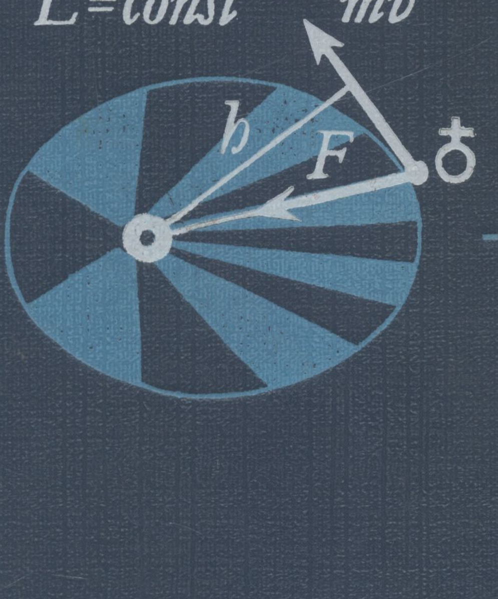
М. М. Гернет

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



учебник для вузов

М. М. Гернет

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Издание 5-е, исправленное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов

МОСКВА
«Высшая школа» 1987

ББК 22.21
Г39
УДК 531.1/3

Рецензент: проф. *В. Н. Щелкачев* (Московский институт нефтехимической и газовой промышленности)

Гернет М. М.

Г39 Курс теоретической механики: Учебник для вузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1987.— 344 с.; ил.

В книге изложены теоремы и методы теоретической и аналитической механики. Много внимания уделено материалистическому пониманию курса механики, экономической и исторической сторонам излагаемого материала. Курс снабжен подробно решенными примерами и задачами.

В настоящее издание (4-е — 1981 г.) внесены некоторые дополнения и незначительные изменения редакционного характера.

Для студентов вузов.

Г $\frac{1703020000-278}{001(01)-87}$ 127—87

ББК 22.21
531

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как и в четвертом издании, весь материал разбит на два раздела: кинематику и кинетику, в которую входят общее учение о силах, статика, динамика точки и материальной системы, некоторые элементы аналитической механики; подробно рассмотрена теория малых колебаний системы с одной степенью свободы.

По новым учебным планам теоретическая механика для большинства специальностей должна изучаться в два семестра, что позволило начать изучение механики с кинематики. При таком построении учебника знакомство учащихся с понятием «механическое движение» и, в частности, «ускорение», предшествует понятию «сила», что подготавливает студентов к изучению последующих дисциплин.

Но последовательность изложения материала в программах Учебно-методического управления по высшему образованию не является обязательной и кафедрам предоставлено право излагать материал в любом порядке.

Теоретическая механика — одна из базисных дисциплин, и в учебнике много внимания уделено развитию общего мировоззрения учащихся, освещению технической, физической и экономической сторон изложения материала, сообщены многие исторические сведения.

Для облегчения изучения «Курса» и для удобства его повторения все важнейшие сведения, формулировки теорем, определения, важнейшие термины и прочий материал, на который при чтении книги следует обратить внимание, выделены в виде тезисов и напечатаны колонками с левой стороны страниц.

Применение теорем и методов теоретической механики в «Курсе» проиллюстрировано решением многих задач.

Автор благодарен акад. Н. А. Кильчевскому, профессорам В. Я. Белецкому, И. Н. Веселовскому, А. Т. Григорьяну, А. М. Дзядзио, В. С. Люкшину, Т. В. Путята, Г. Н. Свешникову, П. И. Христиченко и доц. Н. Н. Шепелевской, а также коллективам кафедр теоретической механики МАИ и СТАНКИНа, приславшим или опубликовавшим в печати отзывы на учебник, и проф. В. И. Денисову за ценные замечания и помощь при чтении корректур.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность рецензенту — д-ру техн. наук, профессору В. Н. Щелкачеву за пожелания, сделанные при чтении рукописи учебника.

Замечания и пожелания просьба направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Автор

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Предмет теоретической механики

Движение есть форма существования материи.

Древнегреческий философ Гераклит своей знаменитой фразой «Все течет, ничто не пребывает неизменным» высказал основную мысль учения о всеобщей текучести и изменчивости. С тех пор прошло две с половиной тысячи лет, и люди узнали, что не только перемещение в пространстве твердых тел, жидкостей и газов, но и такие явления, как теплота, химические процессы, представляют собой различные формы движения. «Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, т. е. понимаемое как форма бытия материи, как внутренне присущий материи атрибут, обнимает собой все происходящие во вселенной изменения и процессы» *.

Под названием «механика» объединяется ряд наук, изучающих механическое движение и механическое взаимодействие тел.

Одним из видов движения материи, выражающимся в изменении с течением времени взаимных положений тел или частей тела, является *механическое движение.* Механическое движение иногда сокращенно называют «движением».

В природе тела взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие тел может выражаться по-разному: например, оно может заключаться в передаче от одного тела к другому какого-либо количества теплоты, электрического заряда и др. *Механическим взаимодействием* называют один из видов взаимодействия материи, вызывающий изменение механического движения тел или частей тела.

Из понятия «механическое взаимодействие» вытекает другое тесно связанное с ним понятие — *механическое воздействие* на

---

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 391.

данное тело или на его часть. Если из всех взаимодействующих тел мысленно выделить какое-либо одно (или часть его) и, не интересуясь действием этого тела на другие, рассматривать лишь действие других тел на выбранное, то получим механическое воздействие на данное тело. Мерой механического воздействия в данное мгновение на материальную частицу со стороны других материальных объектов является *сила.* В механике силу рассматривают как вектор, характеризующий величину и направление этого воздействия, и не интересуются физической природой сил.

Целый комплекс дисциплин, изучающих механическое движение и механическое взаимодействие различных материальных тел, объединяют под общим названием механика. К этим дисциплинам относятся, например, *прикладная механика,* обычно называемая теорией механизмов и машин и изучающая общие вопросы движения и работы механизмов и машин; *гидромеханика,* изучающая движение жидкостей и тел, погруженных в жидкость; *аэромеханика,* изучающая движение газообразных тел и движение твердых тел в газовой среде, а также механические взаимодействия между твердыми телами и газом; *небесная механика*, изучающая движение небесных тел, и т. д. К механике относят также науки, изучающие способы расчетов сооружений, машин и их деталей (строительная механика, детали машин, сопротивление материалов), а также целый ряд наук, занимающихся изучением машин отдельных отраслей промышленности или специальных сооружений (механика пищевых машин, механика сельскохозяйственных машин, механика корабля и т. д. и т. п.).

Теоретическая механика изучает законы механического движения и механического взаимодействия, общие для любых материальных тел.

Материальные тела, изучением движения или расчета которых занимаются отдельные из этих научных дисциплин, различны между собой, но движение этих материальных тел, так же как и их механические взаимодействия, обладают многими общими свойствами. Например, можно говорить о скорости какого-либо тела независимо от того, что именно представляет собой это тело, будь то дождевая капля, футбольный мяч, поршень или самолет. Точно так же можно говорить о вращении материального тела независимо от того, является ли это тело маховым колесом, ротором молочного сепаратора, вальцом вальцового станка, волчком или планетой. Можно выявить общие свойства движения материальных тел независимо от того, какие именно материальные тела совершают эти движения. Аналогично можно изучать механические взаимодействия и их общие свойства, не интересуясь тем, какие именно физические тела взаимодействуют между собой.

Механическое движение и механические взаимодействия подчиняются определенным законам. Эти законы носят объективный характер, они не придуманы людьми и существуют в природе независимо от воли людей.

Изучением законов механического движения и механического взаимодействия, общих для любых тел, занимается **теоретическая механика**, называемая также общей механикой.

Все законы, принципы и положения теоретическая механика устанавливает, изучая движение самых различных материальных тел. Но чтобы изучить общие свойства движения и взаимодействия тел, приходится отвлекаться (абстрагироваться) от несущественных особенностей, присущих именно этому телу, отмечая только важное и общее. Это привело к общему понятию силы и к понятиям идеальных тел, обладающих вполне определенными «идеальными» свойствами. Таковы понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка является абстрактным образом материального тела. Она не имеет размеров, но обладает массой.

Всякое материальное тело занимает некоторую часть пространства, обладает некоторыми размерами. Различные части тела могут совершать движения различного характера. Движение тела представляет собой сложное явление, и для описания его необходимо знать движение всех его частиц. *Материальной частицей* называют мысленно выделенную сколь угодно малую часть тела.

Чем меньше размеры тела, тем меньше, вообще говоря, отличаются друг от друга движения его материальных частиц. Абстрагируясь от различия в движениях частиц тела, можно представить себе материальное тело сколь угодно малым, принять его за точку. Материальная точка не имеет размеров, но отличается от геометрической точки тем, что обладает некоторой массой*, равной массе того тела, которое она изображает, и способна, как и тело, передвигаться в пространстве. Так, например, если принять за материальную точку какую-нибудь планету, то будем считать, что материальная точка обладает массой этой планеты. Если же изучать движение артиллерийского снаряда и принять его за материальную точку, то такая точка будет иметь массу, равную массе снаряда.

Иногда за материальную точку принимают не все тело, а какую-либо часть его, а все тело изображают несколькими материальными точками.

В отличие от реально существующих материальных частиц *материальная точка является* отвлеченным понятием — *абстракцией* и вводится в механику с целью упростить изучение основных

---

* Понятие «масса» известно из физики и будет подробно рассмотрено в кинетике (см. § 20)

свойств движения, которые встречаются в природе и в технике. Движение материальных точек значительно проще, чем движение материальных тел. Здесь отсутствуют сложности, связанные с размерами тела и, следовательно, с различием в движении его частиц.

Механической системой называют мысленно выделенную по какому-либо признаку совокупность механически взаимодействующих материальных частиц или материальных тел.

Если рассматривать движение одних частей тела по отношению к другим его частям или же различие в движении этого тела по отношению к каким-либо другим телам, то нельзя, конечно, пренебрегать размерами тела и принять его за материальную точку. Но можно принять за материальные точки отдельные части тела. При изучении движения нескольких тел часто оказывается возможным отдельные тела принять за материальные точки и тем самым значительно упростить задачу. Так, например, изучая движение планет вокруг Солнца и спутников вокруг планеты, иногда принимают все эти тела за материальные точки. Таким образом, мы пришли к понятию механической системы, или системы материальных точек. Систему материальных точек иногда коротко называют системой.

Расстояния между частицами абсолютно твердого тела никогда не изменяются.

Если расстояния между отдельными точками системы не изменяются, то ее называют *неизменяемой материальной системой* или *абсолютно твердым телом.* Сколь бы ни были велики воздействия на абсолютно твердое тело, расстояние между его частицами не может измениться.

Как известно, тела, встречающиеся в природе, разделяются на газообразные, жидкие и твердые. Особенно велика твердость некоторых камней и металлов. Очень большой твердостью обладает алмаз. Но алмаз все же не является абсолютно твердым телом, его шлифуют и получают бриллианты. При шлифовке алмаза с его поверхности удаляют выступающие частицы, а расстояние между частицами твердого тела не должно изменяться ни при каких обстоятельствах. Велика твердость некоторых металлокерамических сплавов: победита, сталинита и др. Но все же они поддаются обработке и, следовательно, не являются абсолютно твердыми; и победитовые резцы притупляются, «садятся» от долгой работы. Громадной плотностью, превышающей в сотни тысяч раз плотность воды и, по-видимому, такой же твердостью обладают некоторые звезды, а плотность недавно открытых (в 1968 г.) нейтронных звезд составляет миллионы тонн в кубическом сантиметре. Но абсолютно твердых тел вообще не существует в природе. Это понятие введено в теоретическую механику для упрощения изучения механического движения и механических взаимодействий. В теоретической механике абсолютно твердое тело часто называют коротко *твердым телом.*

В зависимости от условий задачи одно и то же физическое тело может быть принято за материальную точку, или за абсолютно твердое тело, или за материальную систему.

При изучении движения какого-либо тела можно принять это тело за материальную точку, если не принимать во внимание различие в движении частей этого тела. Иногда какое-либо реальное, физическое тело можно принять за абсолютно твердое. Так обычно поступают в случаях, когда связь между частицами этого тела достаточно велика, чтобы помешать всякому заметному изменению его формы под действием приложенных к нему сил, или если можно пренебречь изменением очертаний и размеров тела.

Иногда же оказывается удобным принять части какого-либо тела или звенья механизма за отдельные точки и рассматривать все тело или весь механизм как систему материальных точек. Таким образом, в различных задачах теоретической механики одно и то же материальное тело может быть принято и за материальную точку, и за абсолютно твердое тело, и за материальную систему.

Так, например, при изучении движения Земли вокруг Солнца можно считать Землю (как и Солнце) материальной точкой, но при изучении вращения Земли вокруг оси следует считать ее абсолютно твердым телом. Если изучать какие-либо явления, происходящие на Земле (приливы, отливы или морские течения), то нельзя считать Землю абсолютно твердым телом, а принимать ее за систему материальных точек, расстояния между которыми могут изменяться.

Значение теоретической механики

Теоретическая механика является научной основой многих технических наук.

Итак, в теоретической механике изучают движение материальных точек и абсолютно твердых тел, а также действия сил на эти точки и тела.

Но ни материальных точек, ни абсолютно твердых тел в природе не существует. Естественно, может возникнуть вопрос о полезности науки, занимающейся изучением движения несуществующих в природе предметов. Тем не менее введение в науку таких абстрактных понятий, как материальная точка, сила, абсолютно твердое тело, крайне полезно. В. И. Ленин писал: «Все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее» *.

Поясним сказанное следующим примером. Пусть положение всех частиц тела относительно каких-либо других тел не изменяется с течением времени. Про такое тело говорят, что оно находится в относительном покое по отношению к этим телам. Отно-

* *Ленин В. И.* Философские тетради. М., 1938, с. 146.

сительный покой, рассматриваемый в связи с силами, называют *относительным равновесием* или, коротко, *равновесием*. Пусть к абсолютно твердому телу, находящемуся в покое, приложили две равные силы, действующие по одной прямой, но в противоположные стороны. Совершенно очевидно, что такие две силы не смогут нарушить равновесия абсолютно твердого тела. Этот закон принимаем как аксиому. Но если вместо абсолютно твердого тела подвергнем действию двух таких сил какое-либо реальное физическое тело, например будем растягивать какую-либо пружину, то в зависимости от жесткости этой пружины и от действующих сил мы получим более или менее значительную деформацию пружины или даже разрыв ее. Таким образом, отказавшись от понятия абсолютно твердого тела, невозможно было бы установить общего закона о равновесии тела под действием двух сил. Установив же в теоретической механике этот общий закон на основании свойств абсолютно твердого тела, можно в каждом отдельном случае применять его к реальным физическим телам, что составляет предмет изучения других отраслей механики.

Ленин указывал, отмечая общие пути развития наук: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и *от него к практике* — таков диалектический путь познания истины...» *.

Приблизительно ту же мысль еще раньше высказал М. В. Ломоносов: «Из наблюдений устанавливать теорию, через теорию исправлять наблюдения — есть лучший способ к изысканию правды».

В теоретической механике, основываясь на изучении движения различных физических тел, устанавливают общие законы движения. В других механических науках используют и применяют эти общие законы теоретической механики к отдельным, более частным случаям. Все эти науки и техника в той или иной мере опираются на теоретическую механику и, предъявляя к ней определенные требования, побуждают ее к дальнейшему развитию.

§ 2. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ

Механика находится на службе у человека со времени возникновения человечества.

Как показал Энгельс, превращение человекообразной обезьяны в человека произошло под влиянием труда — первого и основного условия всей человеческой жизни.

Процесс возникновения человеческого общества неминуемо связан с трудом и, в частности, с изготовлением орудий труда, обороны, охоты, поэтому механика находится на службе у человека с тех времен, как существует само человечество. Конечно, под механикой эпохи первобытного общества понимают не науку, а лишь изготовление орудий труда.

---

* *Ленин В. И.* Философские тетради. М., 1938, с. 166.

Эти орудия и приспособления достигли высокого развития в эпоху рабовладельческого строя. В частности, остатки древнейших зданий с очевидностью свидетельствуют о том, что при постройке этих зданий применяли многие механические приспособления: рычаги, катки, блоки и другие средства. Так, в Египте в XV в. до н. э. были установлены обелиски — громадные круглые и четырехугольные колонны до 45 м высотой. Эти обелиски были высечены из целого куска мрамора или гранита. Их перевозка и установка представляли бы значительные трудности и теперь, и, конечно, не могли быть произведены только мускульной силой. Еще более древние сооружения Египта, Ассирии, Вавилона, Китая и других стран заставляют предполагать, что в этих странах очень давно применяли катки, рычаги и наклонную плоскость. Но надо признать, что все эти механические приспособления человеку дала не наука, а его практический опыт. И нет оснований предполагать, что уже в те времена были известны общие законы механики. Энгельс говорил, что наука многим больше обязана производству, чем производство науке.

Первые сочинения, излагающие накопленные опытом сведения по устройству и применению этих механических орудий или обобщающие этот материал в виде определенных законов, появились значительно позднее.

Механика как наука возникла в эпоху рабовладельческого общественного строя, но дешевый человеческий труд не способствовал ее быстрому развитию.

Название «механика» впервые ввел великий философ Аристотель, живший с 384 по 322 г. до н. э. В работах Аристотеля и его школы содержится много ценного для механики. Но вместе с тем в них встречается много неверного. В развитии механики работы Аристотеля сыграли скорее отрицательную, чем положительную роль, потому что через полторы тысячи лет после Аристотеля его учение считалось непогрешимым, а всякое выступление, противоречащее этому учению, считалось ересью и жестоко каралось могущественной в то время христианской церковью.

Во времена Аристотеля механика развивалась очень медленно. Это была эпоха рабовладельческого общественного строя, дешевый человеческий труд и низкий уровень техники не создавали необходимых условий для развития механики. В эту эпоху можно отметить лишь один случай очень быстрого, почти скачкообразного развития механики, связанный с именем величайшего механика всех времен и народов — Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Этот замечательный человек сделал множество открытий в математике и гидростатике, заложил основу механики как новой науки, включив ее в область точных наук.

На протяжении почти двух тысяч лет после Архимеда в развитии механики не произошло ничего существенного. Хозяйство, не только сельское, но в значительной степени и городское, было рассчитано лишь на личное потребление. Производство с целью обмена только еще возникало. Сухопутные дороги были плохи, да и морской транспорт был несовершенным. Грузоподъемность судов была невелика, устойчивость их — плохая. Не было хороших методов ориентировки судна в открытом море. Местная замкнутость, ограниченность потребностей населения и застойность форм производства не могли вызвать быстрого развития науки. Правда, начиная с XII в. во многих городах Европы существовали университеты, но они готовили почти исключительно служителей церкви и юристов. В Париже в 1355 г. было разрешено преподавать геометрию только по праздникам. Основой наук считались книги Аристотеля, из которых было изъято все живое содержание.

Начиная с XVI в. наступает эпоха грандиозных открытий в механике.

Постепенное развитие торговли стимулировало появление и развитие машин и поставило перед наукой и техникой, и в особенности перед механикой, целый ряд проблем, таких, как увеличение грузоподъемности судов, улучшение их плавательных свойств, удобные и надежные способы ориентировки в море по Солнцу и звездам, предсказание приливов и отливов, усовершенствование внутренней водной системы и сообщения с морем, строительство каналов и шлюзов.

Вместе с развитием торговых сношений к концу средних веков начинается быстрое развитие промышленности. Мощно развивается военная промышленность. Для добычи громадного количества металла возникла необходимость более эффективной эксплуатации шахт и рудников и перед механикой встали следующие задачи: подъем руды с большой глубины и необходимые для этого расчеты воротов, блоков и пр., устройство вентиляционных приспособлений в шахтах, откачка воды из шахт и т. п. Кроме того, артиллерия потребовала от механики разрешения ряда вопросов: изучения прочности орудия при наименьшей его массе, изучения зависимости между скоростью снаряда и сопротивлением воздуха, определение траектории снаряда в пустоте и в воздухе и т. п. Все эти задачи были поставлены перед механикой к концу средневековья и составили тематику работ ученых последующего времени. Начиная с XVI в. после средневекового застоя наступает эпоха грандиозных открытий в теоретической механике и смежных с ней областях: машиноведении, гидравлике, астрономии, математике.

Исключительное значение для развития наук имело открытие Николаем Коперником (1473—1543) гелиоцентрической системы мира. «Законодатель неба» Кеплер (1571—1630) показал, что планеты движутся по эллипсам, и открыл законы для времени обращения и скорости планет.

Открытие гелиоцентрической системы мира послужило началом подлинной революции в мировоззрении людей. По выражению Энгельса «отсюда начинает свое летоисчисление освобождение естествознания от теологии» *. Эти открытия послужили также основой для возникновения небесной механики, для дальнейшего развития теоретической механики.

Гениальный мыслитель, экспериментатор, наблюдатель и превосходный практик Галилей (1564—1642) сделал множество открытий. Значение его работ заключается не только в полученных им результатах, но и в том, что в своих исследованиях он применил подлинно научные методы вместо обычных в то время схоластических рассуждений.

Христиан Гюйгенс (1629—1695) продолжил работы Галилея. Замечательны работы Гюйгенса по математике, астрономии и физике. В области механики он дал ряд теорем о центробежной силе, по теории удара и полную теорию физического маятника, которую он разработал в процессе изобретения им часов. Недаром Ньютон, ссылаясь на работы Гюйгенса, обычно называл его «величайший Гюйгенс».

Исаак Ньютон (1642—1727) по праву считается основателем классической механики. Он создал стройную систему механики, четко сформулировал ее аксиомы, ввел понятие массы и решил целый ряд проблем механики. Замечательно, что большинство открытий Ньютон сделал в течение двух лет, когда он был еще совсем юным. В начале 1665 г. он открыл свой бином, в мае — метод касательных, в ноябре — прямой метод флюксий (дифференциальное исчисление), в январе 1666 г. — теорию цветов, в мае приступил к обратному методу флюксий (интегральное исчисление), в августе открыл закон всемирного тяготения.

Быстрое развитие механика получила в XVIII в. В России в это время работал гениальный ученый и первый русский академик Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765). Деятельность М. В. Ломоносова оказала огромное влияние на развитие всей русской науки и, в частности, на развитие механики.

Леонард Эйлер (1707—1783), по происхождению швейцарец, в двадцатилетнем возрасте переехал в Россию и стал академиком Санкт-Петербургской академии наук. По вопросам механики. математики, астрономии, теории упругости он написал около 800 научных работ, в которых разработал многие научные проблемы.

В области небесной механики много великолепных работ дали два француза — Алексис Клеро (1713—1765) и Жан ле Рон Д'Аламбер (1717—1783), издавший в 1743 г. свой знаменитый «Трактат по динамике».

Дальнейшее развитие аналитическая механика получила в трудах Лагранжа (1736—1813), Лапласа (1749—1827), Якоби (1804—1851), Гамильтона (1805—1865), Герца (1857—1894), Чаплыгина (1869—1942) и др., но их работы здесь не рассмотрены, так как они не входят в программу курса.

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 347.

Крупнейшим представителем аналитического направления в теоретической механике был академик М. В. Остроградский (1801—1861).

Ученик М. В. Остроградского И. А. Вышнеградский (1831—1895) — основоположник теории автоматического регулирования, получившей большое значение в наши дни.

В области механики машин и механизмов работал современник Вышнеградского академик П. Л. Чебышев (1821—1894). В частности, ему принадлежит заслуга постановки и решения целого ряда задач по теории машин и механизмов, имеющих громадное теоретическое и практическое значение.

Параллельно с аналитическим методом в механике развивались и геометрические методы, получившие наиболее яркое развитие в работах замечательного французского ученого Пуансо (1777—1859). Он впервые (1803) изложил статику в таком аспекте, в каком ее и теперь излагают во всех высших технических учебных заведениях. Много открытий и геометрических интерпретаций законов механики Пуансо сделал в кинематике и в динамике. К их числу относится работа Пуансо по изучению геометрическими методами движения тела с одной неподвижной точкой. Эта важная задача механики имеет, как показала С. В. Ковалевская (1850—1891), однозначное решение только в трех случаях: 1) движение тела по инерции вокруг центра тяжести (случай Эйлера — Пуансо), 2) движение симметричного тела вокруг точки, лежащей на оси симметрии (случай Лагранжа), и 3) движение не вполне симметричного тела с определенным распределением массы (случай, открытый Ковалевской и названный ее именем).

Блестящих результатов в самых различных отделах механики добился гениальный ученый Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — основоположник авиационных наук: экспериментальной аэродинамики, динамики самолета, расчета самолета на прочность и т. п. Его работы обогатили теоретическую механику и очень многие разделы техники. Движение маятника, теория волчка, экспериментальное определение моментов инерции, вычисление планетных орбит, теория кометных хвостов, теория движения подпочвенных вод, теория дифференциальных уравнений, истечение жидкостей, скольжение ремня на шкивах, качание морских судов на волнах Океана, движение полюсов Земли, упругая ось турбины Лаваля, ветряные мельницы, механизм плоских рассевов, применяемых в мукомольном деле, движение твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью, гидравлический таран, трение между шипом и подшипником, прочность велосипедного колеса, колебания паровоза на рессорах, строительная механика, динамика автомобиля — все интересовало профессора Жуковского и находило блестящее разрешение в его работах. Колоссальная научная эрудиция, совершенство и виртуозность во владении математическими методами, умение пренебречь несущественным и выделить главное, исключительная быстрота в решении конкретных задач и необычайная отзывчивость к людям, к их интересам сделали Николая Егоровича тем центром, вокруг которого в течение 50 лет группировались русские инженеры. Разрешая различные теоретические вопросы механики, Жуковский являлся в то же время непревзойденным в деле применения теоретической механики к решению самых различных инженерных проблем.

Исключительное значение для теоретической механики имеют работы блестящего русского математика А. М. Ляпунова (1857—1918). Наиболее замечательная его работа — создание теории устойчивости движения — имеет громадное техническое применение и ее развивают многие русские и иностранные ученые.

Среди крупнейших механиков дореволюционной России, успешно продолжавших свою научную и педагогическую деятельность после революции, наряду с Н. Е. Жуковским и его учеником С. А. Чаплыгиным, следует назвать проф. И. В. Мещерского (1859—1935) и Героя Социалистического Труда академика А. Н. Крылова (1863—1945).

Теоретическая механика продолжает быстро развиваться. Стоящие перед советскими учеными великие задачи: освоение космических пространств, автоматика, телемеханика, машиностроение, грандиозное строительство и др.— стимулируют быстрое развитие механики. Решению многих научных и технических проблем способствует применение ЭВМ. Советские и зарубежные ученые обогащают науку новыми открытиями и ценными достижениями, но их описание выходит за пределы краткого исторического очерка развития теоретической механики.

Читателям, интересующимся историей механики, рекомендуются следующие книги: *Боголюбов А. Н.* История механики машин, 1964 и Советская школа механики машин, 1975; *Веселовский И. Н.* Очерки по истории теоретической механики, 1974; *Геронимус Я. Л.* Очерки о работах корифеев русской механики, 1952; *Григорьян А. Т.* Очерки истории механики в России, 1961; *Ишлинский А. Ю.* Очерки по истории техники, 1955; *Космодемьянский А. А.* Очерки по истории теоретической механики в России, 1948; *Тюлина И. А.* и *Ракчеев Е. Н.* История механики, 1962; *Тюлина И. А.* История и методология механики, 1979; два сборника «История механики» под общей редакцией А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского, 1971, 1972.

КИНЕМАТИКА

Глава II

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

§ 3. ПРЕДМЕТ КИНЕМАТИКИ

Кинематикой называют раздел теоретической механики, в котором изучают механическое движение, рассматриваемое без учета сил, приложенных к движущимся объектам.

Арифметика наряду с некоторыми другими науками, занимающимися исчислением, является наиболее отвлеченной из математических наук. Для нее достаточно одного понятия — число — и она не нуждается ни в каких других фундаментальных понятиях.

Геометрия не может ограничиться одним понятием числа. Она основывается также на понятиях, связанных с геометрической формой. Геометрия часто пользуется понятием «движение». Например, линию геометрия определяет как след точки. Но если точка оставила след, то, значит, она передвигалась; фигура, образовавшая тело вращения, поворачивалась вокруг оси, т. е. тоже находилась в движении. Однако геометрию не интересует, совершалось ли это движение в течение многих тысячелетий или же в малые доли секунды. Понятие времени чуждо геометрии.

Размерностью геометрических величин является размерность длины L в той или иной степени (площадь измеряют в L^2, объем в L^3, размерность угла $L:L=1$, т. е. отвлеченная величина).

В науке, называемой кинематикой*, к понятиям числа и геометрической формы добавляется новое понятие — время T**.

К и н е м а т и к а изучает изменения, происходящие с течением времени в положении тел в пространстве. Она позволяет разобраться в многообразии видов механического движения и установить пространственные и временные меры движения. Но кинематика не дает возможности предсказать, как будет двигаться тело под действием приложенных к нему сил, или определить, какие силы должны быть приложены к данному телу, чтобы оно совершало заданное движение.

Механическое движение изучают в кинематике, не учитывая ни сил, приложенных к движущемуся объекту, ни его массу и ее распределение.

---

* Название предложено Ампером (1834).

** В теоретической механике принимается, что время течет одинаково в любом месте пространства и на всех движущихся телах.

Размерности кинематических величин выражаются размерностями только длины L и времени T, взятыми в той или иной степени, размерность же силы F или массы M в размерность кинематических величин не входит. Поэтому в кинематике движущийся объект может и не быть материальным телом. Например, можно изучать движение тени или светового зайчика. Конечно, движение этих объектов определяется движением материальных тел: движением тела, отбрасывающего тень, источника света, зеркальца, отбрасывающего световой зайчик. Для изучения механического движения в связи с силами, действующими на движущиеся объекты, а также в связи с массой и ее распределением кинематика является необходимой предпосылкой.

Огромно научное значение кинематики. «В мире нет ничего кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» *.

Кинематика имеет также непосредственное применение в технике. Техника широко пользуется законами и формулами кинематики. Очень большое значение кинематика имеет в теории механизмов и машин (ТММ). В настоящее время кинематика является хорошо исследованной областью науки и дальнейшее ее развитие происходит преимущественно в виде применения ее к различным задачам техники.

§ 4. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Системой отсчета называют реальное или условное твердое тело, по отношению к которому определяют положение или движение других тел.

Местоположение в пространстве всякого предмета можно определить только относительно других предметов. Мы говорим: «Книга лежит в шкафу на верхней полке справа» или «Поезд отходит от третьей платформы». Нельзя указать, где находится данный предмет (книга, поезд), не ориентируя его относительно каких-либо других предметов (шкаф, платформа).

Механическое движение всякого тела, так же как и его положение в пространстве, может быть отмечено только по отношению к другим предметам. Например, движение корабля можно описать относительно берегов или относительно географических долгот и широт, воображаемой, но неразрывно связанной с земным шаром сетью координат. Чтобы определить, где в данное мгновение пролетает самолет, можно указать, в каком направлении и на каком расстоянии от наблюдательного пункта он находится, т. е. достаточно провести радиус-вектор от наблюдательного пункта до самолета, и движение самолета можно определить, описав изменение с течением времени этого радиуса-вектора.

Реальное или условное твердое тело (платформа, берега, координатная сеть и пр.), по отношению к которому определяют

* *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм. М., 1948, с. 158.

положение или движение других тел, называют *системой отсчета*. Определяя движение, необходимо указать систему отсчета. Только относительно системы отсчета можно показать, как ориентировано тело и как с течением времени изменяется положение тела или его частей. Для краткости изложения не будем повторять, что траектория, скорость, ускорение и др. рассматриваются относительно некоторой данной системы отсчета, хотя всегда это подразумевается.

В различных задачах механики применяют и неподвижные и подвижные системы отсчета.

Тело, с которым связывают систему отсчета, тоже не является неподвижным, но его движение не всегда нужно учитывать. Так, при изучении движения каких-либо предметов на Земле, систему отсчета, обычно, связывают с Землей, считая ее неподвижной.

Однако, иногда бывает удобно, или даже необходимо, учитывать и движение системы отсчета по отношению к другой системе отсчета, принимаемой за неподвижную. Так, например, движение теплохода можно рассматривать как составное, состоящее из относительного движения относительно воды, т. е. относительно подвижной системы отсчета, движущейся по течению вместе с водой, и переносного движения вместе с подвижной системой отсчета относительно неподвижной системы отсчета, неизменно связанной с берегами, принимаемыми за неподвижные. В этом примере тело действительно движется относительно среды — *относительное движение* и одновременно переносится движущейся средой — *переносное движение*. Но часто сложное движение искусственно раскладывают на более простые — относительное и переносное.

Здесь дано лишь общее понятие о системах отсчета при составном движении. Подробно составное (сложное) движение рассмотрено в гл. V.

Глава III

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 5. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Движение точки задано, если известно ее положение относительно системы отсчета в любой момент времени.

Всякое тело имеет некоторые размеры и можно представить его состоящим из отдельных частиц. Частицы движущегося тела, вообще говоря, совершают неодинаковые движения, описывают различные траектории, имеют разные скорости. Если по условиям задачи этими различиями в движении частиц тела можно пренебречь, то тело принимают за одну точку. Если же приходится их учитывать, то тело за точку принимать нельзя. Так, зрителей, наблюдающих бег спринтера по беговой дорожке, интересует время, в течение которого он добежит до финиша, и они отождествляют спортсмена с одной точкой. Но для тренера, наблюдающего тот же бег, спринтер представляется сложной механической системой, в которой существенны и наклон корпуса, и движение рук, и траектория пальцев ног, и т. п.

Кинематика точки является наиболее простым разделом кинематики. Механическое движение точки заключается в изменении с течением времени ее местоположения относительно системы отсчета. Следовательно, чтобы определить движение точки, достаточно задать ее положение в данное мгновение и указать, как оно изменяется с течением времени.

В этой главе ознакомимся с некоторыми способами определения движения точки, а также с основными понятиями кинематики (законы движения, перемещение, расстояние, путь, скорость, ускорение), без ясного понимания которых невозможно изучение кинематики.

Векторный способ задания движения точки

При векторном способе задания движения точки должен быть дан ее радиус-вектор как некоторая непрерывная однозначная функция времени:

$$\vec{r}=\vec{r}(t).$$

Определить движение точки можно различными способами. По одному из них, называемому *векторным* *, надо выбрать систему отсчета и провести радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ из начала отсчета O в движущуюся точку M. Положение системы отсчета в пространстве должно быть вполне определено, например, репéром — тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами, пересекающимися в точке O (рис. 1), т. е. ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Поэтому радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ определяет не только расстояние между точками O и M, но и направление, в котором точка M находится в данное мгновение на этом расстоянии от начала отсчета.

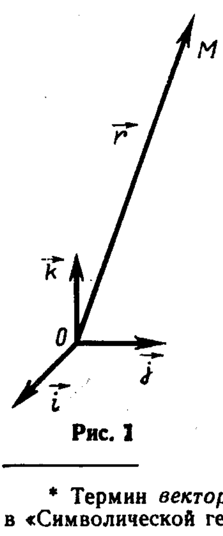


Рис. 1

Радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ вполне и однозначно определяет, какое место занимает точка M в данный момент времени относительно системы отсчета. Если точка M движется, то с течением времени ее положение изменяется, изменяется и радиус-вектор.

Чтобы определить движение точки M, надо указать, где она находится в каждое мгновение,

* Термин *вектор* в математическом понятии появился впервые у Гамильтона в «Символической геометрии» (1846).

надо выразить радиус-вектор $\vec{r}$ в виде какой-то функции времени

$$\vec{r}=\vec{r}\,(t). \qquad (1)$$

Это однозначная функция, потому что точка M в каждое мгновение находится в каком-либо одном месте; она не может быть одновременно в нескольких местах.

Перемещением точки за данный промежуток времени называют вектор, проведенный из положения, занимаемого точкой в начале этого промежутка, в положение, занимаемое в конце его.

Пусть в мгновение t, принятое за начальное мгновение какого-нибудь промежутка времени Δt, движущаяся точка находится в пункте M, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. Назовем этот пункт начальным положением точки для промежутка времени Δt. В конце этого промежутка, в мгновение $t_1=t+\Delta t$ пусть движущаяся точка окажется в каком-либо пункте M_1, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}_1=\vec{r}\,(t+\Delta t)$. Найдем изменение $\overrightarrow{\Delta r}$ радиуса-вектора $\vec{r}$ за этот промежуток времени. Какой вектор надо прибавить к радиусу-вектору $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, чтобы получить радиус-вектор $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM}_1$? Этот вектор надо провести из начального пункта M в конечный пункт M_1. Вектор $\overrightarrow{MM}_1=\overrightarrow{\Delta r}$ определяет изменение местоположения точки за этот промежуток времени. Этот вектор называют *перемещением точки за данное время* (рис. 2).

Обратим внимание на одно очень важное обстоятельство. Если начало отсчета возьмем не в точке O (рис. 2, *а*), а в какой-либо другой (неподвижной относительно данной системы отсчета) точке O' (рис. 2, *б*), то радиус-вектор $\vec{r}\,'=\overrightarrow{O'M}$ точки M будет иным и $\vec{r}\,'\neq\vec{r}_1$, но изменение радиуса-вектора, характеризующее перемещение точки M, останется тем же, т. е. $\overleftarrow{\Delta r}=\overleftarrow{\Delta r'}$.

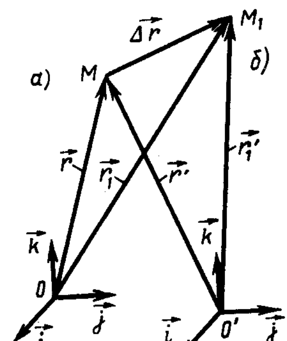


Рис. 2

Перемещение (вектор $\overrightarrow{\Delta r}$) отмечает положения точки M только в начальное и конечное мгновения промежутка времени Δt, но не дает возможности определить, где находится движущаяся точка в каждое из мгновений этого промежутка времени. Чтобы это определить, нужно время движения разбить на возможно меньшие отрезки.

Функция $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ непрерывная и, следовательно, бесконечно малому приращению аргумента t соответствует бесконечно малое приращение функции $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$. Сколь угодно малый вектор $\mathrm{d}\vec{r}$ перемещения точки за сколь угодно малое время называют *элементарным перемещением точки.*

Траекторией точки называют множество всех последовательных положений точки относительно системы отсчета.

Движущая точка из каждого своего положения переходит в какое-то другое сколь угодно близкое положение, а из него в другое близкое и т. д. И если бы она оставляла за собой след, то видна была бы непрерывная линия, *траектория точки,* т. е. множество всех последовательных положений точки в данной системе отсчета.

При движении точки M ее радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ изменяется, причем начало радиуса-вектора всегда находится в одной неподвижной точке, например в точке O (рис. 3), а конец M скользит по траектории (описывает траекторию). Напомним, что всякую линию, описываемую концом переменного вектора, выраженного функцией времени и выходящего из одной точки, называют *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки является годографом ее радиуса-вектора.

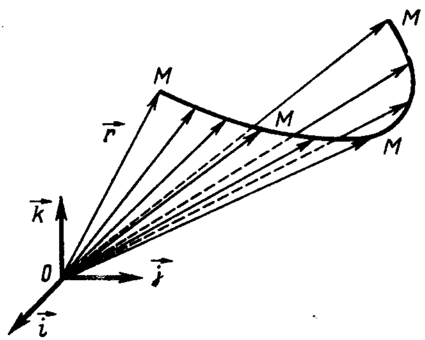


Рис. 3

Если траектория точки прямая линия, то движение точки называют *прямолинейным,* если же траекторией является какая-нибудь кривая линия (безразлично какая), то движение называют *криволинейным* *.

Различие между траекторий, описанной точкой, и перемещением точки за то же время поясним на конкретном примере. Теплоход вышел из Москвы, по каналу прошел в Волгу, спустился по Волге до Волго-Донского канала, перешел в Дон и доплыл до Ростова. Перемещение теплохода за этот рейс изобразится вектором, проведенным из Москвы в Ростов по хорде земного шара, а траекторией является вся пройденная теплоходом трасса.

Путь точки за время Δt — это предел суммы модулей всех перемещений точки за это время: $s=\int\limits_{t}^{t+\Delta t}|d\vec{r}|$.

К понятиям перемещение и траектория близко примыкает понятие длина пути, или, коротко путь. Эту величину обычно обозначают буквой s. Пусть в начальное мгновение точка занимает на своей траектории начальное положение M (рис. 4, *а*), а через промежуток времени Δt — конечное положение M_n. Вектор $\overrightarrow{MM_n}$ является перемещением точки за время

* В разговорной речи часто встречается выражение «траектория движения точки». Траекторию описывает точка, а не ее движение и слово «движения» здесь лишнее.

Δt. Разбив интервал времени Δt на части, отметим промежуточные положения точки (M_1, M_2, M_3, ...) и все их последовательно соединим хордами. Получим ломаную MM_1M_2 (рис. 4, *б*). Чем меньше отрезки времени, на

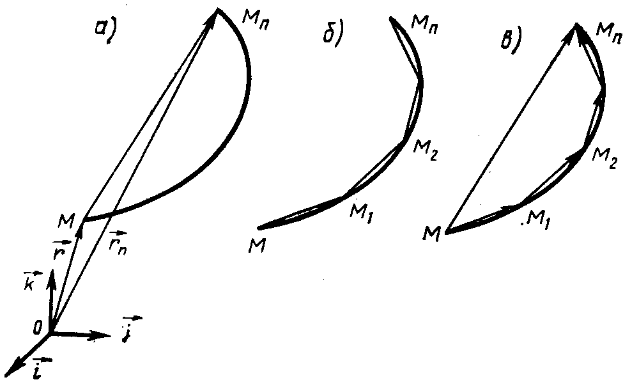


Рис. 4

которые разбили Δt, тем ближе ломаная соответствует траектории точки и тем меньше длина ломаной отличается от длины дуги, пройденной точкой за время Δt. Назовем *путем точки* предел суммы абсолютных значений всех малых перемещений точки за данный конечный промежуток времени, иными словами, путь точки — это длина дуги, пройденная точкой за данное время,

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} |\Delta \vec{r}_k| \qquad (2)$$

Следует обратить внимание на то, что для вычисления пути взят предел арифметической суммы абсолютных значений (модулей) перемещений, а не геометрической суммы этих перемещений. Если бы эти перемещения складывались геометрически (рис. 4, *в*), то получился бы вектор перемещения $\overrightarrow{MM_n}$.

Заметим, что путь движущейся точки всегда увеличивается с течением времени. Он является функцией времени

$$s = s(t). \qquad (3)$$

Эта функция однозначная, непрерывная, скалярная и существенно положительная.

Естественный способ задания движения точки

При естественном способе определения движения точки должны быть известны траектория и дуговая координата точки как функция времени: $\tilde{s}=\tilde{s}(t)$.

Если траектория точки известна, то для определения местоположения этой точки в пространстве достаточно указать, на каком расстоянии она находится от какой-либо другой точки траектории. Так, например, местонахождение поезда известно, если известна железная дорога и расстояние по ней от какой-либо станции.

Разумеется, при этом надо знать, по какую сторону от станции находится поезд на этом расстоянии. Эту станцию можно принять за начало отсчета A и условиться считать расстояние по одну сторону положительным («сторона возрастания дуг»), а по другую — отрицательным. *Расстояние* измеряют по траектории с учетом выбранного направления отсчета дуг (+или—), его называют также *дуговой координатой*. Чтобы не смешивать дуговую координату и путь s, условимся обозначать дуговую координату $\tilde{s}$, т. е. над буквой будем писать волнистую черту («тильду»).

При движении точки по траектории дуговая координата ее меняется и, чтобы определить движение точки, надо выразить дуговую координату некоторой однозначной непрерывной функцией времени:

$$\tilde{s}=\tilde{s}(t). \tag{4}$$

Такой способ определения движения точки называют *естественным* или по *заданной траектории*.

Несмотря на кажущуюся схожесть в обозначении и в применении, понятия длины пути и дуговой координаты очень различны. Основное различие заключается в следующем. Путь s, пройденный точкой, является реальной, объективно существующей величиной. Он зависит только от движения точки в данной системе отсчета и не зависит от подсчета, от выбора системы координат.

Путь всегда положителен; при движении точки пройденный путь всегда возрастает. Это неубывающая функция времени. Дуговая координата $\tilde{s}$ — величина условная. Размеры и знак дуговой координаты зависят от выбора начала отсчета (точка A) и положительного направления отсчета дуг. Не только в зависимости от положения и движения точки M, но и от произвольного выбора системы отсчета дуговая координата $\tilde{s}$ может быть положительной или отрицательной, увеличиваться или уменьшаться. Тем не менее применение дуговых координат в кинематике точки вызвано значительными удобствами метода.

Координатный способ задания движения точки

При координатном способе задания движения точки должны быть известны уравнения движения, т. е. заданы координаты точки как функции времени: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

Задание движения точки в прямолинейных прямоугольных координатах. Положение какой-либо точки M в пространстве (рис. 5) может быть определено тремя ортогональными проекциями P, Q и R на три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz, называемые *осями координат*. Положение точки P на оси Ox определяется абсциссой x. Точно так же положение точек Q и R определяется ординатой y и аппликатой z.

Если точка M движется относительно осей $Oxyz$, то ее проекции P, Q и R перемещаются по осям, и координаты точки M изменяются. Для определения движения точки M в этой системе надо знать координаты точки M в каждое мгновение, т. е. выразить их непрерывными и однозначными функциями времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (5)$$

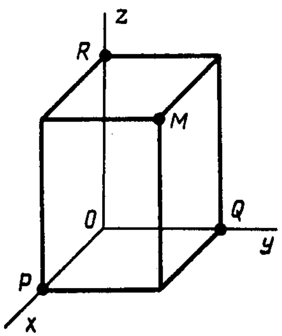


Рис. 5

Эти соотношения (5) называют *кинематическими уравнениями движения точки в прямоугольных координатах*, а способ определения движения точки посредством этих соотношений называют *координатным*. Это название неточно, потому что кроме прямоугольных прямолинейных координат существует множество других координатных систем.

Если точка M движется в какой-либо одной плоскости, которую принимают за плоскость xOy*, то третье уравнение (5) становится лишним и движение точки определяется двумя уравнениями в плоской системе координат xOy.

Если точка движется прямолинейно, то, приняв ее траекторию за координатную ось, определим движение точки одним уравнением. В этом случае координатный способ определения движения точки совпадает с естественным, а дуговая координата становится идентичной декартовой.

---

* Плоскую систему координат открыли в 1637 г. Рене Декарт и одновременно Пьер де Ферма, независимо друг от друга, но ее обычно называют *декартовой*.

Чтобы определить уравнение траектории в прямоугольных координатах, надо из кинематических уравнений движения исключить время t.

Уравнение траектории. Только в отдельных случаях траектория точки бывает известна заранее, задана в условиях задачи. Вообще же при координатном способе задания движения траектория точки неизвестна и ее определение составляет один из подлежащих решению вопросов.

Для определения траектории точки, движение которой задано в координатной форме, применяют два метода. По одному из них в уравнениях движения дают аргументу t различные частные значения и вычисляют соответствующие значения функций (координат). Затем отмечают положения точки по ее координатам. Следовательно, кинематические уравнения движения точки можно рассматривать как уравнения ее траектории в параметрической форме, а время t как независимый переменный параметр.

По второму методу определяют *уравнение траектории*. Точнее говоря, определяют уравнение той кривой, которая целиком или в некоторой своей части является траекторией точки. Уравнения эти выражают зависимость между координатами точки в явном или неявном виде, но не в параметрической форме. Траектория — это геометрическое понятие, ее уравнение не должно содержать времени, и для определения уравнения траектории надо из уравнений движения время исключить. Исключение t выполняют по правилам элементарной математики (способами подстановки, уравнивания коэффициентов и т. п.).

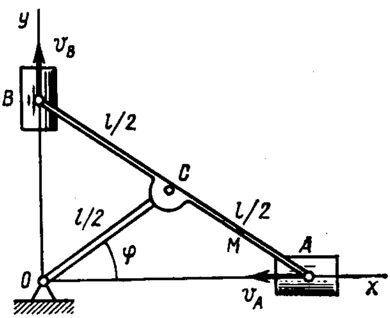


Рис. 6

Иногда при движении точки, заданном в координатной форме, требуется определить не только траекторию точки, но и уравнение движения точки по траектории. Для этого надо продифференцировать уравнения движения точки (5) в прямоугольных координатах, т. е. надо определить dx, dy, dz и подставить их в известную из курса математики формулу *, определяющую длину элемента дуги,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \tag{6}$$

и проинтегрировать уравнение (6).

---

* Эта формула впервые была дана 16-летним Клеро в одной из его первых работ «Исследование кривых двоякой кривизны», опубликованной в 1731 г. Для элемента дуги плоской кривой выражение, аналогичное современному, было дано Валлисом в 1656 г.

Задача № 1. Точки A и B, соединенные линейкой AB длиной 40 см (рис. 6), движутся по взаимно перпендикулярным осям Ox и Oy*.

Линейка приводится в движение кривошипом OC длиной 20 см. Шарнир O кривошипа неподвижен, а шарнир C (палец кривошипа) соединен с серединой C линейки AB. Угол φ между осью Ox и кривошипом изменяется пропорционально времени: $\varphi = \pi t$.

Найти уравнение траектории точки M, лежащей на линейке на расстоянии $AM = 10$ см от точки A.

Решение. Напишем уравнение движения точки M в координатной форме. Углы при основании равнобедренного треугольника OCA всегда равны между собой. Определим координаты точки M

$$x = OC\cos\varphi + CM\cos\varphi,\quad y = OC\sin\varphi - CM\sin\varphi.$$

Подставим числовые значения и напишем уравнения движения

$$x = 30\cos\pi t,\quad y = 10\sin\pi t.$$

Для определения уравнения траектории исключим время из уравнений движения

$$x/30 = \cos\pi t,\quad y/10 = \sin\pi t.$$

Возводя каждое из двух равенств в квадрат и складывая, получим уравнение эллипса

$$x^2/30^2 + y^2/10^2 = 1.$$

Ответ. Эллипс с полуосями 30 см, 10 см **.

Задача № 2. Движение точки задано уравнениями

$$x = x'\cos\varphi(t) - y'\sin\varphi(t),\quad y = x'\sin\varphi(t) + y'\cos\varphi(t),$$

где x' и y' — некоторые постоянные величины, а $\varphi(t)$ — любая функция времени. Определить траекторию точки и дифференциал дуги траектории.

Решение. Возведем каждое из уравнений в квадрат, а затем сложим их:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

По условию x' и y' — постоянные. Обозначим сумму их квадратов через r^2 и получим

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Для определения элемента дуги траектории продифференцируем по времени уравнения движения точки; обозначив через $\dot\varphi$ производную функции φ по времени, получим

$$dx = -x'\sin\varphi(t)\dot\varphi(t)\,dt - y'\cos\varphi(t)\dot\varphi(t)\,dt = -y'\dot\varphi(t)\,dt,$$

$$dy = x'\cos\varphi(t)\dot\varphi(t)\,dt - y'\sin\varphi(t)\dot\varphi(t)\,dt = +x'\dot\varphi(t)\,dt$$

и далее по формуле (6)

$$ds = +\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = r\dot\varphi(t)\,dt.$$

Ответ. Траектория — окружность с центром в начале координат радиуса $r = +\sqrt{x'^2 + y'^2}$, элемент дуги $ds = r\dot\varphi(t)dt$.

---

* Если две точки A и B какой-либо плоской фигуры движутся по взаимно перпендикулярным осям, лежащим в плоскости фигуры, то ее движение называют *кардановым* (по имени итальянского ученого Кардано).

** Механизм называется эллипсографом. Различные точки линейки AB описывают различные эллипсы.

Графиком какой-либо кинематической величины называют кривую, выражающую зависимость этой величины от времени.

Графическое задание движения. Закон движения точки, т. е. зависимость пути или дуговой координаты от времени, может быть выражена не только аналитически в виде функции времени (3) или (4), но и графически.

Иногда эту зависимость получают непосредственно из наблюдений и строят график функции, откладывая по оси абсцисс время, а по оси ординат — соответствующие найденные значения функции. Если же известно математическое выражение этой зависимости, то графиками часто пользуются для наглядности.

Построение и применение кинематических графиков будет показано ниже на простых примерах.

§ 6. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Кинематической мерой движения, характеризующей изменение положения точки в данное мгновение, является скорость точки.

Положение точки в пространстве определяется *пространственными мерами.* Это дуговая координата, декартовы координаты, пройденный путь, радиус-вектор и др. Кинематической *пространственно-временной мерой движения* точки, характеризующей изменение ее положения в данное мгновение, является скорость точки v *.

