^2 = e/L$	$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y, \omega$, $\lambda_y^* = \lambda_y - \lambda_x, \omega$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{2L} \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}$
0	$\omega = 1$	$\lambda_x^* = \lambda_x$, $\lambda_y^* = \lambda_y$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$

Виходячі зі співвідношень, наведених в табл.2.4. можна будувати розв'язувальні нелінійні рівняння, а потім відшукувати способи їх розв'язання. Але, маючи на цвазі подальше використанн в тій чи іншій формі крокових процедур при розв'язанні нелінійних задач, доцільно відразу будувати потрібні рівняння у прирошеннях. Точніше кажучи, не конкретизуючи тип скінченного елемента, з'ясуємо структуру геометрично нелінійних рівнянь в прирошеннях, яка виявляється загальною для всіх дискретних систем.

Будемо вважаєти відомою деяку (початкову) конфігурацію системи, яка характеризується вузловими переміщеннями \mathbf{u}_0 , які можуть бути і нульовими, якщо вибір такого початку відрахунку зручний. У цій конфігурації виконуються умови рівноваги

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\mathbf{s}_0 = \mathbf{p} \quad (2.30)$$

між початковими вузловими навантаженнями \mathbf{p}_0 і початковими зусиллями \mathbf{s}_0 . Пусть тепер навантаження отримало приріст $\delta\mathbf{p}$, якому повинні відповідати збільшення зусиль $\delta\mathbf{s}$ і перемішень $\delta\mathbf{u}$. У збуреному стані рівняння рівноваги матимуть вигляд

$$[\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0) + \delta\mathbf{Q}](\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}, \quad (2.31)$$

а після розкриття скобок і з урахуванням (2.30) вони набувають вигляду:

$$\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0 + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (2.32)$$

Якщо компоненти вектора додаткових перемішень $\delta\mathbf{u}$ відносно невеликі (але все ж вимагають геометричнонелінійного аналізу), то для отримання рівнянь в варіаціях можна обмежитися другим рівнем геометрично нелінійної постановки задачі. В цьому випадку добуток $\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0$ може бути представлений як лінійна функція від збільшення перемішень, що приводить до рівнянь

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \mathbf{T}(\mathbf{s}_0)\delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (2.33)$$

Наприклад, для фермового стержня в плоскій задачі, спираючись на таблицю 2.4, вважаємо:

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) = [[-\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x \ \lambda_y]],$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}_0) \delta\mathbf{u} = [[\lambda_y \ -\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x]]^T \delta\omega N_0 = \frac{N_0}{L} \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \delta\mathbf{u}, \quad (2.34)$$

де λ_x і λ_y — направляючі косинуси стрижня в початковій конфігурації системи, а N_0 — початкове зусилля в стрижні.

Залежність між прирошеннями деформацій елементів $\delta\Delta$ і прирошеннями вузлових переміщень визначимо виразами

$$\delta\Delta = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}^T \delta\mathbf{u}. \quad (2.35)$$

Фактично співвідношення (2.35) являють собою проварійовані геометричні рівняння другого рівня нелінійності. Наприклад, в разі фермового стрижня матимемо

$$\delta\Delta = \delta e + \omega L \delta\omega = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_0^T \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T / L \delta\mathbf{u}, \quad (2.36)$$

так що в цьому випадку

$$\delta\mathbf{Q}^T = \mathbf{u}_0^T \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T / L. \quad (2.37)$$

Підставляючи (2.36) в фізичні рівняння зв'язують зусилля і деформації, які для прирошень виконуються в формі

$$\delta s = \mathbf{F} \delta\Delta, \quad (2.38)$$

і вводячи потім отримані вирази для δs в (2.23) отримаємо

$$[\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T + \mathbf{T}(s_0) + \mathbf{Q} \mathbf{F} \delta\mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q} \mathbf{F} \delta\mathbf{Q}^T] \delta\mathbf{u} = \delta p. \quad (2.39)$$

В інших позначеннях ці рівняння можна записати як

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(s_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)] \delta\mathbf{u} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G) \delta\mathbf{u} = \delta p. \quad (2.40)$$

Тут чітко видно, що до звичайної матриці жорсткості $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T$ додається матриця початкових напружень $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T$, яка лінійно залежить від зусиль в системі перед початком збільшення навантаження, і матриця початкових поворотів

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0) = \mathbf{Q} \mathbf{F} \delta\mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q} \mathbf{F} \delta\mathbf{Q}^T,$$

не більше ніж матриця, яка квадратично залежить від переміщень.

Матрицю

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_1(s_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$$

прийнято називати матрицею геометричної жорсткості.

Як приклад наведемо запозичені з [1] вирази для згаданих матриць жорсткості простого скінченного елемента у вигляді стрижня плоскої розрахункової схеми шарнірно-стрижневої системи (рис. 2.9).

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) = \frac{S}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0) = \frac{EA(u_1 - u_3)}{4L^3} \begin{bmatrix} 3(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) & -3(u_1 - u_3) & -(u_2 - u_4) \\ 2(u_2 - u_4) & (u_1 - u_3) & -2(u_2 - u_4) & -(u_1 - u_3) \\ -3(u_1 - u_3) & -2(u_2 - u_4) & -3(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) \\ -(u_2 - u_4) & -(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) & (u_1 - u_3) \end{bmatrix}.$$

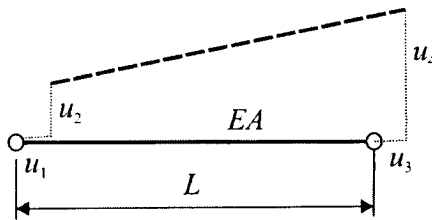


Рис. 2.9

При малих перекосах $(u_2 - u_4)/L$ і відносних подовженнях стрижня $(u_1 - u_3)/L$ матриця $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$ мала в порівнянні з іншими, і її впливом можна знехтувати.

У тих випадках, коли можна обмежитися першим рівнем геометричної нелінійності, в розрахунках припустимо знехтувати матрицею $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$.

Неважко також помітити, що в разі розтягнутого стержня, коли $N > 0$, виникає опір перекосу стрижня за рахунок виникнення відновлюючого моменту, і чим більше розтяг, тим сильніше цей опір перекосу.

Урахування геометричної нелінійності може бути важливим при проведенні розрахунків пластинчастих і оболонкових систем, що, зокрема відображено у роботах [58, 77, 82, 105].

2.4. Конструктивна нелінійність

Конструктивна нелінійність обумовлюється властивістю окремих елементів конструкції включатися в роботу при виконанні певних умов – здійснення переміщень, досягнення певних величин зусиль і т.і. Зокрема, до таких систем відносяться конструкції, в яких обмеження на переміщення визначаються умовами-нерівностями (однобічні в'язі). Конструкція, вільно оперта на деяку поверхню, яка забороняє переміщення в сторону цієї поверхні і не перешкоджає переміщенню в протилежному напрямку, гнучкі нитки, які дозволяють зблизитись більше ніж на довжину нитки, виконана насухо кам'яна кладка, зв'язок між фундаментом споруди і підстилаючим ґрунтом. Сипучі ґрунти або абсолютної гнучкі мембрани можуть служити прикладами більш складних систем з односторонніми в'язями.

Відмінною особливістю однобічної в'язі є параметри її вихідного стану. Наприклад, для найпростішої моделі стрижня, здатного сприйняти розтяг і вимикатись з роботи при появі стиснення (рис. 2.10, а), можна врахувати зазор Δ_0 в однобічній в'язі або ж напруження (натяг), який може бути інтерпретовано і як від'ємний зазор, тобто $\Delta_0 < 0$

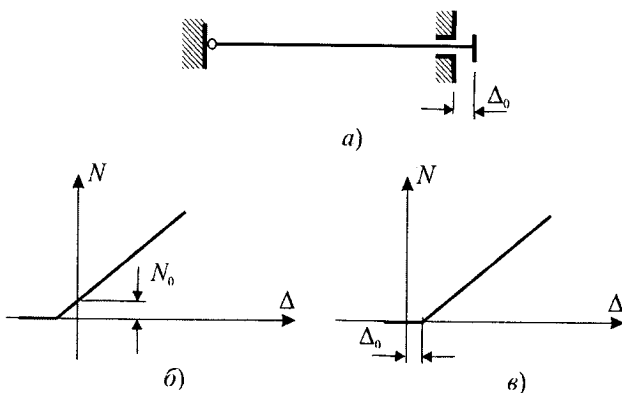


Рис. 2.10

При роботі такого стрижня в системі, щоб в'язь включилася в роботу, має бути попередньо вибраний зазор, або ж, щоб вона вимкнулася з роботи, має бути подоланий натяг.

Робота таких конструкцій може бути описана нелінійними залежностями між зусиллями і переміщеннями. Для розглядуваного елемента можна представити два варіанти діаграми роботи у вигляді залежності поздовжньої сили N від збільшення відстані між кінцевими точками Δ . Рис. 2.10,б відповідає варіанту з попереднім напруженням (натяг дорівнює N_0), рис.2.10,в – варіант системи зі зазором Δ_0 . Тангенс кута нахилу діаграми дорівнює величині EA/L (EA – жорсткість стержня на розтяг, L – довжина стержня).

Корисно вказати на деякі особливості, пов'язані з описом потенційної енергії системи з односторонніми в'язями, яка в даному випадку не є гладкою функцією узагальнених координат.

Так, наприклад, для системи з одним ступенем свободи, що складається з жорсткого диска, положення якого визначається кутом повороту θ , і двох прашуючих тільки на стиск пружних елементів з твердостями C_1 і C_2 (рис. 2.11), вираз для потенційної енергії має вигляд

$$U = \begin{cases} \frac{C_1}{2} a_1^2 \sin^2 \theta - Pl \sin \theta & \text{для } \theta \geq 0 \\ \frac{C_2}{2} a_2^2 \sin^2 \theta - Pl \sin \theta & \text{для } \theta < 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Видно, що при $C_1 a_1 \neq C_2 a_2$ функція $U(\theta)$ має розрив другої похідної на початку координат. Наявність цього розриву пов'язана зі миттєвою зміною жорсткості в момент перемикання односторонніх в'язей.

Далі ми будемо розглядати випадок малих перемішень з тим, щоб по можливості спростити викладення.

У цьому випадку замість (2.41) будемо мати

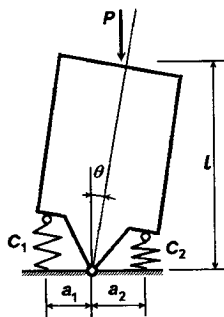


Рис.2.11

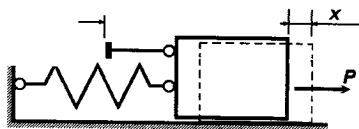
$$U = \begin{cases} \frac{C_1}{2} a_1^2 \theta^2 - P \sin \theta & \text{для } \theta \geq 0 \\ \frac{C_2}{2} a_2^2 \theta^2 - P \sin \theta & \text{для } \theta < 0. \end{cases} \quad (2.41, \text{ а})$$

Друга характерна особливість пружних систем з односторонніми зв'язками полягає в тому, що якщо система має абсолютно жорсткі односторонні зв'язки, то її потенційна енергія стає функцією, визначеною не при всіх мисливих значеннях узагальнених координат. Зазвичай же в будівельній механіці пружних систем потенційна енергія записується у вигляді функції узагальнених координат, які можуть приймати довільні значення, і в якості області визначення функції потенційної енергії виступає деяка відкрита множина.

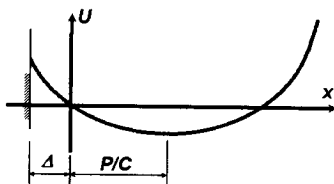
Для умов-нерівностей, що з'являються при урахуванні односторонніх зв'язків, це властивість вже не дотримується, і потенційна енергія може виявитися функцією, визначеною на замкнутій множині значень узагальнених координат.

Характерний приклад показаний на рис. 2.12, а, де система з одним ступенем свободи може мати лише переміщення $x \geq -\Delta$. Її потенційна енергія (см.рис.2.12, б).

$$U = \begin{cases} \frac{C}{2} x^2 - Px & \text{для } x \geq -\Delta \\ \text{не визначена} & \text{для } x < -\Delta \end{cases} \quad (2.42)$$



а)



б)

Рис. 2.12

Нарешті, на рис. 2.13,а наведена проста система з двома степенями свободи, яка має обидві зазначені особливості.

Потенціальна енергія цієї системи описується як:

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1x_1^2 - Px_1 & \text{для } x_1 \geq x_2; x_2 \geq 0 \\ \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)(x_1 - x_2)^2 + \\ + \frac{1}{2}c_2x_2^2 - Px_1 & \text{для } x_1 < x_2; x_2 \geq 0 \\ \text{не визначена} & \text{для } x_2 < 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Поверхня $U = U(x_1, x_2)$ показана за допомогою ліній рівня на рис. 2.12,б. Функція (2.43) визначена на замкнутій множині (напівплощина $x_2 \geq 0$) і має розрив в похідній уздовж лінії $x_1 = x_2$, пов'язаної з перемиканням однобічного зв'язку. Слід зауважити, що від негладкої функції U можна, взагалі кажучи, позбутися шляхом введення додаткових невідомих (надлишкових координат).

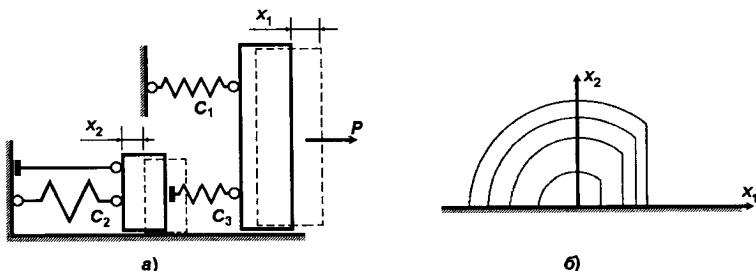


Рис.2.13

Так для системи, зображеної на рис. 2.11, можна крім переміщення θ , ввести ще два невідомих переміщення x_1 і x_2 точок А і В, і тоді

$$U(\theta, x_1, x_2) = \frac{c_1}{2}(a_1\theta - x_1)^2 + \frac{c_2}{2}(a_2\theta - x_2)^2 - Pl\theta, \quad (2.44)$$

але при цьому мають ще виконуватися обмеження вигляду

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (2.45)$$

тобто гладка функція (2.44) визначена тепер на замкнутій множині. Нижче цей прийом буде широко використовуватися при міркуваннях, пов'язаних з побудовою т.зв. допоміжних систем.

Розглянемо тепер деяку пружну систему з односторонніми в'язями в кількості s , і прийнемо для подальшого угоду про позначення односторонніх в'язей грецькими буквами. Виберемо правило знаків для реакцій R в цих в'язях таким, щоб допустиме по природі в'язі зусилля (стиснення для в'язі-упору або розтягнення для в'язі у вигляді гнучкої нитки) вважати позитивним. Будемо також вважати позитивними ті переміщення u , які не обмежуються односторонньою в'яззю (наприклад, зближення кінців гнучкої нитки). Оскільки одностороння в'язь може перебувати тільки в одному з станів: робочому (в'язь увімкнена), коли $R > 0$ і $u = 0$ або неробочому (в'язь вимкнена), при якому $R = 0$ і $u > 0$, то для всіх односторонніх в'язей системи повинні виконуватися наступні нерівності і рівності:

$$R_\alpha \geq 0; \quad u_\alpha \geq 0; \quad R_\alpha u_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s) \quad (2.46)$$

Ці умови записані для абсолютно жорстких односторонніх зв'язків, таких, наприклад, як односторонній зв'язок-упор. У разі пружних односторонніх зв'язків (скажімо, для пружин кінцевої жорсткості, які працюють тільки на розтягування) замість (2.46) при прийнятому правилі знаків слід було б написати

$$R_\alpha = \frac{1}{2} k_\alpha (|u_\alpha| - u_\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, s) \quad (2.47)$$

де k_α — жорсткість пружної однобічної в'язі.

Дійсно, при додатньому переміщенні u_α , при якому одностороння в'язь не чинить опір, з (2.46) отримуємо $R_\alpha = 0$, тоді як при від'ємному переміщенні, з (2.47) прямує лінійна залежність $R_\alpha = -k_\alpha u_\alpha$ з додатнім (тобто таким, що сприймається односторонньою в'яззю,) зусиллям. Надалі будемо вважати, що в даній системі всі односторонні в'язі є жорсткими. Насправді, як це буде показано в кінці цього параграфу, вказана обставина не є обмеженням на клас односторонніх в'язей, оскільки будь-який пружний елемент, що працює в одному напрямку, може бути

змодельований за допомогою розташованої на його кінці жорсткої однобічної в'язі, як це показано на рис. 2.10.

Основна проблема розрахунку системи з односторонніми в'язями полягає в тому, що потрібно з'ясувати, які з цих в'язей беруть участь в роботі при дії заданого навантаження, тобто встановити *робочу систему*. Слід зауважити, що простий перебір варіантів призведе до необхідності аналізувати $2s$ різних схем, що в більшості випадків практично неможливо (вже при $s = 10$ це дає 1024 варіантів!).

Якщо робоча система встановлена, то, замінюючи односторонні в'язі, що працюють (тобто є активними) на двосторонні і відкидаючи неактивні в'язі, ми отримуємо звичайну систему, аналіз якої можливий будь-якими відомими в будівельній механіці способами. Само собою зрозуміло, що результат розрахунку робочої системи повинен бути таким, що зусилля в заміненіх в'язях і переміщення по напрямку відкинутих в'язей повинні відповідати характеру роботи односторонніх в'язей, які фактично є в системі і лише подумки видозмінені при переході до робочої системи. Якщо такої відповідності немає, то розбіжність свідчить про помилковість прийнятої робочої системи.

Корисно дослідити поведінку системи при зміні навантаження. Найпростішим випадком змінного навантаження є однопараметричне, коли співвідношення між усіма навантаженнями на систему задані, а змінюється лише інтенсивність компонент навантаження.

Перш за все, розглянемо деякі якісні міркування, засновані на фізично очевидних припущеннях і уявленнях про поведінку системи під навантаженням.

Якщо деякому значенню параметру інтенсивності зовнішнього навантаження (рівню навантаження) відповідає деяка робоча система, то можна припускати, що та ж сама робоча система відповідає і іншим близьким за величиною рівням навантаження, тобто в деякому діапазоні навантажень (можливо і в діапазоні нульової довжини) робоча система не змінюється, а задана система з односторонніми в'язями поводить себе як звичайна лінійно деформована конструкція.

У разі, коли односторонні в'язі встановлені без зазорів і відсутнє попереднє напруження, просте збільшення інтенсивності навантаження (множення всіх сил на додатне число $\lambda > 0$) не може привести до зміни робочої системи. Якщо ж є зазори в односторонніх в'язях, то не виключено, що при деякому значенні λ система перейде в робочій стан, тобто зазор буде вичерпаний і відбудеться зміна робочої системи. Те ж саме може відбутись, коли наявне попереднє напруження деякої однобічної в'язі зі зростанням навантаження буде вичерпано і в'язь в системі припинить сою роботу.

Якщо уявити залежність між зусиллям S_k в k -му елементі системи і параметром інтенсивності навантаження P у вигляді графіка, то деякому діапазону зміни P , при якому не змінюється робоча система, буде відповідати відрізок прямої. Кут нахилу цього відрізка залежить від характеристик жорсткості системи і стану її односторонніх в'язей.

Якщо змінюється робоча система, то може змінитися і кут нахилу відрізка прямої, оскільки в новій робочій системі, що відповідає новому діапазону зміни навантажень, змінюється стан односторонніх в'язей (рис. 2.14). З фізичних міркувань ясно: якщо на графік нанести залежності між зусиллями S_k в різних елементах системи і інтенсивністю навантаження P , то всі точки зламів будуть розташовуватися на одних і тих же вертикалях (це зображено на рис.2.14), хоча для деяких зусиль S_k може статися, що нахили двох суміжних ділянок графіка випадково збігаються.

Покажемо тепер, що неможливий графік $S_k = S_k(P)$ такого виду, як на рис. 2.14, б. Це впливає з того, що зусилля належать одній і тій же робочій системі, а оскільки вона є зазвичай пружною системою, то для неї повинна виконуватися теорема про єдиність рішення.

Зі сказаного вище, на жаль, не впливає, що залежність між зусиллям (переміщенням) і параметром P є монотонною, оскільки можливі такі криві $S_k = S_k(P)$, в яких різним значенням параметра інтенсивності навантаження відповідають одні і ті ж значення зусиль чи перемішень.

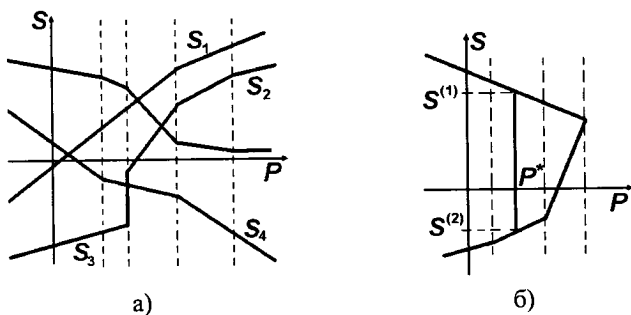


Рис. 2.14

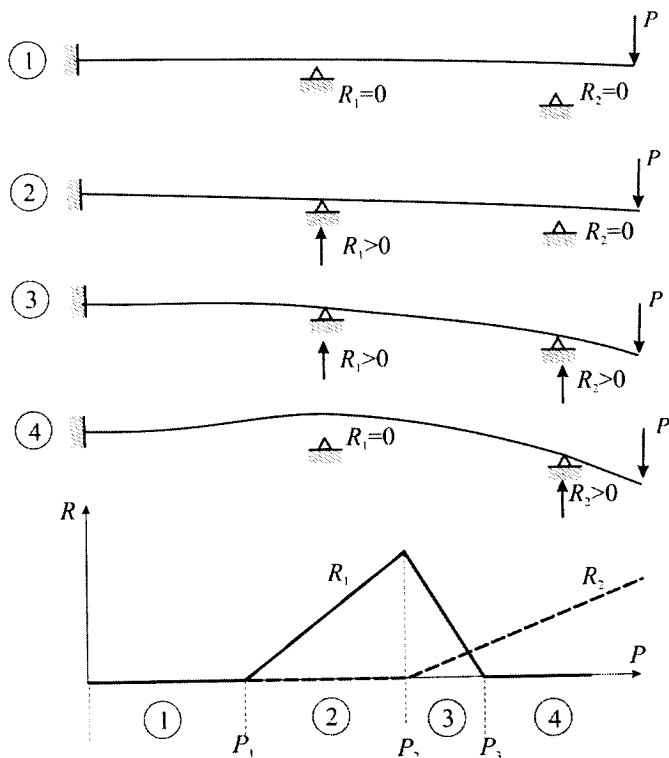


Рис. 2.15

Найпростіший приклад наведено на рис. 2.15, де представлена система з двома односторонніми в'язями і графік залежності зусилля в першій односторонній в'язі від P .

До тих пір, поки $P < P_1$, стрижень не торкається жодної з опор (в'язей) і маємо $R_1 = 0$. Потім при $P = P_1$ перша з односторонніх в'язей, включається в роботу, і зусилля в ній зростає поки, при $P = P_2$ не вмикається в роботу друга одностороння в'язь. При подальшому збільшенні P зусилля в першій в'язі починає зменшуватися, і при $P = P_3$ відбувається відрив, тоді в'язь вимикається з роботи. Важливо підкреслити наступне: незважаючи на те, що крива $S_i = S_i(P)$, зображена на рис.2.15, має дві ділянки, що зливаються з віссю, які відповідають різним робочим системам.

Питання дослідження конструктивно-нелінійних систем висвітлюються зокрема у [70, 73].

2.5. Генетична нелінійність

Генетична нелінійність - накопичення напружень і деформацій в процесі зміни конструкції (і відповідно розрахункової схеми на різних етапах монтажу) при її створенні. При цьому враховується встановлення або видалення деяких елементів системи або зміна їх довжин, зміна стану деяких в'язей і т.і., що призводять до зміни розрахункової схеми та (або) напруженого і деформованого стану системи. При цьому всі розрахунки, пов'язані зі монтажем системи з процесом створення попереднього напруження, як правило, виконуються в припущенні справедливості звичайних припущень лінійної будівельної механіки для кожного етапу монтажу. Однак, в цілому, за рахунок зміни розрахункової схеми при переході від етапу до етапу, завдача є нелінійною.

Для кожної стадії монтажу можна використовувати будь-який зі класичних методів будівельної механіки, але, з урахуванням специфіки багатоетапного розрахунку, корисно представити ці методи в формі, де відображена змінність системи. Наприклад, для розв'язувальних рівнянь методу переміщень, можна записати:

$$K_T \Delta u_T = \Delta q_T \quad (2.48)$$

де K_r — матриця жорсткості системи на r -том етапі, а Δu_r и Δq_r — вектори додаткових переміщень і додаткових наведених вузлових навантажень, що відносяться до r -ого етапу. Знаючи Δu_r , можна визначити збільшення усій ΔN_r і отримати накопичені за всіма попередніми етапами значення переміщень u_r і зусиль s_r .

$$u_r = u_{r-1} + \Delta u_r \quad (2.49)$$

$$N_{s_r} = N_{r-1} + \Delta N_r. \quad (2.50)$$

Співвідношення (2.49) і (2.50) доречно називати законами спадкування монтажних станів конструкції.

При переході до наступного етапу розрахунку змінюється матриця жорсткості K_r , яка отримує додатне прирощення $\Delta K_r + 1$, позитивне, якщо в систему на етапі $r + 1$ додаються елементи, і від'ємне, якщо елементи вибувають із системи на етапі $r + 1$:

$$K_{r+1} = K_r + \Delta K_{r+1}. \quad (2.51)$$

Больш детально:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(r+1)} & K_{12}^{(r+1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r+1)} & K_{22}^{(r+1)} & K_{23}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(r+1)} & K_{33}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(r)} & K_{12}^{(r)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r)} & K_{22}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{22}^{(r)} & \Delta K_{23}^{(r)} & 0 \\ 0 & \Delta K_{32}^{(r)} & \Delta K_{33}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і система розв'язувальних рівнянь $(r + 1)$ -го етапу має вигляд

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(r+1)} & K_{12}^{(r+1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r+1)} & K_{22}^{(r+1)} & K_{23}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(r+1)} & K_{33}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1^{(r+1)} \\ \Delta u_2^{(r+1)} \\ \Delta u_3^{(r+1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u_2^{(r+1)} \\ \Delta u_3^{(r+1)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тут $\Delta u_1^{(r+1)}$ — прирощення переміщень відповідно до раніше змонтованої і незмінної частини споруди, $\Delta u_2^{(r+1)}$ — прирощення переміщень у вузлах, до яких приєдналися нові елементи, $\Delta u_3^{(r+1)}$ — переміщення зновприєднаних вузлів. Правий нульовий блоковий стовпець і нижня нульова блоковий рядок матриці жорсткості відносяться до ще не включеної частини споруди.

Як було зазначено, для впливів, що відносяться до різних стадій одного і того ж етапу монтажу, діють звичайні лінійні закони механіки, а розрахункова схема конструкції змінюється тільки при переході до наступного монтажному етапу.

Підкреслимо, що в деяких випадках частина навантажень діє лише в рамках r -го етапу монтажу, і при переході до наступних етапів знімається. Така ситуація є типовою, наприклад, для навісного монтажу конструкції, коли вага кранового обладнання враховується при формуванні вектора Δq_r з розташуванням кранів, відповідних саме цього етапу. При переході до наступного $(r + 1)$ -го етапу монтажу вектор вузлових навантажень формується з урахуванням нового розташування кранового обладнання, але при цьому потрібно пам'ятати про необхідність застосування на $(r + 1)$ -му етапі і від'ємних кранових навантажень, які анулюють їх вплив на систему на попередньому етапі. Якщо цього не зробити, то закони успадкування (2.49) і (2.50) будуть працювати невірно.

Результати розрахунків, що враховують процес монтажу, можуть значно відрізнятись від звичних, коли система передбачається створеною відразу в повному обсязі, і лише потім до неї починають прикладати зовнішні навантаження. Це може бути проілюстровано на простому прикладі розрахунку двопрогонової триповерхової рами. При монтажі кожного поверху ригель приєднується до стійок шарнірно і несе при цьому навантаження 2,0 т/м. Потім вузли приєднання ригелів виконуються монолітними, і ригелі довантажуються вагою плит перекриття, які створюють додаткове навантаження 2,0 т/м. Так монтуються всі поверхи (рис. 2.16).

Послідовний розрахунок конструкції на стадіях монтажу 1 ...6 та підсумовування отриманих результатів дає епюру згинальних моментів, представлену в лівій частині рис. 2.17. Для порівняння праворуч приведена епюра моментів, яка була б отримана в повністю готовій системі, якби до її ригелів було б прикладене навантаження 4,0 т/м.

Деякі можливості моделювання такого процесу передбачені в багатьох сучасних програмних комплексах. Зокрема програмному комплексу ЛИРА і обчислювальному комплексу SCAD є спеціальний режим МОНТАЖ, в системі ANSYS цей режим має назву «схема розмноження і загибелі елементів».

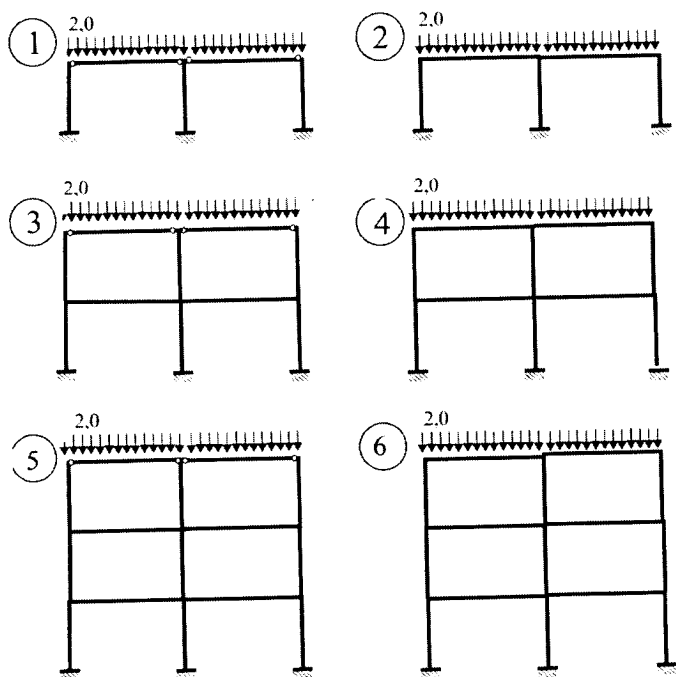


Рис. 2.16

Всі згадані операції над розрахунковою схемою призводять до створення в системі деякого попереднього напружено-деформованого стану, який може суттєво впливати на роботу конструкції в цілому. Якщо деяка частина конструкції може бути додана або видалена з системи, то певні елементи розрахункової моделі можуть стати "існуючими" або "неіснуючими". Така можливість має враховуватися при моделюванні земляних робіт (наприклад, при влаштуванні котлованів або при будівництві тунелів), багатоетапного будівництва (як при монтажі прогонової будови моста або зведення багатопверхового будинку) і в багатьох інших задачах.

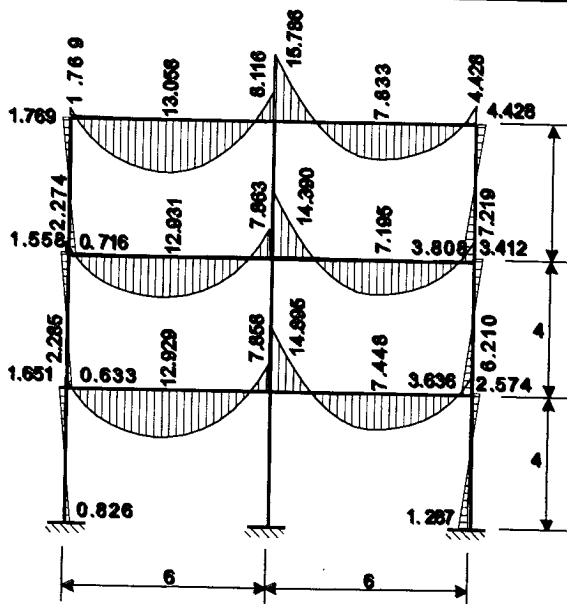


Рис.2.17

Можна розглядати два способи видалення і включення елементів в систему («народження і загибель» або «активації і деактивації»), за термінологією різних програмних продуктів). Схематично вони показані на рис. 2.18.

У першому випадку елемент M , що монтується встановлюється так, що один його кінець примикає до вже зібраної частини системи, а другий - до вузла, що знаходиться в проектному положенні. У другому випадку для "ефекту загибелі" фактично не видаляють "мертві" елементи. Замість цього він деактивується множенням його жорсткості на відчутний коефіцієнт зменшення, наприклад, на 10^{-6} . Тоді елемент M , що монтується, і раніше не брав участі в роботі системи в силу практично нульовий жорсткості, включається в роботу за рахунок набуття реальної жорсткості і починає впливати на поведінку системи.

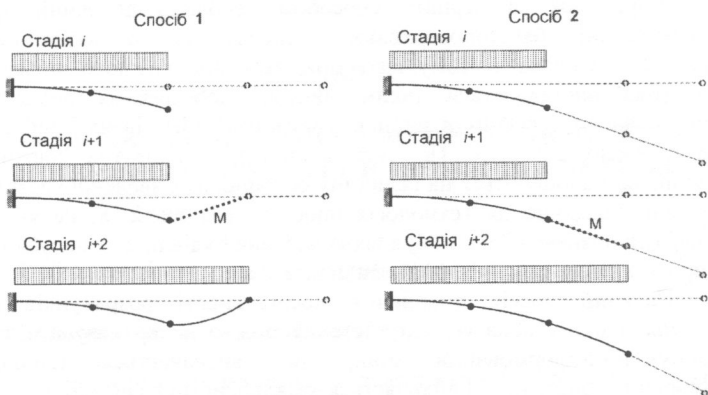


Рис. 2.18

Для геометрично лінійного розрахунку, коли геометрія деформованої схеми ототожнюється з вихідної геометрією, практичної різниці між цими випадками немає. Але в геометрично нелінійному варіанті розрахунку це не так, що наочно демонструється рис.2.19, де схематично показаний процес навісного монтажу. Для другого способу вузли, що належать не змонтованій частини системи, під дією навантаження на вже створену частину йдуть з проектного положення, і система не отримує жодних непередбачених зламів, які виникають при першому способі розрахунку.

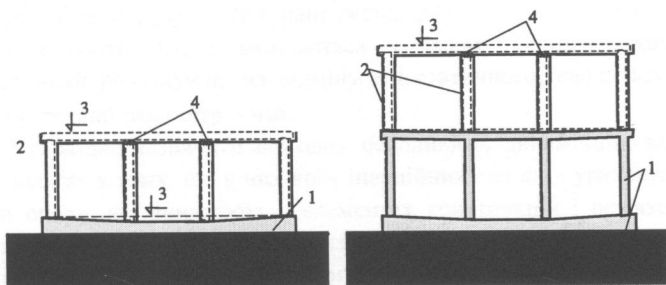


Рис. 2.19

Розрахунок за першим способом особливо доречний при проектуванні багатопверхових будівель із залізобетонним каркасом. Справа в тому, що при зведенні кожного поверху опалубка виставляється таким чином, щоб верхня поверхня бетонованого перекриття вийшла горизонтальною рівню і вийшла на проектну відмітку. По суті, коригується проектна довжина колон, які нарощуються на величину осідання вже зведеної частини будівлі. Графічно ця технологія ілюструється рис.2.18, на якому цифрами позначено: 1 - побудована частина будівлі, 2 - опалубка, 3 - проектні відмітки, 4 - додаткова ділянка колони.

Найявний досвід виконання послідовності розрахунків на монтажні стану показує, що часто не можна не враховувати той напружено-деформований стан, яке визначається історією створення конструкції і виявляється «закладеним» в системі.

ГЛАВА 3

ПОБУДОВА РІВНЯНЬ РУХУ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ

3.1 Побудова рівнянь руху пружних систем

3.1.1 Основні поняття динаміки споруд

Динамічними називаються навантаження, у результаті яких маса елементів конструкцій, а також пов'язаного з ними обладнання в процесі переміщень набувають прискорень, які зумовлюють виникнення сил інерції, що, в свою чергу, істотно впливає на напружено-деформований стан конструкції.

Якщо інерційні сили, які зумовлюються зовнішнім навантаженням, малі порівняно із самим навантаженням, то впливи вважаються статичними.

Динаміка споруд – це розділ будівельної механіки, що вивчає методи розрахунку елементів конструкцій споруд при динамічному навантаженні.

При динамічному впливі внаслідок наявності в системі пружних та інерційних сил збуджується коливальний рух. Зумовлені цим рухом поля напружень, деформацій і переміщень еволюціонують, тобто змінюються з часом. Таким чином, у динамічний розрахунок, на відміну від статичного, вводиться ще один суттєвий параметр – час.

Необхідно зазначити ще одну особливість динамічних задач, яка полягає в тому, що в них крім інерційних сил слід враховувати сили опору, які виникають в елементах конструкцій і пов'язані з дисипацією енергії, тобто з розсіюванням енергії у просторі. Ці сили мають складну природу і тому враховувати їх важче, ніж сили інерції. Існують динамічні задачі, в яких вплив сил опору неістотний і тому їх можна не враховувати. Але в низці практично

важливих випадків неврахування цих сил може призвести не тільки до кількісно неточних, а й якісно неправильних результатів.

Аналізуючи динамічні процеси, що відбуваються в спорудах, розрізняють два типи руху – вільні та вимушені коливання. Вільними коливаннями системи називається такий її рух, який відбувається без перемінного зовнішнього впливу і надходження енергії ззовні. Вимушеними коливаннями системи називається рух, що збуджується та підтримується зовнішнім впливом.

Можливі типи вільних коливань зумовлюються внутрішніми жорсткісними, інерційними та дисипативними характеристиками динамічної системи. Закономірності вимушених коливань, що збуджуються, визначаються як внутрішніми динамічними характеристиками системи, так і видом зовнішнього впливу.

У динамічних задачах залежність характеристик напружено-деформованого стану від часу зумовлює принципову різницю розрахункових моделей при розв'язанні статичних і динамічних задач. У статичних задачах розрахункові моделі, як правило, описуються системою алгебричних або трансцендентних рівнянь. У динамічних задачах розрахункова модель являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь. При аналізі динамічних процесів у складних спорудах ці системи можуть мати високий порядок. Пряме інтегрування таких систем є серйозною обчислювальною задачею навіть при використанні сучасних комп'ютерів. Тому важливою проблемою динаміки споруд є редукція вихідних розрахункових моделей до розрахункових моделей меншої розмірності. У багатьох випадках цю процедуру не можна виконати формально і від успішної її реалізації багато в чому залежить адекватність оцінок параметрів динамічних процесів.

Слід зазначити, що іноді при розв'язанні динамічних задач використовується квазістатичний підхід, при якому параметр часу не береться до уваги і динамічна природа задачі враховується за рахунок введення коефіцієнта динамічності. Проте для визначення коефіцієнта впливу необхідно, у свою чергу, виконувати динамічний розрахунок.

Динамічні впливи залежно від природи динамічні впливи поділяються на два класи: силові, при яких на елементи конструкції діє зовнішнє навантаження, і кінематичні, при яких задані вимушені зміщення окремих елементів споруди. Зовнішні впливи можуть змінювати з часом свою інтенсивність або точку прикладання навантаження, або як першу, так і другу характеристики.

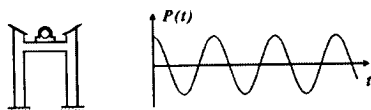


Рис. 3.1

У динаміці споруд прийнято наступну схематизацію різних типів навантаження. Широко застосовується модель впливу, у якій точки прикладання і напрям навантаження постійні, а інтенсивність змінюється з часом за гармонічним законом. Типовим прикладом такого впливу є навантаження від обладнання, яке має невідновжені маси, що обертаються (рис.3.1).

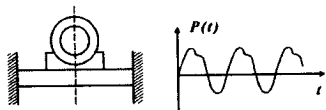


Рис.3.2

Більш загальною є модель, у якій інтенсивність впливу змінюється періодично з часом. За допомогою апарату рядів Фур'є це навантаження зводиться до суми гармонічних впливів. Періодичні навантаження можуть збуджуватись у вібромашинах (рис.3.2). Закон зміни з часом інтенсивності навантаження, що збуджується групою різнорідного обладнання з невідновженими масами, які обертаються з різними кутовими швидкостями, має багаточастотний характер (рис.3.3).

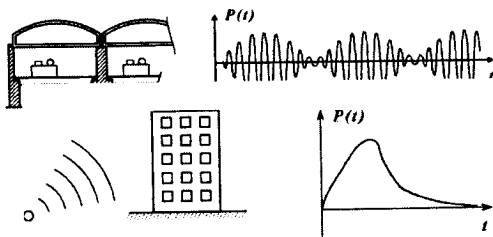


Рис.3.4

Інший тип мають навантаження, які характеризуються швидким наростанням інтенсивності від нуля до максимального значення та швидким зменшенням її до нуля. Ця модель називається короткочасним імпульсним навантаженням. Таке ударне навантаження генерується при вибухах (рис.3.4).

Узагальненням цієї моделі є навантаження, яке є послідовністю імпульсів. Цей вплив може мати періодичний характер, коли імпульси виникають через рівні проміжки часу і мають однакову

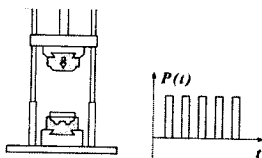


Рис.3.5

форму. Такий вигляд має ударне навантаження від працюючого молота (рис.3.5).

Складніший характер має модель, яка описує вплив землетрусу на будинки та споруди (рис.3.6), так зване сейсмічне навантаження

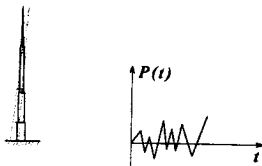


Рис.3.6

З розвитком висотного будівництва в динаміці споруд велику увагу почали приділяти вітровим навантаженням. При розв'язанні задач використовується модель рухомого навантаження, яке достатньо швидко змінює своє положення відносно споруди.

Прикладом такого навантаження може бути вплив рухомого потягу на міст. Наведений перелік не вичерпує всіх видів навантаження, але дає уявлення про їх різноманітність.

Розглядаючи динамічні задачі, необхідно розрізнити два принципово різних підходи – детермінований та стохастичний. В класі задач, де геометричні розміри конструкції та властивості матеріалів можна вважати строго заданими, вибір підходу, що застосовується, істотно залежить від способу визначення навантаження. Якщо в кожний момент часу цілком визначені характеристики навантаження, застосовується детермінований підхід.

Якісно інший характер мають навантаження, які діють на елементи будівельних конструкцій (щогли, антени) при випадкових поривах вітру, в літаках при пульсації тиску в граничному турбулентному шарі повітря, в берегових гідротехнічних спорудах при нерегулярних морських хвилюваннях тощо. Питання про те, які значення в даний момент часу мають характеристики навантаження, для таких задач не має визначеної (детермінованої) відповіді. Аналізуючи такі задачі, необхідно застосовувати методи статистичної динаміки конструкцій.

Ступені вільності динамічної моделі. Основною характеристикою розрахункової динамічної моделі є кількість незалежних параметрів, що визначають положення мас системи в будь-який момент часу в процесі руху. Ці незалежні параметри називаються динамічними ступенями вільності розрахункової динамічної моделі системи.

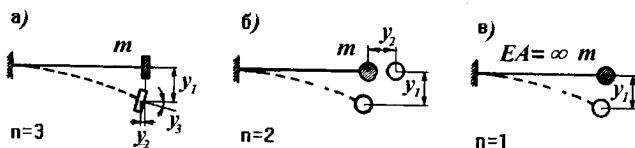
Необхідно зазначити, що зміст поняття числа ступенів вільності в задачах статичної і динамічної механіки принципово різний. При аналізі геометричної незмінюваності, а також статичної невизначуваності стержневих систем вважається, що вони складаються з нескінченно жорстких дисків і стержнів. В динаміці ж при визначенні числа ступенів вільності визначальними є можливі пружні деформації системи.

Реальна деформувана конструкція має розподілену вздовж її елементів масу i , отже, нескінченну кількість можливих деформованих станів, тобто має нескінченне число ступенів вільності. Тому, щоб одержати конкретні результати, необхідно виконати редукцію вихідної системи до розрахункової динамічної моделі зі скінченним числом ступенів вільності. Природно, що число ступенів вільності розрахункової динамічної моделі реальної конструкції істотно залежить від процедури схематизації, яка є неформальною і визначається не тільки жорсткісними характеристиками системи і розподіленням мас, а й діючим навантаженням.

Існує два загальні підходи до побудови розрахункових динамічних моделей.

Перший підхід пов'язаний з виділенням у реальній конструкції елементів, в яких деякими деформаціями можна знехтувати, і деформованих елементів, масу яких можна не враховувати.

Розглянемо пружний стержень з розташованою на кінці масою m скінченних розмірів.