Понятие «скорость» возникло еще в доисторическую эпоху. Сравнивая движение тел, люди усвоили тогда представление о быстроте и медленности движения. Это установившееся в обыденной жизни понятие, хотя и было принято механикой, но не сразу получило достаточно четкое научное определение и собственное математическое выражение. Формула $v=s/t$ (скорость равна пути, поделенному на время) не встречается не только у древних ученых, но даже в трудах таких корифеев науки, как Галилей и Ньютон. В те времена считали возможным делить друг на друга только отвлеченные числа или одноименные величины. Ведь разделить a на b — это значит определить, сколько раз делитель b содержится в делимом a. А при делении пути s на время t (пусть, например, $s=10$ м и $t=2$ с) нельзя указать, сколько раз две секунды содержатся в десяти метрах.

Только Эйлер, по-видимому, первым из ученых в решительной форме представил скорость как отношение пройденного точкой пути к затраченному на это времени. Он указал, что скорость является мерой движения, благодаря которой обеспечивается прохождение определенного пути за определенное время. Были установлены три самостоятельные равноправные величины: путь

* Буква v (от лат. vēlōsitās — быстрота, скорость) введена Эйлером (1765) и принята ГОСТ 1493—47.

s, время t и скорость v. По двум любым из этих величин может быть определена третья по формулам:

$$v = s/t;\ t = s/v;\ s = tv.$$

В самом деле, выражая пройденный точкой путь в каких-либо единицах длины (например, в метрах), выясняем, сколько раз метр содержится в этом пути, т. е. разделив длину пути на длину одного метра, получаем отвлеченное число, выражающее в метрах пройденный путь. Аналогично, измерить промежуток времени, в течение которого происходило движение, значит выразить его в единицах времени (например, в секундах). Для этого нужно весь промежуток времени поделить на продолжительность одной секунды, получить отвлеченное число, выражающее в секундах затраченный промежуток времени. Таким образом, s и t выражены в отвлеченных числах, показывающих, сколько в них содержится единиц соответствующего им рода. Деление их друг на друга вполне допустимо.

В кинематике, как и всюду, применяют различные единицы скорости: сантиметр в секунду (см/с), километр в час (км/ч) и др. Скорость света выражают мегаметрами в секунду (Мм/с), скорость звука — метрами в секунду (м/с), скорость осадки зданий — миллиметрами в год (мм/год). Единицей скорости в международной системе единиц СИ является метр в секунду (м/с) *.

Единицы скорости, применяемые в кинематике, отличаются друг от друга по размеру. Однако размерность скорости всегда одна и та же. Пользуясь введенными Максвеллом квадратными скобками, можно написать, что размерность скорости равна размерности длины в первой степени, помноженной на размерность времени в минус первой степени:

$$[v] = L^1T^{-1}.$$

Модуль истинной скорости точки, т. е. ее числовое значение, равен первой производной от пути по времени: $v = ds/dt$.

Чтобы пройти путь Δs, точке потребовалось бы некоторое время Δt. Отношение пройденного пути к затраченному времени называют численным значением или средней скоростью точки на этом участке, или за это время:

$$v_{ср} = \Delta s/\Delta t. \qquad (7)$$

Так, если длина трассы горнолыжника равна 3000 м, а время, затраченное на спуск, равно 100 с, численное значение средней скорости этого спортсмена на всей трассе $v_{ср} = 3000/100 = 30$ м/с $= 108$ км/ч.

Если необходимо узнать, с какой скоростью горнолыжник проходит отдельные участки трассы, то, разделив длины этих

* На метр в секунду, как на одну из возможных единиц скорости, указал Лаплас в том же 1799 году, когда был сделан прототип метра.

участков на соответствующие промежутки времени, определим численное значение средней скорости спортсмена на этих участках.

Будем уменьшать участки пути и соответственно интервалы времени, на которых рассматривается движение точки.

Предел этого отношения называют численным значением (абсолютной величиной, модулем) скорости точки в данное мгновение (или истинной скорости точки)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = v.$$

Следовательно, модуль скорости точки равен первой производной от пути по времени

$$v = \mathrm{d}\, s/\mathrm{d}\, t = \dot{s}^{*}. \qquad (8)$$

Определение скорости точки при векторном способе задания движения

Скорость точки выражается первой производной от радиуса-вектора по времени: $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$.

Определив точно истинную скорость точки (8), Эйлер указал [как это еще до него сделал Роберваль (1635) и др.], что «направление движения дается касательной к кривой». Однако он рассматривал скорость как скалярную величину и писал, что «скорость и направление представляют собой вещи совершенно различные по своей природе». Теперь понимают скорость как векторную величину и, чтобы расширить и уточнить полученное определение скорости, остановимся на нем подробнее.

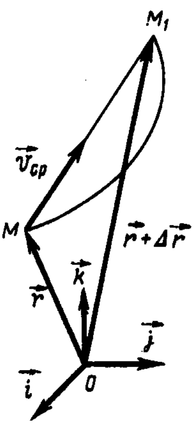


Рис. 7

Пусть некоторая точка M движется по своей траектории (рис. 7) и в мгновение t ее местонахождение определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, а через небольшой отрезок времени Δt движущаяся точка занимает положение M_1, определяемое радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1 = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}$. Перемещение точки за это время равно вектору $\overrightarrow{\Delta r}$. Разделим вектор $\overrightarrow{\Delta r}$ на время Δt, в течение которого точка совершила это перемещение. Деление вектора на положительную скалярную величину не меняет направления вектора, и в результате этого получим вектор, направленный по вектору перемещения, т. е. по хорде траектории. Эта хорда соединяет ту точку траектории, в которой M находилась в мгновение, принятое за начальное мгновение про-

* Эта формула появилась у Эйлера в 1736 г.

межутка времени Δt, с той точкой траектории, где M находилась в конечное мгновение этого промежутка времени. Назовем этот вектор

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$$

средней скоростью точки M в направлении перемещения.

Если уменьшать промежуток времени Δt (стремить его к нулю), оставляя неизменным его начало, то направление и величина перемещения $\overrightarrow{\Delta r}$ тоже будут изменяться, а написанное соотношение будет стремиться к своему предельному значению, к некоторому вектору

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.} \tag{9}$$

Этот вектор представляет собой по численному значению и по направлению *скорость точки* в данное мгновение. Он является первой векторной производной от радиуса-вектора точки по скалярному аргументу — времени, иными словами, пределом отношения вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени при стремлении этого промежутка времени к нулю.

Вектор скорости направлен в сторону движения точки по касательной к траектории и по модулю равен первой производной от пути по времени.

Как же определить размер и направление скорости точки по формуле (9)?

Вектор $\vec{v}$ скорости точки, как и всякий вектор, определяется модулем и направлением. Как только что было показано, модуль истинной скорости, ее численное значение выражается первой производной (8) от пути по времени

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}. \tag{10}$$

Нетрудно определить и направление вектора истинной скорости: предельным положением секущей является касательная. Следовательно, вектор истинной скорости точки направлен по касательной к траектории в том месте, где в данное мгновение находится точка, разумеется, в сторону движения точки.

Как всякий вектор, скорость может быть представлена произведением модуля $v = ds/dt$ на единичный вектор скорости $\vec{v}^0$, т. е. на вектор, по модулю равный единице и направленный по скорости

$$\vec{v} = \vec{v}^0 v \tag{11}$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}^0 \frac{ds}{dt}. \tag{11'}$$

Задача № 3. Конькобежец сделал полный круг на ледяной дорожке длиной 500 м за 40 с. Считая движение спринтера равномерным по окружности, определить: 1) скорость, 2) путь спринтера за 20 с, 3) его перемещение за то же время.

Решение. При равномерном движении точки модуль скорости равен пройденному пути, деленному на время: $v = 500 : 40 = 12{,}5$ м/с. Путь, пройденный при равномерном движении за 20 с, $s = 12{,}5 \cdot 20 = 250$ м.

Перемещением точки за данное время называется вектор, проведенный из положения, занимаемого точкой в начале этого промежутка, в положение, занимаемое в конце его. За 20 с спринтер проделал половину пути и находился в точке D, диаметрально противоположной старту. Вектор перемещения направлен от старта в эту точку по диаметру круга. Модуль перемещения

$$|\vec{r}| = 500 : 3{,}14 = 160 \text{ м}.$$

Средняя скорость спринтера в направлении OD равна $160 : 20 = 8$ м/с.

Ответ. $v = 12{,}5$ м/с; $s = 250$ м; $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{OD}$.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Алгебраическая скорость равна первой производной от дуговой координаты по времени и характеризует скорость и направление движения (+ или —) точки по траектории: $\tilde{v} = d\tilde{s}/dt$.

Алгебраическая скорость точки. При естественном способе определения движения точки траектория точки известна, а движение задано уравнением (4). Если подставить в это уравнение какое-либо частное значение t и вычислить дуговую координату $\tilde{s}$, то узнаем положение точки на траектории в этот момент времени. С течением времени положение точки меняется и соответственно меняется ее дуговая координата. Допустим, что за время Δt точка двигалась по траектории в одну сторону (не совершая возвратных движений) и дуговая координата точки изменилась на некоторую величину $\Delta\tilde{s}$. В зависимости от направления движения точки по траектории и от того, какое направление принято за положительное при отсчете дуг, приращение $\Delta\tilde{s}$ дуговой координаты может быть положительным или отрицательным. Назовем *средней алгебраической скоростью* точки отношение приращения дуговой координаты к соответствующему времени

$$\tilde{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tilde{s}}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при Δt, стремящемся к нулю, т. е. первую производную от дуговой координаты точки по времени, называют алгебраической величиной скорости точки в данное мгновение t или, коротко, *алгебраической скоростью точки*

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{s}}{dt}. \qquad (12)$$

Алгебраическая скорость $\tilde{v}$ имеет свой знак («+» или «—») и только по абсолютной величине равна модулю скорости

$$|\tilde{v}| = v. \tag{13}$$

Знак алгебраической скорости зависит от направления движения точки в ту или иную сторону по траектории и от того, какую из этих двух сторон траектории принять за направление положительного отсчета дуговой координаты. Если знак производной $\mathrm{d}\tilde{s}/\mathrm{d}t$ положителен, то, следовательно, дуговая координата точки возрастает и точка (где бы она ни находилась в это мгновение) движется по своей траектории в ту сторону, которая принята за положительное направление отсчета дуг. Если же точка движется в отрицательную сторону траектории, то независимо от ее местонахождения на траектории алгебраическая скорость ее отрицательна.

Таким образом, при естественном способе определения движения точки первая производная дуговой координаты по времени (алгебраическая скорость) показывает, насколько быстро и в какую сторону своей траектории движется точка в данный момент времени.

В отличие от алгебраической скорости, являющейся вычислительным средством, вектор скорости точки M есть величина физическая, существует объективно и не может зависеть от вычислений.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Проекция скорости точки на координатную ось равна первой производной координаты по времени: $v_P = v\cos\alpha_v = \dot{x}$.

Определим скорость точки M, движение которой задано в координатной форме тремя уравнениями (5). По мере движения точки M в пространстве ее проекции P, Q и R (см. рис. 5) движутся по своим прямолинейным траекториям, т. е. по осям координат, и их движения вполне соответствуют движению точки M. Так, координата (абсцисса) точки P всегда равна абсциссе точки M, а координаты точек Q и R всегда равны ординате и аппликате точки M. При движении точки M в пространстве согласно уравнениям (5) точка P движется по оси Ox согласно первому из этих уравнений, а точки Q и R — соответственно по осям Oy и Oz согласно второму и третьему уравнениям.

Определим скорость v_P точки P при движении этой точки по ее прямолинейной траектории Ox, иными словами, определим скорость проекции точки M на ось Ox.

Алгебраическая скорость точки P выражается формулой (12), где $\tilde{s} = x$,

$$\tilde{v}_P = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Следовательно, алгебраическая скорость проекции точки M на координатную ось Ox (точка P) равна первой производной от текущей координаты x по времени t. Она положительна, если точка P движется в положительном направлении оси Ox, и отрицательна, если точка P движется в отрицательном направлении.

Аналогично получаем алгебраические скорости точек Q и R (проекций точки M на оси Oy и Oz)

$$\tilde{v}_Q = \frac{dy}{dt}; \quad \tilde{v}_R = \frac{dz}{dt}.$$

Пусть точка M за сколь угодно малый отрезок времени dt передвинулась по своей траектории на элемент дуги ds, абсолютное значение которого выразим формулой (6)

$$ds = +\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

где dx, dy, dz — проекции элемента дуги на оси координат, или, что то же, элементарные приращения координат точки M.

Косинусы углов, составляемых элементарным перемещением ds с осями координат x, y и z, соответственно равны dx/ds, dy/ds и dz/ds. Вместе с тем эти косинусы являются направляющими косинусами скорости, потому что скорость направлена по касательной к траектории. Следовательно,

$$\cos\alpha_v = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta_v = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma_v = \frac{dz}{ds}. \tag{14}$$

Чтобы определить проекцию скорости v на какую-либо неподвижную ось, надо умножить модуль скорости $v = ds/dt$ на косинус угла между направлением этой оси и направлением скорости. Таким образом, для проекций v_x, v_y и v_z скорости точки M на оси координат имеем

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= v\cos\alpha_v = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} = \tilde{v}_P;\\
v_y &= v\cos\beta_v = \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = \tilde{v}_Q;\\
v_z &= v\cos\gamma_v = \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} = \tilde{v}_R.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Равенства (15) можно прочитать так: проекции скорости точки на оси координат равны первым производным от соответствующих координат по времени. Иногда те же равенства формулируют иначе: проекция скорости точки на всякую неподвижную ось равна алгебраической скорости проекции точки на ту же ось. Заметим тут же, что равенства (15) справедливы для каждого момента времени. Следовательно, равны между собой не только проекция скорости и скорость проекции, но и их изменения за всякий промежуток времени.

Для определения проекции скорости на ось умножают на направляющий косинус не вектор, а его модуль, его абсолютную величину. Проекция скорости на ось (как и алгебраическая скорость точки) не является вектором, так как не имеет собственного направления, а вполне определяется величиной проекции, направлением оси и знаком «+» или «—». Проекция на ось вектора скорости (как и всякого другого вектора) AB (рис. 8, *а*) положительна ($+ab$), если угол между положительным направлением оси и направлением вектора AB острый, и отрицательна (рис. 8, *б*) ($-ab$), если этот угол тупой.

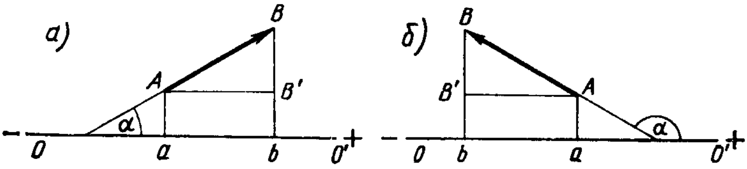


Рис. 8

Если проекцию на ось помножить на орт этой оси, то получим векторную величину, называемую *составляющей по оси:*

$$\vec{v}_x=\vec{i}v_x;\quad \vec{v}_y=\vec{j}v_y;\quad \vec{v}_z=\vec{k}v_z.$$

Модуль скорости точки равен квадратному корню из суммы квадратов проекций скорости на оси координат: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.

Модуль скорости. Возведем в квадрат каждое из равенств

$$v_x=v\cos\alpha_v,\quad v_y=v\cos\beta_v,\quad v_z=v\cos\gamma_v$$

и сложим их

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2(\cos^2\alpha_v+\cos^2\beta_v+\cos^2\gamma_v).$$

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице и

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2,$$

или

$$v=+\sqrt{v_x^2+v_z^2+v_z^2}, \tag{16}$$

или

$$v=+\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2},$$

где точки над функциями, как обычно, обозначают производные по времени. Таким применявшимся Лагранжем обозначением (введенным Ньютоном) производных по времени пользуются наравне с общепринятым ($dx/dt=\dot{x}$). Перед радикалом взят положительный знак, так как абсолютная величина скорости (ее модуль) всегда положительна.

Направление скорости можно определить по направляющим косинусам скорости:
$\cos \alpha_v = v_x/v$, $\cos \beta_v = v_y/v$, $\cos \gamma_v = v_z/v$.

Направляющие косинусы скорости. Равенство (16) позволяет определить модуль скорости точки, движение которой задано уравнениями (5). Направление скорости определяется по косинусам углов (14), составляемых положительными направлениями осей координат с направлением скорости. Выражения этих косинусов, называемых направляющими косинусами скорости, получим из уравнений (15):

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_v &= v_x/v = \dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2};\\ \cos\beta_v &= v_y/v = \dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2};\\ \cos\gamma_v &= v_z/v = \dot{z}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

где $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ — первые производные от x, y и z по t.

Если точка движется в плоскости xOy, то $\gamma_v = 90°$, $\cos\gamma_v = 0$, $\cos\alpha_v = \sin\beta_v$ и $\cos\beta_v = \sin\alpha_v$.

Направляющие косинусы всякого вектора равны отношениям его проекций на оси координат к модулю вектора.

По направляющим косинусам определяют направление не только вектора скорости, но и других векторов (ускорения, силы и пр.). *Направляющими косинусами* данного вектора называют косинусы углов между положительными направлениями осей координат и направлением данного вектора. Они равны отношениям проекций вектора на эти оси к модулю вектора и по знакам совпадают со знаком проекций, потому что знаменатель этих отношений (модуль вектора) существенно положительная величина.

В нашем курсе теоретической механики направляющим косинусам отведена значительная роль. Углы, составляемые каким-либо вектором с осями x, y и z, обозначим соответственно буквами α, β и γ с индексом вектора [см., например формулы (30), (91), (101, (175)].

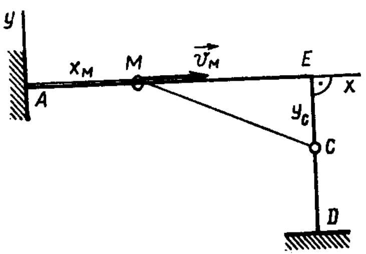


Рис. 9

Задача № 4. (*Березкин Е. Н.* Решение задач по теоретической механике Ч. I, МГУ, 1973). Один конец нити AMC (рис. 9) закреплен в неподвижной точке A, а другой привязан к кольцу C, которое может скользить по неподвижному стержню DE. Нить продета через кольцо M, скользящее с постоянной скоростью v_M по стержню AE. Длина нити $AMC = l$, $AE = b$, $AE \perp DE$. Определить скорость кольца C в зависимости от расстояния $x = AM$ кольца M от точки A.

Решение. Примем точку A за начало координат, направив ось абсцисс вправо по стержню AE, а ось ординат вертикально вверх. Тогда положение точки M определится координатой $x = AM$, а положение точки C — координатой $y_C =$

$=EC$. Зависимость между положениями точек M и C установим по теореме Пифагора из треугольника MCE

$$(l-x)^2=(b-x)^2+y^2.$$

Это соотношение остается справедливым в любой момент времени и может рассматриваться как тождество во времени. Дифференцируя это тождество, получим

$$-(l-x)\dot{x}=-(b-x)\dot{x}+y\dot{y},\ \dot{y}=-(l-b)\dot{x}/y.$$

Скорость точки M задана и $\dot{x}=v_M$. Исключая y, получаем ответ.

Ответ. $v_C=\dot{y}=-(l-b)/\left(\sqrt{l^2-b^2-2x(l-b)}\right)$.

Задача № 5. При условии задачи № 1 (см. рис. 6) определить проекции скорости точки M на оси Ox и Oy, модуль скорости, направляющие косинусы скорости и вектор скорости.

Решение. В задаче используются следующие единицы: длина — в см, а время — в с. Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от координаты по времени:

$$v_x=\dot{x}=-30\pi\sin\pi t;\ v_y=\dot{y}=10\pi\cos\pi t.$$

Модуль скорости определим по формуле (16)

$$v=+\sqrt{900\pi^2\sin^2\pi t+100\pi^2\cos^2\pi t}=+10\pi\sqrt{9\sin^2\pi t+\cos^2\pi t}.$$

Направляющие косинусы вычислим по формулам (17)

$$\cos\alpha_v=\frac{-3\sin\pi t}{+\sqrt{9\sin^2\pi t+\cos^2\pi t}};\ \cos\beta_v=\frac{\cos\pi t}{+\sqrt{9\sin^2\pi t+\cos^2\pi t}}.$$

Чтобы представить скорость в векторном виде, сначала помножим на орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ проекции скорости v_x и v_y и получим составляющие вектора скорости по осям

$$\vec{v}_x=-\vec{i}30\pi\sin\pi t;\ \vec{v}_y=\vec{j}10\pi\cos\pi t,$$

а потом геометрически сложим эти составляющие.

§ 7. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Мерой, характеризующей изменение скорости точки в данное мгновение, является ускорение точки.

Только при равномерном прямолинейном движении точки ее скорость сохраняет свои численное значение и направление. При неравномерном криволинейном движении скорость точки изменяется по численному значению и направлению. Изменения численного значения и направления скорости происходят с течением времени. Отношение изменения скорости точки ко времени, в течение которого оно произошло, называют *средним ускорением* точки. Предел этого отношения при стремлении промежутка времени к нулю выражает ускорение точки.

Понятие полного ускорения как величины, характеризующей изменение скорости в данное мгновение, установлено сравнительно недавно. Эта честь принадлежит Понселе, впервые начавшему применять понятие и термин «ускорение» в своих лекциях (1841), и Резалю, впервые применившему его в учебнике (1851 и 1862).

Для обозначения ускорения принята буква a* (ГОСТ 1493—47).

Ускорение имеет следующую размерность:

$$[a] = L^1T^{-2}.$$

Единицей ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате (м/с^2), но можно применять и другие единицы, кратные и дольные.

Познакомимся с выражением ускорения точки при различных способах задания ее движения. Ускорение является величиной векторной, поэтому знакомство с ним начнем с векторного способа определения движения точки.

Определение ускорения точки при векторном способе задания движения

Ускорение точки выражается первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиуса-вектора по времени: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Пусть скорость точки M (рис. 10, *а*) в данное мгновение t изображается вектором $\vec{v}$, а через некоторый достаточно малый промежуток времени в момент $t_1 = t + \Delta t$ она изменилась и стала $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Изменение скорости точки M за время Δt изобразится разностью векторов (рис. 10, *б*).

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}.$$

Возьмем отношение вектора $\Delta\vec{v}$ изменения скорости ко времени Δt, в течение которого это изменение произошло, и будем умень-

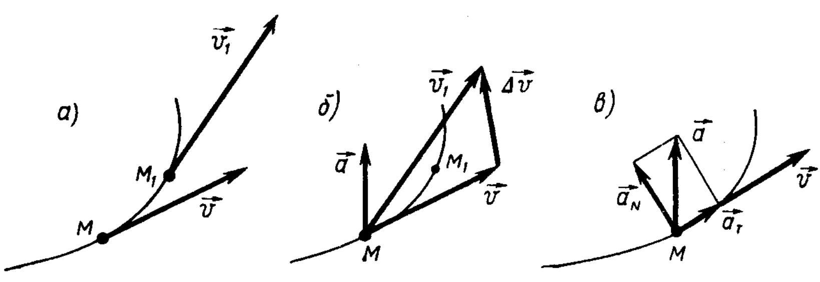


Рис. 10

шать Δt, сохраняя начало этого промежутка. Тогда отношение $\Delta\vec{v}/\Delta t$ будет изменяться, приближаясь к определенному вектору $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ как к своему пределу. Этот предельный вектор $\vec{a}$ изоб-

* Буква a (от лат. acceleratio — ускорение).

ражает ускорение точки. Следовательно, ускорение точки выражается пределом отношения изменения вектора скорости к соответствующему промежутку времени при стремлении этого промежутка к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{v}/\Delta t.$$

Первая производная от вектора скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{18}$$

выражает *ускорение точки* и характеризует изменение вектора скорости в данное мгновение по величине и направлению. При векторном способе задания движения точки вектор скорости сам выражается производной по времени от радиуса-вектора точки M, поэтому можно вектор ускорения выразить второй производной по времени от радиуса-вектора точки M

$$\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2. \tag{18'}$$

Формулы (18) и (18′) удобны при различных теоретических выводах и при доказательствах теорем, но для практических вычислений им придают более конкретный вид.

Разложение ускорения на касательное (тангенциальное) и нормальное *

Тангенциальное ускорение характеризует изменение в данное мгновение численного значения скорости, а нормальное — изменение направления скорости.

Удобно и очень наглядно раскладывать ускорение точки на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 10, *в*). Одну из них, направленную по касательной к траектории точки, называют *касательным* или *тангенциальным ускорением* (от латинского слова tangens — касающийся) и обозначают $\vec{a}_T$. Другую составляющую, перпендикулярную первой, называют *нормальным ускорением* и обозначают $\vec{a}_N$. Ускорение $\vec{a}$ точки («полное») равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N. \tag{19}$$

Иногда под тангенциальным и нормальным ускорениями точки понимают не составляющие, а проекции ускорения, т. е. не векторные, а скалярные величины. Их обозначают буквой a с теми же

---

* Термины «тангенциальное ускорение» и «нормальное ускорение» в печати появились впервые у Резаля в 1862 г.

индексами, но без стрелки. Полное ускорение определяют по формуле

$$a=+\sqrt{a_l^2+a_N^2}. \tag{20}$$

Разложение ускорения по касательной и нормали имеет физический смысл: касательная составляющая a_T ускорения направлена по касательной (как и скорость), а потому не может повлиять на направление скорости, но влияет на ее численное значение, нормальная составляющая ускорения направлена нормально (перпендикулярно) скорости, а следовательно, не может повлиять на численное значение скорости, но влияет на ее направление.

Для вывода формул тангенциального и нормального ускорений представим вектор скорости (11) как произведение его модуля на единичный вектор

$$\vec{v}=v\vec{v}^0$$

и продифференцируем его по времени, учитывая, что правая часть равенства является произведением двух переменных величин

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{v}^0+v\frac{d\vec{v}^0}{dt}.$$

Левая часть этого равенства выражает вектор полного ускорения $\vec{a}$, первый член правой части представляет собой касательное ускорение $\vec{a}_T$, а второй — нормальное $\vec{a}_N$.

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки и по модулю равно первой производной от модуля скорости по времени: $a_T = dv/dt$.

Рассмотрим первый член правой части предыдущего равенства, выражающий касательное ускорение точки:

$$\vec{a}_T=\frac{dv}{dt}\vec{v}_0.$$

Это вектор, модуль которого равен первой производной от модуля скорости по времени (или, что то же, второй производной от пути по времени),

$$\boxed{a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.} \tag{21}$$

Он направлен по касательной к траектории. Если скорость (модуль) увеличивается с течением времени, то производная dv/dt положительна ($a_T>0$), и вектор касательного ускорения $\vec{a}_T$ направлен по вектору скорости. Такое движение называют *ускоренным*.

Если же модуль скорости уменьшается с течением времени, то ее производная по времени отрицательна ($a_T<0$), и вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории против движения. Такое движение называют *замедленным*.

Каждое из этих движений называют *переменным* движением.

Если модуль скорости точки постоянен, то производная $dv/dt=0$, а потому равно нулю и касательное ускорение ($a_\tau=0$). Движение точки по любой траектории с постоянной по модулю скоростью называют *равномерным*. При равномерном движении точки касательное ускорение равно нулю.

Обратное заключение можно сделать лишь с некоторой оговоркой: если касательное ускорение постоянно равно нулю, то, следовательно, скорость постоянна и движение равномерно; если же касательное ускорение точки равно нулю не в течение всего рассматриваемого промежутка времени, а только в какое-то мгновение, то движение точки не является равномерным и равенство $dv/dt=0$ означает, что в это мгновение скорость достигла экстремального (максимального или минимального) значения.

При равномерном движении точки по любой траектории

$$a_\tau=0;\quad v=\text{const};\quad s=s_0+vt. \tag{22}$$

Формулы (22) справедливы только для равномерного движения точки и не применимы при других движениях.

Равнопеременное движение точки*. Из переменных движений точки в задачах наиболее часто встречается равнопеременное движение—это такое движение, при котором касательное ускорение остается постоянным. Формулы равнопеременного движения известны из элементарной физики:

$$a_\tau=\text{const};\quad v=v_0+a_\tau t;\quad s=s_0+v_0t+a_\tau t^2/2. \tag{23}$$

Если при равнопеременном движении точки ее начальная скорость v_0 и начальный путь s_0 равны нулю, то скорость точки можно определить в зависимости от пройденного пути s по легко получаемой из (23) формуле

$$v=\sqrt{2as}. \tag{23'}$$

При свободном падении точки с ускорением $g=9{,}81$ м/с^2 с высоты h эта формула принимает вид

$$v=\sqrt{2gh}. \tag{23''}$$

Эту формулу называют *формулой Галилея*.

Эти формулы справедливы только для равнопеременного движения точки и не применимы при других движениях.

---

* Понятие и термин «равнопеременное движение» дал Галилей (1638), но формулы (23) появились впервые спустя два века, когда установилось понятие «тангенциальное ускорение точки».

Нормальное ускорение направлено по главной нормали к траектории точки и по модулю равно отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны траектории: $a_N = v^2/\rho$.

Рассмотрим второй член правой части, выражающий, как уже было сказано, нормальное ускорение точки:

$$\vec{a}_N = v\frac{d\vec{v}^0}{dt}.$$

Пусть точка (рис. 11, *а*) движется по своей траектории и в мгновение t занимает на ней положение M, имея скорость $\vec{v}$, а через небольшой промежуток времени Δt она находится в M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$. Обозначим дугу MM_1 через Δs. Для простоты рассуждений допу-

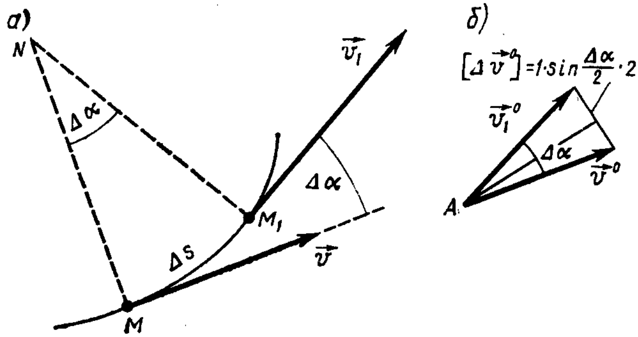


Рис. 11

стим сперва, что траектория точки является плоской кривой. Восставим в точках M и M_1 перпендикуляры к скоростям. Они пересекутся где-то в точке N.

Угол $\Delta\alpha$, составленный скоростями $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ (угол между касательными), равен углу MNM_1 между нормалями, так как стороны их взаимно перпендикулярны, и называется *углом смежности*. Если траектория точки M есть дуга окружности, то радиус $R=NM=$ $=NM_1$ этой окружности, ее дуга $\Delta s=\overset{\frown}{MM_1}$ и центральный угол $\Delta\alpha=MNM_1$ связаны между собой простым соотношением, известным из элементарной геометрии:

$$R=\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}.$$

Всякую плоскую криволинейную траекторию точки M можно представить состоящей из последовательного ряда малых дуг ds окружностей, соприкасающихся с этой траекторией. Тогда радиус ρ

каждой из этих дуг можно назвать *радиусом кривизны* в данной точке траектории и определить его по аналогичной формуле:

$$\rho=\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,\alpha}.$$

В каждой точке плоской траектории радиус кривизны ρ определяется по абсолютной величине и знаку.

Как показано в курсе математики, производная угла наклона касательной по дуге есть кривизна кривой в точке M, величина, обратная радиусу кривизны,

$$\mathrm{d}\,\alpha/\mathrm{d}\,s=k=1/\rho.$$

Отложим от какой-либо неподвижной точки A (рис. 11, *б*) единичные векторы, $\vec{v}^0$ и $\vec{v}_1^{\,0}$, построим равнобедренный векторный треугольник, боковые стороны которого по модулю равны единице, а основанием является вектор $\Delta\vec{v}^0$, выражающий изменение единичного вектора $\vec{v}^0$ за время Δt. Модуль $|\Delta\vec{v}^0|$ определим как основание равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны единице, а угол при вершине $\Delta\alpha$:

$$|\Delta\vec{v}^0| = 1\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\,2.$$

Разделив это равенство на Δt, перейдем к пределу при Δt, стремящемся к нулю, причем, для удобства вычислений умножим числитель и знаменатель правой части на $\Delta\alpha/2$ и на Δs:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}^0|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta\alpha/2)\cdot 2\cdot(\Delta\alpha/2)}{(\Delta\alpha/2)\,\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta\alpha/2)}{(\Delta\alpha/2)}\lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

или

$$\frac{|\mathrm{d}\,\vec{v}^0|}{\mathrm{d}\,t}=1\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v=\frac{v}{\rho}.$$

Следовательно, второй член правой части равенства по модулю равен

$$v\cdot|\mathrm{d}\,\vec{v}^0|/\mathrm{d}\,t=v^2/\rho,$$

$$\boxed{a_N=\frac{v^2}{\rho}.} \qquad (24)$$

Нетрудно определить и направление этого вектора. При стремлении Δt к нулю точка M_1 стремится к M, угол $\Delta\alpha$ при вершине равнобедренного треугольника стремится к нулю, а каждый из углов при основании стремится к 90°. В пределе этот вектор, по модулю равный v^2/ρ, будет направлен от точки M перпендикулярно скорости, конечно, в сторону вогнутости траектории, куда поворачивается вектор скорости.

Тот же результат получим, обобщая приведенное доказательство на случай, если точка движется по траектории двоякой кривизны, когда касательные к траектории, проведенные в двух различных точках M и M_1, вообще говоря, не пересекаются. Нужно лишь принять во внимание, что, определяя ускорение, рассматриваем предельное состояние при $\Delta t \to 0$. При этом M_1 стремится к своему пределу M, и угол $\Delta\alpha$ становится углом между касательными в двух сколь угодно близких точках. Плоскость, в которой лежат эти касательные, называют *соприкасающейся плоскостью* *.

Итак, в этой плоскости расположен вектор скорости точки в данное мгновение и в мгновение бесконечно близкое, когда точка M_1 сколь угодно близка к точке M. Ускорение характеризует изменение скорости точки в данное мгновение, следовательно, вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости. Нормальная составляющая ускорения направлена перпендикулярно скорости в этой плоскости по так называемой *главной нормали* к траектории в сторону вогнутости, и при всяком криволинейном движении по модулю равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории.

Если единичный вектор, направленный по главной нормали в сторону вогнутости траектории, обозначим $\vec{n}^0$, то

$$\vec{a}_N = \vec{n}^0 v^2/\rho. \qquad (24')$$

Если движение точки прямолинейное, то радиус кривизны траектории (прямой линии) равен бесконечности и нормальное ускорение равно нулю. Обратное заключение можно сделать лишь с некоторой оговоркой: если в каждое мгновение данного промежутка времени нормальное ускорение движущейся точки равно нулю, то точка движется по прямой; если же нормальное ускорение точки не постоянно равно нулю, а только в какое-либо мгновение, то движение точки не является прямолинейным и равенство $v^2/\rho = 0$ означает, что в это мгновение движущаяся точка или проходит через точку перегиба своей траектории или же направление скорости меняется на обратное.

---

* Термин «соприкасающаяся плоскость» впервые применил Ив. Бернулли в 1728 г.

Определение ускорения точки при естественном способе задания движения

Естественными осями называют прямоугольную систему осей, направленных по касательной, главной нормали и бинормали к траектории.

Естественный трехгранник. Если траектория и закон движения точки заданы, то при исследованиях часто пользуются *естественными координатами*. Во всякой точке к кривой можно провести только одну касательную и бесчисленное множество (целую плоскость) нормалей. Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, называют *главной нормалью*, а перпендикулярную к ней — *бинормалью* *. Пусть точка движется по какой-либо неплоской траектории, представленной на рис. 12 винтовой линией, и в данное мгновение находится в точке M своей траектории. Построим прямоугольную систему координат с началом в этой точке M, направив ось абсцисс $M\tau$ по касательной, ось ординат Mn по главной нормали и ось аппликат Mb по бинормали. Такие координатные оси, называемые осями *естественного трехгранника*, можно построить в каждой точке траектории. Выберем положительные направления на осях. В механике обычно принимают направление вектора скорости за положительное направление касательной, положительное направление главной нормали считают в сторону вогнутости кривой, а бинормаль направляют так, чтобы получившаяся система прямоугольных координат являлась правой системой.

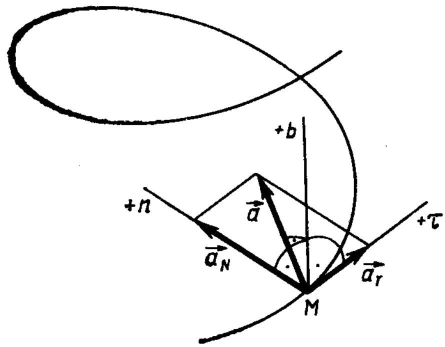


Рис. 12

Если точка меняет свое движение на возвратное, например, если точка совершает колебательные движения на каком-либо участке кривой, то обычно не меняют положительного направления естественных осей, а приписывают скорости знак минус, если точка движется в сторону уменьшения дуговой координаты. Так, в естественном способе задания движения точки, вместо модуля скорости появилась «алгебраическая скорость», по абсолютной величине равная модулю, но имеющая собственный знак («+» или «—»). Это

* Термин «бинормаль» принадлежит Барре де Сен-Венану.

обстоятельство сказывается и на определении касательного ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

Проекция ускорения на касательную характеризует изменение в данное мгновение алгебраической скорости: $\tilde{a}_T=\dot{\tilde{v}}=\ddot{\tilde{s}}$; проекция ускорения на главную нормаль выражает нормальное ускорение $a_N=v^2/\rho$, а проекция ускорения на бинормаль равна нулю: $a_b=0$.

Проекция ускорения на естественные оси. Как было только что показано, вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости. Поэтому проекция ускорения на бинормаль

$$a_b=0. \tag{25}$$

При разложении ускорения по осям естественного трехгранника получаем две составляющие (касательное ускорение и нормальное ускорение), как и при векторном способе задания движения. Однако при естественном способе задания движения касательное ускорение понимают несколько иначе, чем при других способах задания движения.

Если движение точки задано в естественной форме, т. е. заданы траектория и дуговая координата $\tilde{s}=\tilde{s}(t)$, то первая производная дуговой координаты по времени определяет алгебраическую скорость [формула (12)] точки, вторая производная от дуговой координаты по времени является первой производной от алгебраической скорости и характеризует быстроту изменения алгебраической скорости. При этом способе задания движения ее тоже называют касательным, или тангенциальным, ускорением

$$\tilde{a}_T=\dot{\tilde{v}}=\ddot{\tilde{s}}. \tag{26}$$

Над буквой a следует ставить тильду, чтобы не смешивать с касательным ускорением [формула (21)]. По абсолютной величине касательные ускорения, определенные по формулам (21) и (26), всегда равны между собой

$$|a_T| = |\tilde{a}_T|,$$

но могут отличаться по знаку. При естественном способе задания движения точки знак («+» или «—») касательного ускорения [равенство (26)] не свидетельствует об ускоренном или замедленном движении точки. Критерием ускоренного движения здесь является условие, что знаки алгебраической скорости и касательного ускорения $\vec{a}_T$ одинаковы. При разных знаках движение точки замедленное.

Другая составляющая (нормальное ускорение) характеризует изменение в данное мгновение вектора скорости по направлению.

Эта составляющая направлена по главной нормали и по модулю определяется выражением (24)

$$a_N = v^2/\rho.$$

Здесь v — модуль скорости; ρ — радиус кривизны траектории. Ввиду того что квадрат модуля скорости равен квадрату алгебраической скорости, при естественном способе определения движения точки нормальное ускорение выражают формулой (24).

Абсолютную величину полного ускорения определяют по формуле

$$a = +\sqrt{a_T^2 + a_N^2},$$

или

$$a = +\sqrt{\tilde{a}_T^2 + \tilde{a}_N^2}.$$

Нетрудно определить направление вектора ускорения при естественном способе задания движения точки. Вектор находится в соприкасающейся плоскости и составляет с главной нормалью угол, определяемый по тангенсу,

$$\operatorname{tg} \mu = a_T/a_N. \qquad (27)$$

При любом движении вектор ускорения лежит с той же стороны касательной, с которой расположена траектория.

Определение ускорения точки при координатном способе задания движения

Проекция ускорения точки на координатную ось равна первой производной по времени от проекции скорости на ту же ось или второй производной от текущей координаты по времени: $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = a \cos \alpha_a$.

Ускорение проекции и проекция ускорения. Если точка M движется произвольным образом относительно осей координат $xOyz$, то, как было только что показано, ее проекции P, Q и R на оси Ox, Oy и Oz движутся со скоростями $v_P = v_x = \dot{x}$; $v_Q = v_y = \dot{y}$; $v_R = v_z = \dot{z}$.

Для определения ускорения этих точек остается лишь продифференцировать эти равенства по времени:

$$a_P = a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_Q = a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_R = a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Чтобы определить полное ускорение a точки M напомним, что теорема о равенстве алгебраической скорости проекции точки на неподвижную ось и проекции скорости той же точки на ту же ось (с. 32) справедлива для любого момента времени. Следовательно, эта теорема относится не только к скорости, но и к ее изменению в любое мгновение, т. е. к ускорению *. Это значит, что справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \mathrm{d}\, v_x/\mathrm{d}\, t = \mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}\, t^2 = a \cos \alpha_a, \\ a_y &= \mathrm{d}\, v_y/\mathrm{d}\, t = \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}\, t^2 = a \cos \beta_a, \\ a_z &= \mathrm{d}\, v_z/\mathrm{d}\, t = \mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}\, t^2 = a \cos \gamma_a, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

где $\cos\alpha_a$, $\cos\beta_a$ и $\cos\gamma_a$ — направляющие косинусы ускорения.

Можно рассматривать величины, определяемые формулами (28), как векторы, направленные по осям координат:

$$\vec{a}_x = \vec{i} a_x;\ \vec{a}_y = \vec{j} a_y;\ \vec{a}_z = \vec{k} a_z.$$

Эти векторы являются составляющими ускорения $\vec{a}$.

Модуль ускорения точки равен квадратному корню из суммы квадратов проекций ускорений на оси координат:

$$\boldsymbol{a} = +\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2 + \boldsymbol{a}_z^2}$$

Модуль ускорения при координатном способе задания движения точки. Возведем в квадрат каждое из следующих равенств:

$$a_x = a \cos \alpha_a;\ a_y = a \cos \beta_a;\ a_z = a \cos \gamma_a$$

и сложим их

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2(\cos^2\alpha_a + \cos^2\beta_a + \cos^2\gamma_a),$$

но сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, поэтому

$$a = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (29)$$

Перед радикалом поставлен знак «+», потому что модуль вектора величина положительная. Равенство (29) можно прочитать так: абсолютная величина ускорения точки равна квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат. Учитывая, что проекция ускорения точки на координатную ось равна второй производной от текущей координаты по времени, можно переписать равенство (29) в следующем виде:

$$\boxed{a = +\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.} \qquad (29')$$

Направление ускорения можно определить по направляющим косинусам ускорения: $\cos\alpha_a = a_x/a$; $\cos\beta_a = a_y/a$; $\cos\gamma_a = a_z/a$.

Направляющие косинусы ускорения. Направление ускорения определяют по косинусам углов, составляемых положительным направлением осей координат с вектором ускорения. Формулы направляющих косинусов получаем из равенств (28):

$$\cos\alpha_a = a_x/a;\ \cos\beta_a = a_y/a;\ \cos\gamma_a = a_z/a. \qquad (30)$$

* Теорема о равенстве проекции ускорения и ускорения проекции принадлежит Резалю (1862).

Если точка движется в плоскости xOy, то $\gamma_a=90°$, $\cos\gamma_a=0$, $\cos\alpha_a=\sin\beta_a$, $\cos\beta_a=\sin\alpha_a$.

Определение касательного (тангенциального) и нормального ускорений точки при координатном способе задания движения

Касательное (тангенциальное) и нормальное ускорения можно определить через производные координат по формулам:

$$a_T=\frac{\dot x\ddot x+\dot y\ddot y}{+\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}};$$

$$a_N=\frac{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}{+\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}.$$

Пусть точка M движется по траектории (рис. 13), расположенной в плоскости xOy. Вектор скорости направлен по касательной, и вектор ускорения лежит от касательной с той же стороны, что и траектория (слева).

Касательное ускорение, как известно, характеризует изменение модуля скорости, оно соответствует изменению вектора скорости вдоль его направления, и для определения касательного ускорения надо спроецировать вектор ускорения на направление вектора скорости, а для этого модуль ускорения помножить на косинус угла δ между направлениями скорости и ускорения:

$$a_T=a\cos\delta.$$

Угол δ, как внутренний угол треугольника, равен внешнему α_a без другого внутреннего α_v, поэтому

$$\cos\delta=\cos(\alpha_a-\alpha_v)=\cos\alpha_a\cos\alpha_v+$$

$+\sin\alpha_a\sin\alpha_v$, или (так как $\sin\alpha_a=$ $=\cos\beta_a$ и $\sin\alpha_v=\cos\beta_v$); $\cos\delta=$

$$=\cos\alpha_a\cos\alpha_v+\cos\beta_a\cos\beta_v.$$

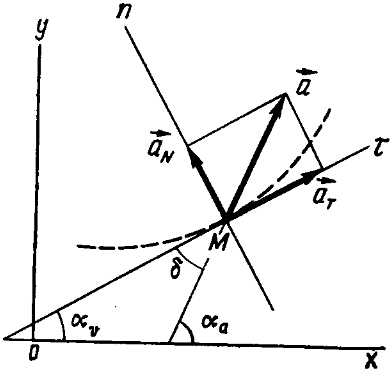


Рис. 13

Подставив сюда вместо направляющих косинусов их выражения (17) и (30), получим

$$\cos\delta=(a_xv_x+a_yv_y)/(av).$$

и, умножив на a, найдем тангенциальное ускорение

$$\boxed{a_T=(v_xa_x+v_ya_y)/v.} \qquad (31)$$

Формула (31) удобна при решении задач. Она выведена для движения точки в плоскости xOy, но ее можно распространить на всякое движение точки. Для этого продифференцируем по времени квадрат полной скорости точки $(v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2)$

$$2v\frac{dv}{dt}=2v_x\frac{d\,v_x}{d\,t}+2v_y\frac{d\,v_y}{d\,t}+2v_z\frac{d\,v_z}{d\,t}$$

и получим первую производную модуля скорости по времени

$$a_T=(v_xa_x+v_ya_y+v_za_z)/v. \tag{31'}$$

Равенства (31) и (31′) выражают быстроту изменения модуля скорости, как и равенство (21), и могут отличаться только знаком от выражения (26), определяющего быстроту изменения алгебраической скорости точки. Напомним, что в числителе формул (31) или (31′) проекции скорости имеют свой знак, а знаменатель существенно положителен; поэтому знак касательного ускорения в формулах (31) и (31′) определяется знаком числителя. Естественно, что положительный знак касательного ускорения соответствует возрастанию модуля скорости и, следовательно, ускоренному движению, а отрицательный знак соответствует замедленному движению точки.

Нормальное ускорение соответствует изменению вектора скорости перпендикулярно его направлению, и для определения нормального ускорения надо спроецировать вектор ускорения на главную нормаль, а для этого в случае плоской траектории надо модуль ускорения помножить на $\sin\delta=\sin(\alpha_a-\alpha_v)$:

$$a_N=a\sin\delta=a\sin(\alpha_a-\alpha_v),$$

или

$$a_N=a(\sin\alpha_a\cos\alpha_v-\cos\alpha_a\sin\alpha_v).$$

Эти тригонометрические величины хорошо известны:

$$\sin\alpha_a=\cos\beta_a=a_y/a,\ \cos\alpha_a=a_x/a,$$

$$\cos\alpha_v=v_x/v;\ \sin\alpha_v=\cos\beta_v=v_y/v.$$

Подставляя эти значения и сокращая на a, получим

$$\boxed{a_N=(v_xa_y-a_xv_y)/v.} \tag{32}$$

Здесь, как и в формуле (31), числитель имеет собственный знак, а знаменатель всегда положителен. Знак нормального ускорения совпадает со знаком радиуса кривизны плоской кривой, как это принято в дифференциальной геометрии. При правой системе координат положительный знак нормального ускорения a_N означает, что траектория точки лежит слева от вектора скорости, и чтобы определить направление нормального ускорения, надо вектор скорости повернуть на 90° против хода часовой стрелки, а если

$a_x<0$, то $\vec{v}$ надо повернуть на 90° по ходу часовой стрелки, чтобы получить направление $\vec{a}_N$.

Иногда требуется определить радиус кривизны траектории точки, движение которой задано в координатной форме. Если траектория плоская, то приравнивая равенство (32) к выражению (24)

$$(v_x a_y - a_x v_y)/v = v^2/\rho,$$

получаем выражение для радиуса кривизны

$$\rho = v^3/(v_x a_y - a_x v_y), \tag{33}$$

или, обозначая производные по времени точками, имеем

$$\rho = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}/(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}). \tag{33'}$$

Задача № 6. При условии задачи № 1 (см. рис. 6) определить: 1) проекции ускорения точки M на оси Ox и Oy; 2) модуль ускорения точки M; 3) направляющие косинусы ускорения точки M; 4) касательное и нормальное ускорение точки M.

Решение. Согласно формулам (28) для получения проекций ускорения на оси координат продифференцируем по времени проекции скорости, полученные при решении задачи № 5 (см. с. 35).

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -30\pi^2 \cos \pi t; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -10\pi^2 \sin \pi t.$$

Ускорение определим по формуле (29):

$$a = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = +10\pi^2 \sqrt{9 \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t},$$

а направляющие косинусы ускорения — по формулам (30):

$$\cos \alpha_a = -3 \cos \pi t/\left(+\sqrt{9 \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t}\right);$$

$$\cos \beta_a = -\sin \pi t/\left(+\sqrt{9 \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t}\right).$$

Чтобы определить касательное ускорение, можно согласно формуле (21) продифференцировать по времени модуль скорости или же воспользоваться формулой (31). Второй путь значительно легче, к тому же все входящие в (31) величины уже определены в этой и в предыдущей задаче:

$$a_T = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{30^2\pi^3 \sin \pi t \cos \pi t - 10^2\pi^3 \cos \pi t \sin \pi t}{10\pi \sqrt{9 \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t}},$$

или

$$a_T = 40\pi^2 \sin 2\pi t/\left(\sqrt{8 \sin^2 \pi t + 1}\right).$$

Если касательное ускорение положительно, то модуль скорости возрастает и движение точки ускоренное. Из полученного равенства видно, что за время, пока точка M опишет эллипс (за 2 с), движение ее будет меняться: от $t=0$ до $t=0{,}5$ с — движение ускоренное, затем от $t=0{,}5$ с до $t=1$ с — движение замедленное, следующие 0,5 с — ускоренное и следующие 0,5 с — замедленное. —

В условии задачи № 1 задано движение точки M в плоскости xOy. В таких случаях нормальное ускорение лучше всего определять по формуле (32)

$$a_N = (v_x a_y - a_x v_y)/v = 300\pi^3/(10\pi\sqrt{9 \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t}),$$

или

$$a_N = 30\pi^2/\left(\sqrt{1 + 8 \sin^2 \pi t}\right).$$

В знаменателе формулы (32) имеем модуль скорости, т. е. существенно положительную величину. Следовательно, знак a_N определяется знаком числителя. В полученном соотношении и числитель существенно положителен. Это означает, что траектория точки M во все время движения лежит с левой стороны от вектора скорости.

Задача № 7 (М)*. Найти касательное и нормальное ускорения точки, движение которой выражается уравнениями

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t - 0{,}5 g t^2.$$

Решение. Найдем проекции скорости и ускорения на оси координат

$$v_x = \dot{x} = \alpha; \quad a_x = \ddot{x} = 0; \quad v_y = \dot{y} = \beta - gt; \; a_y = \ddot{y} = -g.$$

Подставляя найденные величины в (31), найдем касательное ускорение

$$a_T = -g(\beta - gt)/v.$$

Подставляя те же величины в формулу (32), найдем нормальное ускорение

$$a_N = -g\alpha/v.$$

До мгновения $t = \beta/g$ касательное ускорение отрицательно и, следовательно, движение точки замедленное. Затем a_T становится положительным и движение ускоренным.

Нормальное ускорение точки во все время ее движения отрицательное. Это означает, что траектория точки расположена с правой стороны от вектора скорости. Полагаем α, β и g положительными.

Ответ. $a_T = -g(\beta - gt)/v$; $a_N = -g\alpha/v$, где v — скорость.

Ответ в задачнике И. В. Мещерского ($a_N = g\alpha/v$) дан без учета знака проекции ускорения на нормаль.

Задача № 8. Камень брошен с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. Написать уравнения и построить графики: 1) пути, модуля скорости, касательного ускорения как первой производной скорости по времени; 2) расстояния, алгебраической скорости и касательного ускорения как первой производной алгебраической скорости по времени. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Решение. Вначале камень поднимается равнозамедленно; длину пути выразим уравнением

$$s = v_0 t - g t^2/2; \quad s = 30t - 5t^2.$$

Через 3 с камень, поднявшись на максимальную высоту (45 м), начнет опускаться по той же вертикальной прямой. Движение камня станет равноускоренным, без начальной скорости, но с начальным значением пути (45 м), и с этого мгновения до конца движения (т. е. с $t' = 3$ с и до $t' = 6$ с) путь камня, продолжая увеличиваться, будет выражаться другим уравнением

$$s = s_0 + g t'^2/2; \quad s = 45 + 5(t - 3)^2.$$

---

* Здесь и далее буква М при номере задачи означает, что задача имеется в «Сборнике задач» И. В. Мещерского.

К концу движения (при $t'=6$ с) камень проделает путь 90 м. График пути изображен на рис. 14, *а*.

По графику пути легко построить график модуля скорости, т. е. график

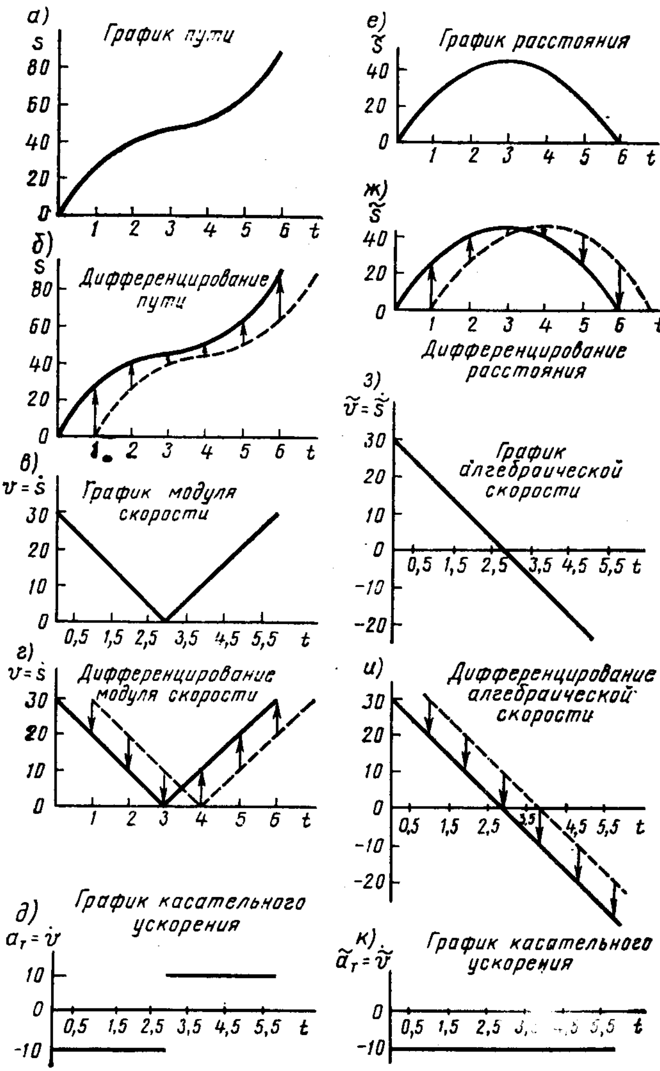


Рис. 14

первой производной пути по времени. Для графического дифференцирования существуют различные методы, более подробное изучение которых не входит в этот курс. Здесь применим для наглядности один из методов, называемый *мето-*

дом сдвига. На графике пути рядом с имеющейся кривой нарисуем пунктиром точно такую же кривую, как бы сдвинув график пути вправо на небольшой интервал Δt. Чем меньше Δt, тем точнее получится график скорости. В данном примере достаточно принять $\Delta t = 1$ с (рис. 14, *б*). Отметим стрелками приращение пути за каждую секунду. Из графика видно, что за первую секунду камень пролетел ($\Delta s = 25-0$) м. Разделив Δs на Δt (на 1 с), получим среднюю скорость камня ($v_{ср} = 25$ м/с). Средняя скорость за вторую секунду $\Delta s/\Delta t = (40-25)/1 = 15$ м/с и т. д. Соответствующие координаты отложим на графике (рис. 14, *в*) модуля скорости (на тахограмме), отнеся, разумеется, средние значения скорости к средним значениям времени ($t_1 = 0{,}5$ с, $t_2 = 1{,}5$ с и т. д.). Эти точки тахограммы соединим плавной кривой (в примере отрезками прямой). Первые 3 с движение камня равнозамедленное. Через 3 с скорость камня равна нулю, затем скорость камня увеличивается и в момент падения на землю скорость его равна начальной скорости 30 м/с. Вся тахограмма лежит в первой четверти, так как модуль скорости всегда положителен.

Дифференцируя тем же методом модуль скорости (рис. 14, *г*), получим тангенциальное ускорение. В данном примере оно постоянно по модулю (ускорение при свободном падении), но отрицательно при равнозамедленном движении и положительно при равноускоренном (рис. 14, *д*).

Построим графики для тех же условий, но при естественном способе задания движения. Траектория — вертикальная прямая. Начало отсчета выберем на поверхности Земли в точке, где камень получил начальную скорость, и за положительное направление примем направление вверх. Расстоянием камня (или его дуговой координатой) в таком случае будет высота камня над поверхностью Земли, а уравнением движения по траектории — $\tilde{s} = 30t - 5t^2$ (рис. 14, *е*). Первые 3 с расстояние (или дуговая координата) увеличивается, достигая при $t = 3$ с значения $\tilde{s} = +45$ м, затем расстояние камня (от начальной точки) уменьшается, и когда камень вернется к исходной точке, расстояние станет равным нулю. *Графиком расстояния* (иначе называемом графиком движения и графиком дуговой координаты) в данном примере является парабола.

Продифференцируем этот график методом сдвига (рис. 14, *ж*); для этого сдвинем кривую вправо на малую величину Δt и подсчитаем соответствующие $\Delta\tilde{s}$. Из графика видно, что скорость (алгебраическая) сначала уменьшалась, затем (при $t = 3$ с) стала равна нулю, а в дальнейшем стала отрицательной. График алгебраической скорости представлен на рис. 14, *з*. Дифференцируя алгебраическую скорость тем же графическим методом (рис. 14, *и*), найдем, что a_τ камня при естественном способе определения движения постоянно и равно $-g$ (рис. 14, *к*). При замедленном движении знаки алгебраической скорости и тангенциального ускорения различны, а при ускоренном одинаковы.

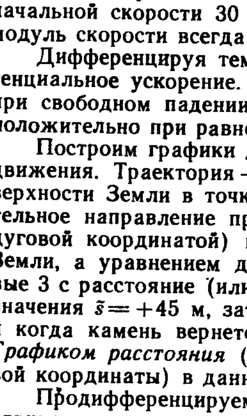


Рис. 15

Задача № 9. (№ 59, *С. М. Тарг.* Краткий курс теоретической механики. Физматгиз, 1958 г. и последующие издания.) Тяжелое тело, размерами которого можно пренебречь, сброшено с большой высоты с горизонтальной скоростью v_0 и движется согласно уравнениям $x = v_0 t$; $y = \frac{1}{2} g t^2$. Найти траекторию, скорость, касательное и нормальное ускорения в любом положении, выразив их через скорость тела в этом положении.

Решение. Определив из первого уравнения t и подставив во второе, найдем уравнение траектории:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Траектория — парабола (рис. 15). Дифференцируя уравнения движения по времени, найдем проекции скорости и по ним полную скорость:

$$v_x = \frac{d\,x}{d\,t} = v_0;\quad v_y = \frac{d\,y}{d\,t} = gt;$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

В начальное мгновение скорость точки $v=v_0$, а затем с течением времени скорость непрерывно возрастает. Из полученного равенства определим время t, в течение которого тело приобретает скорость v:

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Вторично дифференцируя уравнения движения точки, найдем проекции ускорения на оси координат и полное ускорение

$$a_x = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = 0;\quad a_y = \frac{d^2\,y}{d\,t^2} = g;\quad a = g.$$

Точка движется с постоянным по модулю и направлению ускорением, параллельным оси Oy. Несмотря на то, что $a=\mathrm{const}$, движение точки не является равнопеременным, так как условием равнопеременного движения является не условие $a=\mathrm{const}$, а условие $a_T=\mathrm{const}$. В данном случае, очевидно, a_T непостоянно.

Дифференцируя по времени величину полной скорости, или непосредственно по формуле (31) получим касательное ускорение

$$a_T = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}.$$

Подставляя вместо t его найденное значение, выразим касательное ускорение a_T через скорость v:

$$a_T = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Отсюда следует, что в начальное мгновение, когда $v=v_0$, касательное ускорение равнялось нулю. Затем с увеличением v касательное ускорение a_T растет и в пределе стремится к полному ускорению g.

Чтобы определить нормальное ускорение, обратимся к формуле (32):

$$a_N = \frac{v_x a_y - a_x v_y}{v} = \frac{v_0 g}{v}.$$

В начальное мгновение (при $t=0$ и $v=v_0$) $a_N=g$, а затем с увеличением скорости точки a_N убывает, стремясь в пределе к нулю.

Обратим внимание на то, что задача решена в левой системе координат (см. рис. 15), а формула (32) выведена для правой системы. Поэтому положительный знак a_N означает здесь, что траектория точки лежит справа от вектора скорости и, чтобы определить направление a_N в этой задаче, надо вектор скорости повернуть на 90° по часовой стрелке.

Ответ. Парабола: $y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$; $v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$; $a=g$; $a_T=g\sqrt{1-\frac{v_0^2}{v^2}}$; $a_N=\frac{v_0g}{v}$.

Глава IV
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 8. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела в пространстве определяется движением трех его точек, не лежащих на одной прямой.

О движении твердого тела. Далеко не во всех задачах кинематики можно пренебрегать размерами тела и принимать его за точку. Для тех случаев, когда расстояние между частицами тела не изменяется, но по условиям задачи приходится учитывать движение его различных частей, разработан раздел кинематики, называемый *кинематикой твердого* (неизменяющегося) *тела.*

Чтобы определить положение твердого тела относительно системы отсчета, отметим в нем какие-либо три точки, например точки A, B и C. Если закрепить две из них, то оно сможет поворачиваться вокруг прямой, проходящей через эти две точки. Если закрепить еще и третью точку, не лежащую на той же прямой, то все тело окажется закрепленным. Таким образом, положение твердого тела определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Соединим эти три точки прямолинейными отрезками. Образовавшийся треугольник ABC в кинематике является моделью твердого тела, и движение этого треугольника вполне определяет движение всякого жестко связанного с ним твердого тела.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Основная теорема кинематики твердого тела о скоростях его точек. Через какие-либо две точки A в B (рис. 16) движущегося твердого тела проведем прямую и спроецируем на нее скорости этих точек (тело на рисунке не изображено).

Существует теорема о том, что проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, всегда равны между собой. Из множества имеющихся доказательств этой теоремы приведем следующее логическое доказательство: проекции скорости двух точек A и B абсолютно твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой, так как в противном случае расстояние AB между этими точками изменялось бы, что невозможно в твердом теле. Следовательно,

$$v_A \cos(\widehat{v_A AB}) = v_B \cos(\widehat{v_B AB}). \qquad (34)$$

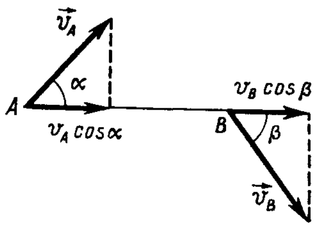


Рис. 16

Эта теорема относится, разумеется, не только к двум точкам A и B, а ко всем точкам, составляющим прямую, и может быть сформулирована так: проекции на какую-либо ось, проведенную в твердом теле, скоростей точек этой оси равны между собой. Эта теорема принадлежит Грасгофу (см.: *Голубева О. В.* Теоретическая механика. М., Высшая школа, 1976).

§ 9. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Поступательным движением называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, взятая в теле, остается параллельной своему начальному направлению.

Наиболее простым движением тела является *поступательное,* при котором всякая проведенная в теле прямая не меняет своего направления. Для выяснения, является ли движение тела поступательным, нет необходимости проводить в теле множество прямых и проверять, не меняет какая-либо из них направления во время движения тела. Движение тела вполне определяется движением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Следовательно, нужно провести не меньше двух прямых. Конечно, эти прямые должны быть непараллельны между собой.

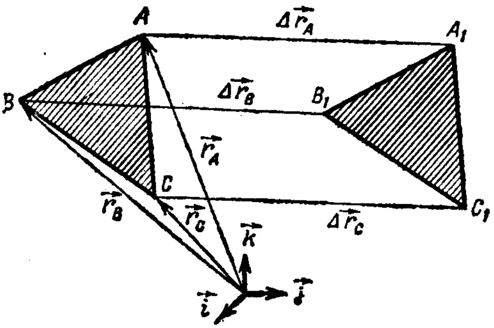


Рис. 17

Из определения видно, что поступательно двигаться может только тело. Одна точка не может двигаться поступательно. Вместе с тем поступательное движение твердого тела вполне характеризуется движением любой из его точек. Докажем это.

Пусть тело (рис. 17) движется поступательно относительно системы отсчета. Отметим в теле три точки A, B и C, выбрав их произвольно, не на одной прямой. Проведем радиусы-векторы $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ и $\vec{r}_C$ этих точек и построим треугольник ABC — кинематическую модель тела (само тело на рисунке не изображено). Через некоторое время Δt тело переместится и треугольник займет положение $A_1B_1C_1$. Соединив векторами начальные и конечные (для промежутка времени) положения точек, определим их перемещения:

$$\Delta\vec{r}_A=\overrightarrow{AA_1};\quad \Delta\vec{r}_B=\overrightarrow{BB_1};\quad \Delta\vec{r}_C=\overrightarrow{CC_1}.$$

При поступательном движении тела стороны треугольника не меняют направлений, а потому получившаяся на рисунке поверхность является треугольной призмой, и перемещения точек A, B и C равны между собой как противоположные стороны параллелограммов. Точки A, B и C выбраны произвольно, а потому доказательство справедливо для всех точек тела:

$$\Delta\vec{r}_A=\Delta\vec{r}_B=\Delta\vec{r}_C=\Delta\vec{r}. \tag{35}$$

Векторы перемещения всех точек при поступательном движении тела равны между собой. Отсюда следует, что траектории всех точек одинаковы и, чтобы определить траекторию точки B, достаточно сместить траекторию точки A на $\overrightarrow{AB}$, а чтобы найти траекторию точки C, достаточно сместить траекторию точки A на $\overrightarrow{AC}$ или траекторию точки B на $\overrightarrow{BC}$. Именно поэтому поступательное движение иногда различают по траекториям, описываемым точками тела. Так, например, различают круговое поступательное движение (спарник AB шарнирного параллелограмма, рис. 18, *а*), движение прямолинейное возвратно-поступательное (толкатель, рис. 18, *б*) и т. п.

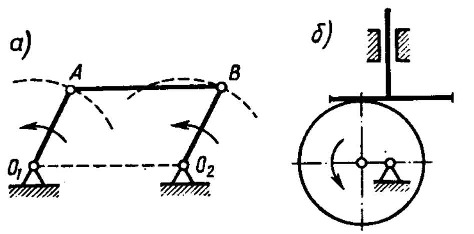


Рис. 18

Задать движение тела — это значит дать положение его точек для каждого мгновения. Точки поступательно движущегося тела движутся одинаково, и поступательное движение всего тела вполне характеризуется движением какой-либо одной из его точек. Следовательно, *уравнение движения* какой-либо одной точки является вместе с тем *уравнением поступательного движения тела*. Так, если выбрать в теле какую-то точку E, то уравнение поступательного движения тела в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}_E=\vec{r}_E(t), \tag{36}$$

а в прямоугольных координатах

$$x_E = x_E(t);\; y_E = y_E(t);\; z_E = z_E(t). \tag{37}$$

Если тело движется поступательно, то все его точки имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.

Определим скорости точек поступательно движущегося тела из равенства (35)

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt};$$

первая производная по времени от радиуса-вектора выражает скорость точки. Убеждаемся, что скорости точек A, B и C одинаковы. Эти точки взяты произвольно, следовательно, одинаковы скорости всех точек

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}. \tag{38}$$

Одинаковость скоростей не следует понимать как их постоянство, как неизменяемость во времени. Если тело движется поступательно, то в данное мгновение скорости всех точек тела одинаковы; с течением времени скорости могут измениться. Но если изменится скорость одной точки, то на столько же изменятся скорости всех других точек тела, и они опять-таки останутся одинаковыми. Одинаковость скоростей всех точек тела — необходимый, но недостаточный признак поступательного движения тела. Может оказаться, что в какое-то мгновение скорости всех точек тела одинаковы, но в следующее мгновение они различны. Так, например, движение шатуна AB кривошипно-ползунного механизма не является поступательным, но при некоторых положениях механизма (рис. 19) скорости всех точек шатуна одинаковы.

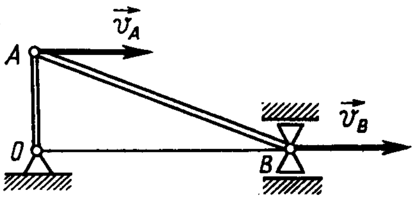


Рис. 19

При поступательном движении тела скорости его точек в каждое мгновение не только одинаковы, но и одинаково изменяются. Продифференцируем по времени предыдущее равенство

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}. \tag{39}$$

При поступательном движении тела вектор ускорения точки A равен вектору ускорения всякой другой точки тела.

Итак, при поступательном движении тела его точки описывают одинаковые траектории, в каждое мгновение имеют одинаковые векторы скоростей и одинаковые векторы ускорений. Отсюда следует, что в любое данное мгновение равны между собой модули скоростей всех точек, модули ускорений, соответствующие направляющие косинусы, а также тангенциальные и нормальные ускорения всех точек и пр. Вследствие полной тождественности движения всех точек большинство задач по кинематике поступательного движения тела решаются методами кинематики точки. Движение одной точки не может быть ни поступательным, ни вращательным, потому что точка не имеет размеров. Так, точка A (см. рис. 18, *а*) соединения спарника AB с кривошипом O_1A движется по окружности. Эта точка принадлежит двум телам и по ее движению можно охарактеризовать поступательное движение спарника AB и вращение кривошипа O_1A. Но сама точка A не может совершать ни поступательных, ни вращательных движений, так как не имеет размеров.

§ 10. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращением вокруг неподвижной оси называют движение твердого тела, две точки которого (или две точки неизменно связанные с телом) остаются неподвижными в данной системе отсчета.

Вращательное движение. Как было показано, для определения движения твердого тела достаточно определить движение трех его точек, не лежащих на одной прямой. Пусть во время движения тела любые две его точки, например, O и O_1 остаются неподвижными. Тогда движение тела можно определить движением любой третьей точки, принадлежащей телу и не лежащей на одной прямой с точками O и O_1. Выберем эту точку произвольно и, соединив все три точки прямолинейными отрезками, получим треугольник. Так как точки O и O_1 неподвижны, то неподвижна и сторона OO_1 этого треугольника, и движение треугольника, а также и всего тела определится поворотом плоскости треугольника вокруг его стороны OO_1. Третья точка выбрана произвольно, следовательно, поворачивается вокруг прямой OO_1 всякая плоскость, проведенная в теле через эту прямую. Такое движение тела называют *вращательным движением*, или, коротко, *вращением*, а неподвижную прямую OO_1, вокруг которой вращается тело,— *осью вращения*.

Ось вращения может проходить и за пределами тела. Так, например, Луна, двигаясь вокруг Земли, повернута к ней всегда одной стороной. Движение Луны по отношению к Земле можно назвать вращением. Ось вращения проходит за пределами Луны через центры круговых траекторий ее точек.

Если движение тела определять по движению его точек, то вращение вокруг оси можно определить как движение твердого тела, при котором все точки тела описывают окружности с центрами на одной и той же неподвижной прямой, перпендикулярной плоскостям этих окружностей, а ось вращения можно определить как неподвижную прямую, на которой расположены центры окружностей, описываемых точками вращающегося тела.

Вращательное движение твердого тела определено, если задан как функция времени угол, на который поворачивается плоскость, проходящая через ось вращения и какую-нибудь точку вращающегося тела.

Уравнение вращательного движения. Построим систему координат $xOyz$, направив ось Oz по оси вращения тела (рис. 20). Эта система неподвижная и не связана с вращающимся телом. Будем называть такие системы координат *основными*. Построим теперь другую, *подвижную*, систему координат $x'Oy'z'$, направив ось Oz' также по оси OO_1 вращения тела, а ось Ox' — на какую-либо точку K_1 тела. Эта система координат неизменно связана с телом и поворачивается вместе с ним относительно основной системы $xOyz$.

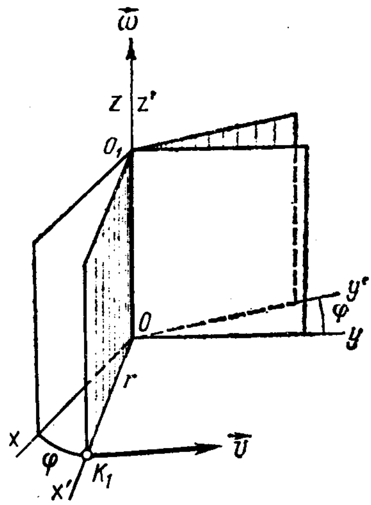


Рис. 20

Угол, на который поворачивается плоскость, проходящая через ось вращения и какую-нибудь точку вращающегося тела, называют *углом поворота* и обозначают буквой φ. Так, если в начальное мгновение оси Ox' и Ox совпали, то углом поворота будет двугранный угол между неподвижной плоскостью xOz и подвижной плоскостью $x'Oz'$, измеряемый линейным углом xOx'. Угол φ можно рассматривать как угловую координату тела, потому что он определяет положение всего вращающегося тела. Измеряется угол φ в радианах *.

Угол φ считается положительным при условии, что он отсчитан от положительной оси Ox к положительной оси Oy, т. е. против вращения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz. При отсчете в противоположную сторону угол считают отрицательным.

Чтобы определить вращение тела, надо знать угол поворота как некоторую непрерывную однозначную функцию времени:

$$\varphi=\varphi(t). \tag{40}$$

Уравнение (40) является уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Всякая плоскость OO_1K_1, проведенная через ось вращения и какую-либо точку тела, поворачивается за данное время на такой

* Напомним, что радиан — это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу (1 рад $\approx 57°17'44''$). В окружности 360°, или 2π рад. Измеряя углы отношением дуги к радиусу, т. е. в рад, выражаем их отвлеченным числом.

угол, на который за это же время повернулась плоскость $x'Oz'$. Это следует из условия неизменяемости твердого тела.

Угловая скорость выражается первой производной от угла поворота по времени: $\omega = \dot{\varphi}$

Угловая скорость. Угол поворота характеризует вращение тела только с геометрической стороны. Чтобы охарактеризовать вращение тела не только в пространстве, но и во времени, возьмем отношение изменения $\Delta\varphi$ угла поворота ко времени Δt, в течение которого это изменение происходило:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{41}$$

Отношение (41) называется *средней угловой скоростью тела.*

Пределом отношения (41) при Δt, стремящемся к нулю, является первая производная от угла поворота по времени. Она характеризует изменение угла поворота в данное мгновение, т. е. характеризует вращение тела не только по отношению к окружающему пространству, но и во времени. Эта алгебраическая величина принята за пространственно-временну́ю меру вращения твердого тела вокруг оси и ее называют *угловой скоростью тела:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{42}$$

Знак производной (42) указывает, в какую сторону поворачивается тело вокруг оси Oz. Если производная положительна, то наблюдатель, смотрящий с положительной стороны оси Oz, видит тело вращающимся против хода часовой стрелки, т. е. от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy, а при отрицательной производной вращение тела происходит в обратном направлении.

Размерность угловой скорости равна отношению размерности угла поворота к размерности времени. Но угол поворота является отвлеченной величиной, размерность его — единица. Следовательно, размерность угловой скорости обратна размерности времени

$$[\omega] = T^{-1}.$$

Чаще всего время измеряют в секундах, тогда единица угловой скорости $с^{-1}$ *.

Равномерное вращение иногда характеризуют числом n оборотов, совершаемых телом за единицу времени (обычно за минуту). Эту величину n называют *частотой вращения.*

Найдем соотношение между угловой скоростью ω, выраженной в рад/с, и числом оборотов в минуту. Если тело делает n оборотов

* Иногда единицу угловой скорости записывают так: рад/с.

в минуту, то оно поворачивается за каждую минуту на $2\pi n$ радианов, а за секунду — в 60 раз меньше, следовательно,

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30. \qquad (43)$$

В формуле (43) n выражено в об/мин, а ω — в рад/с.

Однако для очень медленно вращающихся тел число оборотов удобнее считать не за минуту, а за другие единицы времени. Так, Земля вращается вокруг своей оси, делая один оборот в сутки. Было бы неудобно считать, что Земля делает $1/(24 \cdot 60) = 1/1440$ об/мин. Угловую скорость Земли следует подсчитывать не по формуле (43), а из тех соображений, что Земля делает один оборот (2π радианов) за сутки, а в сутках 86400 с, следовательно,

$$\omega = 2\pi/86400 = 0{,}0000727 \text{ рад/с}.$$

Самые медленные вращения тел встречаются в звездном мире. Так, например, период обращения Солнца вокруг центра Галактики (Млечного пути) составляет 190 миллионов лет.

Наибольшая угловая скорость, полученная в технике, соответствует миллионам оборотов в секунду. С такой скоростью вращаются гироскопы Гюгенара — маленькие роторы, подвешенные без подшипников в магнитном поле.

За одно и то же время все части твердого тела поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол. Следовательно, угловая скорость является общей мерой вращения для всего тела, и в каждое мгновение твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет только одну угловую скорость.

При вращении тела вокруг неподвижной оси его угловую скорость удобнее рассматривать как алгебраическую величину, условно считая ее положительной при вращении тела против вращения стрелок часов.

Для тех случаев, когда тело совершает сложные движения, например вращается вокруг оси, в то время как эта ось поворачивается, удобно изображать угловую скорость вектором *.

Модуль и положение вектора $\vec{\omega}$ показывают размер угловой скорости и положение оси вращения. Но вектор угловой скорости отличается от прочих известных векторов (скорость точки, ускорение точки, радиус-вектор и др.) тем, что, изображая его стрелкой соответствующей длины, отложенной вдоль оси вращения, надо (вполне произвольно) условиться относительно того, в какую сторону по оси вращения направить эту стрелку. В данном курсе всюду использована правая система координат, поэтому установим и для вектора угловой скорости правило правого винта, т. е. будем направлять вектор угловой скорости вдоль оси вращения к той ее

* Угловая скорость действительно имеет векторный характер. Как показал еще Кориолис, угловые скорости складываются по правилам геометрического сложения.

стороне, с которой вращение тела представляется происходящим против вращения часовой стрелки. Так, например, вектор угловой скорости земного шара, вращающегося с запада на восток, направим к северному полюсу: глядя на Землю со стороны северного полюса, увидим ее вращающейся против хода часовой стрелки.

Угловая скорость тела, имеющего одну неподвижную точку

Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, называют сферическим.

Векторный характер угловой скорости особенно проявляется при движении тела, одна из точек которого во все время движения остается неподвижной. Тогда всякая другая точка тела может двигаться только по поверхности сферы, имеющей радиус, равный расстоянию этой точки от неподвижной точки тела, поэтому такое движение тела называют *сферическим*. Покажем, что картина распределения скоростей точек тела, совершающего сферическое движение, такова, как будто в каждое мгновение тело вращается вокруг некоторой мгновенной оси.

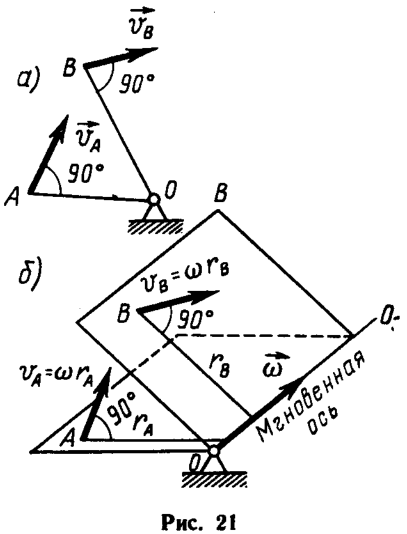


Рис. 21

Пусть тело (не изображенное на чертеже) имеет неподвижную точку O (рис. 21, *а*). Отметим две другие точки тела A и B, которые выберем произвольно, но с условием, что векторы скорости их не параллельны между собой.

Рассмотрим сначала точку A. Проведем прямую через точку A и неподвижную точку O. Согласно основной теореме кинематики о скоростях точек твердого тела (34) проекции скоростей точек A и O на AO должны быть равны. Но скорость точки O, а потому и ее проекция равны нулю. Скорость точки A нулю не равна, но проекция ее на AO должна равняться нулю, следовательно, скорость точки A перпендикулярна AO. Если мы проведем через точки A и O плоскость (рис. 21, *б*) перпендикулярно скорости точки A, то по той же теореме скорости точек этой плоскости должны быть перпендикулярны прямым, соединяющим эти точки с неподвижной точкой O, т. е. перпендикулярны плоскости.

Рассмотрим теперь точку B, повторим те же рассуждения. Если проведем через точки B и O плоскость B перпендикулярно скорости точки B, то скорости точек этой плоскости должны быть перпендикулярны плоскости B. Точки, лежащие на линии OO_1 пересечения плоскостей A и B, должны иметь скорости, перпендикулярные сразу обеим пересекающимся плоскостям, что невозможно. Следовательно, скорости точек этой прямой OO_1 в данное мгновение равны нулю. Таким образом, при движении тела с одной неподвижной точкой через эту точку всегда можно провести ось, скорости точек которой в данное мгновение равны нулю. Эту ось называют *мгновенной осью вращения* *.

Если в движущемся теле существует ось, скорости точек которой в данное мгновение равны нулю, то скорости других его точек должны быть пропорциональны их расстояниям от оси. Таким образом, картина распределения скоростей в теле с одной неподвижной точкой оказалась в данное мгновение такой же, как и в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

При изучении вращения тела вокруг неподвижной оси сложилось условие о направлении вектора угловой скорости. То же условие сохраняется и при сферическом движении, где вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения в такую сторону, чтобы вращение тела представлялось происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{\omega}$ в направлении на точку O.

Угловое ускорение выражается первой производной от угловой скорости по времени: $\varepsilon=\dot{\omega}$.

Угловое ускорение. Изменение угловой скорости происходит с течением времени и, вообще говоря, бывает различным в разные моменты времени. Пространственно-временну́ю меру, характеризующую изменение угловой скорости тела в данное мгновение, называют *угловым ускорением тела.*

Поскольку угловая скорость — векторная величина, вектором должно быть и угловое ускорение. Но при вращении тела вокруг неподвижной оси обычно рассматривают угловую скорость как скаляр и потому здесь интересны только величина и знак углового ускорения.

Пусть алгебраическая величина угловой скорости изменилась на $\Delta\omega$ в течение промежутка времени Δt. Предел отношения $\Delta\omega/\Delta t$ при $\Delta t\to 0$ выражает угловое ускорение тела и обозначается греческой буквой ε (эпсилон):

$$\varepsilon=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t, \tag{44}$$

или, принимая во внимание равенство (42),

$$\varepsilon=\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2. \tag{44'}$$

---

* Открытие мгновенной оси вращения в теле, имеющем одну неподвижную точку, сделали Д'Аламбер (1749) и Эйлер (1750).

Следовательно, угловое ускорение выражается первой производной от угловой скорости по времени, или, что то же, второй производной от угла поворота по времени. Эта величина характеризует быстроту изменения угловой скорости тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Размерность углового ускорения равна отношению размерности угла поворота к размерности времени в квадрате, т. е. равна единице, деленной на квадрат времени:

$$[\varepsilon]=T^{-2}.$$

Чаще всего время измеряется в секундах, тогда единица углового ускорения $с^{-2}$, или по записи, рекомендованной ГОСТом, рад/$с^2$.

Если с течением времени угловая скорость тела увеличивается, то производная $d\omega/dt$ имеет тот же знак, что и ω,— вращение тела ускоренное. Если же угловая скорость с течением времени уменьшается, то производная $d\omega/dt$ и угловая скорость имеют различные знаки,— вращение тела замедленное. Каждое из этих вращений, и ускоренное и замедленное, называют *переменным вращением.*

Равнопеременное вращение тела. В задачах кинематики часто встречается равнопеременное вращение, т. е. такое вращение твердого тела вокруг оси, при котором угловое ускорение остается постоянным:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\text{const}.$$

Умножим на dt и проинтегрируем это равенство

$$\omega=\varepsilon t+C_1.$$

Чтобы определить C_1 — постоянную интегрирования, надо подставить в это равенство вместо ω и t какие-либо их частные соответствующие значения. Например, если при $t=0$ угловая скорость была ω_0, то, подставляя эти частные значения аргумента t и функции ω, определяем постоянную $C_1=\omega_0$.

Представим ω как $d\varphi/dt$, разделим переменные, проинтегрируем и определим постоянную интегрирования из начальных данных, получим формулу угла поворота при равнопеременном вращении тела.

Итак, равнопеременное вращение тела описывается тремя соотношениями

$$\varepsilon=\text{const}; \quad \omega=\omega_0+\varepsilon t; \quad \varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\varepsilon t^2/2. \qquad (45)$$

Эти формулы пригодны для равнопеременного вращения и их нельзя применять при другом переменном вращении тела.

При равномерном вращении угловая скорость постоянна и, подставляя в выражения (45) $\varepsilon=0$, получим формулы, пригодные только для равномерного вращения,

$$\varepsilon=0;\ \omega=\text{const};\ \varphi=\varphi_0+\omega t. \tag{46}$$

Задача № 10. В инерционном аккумуляторе Уфимцева (1918) для ветроэлектрических станций стальной диск вращается в глубоком вакууме, делая 20000 об/мин. Предоставленный самому себе, он продолжает вращаться в течение двух недель. Определить ε диска, считая вращение равнозамедленным.

Решение. Определим начальную угловую скорость диска и выразим время (2 нед) до остановки в секундах:

$$\omega_0=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\cdot 20\,000}{30};\ t=2\cdot 7\cdot 24\cdot 60\cdot 60.$$

Ответ получим, разделив ω_0 на t.

Ответ. $\varepsilon=-\dfrac{20\,000\,\pi}{30\cdot 2\cdot 7\cdot 86400}=-0{,}001731$ с$^{-2}$.

§ 11. ТРАЕКТОРИИ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Точки вращающегося тела, расположенные на одной прямой, параллельной оси вращения, совершают одинаковые движения.

Траектории точек вращающегося тела. Если тело вращается, то его точки описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения тела. Пересечем мысленно вращающееся тело какой-либо плоскостью, перпендикулярной оси вращения. В этой плоскости будут находиться круговые траектории всех расположенных в ней точек тела и все точки тела, лежащие в этой плоскости, останутся в ней во все время вращения тела. Траектории других точек тела расположены в параллельных плоскостях. Очевидно, что движение точек тела, лежащих на перпендикуляре, восставленном в какой-либо из точек к этой плоскости, совершенно одинаковы, поэтому движение всех точек тела может быть полностью охарактеризовано движением точек, лежащих в этой плоскости.

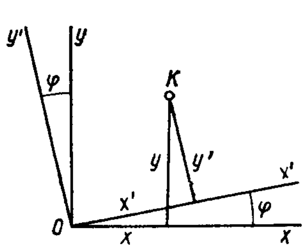


Рис. 22

Построим две системы координат: основную (неподвижную) $xOyz$ и подвижную $x'Oy'z'$ (рис. 22). Пусть оси Oz и Oz' совпадают и направлены по оси вращения. Координаты x', y', z' произвольной точки K вращающегося тела относительно подвижной системы не меняются при движении тела, так как оси подвижной системы неизменно связаны с телом и вращаются вместе с ним. Координаты x, y и z той же точки относительно основной системы связаны с координатами x', y' и z' формулами, известными из аналитической геометрии *,

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, z = z' \qquad (47)$$

и понятными из чертежа (см. рис. 22), на котором представлены точка K и обе координатные системы, рассматриваемые со стороны оси вращения тела. Ось аппликат на рисунке не показана, потому что она перпендикулярна плоскости чертежа.

Если тело вращается, то меняется угол φ, являющийся некоторой функцией времени $\varphi(t)$, а следовательно, меняются и координаты x и y точки K в основной системе отсчета. Координата же z при направлении оси Oz вдоль оси вращения не изменяется и остается равной z'.

Аналогично можно определить подвижные координаты по неподвижным и углу φ:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi; \quad y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi; \quad z' = z.$$

Скорость точки тела, вращающегося вокруг оси, равна произведению угловой скорости тела на расстояние точки от оси: $v = \omega r$.

Скорости точек вращающегося тела. Для получения проекций скорости на неподвижные оси координат продифференцируем по времени равенства (47), рассматривая φ как функцию времени. Получим

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Но согласно (47) выражение, стоящее в скобках в первом из этих равенств, есть y, а во втором x, а потому

$$v_x = -y\omega, \quad v_y = x\omega, \quad v_z = 0. \qquad (48)^{**}$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая, найдем

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (x^2 + y^2)\,\omega^2.$$

В левой части этого равенства — квадрат полной скорости точки, а в скобках правой части — квадрат расстояния точки от оси.

---

* Формулы (47) даны Эйлером в 1748 г.

** Соотношения (48) представляют собой частный случай ($\vec{\omega}$ направлена по оси Oz) формул Эйлера, выражающих зависимости между проекциями скоростей точек вращающегося тела, координатами этих точек и проекциями вектора угловой скорости на неподвижные оси координат.

Таким образом, получена одна из главнейших формул кинематики

$$\boxed{v=\omega r} \qquad (49)$$

— скорость точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела на расстояние точки от оси вращения.

Итак, для определения скорости точки вращающегося тела нет необходимости знать ее координаты, надо знать лишь расстояние точки от оси вращения и угловую скорость тела.

Если заданным является число n оборотов в минуту, то, подставляя в (49) вместо ω выражение (43), найдем

$$v=\pi r n/30. \qquad (50)$$

По этим формулам можно определить скорость любой точки вращающегося тела, независимо от того, какую форму имеет тело и где находится точка — на поверхности или внутри тела. Скорость точки тела, вращающегося вокруг оси, направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и ось вращения, против хода или по ходу часовой стрелки в зависимости от знака производной (42).

Скорость точек, лежащих на поверхности цилиндра (шкива, барабана, махового колеса, вала и т. п.), вращающегося вокруг своей оси, называют *окружной скоростью тела*. Окружная скорость равна произведению ω на радиус R тела:

$$v_{\text{окр}}=\omega R.$$

Скорость точки вращающегося тела равна векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольной точки оси вращения: $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$.

Из какой-либо неподвижной точки O вращающегося тела (т. е. из какой-либо точки оси) проведем радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OK}$ в любую точку K этого тела (рис. 23).

Обозначив через δ угол, составляемый радиусом-вектором с осью вращения, можем написать

$$v=\omega\,|\vec{r}|\sin\delta.$$

Скорость точки направлена перпендикулярно радиусу-вектору и вектору угловой скорости, следовательно, и по абсолютному значению, и по направлению вектор скорости точки тела можно выразить векторным произведением вектора угловой скорости и радиуса-вектора этой точки

$$\vec{v}=\overrightarrow{KO}\times\vec{\omega}=-\overrightarrow{OK}\times\vec{\omega}=-\vec{r}\times\vec{\omega},$$

или, так как векторное произведение не обладает свойством переместительности, получаем следующую формулу:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{51}$$

Если смотреть на тело со стороны направления вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости тела, то вектор скорости всякой точки тела будет указывать на вращение против часовой стрелки.

Векторное выражение (51) представляет определенные удобства при изучении вращения тела вокруг мгновенной оси, когда в теле остается неподвижной лишь одна точка, через которую проходит меняющая свое направление мгновенная ось вращения.

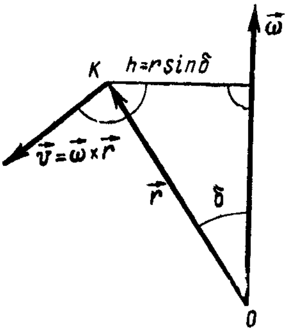


Рис. 23

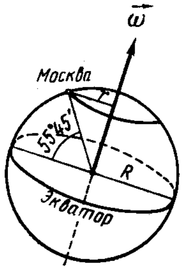


Рис. 24

Задача № 11. Определить скорость точек земной поверхности на экваторе и на широте Москвы (55°45'), принимая во внимание только вращение Земли вокруг оси (рис. 24). Средний радиус Земли 6371 км и $\cos 55°45' = 0{,}5628$.

Решение. Вращаясь вокруг своей оси, Земля совершает один оборот (2π рад) за сутки (86400 с) и угловая скорость Земли

$$\omega = 2\pi : 86\,400 = 727 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с}.$$

Умножая угловую скорость на радиус Земли ($6371 \cdot 10^3$ м), найдем скорость точек Земли на экваторе

$$v = \omega R = 727 \cdot 6371 \cdot 10^{-4} = 463 \text{ м/с}.$$

Для определения скорости точек в Москве надо умножить ω Земли на расстояние r от Москвы до земной оси:

$$v = 727 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}5628 \cdot 6371 \cdot 10^3 = 261 \text{ м/с}.$$

Ответ. Скорости точек на экваторе 463 м/с, в Москве 261 м/с направлены против вращения часовой стрелки, если смотреть с северного полюса.

Задача № 12. (М). Для получения периодически изменяющихся угловых скоростей сцеплены два одинаковых эллиптических зубчатых колеса (рис. 25, *а*), из которых одно вращается равномерно вокруг оси O, делая 270 об/мин, а другое приводится первым во вращательное движение вокруг оси O_1. Оси O и O_1 параллельны и проходят через фокусы эллипсов. Расстояние $OO_1 = 50$ см, полуоси эллипсов $a=25$ см и $b=15$ см. Определить наименьшую и наибольшую угловые скорости колеса O_1.

Решение. Колесо O вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi \cdot 270/30 = 9\pi$ с$^{-1}$. Однако скорости точек различны, поскольку различны их расстояния от оси. С наименьшей скоростью движется ближайший к O зубец B. Его скорость $v_{min} = \omega \cdot OB$. Наибольшей скоростью $v_{max} = \omega \cdot OA$ обладает зубец A.

Колесо O_1 вращается с переменной угловой скоростью, зависящей от того, какие зубцы находятся в зацеплении. Наименьшую угловую скорость колесо O_1 имеет, когда зубец A_1 находится в зацеплении с зубцом B и, следовательно, движется с той же скоростью $v_{min} = \omega \cdot OB$ (рис. 25, *б*). Чтобы определить угловую скорость второго колеса в это мгновение, надо поделить v_{A1} на расстояние O_1A_1.

Наибольшую угловую скорость колесо O_1 имеет, когда зубец B_1 находится в зацеплении с зубцом A. Угловая скорость колеса O_1 при таком положении механизма $\omega_{max} = \omega \cdot OA/O_1B_1$ (рис. 25, *в*).

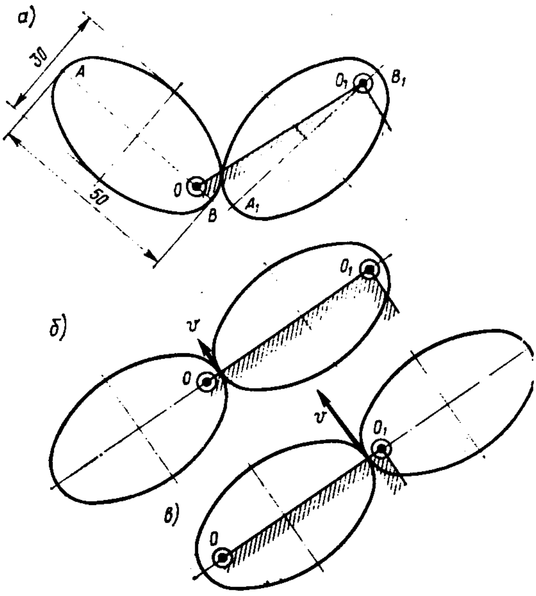


Рис. 25

Чтобы подсчитать длины полуоси, используем формулу из аналитической геометрии $c=\sqrt{a^2-b^2}$. В данном случае $OC=20$ см, а потому $OA=O_1A_1=45$ см и $OB=O_1B_1=5$ см.

Ответ. $\omega_{min}=9\pi \cdot 5/45$ с$^{-1}$; $\omega_{max}=9\pi \cdot 45/5$ с$^{-1}$.

Тангенциальное ускорение точки вращающегося тела равно произведению углового ускорения тела на расстояние точки от оси вращения тела: $a_T = \varepsilon r$.

Ускорения точек вращающегося тела. Если в выражении тангенциального (21) и нормального (24) ускорений точки вместо скорости v подставим выражение (49), то получим тангенциальное и нормальное ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Тангенциальное ускорение

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r, \text{ или } a_T = \varepsilon r. \quad (52)$$

Тангенциальное ускорение точки вращающегося тела равно произведению углового ускорения тела на расстояние точки от оси вращения.

Центростремительное ускорение точки вращающегося тела равно произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние точки от оси вращения тела: $a_N = \omega^2 r$.

Каждая точка вращающегося тела описывает окружность, а потому радиус кривизны ρ траектории точки равен расстоянию r этой точки от оси вращения тела. Имеем

$$a_N = v^2/\rho = (\omega r)^2/r,$$

или

$$a_N = \omega^2 r. \qquad (53)$$

Нормальное ускорение точки вращающегося тела обычно называют *центростремительным ускорением.* Оно равно произведению квадрата угловой скорости на расстояние точки от оси вращения тела.

Полное ускорение точки тела, вращающегося вокруг оси, выражается формулой $a = +r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Определим полное ускорение точек вращающегося тела

$$a = +\sqrt{a_T^2 + a_N^2} = +\sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2},$$

или

$$\boxed{a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (54)$$

Иногда бывает необходимо определить проекции ускорения точки вращающегося тела на неподвижные оси координат. Продифференцировав равенства (48) по времени, получим:

$$a_x = -y\varepsilon - x\omega^2, \quad a_y = x\varepsilon - y\omega^2, \quad a_z = 0. \qquad (55)$$

Следовательно,

$$a_{Tx} = -y\varepsilon, \quad a_{Ty} = x\varepsilon, \quad a_{Nx} = -x\omega^2, \quad a_{Ny} = -y\omega^2. \qquad (56)$$

Задача № 13. При сборке ротора молотковой дробилки была допущена неточность, в результате которой центр тяжести ротора оказался смещенным от оси вращения на 1 мм. Определить центростремительное ускорение центра тяжести ротора, если $n = 3000$ об/мин.

Решение. По формулам (43) и (53) имеем

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 100\pi; \quad a_N = \omega^2 r = 98{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $a_N = 98{,}6$ м/с², т. е. более чем в 10 раз превосходит ускорение при свободном падении тел.

§ 12. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским движением называется движение твердого тела, при котором все точки тела движутся только в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости.

Изучив кинематику твердого тела, совершающего простейшие движения (поступательное и вращение вокруг неподвижной оси), перейдем к изучению плоского движения, которое часто рассматривают как комбинацию двух этих простейших движений тела.

При плоском движении тела каждая его частица описывает плоскую траекторию. Траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях. Каждую из этих плоскостей можно назвать плоскостью движения тела.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения, так как все точки вращающегося тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, а следовательно, в плоскостях, параллельных между собой.

В качестве другого примера плоского движения представим себе, что закрытая книга лежит на столе. Не раскрывая книги, будем перемещать ее по поверхности стола, но так, чтобы контакт книги со столом ни в одной точке не нарушался, в остальном движение книги произвольно. При этом условии частицы книги опишут траектории, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости стола, и каждая страница будет двигаться в той плоскости, в которой она находилась до начала движения.

Плоское движение часто встречается в технике. Большинство современных механизмов имеет звенья, совершающие только плоское движение. Такие механизмы называют *плоскими.*

Плоское движение тела характеризуется движением фигуры, полученной от пересечения тела плоскостью, в которой лежит траектория какой-либо из точек тела.

Если тело, находящееся в состоянии плоского движения, пересечь плоскостью, в которой лежит траектория какой-нибудь из его точек, то плоская фигура, получившаяся от пересечения тела, будет передвигаться только в этой плоскости. Движения точек тела, лежащих на перпендикуляре, восставленном в плоскости фигуры в какой-либо его точке, совершенно одинаковы и равны движению основания этого перпендикуляра, а потому движение тела может быть охарактеризовано движением фигуры в ее плоскости. Для исследования плоского движения тела достаточно исследовать движение плоской фигуры, полученной при пересечении тела одной из этих плоскостей. Так, в приведенном примере движение книги вполне определяется движением какой-либо из ее страниц в плоскости, параллельной плоскости стола.

Это обстоятельство позволяет заменить изучение плоского движения тела изучением движения плоской фигуры в ее плоскости.

Движение плоской фигуры можно рассматривать как составное, состоящее из поступательного и вращательного.

На рис. 26, *а* представлена система декартовых координат xOy, которую будем считать неподвижной и назовем *основной системой отсчета.* Пусть некоторая фигура, расположенная в плоскости xOy, движется в ней. Нанесем на этой фигуре систему координат $x'Ey'$ с началом в какой-либо точке E. Эту систему назовем *подвижной,* потому что она движется вместе с фигурой, а начало координат — точку E назовем *полюсом.* Чтобы определить положение фигуры на плоскости xOy, достаточно знать положение системы подвижных координат $x'Ey'$ относительно основных xOy, т. е. знать координаты x_E и y_E полюса E и угол, на который повернута фигура, например угол φ между положительными направлениями осей Ox и Ex'. По мере движения фигуры положение подвижной системы координат $x'Ey'$ относительно неподвижной системы xOy изменяется, и чтобы определить движение фигуры, нужно знать эти ве-

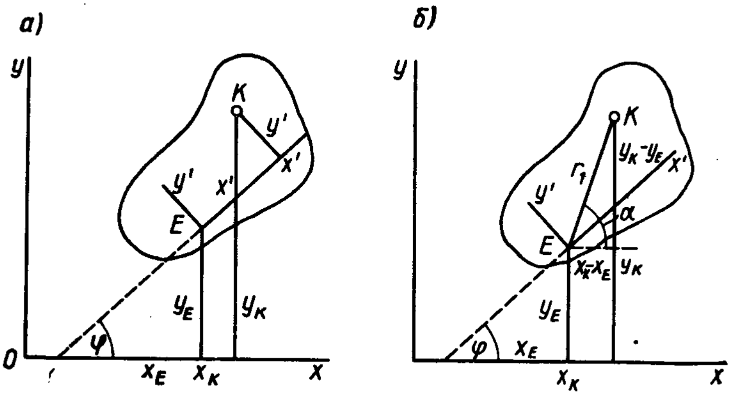


Рис. 26

личины (координаты полюса x_E и y_E и угол поворота φ) как некоторые непрерывные однозначные функции времени

$$x_E = x_E(t);\ \ y_E = y_E(t);\ \ \varphi = \varphi(t). \tag{57}$$

Эти уравнения являются *уравнениями движения плоской фигуры* в ее плоскости, они определяют плоское движение тела.

В самом деле, определить движение механической системы (в нашем случае плоской фигуры) — значит дать положение каждой ее точки в заданный момент времени. Написанные три уравнения позволяют определить местонахождение любой точки фигуры в данное мгновение. Определим, например, где на плоскости xOy находится точка K (рис. 26, *а*), координаты которой в подвижной системе обозначим через x' и y'. Подвижные оси координат $x'Ey'$ и точка K неизменно связаны с фигурой, поэтому координаты x' и y' точки K в подвижной системе постоянны. Для определения координат x и y точки K в основной системе xOy воспользуемся формулой преобразования координат, известной из курса аналитической геометрии и очевидной из чертежа (рис. 26, *а*)

$$x = x_E + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,\ \ y = y_E + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \tag{58}$$

В этих уравнениях переменными величинами являются координаты x и y точки K, координаты x_E и y_E полюса E и угол φ.

Обратим внимание на то, что два первых уравнения (57) тождественны уравнениям (5) движения точки на плоскости или уравнениям (37) плоского поступательного движения; третье же из уравнений (57) тождественно уравнению (40) вращения вокруг неподвижной оси. Это наводит на мысль, высказанную еще Эйлером, рассматривать движение плоской фигуры как сложное движение *, состоящее из двух движений: переносного (поступательного), определяемого движением полюса E, и относительного вращательного вокруг полюса, точнее, вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости фигуры.