Ця система має нескінченне число ступенів вільності. Якщо можна знехтувати масою стержня, то динамічні характеристики системи будуть цілком визначатися положенням маси m . У загальному випадку воно визначається трьома параметрами: вертикальним переміщенням y_1 , горизонтальним переміщенням y_2 та кутом повороту y_3 . Таким чином, при зроблених припущеннях розрахункова динамічна модель має три ступеня вільності ($n=3$). Якщо моментом інерції маси m знехтувати, то положення системи (рис.3.7,б) визначатиметься двома переміщеннями y_1 і y_2 . В такому разі система має два ступені вільності ($n=2$). Якщо вважати, що поздовжня жорсткість стержня $EA=\infty$ та прогини малі, то відповідна модель (рис.3.7,в) матиме один ступінь вільності ($n=1$).

Число ступенів вільності розрахункової динамічної моделі зручно визначати як мінімальне число в'язей, яке необхідно накласти на систему, щоб виключити рух усіх матеріальних точок, що мають масу.

Розглянемо раму, зображену на рис.3.8,а. Стержні рами вважатимемо невагомими, тобто безмасовими. Кожна зосереджена маса має три ступені вільності. Для того щоб ця маса була нерухомою, необхідно закріпити її трьома стержнями, які не перетинаються в одній точці (рис.3.8,б). Таким чином, необхідно ввести дев'ять стержнів. Отже, в загальному випадку система має дев'ять ступенів вільності.

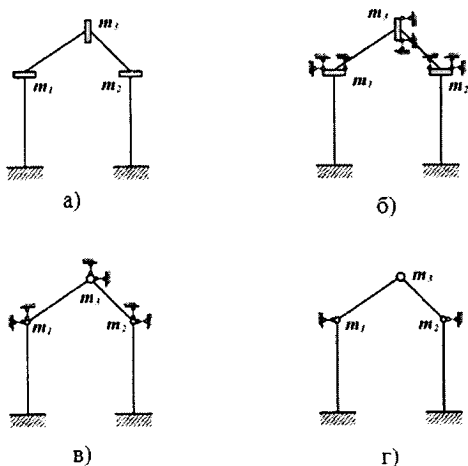


Рис.3.8

Якщо моменти інерції кожної з трьох мас можна прийняти малими, і знехтувати кутами повороту, тобто вважати, що кожна маса зосереджена в точці й закріплюється двома стержнями (рис.3.8,в), то система матиме шість ступенів вільності. Маси, поворотами яких можна знехтувати, називаються точковими. Додатково припускаючи, що поздовжня жорсткість нескінченно велика і хорда деформованого стержня дорівнює довжині самого стержня, а переміщення вузлів малі, достатньо двох в'язей (рис. 3.8,г), щоб зробити маси нерухомими. За таких припущень розрахункова динамічна модель матиме два ступені вільності.

Інший підхід до побудови розрахункових динамічних моделей зі скінченним числом ступенів вільності базується на прямих методах, які полягають у зображенні шуканого поля переміщень, що є - функцією просторових координат і часу, у вигляді скінченної суми попарних добуток деяких заданих функцій просторових змінних (базисних функцій) на невідомі коефіцієнти, які залежать від часу (узагальнені координати).

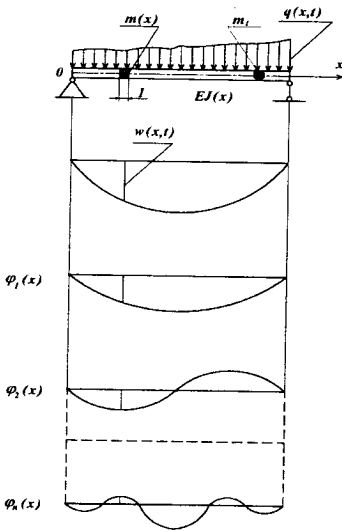


Рис.3.9

собою розрахункову динамічну модель вихідної континуальної задачі з n ступенями вільності. При такому підході одним з найвідповідальніших моментів, від якого значною мірою залежить успішне розв'язання задачі, є вдалий вибір базисних функцій.

Сучасний рівень розв'язання цієї проблеми полягає у використанні для побудови базисних функцій методу скінченних елементів.

3.1.2 Побудова рівнянь руху пружних систем на основі дискретних моделей

Визначальним моментом динамічного розрахунку є процедура побудови системи рівнянь, які безпосередньо використовуються для аналізу коливань деформівної конструкції. З цією метою, як правило, використовується скінченна система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Кількість рівнянь в

Розглянемо коливання балки (рис.3.9), що має розподілену масу $m(x)$, згинну жорсткість $EJ(x)$ і зосереджену масу m_1 , під дією розподіленого навантаження $q(x,t)$.

Невідому функцію прогинів $w(x,t)$ представимо за допомогою набору базисних функцій $\varphi_i(x)$ ($i=1, \dots, n$):

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \varphi_i(x), \quad (3.1)$$

де невідомі функції $y_i(t)$ є узагальненими координатами.

Використовуючи варіаційний підхід або метод колокацій, можна перейти до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, яка являє

системі дорівнює кількості ступенів вільності моделі, що застосовується.

Якщо розглядуваний об'єкт являє собою набір дискретних мас, з'єднаних безмасовими пружними елементами, то побудувати систему рівнянь можна прямим застосуванням принципів механіки, які розглядатимуться далі. У складніших випадках дискретна модель будується за допомогою прийомів, викладених вище, що полягають у зосередженні мас в окремих точках споруди або у введенні жорстких дисків, які мають масу та скінченні розміри і з'єднані з пружною безмасовою системою. Для континуальних систем, де така ідеалізація є дуже грубою, системи рівнянь будують з використанням прямих методів.

Якість розрахункової динамічної моделі залежить від того, як точно вона описує динамічні процеси, що відбуваються в розглядуваній механічній системі. При розв'язанні конкретних задач доцільно використовувати моделі з невеликою кількістю ступенів вільності. Виявляється, що в багатьох практично важливих випадках застосування таких моделей дає добрі результати.

У динаміці споруд при виведенні рівнянь руху використовуються три підходи. Перші два базуються на диференціальних принципах механіки – принципі Даламбера та принципі можливих переміщень, а третій – на інтегральному принципі механіки – принципі Гамільтона-Остроградського.

Метод динамічної рівноваги у поєднанні з методом переміщень. Одним з широко застосовуваних методів побудови рівнянь руху є підхід, що базується на принципі Даламбера. Згідно з принципом Даламбера, якщо до заданих активних сил, які діють на точку механічної системи, і реакцій в'язей, які накладаються, додати сили інерції, дістанемо врівноважену систему сил.

Розглянемо шарнірну систему, яка складається з лінійно-пружних стержнів, що несуть зосереджену масу m у вузлі. На масу діє вертикальна сила $P(t)$ (рис.3.10,а).

Положення маси визначається двома координатами: $y_1(t)$ і $y_2(t)$. Якщо знехтувати масою стержнів, то розглядувана динамічна система матиме два ступені вільності. Складемо рівняння руху маси.

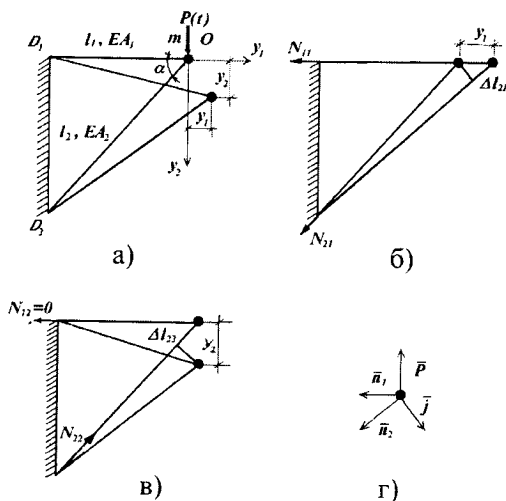


Рис.3.10

На рис.3.10,б і 3.10,в зображено два незалежних деформованих стани системи: перший $y_1 \neq 0, y_2 = 0$ і другий $y_1 = 0, y_2 \neq 0$. Зміна довжини стержнів D_1O і D_2O , що відповідає першому деформованому стану, визначається такими співвідношеннями:

$$\Delta l_{11} = y_1, \quad \Delta l_{21} = y_1 \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Згідно із законом Гука зусилля в стержнях, що відповідають цьому деформованому стану, визначаються так:

- у стержні D_1O

$$N_{11} = \Delta l_{11} \cdot EA_1 / l_1 = s_1 y_1,$$

- у стержні D_2O

$$N_{21} = \Delta l_{21} \cdot EA_2 / l_2 = s_2 y_1 \cos \alpha,$$

де

$$s_1 = \frac{EA_1}{l_1}, \quad s_2 = \frac{EA_2}{l_2} \quad \text{- погонні жорсткості при подовженні.}$$

Природним чином постає питання, щодо системи сил, яку треба треба прикласти для того, щоб отримати перший деформований стан. Для відповіді необхідно вирізати вузол з масою та врівноважити сили N_{11} та N_{21} .

З умови рівноваги збіжної системи сил отримуємо, що необхідно прикласти до вузла силу з горизонтальною проекцією $N_{11} + N_{21} \cos \alpha = s_1 y_1 + s_2 y_1 \cos^2 \alpha = (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1$, та вертикальною проекцією $-N_{21} \sin \alpha = -s_2 y_1 \cos \alpha \sin \alpha$. Відповідно для того, щоб вузол отримав одиничне переміщення за напрямком першої ступені вільності і нульове за напрямком другої, потрібно до вузла прикласти горизонтальну силу $s_1 + s_2 \cos^2 \alpha$ у додатньому напрямку та вертикальну силу $s_2 \cos \alpha \sin \alpha$ у від'ємному напрямку. За визначенням така система сил утворює перший стовпець матриці жорсткості системи K . Тобто $k_{11} = s_1 + s_2 \cos^2 \alpha$, $k_{21} = -s_2 \cos \alpha \sin \alpha$.

Розглянемо другий деформований стан. Зміна довжини стержнів, що відповідає другому стану, задається такими виразами:

$$\Delta l_{12} \cong 0, \quad \Delta l_{22} = -y_2 \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Згідно із законом Гука зусилля в стержнях, що відповідають другому деформованому стану, визначаються так:

- у стержні $D_1 O$

$$N_{12} = \Delta l_{12} EA_1 / l_1 = 0,$$

- у стержні $D_2 O$

$$N_{22} = \Delta l_{22} \cdot EA_2 / l_2 = -s_2 y_2 \sin \alpha, \text{ (стержень скорочується).}$$

Розглянемо тепер питання щодо системи сил, яка спричинить другий деформований стан. Для відповіді на це питання необхідно вирізати вузол з масою та врівноважити сили $N_{12} = 0$ та N_{22} .

З умови рівноваги збіжної системи сил отримуємо, що необхідно прикласти до вузла силу з горизонтальною проекцією $N_{12} + N_{22} \cos \alpha = 0 - s_2 y_2 \cos \alpha \sin \alpha$, та вертикальною проекцією $-N_{21} \sin \alpha = s_2 y_2 \sin^2 \alpha$. Відповідно для того, щоб вузол отримав одиничне переміщення за напрямком другої ступені вільності і

нульове за напрямком першої, потрібно до вузла прикласти горизонтальну силу $s_2 y_2 \cos \alpha \sin \alpha$ у від'ємному напрямку та вертикальну силу $s_2 \sin^2 \alpha$ у додатньому напрямку. За визначенням така система сил утворює другий стовпець матриці жорсткості K . Тобто $k_{21} = -s_2 \sin \alpha \cos \alpha$, $k_{22} = s_2 \sin^2 \alpha$.

За принципом суперпозиції для лінійних систем зміна довжини стержнів, що відповідає деформованому стану, який зображено на рис.3.10,а, (сумарний деформ.стан) записується у вигляді

$$\Delta l_1 = \Delta l_{11} + \Delta l_{12} = y_1, \quad (3.4)$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{21} + \Delta l_{22} = y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha.$$

Згідно із законом Гука зусилля в стержнях, що відповідають цьому деформованому стану, визначаються так:

- у стержні D_1O

$$N_1 = \Delta l_1 EA_1/l_1 = s_1 y_1, \quad (3.5)$$

- у стержні D_2O

$$\begin{aligned} N_2 &= \Delta l_2 \cdot EA_2/l_2 = \Delta l_{21} EA_2/l_2 + \Delta l_{22} EA_2/l_2 = \\ &= s_2 (y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Відокремимо масу від стержнів, замінивши їх дію відповідними реакціями. Таким чином, в процесі руху на масу діє сила P і реакції в'язей N_1 і N_2 . Прикладемо також сили інерції J_1 і J_2 , що діють у додатному напрямі відповідних осей і визначаються так:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\ddot{m}y_1, \\ J_2 &= -\ddot{m}y_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Діаграму сил, що діють на матеріальну точку, зображено на рис.3.10,г, де вектори

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (-N_1, 0), & \vec{n}_2 &= (-N_2 \cos \alpha, N_2 \sin \alpha), \\ \vec{p} &= (0, P), & \vec{j} &= (J_1, J_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Згідно з принципом Даламбера ця система сил є врівноваженою. Таким чином, маємо таку векторну рівність:

$$\ddot{\bar{n}}_1 + \ddot{\bar{n}}_2 + \ddot{\bar{p}} + \ddot{\bar{j}} = 0. \quad (3.9)$$

Записуючи покоординатно рівняння (3.9), дістаємо

$$\begin{aligned} J_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha &= 0, \\ J_2 + N_2 \sin \alpha + P &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Підставляючи в (3.10) співвідношення (3.5) – (3.7), визначаємо

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1 - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_2 &= 0, \\ m\ddot{y}_2 - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_1 + s_2 \sin^2 \alpha y_2 &= P(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Бачимо, що при переміщеннях x у виразі (3.11) стоять коефіцієнти матриці жорсткості. Отже, систему (3.11) зручно записати в матричному вигляді:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{y}} + \mathbf{K}\bar{y} = \bar{p}, \quad (3.12)$$

де $\bar{y} = (y_1, y_2)^T$ – вектор переміщень; \mathbf{M} – матриця мас,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad (3.13)$$

\mathbf{K} – матриця жорсткості,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \cos^2 \alpha & -s_2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -s_2 \sin \alpha \cos \alpha & +s_2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вимушені коливання конструкції описуються системою двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Зазначимо, що при побудові рівнянь руху не враховувалися сили опору руху.

Метод динамічної рівноваги у поєднанні з методом сил.

У попередньому параграфі при складанні рівнянь руху було застосовано принцип Даламбера у поєднанні з методом переміщень. Часто з цією метою використовується поєднання принципу Даламбера з іншим методом будівельної механіки – методом сил.

Продемонструємо цей підхід на прикладі тієї самої шарнірної системи (рис. 3.10).

Позначимо δ_{ik} – переміщення у напрямі y_i від дії одиничної сили у напрямі y_k ($i, k=1,2$). Прикладемо також сили інерції J_1 і J_2 , що діють у додатному напрямі відповідних осей і визначаються за (3.7). Отже, у напрямі y_1 діє сила інерції J_1 , а у напрямі y_2 – сила інерції J_2 та зовнішнє навантаження $P(t)$. Рівняння для переміщень маси, які складаються з використанням методу сил, мають вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}J_1 + \delta_{12}(J_2 + P(t)), \\ y_2 &= \delta_{21}J_1 + \delta_{22}(J_2 + P(t)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

З урахуванням (3.7), систему (3.14) перепишемо так:

$$\begin{aligned} \delta_{11}m\ddot{y}_1 + \delta_{12}m\ddot{y}_2 + y_1 &= \delta_{12}P(t), \\ \delta_{21}m\ddot{y}_1 + \delta_{22}m\ddot{y}_2 + y_2 &= \delta_{22}P(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введемо матрицю податливості розглядуваної механічної системи:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

З використанням (3.13) та (3.16) систему (3.15) перепишемо у векторному вигляді:

$$\mathbf{B}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (3.17)$$

Знайдемо компоненти матриці податливості (переміщення точкової маси від дії одиничних сил), використовуючи епюри внутрішніх зусиль в рамі в одиничних станах:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{N}_1^2 \cdot l_i}{EA_i} = \frac{1 \cdot l_1}{EA_1} = \frac{1}{s_1}, & \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 \cdot l_i}{EA_i} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1}; \\ \delta_{22} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{N}_2^2 \cdot l_i}{EA_i} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{s_2} \end{aligned}$$

Перший одиничний стан	
Епюра \bar{N}_1	
Другий одиничний стан	
Епюра \bar{N}_2	

З урахуванням цих результатів

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} \\ \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} & \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{s_2} \end{pmatrix}$$

Знайдемо добуток матриць жорсткості та податливості:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \cos^2 \alpha & -s_2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -s_2 \sin \alpha \cos \alpha & +s_2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} \\ \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} & \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{s_2} \end{pmatrix} = \mathbf{E},$$

де через \mathbf{E} позначена одинична матриця, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Дійсно, наприклад елемент матриці-добутку з індексами 1,1 дорівнює

$$(s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) \cdot \frac{1}{s_1} - s_2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} = 1 + \cos^2 \alpha \cdot \frac{s_2}{s_1} - \cos^2 \alpha \cdot \frac{s_2}{s_1} = 1,$$

а елемент матриці-добутку з індексами 1,2 дорівнює

$$(s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{s_1} - s_2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{s_1} - s_2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{s_2} = 0 \text{ і т.д.}$$

Отже, система (3.17) еквівалентна системі (3.12). Справді, помноживши векторну рівність (3.17) на матрицю жорсткості \mathbf{K} , запишемо

$$\mathbf{K} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{p}},$$

звідки, з урахуванням того, що матриця податливості \mathbf{B} обернена до матриці жорсткості \mathbf{K} , дістанемо (3.12).

Побудова рівнянь руху за допомогою принципу можливих переміщень. Якщо розглядувана механічна система має складну структуру і складається з дискретних мас та тіл скінченних розмірів, безпосередньо записати рівняння динамічної рівноваги дуже важко. У такому разі часто ефективним є застосування принципу можливих переміщень (принципу Даламбера - Лагранжа).

Можливими (віртуальними) називаються нескінченно малі переміщення, за допомогою яких можна перевести систему з однієї конфігурації в іншу, що наближена до неї і відноситься до такого самого моменту часу, без порушення накладених в'язей.

В задачах динаміки принцип можливих переміщень або загальне рівняння динаміки формулюється так: рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Принцип можливих переміщень еквівалентний рівнянням динамічної рівноваги, проте варіаційне формулювання, що наводиться далі, набагато ширше застосовується в задачах механіки.

Повернемося до задачі, яку показано на рис.3.10,а. Вектор можливих переміщень $\delta \vec{r}$ визначається варіюванням δy_1 і δy_2 двох незалежних параметрів y_1 і y_2 :

$$\delta \vec{r} = (\delta y_1, \delta y_2)^T. \quad (3.18)$$

У цьому разі аналітично принцип можливих переміщень записується у вигляді

$$(\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{p} + \vec{j}) \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (3.19)$$

де символом (\cdot) позначено операцію скалярного добутку.

В механіці рівняння (3.19) називається загальним рівнянням динаміки. В покоординатному вигляді рівняння (3.19) переписується так:

$$(J_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha) \delta y_1 + (J_2 - N_2 \sin \alpha + P) \delta y_2 = 0. \quad (3.20)$$

Оскільки варіації δy_1 і δy_2 незалежні, рівність (3.20) виконуватиметься тільки тоді, коли множники при δy_1 і δy_2 дорівнюють нулю. Таким чином, ми знову приходимо до системи

$$\begin{aligned} J_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha &= 0, \\ J_2 + N_2 \sin \alpha + P &= 0. \end{aligned}$$

а від неї – до системи (3.12).

З огляду на викладене доходимо висновку, що коли як вихідний прийняти принцип Даламбера, то з нього виводиться принцип можливих переміщень, і навпаки.

3.1.3 Принцип Гамільтона-Остроградського

Інтегральним підходом, за допомогою якого можна реалізувати ефективні алгоритми побудови рівнянь руху, є принцип Гамільтона-Остроградського. Цей варіаційний принцип виконується як для скінченномірних, так і для континуальних динамічних систем. З метою спрощення викладу розглянемо скінченномірні динамічні системи.

Принцип Гамільтона-Остроградського стверджує, що на дійсних ("прямих") шляхах виконується рівність

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta' A dt = 0, \quad (3.21)$$

де $T(t)$ - кінетична енергія системи, $U(t)$ - енергія деформації, а $A(t)$ - робота зовнішніх сил.

Треба звернути увагу на величину $\delta' A$, яка є роботою зовнішніх сил на можливих переміщеннях. $\delta' A$ на відміну від δT і δU не є варіацією деякої скалярної функції. З цієї причини знак δ' не може бути винесений за знак інтегралу.

Одержимо за допомогою принципу Гамільтона-Остроградського рівняння руху одномасової шарнірної системи, яка розглядалась вище (рис. 3.10).

Як зазначалось, у межах побудованої динамічної моделі за припущення, що масою стержня можна знехтувати, стан системи характеризується координатами $y_1(t)$, $y_2(t)$. Розширимо координатний простір y_1 , y_2 , додавши до нього третю координату t . Еволюція системи описується кривими в цьому просторі. Нехай в момент часу t_1 система знаходиться в точці $B(y_1^0(t_1), y_2^0(t_1), t_1)$, в момент часу t_2 - в точці $C(y_1^0(t_2), y_2^0(t_2), t_2)$. Під дією навантаження $P(t)$ стан системи еволюціонує по "прямому" шляху $\bar{y}^0 = (y_1^0(t), y_2^0(t))$. Варіювання траєкторії руху визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1^0(t) + \delta y_1(t), \\ y_2(t) &= y_1^0(t) + \delta y_2(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

де $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$ – достатньо гладкі функції, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} \delta y_1(t_1) &= \delta y_2(t_1) = 0, \\ \delta y_1(t_2) &= \delta y_2(t_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В момент часу t кінетична енергія системи

$$T(t) = \frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} + \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2}. \quad (3.24)$$

Потенціальна енергія деформації стержнів визначається виразом

$$U(t) = \frac{EA_1}{2l_1} (\Delta l_1)^2 + \frac{EA_2}{2l_2} (\Delta l_2)^2. \quad (3.25)$$

Пригадаємо, що

$$\Delta l_1 = y_1, \quad \Delta l_2 = y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha,$$

а також скористаємось позначеннями погонних жорсткостей при стиску-розтягу:

$$s_1 = \frac{EA_1}{l_1}, \quad s_2 = \frac{EA_2}{l_2}.$$

Тоді вираз (3.25) переписується у вигляді:

$$U(t) = \frac{s_1}{2} y_1^2(t) + \frac{s_2}{2} (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2. \quad (3.26)$$

Робота сили $P(t)$ на можливих переміщеннях

$$\delta' A(t) = P(t) \delta y_2(t). \quad (3.27)$$

Після підстановки (3.24), (3.26) і (3.27) у (3.21) одержимо:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} + \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2} \right) - \frac{1}{2} (s_1 y_1^2(t) + s_2 (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2) \right) dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} P(t) \delta y_2(t) dt = 0. \quad (3.28)$$

Рівність (3.8) переписується у вигляді

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m \dot{y}_1^2(t)}{2} dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m \dot{y}_2^2(t)}{2} dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1^2(t) dt + \\ & + \delta \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1 y_2 dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} s_2 \sin^2 \alpha y_2^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} P(t) \delta y_2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Перетворимо окремі доданки у виразі (3.29). З урахуванням властивостей операції варіювання її можна міняти місцями з диференціюванням у часі:

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta. \quad (3.30)$$

Крім того, оскільки згідно з (3.23) варіації δy_1 і δy_2 дорівнюють нулю при t_1 і t_2 , то комутують операції варіювання та інтегрування:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta. \quad (3.31)$$

Виходячи з (3.31), маємо

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) \delta y_1(t) dt, \\ & \delta \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) y_2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) \delta y_2(t) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) \delta y_1(t) dt, \\ & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} s_2 \sin^2 \alpha y_2^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) \delta y_2(t) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Використовуючи (3.30), (3.31), (3.23) і виконуючи інтегрування частинами, можна одержати:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_1^2}{2} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \delta \dot{y}_1^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}_1 \delta \dot{y}_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}_1 \frac{d}{dt} \delta y_1 dt = \\ &= m \dot{y}_1 \delta y_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{y}_1 \delta y_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{y}_1 \delta y_1) dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Аналогічно можна записати:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_2^2}{2} dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{y}_2 \delta y_2) dt. \quad (3.34)$$

З урахуванням (3.32)–(3.34) після відповідного групування рівність (3.28) записується у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-m \ddot{y}_1 - (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) + s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) \right] \delta y_1(t) + \right. \\ \left. + \left[-m \ddot{y}_2 + s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) - s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) + P(t) \right] \delta y_2(t) \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Згідно з принципом Гамільтона-Остроградського на "прямих" шляхах рівність (3.35) виконується при будь-яких варіаціях $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$, які задовольняють (3.23). Оскільки варіації $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$ незалежні, за основною лемою варіаційного числення рівняння (3.35) задовольняється в загальному випадку лише за умови, що вирази, які записані в кожних квадратних дужках, дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) - s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) &= 0, \\ m \ddot{y}_2 - s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) + s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) &= P(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона-Остроградського, ми одержали рівняння руху, які збігаються з рівняннями, отриманими за допомогою принципу Даламбера та принципа можливих переміщень.

Зазначимо, що кожен з розглянутих принципів може бути взятий за вихідний; тоді інші два можна отримати з нього.

3.1.4. Побудова рівнянь руху на основі моделей з розподіленими параметрами

В ряді задач динаміки споруд використання розрахункових схем, в яких інерційне навантаження представлено виключно зосередженими силами або моментами, як це має місце в дискретних моделях, може призвести до грубих оцінок параметрів досліджуваних динамічних процесів. У цьому разі необхідно застосовувати моделі, які мають розподілені інерційні навантаження. Іноді інерційне навантаження має комбінований характер і потребує для свого представлення поєднання розподілених та зосереджених навантажень.

При вивченні розрахункових схем, що мають розподілене інерційне навантаження, застосування методу динамічної рівноваги безпосередньо не приводить до скінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. В таких випадках найчастіше використовується принцип можливих переміщень або принцип Гамільтона-Остроградського, що реалізуються на основі прямих методів.

Принцип можливих переміщень в динамічних задачах для систем з розподіленими параметрами. Нехай розглядаються коливання шарнірно опертої балки, що має розподілену масу $m(x)$ та згинну жорсткість $EJ(x)$, під дією розподіленого навантаження $q(x,t)$ (рис.3.11).

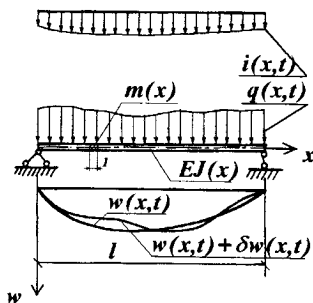


Рис.3.11

Під дією навантаження система деформується і в ній виникають моменти $M(x,t)$. Деформація характеризується параметром кривизни $\kappa(x,t)$. Коливання балки описуються функцією прогинів $w(x,t)$.

У розглядуваній моделі релізується розподілене інерційне навантаження $i(x,t)$, що направлене в додатний бік осі w і визначається за формулою

$$i(x, t) = -m(x)\ddot{w}(x, t), \quad (3.37)$$

де символ (\cdot) позначає операцію обчислення другої частинної похідної за часом. Розглянемо тепер у фіксований момент часу t нескінченно мале можливе переміщення $\delta w(x, t)$ відносно деформованого стану $w(x, t)$. На рис. 3.11 показано деформовані стани $w(x, t)$ і $w(x, t) + \delta w(x, t)$. Можливі переміщення $\delta w(x, t)$ являють собою достатньо гладкі функції x , що задовольняють геометричні граничні умови:

$$w(0, t) = w(l, t) = 0. \quad (3.38)$$

В результаті перемішень має місце варіація параметра деформації $\delta \kappa(x, t)$. Згідно з принципом можливих перемішень рух пружної системи відбувається так, що робота всіх діючих на неї зовнішніх сил, внутрішніх сил і сил інерції на будь-якому нескінченно малому переміщенні дорівнює нулю.

Виділимо в околі точки x ділянку балки довжиною dx . Розглянемо роботу всіх сил, що діють на цю ділянку в момент t на нескінченно малому переміщенні. Робота зовнішніх сил

$$\delta' A_q = q(x, t) \delta w(x, t) dx, \quad (3.39)$$

робота сил інерції

$$\delta' A_i = -m(x) \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx, \quad (3.40)$$

робота внутрішніх сил

$$\delta' A_M = -M(x, t) \delta \kappa(x, t) dx. \quad (3.41)$$

В останньому виразі знак “мінус” в правій частині ставиться тому, що внутрішні сили намагаються перешкодити переміщенням, що відбуваються під дією зовнішніх сил, оскільки внутрішні сили направлені протилежно переміщенням точок їх прикладання.

Таким чином, для розглядуваної балки математично принцип можливих перемішень записується у вигляді

$$\int_0^l q(x, t) \delta w(x, t) dx - \int_0^l m(x) \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx -$$

$$-\int_0^l M(x,t)\delta\kappa(x,t)dx=0. \quad (3.42)$$

Рівняння (3.42) є основою для побудови за допомогою прямих методів скінченної системи рівнянь, що описують коливання балки. Розглянемо сімейство лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$), що задовольняють геометричні граничні умови

$$\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=0, \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (3.43)$$

Подамо функцію переміщення $w(x,t)$ у вигляді

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^n y_i(t)\varphi_i(x), \quad (3.44)$$

де $y_i(t)$ – узагальнені координати, які є незалежними функціями часу.

Подамо варіацію переміщень $\delta w(x,t)$ у вигляді

$$\delta w(x,t)=\sum_{i=1}^n \delta y_i(t)\varphi_i(x), \quad (3.45)$$

де $\delta y_i(t)$ – довільні незалежні варіації узагальнених координат.

Застосування представлень (3.44) та (3.45) реалізує перехід від розглядуваної континуальної моделі задачі до дискретної.

Використовуючи представлення (3.44) та (3.45), прискорення $w(x,t)$, моменти $M(x,t)$ і варіації деформації можна записати так:

$$\ddot{w}(x,t)=\sum_{i=1}^n \ddot{y}_i(t)\varphi_i(x), \quad (3.46)$$

$$M(x,t)=-EJ(x)\sum_{i=1}^n y_i(t)\varphi_i''(x), \quad (3.47)$$

$$\delta\kappa(x,t)=-\sum_{i=1}^n \delta y_i(t)\varphi_i''(x), \quad (3.48)$$

де символ (") позначає операцію обчислення другої похідної.

Значимо, що для зручності викладок у виразах (3.46) та (3.47) порівняно з виразом (3.44) змінено позначення індексу, за яким виконується додавання. Така заміна законна і часто застосовуватиметься далі.

Підставляючи (3.44) – (3.48) в рівняння (3.42), одержуємо:

$$\int_0^l q(x,t) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx - \int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \ddot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx - \int_0^l EJ(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx = 0. \quad (3.49)$$

Рівняння (3.49) переписується так:

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^l m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) \ddot{y}_j(t) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^l EJ(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx \right) y_j(t) - \int_0^l q(x,t) \varphi_i(x) dx \right] \delta y_i(t) = 0. \quad (3.50)$$

Введемо:

- матрицю мас

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad ; \quad (3.51)$$

- матрицю жорсткості

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$k_{ij} = \int_0^l EJ(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx, \quad (3.52)$$

- вектор узагальнених навантажень

$$\bar{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T,$$

де

$$q_i = \int_0^l q(x,t) \varphi_i(x) dx; \quad (3.53)$$

- вектор узагальнених сил інерції

$$\bar{\mathbf{f}}_i = -\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}, \quad (3.54)$$

- вектор узагальнених пружних сил

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}, \quad (3.55)$$

де $\bar{\mathbf{y}}(t)$ – вектор узагальнених координат

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T.$$

При нових позначеннях рівняння (3.50) записується у вигляді

$$(\bar{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{f}}_i(t) - \bar{\mathbf{f}}_i(t)) \cdot \delta\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (3.56)$$

де $\delta\bar{\mathbf{y}}(t)$ – варіація вектора узагальнених координат,

$$\delta\bar{\mathbf{y}}(t) = (\delta y_1(t), \delta y_2(t), \dots, \delta y_n(t))^T.$$

Рівняння (3.56) являє собою запис принципу можливих переміщень для випадку узагальнених сил та узагальнених переміщень. Це рівняння аналогічне рівнянню

$$(\bar{\mathbf{n}}_i + \bar{\mathbf{n}}_2 + \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{j}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{r}} = 0,$$

яке сформульоване для дискретних систем.

Оскільки варіації компонент $\delta y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) вектора $\delta\bar{\mathbf{y}}$ незалежні, рівність (3.56) може виконуватися тільки тоді, коли перший множник скалярного добутку тотожно дорівнює нулю:

$$\bar{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{f}}_i(t) - \bar{\mathbf{f}}_i(t) = 0. \quad (3.57)$$

З урахуванням (3.54) і (3.55) система (3.57) набуває вигляду

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t). \quad (3.58)$$

Одержана система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку являє собою дискретну модель вихідної континуальної задачі.

Підхід, що застосовувався, називають узагальненим методом Гальоркіна. У класичному методі Гальоркіна, на відміну від викладеного раніше, система базисних функцій $\phi_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) має задовольняти не тільки геометричні, а й силові граничні умови.

Застосування принципу Гамільтона- для систем з розподіленими параметрами. Формально принцип Гамільтона-Остроградського для скінченномірних та розподілених динамічних систем записується одним і тим же рівнянням:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta' A dt = 0, \quad (3.59)$$

де T – кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи, яка включає енергію деформації та потенціал консервативних зовнішніх сил; $\delta' A$ – робота неконсервативних сил на можливих переміщеннях.

Проте в розподілених системах на відміну від скінченномірних при фіксованому t кінетична енергія, потенціальна енергія і робота неконсервативних сил є не функціями, а функціоналами; віртуальна варіація функцій, що визначають стан системи в кожний момент часу залежить від просторових змінних і задовольняє геометричні граничні умови. При $t=t_1$ і $t=t_2$ віртуальні варіації дорівнюють нулю.

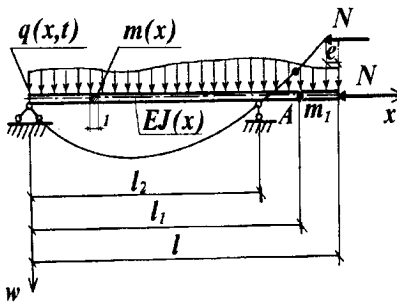


Рис. 3.12

Кінетична енергія балки

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{w}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} m_1 (\dot{w}(l_1,t))^2 dx, \quad (3.60)$$

Розглянемо балку, яку зображено на рис. 3.12. Балка має розподілену масу $m(x)$ і згинну жорсткість $EJ(x)$. В точці A балка несе точкову масу m_1 . На балку діє розподілене поперечне динамічне навантаження $q(x,t)$ і зосереджена поздовжня сила N . Коливання балки описуються функцією прогинів $w(x,t)$. Побудуємо відповідне рівняння коливань.

де символ (\cdot) позначає операцію диференціювання по t .

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії згинної деформації $U_w(t)$ та потенціальної енергії $U_N(t)$ осьового навантаження N :

$$U(t) = U_w(t) + U_N(t).$$

Потенціальна енергія згинної деформації

$$U_w(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (w''(x,t))^2 dx, \quad (3.61)$$

де символ (\cdot) позначає операцію диференціювання по x .

Потенціальна енергія осьового навантаження (робота, яку може виконати сила N при деформації системи)

$$U_N(t) = N[l - e(t)], \quad (3.62)$$

де $e(t)$ – горизонтальна складова руху правого кінця балки, $l - e(t)$ – це шлях, який може пройти сила N при збільшенні $e(t)$.

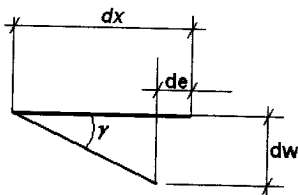


Рис. 3.13

Можна показати (рис. 3.13), що горизонтальне переміщення правого кінця балки в процесі згинних коливань визначається виразом

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (3.63)$$

Дійсно,

$$de = dz(1 - \cos \gamma) \cong dz \left(1 - 1 + \frac{\gamma^2}{2} \right) = \frac{\gamma^2}{2} dz,$$

і, оскільки

$$\frac{dw}{dx} = \text{tg} \gamma \cong \gamma,$$

то

$$de \cong \frac{1}{2} (w')^2 dz,$$

звідки

$$e(t) = \int_0^l de = \frac{1}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx.$$

Таким чином,

$$U_N(t) = -\frac{N}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (3.64)$$

Робота неконсервативних сил на можливих переміщеннях характеризується співвідношенням

$$\delta A(t) = \int_0^l q(x,t) \delta w(x,t) dx. \quad (3.65)$$

Після підстановки (3.60), (3.61), (3.64) і (3.65) у (3.59) та виконання операцій варіювання одержимо

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \int_0^l m(x) \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) dx + m_1 \dot{w}(l_1,t) \delta \dot{w}(l_1,t) - \\ & - \int_0^l EJ(x) w''(x,t) \delta w''(x,t) dx + N \int_0^l w'(x,t) \delta w'(x,t) dx + \\ & + \int_0^l q(x,t) \delta w(x,t) dx \Big] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Виходячи з рівняння (3.66) за допомогою методу Рітца будуюмо скінченну систему рівнянь. Система базисних функцій $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) повинна задовольняти геометричні граничні умови:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l_2) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.67)$$

Функція переміщення має вигляд

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \varphi_i(x). \quad (3.68)$$

Використовуючи (3.68), розпишемо варіації всіх функцій у виразі (3.66):

$$\begin{aligned}
 \delta w(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x), \\
 \delta \dot{w}(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x), \\
 \delta w'(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi'_i(x), \\
 \delta w''(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi''_i(x).
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Зазначимо, що

$$\delta y_i(t_1) = \delta y_i(t_2) = 0.$$

З урахуванням (3.68) і (3.69) вираз (3.66) переписується так:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x) \right) dx + \right. \\
 & \quad \left. + m_1 \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(l_1) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(l_1) \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^l EJ(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx + \right. \\
 & \quad \left. + N \int_0^l \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi'_j(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi'_i(x) \right) dx + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^l q(x, t) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x) \right) dx \right] dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Тепер виконуючи інтегрування частинами та використовуючи позначення

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx,$$

запишемо таку послідовність рівностей:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x) \right) dx \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \delta \dot{y}_i dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \frac{d}{dt} \delta y_i(t) dt = \\
 &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \delta y_j \delta \dot{y}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j(t) \right) \delta y_i dt. \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\bar{m}_{ij} = m_{ij} \varphi_i(l_1) \varphi_j(l_1), \quad (3.72)$$

$$k_{Gij} = N \int_0^l \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx. \quad (3.73)$$

Аналогічно (3.71) можна записати:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} m_{ij} \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(l_1) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(l_1) \right) dt = \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij} \dot{y}_j(t) \right) \delta y_i(t) dt. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Використовуючи позначення

$$k_{ij} = \int_0^l EJ(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx, \quad q_i = \int_0^l q(x, t) \varphi_i(x) dx.,$$

а також (3.73), запишемо такі вирази:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EJ(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} y_j(t) \right) \delta y_i dt, \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j'(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i'(x) \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{Gij} y_j(t) \right) \delta y_i dt, \quad (3.76)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l q(x, t) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n q_i \delta y_i(t) \right) dt. \quad (3.77)$$

З урахуванням (3.71), (3.74) – (3.77) рівняння (3.70) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[-\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j - \sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij} \ddot{y}_j - \sum_{j=1}^n k_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n k_{Gij} y_j + q_i \right] \delta y_j(t) dt = 0. \quad (3.78)$$

Введемо:

- матрицю геометричної жорсткості

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} k_{G11} & k_{G12} & \dots & k_{G1n} \\ k_{G21} & k_{G22} & \dots & k_{G2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{Gn1} & k_{Gn2} & \dots & k_{Gnn} \end{pmatrix},$$

- матрицю узагальнених мас, що відповідає дискретній масі m_1 :

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} & \dots & \hat{m}_{1n} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & \dots & \hat{m}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{m}_{n1} & \hat{m}_{n2} & \dots & \hat{m}_{nn} \end{pmatrix}.$$

- вектор узагальнених сил інерції

$$\bar{\mathbf{f}}_I = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}}, \quad (3.79)$$

- вектор узагальнених пружних сил

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{K}_G\bar{\mathbf{y}}. \quad (3.80)$$

В нових позначеннях рівняння (3.78) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} (\bar{\mathbf{f}}_I(t) - \bar{\mathbf{f}}_s(t) + \bar{\mathbf{q}}(t)) \cdot \delta \mathbf{y}(t) dt = 0. \quad (3.81)$$

Звідки, зважаючи на довільність компонент вектора $\delta \mathbf{y}$, за основою лемою варіаційного числення одержуємо систему рівнянь

$$\bar{\mathbf{f}}_I(t) - \bar{\mathbf{f}}_s(t) + \bar{\mathbf{q}}(t) = 0. \quad (3.82)$$

З урахуванням (3.79) і (3.80) система (3.82) набуває у вигляду

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{K}_G\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{q}}. \quad (3.83)$$

Отже, застосування принципу Гамільтона-Остроградського дозволило одержати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка являє собою дискретну модель вихідної континуальної задачі.

Побудова рівнянь руху системи з одним ступенем вільності на основі розподілених моделей. Розглянемо виведення рівняння коливань консольної башти під дією вітрового навантаження (рис. 3.14).

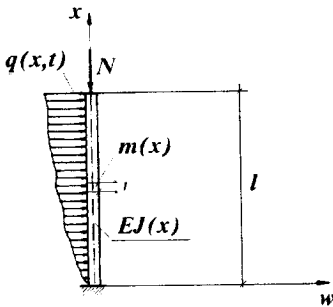


Рис. 3.14

Погонну масу задано функцією $m(x)$, згинну жорсткість – функцією $EJ(x)$. Розподілене вітрове навантаження задається функцією $q(x,t)$. Крім того, вважаємо, що балка сприймає постійне вертикальне навантаження N , яке прикладається зверху. Прогин осі балки визначається функцією $w(x,t)$.

Щоб одержати рівняння руху, застосуємо принцип Гамільтона-Остроградського для розподілених систем, який було викладено в попередньому параграфі.

Принцип Гамільтона-Остроградського записується у вигляді

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - U(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta' A dt = 0. \quad (3.84)$$

Кінетична енергія башти

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{w}(x,t))^2 dx. \quad (3.85)$$

Повна потенціальна енергія системи U дорівнює сумі потенціальної енергії деформації згину і потенціальної енергії осьової сили:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l M(x,t) \kappa(x,t) dx + N(l - e(t)) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (w''(x,t))^2 dx + Nl - \frac{N}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

Робота зовнішніх сил

$$A(t) = \int_0^l q(x,t) w(x,t) dx. \quad (3.87)$$

Приймемо одночленну апроксимацію функції $w(x,t)$:

$$w(x,t) = y(t)\varphi(x), \quad (3.88)$$

де $\varphi(x)$ – базисна функція, що задовольняє геометричні граничні умови

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (3.89)$$

Якщо віднормувати функцію $\varphi(x)$ так, щоб $\varphi(l) = 1$, то узagalьнена координата $y(t)$ описуватиме коливання вершини башти. Після підстановки (3.85)–(3.87) у (3.84) та виконання операцій варіювання одержимо

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l \int_0^t m(x,t) \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) dx - \int_0^l EI(x) w''(x,t) \delta w''(x,t) dx + \\
 &+ N \int_0^l w'(x,t) \delta w'(x,t) dx + \int_0^l q(x,t) \delta w(x,t) dx \Big] dt = 0. \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

З урахуванням апроксимації (3.88) можна записати такі вирази:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}(x,t) &= \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{y}(t)\varphi(x), \\
 w'(x,t) &= \frac{\partial w}{\partial x} = y(t)\varphi'(x), \\
 w''(x,t) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y(t)\varphi''(x), \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w(x,t) &= \delta y(t)\varphi(x), & \delta \dot{w}(x,t) &= \delta \dot{y}(t)\varphi(x), \\
 \delta w'(x,t) &= \delta y(t)\varphi'(x), & \delta w''(x,t) &= \delta y(t)\varphi''(x).
 \end{aligned}$$

Підставляючи (3.91) у (3.90), одержуємо

$$\int_0^l \left[\delta y \int_0^l m(x) (\varphi(x))^2 dx - y \delta y \int_0^l EJ(x) (\varphi''(x))^2 dx + N y \delta y \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx + \delta y \int_0^l q(x, t) \varphi(x) dx \right] dt = 0. \quad (3.92)$$

Після інтегрування частинами першого члена рівняння (3.92) воно набере вигляду

$$\int_0^l [\tilde{m} \ddot{y} + k y - k_G y - p(t)] \delta y dt = 0, \quad (3.93)$$

де

$$\tilde{m} = \int_0^l m(x) (\varphi(x))^2 dx \quad - \text{узагальнена маса,}$$

$$k = \int_0^l EJ(x) (\varphi''(x))^2 dx \quad - \text{узагальнена жорсткість,}$$

$$k_G = N \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx \quad - \text{узагальнена геометрична жорсткість,}$$

$$p(t) = \int_0^l q(x, t) \varphi(x) dx \quad - \text{узагальнене навантаження.}$$

Внаслідок довільності варіації $\delta y(t)$ вираз в квадратних дужках у рівнянні (3.93) дорівнює нулю. Таким чином, одержимо рівняння руху

$$\tilde{m} \ddot{y}(t) + \tilde{k} y(t) = p(t), \quad (3.94)$$

де $\tilde{k} = k - k_G$ - сумарна жорсткість.