Переносное (поступательное) движение фигуры в ее плоскости зависит от выбора полюса, а вращательное — не зависит.

Движение вместе с полюсом и вокруг полюса. Два первых из уравнений (57) представляют поступательное движение плоской фигуры. Вместе с тем они выражают координаты полюса E в функции времени. Следовательно, поступательное движение фигуры определяется движением полюса. Если бы за полюс была выбрана какая-нибудь другая точка фигуры, то два уравнения (57) были бы иными, а следовательно, изменилось бы и описываемое этими уравнениями движение плоской фигуры.

Напротив, третье уравнение (57) не связано с полюсом E, поэтому вращение фигуры (угол поворота φ, угловая скорость $\dot{\varphi}$, угловое ускорение $\ddot{\varphi}$) не должно зависеть от выбора полюса.

Задача № 14. Треугольник ABC (рис. 27), двигаясь в своей плоскости, за данное время переместился из положения $A_0B_0C_0$ в положение $A_1B_1C_1$. Рассмотрев движение треугольника как поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса и принимая за полюсы вершины треугольника, показать, что поступательная часть зависит от выбора полюса, а вращательная — не зависит.

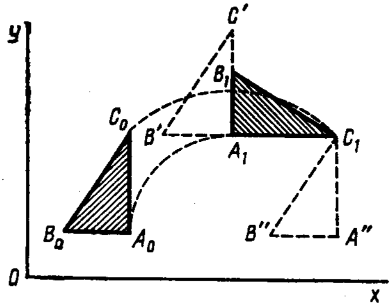


Рис. 27

Решение. Если за полюс принять точку A_0, то перемещение полюса за данное время определится вектором A_0A_1, не показанным на рис. 27. Мысленно остановим относительное движение фигуры и, передвигая ее поступательно вместе с полюсом A, убедимся, что в результате такого переносного движения она займет положение $A_1B'C'$. Если же за полюс приняли бы другую точку, например точку C, то переносное движение привело бы треугольник в положение $A''B''C_1$. Заметим, что относительным движением фигуры в обоих случаях этого примера является поворот на 90° по часовой стрелке. Аналогично, выбрав за полюс вершину B или какую-нибудь другую точку, убеждаемся, что поступательная часть стала иной, а вращательная не изменилась.

---

* Подробнее о сложном движении см. в гл. V.

§ 13. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Скорость любой точки фигуры, находящейся в плоском движении, равна геометрической сумме скорости этой точки относительно полюса и скорости полюса.

Скорости точек фигуры в плоском сложном движении. Для получения проекций скорости на неподвижные оси координат продифференцируем по времени равенства (58):

$$\dot{x}=\dot{x}_E-(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\dot{\varphi};\quad \dot{y}=\dot{y}_E+(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\dot{\varphi}.$$

Таким образом, ввиду равенств (58):

$$v_x=v_{Ex}-(y-y_E)\dot{\varphi};\quad v_y=v_{Ey}+(x-x_E)\dot{\varphi}. \tag{59}$$

Последние члены правых частей выражают согласно формулам Эйлера (48) проекции скорости K при вращении фигуры вокруг полюса E.

Проведем радиус-вектор $\overrightarrow{EK}=\vec{r}_1$ (рис. 26, *б*) и обозначим через α угол, составляемый им в данное мгновение с осью абсцисс. Тогда $\cos\alpha=(x-x_E)/r$; $\sin\alpha=(y-y_E)/r_1$ и формула (59) принимает следующий вид:

$$v_x=v_{Ex}-r_1\sin\alpha\,\omega;\quad v_y=v_{Ey}+r_1\cos\alpha\omega. \tag{59'}$$

Итак, вектор скорости любой точки K плоской фигуры можно рассматривать как геометрическую сумму двух векторов: 1) $\vec{v}_E$ — скорости в поступательном движении, равной скорости какой-либо точки E, неизменно связанной с фигурой и принятой за полюс, и 2) скорости во вращательном движении фигуры вокруг полюса E. Эту скорость обозначим $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}=\vec{v}_e+\vec{v}_r, \tag{60}$$

где $\vec{v}_e=\vec{v}_E$ и $v_r=\omega\cdot EK$.

Скорость $\vec{v}_r$ точки K относительно точки E направлена перпендикулярно EK в сторону вращения фигуры.

Ту точку фигуры, совершающей плоское движение, скорость которой в данное мгновение равна нулю, называют мгновенным центром скоростей.

Мгновенный центр скоростей. Пусть какая-либо плоская фигура движется в своей плоскости. Не будем ограничивать размер этой фигуры и для общности рассуждений допустим, что она представляет собой бесконечную плоскость, движущуюся по другой, неподвижной плоскости. Любую точку этой движущейся плоскости можно принять за полюс E

и рассматривать скорости всех остальных точек как состоящие из равных между собой скоростей v_E в поступательном движении и скоростей этих точек во вращательном движении фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости в полюсе E. Векторы скоростей всех точек этой плоскости (рис. 28) в ее вращательном движении различны между собой: точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от E, имеют одинаковый модуль скорости, но различные направления скоростей. Точки, лежащие на одном луче, идущем из полюса, имеют одинаковые направления скоростей, но различные модули. На всей этой бесконечной плоскости всегда можно отыскать лишь одну точку, скорость которой имеет любую наперед заданную величину и любое наперед заданное направление на плоскости. Чтобы найти точку, имеющую такую скорость, достаточно провести через полюс прямую, перпендикулярную заданному направлению скорости, и отложить на этой прямой (в ту или иную стороны в зависимости от направления вращения) отрезок, равный отношению заданной скорости точки к угловой скорости плоскости (фигуры); искомая точка находится на конце этого отрезка. В частности, на этой плоскости всегда можно найти одну точку, скорость которой равна и противоположна скорости v_E полюса и суммарная (абсолютная) скорость этой точки в данное мгновение равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей* и отмечают индексом «мцс»:

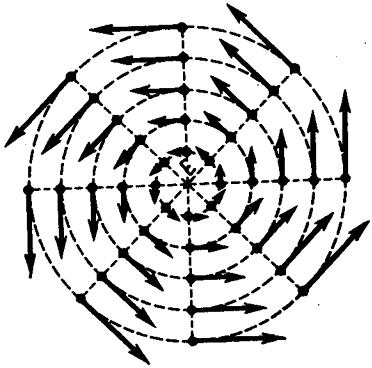


Рис. 28

$$v_{\text{мцс}} = 0. \tag{61}$$

Фигуры, совершающие плоское движение, имеют конечные размеры, но можно вообразить, что с фигурой неизменно связана и движется вместе с ней подвижная плоскость $x'Ey'$ (см. рис. 26, *а*). Тогда ограниченность размеров фигуры не имеет значения для рассуждений, и где-либо на самой движущейся фигуре или на неразрывно с ней связанной плоскости во всякое мгновение имеется одна точка (мгновенный центр скоростей $E_{\text{мцс}}$), скорость которой равна нулю.

В каждое мгновение на подвижной плоскости фигуры имеется только одна точка со скоростью, равной нулю, т. е. только один мгновенный центр скоростей, в противном случае фигура не могла бы двигаться.

Во всякое мгновение скорости точек фигуры, находящейся в плоском движении, равны скоростям этих точек при вращении фигуры вокруг МЦС: $v_K = \omega \cdot KE_{мцс}$.

Скорости точек фигуры как вращательные вокруг МЦС. Если мгновенный центр скоростей $E_{мцс}$ принять за полюс, то уравнение (60), определяющее скорость v любой точки K плоской фигуры, примет вид

$$v_k = \omega \cdot KE_{мцс}, \tag{62}$$

где ω — угловая скорость фигуры; $KE_{мцс}$ — расстояние точки K от мгновенного центра скоростей $E_{мцс}$.

Формула (62) выражает скорость всякой точки K вращающегося тела. Распределение скоростей точек фигуры такое, как будто фигура вращается в данное мгновение вокруг мгновенного центра скоростей. Однако в следующий момент времени мгновенный центр скоростей переместится в другую точку плоскости (почему он и называется мгновенным), и картина распределения скоростей будет такой, как будто бы вся фигура вращается вокруг нового центра. Тем не менее в теории плоского движения и в ее практическом применении, при исследовании и конструировании машин мгновенный центр скоростей играет важную роль. Ознакомимся с некоторыми методами, позволяющими найти эту точку на плоскости.

Мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляров к скоростям точек фигуры.

Методы определения МЦС. Если известно направление скоростей хотя бы двух точек фигуры, то МЦС легко определить, восставив в этих точках перпендикуляры к направлениям их скоростей. Пусть известна скорость какой-либо точки A (рис. 29, *а*) фигуры, находящейся в плоском движении. Проведем через точку A пря-

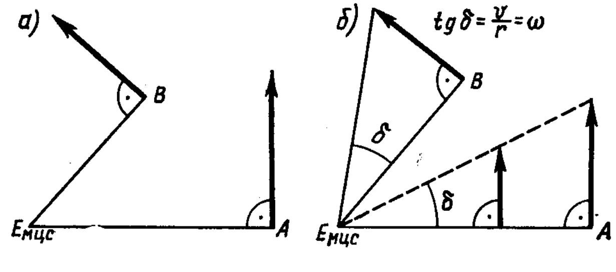


Рис. 29

мую, перпендикулярную вектору скорости этой точки. Согласно основной теореме кинематики о скоростях точек твердого тела (34) проекции на эту прямую скоростей ее точек равны между собой и, в частности, равны проекции скорости точки A. Но проекция скорости точки A на эту прямую равна нулю, так как прямая проведена перпендикулярно скорости. Следовательно, скорости всех точек этой прямой перпендикулярны этой прямой.

Пусть известна скорость или хотя бы направление скорости какой-либо точки B той же фигуры. Проведем через точку B прямую, перпендикулярную направлению скорости точки B, и аналогичными рассуждениями покажем, что скорости точек этой прямой перпендикулярны ей. Проекции скорости точки E, лежащей на пересечении обоих перпендикуляров, на каждый из этих перпендикуляров должны равняться нулю. Следовательно, равняется нулю скорость точки E, так как эта скорость не может быть перпендикулярной одновременно двум пересекающимся прямым. Но на всей плоскости имеется лишь один мгновенный центр скоростей. Значит, он находится в точке E пересечения двух восставленных перпендикуляров и в этой же точке должны пересечься перпендикуляры, восставленные к скоростям всех точек фигуры. Скорость есть вектор прикрепленный, а потому перпендикуляр к вектору скорости точки надо восставлять в этой точке.

Скорости точек фигуры пропорциональны их расстоянию r от мгновенного центра скоростей. Поэтому, соединяя с $E_{мцс}$ начало и конец вектора скорости любой точки фигуры, получим подобные прямоугольные треугольники, в которых тангенс угла при вершине $E_{мцс}$ равен угловой скорости ω (рис. 29, *б*).

Если перпендикуляры к скоростям двух каких-либо точек плоской фигуры параллельны между собой, то МЦС находится в бесконечности и векторы скоростей всех точек фигуры в данный момент времени равны между собой.

Если перпендикуляры к скоростям двух каких-либо точек плоской фигуры совпадают (рис. 30), то МЦС лежит на отрезке прямой, соединяющей эти точки, и делит его на части, пропорциональные скоростям этих точек ($v_A : v_B = AE_{мцс} : BE_{мцс}$) внешним образом, если скорости этих точек направлены в одну сторону (рис. 30, *а*), и внутренним, если в противоположные стороны (рис. 30, *б*).

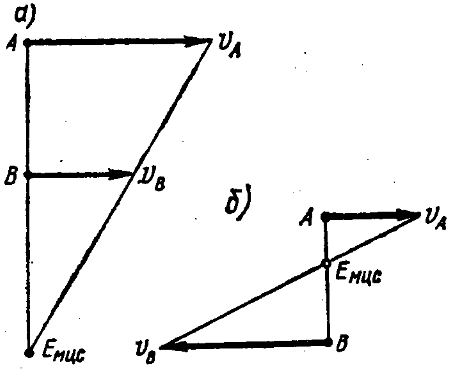


Рис. 30

При качении плоской фигуры по неподвижной кривой, лежащей в плоскости фигуры, мгновенный центр скоростей находится в точке касания.

Если какая-либо плоская фигура катится по другой фигуре, лежащей с ней в одной плоскости (например, подвижная шестеренка катится по неподвижной), то скорость точки катящейся фигуры, находящейся в данное мгновение в соприкосновении с неподвижной фигурой, должна быть равна нулю, если, конечно, качение не сопровождается проскальзыванием или пробуксовыванием. Так как в каждое мгновение на фигуре, совершающей плоское движение, имеется только одна точка со скоростью, равной нулю (мгновенный центр скоростей), то он и находится в точке касания *.

Пусть, например, колесо катится по прямолинейному рельсу (рис. 31). Рассмотрим движение колеса как составное, состоящее из поступательного движения вместе с осью колеса O и вращательного движения вокруг этой оси. На рис. 31, *а* изображены скорости некоторых точек колеса в поступательном движении, а на рис. 31, *б* скорости тех же точек при вращении колеса вокруг его центра. В случае качения без скольжения и без буксования окружная скорость точек, лежащих на ободе колеса, по модулю равна скорости оси, так как при повороте колеса на один полный оборот его ось переместится на $2\pi r$, а точки обода опишут в их относительном вращательном движении окружности той же длины. Скорости точек колеса по отношению к неподвижной системе отсчета изображены на рис. 31, *в*. Эти скорости можно получить как скорости при вращении колеса вокруг мгновенного центра скоростей, совпадающего с точкой касания колеса и рельса (рис. 31, *г*). Скорость каждой точки направлена по касательной к траектории этой точки.

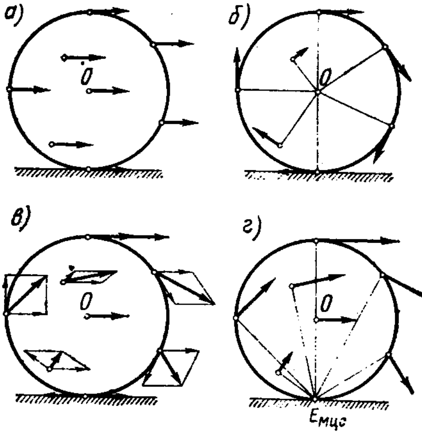


Рис. 31

Мгновенный центр скоростей лежит на самой катящейся фигуре или на неизменно с ней связанной подвижной плоскости. Точку, совпадающую с мгновенным центром скоростей, но лежащую

---

* Автором этой теоремы следует считать Декарта, показавшего (1638), что касательные к траекториям точек катящегося круга перпендикулярны прямым, соединяющим эти точки с точкой касания круга с прямой, по которой он катится, и распространившего свое доказательство на прочие катящиеся фигуры.

на неподвижной плоскости, по которой движется фигура, называют *мгновенным центром вращений.* В рассмотренном примере мгновенный центр скоростей лежит на ободе колеса, а мгновенный центр вращений — на рельсе.

Задача № 15. Скорость точки A фигуры, движущейся в своей плоскости, изображена в данном масштабе вектором $\vec{v}_A$ (рис. 32, *а*). Указано направление скорости точки B. Определить графически скорости точек B и C.

Решение. Задачу решим двумя способами. Оба эти способа графические, и результат зависит от точности выполнения чертежей.

1-й способ (по основной теореме кинематики твердого тела). Проведем прямую AB через точки A и B (рис. 32, *б*) и спроецируем на нее вектор скорости $\vec{v}_A$.

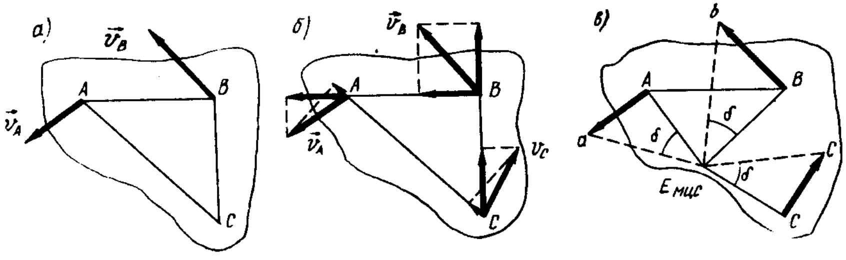


Рис. 32

От точки B по этой прямой отложим отрезок, равный проекции на нее v_A и от конца этого отрезка восставим перпендикуляр до пересечения с направлением скорости точки B. Вектор скорости точки B определен.

Проведем прямую через точки A и C. Спроецируем на нее $\vec{v}_A$, отложим от точки C отрезок, равный этой проекции, и от конца его восставим перпендикуляр к AC. Проведем прямую через точки B и C, спроецируем на нее $\vec{v}_B$, отложим от точки C отрезок, равный этой проекции и от его конца восставим перпендикуляр к BC. Проводим вектор $\vec{v}_C$ от точки C до пересечения перпендикуляров.

2-й способ (по мгновенному центру скоростей). От точек A и B (рис. 32, *в*) восставим перпендикуляры к направлениям скоростей до их пересечения в мгновенном центре скоростей $E_{мцс}$. Соединим $E_{мцс}$ с концом a вектора $\vec{v}_A$. Тангенс угла δ между отрезками $E_{мцс}A$ и $E_{мцс}a$, соединяющими $E_{мцс}$ с началом A и с концом a вектора скорости какой-либо точки A фигуры, равен в принятом масштабе угловой скорости фигуры

$$\operatorname{tg}\delta = Aa/AE_{мцс} = v_A/AE_{мцс} = \omega AE_{мцс}/AE_{мцс} = \omega.$$

Проведя отрезок $E_{мцс}b$ под углом δ к отрезку $E_{мцс}B$ до пересечения с заданным направлением скорости v_B, определим скорость $\vec{v}_B = \vec{Bb}$.

Для определения скорости (любой) точки C фигуры надо соединить эту точку с $E_{мцс}$ отрезком $E_{мцс}C$ и под углом δ к нему провести отрезок $E_{мцс}c$ до пересечения в точке c с перпендикуляром, восставленным из точки C к отрезку $E_{мцс}C$. Вектор скорости точки C равен $\vec{Cc}$ в принятом масштабе.

Задача № 16. (№ 186, *Артоболевский И. И., Зиновьев В. А.* и *Эдельштейн Б. В.* Сборник задач по теории механизмов и машин. М., 1947). Найти мгновенный центр скоростей звена BD (рис. 33, *а*) для случаев, когда: 1) $\varphi_1 = 45°$, 2) $\varphi_{12} = 90°$, 3) $\varphi_1 = 0°$.

Решение. В этом плоском механизме звено BD продето в качающуюся шайбу C и, двигаясь в плоскости чертежа, постоянно проходит через неподвижную точку C. Следовательно, скорость той точки звена BD, которая в данное мгновение совпадает с точкой C, направлена вдоль звена BD. Точка B (палец кривошипа) описывает окружность с центром в точке A, и направление ее скорости всегда перпендикулярно AB.

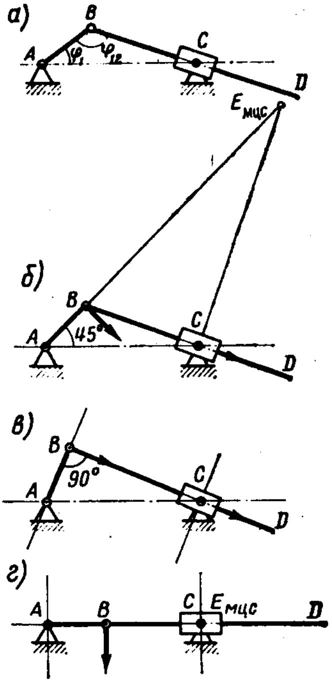


Рис. 33

1. Рассмотрим первое заданное положение механизма и нанесем на чертеж (рис. 33, *б*) скорости точки B и точки звена BD, совпадающей при данном положении механизма с точкой C. Восставляя перпендикуляры к скоростям в точках B и C, найдем в точке их пересечения мгновенный центр скоростей звена B.

2. При $\varphi_{12}=90°$ (рис. 33, *в*) перпендикуляры, восставленные в точках B и C к направлениям скоростей, становятся параллельными между собой и мгновенный центр скоростей уходит в бесконечность. При данном положении механизма распределение скоростей точек звена BD не соответствует такому, какое бывает при вращательном движении; угловая скорость звена равна нулю, линейные скорости всех точек звена одинаковы.

3. Третье заданное положение механизма изображено на рис. 33, *г*. Как и в предыдущих случаях, восставляем перпендикуляры к скорости точки B и к прямой BC. Перпендикуляры пересекаются в точке C, следовательно, при данном положении механизма мгновенный центр скоростей звена BD находится в точке C. Скорость той точки звена, которая совпадает с точкой C, в данное мгновение равна нулю. Рассматриваемое положение звена называется «крайним положением» (или «мертвым положением»). Картина распределения скоростей точек звена BD в данном положении такова, как будто звено BCD вращается вокруг точки C.

Ответ. 1) на пересечении линии AB и перпендикуляра, восставленного в точке C к линии BC; 2) в бесконечности в направлении AB; 3) в точке C.

Задача № 17. (*Новожилов И. В.* и *Зацепин М. Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. М., 1986). В плоском механизме (рис. 34) кривошип OA (*1*), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega_1=\dot{\varphi}_1$, приводит в движение шатун AB (*2*), соединенный шарниром B с колесом *3*, которое перекатывается по горизонтальной прямой без скольжения. К центру D этого колеса шарнирно прикреплен шатун DC (*4*), сообщающий возвратно-прямолинейное поступательное движение ползуну C.

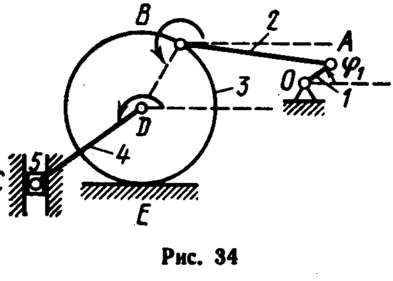


Рис. 34

Дано: $OA=r_1=0{,}23$ м; $AB=r_2=1{,}07$ м; $BD=r_3=0{,}57$ м; $DC=r_4=0{,}84$ м; $\omega_1=3{,}74$ 1/с; $\varphi_1(0)=0$; $\varphi_2(0)=2{,}97$; $\varphi_3(0)=4{,}17$; $\varphi_4(0)=3{,}97$.

Требуется определить зависимость от времени углов поворота φ_2, φ_3, φ_4

звеньев и их угловых скоростей $\omega_2=\dot{\varphi}_2$, $\omega_3=\dot{\varphi}_3$, $\omega_4=\dot{\varphi}_4$ и зависимость от времени скорости ползуна $C(5)$.

Решение. Направим ось абсцисс горизонтально вправо, а ось ординат вертикально вверх. Начало координатной системы не имеет значения. Углы наклона φ звеньев отсчитываются от положительного направления оси абсцисс.

Исследуем движения звеньев механизма, рассматривая движение каждого звена как составное и использовав при этом уравнения связей для точки $E_{\text{мцс}}$ (мгновенный центр скоростей колеса) и для точки C (ползун с вертикальными направляющими):

$$v_{Ex}=0;\ v_{Ey}=0;\ v_{Cx}=0.$$

Кривошип OA вращается вокруг O; проекции вращательной скорости $\omega_1 r_1$ точки A на оси координат определим из чертежа или вычислим по формуле (59′), приняв за полюс E неподвижный центр O:

$$v_{Ax}=-\omega_1 r_1\sin\varphi_1;\ v_{Ay}=+\omega_1 r_1\cos\varphi_1.$$

Движение шатуна AB разложим на переносное поступательное вместе с полюсом A и относительное вращательное вокруг полюса A с угловой скоростью ω_2. Тогда проекцию скорости шарнира B запишем по формуле (59′):

$$v_{Bx}=v_{Ax}-\omega_2 r_2\sin\varphi_2;\ v_{By}=v_{Ay}+\omega_2 r_2\cos\varphi_2.$$

Проекции v_{Ax} и v_{Bx} уже определены и, подставляя сюда их найденные значения, получаем следующие выражения для проекций скорости шарнира B:

$$v_{Bx}=-\omega_1 r_1\sin\varphi_1-\omega_2 r_2\sin\varphi_2;\ v_{By}=\omega_1 r_1\cos\varphi_1+\omega_2 r_2\cos\varphi_2.$$

Шарнир B исследуемого механизма принадлежит шатуну AB и колесу 3. Воспользовавшись тем, что скорость v_B определена, рассмотрим движение колеса как составное, приняв за полюс шарнир B. Тогда, по той же формуле (59′) определим проекции скорости центра D колеса:

$$v_{Dx}=v_{Bx}-\omega_3 r_3\sin\varphi_3=-\omega_1 r_1\sin\varphi_1-\omega_2 r_2\sin\varphi_2-\omega_3 r_3\sin\varphi_3;$$

$$v_{Dy}=v_{By}+\omega_3 r_3\cos\varphi_3=\omega_1 r_1\cos\varphi_1+\omega_2 r_2\cos\varphi_2+\omega_3 r_3\cos\varphi_3.$$

Но колесо 3 катится без скольжения. Следовательно, в точке E касания находится мгновенный центр скоростей колеса и картина распределения скоростей точек колеса такова, как будто колесо вращается вокруг $E_{\text{мцс}}$. Отсюда следует, что скорость точки D направлена горизонтально влево и равна $\omega_3 r_3$ (напомним, что угловая скорость не зависит от выбора полюса). Поэтому

$$v_{Dx}=-\omega_3 r_3;\ v_{Dy}=0.$$

Займемся теперь четвертым звеном и, приняв за полюс шарнир D, находящийся в центре колеса 3, определим по тем же формулам проекции скорости ползуна C:

$$v_{Cx}=v_{Dx}-r_4\omega_4\sin\varphi_4=-\omega_3 r_3-\omega_4 r_4\sin\varphi_4=0;$$

$$v_{Cy}=v_{Dy}+r_4\omega_4\cos\varphi_4=\omega_4 r_4\cos\varphi_4.$$

По второму из этих равенств найдем v_C, если будет известна ω_4. Для определения угловых скоростей ω_2, ω_3 и ω_4 звеньев механизма понадобятся лишь три из полученных уравнений, выражающих проекции скоростей точек:

$$-\omega_1 r_1\sin\varphi_1-\omega_2 r_2\sin\varphi_2-\omega_3 r_3\sin\varphi_3=-\omega_3 r_3;$$

$$\omega_1 r_1\cos\varphi_1+\omega_2 r_2\cos\varphi_2+\omega_3 r_3\cos\varphi_3=0;$$

$$-\omega_3 r_3-\omega_4 r_4\sin\varphi_4=0.$$

Чтобы определить ω_2, умножим первое из этих уравнений на $\cos\varphi_3$, а второе на $-(1+\sin\varphi_3)$ и сложим их. Найдем:

$$\omega_2 = -\omega_1 r_1 \frac{\cos\varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{r_2[\cos\varphi_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)]}.$$

Определим также из найденных соотношений ω_3 и ω_4 и подставим вместо r_1, r_2, r_3, r_4 и ω_1 их заданные числовые значения. Найдем соотношения, по которым можно вычислить угловые скорости звеньев для заданного момента времени:

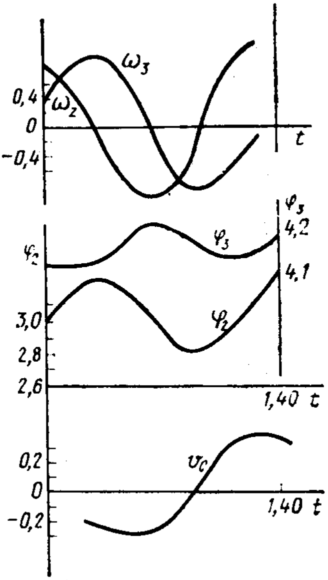


Рис. 35

$$\omega_2 = -0{,}804\frac{\cos\varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{[\cos\varphi_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)]};$$

$$\omega_3 = -(1{,}51\cos\varphi_1 + 1{,}88\omega_2\cos\varphi_2)/\cos\varphi_3;$$

$$\omega_4 = -0{,}679\omega_3/\sin\varphi_4.$$

Чтобы определить законы вращения звеньев механизма, т. е. углы поворота φ_2, φ_3, φ_4 звеньев в зависимости от времени, надо эти соотношения проинтегрировать, использовав при этом еще три уравнения:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3; \quad \frac{d\varphi_4}{dt} = \omega_4.$$

Постоянные, которые появятся при интегрировании, нельзя задавать произвольно, так как исследуемая механическая система имеет одну степень свободы и эти постоянные между собой связаны. Они вычислены заранее при заданном значении $\varphi_1(0) = 0$ и даны в условии задачи.

Уравнения, определяющие требуемые в задаче величины, решаются с использованием ЭВМ. Приведем вариант программы счета на языке ФОРТРАН.

```
DATA DT, T, F1, F2, F3, F4, OM1/
*Ø. Ø7, Ø., Ø., 2.97, 4.17, 3.97, 3.74/
DO 12K=1,25
OM2= -Ø.8Ø4*(COS(F1)+SIN(F1-F3))/(COS(F2)+SIN(F2-F3))
OM3=-(1.51CO(F1)+1.88*OM2*COS(F2))/COS(F3)
OM4=-Ø.679*OM3/SIN(F4)
VC=Ø.87*OM4*COS(F4)
PRINT10131, T32731T
OM2, OM3, OM4, VC, F2, F3, F4
10131 FORMAT (8E12.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
F3=F3+OM3*DT
F4=F4+OM4*DT
12T=T+DT
STOP
END
```

В программе приняты следующие обозначения

t	Δt	φ_1	φ_2	φ_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	v_C
T	DT	F1	F2	F3	OM1	OM2	OM3	OM4	VC

Интегрирование системы уравнений производится по конечно-разностной схеме Эйлера с шагом $\Delta t = T_1/24$, где T_1 — время полного оборота кривошипа *1*.

Ответ. Результаты вычислений представлены графиками угловых скоростей и углов поворота шатуна *2*, колеса *3* и графиком скорости ползуна *5* (рис. 35).

Ускорение любой точки фигуры, совершающей плоское движение, равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорений точки при вращении фигуры относительно полюса.

Ускорение точек фигуры при плоском движении. Чтобы определить проекции ускорения точки K плоской фигуры, надо продифференцировать равенства (59), выражающие проекции скорости этой точки. Введем обозначения $x_1 = x - x_E$ и $y_1 = y - y_E$ и перепишем эти равенства в следующем виде:

$$\dot{x} = \dot{x}_E - y_1\dot{\varphi}; \quad \dot{y} = \dot{y}_E + x_1\dot{\varphi};$$

дифференцируя, получим:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_E - y_1\ddot{\varphi} - \dot{y}_1\dot{\varphi}, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_E + x_1\ddot{\varphi} + \dot{x}_1\dot{\varphi}.$$

По формулам Эйлера (48)

$$\dot{x}_1 = -y_1\dot{\varphi} \text{ и } \dot{y}_1 = x_1\dot{\varphi}$$

и предыдущие уравнения принимают вид:

$$a_x = a_{Ex} - y_1\varepsilon - x_1\omega^2, \quad a_y = a_{Ey} + x_1\varepsilon - y_1\omega^2. \tag{63}$$

В правых частях этих равенств согласно (56) вторые члены выражают проекции касательного, а третьи — проекции центростремительного ускорения точки K во вращательном движении фигуры относительно полюса E. Они отличаются от известных равенств (56) только тем, что в данном случае ось вращения проходит не через начало координат O, а через полюс E (рис. 36).

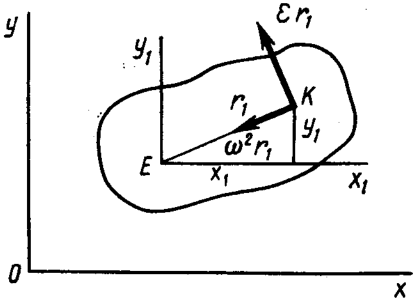


Рис. 36

Эти равенства показывают, что проекции на какую-либо неподвижную ось ускорения каждой точки K фигуры равны алгебраической сумме проекций на эту ось трех его составляющих: ускорения полюса E, касательного ускорения точки K во вращении фигуры вокруг полюса E

и центростремительного ускорения точки K в том же движении фигуры.

Можно записать эти равенства и в геометрической форме. В самом деле, если проекция вектора ускорения на всякую ось равна алгебраической сумме проекций на ту же ось трех векторов, то вектор ускорения точки K можно определить как геометрическую сумму трех векторов: ускорения полюса E, касательного ускорения точки K во вращательном движении фигуры вокруг полюса E и центростремительного ускорения точки K в том же движении фигуры:

$$\vec{a}=\vec{a}_E+\vec{a}_{rT}+\vec{a}_{rN}, \tag{64}$$

где, обозначив через r_1 расстояние данной точки от полюса E, получим:

$$a_{rT}=\varepsilon r_1 \text{ и } a_{rN}=\omega^2 r_1.$$

В каждое мгновение в плоскости фигуры имеется одна точка (*мгновенный центр ускорений*), ускорение которой $a_{мцу}$ равно нулю. Ускорения остальных точек фигуры в это мгновение можно представить как ускорение во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений. Мгновенные центры скоростей и ускорений не совпадают между собой.

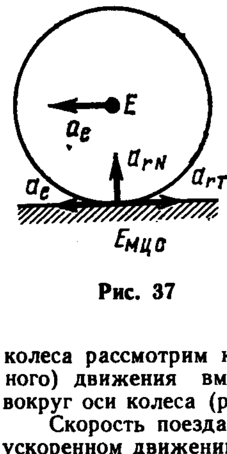


Рис. 37

Задача № 18. Электропоезд при отходе от станции движется по прямолинейному участку пути с ускорением $a_T=3$ м/с², причем колеса катятся без буксования и без скольжения. Найти ускорение мгновенного центра скоростей колеса через 2 с после отхода поезда, если радиус колеса 0,5 м.

Решение. Мгновенный центр скоростей лежит на ободе колеса в точке касания его с рельсом. Движение колеса рассмотрим как состоящее из переносного (поступательного прямолинейного) движения вместе с центром E колеса и относительного вращательного вокруг оси колеса (рис. 37).

Скорость поезда, а следовательно, и скорость точки E через 2 с при равноускоренном движении составляет $v=a_T t=6$ м/с.

Деля эту величину на расстояние точки E от мгновенного центра скоростей $E_{мцс}$, находим угловую скорость колеса в конце второй секунды:

$$\omega=v/r=6/0{,}5=12 \text{ рад/с}.$$

Определим также угловое ускорение колеса

$$\varepsilon=a_T/r=3/0{,}5=6 \text{ рад/с}^2.$$

Теперь есть все данные для определения ускорения точек колеса по формуле (64). Ускорение мгновенного центра скоростей, как и всякой точки колеса, выражено суммой трех составляющих:

1) ускорения a_e, равного ускорению полюса E, но приложенного в данной точке $E_{мцс}$ (ускорение задано 3 м/с²); если поезд движется влево, то и ускорение направлено горизонтально влево (см. рис. 37);

2) касательного ускорения точки при вращении колеса вокруг центра E; эта составляющая εr равна 3 м/с^2; если поезд движется влево, то колеса вращаются против вращения часовой стрелки и составляющая ускорения в нижней точке колеса направлена вправо по касательной;

3) центростремительного ускорения $\omega^2 r = 144 \cdot 0{,}5 = 72$ м/с^2, направленного к центру колеса.

Направления этих двух составляющих у всех точек обода колеса различны. В наинизшей точке абсолютное ускорение найдем, складывая три его составляющие. Оно равно 72 м/с^2 и направлено вверх. Абсолютная скорость мгновенного центра скоростей в данное мгновение равна нулю, абсолютное ускорение мгновенного центра скоростей нулю не равно.

Ответ: $a = 72$ м/с^2 и направлено вверх.

Глава V

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 14. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЯ

Абсолютным движением называют движение точки или системы точек по отношению к основной системе отсчета.

Абсолютное движение. Механическое движение выражается в изменении с течением времени взаимных положений тел (или частей тела) и может быть отмечено лишь относительно каких-либо других тел. Реальные или условные тела, по отношению к которым определяют положения других движущихся тел и которые принимают за системы отсчета, тоже не неподвижны.

Но для целей механики далеко не всегда нужно иметь неподвижную систему отсчета. Так, например, если передвигается какой-либо груз с носа корабля на корму, то представляет интерес движение груза по палубе независимо от движения корабля. В подобных случаях в кинематике можно условно принять за неподвижную любую систему отсчета и назвать ее *основной системой отсчета*. Движение же точки (или системы точек) по отношению к основной системе отсчета называют *абсолютным движением*.

Относительным движением называют движение точки или системы точек по отношению к подвижной системе отсчета.

Относительное движение. Встречаются случаи, когда приходится изучать движение точки или тела по отношению к системе отсчета, которая сама передвигается относительно другой системы, принятой за основную.

При рассмотрении движения точки или тела по отношению к двум системам отсчета ту систему, которая движется относительно основной системы отсчета, называют *подвижной системой отсчета*.

Так, например, перемещение корабля в море, измеренное при помощи лага *, не учитывает снос корабля морским течением.

Можно представить себе подвижную систему координат, плы-

* Лаг — механический или гидравлический инструмент для измерения скорости корабля относительно воды.

вущую вместе с водой по течению, т. е. передвигающуюся относительно другой системы отсчета, принятой за основную. Движения корабля можно рассматривать по отношению к двум системам отсчета: по отношению к подвижной системе (связанной с водой) и к основной (связанной с материками, принимаемыми за неподвижные). Движение корабля по отношению к подвижной системе координат, измеряемое лагом, является относительным движением корабля. Вообще *относительным движением* называют движение (точки, тела или системы точек) по отношению к подвижной системе отсчета. Относительное движение изучают обычно в тех случаях, когда приходится учитывать не только движение данного объекта по отношению к подвижной системе отсчета, но и движение самой системы отсчета.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета по отношению к основной системе отсчета.

Переносное движение. Так, в данном примере, чтобы знать движение корабля относительно берегов, надо кроме движения корабля относительно воды знать также и движение воды, т. е. движение подвижной системы отсчета относительно основной. Движение подвижной системы отсчета по отношению к основной системе отсчета называют *переносным движением*.

Во многих задачах кинематики переносным бывает движение среды, в которой находится тот объект, движение которого нужно изучить. В только что рассмотренном примере течение воды действительно переносит корабль. Еще один пример: человек идет по поезду. Движение поезда является переносным движением для человека, а движение человека относительно вагонов является относительным. Поезд переносит (в буквальном смысле слова) человека. Но иногда переносное движение не является движением среды, которая увлекает за собой данный объект. Например, рассматривая движение Земли вокруг ее оси и вокруг Солнца, можно первое из этих движений считать относительным, а второе — переносным, хотя нет такой среды, которая вращалась бы вокруг Солнца, увлекая за собой и Землю.

Сложным движением называют абсолютное движение точки или системы точек, составляемое из их относительного и переносного движений.

Сложное (составное) движение. В первых двух примерах движение объекта (корабля, человека) состоит из двух движений, которые названы относительным и переносным. В третьем примере Земля совершает движение, которое искусственно разложено на относительное и переносное. Часто, чтобы упростить изучение какого-либо сложного движения, это движение искусственно раскладывают на более простые, называя одно из них относительным, другое — переносным. *Сложным,* или *составным, движением* называют абсолютное движение точки или системы точек, состоящее (или составляемое) из относительного движения по отношению к подвижной системе отсчета и переносного движения вместе с подвижной системой отсчета.

Если в сложном движении мысленно прекратить одно из составляющих движений, то получим второе составляющее движение. При решении некоторых задач бывает удобно пользоваться таким приемом:

1) чтобы определить относительное движение, мысленно остановим переносное;

2) чтобы определить переносное движение, мысленно остановим относительное.

Возвращаясь к первому из только что разобранных примеров, мысленно остановим морское течение; корабль будет двигаться относительно воды, но не будет переноситься течением; останется только одно движение — относительное. Остановим теперь собственный ход корабля, но предоставим воде продолжать свое течение, и корабль поплывет по течению; останется только одно движение корабля — переносное.

Также легко выделить относительное и переносное движения во втором примере. Остановим мысленно поезд, но предоставим человеку идти по вагону, и получим относительное движение человека; остановим мысленно человека в его движении по поезду, но не будем останавливать поезд, и найдем переносное движение человека.

Движение точки, тела или системы точек часто рассматривают как сложное, мысленно раскладывая его на два или несколько движений более простых.

Несколько сложнее третий пример (движение Земли). Здесь нет движения среды, переносящей Землю, подобно морскому течению, переносящему корабль. Лишь мысленно движение Земли принимаем за сложное, искусственно раскладываем на переносное и относительное, чтобы упростить его, более наглядно себе представить и легче понять. Поскольку движение земного шара по отношению к основной системе, связанной с Солнцем и звездами, искусственно рассматриваем как сложное, постольку от нас зависит, как разложить это движение на переносное и относительное. Можно считать, что подвижная система отсчета движется вместе с Землей вокруг Солнца поступательно (рис. 38, *а*) или вращательно (рис. 38, *б*). В зависимости от этого, конечно, изменится и относительное движение. Земля совершает $366^1/_4$ оборота в год относительно поступательно движущихся осей и на один оборот меньше относительно осей, вращающихся вокруг Солнца и совершающих один оборот в год.

Такой искусственный метод разложения движения на относительное и переносное широко применяют в различных областях механики. Л. Пуансо в предисловии ко второму изданию своей книги «Элементы статики» (1824) писал даже о невозможности представить наглядно движение тел иначе, как в виде одновременного перемещения и вращения.

Очень часто это движение раскладывают не на два, а на большее число составляющих движений. Напомним, что так уже было при изучении движения точки как составного из трех прямолиней-

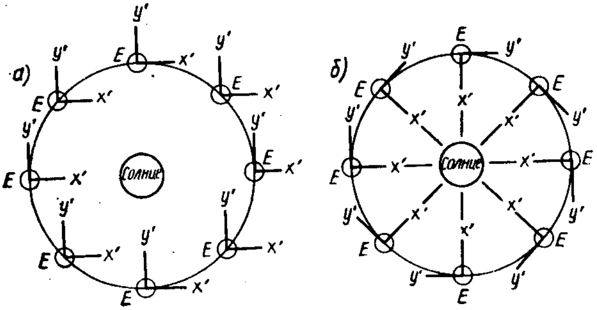


Рис. 38

ных движений, параллельных осям координат. Такой же прием применялся при разложении плоского движения тела на переносное поступательное вместе с полюсом и относительное вращательное вокруг полюса.

§ 15. ТЕОРЕМЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СКОРОСТЕЙ И ПАРАЛЛЕЛОГРАММА УСКОРЕНИЙ

Относительной скоростью и ускорением точки называют ее скорость и ускорение по отношению к подвижной системе отсчета.

Относительные скорость и ускорение. Пусть некоторая точка M (рис. 39) движется относительно системы координат $x'Ey'z'$. Если бы эту систему координат считали неподвижной, то движение, скорость и ускорение точки по отношению к этим координатам назвали бы абсолютными. Но пусть эта система координатных осей по условиям задачи движется относительно основной системы отсчета $xOyz$. В таком случае скорость и ускорение точки M по отношению к подвижной системе отсчета (системы координат $x'Ey'z'$) называют *относительными*.

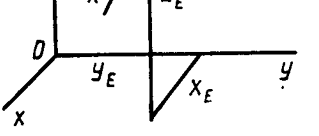


Рис. 39

Обозначим относительную скорость $\vec{v}_r$ (от латинского слова relativus — относительный), а относительное ускорение $\vec{a}_r$.

Для обозначения проекций относительных скоростей и ускорений рядом с индексом r ставят второй индекс. Так, v_{rx} — проекция относительной скорости на ось Ox; $\vec{a}_{rN}$ — относительное нормальное ускорение.

Переносными скоростью и ускорением точки называют абсолютные скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данное мгновение совпадает движущаяся точка.

Переносные скорость и ускорение. Чтобы определить переносное движение точки M, прекратим мысленно относительное движение, закрепив ее в координатных осях $x'Ey'z'$ в том положении, которое она занимает в данное мгновение. Таким образом, будем считать, что точка M неизменно скреплена с осями $x'Ey'z'$, но оси продолжают двигаться относительно основной системы координат $xOyz$ вместе с точкой M. Тогда скорость и ускорение точки M относительно основных осей координат будут скоростью и ускорением точки M в ее переносном движении.

Переносной скоростью точки M называют абсолютную скорость той точки подвижной системы отсчета, с которой в данное мгновение совпадает точка M.

Переносным ускорением точки M называют абсолютное ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данное мгновение совпадает точка M.

Обозначим переносную скорость точки $\vec{v}_e$ (от французского слова entraîner — увлекать с собой), а переносное ускорение — $\vec{a}_e$. Для обозначения проекций переносных скорости и ускорения на какую-либо ось будем ставить рядом с индексом e индекс соответствующей оси.

Вектор абсолютной скорости равен сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e$.

Параллелограмм скоростей. Ознакомившись с понятиями относительной и переносной скоростей точки, найдем зависимость между этими скоростями и *абсолютной скоростью*, т. е. скоростью точки по отношению к основной системе отсчета.

Пусть подвижная система координат $x'Ey'z'$ (рис. 40) движется поступательно. В таком случае оси Ex', Ey' и Ez' остаются параллельными своему начальному направлению. Для простоты выкладок пусть эти оси направлены параллельно осям основной системы координат. Тогда во все время движения имеем

$$Ex' \parallel Ox; \; Ey' \parallel Oy; \; Ez' \parallel Oz.$$

Рассмотрим сначала относительное движение точки M и для этого остановим мысленно движение подвижной системы отсчета. Напишем уравнения движения точки M относительно подвижной системы отсчета

$$x'=x'(t); \; y'=y'(t); \; z'=z'(t). \qquad (65)$$

Продифференцировав по времени и обозначив, как обычно, точкой производные по времени, найдем проекции относительной скорости на подвижные оси координат:

$$v_{rx'}=\dot{x}'; \; v_{ry'}=\dot{y}'; \; v_{rz'}=\dot{z}'.$$

Так как оси подвижной системы координат параллельны соответствующим осям основной системы, то проекции относительной скорости на оси Ex', Ey' и Ez' соответственно равны проекциям на параллельные им оси Ox, Oy и Oz основной системы отсчета:

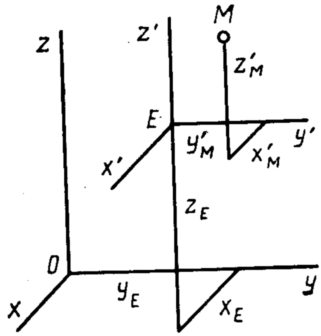


Рис. 40

$$v_{rx}=\dot{x}'; \ v_{ry}=\dot{y}'; \ v_{rz}=\dot{z}'.$$

Зная проекции относительной скорости, легко найдем по формулам (16) и (17) значение и направление полной относительной скорости.

Чтобы выделить переносное движение, мысленно остановим движение точки относительно подвижной системы координат, но предоставим самой подвижной системе $x'Ey'z'$ продолжать движение.

Напишем по формуле (37) уравнения переносного поступательного движения

$$x_E=x_E(t); \ y_E=y_E(t); \ z_E=z_E(t).$$

Продифференцировав эти равенства, получим проекции переносной скорости точки M, которые при поступательном движении системы равны проекциям скорости точки E:

$$v_{ex}=\dot{x}_E; \ v_{ey}=\dot{y}_E; \ v_{ez}=\dot{z}_E.$$

Величину и направление вектора полной переносной скорости точки M легко найти по формулам (16) и (17).

Для определения абсолютной скорости точки M найдем сначала ее координаты x, y и z. Применив формулу преобразования начала координатных осей при сохранении направления осей, получим

$$x=x'+x_E; \ y=y'+y_E; \ z=z'+z_E.$$

Точка M находится в сложном движении, следовательно, x, y и z изменяются с течением времени, причем первые члены правых частей этих равенств изменяются согласно уравнениям (65), а вторые — согласно уравнениям (37). Продифференцировав их по времени, получим проекции абсолютной скорости точки M:

$$v_x=\dot{x}'+\dot{x}_E; \ v_y=\dot{y}'+\dot{y}_E; \ v_z=\dot{z}'+\dot{z}_E,$$

или

$$v_x=v_{rx}+v_{ex}; \ v_y=v_{ry}+v_{ey}; \ v_z=v_{rz}+v_{ez}. \qquad (66)$$

Эти равенства показывают, что проекция абсолютной скорости на какую-либо ось равна сумме проекций относительной и переносной скоростей на ту же ось. Следовательно, вектор абсолютной скорости точки равен сумме векторов относительной скорости и переносной скорости той же точки:

$$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e. \qquad (66')$$

Поэтому доказанную теорему называют теоремой *параллелограмма скоростей.*

Равенства (66) и (66′) выражают связь между тремя скоростями (абсолютной, относительной и переносной) одной и той же точки и позволяют определить любую из этих скоростей, если известны две другие.

Эти равенства доказаны в предположении, что переносное движение поступательное, но справедливы при всяком переносном движении, как это будет показано в § 16.

Из равенств (66) непосредственно получаем:

1) проекция относительной скорости точки на какую-либо ось равна разности проекций абсолютной и переносной скоростей той же точки на ту же ось; 2) проекция переносной скорости точки на какую-либо ось равна разности проекций абсолютной и относительной скоростей той же точки на ту же ось.

Из векторного равенства (66) получаем

$$\vec{v}_r=\vec{v}-\vec{v}_e=\vec{v}+(-\vec{v}_e).$$

Отсюда вытекает следующее правило: чтобы найти относительную скорость точки, надо сложить вектор абсолютной скорости точки с вектором, равным по модулю, но обратным по направлению вектору ее переносной скорости, т. е. «остановить переносное движение». Аналогично, чтобы найти переносную скорость точки, надо сложить вектор абсолютной скорости точки с вектором, равным по модулю, но обратным по направлению вектору ее относительной скорости, т. е. «остановить относительное движение».

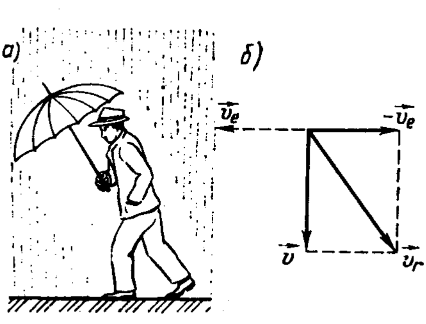


Рис. 41

Задача № 19. (*Некрасов А. И.* Курс теоретической механики в векторном изложении, ч. 2, ГИТТЛ, 1933). Вертикально падают дождевые капли со скоростью 2 м/с. Пешеход идет справа налево со скоростью 1,5 м/с. Найти скорость дождя по отношению к пешеходу (рис. 41, *а*).

Решение. В данной задаче за основную систему отсчета примем Землю. Подвижная система отсчета связана с пешеходом. Вертикальная скорость дождя является абсолютной скоростью ($v=2$ м/с); переносной скоростью v_e является скорость подвижной системы отсчета, т. е. скорость человека, направленная влево и равная 1,5 м/с. Чтобы найти вектор относительной скорости, сложим вектор абсолютной скорости (рис. 41, *б*) с вектором, который по величине равен переносной скорости, а по направлению противоположен ей, т. е. направлен слева направо:

$$v_r = \sqrt{4+2{,}25} = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

Вектор относительной скорости составляет с вертикалью угол α, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5/2 = 0{,}75.$$

О т в е т. $v_r = 2{,}5$ м/с; $\alpha = 37°$.

Задача № 20. (М). Корабль плывет на юг со скоростью 42,3 км/ч. Второй корабль идет курсом на юго-восток со скоростью 30 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля, определяемую наблюдателем, находящимся на палубе первого корабля. При вычислении принять $42{,}3 = 30\sqrt{2}$.