Запишемо рівняння (3.94) у вигляді

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{\tilde{m}}, \quad (3.95)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}. \quad (3.96)$$

Для повної постановки розглядуваної задачі рівняння (3.94) слід доповнити початковими умовами. Якщо вважати, що в

початковий момент часу $t=0$ відомі переміщення та швидкості точок, які знаходяться на осі башти,

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad (3.97)$$

та їх швидкості

$$\dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x),$$

то початкові умови для (3.94) визначаються співвідношеннями

$$y(0) = \int_0^l w_0(x) \varphi(x) dx, \quad (3.98)$$

$$\dot{y}(0) = \int_0^l \dot{w}_0(x) \varphi(x) dx. \quad (3.99)$$

Найчастіше зустрічаються такі два варіанти постановки розглядуваної задачі.

В першій постановці вважається, що в початковий момент часу башта знаходиться у стані спокою, тобто

$$w_0(x) \equiv 0, \quad \dot{w}_0(x) \equiv 0,$$

що приводить до початкових умов

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (3.100)$$

У другій постановці розглядається режим усталених коливань, коли початкові умови не мають істотного значення.

3.2 Деякі питання щодо коливань системи з одним ступенем вільності

3.2.1 Реакція системи з одним ступенем вільності на довільне імпульсивне навантаження малої тривалості

Розглянемо систему, яку зображено на рис.3.15. Балка OA має сталу жорсткість EI та несе на кінці зосереджену дискретну масу m . Вважатимемо балку безмасовою. За таких зроблених припущень розглядувану систему можна подати у вигляді моделі з одним

ступенем вільності. Характер руху системи цілком визначатиметься вертикальними переміщеннями $y(t)$ зосередженої маси.

Застосуємо до балки принцип Даламбера в поєднанні з методом сил. Переміщення точки A запишеться у вигляді

$$y(t) = \delta_{11}(J(t) + P(t)), \quad (3.101)$$

де δ_{11} – коефіцієнт піддатливості, що є переміщенням точки A при дії вертикальної одиничної сили, $J(t) = -m\ddot{y}(t)$ – сила інерції.

Перепишемо рівняння (3.101) у такому вигляді:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}, \quad (3.102)$$

де ω – частота вільних коливань, яка визначається за відомою з учбового курсу [5] формулою

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (3.103)$$

Рівність (3.102) є рівнянням руху маси в системі з одним ступенем вільності при дії зовнішньої сили $P(t)$, що змінюється з часом.

На першому етапі при $t \in [0, t_1]$ система здійснює вимушені коливання, які описуються рівнянням (3.102) при нульових початкових умовах $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

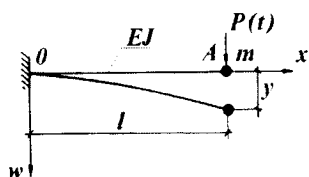


Рис. 3.15

На другому етапі при $t > t_1$ система перебуває в режимі вільних коливань, що визначається рівнянням

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (3.104)$$

а також переміщенням $y(t_1)$ та швидкістю $\dot{y}(t_1)$, які отримала маса наприкінці першого етапу [5]:

$$y_{II}(\bar{t}) = \frac{\dot{y}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + y(t_1) \cos \omega \bar{t}, \quad (3.105)$$

де $\bar{t} = t - t_1$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння (3.102) в інтервалі від 0 до t_1 :

$$\int_0^{t_1} \ddot{y}(t) dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{P(t)}{m} - \omega^2 y(t) \right) dt,$$

або оскільки $\dot{y}(0)=0$,

$$\dot{y}(t_1) = \int_0^{t_1} \left(\frac{P(t)}{m} - \omega^2 y(t) \right) dt, \quad (3.106)$$

При малих величинах t справедливо (пам'ятаємо про нульові початкові умови)

$$P(t) = P_0 + t\dot{P}_0 + \dots, \quad y(t) = y_0 + t\dot{y}_0 + \frac{1}{2}t^2\ddot{y}_0 + \dots = \frac{1}{2}t^2\ddot{y}_0 + \dots, \\ \dot{y}(t) = \dot{y}_0 + t\ddot{y}_0 + \dots = t\ddot{y}_0 + \dots \quad (3.107)$$

Отже, при малих t переміщення маси $y(t)$ являє собою величину порядку $(t_1)^2$. Оскільки навіть при $P_0=0$ імпульсивне навантаження є величиною порядку t , то внесок доданка $-\omega^2 y(t)$ у величину підінтегрального виразу є дуже малим і швидко зменшується при наближенні t_1 до нуля.

Таким чином, для малих t_1 можна приблизно записати:

$$\dot{y}(t_1) \approx \int_0^{t_1} \frac{P(t)}{m} dt = \frac{G}{m}, \quad (3.108)$$

де $G = \int_0^{t_1} P(t) dt$ - імпульс сили.

На другому етапі система здійснює вільні коливання (3.105).

Оскільки при невеликих t_1 переміщенням $y(t_1)$ можна знехтувати, то (3.105) можна приблизно замінити на вираз

$$y_{II}(\bar{t}) \cong \frac{G}{m\omega} \sin \omega \bar{t}. \quad (3.109)$$

Таким чином, при імпульсивному навантаженні невеликої тривалості t_1 реакція системи неістотно залежить від закону зміни навантаження, а визначається її імпульсом.

Розглянемо тепер граничний випадок. Спрямуємо $t_1 \rightarrow 0$, зберігаючи незмінним імпульс G , тобто вважаючи імпульсивний вплив миттєвим. Така постановка являє собою ідеалізовану модель, за до-

помогою якої можна аналізувати реакцію системи на імпульсивний вплив, тривалість якого зменшується, а інтенсивність зростає так, що інтеграл (3.108) залишається незмінним.

В результаті граничного переходу згідно з (3.109), (3.108) будемо мати

$$y(t) = \frac{G}{m\omega} \sin \omega t, \quad \dot{y}_0 = \frac{G}{m}, \quad (3.111)$$

З огляду на вираз (3.105) можна дійти висновку, що функція $y(t)$ описує вільні коливання системи при початкових умовах

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{G}{m}. \quad (3.112)$$

Таким чином, миттєвий імпульс G надає масі, що перебуває в стані спокою, швидкість, яка дорівнює G/m .

На завершення звернемося до питання про врахування дисипації енергії. Раніше, описуючи рух під дією імпульсивного навантаження, ми нехтували силами опору руху. При малих t_1 це істотно не позначається на точності оцінки реакції $y(t)$ системи. Однак на другому етапі руху розсіювання енергії призведе до поступового затухання процесу коливань системи.

Неважко показати [5], що реакція системи на миттєвий імпульс при врахуванні демпфірування визначається, виходячи з початкових умов (3.112) за допомогою представлення

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \frac{G}{m\omega_D} \sin \omega_D t, \quad (3.113)$$

де $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$, ξ – параметр затухання,

$$\xi = \frac{c}{2m\omega}, \quad c - \text{ стала затухання.}$$

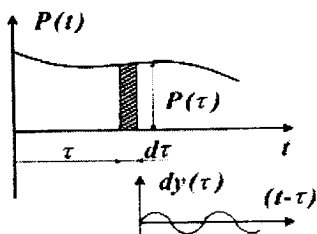


Рис. 3.16

3.2.2 Реакція системи з одним ступенем вільності на навантаження загального вигляду

Нехай на балку, що показана на рис. 3.15, діє навантаження $P(t)$ загального вигляду, зображене на рис. 3.16. Початкові умови вважаємо нульовими.

Реакція системи описується рівнянням

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_D \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t), \quad (3.114)$$

з початковими умовами y_0 і \dot{y}_0 .

Реакція розглядуваної системи на одиничний миттєвий імпульс ($G=1$) згідно з (3.113) записується у вигляді

$$\Phi(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin \omega_D t. \quad (3.115)$$

Графік функції $\Phi(t)$ зображено на рис. 3.17.

Навантаження $P(t)$ можна подати у вигляді суми елементарних імпульсів $dG = P(\tau)d\tau$ (рис. 3.16). Реакція на імпульс $P(\tau)d\tau$ при $t > \tau$

$$d\psi(t) = dG\Phi(t-\tau) = P(\tau)d\tau\Phi(t-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau). \quad (3.116)$$

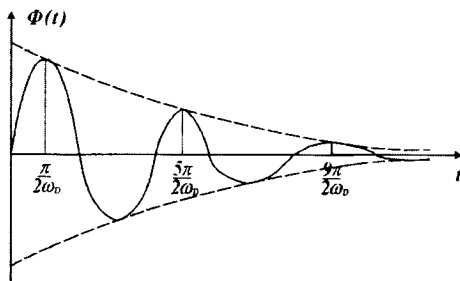


Рис. 3.17

У цьому виразі член $d\psi(t)$ являє собою диференціал реакції при диференціалі імпульсу для всього періоду часу $t > \tau$. Повну реакцію пружно-лінійної системи можна одержати, підсумовуючи всі

диференціальні реакції від 0 до t , що приводить до інтегрування виразу (3.116):

$$y_p(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau. \quad 3.117$$

Інтеграл (3.117) називається інтегралом Дюамеля.

Зауважимо, що всі імпульси діють незалежно, причому кожен з них починає свою дію за нульових початкових умов, а внески всіх імпульсів складають. Тобто реакції накладаються одна на одну.

3.2.3 Урахування розсіювання енергії при коливаннях пружних систем

Відомо, що коливання реальної конструкції супроводжуються різними процесами, які приводять до того, що частина енергії, яку нагромаджено первісно, переходить у теплову енергію тих чи інших елементів конструкції і потім розсіюється. При вільних коливаннях це зумовлює режим затухання.

Причини розсіювання енергії можна умовно поділити на дві категорії – зовнішні та внутрішні. До зовнішніх причин належить тертя системи, що коливається, у середовищі, в якому відбуваються коливання (повітря, вода тощо). Внутрішні причини пов'язані з властивостями матеріалу та конструкції. Необхідно зазначити, що іноді в коливальну систему вводять спеціальні демпфіруючі пристрої, які призначені для гасіння коливань. Для будівельних конструкцій головну роль відіграють сили внутрішнього опору, що пов'язані з пружними недосконаlostями матеріалу пружного елемента конструкції. Через складність та різноманітність факторів, що впливають на розсіяння енергії в матеріалі, не існує єдиної теорії урахування цих сил опору. Розглянемо дві такі теорії: модель в'язкопружного демпфірування матеріалу та модель непружного поглинання енергії.

Модель в'язкопружного демпфірування. Модель в'язкопружного демпфірування матеріалу запропонував В.Фойгт. Ця модель дістала великого поширення і широко застосовується незважаючи на те що, як з'ясувалося, вона має істотні недоліки.

Закон в'язкопружності, за гіпотезою В.Фойгта, записується як узагальнення закону Гука:

$$\sigma = E\varepsilon + \nu E\dot{\varepsilon}, \quad (3.118)$$

де E – модуль пружності, ν – коефіцієнт, що характеризує в'язкість матеріалу, $\dot{\varepsilon}$ – швидкість зміни деформації з часом.

Вказана модель в'язкопружного тіла стає наочною, якщо подати її у вигляді комбінації двох найпростіших елементів – пружного і в'язкого (рис. 3.18).

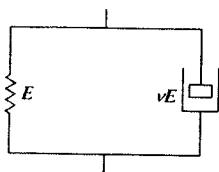


Рис. 3.18

Пружний елемент має вигляд пружини з лінійною характеристикою, тобто $\sigma_S = E\varepsilon$. Як зазначалось вище, в'язкий елемент являє собою циліндр з в'язкою рідиною, в якому переміщується поршень із зазором уздовж стінки циліндра, завдяки чому рідина може перетікати з однієї частини циліндра в іншу. Якщо сила ε

сталого, поршень переміщується зі сталою швидкістю, або, інакше кажучи, $\sigma_D = \nu E\dot{\varepsilon}$. В моделі Фойгта підсумовуються напруження в елементах, а їх деформації однакові. Така картина спостерігається тоді, коли елементи з'єднано паралельно. Співвідношення (3.118) можна записати як суму пружного σ_S та в'язкого σ_D напружень:

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D. \quad (3.119)$$

Розглянемо консольну балку OA , що має сталу жорсткість EI . На правому кінці балки прикладено змінну силу $P(t)$ (рис. 3.19,а). Дія цієї сили зумовить рух балки $w(x,t)$. Будемо вважати, що при аналізі напружено-деформованого стану сили інерції можна не враховувати.

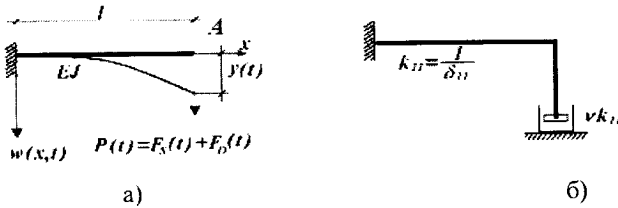


Рис.3.19.

Тоді рух системи визначається зовнішньою силою, пружними деформаціями та опором руху. Складемо рівняння рівноваги у точці A :

$$P(t) = F_S(t) + F_D(t), \quad (3.120)$$

де $F_S(t)$, $F_D(t)$ – відповідно пружна та дисипативна складова реакції.

Пружна складова реакції

$$F_S(t) = \frac{1}{\delta_{11}} y(t), \quad (3.121)$$

де δ_{11} – коефіцієнт податливості, $y(t)$ – вертикальне переміщення точки A .

З огляду на (3.118) сили $F_S(t)$ і $F_D(t)$ пов'язані співвідношенням

$$F_D(t) = v \dot{F}_S(t), \quad (3.122)$$

яке з урахуванням (3.121) переписується у вигляді

$$F_D(t) = \frac{v}{\delta_{11}} \dot{y}(t). \quad (3.123)$$

Співвідношення (3.121) і (3.123) показують, що реакцію в точці A можна пов'язати з двома елементами: лінійно-пружною балкою, яка має жорсткість $k_{11} = \delta_{11}^{-1}$, і в'язким елементом, який має характеристику в'язкості vk_{11} (рис. 3.19,б).

Нехай зовнішня сила така, що точка A переміщується за гармонічним законом з частотою ω_b і амплітудою ρ_b :

$$y(t) = \rho_b \sin \omega_b t. \quad (3.124)$$

Тоді

$$F_S(t) = \frac{1}{\delta_{11}} y = \frac{\rho_b}{\delta_{11}} \sin \omega_b t = F_S^0 \sin \omega_b t, \quad (3.125)$$

$$F_D(t) = \nu \dot{F}_S(t) = \frac{\nu}{\delta_{11}} \rho_b \omega_b \cos \omega_b t = F_D^0 \cos \omega_b t, \quad (3.126)$$

де

$$F_S^0 = \frac{\rho_b}{\delta_{11}}, \quad (3.127)$$

$$F_D^0 = \frac{\nu}{\delta_{11}} \rho_b \omega_b. \quad (3.128)$$

Величини F_S^0 і F_D^0 називаються амплітудою сили відповідно пружної та непружної.

Використовуючи рівність $\sin^2 \omega_b t + \cos^2 \omega_b t = 1$, із співвідношень (3.125) та (3.126) одержуємо рівняння еліпса

$$\left(\frac{F_D}{F_D^0} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_b} \right)^2 = 1. \quad (3.129)$$

На рис. 3.20 показано графіки зміни сил $F_D(t)$, $F_S(t)$ і $P(t) = S(t) + F(t)$ при циклічній зміні прогину $y(t)$. Як видно з виразів (3.125) і (3.126) в'язка і пружна сили змінюються з часом із зсувом на чверть періоду. Робота пружної сили $F_S(t)$ за повний цикл коливань дорівнює нулю. Робота сили $F_D(t)$ дорівнює площі еліпса

$$\Delta U = \pi F_D^0 \rho_b. \quad (3.130)$$

Така кількість енергії витрачається на кожному циклі коливань для подолання в'язкого опору. Величина $U_{\rho_b} = \frac{F_S^0}{2} \rho_b$ являє собою енергію деформації, що відповідає прогину $y = \rho_b$.

Відношення

$$\psi = \frac{\Delta U}{U_{\rho_b}} = 2\pi\nu\omega_b \quad (3.131)$$

називається коефіцієнтом поглинання енергії коливань.

Якщо в точці A розмістити масу m , одержимо систему, вільні коливання якої розглядалися раніше. Проте тепер стала затухання c пов'язана з коефіцієнтом ν , який характеризує в'язкість матеріалу, співвідношенням

$$c = \frac{\nu}{\delta_{11}}. \quad (3.132)$$

При вільних коливаннях енергія ΔU , що витрачається на кожному циклі коливань, може компенсуватися тільки за рахунок зменшення кінетичної енергії системи. Це й зумовлює затухання вільних коливань з часом.

Згідно з (3.132) параметр затухання ξ буде визначатись наступним чином

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{\nu\omega}{2}, \quad (3.133)$$

а для логарифмічного декременту коливань одержимо співвідношення

$$\delta = \pi\nu\omega. \quad (3.134)$$

Таким чином, модель Фойгта приводить до лінійної залежності логарифмічного декременту від частоти. В цьому розумінні кажуть, що гіпотеза в'язкого опору дає ефект частотозалежного внутрішнього тертя. Водночас численні експерименти показують, що для даного матеріалу та максимального рівня напруження, при яких відбуваються коливання, значення декременту залишається практично незмінним. Фактично внутрішнє тертя в матеріалі є частотнонезалежним. Ця суперечність і зумовила появу інших моделей внутрішнього тертя.

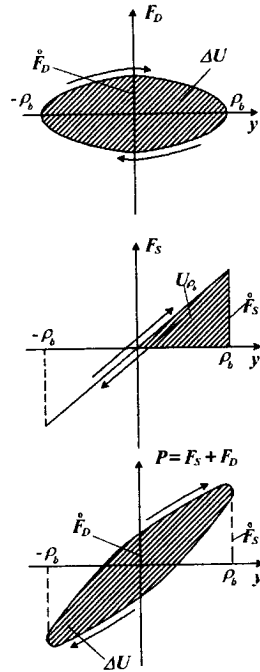


Рис 3.20

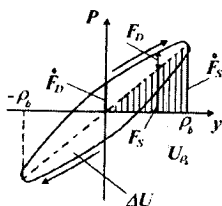


Рис. 3.21

між силою P і переміщенням y у описується петлею гістерезису, яка для гармонічних коливань має форму вузького еліпса (рис. 3.21).

Друге положення стверджує, що силу P можна подати у вигляді суми пружної сили F_S і сили непружного опору F_D

$$P(t) = F_S(t) + F_D(t), \quad (3.135)$$

які змінюються з часом циклічно із зсувом по фазі: їх амплітудні значення $\pm F_S$ і $\pm F_D$ досягаються в моменти, що віддалені один від одного на чверть періоду.

Слід зазначити, що ці два положення виконуються і в межах гіпотези Фойгта (рис. 3.21). Проте принципова відмінність полягає в тому, що в теорії непружного поглинання енергії сила непружного опору $F_D(t)$ не пов'язана з в'язкістю і не залежить від частоти коливань.

Площа петлі гістерезису ΔU пропорційна необоротній частині роботи внутрішніх сил за один цикл. Для еліптичної петлі гістерезису згідно з (3.130) $\Delta U = \pi F_D \rho_b$. Ця робота дорівнює енергії, яка поглинається за один цикл за рахунок недосконалостей матеріалів реальних конструкцій. Площа заштрихованого трикутника на рис. 3.21 пропорційна роботі U пружних сил за чверть циклу при зростанні деформації від 0 до максимуму ρ_b . Ця робота дорівнює амплітудному значенню потенціальної енергії деформацій. Коефіцієнт поглинання

$$\psi = \frac{\Delta U}{U \rho_b} = \frac{\pi F_D \rho_b}{0,5 \cdot F_S \rho_b} = 2\pi \frac{F_D}{F_S} = 2\pi\gamma, \quad (3.136)$$

де $\gamma = \frac{F_D}{F_S}$ – відношення амплітуд непружної та пружної сили, що

називається коефіцієнтом непружного опору.

Експериментально підтверджено, що коефіцієнти ψ і γ не залежать від частоти коливань і можуть бути характеристикою внутрішнього тертя. В гіпотезі Фойгта вихідною характеристикою матеріалу, що враховує внутрішнє тертя, є коефіцієнт в'язкості ν , який не залежить від частоти коливань, проте в моделях, що будуються на базі цієї гіпотези, коефіцієнт поглинання ψ_ν і логарифмічний декремент δ_ν залежать від частоти. У межах теорії непружного поглинання енергії можна реалізувати як би протилежний підхід. Вихідною характеристикою матеріалу, яка враховує внутрішнє тертя, приймається коефіцієнт непружного опору γ , що не залежить від частоти коливань, і вводиться умовний коефіцієнт в'язкості ν_γ . Він вибирається так, щоб при $\nu = \nu_\gamma$ коефіцієнт ψ_ν , що визначається співвідношенням (3.131), дорівнював коефіцієнту ψ , який обчислюється за формулою (3.136). Прирівнюючи (3.131) і (3.136), одержуємо

$$\nu_\gamma = \frac{\gamma}{\omega_b}, \quad (3.137)$$

де ω_b – частота гармонічних коливань, яка дорівнює ω_D при вільних коливаннях і частоті зовнішнього впливу при вимушених коливаннях. Тепер коефіцієнт κ_ν не є фізичною константою матеріалу і залежить від частоти. Підставляючи (3.137) у (3.134), при частоті $\omega_b = \omega_D \approx \omega$ одержуємо

$$\delta = \pi \nu_\gamma \omega = \pi \gamma. \quad (3.138)$$

Таким чином у розглядуваному підході виявляється, що логарифмічний декремент є сталою частотно незалежною величиною.

Вказаний підхід обґрунтований для гармонічних коливань, але їм користуються також при циклічних коливаннях, близьких до гармонічних. Значення коефіцієнта непружного опору γ для будівельних конструкцій наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Конструкції	Значення γ
Сталеві мости	0.0270
Сталеві димові труби	0.0175
Залізобетонні ребристі перекриття	0.0910
Залізобетонні балки	0.0890
Залізобетонні рами	0.0610
Дерев'яні клеєні балки	0.0190

3.2.4 Динаміка системи з одним ступенем вільності при кінематичному впливі

Розглянемо реакцію системи, зображеної на рис. 3.22,а, на кінематичне збудження опор. Будемо вважати, що ригель має масу m і є абсолютно жорстким. Нехай жорсткість невагомих пружних стійок дорівнює EI , довжина стійки – l . Якщо коливання ґрунту характеризується горизонтальним переміщенням, а зміщення ґрунту під кожною опорою однакове, то розрахункова модель, має один ступінь вільності, що визначає горизонтальні переміщення ригеля.

При кінематичному збудженні основи рух пружної системи зручно описувати в змінних переносного і відносного руху. Для цього введемо нерухому вісь, рух ґрунту відносно якої визначається функцією $y_g(t)$, а рух ригеля – функцією $y^a(t)$. Ригель зміщується не тільки відносно нерухомої осі, але також внаслідок пружності стійок відносно ґрунту. Це зміщення визначається функцією $y(t)$.

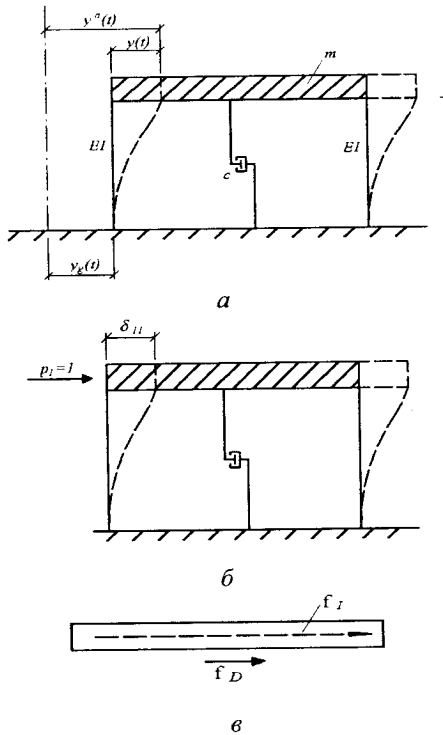


Рис. 3.22

Таким чином, абсолютний рух ригеля $y^a(t)$ складається з переносного руху $y_g(t)$ і відносного руху $y(t)$:

$$y^a(t) = y_g(t) + y(t) . \quad (3.139)$$

Саме рух $y(t)$, що описує взаємне зміщення елементів пружної системи, визначає пружні сили і сили опору руху, що супроводжують коливальний процес. Побудуємо рівняння руху ригеля на основі принципу Даламбера у поєднанні з методом сил:

$$y(t) = \delta_{11}(j(t) + f_D(t)) \quad (3.140)$$

де δ_{11} – коефіцієнт піддатливості, який дорівнює горизонтальному переміщенню ригеля від дії одиничної горизонтальної сили при нерухомому ґрунті (рис. 3.22,б)

$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{3EI} \quad (3.141)$$

У рівнянні (3.140) $j(t)$ – сила інерції, а $f_D(t)$ – сила опору руху, що діє на ригель (рис. 3.22,в).

Сила інерції $j(t)$ визначається абсолютним прискоренням руху ригеля

$$j(t) = -m\ddot{y}^a(t), \quad (3.142)$$

а сила опору руху $f_D(t)$ – відносною швидкістю руху ригеля:

$$f_D(t) = -c\dot{y}(t), \quad (3.143)$$

де c – стала затування.

Підставляючи рівняння (3.142) і (3.143) у (3.140), запишемо

$$m\ddot{y}^a(t) + c\dot{y}(t) + \frac{1}{\delta_{11}}y(t) = 0. \quad (3.144)$$

Оскільки переносний рух є поступальним, то із співвідношення (3.139) витікає, що

$$\ddot{y}^a(t) = \ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t). \quad (3.145)$$

З урахуванням співвідношення (3.145) рівняння (3.144) перепишемо так:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + \frac{1}{\delta_{11}}y(t) = -m\ddot{y}_g(t) = P_{eff}(t). \quad (3.146)$$

У рівнянні (3.146) через

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{y}_g(t) \quad (3.147)$$

позначене ефективне навантаження на раму, що викликає її коливання. Таким чином, конструкція реагує на прискорення точок ґрунту так само, як вона реагувала би на горизонтальне зовнішнє

навантаження $p(t)$, що дорівнює добутку маси ригеля на прискорення руху ґрунту.

Вводячи коефіцієнт жорсткості

$$k = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (3.148)$$

можна рівняння коливань системи записати у вигляді

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = p_{eff}(t). \quad (3.149)$$

Вважаючи, що до початку коливань ґрунту споруда знаходиться у стані спокою, початкові умови задачі Коші для рівняння (3.149) запишемо у вигляді

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (3.150)$$

Після ділення лівої і правої частини рівняння (3.144) на m , запишемо:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{p_{eff}(t)}{m}, \quad (3.151)$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота власних коливань пружної системи, що розглядається, $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$ – параметр затухання.

Розв'язок рівняння (3.151), що задовольняє початкові умови (3.150), запишемо за допомогою інтеграла Дюамеля у вигляді

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p_{eff}(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (3.152)$$

З урахуванням (3.147) розв'язання задачі Коші, що розглядається, подається так:

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (3.153)$$

Якщо, наприклад, прискорення точок ґрунту описується виразом

$$\ddot{y}_g(t) = a_0 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} \sin(\beta t), \quad (3.154)$$

то реакція системи має наступний вигляд:

$$y(t) = \frac{a_0 \beta}{\omega_D} \exp[(\alpha_1 - \alpha_2 - \xi \omega_0)t] \times \\ \times \frac{2\xi \omega_0 \omega_D \cos(\omega_D t) + (\beta^2 + \omega_0^2 - 2\omega_D^2) \sin(\omega_D t)}{(\beta^2 + \omega_0^2)^2 + (2\xi \omega_0 \beta)^2} - \\ - a_0 \exp[(\alpha_1 - \alpha_2)t] \frac{2\xi \omega_0 \cos(\beta t) + (\beta^2 + \omega_0^2) \sin(\beta t)}{(\beta^2 + \omega_0^2)^2 + (2\xi \omega_0 \beta)^2}.$$

Насамкінець зазначимо, що вираз (3.154) при $\alpha_1 < \alpha_2$ інколи використовують як найпростішу модель прискорення ґрунту при землетрусі.

3.3 Коливання систем з багатьма ступенями вільності

3.3.1 Рівняння руху систем з кількома ступенями вільності

Реальна деформована система має нескінченну кількість ступенів вільності. Перехід до динамічної моделі зі скінченною кількістю ступенів вільності пов'язаний з деякою процедурою схематизації. Вище розглядалися два підходи до побудови розрахункових динамічних моделей. Один з них базується на трансформації континуальної моделі, що пов'язана з виділенням елементів, у яких деформаціями можна нехтувати, та деформівних елементів, масу яких можна не враховувати. Інший підхід базується на застосуванні прямих методів.

Розглянемо складання рівнянь руху рами, яку зображено на рис.3.23,а. Стержні рами вважаємо невагомими. Рама несе s точкових мас. До деяких мас прикладені динамічні навантаження. Внаслідок взаємодії зовнішнього навантаження, пружних сил, сил інерції та сил опору в рамі збуджується коливальний рух.

Спочатку при виведенні рівнянь руху сили опору, що зв'язані з дисипацією енергії, не враховуватимемо.

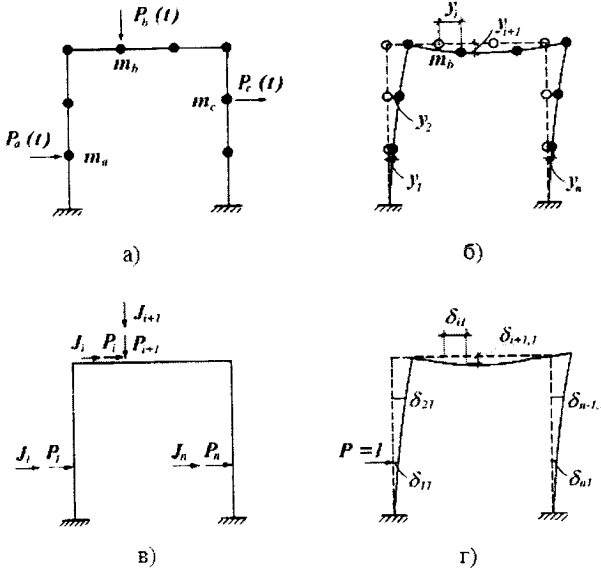


Рис.3.23

Розглядувана модель являє собою дискретну динамічну систему. Дискретизацію виконано шляхом прирівнювання до нуля розподіленої маси деформівних елементів конструкції. Число ступенів вільності визначається характером руху дискретних мас. Якщо вважати, що стояки рами нестисливі, то маси, які на них розташовані, можуть здійснювати тільки горизонтальні переміщення. Маси, які розміщені на ригелі, можуть мати як горизонтальні, так і вертикальні переміщення. Таким чином, загальна кількість ступенів вільності системи n дорівнює сумі кількості мас, що розташовані на стояках, та подвійної кількості мас, що розташовані на ригелі (маси, які зосереджені у вузлах рами, відносяться до

стояків). Таким чином, рух рами (рис. 3.22,б) визначатиметься вектором переміщень

$$\vec{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T. \quad (3.155)$$

Як бачимо з рис. 3.23,а, до деяких мас прикладене зовнішнє навантаження. Відповідно до вектора переміщень $\vec{y}(t)$ уведемо вектор зовнішніх навантажень (рис. 3.23,в)

$$\vec{p}(t) = \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\}^T, \quad (3.156)$$

де $P_i(t)$ дорівнює зовнішньому навантаженню, яке діє на масу m_i у напрямі y_i . Якщо в цьому напрямі на масу не діє зовнішнє навантаження, то $P_i(t) = 0$.

У будь-який момент руху на раму діє вектор сил інерції (рис. 3.23,в)

$$\vec{j} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}^T, \quad (3.157)$$

де

$$J_i = -m_i \ddot{y}_i. \quad (3.158)$$

Якщо ввести матрицю мас

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (3.159)$$

то вектор сил інерції можна записати у вигляді

$$\vec{j} = -\mathbf{M} \ddot{\vec{y}}. \quad (3.160)$$

Номер маси відповідає номеру переміщення. Так, маса m_b , яка розташована на ригелі (рис. 3.23,б), входить у вираз (3.160) як множник при \ddot{y}_i з номером i , а при \ddot{y}_{i+1} – з номером $i+1$, оскільки вона бере участь у двох незалежних рухах.

Якщо знехтувати подовженням ригеля, то всі маси, що розташовані на ньому, матимуть однакове горизонтальне переміщення y , кількість ступенів вільності системи n можна прийняти такою, що

дорівнює кількості дискретних мас плюс одиниця, тоді m , дорівнюватиме сумі мас, розташованих на ригелі.

Для складання рівнянь руху застосуємо принцип Даламбера у поєднанні з методом сил. Згідно з принципом Даламбера зовнішні сили, які діють на раму, пружні сили та сили інерції являють собою врівноважену систему сил.

Нехай на розглядувану раму діє статичне навантаження $P_j=3$. Відповідні переміщення y_i i - ї маси позначимо δ_{ij} (рис. 3.23,г, $j=1$), тобто

$$y_i = \delta_{ij}.$$

Матриця

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

являє собою матрицю податливості розглядуваної рами. Оскільки в кожний момент часу t на раму діють дві системи зовнішніх сил – вектор зовнішніх навантажень $\bar{p}(t)$ і вектор сил інерції $\bar{j}(t)$, то переміщення i -ї маси

$$y_i(t) = \delta_{i1}(J_1(t) + P_1(t)) + \delta_{i2}(J_2(t) + P_2(t)) + \dots + \delta_{in}(J_n(t) + P_n(t)) \\ (i=1, \dots, n).$$

У матричному вигляді наведений вираз переписується так:

$$\bar{y}(t) = \mathbf{B}(\bar{j}(t) + \bar{p}(t)). \quad (3.162)$$

Звідси згідно з (3.160) одержимо систему n -звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\mathbf{B}\mathbf{M}\ddot{\bar{y}}(t) + \bar{y}(t) = \mathbf{B}\bar{p}(t). \quad (3.163)$$

У розгорнутій формі система (3.163) має вигляд

$$\begin{aligned} \delta_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 + \dots + \delta_{1n}m_n\ddot{y}_n + y_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n, \\ \delta_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + \dots + \delta_{2n}m_n\ddot{y}_n + y_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \dots + \delta_{2n}P_n, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (3.164)$$

$$\delta_{n1}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{n2}m_2\ddot{y}_2 + \dots + \delta_{nn}m_n\ddot{y}_n + y_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nn}P_n.$$

Для того щоб цілком визначити коливальний процес, систему (3.164) необхідно доповнити початковими умовами, що задають переміщення та швидкості мас при $t=0$:

$$\begin{aligned} y_i(0) &= y_{i0}, \\ \dot{y}_i(0) &= \dot{y}_{i0} \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.165)$$

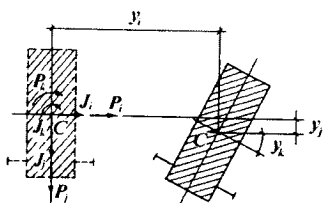


Рис. 3.24

Якщо для деякої маси треба врахувати також інерцію обертання, то її переміщення зручно зв'язати з центром маси C (рис. 3.24).

Сили інерції J_i і J_j прикладаються в точці C . Кутовому переміщенню y_k відповідає мо-

мент інерції I_k . Відповідно вважається, що компоненти P_i і P_j вектора зовнішньої дії прикладаються в точці C . У системі (3.164) при \ddot{y}_k як множник входить момент інерції I_k . Елементи k -го стовпця матриці B являють собою переміщення δ_{ik} i -ї маси ($i=1, 2, \dots, n$), що зумовлені дією одиничного моменту, який прикладений в точці C в напрямі кута повороту y_k .

Отже, система (3.164) разом з початковими умовами (3.165) описує вимушені коливання рами.

Як зазначалось, для складання цих рівнянь застосовувався принцип Даламбера в поєднанні з методом сил. З цією метою можна використовувати також поєднання методу Даламбера з методом переміщень.

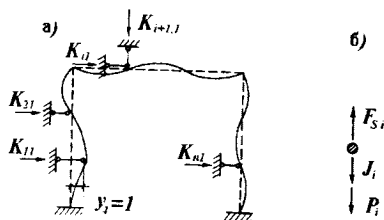


Рис. 3.25

Уведемо в'язі, що перешкоджають переміщенням y_i при $i \geq 2$, та задамо переміщення $y_i=1$ (рис. 3.25,а). Позначимо k_{i1} ($i=1, \dots, n$) реакцію, що

виникає у i -й в'язі. Аналогічну процедуру повторимо послідовно ще $n-1$ разів, задаючи чергове переміщення y_j ($j=2, \dots, n$) таким, що дорівнює одиниці і перешкоджає іншим переміщенням. Коефіцієнти k_{ij} називають коефіцієнтами впливу жорсткості і вони визначаються як реакція i -ї в'язі при нав'язуванні одиничного переміщення в напрямі j -го ступеня вільності. Матриця

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

називається матрицею жорсткості.

Вектор пружних реакцій у в'язях

$$\bar{\mathbf{f}}_S = \{F_{S1} \quad F_{S2} \quad \dots \quad F_{Sn}\}^T \quad (3.167)$$

за допомогою матриці жорсткості \mathbf{K} подається у вигляді

$$\bar{\mathbf{f}}_S = \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}}. \quad (3.168)$$

На масу m_i у загальному випадку діють сила пружного опору F_{Si} , сила інерції J_i та зовнішня сила P_i , сума яких за принципом Даламбера в кожний момент часу t повинна дорівнювати нулю (рис. 3.25,б):

$$P_i + J_i - F_{Si} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

У векторному вигляді наведена система рівностей записується так:

$$\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (3.169)$$

Згідно з (3.160) і (3.168) система (3.169) набуде вигляду

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{p}}. \quad (3.170)$$

У координатній формі система (3.170) записується так:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + \dots + k_{1n} y_n &= p_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{22} y_1 + k_{22} y_2 + \dots + k_{2n} y_n &= p_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \end{aligned} \quad (3.171)$$

$$m_n \ddot{y}_n + k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \dots + k_{nm} y_m = P_n.$$

Матриці **K** і **B** взаємообернені, тому, домножуючи векторну рівність (3.170) на матрицю **B**, одержимо систему (3.163). Таким чином, системи (3.163) і (3.170) еквівалентні. У статично визначуваних системах (або в системах з малою кількістю зайвих невідомих) простіше будувється матриця **B**. Навпаки, у системах з високим ступенем статичної невизначуваності при складанні рівнянь руху доцільніше застосовувати метод переміщень.

Системи (3.163) і (3.170) одержані за припущення, що силами опору руху в динамічній системі можна знехтувати. Тепер зупинимося на питаннях, пов'язаних з побудовою рівнянь руху при урахуванні сил опору в розглядуваній системі.

Вважатимемо, що з кожним переміщенням y_i ($i=1, \dots, n$) пов'язана деяка сила непружного опору F_{Di} . Уведемо вектор сил опору

$$\vec{F}_D = \{F_{D1} \quad F_{D2} \quad \dots \quad F_{Dn}\}^T. \quad (3.172)$$

Ці сили можуть мати різну природу. Це можуть бути сили внутрішнього непружного опору в матеріалі конструкції, до них можуть додаватися сили опору, що передаються від зовнішніх демпферів, які приєднані в деяких точках j рами (рис. 3.26а).

Вважатимемо, що сили опору, які пов'язані з властивостями матеріалу, описуються моделлю в'язкого тертя. Тоді згідно з (3.122) i -та компонента вектора демпфірування \dot{f}_D записується у вигляді

$$F_{Di} = -v \dot{F}_{Si} - c_i \dot{y}_i, \quad (3.173)$$

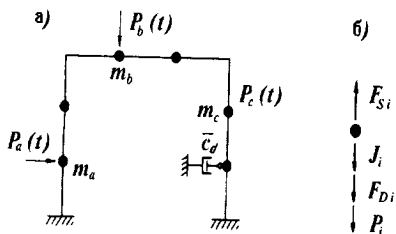


Рис. 3.26

де v — коефіцієнт в'язкості матеріалу конструкції; c_i — коефіцієнт в'язкості зовнішнього демпфера, що відповідає i -му ступеню вільності. Якщо для k -го ступеня вільності відповідний демпфер відсутній, то $c_k=0$.

Рівності (3.173) відповідає вектор опору

$$\bar{\mathbf{f}}_D = -v \dot{\bar{\mathbf{f}}}_S - C_0 \bar{\mathbf{y}},$$

де

$$[C_0] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

Згідно з (3.168) наведене вище векторне співвідношення переписується у вигляді

$$\bar{\mathbf{f}}_D = -v \mathbf{K} \dot{\bar{\mathbf{y}}} - C_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} = -\mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{y}}}, \quad (3.175)$$

де матриця

$$\mathbf{C} = v \mathbf{K} + C_0. \quad (3.176)$$

На масу m_i у загальному разі діють сила пружного опору балки F_{Si} , сила демпфірування F_{Di} , сила інерції J_i та зовнішня сила P_i , сума яких за принципом Даламбера в кожний момент часу повинна дорівнювати нулю (рис. 3.26,б):

$$P_i + J_i + F_{Di} - F_{Si} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.177)$$

Ці співвідношення можна записати у векторній формі:

$$\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{f}}_D - \bar{\mathbf{f}}_S = \bar{\mathbf{0}}. \quad (3.178)$$

З урахуванням (3.160), (3.172) і (3.175) рівняння (3.178) переписується у вигляді

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{p}}. \quad (3.179)$$

Якщо задано не матрицю жорсткості \mathbf{K} , а матрицю податливості \mathbf{B} , то, помноживши на неї зліва рівність (3.179), одержимо рівняння руху, що виражаються через матрицю \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} \mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{B} \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{p}}. \quad (3.180)$$

3.3.2 Вільні коливання систем зі скінченною кількістю ступенів вільності

Колівальні процеси в деформівних системах зумовлені взаємодією пружних сил, сил інерції, сил опору та зовнішнього впливу. Динамічні процеси, що відбуваються у спорудах, природним чином поділяються на два типи – коливання вільні та вимушені. Вільними коливаннями системи називається такий тип руху, який реалізується в системі без змінного зовнішнього впливу і надходження енергії ззовні. Таким чином, у процесі вільних коливань взаємодіють сили, які зумовлені деформуванням споруди, сили інерції та сили опору. Вільні коливання відбуваються за рахунок первісно нагромадженої енергії, величина якої визначається переміщеннями та швидкостями, що задані системі в деякий початковий момент часу. Наявність сил опору руху спричинює розсіювання механічної енергії, унаслідок чого в реальних системах вільні коливання з часом згасають. При дослідженні різних вимушених колівальних режимів пружних систем використовуються результати аналізу вільних коливань, дає змогу виявити внутрішні динамічні характеристики розглядуваної споруди. На основі цих характеристик можна прогнозувати реакцію споруди на різні зовнішні впливи. Тому вивченню динаміки конкретної механічної системи передують дослідження її вільних коливань. При цьому, як правило, сили опору руху не враховуються.

Власні коливання пружної системи. Нехай для дослідження коливань деформівної системи побудовано динамічну модель з n ступенями вільності, яка описується системою (3.179). Для аналізу вільних коливань без урахування дисипації енергії слід з рівнянь (3.179) виключити сили $C\dot{y}$ та зовнішній вплив $\bar{p}(t)$. У результаті одержимо систему

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = \bar{0}. \quad (3.181)$$

Будь-які вільні коливання пружної системи, що є розв'язком системи (3.181), який задовольняє відповідні початкові умови, можна подати у вигляді суперпозиції n власних гармонічних коливань.

Розв'язок системи (3.181), що відповідає гармонічним коливанням з частотою ω та початковою фазою φ , має вигляд (рис. 3.27)

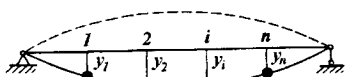


Рис. 3.27

$$\bar{y}(t) = \bar{y} \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.182)$$

де $\bar{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$ – сталий вектор, який характеризує співвідношення між переміщеннями за

різними ступенями вільності в розв'язку даного вигляду.

Частота ω та вектор \bar{y} задовольняють матричне рівняння

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{y} = \bar{0}. \quad (3.183)$$

Відносно компонент вектора \bar{y} співвідношення (3.183) являють собою систему n лінійних однорідних алгебричних рівнянь відносно компонент вектора \bar{y} . Умова існування ненульового розв'язку однорідної системи (3.183) приводить до характеристичного рівняння

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0, \quad (3.184)$$

яке в розгорнутій формі записується у вигляді

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \dots & k_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2n} - \omega^2 m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} - \omega^2 m_{n1} & k_{n2} - \omega^2 m_{n2} & \dots & k_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.185)$$

Можна довести, що для пружної системи, стійкої у стані спокою, це рівняння в загальному випадку має n дійсних додатних коренів ω_k^2 ($k = 1, 2, \dots, n$). Згідно з (3.182) ω_k являють собою кутові частоти вільних коливань лінійної пружної системи, які називаються власними частотами системи. Упорядковану сукупність власних частот

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \quad (3.186)$$

називають спектром власних частот розглядуваної системи.

перетворюється на систему неоднорідних рівнянь відносно решти $n-1$ компонент вектора \bar{y}_l . Розв'язавши цю систему, одержують повний власний вектор і за допомогою представлення (3.182) повністю визначають власні гармонічні коливання з частотою ω_l . Коли всі корені характеристичного рівняння (3.185) прості, тобто спектр (3.186) не має кратних частот, за допомогою вказаної процедури можна визначити власні вектори \bar{y}_l для всіх n власних частот. Таким чином, у цьому разі встановлено існування в системі з n ступенями вільності спектра n власних коливань (рис. 3.28).