Решение. Задача аналогична предыдущей, но решать ее будем не в векторной, а в координатной форме, для чего перепишем уравнения (66) в следующем виде:

$$v_{rx} = v_x - v_{ex}; \quad v_{ry} = v_y - v_{ey}.$$

Построим основную систему координат, связанную с Землей, направив ось Ox на юг, а ось Oy — на восток (рис. 42). Подвижную систему отсчета свяжем с первым кораблем, так как относительно первого корабля надо определить скорость второго. Проекции абсолютной скорости второго корабля на оси основной системы

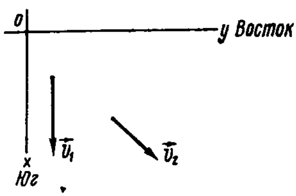


Рис. 42

$$v_x = 30\cos 45° = 15\sqrt{2};$$

$$v_y = 30\sin 45° = 15\sqrt{2}.$$

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета по отношению к основной. Поэтому в данной задаче переносной скоростью является скорость первого корабля. Ее проекции следующие:

$$v_{ex} = +30\sqrt{2}; \quad v_{ey} = 0.$$

Подставляя эти значения в написанные выше уравнения, найдем проекции относительной скорости:

$$v_{rx} = 15\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -15\sqrt{2}; \quad v_{ry} = 15\sqrt{2}.$$

По проекциям находим модуль

$$v_r = +\sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = 30 \text{ км/ч}$$

и направляющие косинусы относительной скорости

$$\cos\alpha = v_{rx}/v_r = -15\sqrt{2}/30 = -\sqrt{2}/2;$$

$$\cos\beta = v_{ry}/v_r = 15\sqrt{2}/30 = +\sqrt{2/2}.$$

Следовательно, относительная скорость второго корабля составляет углы по 45° с положительным направлением оси Oy и с отрицательным направлением оси Ox, т. е. направлена на северо-восток.

О т в е т. $v_r = 30$ км/ч и направлена на северо-восток.

Если переносное движение поступательное, то вектор абсолютного ускорения точки равен сумме векторов ее относительного и переносного ускорений.

Параллелограмм ускорений. В отличие от теоремы параллелограмма скоростей, применимой при всяком переносном движении, аналогичная теорема параллелограмма ускорений справедлива только в том случае, если переносное движение поступательное.

Пусть точка совершает сложное движение, причем подвижная система отсчета $x'Ey'z'$ движется поступательно по отношению к основной системе $xOyz$. Пусть соответствующие оси обеих координатных систем параллельны друг другу, это упростит доказательство (см. рис. 40).

Проекции относительной скорости точки уже определены. Продифференцировав эти равенства по времени, найдем проекции относительного ускорения точки

$$a_{rx}=\ddot{x}'; \ a_{ry}=\ddot{y}'; \ a_{rz}=\ddot{z}'.$$

Модуль и направление полного относительного ускорения можно найти по формулам (29) и (30).

Продифференцировав по времени проекции переносной скорости, найдем проекции ускорения точки в переносном поступательном движении

$$a_{ex}=\ddot{x}_E; \ a_{ey}=\ddot{y}_E; \ a_{ez}=\ddot{z}_E.$$

Модуль и направление полного переносного ускорения можно определить по формулам (29) и (30), применимым для всякого ускорения точки, независимо от того, является это ускорение абсолютным, относительным или переносным.

Чтобы определить проекции абсолютного ускорения точки (в рассматриваемом случае переносного поступательного движения, когда не изменяются направления осей $x'Ey'z'$), надо продифференцировать по времени равенства (66):

$$a_x=\ddot{x}'+\ddot{x}_E; \ a_y=\ddot{y}'+\ddot{y}_E; \ a_z=\ddot{z}'+\ddot{z}_E,$$

или

$$a_x=a_{rx}+a_{ex}; \ a_y=a_{ry}+a_{ey}; \ a_z=a_{rz}+a_{ez}. \tag{67}$$

Из этих равенств видно, что если переносное движение поступательное, то проекция абсолютного ускорения точки на ось состоит из суммы проекций на ту же ось относительного и переносного ускорений точки. Следовательно, вектор абсолютного ускорения точки в этом случае равен геометрической сумме двух векторов — относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e. \tag{67'}$$

В этом заключается теорема *параллелограмма ускорений.*

Равенства (67) и (67′) выражают связь между абсолютным, относительным и переносным ускорениями точки в случае, если переносное движение поступательное, и позволяют определить какое-либо из этих ускорений по двум другим.

Если относительное и переносное движения заданы в естественной форме, то для определения ускорений приходится сначала определять их нормальную и касательную составляющие. Так, для определения относительного ускорения надо определить относительное касательное и относительное нормальное ускорения, а уж потом по формулам (20) и (19) — полное относительное ускорение. Аналогично для определения переносного ускорения определяют переносные касательное и нормальное ускорения, а затем полное переносное ускорение. Для получения полного абсолютного ускорения нужно взять геометрическую сумму полного относительного и полного переносного ускорений, которые составляют между собой, вообще говоря, угол, отличный от прямого.

Приводим схему разложения полного абсолютного ускорения точки для случая переносного поступательного движения. При решении задач на параллелограмм ускорений бывает полезно написать схему и заполнять ее справа налево:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & \vec{a}_{rT} \\
 & \vec{a}_r \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & \vec{a}_{rN} \\
\vec{a} \arrow[uuur, dash] \arrow[dddr, dash] & & \\
 & & \vec{a}_{eT} \\
 & \vec{a}_e \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & \vec{a}_{eN}\,.
\end{tikzcd}
\qquad (68)
$$

Часто определяют абсолютное ускорение по его проекциям a_x, a_y и a_z на оси основной системы координат и получают проекции результирующего вектора $\vec{a}$ как алгебраические суммы проекций составляющих $\vec{a}_{rT}$, $\vec{a}_{rN}$, $\vec{a}_{eT}$ и $\vec{a}_{eN}$ на те же оси:

$$
\left.\begin{aligned}
a_x &= a_{rTx} + a_{rNx} + a_{eTx} + a_{eNx};\\
a_y &= a_{rTy} + a_{rNy} + a_{eTy} + a_{eNy};\\
a_z &= a_{rTz} + a_{rNz} + a_{eTz} + a_{eNz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (69)
$$

Эти равенства являются лишь некоторым видоизменением равенств (67).

Если переносное движение не поступательное, то абсолютное ускорение точки состоит из суммы трех векторов: относительного ускорения, переносного ускорения и ускорения Кориолиса.

§ 16. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ ПРИ ПЕРЕНОСНОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

При сложном (составном) движении точки в случае непоступательного переносного движения возникает добавочное ускорение, называемое ускорением Кориолиса: $a_c = 2\omega v_r \sin(\widehat{\omega v_r})$.

Величина ускорения Кориолиса. Теорема параллелограмма ускорений пригодна только в частном случае, если подвижная система отсчета движется поступательно. Если же переносное движение не поступательное, то у абсолютного ускорения появляется еще одна составляющая, называемая *ускорением Кориолиса*, а также *добавочным*, или *поворотным, ускорением* *. Выведем формулы, позволяющие определить абсолютное ускорение при всяком сложном движении точки.

Пусть точка M (рис. 43) движется относительно подвижной системы $x'Oy'z'$, и это движение определяется какими-либо уравнениями

$$x' = x'(t); \quad y' = y'(t); \quad z' = z'(t).$$

Пусть подвижная система отсчета вращается вокруг оси Oz основной системы согласно уравнению $\varphi = \varphi(t)$.

Сохраним и в этом параграфе расположение осей координат (см. рис. 20), при котором оси Oz' и Oz подвижной и неподвижной систем совпадают между собой и с осью вращения, а плоскость $x'Oy'$ находится в плоскости xOy. Тогда координаты точки M в основной системе определяются соотношениями:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi;$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$
$$z = z'. \qquad (70)$$

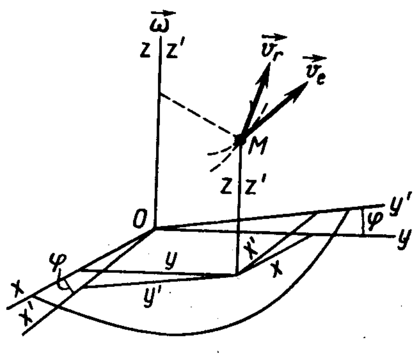


Рис. 43

Эти равенства отличаются от уже известных равенств (47) тем, что здесь координаты x', y' и z' переменны, тогда как в равенствах (47) они постоянны.

Если мысленно остановить точку M в ее относительном движении, т. е. считать ее координаты x', y' и z' постоянными, но сохранить переносное вращение, то, дифференцируя равенства (70) по времени, найдем знакомые выражения (48) проекций скорости

* Теория сложного движения точки создана Гаспаром Кориолисом в 1831 г.

точки вращающегося тела, которая в данном случае является переносной скоростью точки M:

$$\left.\begin{aligned} v_{ex} &= -(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\dot{\varphi} = -y\omega;\\ v_{ey} &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\dot{\varphi} = +x\omega;\\ v_{ez} &= 0. \end{aligned}\right\}\ \text{Проекции переносной скорости}$$

Дифференцируя вторично, найдем проекции переносного ускорения, которые выражаются также известными формулами (55)

$$\left.\begin{aligned} a_{ex} &= -(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\ddot{\varphi} -\\ &\quad -(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 = -y\varepsilon - x\omega^2;\\ a_{ey} &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\ddot{\varphi} -\\ &\quad -(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 = \varepsilon x - y\omega^2;\\ a_{ez} &= 0. \end{aligned}\right\}\ \text{Проекции переносного ускорения}$$

Чтобы определить относительное движение, мысленно остановим переносное, т. е. будем считать φ постоянной, а x', y' и z' — переменными. Дифференцируя при таких условиях равенства (70) по времени, определим проекции относительной скорости

$$\left.\begin{aligned} v_{rx} &= \dot{x}'\cos\varphi - \dot{y}'\sin\varphi;\\ v_{ry} &= \dot{x}'\sin\varphi + \dot{y}'\cos\varphi;\\ v_{rz} &= \dot{z}'. \end{aligned}\right\}\ \text{Проекции относительной скорости}$$

Заметим попутно, что, возводя каждое из этих равенств в квадрат, складывая и извлекая квадратный корень, можно определить относительную скорость (рис. 44). Если же возвести в квадрат и сложить лишь два первых равенства, то, извлекая корень, получим, очевидно, величину проекции относительной скорости на плоскость xOy

$$\sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = v_r \sin\gamma_r.$$

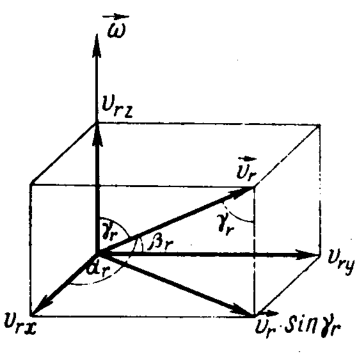


Рис. 44

Напомним, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения, а потому угол γ_r есть угол между векторами относительной и угловой скоростей, и последнее равенство можно записать так:

$$\sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = v_r \sin(\widehat{\omega v_r}).$$

(Это соотношение скоро понадобится.)

Чтобы получить проекции относительного ускорения, надо продифференцировать по времени выражения, полученные для проекций относительной скорости, по-прежнему считая φ постоянной:

$$\left.\begin{aligned} a_{rx}&=\ddot{x}'\cos\varphi-\ddot{y}'\sin\varphi;\\ a_{ry}&=\ddot{x}'\sin\varphi+\ddot{y}'\cos\varphi;\\ a_{rz}&=\ddot{z}'.\end{aligned}\right\}\ \text{Проекции относительного ускорения}$$

Чтобы определить проекции абсолютной скорости точки M, надо продифференцировать уравнения (70) по времени, считая все величины переменными:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\dot{x}'\cos\varphi-\dot{y}'\sin\varphi-(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\dot{\varphi};\\ v_y&=\dot{x}'\sin\varphi+\dot{y}'\cos\varphi+(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\dot{\varphi};\\ v_z&=\dot{z}',\end{aligned}\right\}\ \text{Проекции абсолютной скорости}$$

или получим равенства (66)

$$v_x=v_{rx}+v_{ex};\quad v_y=v_{ry}+v_{ey};\quad v_z=v_{rz}+v_{ez}.$$

Получена теорема параллелограмма скоростей, которая, следовательно, остается в силе и при вращательном переносном движении.

Чтобы определить проекции абсолютного ускорения, возьмем вторые производные, опять-таки считая все величины переменными:

$$\left.\begin{aligned} a_x&=(\ddot{x}'\cos\varphi-\ddot{y}'\sin\varphi)-(\dot{x}'\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi)\dot{\varphi}-\\ &-(\dot{x}'\sin\varphi+\dot{y}'\cos\varphi)\dot{\varphi}-(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2-\\ &\qquad-(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\ddot{\varphi};\\ a_y&=(\ddot{x}'\sin\varphi+\ddot{y}'\cos\varphi)+(\dot{x}'\cos\varphi-\dot{y}'\sin\varphi)\dot{\varphi}+\\ &+(\dot{x}'\cos\varphi-\dot{y}'\sin\varphi)\dot{\varphi}-(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+\\ &\qquad+(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\ddot{\varphi};\\ a_z&=\ddot{z}',\end{aligned}\right\}\ \text{Проекции абсолютного ускорения}$$

или

$$a_x=a_{rx}+a_{ex}-2(\dot{x}'\sin\varphi+\dot{y}'\cos\varphi)\dot{\varphi}=a_{rx}+a_{ex}-2v_{ry}\omega;$$

$$a_y=a_{ry}+a_{ey}+2(\dot{x}'\cos\varphi-\dot{y}'\sin\varphi)\dot{\varphi}=a_{ry}+a_{ey}+2v_{rx}\omega;$$

$$a_z=a_{rz}.$$

Таким образом, в выражениях проекций абсолютного ускорения вдобавок к проекциям относительного и переносного ускорений появляется еще одно слагаемое, выражающее проекции добавочного ускорения a_C:

$$a_{Cx} = -2\omega v_{ry};\; a_{Cy} = +2\omega v_{rx};\; a_{Cz} = 0. \tag{71}$$

Определим ускорение Кориолиса

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 2\omega \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2},$$

или, заменив корень полученным выше значением, находим окончательно

$$a_C = 2\omega v_r \sin(\widehat{\omega v_r}). \tag{72}$$

Формула (72) выведена в предположении, что переносное движение вращательное. Она остается без изменений и при всяком ином непоступательном переносном движении.

Итак, если переносное движение непоступательное, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех составляющих: относительного ускорения, переносного ускорения и ускорения Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C. \tag{73}$$

В случае если переносное движение непоступательное, необходимо дополнить ускорением Кориолиса и схему (68), которая принимает следующий вид:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vec{a}_{rT} \\
 & \vec{a}_r \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & \vec{a}_{rN} \\
 & & \vec{a}_{eT} \\
\vec{a} \arrow[uuur, dash, dashed] \arrow[r, dash] \arrow[ddr, dash, dashed] & \vec{a}_e \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & \vec{a}_{eN} \\
 & \vec{a}_C. &
\end{tikzcd}
\tag{74}
$$

Пользоваться этой схемой при решении задач надо так же, как и схемой (68), заполняя ее справа и геометрически складывая составляющие.

В ы в о д у с к о р е н и я К о р и о л и с а д л я ч а с т н о г о с л у ч а я. Приведем элементарный вывод ускорения Кориолиса для одного частного случая. Точка M движется по прямолинейному стержню, равномерно вращающемуся вокруг оси O (рис. 45), перпендикулярной стержню и плоскости чертежа. Примем начальное положение стержня за ось Ox. В начальное мгновение точка M имеет относительную скорость v_r и переносную скорость ωr. Через некоторый небольшой промежуток времени стержень повернулся на угол $\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t$, относительная скорость точки M

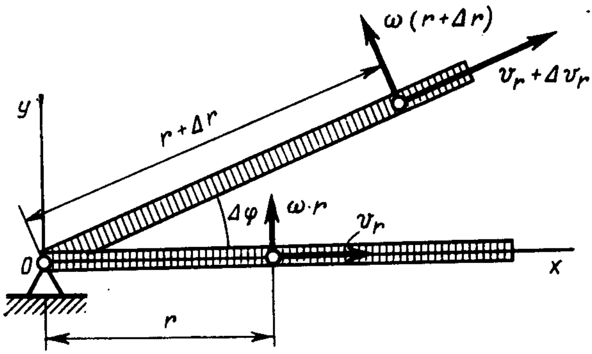


Рис. 45

стала $v_r+\Delta v_r$, а переносная $\omega(r+\Delta r)$. Чтобы определить ускорение точки M, найдем приращение скорости, поделим на приращение времени и перейдем к пределу при Δt, стремящемуся к нулю. Вычисление проведем в проекциях на оси координат

$$\Delta v_x=v_x-v_{x0}=(v_r+\Delta v_r)\cos\Delta\varphi-\omega(r+\Delta r)\sin\Delta\varphi-v_r.$$

Полагая $\cos\Delta\varphi=1$ и $\sin\Delta\varphi=\Delta\varphi$, раскрывая скобки и отбрасывая величины второго порядка малости, получим

$$\Delta v_x=\Delta v_r-\omega r\Delta\varphi.$$

Делим все члены этого равенства на Δt и переходим к пределу

$$a_x=\dot{v}_r-\omega^2 r.$$

Относительное движение прямолинейно, поэтому $a_{rN}=0$ и $a_r=a_{rT}=\dot{v}_r$. Переносное вращательное движение равномерно, поэтому $a_{eT}=0$ и $a_e=a_{eN}=\omega^2 r$, и направлено к центру O. Таким образом и относительное и переносное ускорения направлены по оси Ox и спроецировались на нее в полную величину. Но вследствие того, что переносное движение вращательное (хотя относительное движение прямолинейно), меняется направление относительной скорости и вследствие перемещения точки по вращающемуся стержню меняется модуль переносной скорости (хотя переносное вращение равномерное). Оба эти фактора учтены ускорением Кориолиса, которое получим, взяв проекции на ось Oy:

$$\Delta v_y = v_y - v_{y0} = (v_r + \Delta v_r)\sin\Delta\varphi + \omega(r + \Delta r)\cos\Delta\varphi - \omega r.$$

Ввиду малости угла поворота $\cos\Delta\varphi = 1$ и $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, разделим все члены уравнения на Δt и перейдем к пределу при Δt, стремящемуся к нулю:

$$a_y = \lim_{\Delta t \to 0}(v_r\Delta\varphi/\Delta t + \omega\Delta r/\Delta t) = 2\omega v_r.$$

Из проделанных математических выкладок получим вывод, что ускорение Кориолиса по модулю равно удвоенному произведению угловой скорости на относительную скорость и направлено перпендикулярно оси вращения и вектору относительной скорости.

Ускорение Кориолиса существует только при сложном движении, если переносное движение непоступательное.

При каком движении бывает ускорение Кориолиса? В правой части выражения (72) ускорения Кориолиса множителями являются относительная скорость точки, угловая скорость подвижной системы отсчета и синус угла между векторами этих скоростей. Относительная скорость бывает только при сложном движении, поэтому и ускорение Кориолиса может быть только при сложном движении. Если нет относительной скорости точки, т. е. если $v_r = 0$, то не может быть и ускорения Кориолиса. Однако ускорение Кориолиса существует не при всяком сложном движении точки. Так, если переносное движение поступательное, $\omega = 0$, то нет и ускорения Кориолиса. Из формулы (72) видно, что и в сложном движении точки, и при переносном вращательном движении ускорение Кориолиса равно нулю, если относительная скорость параллельна оси вращения. Так, например, корабль, плывущий по меридиану, имеет ускорение Кориолиса, если рассматривать его движение как составное — из относительного движения корабля и переносного движения Земли. Это ускорение равно удвоенному произведению скорости корабля на угловую скорость Земли и на синус географической широты (рис. 46) и равнялось нулю в то время, когда корабль пересекал экватор и его относительная скорость была параллельна вектору угловой скорости Земли.

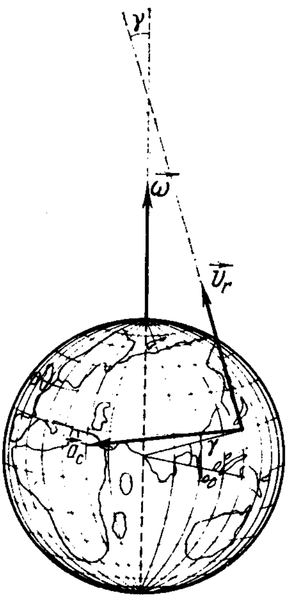


Рис. 46

Физическая причина ускорения Кориолиса заключается в изменении вектора переносной скорости от относительного движения и вектора относительной скорости от переносного движения.

Причина ускорения Кориолиса. Постараемся уяснить физические причины, вызывающие ускорение Кориолиса, для чего представим себе два прямолинейных отрезка O_1A_1 и O_2A_2 (рис. 47), по которым движутся точки B_1 и B_2. Штрихами отмечены положения этих отрезков и точек через промежуток времени Δt. Первый из отрезков движется поступательно, второй вращается вокруг O_2.

Существуют две физические причины ускорения Кориолиса:

1. Переносная скорость точки B_1 не зависит от положения ее на отрезке O_1A_1, так как по свойству поступательного движения скорости всех точек прямой O_1A_1 между собой равны. Напротив, переносная скорость точки B_2 равна $\omega \cdot O_2B_2$ и всецело зависит от ее положения. Переносная скорость точки B_2 меняется от относительного движения точки по вращающемуся отрезку O_2A_2. Чем быстрее вращается этот отрезок и чем быстрее движется точка B_2 по O_2A_2, тем значительнее изменяется переносная скорость точки B_2. Таким образом, изменение скорости точки в данное мгновение (т. е. ускорение точки), вызванное указанной причиной, пропорционально угловой и относительной скоростям. В этом заключается один из факторов, порождающих ускорение Кориолиса.

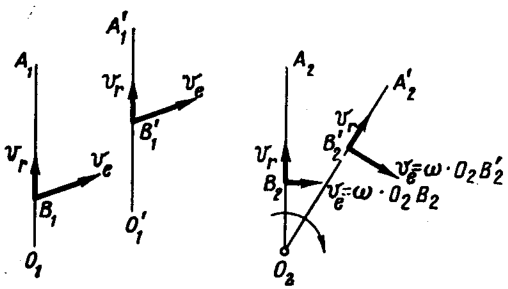


Рис. 47

2. Направление относительной скорости точки B_1 не меняется, так как по свойству поступательного движения прямая O_1A_1 передвигается параллельно самой себе. Напротив, направление относительной скорости точки B_2 непрерывно изменяется по мере вращения O_2A_2. Даже при прямолинейном относительном движении направление относительной скорости изменяется (вследствие переносного вращения). Изменение вектора скорости точки в данное мгновение (ускорение), вызванное этой причиной, тоже пропорционально угловой и относительной скоростям. В этом заключается другой фактор, порождающий ускорение Кориолиса. Ускорение Кориолиса как бы поворачивает вектор относительной скорости в направлении переносного вращения. По этой причине его иногда называют *поворотным ускорением* *.

---

* Термин «поворотное ускорение» предложен О. И. Сомовым (1872).

Вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен векторам угловой и относительной скоростей.

Направление ускорения Кориолиса. Вывод формулы ускорения Кориолиса показал, что проекция этого ускорения на Oz равна нулю. Отсюда следует, что вектор ускорения Кориолиса лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, или, иными словами, перпендикулярной вектору угловой скорости, который направлен по оси вращения Oz.

Уточним теперь направление ускорения Кориолиса в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Обозначим углы, составляемые ускорением Кориолиса с осью Ox и Oy, через α_C и β_C. Направляющие косинусы ускорений Кориолиса, т. е. косинусы углов α_C и β_C,

$$\cos\alpha_C = a_{Cx}/a_C = -2\omega v_{ry}/(2\omega v_r \sin\widehat{\omega v_r});$$

$$\cos\beta_C = a_{Cy}/a_C = +2\omega v_{rx}/(2\omega v_r \sin\widehat{\omega v_r}).$$

Углы, составляемые относительной скоростью точки с теми же осями, обозначим через α_r и β_r, направляющие косинусы относительной скорости

$$\cos\alpha_r = v_{rx}/v_r; \quad \cos\beta_r = v_{ry}/v_r.$$

Сравнивая направляющие косинусы ускорения Кориолиса с направляющими косинусами относительной скорости, находим, что удовлетворяется известное из аналитической геометрии условие перпендикулярности двух направлений — сумма произведений соответствующих направляющих косинусов равна нулю:

$$\cos\alpha_C\cos\alpha_r + \cos\beta_C\cos\beta_r = 0,$$

следовательно, ускорение Кориолиса перпендикулярно не только угловой, но и относительной скорости точки.

Отсюда вытекает следующее правило: для определения направления ускорения Кориолиса надо спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную Oz (оси вращения), и затем повернуть эту проекцию вокруг оси вращения на 90° в сторону переносного вращения. Следовательно, если переносное вращение происходит в положительном направлении, то проекцию $\vec{v}_{rxy}$ относительной скорости надо повернуть на 90° против хода стрелки часов, а если переносное вращение происходит в отрицательном направлении, то по ходу часовой стрелки. Это определяется самой сущностью поворотного ускорения, поворачивающего вектор относительной скорости в направлении переносного вращения. Этот же результат получится, если сравнивать знаки направляющих косинусов ускорения Кориолиса и относительной скорости.

Таким образом, ускорение Кориолиса по величине и направлению можно выразить удвоенным векторным произведением угловой и относительной скоростей

$$\boxed{\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r).} \tag{72'}$$

Если относительное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то угол между векторами угловой и относительной скоростей равен 90°, а $\sin 90° = 1$, и выражение ускорения Кориолиса упрощается

$$a_C = 2\omega v_r. \tag{72''}$$

В этом частном, но очень распространенном в технике случае для определения направления ускорения Кориолиса не нужно проецировать вектор относительной скорости точки, а достаточно повернуть его на 90° в плоскости движения точки в сторону переносного вращения. Так, например, движение ползуна B можно рассматривать как сложное, состоящее из относительного прямолинейного вдоль стержня со скоростью v_r и переносного вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа в точке O. Ускорение Кориолиса всегда перпендикулярно угловой скорости (оси вращения) и относительной скорости. Следовательно,

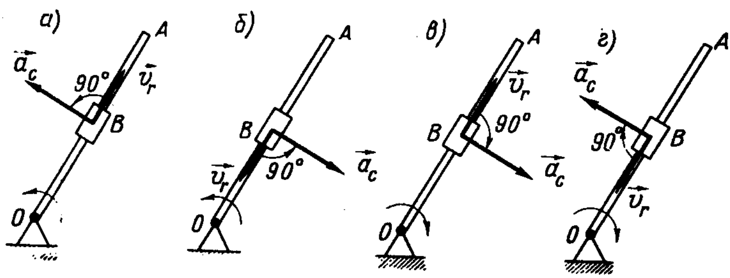


Рис. 48

оно лежит в плоскости чертежа и направлено перпендикулярно стержню в ту или иную сторону в зависимости от того, в какую сторону вращается стержень и в какую сторону по стержню движется ползун. Четыре возможных случая изображены на рис. 48, *а, б, в, г*.

Задача № 21. Прямая трубка (рис. 49, *а*) равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = \pi$ рад/с вокруг оси Oz, перпендикулярной плоскости чертежа в точке O. Шарик M совершает гармоническое колебание вдоль трубки по закону $x' = OM = A \sin \pi t$. Определить ускорение шарика при $t = 4$ с.

Решение 1. Рассмотрим движение шарика как сложное, состоящее из движения относительно трубки и движения вместе с трубкой (см. рис. 49, *а*). Для решения задачи воспользуемся схемой (74).

Чтобы определить относительное движение, мысленно остановим переносное движение трубки. Уравнение относительного движения шарика

$$x' = A \sin \pi t;$$

относительная скорость

$$v_r = \dot{x}' = A\pi \cos \pi t.$$

В относительном движении шарик имеет тангенциальное ускорение, направленное от точки M к точке O,

$$a_{rT} = \ddot{x}' = -A\pi^2 \sin \pi t.$$

Относительное движение в данном случае прямолинейное, поэтому относительное нормальное ускорение $a_{rN} = 0$.

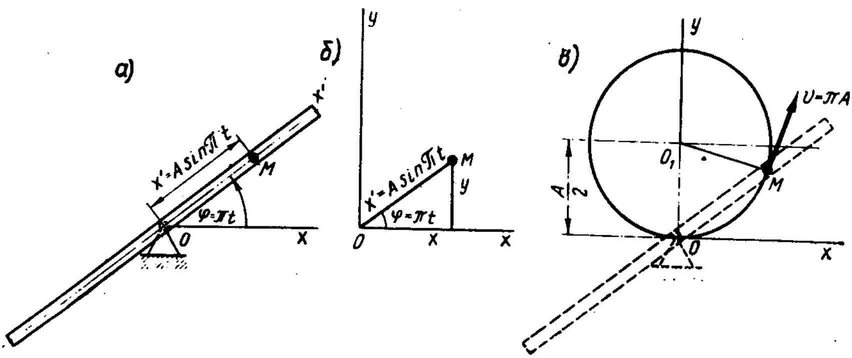


Рис. 49

Переносное движение обусловлено вращением трубки. Мысленно остановим шарик, предоставив трубке вращаться. Напишем уравнение (46) равномерного вращения трубки, положив $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \pi t.$$

Переносной скоростью шарика является вращательная скорость той точки среды (трубки), в которой в это мгновение находится шарик,

$$v_e = \omega r = A\pi \sin \pi t;$$

причем в этом выражении время t соответствует тому мгновению, в которое мысленно остановлен шарик, а потому t здесь нельзя рассматривать как переменную величину.

Переносное вращение равномерное, и переносное тангенциальное (касательное) ускорение равно нулю:

$$a_{eT} = \varepsilon r = 0.$$

Переносное нормальное ускорение $a_{eN} = \omega^2 r = A\pi^2 \sin \pi t$, где t имеет заданное значение, соответствующее данному мгновению, в которое мысленно остановлено относительное движение. Направлено переносное нормальное ускорение точки M к центру O.

Кроме этих составляющих абсолютного ускорения, имеется ускорение Кориолиса, так как переносное движение вращательное

$$a_C = 2\omega v_r = 2A\pi^2 \cos \pi t.$$

Эти составляющие абсолютного ускорения вносим в схему (74)

$$a \begin{cases} a_r \begin{cases} a_{rT} = -A\pi^2 \sin \pi t \\ a_{rN} = 0 \end{cases} \\ a_e \begin{cases} a_{eT} = 0 \\ a_{eN} = A\pi^2 \sin \pi t \end{cases} \\ a_C = 2A\pi^2 \cos \pi t. \end{cases}$$

В мгновение $t=4$ с имеем

$$a \begin{cases} a_r \begin{cases} a_{rT} = 0 \\ a_{rN} = 0 \end{cases} \\ a_e \begin{cases} a_{eT} = 0 \\ a_{eN} = 0 \end{cases} \\ a_C = 2A\pi^2. \end{cases}$$

Таким образом, абсолютное ускорение в это мгновение состоит только из ускорения Кориолиса $a=a_C=2A\pi^2$ см/с².

При $t=4$ с точка M совпадала с точкой O ($x'=A \sin 4\pi=0$) и имела относительную скорость $+A\pi$, направленную в положительном направлении Ox'.

Чтобы определить направление ускорения Кориолиса, надо повернуть вектор относительной скорости на 90° в сторону вращения трубки, т. е. против хода часовой стрелки. При $t=4$ с угол поворота трубки $\varphi=4\pi$ и ось Ox' совпадала с осью Ox. Следовательно, в это мгновение ускорение Кориолиса направлено по положительной оси Oy.

Решение 2. Если не рассматривать движение шарика как сложное, а изучать его непосредственно по отношению к основной системе отсчета, то получим тот же результат.

Составим уравнения движения шарика в основной системе координат (рис. 49, *б*)

$$x = A \sin \pi t \cos \pi t = \frac{A}{2} \sin 2\pi t, \quad y = A \sin \pi t \sin \pi t = A \sin^2 \pi t.$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, найдем проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = A\pi \cos 2\pi t, \quad v_y = \dot{y} = A\pi \sin 2\pi t.$$

Дифференцируя по времени второй раз, найдем проекции ускорения

$$a_x = \ddot{x} = -2A\pi^2 \sin 2\pi t, \quad a_y = \ddot{y} = 2A\pi^2 \cos 2\pi t.$$

При $t=4$ с ускорения $a_x=0$, $a_y=2A\pi^2$.

Получили те же значения ускорения точки, не пользуясь ускорением Кориолиса. Из этого примера видно, что ускорение Кориолиса имеет место лишь при сложном движении точки.

Решение 3. Для определения траектории шарика в основной системе отсчета исключим время из уравнений движения. Из второго уравнения находим $\sin^2 \pi t = y/A$, подставляем в первое уравнение и возводим в квадрат (рис. 49, *в*): $x^2 = Ay - y^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $x=0$, $y=+A/2$. Чтобы убедиться, достаточно перенести в эту точку начало основной системы координат, положив $y=y_1+A/2$, тогда уравнение траектории примет вид

$$x^2+y_1^2=A^2/4.$$

Найдем уравнение движения шарика M по этой окружности

$$dx = A\pi \cos 2\pi t\, dt,\quad dy = A\pi \sin 2\pi t\, dt,\quad ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = A\pi\, dt$$

и, интегрируя,

$$s = A\pi t + C = A\pi t.$$

Следовательно, шарик движется по своей траектории равномерно со скоростью $v=A\pi$; при $t=4$ с он находится в наинизшей точке окружности, а нормальное ускорение $\dfrac{v^2}{\rho}=\dfrac{A^2\pi^2}{A/2}=2A\pi^2$ см/с^2 направлено вертикально вверх.

Вывод. Резюмируя, убеждаемся, что движение шарика (как и движение всякого тела) можно представить различными способами и ускорение шарика в заданное мгновение ($t=4$ с) выразить различными формулами:

можно представить его как сложное, состоящее из колебаний шарика вдоль трубки и одновременного вращения трубки. Тогда ускорение $2A\pi^2$ шарика в заданное мгновение является ускорением Кориолиса;

можно представить то же движение шарика уравнениями в декартовых координатах, а ускорение $2A\pi^2$ — проекциями на оси координат;

можно, наконец, это движение шарика определить как равномерное движение со скоростью $v=A\pi$ по окружности радиуса $r=A/2$ и ускорение $2A\pi^2$ представить как нормальное ускорение v^2/r.

Различные способы лишь выражают объективно существующее движение и позволяют определить его характеристики.

Ответ. $a=2A\pi^2$ см/с^2.

§ 17. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сложение двух поступательных движений одного тела приводит к поступательному движению.

Сложение поступательных движений. Движение не только точки, но и тела часто приходится рассматривать как сложное. В случае поступательного движения тела все точки имеют одинаковые скорости, и движение любой одной точки тела вполне характеризует движение всех остальных. Если телу сообщено не одно, а одновременно два или несколько поступательных движений, то все его точки продолжают находиться в совершенно идентичных условиях, параллелограммы скоростей всех точек одинаковы, так же как и параллелограммы ускорений, и тело совершает поступательное движение.

Угловые скорости складывают по правилам геометрического сложения.

Сложение угловых скоростей. Пусть некоторое твердое тело (рис. 50) вращается с угловой скоростью ω_r вокруг оси OR, в то время как эта ось поворачивается вокруг оси OE с угловой скоростью ω_e. Представим эти угловые скорости в виде векторов OA и OB, отложенных по осям вращения; построим на них параллелограмм $OACB$. Покажем, что скорости точек тела, лежащих на диагонали OC, равны нулю. В самом деле, точка C обладает двумя скоростями: относительной $v_r=\omega_r\cdot CM$, направленной перпендикулярно чертежу на читателя, и переносной $v_e=\omega_e\cdot CN$, направленной в противоположную сторону. Но $\omega_r\cdot CM=\omega_e\cdot CN$, так как оба эти произведения выражают площадь одного и того же параллелограмма $OACB$. Следовательно, скорость точки C равна нулю, как и скорость точки O, находящейся на пересечении осей OR и OE. Отсюда заключаем, что мгновенная ось вращения направлена по диагонали параллелограмма угловых скоростей.

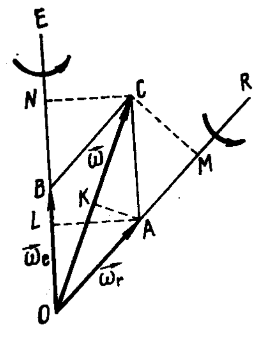


Рис. 50

Определим теперь угловую скорость ω тела при сложном вращении вокруг оси OC. Для этого рассмотрим движение точки A. Скорость точки A в относительном движении тела вокруг оси OR равна нулю, а в переносном вращении вокруг оси OE равна $\omega_e\cdot AL$. Но $\omega_e\cdot AL$ выражает площадь параллелограмма $OACB$ и может быть представлена как произведение $OC\cdot AK$, где AK — расстояние точки тела от мгновенной оси вращения. Следовательно, суммарная угловая скорость изображается диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых угловых скоростях как на сторонах:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_e+\vec{\omega}_r. \tag{75}$$

Результирующая угловая скорость эквивалентна двум слагаемым угловым скоростям, одновременно приложенным к телу. Таким образом, угловые скорости складывают как векторы * и при сложении их можно менять местами: $\vec{\omega}_e+\vec{\omega}_r=\vec{\omega}_r+\vec{\omega}_e$.

Обращаем внимание читателей на то, что это относится к сложению угловых скоростей, но не к сложению конечных вращений. Сложение вращений происходит не по правилам векторного исчисления, а по правилам введенного Гамильтоном исчисления кватернионов. Результат сложения двух конечных поворотов зависит от их последовательности и их нельзя менять местами.

Аналогично легко показать, что при вращении одного тела одновременно вокруг двух или нескольких параллельных осей угловые скорости надо складывать по правилам сложения параллельных векторов **.

---

* Впервые показано Г. Кориолисом.

** Два параллельных вектора, направленных в одну сторону, эквивалентны одному вектору, по модулю равному сумме модулей двух этих векторов, направленному в ту же сторону и лежащему между слагаемыми векторами на расстоянии обратно пропорциональном их модулям (рис. *а*).

Если же два неравных параллельных вектора направлены в противополож-

Задача № 22. (М). Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса II радиуса r (рис. 51, *а*), катящегося по неподвижному зубчатому колесу I того же радиуса и приводящегося в движение кривошипом OA,

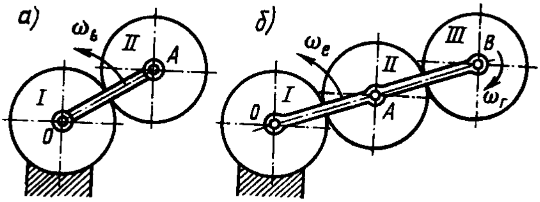


Рис. 51

вращающимся вокруг оси неподвижного колеса с угловой скоростью ω_e; движение кривошипа OA принять за переносное.

Решение. Движение колеса II будем рассматривать как сложное, состоящее из двух вращательных: переносного с угловой скоростью ω_e вокруг оси O против хода часовой стрелки и относительного с угловой скоростью ω_r вокруг оси A тоже против хода часовой стрелки. Векторы угловых скоростей ω_e и ω_r перпендикулярны плоскости чертежа. Мгновенная ось вращения должна быть им параллельна и проходить через точку касания подвижной шестеренки II и неподвижной шестеренки I, т. е. в середине OA. Ответ получается непосредственно из закона сложения параллельных векторов.

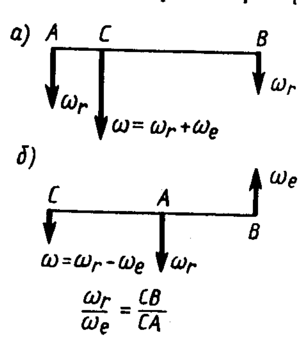
Ответ. $\omega_r = \omega_e$; $\omega = 2\omega_e$. За время одного оборота кривошипа OA шестерня II делает два оборота вокруг своей оси A.

Пара угловых скоростей сообщает телу поступательное движение.

Пара угловых скоростей. Пусть некоторое тело (не изображенное на чертеже) вращается вокруг оси AA' с угловой скоростью ω (рис. 52, *а*), в то время как эта ось поворачивается вокруг параллельной оси BB' с такой же угловой скоростью, но в противоположную сторону. Такую систему двух равных и противоположных векторов угловых скоро-

---

ные стороны (рис. *б*), то оба они эквивалентны одному вектору, по модулю равному разности их модулей, направленному в сторону большего из них и лежащему за большим из них на расстоянии, обратно пропорциональном их модулям.



стей называют *парой угловых скоростей.* Пара угловых скоростей сообщает всем точкам тела, к которому она приложена, одинаковые линейные скорости. Действительно, легко показать, что $\vec{v}_A = \vec{v}_B$; точка A имеет скорость $\omega \cdot AB$, а точка B обладает скоростью $\omega \cdot AB$ во вращении вокруг оси AA'.

Следовательно, прямая AB движется, не меняя своего направления. Чтобы установить, что движение тела поступательное, надо показать, что не меняют направления, по крайней мере, две непараллельные прямые или что три не лежащие на одной прямой точки тела всегда имеют одинаковые скорости. Третью точку K (рис. 52, *б*) выберем в плоскости, в которой лежат скорости точек A и B. Согласно основной теореме кинематики твердого тела проекции скорости точки K на прямые KA и KB должны быть равны проекциям скоростей точек A и B. Отложив от точки K эти проекции и определив по проекциям скорость точки K, убедимся, что

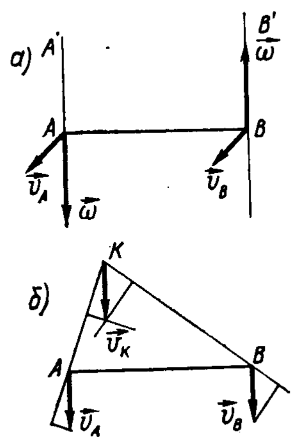


Рис. 52

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_K, \tag{76}$$

причем скорость поступательно движущегося тела равна моменту пары угловых скоростей *. Вместе с тем следует иметь в виду, что поступательное движение тела можно представить в каждое мгновение парой угловых скоростей.

Задача № 23. Определить абсолютную угловую скорость шестеренки *III* планетарного механизма, представленного на рис. 51, *б*.

Решение. Шестеренка *III* имеет одновременно две угловые скорости: переносную (угловую скорость кривошипа, вращающегося вокруг оси O) и относительную (вокруг оси B). Пусть кривошип вращается против хода часовой стрелки с угловой скоростью $+\omega_e$. Чтобы определить относительное вращение, мысленно остановим переносное; будем считать кривошип неподвижным. В относительном движении шестеренка *II* вращается с той же угловой скоростью ω_e против хода часовой стрелки, как это было показано в задаче № 22. Колесо *III*

---

* Пару угловых скоростей часто называют парой вращения. Как уже было сказано, теоремы о сложении угловых скоростей неприменимы к сложению конечных вращений и результат сложения двух конечных поворотов зависит от их последовательности. Читатель может убедиться, что, если прямую AB повернуть (рис. 52) на 90° вокруг оси AA' по ходу часовой стрелки, а затем на 90° в обратную сторону вокруг оси BB' (которая, конечно, переместится), то отрезок AB совершит иное перемещение по сравнению с тем, какое он получил бы, если бы те же повороты и вокруг тех же осей сообщить ему в обратной последовательности. Поэтому пару угловых скоростей не надо называть парой вращений.

в относительном движении (относительно кривошипа, принимаемого за неподвижный) вращается с такой же угловой скоростью, что и шестеренка *II*, но в противоположную сторону, т. е. относительная угловая скорость шестеренки *III* $\omega_r = -\omega_e$.

Следовательно, к шестерне *III* приложена пара угловых скоростей, и она совершает поступательное движение.

Ответ. $\omega_{III}=0$ («парадокс Фергюсона»).

Понятие об общем случае движения твердого тела

Движение твердого тела можно разложить на поступательное вместе с полюсом и сферическое относительно полюса.

Движение твердого тела в самом общем случае можно представить как сложное, состоящее из переносного поступательного вместе с какой-либо точкой *E*, принятой за полюс, и относительного сферического вокруг этого полюса (теорема Шаля). Очевидно, что и скорость любой точки этого тела можно получить по параллелограмму скоростей как геометрическую сумму относительной скорости точки в сферическом движении и переносной скорости, равной скорости полюса *E*.

Как показал Ю. Моцци (1766), картина распределения скоростей точек тела в каждое мгновение такова, как будто тело вращается вокруг некоторой оси и оновременно скользит вдоль нее. Эту ось называют *мгновенной винтовой осью* или *осью вращения скольжения.*

КИНЕТИКА

Глава VI

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕТИКУ

§ 18. ПРЕДМЕТ КИНЕТИКИ

Кинетикой называют раздел общей механики, в котором изучают механическое движение и относительное равновесие механических систем в связи с приложенными силами.

Кинематика и кинетика. Все теоремы кинематики были выведены на основе теорем и аксиом геометрии с использованием неизвестного в геометрии понятия — времени. Движение в кинематике рассматривают лишь с геометрической стороны, игнорируя физическую сторону вопроса, не интересуясь ни массой движущихся объектов, ни ее распределением, ни причинами, вызывающими или изменяющими эти движения.

Раздел общей механики, называемый *кинетикой,* объединяет статику и динамику. В кинетике изучают движение и равновесие материальных тел в зависимости от действующих сил. Для этого необходимы новые фундаментальные понятия, не известные ни геометрии, ни кинематике. Такими новыми фундаментальными понятиями, вводимыми кинетикой, являются «сила», «инерция» и «масса».

Для решения своих проблем кинетика принимает без математического доказательства в качестве аксиом некоторые основные законы движения. Математических доказательств этих законов не существует, хотя законы эти настолько просты, что кажутся очевидными. Под аксиомами механики не будем понимать какие-то непреложные и настолько очевидные истины, что даже доказательства их совершенно излишни. Они представляют собой результат обобщения выводов, полученных из многолетних и многочисленных опытов и наблюдений над движением и покоем тел. Проверить их непосредственно нет возможности, а имеются лишь косвенные доказательства. Следствия, вытекающие из этих аксиом, подтверждаются наблюдениями: сооружения, построенные на основании законов механики, прочны, машины работают, приборы и аппараты действуют, корабли плавают, самолеты летают, запущенные человеком космические корабли выходят на предписанные им орбиты, а затмения Солнца и Луны происходят в точности так, как это было заранее предсказано. Все это является доказательством правильности всех положений механики (в частности ее аксиом), на основе которых были рассчитаны эти сооружения, сконструированы машины и произведены астрономические вычисления, потому что верные практические результаты могут быть получены только из правильных предпосылок.

В основе кинетики лежат три закона: 1) принцип инерции, 2) основной закон динамики, 3) принцип равенства действия и противодействия.

Аксиомы или законы движения. Как уже было сказано в общем очерке по истории теоретической механики (см. § 2), динамика возникла в XVII в. в связи с потребностями быстро развивающейся промышленности.

Продолжая работы Галилея, Гюйгенса и других своих предшественников, англичанин Исаак Ньютон создал и опубликовал сочинение «Математические начала натуральной философии» *. Во введении к этой книге, обычно называемой «Начала», он сформулировал три «аксиомы или законы движения», которые легли в основу всей механики, называемой теперь механикой Галилея — Ньютона или *классической механикой.*

Эти аксиомы известны из курса физики, но необходимо обратить внимание на некоторые обстоятельства, имеющие большое значение.

§ 19. ПЕРВАЯ АКСИОМА МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

«Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние» (Ньютон).

Аксиома инерции. Аксиома инерции утверждает, что всякое тело должно находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока это состояние не будет изменено действующими на тело силами. Ньютон ничего не говорит о размерах тела, но в дальнейшем он показывает, что высказанные им аксиомы относятся к отдельной материальной частице или же к центру масс, в котором преполагается сосредоточенной масса всего тела. Таким образом, здесь под телом надо понимать материальную точку.

Присущее материи свойство сохранять механическое движение без действия сил (сохранять свою скорость) называют *инерцией* **.

Аксиома инерции содержит в себе как бы две части — аксиома инерции покоя и аксиома инерции движения. Та часть, которая утверждает, что тело остается в покое, пока силы не изменят этого состояния, очевидна и подтверждается повседневным опытом: никто не видел, чтобы покоящиеся тела сами, без действия на них сил, приходили в движение. Это так называемая инерция покоя была известна еще со времени Аристотеля.

* Переведена на русский язык акад. А. Н. Крыловым.
** Термин «инерция» прелложил Д'Аламбер (1743).

Открытое Галилеем свойство материальных тел без действия сил сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения (инерция движения) на первый взгляд как будто бы противоречит повседневному опыту. И движущиеся тела обычно нуждаются в постоянном действии силы для поддержания движения: чтобы передвигать телегу, нужна конская тяга, парусное судно без ветра не движется и т. д. Однако это различие между инерцией покоя и инерцией движения, а также противоречие закона инерции движения нашим повседневным наблюдениям только кажущиеся. В обыденной жизни не встречаются тела, на которые не действовали бы никакие силы, на всяком движущемся теле всегда сказываются действия других тел. На телегу, которую тянет лошадь, действует сопротивление дороги, трение в осях, сопротивление воздуха; плывущая лодка претерпевает сопротивление воды и воздуха. Эти силы (их называют *диссипативными*) замедляют движение тел. Диссипативные силы невозможно уничтожить, но их иногда возможно значительно уменьшить. Например, в машине можно смазать трущиеся части, заменить подшипники скольжения шариковыми подшипниками и т. п. Чем меньше диссипативные силы, тем дольше тело сохраняет свое движение.

Отсюда можно заключить, что если бы удалось совершенно устранить сопротивление движению тела, то движение было бы равномерным. Вместе с тем, очевидно, движение было бы и прямолинейным, если, конечно, никакие силы не заставили бы это тело свернуть со своего прямолинейного пути. Практически невозможно никакой смазкой полностью уничтожить силы сопротивления. Поэтому для поддержания движения к телу необходимо приложить силу. Эта сила нужна не для осуществления движения, а лишь для преодоления сопротивлений. Для равномерного и прямолинейного движения нужна в точности такая движущая сила, какая необходима для преодоления сил сопротивления. Действительно, если движущая сила меньше сил сопротивления, то движение тела постепенно замедляется и тело останавливается. Если она больше сил сопротивления, то тело движется ускоренно. Если же движущая сила равна силе сопротивления, то не происходит ни замедления, ни ускорения — тело движется равномерно и, разумеется, прямолинейно.

Систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называют инерциальной системой отсчета.

Инерциальная система отсчета. Проверить аксиому инерции прямым и непосредственным экспериментом вряд ли можно. Для такого эксперимента понадобилось бы тело, на которое не действуют никакие силы; это тело должно быть полностью изолировано от всех других тел. Никакое тело, никакая материальная система во вселенной не являются полностью изолированными. Но ввиду громадности расстояний до звезд можно допустить, что звезды не оказывают заметного действия на солнечную систему, т. е. на систему, состоящую из Солнца, планет и их спутников. Полагают, кроме того, что эта система не подвержена никаким другим посторонним воздействием, как, например, сопротивление среды, заполняющей мировое пространство. Можно считать, что центр масс солнечной системы в данное время находится в состоянии равномерного прямолинейного движения. Центр масс солнечной системы почти совпадает с центром Солнца, и в дальнейшем будем называть его центром Солнца.

Возникает вопрос: по отношению к какой системе отсчета центр Солнца движется прямолинейно и равномерно? Вполне конкретно и однозначно ответить на этот вопрос невозможно. Ньютон ошибочно полагал, что независимо от материи существует абсолютно неподвижное пространство. «Абсолютное пространство по самой сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным» *. Но мы не мыслим пространства безотносительно к внешнему миру, и. для нас пространство есть форма существования материи. Материя же немыслима без движения, поэтому не может быть и пространства, которое было бы абсолютно неподвижно безотносительно к чему бы то ни было, т. е. не может быть неподвижной пустоты. Д'Аламбер, критикуя Ньютона за то, что он понятия пространства и времени отрывал от понятия материи, писал: «Те философы, которые хотят создать пустоту, теряются в собственных выдумках **.

В этом вопросе воззрения Д'Аламбера близко подходят к позиции Энгельса, который писал: «Разумеется, обе эти формы существования материи (т. е. пространство и время. — *М. Г.*) без материи суть ничто, пустые представления, абстракции, существующие только в нашей голове» ***.

Лобачевский показал, что представления геометрии Евклида и механики Ньютона о пространстве не являются истинными, и подготовил почву для развития современных физических представлений о пространстве и времени.

Не следует думать, что неправильное понимание Ньютоном абсолютного пространства делает его законы неприемлемыми. Неправильно только было бы считать аксиомы очевидными истинами, абсолютно верными и не нуждающимися в доказательствах. Аксиомы нуждаются не только в доказательствах, но и в уточнениях.

Представим себе какую-либо систему координат (связав ее, например, со звездами), по отношению к которой центр Солнца совершает равномерное и прямолинейное движение с какой-либо

---

* *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. А. Н. Крылова. Пг. 1915, с. 30.