З механічної точки зору власні коливання системи являють собою окремих випадок вільних коливань, коли коливальний рух має тип стоячої хвилі з однією заданою частотою і формою деформації системи.

Спектр власних коливань є найважливішою динамічною характеристикою споруди. Власні коливання називають також головними, або нормальними, формами коливань.

Тепер розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння (3.169) має кратні корені. Нехай, наприклад, ω_l^2 є подвійним коренем, тобто в спектрі частот (3.170) $\omega_l = \omega_{l+1}$. У цьому разі існує цілий підпростір власних векторів, які відповідають частоті ω_l . Розмірність цього підпростору дорівнює двом, тобто будь-який вектор, що належить цьому підпростору, можна подати за допомогою двох базисних лінійно незалежних векторів $\bar{y}_l^{(1)} = \{y_{1l}^{(1)} \ y_{2l}^{(1)} \ \dots \ y_{nl}^{(1)}\}^T$ та $\bar{y}_l^{(2)} = \{y_{1l}^{(2)} \ y_{2l}^{(2)} \ \dots \ y_{nl}^{(2)}\}^T$ так:

$$\bar{y}_l = \alpha_1 \bar{y}_l^{(1)} + \alpha_2 \bar{y}_l^{(2)}, \quad (3.189)$$

де α_1, α_2 – відповідні константи.

Розглянемо питання про побудову векторів $\bar{y}_l^{(1)}$ та $\bar{y}_l^{(2)}$. Оскільки ω_l^2 є подвійним коренем характеристичного рівняння (3.185), то ранг системи (3.183) дорівнює $n-2$. Нехай змінні занумеровані так, що незалежними є $n-2$ перших рівнянь системи (3.183):

$$(k_{11} - \omega_l^2 m_{11}) y_{1l} + (k_{12} - \omega_l^2 m_{12}) y_{2l} + \dots + (k_{1n} - \omega_l^2 m_{1n}) y_{nl} = 0 ;$$

$$\begin{aligned} & (k_{21} - \omega_l^2 m_{21}) y_{1l} + (k_{22} - \omega_l^2 m_{22}) y_{2l} + \dots + (k_{2n} - \omega_l^2 m_{2n}) y_{nl} = 0; \\ & \dots \dots \dots \quad (3.190) \end{aligned}$$

$$(k_{(n-2)1} - \omega_l^2 m_{(n-2)1}) y_{1l} + \dots + (k_{(n-2)n} - \omega_l^2 m_{(n-2)n}) y_{nl} = 0.$$

Для визначення вектора \bar{y}_l , який належить вказаному підпростору, треба довільно задати дві компоненти цього вектора та із системи (3.190) знайти решту $n-2$ компонент. Щоб одержати лінійно незалежні вектори $\bar{y}_l^{(1)}$ та $\bar{y}_l^{(2)}$, шукатимемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{y}_l^{(1)} &= \{1 \quad 0 \quad y_{3l}^{(1)} \quad \dots \quad y_{nl}^{(1)}\}^T, \\ \bar{y}_l^{(2)} &= \{1 \quad 0 \quad y_{3l}^{(2)} \quad \dots \quad y_{nl}^{(2)}\}^T, \end{aligned}$$

для кожного з яких невідомі компоненти $y_{kl}^{(1)}$ ($k=3, \dots, n$) та $y_{kl}^{(2)}$ ($k=3, \dots, n$) відповідно визначаються з розв'язку $(n-2)$ неоднорідних рівнянь. Очевидно, що вектори $\bar{y}_l^{(1)}$ та $\bar{y}_l^{(2)}$, які одержано в такий спосіб, лінійно незалежні.

Аналогічно, якщо кратність частоти ω_l дорівнює r , то довільно задають r компонент вектора \bar{y}_l , а решту $n-r$ компонент знаходять із розв'язку $n-r$ неоднорідних рівнянь. Підпростір власних векторів можна побудувати за допомогою r лінійно незалежних власних векторів, тобто його розмірність дорівнює r .

У розглядуваному випадку спектр власних коливань системи будується на основі матриці жорсткості \mathbf{K} . Аналогічні рівняння можна одержати, виходячи з матриці податливості.

Ортогональність власних форм коливань. У власних форм коливань є особливі властивості, які мають велике значення при дослідженні динаміки споруд. Ця властивість називається умовами ортогональності.

Розглянемо дві власні форми $\bar{y}_k(t)$ і $\bar{y}_l(t)$, що відповідають різним частотам ω_k і ω_l власних коливань конструкції, яку показано на рис.3.29.

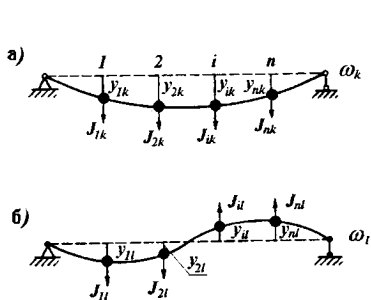


Рис.3.29

Форма власних коливань, яка відповідає частоті ω_k (рис.3.29,а), визначається виразом

$$\bar{y}_k(t) = \bar{y}_k \sin \omega_k t, \quad (3.191)$$

де \bar{y}_k – власний вектор, такий, що

$$\mathbf{K} \bar{y}_k = \omega_k^2 \mathbf{M} \bar{y}_k. \quad (3.192)$$

Руху (3.191) відповідає вектор сили інерції

$$\bar{\mathbf{j}}_k(t) = \{ J_{1k}(t) \quad J_{2k}(t) \quad \dots \quad J_{nk}(t) \}^T.$$

який задається співвідношенням

$$\bar{\mathbf{j}}_k(t) = -\mathbf{M} \ddot{\bar{y}}_k(t) = \omega_k^2 \mathbf{M} \bar{y}_k \sin \omega_k t. \quad (3.193)$$

Таким чином, компоненти вектора $\bar{\mathbf{j}}_k$ змінюються за гармонічним законом. Вектор амплітуд цих компонент

$$\bar{\mathbf{j}}_k = \{ J_{1k} \quad J_{2k} \quad \dots \quad J_{nk} \}^T = \omega_k^2 \mathbf{M} \bar{y}_k. \quad (3.194)$$

Вектор $\bar{\mathbf{j}}_k$ збігається з правою частиною системи (3.192). Це показує, що вектор \bar{y}_k можна розглядати як вектор прогинів розглядуваної системи під дією статичного навантаження $\bar{\mathbf{j}}_k$.

Аналогічно форма власних коливань з частотою ω_l (рис.3.29,б) визначається виразом

$$\bar{y}_l(t) = \bar{y}_l \sin \omega_l t. \quad (3.195)$$

Відповідний вектор сил інерції

$$\bar{\mathbf{j}}_l(t) = \omega_l^2 \mathbf{M} \bar{y}_l \sin \omega_l t. \quad (3.196)$$

Прогини розглядуваної системи під дією статичного навантаження

$$\bar{\mathbf{j}}_l = \{J_{1l} \quad J_{2l} \quad \dots \quad J_{nl}\}^T = \omega_l^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_l \quad (3.197)$$

визначаються вектором $\bar{\mathbf{y}}_l$.

Таким чином, маємо два статичних стани: перший, який визначається вектором навантаження $\bar{\mathbf{j}}_k$ та відповідним вектором прогинів $\bar{\mathbf{y}}_k$, і другий, що визначається векторами $\bar{\mathbf{j}}_l$ та $\bar{\mathbf{y}}_l$.

Робота сил першого стану на переміщеннях другого стану визначається скалярним добутком:

$$A_{kl} = \bar{\mathbf{j}}_k^T \bar{\mathbf{y}}_l = (\omega_k^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k)^T \bar{\mathbf{y}}_l = \omega_k^2 \bar{\mathbf{y}}_k^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_l = \omega_k^2 \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k. \quad (3.198)$$

При побудові послідовності рівнянь (3.198) урахувалося, що матриця мас \mathbf{M} симетрична. Аналогічно робота сил другого стану на переміщеннях першого стану

$$A_{lk} = \bar{\mathbf{j}}_l^T \bar{\mathbf{y}}_k = \omega_l^2 \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k. \quad (3.199)$$

За теоремою про взаємність робіт

$$A_{kl} = A_{lk}. \quad (3.200)$$

Цю рівність виходячи із співвідношень (3.198) і (3.199) можна подати у вигляді

$$\omega_k^2 \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k - \omega_l^2 \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k = (\omega_k^2 - \omega_l^2) \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k = 0.$$

Звідси, з урахуванням того, що частоти ω_k і ω_l різняться, можна записати:

$$\bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k = 0. \quad (3.201)$$

Вираз (3.201) є першою умовою ортогональності. Другу умову ортогональності можна одержати, помножуючи ліву та праву частини векторної рівності (3.192) на вектор $\bar{\mathbf{y}}_l$. Тоді

$$\bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}}_k = \omega_k^2 \bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{y}}_k.$$

Згідно з (3.201) маємо

$$\bar{\mathbf{y}}_l^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{y}}_k = 0. \quad (3.202)$$

Ця умова показує, що форми коливань ортогональні відносно як матриці жорсткості, так і матриці мас.

Умова (3.201) називається умовою ортогональності за кінетичною енергією, умова (3.202) – за потенціальною енергією.

Якщо спектр (3.170) не має кратних коренів, то відповідні власні вектори $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ є лінійно незалежними, задовольняють умови ортогональності (3.201) і (3.202) та є базисом у n -вимірному векторному просторі.

За наявності у спектрі кратних частот можна виконати ортогоналізацію лінійно незалежних векторів у кожному підпросторі, який відповідає кратній власній частоті; тому зазначені раніше властивості, повною мірою поширюються на кратні частоти.

Як зазначалось, кожна власна форма визначена з точністю до сталого множника. Часто при виконанні динамічного аналізу застосовують той чи інший спосіб нормування форм. Наприклад, яку-небудь означену координату в конкретній формі приймають такою, що дорівнює одиниці, а інші переміщення визначаються відносно до цієї величини. Найчастіше як означену координату вибирають ту, у якій переміщення досягає максимального значення. У цьому разі максимальне переміщення в кожному модальному векторі дорівнює одиниці. Широко застосовується спосіб нормування за “кінетичною енергією”, що відповідає даній формі. При цьому дану форму \bar{y} , перетворюють у такий вектор $\bar{\varphi}$, щоб виконувалась умова

$$\bar{\varphi}_j^T \mathbf{M} \bar{\varphi}_j = 1. \quad (3.203)$$

Це можна зробити обчисленням скалярної величини $m_j = \bar{y}_j^T \mathbf{M} \bar{y}_j$, тоді нормовану форму коливань визначимо за формулою

$$\bar{\varphi}_j = \bar{y}_j / \sqrt{m_j}. \quad (3.204)$$

Таким чином, у результаті аналізу вільних коливань недемпфированої системи одержуємо спектр власних коливань системи: спектр власних частот (3.202) та матрицю нормованих власних форм

$$\Phi = \{\bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2 \quad \dots \quad \bar{\varphi}_n\}, \quad (3.205)$$

таку що

$$\Phi^T M \Phi = E, \quad (3.206)$$

де E – одинична матриця розмірності $n \times n$.

При виконанні динамічного аналізу використовується ще одна матрична рівність. Нехай \bar{y}_j є власний вектор системи, що відповідає частоті ω_j , тобто

$$K \bar{y}_j = \omega_j^2 M \bar{y}_j. \quad (3.207)$$

Помножимо скалярно ліву та праву частини векторної рівності (3.207) на вектор \bar{y}_j^T :

$$\bar{y}_j^T K \bar{y}_j = \omega_j^2 \bar{y}_j^T M \bar{y}_j. \quad (3.208)$$

З урахуванням того, що $\bar{y}_j^T M \bar{y}_j = m_j$, рівність (3.208) переписується у вигляді

$$k_j = \omega_j^2 m_j, \quad (3.209)$$

де

$$k_j = \bar{y}_j^T K \bar{y}_j.$$

Згідно з (3.204) і (3.209) маємо

$$\bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_j = \omega_j^2, \quad (3.210)$$

звідки, використовуючи другу умову ортогональності (3.202), можна записати:

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) = \Omega^2, \quad (3.211)$$

де $\text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ – діагональна матриця розмірності $n \times n$, у якій на діагоналі розташовані величини $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$.

Визначення першої власної пари за методом Стодоли.
Розв'язання частотного рівняння в загальному вигляді – складна і

важка задача. Дуже часто для відлаштування від резонансу потрібно знати одну або декілька найнижчих. Існують досить швидкі ітераційні процедури для знаходження власних форм і частот. Одна з найпоширеніших базується на методі Стодоли.

При вільних коливаннях діють тільки сили інерції: $J_k = -m_k \ddot{y}_k$, а будь-яке переміщення за принципом Даламбера може бути представлене у такий спосіб:

$$y_k = J_1 \delta_{k1} + J_2 \delta_{k2} + \dots + J_n \delta_{kn} \quad (3.212)$$

Як було зазначено вище, власні коливання – це синхронні і синфазні гармонічні коливання з однією з власних частот:

$$y_k(t) = y_k \sin(\omega_i t); \quad \ddot{y}_k(t) = -\omega_i^2 y_k \sin(\omega_i t).$$

Підставивши ці вирази в (3.212) і скоротивши на $\sin(\omega_i t)$, отримаємо

$$y_k = \omega_i^2 [m_1 \delta_{k1} y_1 + m_2 \delta_{k2} y_2 + \dots + m_n \delta_{kn} y_n], \quad (3.213)$$

або в матричному вигляді

$$\bar{y} = \omega_i^2 \mathbf{B} \mathbf{M} \bar{y} \quad (3.213')$$

Зауважимо, що будь-яка власна пара $\omega_k, \bar{\varphi}_k$ задовольняє це рівняння. Наприклад, для довільної j -ї компоненти першої форми справедливою є рівність

$$\varphi_{j1} = \omega_1^2 [m_1 \delta_{j1} \varphi_{11} + m_2 \delta_{j2} \varphi_{21} + \dots + m_n \delta_{jn} \varphi_{n1}] = \omega_1^2 \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \varphi_{k1}, \quad (3.214)$$

Або в матричному вигляді для всієї форми

$$\bar{\varphi}_1 = \omega_1^2 \mathbf{B} \mathbf{M} \bar{\varphi}_1$$

Взагалі для будь-якої власної пари справедливо

$$\frac{\varphi_{jk}}{\omega_k^2} = [m_1 \delta_{j1} \varphi_{1k} + m_2 \delta_{j2} \varphi_{2k} + \dots + m_n \delta_{jn} \varphi_{nk}] = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ji} \varphi_{ik}, \quad (3.215)$$

або в матричному вигляді

$$\frac{\bar{\varphi}_k}{\omega_k^2} = \mathbf{B} \mathbf{M} \bar{\varphi}_k$$

Далі, припустимо, що розв'язку задачі про власні значення в нас немає, і ми його шукаємо. Організуємо наступний процес. Задасмо якимось нульовим наближенням

$$\mathbf{y}^{(0)} = \{y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\}^T.$$

З нульового наближення отримаємо перше наближення наступним чином

$$y_j^{(1)} = [m_1 \delta_{j1} y_1^{(0)} + m_2 \delta_{j2} y_2^{(0)} + \dots + m_n \delta_{jn} y_n^{(0)}] = \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} y_k^{(0)}. \quad (3.216)$$

З першого наближення отримаємо друге аналогічним чином

$$y_j^{(2)} = [m_1 \delta_{j1} y_1^{(1)} + m_2 \delta_{j2} y_2^{(1)} + \dots + m_n \delta_{jn} y_n^{(1)}] = \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} y_k^{(1)}. \quad (3.217)$$

Нарешті з $(n-1)$ -го наближення отримаємо n -те

$$y_j^{(n)} = [m_1 \delta_{j1} y_1^{(n-1)} + m_2 \delta_{j2} y_2^{(n-1)} + \dots + m_n \delta_{jn} y_n^{(n-1)}] = \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} y_k^{(n-1)}, \quad (3.218)$$

або в матричному вигляді

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{B} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(n-1)}.$$

Для того, щоб з'ясувати, куди прямує наш ітераційний процес, при $m \rightarrow \infty$ зробимо так. Подамо нульове наближення у вигляді розвинення за головними (власними) формами

$$y_j^{(0)} = [a_1 \varphi_{j1} + a_2 \varphi_{j2} + \dots + a_n \varphi_{jn}] = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{jk}. \quad (3.219)$$

де φ_{jk} - j -а компонента k -ї головної (власної) форми.

Векторний аналог подання (3.219) має вигляд

$$\mathbf{y}^{(0)} = a_1 \bar{\varphi}_1 + a_2 \bar{\varphi}_2 + \dots + a_n \bar{\varphi}_n$$

Підставимо вираз (3.219) у перше наближення

$$y_j^{(1)} = \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} y_k^{(0)} = \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ki}. \quad (3.220)$$

Перегрупуємо (змінимо порядок множення і додавання) і з урахуванням (3.215) отримаємо

$$y_j^{(1)} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \varphi_{ki} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^2} \varphi_{ji}. \quad (3.221)$$

або у векторному вигляді

$$\mathbf{y}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\omega_i^2} \bar{\varphi}_i.$$

Вираз (3.221) для першого наближення відрізняється від виразу (3.219) для нульового наближення тільки тим, що в першому з них коефіцієнт a_i при компоненті кожної власної форми поділений на квадрат відповідної власної частоти. Якщо тепер вираз для першого наближення підставити в (3.217), то цілком аналогічно для другого наближення отримаємо

$$y_j^{(2)} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \varphi_{ki} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^4} \varphi_{ji}. \quad (3.222)$$

І аналогічно для $(m-1)$ -го та m -го наближень будемо мати

$$y_j^{(m-1)} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^{2(m-1)}} \varphi_{ji}; \quad y_j^{(m)} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^{2m}} \varphi_{ji}. \quad (3.223)$$

Відомо, що

$$\frac{1}{\omega_1^2} > \frac{1}{\omega_2^2} > \dots > \frac{1}{\omega_{(m,-1)}^2} > \frac{1}{\omega_m^2},$$

тому при досить великому m у виразі для відповідного наближення

$$y_j^{(m)} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\omega_i^{2m}} \varphi_{ji} = a_1 \frac{1}{\omega_1^{2m}} \varphi_{j1} + a_2 \frac{1}{\omega_2^{2m}} \varphi_{j2} + \dots + a_n \frac{1}{\omega_n^{2m}} \varphi_{jn}$$

перший доданок стане набагато переважати суму всіх інших

$$y_j^{(m-1)} \approx a_1 \frac{1}{\omega_1^{2(m-1)}} \varphi_{j1}, \quad \bar{y}^{(m-1)} \approx a_1 \frac{1}{\omega_1^{2(m-1)}} \bar{\varphi}_1 \quad (3.224)$$

$$y_j^{(m)} \approx a_1 \frac{1}{\omega_1^{2m}} \varphi_{j1}, \quad \bar{y}^m \approx a_1 \frac{1}{\omega_1^{2m}} \bar{\varphi}_1 \quad (3.225)$$

Оскільки власна форма задається з точністю до множника, а величина $a_1 \frac{1}{\omega_1^{2m}}$ саме і є таким множником (від змінного індексу j не залежить), то $y_j^{(m)}$ при великих значеннях m збігається з j -ю компонентою першої форми власних коливань.

Якщо поділимо (3.224) на (3.225), то при будь-якому j отримаємо квадрат першої власної частоти:

$$\omega_1^2 = \frac{y_j^{(m-1)}}{y_j^m}. \quad (3.226)$$

Вирази (3.216)-(3.218), (3.226) є математичним записом методу Стодоли, який дозволяє наближено визначити першу власну частоту і форму коливань за допомогою послідовного застосування вказаних формул.

3.3.3 Вимушені коливання систем з багатьма ступенями вільності

Вимушеними коливаннями системи називається рух, який збуджується та підтримується зовнішніми впливами. Залежно від характеру зовнішнього впливу в споруді можуть збуджуватися різні динамічні процеси. Для систем з одним ступенем вільності це питання вже докладно розглядалося. Перехід до розгляду динамічних систем з кількома ступенями вільності показує, що при збереженні загальних закономірностей тут виявляються нові моменти, що зумовлені наявністю в системі кількох резонансів.

Система рівнянь, що описує вимушені коливання системи з n ступенями вільності, записується у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{y}}(t) + \mathbf{K}\bar{y}(t) = \bar{p}(t), \quad (3.227)$$

де $\bar{y}(t) = \{y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t)\}^T$ – вектор динамічних перемішень; $\bar{p}(t) = \{p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t)\}^T$ – вектор, що

характеризує зовнішній вплив; \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} – матриця відповідно мас, демпфірування та жорсткості.

Для повної визначеності задачі систему (3.227) необхідно доповнити початковими умовами:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}(0) &= \bar{\mathbf{y}}_0 = \{y_{10} \quad y_{20} \quad \dots \quad y_{n0}\}^T, \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}(0) &= \dot{\bar{\mathbf{y}}}_0 = \{\dot{y}_{10} \quad \dot{y}_{20} \quad \dots \quad \dot{y}_{n0}\}^T.\end{aligned}\tag{3.228}$$

З урахуванням лінійності системи (3.227) загальний розв'язок $\bar{\mathbf{y}}(t)$ цієї системи подамо у вигляді суми загального розв'язку $\bar{\mathbf{y}}_c(t) = \{y_{1c}(t) \quad y_{2c}(t) \quad \dots \quad y_{nc}(t)\}^T$ однорідної системи

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{0}},\tag{3.229}$$

який описує вільні коливання, і частинного розв'язку

$$\bar{\mathbf{y}}_p(t) = \{y_{1p}(t) \quad y_{2p}(t) \quad \dots \quad y_{np}(t)\}^T$$

системи (3.227):

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{y}}_c(t) + \bar{\mathbf{y}}_p(t).\tag{3.230}$$

При розв'язуванні конкретних задач загальна послідовність обчислень така. Спочатку визначають деякий частинний розв'язок $\bar{\mathbf{y}}_p(t)$ неоднорідної системи (3.227), не задаючись якимись певними початковими умовами. Потім визначають перший доданок $\bar{\mathbf{y}}_c(t)$ суми (3.230), розв'язуючи однорідну систему (3.229) з початковими умовами

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}_l(0) &= \bar{\mathbf{y}}_0 - \bar{\mathbf{y}}_p(0), \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_l(0) &= \dot{\bar{\mathbf{y}}}_0 - \dot{\bar{\mathbf{y}}}_p(0).\end{aligned}\tag{3.231}$$

Сукупність зовнішніх динамічних впливів можна поділити на два класи: тривалі та короткочасні. При тривалих впливах, як правило, розглядають поведінку конструкції протягом великих проміжків часу. Тому, якщо спеціально не цікавитися перехідними процесами, то доданок $\bar{\mathbf{y}}_c(t)$ можна не враховувати, оскільки його внесок внаслідок дисипативних процесів з часом прямує до нуля, і

визначати тільки частинний розв'язок $\bar{y}_p(t)$ системи (3.227). В таких задачах початкові умови не мають великого значення.

Якщо вивчається поведінка конструкції при короткочасному впливі (удар, землетрус), необхідно враховувати обидва доданки суми (3.230).

Гармонічні коливання за відсутності непружного опору. Розглянемо коливання деформівної системи зі скінченним числом ступенів вільності під дією зовнішнього навантаження, інтенсивність якого змінюється за гармонічним законом. Після закінчення перехідного процесу система вийде на режим усталених коливань. Метою динамічного розрахунку є визначення зусиль та перемішень, що зумовлені цим режимом коливання систем.

Вивчимо усталені коливання рами, що розглядалася в п.3.3.1 (рис. 3.23), під дією гармонічного навантаження з частотою θ :

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= \{P_1(t) \ P_2(t) \ \dots \ P_n(t)\}^T = \\ &= \{P_{10} \ P_{20} \ \dots \ P_{n0}\}^T \sin\theta t = \bar{p}_0 \sin\theta t. \end{aligned} \quad (3.232)$$

З урахуванням (3.232) система (3.163), що описує коливання рами, запишеться у вигляді

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}\bar{p}_0 \sin\theta t. \quad (3.233)$$

Система (3.233) описує коливання рами без урахування дисипації енергії. За відсутності дисипації енергії доданок $\bar{y}_c(t)$ у представленні (3.230) не буде затухати. Таким чином, перехідний режим, взагалі кажучи, триватиме як завгодно довго, і система ніколи не вийде на режим усталених коливань. Проте в реальній системі сили опору існують. Тому застосовувати моделі типу (3.233) для аналізу усталених коливань можна при розглядуваному впливі тоді, коли сили опору малі і не впливають на параметри коливального режиму. Конкретно це означає таке. Перед початком розрахунку на вимушені коливання проаналізуємо вільні коливання. Визначені частоти власних коливань ω , перебувають у частотному діапазоні, в якому лежить частота зовнішнього впливу θ . Якщо частота θ розміщується досить далеко від резонансних зон, то використовувати модель (3.233) допустимо. До питання про вра-

хування сил опору при аналізі гармонічних коливань повернемося пізніше.

Через відсутність сил опору можна вважати, що коливання відбуватимуться синхронно (з однаковою частотою) і синфазно (в одній фазі) із зміною зовнішнього навантаження, тобто шуканий вектор переміщень $\bar{y}(t)$ можна подати у вигляді

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_s \sin \theta t, \tag{3.234}$$

де $\bar{y}_s = \{y_{1s} \ y_{2s} \ \dots \ y_{ns}\}^T$ – вектор, компонентами якого є амплітуди відповідних динамічних переміщень.

Підставляючи (3.234) у (3.233), дістаємо:

$$\left(-\theta^2 \mathbf{B}\mathbf{M} + \mathbf{E}\right) \bar{y}_s \sin \theta t = \mathbf{B}\bar{p}_0 \sin \theta t, \tag{3.235}$$

звідки для компонент вектора \bar{y}_s можна записати систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left(\mathbf{B}\mathbf{M} + \lambda_\theta \mathbf{E}\right) \bar{y}_s = -\lambda_\theta \mathbf{B}\bar{p}_0, \tag{3.236}$$

де $\lambda_\theta = 1/\theta^2$.

Система (3.236) в розгорнутому вигляді записується так

$$\begin{aligned} (\delta_{11}m_1 - \lambda_\theta)y_{1s} + \delta_{12}m_2y_{2s} + \dots + \delta_{1n}m_ny_{ns} &= -\lambda_\theta(\delta_{11}p_{10} + \delta_{12}p_{20} + \dots + \delta_{1n}p_{n0}), \\ \delta_{21}m_1y_{1s} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_\theta)y_{2s} + \dots + \delta_{2n}m_ny_{ns} &= -\lambda_\theta(\delta_{21}p_{10} + \delta_{22}p_{20} + \dots + \delta_{2n}p_{n0}), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}m_1y_{1s} + \delta_{n2}m_2y_{2s} + \dots + (\delta_{nn}m_n - \lambda_\theta)y_{ns} &= -\lambda_\theta(\delta_{n1}p_{10} + \delta_{n2}p_{20} + \dots + \delta_{nn}p_{n0}). \end{aligned} \tag{3.237}$$

Рівняння (3.236) використовуються для визначення амплітуд прогинів. Як зазначалося, використовуваний підхід дає добрий результат, якщо частота зовнішнього впливу θ розміщується досить далеко від резонансу.

Проаналізуємо, поводитиметься розв’язок системи (3.236) залежно від частоти зовнішнього впливу θ . Розв’язок системи (3.236) за допомогою формули Крамера можна записати у вигляді

$$y_{is} = D_i/D \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3.238}$$

де

$$D = \det(\mathbf{B}\mathbf{M} - \lambda_\theta \mathbf{E}), \tag{3.239}$$

D_i – детермінант матриці, отриманої з матриці $\mathbf{BM} - \lambda_\theta \mathbf{E}$ шляхом заміни i -го стовпця вектором $-\lambda_\theta \mathbf{V} \bar{\mathbf{p}}_0$.

З наближенням θ до будь-якої власної частоти динамічної розглядуваної системи ω_k величина λ_θ наближатиметься до власного значення $\lambda_k = \frac{1}{\omega_k^2}$ задачі на власні значення. Це означає, що детермінант (3.239) прямуватиме до нуля. Згідно з (3.238) невідомі y_{is} при $D \rightarrow 0$ в загальному випадку прямують до нескінченності, що свідчить про резонанс у системі без затухання. Отже, в системі з n ступенями вільності може утворитись, взагалі кажучи, n резонансів, якщо частота зовнішнього впливу наближається до однієї з власних частот системи.

Щоб мати скінченні амплітуди в зоні резонансу, необхідно врахувати ефект дисипації енергії при коливанні деформівних систем.

При аналізі вимушених коливань ми виходили із системи (3.163), побудова якої базується на використанні матриці податливості \mathbf{B} . Якщо виходити із системи (3.170), яка формувалася на основі матриці \mathbf{K} , то задача про гармонічні коливання системи запишеться у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{p}}_0 \sin \theta t. \quad (3.240)$$

Система лінійних алгебричних рівнянь для визначення амплітуд перемішень має вигляд

$$(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{y}}_s = \bar{\mathbf{p}}_0. \quad (3.241)$$

У розгорнутому вигляді система (3.241) набирає вигляду

$$\begin{aligned} (k_{11} - \theta^2 m_1) y_{1s} + k_{12} y_{2s} + \dots + k_{1n} y_{ns} &= p_{10}, \\ k_{21} y_{1s} + (k_{22} - \theta^2 m_2) y_{2s} + \dots + k_{2n} y_{ns} &= p_{20}, \\ \dots \dots \dots & \\ k_{n1s} y_{1s} + k_{n2} y_{2s} + \dots + (k_{nn} - \theta^2 m_n) y_{ns} &= p_{n0}. \end{aligned} \quad (3.242)$$

Системи (3.236) і (3.241) еквівалентні. При розв'язуванні задач з невеликим числом ступенів вільності, у яких матриця податливос-

ті розміщується в оперативній пам'яті комп'ютера, можна використовувати як систему (3.236), так і (3.241). При динамічному аналізі великих систем методом МСЕ застосовуються рівняння (3.241); при цьому суттєво використовується стрічкова структура матриці \mathbf{K} .

Гармонічні коливання з урахуванням затухання.
Розглянемо усталені коливання рами, яку зображено на рис. 3.26 під дією гармонічного навантаження (3.232). Система (3.179), що описує коливання рами, запишеться у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{p}}_0 \sin \theta t. \quad (3.243)$$

Через наявність сил опору, що визначаються матрицею демпфірування \mathbf{C} , структура якої задається виразом (3.176), усталені гармонічні коливання, взагалі кажучи, зсунуться по фазі відносно зміни зовнішнього навантаження. Таким чином, вектор переміщень можна подати у вигляді

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{y}}_s \sin \theta t + \bar{\mathbf{y}}_c \cos \theta t, \quad (3.244)$$

де $\bar{\mathbf{y}}_s = \{y_{1s} \ y_{2s} \ \dots \ y_{ns}\}^T$ – n -вимірний вектор, компоненти якого є коефіцієнтами при $\sin \theta t$ у відповідних динамічних змінних, $\bar{\mathbf{y}}_c = \{y_{1c} \ y_{2c} \ \dots \ y_{nc}\}^T$ – коефіцієнти при $\cos \theta t$, тобто

$$y_i(t) = y_{is} \sin \theta t + y_{ic} \cos \theta t \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.245)$$

Підставляючи (3.244) у (3.243), одержуємо

$$\begin{aligned} & -\theta^2 \mathbf{M}(\bar{\mathbf{y}}_s \sin \theta t + \bar{\mathbf{y}}_c \cos \theta t) + \theta \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}}_s \cos \theta t - \bar{\mathbf{y}}_c \sin \theta t) + \\ & + \mathbf{K}(\bar{\mathbf{y}}_s \sin \theta t + \bar{\mathbf{y}}_c \cos \theta t) = \bar{\mathbf{p}}_0 \sin \theta t. \end{aligned} \quad (3.246)$$

Групуючи доданки при $\sin \theta t$ та $\cos \theta t$, рівняння (3.246) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \left(-\theta^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}_s - \theta \mathbf{C}\bar{\mathbf{y}}_c \right) \sin \theta t + \\ & + \left(-\theta^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{y}}_c + \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}_c + \theta \mathbf{C}\bar{\mathbf{y}}_s \right) \cos \theta t = \bar{\mathbf{p}}_0 \sin \theta t. \end{aligned} \quad (3.247)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin\theta t$ та $\cos\theta t$, стосовно компонент векторів \bar{y}_s та \bar{y}_c одержимо систему $2n$ лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M} & -\theta \mathbf{C} \\ \theta \mathbf{C} & \mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_s \\ \bar{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.248)$$

В розгорнутому вигляді система (3.248) переписується так:

$$\begin{aligned} (k_{11} - \theta^2 m_1) y_{1s} + k_{12} y_{2s} + \dots + k_{1n} y_{ns} - \theta c_{11} y_{1c} - \theta c_{12} y_{2c} - \dots - \theta c_{1n} y_{nc} &= p_{10}, \\ k_{21} y_{1s} + (k_{22} - \theta^2 m_2) y_{2s} + \dots + k_{2n} y_{ns} - \theta c_{21} y_{1c} - \theta c_{22} y_{2c} - \dots - \theta c_{2n} y_{nc} &= p_{20}, \\ \dots & \dots \\ k_{1n} y_{1s} + k_{2n} y_{2s} + \dots + (k_{nn} - \theta^2 m_n) y_{ns} - \theta c_{n1} y_{1c} - \theta c_{n2} y_{2c} - \dots - \theta c_{nn} y_{nc} &= p_{n0}, \end{aligned} \quad (3.248')$$

$$\begin{aligned} \theta c_{11} y_{1s} + \theta c_{12} y_{2s} + \dots + \theta c_{1n} y_{ns} + (k_{11} - \theta^2 m_1) y_{1c} + k_{12} y_{2c} + \dots + k_{1n} y_{nc} &= 0, \\ \theta c_{21} y_{1s} + \theta c_{22} y_{2s} + \dots + \theta c_{2n} y_{ns} + k_{21} y_{1c} + (k_{22} - \theta^2 m_2) y_{2c} + \dots + k_{2n} y_{nc} &= 0, \\ \dots & \dots \\ \theta c_{n1} y_{1s} + \theta c_{n2} y_{2s} + \dots + \theta c_{nn} y_{ns} + k_{n1} y_{1c} + k_{n2} y_{2c} + \dots + (k_{nn} - \theta^2 m_n) y_{nc} &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши систему (3.248), знайдемо вектори \bar{y}_s та \bar{y}_c і за допомогою представлення (3.244) визначимо режим гармонічних коливань $\bar{y}(t)$. Вектор $\bar{y}(t)$ можна подати також у вигляді

$$\bar{y}(t) = \left\{ \rho_1 \sin(\theta t + \varphi_1) \quad \rho_2 \sin(\theta t + \varphi_2) \quad \dots \quad \rho_n \sin(\theta t + \varphi_n) \right\}^T, \quad (3.249)$$

де ρ_i – амплітуда,

$$\rho_i = \sqrt{y_{is}^2 + y_{ic}^2}; \quad (3.250)$$

φ_i – фаза гармонічних коливань динамічної змінної $y_i(t)$,

$$\varphi_i = \arctg \frac{y_{ic}}{y_{is}}. \quad (3.251)$$

Через наявність матриці демпфірування \mathbf{C} визначник системи (3.248) на резонансних частотах на відміну від визначника системи

(3.241) не вироджуватиметься, і амплітуди ρ , прийматимуть скінченні значення. Таким чином, для динамічних систем з кількома ступенями вільності складається така ж сама ситуація, що й для систем з одним ступенем вільності: сили опору, хоча вони й відносно малі, відіграють значну роль при резонансних та близьких до них режимах коливань. Саме ці сили компенсують надходження енергії від зовнішнього впливу. Поза резонансними зонами ці сили несуттєво впливають на результат.

Водночас необхідно зазначити, що розв'язування системи (3.248) при великих n пов'язане з великими труднощами. Річ у тім, що матриця системи (3.248) на відміну від матриці системи (3.241) має нестрічкову структуру. Наявність матриці C потребує спеціальної організації обчислювального процесу.

Якщо задано не матрицю жорсткості K , а матрицю податливості B , то система лінійних алгебричних рівнянь, аналогічних (3.248), стосовно компонент вектора \bar{y}_s та \bar{y}_c будується виходячи із системи (3.180).

3.3.4 Метод нормальних координат

Рівняння руху в нормальних координатах за відсутності сил непружного опору. Динамічна поведінка пружної системи описується системою диференціальних рівнянь типу (3.227), де як невідомі розглядаються компоненти n -вимірного вектора $\bar{y}(t)$ динамічних змінних. У загальному випадку ці рівняння є зав'язаними і їх інтегрування при великих n становить серйозну обчислювальну проблему. При дослідженні реальних об'єктів модель пружної системи може мати десятки тисяч ступенів вільності. Пряме застосування таких моделей неможливе. У такому разі необхідно редукувати вихідну дискретну динамічну модель (3.227), тобто здійснити перехід до динамічних моделей меншої розмірності, що включають, проте, інформацію про суттєві моменти розглядуваних динамічних процесів.

Ефективним підходом, за допомогою якого можна будувати адекватні розрахункові динамічні моделі, є метод нормальних

координат. Шукану реакцію динамічної системи подають у вигляді суперпозиції власних форм з невідомими коефіцієнтами (модальними амплітудами).

Розглянемо спочатку цей підхід на прикладі аналізу динамічних процесів у пружній системі, дисипативними силами в якій можна знехтувати. Система (3.227) в цьому разі записується у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{p}}(t). \quad (3.252)$$

Розв'язок системи (3.252) подамо у вигляді

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\Phi}_1 z_1(t) + \bar{\Phi}_2 z_2(t) + \dots + \bar{\Phi}_n z_n(t), \quad (3.253)$$

де $\bar{\Phi}_j$ ($j = 1, \dots, n$) – нормовані власні форми коливань розглядуваної системи.

Коефіцієнти $z_j(t)$ вважаються узагальненими координатами, за допомогою яких можна подати будь-який деформований стан розглядуваної системи. Важливо зазначити, що при переході від вектора динамічних перемішень $\bar{\mathbf{y}}(t)$ до вектора узагальнених координат

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \{z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_n(t)\}^T$$

втрати інформації немає, проте система диференціальних рівнянь стосовно координат вектора $\bar{\mathbf{z}}(t)$ розв'язується набагато простіше.

Використовуючи матрицю Φ (3.205), представлення (3.253) записуємо у вигляді

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \Phi \bar{\mathbf{z}}(t), \quad (3.254)$$

звідки вектор прискорень

$$\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t) = \Phi \ddot{\bar{\mathbf{z}}}(t). \quad (3.255)$$

Підставляючи (3.254) та (3.255) у (3.252), одержуємо

$$\mathbf{M}\Phi \ddot{\bar{\mathbf{z}}}(t) + \mathbf{K}\Phi \bar{\mathbf{z}}(t) = \bar{\mathbf{p}}(t). \quad (3.256)$$

Множимо векторну рівність на матрицю Φ^T :

$$\Phi^T \mathbf{M}\Phi \ddot{\bar{\mathbf{z}}}(t) + \Phi^T \mathbf{K}\Phi \bar{\mathbf{z}}(t) = \Phi^T \bar{\mathbf{p}}(t). \quad (3.257)$$

Згідно з (3.206) та (3.211) система (3.257) переписується у вигляді

$$\ddot{z}_j + \omega_j^2 z_j = q_j(t) \quad (j=1, \dots, n), \quad (3.258)$$

де функції $q_j(t)$ – компоненти вектора узагальненого навантаження $\bar{q}(t) = \{q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)\}^T$, що визначається співвідношенням

$$\bar{q}(t) = \Phi^T \bar{p}(t). \quad (3.259)$$

Система диференціальних рівнянь (3.259) являє собою модель розглядуваної пружної системи, яку записано в узагальнених координатах. Основна відмінність системи (3.258) від системи (3.252) полягає в тому, що кожне рівняння системи (3.258) можна інтегрувати незалежно, а потім визначити деформований стан пружної системи за допомогою (3.254).

Таким чином, знаючи спектр власних коливань пружної системи, можна суттєво спростити її динамічний аналіз.

Незв'язані рівняння коливань з урахуванням затухання. Тепер розглянемо питання, які пов'язані із застосуванням нормальних динамічних процесів у демпфированих пружних системах, що описуються системою (3.227).

При переході до нормальних координат вектор швидкості $\dot{\bar{y}}$ записується у вигляді

$$\dot{\bar{y}} = \Phi \dot{\bar{z}}(t). \quad (3.260)$$

Підставляючи (3.254), (3.255), (3.260) у (3.179), одержуємо

$$M \Phi \ddot{\bar{z}}(t) + C \Phi \dot{\bar{z}}(t) + K \Phi \bar{z}(t) = p(t). \quad (3.261)$$

Множимо векторну рівність (3.261) на матрицю Φ^T :

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\bar{z}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\bar{z}}(t) + \Phi^T K \Phi \bar{z}(t) = \Phi^T p(t). \quad (3.262)$$

В загальному випадку система (3.262) не розпадається на систему незв'язаних рівнянь стосовно узагальнених координат $z_j(t)$. Ці рівняння зв'язуються виразом $\Phi^T C \Phi \dot{\bar{z}}(t)$. У ряді випадків можна припустити, що для матриці C виконуються умови ортогональності, тобто

$$\varphi_j^T C \varphi_i = 0 \quad (i \neq j). \quad (3.263)$$

Уведемо позначення:

$$\varphi_j^T C \varphi_j = 2\xi_j \omega_j. \quad (3.264)$$

З урахуванням (3.263) і (3.264) можна записати таку рівність:

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n). \quad (3.265)$$

З використанням (3.206), (3.211), (3.259), (3.265) систему (3.261) можна переписати у вигляді

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = q_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.266)$$

Таким чином, якщо матриця демпфірування C задовольняє умову (3.265), використання нормальних координат дає змогу здійснити перехід до динамічної моделі розглядуваної споруди, яка є системою незв'язаних осциляторів, коливання кожного з яких не пов'язані з рухом інших осциляторів. Це істотно спрощує аналіз динамічних процесів у розглядуваній конструкції.

Тут важливо підкреслити ще одну обставину, про яку вже йшлося. Річ у тім, що для адекватного опису пружних властивостей конструкції матриці жорсткості K вихідна модель може мати порядок, що дорівнює десяткам, або навіть сотням тисяч. Водночас при використанні моделі типу (3.266) достатньо утримати кілька десятків осциляторів, власні частоти яких перебувають у смузі частот діючого навантаження.

Нехай вся енергія діючого на споруду навантаження припадає на діапазон частот, в якому розташовані власні частоти $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$. Подамо вектор вузлових перемішень $\bar{y}(t)$ у вигляді

$$\bar{y}(t) = \tilde{\Phi} \bar{z}(t), \quad (3.267)$$

де $\bar{z}(t) = \{z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_l(t)\}^T$ – l -вимірний вектор узагальнених координат; $\tilde{\Phi}$ – прямокутна матриця розмірності $n \times l$,

$$\tilde{\Phi} = \{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_l\}. \quad (3.268)$$

Якщо повторити викладки, які приводять до системи (3.266), використовуючи замість матриці Φ матрицю $\tilde{\Phi}$, можна отримати систему

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = q_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, l). \quad (3.269)$$

Важливо розуміти, що перетворення (3.254) і (3.267) принципово різняться. Перетворення (3.254) є тотожним, тому тут перехід до узагальнених координат не приводить до втрати точності. Перетворення (3.267) виконує проектування n -вимірного простору на l -вимірний. В цьому разі відбувається редукція моделі. Представлення (3.267) є наближенням. Якість редукованої моделі істотно залежить від вдалого вибору матриці $\tilde{\Phi}$. При розрахунку багатьох споруд успішно використовуються моделі, для яких розмірність l істотно менша від n .

Умова ортогональності форм коливань стосовно матриці демпфірування. Сумісна система рівнянь (3.179) розпалася на окремі рівняння (3.266) тільки завдяки припущенню, що матриця демпфірування C системи (3.179) задовольняє умову ортогональності (3. 263). Можна показати аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні ортогональності власних форм коливань, що з механічної точки зору умова (3.263) еквівалентна умові рівності нулю роботи сил опору, що відповідають одній формі коливань, на переміщеннях, які відповідають іншій формі коливань. Якщо матриця C симетрична, то умова рівності нулю роботи буде взаємною. Якщо умова (3.263) не виконується, то це означає, що сили демпфірування однієї форми коливань взаємодіють з іншими гармоніками, тобто здійснюють роботу, яка не дорівнює нулю.

Якщо сили демпфірування зумовлені в'язкопружним деформуванням матеріалу, то матрицю демпфірування можна визначити наступним чином

$$C = \nu K, \quad (3.270)$$

де ν – коефіцієнт, що характеризує в'язкість матеріалу;
 K – матриця жорсткості дискретної динамічної моделі.

Внаслідок другої умови ортогональності (3.211) власних форм для матриці C задовольняється умова (3.263). Таким чином, якщо сили демпфірування зумовлені в'язкопружним деформуванням матеріалу, то взаємна робота цих сил, що відповідають окремим формам коливань, дорівнюватиме нулю.

Проте необхідно зазначити, що умова ортогональності (3.263) виконується зовсім не для всякої матриці демпфірування. Якщо у динамічній системі дисипація енергії визначається внутрішнім непружним опором і силами опору, що передаються від зовнішніх демпферів (див.рис. 3.26), то матрицю демпфірування можна подати у вигляді

$$C = \nu K + C_g,$$

де C_g – аналогічна матриця, що визначається характеристиками зовнішніх демпферів. Для цієї матриці умови ортогональності (3.263), взагалі кажучи, не виконуються.

Іноді матриця демпфірування подається у вигляді лінійної комбінації матриці мас та матриці жорсткості:

$$C = a_0 M + a_1 K. \quad (3.271)$$

Згідно з (3.206) і (3.211) матриця C задовольнятиме умову ортогональності (3.263). На цей факт звернув увагу ще Релей, тому параметри a_0 і a_1 іноді називають коефіцієнтами матриці демпфірування Релея.

Часто представлення Релея використовується для наближеного врахування внутрішнього та зовнішнього опору; при цьому коефіцієнти a_0 та a_1 підбирають так, щоб декременти коливань, які відповідають затухаючим вільним коливанням, що відбуваються за двома характерними формами власних коливань, були частотно незалежними.

Узагальненням (3.271) є подання матриці C у вигляді

$$C = M \sum_b a_b (M^{-1} K)^b, \quad (3.272)$$

кількість доданків в якому можна вибирати довільною. Матриця демпфірування Релея (3.271) являє собою окремий випадок

представлення (3.272). Включаючи додаткові члени в цей вираз, можна досягти більшого ступеня точності при визначенні параметрів затухання за різними формами згідно з матрицею затухання. За допомогою цієї матриці затухання можна визначити коефіцієнти затухання, які необхідні, щоб одержати незв'язану систему рівнянь з будь-якими потрібними параметрами затухання при довільній кількості форм коливань.

Існує інший метод визначення матриці затухання, який прямо зв'язаний із системою модальних параметрів затухання. Вихідними тут є коефіцієнти втрат γ_k ($k=1,2,\dots,n$) для кожної форми коливань. Можна виразити параметр затухання ξ_k за k -ю формою через коефіцієнт втрат γ_k , що відповідає цій формі:

$$\xi_k = \frac{\gamma_k}{2}. \quad (3.273)$$

Таким чином, тут має місце така ситуація. Спочатку розглядається як би система (3.252), потім із застосуванням методу нормальних координат виводяться рівняння в узагальнених координатах (3.258), а рівняння (3.266) одержуються із (3.28) шляхом додавання до кожного j -го рівняння доданку $2\xi_j \omega_j \dot{z}$, де параметр затухання ξ_j визначається з (3.273).

Цей широко вживаний прийом урахування демпфірування називається методом квазінормальних координат.

Якщо додержуватися теорії непружного поглинання енергії (див. п. 3.2.3), то коефіцієнт γ має прийматися як константа матеріалу конструкції (див. табл. 3.1) однаковим для всіх $k=1,2,\dots,n$.

Отже, з використанням модальних параметрів затухання побудовано систему рівнянь (3.266). Тепер можна, маючи доданки в рівняннях (3.266), які характеризують дисипативні властивості динамічної розглядуваної системи, визначити невідому матрицю демпфірування C в рівняннях (3.227). Враховуючи, що рівняння (3.266) є іншим представленням рівняння (3.261), можна записати:

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n) = \Xi. \quad (3.274)$$

Матрична рівність (3.274) являє собою систему n^2 лінійних алгебричних рівнянь стосовно компонент матриці C . Матрицю C можна одержати, домножуючи матрицю Ξ зліва на матрицю $(\Phi^T)^{-1}$, обернену до матриці Φ^T , а справа – на матрицю Φ^{-1} , обернену до матриці Φ . Згідно з першою умовою ортогональності матриці форм (3.206)

$$\Phi^T M \Phi = E,$$

звідки випливає, що

$$(\Phi^T)^{-1} = M \Phi, \quad (3.275)$$

$$\Phi^{-1} = \Phi^T M. \quad (3.276)$$

Таким чином,

$$C = M \Phi \Xi \Phi^T M. \quad (3.277)$$

Отже, за допомогою (3.277) із заданої системи модальних характеристик визначається матриця демпфірування дискретної динамічної моделі, що описується системою (3.227). Така процедура корисна, коли динамічна реакція аналізується яким-небудь іншим методом, наприклад шляхом редукування за допомогою базису, що відрізняється від базису Φ , або шляхом інтегрування крок за кроком рівнянь коливань непружної системи.

Отже, для сил опору, що визначаються матрицями демпфірування типу (3.271), (3.272) і (3.277), виконується умова рівності нулю роботи цих сил, що відповідають власним коливанням з частотою ω_k , на переміщеннях, що відповідають власним коливанням з частотою ω_l ($\omega_k \neq \omega_l$).

Алгоритм застосування методу нормальних координат. Ще раз розглянемо послідовні кроки застосування методу нормальних координат при дослідженні вимушених коливань систем зі скінченним числом ступенів свободи.

1. Вихідним пунктом є розрахункова динамічна модель, яка описується рівнянням (3.227):

$$M\ddot{\bar{y}}(t) + C\dot{\bar{y}}(t) + K\bar{y}(t) = \bar{p}(t).$$

2. Першим кроком дослідження є аналіз частот та форм вільних коливань. Для вільних коливань без урахування затухання записується така узагальнена проблема власних значень (3.183):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{0}},$$

розв'язання якої визначає власні частоти $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ та відповідну матрицю ортонормованих власних форм Φ .

3. Перехід до нормальних координат:

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \Phi \bar{\mathbf{z}}(t). \quad (3.278)$$

4. Визначення вектора узагальнених навантажень

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \Phi^T \bar{\mathbf{p}}(t)$$

та матриці демпфірування, записану в нормальних координатах (3.274):

$$\Xi = \Phi^T \mathbf{C} \Phi.$$

Тут вважаємо, що для сил опору, які визначаються матрицею \mathbf{C} , виконується умова рівності нулю взаємної роботи цих сил, що відповідають окремим формам коливань. Якщо матриця \mathbf{C} невідома, то матрицю Ξ можна будувати, виходячи з модальних коефіцієнтів втрат.

5. Складання незв'язаних рівнянь коливань стосовно узагальнених координат:

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.279)$$

6. Виходячи з початкових умов для динамічних змінних

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(0) &= \bar{\mathbf{y}}_0, \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}(0) &= \dot{\bar{\mathbf{y}}}_0. \end{aligned} \quad (3.280)$$

визначаються початкові умови для узагальнених координат. Для цього необхідно обернути представлення (3.278), тобто виразити вектор узагальнених координат $\bar{\mathbf{z}}(t)$ через вектор динамічних змінних $\bar{\mathbf{y}}(t)$. Помноживши обидва члени векторної рівності (3.247) на матрицю $\Phi^T \mathbf{M}$, згідно з (3.276) одержимо

$$\bar{z}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \bar{y}(t). \quad (3.281)$$

Звідки з урахуванням (3.280) можна записати:

$$\bar{z}(0) = \Phi^T \mathbf{M} \bar{y}_0 = \bar{z}_0, \quad (3.282)$$

$$\dot{\bar{z}}(0) = \Phi^T \mathbf{M} \dot{\bar{y}}_0 = \dot{\bar{z}}_0.$$

7. Визначаються реакції системи для окремої форми коливань. Після етапів 5 і 6 дістаємо систему рівнянь, що розпалася, стосовно узагальнених координат з відповідними початковими умовами. Виходячи з (3.279) і (3.282) для j -ї узагальненої координати запишемо диференціальне рівняння

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = q_j(t) \quad (3.283)$$

та початкові умови

$$\begin{aligned} z_j(0) &= z_{j0}, \\ \dot{z}_j(0) &= \dot{z}_{j0}. \end{aligned} \quad (3.284)$$

Таким чином, сформульовано задачу про вимушені коливання систем з одним ступенем вільності. Розв'язок залежить від вигляду узагальненого навантаження $q_j(t)$. В найбільш загальному випадку розв'язок задачі (3.283), (3.284) можна подати у вигляді

$$z_j(t) = z_{jc}(t) + z_{jp}(t),$$

де $z_{jc}(t)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = 0 \quad (3.285)$$

з початковими умовами (3.284); $z_{jp}(t)$ – розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.283) з початковими умовами

$$\begin{aligned} z_{jp}(0) &= 0, \\ \dot{z}_{jp}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.286)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$z_{jc}(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \left[\frac{\dot{z}_{j0} + z_{j0} \xi_j \omega_j}{\omega_{Dj}} \sin \omega_{Dj} t + z_{j0} \cos \omega_{Dj} t \right].$$

Розв'язок задачі (3.283), (3.286) запишемо за допомогою інтеграла Дюамеля:

$$z_{jP}(t) = \frac{1}{\omega_{Dj}} \int_0^t q_j(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{Dj}(t-\tau) d\tau,$$

де

$$\omega_{Dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}.$$

8. Після визначення закону зміни узагальнених координат $z_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$) за допомогою представлення (3.278) можна визначити реакцію системи в динамічних змінних:

$$\bar{y}(t) = \bar{\varphi}_1 z_1(t) + \bar{\varphi}_2 z_2(t) + \bar{\varphi}_3 z_3(t) + \dots \quad (3.287)$$

Цей метод називається методом складання форм коливань. Слід зазначити, що для більшості реальних схем навантаження внесок різних форм коливань буде найбільшим для найнижчих частот та зменшується для більш високих частот. Тому не потрібно утримувати в представленні (3.287) всі вищі форми коливань. Можна обмежитися тільки кількома членами. Важливо також пам'ятати, що дискретна модель складної споруди дає меншу точність при апроксимації вищих форм. З цієї причини число форм, які утримуються в представленні (3.287), звичайно не перевищує десятків, а іноді й одиниць.

9. Останнім етапом розрахунку є визначення параметрів пружних відновлюючих сил. Процес зміни переміщень системи можна розглядати як основну характеристику її реакції при динамічному навантаженні. Інші параметри реакції, такі як напруження та зусилля в різних елементах конструкції, можна обчислити за відомим переміщенням. Вектор узагальнених пружних сил \bar{f}_s визначається за допомогою виразу:

$$\bar{f}_s = \mathbf{K} \bar{y}(t) = \mathbf{K} \Phi \bar{z}(t). \quad (3.288)$$

Часто зручніше виразити пружні сили через інерційні сили, що генеруються при власних коливаннях без урахування затухання. Запишемо (3.288) у вигляді

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \mathbf{K}\bar{\Phi}_1 z_1(t) + \mathbf{K}\bar{\Phi}_2 z_2(t) + \mathbf{K}\bar{\Phi}_3 z_3(t) + \dots \quad (3.289)$$

Враховуючи, що $\bar{\Phi}_j$ – форма власних коливань з частотою ω_j , згідно з (3.183) можна записати векторну рівність:

$$\mathbf{K}\bar{\Phi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_j \quad (j=1,2,\dots,n). \quad (3.290)$$

Таким чином, вектор узагальнених пружних сил $\bar{\mathbf{f}}_s$ подається у вигляді

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \omega_1^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_1 z_1(t) + \omega_2^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_2 z_2(t) + \omega_3^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_3 z_3(t) + \dots \quad (3.291)$$

У матричній формі маємо

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \mathbf{M}\Phi\Omega^2 \bar{\mathbf{z}}(t), \quad (3.292)$$

де діагональна матриця Ω^2 визначається виразом (3.211).

Якщо в представленні (3.287) утримується q форм, тобто вектор динамічних переміщень $\bar{\mathbf{y}}(t)$ подається у вигляді

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\Phi} \bar{\mathbf{z}}^0(t), \quad (3.293)$$

де $\bar{\mathbf{z}}^0(t) = \{z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_q(t)\}^T$ – урізаний вектор узагальнених координат; $\tilde{\Phi}$ – матриця розмірності $n \times q$, то вектор узагальнених пружних сил записується у вигляді

$$\bar{\mathbf{f}}_s(t) = \mathbf{M}\tilde{\Phi}\tilde{\Omega}^2 \bar{\mathbf{z}}^0(t), \quad (3.294)$$

де

$$\tilde{\Omega} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_q^2).$$

Оскільки у виразі (3.294) кожна форма множиться на квадрат модальної частоти, то, очевидно, вищі форми коливань при визначенні сил мають більший вплив, ніж при визначенні переміщень. Тому при знаходженні з потрібною точністю пружних поновлюючих сил слід враховувати більшу кількість модальних складових, ніж при визначенні переміщень.

На закінчення необхідно зазначити таке. При викладанні методу нормальних координат ми ґрунтувалися на системі (3.227), яку сформовано за допомогою матриці жорсткості \mathbf{K} . Проте безпо-

середньою вихідною інформацією при побудові рівнянь, що розплалися, стосовно узагальнених координат є спектр власних частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$, матриця ортонормованих власних форм Φ , вектор зовнішнього впливу $\bar{p}(t)$ і модальні характеристики затухання ξ_j . Всю цю інформацію можна одержати виходячи із системи, яку сформовано за допомогою матриці податливості \mathbf{B} .

3.4 Дослідження сейсмостійкості будівельних конструкцій

3.4.1 Сейсмічні навантаження і сейсмічні коливання

З усіх видів динамічного навантаження, що можуть діяти на будівельну споруду, для спеціаліста-будівельника найбільш цікавим, безумовно, є сейсмічне навантаження. Важливість проблеми сейсмостійкості споруд обумовлена можливими катастрофічними наслідками сильних землетрусів.

Щорічно на земній кулі відбувається понад 300 тис. землетрусів, більшість з яких має невелику силу чи проявляється в ненаселених районах. Але деякі осередки сильних землетрусів розміщуються неподалік від населених районів. У цьому випадку відбуваються великі пошкодження і обвалення не досить міцних (несеїсмостійких) споруд. Часто наслідком землетрусів стають великі пожежі, втрати від яких можуть бути не меншими, ніж безпосередньо від самих землетрусів. Але навіть після самих сильних землетрусів деяка частина споруд залишалась незруйнованою. Поступове накопичення відомостей про такі випадки дозволило будівельникам виробити деякі правила, виконання яких знижувало нищівні наслідки землетрусів.

Землетруси відбуваються внаслідок швидкого виділення в глибині Землі великої кількості енергії, що призводить до поширення в земній корі сейсмічних хвиль, які і проявляються у вигляді сейсмічних рухів (коливань) ґрунту. Найбільш руйнівні землетруси, що відчуються на великих територіях, виникають через тектонічні зміщення блоків земної кори по розломах. Сейсмічні коливання можуть також мати й інші причини: вибухи,

гірські удари в підземних виробітках, вулканічна діяльність, рух транспорту тощо. Але такі коливання є більш слабкими і зазвичай відчуються лише на невеликій відстані від джерела збудження.

Сейсмічні збурювання у формі пружних хвиль розповсюджуються в усіх напрямках і, досягши поверхні землі, породжують землетрус, тобто коливальні рухи верхніх шарів ґрунтової товщі. Місце в глибині кори, де розташовується джерело збудження називають *осередком* землетрусу або *гіпоцентром*, а його проекція на поверхню Землі — *епіцентром* (рис. 3.30)

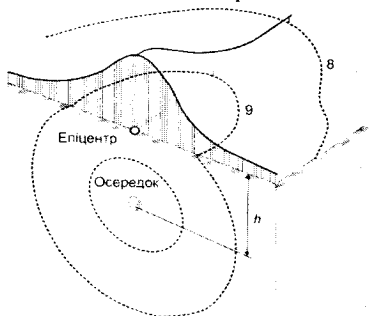


Рис. 3.30

У сейсмології та у сейсмостійкому будівництві використовуються дві групи характеристик землетрусів. Перша характеризує силу землетрусу в осередку і визначається *магнітудою* M , а друга характеризує явища на поверхні землі і визначається *сейсмічною інтенсивністю* I .

Із сейсмологічної точки зору найбільш важливим параметром є магнітуда M . Ця

характеристика сили землетрусу була запропонована Гутенбергом і Ріхтером на початку 40-х років минулого століття. Магнітуда підраховується на основі інструментальних записів сейсмічних коливань. Кожному значенню M відповідає певна величина енергії деформації, вивільненої в осередку землетрусу. Найбільш слабкому місцевому землетрусу відповідає за шкалою Ріхтера значення $M = 4 - 5$, а катастрофі планетарного масштабу — $M = 8$. За теоретичними оцінками найбільше можливе значення $M = 8,9 - 9,2$. Збільшення магнітуди землетрусу на одиницю відповідає збільшенню енергії коливань у 100 разів.

У табл. 3.2 наведено класифікацію землетрусів за магнітудою та їхню середню кількість на Землі за один рік.

Сьогодні у світі використовують, головним чином, такі: модифікована шкала Меркаллі (ММ) (версія 1956 р.); шкала, яка

була розроблена у 1964 р. Медведєвим, Спонхойром та Карником (MSK-64); шкала Японського метеорологічного агентства (JMA). У нашій країні прийнята шкала MSK-64. Останнім часом в країнах Європейської Співдружності застосовується Європейська макросейсмічна шкала (EMS-98). Всі ці шкали містять інформацію двох видів: макросейсмічну (описову) та інструментальну. Перша характеризує інтенсивність землетрусу на основі суб'єктивних оцінок, друга – кількісні оцінки сейсмічних рухів ґрунту, які отримані за допомогою інструментальних записів.

Таблиця 3.2

Характеристика землетрусів	Значення M	Середнє N у рік
Катастрофа планетарного масштабу	8	1 – 2
Сильні, регіонального масштабу	7 – 8	15 – 20
Сильні, локального масштабу	6 – 7	100 – 150
Середні	5 – 7	750 – 1000
Слабкі, місцеві	4 – 5	5000 – 7000

Описова частина шкали (табл. 3.3) дозволяє прогнозувати інтенсивність землетрусів у даному регіоні, виходячи з історичних даних про минулі землетруси, коли інструментальних записів ще не існувало. Інтенсивність оцінюється за зовнішніми проявами землетрусу (макроскопічні дані): вплив на людей, на будівлі, а також за проявами на поверхні землі.

У відповідності зі шкалою MSK-64 оцінка ушкоджень дається для будинків, що побудовані без антисейсмічних заходів, і позначається такими типами: *A* - будинки зі стінами із рваного каменю, з невипаленої цегли або глинобитних стін; *B* - будинки зі стінами з обпаленої цегли, з великих бетонних блоків або із дрібних каменів правильної форми; *B* - великопанельні будинки, будинки зі сталевим або залізобетонним каркасом, дерев'яні добротні будівлі.

Ушкодження класифікуються в такий спосіб:

- *легкі* (1-го ступеня) — невеликі тріщини в стінах, ушкодження невеликих ділянок штукатурки;

- *помірні* (2-го ступеня) — невеликі тріщини в стінах і в стиках панелей, відколи значних ділянок штукатурки, падіння черепиці з дахів, тріщини в димарях, падіння димарів;
- *важкі* (3-го ступеня) — великі, глибокі й наскрізні тріщини в стінах, значні тріщини в стиках панелей, обвалення димарів;

Таблиця 3.3

Бали	Характеристики ушкоджень будинків і інших споруд	
6	Ушкодження конструкцій Прояви на поверхні землі	Ушкодження 1-го ступеня в окремих будинках типу <i>B</i> і в багатьох типу <i>A</i> ; 2-го ступеня в окремих будинках типу <i>A</i> . У деяких випадках – зсуви, на сирих ґрунтах можливі видимі тріщини шириною до 1 см; у гірських районах - окремі зсуви, можливі зміни дебіту джерел і рівня води в колодязях.
7	Ушкодження конструкцій Прояви на поверхні землі	Ушкодження 1-го ступеня в багатьох будинках типу <i>B</i> та 2-го ступеня – в окремих будинках цього типу. У багатьох будинках типу <i>B</i> – 2-го ступеня і в окремих – 3-го. У багатьох будинках типу <i>A</i> – 3-го ступеня і в окремих будинках – 4-го. огорожах. В окремих випадках – зсуви проїзної частини доріг на крутих схилах і тріщини на дорогах. Порушення стиків трубопроводів. В окремих випадках – зміна рівня води в колодязях. У деяких випадках виникають або пропадають існуючі джерела води. Окремі випадки зсувів на піщаних й гравелістих берегах рік.
8	Ушкодження конструкцій Прояви на поверхні землі	У багатьох будинках типу <i>B</i> ушкодження 2-го ступеня та в окремих – 3-го. У багатьох будинках типу <i>B</i> ушкодження 3-го ступеня, а в окремих – 4-го. У багатьох будинках типу <i>A</i> ушкодження 4-го ступеня, а в окремих – 5-го. Пам'ятники й статуї зрушуються, надгробні пам'ятники перекидаються. Кам'яні огорожі руйнуються

Закінчення таблиці 3.3

		<p>. Невеликі зсуви на крутих укосах виїмок і насипів доріг, тріщини в ґрунтах досягають декількох сантиметрів. Можливе виникнення нових водоїм. У багатьох випадках змінюється дебіт джерел і рівень води в колодязях. Іноді пересохлі колодязі наповнюються водою або існуючі висихають.</p>
9	<p>Ушкодження конструкцій</p> <p>Прояви на поверхні землі</p>	<p>У багатьох будинках типу <i>В</i> ушкодження 3-го ступеня і в окремих – 4-го.</p> <p>У багатьох будинках типу <i>Б</i> ушкодження 4-го ступеня і в окремих – 5-го.</p> <p>Пам'ятники й колони перекидаються.</p> <p>Значні ушкодження берегів штучних водоїмищ. розриви частин підземних трубопроводів. В окремих випадках – скривлення рейок і ушкодження проїзних частин доріг.</p> <p>На рівнинах можливі повені. часто помітні наноси піску й мулу. Тріщини в ґрунтах до 10 см, а по схилам і берегам – більше 10 см. Крім того, багато тонких тріщин у ґрунтах. Часті зсуви й опадання ґрунтів, обвали гірських порід.</p>

-
- *руйнівні* (4-го ступеня) — обвалення зовнішніх стін і заповнення каркасів, пролами в стінах, обвалення частин будинків, руйнування в'язів між окремими частинами будинків;
- *обвальні* (5-го ступеня) — повне руйнування будинків.

За результатами вивчення інтенсивності землетрусів складають карти сейсмічного районування. На цих картах вказані райони з однаковою очікуваною інтенсивністю землетрусів. Для території України такі карти наведені у додатках до державних будівельних норм (ДБН В.1.1-12:2014).

Слід враховувати, що карти сейсмічного районування дають середні значення інтенсивності землетрусів, в той час як руйнівні значною мірою залежать від геологічних особливостей та ґрунтових умов конкретної будівельної площадки. Тому при виборі площадки

для відповідальної споруди проводиться великий обсяг геологічних та сейсмологічних досліджень з метою визначення реальної сейсмічної небезпеки.

Найбільш повним представленням сейсмічних впливів є інструментальні записи *акселерограм* (залежність «прискорення-час»), *велосиграм* (залежність «швидкість-час») і *сейсмограм* («переміщення-час»). Приклади таких записів зображені на рис. 3.31.

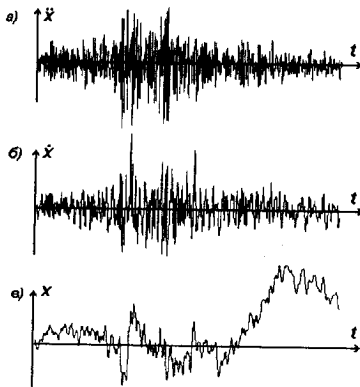


Рис. 3.31

Кожному балу сейсмічної шкали відповідають певні значення максимальних («пікових») характеристик руху ґрунту: переміщення, швидкості та прискорення. Зазвичай найбільший інтерес викликають пікові прискорення, оскільки їм пропорційні інерційні сейсмічні сили, що діють на споруду.

Природно, що для адекватного трактування сейс-

мічного збурення недостатньо тільки пікових характеристик руху. Оскільки землетрус – це динамічний процес, то реакція споруди залежить не тільки від максимальних значень перемішень, швидкостей та прискорень, але і від частотного складу збурень, втрат енергії та інших факторів.

Згідно чинним нормам єдиною вихідною сейсмологічною характеристикою району будівництва при проектуванні є сейсмічність, оцінювана в балах. Кожному балу нормами ставиться у відповідність певний розрахунковий рівень максимальних прискорень a_g . Значення a_g використовуються для визначення інерційних сейсмічних навантажень, які при розрахунку сейсмостійкості споруджень прикладаються як статичні.

Сейсмічні хвилі. Згідно з теорією механізму пружної віддачі, джерелом землетрусу є раптовий рух ґрунту по обидва боки розлому, що відбувається внаслідок розриву земної кори. Сам

землетрус являє собою систему хвиль коливаль, які збуджуються цією дислокацією.

На шляху від осередку до поверхні землі значна частина виділеної енергії поглинається і лише приблизно 7% досягає епіцентральної зони (більше при дуже сильних землетрусах).

Тріщини, що утворюються навколо осередку мають різні розміри і випромінюють різні хвилі, періоди яких зменшуються зі зменшенням довжини тріщини. Наявність в осередку різних за розмірами тріщин призводить до утворення багатого на різноманітні частоти спектру коливаль.

Від осередку землетрусу виходять хвилі чотирьох основних типів (рис. 3.32): поздовжні або Р-хвилі, поперечні або S-хвилі, поверхневі хвилі Лява, поверхневі хвилі Релея.

Поздовжні хвилі утворюються рухом часток вперед і назад вздовж напрямку поширення хвилі (вони подібні до звукових хвиль). Поперечні утворюються коливаннями часток у напрямку, перпендикулярному руху хвилі. У поверхневих хвилях Лява частки переміщуються горизонтально, під прямим кутом до напрямку поширення хвилі. У поверхневих хвилях Релея рух часток складається з вертикальних і горизонтальних складових, а сама частка рухається по еліптичній траєкторії (вони подібні до хвиль на поверхні води).

У дійсності, за рахунок відбиттів, переломлень і взаємодії кількість типів сейсмічних хвиль набагато більша. Зокрема, поперечні S-хвилі залежно від площини руху часток ґрунту розділяються на горизонтальні (horizontal) SH-хвилі й вертикальні (vertical) SV-хвилі.

Хвилі Р рухаються швидше, ніж хвилі S, звідси й букви Р і S у їхніх назвах, що розрізняють час приходу в точку спостереження: первинні (primary) і вторинні (secondary).

Варто зазначити, що поперечним хвилям властиві не тільки більш низькі швидкості поширення, але також знижені частоти коливаль і більш високі амплітуди, тому фаза коливаль ґрунту, що відповідає S –хвилям, визначає основну енергію землетрусів і приводить до основних руйнувань споруджень.

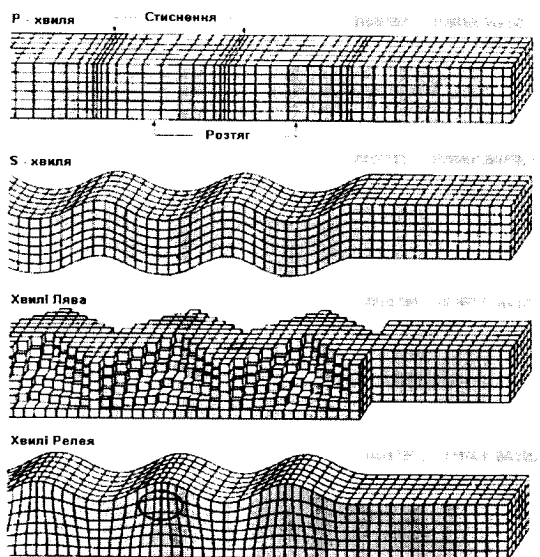


Рис. 3.32

Дані про швидкості поширення Р і S-хвиль наведені в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Вид ґрунту	Швидкість поширення пружних хвиль, м/с	
	поздовжніх	поперечних
1. Насипні ґрунти (піски, супіски тощо)	200	110
2. Лес і аналогічні ґрунти	390	135
3. Сухі піщані ґрунти	530	310
4. Водонасичені піщані ґрунти	950	500
5. Супіски	750	360
6. Суглинки	850	420
7. Тверді глинисті ґрунти	2750	1550
8. Піщаник пухкий	2000	1750
9. Глинисті сланці	3500	2100
10. Граніт, гнейс, базальт, діабаз	4000 - 5250	2350 - 3500

Сейсмічна реакція пружної системи. Те, що звичайно називають сейсмічним навантаженням, навантаженням у точному значенні цього слова не є. Споруда піддається впливу коливальних рухів основи, що виникає при землетрусі, а при русі самої споруди, викликаному цим кінематичним збудженням, виникають інерційні сили, які й прийнято називати сейсмічними навантаженнями. Отже, сейсмічне навантаження невіддільне від динамічних властивостей споруди, і являє собою не вплив землетрусу, а результат взаємодії землетрусу й споруди. Саме тому не можна описати сейсмічне навантаження, не торкаючись методики динамічного розрахунку.

Дискретну динамічну модель з кількома степенями вільності, яка описує коливання пружної системи при сейсмічному навантаженні, аналогічно виразу (3.149) запишемо у вигляді

$$M\ddot{\bar{y}} + C\dot{\bar{y}} + K\bar{y} = -a_g(t)M\bar{y}^g, \quad (3.295)$$

де $\bar{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)]^T$ – вектор узагальнених координат; M , C , K – відповідно матриця мас, матриця демпфірування та матриця жорсткості системи, що розглядається.

Скалярна функція $a_g(t)$ описує закон зміни прискорення ґрунту при сейсмічному навантаженні; постійний вектор $\bar{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \dots, y_l^g)^T$ характеризує просторову конфігурацію інерційного навантаження, яке обумовлене переносним рухом.

Вважається, що до моменту, коли сейсмічна хвиля досягає споруди, остання знаходиться у стані спокою:

$$\bar{y}(0) = 0, \quad \dot{\bar{y}}(0) = 0. \quad (3.296)$$

Розв'язання задачі Коші (3.295), (3.296) проводиться за методом нормальних координат. Вектор $\bar{y}(t)$ представляємо у вигляді (3.254). Відносно узагальнених координат $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_n(t)$ запишемо систему незв'язних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{z}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = -a_g(t)G_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.297)$$

де незалежні від часу компоненти детерміністичного вектора модальних коефіцієнтів внеску $\vec{G}=(G_1, G_2, \dots, G_n)^T$ визначасмо за формулою

$$G_i = \frac{L_i}{M_i}, \quad (3.298)$$

У формулі (3.298) через M_i та L_i позначені відповідно узагальнена маса при коливаннях за i -ю формою та коефіцієнт модального сейсмічного навантаження, які дорівнюють:

$$M_i = \sum_{j=1}^l m_j \phi_{ji}^2, \quad (3.299)$$

$$L_i = \sum_{j=1}^l m_j \phi_{ji}. \quad (3.300)$$

Кожне з рівнянь системи (3.297) відрізняється від рівняння коливань осцилятора (3.151) тільки множником G_i в правій частині, який відповідає внеску i -ї форми в загальну реакцію споруди.

Розв'язок кожного диференціального рівняння системи (3.297) знаходимо при початкових умовах:

$$z_i(0)=0, \quad \dot{z}_i(0)=0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.301)$$

Згідно з виразом (3.117) цей розв'язок визначасмо інтегралом Дюамеля

$$z_i(t) = -\frac{G_i}{\omega_{D_i}} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau, \quad (3.302)$$

де $\omega_{D_i} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$.

Виходячи з (3.254), компоненти вектора вузлових переміщень $\vec{y}(t)$ можна визначити наступним чином:

$$y_i(t) = -\sum_{j=1}^l \phi_{ij} \frac{G_j}{\omega_{D_j}} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{D_j} (t-\tau) d\tau, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.303)$$

Як бачимо, у випадку, коли $G_i=0$ ($L_i=0$) коливання за i -ю формою не збуджуються.

Для розрахунку на міцність важливо знати динамічні сили \bar{S} , що діють на систему в момент, коли вона отримала прогини \bar{y} . Вектор цих сил знаходимо з рівності:

$$\bar{S} = \mathbf{K}\bar{y} = \sum_{k=1}^n z_k \mathbf{K}\bar{\varphi}_k.$$

Враховуючи, що $\bar{\varphi}_k$ є власний вектор, останнє співвідношення запишемо у вигляді

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^n z_k \omega_k^2 \mathbf{M}\bar{\varphi}_k = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (3.304)$$

Вектор сумарних динамічних сил \bar{S} розпадається на n векторів, кожен з яких відповідає певній головній формі коливань:

$$\bar{S}_k = \begin{pmatrix} S_{1,k} \\ S_{2,k} \\ \dots \\ S_{l,k} \end{pmatrix} = z_k \omega_k^2 \begin{pmatrix} m_1 \varphi_{1,k} \\ m_2 \varphi_{2,k} \\ \dots \\ m_l \varphi_{l,k} \end{pmatrix}, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3.305)$$

Окрема компонента цього вектора, прикладена до j -ї маси, визначається наступним чином:

$$S_{jk}(t) = z_k(t) \omega_k^2 m_j \varphi_{jk} = m_j \eta_{jk} W_k(t) \frac{\omega_k^2}{\omega_{Dk}^2}, \quad (3.306)$$

де безрозмірна величина

$$\eta_{jk} = \varphi_{jk} G_k \quad (3.307)$$

називається коефіцієнтом форми коливань, а множник $W_k(t)$ знаходиться за формулою

$$W_k(t) = -\omega_{Dk}^2 \frac{z_k(t)}{G_k} = -\omega_{Dk} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_{Dk} (t-\tau) d\tau. \quad (3.308)$$

Якщо знехтувати різницею між ω_k^2 і ω_{Dk}^2 , то у формулі (3.306) величину $\eta_{jk} W_k(t)$ можна трактувати як прискорення, що отримує маса m_j під дією сили S_{jk} , рухаючись у складі k -ї форми коливання в момент часу t . Таким чином, \bar{S}_k є вектором k -го модального інерційного навантаження.

Як вже зазначалось, кожне з рівнянь системи (3.297) можна розглядати як таке, що описує коливання системи з одним ступенем свободи (лінійного осцилятора з власною частотою ω_i та параметром затухання ξ_i). В свою чергу, якщо система складається з однієї маси і має одну ступінь свободи, то коефіцієнт форми коливань дорівнює одиниці, а величина $W_k(t)$ дорівнює прискоренню цієї маси. Тепер, вважаючи прискорення ґрунту $a_g(\tau)$ відомою функцією часу, послідовність розв'язання задачі можна сформулювати наступним чином.

1) За формулою (3.308) для кожної форми власних коливань обчислюються прискорення лінійних осциляторів $W_k(t)$, а за формулою (3.306) – компоненти вектора модального інерційного навантаження S_{jk} ;

2) сили \bar{S}_k прикладаються як статичне навантаження до розрахункової моделі, і визначаються модальні реакції конструкції (переміщення, моменти, поперечні і поздовжні сили);

3) обчислюються сумарні (“розрахункові”) реакції конструкції;

4) за допомогою розрахункових значень реакцій, оцінюється сейсмостійкість конструкції.

Ситуація, однак, ускладнюється браком інформації щодо функції прискорення ґрунту $a_g(t)$ на ділянці, де планується забудова. Справа в тому, що кожен землетрус являє собою реалізацію деякого випадкового процесу, тому в розрахунках на сейсмостійкість необхідно застосовувати імовірнісні підходи.

3.4.2 Спектральний метод розрахунку на сейсмічний вплив

Для розрахунку на вплив як проектного, так і максимального розрахункового землетрусу, який може відбутись на місці розташування будівлі, в сучасних нормах прийнятий лінійно-спектральний метод. Цей метод розрахунку базується на статистичних дослідженнях попередніх землетрусів, за

результатами яких побудовані криві спектральних коефіцієнтів динамічності.

Як захід безпеки при проектуванні особливо відповідальних споруд застосовується прямий динамічний розрахунок з використанням розрахункових акселерограм. Розрахункові акселерограми будуються на основі інструментальних записів сильних землетрусів, зареєстрованих безпосередньо на будівельному майданчику, або в умовах, близьких до умов майданчику будівлі або споруди, що проектується. За відсутності інструментальних записів в багатьох випадках допускається використання синтезованих (модельних) акселерограм, побудованих з урахуванням умов майданчика та його розташування відносно небезпечних сейсмогенних зон. Набір таких модельних акселерограм міститься в додатку до ДБН В.1.1-12:2006.

Щодо найбільш поширених практичних розрахунків, то вони виконуються за нормативними документами, в основу яких, як правило, покладена лінійно-спектральна теорія М. Біо.

У первісному виді основу методу становили заміряні експериментально прискорення маятників, що мали різні періоди власних коливань, під дією землетрусу. Отримані під впливом переміщень основи за законом, що відповідає реальним землетрусам, максимальні значення таких прискорень подаються у функції періоду власних коливань маятника і утворюють *спектр реакцій*, що є основою для визначення сейсмічного навантаження

В основу методики розрахунку покладені так звані *розрахункові спектри*, які визначаються як огинаючі ряду спектрів реакцій різних реальних землетрусів. Крім того, зазвичай використовується припущення про рух фундаменту споруди як єдиного твердого тіла, тобто вважається, що всі опорні точки конструкції рухаються поступально за одним законом, який характеризується прискоренням $a_g(t)$, однаковим і однаково спрямованим для всіх точок основи.

Для побудови розрахункового спектру за пропозицією М. Біо виконуються розрахунки для систем з різними періодами власних коливань T_i і для кожного такого розв'язку знаходять максимальне

значення прискорення. S_a . Відкладаючи значення максимумів на площину $S_a - T$ (див. рис. 3.33), одержуємо залежність значень максимального прискорення від періоду коливань T , сукупність яких утворить *спектр прискорень* $S_a(T)$.

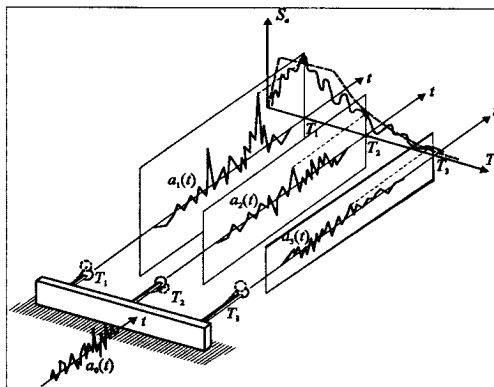


Рис. 3.33

Зрозуміло, що такий спектр наслідус особливості тієї акселерограми, на основі якої він був побудований. Для узагальнення інформації використовується сукупність багатьох спектрів, а їхня осереднена огинаюча використується нормами як рекомендація проектувальнику.

Розглянемо детальніше методику розрахунку за лінійно-спектральним методом. Така методика базується на апроксимації за допомогою представлень (3.304) – (3.306). Якщо врахувати, що при реальних значеннях параметра затухання різниця між ω_k^2 і ω_{Dk}^2 практично відсутня, то після ділення та множення виразу (3.306) на величину прискорення вільного падіння отримаємо:

$$S_{jk} = Q_j \eta_{jk} \frac{W_k(t)}{g} \quad \square \quad (3.309)$$

де $Q_j = m_j g$ – вага маси m_j , віднесеної до точки j ; $g = 9.81 \text{ м/с}^2$.

Максимальне значення компоненти сейсмічного навантаження визначається наступним чином:

$$S_{0,jk} = (S_{jk})_{\max} = Q_j \eta_{jk} \left(\frac{W_k(t)}{g} \right)_{\max} . \quad (3.310)$$

В нормах вводиться спектральний коефіцієнт динамічності β_k , який враховує залежність величини $\left(\frac{W_k(t)}{g} \right)_{\max}$ від періоду T_k власних коливань споруди:

$$\left(\frac{W_k(t)}{g} \right)_{\max} = a_0 \beta_k k_{zp} , \quad (3.311)$$

де a_0 – розрахункова амплітуда прискорення основи, значення якої приймається 0,05; 0,1; 0,2; 0,4 від прискорення вільного падіння g відповідно для районів із сейсмічністю 6, 7, 8, 9 балів, або за табл. 6.5, яка міститься в ДБН В.1.1-12:2014; k_{zp} – коефіцієнт, що враховує нелінійне деформування ґрунтів (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

Категорія ґрунту	Значення k_{zp} при сейсмічності майданчика будівництва в балах			
	6	7	8	9
I	1,0	1,2	1,3	1,4
II	1,0	1,0	1,0	1,0
III	1,0	0,8	0,75	0,7
IV	За даними спеціальних досліджень			

Значення спектрального коефіцієнту динамічності β_i , які отримані в результаті великого обсягу статистичних досліджень, залежно від категорій ґрунту за сейсмічними властивостями і від періоду T_i власних коливань за i -м тоном споруди, визначаються за графіком (рис. 3.34) або за формулами:

- а) для ґрунтів I категорії
- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| при $T_i \leq 0,1c$ | $\beta_i = 1 + 15T_i$ |
| при $0,1c < T_i \leq 0,4c$ | $\beta_i = 2,5$ |
| при $T_i > 0,4c$ | $\beta_i = 1,35 / T_i^{2/3}$; |
- б) для ґрунтів II категорії
- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| при $T_i \leq 0,1c$ | $\beta_i = 1 + 15T_i$ |
| при $0,1c < T_i \leq 0,6c$ | $\beta_i = 2,5$ |
| при $T_i > 0,6c$ | $\beta_i = 1,8 / T_i^{2/3}$; |
- в) для ґрунтів III категорії
- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| при $T_i \leq 0,1c$ | $\beta_i = 1 + 15T_i$ |
| при $0,1c < T_i \leq 1,2c$ | $\beta_i = 2,5$ |
| при $T_i > 1,2c$ | $\beta_i = 3 / T_i$. |

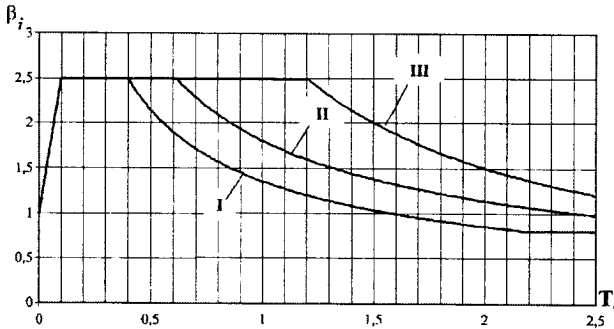


Рис. 3.34

Значення коефіцієнтів β_i слід брати не меншими за 0,8 і не більшими за 2,5, а для ґрунтів IV категорії визначати за результатами спеціальних досліджень.

Підставимо (3.311) до (3.310) і отримаємо оцінку максимального модального інерційного навантаження за k -ю формою:

$$S_{0,ik} = Q_i \beta_k k_{,p} \eta_{ik} \quad (3.312)$$

В свою чергу, розрахункове інерційне навантаження S_{ik}^p , що прикладене в точці i та відповідає k -му тону власних коливань, визначається за формулою

$$S_{ik}^p = k_1 k_2 k_3 S_{0ik} , \quad (3.313)$$

де k_1 – коефіцієнт, що враховує непружні деформації та локальні пошкодження елементів будівлі (коефіцієнт редуції), значення якого береться за табл. 3.6; k_2 – коефіцієнт, що враховує тип і призначення споруд, береться за табл. 3.7.

Таблиця 3.6

Конструктивні рішення систем і несучих елементів	Значення k_1 за сейсмічності майданчика, балів		
	6	7-8	9
1. Споруди, в яких залишкові та непружні деформації не допускаються	1,0		
2. Будівлі та споруди, в конструкціях яких можуть бути допущені залишкові деформації та пошкодження окремих елементів, що ускладнюють нормальну експлуатацію при забезпеченні безпеки людей та збереженні обладнання, які зводяться:			
– зі сталевим каркасом	0,25	0,25	0,3
– із залізобетонним каркасом без вертикальних діафрагм або ядер жорсткості	0,25	0,35	0,45
– із залізобетонним каркасом з вертикальними діафрагмами або ядрами жорсткості	0,25	0,3	0,4
– зі стінами з монолітного залізобетону та з великих залізобетонних панелей	0,25	0,25	0,35
– з несучими стінами із крупних блоків і каркасно-кам'яними	0,25	0,35	0,4

Закінчення таблиці 3.6

– з несучими стінами з цегляної чи кам'яної кладки	0,25	0,4	0,45
3. Елементи будівель, які розраховуються на “місцеві” сейсмічні навантаження	0,4	0,5	0,55
4. Будівлі і споруди, в конструкціях яких можуть бути допущені значні залишкові деформації, тріщини, пошкодження окремих елементів, їх зміщення, що тимчасово призупиняє нормальну експлуатацію, при забезпеченні безпеки людей	0,2	0,2	0,3

Таблиця 3.7

Характеристика споруд	Значення k_2
1. Особливо відповідальні та унікальні споруди, в тому числі виробничі корпуси, складські будівлі хімічної промисловості з токсичними та отруйними речовинами, вибухонебезпечні корпуси хіміко-фармацевтичної і споруди нафтохімічної промисловості	1,5
2. Споруди з одночасним перебуванням великої кількості людей (великі вокзали, аеропорти, театри, цирки, музеї, концертні зали з числом місць більше 1000 чоловік, стадіони тощо) Будівлі та споруди, функціонування яких необхідно при землетрусі або при ліквідації його наслідків (системи енерго- і водопостачання, пожежгасіння, телефонного і телеграфного зв'язку, банки, державні і місцеві адміністративні органи тощо)	1,4
3. Будівлі готелів, спальних корпусів закладів відпочинку на 250 місць і більше	1,2

Закінчення таблиці 3.7

4. Будівлі і споруди лікарень на 100 ліжок і більше, пологових будинків, акушерських корпусів, станції швидкої допомоги, шкіл, дитячих садків, вищих навчальних закладів, магістральних залізниць і автомобільних доріг та споруд транспорту	1,3
5. Висотні споруди невеликих у плані розмірів (башти, шогли, димові труби, шахти ліфтів, що стоять окремо, тощо) при відношенні висоти споруди H до її ширини B , що дорівнює або більше за 5, і великопрольотні споруди ($L \geq 30$ м)	1,4
6. Каркасні будівлі, стінове заповнення яких не впливає на їх деформативність, при відношенні висоти стійки h до її поперечного розміру b в напрямку дії сейсмічного навантаження, що дорівнює або більше за 25	1,4
7. Те саме, що і в п. 6, але при h/b , що дорівнює або менше за 15	1,0
8. Житлові, громадські та виробничі будівлі, що не вказані у рядках 1-7	1,0
9. Будівлі та споруди, руйнування яких не пов'язане із загибеллю людей, втратою матеріальних і культурних цінностей і не викликає припинення безперервних технологічних процесів або забруднення навколишнього середовища (склади, підприємства торгівлі і побутового обслуговування з терміном служби не більше 20 років, невеликі майстерні, тимчасові будівлі тощо)	0,5
Примітка. За проміжних значень h/b значення k_2 береться за інтерполяцією	

Коефіцієнт k_3 у формулі (3.313) враховує поверховість будівлі заввишки понад 5 поверхів і визначається за формулою:

$$k_3 = 1 + 0,04(n - 5), \quad (3.314)$$

де n – кількість поверхів в будівлі. Максимальне значення k_3 приймається не більше 1,6 (у тому числі для рамних, рамно-в'язевих і в'язевих систем), а для стінових і каркасно-стінових конструктивних систем – не більше 1,5.