** *Д'Аламбер.* Об элементах философии или принципах человеческих познаний с пояснениями (1759).

*** *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 550.

скоростью $\vec{v}$; примем эту систему за основную и назовем *инерциальной системой.*

Представим себе также вторую систему координат, совершающую поступательное движение относительно первой системы. Пусть одна из точек (а значит, и все остальные) второй системы движется относительно инерциальной прямолинейно и равномерно с какой-либо скоростью $\vec{v}_e$. Тогда скорость $\vec{v}_r$ центра Солнца относительно второй системы согласно закону параллелограмма скоростей

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_e.$$

В правой части равенства имеется разность постоянных величин, следовательно, постоянна и левая часть равенства, т. е. центр Солнца относительно второй системы координат тоже находится в прямолинейном и равномерном движении. Таким образом, характер движения центра Солнца по отношению к обеим системам координат один и тот же — прямолинейное и равномерное движение. Поэтому и вторую систему координат можно называть инерциальной системой, как и всякую прочую систему координат, движущуюся относительно первой поступательно, прямолинейно и равномерно.

В таком движении по отношению ко всякой инерциальной системе находится не только центр солнечной системы, на которую, по нашему заключению, не действуют извне никакие силы, но и каждая материальная частица, находящаяся под действием взаимно уравновешенных сил, потому что наличие взаимно уравновешенных сил эквивалентно их отсутствию (см. § 22). Все это требует значительно расширить понятие *инерциальная система* и определить ее как такую систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица, находящаяся под действием взаимно уравновешенных сил, совершает прямолинейное и равномерное движение. Любую такую систему можно принять за неподвижную при решении задач динамики. В этом заключается так называемый *принцип относительности классической механики.* (Принцип механики — это основоположение, с позиций которого надо рассматривать всякое механическое явление.)

В целом ряде проблем, например в задачах небесной механики — при вычислении траекторий искусственных спутников, при исследованиях, связанных с движением нашей планеты и др., за инерциальную систему принимают систему координат, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на какие-либо три «неподвижные» звезды. Чтобы убедиться, как незначительна погрешность, которую допускают, считая звезды неподвижными друг относительно друга, представим себе модель звездного мира, сделанную в масштабе $1 : 10^{12}$. В таком масштабе Солнце, диаметр которого $1,5 \cdot 10^6$ км, изобразится шариком с булавочную головку диаметром 1,5 мм. На расстоянии 15 см от этого шарика будет кружиться невидимая глазу пылинка — планета Земля. Другие же звезды, в среднем такие же булавочные головки, поместятся приблизительно на 40 км от Солнца и друг от друга. Если принять скорость Солнца относительно соседних звезд равной 150 км/с, то, следовательно (в том же масштабе), модель Солнца начало координат) движется со скоростью 0,2 мм/ч. Таким образом, относительные перемещения звезд ничтожны, и систему отсчета, связанную со звездами, можно с большой точностью принимать за инерциальную.

При многих технических расчетах можно принимать за неподвижную всякую систему отсчета, неизменно связанную с Землей.

Всякую систему координат, неподвижную относительно Земли, обычно принимают за инерциальную систему отсчета, пренебрегая движением Земли вокруг Солнца и вокруг оси. Конечно, при этом допускают некоторую ошибку, потому что невозможно, чтобы закон инерции был верен одновременно по отношению к осям, направленным на звезды, и по отношению к осям, участвующим в движении Земли, Но эта ошибка невелика и вполне может быть допущена в обычных технических задачах.

Еще Галилей, который до Ньютона был знаком с законом инерции, проделал для проверки этого закона такой интересный опыт. Он катал тяжелые шары вверх по наклонной плоскости, сообщая им одинаковую начальную скорость, и установил, что шары достигали всегда одной и той же высоты h независимо от угла наклона плоскости. Таким образом,

$$h = s \sin \vartheta = C, \tag{77}$$

где s — путь, пройденный шаром; ϑ — угол между наклонной и горизонтальной плоскостями.

Отсюда следует, что при $\vartheta = 0$ шар должен двигаться непрерывно с сообщенной ему начальной скоростью. Галилей в 1638 г. в трактате «Рассуждения и математические доказательства относительно двух новых наук» писал: «Пусть мы метнули или бросили тело по горизонтальной плоскости, устранивши все препятствия. Его движение будет продолжаться равномерно и непрерывно по означенной плоскости, если она простирается неопределенно далеко». Благодаря этим простым опытам Галилея, проведенным над шарами, катящимися с трением в воздушной среде, закон инерции получил хотя и косвенное, но прекрасное экспериментальное подтверждение. Однако Галилей неправильно допускал, что возможно инерциальное движение и по окружности.

Закон инерции в инерциальной системе отсчета вполне строго впервые был сформулирован Декартом.

§ 20. ВТОРАЯ АКСИОМА МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

Ускорение точки пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Основной закон динамики. Всякое изменение скорости происходит только от действия сил, приложенных к данному телу. Соотношение между силой и ускорением выражено во втором законе движения (*основном законе динамики*).

Ньютон писал, что изменение скорости «всегда происходит по тому же направлению, как и производящая его сила», независимо от того, находилось тело в покое или в движении и действует сила по скорости, против скорости или же под углом к ней. Хотя Ньютон называл материальную точку телом и не употреблял термина «ускорение» (вошедшего в науку почти два века спустя), но открытый им основной закон динамики можно теперь сформулировать так: сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, пропорциональное силе и направленное по силе. Математически этот закон можно записать в виде формулы:

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}.} \tag{78}$$

Если на материальную точку действуют несколько сил, то действие каждой из сил не зависит от действия остальных и каждая из сил сообщает точке такое ускорение, какое она ей сообщила бы, если бы действовала одна. В этом заключается принцип независимости действия сил.

Во второй аксиоме встречаются два важнейших понятия кинетики: *масса* и *сила*. В формуле (78) величина m не является лишь коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, а имеет большой физический смысл, к пояснению которого сейчас перейдем. А уж затем, после ознакомления с третьей аксиомой, поясним понятие «сила».

Масса и геометрия масс

Массой материальной частицы называют меру ее инерции, численно выражающуюся отношением модулей силы, действующей на частицу, и вызванного ею ускорения: $m=F/a$.

По закону инерции материальная точка стремится сохранить свое состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения. Материи присуща неуничтожаемость движения. Нет материи без движения, нет движения без материи. Французский материалист восемнадцатого столетия Гольбах писал: «Движение — это способ существования, необходимым образом вытекающий из сущности материи» * (1770). Благодаря свойству инерции материальные тела без дей-

* *Гольбах.* Избранные произведения. М., Госполитиздат, 1963, т. 2, с. 75.

ствия сил продолжают движение (движутся «по инерции»), а под действием сил изменяют свое движение постепенно и неодинаково. Камень притягивается Землей и с такой же, но обратной по направлению силой он притягивает к себе Землю. Однако эти равные по величине силы вызывают в камне и в Земле далеко не одинаковые ускорения, потому что инерция земного шара, его свойство сохранять неизменной свою скорость в миллиарды миллиардов раз превосходит инерцию камня.

В формуле (78) величина m не только коэффициент пропорциональности, она представляет собой меру инерции материальной точки и выражает ее массу *. Итак, *масса материальной точки* является *мерой инерции* этой материальной точки, выражающаяся положительной скалярной величиной, равной отношению модуля силы, приложенной к точке, к модулю ускорения, полученного точкой (в инерциальной системе отсчета) от действия этой силы:

$$m = F/a. \tag{79}$$

Масса материального тела равна сумме масс всех его частиц. При поступательном движении тела (т. е. когда ускорения всех частиц одинаковы) масса тела является мерой инерции тела.

Массу тела можно определить по его весу, руководствуясь тем, что все материальные тела, находящиеся где-либо в одном и том же месте у земной поверхности, независимо от массы этих тел падают с одинаковым ускорением g свободно падающих тел, из чего следует, что веса тел, находящихся в одном и том же месте Земли, пропорциональны их массам и не зависит от формы тел **.

Приняв Землю за инерциальную систему отсчета, можно определить массы тел по их весу, пользуясь формулой

$$m = G/g. \tag{80}$$

Еще во времена Ньютона точные эксперименты показали, что ускорение свободно падающего тела и вес на экваторе меньше, чем в наших географических широтах, хотя масса тела остается неизменной. Поэтому Ньютон четко разграничил понятия веса и массы.

При изучении кинематики твердого тела установлено, что в механике далеко не всегда можно принимать материальное тело за точку. Приходится учитывать, что различные частицы тела совершают различные движения, имеют различные ускорения. Поэтому и здесь при выяснении физического смысла инертности нужно рассматривать твердое тело как состоящее из множества элементарных частиц и учитывать, что при движении твердого тела различные частицы совершают различные движения и имеют различные ускорения, а потому мера инерции всего материального тела зави-

* Понятие «масса» в теоретической механике дано Ньютоном (1686).
** Строгое доказательство этого впервые дал Фурье.

сит не только от масс его частиц, но и от их распределения в теле. Только при поступательном движении тела, когда ускорения всех его частиц независимо от их местонахождения в теле одинаковы, масса тела является его мерой инерции.

Момент инерции тела относительно оси

Мерой инерции твердого тела в его вращении вокруг оси является момент инерции, выражающийся суммой произведений массы каждой частицы тела и квадрата ее расстояния от этой оси: $J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$.

Мерой инерции твердого тела во вращательном движении вокруг оси является его *момент инерции*, определяемый суммой произведений, полученных от умножения массы каждой частицы тела на квадрат ее расстояния от оси *. Если дано какое-либо тело и задана какая-либо ось, то для определения момента инерции тела относительно этой оси надо мысленно разбить тело на мелкие частицы, определить массы (m_1, m_2, m_3, ..., m_n) этих частиц, измерить расстояние каждой частицы от оси (r_1, r_2, r_3, ..., r_n), умножить массу каждой частицы на квадрат ее расстояния от оси ($m_1r_1^2$, $m_2r_2^2$, $m_3r_3^2$, ..., $m_nr_n^2$) и взять сумму этих произведений.

Момент инерции

$$J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2, \tag{81}$$

или

$$J = \sum_{k=1}^{k=n} m_kr_k^2. \tag{82}$$

Чем на большее количество частиц мысленно разбито тело, тем точнее определяется его момент инерции (81). В пределе интегральная сумма превращается в интеграл, распространенный на всю массу тела,

$$J = \int r^2 \,\mathrm{d}\, m. \tag{83}$$

Исследование моментов инерции, определение центра масс и другие проблемы, связанные с распределением массы, составляют большой самостоятельный раздел механики, называемый *геометрией масс* **.

Массой обладает всякое материальное тело независимо от вида его движения. Но масса тела является его мерой инерции только при его поступательном движении. Аналогично можно вычислить момент инерции всякого тела относительно любой оси независимо от того, вращается ли тело вокруг этой оси.

---

* Моменты инерции впервые в науку ввел Гюйгенс (1673), термин предложен Эйлером (1749).

** Выделить геометрию масс в самостоятельный раздел механики предложил Атон де ля Гупийер в 1857 г., тогда же им предложено название этого раздела.

Момент инерции всякого тела относительно любой оси является мерой инерции этого тела в его вращательном движении (реальном или воображаемом) вокруг этой оси. Вращение является движением, присущим только телу. Одна точка не может совершать вращательного движения. Поэтому и момент инерции является понятием, присущим только телу, и для одной материальной точки теряет всякий смысл. Момента инерции материальной точки не существует.

Нетрудно вывести часто применяемые формулы момента инерции тела относительно координатных осей. Обозначим координаты частиц тела через x_k, y_k, z_k, где $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Тогда квадраты расстояния частиц тела от оси абсцисс равны $y_k^2+z_k^2$, от оси ординат — $z_k^2+x_k^2$, от оси аппликат — $x_k^2+y_k^2$. Моменты инерции тела относительно осей координат выразятся суммой произведений массы каждой частицы тела и квадрата ее расстояния от этой оси.

$$J_x=\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left(y_k^2+z_k^2\right);\quad J_y=\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left(z_k^2+x_k^2\right);$$

$$J_z=\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left(x_k^2+y_k^2\right). \tag{84}$$

Дальнейшие сведения о моментах инерции и примеры вычисления моментов инерции различных тел приведены при изложении динамики вращательного движения тел (§§ 36, 37 и др.).

В технике применяют две системы механических единиц: 1) техническую, в которой за основные единицы приняты длина, сила и время; 2) физическую, в которой за основные единицы приняты длина, масса и время.

Системы механических единиц. Напомним, что в механике приняты две системы единиц: техническая и физическая. Эти две системы отличаются друг от друга по своей основе *.

Техническая система единиц построена на понятиях длины L, силы F и времени T. За основные единицы принимают: метр (м), килограмм-силу (кгс), секунду (с), но с равным правом применяют также единицы, являющиеся кратными и дольными от основных. При решении задач не имеет принципиального значения, какие именно единицы L, F и T приняты в той или иной задаче, это зависит от выбора, и нужно выбирать такие единицы, в которых практически проще можно провести необходимые математические подсчеты. Так, если балка прогибается на несколько миллиметров под нагрузкой в несколько тонн-сил, то, по-видимому, в данном случае выгодно принять миллиметр за единицу длины и тонну-силу за единицу силы, выражать же их в сантиметрах и в граммах или в метрах и килограмм-силах нецелесообразно.

* Подробно о теории размерностей см.: *Седов Л. И.* Методы теории размерностей и теории подобия в механике. М., Гостехиздат, 1944 и последующие издания.

В каждой задаче каждую из единиц можно выбирать основной, кратной или дольной независимо от выбора двух других. Но коль скоро эти единицы приняты при решении данной задачи, мы не должны допускать при ее решении никаких других единиц и обязаны брать единицы производных величин, исходя из тех, которые были выбраны для L, F, T. Так, приняв в задаче за единицы длины, силы и времени метр, грамм-силу и секунду, необходимо принять ускорение свободно падающего тела $g=9{,}81$ м/с^2 и было бы ошибкой принять в этой задаче $g=981$ см/с^2.

В технической системе единиц размерность массы является производной: $[m]=L^{-1}F^{1}T^{2}$. Например, размерность единицы массы в технической системе единиц может быть гс·с^2/см, если выражать в этой задаче длину в сантиметрах [см], силу — в грамм-силах [гс], время — в секундах [с].

Неудобство этой системы состоит в том, что единица силы является величиной, требующей указания определенного места земного шара (например, килограмм-сила — вес 1 л воды в Париже при 4°С или сила, с которой Земля притягивает массу в 1 кг на широте 45° на уровне моря при нормальном давлении).

От этого неудобства можно избавиться, как показал еще Гаусс, если в качестве основных принять единицы длины L, массы M и времени T и вывести единицу силы как производную от этих основных.

Система механических единиц, называемая *физической*, принимает за основные, кратные и дольные такие же единицы длины (метр, сантиметр и пр.), такие же единицы времени (секунда, минута, час и пр.), но принимает массу, а не силу, за основную единицу (килограмм, а также кратные и дольные килограмма — грамм, тонну и т. п.). В этой системе единиц сила является величиной производной и имеет размерность $[F]=L^{1}M^{1}T^{-2}$.

В СССР в качестве государственного стандарта принята Международная система единиц — СИ (Le système international d'unités), в которой за основные приняты единицы длины, массы и времени. Таким образом, в области механики СИ относится к системе единиц, называемой физической системой. В качестве основных единиц этой системы в механике оставлены прежние единицы: метр (м), килограмм-масса (кг) и секунда (с). С целью уточнения метр измерен не в долях земного меридиана, как это было при его установлении, а длиной волны излучения атома криптона, секунда определена как 1/31556925,9747 часть тропического года *, а килограмм — как масса прототипа килограмма, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Париже.

Единица силы — ньютон в СИ является производной. *Ньютоном* называют силу, сообщающую массе в 1 кг ускорение в 1 м/с^2.

---

* Тропическим годом называют время между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия.

§ 21. ТРЕТЬЯ АКСИОМА МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

«Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга всегда между собой равны и направлены в противоположные стороны» (Ньютон).

Аксиома равенства действия и противодействия. Как было сказано в самом начале данного курса, механические воздействия на данное тело, т. е. силы, приложенные к этому телу, вызываются другими материальными телами. Отдельно от материальных тел, независимо от них, сил в природе не существует. Поясним это следующим примером.

Представим себе, что санки C скользят по ледяной горе AB (рис. 53). На санки действуют следующие силы: сила тяжести $\vec{G}$ (вес санок), сила $\vec{R}_N$ давления со стороны наклонной плоскости AB, сила трения $\vec{F}_{тр}$ о лед и сила $\vec{F}_{сопр}$ сопротивления воздуха. Все эти силы действуют на данное тело вследствие наличия других материальных тел и не существовали бы, если бы этих тел не было. Так, сила тяжести $\vec{G}$ является силой притяжения санок Землей. Давление $\vec{R}_N$ горы на санки и сила трения $\vec{F}_{тр}$ санок о гору вызваны наличием горы AB. Сила $\vec{F}_{сопр}$ сопротивления воздуха не существовала бы, если бы санки двигались в безводушном пространстве. Все силы, действующие на санки, вызваны другими материальными телами.

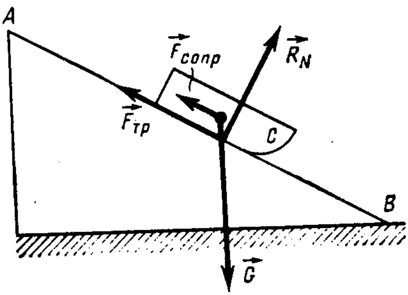


Рис. 53

Но действия материальных тел не бывают односторонними, они всегда взаимны, тела взаимодействуют между собой.

В рассмотренном примере на санки действует сила $\vec{G}$, с которой санки притягиваются к Земле, точнее, к ее центру. Санки тоже притягивают к себе Землю, и сила притяжения Земли санками приложена к центру Земли. Санки испытывают сопротивление воздушной среды, но они и сами действуют на эту среду, вызывая в ней перемещения ее частиц. Покрытые льдом доски горы не допускают перемещения санок в сторону дощатого настила. Но и сани давят на ледяную гору; здесь действия двух тел взаимны. При движении санок по льду трутся обе соприкасающиеся поверхности (полозья саней и ледяная поверхность горы) и возникают две силы трения. Одна приложена к саням и замедляет скольжение, другая — к ледяному покрытию горы, отрывает и увлекает за санями частицы льда. Лед и сани взаимодействуют между собой, и для трения необходимо наличие обоих тел — санок и льда.

Аксиома утверждает, что действия двух тел друг на друга равны и противоположны. В данном примере согласно этой аксиоме Земля притягивает к себе санки с такой же, но обратно направленной силой, с какой санки притягивают Землю: давление санок на гору равно и противоположно давлению горы на санки; силы трения санок о гору и горы о санки равны и противоположны, а воздух сопротивляется движению санок с силой, равной и противоположной той, с которой санки действуют на воздух.

Таких примеров можно привести сколь угодно много и на каждом из них убедиться, что силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны и противоположны.

Нужно твердо усвоить, что механические взаимодействия двух тел хотя и равны по величине и противоположны по направлению и действуют по одной прямой, но не уничтожаются взаимно, не уравновешивают друг друга, так как они приложены не к одному, а к разным телам. Давление или притяжение одного тела может привести в движение другое тело именно потому, что действие и противодействие приложены к двум различным телам.

Если, например, буксирный теплоход тянет баржу, то и баржа тянет буксир в обратном направлении с равной силой. В этом можно убедиться, включив между ними два динамометра так, чтобы один из них измерял силу, с которой буксир тянет баржу, а другой — силу, с которой баржа противодействует буксиру. Показания обоих динамометров будут одинаковы. Следоательно, действие буксира на баржу равно и противоположно действию баржи на буксир. Почему же в таком случае вся система перемещается в сторону буксира, а не в обратном направлении? Ответ на этот вопрос очевиден: буксир отталкивается от воды винтом или гребными колесами. По той же аксиоме этой силе, приложенной к шлицам гребного колеса, соответствует другая, равная противоположная сила, приложенная к воде. Обе эти силы не уравновешивают друг друга, поскольку они не приложены к одному телу.

Приложенная к буксиру сила, с которой он отталкивается от воды, при ускоренном движении больше той силы, также приложенной к буксиру, с которой тянет его назад баржа, при замедленном — меньше, при равномерном движении и при покое — равна. Но всегда — и в покое, и во всяком движении — взаимодействия гребных колес и воды равны и противоположны между собой и всегда действие буксира на баржу равно и противоположно действию баржи на буксир. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие.

Эту аксиому называют законом или принципом равенства действия и противодействия. Она сформулирована Ньютоном, принята им в качестве третьего основного закона механики.

§ 22. СИЛА

Силой называют меру механического воздействия в данное мгновение на материальную частицу со стороны других материальных тел, учитывающую величину и направление этого воздействия.

С и л а к а к м е р а м е х а н и ч е с к о г о в о з д е й с т в и я. Три аксиомы динамики содержат основы, на которых классическая механика воспринимает механическое движение и механическое взаимодействие тел. В них установлено, что материальным телам свойственно движение, что ускорение, сообщаемое телу, пропорционально приложенной силе, что все тела между собой взаимодействуют и что всякая действующая на тело сила обусловлена наличием других материальных тел и отдельно от материальных тел сил не бывает.

Понятие «сила» является одним из важнейших в кинетике, и чтобы применять и пользоваться им, необходимо точно уяснить его смысл, установить, что именно в механике понимают под этим термином.

Механические воздействия на какую-либо материальную частицу могут быть вызваны различными физическими причинами. На частицу может действовать ее вес, давление ветра, трение, мускулатура человека или животных, притяжение, отталкивание и т. п. Эти воздействия на частицу, независимо от их физического происхождения, характеризуются своими величиной, направлением и продолжительностью.

В механике не интересуются физической причиной этого воздействия. Рассматривая механическое воздействие на эту частицу лишь за одно мгновение, представим его как некоторый вектор, приложенный к этой частице. Этот вектор изображает механическое воздействие на частицу в данное мгновение. Он является непосредственной мерой механического воздействия на данную материальную частицу со стороны других материальных тел и в механике называется *силой.* Итак, в механике силу понимают как некоторый вектор, вполне характеризуемый модулем, направлением и точкой приложения. Было бы бесполезным пытаться объяснить физическую природу силы, пользуясь только механикой. Д'Аламбер писал о силах: «Метафизика этих понятий никогда не станет ясной» *.

Абстрагируясь от физической сущности силы, в теоретической механике устраняют тем самым многие неясности, связанные с понятием силы в других науках. «Земная механика есть единственная наука, в которой действительно знают, что означает слово «сила». Ведь основными условиями земной механики являются, во-первых, отказ исследовать причину толчка, т. е. природу соответственной в каждом случае силы...» **.

---

* *D'Alembert.* Traite'de dynamique. Paris, 1743.

** *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 404.

Если на одно и то же тело действует несколько сил (система сил), хотя бы и различных по своей физической природе (например, вес тела, натяжение троса, посредством которого тянут это тело, сила трения и др.), то в кинетике различают силы этой системы только по модулям, направлениям и линиям действия. Силы такой системы в кинетике рассматривают как величины одинаковой природы и размерности. Это позволяет преобразовывать системы сил, заменять их эквивалентными (равноценными по своему действию на тело) и, в частности, складывать силы.

Под действием нескольких сил точка получает такое ускорение $\vec{a}$, какое она получила бы под действием одной равнодействующей всех приложенных к ней сил:

$$\vec{R}=m\vec{a}. \qquad (85)$$

Поэтому определение равнодействующей приложенных к точке сил является важной задачей кинетики.

Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке и направленных под углом друг к другу, изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил как на сторонах.

Закон параллелограмма. Сила является вектором, а потому при сложении сил надо учитывать не только их модули, но и направления. Пусть, например (рис. 54) к материальной точке O приложены две силы: 1) по модулю равная P и направленная по прямой OA и 2) по модулю равная Q и направленная по прямой OB. Изобразим силу P в некотором масштабе направленным отрезком OA_1, а силу $\vec{Q}$ в том же масштабе отрезком OB_1. На этих отрезках как на сторонах построим параллелограмм $OA_1C_1B_1$. Две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ (обе вместе) оказывают на материальную точку O такое же действие, какое окажет одна сила $\vec{R}$, изображаемая (в том же масштабе) диагональю параллелограмма. Сила $\vec{R}$ является равнодействующей двух сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, она *эквивалентна* системе двух сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$:

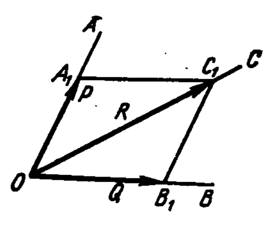


Рис. 54

$$\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}. \qquad (86)$$

Это геометрическое равенство, свойственное всем векторным величинам, называют *правилом параллелограмма*. Примем его без математического доказательства *. При вычислении равнодейст-

* Сложение сил по способу параллелограмма было известно еще Герону, им пользовался Стевин. Галилей применял этот способ и считал его общеизвестным. Ньютон совершенно определенно приписывал закон параллелограмма Галилею и называл основным положением механики, нуждающимся лишь в разъяснениях на примерах. Однако Ньютон все же приводит доказательство этого закона,

вующей по этому правилу приходится применять теоремы геометрии и тригонометрии. Так, например модуль равнодействующей двух векторов, направленных под углом друг к другу, можно определить по теореме косинусов, а направление равнодействующей определить, применив теорему синусов. Ниже будет указан более простой аналитический метод определения модуля и направления равнодействующей.

Равнодействующую нескольких приложенных к точке сил можно определить, применяя последовательно то же правило параллелограмма, причем очередность, в которой складывают силы, не влияет на определение равнодействующей, так как от перестановки мест слагаемых геометрическая сумма не зависит.

Из геометрии известно, что диагональ параллелограмма меньше арифметической суммы двух его непараллельных сторон и больше их разности. Поэтому если из двух приложенных к точке сил $P > Q$, то всегда имеет место неравенство

$$P - Q \leqslant R \leqslant P + Q. \tag{87}$$

Взаимно уравновешенные силы

Две равные и противоположно направленные силы, приложенные к одной точке, уравновешивают друг друга.

Если обе приложенные к точке силы направлены в противоположные стороны, а по модулю равны между собой ($P = Q$), то из предыдущего равенства находим, что $R = 0$. Такие две силы не могут оказать действия на точку, к которой они приложены, потому что действие одной из них как бы уничтожается действием другой. Наличие таких сил эквивалентно их отсутствию. Их называют *взаимно-уравновешенными силами.* Примем без математического доказательства, что две силы, приложенные к одному твердому телу, уравновешивают друг друга тогда и только тогда, когда они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Взаимно уравновесить друг друга могут не только две силы, но и любое бóльшее количество сил. Так, например, три силы, приложенные к одной точке, взаимно уравновешены, если геометрическая сумма двух из них равна и противоположна третьей силе.

очень похожее на доказательство, данное несколько лет спустя независимо от Ньютона Вариньоном. У Вариньона точка под действием одной силы движется по прямой линии. Эта прямая под действием второй силы перемещается параллельно своему первоначальному положению. Под действием обеих сил точка движется по диагонали параллелограмма, построенного на этих силах. По сути дела, это не доказательство правила параллелограмма сил, а лишь пример на сложение перемещений. Одновременно с Ньютоном и Вариньоном опубликовал свое доказательство Лами. С тех пор было сделано очень много попыток доказать правило параллелограмма, но в настоящее время считают, что правило параллелограмма не имеет математического доказательства и им пользуются как аксиомой.

От присоединения к твердому телу или отбрасывания от него уравновешенной системы сил механическое состояние тела не нарушается.

Вообще систему сил называют уравновешенной, если, будучи приложенной к твердому телу, находящемуся в покое, она не выводит тела из этого состояния. Под покоем понимается, конечно, относительный покой, при котором не изменяются положения всех точек тела в выбранной системе отсчета. (Общие условия равновесия системы сил даны в § 29).

Пусть некоторое абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя под действием какой-то системы сил. Приложим к этому же телу еще другую взаимно уравновешенную систему сил, т. е. такую систему сил, наличие которой эквивалентно ее отсутствию. Следовательно, присоединение уравновешенной системы не может вывести тело из состояния покоя. Аналогично, покой тела не будет нарушен, если отбросить от этого тела уравновешенную систему сил. Если же твердое тело находилось в каком-либо движении перед тем, как к нему приложили или отбросили от него взаимно уравновешенную систему сил, то движение тела от этого не изменится.

Всякая данная система сил, действующих на твердое тело, и другая система, полученная из данной путем присоединения или отбрасывания уравновешенной системы сил, оказывает на твердое тело совершенно одинаковое действие.

Действие силы на твердое тело не изменится, если эту силу перенести по линии ее действия в другую точку тела.

С и л а е с т ь в е к т о р с к о л ь з я щ и й. Пусть к абсолютно твердому телу (рис. 55, *а*) приложена в точке *A* сила $\vec{F}$. Прямую, вдоль которой направлен вектор силы, называют *линией действия силы*. Приложим к телу в какой-либо точке *B*, лежащей на линии действия силы $\vec{F}$, две взаимно уравновешенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, по модулю равные силе $\vec{F}$ и направленные по той же линии действия,

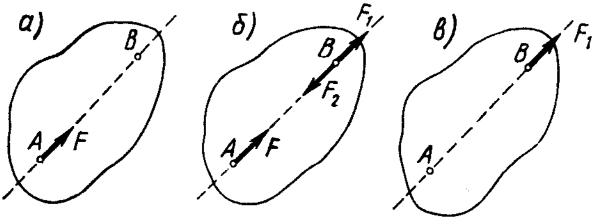


Рис. 55

причем сила $\vec{F}_1$ направлена в ту же сторону, а сила $\vec{F}_2$ в обратную (рис. 55, *б*). Действие силы $\vec{F}$ на тело не изменилось от приложения к нему взаимно уравновешенных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Если же тело абсолютно твердое, то как бы ни были велики приложенные к нему силы, расстояние между его точками и, в частности, между точками A и B не изменяется. В таком случае можно отбросить силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ как взаимно уравновешенную систему сил (рис. 55, *в*). Теперь на тело действует только одна сила $\vec{F}_1$, которая представляет собой силу $\vec{F}$, перенесенную по линии действия в другую точку того же тела *. Это свойство, выражаемое словами «сила есть вектор скользящий», имеет место лишь в недеформируемых телах.

Каждая из сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ может быть уравновешена одной и той же силой $\vec{F}_2$. Силу $\vec{F}_2$, которая, будучи приложенной к твердому телу, уравновешивает данную силу $\vec{F}$, называют *уравновешивающей* данную силу. Две силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ называют *эквивалентными*, т. е. равноценными по своему действию на тело, если они имеют одну и ту же уравновешивающую силу.

Это понятие распространяется и на систему сил: системы сил, имеющие одну и ту же уравновешивающую систему сил, называют *эквивалентными системами сил*.

Для равновесия трех непараллельных сил необходимо (но не достаточно), чтобы их линии действия пересекались в одной точке.

Необходимое условие равновесия трех сил. Опираясь на эти законы, докажем теорему, выражающую необходимое условие равновесия трех непараллельных сил, приложенных к одному телу **.

Пусть в каких-либо точках A, B и C к твердому телу приложены три силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{F}$, линии действия которых непараллельны между собой, но лежат в одной плоскости. Покажем, что если система этих трех сил уравновешена, то линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Всякие две непараллельные прямые на плоскости пересекаются. Следовательно, линии действия двух сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ пересекаются где-либо в точке O. Перенесем силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ в точку пересечения линий действия и сложим их, т. е. заменим одной равнодействующей $\vec{R}$. Данная уравновешенная система трех сил $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ заменена эквивалентной ей (а следовательно, также уравновешенной) системой двух сил $\vec{R}$ и $\vec{F}$. Но всякие две силы, находящиеся в равновесии, действуют по одной прямой, а потому линия действия силы $\vec{F}$ проходит через точку O. Предположение, что все три уравновешенные силы лежат в одной плоскости, сделано для упрощения доказательства, и оно излиш-

* Это свойство силы, приложенной к твердому телу, открыто Вариньоном.

** Чертеж для доказательства этой теоремы просим читателя сделать самостоятельно.

не, поскольку три взаимно уравновешенные силы не могут не лежать в одной плоскости.

Это условие равновесия трех сил является необходимым, но не достаточным, т. е. если три непараллельные силы находятся в равновесии, то их линии действия обязательно пересекаются в одной точке. Но если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то отсюда вовсе не следует, что эти три силы представляют собой уравновешенную систему сил.

Классификация сил

Силы, действующие в механической системе, подразделяют на внутренние и внешние, или на активные и реакции связей.

Как уже было сказано, в кинетике не имеет значения физическая природа сил: будь то мускульная сила, сила трения или сила всемирного тяготения. В кинетике важно лишь числовое значение (модуль) этой силы, ее направление и точка ее приложения.

Будем классифицировать силы, действующие на точки механической системы, по совершенно иным признакам и притом двумя различными способами.

Силы внешние и силы внутренние. *Внешними* называют силы, действующие на точки данной механической системы, но обусловленные наличием других материальных объектов. *Внутренними* силами называют силы взаимодействия между точками одной и той же системы. Одна и та же сила может быть внешней в одной механической системе и внутренней в другой. Так, например, сила давления газообразных продуктов сгорания на поршень двигателя внутреннего сгорания является внутренней, если за механическую систему принят весь двигатель, и внешней силой, если за механическую систему принят поршень. Для отдельной материальной точки все действующие на нее силы являются внешними.

Активные силы и реакции связей. Классифицировать силы можно по иному признаку и разложить их на активные силы и на реакции связей. Ознакомление с этим способом классификации сил требует некоторых предварительных разъяснений о связях, налагаемых на точки и на механические системы, и о реакциях связей.

Связью называют ограничение, стесняющее движения материальной точки или механической системы, осуществляемое другими материальными объектами.

Связи. Всякую точку M (x, y, z) называют *свободной точкой*, если ее возможно переместить, дав ее координатам x, y и z малые приращения δx, δy, δz произвольного знака и величины, и никакие другие тела не препятствуют этому перемещению точки M. Свободная точка обладает тремя *степенями свободы.*

Точку называют *несвободной,* если ее перемещение ограничено какими-либо условиями и ей нельзя сообщить любое движение. Ограничения, стесняющие движение точки, называют *связями*. Связи всегда осуществляются посредством других материальных тел и могут ограничивать не только перемещения, но и вообще движение (например, могут ограничивать скорости) точек.

Связи могут быть наложены не только на отдельные точки, но и на системы точек, и на твердые тела. Итак, связью называют ограничение, стесняющее движение материальной точки или механической системы и осуществляемое другими материальными объектами. Твердое тело, движение которого не ограничено связями, называют *свободным твердым телом,* а твердое тело, движение которого ограничено связями,— *несвободным твердым телом*. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Реакцией связи называют силу, с которой действует на данную материальную точку или механическую систему тело, осуществляющее связь.

Реакция связи. Если тело стремится переместиться в направлении связи и тем самым действует на связь, то со стороны связи возникает противодействие. Силу, с которой тело, осуществляющее связь, действует на тело, на которое связь наложена, называют *реакцией связи* *. Все остальные силы называют *активными*.

Изучая движение или покой тела, надо учитывать все силы, действующие на это тело, не исключая и реакций связи.

Определение реакций связи иногда представляет значительные трудности, особенно в динамике, где связи часто являются переменными величинами, зависящими от движения тела. И в статике не всегда бывает просто определить направление реакций связи и для их определения иногда бывает полезно пользоваться понятием «виртуальное перемещение».

Реакция идеальной связи направлена перпендикулярно виртуальным перемещениям.

Виртуальным (или возможным) перемещением называют воображаемые достаточно малые перемещения, допускаемые в данное мгновение наложенными связями без нарушения их. Пусть, например, какое-либо тело лежит на плоскости. Всякое мысленное малое перемещение тела по плоскости не нарушит связи тела с плоскостью. Такие мысленные перемещения тела и называют виртуальными, или возможными. Но если приподнять, хотя бы мысленно, тело над плоскостью, то тем самым нарушится связь. Такие перемещения в механике не относят к виртуальным (возможным) перемещениям.

Чтобы сообщить телу виртуальное перемещение, не нужно ни дополнительных сил, ни времени, так как виртуальные перемещения воображаемые.

Реакции связи направлены перпендикулярно плоскости виртуальных перемещений.

---

* Понятие реакции связи в этом смысле ввел Пуансо (1803).

Если тело находится на наклонной плоскости (см. рис. 53), то его виртуальным перемещением является перемещение по плоскости, а реакция R_N перпендикулярна этой плоскости. Говоря, что реакции направлены перпендикулярно виртуальным перемещениям, подразумевают так называемые идеальные реакции, а не реакции с трением, как называют равнодействующую, полученную от сложения идеальной реакции с силой трения. О направлении реакций с трением будет сказано ниже (§ 29). Реакции связей, осуществляемых в виде нитей и шарниров, будут разобраны ниже в конкретных примерах и задачах.

Глава VII

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА *

§ 23. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей силе, которую можно определить построением силового многоугольника.

С и л о в о й м н о г о у г о л ь н и к. Систему сил, приложенных к одному твердому телу, называют *сходящейся,* если линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Перенеся все силы к точке пересечения их линий действия, можно рассматривать систему как силы, приложенные к одной точке, или как *пучок сил*. Пусть, например, на твердое тело действуют четыре силы (рис. 56, *а*), линии дейст-

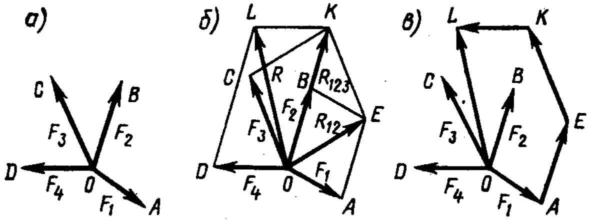


Рис. 56

вия которых пересекаются в точке O. Перенеся все силы к этой точке, изобразим их в некотором масштабе векторами $\vec{F}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{OB}$, $\vec{F}_3=\overrightarrow{OC}$, $\vec{F}_4=\overrightarrow{OD}$. Применив правило параллелограмма, сложим какие-либо из них, например $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, заменив их одной $\vec{R}_{12}$ (рис. 56, *б*):

$$\vec{R}_{12}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$

* Если курс механики начинать со статики, то для изучения этой главы необходимо предварительно ознакомиться с содержанием §§ 19, 21 и 22.

Система трех сил ($\vec{R}_{12}$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$) эквивалентна данной системе четырех сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$), а сложив две из этих трех сил, хотя бы $\vec{R}_{12}+\vec{F}_3=\vec{R}_{123}$, получим систему двух сил ($\vec{R}_{123}$, $\vec{F}_4$), эквивалентную данной системе. Складывая эти две силы по правилу параллелограмма, найдем равнодействующую R всей данной системы сил, изображаемую отрезком $\overrightarrow{OL}$:

$$\overrightarrow{OL}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{R}.$$

Символически это равенство для n-сходящихся сил записывают так:

$$\vec{R}=\sum_{k=1}^{k=n}\vec{F}_k, \text{ или } \vec{R}=\sum\vec{F}. \tag{88}$$

Как видно из хода доказательства, последовательность, в которой силы пучка складывают по правилу параллелограмма, не влияет на результат, т. е. от перемены мест слагаемых геометрическая сумма не изменяется:

$$\vec{R}_{1234}=\vec{R}_{2143}=\vec{R}_{2431}=\vec{R}_{1423}=\vec{R}_{1243}=\vec{R}_{2341} \text{ и т. д.}$$

Складывая силы пучка, применяя последовательно к каждым двум силам правило параллелограмма (рис. 56, *б*), мы провели на этом чертеже много лишних линий. Чтобы найти равнодействующую $\overrightarrow{OL}$, можно было не чертить линий $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{DL}$ и найти ее значительно проще. Для этого нужно от конца вектора одной из сил пучка отложить вектор, равный вектору какой-либо другой силы пучка, от его конца отложить вектор, равный вектору какой-либо третьей силы пучка и т. д., пока не будут таким образом отложены все силы системы. Для нахождения равнодействующей системы сил нужно соединить центр пучка с концом последнего отложенного вектора (рис. 56, *в*).

Ломаную $OAEKL$ называют *силовым многоугольником.*

Последовательность, в которой прикладывают эти векторы друг к другу, тоже не имеет значения, так как геометрическая сумма подчиняется закону переместительности, т. е. не зависит от перемены мест слагаемых. Но нужно твердо помнить, что векторы прикладывают так, чтобы начало каждого последующего приложенного вектора совпадало с концом предыдущего. Тогда, обходя последовательно вершины многоугольника $OAEKL$, будем все время передвигаться в направлении, указанном стрелками, и только равнодействующая OL направлена иначе: в точке L она соединяется с вектором KL концами, а в точке O (в центре пучка) — с вектором OA началами.

Способ силового многоугольника справедлив для всякой системы векторов, приложенных к одной точке, однако он удобнее в применении к плоским пучкам, так как плоские графические построения просты и наглядны.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут.

Условие равновесия пучка сил в геометрической форме. Система сходящихся сил всегда может быть приведена к равнодействующей $\vec{R}$, за исключением одного случая: $\vec{R}=0$. Этот случай имеет особое значение и на нем необходимо остановиться подробнее.

Если равнодействующая пучка сил равна нулю, то, следовательно, эквивалентна нулю и вся система сходящихся сил, т. е. наличие системы эквивалентно ее отсутствию. Такие системы называют *уравновешенными*. Следовательно, если равнодействующая системы сходящихся сил равна нулю, то система находится в равновесии. Очевидно, что справедливо и обратное заключение: если система сил находится в равновесии, то равнодействующая системы равна нулю.

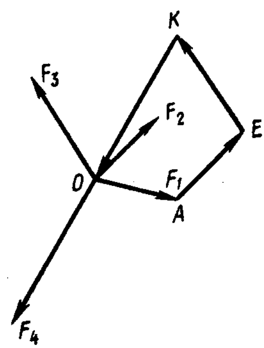


Рис. 57

В силовом многоугольнике равенство нулю равнодействующей выражается в том, что конец вектора последней силы совпадает с началом вектора первой силы, т. е. многоугольник замкнут. Замкнутость силового многоугольника является необходимым и достаточным условием равновесия пучка сил в геометрической форме *. Такой случай изображен на рис. 57 и может быть записан так:

$$\sum \vec{F}=0. \tag{88'}$$

Данную силу можно разложить по двум заданным направлениям на плоскости или по трем заданным направлениям в пространстве.

Составляющие силы. Займемся обратной задачей — разложением силы на составляющие. *Сходящимися составляющими силами* называют такие силы, которые в своей совокупности эквивалентны данной силе и приложены с ней в одной точке.

Эта задача не имеет однозначного решения, так как существует бесчисленное множество систем сходящихся сил, для которых данная сила является равнодействующей. Но в некоторых частных случаях она имеет вполне определенное решение. К таким случаям

---

* Это условие доказано Стевином (1605) для случая трех сил, две из которых взаимно перпендикулярны, и Робервалем (1636) — для трех произвольно направленных сил, но, по-видимому, впервые появилось в XIII в., в работах парижского математика Иордана Немория.

относится разложение силы на две составляющие, имеющие заданные направления в одной с ней плоскости.

Пусть, например, силу $\overrightarrow{AB}$ надо разложить на две составляющие: вертикальную и горизонтальную (рис. 58, *а*). Проведя заданные направления из начала и конца вектора силы, получим параллелограмм (прямоугольник) $ACBD$, диагональ которого AB является равнодействующей, а стороны AC и AD — искомыми составляющими силы AB.

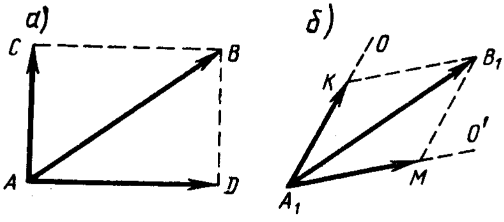


Рис. 58

Пусть теперь силу A_1B_1 нужно разложить по двум каким-либо другим направлениям в плоскости чертежа, например по направлениям A_1O и A_1O'. Проводя прямые с заданным направлением из начала A_1 вектора и параллельные им прямые из конца B_1 вектора силы, получим параллелограмм A_1KB_1M, стороны A_1K и A_1M которого выражают искомые составляющие (рис. 58, *б*).

Решение останется единственным, если силу AB нужно разложить на две составляющие, одна из которых задана по модулю и по направлению, а другая является искомой.

Разложить силу на две составляющие, не лежащие с ней в какой-либо одной плоскости, разумеется, невозможно. В трехмерном пространстве силу можно разложить на три составляющие, имеющие заданные направления, не лежащие в одной плоскости.

На практике часто встречается разложение силы на три взаимно перпендикулярные составляющие, направленные параллельно осям координат.

Составляющие данной силы, иначе называемые *компонентами* данной силы, являются векторными величинами и их складывают по правилам геометрического сложения. Так, обозначая составляющие силы $\vec{F}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$ и $\vec{Z}$, можно написать геометрическое равенство

$$\vec{F}=\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}.$$

Проекцией силы на ось называют скалярную величину, равную произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и направлением силы.

Проекция силы на ось. С только что рассмотренным понятием составляющие силы по оси тесно соприкасается понятие *проекция силы* на ось. Проекцию силы на ось получаем так же, как и проекцию всякого вектора, например вектора скорости (см. рис. 33). Для этого надо модуль вектора помножить на направляющий косинус. Знак проекции совпадает со знаком направляющего косинуса, т. е. проекцию считают отрицательной, если направление вектора составляет тупой угол с положительным направлением оси. Чтобы упростить вычисления, при определении проекции силы на ось обычно помножают модуль силы на косинус острого угла между осью и линией действия силы и приписывают проекции знак «+», если она «направлена» в положительном направлении оси, и знак «—», если в противоположную сторону. Так, при плоской системе и при обычном направлении осей координат (Ox вправо, а Oy вверх) знак проекций указан в таблице

	X	Y
+	→	↑
—	←	↓

Здесь X и Y означают проекции силы на оси абсцисс и ординат.

Проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих.

Проекция равнодействующей силы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих, потому что проекция силы на ось не является вектором. Например, проекция равнодействующей R пучка сил, представленного силовым многоугольником $OAEKL$, определяется из равенства (рис. 59, *а*) *

$$ol = oa + ae - ek + kl.$$

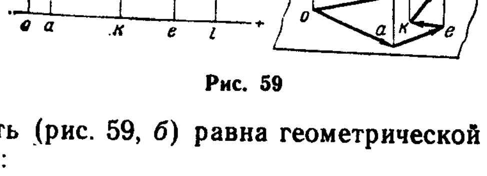


Рис. 59

Проекция вектора на плоскость имеет собственное направление и является вектором. Поэтому проекция равнодействующей на плоскость (рис. 59, *б*) равна геометрической сумме проекций составляющих:

$$\vec{ol} = \vec{oa} + \vec{ae} + \vec{ek} + \vec{kl}.$$

* Для наглядности на рис. 59, *а* изображен плоский силовой многоугольник и ось взята в его плоскости, но теорема справедлива и для пространственной системы сил.

Модуль и направление равнодействующей пучка сил можно определить по суммам проекций составляющих на координатные оси.

Определение равнодействующей пучка сил. Пусть к твердому телу приложены силы, направления которых в пространстве могут быть какие угодно, но линии действия должны пересекаться в одной точке O. Построим прямоугольные оси координат с началом в точке O или в какой-либо другой точке. Будем обозначать здесь и в дальнейшем проекции силы на оси координат X, Y и Z и в случае надобности, отличая проекции разных сил на одну и ту же ось, индексами X_1, X_2 $X_3, \ldots$. Алгебраические суммы проекций всех сил системы на оси координат обозначим: ΣX, ΣY, ΣZ.

Обозначив проекции равнодействующей на оси координат через R_x, R_y и R_z, можем написать равенства

$$R_x = \sum X; \quad R_y = \sum Y; \quad R_z = \sum Z. \tag{89}$$

Модуль равнодействующей определим через корень квадратный суммы квадратов ее проекций на оси координат

$$R = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

или (что то же) через квадратный корень из суммы квадратов сумм ее составляющих

$$R = +\sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}. \tag{90}$$

Направление равнодействующей определим через ее направляющие косинусы

$$\cos \alpha_R = R_x/R; \quad \cos \beta_R = R_y/R; \quad \cos \gamma_R = R_z/R. \tag{91}$$

Задача № 24. Найти равнодействующую двух сил $F_1 = 5$ Н и $F_2 = 8$ Н, приложенных к одной точке и направленных под углом 60° друг к другу (рис. 60).

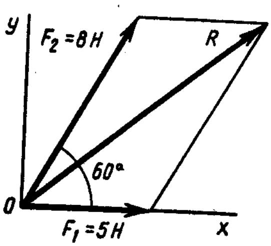


Рис. 60

Решение. Построим оси координат, направив ось Ox по направлению силы F_1, а ось Oy к ней перпендикулярно, и определим модуль равнодействующей через проекции

$$R_x = X_1 + X_2 = 5 + 4 = 9 \text{ Н};$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 = 0 + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ Н};$$

$$R = +\sqrt{81 + 48} = +\sqrt{129} = 11{,}36 \text{ Н}.$$

Определим направление равнодействующей через ее направляющие косинусы

$$\cos \alpha_R = R_x/R = 0{,}792 \text{ и } \alpha_R = 37{,}5°;$$

$$\cos \beta_R = R_y/R = 0{,}610 \text{ и } \beta_R = 52{,}5°.$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на оси координат.

Условия равновесия пучка сил в аналитической форме. Как было только что показано, при равновесии системы сходящихся сил ее равнодействующая равна нулю.

Если пучок сил является плоским, то

$$R=+\sqrt{\left(\sum X\right)^2+\left(\sum Y\right)^2}=0.$$

Сумма квадратов двух величин может равняться нулю только в том случае, если равна нулю каждая из этих величин, а потому

$$\sum X=0; \quad \sum Y=0. \tag{92}$$

Эти равенства называют *условиями равновесия* плоской системы *сходящихся сил* в аналитической форме. Они являются необходимыми и достаточными условиями.

Если же пучок сил не лежит в одной плоскости, но является уравновешенной системой, то путем аналогичных рассуждений выведем условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме

$$\sum X=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum Z=0. \tag{93}$$

Если условия равновесия (92) и (93) содержат неизвестные величины, то их называют *уравнениями равновесия* сходящихся сил.

Задача № 25. Нить с грузами P и Q на концах перекинута через блоки A и B, находящиеся на одной горизонтали (рис. 61, *а*). В точке O к нити, находящейся между блоками, привязали груз $G=27{,}3$ Н. При равновесии системы ветвь

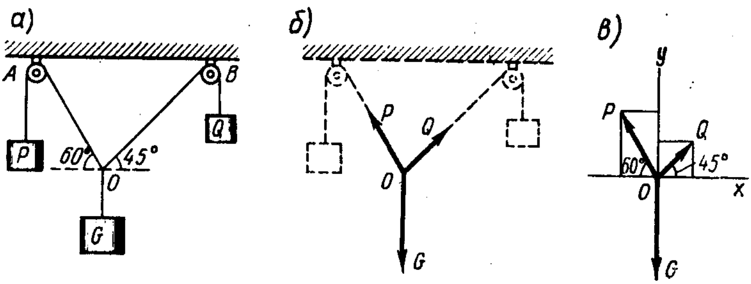


Рис. 61

OA образует с горизонталью угол 60°, а ветвь OB — угол 45°. Пренебрегая трением в блоках, определить грузы P и Q.

Решение. Равновесие какого объекта надо рассмотреть для решения задачи? Требуется определить веса грузов P и Q. Веса грузов приложены к этим грузам и направлены вертикально вниз. Каждый груз натягивает нить с силой, равной своему весу. Блок меняет направление нити, а следовательно, и направление силы натяжения нити. Силы, по модулю равные P и Q и направленные по OA и OB, пересекаются в точке O, где приложена и заданная сила G (рис. 61, *б*). Поэтому для решения задачи надо рассмотреть равновесие точки O.

Какие же силы действуют на точку O? На нее действуют сила G, натяжение P ветви OA, натяжение Q ветви OB. Веса грузов P и Q учитывать не надо, потому что они не приложены к точке O.

Для изучения равновесия сил, приложенных к точке O, можно построить силовой многоугольник или составить уравнение равновесия. Выберем второй путь. Построим систему координат с началом в точке O (рис. 61, *в*), спроецируем силы на оси и составим уравнения равновесия.

Для проекций на ось Ox имеем

$$\sum X = 0; \quad Q\cos 45° - P\cos 60° = 0.$$

Знак проекции Q положительный, потому что она направлена в положительном направлении оси Ox (вправо). Знак проекции P отрицательный, так как она направлена в отрицательном направлении оси Ox. Проекция силы G на ось Ox равна нулю.

Аналогично получаем

$$\sum Y = 0; \quad Q\sin 45° + P\sin 60° - G = 0.$$

Проекции P и Q на ось Oy положительны, так как направлены в положительную сторону оси. Проекция G отрицательна, так как направлена вниз. Подставляя числовые значения и решая уравнения, получаем ответ.