Таким чином, перший етап аналізу сейсмостійкості виконується за допомогою співвідношення (3.313). Зазначимо, що розрахункові інерційні навантаження, які визначаються за цією формулою, не залежать від часу, тобто даний підхід є квазістатичним.

Слід зазначити, що починаючи з класичних робіт Ньюмарка і до теперішнього часу значення коефіцієнта редуції k_1 підраховувалось для системи, усі елементи якої працювали як пружно-пластичні. При цьому використовувалась гіпотеза Ньюмарка щодо однаковості максимальних переміщень пружної і пружно-пластичної конструкції, якщо однаковим є сейсмічний вплив та частоти власних коливань.

Однак у багатьох споруд є елементи чи частини, де не реалізується пластична робота (наприклад, вони втрачують стійкість). Крім того в системі можуть бути присутні елементи, для яких перехід у пластичну стадію роботи є небажаним.

Тоді виникає питання, чи можна використовувати коефіцієнт редуції лише для частини системи, і як значення k_1 залежать від співвідношення жорсткостей пружно-пластичної і пружної частин споруди. Для відповіді на ці питання проаналізуємо роботу системи з одним ступенем свободи (рис. 3.35,а), у якої опір переміщенню викликають дві підсхеми: пружна (рис. 3.35,б) і пружно-пластична з ідеалізованою діаграмою Прандтля (рис. 3.35,в).

Якщо під впливом сили P система отримала переміщення у і при цьому обидві підсхеми працюють пружно, то в системі акумулюється енергія

$$W_e = \frac{Py}{2} = \frac{(C_1 + C_2)y^2}{2}. \quad (3.315)$$

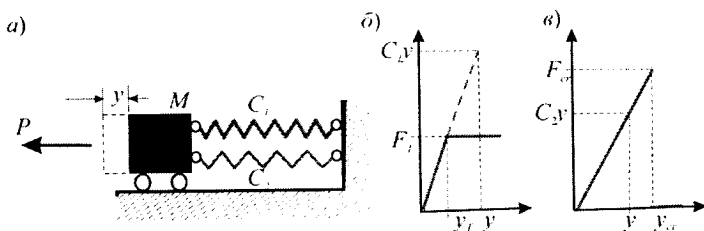


Рис. 3.35.

Але коли кількість енергії, що передається на систему, перевищує ту межу, що можна акумулювати пружною роботою, то залишок енергії повинен бути вичерпаним за рахунок пружно-пластичної роботи матеріалу (рис. 3.36).

$$W_{pl} = F_T y_{max} - \frac{F_T y_T}{2} = F_T y_T \left(\mu - \frac{1}{2} \right), \quad (3.316)$$

і разом

$$W_{e-pl} = \frac{C_2 y^2}{2} + F_T y_T \left(\mu - \frac{1}{2} \right). \quad (3.317)$$

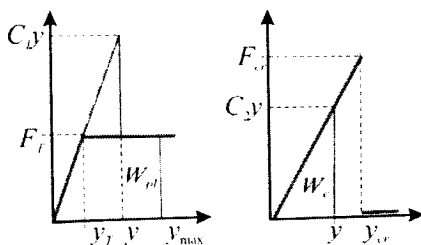


Рис. 3.36.

Тут $\mu = y_{max}/y_T$ – коефіцієнт пластичності, який характеризує глибину заходу деформації на площадку текучості.

Умова енергетичного балансу $W_e = W_{e-pl}$ дає рівняння

$$\frac{(C_1 + C_2)y^2}{2} = \frac{C_2 y^2}{2} + F_T y_T \left(\mu - \frac{1}{2} \right), \quad (3.318)$$

чи в іншій формі

$$F_T y_T \left(\mu - \frac{1}{2} \right) = \frac{C_1 y^2}{2} = \frac{F_1 y}{2} = \frac{F_1^2 y_T}{2F_T}, \quad (3.319)$$

де через F_1 позначена та частина навантаження, що передається на відповідну підсхему при її пружному розрахунку.

З (3.319) одержуємо, що

$$\frac{F_1}{F_T} = \sqrt{2\mu - 1}. \quad (3.320)$$

Зусилля, яке виникає в пружно-пластичній підсхемі, у $\sqrt{2\mu - 1}$ рази менше зусилля, яке виникло би при пружному розрахунку. Це зменшення не торкається пружно працюючої підсхеми, яка повинна розраховуватися на повне значення відповідні пружному розрахунку схеми у цілому.

Тобто коефіцієнт редукації k_1 не повинен діяти на всю систему, його доцільно використовувати до її окремих частин. Таким чином проблема віршена, наприклад, у нормах Узбекістану.

На другому етапі для кожного модального інерційного навантаження $\bar{S}_k^p = (S_{1k}^p, S_{2k}^p, \dots, S_{lk}^p)^T$ визначається модальна реакція N_k конструкції. Величина N_k може бути вузловим переміщенням, внутрішнім зусиллям в деякому перерізі або напруженням в точці конструкції, яке відповідає k -й формі коливань.

На третьому етапі за визначеними модальними реакціями N_k ($k = 1, 2, \dots, n$) необхідно визначити сумарну розрахункову реакцію N_p . Труднощі виконання цього етапу полягають в тому, що хоча максимуми окремих модальних реакцій вже відомі, але у загальному випадку вони досягаються не одночасно. Безпосередньо визначити зсув максимумів за часом неможливо, оскільки при розрахунках за лінійно-спектральною теорією залежність реакцій від часу не визначається. Тому виникає проблема визначення

максимальної розрахункової реакції системи згідно з максимумами окремих модальних реакцій. Для вирішення цієї проблеми нормами рекомендується використовувати середнє квадратичне значення максимумів параметрів для різних форм. Розрахункові значення поперечної і поздовжньої сил, згинального моменту, нормальних та дотичних напружень в конструкціях від сейсмічного навантаження слід визначати за формулою

$$N_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i^2}, \quad (3.321)$$

де n – число врахованих у розрахунку форм коливань.

Якщо значення періодів i -го та $(i+1)$ -го тонів власних коливань споруди відрізняються менш ніж на 10%, то замість формули (3.321) застосовують формулу, яка дозволяє враховувати взаємну кореляцію узагальнених координат:

$$N_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \rho_i |N_i N_{i+1}|}, \quad (3.322)$$

де значення коефіцієнту ρ_i обирається за табл. 3.8 в залежності від співвідношення періодів власних коливань споруди за двома сусідніми формами. Отриману величину N_p іноді називають “найбільш імовірною оцінкою” відповідної реакції.

Таблиця 3.8

Відношення періодів коливань T_{i+1}/T_i ($T_i \geq T_{i+1}$)	Коефіцієнт кореляції ρ_i
1.0	1.0
0.97	0.9
0.95	0.8
0.93	0.7
0.9	0.5

Формула (3.321) як і формула (3.322) ґрунтується на гіпотезі про те, що всі модальні реакції є нормально розподіленими випадковими величинами з однаковими коефіцієнтами кореляції, що узгоджується з багатьма спостереженнями.

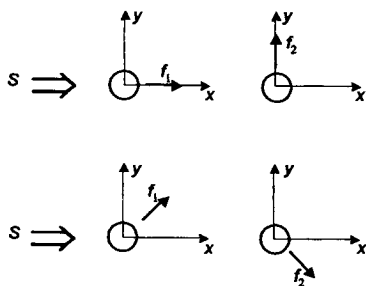


Рис. 3.37

Відповідають такій частоті, визначаються з точністю до деякого нав'язаного припущення. Так, наприклад, вертикальний консольний стержень із однаковими головними жорсткостями поперечного переріза має кратні форми власних коливань, які визначаються з точністю до довільного повороту навколо осі Z , як це показано в плані на рис. 3.37, де у варіанті *a*) власні форми спрямовані уздовж координатних осей, а у варіанті *b*) – повернені на 45° . Якщо сейсмічний імпульс діє уздовж осі X , то для варіанта *a*) реакція за другою формою буде відсутньою, і всі переміщення будуть розміщені в площині (X, Z) . Для варіанта *b*) будуть збуджуватися обидві форми власних коливань, але той факт, що компоненти по осі Y мають різні знаки і гасять одна одну, виявиться загубленим при використанні правила «корінь із суми квадратів». У результаті виявиться, що збуджуються переміщення не тільки по напрямку дії сейсмічного поштовху, але й у перпендикулярному напрямку.

Важливим параметром, який визначає ефективність застосування методу нормальних координат, є кількість форм власних коливань n , яка використовується в апроксимації (3.253). Ця проблема вже обговорювалась вище, коли розглядалися питання застосування методу нормальних координат при дослідженні вимушених коливань пружних систем з l степенями свободи. Природно, що $n \leq l$. Якщо споруда має розріджений спектр, то $n \ll l$. Для споруд, спектр яких не достатньо розріджений, визначення оптимального n є серйозною проблемою. Для розв'язання цієї проблеми існують різні підходи. Найбільш простий підхід полягає у поступовому збільшенні n доти, доки уточнення

Варто зауважити, що використання формул (3.321) чи (3.322) «гасить» знаки модальних компонентів сейсмічної реакції, що в деяких випадках може приводити до непорозумінь. Досить типовим прикладом такої ситуації може стати випадок кратних частот, коли форми власних коливань, що

реакції стане достатньо малим. Цей спосіб, по-перше, буває іноді досить трудомістким, а по-друге, ніколи не можна бути впевненим, що процедура уточнення є монотонною.

Досить часто в задачах сейсмостійкості при визначенні необхідної кількості форм власних коливань в представленні (3.253) використовують такий параметр, як сума ефективних модальних мас. Ефективною модальною масою називають величину L_n^2 / M_n , яка має розмірність маси і може розглядатись як частина повної маси, що відноситься до певної форми коливань. Якщо використовується консольна схема споруди, то сума всіх ефективних модальних мас дорівнює загальній масі споруди. Оскільки при кінематичному збудженні основи навантаження на споруду є виключно інерційним, то порівнюючи часткову суму ефективних модальних мас із повною, можна зробити обґрунтований висновок щодо достатньої кількості врахованих форм. Крім того, необхідно пам'ятати про те, що згідно з ДБН для будівель з рівномірним розподілом жорсткостей і мас за висотою при розрахунках на основі консольної схеми кількість форм власних коливань слід брати не менше трьох, якщо період першого тону коливань T_1 є більшим за 0,4 с, і враховувати лише першу форму, якщо T_1 дорівнює 0,4 с або є меншим за це значення.

Як вже зазначалось, при проведенні досліджень сейсмостійкості будівель і споруд окрім спектрального методу розрахунку в деяких випадках слід застосовувати прямий динамічний метод з використанням інструментальних записів прискорень ґрунту при землетрусах або синтезованих акселерограм. В цьому разі також зручно застосувати метод нормальних координат, тобто подати пружну систему у вигляді комбінації незв'язних лінійних осциляторів. На відміну від квазістатичного алгоритму лінійно-спектрального методу прямий динамічний розрахунок спирається на чисельне інтегрування рівнянь (3.297) або на чисельне обчислення інтегралу Дюамеля (3.302). Зрозуміло, що тепер узагальнені переміщення точок системи (3.303), модальні інерційні навантаження (3.306), і звісно, модальні реакції N_i можна обчислити в будь-який момент часу. В свою чергу, розрахункове значення реакції N_p в той самий момент часу є алгебраїчною сумою відповідних модальних реакцій. При

цьому слід мати на увазі, що в разі розбіжності результатів розрахунку за спектральним методом та прямим динамічним методом береться найбільш невідгідний розв'язок.

Варто мати на увазі ще таку обставину. Якщо розрахункова схема містить модель пружної основи (наприклад, Вінклера чи Пастернака), то важливим параметром є жорсткість пружної основи. Але слід пам'ятати, що при статичних впливах приймається модуль деформації E_0 , а для сейсмічного впливу, який має динамічний характер, треба використовувати модуль пружності E .

Модуль пружності завжди більше модуля деформації (рис. 3.38), він визначається під час випробувань зразків ґрунта при їх пружній поведінці, яка реалізується під час розвантаження (вторинна гілка), а модуль деформації пов'язаний з роботою ґрунта при накопиченні як пружних, так і при залишкових деформаціях (первинна гілка).

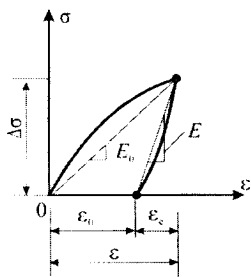


Рис. 3.38.

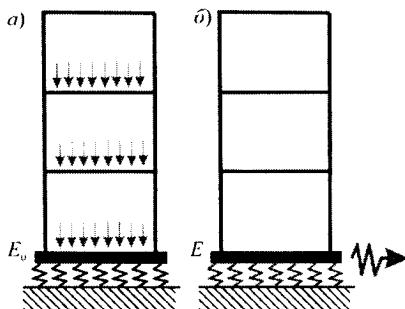


Рис. 3.39

Таким чином ми маємо справу з двома розрахунковими схемами: одна для врахування постійних і довгодіючих навантажень (рис. 3.39,а), а інша для врахування сейсмічного впливу (рис. 3.39,б).

Питання дослідження задач динаміки просторових тіл розглядаються, зокрема, у [13, 15, 23, 30, 67, 68, 108]. Огляд відомих підходів і результатів розв'язання задач динаміки міститься у [51].

3.5. Особливості виконання динамічного аналізу в обчислювальному комплексі Structure CAD

Як відзначено вище, у випадку змінного в часі зовнішнього навантаження зусилля та переміщення слід також вважати функціями часу, що вимагає введення до розгляду швидкостей dZ/dt і прискорень d^2Z/dt^2 .

У більшості випадків інерційні сили

$$J(t) = M \cdot d^2Z/dt^2$$

відіграють незначну роль і матимемо справу зі статичною задачею. Проте коли сили інерції, що виникають, не можуть вважатися нехтувано малими порівняно з навантаженнями на систему і силами пружності, то їх слід врахувати при формуванні умов рівноваги, які приймуть вид диференційних рівнянь динамічної задачі

$$M \frac{d^2Z}{dt^2} + KZ(t) = f(t).$$

Якщо всі маси зосереджені у вузлах системи, то матриця мас M буде діагональною, в інших же випадках приведення її до діагонального виду становить наближений підхід (його застосовано при розробленні комплексу).

При динамічному розрахунку кількість компонент вектора Z , з якими пов'язані інерційні сили (кількість *динамічних ступнів вільності*), часто буває набагато меншою, ніж при статичному розрахунку. Типовим прикладом можуть служити повороти вузлів, які звичайно справляють значно менший динамічний вплив, ніж їхні лінійні зміщення. У SCAD інерційні моменти, відповідні поворотам вузлів, та інші інерційні характеристики можуть бути проігноровані, проте це рішення приймає користувач, формулюючи задачу динамічного розрахунку.

Задача визначення характеристик власних коливань системи (модальний аналіз) полягає в пошуку умов, за яких ненавантажена здійснює гармонійні коливання за законом

$$Z(t) = \Psi \sin(\omega t + \varphi).$$

У цьому виразі Ψ характеризує форму власних коливань (співвідношення між зміщеннями вузлів); ω — їхню частоту; φ — початкову фазу.

Як результати модального аналізу видаються власні числа λ_i і власні вектори Ψ_i задачі. З ними пов'язані колова частота $\omega = 1/\lambda$ (рад/с), циклічна частота $\theta = \omega/2\pi$ (Гц) і період $T = 1/\theta$.

У комплексі **SCAD** передбачене розв'язання задач для таких класів динамічних навантажень:

- пульсації вітрового потоку за БНіП;
- сейсмічне навантаження у формі, передбаченій БНіП;
- імпульсне і ударне навантаження для різних законів зміни в часі;
- гармонічне навантаження;
- сейсмічне збудження у формі завдання довільної акселерограми.

ГЛАВА 4

НАПІВНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (НМСЕ) ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ СТАТИЧНОГО І ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

4.1. Основна ідея, скінчено елементна база та розв'язувальні співвідношення НМСЕ

Для підвищення ефективності методу скінчених елементів доцільним є розробка його модифікацій, орієнтованих на досить широке коло просторових тіл, які мають спільні риси. Так, значна кількість відповідальних просторових елементів конструкцій геометрично можуть бути подані як просторові тіла, що отримані рухом геометричної фігури, контур якої відповідає поперечному перерізу тіла, вздовж утворюючої у вигляді дуги кола (рис.4.1,а) або відрізка прямої (рис.4.1,б,в). Фізико-механічні характеристики матеріалу (зокрема модуль пружності матеріалу E) також передбачаються залежними від просторових координат (рис.4.1,в). Таке зміння, зокрема, може носити локальний характер із змінням величин на декілька порядків (що відповідає наявності вирізів або отворів). В деяких випадках характерні розміри і відповідно площа $A(z^3)$ згаданої геометричної фігури, що визначає поперечний переріз тіла, може повільно змінюватись вздовж напрямної із збереженням подібності форми (рис.4.1,б). Така особливість спричиняє повільне кількісне зміння параметрів напружено-деформованого стану досліджуваного об'єкту вздовж напрямної із збереженням якісної картини їх розподілення.

Такі об'єкти будемо називати просторовими круговими або призматичними тілами із змінними фізичними і геометричними параметрами (рис.4.1,а-в).

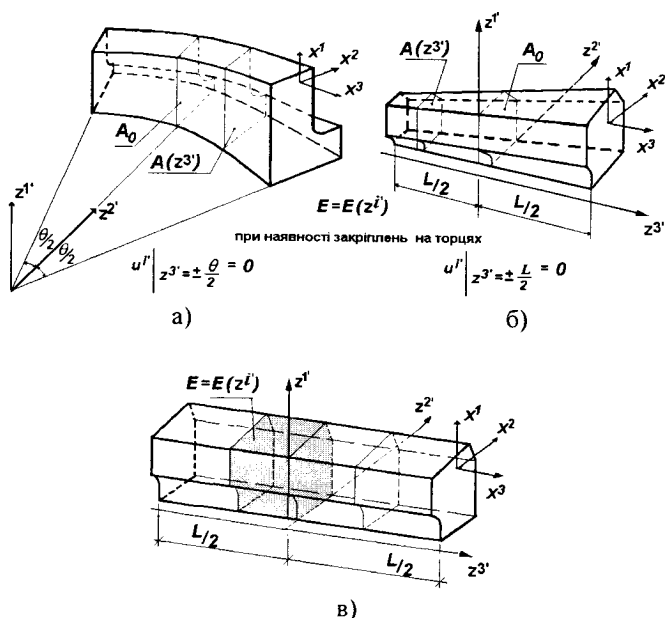


Рис. 4.1.

Таке уявлення надає можливість розширення вибору апроксимуючих координатних функцій МСЕ, дозволяє оптимізувати структуру отримуваних систем рівнянь МСЕ і способи їх розв'язання, а також надає додаткові можливості зменшення обсягу вихідної інформації для опису геометрії просторових тіл. Це зокрема досягається сполученням традиційної скінченелементної дискретизації досліджуваного об'єкта в межах поперечного перерізу із поданням переміщень в напрямку утворюючої у вигляді розкладу в ряд за спеціально обраною системою координатних функцій. Такий підхід отримав назву напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ)

НМСЕ був запропонований в роботах [36, 126] як ефективний підхід до розв'язання просторових задач теорії пружності для неосесиметрично навантажених тіл обертання. Широке використання даний підхід отримав при розв'язанні статичних

задач пружності і пластичності, задачі теплопровідності для тіл обертання в роботах Я.М.Григоренка, А.Т.Василенка і Г.Г.Влайкова [24, 31, 32], Б.Я.Кантора [41, 42], Б.А.Куранова [47, 48], В.А.Мерзлякова [60], Л.А.Розіна [83, 84], Ю.М.Шевченка і В.Г.Савченка [87, 88, 110, 111], М.М.Шапошнікова [107] та інших авторів [37, 85, 95, 100, 101, 121, 122, 124, 127]. Висока ефективність напіваналітичного варіанта в порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Скінченноелементна база НМСЕ. При використанні НМСЕ скінченноелементна дискретизація виконується в межах поперечних перерізів тіл, а в напрямку утворюючої використовується один скінченний елемент (СЕ), конфігурація якого збігається із конфігурацією утворюючої). Для апроксимації просторових неоднорідних кругових (рис.4.2,а) та призматичних тіл із змінними геометричними і фізико-механічними параметрами (рис.4.2,б, в) використовуються просторові неоднорідні кругові (рис.4.3,а) та призматичні (рис.4.3б) СЕ із змінними геометричними і (або) фізико-механічними параметрами і змінними компонентами метричного тензора [8-11, 13, 16, 75].

Зазначені СЕ являють собою відповідно криволінійну або прямолінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола або прямої. Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i : осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перерізу СЕ, а вісь x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із z^3 .

В місцевій системі координат поперечний переріз СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина напрямної СЕ дорівнює 4. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 4.4). Вздовж вісі СЕ, відповідно до вимог формули інтегрування Гаусса, розташована певна кількість точок інтегрування $K_m, m=1 \dots M$ (рис.4.2, 4.3) [58].

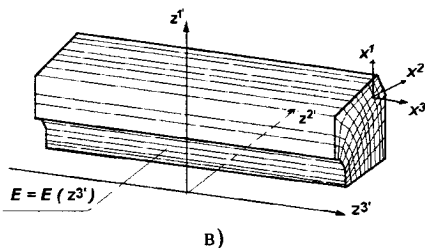
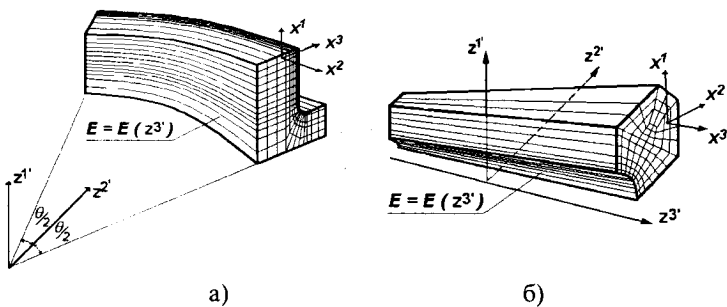


Рис.4.2.

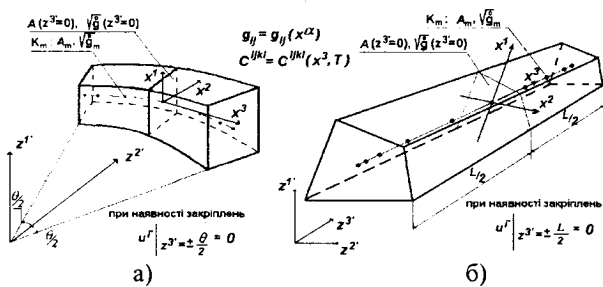


Рис. 4.3

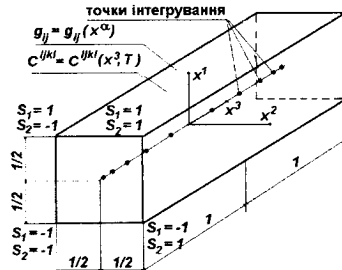


Рис. 4.4

Для опису зазначених тривимірних тіл використовується базисна система координат z^j (циліндрична – для неоднорідних кругових тіл або декартова – для неоднорідних призматичних тіл), яка є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об’єкта, зовнішні впливи та граничні умови (осі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині поперечного перерізу тіла, а вісь z^3 орієнтована вздовж напрямної). При цьому напрямки осей x^3 і z^3 місцевої і базисної систем координат збігаються.

В кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^i_{,j}$, що визначає зв’язок між названими системами координат [19, 52, 53, 65]:

$$z^i_{,j} = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}, \quad z^{\alpha}_{,3} = z^3_{,\alpha} = 0$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z^i_{,m} z^j_{,n} g_{i,j}. \quad (4.1)$$

При отриманні розв’язувальних співвідношень НМСЕ для геометричних і фізико-механічних параметрів прийнято наступні гіпотези:

– компоненти метричного тензора (4.1) в межах поперечного перерізу СЕ є змінними:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^\alpha)$$

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора g_{ij} , і компоненти тензору пружних сталих дорівнюють значенням цих величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}, \quad C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl}|_{x^\alpha=0}; \quad (4.2)$$

– компоненти тензору пружних сталих є змінними за напрямною і залежать від температури:

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(x^3, T). \quad (4.3)$$

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора g_{ij} , передбачається змінним за напрямною і обчислюється із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^3)} = \frac{A(z^3)}{A_0} \sqrt{g|_{z^3=0}} = f(z^3) \sqrt{g|_{z^3=0}}, \quad (4.4)$$

де $f(z^3)$ – монотонна безперервна функція, яка визначається на основі вихідних даних про змінення площі поперечного перерізу досліджуваного об'єкта; $A(z^3) = A_0 f(z^3)$ – закон змінення площі поперечного перерізу СЕ (із збереженням подібності його форми) A_0 – площа поперечного перерізу СЕ при $z^3 = 0$.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти перемішень, а в задачах динаміки додатково компоненти швидкостей та прискорень вузлів СЕ $(u: \dot{u}: \ddot{u})_k$, де k' – напрямок в базисній системі координат. Позначка “:” відповідає логічному оператору “або”, що означає вибір для розгляду однієї з компонент, наведених в круглих дужках.

Розподілення перемішень у межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом через їх вузлові значення із використанням поліномів Лагранжа першого ступеня:

$$P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right).$$

Для величин переміщень можна записати:

$$u_{m'} = \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} P_{(S_1, S_2)} u_{m'(S_1, S_2)}, \quad (4.5)$$

де $u_{m'(S_1, S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перерізу елемента в місцевій системі координат x^l .

Аналогічно для переміщень і їх похідних, що використовуються в задачах динаміки можна записати:

$$(u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} P_{(S_1, S_2)} (u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} \quad (4.6)$$

Для забезпечення можливості моделювання напружено-деформованого стану тіл різної конфігурації і формулювання різних видів граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь, для апроксимації невідомих переміщень в базисній системі координат u_s , в напрямку утворюючої використовується розкладення за системою координатних функцій, φ^l , яка задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності.

Для моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних кругових замкнених тіл, а також неоднорідних кругових незамкнених і призматичних тіл із шарнірним закріпленням торців розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями за x^3 , а їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$(u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=0}^L (u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{k'}^l \quad (4.7)$$

де для кільцевого СЕ:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3,$$

$$l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi, \quad \mathcal{G} = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{якщо } l = 0; \\ 1/\pi, & \text{якщо } l > 0; \end{cases}$$

для призматичного СЕ:

$$\psi'_{1'} = \psi'_{2'} = \sin \frac{\pi d}{2} x^3, \quad \psi'_{3'} = \cos \frac{\pi d}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2, \quad \mathcal{G} = 1$$

Коефіцієнти розкладів (4.7) визначаються із співвідношень:

$$(u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^V = \mathcal{G} \int_{x^3} (u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} \psi'_{(k')} dx^3$$

Для моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних кругових незамкнених та призматичних тіл із довільними граничними умовами на торцях (защемлення або вільний край) використовується система координатних функцій, яка складається з поліномів Лагранжа ($l = 0, 1$) і Міхліна ($l = 2, \dots, L$):

$$u_{s'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{s'}^l \varphi^{(l)}, \quad (4.8)$$

$$\text{де } \varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1 - x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x^3),$$

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}},$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right] -$$

– поліноми Лагранжа.

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ), яка була запропонована у [90, 91], і отримала подальше використання у [6, 8-11, 13, 14, 16, 59, 75 та ін.], компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перерізі, що відповідає певній точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \beta} x^\beta \end{aligned} \quad (4.9)$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}|_{x^\alpha=0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}$ – значення величин деформацій і їх

похідних в центрі поперечного перерізу СЕ.

З урахуванням подання фізичних компонент деформацій через відповідні ненормовані величини (1.9) для коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (1.18) отримаємо:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij};$$

Залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення перемішень за поліномами у векторній формі має наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \}; \quad (4.10)$$

де $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\};$

Матричне представлення вектору похідних від деформацій $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\}$ має вигляд :

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\}_h = \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \} \quad (4.11)$$

Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій неоднорідного скінченного елемента. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих перемішень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (4.12)$$

Варіація енергії деформації одного СЕ, згідно з (1.10), може бути записана у вигляді:

$$\delta W_n = \iiint_{V_n} \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV_n.$$

де $dV_n = \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 dx^3$ – об'єм n -го СЕ.

Глава 4. Напіваналітичний МСЕ в задачах деформування просторових ...

Подаючи, відповідно до МССЕ (4.9), фізичні компоненти тензору деформацій (1.9) через їх значення у центрі елемента для варіації енергії n -го СЕ $\delta W_n = \delta W$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \tilde{C}^{\alpha(\alpha)kl} \times \right. \\ & \times \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl} \tilde{C}^{12kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \\ & + \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \tilde{C}^{\alpha 3kl} \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \\ & \left. + \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,\alpha} x^\alpha \right) \tilde{C}^{33kl} \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} x^\alpha \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

З урахуванням результатів інтегрування в поперечному перерізі СЕ (4.13) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,(3-\alpha)} \tilde{C}^{\alpha(\alpha)kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,(3-\alpha)} \tilde{C}^{\alpha 3kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,\alpha} \tilde{C}^{33kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Застосовуючі запропоновані вище векторні подання деформацій і їх похідних (4.10)-(4.11) подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у векторній формі:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left(\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{const}^T + \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{var}^T \right) \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{const} + \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{var} \right) \right) \right\} \sqrt{g} dx^3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

де $\left[\overset{\circ}{D} \right]$ і $\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right]$ – матриці пружних характеристик матеріалу:

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1113} & C^{1123} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1213} & C^{1223} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2213} & C^{2223} & C^{2233} \\ C^{1311} & C^{1312} & C^{1322} & C^{1313} & C^{1323} & C^{1333} \\ C^{2311} & C^{2313} & C^{2322} & C^{2313} & C^{2323} & C^{2333} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3313} & C^{3323} & C^{3333} \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right]. \quad (4.15)$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left(\delta \{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D} \right] \times \right. \\ & \times \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{u_l\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \{u_l\}^T \times \right. \\ & \times \left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi^{(l)} + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right] \times \\ & \times \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var} \right) \varphi^{(l)} + \right. \\ & \left. \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var} \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right] \{u_l\} \right) \times \sqrt{g} dx^3 = \\ & = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{u_l\}^T \right) [K_{ln}]_{hg} \{u_n\} \end{aligned}$$

де $[K_{ln}]_{hg}$ – матриця жорсткості неоднорідного СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами та компонентами метричного тензора, що зазначено відповідними індексами.

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності як фізико-механічних властивостей, так і геометричних параметрів, введемо позначення для отриманих результатів інтегрування комбінацій змішаних добутоків матриці фізико-механічних властивостей, базисних функцій та їх похідних:

$$[D_{00}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{30}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{03}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{33}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m$$

$$[D_{00\alpha}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{30\alpha}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{03\alpha}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{33\alpha}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m$$

де H_m – значення вагових функцій в точках інтегрування.

З їх використанням вираз матриці жорсткості набуде вигляду:

$$[K_{lm}]_{hg} = \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T [D_{00}^{ln}] \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T [D_{30}^{ln}] \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T [D_{03}^{ln}] \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T [D_{33}^{ln}] \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{const}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{var}^T \right) \left[D_{00\alpha}^{ln} \right] \times \right. \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{const} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{var} \right) + \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{const}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{var}^T \right) \times \\
 & \times \left[D_{30\alpha}^{ln} \right] \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{const} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{var} \right) + \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{const}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}_{var}^T \right) \times \\
 & \times \left[D_{03\alpha}^{ln} \right] \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{const} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{var} \right) + \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{const}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{var}^T \right) \times \\
 & \left. \times \left[D_{33\alpha}^{ln} \right] \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{const} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}_{var} \right) \right\}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Отримання вектора вузлових реакцій, який використовуються при розв'язанні нелінійних задач, здійснюється на основі варіаційного принципу Лагранжа. Для окремо розглядуваного n -го СЕ, з урахуванням подання його об'єму у вигляді

$$dV_n = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \text{ варіація енергії деформації набуде вигляду:}$$

$$\delta W_n = \int_{V_n} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.17)$$

Подаючи, відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень і тензору деформацій через їх значення у центрі елемента за формулами для варіації енергії деформації СЕ $\delta W_n = \delta W$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right. \\
 & \times \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\epsilon}^{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\sigma}^{12} \delta \overset{\circ}{\epsilon}^{12} + \\
 & \left. + \left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\epsilon}^{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}{}_{,\alpha} x^\alpha \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{33}{}_{,\beta} x^\beta \right) \Big] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (4.18)$$

або, з урахуванням результатів інтегрування в межах поперечного перерізу СЕ:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \Big[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}{}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \right. \\ \left. + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}{}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}{}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{33}{}_{,\alpha} \right) \Big] \sqrt{g} dx^3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здійснюючи підстановку в цю формулу отриманих вище співвідношень для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних деформацій і напружень в ряд Маклорена, із застосуванням векторного подання напружень та їх похідних у вигляді:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{22}{}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}{}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}{}_{,1} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11}{}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}{}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}{}_{,2} \right\}, \end{aligned}$$

а також векторного подання деформацій (4.10) та їх похідних (4.11), отримаємо вираз для енергії деформування СЕ у векторній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{,\alpha} \right\}^T_{const} + \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{,\alpha} \right\}^T_{var} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha} \right\} \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (4.20)$$

Вираз для варіації енергії деформування (4.34) є інваріантним відносно конфігурації скінченного елемента за напрямною і може і використовуватись в подальшому для визначення вектора вузлових реакцій неоднорідних кругового і призматичного СЕ із змінними фізичними і геометричними параметрами.

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left(\delta \{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \{u_l\}^T \left[\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi^{(l)} + \right. \\ & \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi_{,3}^{(l)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \sqrt{g} dx^3 = \sum_{l=0}^L \delta \{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h \end{aligned}$$

де $\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h$ – вектор вузлових реакцій СЕ із змінними фізичними параметрами і довільним граничними умовами:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right] \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi^{(l)} + \\ & + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi_{,3}^{(l)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \times \sqrt{g} dx^3 \quad (4.21) \end{aligned}$$

Враховуючи незалежність компонент матриць $\left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]$ і $\left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]$ від

x^3 виконуємо чисельне інтегрування за цим напрямком:

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m = \left\{ \sigma_{l1} \right\}_g ;$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m = \left\{ \sigma_{l3} \right\}_g ;$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_m^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m = \left\{ \sigma_{l\alpha} \right\}_g ;$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m = \left\{ \sigma_{l\alpha 3} \right\}_g$$

З урахуванням цих результатів отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій неоднорідного скінченного елемента із змінними фізичними і геометричними параметрами:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_{hg} = & \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{ \sigma_l \}_g + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{ \sigma_{l3} \}_g + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \{ \sigma_{l\alpha} \}_g + \right. \\ & \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \{ \sigma_{l\alpha 3} \}_g \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Наведені розв'язувальні співвідношення НМСЕ дозволяють здійснювати урахування змінності геометричних параметрів (компонент метричного тензору) в поперечному перерізі і неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу в напрямку, перпендикулярному площині поперечного перерізу тіла.

Матриця мас неоднорідних скінчених елементів. Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta T^e = - \int \int \int_{x^1, x^2, x^3} \rho \dot{u}^k \delta u_k \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.23)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж окружної координати у вигляді відрізків ряду Фур'є (4.7), отримаємо:

$$\delta T^e = - \sum_{l=0}^L \delta T_l^e \quad (4.24)$$

де $\delta T_l^e =$

$$\begin{aligned} = & \int \int \int_{x^1, x^2, x^3} \rho [P]_{(P_1, P_2)} [g^{kj}]_{(P_1, P_2)} \{ \dot{u}_k \}_{(P_1, P_2)} [P]_{(S_1, S_2)}^T \delta \{ u_i \}_{(S_1, S_2)}^T \psi_{(k')}^T \times \\ & \times \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \\ [g^{kj}]_{(P_1, P_2)} = & \text{diag} [g^{kj}]_{(-1, -1)} \quad [g^{kj}]_{(1, -1)} \quad [g^{kj}]_{(-1, 1)} \quad [g^{kj}]_{(1, 1)} \\ [g^{kj}]_{(P_1, P_2)} = & \text{diag} [g^{1'1'} \quad g^{2'2'} \quad g^{3'3'}] \end{aligned}$$

Перепишемо варіацію кінетичної енергії у вигляді:

$$\delta T_I^e = \hbar_1 \delta \left\{ \left\{ u_{k'} \right\}'_{(S_1, S_2)} \right\}^T \left\{ r_\rho \right\}_I \quad (4.25)$$

де

$$\left\{ r_\rho \right\}_I = \left\{ \left\{ r_\rho^{k'} \right\}'_{(S_1, S_2)} \right\} = H_I \left[\left[g^{k'(k')} \right]_{(S_1, S_2)} \right] \sqrt{g} \frac{1}{\hbar_1} \int_{x^3} \rho \left\{ \left\{ \dot{u}_{k'} \right\}'_{(S_1, S_2)} \right\} \rho_{(k')} dx^3 \quad (4.26)$$

вектор інерційних вузлових навантажень скінченного елемента.

Якщо прискорення вузлів СЕ в окружному напрямку розкласти в ряд Фур'є, то виходячи з (4.25) отримаємо вираз:

$$\delta T^e = -\hbar_1 \sum_{l=1}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \left\{ \left\{ u_{k'} \right\}'_{(S_1, S_2)} \right\}^T [m]_{lm} \left\{ \left\{ \ddot{u}_{k'} \right\}'_{(S_1, S_2)} \right\}^m \quad (4.27)$$

де $[m]_{lm}$ – амплітудна “неузгоджена” матриця мас неоднорідного вздовж x^3 елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \left[\left[m^{k'} \right]_{(S_1, S_2)(S_1, S_2)}^m \right] = \sqrt{g} \rho_{lm}^{k'} \left[\left[g^{k'(k')} \right]_{(S_1, S_2)} \right] H_I, \quad (4.28)$$

$$\text{де } \rho_{lm}^{\alpha'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \rho_n \phi_1^l(n) \phi_1^m(n) \quad \rho_{lm}^{\beta'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \rho_n \phi_2^l(n) \phi_2^m(n).$$

В загальному випадку при обчисленні інтеграла по площі поперечного перерізу СЕ:

$$H_I = \prod_{n=1}^2 \left[(S_n P_n + 3) / 144 \right]. \quad (4.29)$$

Оскільки при формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас і, отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенціальної енергії деформації, тоді доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. В цьому випадку, отримаємо вираз для коефіцієнтів “неузгодженої” матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, множник H_I можна записати як

$$H_I = 1/4. \quad (4.30)$$

В (4.28) тут введені наступні позначення: ρ_n – питома вага матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає n -ій точці інтегрування.

Для однорідних тіл обертання інтегрування в (4.42) можна виконати в замкнутій формі:

$$\rho_{lm}^{k'} = \rho \times \begin{cases} 1, l=m \\ 0, l \neq m \end{cases} \quad (4.31)$$

Отриманий вираз матриці мас використовуються в подальшому при формуванні системи розв'язувальних рівнянь НМСЕ.

4.2. Алгоритми розв'язання систем рівнянь НМСЕ

В загальному випадку задача визначення переміщень, швидкостей та прискорень традиційно зводиться до розв'язання системи звичайних дифференційних рівнянь 2-го порядку для момента часу t , яка отримана після просторової скінченно-елементної дискретизації:

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\} \quad (4.32)$$

У класичному випадку НМСЕ, для однорідних вздовж направляючої тіл обертання та призматичних тіл при використанні базисних функцій у вигляді рядів Фур'є (4.7) система рівнянь (4.32) розпадається на низку незалежних амплітудних підсистем для кожного із членів ряду:

$$[M]_l \{\dot{U}\}^l + [K]_l \{U\}^l = \{Q\}_l, \quad l = l_0 \dots L \quad (4.33)$$

Матриці системи розрахункових рівнянь НМСЕ складаються з діагональних блоків:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & [K]_{ll} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [K]_{LL} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & [M]_{ll} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [M]_{LL} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Кожний блок зазначених матриць (4.34) і (4.35) являє собою стрічкову амплітудну підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла. У цьому випадку за рахунок зменшення ширини стрічки матриці НМСЕ, порівняно з традиційним варіантом МСЕ, досягається значне скорочення (на декілька порядків) кількості арифметичних операцій.

При аналізі об'єктів із змінними вздовж координати x^3 фізико-механічними параметрами, а також у випадку застосування в якості апроксимуючих функцій поліномів Лагранжа та Міхліна (4.8) розділення змінних досягти не вдається, отже матриці задачі матимуть відмінний від (4.34), (4.35) вигляд.

Для перелічених випадків система рівнянь має блокову структуру:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \cdots & [K]_{l_0 m} & \cdots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \cdots & [K]_{ll} & \cdots & [K]_{llL} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \cdots & [K]_{Lm} & \cdots & [K]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \cdots & [M]_{l_0 m} & \cdots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [M]_{l_l l_0} & \cdots & [M]_{l_l l} & \cdots & [M]_{l_l L} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{L l_0} & \cdots & [M]_{L m} & \cdots & [M]_{L L} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Підматриці $[\tilde{K}]_{j_m}$, $[M]_{j_m}$ одержані шляхом повузлового обходу скінченноелементної моделі та складанням відповідних коефіцієнтів ефективних підматриць жорсткості $[\tilde{k}]_{j_m}$ та мас $[m]_{j_m}$ окремих елементів, що примикають до даного вузла.

Можна показати, що при використанні різноманітних алгоритмів інтегрування рівнянь руху за часом, розв'язання розглянутих диференційних систем рівнянь в кінцевому випадку потребує вирішення класичної системи алгебраїчних рівнянь з ефективними матрицями та векторами типу:

$$[\tilde{K}]\{U\} = \{\tilde{Q}\}, \quad (4.38)$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}]_{l_0 l_0} & \cdots & [\tilde{K}]_{l_0 m} & \cdots & [\tilde{K}]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [\tilde{K}]_{l_l l_0} & \cdots & [\tilde{K}]_{l_l l} & \cdots & [\tilde{K}]_{l_l L} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\tilde{K}]_{L l_0} & \cdots & [\tilde{K}]_{L m} & \cdots & [\tilde{K}]_{L L} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\{\tilde{Q}\}^T = \{[\tilde{Q}]_{l_0}^T \quad \cdots \quad [\tilde{Q}]_{l_l}^T \quad \cdots \quad [\tilde{Q}]_{L}^T\} \quad (4.40)$$

Такий саме вигляд матиме система рівнянь у випадку розгляду задач статичного деформування, коли $[M] = 0$.

Оскільки усі блоки матриці (4.39) не нульові, застосування прямих методів, серед яких найбільше розповсюдження отримав фронтальний метод Гауса [95], для розв'язання систем вигляду (4.38) призведе до невиправдано великих обчислювальних витрат. При цьому апроксимація конструкції вздовж направляючої майже ортогональною в енергетичному просторі оператора теорії пружності системою базисних (тригонометричних) функцій забезпечує достатньо високу обумовленість матриці (4.39).

Враховуючи перелічені фактори необхідно орієнтуватись на ітераційні методи розв'язання систем рівнянь НМСЕ, які забезпечують задану точність результатів [69, 104, 125].

Однією з найбільш ефективних блоково-ітераційних процедур є метод блокової (групової) релаксації, який полягає у застосуванні метода послідовної верхньої релаксації до груп невідомих:

$$\{u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + \{\Delta u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + [K_{ll}]^{-1} \left(\{Q_l\} - \beta \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} [K_{ls}] \{u_s\}_n + \sum_{s=l}^L [K_{ls}] \{u_s\}_{n-1} \right\} \right) \quad (4.41)$$

де $1 \leq \beta < 2$ – параметр релаксації, n – номер поточної ітерації.