Ответ. $P = 20$ Н, $Q = 14{,}1$ Н.

§ 24. ПРИВЕДЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ К РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Две параллельные силы имеют равнодействующую по модулю, равную сумме модулей, слагаемых сил, если силы направлены в одну сторону, и разности модулей, если силы не равны и направлены противоположно друг другу: $R = F_1 \pm F_2$.

Сложение двух параллельных сил. Исследуем, в каких случаях система двух параллельных сил, приложенных к одному твердому телу, эквивалентна одной равнодействующей силе, и выведем правило сложения параллельных сил.

Рассмотрим одновременно два случая (рис. 62). На чертежах слева обе силы F_1, F_2 направлены в одну сторону; на чертежах справа силы F_1, F_2 не равны и направлены в обратные стороны.

К твердому телу приложена в точках A и B система двух параллельных сил F_1, F_2 (рис. 62, *а, з*).

Прикладываем к телу в точках A и B две взаимно уравновешенные силы P_1 и P_2 (рис. 62, *б, и*). Система четырех сил F_1, F_2, P_1, P_2 эквивалентна данной системе F_1, F_2.

Складываем силы, приложенные в точке A, а также B (рис. 62, *в, к*). Система непараллельных сил R_1, R_2 эквивалентна данной системе параллельных сил F_1, F_2.

Переносим R_1 и R_2 в точку D пересечения их линий действия (рис. 62 *г, л*) и там раскладываем на составляющие F_1', P_1' и F_2', P_2' (рис. 62, *д, м*).

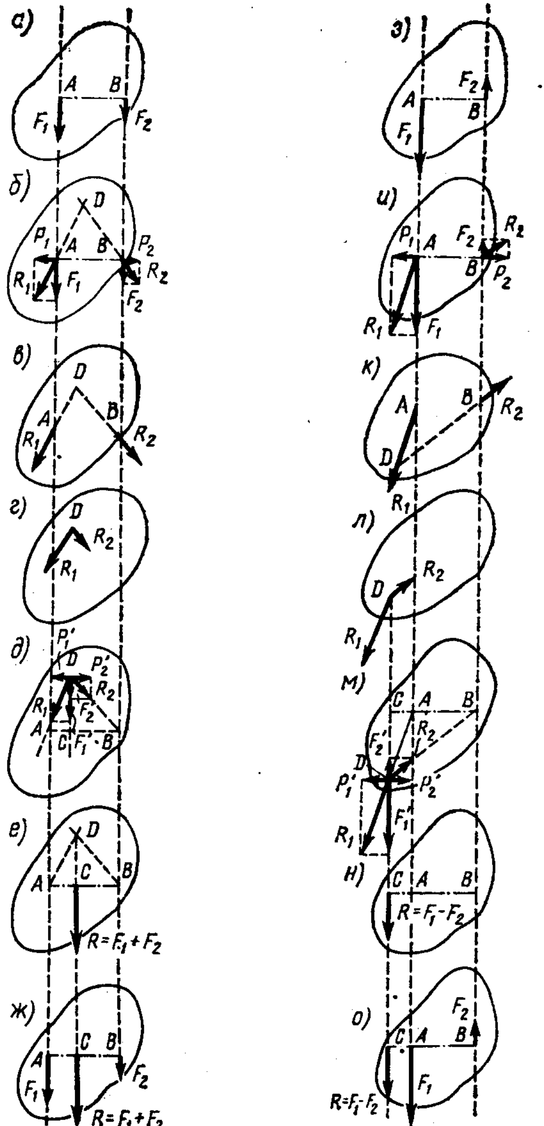


Рис. 62

Взаимно уравновешенные силы P_1' и P_2' отбрасываем. Система сил F_1', F_2', приложенных в D, эквивалентна данной системе сил (рис. 62, *е, н*).

Переносим равнодействующую в точку C (рис. 62, *ж, о*). Убеждаемся, что в первом случае $R=F_1+F_2$, во втором $R=F_1-F_2$.

Линия действия равнодействующей двух параллельных сил делит расстояние между линиями действия слагаемых сил внутренним или внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям слагаемых сил: $F_1:F_2=BC:AC$.

Направление и местонахождение равнодействующей двух параллельных сил. Как только что было показано, равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна слагаемым силам и одинаково с ними направлена. Если же слагаемые направлены противоположно друг другу, то равнодействующая направлена в сторону большей из слагаемых. Остается определить местонахождение равнодействующей в обоих этих случаях. Для этого воспользуемся рис. 63, *а* и *б*, где суммированы все отдельные действия, представленные на предыдущем рисунке. Здесь для обоих случаев получаем одни и те же равенства:

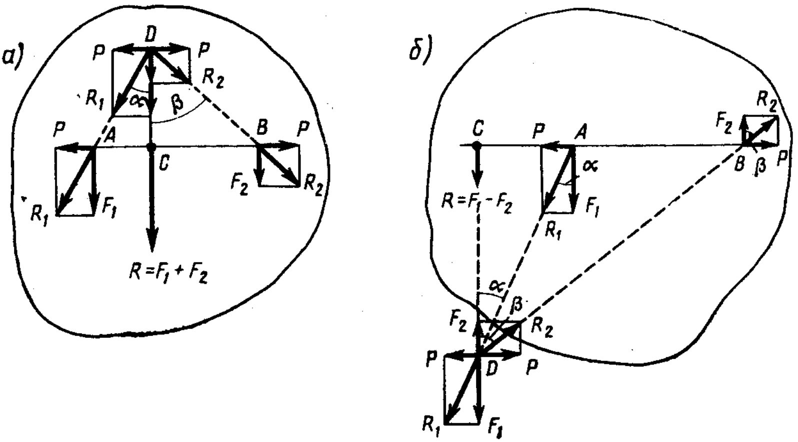


Рис. 63

$$\operatorname{tg}\alpha=AC/CD=P/F_1,\quad \operatorname{tg}\beta=BC/CD=P/F_2.$$

Разделив эти равенства друг на друга, находим, что, независимо от того, направлены ли слагаемые силы в одну сторону или в противоположные стороны, расстояния от равнодействующей до слагаемых сил находятся в обратной пропорции к их модулям:

$$AC:CB=F_2:F_1. \tag{94}$$

Однако несмотря на одинаковость соотношения (94) для обоих случаев, надо иметь в виду, что деление отрезка AB в данном отношении $F_2:F_1$ в случае одинаково направленных сил производится внутренним образом, если же силы направлены противоположно, то — внешним образом. Рассмотрим такой пример: на тело действуют две параллельные силы, одна из которых вдвое больше другой ($F_1=2F_2$). Положим, что $AB=6$ см; расстояние равнодействующей от большей силы в два раза меньше, чем ее расстояние от меньшей силы. Если F_1 и F_2 направлены в одну сторону, то равнодействующая лежит между ними в 2 см от бо́льшей и в 4 см от меньшей силы. Если же слагаемые силы направлены противоположно друг другу, то равнодействующая лежит за бо́льшей силой на расстоянии 6 см от большей и $6+6=12$ см от меньшей. Пропорция соблюдается, но линия действия иная.

Равенство (94) дополним производной пропорцией и получим соотношение, пригодное для обоих случаев сложения двух параллельных сил:

$$\frac{F_1}{BC}=\frac{F_2}{AC}=\frac{R}{AB}. \tag{94'}$$

Центром параллельных сил называют точку на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, вокруг которой поворачивается эта линия действия, если все силы поворачиваются вокруг точек их приложения, оставаясь параллельными между собой.

Центр параллельных сил. Если на твердое тело действует несколько параллельных сил, то, применяя последовательно тот же метод (сложение сил по две), можно заменить систему параллельных сил другой системой, ей эквивалентной.

Пусть все приложенные силы направлены в одну сторону (рис. 64). Складывая две из этих сил (F_1 и F_2), найдем их равнодействующую, сложим ее с третьей силой (F_3) и найдем равнодействующую трех сил и т. д. Сложив их все, найдем равнодействующую всей системы, по модулю равную сумме модулей всех слагаемых сил и приложенную в так называемом *центре параллельных сил.*

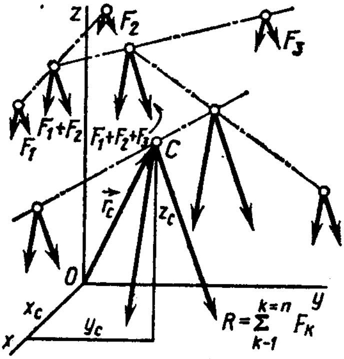


Рис. 64

Предположим, что все параллельные силы повернулись вокруг точек их приложения на один и тот же угол. Тогда и равнодействующая всей системы параллельных сил повернется на тот же угол вокруг центра параллельных сил, так как не изменятся ни модули, ни точки приложения слагаемых сил.

Центром тяжести твердого тела называют центр параллельных сил, представляющих силы тяжести материальных частиц твердого тела.

Центр тяжести. Примером центра параллельных сил может явиться центр подъемных сил корабля или центр давления насыпи на плоскую стенку. Но особенно часто приходится определять центр параллельных сил тяжести, которые, по сути дела, не являются параллельными, но могут быть с большой точностью приняты за параллельные.

На каждое материальное тело, находящееся вблизи земной поверхности, действует сила, называемая *силой тяжести*. Если это тело свободно падает на Землю, то (по отношению к системе отсчета, неразрывно связанной с Землей) оно совершает прямолинейное равноускоренное движение по вертикали с ускорением g, а если оно покоится по отношению к Земле, лежит на Земле или подвешено на нити, то оно давит на опору или натягивает нить с силой, называемой *весом* тела. Но Земля движется вместе с находящейся на ней системой отсчета. Поэтому равноускоренное прямолинейное движение падающего на Землю тела, так же как и покой подвешенного тела, является относительным. В действительности же, по отношению к инерциальной системе отсчета, или по отношению к системе отсчета, совершающей круговое поступательное движение вместе с центром Земли (см. рис. 38, *а*), картина иная. Падающее на Землю тело движется не прямолинейно и не равноускоренно, подвешенное на нити тело не находится в покое, натяжение нити и притяжение тела к Земле не уравновешивают друг друга, а сила, равная и противоположная натяжению нити, называемая весом тела, отличается от силы притяжения тела к Земле. Эта разница, однако, очень мала, в большинстве явлений ею можно пренебрегать и не делать различия между весом и силой тяжести. Тело, падающее на Землю с небольшой высоты, движется почти так же, как если бы Земля была неподвижна и тело падало бы под действием своего веса, который для данного места является постоянной силой, направленной к центру Земли и определяемой равенством (80)

$$G = mg,$$

хотя вес и ускорение g изменяются в зависимости от географической широты места и от высоты над уровнем моря.

Итак, примем, что под действием силы тяжести каждая материальная частица тела, находящаяся вблизи Земли, притягивается к Земле и вектор силы тяжести направлен «вниз» по отвесу к центру Земли *. Силы тяжести двух частиц не являются параллельными, так как их линии действия пересекаются в центре Земли. Однако громадные размеры Земли и сравнительно небольшие размеры материальных тел, центры тяжести которых приходится

* Понятия «верх» и «низ» в таком смысле впервые определены Аристотелем.

определять, позволяют считать силы тяжести частиц одного тела параллельными между собой. Например, направления сил тяжести двух частиц, находящихся на корме и на носу океанского лайнера длиной 300 м, составляют между собой угол в десять секунд дуги, который невозможно даже отметить на чертеже ввиду его малости. С очень большой точностью можно принимать силы тяжести различных частиц одного и того же тела за параллельные, а общий вес тела считать приложенным в центре этих параллельных сил тяжести, называемом *центром тяжести тела* *.

Как бы ни поворачивали тело и ни изменяли его положение по отношению к Земле, силы тяжести его отдельных частиц останутся вертикальными и параллельными между собой. Относительно тела они будут поворачиваться вокруг своих точек приложения, сохраняя параллельность между собой. При этом линия действия равнодействующей параллельных сил будет проходить через одну и ту же точку — центр тяжести. Отсюда следует, что центр тяжести твердого тела не изменяет своего положения относительно этого тела при изменении положения самого тела. Положение центра тяжести в теле зависит только от формы тела и от распределения в нем материальных частиц. Отыскивать центр тяжести какого-либо тела методом последовательного сложения векторов сил тяжести его частиц нецелесообразно из-за громоздкости вычислений. Выведем общие формулы (§ 26), позволяющие сравнительно легко определить координаты центра параллельных сил (или центра тяжести тела).

Как уже было сказано (см. § 20), вес $G=mg$ всякого материального тела зависит от местонахождения этого тела на земном шаре, и ускорение g падающих тел не вполне одинаково в различных местах. Это обстоятельство вследствие небольших (сравнительно с Землей) размеров взвешиваемого тела тоже никак не может повлиять на положение его центра тяжести. Но бывает такое состояние материальных тел и механических систем, при котором понятие «вес» вообще теряет смысл. Например, состояние невесомости, о котором рассказывают наши космонавты. Кроме того, в мировом пространстве существуют области, где в состоянии невесомости пребывает всякое тело независимо от его движения; например, точка пространства, в которой материальное тело притягивается к Земле и к Луне с равными и противоположно направленными силами. В таких случаях теряет всякий смысл и определение центра тяжести как центра параллельных сил, но сама точка продолжает существовать и не теряет своего значения. Поэтому целесообразно определять эту точку в зависимости не от веса, а от массы частиц. Понятие *центр масс* шире понятия центр тяжести, так как масса не исчезает даже при таких обстоятельствах, при которых

* Понятие «центр тяжести» впервые установлено Архимедом около 250 г. до н. э.

вес неощутим. Понятие «центр масс» имеет применение во всякой системе материальных точек, тогда как понятие «центр тяжести» выведено для системы сил, приложенных к одному неизменяемому твердому телу.

§ 25. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов действующих на него сил относительно точки опоры равнялась нулю.

Условие равновесия рычага. Твердое тело AB, имеющее возможность поворачиваться вокруг неподвижной оси C под действием сил, линии действия которых расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, называют *рычагом*. На рис. 65 изображены рычаги первого (рис. 65, *а*) и второго (рис. 65, *б*) рода. Стержень, весом которого пренебрегаем, может поворачиваться вокруг точки C. Он находится под нагрузкой сил F_1 и F_2. Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил проходила через точку опоры C, тогда она уравновесится с реакцией опоры. Следовательно, необходимо выполнение равенства

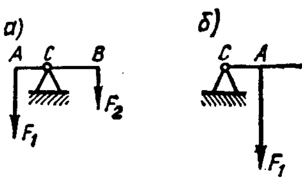


Рис. 65

$$AC : CB = F_2 : F_1, \text{ или}$$
$$F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC = 0.$$

Длину перпендикуляра (CA и CB), опущенного из точки C на линию действия силы, называют *плечом* этой силы относительно точки C, а произведение модуля силы на плечо называют *моментом силы* относительно точки C: $M_C = Fh$, где h — плечо силы F.

Если сила стремится повернуть плечо вокруг точки C против вращения стрелок часов, то момент силы относительно точки C считают положительным, а если по вращению стрелок часов, то отрицательным. Так, момент силы F_1 относительно точки C на рис. 65, *а* положительный ($M_{1C} > 0$), а момент силы F_2 относительно той же точки отрицательный ($M_{2C} < < 0$), а на рис. 65, *б* — наоборот.

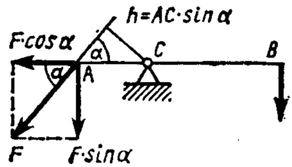


Рис. 66

Как видно из предыдущего равенства, для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно точки опоры равнялась нулю:

$$\sum M_C = 0. \tag{95}$$

Если сила не перпендикулярна рычагу (рис. 66), то способность ее поворачивать рычаг вокруг точки опоры и в этом случае измеряется моментом силы, а под плечом понимают кратчайшее расстояние от точки опоры до линии действия силы. Пусть сила F приложена к рычагу в точке A и составляет с ним некоторый угол α. Разложим силу на две составляющие, из которых одна $F \sin \alpha$ перпендикулярна рычагу, а другая $F \cos \alpha$ направлена вдоль рычага. Эта вторая составляющая не может повернуть рычаг, а поворачивать его будет только первая составляющая $F \sin \alpha$, или, как говорят, только эта составляющая создает вращающий момент.

Следовательно, момент силы F относительно опоры C

$$M_C(F) = F \sin \alpha \cdot AC.$$

Но, как видно из чертежа, $AC \sin \alpha = h$. Называя плечом силы относительно точки длину перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы, находим, что и в этом случае момент силы равен произведению модуля силы на плечо:

$$M_C = Fh. \tag{96}$$

Момент силы относительно точки выражается произведением модуля силы на плечо, взятым со знаком плюс или минус.

Момент силы относительно точки. Понятие момента применимо не только к силам, действующим на рычаг, но и к силам, приложенным ко всякому твердому телу. Момент силы может быть определен не только относительно опоры, но и относительно всякой точки. Точку, относительно которой определен момент силы, называют *центром момента*.

Таким образом, опуская из какой-нибудь точки O перпендикуляр на линию действия силы F и умножая модуль силы на длину этого перпендикуляра, получим момент силы F относительно этой

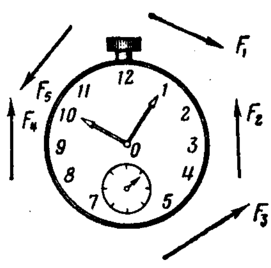


Рис. 67

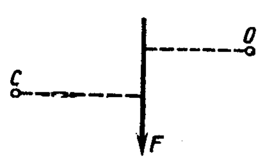


Рис. 68

точки O. Знак момента будем определять, руководствуясь следующим правилом: если мысленно, закрепив центр момента и действуя на плечо в направлении силы, будем поворачивать плечо против хода часовой стрелки, то момент силы относительно данного центра положителен, если же по ходу часовой стрелки, то момент отрицателен.

Так (рис. 67), моменты силы F_2, F_3 и F_5 относительно точки O положительны, а моменты сил F_1 и F_4 относительно той же точки отрицательны.

Одна и та же сила может иметь положительный момент относительно одной точки и отрицательный относительно другой. Так, момент силы F (рис. 68) относительно точки O положителен, а относительно точки C отрицателен.

Момент силы относительно начала координат связан с проекциями X и Y силы на оси и с координатами x и y точки ее приложения соотношением $M_O = xY - yX$.

Аналитическое выражение момента силы. Пусть дана сила F (рис. 69), направление которой составляет с осями координат углы α и β. Направляющие косинусы этой силы

$$\cos\alpha_F = X/F;\quad \cos\beta_F = Y/F = \sin\alpha_F.$$

Проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из начала координат в точку K приложения силы. Если координаты точки приложения силы обозначить через x и y, то, как видно из чертежа, направляющие косинусы радиуса-вектора

$$\cos\alpha_r = x/r;\quad \cos\beta_r = y/r = \sin\alpha_r.$$

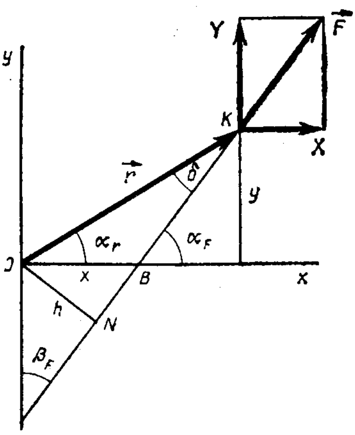


Рис. 69

Плечо h силы относительно точки O определим из треугольника OKN:

$$h = r\sin\delta.$$

И для определения момента силы получаем следующую формулу:

$$M_O = rF\sin\delta. \tag{97}$$

Угол δ как внутренний угол треугольника OKB равен внешнему α_F без другого внутреннего с ним несмежного α_r, а поэтому

$$\sin\delta = \sin(\alpha_F - \alpha_r) = \sin\alpha_F\cos\alpha_r - \cos\alpha_F\sin\alpha_r.$$

Подставляя в это выражение, а затем в (97) найденные выше значения тригонометрических величин, получим

$$M_O = rF\,\frac{xY - yX}{rF}$$

и окончательно

$$\boxed{M_O = xY - yX.}^{*} \tag{98}$$

Определяя момент силы по формуле (98), нет надобности определять его знак, сообразуясь с ходом часовой стрелки, так как

* Это равенство впервые дал Пуансо (1804).

знак получается непосредственно из формулы в зависимости от знаков x, y, X, Y.

В курсе формуле (98) уделена значительная роль.

Момент силы относительно точки выражается векторным произведением радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$.

Момент силы относительно точки как вектор. Напомним, что векторным произведением $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, направленный перпендикулярно к $\vec{a}$ и $\vec{b}$ согласно «правилу буравчика», а по модулю равный произведению модулей a и b на синус угла между направлениями этих векторов. Следовательно, как видно из (97), момент силы по своей величине равен модулю векторного произведения радиуса-вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$, и момент силы относительно точки O как вектор можно представить так:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}.}^{*} \qquad (99)$$

Вектор $\vec{M}_O$ не изображен на рис. 69, потому что он направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, т. е. в данном случае перпендикулярно плоскости чертежа. Если же изобразить силу $\vec{F}$ не в плоскости чертежа, а в трехмерном пространстве, то момент $\vec{M}_O$ силы $\vec{F}$ относительно точки O надо отложить от точки O перпендикулярно плоскости, составляемой радиусом-вектором и вектором силы.

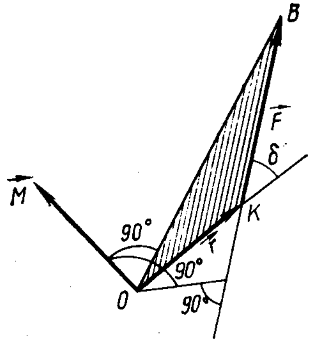


Рис. 70

Удобна следующая геометрическая интерпретация (рис. 70). Обозначив буквами K и B начало и конец вектора силы, соединим точки O, K и B, получим треугольник OKB, площадь которого равна половине произведения основания KB на высоту $h = OK \sin \delta$. Сравнивая это равенство с (96), найдем, что момент M_O силы F, изображаемой вектором $\vec{KB}$, относительно точки O численно равен удвоенной площади треугольника OKB. Напомним, что отрезок KB выражен в единицах силы, а потому площадь треугольника OKB выражает-

* Крест для обозначения векторного произведения предложил Гиббс.

ся не в единицах площади, а в единицах момента силы (ед. силы$\times$ $\times$ед. длины):

$$M_O = 2 \text{ пл. } \triangle OKB.^*$$

Вектор момента направлен от точки O перпендикулярно плоскости OKB в такую сторону, с которой вектор $\overrightarrow{KB}$ представляется поворачивающим треугольник OKB вокруг точки O против хода часовой стрелки. По модулю он равен (в некотором выбранном масштабе) удвоенной площади треугольника OKB.

Если вектор $\overrightarrow{KB}$ переместить вдоль линии действия силы в пределах абсолютно твердого тела, к которому эта сила приложена, оставив точку O неизменной, то вектор момента не изменится, так как не изменится плоскость и площадь треугольника OKB. Сила является вектором скользящим, и действие силы, а следовательно, и ее момент не изменяются при перенесении силы вдоль линии действия. Если же переменить точку O, то положение и площадь треугольника OKB изменятся, а следовательно, изменится и момент силы. Поэтому момент силы относительно какой-либо точки O является вектором прикрепленным; он приложен к точке O и переносить его в какое-либо другое место тела нельзя.

Выражение момента силы относительно точки в виде вектора вполне соответствует физической сущности этого понятия, и если силы расположены в различных плоскостях, то моменты сил относительно точки складывают по правилу параллелограмма. Только при рассмотрении системы сил, расположенных в одной плоскости, можно игнорировать направление вектора момента, а учитывать его знак, т. е. определять момент по формулам (96), (97) и (98).

В такой системе, когда все силы и центр моментов расположены в одной плоскости, векторы моментов различных сил относительно какой-либо точки O направлены от точки O перпендикулярно этой плоскости в ту или другую сторону, и в этом случае их складывают алгебраически.

Момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

Теорема Вариньона. Пусть даны пространственный пучок сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n$ (рис. 71) и равнодействующая $\vec{R}$ этого пучка. Возьмем где-либо совершенно произвольно точку O, проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из точки O в точку приложения сил пучка, определим момент каждой силы относительно точки O и сложим эти моменты:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{M}_{Ok} = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \ldots + \vec{r}\times\vec{F}_n =$$

$$= \vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n).$$

* Такая интерпретация момента силы принадлежит Пуансо (1803), но применялась еще П. Вариньоном (1725).

Заменяя согласно (88) геометрическую сумму всех сил сходящейся системы их равнодействующей, получим

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{M}_{Ok} = \vec{r} \times \vec{R}, \tag{100}$$

т. е. момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно какой-либо точки равен сумме моментов всех сил относительно той же точки. Момент силы относительно точки есть вектор, поэтому сумма является геометрической. В частном случае, если все силы и центр моментов лежат в одной плоскости, то все векто-

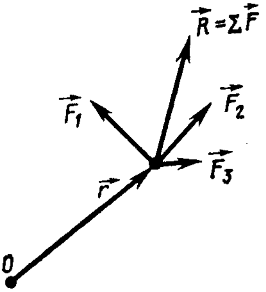


Рис. 71

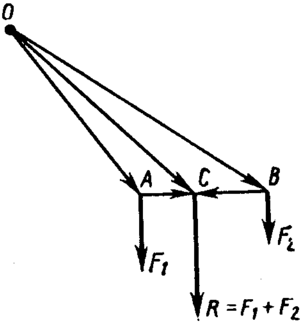


Рис. 72

ры моментов направлены по одной прямой, перпендикулярной этой плоскости, и геометрическое сложение моментов сил заменяется алгебраическим сложением.

Таким образом, момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил равен алгебраической сумме моментов составляющих *.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива не только для пучка сил, но и для всякой системы сил, имеющей равнодействующую, как это будет показано в § 28, а здесь докажем теорему Вариньона для параллельных сил.

Пусть к твердому телу приложены две параллельные силы F_1 в точке A и F_2 в точке B (рис. 72). Их равнодействующая $R = F_1 + F_2$ приложена в точке C на расстоянии CA и CB, обратно пропорциональном модулям слагаемых сил. Определим момент равнодействующей относительно какой-либо точки O. Для этого проведем радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ и определим момент равнодействующей по формуле (99):

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OC} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_2.$$

---

* Доказана П. Вариньоном и опубликована 1725 г.

Но

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

и

$$\vec{M}_O(\vec{R})=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}_1+\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_2-(\overrightarrow{CA}\times\vec{F}_1+\overrightarrow{CB}\times\vec{F}_2).$$

В правой части этого равенства первые два векторные произведения выражают моменты составляющих сил относительно точки O, а сумма двух последних, взятая в скобки, согласно формуле (95) (см. с. 144) равняется нулю:

$$\vec{M}_O(\vec{R})=\vec{M}_O(\vec{F}_1)+\vec{M}_O(\vec{F}_2).$$

Момент равнодействующей двух параллельных сил относительно произвольно взятой точки O равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки. Методом от n к $n+1$ нетрудно показать справедливость теоремы для любого количества параллельных сил.

§ 26. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Чтобы определить момент силы относительно оси, нужно спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и затем определить момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости.

Как определить момент силы относительно оси? Знакомство с понятием момента силы относительно оси начнем с конкретного примера. Дверь (рис. 73) может поворачиваться вокруг оси. Механическое воздействие силы F, поворачивающей дверь, зависит не только от величины, но и от положения вектора силы по отношению к оси. Разложим силу F на две составляющие, из которых одну Q направим параллельно оси, а другую P расположим в плоскости, перпендикулярной оси. Очевидно, что составляющая, параллельная оси, поворачивать дверь не будет, и действие силы F на закрепленную на оси дверь характеризуется моментом составляющей P (расположенной в плоскости, перпендикулярной к оси) относительно точки пересечения оси и плоскости.

Установим теперь общее правило определения момента силы относительно оси. Чтобы определить момент силы относительно оси, нужно эту силу спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси (рис. 74), и определить момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент силы относительно оси — скалярная величина, потому что у него нет собственного направления, а «направлен» он по оси в ту или иную сторону, т. е. определяется величиной и знаком и, конечно, направлением оси.

Где именно проведена перпендикулярная оси плоскость, не имеет значения, так как проекции силы на параллельные плоскости и плечи проекций силы во всех случаях одни и те же. Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях: если сила параллельна оси или если сила пересекает ось. Эти два случая мож-

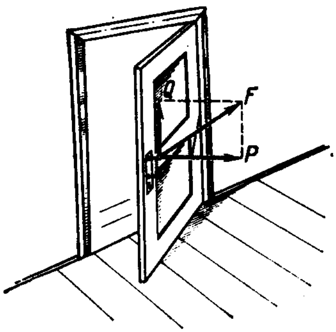


Рис. 73

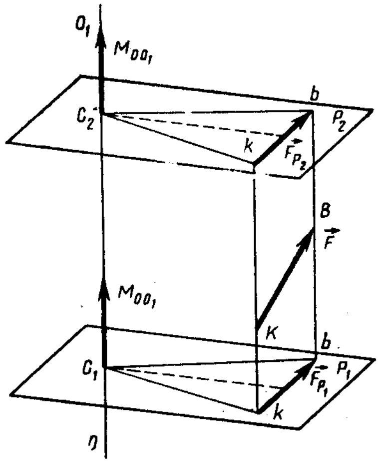


Рис. 74

но объединить в один: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно какой-либо точки, взятой на оси.

Покажем, что момент силы относительно оси равен проекции на данную ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси.

Возьмем на оси OO_1 произвольную точку C_1 (рис. 75) и определим момент силы $\vec{F}=\overrightarrow{KB}$ относительно этой точки. Момент $\vec{M}_C$ силы $\vec{F}$ относительно точки C_1 выражается вектором, по модулю равным удвоенной площади треугольника C_1KB и приложенным в точке C_1 перпендикулярно плоскости треугольника C_1KB.

Проведем через точку C_1 плоскость, перпендикулярную оси. Чтобы определить момент M_{OO_1} силы относительно оси, спроецируем силу на эту плоскость и определим момент проекции $\vec{kb}$ относительно точки пересечения оси и плоскости, т. е. относительно точки C_1. Этот момент численно равен удвоенной площади треугольника C_1kb и направлен перпендикулярно плоскости треугольника C_1kb, т. е. по оси OO_1.

Но треугольник C_1kb является проекцией треугольника C_1KB на плоскость, перпендикулярную оси. Площадь проекции ра на площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус двугранного угла между плоскостями, измеряемого линейным углом между перпендикулярами к этим плоскостям:

$$\text{пл.}\ \triangle C_1kb = \text{пл.}\ \triangle C_1KB \cos\vartheta.$$

Спроецировав на ось момент силы относительно точки C_1 и приняв во внимание это равенство, найдем

$$M_{OO_1} = M_C \cos\vartheta.$$

Проекция на ось OO_1 момента силы, взятого относительно точки C, не зависит от положения точки C на оси, как это ясно из рис. 75. Следовательно, момент силы относительно оси равен проекции на данную ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси.

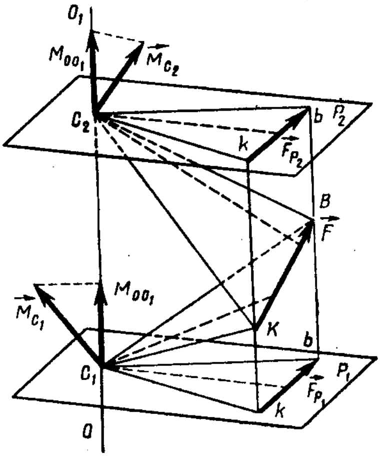


Рис. 75

При решении задач особенно часто приходится определять моменты сил относительно координатных осей. Согласно только что доказанному момент силы относительно какой-либо из осей координат равен проекции на эту ось момента силы относительно любой точки этой оси, в частности относительно точки O начала координат:

$$M_x = M_O \cos\alpha_м;\quad M_y = M_O \cos\beta_м;$$
$$M_z = M_O \cos\gamma_м, \qquad (101)$$

где $\cos\alpha_м$, $\cos\beta_м$, $\cos\gamma_м$ — направляющие косинусы вектора момента силы относительно начала координат.

Если момент относительно оси умножим на единичный вектор этой оси, то получим не проекцию, а составляющую момента относительно точки, не скалярную, а векторную величину:

$$\vec{M}_x = \vec{i}M_x;\quad \vec{M}_y = \vec{j}M_y;\quad \vec{M}_z = \vec{k}M_z. \qquad (102)$$

Из равенств (101) и (102) непосредственно получаем

$$M_O = +\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \qquad (103)$$

$$\vec{M}_O = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z. \qquad (104)$$

Моменты силы относительно осей координат связаны с проекциями силы X, Y и Z на оси и с координатами x, y и z точки ее приложения отношениями $M_x = yZ - zY$; $M_y = zX - xZ$; $M_z = xY - yX$.

Аналитические выражения моментов силы относительно осей координат. Выразим моменты силы относительно осей координат через координаты точки приложения силы и проекции силы на координатные оси.

На рис. 76 изображены оси координат и составляющие силы, приложенной к точке $K(xyz)$ (сама сила $\vec{F}$ на рисунке не показана). Чтобы определить моменты силы относительно оси Ox, нужно сначала спроецировать силу $\vec{F}$ на плоскость yOz. Проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих, и вместо того, чтобы спроецировать силу $\vec{F}$, можно спроецировать ее составляющие. Проекция составляющей X равна нулю, проекции же составляющих Y и Z равны этим составляющим. Теперь остается определить алгебраическую сумму моментов этих проекций относительно точки O. По теореме Вариньона эта сумма равна моменту проекции равнодействующей на плоскость yOz, или, что то же, моменту силы $\vec{F}$ относительно оси Ox. Так получаем первую из формул (105). Аналогично можно доказать две другие формулы (105), выражающие моменты силы относительно осей Oy и Oz:

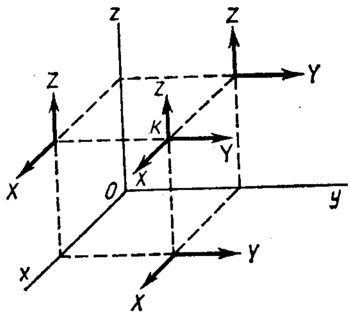


Рис. 76

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= yZ - zY; \\ M_y &= zX - xZ; \\ M_z &= xY - yX. \end{aligned}} \qquad (105)$$

Для вывода формул (105) была выбрана точка приложения силы в первом октанте (x, y и z положительны) и сила направлена от начала координат (X, Y и Z положительны). Если координаты или проекции силы отрицательны, то в формулы (105) надо подставить отрицательные значения.

Достаточно запомнить одну из формул (105), а следующую можно получить из предыдущей, применив круговую подстановку, т. е. заменив всюду иксы на игреки, игреки на зеты и зеты на иксы. Случаи, когда формулы можно получить одну из другой такой подстановкой, отмечаем

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl] & \\ x \arrow[rr] & & y. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Выражение (105) можно получить непосредственно из свойств векторного произведения, если представить векторное произведение определителем третьего порядка

$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (106)$$

Раскладывая этот определитель по элементам первой строки, найдем

$$\vec{M}_O=\vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

или

$$\vec{M}_O=\vec{i}(yZ-zY)+\vec{j}(zX-xZ)+\vec{k}(xY-yX).$$

Сравнив это равенство с (104), получим формулы (105).

Обратим внимание на то, что правая часть третьей из формул (105) тождественна выражению (98) момента силы, лежащей в плоскости xOy, относительно начала координат. Объяснение заключается в том, что при выводе формулы (105) для определения M_z силу сначала спроецировали на плоскость xOy и затем определили момент проекции относительно начала координат. Формула же (98) выражает момент относительно начала координат силы, лежащей в плоскости xOy. Моменты этой силы относительно осей, расположенных с ней в одной плоскости, равны нулю ($M_x=0$, $M_y=0$), а момент относительно оси Oz численно равен моменту относительно начала координат ($M_z=M_O$).

Координаты центра масс равны отношениям статического момента тела относительно соответствующей оси к его массе: $x_C=\frac{\sum m_k x_k}{m}$; $y_C=\frac{\sum m_k y_k}{m}$; $z_C=\frac{\sum m_k z_k}{m}$.

Координаты центра тяжести и центра масс. Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно какой-либо из ее точек. Поэтому теорема Вариньона распространяется и на моменты относительно оси, чем можно и воспользоваться для определения координат центра тяжести C любого весомого тела.

Разобьем мысленно тело на такие части, центры тяжести которых можно было бы сравнительно легко определить. Заменим каждую такую часть точкой (которую будем называть *изображающей точкой*), совпадающей с центром тяжести этой части и имеющей вес, равный весу этой части тела. Таким образом, изображающая точка характеризуется своим весом и положением в исследуемом теле, а все твердое тело заменено системой изображающих точек. Положим, что изображающих точек в теле получилось n. Веса этих точек обозначим G с индексом, указывающим принадлежность к той или иной точке: G_1, G_2, G_3, ..., G_n. Построим систему координат, неразрывно связанную с данным телом, направив ось Oz по вертикали вверх (рис. 77, *а*), и обозначим координаты изображающих точек через x, y и z с индексами, соответствующими точкам.

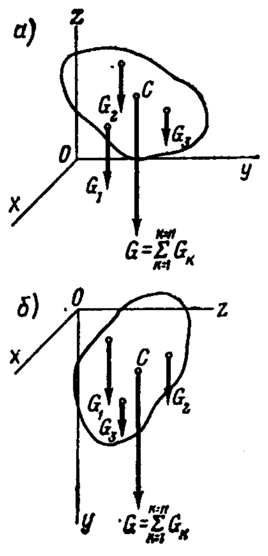


Рис. 77

Заметим, что при данном расположении осей проекции X и Y веса тела и его частей на оси абсцисс и ординат равны нулю, а на ось аппликат — весу со знаком минус.

Для определения моментов относительно оси Ox воспользуемся формулой (105) $M_x = yZ - zY$; подставляя данные, найдем, что момент равнодействующей в этом случае равен $-y_C G$, а сумма моментов составляющих равна $\sum_{k=1}^{k=n} y_k G_k$.

Приравнивая момент равнодействующей сумме моментов составляющих, получим координату центра тяжести

$$y_C = \sum_{k=1}^{k=n} y_k G_k / G. \qquad (107'')$$

Аналогично, приравняв момент равнодействующей относительно оси ординат ($M_{yC} = +x_C G$) сумме ($\Sigma x_k G_k$) моментов составляющих относительно той же оси, выводим формулу для абсциссы центра тяжести

$$x_C = \sum_{k=1}^{k=n} x_k G_k / G, \qquad (107')$$

но для определения аппликаты надо, воспользовавшись свойством центра параллельных сил (см. с. 138), предварительно повернуть все тело вместе с координатными осями вокруг оси Ox, как показано на рис. 77, *б*, а потом определить моменты относительно оси Ox и вывести формулу аппликаты центра тяжести.

$$z_C = \sum_{k=1}^{k=n} z_k G_k / G. \qquad (107''')$$

Эти формулы определяют положение центра тяжести.

Суммы произведений сил на координаты точек их приложения, стоящие в числителях этих формул, называют *статическими моментами*, а в знаменателях всех формул мы имеем вес всего тела.

Координаты x, y и z всякой точки равны проекциям на оси координат радиуса-вектора $\vec{r}$ точки относительно начала координат. Следовательно, три аналитических равенства можно заменить одним векторным равенством

$$\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{r}_k G_k / G. \tag{107}$$

В однородных телах веса изображающих точек пропорциональны их объемам, а потому в формулах центра тяжести можно G_k заменить объемами V_k соответствующих частей или площадями S_k для определения центра тяжести однородных пластин.

Выражая веса в числителе и в знаменателе формул (107) через произведения массы m_k на ускорение g и сокращая на g, убедимся, что центр масс совпадает с центром тяжести и координаты выражаются формулами

$$\boxed{x_C = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k / m; \quad y_C = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k / m; \quad z_C = \sum_{k=1}^{k=n} m_k z_k / m} \tag{108}$$

и

$$\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{r}_k / m. \tag{108'}$$

Стоящие в числителях этих формул суммы произведений массы каждой частицы тела на координату этой частицы называют *статическим моментом* массы относительно этой координаты (или относительно координатной плоскости, перпендикулярной этой оси).

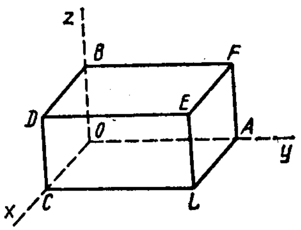


Рис. 78

В однородных телах веса изображающих точек пропорциональны тем объемам, которые эти точки представляют, а потому в формулах координат центра тяжести можно веса G_k заменить объемами V_k соответствующих частей. В этом смысле говорят о центрах тяжести геометрических тел, понимая под этим центр тяжести однородного тела данной геометрической формы. Аналогично, под центром тяжести поверхностей, фигур и геометрических линий понимают центры тяжести однородных пластин или проволоки. В таких случаях центр тяжести можно определить по формулам:

$$\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{k=n} V_k \vec{r}_k / V; \quad \vec{r}_C = \sum_{k=1}^{k=n} S_k \vec{r}_k / S; \quad \vec{r}_C = \sum_{k=1}^{k=n} l_k \vec{r}_k / l.$$

Задача № 26 (М). Определить координаты центра тяжести контура прямоугольного параллелепипеда (рис. 78), ребра которого — однородные бруски длиной: $OA=8$ дм; $OB=4$ дм; $OC=6$ дм; веса брусков:

$$G_{OA}=250\text{ Н};\ G_{OB}=G_{OC}=G_{CD}=75\text{ Н};$$

$$G_{CL}=200\text{ Н};\ G_{AF}=125\text{ Н};\ G_{AL}=G_{LE}=50\text{ Н};$$

$$G_{BD}=G_{BF}=G_{DE}=G_{EF}=25\text{ Н}.$$

Решение. Заменим стержни изображающими точками. Каждая из них имеет координаты середины того стержня, который она изображает, и его вес.

Заполняем таблицу.

№№ пп	Название стержня	G_k	x_k	y_k	z_k	G_kx_k	G_ky_k	G_kz_k
1	OB	75	0	0	2	0	0	150
2	OC	75	3	0	0	225	0	0
3	CD	75	6	0	2	450	0	150
4	BD	25	3	0	4	75	0	100
5	BF	25	0	4	4	0	100	100
6	OA	250	0	4	0	0	1000	0
7	CL	200	6	4	0	1200	800	0
8	DE	25	6	4	4	150	100	100
9	AL	50	3	8	0	150	400	0
10	AF	125	0	8	2	0	1000	250
11	EL	50	6	8	2	300	400	100
12	EF	25	3	8	4	75	200	100
		1000				2625	4000	1050

Суммируя третий столбец и подсчитав суммы трех последних, определяем вес системы и статические моменты, и остается лишь поделить статические моменты на вес системы, используя формулы (108).

Ответ. $x_C=2{,}625$ дм; $y_C=4{,}000$ дм; $z_C=1{,}050$ дм.

Если тело имеет плоскость симметрии (или ось симметрии, или центр симметрии), то центр тяжести тела лежит на этой плоскости (на оси или в центре) симметрии.

Если тело (хотя бы и неоднородное) имеет плоскость симметрии, т. е. если каждой частице тела, находящейся по одну сторону некоторой плоскости, соответствует частица, такая же по весу и симметрично расположенная по другую сторону плоскости, то равнодействующая сил тяжести этих двух частиц лежит посередине между ними, т. е. на плоскости симметрии. То же относится ко всем другим попарно рассматриваемым частицам тела и центр тяжести всего тела находится на плоскости симметрии. Аналогично можно показать, что центр тяжести находится на оси симметрии, или в центре симметрии, если таковые у тела имеются.

Метод отрицательных масс. При определении координат центра тяжести иногда бывает удобным применять метод, называемый *методом отрицательных масс*. При определении центра тяжести тела, имеющего полости или отверстия, целесообразно представить их изображающими точками с «отрицательной массой». Этот метод удобен и в некоторых других случаях. Покажем его применение на следующем примере. В круглом диске радиуса r сделан эксцентрический вырез в виде круга, построенного на радиусе, как на диаметре. Найдем центр тяжести оставшейся части диска (рис. 79).

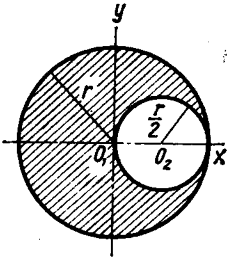


Рис. 79

Оставшаяся часть диска имеет ось симметрии. Начало координат возьмем в центре диска и ось симметрии примем за ось Ox. Искомый центр тяжести лежит на оси симметрии, следовательно, $y_C=0$. Найдем абсциссу центра тяжести. Для решения задачи воспользуемся методом отрицательных масс и представим оставшуюся часть диска двумя изображающими точками. Первая — это точка, лежащая в центре диска и имеющая массу, равную массе диска (считаем, что вырез в диске еще не сделан). Так как диск однородный, то при расчете вместо массы диска можно принять его площадь. Следовательно,

$$S_1=\pi r^2;\ x_1=0.$$

Вторая точка — это точка, лежащая в центре выреза, имеющая массу, равную массе вырезанной части диска, но взятую с обратным знаком. Опять вместо массы вырезанной части возьмем площадь. Имеем

$$S_2=\pi r^2/4;\ x_2=r/2.$$

От присединения этой «отрицательной площади» к площади первого диска и получается фигура, изображенная на рис. 79.

Абциссу центра тяжести оставшейся части диска находим по формуле, считая массу пропорциональной площади

$$x_C=\frac{\sum_{k=1}^{k=2} S_k x_k}{S}=\frac{\pi r^2\cdot 0-\pi (r^2/4)(r/2)}{\pi r^2-\pi r^2/4}=-\frac{r}{6}.$$

§ 27. ПАРА СИЛ

Парой сил называют систему двух численно равных параллельных сил, направленных в противоположные стороны.

Пара сил и ее момент. Равнодействующая двух неравных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, равна их разности. Если же такие силы по модулю равны, то они не имеют равнодействующей. Они и не уравновешивают друг друга, за исключением того частного случая, когда они имеют одну общую линию действия. Систему двух численно равных параллельных сил, приложенных к одному телу и направленных в противоположные стороны, называют *парой сил* *.

Пусть на тело (рис. 80, *а*) действует пара сил, причем одна из сил пары приложена в точке A, другая — в точке B. (Тело на рисунке не показано.) Назовем *плечом пары* кратчайшее расстояние (длину перпендикуляра) между линиями действия сил пары. Сила является скользящим вектором, поэтому силы пары (или одну из них), если необходимо, можно перенести в такое положение (рис. 80, *б*), чтобы на чертеже отрезок, соединяющий точки их приложения, был перпендикулярен линиям действия сил, т. е. изображал бы плечо h.

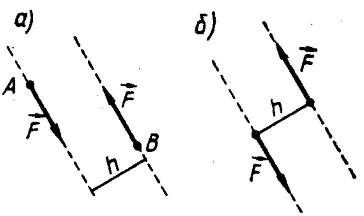


Рис. 80

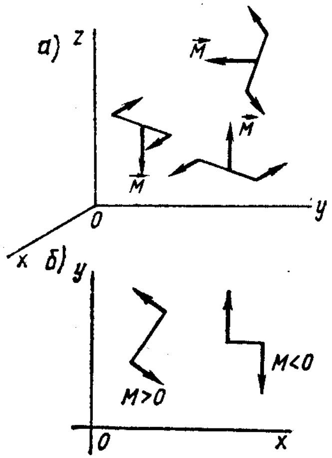


Рис. 81

Механическое воздействие пары сил на твердое тело зависит не только от размера сил, но и в равной степени от плеча. Поэтому за меру механического воздействия пары сил на твердое тело принимают *моменты пары* — величину, численно равную произведению модуля силы на плечо пары:

$$M = hF. \tag{109}$$

Момент пары, подобно моменту силы относительно точки,— векторная величина. Вектор момента пары перпендикулярен плоскости пары. Но у всякой плоскости имеется две стороны. Условились вектор момента восставлять с той стороны, с которой пара представляется поворачивающей свое плечо против хода часовой стрелки (рис. 81, *а*). Таким образом, вектор момента пары сил характеризует не только величину воздействия пары на тело, но и плоскость, в которой лежат силы пары, а также и направление, в котором силы пары стремятся повернуть тело.

---

* Открытие пары сил принадлежит Луи Пуансо (1804); им же создана теория пар и введены термины: пара, плечо, момент.

Сумма моментов двух сил пары относительно любой точки равна моменту пары.

Понятие «момент пары» является одним из важнейших понятий теоретической механики. Покажем, что момент пары сил равен сумме моментов двух ее сил относительно какой-либо взятой произвольно точки тела.

В твердом теле, к которому приложена пара сил (F_1F_2), возьмем совершенно произвольно точку O (рис. 82) и определим относительно нее моменты двух сил пары. Чтобы определить момент силы $\vec{F}_1$, проведем радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ и помножим его векторно на вектор силы $\vec{F}_1$. Тогда

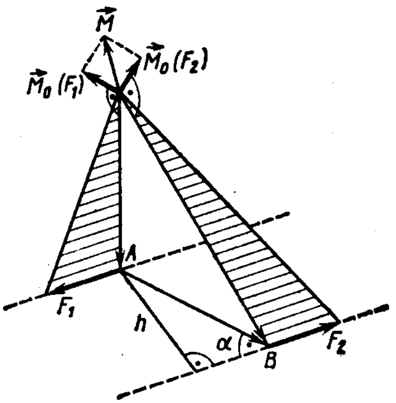


Рис. 82

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1)=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}_1.$$

Аналогично определим момент другой силы пары $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2)=\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_2=-\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_1.$$

Сложим теперь моменты обеих сил пары

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1)+\vec{M}_O(\vec{F}_2)=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\times\vec{F}_1.$$

Но разность радиусов-векторов равна вектору $\overrightarrow{BA}$, а потому

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1)+\vec{M}_O(\vec{F}_2)=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}_1.$$

Векторное произведение $\overrightarrow{BA}\times\vec{F}_1$ есть вектор, по модулю равный $BA\cdot F_1\sin\alpha=F_1\cdot h$ и направленный перпендикулярно плоскости пары, т. е. представляет момент пары, и полученное равенство показывает, что момент пары сил равен сумме моментов двух сил пары относительно любой точки тела, к которому эта пара приложена. Эта точка взята совершенно произвольно, следовательно, доказанное свойство пар не зависит от того, как ориентирована эта точка относительно пары сил, или, что то же, как ориентирована пара сил, в каком месте она приложена и как повернута относительно тела.

Момент пары есть свободный вектор, перпендикулярный плоскости пары, численно равный произведению силы на плечо.

Как уже было сказано, момент пары является мерой механического воздействия пары сил на твердое тело, а потому механическое воздействие пары сил на твердое тело не изменяется, если эту пару поворачивают в ее плоскости, переносят в другое место плоскости или в параллельную плоскость.

Эти на первый взгляд парадоксальные свойства пары поясним примерами. Гаечный ключ одинаково действует на гайку, к каким бы граням этой гайки его ни приложить — момент пары не изменится от поворота пары сил в ее плоскости. Трансмиссионный вал сообщает шкиву вращающий момент независимо от места закрепления шкива на валу — момент пары не изменится от переноса пары в параллельную плоскость.

Но только при изучении динамики, после знакомства с инерцией вращающегося тела и с расширением понятия главных центральных осей, когда читатель узнает, что вращение тела зависит от массы каждой частицы тела и от их распределения, ему станет совершенно ясно, почему действие пары сил на тело не зависит от положения пары сил в ее плоскости.

Момент пары сил не имеет фиксированной, определенной точки приложения. Он является *свободным вектором*, т. е. он имеет свой модуль и свое направление, но приложить его можно в любой точке твердого тела, на которое действует пара сил. В этом заключается принципиальное отличие момента пары от момента силы относительно точки, являющегося прикрепленным вектором, приложенным в центре момента, или от скользящего вектора, примером которого является сила.

Моменты пар рассматривают как векторные величины во всех случаях, когда эти пары лежат в пересекающихся плоскостях.

В плоской системе, когда все силы расположены в плоскости, моменты пар направлены перпендикулярно этой плоскости, т. е. направлены параллельно друг другу. Поэтому в плоской системе целесообразно рассматривать моменты пар как алгебраические величины, вполне характеризуемые величиной (произведением силы и плеча) и знаком плюс или минус.

Принято считать момент пары положительным, если силы «стремятся повернуть» плечо против вращения стрелок часов, и отрицательным, если они стремятся повернуть плечо в направлении вращения стрелок часов (см. рис. 81, *б*).

Две пары сил с равными моментами эквивалентны.