Умовою збіжності ітераційного процесу є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta u_l\}_n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{u_l\}_n)^2, \quad (4.42)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи лінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності результатів.

Розв'язання фізично нелінійних задач, а також задач динаміки потребує дискретизації процесу навантаження і деформування досліджуваних об'єктів за параметром силового навантаження або за часом і використання відповідних крокових алгоритмів.

У випадку розв'язання нелінійних задач коефіцієнти ефективної матриці жорсткості рівняння (4.38) стають залежними від поточного напружено-деформованого стану тіла. Як показано в [6], найбільш універсальним і економічним алгоритмом розв'язання отриманої системи рівнянь є алгоритм, заснований на поєднанні методу додаткових навантажень, ітераційної процедури Н'ютона-Канторовича та блокового метода послідовної верхньої релаксації. Обчислення нев'язок, які обумовлені неоднорідністю матеріала (специфіка НМСЕ) та наявністю пластичних деформацій проводиться одночасно.

На кожній ітерації n кроку m вектор прирощень невідомих амплітудних переміщень $\{\Delta U_l\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{\Delta U_l\}_n^m = \{\Delta U_l\}_{n-1}^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left(\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m \right) \quad (4.43)$$

де β – параметр релаксації ($1 \leq \beta < 2$), $\{Q_l\}_n^m$ – вектор повних вузлових навантажень на кроці m ; $[K_{ll}]$ – матриця жорсткості, $\{R_l\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n кроку m :

$$\{R_l\}_n^m = \{R(\sigma)_l\}_n^m + \{R(\rho)_l\}_n^m.$$

Перший складник цього виразу $\{R(\sigma)_l\}_n^m$ – вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації n кроку m , що враховує змінність фізико-механічних характеристик матеріалу вздовж окружної координати, розвиток пластичних деформацій та поточну конфігурацію поверхні контактної взаємодії. Компоненти вектора $\{R(\sigma)_l\}_n^m$ визначаються в результаті обходу скінченноелементної області та асамблювання компонент векторів окремих елементів $\left\{ R_l \right\}_{hg}$.

$\{R(\rho)_l\}_n^m$ – динамічна складова вектору вузлових реакцій, вигляд якої залежить від прийнятого методу інтегрування рівнянь руху за часом.

Напруження σ^{ij} , які входять до складу вектору вузлових реакцій, на ітерації n кроку m обчислюються за формулою:

$$(\sigma^{ij})_n^m = (\sigma^{ij})_{n-1}^m + (\Delta\sigma^{ij})_n^m, \quad (4.44)$$

де $(\Delta\sigma^{ij})_n^m$ – прирощення напружень на початку кожної ітерації n кроку m , які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Для неоднорідних кругових замкнених тіл, а також неоднорідних кругових незамкнених і призматичних тіл із шарнірним закріпленням торців при використанні апроксимації невідомих перемішень в напрямку x^3 2π -періодичними функціями вигляду (4.7) прирощення напружень обчислюється за формулою:

$$\{\Delta\sigma_\xi\}_n^m = [D_\xi] \left(\sum_{s=0}^{l-1} [B_\xi]_s \{\Delta U\}_{s,n}^m + \sum_{s=l}^L [B_\xi]_s \{\Delta U\}_{s,n-1}^m \right) \psi_{(\xi+1)}^s,$$

де $[D_\beta]_{\xi s} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} [D_\beta]^n \phi'_\beta(n) \phi_\beta^s(n)$ – матриця пружнопластичних сталей, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає n -ій точці інтегрування; $\xi = 1, 2$.

У випадку моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних кругових незамкнених та призматичних тіл із довільними граничними умовами на торцях при використанні апроксимації невідомих переміщень в напрямку x^3 системою координатних функцій вигляду (4.8), яка складається з поліномів

Лагранжа і Міхліна для $(\Delta\sigma^{ij})_n^m$ отримаємо:

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma^{ij})_n^m = [D] & \left\{ \left(\sum_{s=0}^{l-1} [B_1]_s \{\Delta U\}_{s,n}^m + \sum_{m=1}^l [B_1]_s \{\Delta U\}_{s,n-1}^m \right) \varphi^s + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{s=0}^{l-1} [B_2]_s \{\Delta U\}_{s,n}^m + \sum_{m=1}^l [B_2]_s \{\Delta U\}_{s,n-1}^m \right) \varphi_{,3}^s \right\}. \end{aligned}$$

Величини напружень σ^{ij} , обчислені за (3.2), відповідають реальним фізико-механічним властивостям матеріалу лише у випадку пружного деформування і потребують подальшого уточнення згідно до величин викликаних ними деформації пластичності або повзучості.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta U_l\}_n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{U_l\}_n)^2, \quad (4.45)$$

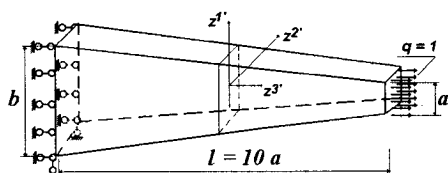
де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв'язку.

Методологічні особливості реалізації алгоритмів розв'язання систем рівнянь НМСЕ з урахуванням досліджуваних фізичних процесів (фізично-нелінійного деформування, дослідження динамічних процесів, т.і.) викладені у [6, 8-11, 13, 15, 16].

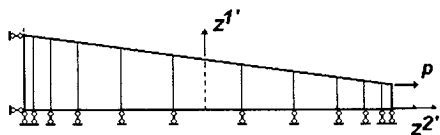
4.3. Результати розв'язання фізично-нелінійних та динамічних задач із використанням НМСЕ

4.3.1. Напружено-деформований стан призматичних тіл змінної площі поперечного перерізу.

Розтяг призматичного стержня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу в умовах плоскої деформації в площині $z^1 - z^3$ (рис. 4.5,а). Зміна площі в даному випадку є тотожною зміні характерного розміру перерізу в напрямку в напрямку z^1 , співвідношення площ торцевих перерізів 2:1 (співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини становило 1/10), $E = 0.1$ МПа, $\nu = 0.3$. В дискретній моделі МСЕ (рис. 4.5,б) розташування центрів СЕ вздовж вісі стержня збігається із розташуванням точок інтегрування в дискретній моделі НМСЕ. Дискретна модель НМСЕ утворена із використанням одного призматичного СЕ змінної площі поперечного перерізу і за виглядом повністю ідентична розрахунковій схемі. Отримані результати – розподілення напружень σ_{33} , і переміщень U^3 вздовж вісі стержня (за напрямком z^2 – в МСЕ і z^3 в НМСЕ) добре узгоджується, похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% (рис.4.6.)



а)



б)

Рис. 4.5

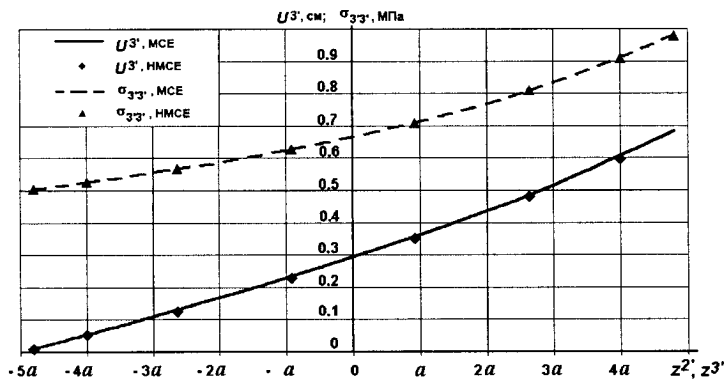


Рис. 4.6.

Згин шарнірно обертої балки змінної площі поперечного перерізу під впливом розподіленого навантаження (рис. 4.7). Співвідношення площ торцевих перерізів 1,5:1 (співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини балки 1/20). Дискретні моделі НМСЕ і МСЕ ідентичні попередньому прикладу. Отримані результати – розподілення згинних напружень $\sigma_{22'}$ по висоті серединного перерізу балки (рис.4.8) і переміщень $U^{1'}$ (прогину, рис.4.9) вздовж вісі стержня ($z^{2'}$ – в МСЕ і $z^{3'}$ в НМСЕ) добре узгоджуються між собою.

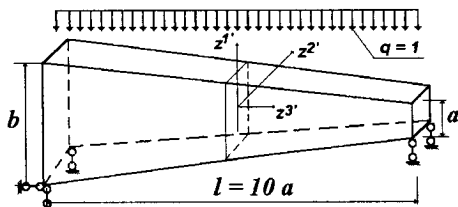


Рис. 4.7

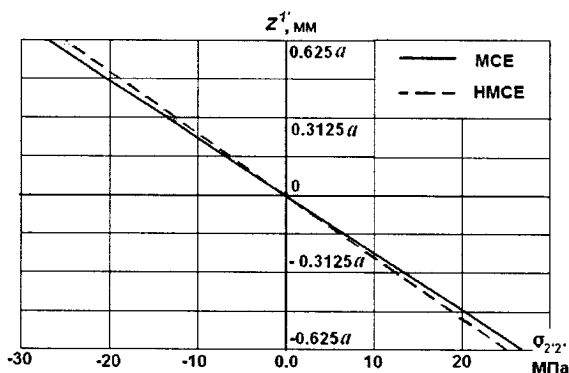


Рис. 4.8

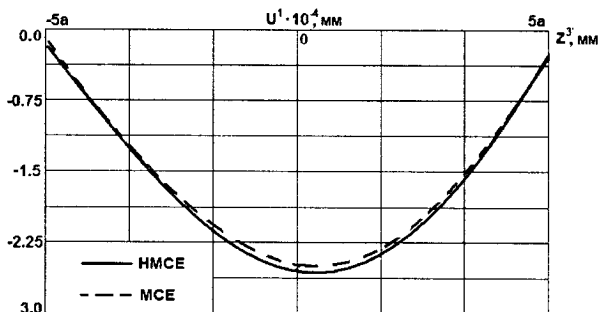


Рис.4.9

Таким чином урахування змінності визначника метричного тензора в напрямку утворюючої дає можливість достовірного визначення напружено-деформованого стану призматичних тіл із змінною площею поперечного перерізу при різних видах напруженого стану. Такий саме підхід може бути використаний для тіл обертання [75]. В той же час необхідно відзначити, що межі зміннення площі, при якій розроблений підхід дозволяє отримати достовірні результати, є обмеженими, тому використання СЕ із змінними геометричними параметрами потребує попереднього додаткового дослідження достовірності результатів [9, 10].

4.3.2. Дослідження пружно-пластичного напружено-деформованого стану демпферного елемента

Демпферний елемент являє собою коробчасту конструкцію, підсилену двома поздовжніми ребрами. Він складається із тонкостінних елементів, об'єднаних галтельними переходами, в області яких реалізується просторовий напружено-деформований стан. Граничні умови на торцях відповідають обпиранню на абсолютно жорстку у своїй площині та гнучку вздовж напрямної діафрагми. Розрахункова схема об'єкта приведена на рис. 4.10,а. Розміри подані у відносних величинах через товщину верхньої кришки та днища δ_1 , і складають: довжина $L = 30\delta_1$, висота $H = 24\delta_1$, ширина $B = 30\delta_1$, радіуси галтельних переходів $R_1 = \delta_1$, $R_2 = 0.25\delta_1$, розміри поперечного перерізу ребер $b = 4\delta_1$, $h = 2\delta_1$, товщина бокових стінок $\delta_2 = 3\delta_1$, Модуль пружності матеріалу конструкції $E = 2.1 \times 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, межа текучості при чистому зсуві $\tau_s = 210$ МПа. Зовнішні впливи складаються з розподілених в центральній частині ребер зустрічно спрямованих навантажень, номінальна інтенсивність якого 50 МПа, а в екстремальних режимах – 65 МПа.

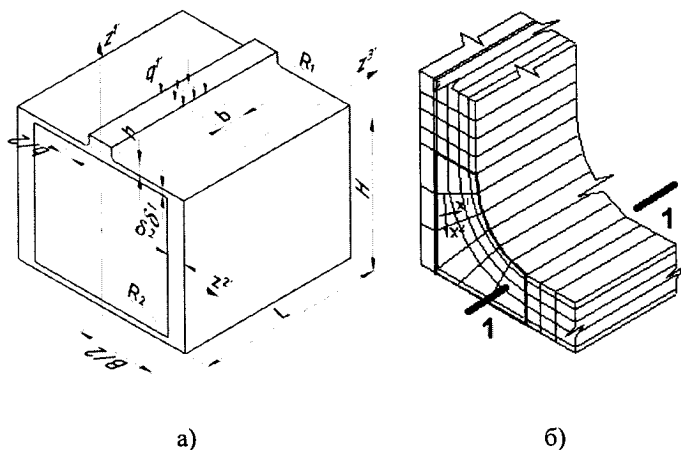


Рис. 4.10.

Результати дослідження збіжності від кількості членів розкладу переміщень L в (4.7) і кількості вузлів скінченоелементної моделі на ділянках, що безпосередньо прилягають до галтелей, для максимальних значень напружень у вузлах А і В наведено у таблицях 4.1 і 4.2 відповідно. Як видно, для отримання достовірних результатів достатнім є 5 членів розкладу переміщень L в (4.7) і обмежитися 42 вузлами на ділянках сіткової області, апроксимуючих галтельні переходи.

Таблиця 4.1.

m	L	σ^{22} , МПа	δ , %	σ^{33} , МПа	δ , %	τ_i , МПа	δ , %
25	5	425.0	2.78	147.1	6.05	210.0	4.5
42	5	416.5	0.79	139.0	0.58	202.3	0.89
63	5	413.2	-	138.2	-	200.5	-
42	3	409.3	1.88	138.1	1.23	198.7	2.01
42	5	416.5	0.12	139.0	0.57	202.3	0.20
42	7	417.7	-	139.8	-	202.7	-

Таблиця 4.2.

m	L	σ^{22} , МПа	δ , %	σ^{33} , МПа	δ , %	τ_i , МПа	δ , %
25	5	465.0	7.27	149.0	7.32	216.0	8.24
42	5	439.9	1.98	139.7	1.15	202.3	2.03
63	5	431.2	-	138.1	-	198.2	-
42	3	439.8	0.02	139.7	0.00	202.1	0.02
42	5	439.9	0.00	139.7	0.00	202.3	0.00
42	7	439.9	-	-	-	202.3	-

Результати розрахунку, виконаного в пружній постановці при інтенсивності зовнішнього навантаження 50 МПа, наведені на рис.4.11. Спостерігається практично повна ідентичність як у характері розподілу так і в кількісних значеннях розглянутих параметрів напруженого стану. Зокрема, відміна максимальних величин напружень, обчислених в різних перетинах, не перевищує 2-3%, а максимальні інтенсивності дотичних напружень повністю збігаються.

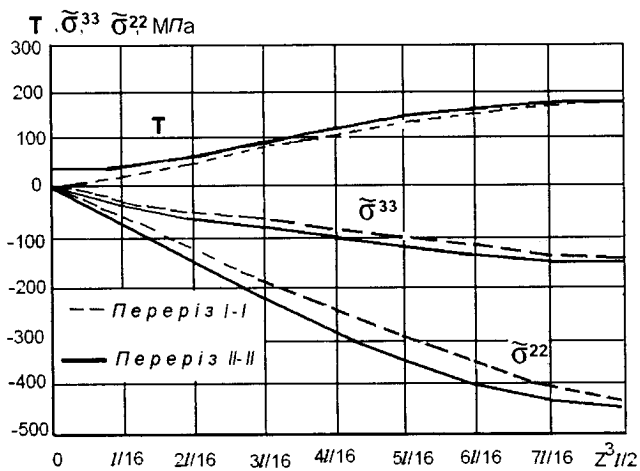


Рис. 4.11.

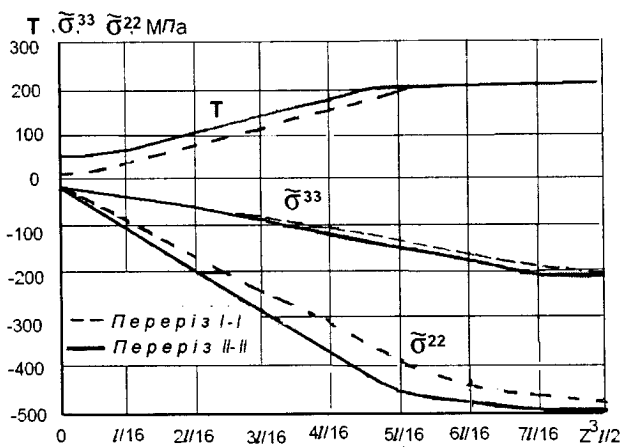


Рис.4.12

Оскільки при рівні навантаження 50 МПа інтенсивність напружень, обчислена в рамках пружного розрахунку, перевищила межу текучості, для оцінки пружнопластичної роботи демпфуючого елемента було одержано розв'язок задачі з урахуванням пластичних властивостей матеріалу. Відповідні результати, наведені на рис.4.12, ілюструють перерозподіл напружень, пов'язаний із розвитком зон пластичних деформацій у центральній частині об'єкта. Як і в пружній постановці максимальні значення напружень в різних перерізах вельми близькі. Аналіз зростання величини пластичних деформацій центральних точок перерізів 1-1 і 2-2 в процесі навантаження, показав що у перерізі 2-2 величина пластичних деформацій приблизно на 30% більша, ніж, ніж в перерізі 1-1.

В данному випадку повна оцінка умов роботи галтельних переходів отримана тільки після аналізу розвитку пластичних деформацій.

4.3.3. Визначення розрахункового ресурсу хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах повзучості

Хвостовик лопатки являє собою відповідальну конструктивну частину лопатки, які в значний мірі визначає несучу здатність лопатки в цілому (рис. 4.13,а). Хвостовик являє собою неоднорідне призматичне тіло складної форми, що знаходиться в неоднорідному по висоті температурному полі під дією розподіленого по його поверхні силового навантаження, обумовленого відцентровими силами лопатки, контактних зусиль взаємодії зубців із пазами ободу диска (рис. 4.13,б). Таким чином, умови роботи хвостовика обумовлені термосиловим навантаженням.

Враховуючи складну геометричну форму та конструктивні особливості лопатки, визначення несучої здатності хвостовика та пера лопатки доцільно проводити окремо. Попереднє визначення

параметрів напружено-деформованого стану та розрахункового ресурсу пера лопатки газотурбінної установки (рис. 4.13,а) під дією силового навантаження, виконані в припущенні пружного деформування на основі традиційного тривимірного МСЕ, дозволили обрати найбільш небезпечний з точки зору інтенсивності перебігу деформацій повзучості небезпечний поперечний переріз пера лопатки R_0 , який характеризується усередненим напруженням σ_0 і усередненою температурою T_0 . При розв'язанні задачі про визначення ресурсу хвостовика лопатки зазначені величини використані для опису вихідних даних, процесу дослідження і подання кінцевих результатів.

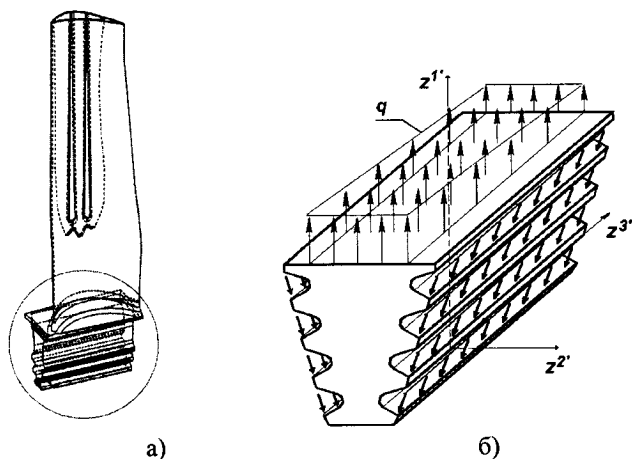


Рис. 4.13.

Замкові з'єднання лопаток із дисками працюють в умовах важкого і тривалого термосилового навантаження. При температурі газів перед турбіною $820^{\circ}\text{C} - 900^{\circ}\text{C}$ для з'єднання характерною є температура приблизно 700 C [93]. Несуча здатність деталі в цих умовах значною мірою визначається накопиченням деформацій повзучості і погіршенням фізико-механічних властивостей матеріалу, що потребує використання рівнянь, які враховують накопичення пошкодженості [27, 46, 50 79 та. ін.]

З метою правильного вибору і обґрунтування вимірності розрахункової схеми досліджуваного об'єкта було проведено визначення напружено-деформованого стану хвостовика в складі ялинкового з'єднання в просторовій постановці при пружному деформуванні на основі НМСЕ. Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалась половина поперечного перерізу. Граничні умови визначено з умов симетрії та закріплення в радіальному напрямку: $u^1(z^1 = 0) = 0$, $u^2(z^2 = 0) = 0$, $u^3(z^2 = 0,066 R_0) = 0$. Враховуючи складну конфігурацію розрахункової схеми, що включає хвостовик і фрагмент обода диска турбіни, для побудови скінченноелементної моделі їх поперечний переріз доцільно розбити на фрагменти (рис. 4.14,а), в межах кожного фрагмента скінченноелементна сітка є регулярною. Умови симетрії також були застосовані в напрямку, перпендикулярному поперечному перерізу: $u^3\left(z^3 = -\frac{L}{2}\right) = 0$, де L

– характерний розмір хвостовика в напрямку утворюючої. Загальний вигляд дискретної моделі НМСЕ наведений на рис. 4.14,б. Величина зовнішнього навантаження q визначена як відношення рівнодіючої відцентрових сил в кореневому перерізі пера лопатки до площі її прикладання. Розрахунок проведений при постійному розподілі температури в усьому об'ємі хвостовика. В цьому випадку константи матеріалу відповідають середньому значенню температури $T_{0X} = 0.95 T_0$ в напрямку осі z^1 , і є сталими межах всього поперечного перерізу. Результати показали, що в хвостовику найбільш навантаженими є області галтелей фрагментів 1–4 в околі точок В, Е, L, Р. Значення напружень в цих точках незначно відрізняються і лежать в межах (1.2...1.4) σ_0 .

Для аналізу просторового характеру напружено-деформованого стану хвостовика для цих точок розглянуті розподілення інтенсивності напружень в напрямку, перпендикулярному поперечному перерізу (рис.4.15). Як видно, в більшій частині хвостовика величини напружень є сталими. Певні відхилення від цих значень поблизу торцевого перерізу обумовлені наближенням умов деформування в цій області до плоского напруженого стану. В той же час, в переважній частині об'єкта (близько 80% товщини) реалізуються умови плоскої деформації. Зважаючи на це,

проведення дослідження впливу на величину ресурсу хвостовика урахування температурних деформацій і залежності фізико-механічних констант матеріалу від температури можливо проводити при розгляді досліджуваного об'єкта в умовах плоскої деформації, що узгоджується із підходами, застосовуваними в переважній більшості відомих робіт про дослідження напружено-деформованого стану і ресурсу хвостовиків лопаток.

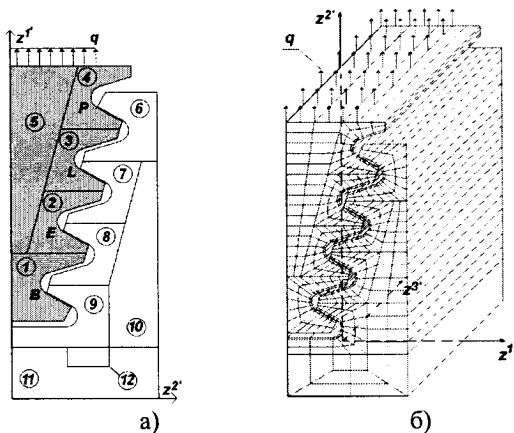


Рис. 4.14.

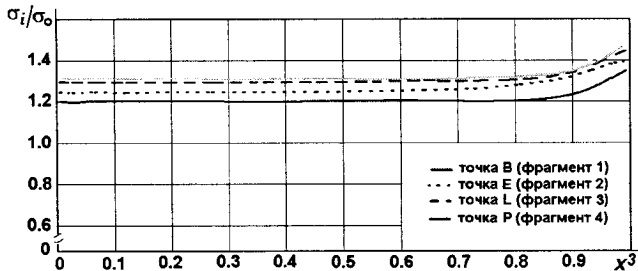


Рис.4.15.

Дослідження збіжності результатів моделювання пружного деформування в залежності від кількості невідомих скінченноелементної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень для сіток з кількістю невідомих $N=1074$, $N=3344$ та $N=9596$ (рис. 4.16). Отримане розподілення безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в межах поперечного перерізу (рис. 4.17,а) є однаковим для всіх наведених дискретних моделей. Для більш детального аналізу побудовані графіки розподілення безрозмірної інтенсивності напружень вздовж кривих, що проходять через зони максимальних напружень — вздовж галтелей, опорних та вільних поверхонь зубців хвостовика (рис. 4.17,б,в). Як видно, результати, отримані при застосуванні скінченноелементних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596 майже повністю співпали (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 максимальні напруження є меншими майже на 10%. Таким чином збіжність результатів досягається при використанні сітки з кількістю невідомих 3344.

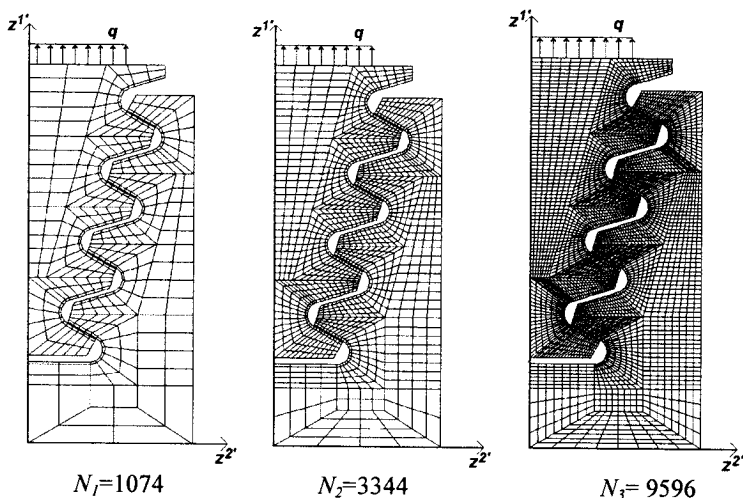


Рис. 4.16.

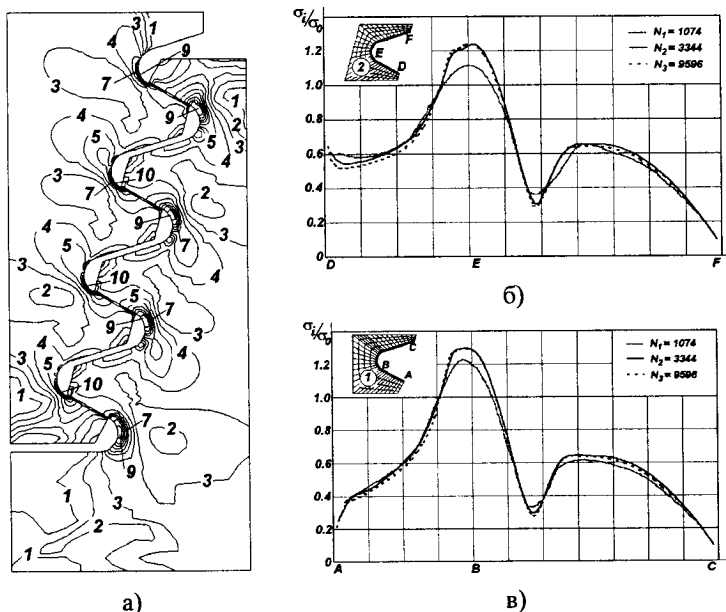


Рис. 4.17.

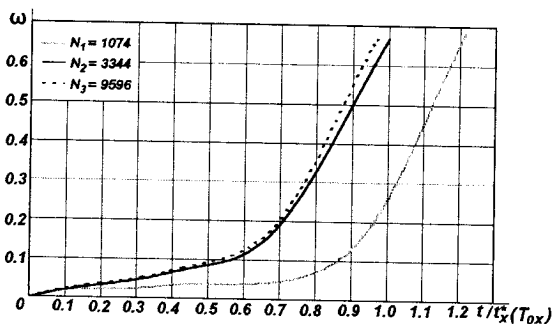
Опис деформування матеріалу хвостовика лопатки в умовах повзучості здійснюється рівняннями вигляду:

$$\dot{\epsilon}_{ic} = \frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma_i^n}{(1-\omega)^r}; \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q},$$

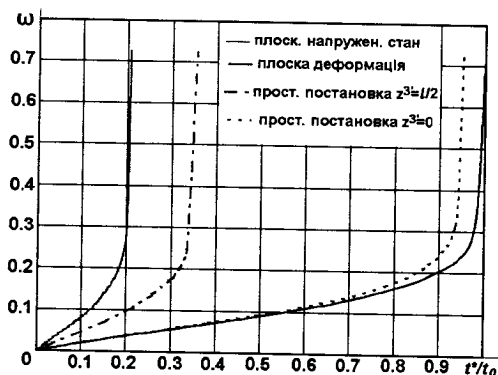
де $B = B(T)$, $C = C(T)$, $m = m(T)$, $n = n(T)$, $r = r(T)$, $q = q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура.

Для дослідження збіжності величин розрахункового ресурсу хвостовика лопатки при постійному розподілі температур в його поперечному перерізі в залежності від кількості невідомих скінченноелементних моделей для кожної сітки SE здійснено порівняння перебігу процесу накопичення пошкодженості з часом в точці B фрагмента I , де значення параметра пошкодженості є найбільшими. Отримані результати свідчать, що похибка визначення ресурсу при застосуванні сіток з кількістю невідомих

3344 та 9596 складає менше 5%, в той час як застосування сітки з кількістю невідомих 1074 призводить до отримання завищених на понад 20% значень розрахункового ресурсу (рис. 4.18,а).



а)



б)

Рис. 4.18.

Таким чином, аналізуючи величини похибок, отриманих на різних сітках, можна зробити висновок, що збіжність результатів як при пружному деформуванні так і в умовах повзучості досягається при використанні сітки з кількістю невідомих 3344.

Величина часу до досягнення параметром пошкоженості критичного значення t^* (величина основного розрахункового

ресурсу) отримана, в двовимірній постановці в умовах плоскої деформації на сітці з кількістю невідомих 3344 з урахуванням збіжності за величиною кроку за часом при розв'язанні задачі повзучості за постійної температури $T_{0,x}$ становила $t_x^*(T_{0,x})$.

З метою з'ясування відмінностей величин часу до досягнення параметром пошкодженості критичного значення, отриманих в двовимірній і просторовій постановках, що обумовлені певною неоднорідністю розподілення напружень біля торців хвостовика, моделювання деформування хвостовика в умовах повзучості було проведено також на основі просторової постановки задачі та із використанням двовимірної постановки в умовах плоского напруженого стану. Результати подані у вигляді залежностей параметра пошкодженості від часу в точці, де процес повзучості відбувається найбільш інтенсивно – точки В на нижній галтелі хвостовика (рис. 4.18,б), отриманих в двовимірних постановках (умови плоского напруженого стану і плоскої деформації) та в просторовій постановці (для торцевих перерізів при $z^{3'} = \pm 1/2$ і серединного перерізу при $z^{3'} = 0$).

Як видно, відмінність між величинами t^* становить біля 5% для результатів, отриманих для серединного перерізу в просторовій постановці і в умовах плоскої деформації. Величини t^* , отримані для торцевого перерізу в просторовій постановці (що відповідає реальному часу до локальної втрати несучої здатності) і в умовах плоскої деформації відносяться як 0,35/1. Величина t^* отримана для умов плоского напруженого стану є в 5 разів меншою, ніж для умов плоскої деформації, і, фактично, надає консервативну оцінку часу до локальної втрати несучої здатності. Не дивлячись на такі значні кількісні відмінності у величині t^* , якісна картина розподілення пошкодженості в межах поперечного перерізу і характер накопичення пошкодженості з часом в окремих точках перерізу в усіх випадках є ідентичним. Таким чином, для розв'язання поставленої в межах даної роботи задачі про визначення впливу врахування нерівномірного розподілу температур на величину розрахункового ресурсу хвостовика може бути використана двовимірна постановка в умовах плоскої деформації.

З метою більш детального аналізу процесу деформування і накопичення пошкодженості в поперечному перерізі хвостовика на

рис. 4.19,а наведена залежність зміни параметра пошкодженості з часом для характерних точок всіх чотирьох галтелей хвостовика лопатки. Як видно з графіка, максимальні значення пошкодженості виникають в точці В, що знаходиться на галтелі фрагмента І. На рис. 4.19,б проілюстровано зміну безрозмірної інтенсивності напружень з часом в характерних точках хвостовика, порівняння яких із попередніми залежностями дозволяє зробити висновок, що при постійній температурі максимальні значення пошкодженості в хвостовику виникають в тій самій точці, де в початковий момент часу виникають максимальні значення напружень.

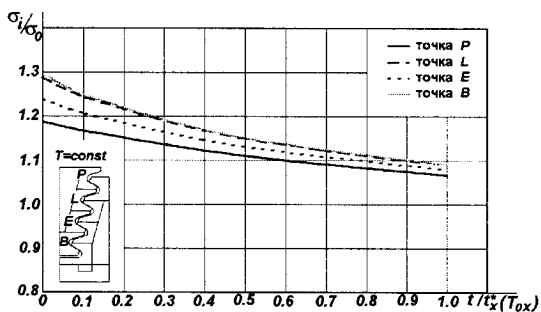
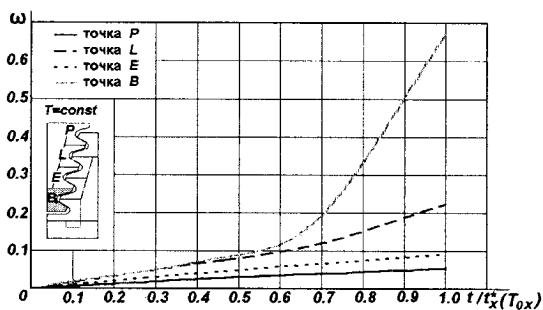


Рис. 4.19.

4.3.4. Аналіз стаціонарних коливань резервуару для зберігання пальмового стеарину під дією вітрового навантаження

Об'єктом дослідження є резервуар, що знаходиться під дією статичних і періодичних за часом силових зовнішніх навантажень (рис. 4.20). Резервуар призначено для зберігання пальмового стеарину.

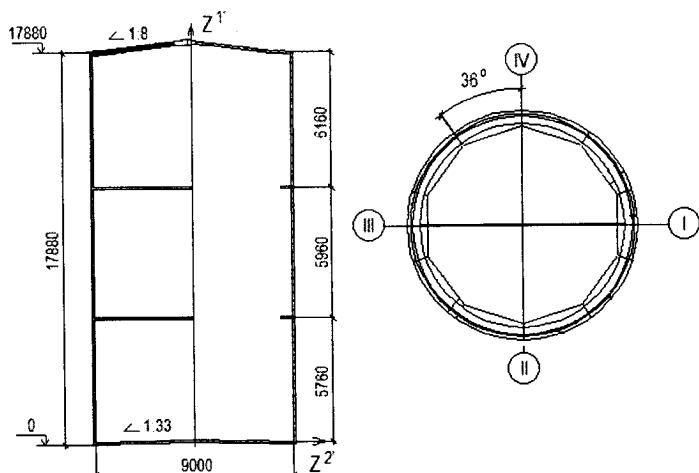


Рис. 4.20.

Будівельні металоконструкції резервуару запроєктовані в традиційній формі вертикального циліндра, що складається з днища, стінки і криши. Стінка резервуару виготовляється у вигляді полотнища довжиною 28.3м та висотою 17.88м з 12 рядів листів по висоті, внутрішній діаметр - 9.0м. Товщина листа - 10мм. Стінка на рівні днища кріпиться до фундаменту за допомогою 12 фундаментних болтів марки М30. Кришка резервуару збірна конічна, складається з 12 щитів, має ухил 1:8. Всі заводські з'єднання зварні, монтажні - на болтах і зварні. Днище резервуару виготовляється у вигляді полотнища, має ухил 1:33, товщина 10мм. По висоті резервуару розташовані 2 проміжних кільця жорсткості з інтервалом 5960мм з L№75x6 С245. Відстань від днища резервуару

до нижнього кільця жорсткості 5760мм, від кришки до верхнього кільця жорсткості 6160мм.

До статичних навантажень, що розглядаються, відносяться: вага термоізоляції 36кгс/м², власна вага конструкції (розраховується виходячи із щільності матеріала резервуару – 7800кг/м³), вага продукту, що зберігається (розраховується виходячи із щільності матеріала продукту – 920кг/м³), вага обладнання 200кгс/м², корисне навантаження і надлишковий тиск 100кгс/м². Снігове навантаження 100кгс/м² на площадках покриттів враховується з коефіцієнтом надійності, що дорівнює 1.4.

Вітрове навантаження визначається як сума середньої та пульсаційної складових:

$$q(z,t) = q_n^c(z) + q'(z,t)$$

Нормативне значення середньої складової вітрового навантаження $q_n^c(z)$ на висоті z над поверхнею землі визначається за формулою:

$$q_n^c(z) = q_0 k c$$

де q_0 – нормативне значення вітрового тиску; k – коефіцієнт, що враховує зміну вітрового тиску по висоті; c – аеродинамічний коефіцієнт.

Розрахунки проводились для вітрового району III та типу місцевості С (міські райони).

Пульсаційна складова навантаження обчислюється за формулою:

$$q'(z,t) = 2 \frac{v(z,t)}{v_n(z)} q_n^c(z)$$

де $v(z,t)$ – пульсаційна складова швидкості вітру на рівні z ; $v_n(z)$ – нормативна швидкість вітру на стандартній висоті анемометра (10 м).

При розрахунках висотних споруд, чуттєвих до динамічного впливу вітру, необхідно знати розподіл енергії турбулентного потоку по частотам. Цей розподіл називають енергетичним спектром (спектральною щільністю) пульсації компонент швидкості вітру, один з яких – емпіричний спектр Давенпорта $S(n)$

отриманий на основі аналізу спектрів повздовжньої пульсації швидкості при сильних вітрах. На практиці використовують його нормоване значення по відношенню до середнього квадрату пульсації швидкості (табл. 4.3):

$$S_n(n) = u^2 / \left[3n(1 + u^2)^{\frac{4}{3}} \right], \quad u = nL/v_n$$

$L = 1200\text{м}$ – масштаб довжини.

Таблиця 4.3.

Нормовані значення енергетичного спектру Давенпорта

$T, \text{с}$	$n, \text{Гц}$	$\omega, \text{рад/сек}$	$S_n(n)$
4347.826087	0.00023	0.001445	0.417311179
2174.913043	0.00046	0.00289	0.834141926
869.5652174	0.00115	0.007226	2.076981036
434.7826087	0.0023	0.014451	4.09509904
217.3913043	0.0046	0.028903	7.747200632
84.95652174	0.0115	0.072257	14.85037473
44.47826087	0.023	0.144513	12.70643235
21.73913043	0.046	0.289027	4.530971643
8.695652174	0.115	0.722566	1.692691328
4.347826087	0.23	1.445133	0.547922827
2.173913043	0.46	2.890265	0.17378234
0.869565217	1.15	7.225663	0.037810803
0.434782609	2.3	14.45133	0.011912965

При цьому, швидкість пульсації, що відповідає заданій частоті визначається виразом:

$$v_k(z) = \sqrt{S(n_k) \Delta n_k}$$

Виходячи із $S_n(n) = \frac{S(n)}{6r_0 \nu_n^2(z)}$ та використавши коефіцієнт лобового опору підстилаючої поверхні $r_0 = 0.04$, що відповідає міській місцевості, отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{6r_0}} \frac{\nu_k(z)}{\nu_n(z)} = \sqrt{S_n(n)\Delta n}$$

оскільки $\frac{1}{\sqrt{6r_0}} \approx 2$, маємо

$$2 \frac{\nu_k(z)}{\nu_n(z)} = \sqrt{S_n(n)\Delta n}$$

Виходячи із отриманих значень вводимо тимчасову функцію коефіцієнтів пульсації $f(t)$:

$$f(t) = 2 \frac{\nu(z,t)}{\nu_n(z)} = \sum_k 2 \frac{\nu_k}{\nu_n} \sin \omega_k t$$

Тоді формула для обчислення значень вітрового навантаження приймає вигляд:

$$q(z,t) = [1 + f_p(t)] q_n^c(z)$$

На першому етапі отримано розв'язок статичної задачі відносно ряду стаціонарних навантажень (включаючи постійну складову вітрового навантаження). Епюри максимальних кільцевих та повздовжніх напружень вздовж поперечного перерізу конструкції представлені на рис. 4.21.

Як видно, найбільш проблемними є області з'єднань циліндричної частини з кришкою та днищем. При цьому значення напружень не перевищують 150 МПа.

На другому етапі проводився розрахунок динамічної задачі. Для подання пульсаційної частини вітрового навантаження використовувався ряд Фур'є. На рис. 4.22 показано еволюцію максимальних повздовжніх та кільцевих напружень у часі, які реалізуються в зоні з'єднання циліндра і кришки.

Динамічна частина вітрового навантаження привносить до загального напружено-деформованого стану напруження приблизно рівні 18 МПа, що складає 12% від результатів статичного розв'язку.

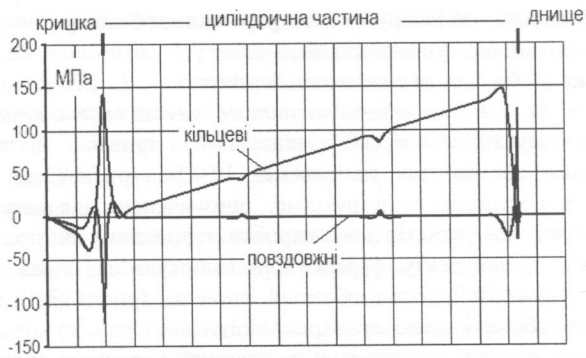


Рис. 4.21.

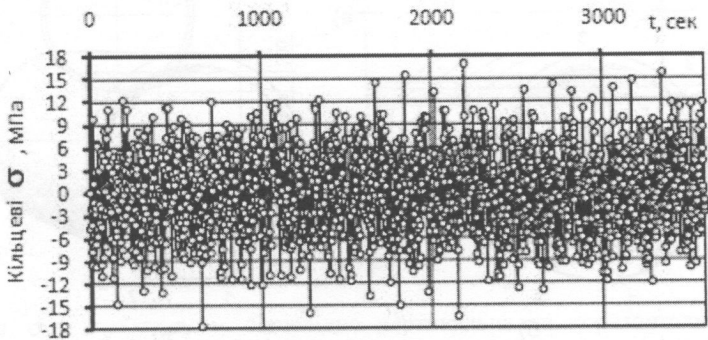
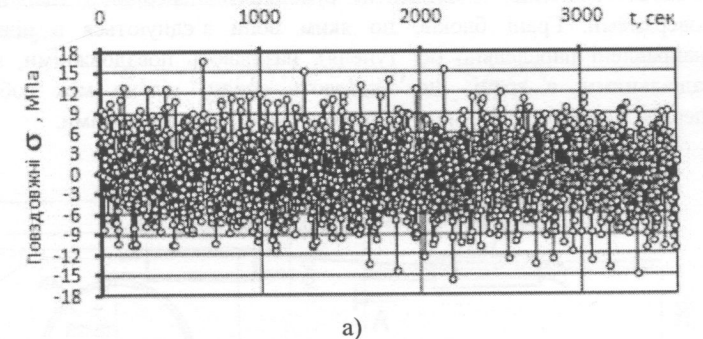


Рис. 4.22

4.3.5. Дослідження напружено-деформованого стану підземного тунелю під дією потягу, що рухається зі сталою швидкістю

Досліджуваний об'єкт, підземний тунель неглибокого закладання, знаходиться на глибині 10÷15м (рис.4.23,а). Оправа тунелю є постійною конструкцією, призначеною для закріплення внутрішньої поверхні гірської виробки і придання їй правильної, відповідної до проекту форми. Для влаштування оправ тунелей використовують збірні залізобетонні елементи (рис. 4.23,б), а також монолітний бетон і залізобетон (рис. 4.23,в).

Збірні оправи складаються з окремих елементів заводського виготовлення. Оправи кругової форми складаються з кілець, зібраних з окремих блоків – елементів суцільного перерізу з гладкими поверхнями. Грані блоків, по яким вони з'єднуються в кільце (направлені паралельно осі тунеля), називають поздовжніми, або радіальними, а грані, що з'єднують окремі кільця між собою (перпендикулярні осі тунеля) – поперечними, або кільцевими.

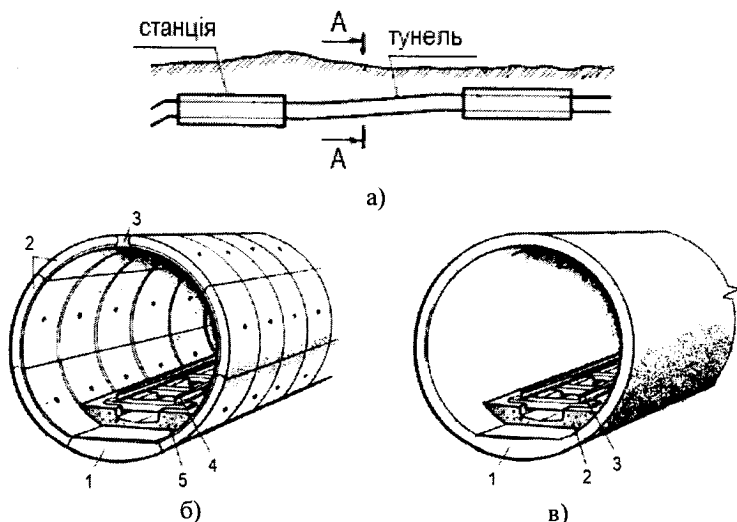


Рис. 4.23.

Збірна залізобетонна оправа (рис.4.23,б) складається з наступних елементів: 1 - лотковий (нижній) блок; 2 - нормальні (бокові) блоки; 3 - ключовий вкладиш; 4 - рейковий шлях; 5 - бетонна основа шляху. Монолітна оправа (рис.4.23,в): 1-лоткова частина; 2- бетонна основа шляху 3- рейсовий шлях. Розміри оправи наведені на рис.4.24, де показані поперечний і поздовжній перерізи оправи.

Постійне навантаження від власної ваги ґрунтового масиву з урахуванням реального стану масиву до моменту утворення виробки слід прикладати до нього у вигляді об'ємних сил, які створюють силове гравітаційне поле, рівень напруженості якого зростає прямо пропорційно глибині відносно поверхні землі.

Нормативне значення вертикальної і горизонтальної складових цього поля на довільній глибині H , слід визначати відповідно до формул:

$$\sigma_x = -g \sum_{(H)} \rho_i h_i, \quad \sigma_y = \sigma_l = -\lambda g \sum_{(H)} \rho_i h_i$$

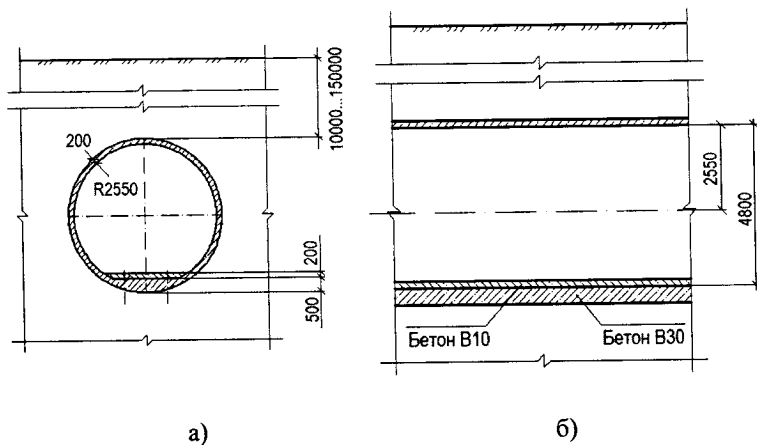


Рис.4.24.

де σ_x , $\sigma_y = \sigma_l$ - відповідно вертикальна та горизонтальна (поперечна і поздовжня) складові; g - прискорення вільного

падиння; ρ_i та h_i – відповідно щільність та товщина довільного i -го шару ґрунту; $\lambda = \nu/(1 - \nu)$ – коефіцієнт бокового тиску в пружному масиві; ν – коефіцієнт поперечної деформації шару ґрунту, що вміщає вирібку (коефіцієнт Пуасона).

Для нескільких i напівскельних глинистих ґрунтів з явно вираженими реологічними властивостями коефіцієнт бокового тиску слід приймати за формулою:

$$\lambda = \frac{0.6 + 0.8\nu}{1.4 - 0.8\nu}$$

Нормативне тимчасове вертикальне навантаження від рухомого складу, що передається на рейки колії, слід приймати рівним 150кН на кожну вісь за схемою, наведеною на рис. 4.25.

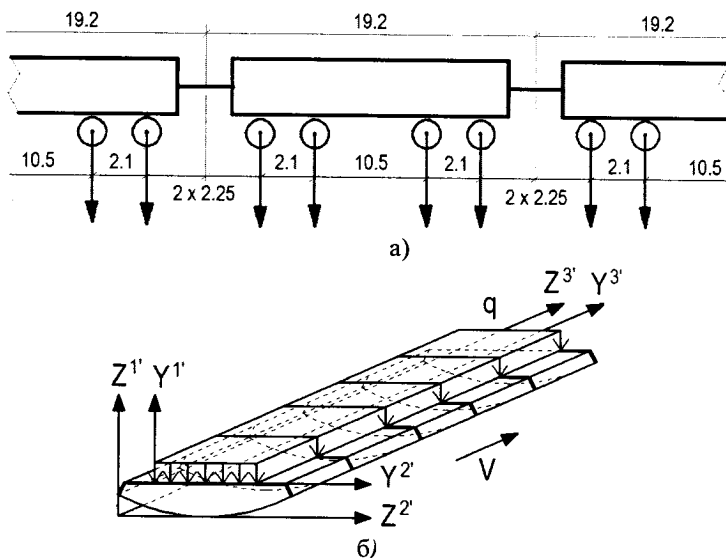


Рис. 4.25.

Нормативне горизонтальне поперечне навантаження від відцентрової сили рухомого складу на кожну колію для ділянок,

розташованих на кривих радіуса R , слід приймати у вигляді рівномірно розподіленого навантаження q , прикладеного до рухомого складу на висоті 2 м від рівня головки рейки, і визначати за формулою:

$$q = 3.2 \frac{V^2}{R}$$

де V – найбільша швидкість руху поїздів для кривої даного радіуса R .

Нормативне горизонтальне поперечне навантаження від ударів ходових частин рухомого складу з кожної колії слід приймати у вигляді рівномірно розподілення навантаження 2кН/м, прикладеного на рівні головки рейок. Нормативне горизонтальне повздовжнє навантаження від гальмування або сили тяги слід приймати таким, що дорівнює рівним 10% нормативного тимчасового вертикального навантаження від рухомого складу.

Конструктивні елементи об'єкта виготовлено з бетону марки В30, який має такі характеристики: коефіцієнт поперечної деформації ν (коефіцієнт Пуасона) приймається рівним 0.2; середня питома вага важкого бетону дорівнює 2400кг/м³; модуль пружності бетону природного твердіння при стиску та розтязі 3.25×10^7 кПа; параметри міцності $R_b = 17$ МПа при стиску та $R_{bt} = 1.2$ МПа при розтязі. Приймаємо товщину кільця 200мм, яке має потовщення в нижній частині до 500мм.

В процесі розрахунку розглянуті постійно діюче навантаження від ґрунту на циліндричну оболонку підземного тунелю та короткочасне навантаження від рухомого складу.

На першому етапі проведено аналіз відмінностей напружено-деформованого стану різних конструктивних варіантів оправ тунелю. На рис. 4.24 наведені розрахункові схеми збірної та монолітної оправ, завантажені рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 1$ кН/м².

При побудові розрахункової схеми збірної залізобетонної оправ тунелю створена модель плоского стику з монтажними шпильками (рис. 4.25 1 - стальна шпилька; 2 - канавка для гідроізоляції). В кожному торці елемента передбачено два отвори глибиною 100 мм для влаштування в них фіксаторів – сталих

шпильок діаметром 30 мм. Діаметр отворів має бути на 4-5 мм більше ніж діаметр шпильок.

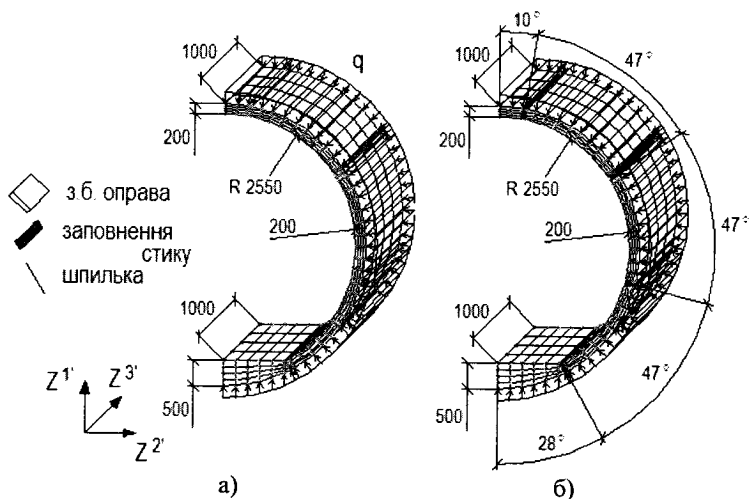


Рис. 4.24.

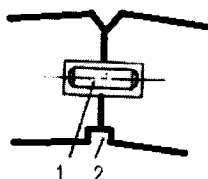


Рис. 4.25.

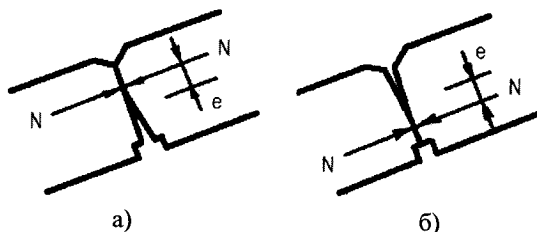


Рис. 4.26

Шпильки забезпечують при монтажі правильне положення блоків в оправі, не перешкоджаючи їх взаємному повороту. Даний стик не має в'язів розтягу. Тому, коли під дією згинаючого моменту в оправі виникають розтягуючі зусилля, стик в цьому місці розкривається рис. 4.26 (а – з середини оправы; б – зовні).

В розкритому стику передача внутрішніх зусиль проходить по деякій площадці зминання, зміщеної від центральної осі до зовнішнього, або внутрішньому краю кільця. Тому нормальні сили в оправі тунелю починають працювати зміщено, відносно центральної лінії кільця з ексцентриситетом, що призводить до виникнення значного згинаючого моменту. Напруження стиску зростають і можуть визвати сколювання бетону.

Для створення шарнірності і центрування нормальних сил в стиках треба використовувати прокладки з резини. Прокладка забезпечує можливість деякого повороту елементів в стику за рахунок її зминання і більш рівномірного розподілу напружень, зменшуючи ексцентриситет нормальної сили.

Як показують розрахунки, максимальні переміщення виникають у верхній центральній точці оправы по вертикалі і не перевищують 0,6см для обох розглянутих схем. Однак перевага збірної залізобетонної тунельної оправы полягає у більш високій швидкості спорудження тунеля.

На рис. 4.27 зображена розрахункова схема тунеля у товщі ґрунту. Розв'язання задачі отримано на основі двох кроків навантаження. Перший – власна вага ґрунтового масиву, другий – навантаження від руху потягу.

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану в об'єкті є нерівномірним. Напруження, що виникають в стінках тунелю, є значно меншими від розрахункового опору бетону на стиск та розтяг. Найбільш небезпечною зоною є стик між стінкою та нижньою лотковою частиною тунелю. Але, за рахунок податливих з'єднань, вдасться значно зменшити концентрацію напружень, яка виникає в області стику.

Дослідження моделей із податливими з'єднаннями та без них були проведені на попередньому етапі на основі плоскої задачі теорії пружності. Величини переміщень знаходяться в межах 4,5мм.

Для ілюстрації на рис. 4.28 представлена деформована схема тунелю у порівнянні із початковим положенням. Також, представлені ізолінії розподілу товщинних та кільцевих напружень (рис. 4.29).

Товщинні напруження на порядок менші від кільцевих. Зони розтягу знаходяться в лотковій частині та в тонкому шарі внутрішньої частини верхнього елемента збірної оправи і досягають 1.03МПа.

Рух потягу спричиняє так звану «хвилю бігу», яка представлена на рис. 4.30. у порівнянні із статичним розв'язком. При цьому коефіцієнт динамічності дорівнює 1.21.

Аналіз переміщень проведено в перерізі, де їх величини досягають своїх максимальних значень. Виявлено, що максимальні горизонтальні переміщення виникають в області третього стику і складають 1.7мм, а вертикальні – в лотковій частині і мають величину 5.4мм (рис. 4.31).

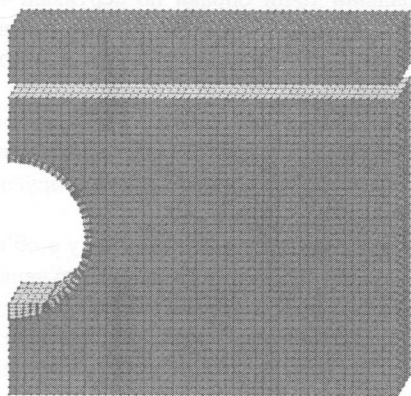


Рис. 4.27.

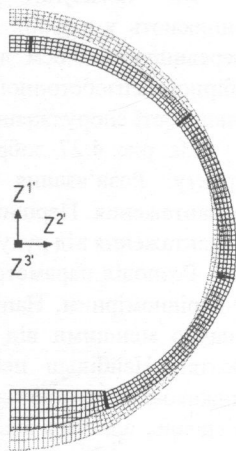


Рис. 4.28.

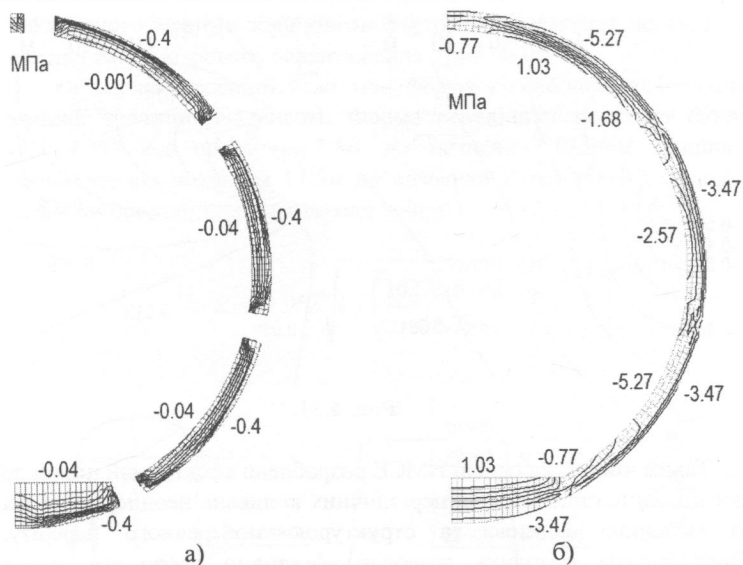


Рис. 4.29.



Рис. 4.30

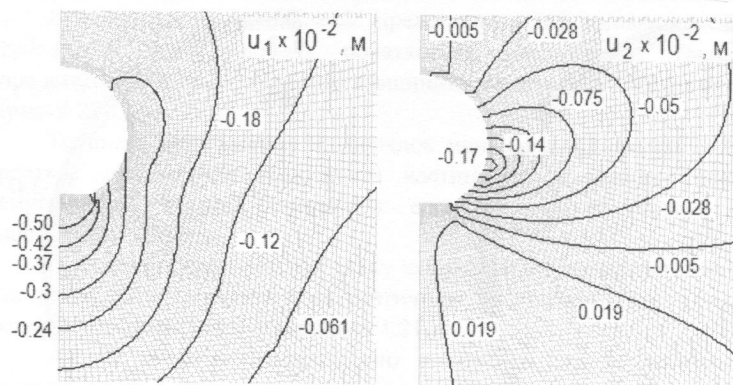


Рис. 4.31.

Таким чином, на основі НМСЕ розроблено ефективний підхід до дослідження стаціонарних періодичних коливань неоднорідних тіл із складною формою та структурою поперечного перерізу. Представлена методика дозволяє ефективно проводити аналіз змінного у часі напружено-деформованого стану протяжних об'єктів (трубопроводів, залізничних насипів, дорожніх покриттів, прольотів мостів, перекриттів і т.і.) під дією рухомих навантажень для широкого класу реальних об'єктів.

4.3.6. Дослідження впливу часткової втрати жорсткості монолітної градирні АЕС на власні коливання конструкції

Баштові градирні є складними інженерними спорудами, що входять в оборотні системи охолодження ТЕЦ і АЕС. Вони являють собою комплексну систему взаємопов'язаних елементів, що включає оболонку витяжної башти, опорну колонаду і фундаменти, які взаємодіють з ґрунтовою основою. Проектування баштових градирень, які відповідають сучасним вимогам, що ставляться до надійності і довговічності споруд, можливе тільки при умові всебічного аналізу параметрів напружено-деформованого стану,

викликаною різними зовнішніми факторами і, в першу чергу, дією власної ваги і вітрового навантаження (рис. 4.32)

Оболонка витяжної вежі має форму гіперboloїда обертання змінної товщини по висоті. Форма серединної поверхні башти (рис. 4.33) від позначки 7.5 м до позначки 17.5 м прийнята конічною, від позначки 17.5 м до позначки 87 м - гіперболічною з радіусом обертання для будь-якої точки:

$$R = 19.952 \sqrt{1 + \left(\frac{102.816 - Z^1}{68.794} \right)^2}$$

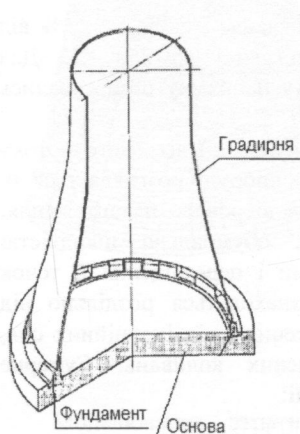


Рис.4.32

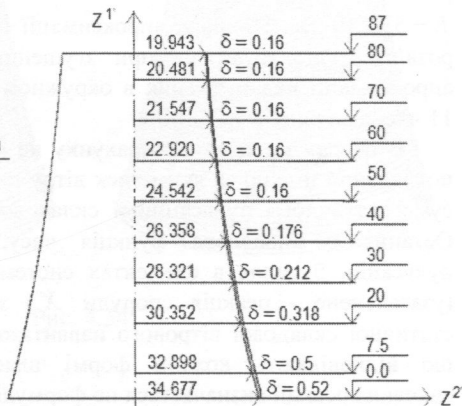


Рис. 4.33.

Товщина оболонки змінюється по висоті: від позначки 0.0 м до позначки 4.5 м товщина оболонки постійна і дорівнює 0.5 м, на участку від 4.5 м до 50.0 м товщина оболонки змінюється по лінійному закону від 0.5 м до 0.16 м, а від 50.0 м до 84.0 м товщина оболонки постійна і дорівнює 0.16 м. Оболонка витяжної башти спирається на 36 похилих стійок колонади з поперечним перетином 0.5×0.5 м. Стійки колонади жорстко пов'язані з кільцевим фундаментом. Загальна висота витяжної вежі градирні становить 84.0 м. Радіус обертання на відм. ±0.0 м складає 35230 мм. Радіус

верхнього кільця жорсткості на відм. +84.0м становить: зовнішній – $R = 21425$ мм, внутрішній – $R = 20105$ мм.

Для дискретизації башти градирні використовували кільцеві скінченні елементи, в яких центри у площині меридіонального перерізу відповідали геометрії серединної лінії оболонки градирні, а грані СЕ – перпендикулярні їй. Оболонкова частина градирні апроксимувалась одним шаром скінчених елементів (94 СЕ по висоті) з фізико-механічними характеристиками бетону: модуль пружності $E = 3.11 \times 10^{10}$ Па, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.167$, щільність $\rho = 2.55 \times 10^3$ кг/м³. Опорна колонада моделювалась скінченими елементами з приведеним (умова еквівалентності робіт колони на стиснення та згин) модулем пружності $E = 5.3 \times 10^9$ Па. Похибка апроксимації складає менше ніж 5% від розв'язок, що отримане при згущенні сітки до 250 СЕ. Для апроксимації навантаження в окружному напрямку обмежувались 11 членами ряду Фур'є.

В основу методу динаміки розрахунку на пульсації вітрового потоку покладений підхід, за яким тиск вітру на споруду розглядається як сума статичної і пульсаційної складової вітрового навантаження. Остання є випадкова функція часу, обумовлена швидкістю пульсацій. Зусилля в елементах системи і переміщення її точок (узагальнено - реакція споруди X) знаходяться роздільно від статичної складової вітрового навантаження і від інерційних сил, що відповідають кожній формі власних коливань. Сумарне значення реакції визначається по формулі:

$$X = X^c \pm \left[\sum_i (X_i^d)^2 \right]^{1/2}$$

з якої видно, що коливання відбуваються навколо зміщеного стану рівноваги, який відповідає статичній компоненті X^c вітрового навантаження.

На першому етапі проведено аналіз вільних коливань однорідної (неушкодженої) градирні. Отримано власні форми і частоти, 6 з яких представлені в табл. 4.4. Перші дві власні форми показані на рис. 4.34.

Таблиця 4.4.

№ форми	1	2	3	4	5	6
Частота	1.28909	1.35103	1.62719	2.14823	2.17304	2.23891

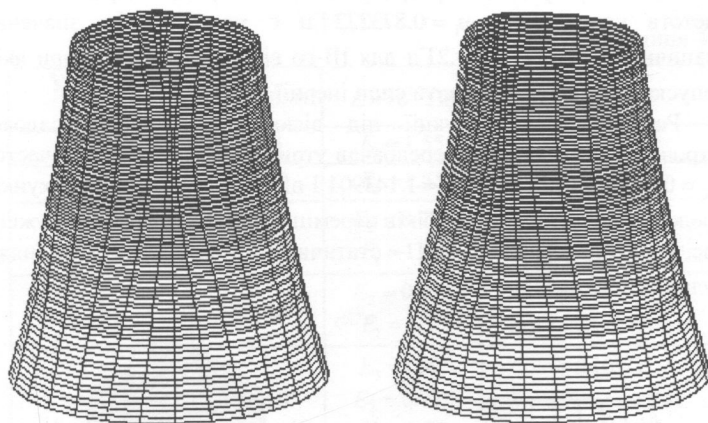


Рис. 4.34.

Моделювання втрати жорсткості під впливом зовнішніх природних факторів проводилося на основі корекції модуля пружності матеріалу для різних висот та кутів обрису градири. На рис. 4.35 показані зони часткової втрати жорсткості градири, що розглядається, які наведені в [119].

Подібні підходи з корекцією тензора пружних постійних матеріалу широко відомі в практиці чисельних методів. В табл. 4.5 представлена схема корекції значення модуля пружності матеріалу градири відносно висоти (умовних рівнів) та кільцевої координати. Оскільки чисельна модель конструкції має одну площину симетрії, розглядається тільки її половина.

При аналізі вільних коливань градири, з урахуванням часткової втрати жорсткості під впливом зовнішніх природних факторів можна відзначити зміни не тільки спектру, а й форми, що відповідає мінімальній частоті. В табл. 4.6 наведені частоти, а на рис. 4.36 – найнижча форма вільних коливань градири з урахуванням прийнятих пошкоджень.

Аналіз результатів розрахунків виявив, що перша власна частота конструкції $\omega_1 = 0.873222$ Гц є меншою ніж значення граничної частоти $f_l = 1.2$ Гц для III-го вітрового району, при якій допускається не враховувати сили інерції.

Розрахунок конструкції під дією пульсаційної складової вітрового навантаження передбачав утримання двох власних частот $\omega_1 = 0.873222$ Гц та $\omega_2 = 1.143904$ Гц. Результати розрахунків представлені у вигляді графіків переміщень рис. 4.37 та напружень рис. 4.38 в перерізі $\varphi = 0$ (1 – статичний вітер, 2 – з урахуванням пульсаційної складової).

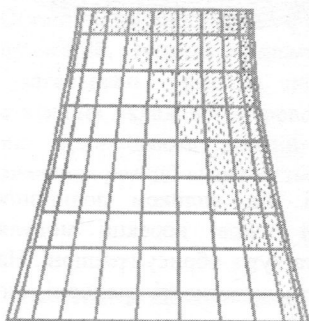


Рис. 4.35.

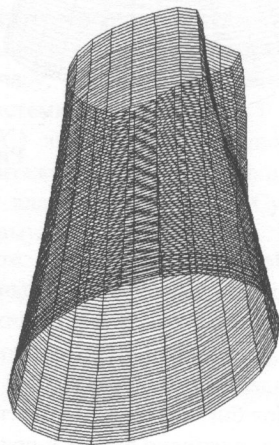


Рис. 4.36.

Глава 4. Напіваналітичний МСЕ в задачах деформування просторових

Таким чином, при розв'язанні даної задачі показано, що урахування пульсаційної складової призводить до суттєвого збільшення рівня напружено-деформованого стану конструкції. При цьому розрахунок градієнтів після певного часу експлуатації потрібно проводити з урахуванням наявних пошкоджень матеріалу.

Таблиця 4.5.

Умовний рівень	Висота, м	$E \times 10^{10}$ Па	Кут φ
I	0-4.5	$E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 32^\circ 42'$
II	4.5-20	$E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 32^\circ 42'$
III	20-30	$E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 16^\circ 21'$ $16^\circ 21' < \varphi \leq 48^\circ 6'$
IV	30-40	$E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 16^\circ 21'$ $16^\circ 21' < \varphi \leq 65^\circ 24'$
V	40-50	$E_3 = 0.62$ $E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 16^\circ 21'$ $16^\circ 21' < \varphi \leq 32^\circ 42'$ $32^\circ 42' < \varphi \leq 65^\circ 24'$
VI	50-60	$E_3 = 0.62$ $E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 16^\circ 21'$ $16^\circ 21' < \varphi \leq 65^\circ 24'$ $65^\circ 24' < \varphi \leq 82^\circ 3'$
VII	60-70	$E_3 = 0.62$ $E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 32^\circ 42'$ $32^\circ 42' < \varphi \leq 65^\circ 24'$ $65^\circ 24' < \varphi \leq 98^\circ 6'$
VIII	70-80	$E_3 = 0.62$ $E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 32^\circ 42'$ $32^\circ 42' < \varphi \leq 82^\circ 3'$ $82^\circ 3' < \varphi \leq 115^\circ 27'$
IX	80-87	$E_3 = 0.62$ $E_2 = 0.775$ $E_1 = 1.55$	$\varphi \leq 48^\circ 6'$ $48^\circ 6' < \varphi \leq 98^\circ 6'$ $98^\circ 6' < \varphi \leq 148^\circ 32'$

Таблиця 4.6.

№ форми	Власне значення	Частота		Період
		1/С	ГЦ	
1	0.182354	5.483835	0.873222	1.145184
2	0.139204	4.183715	1.143904	0.8742
3	0.125785	4.950062	1.265933	0.789931
4	0.110602	9.041392	1.439712	0.694583
5	0.105909	9.442042	1.50351	0.66511
6	0.090511	11.04844	1.759305	0.568406
7	0.084767	11.79702	1.878506	0.532338
8	0.083389	11.99201	1.909555	0.523682
9	0.079835	12.52588	1.994568	0.501362
10	0.074079	13.49919	2.149553	0.465213

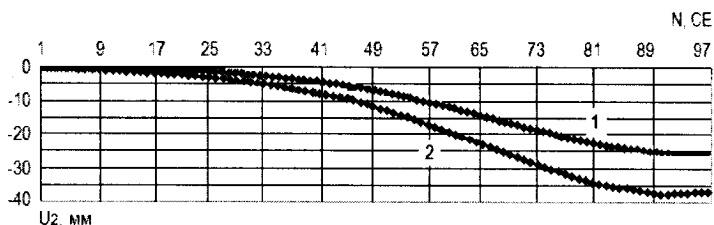


Рис. 4.37.

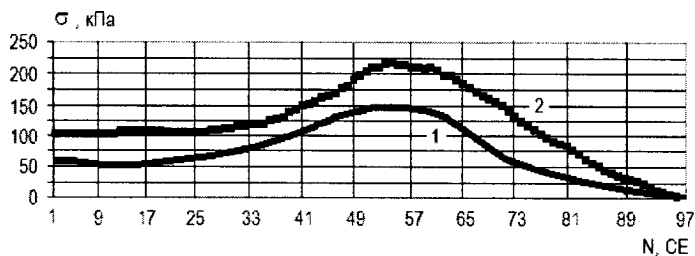


Рис. 4.38.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. — М; Изд. АСВ, 2000.
2. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности // Учеб. для строит. спец. вузов/. -М.: , Высш. шк., 1990 - 400 с.
3. *Альтенбах Х.* Теория ползучести – актуальные проблемы и приложения / Х. Альтенбах // Прикл. механика – 2003. – 39, № 6. – С. 3–33.
4. *Баженов В.А.*, Варіаційні основи будівельної механіки Підручник. – К.: Каравела, 2014. – 877 с.
5. *Баженов В.А., Ворона Ю.В.* Будівельна механіка. Динаміка: Підручник. – К.: Каравела, 2014. – 288 с.
6. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Киев: Випол, 1993, 376 с.
7. *Баженов В.А.* Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, Ю.В.Максимюк – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316 с
8. *Баженов В. А* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл : Монографія / В.А. Баженов О.І.Гуляр, О.С.Сахаров, І.І.Солодей. – К. : КНУБА, 2012. – 248 с.
9. *Баженов В. А* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл : Монографія / В.А. Баженов О.І.Гуляр, С.О.Пискунов, О.С.Сахаров. – К. : КНУБА, 2014. – 230 с.
10. *Баженов В. А.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл : Монографія / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, О. С. Сахаров – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
11. *Баженов В.А.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування тіл з тріщинами / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, О.О. Шкриль – Київ: Вид-во “Каравела”, 2017. – 206 с.

12. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання : Підручник Київ, ВІПОЛ, 2013. – 896 с.
13. *Баженов В.А.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами / В.А.Баженов, О.І.Гуляр, С.О. Пискунов, І.І.Солодей, Ю.В. Шевченко // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.:КНУБА, Вип.77. – 2005. – С.3-29.
14. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика – 2002. – Т.38. – №6. – С.24-63.
15. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Використання напіваналітичного метода скінченних елементів в задачах періодичних коливань просторових конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, Вип.85. – 2010. – С.51-59.
16. *Баженов В.А.* Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей – Київ: Вид-во “Каравела”, 2017. – 302 с.
17. *Басов К. А.* CATIA и ANSYS. Твердотельное моделирование / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 240 с.
18. *Bate К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
19. *Блох В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
20. *Бойл Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс. – М. : Мир, 1986. – 360 с.
21. *Болотин В. В.* Ресурс машин и конструкций / В. В. Болотин. – М. : Машиностроение, 1990. – 448 с.
22. *Бреславский Д.В., Метелев В.А., Морачковский О.К.* Анизотропия ползучести и повреждаемости элементов конструкций при циклическом нагружении // Проблемы прочности. – 2015. – №2. – С.21-29.
23. *Будак В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В.* Частоты и формы свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины. // Прикладная механика.- 2017. - Т.53. - №2. - С. 59-70.

24. *Влайков Г.Г.* Напряженное состояние толстостенных оболочек вращения при неравномерном тепловом нагружении // Прикладная механика.- 1980.- 16, № 8.- С.116-120.
25. *Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия трещин. — М.: Энергия, 1981.
26. *Вычислительный комплекс SCAD* / [В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко и др.]. — К. : СКАД СОФТ, 2009. — 656 с.
27. *Гецов Л. Б.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов [учебн. пособие] / Л. Б. Гецов.— СПб. : Изд-во Политехн. Ун-та, 2005. — 52 с.
28. *Голуб В. П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости / В. П. Голуб // Прикладная механика.— 2000. — т.36, № 3. —С. 31–66.
29. *Голуб В. П.* Нелинейная ползучесть и длительное вязкое разрушение идеально-упругопластических стержней при растяжении / В. П. Голуб, А. В. Романов, Н. В. Романова // Прикл. механика. — 2008. — 44, № 4. — С. 120–133.
30. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А.* Свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек переменной толщины с эллиптическим поперечным сечением. // Прикладная механика. — 2017. - Т.53 - №6 - С. 71-83.
31. *Григоренко Я.М.* Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости.- Киев: Наук. думка, 1973.- 228 с.
32. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости. Методы расчета оболочек.- Киев: Наук. думка, 1981.- Т.4.- 544 с.
33. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Алгоритм решения задач пластичности для неоднородных тел вращения. — Киев, 1986. — 23 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, №1415 Ук-Деп
34. *Еременко С. Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел / С. Ю. Еременко. — Харьков : Основа, 1991. — 272 с.
35. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимации. / О.Зенкевич, К.Морган — М.: Мир, 1986. — 318 с.

36. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
37. *Золотов А.Б., Акимов Б.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики – Москва, АСВ. , 2004. – 200 с.
38. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев – М. : Наука, 1966. – 231 с
39. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит , 2016 . – 272 с.
40. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 704 с.
41. *Кантор Б. Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных упругих оболочек / Б. Я. Кантор – К. : Наук. думка, 1971. – 136 с.
42. *Кантор Б. Я.* Об одном методе изучения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций вращения, циклически неоднородных в окружном направлении / Б. Я. Кантор, В. И. Гнитько. – Харьков : ИПМаш АН УССР, 1982. – 20 с.
43. *Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А.* ANSYS в руках инженера. – М.: УРСС, 2003.
44. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1960. – 456 с.
45. *Качанов Л. М.* Теория ползучести / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1969. – 420 с.
46. *Колмогоров В. М.* Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения / В. М. Колмогоров, Б. А. Мигалев. – Екатеринбург, 1994. – 105 с.
47. *Куранов Б.А.* Исследование прочности и устойчивости составных подкрепленных оболочек при сложном термосиловом нагружении // Расчеты на прочность.– 1979.– Вып. 20.– С.238-253.
48. *Куранов Б.А., Кончаков Н.И.* Температурные напряжения в резервуаре для хранения сжиженного газа // Расчеты на прочность. – 1980. – С.216-224.
49. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы : [учебн. пособие] / [Е. Б. Стрелец-Стрелецкий, В. Е. Боговис, Ю. В. Гензерский и др.]. – К. : Факт, 2008. – 164 с.

50. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит.– 2016. – 504 с.
51. Луговой П. З., Мейш В. Ф. Динамика неоднородных оболочечных систем при нестационарных нагрузках (обзор). // Прикладная механика. – 2017. - Т.53 - №5. - С. 3-65
52. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
53. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости.– М.: Наука, 1980.– 512с.
54. Львов Г.И. Ползучесть и длительная прочность компонентов газовых турбин с учетом неоднородного распределения температур / Г. И. Львов, С. В. Лысенко, Е. Н. Гораш // Проблемы прочности. 2008. — № 5. – С. 37-44
55. Львов Г.И. Прикладные задачи неизотермической теории длительной прочности / Г. И. Львов, С. В. Лысенко, Е. Н. Гораш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2007. – № 11. – С. 71–78
56. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 398 с.
57. Максим'юк Ю.В. Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2014. – Вип.93.– С. 148-156.
58. Максим'юк Ю.В. Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2016. –Вип.97. –С. 186-193.
59. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2015. – Вип.94. – С. 244-251.
60. Мерзляков В. А. Термоупругопластическое деформирование некруговых цилиндрических оболочек / В. А. Мерзляков // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 8. – С. 77-90.
61. Мерзляков В. А. Упругопластическое деформирование оболочек вращения при неосесимметричном нагружении (обзор) /

- В. А. Мерзляков, Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 5. – С. 3–39.
62. *Методика определения накопления повреждений* в металлических конструкционных материалах при сложном упругопластическом нагружении / Н. И. Бобырь, А. П. Грабовский, А. В. Тимошенко, А. П. Халимон // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 128–137.
63. *Можаровский Н. С.* Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения : В 2 ч. / Н. С. Можаровский. – К. : Выща шк., 1991 – Ч. I. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле : [учебник]. – 1991. – 264 с.
64. *Можаровский Н. С.* Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения : В 2 ч. / Н. С. Можаровский. – К. : Выща шк., 1991 – Ч. II. Методы и алгоритмы решения краевых задач : [учебное пособие] / Н. С. Можаровский, Н.Е. Качаловская. – 1991. – 287 с.
65. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958
66. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, -1976. - 464с.
67. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел.- М.: Наука, 1976. – 328 с.
68. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний // М.: Физматлит, 2017 . – 256 с.
69. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1988. –384 с.
70. *Перельмутер А.В.* Беседы о строительной механике. – М.: Изд-во СКАДСОФТ, Издательский дом АСВ. - 2015. – 298 с.
71. *Перельмутер А.В.* Основы расчета вантово-стержневых систем.— М.: Стройиздат, 1969.
72. *Перельмутер А.В., Сливер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа.— М.: ДМК Пресс, 2007.
73. *Перельмутер А.В., Кабанцев О.В.* Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой. – М.: Изд-во СКАДСОФТ, Издательский дом АСВ, 2015.
74. *Писаренко Г.С.* та ін. Опір матеріалів. Підручник / Г.С.Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. За ред. Г.С Писаренка — К.; Вища школа, 1993. - 655 с.

75. Пискунов С. О. Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання із використанням кругового скінченного елемента змінної площі поперечного перерізу / С. О. Пискунов, С. В. Мицюк, О. О. Шкриль // Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 71. – С. 198-203.
76. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности : учеб. пособие / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
77. Поздеев А. А. Большие упруго-пластические деформации / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин – М. : Наука, 1986. – 232 с.
78. Ползучесть диафрагмы паровой турбины при переменных режимах нагружения / Н.Г. Шульженко, А.В. Асаенко, Б.Ф. Зайцев, Н.Н. Гришин, А.Н. Губский // Проблемы прочности. – 2016. – №6. –С.5-12.
79. Ползучесть и длительная прочность металлов. / А.М. Локощенко М.: Физматлит.– 2016. – 504 с.
80. Прикладная теория пластичности / [Митенков Ф., Волоков И., Игумнов Л., Каплиенко А., Коротких Ю, Панов В.]. – М. : Физматлит, 2015. – 284 с.
81. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 2014. – 754 с.
82. Работягов Д. Д. Механика материалов при больших деформациях / Д. Д. Работягов– Кишинев : Штиница, 1975. – 168 с.
83. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. — СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998.
84. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л. А. Розин. – М. : Стройиздат, 1977. – 128 с.
85. Руденко Е. К. Ползучесть неосесимметрично нагруженных тел вращения / Руденко Е. К. – Х. : Ин-т пробл. машиностр. АН УССР, 1990. – 48 с. – (Препринт / Ин-т пробл. машиностр. АН УССР).
86. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести / К. Н. Русинко. – Л. : Вища школа, 1981. – 148 с.
87. Савченко В.Г. Исследование нестационарных температурных полей в телах вращения при неосесимметричном нагреве // Проблемы прочности. – 1982. – № 2. – С.33-36.

88. *Савченко В.Г.* Об одном методе решения пространственной неосесимметричной задачи термопластичности // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1979. – Вып. 18. – С.24-29.
89. *Савченко В. Г.* Пространственные задачи термовязкопластичности / В. Г. Савченко, Ю. Н. Шевченко // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 11. – С. 3–38.
90. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
91. *Сахаров А.С.* Моментная схема метода конечных элементов для учета жестких смещений твердого тела // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Київ, Будівельник. – 1974.
92. *Система* забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування. ДБН В.1.2-2:2006.
93. *Скубачевский Г. С.* Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей / Г. С. Скубачевский. – М.: Машиностроение, 1981. – 552 с.
94. *Склепус С.Н.* Численно-аналитический метод исследования характеристик ползучести и длительной прочности многослойной оболочки // Проблемы прочности. – 2017. – №2. – С.123-131.
95. *Слезина Н.Г.* Расчет оболочек вращения в условиях неосесимметричного нагружения с учетом деформаций поперечного сдвига // Труды ЛКИ.- 1977.- Вып. 116.- С.74-81
96. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. — М.: Издательство АСВ, 2005.
97. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с
98. *Тимошенко С.П* и др.. Пластинки оболочки.-М.:ГИФМЛ, 1963.- 635 с.
99. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций – М.: Наука, 1975. – 704 с.
100. *Торопова И.Л.* К расчету упругих тонкостенных конструкций вращения при локальном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1982. –Вып. 20. – С.52-60.
101. *Третьяков О.Б., Соколов С.Л., Контанистов М.П.* Об одном методе решения геометрически нелинейной задачи

- неосесимметричного нагрюження оболочки вращення. – М., 1985. – 94с. – Рукопись деп. в ВИНТИ, № 6700-Деп.
102. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидротехнике. – М. : Мир, 1967. – С. 212–263.
103. Унксов Е. П. Теория пластических деформаций металлов / Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. П. Колмогоров [и др.] – М. : Машиностроение, 1983. – 598 с.
104. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 623 с.
105. Чернышенко И. С. Физически и геометрически нелинейное деформирование конических оболочек эллиптическим отверстием / И. С. Чернышенко, Е. А. Сторожук, С. Б. Харенко // Прикл. механика. – 2008. – т. 44, № 2. – С. 68–85
106. Чирков А. Ю. Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций / А. Ю. Чирков. – К. : Ин-т проблем прочности НАНУ, 2003. – 250 с.
107. Шапошников Н. Н. Использование полуаналитического варианта МКЭ для расчета конструкций / Н. Н. Шапошников, И. И. Монахов // Расчеты на прочность. – М. :Машиностроение, 1981. – Вып. 22. – С. 221–239.
108. Шваб'юк В. І., Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г. Дослідження вільних коливань стрижневих елементів зі змінними параметрами методом прямого інтегрування // Проблеми прочности. – 2016. – №3. – С. 58-68
109. Шевченко Ю. Н. Пространственные задачи термовязкопластичности: фокус на украинские исследования (обзор). / Ю. Н. Шевченко, В. Г. Савченко // Прикладная механика -2016. - Т. 52. - №3. – С. 3-70.
110. Шевченко Ю. Н. Упругопластическое напряженное состояние незамкнутых оболочек вращения при неизотермических процессах нагружения // Тепловые напряжения в элементах конструкций. - 1976. - Вып. 16. - С. 67-75.
111. Шевченко Ю. Н., Сахацкая И. К. Смешанная задача термопластичности для незамкнутых тел вращения // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24. – № 6. – С. 3-9.
112. Шевченко Ю. Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций /

- Ю. Н. Шевченко, М. Е. Бабешко, Р. Г. Терехов. – К.: Наук. думка, 1992. – 327 с.
113. Шимкович Д. Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов / Д. Г. Шимкович. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 702 с.
114. Ясній О.В., Пиндус Ю.М., Ясній В.П. Моделювання НДС колектора пароперегрівача котла ТП-100 за комплексного термомеханічного навантаження методом скінченних елементів // Вісник ТНТУ. – 2014. – Том 74– № 2– С. 7-15
115. Ясній П. В. Пластично деформовані матеріали: втома і тріщинотривкість / П. В. Ясній – Львів : Світ, 1998. – 292 с.
116. Ясній О.В., Пиндус Ю.М., Ясній В.П. Моделювання НДС колектора пароперегрівача котла ТП-100 за комплексного термомеханічного навантаження методом скінченних елементів // Вісник ТНТУ. – 2014. – Том 74– № 2– С. 7-15
117. Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L. “Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis” // Int. J. Numer. Meth. Engng.- 1975. – 5, –N 2/ – P. 353-386.
118. Bazhenov V.A., Piskunov S.O. A finite element technique and results of continual fracture process modeling // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8. PP.21-28.
119. Kratzig W.B., Gruber K., Zahlten W. Numerische Kollapsanalysen zur Überprüfung der Sicherheit und Zuverlässigkeit grosser Naturzugkuhlturme // Technisch-wissenschaftliche Mitteilung Nr. 92-3 des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1992. – 212 s.
120. Lemaître J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations / Lemaître J. // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. – 1985. - №51. – P.31-49.
121. Padovan J. Semi-analytical Finite Element Procedure for Conduction in Anisotropic Axisymmetric Solids // Int. J. Numer. Meth. Engng.– 1974.– 8, No 2.– P.295-310.
122. Park S.G., Kwak B.M. A Semi-analytical Finite Element method for Three-dimensional Contact Problems with Axisymmetric Geometry. Proc. Inst. Mech. Eng., Vol C200, No 6, pp 399-405.
123. Sharan Shailendra K. Elasto-plastic finite element analysis of a crack in an infinite plate // Int. J. Fract. 2000. – 103. – №2. – P.163–176.

124. *Singh S.P., Spilker R.L.* Elasto-plastic Analysis of Axisymmetric Structures Subject to Arbitrary Loads by Hybrid-Stress Finite Elements // *Comput. and Struct.* – 1984. – 19, No 3. – P.447-465.
125. *Weese W.* Berechnung nichtrotationsymmetrisch belasteter Zylindrischer Körper auf der Grundlage der Fourierreihendarstellung nach der Methode der finite Element // *Wiss. Z. Tech. Hochsch.* – 1975. – 18, No 6-7. – S.635-642.
126. *Wilson E.L.* Structural Analysis of Axisymmetric Solids // *AIAA J.* – 1965. – 3, No 12. – P.2269-2274
127. *Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C.* Plastic (or visco-plastic) Behavior of Axisymmetric Bodies Subjected to Non-symmetric loading – Semi-analytical Finite Element Solution // *Int. J. Num. Meth. Engng.* – 1979. – 14, No 9. – P.1399-1412.

Наукове видання

**Баженов Віктор Андрійович
Ворона Юрій Володимирович
Вабіщевич Максим Олегович
Перельмутер Анатолій Вікторович
Пискунов Сергій Олегович
Солодей Іван Іванович**

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКУ
ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ
СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ**

Керівник видавничих проєктів Ю.В. Піча

Підписано до друку 28.09.2018.

**Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 29,5. Ум. фарб.-відб. 29,5. Обл.-вид. арк. 27,44.
Зам. 28092018-01. Тираж 300 прим.**

Видавництво “Каравела”

Свідоцтво

**про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
ДК № 2035 від 16.12.2014 року**

Тел. (044) 592-39-36, (050) 355-77-75

E-mail: caravela@ukr.net

**Віддруковано у Видавництві “Каравела”,
проспект М. Рокосовського, 8а, м. Київ, 04201**