Эквивалентность пар. Обратим особое внимание на то, что момент пары не является только произведением, а есть мера, полностью характеризующая воздействие пары сил на твердое тело. Две лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях) пары с одинаковыми моментами оказывают на тело одинаковое действие, если даже силы одной пары (а также и плечо) не равны силам (и плечу) другой пары.

Докажем сначала, что данную пару (F_1F_2), модули сил которой F, а плечо AB (рис. 83, *а*), можно, не изменяя ее механического воздействия на твердое тело (тело на рис. 83 не показано), заменить другой парой, с таким же моментом, но с бóльшими силами и соответственно меньшим плечом.

Приложим к телу в точке B, как показано на рис. 83, *б*, две взаимно уравновешенные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, по модулю равные P. Складывая параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{P}_1$, направленные в одну сторону, найдем их равнодействующую $\vec{R}_1$, по модулю равную $F+P$, на-

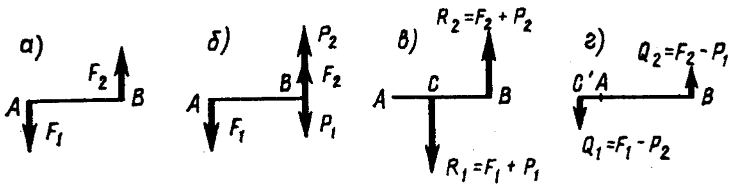


Рис. 83

правленную в ту же сторону и приложенную в точке C на расстояниях AC и BC, обратно пропорциональных модулям слагаемых сил (рис. 83, *в*)

$$AC:BC=P:F.$$

Складывая силы $\vec{F}_2$ и $\vec{P}_2$, приложенные к телу в точке B, получим их равнодействующую $\vec{R}_2$, по модулю равную $F+P$ и направленную в сторону слагаемых сил.

Новую пару сил (R_1R_2) получили из данной пары (F_1F_2), присоединив к ней взаимно уравновешенные силы P_1 и P_2. Следовательно, обе пары эквивалентны. Момент новой пары равен

$$M=R\cdot BC=(P+F)BC=P\cdot BC+F\cdot BC,$$

или, принимая во внимание написанную выше пропорцию, из которой следует, что $P\cdot BC=F\cdot AC$, получим

$$M=F\cdot AC+F\cdot BC=F\cdot AB,$$

т. е. моменты эквивалентных пар равны между собой и данную пару мы заменили другой парой с тем же моментом, но с меньшим плечом.

Чтобы убедиться, что всякую пару сил (F_1F_2) можно заменить другой парой сил с тем же моментом, но с бóльшим плечом и соответственно с меньшими силами, сложим (рис. 83, *б*) силы F_1 с P_2, F_2 с P_1. Получилась новая пара (Q_1Q_2) (рис. 83, *г*) с моментом $M=Q\cdot BC' = (F-P)BC'=F\cdot BC'-P\cdot BC'=F(BC'-AC')=F\cdot AB$, что и требовалось доказать. Следовательно, механическое воздействие пары на твердое тело не изменится, если эту пару заменить любой другой парой с таким же моментом.

Момент пары сил, полученной от сложения нескольких пар, равен сумме моментов слагаемых пар.

Сложение пар. Покажем, что несколько пар, приложенных к твердому телу, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме их моментов. Пусть к некоторому телу приложены две пары сил, одна из которых лежит в плоскости I и имеет момент M_1, а другая — в плоскости II и имеет момент M_2. Для общности доказательства предположим, что эти плоскости не параллельны между собой, а пересекаются под углом δ. Воспользовавшись только что доказанными свойствами пар, представим каждую данную пару парой, ей эквивалентной, лежащей в той же плоскости и имеющей плечо AB (рис. 84), расположенное по линии пересечения обеих плоскостей. Модули сил F_1 первой пары и F_2 второй определим из условия эквивалентности

$$F_1 = M_1/AB, \ F_2 = M_2/AB.$$

Сложим силы обеих пар, приложенные к телу в точке A, а затем сложим силы, приложенные в точке B. Получим два параллелограмма сил с вершинами в точках A и B. Эти параллелограммы равны между собой, так как попарно равны и параллельны их стороны. Следовательно, равны и параллельны диагонали параллелограммов.

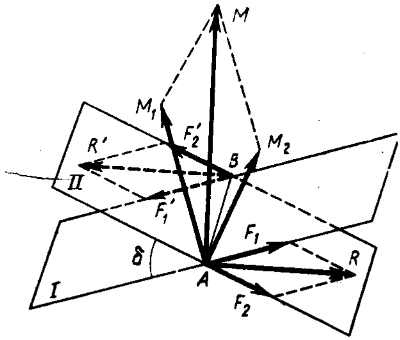


Рис. 84

В результате сложения двух пар получилась одна пара сил с тем же плечом и с силами, равными геометрической сумме соответствующих сил слагаемых пар. Найдем момент M этой пары.

На векторах моментов M_1 и M_2 построим как на сторонах параллелограмм, называемый *параллелограммом моментов*. Диагональ этого параллелограмма по модулю и по направлению изображает момент пары (RR'), полученный в результате сложения пар (F_1F_1') и (F_2F_2'). В самом деле, стороны параллелограмма моментов перпендикулярны сторонам параллелограмма сил, а потому диагональ параллелограмма моментов перпендикулярна плоскости пары и равна $R \cdot AB$.

Таким образом, для сложения двух пар, лежащих в пересекающихся плоскостях, достаточно сложить их моменты. Но методом доказательства от n к $n+1$ нетрудно показать, что теорема остается справедливой для любого количества пар сил:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_k, \text{ где } k = 1, 2, 3, \ldots, n. \quad (110)$$

Если сумма моментов всех пар равна нулю, то система пар находится в равновесии, так как наличие такой системы эквивалентно ее отсутствию. Справедливо и обратное заключение: если система пар находится в равновесии, то сумма моментов всех пар системы равна нулю. Таким образом, необходимым и достаточным условием *равновесия системы пар,* не лежащих в одной плоскости, является равенство нулю геометрической суммы моментов всех пар системы

$$\sum \vec{M} = 0. \tag{111}$$

Момент пары является векторной величиной, а потому суммирование надо производить геометрически, т. е. по правилу параллелограмма. В частном, но очень важном случае (имеющем большое применение в технике), когда пары расположены в одной плоскости, сложение моментов производят алгебраически. В самом деле, будем поворачивать плоскости I и II (см. рис. 84) до их совпадения. Тогда угол δ станет равным нулю или 180°, параллелограммы выродятся в отрезки прямой и геометрические суммы сил и сумма моментов превратятся в сложение векторов, направленных по прямой, т. е. в алгебраическое сложение.

Поэтому, чтобы сложить пары сил, расположенные в одной плоскости, достаточно алгебраически сложить их моменты:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = \sum M_k, \text{ где } k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{112}$$

Необходимым и достаточным условием равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости, является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех пар системы

$$\sum M = 0. \tag{113}$$

§ 28. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОЙ ТОЧКЕ

Всякая сила, приложенная к твердому телу, эквивалентна такой же силе, но приложенной в любой другой точке тела, и паре сил с моментом, равным моменту первой силы относительно точки приложения второй.

Метод Пуансо. Согласно теореме, доказанной в § 22, действие силы на твердое тело не изменится, если эту силу перенести в какую-либо другую точку тела, лежащую на линии действия этой силы.

Докажем, что действие силы на твердое тело не изменится, если эту силу перенести в точку тела, не лежащую на линии действия данной силы, но при этом одновременно добавить пару сил с моментом, равным моменту данной силы относительно той точки, в которую эту силу перенесли *.

Пусть дана сила $\vec{F}$, приложенная в точке A к твердому телу. Возьмем на теле произвольную точку O, не лежащую на линии действия силы F (рис. 85, *а*). Приложим к телу в точке O систему

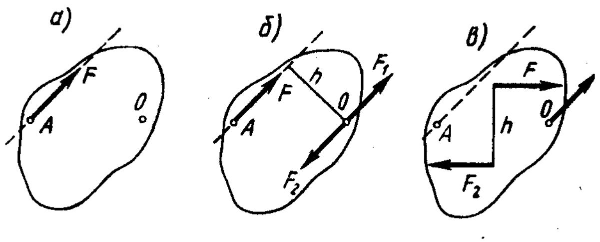


Рис. 85

двух взаимно уравновешенных сил, из которых $\vec{F}_1$ равна данной силе $\vec{F}$, а $\vec{F}_2$ равна ей по модулю, но противоположна по направлению (рис. 85, *б*). Система сил $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ эквивалентна силе $\vec{F}$, так как получена путем присоединения к этой силе взаимно уравновешенных сил. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ представляют собой пару сил, а потому всю систему можно рассматривать как силу $\vec{F}_1$, геометрически равную данной силе $\vec{F}$, но приложенную в точке O, и пару сил FF_2. Момент этой пары равен моменту данной силы относительно точки O. Пару можно поворачивать (рис. 85, *в*), переносить в другое место или заменять эквивалентной парой, а сила останется приложенной в точке O. Такое перенесение силы является формальным, но может соответствовать физической сущности явления. Пусть, например, сила F, приложенная в точке A, действует на металлический брусок, заделанный в каменную стену (рис. 86). Перенеся силу в точку O с добавлением пары сил, можно рассматривать ее как силу, приложенную в точке O и изгибающую брусок, а пару FF_2 — как скручивающую его. На этом примере видно, что сила $\vec{F}$ по своему действию эквивалентна силе $\vec{F}_1$ вместе с парой FF_2.

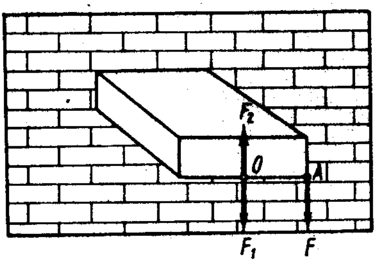


Рис. 86

---

* Теорема и метод приведения силы к точке принадлежат Пуансо (1804).

Система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна главному вектору, приложенному в произвольной точке тела, и главному моменту относительно этой точки.

Приведение системы сил. Пусть к твердому телу приложена произвольная система сил, т. е. такая система, на силы которой (на их величину, на точки приложения и на линии действия) не наложено никаких ограничений. Какую-либо из точек тела, безразлично какую, назовем *центром приведения* и, следуя методу Пуансо, приведем к этой точке каждую из сил системы.

Тогда получим в центре приведения пучок сил (каждая из которых по модулю и направлению равна одной из сил заданной системы) и систему пар. Момент каждой из этих пар равен моменту одной из сил заданной системы относительно центра приведения.

Главным вектором системы сил называют вектор, равный сумме всех векторов сил системы.

Складывая все силы пучка, заменим их одним вектором, приложенным в выбранном центре приведения и равным сумме векторов всех сил, перенесенных в эту точку. Его называют *главным вектором системы сил* или *главным вектором:*

$$\vec{F}_{\text{гл}}=\sum \vec{F}_k, \text{ где } k=1, 2, \ldots, n. \qquad (114)$$

При перенесении сил системы к центру приведения не изменились ни модули, ни направления этих сил, поэтому главный вектор системы сил не зависит от того, какая точка тела принята за центр приведения. Главный вектор является *инвариантом* (неизменной величиной) данной системы сил.

Главным моментом системы сил называют вектор, равный сумме моментов всех сил системы относительно данной точки.

Чтобы сложить пары сил, получившиеся при приведении по методу Пуансо всех сил системы к выбранному центру, достаточно геометрически сложить их моменты. Но моменты этих пар равны моментам соответствующих сил заданной системы относительно центра приведения. Поэтому, чтобы сложить эти пары, достаточно взять сумму моментов всех сил системы относительно центра приведения. Обозначим эту сумму через $\vec{M}_{\text{гл}O}$ и назовем *главным моментом системы сил относительно центра O:*

$$\vec{M}_{\text{гл}O}=\sum \vec{M}_{kO}, \text{ где } k=1, 2, \ldots, n. \qquad (115)$$

В отличие от главного вектора главный момент системы сил не является инвариантом и зависит от выбранного центра приведения. При изменении центра приведения меняются и моменты сил системы относительно этого центра, отчего изменяется и главный момент.

Итак, всякая система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной силе, называемой главным вектором, равной геометрической сумме всех сил системы и приложенной в любой точке тела (в центре приведения), и одной паре, момент которой называют главным моментом относительно центра приведения и который равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки. Такое преобразование системы сил, не изменяя действия ее на твердое тело, значительно упрощает ее изучение.

Главный вектор и главный момент относительно начала координат можно вычислить по их проекциям на оси.

Чтобы избежать геометрического суммирования, модуль главного вектора можно вычислить через суммы проекций всех сил на три оси координат:

$$F_{\text{гл}} = +\sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}, \tag{116}$$

а его направление — по трем направляющим косинусам (91).

Если за центр приведения выбрано начало координат, то главный момент системы сил относительно этой точки удобно определять по формуле, аналогичной (103):

$$M_{\text{гл}O} = +\sqrt{M^2_{\text{гл}\,x} + M^2_{\text{гл}\,y} + M^2_{\text{гл}\,z}}, \tag{117}$$

а главные моменты относительно осей координат — по формулам

$$M_{\text{гл}\,x} = \sum(yZ - zY);\ M_{\text{гл}\,y} = \sum(zX - xZ);\ M_{\text{гл}\,z} = $$
$$= \sum(xY - yX), \quad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \longrightarrow & y \end{matrix} \tag{118}$$

причем суммирование распространено на все силы.

Проекцию главного момента системы сил относительно центра приведения на какую-либо ось, проходящую через этот центр, называют *главным моментом системы сил относительно этой оси.* Момент силы относительно оси является скаляром, поэтому главный момент системы относительно оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этой оси.

Частные случаи приведения системы сил

Если главный момент системы сил относительно центра приведения равен нулю, то главный вектор является равнодействующей.

Приведение к равнодействующей. Если главный момент системы сил относительно центра приведения O равен нулю, то главный вектор один (без главного момента) эквивалентен всей приложенной к телу системе сил, т. е. является равнодействующей всей приложенной к телу системы сил, а линия действия равнодействующей проходит через центр приведения O.

Если главный вектор и главный момент взаимно перпендикулярны, то система сил эквивалентна равнодействующей, не проходящей через центр приведения.

В том случае, если главный вектор и главный момент системы сил направлены перпендикулярно друг другу, система сил тоже эквивалентна одной равнодействующей, равной по модулю и направлению главному вектору, но не проходящей через центр приведения O. Чтобы это показать, представим главный момент $M_{глO}$ в виде пары, силы которой выберем равными главному вектору $F_{гл}$, а

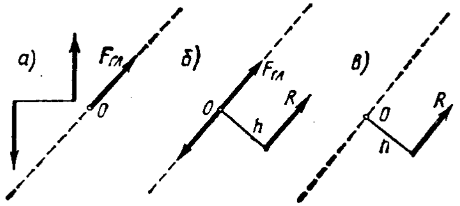


Рис. 87

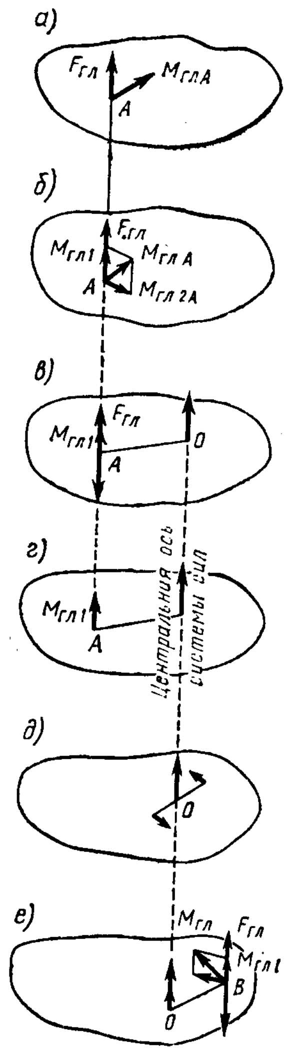


Рис. 88

плечо соответственно равным $M_{глO}/F_{гл}$ (рис. 87, *а*) *, и, пользуясь свойствами пары сил, расположим эту пару так, чтобы одна из сил пары уравновесила бы главный вектор (рис. 87, *б*). Тогда останется только одна сила, равная главному вектору по модулю и направлению, но имеющая свою линию действия равнодействующей (рис. 87, *в*).

В плоской системе сил главный вектор и главный момент всегда взаимно перпендикулярны, а следовательно, плоская система сил, приложенная к твердому телу, в общем случае эквивалентна равнодействующей. Эта сила R одна представляет всю систему приложенных к телу сил, она эквивалентна данной системе, а, следовательно, является равнодействующей данной системы сил. Если за центр моментов выбрать не точку O, а какую-либо другую точку тела и проделать те же выкладки, то получим ту же самую равнодействующую R и ту же линию ее действия, потому что система заданных сил не может зависеть от вычислений.

* Вектор главного момента на рис. 87 не нарисован, так как он перпендикулярен плоскости чертежа.

Определим момент равнодействующей относительно центра приведения O. Как видно из чертежа, он равен hR, т. е. моменту той пары, которой представлен главный момент системы сил относительно точки O. А главный момент равен сумме моментов всех сил системы относительно центра O

$$\vec{M}_O(R)=\vec{M}_{глO}=\sum_{k=1}^{k=n}\vec{M}_{Ok}.$$

За точку O может быть принята любая точка тела, а потому, если система приложенных к телу сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки тела равен сумме моментов всех приложенных к телу сил относительно той же точки. Так доказана теорема Вариньона в самом общем виде.

Сумма моментов, о которой говорит теорема Вариньона, является геометрической суммой в пространственной системе сил и алгебраической в плоской системе.

Теорема Вариньона может быть распространена и на моменты относительно оси, так как момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно какой-либо точки оси.

Если главный вектор равен нулю, а главный момент нулю не равен, то система эквивалентна паре сил.

Приведение системы сил к паре. Может оказаться, что в результате приведения системы сил к выбранному центру главный вектор окажется равным нулю, а главный момент нулю не равен. Такая система эквивалентна паре сил, момент которой равен главному моменту, и в этом случае не зависит от центра приведения: момент всякой пары равен сумме моментов ее сил относительно любой точки.

Система сил, приложенных к твердому телу, в общем случае эквивалентна динаме, т. е. силе и паре, момент которой параллелен силе.

Динамический винт. Произвольную систему сил, приложенных к твердому телу, приведем по методу Пуансо к точке A. В наиболее общем случае произвольной системы сил, приложенной к твердому телу, главный вектор $\vec{F}_{гл}$ и главный момент относительно центра приведения $\vec{M}_{глA}$ не равны нулю и не перпендикулярны друг другу (рис. 88, *а*). В такой системе момент $\vec{M}_{глA}$ разложим на две составляющие, одну из которых назовем $\vec{M}_{гл1}$ и направим по главному вектору, а другую — $\vec{M}_{гл2A}$ и направим перпендикулярно первой (рис. 88, *б*). Эту вторую (перпендикулярную) составляющую представим в виде пары (рис. 88, *в*), одну из сил которой уравновесим с главным вектором (рис. 88, *г*), и приведем, таким образом, всю систему сил к одной силе (по размеру и направлению равной главному вектору) и к одной перпендикулярной ей паре с моментом $M_{гл1}$, равным проекции главного момента на главный вектор (рис. 88, *б*). Такую совокупность силы и пары сил, плоскость которой перпендикулярна силе, называют *динамическим винтом* или *динамой* *. Линию действия силы называют *центральной осью системы сил* **.

Если бы в той же системе сил за центр приведения была принята не точка A, а какая-нибудь другая точка B (рис. 88, *е*), то в результате аналогичных выкладок получилась бы, конечно, та же динама с той же центральной осью системы сил, потому что сила F, момент $M_{гл1}$ и центральная ось зависят только от данной системы сил и не могут зависеть от подсчета и от выбора центра приведения. Следовательно, проекция $M_{гл1}$ главного момента системы сил (относительно любого центра приведения) на главный вектор не зависит от центра приведения, т. е. является инвариантом (вторым) пространственной системы сил.

Если главный вектор и главный момент системы сил, приложенных к твердому телу, равны нулю, то система находится в равновесии.

Равновесие. Если главный вектор системы сил и главный момент системы относительно (какого-либо) центра приведения равны нулю, то наличие такой системы сил эквивалентно ее отсутствию, и система сил не оказывает никакого действия на твердое тело, к которому она приложена. Такая система сил находится в равновесии относительно выбранной системы отсчета.

Изучением равновесия системы сил, приложенных к одному абсолютно твердому телу, занимается геометрическая статика.

§ 29. О РАВНОВЕСИИ СИСТЕМЫ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ

Твердое тело находится в состоянии относительного покоя, если положение всех его точек в выбранной системе отсчета не изменяется со временем. Относительный покой тела, рассматриваемый в связи с силами, приложенными к телу, называют относительным равновесием.

Покой и равновесие. Пусть к твердому телу приложены силы, на векторы которых не наложено никаких ограничений, т. е. система сил является произвольной. Как только что было сказано, в случае, если главный вектор этой системы сил и главный момент системы относительно какого-либо центра приведения равны нулю, то система сил находится в равновесии относительно инерциальной системы отсчета. Во многих технических задачах в зависимости от требуемой точности часто принимают за инерциальную всякую не-

* Термин «динама» предложен К. Максвеллом, но открытие динамы принадлежит Л. Пуансо.

** Центральная ось системы сил открыта Л. Пуансо, им же предложен термин.

подвижную относительно Земли систему координат, допуская при этом некоторую ошибку.

В дальнейшем (см. § 32) будет указано, как в необходимых случаях можно учесть влияние движения Земли и ускорений Кориолиса, здесь же ограничимся констатацией и будем помнить в дальнейшем, что имеется равновесие относительно системы отсчета, принимаемой за неподвижную. Это вполне удовлетворяет условиям многих научно-технических задач. Условия

$$\vec{F}_{гл}=\sum\vec{F}_k=0;\quad \vec{M}_{гл\,O}=\sum\vec{M}_{kO}=0 \tag{119}$$

являются достаточными условиями равновесия произвольной системы сил. Они же являются и необходимыми условиями равновесия, потому что, как было только что показано, при несоблюдении обоих этих равенств или хотя бы одного из них данная система сил эквивалентна динаме, или паре сил, или приводится к равнодействующей.

Под действием уравновешенной системы сил твердое тело находится в относительном покое.

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю три суммы проекций всех сил на оси координат и три суммы моментов всех сил относительно осей координат.

Аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Если главный вектор $F_{гл}=\sqrt{\left(\sum X\right)^2+\left(\sum Y\right)^2+\left(\sum Z\right)^2}$ равен нулю, то, как следует из (116), должны равняться нулю суммы проекций всех сил на оси координат. Аналогично для равенства нулю главного момента сил относительно какого-либо центра

$$M_{гл\,O}=\sqrt{\left(\sum M_x\right)^2+\left(\sum M_y\right)^2+\left(\sum M_z\right)^2}$$

необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю проекции момента на три оси, проходящие через этот центр, иначе говоря, моменты относительно трех осей, как это следует из (117). Таким образом, два геометрических равенства (119) можно заменить шестью аналитическими равенствами

$$\boxed{\begin{gathered}\sum X=0;\quad \sum Y=0;\quad \sum Z=0;\\ \sum M_x=0;\quad \sum M_y=0;\quad \sum M_z=0.\end{gathered}} \tag{120}$$

Эти равенства называют *условиями равновесия* произвольной системы сил, выраженными в аналитической форме. Если эти условия содержат неизвестные величины, то их называют *уравнениями равновесия произвольной системы сил.*

Вместо M_x, M_y, M_z можно подставить их выражения из формул (105) и условия равновесия произвольной системы сил записать в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{c}\sum X=0;\ \sum Y=0;\ \sum Z=0;\\ \sum(yZ-zY)=0;\ \sum(zX-xZ)=0;\ \sum(xY-yX)=0.\end{array}\right\}\quad(120')$$

Рассмотрим условия равновесия некоторых систем сил, приложенных к твердому телу не вполне произвольно, а с ограничениями.

Так, например, допустим, что силы произвольные и произвольно направлены, но линии их действия пересекаются в одной точке (пространственный пучок сил). Такая система может быть эквивалентна одной равнодействующей, приложенной в центре пучка, или же находиться в равновесии. К паре сил она приведена быть не может. Необходимыми и достаточными условиями равновесия такой системы являются три условия

$$\sum X=0;\ \sum Y=0;\ \sum Z=0.$$

Для плоского пучка, расположенного в плоскости xOy, превращается в тождество $(0=0)$ третье из этих условий (уравнений) и остаются лишь два

$$\sum X=0;\ \sum Y=0.$$

Допустим теперь, что приложенные к телу силы параллельны между собой, но не лежат все в одной плоскости. Пусть, например, эти силы вертикальны, параллельны оси Oz. Тогда превращаются в тождества $(0=0)$ первое, второе и шестое из уравнений (120) или (120′) и остаются только третье, четвертое и пятое. Следовательно, возможны только три условия или уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил, приложенных к одному телу.

Задача № 27 (М). Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения AB, открыта на угол $CAD=60°$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна CD перекинута через блок и натягивается грузом $P=32$ кгс, другая EF — привязана к точке F пола. Вес двери $G=64$ кгс, ее ширина $AC=AD=18$ дм, высота $AB=24$ дм. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение T веревки EF, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B (рис. 89, *а*).

Решение. Рассмотрим равновесие двери. На дверь действуют следующие силы:

1) вес двери $G=64$ кгс, приложенный в середине двери (на пересечении диагоналей);

2) натяжение $P=32$ кгс веревки CD, направленное по веревке от точки C к точке D, так как блок меняет направление натяжения веревки, но не меняет его величину;

3) натяжение T веревки EF, направленное по этой веревке;

4), 5), 6) — неизвестная по модулю и направлению реакция в подпятнике *B*, которую разложили на составляющие X_B, Y_B, Z_B;

7) и 8) — неизвестная по модулю и направлению горизонтальная реакция в подшипнике (в цилиндрическом шарнире *A*), которую разложили на составляющие X_A и Y_A; вертикальная составляющая Z_A заведомо равна нулю, так как шарнир допускает вертикальное перемещение, а следовательно, реакция горизонтальна (рис. 89, *б*).

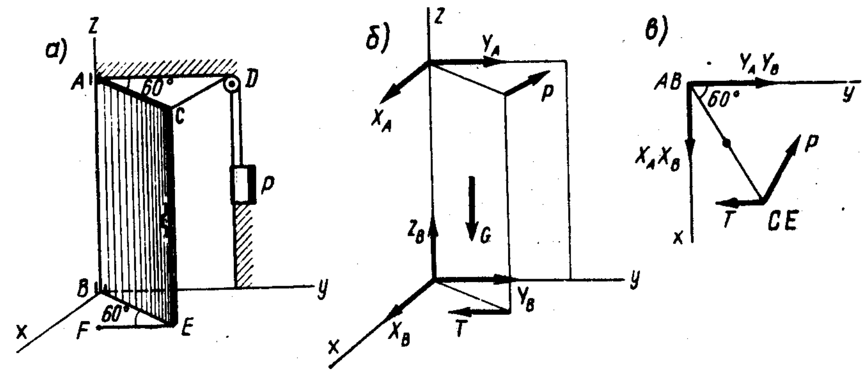


Рис. 89

Выяснив, какие силы действуют на дверь, напишем уравнение равновесия этой системы сил (120) или (120′). В данном примере воспользуемся уравнениями

№ пп	Сила	Проекции силы			Координаты			Моменты относительно оси		
		X	Y	Z	x	y	z	$M_x = yZ - zY$	$M_y = zX - xZ$	$M_z = xY - yX$
1	G	0	0	—64	$4{,}5\sqrt{3}$	4,5	12	$-4{,}5 \times 64 = -288$	$4{,}5\sqrt{3} \times 64 = 498$	0
2	P	$-16 \times \sqrt{3} = -27{,}7$	16	0	$9\sqrt{3}$	9	24	$-24 \times 16 = -384$	$-24 \times 16\sqrt{3} = -664$	$9\sqrt{3} \times 16 + 9 \times 16\sqrt{3} = 498$
3	T	0	$-T$	0	$9\sqrt{3}$	9	0	0	0	$-9\sqrt{3} \times T = -15{,}6T$
4	X_B	X_B	0	0	0	0	0	0	0	0
5	Y_B	0	Y_B	0	0	0	0	0	0	0
6	Z_B	0	0	Z_B	0	0	0	0	0	0
7	X_A	X_A	0	0	0	0	24	0	$24X_A$	0
8	Y_A	0	Y_A	0	0	0	24	$-24 \cdot Y_A$	0	0

(120′), для чего составим таблицу, в которую впишем проекции сил и координаты точек приложения сил. Для облегчения этой части решения задачи полезно составить чертеж (рис. 89, *в*) проекций системы сил на плоскость *xy*.

Просуммировав третью графу этой таблицы, найдем ΣX; просуммировав четвертую графу, найдем ΣY, а пятую — ΣZ:

$$\sum X=0;\ X_A+X_B-27{,}7=0;$$

$$\sum Y=0;\ 16-T+Y_B+Y_A=0;$$

$$\sum Z=0;\ Z_B-64=0.$$

Три последние графы дадут три уравнения моментов сил относительно осей координат:

$$\sum M_x=0;\quad -283-384-24Y_A=0;$$

$$\sum M_y=0;\ 498-664+24X_A=0;$$

$$\sum M_z=0;\ 498-15{,}6T=0.$$

Решая эту систему шести уравнений равновесия, находим шесть неизвестных величин.

Моменты сил относительно координатных осей определены по проекциям этих сил и по координатам точек их приложения с использованием формулы (105). Но их можно определить и иначе. Для этого надо спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и затем определить момент проекции силы на плоскость относительно точек пересечения оси и плоскости. Знак момента в таком случае определяют в зависимости от того, поворачивает ли проекция силы свое плечо по ходу часовой стрелки или против хода, если смотреть с положительной стороны оси. Читателям рекомендуется определить моменты сил относительно осей в задаче и этим способом.

Решая систему уравнений равновесия, получим положительные значения для всех сил и реакций, кроме Y_A. Это означает, что на чертеже (рис. 89, *б*) направления сил и реакций взяты правильно, а направление Y_A надо изменить на противоположное.

Ответ. $T=32$ кгс$\approx$320 Н; $X_A=6{,}9$ кгс$\approx$69 Н; $Y_A=-28$ кгс≈-280 Н; $X_B=20{,}8$ кгс$\approx$208 Н; $Y_B=44$ кгс$\approx$440 Н; $Z_B=64$ кгс$\approx$640 Н.

Два равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю две суммы проекций всех сил на оси координат и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки плоскости: $\Sigma X=0$; $\Sigma Y=0$; $\Sigma M_O=0$.

Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Предположим, что все силы расположены в плоскости xOy, тогда превращаются в тождество $(0=0)$, третье, четвертое и пятое из равенств (120) и (120′), а шестое равенство в плоской системе выражает алгебраическую сумму моментов всех сил относительно точки на плоскости xOy:

$$\boxed{\sum X=0,\ \sum Y=0,\ \sum M_O=0.} \qquad (121)$$

Таким образом, для равновесия сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма проекций всех сил на ось иксов, на ось игреков и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки плоскости.

При решении задач можно пользоваться и косоугольной системой координат и принимать за центр моментов любую точку плоскости. Пополним таблицу (с. 135) для определения знаков при правой системе прямоугольных координат (ось абсцисс направлена вправо, ось ординат — вверх)

	+	−
X	→	←
Y	↑	↓
M	↖	↙

Задача № 28 (*М*). Однородная балка AB весом $P=20$ кгс опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом 60° и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB=3$ м, $CB=0{,}5$ м, $BD=1$ м (рис. 90).

Решение. Порядок решения задач на равновесие плоской системы сил такой же, как и при решении задач на равновесие плоской системы сходящихся сил, только в данном случае имеется три, а не два уравнения.

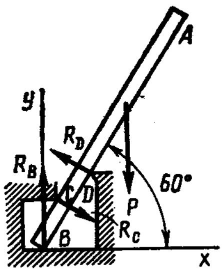


Рис. 90

Все искомые и известные силы в этой задаче действуют на балку AB, поэтому рассмотрим ее равновесие.

На балку действуют одна активная сила (собственный вес) и три реакции в трех точках опоры. Реакции, как всегда, направлены перпендикулярно виртуальным перемещениям. Таким перемещением балки AB, не нарушающим ее связи с полом, является горизонтальное перемещение, и реакцию R_B направим вертикально вверх. Давая балке AB мысленные малые перемещения, не нарушающие ее связи с полом, не надо беспокоиться о том, чтобы эти перемещения не нарушали связи в других местах, например в точке C. Аналогично, при определении виртуальных перемещений в точке C не имеет значения, что при этом нарушается связь в точке B. Перемещениями, не нарушающими связи в точках C и D, являются перемещения вдоль балки (подобно смычку по струне), поэтому реакции в точках C и D направим перпендикулярно балке.

Строим оси координат. Удачный выбор системы координат может упростить уравнения равновесия. Можно пользоваться и косоугольной системой координат, например, направив одну ось горизонтально, а другую — под углом 60° по BA. Направим оси, как указано на чертеже. Тогда

$$\sum X=0;\ R_C\cos 30°-R_D\cos 30°=0;$$

$$\sum Y=0;\quad -R_C\sin 30°+R_D\sin 30°+R_B-P=0.$$

За центр моментов удобнее принимать точку, в которой пересекаются линии действия неизвестных по величине реакций. Так, в данном случае удобно принять точку, в которой пересекаются линии действия реакций R_B и R_C. В результате такого выбора обе эти реакции не войдут в уравнение моментов. Чтобы определить плечо реакции R_D, опустим перпендикуляр из центра моментов на линию действия этой реакции. Нетрудно видеть, что плечо $CD=0{,}5$ м. Чтобы определить плечо силы тяжести, опустим перпендикуляр из центра моментов на линию действия этой силы. Получим $(AB/2)\cos 60°=0{,}75$ м. Реакция R_D относительно центра моментов направлена против хода часовой стрелки (момент положительный), а сила тяжести — по ходу часовой стрелки (момент отрицательный). Уравнение моментов имеет вид

$$\sum M = 0;\ R_D \cdot 0{,}5 - P \cdot 0{,}75 = 0.$$

Решаем совместно все три уравнения равновесия.

Ответ. $R_B=20$ кгс ≈ 200 Н; $R_C=30$ кгс ≈ 300 Н; $R_D=30$ кгс ≈ 300 Н.

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы моментов всех сил относительно каждой из трех точек, лежащих на плоскости.

Теорема о трех моментах. Условия равновесия плоской системы сил можно выразить и в иной форме. Пусть к твердому телу приложена плоская система сил. Возьмем сумму моментов всех сил системы относительно какой-либо точки A, лежащей на этой плоскости. Если бы сумма моментов не равнялась нулю, то система, конечно, не могла бы находиться в равновесии. При $\Sigma M_A=0$ система может быть в равновесии, но она также может быть эквивалентной одной равнодействующей силе, проходящей через точку A. В таком случае по теореме Вариньона сумма моментов составляющих относительно точки A должна равняться нулю. Возьмем на той же плоскости другую произвольную точку B. Если $\Sigma M_B=0$, то это равенство вместе с предыдущим все же не может быть достаточным условием равновесия системы сил, потому что те же два условия выполняются в системе, эквивалентной одной равнодействующей, линия действия которой проходит через A и B. Тогда моменты равнодействующей относительно каждой из этих точек, а следовательно, и суммы моментов составляющих (по теореме Вариньона) равны нулю, хотя система не в равновесии, а эквивалентна равнодействующей. Чтобы, продолжив рассуждения, получить критерий равновесия, имеются два пути. По одному из них надо взять сумму моментов всех сил системы относительно какой-либо третьей точки C, не лежащей на прямой AB. Равнодействующая не может проходить через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, следовательно, три условия

$$\sum M_A=0;\ \sum M_B=0;\ \sum M_C=0 \tag{122}$$

возможны только в системе, где главный момент и главный вектор равны нулю, т. е. в системе, находящейся в равновесии.

По второму пути надлежит подсчитать сумму проекций всех сил системы на какую-либо ось, неперпендикулярную AB. Эта сумма вместе с двумя суммами моментов тоже является необходимым и достаточным условием равновесия системы, если они равны нулю

$$\sum M_A=0;\ \sum M_B=0;\ \sum X=0. \qquad (123)$$

Задача № 29. (№ 138, *Бухгольц Н. И., Воронков И. М.* и *Минаков А. П.* Сборник задач по теоретической механике. М., 1938). Однородный стержень длиной $2l$ и весом P прикреплен в точке B с помощью шарнира к стене (рис. 91), а в точке D опирается сверху на другую стену. Найти все реакции, если известно, что точка D отстоит от первой стены на расстоянии a и находится на высоте b над шарниром B.

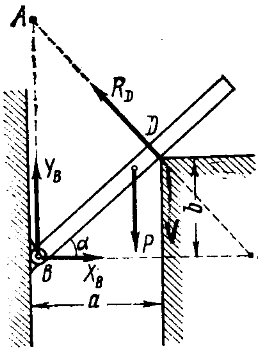


Рис. 91

Решение. Равновесие какого тела надо рассматривать? Ответ на этот вопрос в данной задаче очевиден: равновесие стержня. Какие силы действуют на это тело? На него действуют вес P, приложенный в середине стержня; реакция R_D в точке D, направленная перпендикулярно виртуальному перемещению, т. е. перпендикулярно стержню; реакция в шарнире B, которую раскладываем на две составляющие X_B и Y_B, поскольку направление реакции в шарнире обычно неизвестно, хотя в данном случае это направление можно было бы определить по необходимому условию равновесия трех непараллельных сил (см. § 22). Теперь составляем уравнения равновесия, для чего воспользуемся равенствами (122). За центры моментов выберем точки пересечения линий действия искомых сил. Эти точки называют *точками Риттера.*

Уравнения равновесия принимают вид

$$\sum M_B=0;\ R_D a/\cos\alpha - Pl\cos\alpha=0;$$

$$\sum M_A=0;\ X_B a/(\cos\alpha\sin\alpha) - Pl\cos\alpha=0;$$

$$\sum M_C=0;\ -Y_B a/\cos^2\alpha + P(a/\cos^2\alpha - l\cos\alpha)=0.$$

Остается решить эти уравнения, содержащие по одной неизвестной.

Ответ. $R_D=Pal/(a^2+b^2)$; $X_B=Pabl(a^2+b^2)^{3/2}$; $Y_B=P[1-a^2l/(a^2+b^2)^{3/2}]$.

Задача № 30. (№ 40, *Зернов Б. С.* Сборник задач по теоретической механике, ч. 1. Госиздат, 1931). Между двумя вертикальными стенками, находящимися на расстоянии a друг от друга (рис. 92), помещен стержень весом P и длиной $2l$, который может вращаться вокруг шарнира A, прикрепляющего конец стержня к одной из стен. Найти реакции опор.

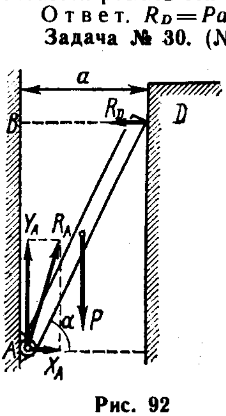


Рис. 92

Решение. Равновесие какого тела надо рассмотреть? Равновесие стержня.

Какие силы на это тело действуют? Вес P; реакция в точке D, направленная перпендикулярно виртуальному перемещению стержня (стержень, не нарушая связи, можно перемещать вдоль стены, поэтому реакция R_D направлена перпендикулярно стене); реакция в шарнире A, которую разложим на X_A и Y_A.

Составим уравнения равновесия в третьей форме (123), выбрав за центры моментов точки A и B, в которых пересекаются линии действия искомых реакций. Точка пересечения R_D и X_A находится в бесконечности, поэтому в качестве третьего уравнения возьмем сумму проекций всех сил на какую-либо ось, лишь бы эта ось не была перпендикулярна AB:

$$\sum M_A = 0;\ R_D 2l \sin\alpha - Pl\cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_B = 0;\ X_A 2l \sin\alpha - Pl\cos\alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0;\ Y_A - P = 0.$$

Определим из чертежа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и решим эти уравнения, содержащие по одной неизвестной.

Ответ: $R_D = Pa/\left(2\sqrt{4l^2 - a^2}\right);\ X_A = R_D;$

$Y_A = P;\ R_A = (P/2)\sqrt{(16l^2 - 3a^2)/(4l^2 - a^2)}.$

Задача № 31. (№ 1.6. Сборник задач по теоретической механике/Под ред. К. С. Колесникова. М., Наука, 1983). Консольная балка (рис. 93) находится под действием силы P, пары сил с моментом M и нагрузки, распределенной по линейному закону с максимальной интенсивностью q_0. Определить реакцию заделки, если $a=1$ м, $P=8$ Н, $M=16$ Н·м, $q_0=2$ Н/м.

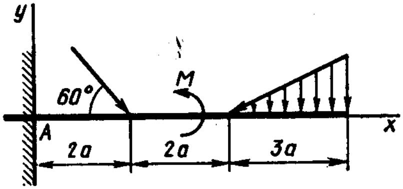


Рис. 93

Решение. Реакцию заделки определим из уравнений равновесия консольной балки. На нее действуют следующие активные силы: сосредоточенная нагрузка P, пара сил с моментом M и распределенная по линейному закону нагрузка с максимальной интенсивностью q_0. Для решения задачи эту распределенную нагрузку надо заменить одной силой Q, ей эквивалентной. Модуль этой силы $Q = (1/2)3aq$ и вектор приложен в центре тяжести треугольника.

Какие же реакции действуют на балку в заделке? Балка жестко заделана в стену и реакции действуют на балку в различных точках опоры. Эти реакции не известны и чтобы определить их действие на балку, приведем по методу Пуансо все эти силы к одной точке A. В результате получаем соответствующие пары и в точке A главный вектор заделки и главный момент заделки $M_{зад}$. Разложив главный вектор реактивных сил, приведенных к точке A, на составляющие X_A и Y_A и учитывая момент заделки $M_{зад}$ в уравнениях равновесия балки, получим

$$\sum X = 0;\ P\cos 60° + X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0;\ -P\sin 60° + Y_A - Q = 0;$$

$$\sum M_A = 0;\ M_{зад} + M - Q\cdot 6 + P\cdot 2\sin 60° = 0\cdot$$

Подставив числовые значения, получим ответ. Знак минус реакции X_A показывает, что эта реакция направлена влево.

Ответ. $X_A = -4$ Н, $Y_A = 9{,}92$ Н, $M_{зад} = 15{,}86$ Н·м.

Статически определенной называют задачу о равновесии, в которой число неизвестных равно числу уравнений равновесия.

Итак, для плоской системы сил, приложенных к одному твердому телу, можно написать (в той или иной форме) три уравнения равновесия. Равновесие плоского пучка сил определяется двумя уравнениями, а для определения равновесия твердого тела под действием произвольной системы сил можно составить шесть уравнений.

В системе уравнений число неизвестных не должно превышать числа уравнений, иначе система уравнений не имеет однозначных решений.

Статически определенными задачами называют задачи о равновесии твердого тела, в которых число неизвестных равно числу уравнений равновесия. Иначе задачи не могут быть решены методами статики и являются *статически неопределенными.*

Равновесием системы тел называют такое состояние, при котором каждое из тел находится в равновесии.

Равновесие системы тел. Уравнения равновесия (120) и (120′) выведены для одного твердого тела, находящегося под действием так или иначе расположенных сил. Часто встречается необходимость в статическом расчете системы, состоящей из нескольких тел, каким-либо образом соединенных (сочлененных) между собой.

Как уже было сказано, силы, действующие на тела такой системы, можно подразделить на: *внешние* — силы приложенные к телам данной системы, но обусловленные наличием других тел, не входящих в эту систему, и *внутренние* — силы взаимодействия между телами одной и той же системы.

Если система находится в равновесии, то в равновесии находится каждое тело, входящее в состав этой системы. Можно рассматривать каждое тело отдельно от других тел системы и составить уравнения равновесия всех сил, приложенных к этому телу, не исключая и сил, обусловленных действием на это тело соседних тел той же системы, т. е. внутренних сил системы, приложенных к этому телу.

Вместе с тем можно рассматривать всю эту находящуюся в равновесии систему тел как одно твердое тело (*аксиома затвердения*) и составить уравнения равновесия этого тела, в которые войдут только внешние силы системы. Внутренние же силы в эти уравнения равновесия всей системы не входят, так как они взаимно уравновешиваются по принципу равенства действия и противодействия, поскольку взаимодействия каждых двух тел «затвердевшей» системы оказываются приложенными к частям одного абсолютно твердого тела.

Задача № 32. (№ 3.7, *Старжинский В. М.* Теоретическая механика. М., «Наука», 1980). На невесомую трехшарнирную арку ABC (рис. 94, *а*) действует вертикальная сила P. Определить реакции шарниров A, B и C. Размеры указаны на чертеже.

Решение. Конструкция состоит из двух полуарок AB и BC, сочлененных шарниром B. Собственным весом пренебрегаем, поэтому на арку ABC действуют следующие внешние силы: вертикальная сила P и реакции в шарнирах A и C.

Между полуарками имеется взаимодействие в точке B их сочленения. Одна из этих внутренних сил системы приложена к полуарке AB, другая, равная ей по модулю, но обратная по направлению, приложена к полуарке BC. Если всю арку рассматривать как твердое тело, то эти две силы учитывать не надо, так как они оказываются приложенными к одному твердому телу и, следовательно, взаимно уравновешивают друг друга. В уравнении равновесия всей арки войдут только внешние силы системы

$$\sum X = 0,\ X_A - X_C = 0;$$

$$\sum Y = 0,\ Y_A + Y_C - P = 0;$$

$$\sum M_A = 0,\ Y_C 2l - Pa = 0.$$

Имеем три уравнения с четырьмя неизвестными.

Для определения горизонтальной реакции в шарнире C, а также R_B рассмотрим равновесие всех сил, действующих на полуарку BC. На эту полуарку дейст-

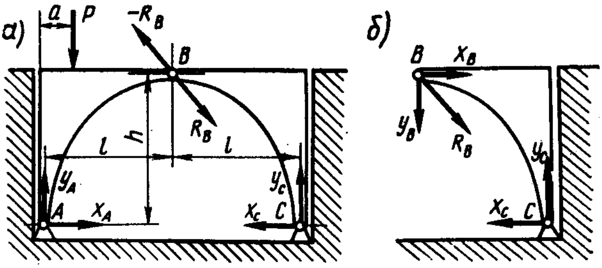


Рис. 94

вуют (рис. 94, *б*): реакции X_C и Y_C в шарнире C (внешние реакции системы) и реакция в шарнире B (внутренняя реакция для всей системы, но внешняя для полуарки BC) со стороны полуарки AB. Эту реакцию тоже разложим по осям координат на X_B и Y_B. Составим уравнения равновесия для полуарки BC

$$\sum X = 0;\ X_B - X_C = 0;$$

$$\sum Y = 0;\ -Y_B + Y_C = 0;$$

$$\sum M_B = 0;\ Y_C l - X_C h = 0.$$

Получаем три уравнения, содержащие четыре неизвестных, но два из этих неизвестных входят также и в предыдущие три уравнения. Всего имеем шесть уравнений с шестью неизвестными. Решая уравнения, получим ответ.

Ответ. $X_A = -X_C = X_B = Pa/2h$; $Y_A = (1 - a/2l)P$; $Y_C = -Y_B = Pa/2l$.

Задача № 33. (№ 1.28. Сборник задач по теоретической механике/Под ред. К. С. Колесникова. М., Наука, 1983). Два однородных стержня (рис. 95, *а*) веса P и длины $4l$ прикреплены каждый к неподвижным шарнирам A и D. Стержень CD опирается на стержень AB, который в свою очередь опирается на горизонтальную плоскость. Определить реакции в шарнире A и в точке C соприкосновения стержней, если $CB = l$.

Решение. При решении задач статики первый вопрос, который нужно задать для решения задачи, почти всегда бывает один и тот же: равновесие какого материального объекта (точки, тела) надо рассмотреть? На этот вопрос не всегда бывает просто ответить. Так, в данной задаче требуется определить реакции в шарнире A и в точке C соприкосновения обоих стержней, которая является силой взаимодействия между стержнями AB и CD. Если рассматривать равновесие заданной в условии задачи материальной системы, состоящей из двух стержней AB и CD, то эта сила, как внутренняя сила системы, в уравнения равновесия не войдет и решить задачу полностью невозможно. Но если рассматривать равновесие каждого стержня в отдельности, то надо учитывать, что на каждый стержень сила R_C действует как внешняя: в точке C на стержень AB давит стержень CD, а на стержень CD с равной по модулю и противоположной по направлению силой давит стержень AB.

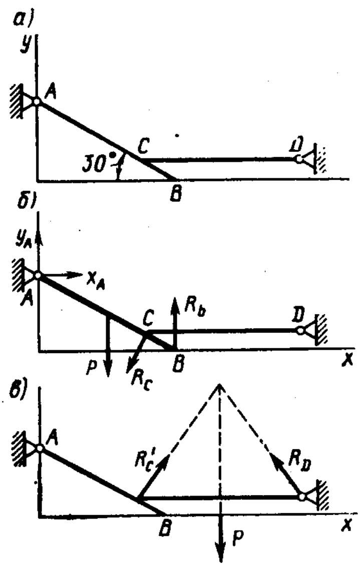


Рис. 95

Обе точки (A и C), реакции в которых требуется определить, принадлежат стержню AB. Казалось бы, что для решения задачи достаточно рассмотреть равновесие стержня AB. На этот стержень действуют следующие силы (рис. 95, *б*):

1) вес P, приложенный в середине стержня AB, направленный вертикально вниз; 2) неизвестная по величине реакция R_B горизонтальной плоскости, приложенная в точке B и направленная перпендикулярно виртуальному перемещению стержня в этом месте, т. е. вертикально; 3) неизвестная по величине сила давления стержня CD, приложенная в точке C и направленная перпендикулярно виртуальному перемещению стержня CD в этом месте, т. е. перпендикулярно AB от точки C вниз; 4) приложенная в точке A реакция шарнира, неизвестная ни по величине, ни по направлению; такие реакции в шарнирах раскладывают на составляющие по осям координат; в данном случае этими составляющими реакции являются неизвестные X_A и Y_A.

Итак, рассмотрим равновесие стержня AB и составим уравнения равновесия плоской системы приложенных к нему сил:

$$\sum X = 0, \ X_A - R_C \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0, \ Y_A - P - R_C \cos 30^\circ + R_B = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \ -Y_A \cdot 4l \cos 30^\circ - X_A \cdot 4l \sin 30^\circ + P2l \cos 30^\circ + R_C l = 0.$$

Таким образом, при рассмотрении равновесия одного стержня AB имеем четыре неизвестных (X_A, Y_A, R_C и R_B), что при трех уравнениях равновесия сил на плоскости приводит к статически неопределенной задаче. Но стержень AB дан в сочленении со стержнем CD и R_C является силой взаимодействия между стержнями AB и CD. И воспользовавшись третьей аксиомой Ньютона, определим R_C из рассмотрения равновесия стержня CD (рис. 95, *в*).

Стержень CD находится в равновесии под действием трех сил: 1) вес P; 2) реакция R'_C и реакция R_D в шарнире D. Согласно необходимому условию равновесия трех непараллельных сил, линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке (см. с. 128). Следовательно, реакция шарнира D должна быть направлена в точку пересечения линий действия P и R'_C. В данном случае это не имеет существенного значения, так как в задаче не требуется определить эту реакцию, а реакцию R_C можно определить из одного уравнения моментов относительно точки D всех сил, приложенных к стержню CD:

$$\sum M_D = 0; \ -R'_C \cdot 4l \cos 30^\circ + P2l = 0.$$

Из четырех составленных уравнений находим ответ.

Ответ: $R_C = 0{,}577\ P$; $X_A = 0{,}289\ P$; $Y_A = 0{,}5\ P$.

Равновесие при наличии трения

Максимальное значение силы трения скольжения равно произведению нормального давления на коэффициент трения: $F_{макс}=fN$; $F_{тр}\leqslant F_{макс}$.

Условия равновесия не всегда можно написать в виде равенства. Иногда они выражаются и неравенствами. Неравенствами, например, обычно выражаются условия равновесия при наличии сил трения. Трение материальных тел относится к области физики, потому что оно порождается не только причинами механического характера, но и причинами внутримолекулярного, термического, электрического характера и др. Точные формулы, полученные советскими и зарубежными учеными, очень сложны, но в технике обычно для приближенного определения трения пользуются простыми соотношениями, установленными опытным путем еще в XVIII в. Ш. Кулоном. Для вывода закона трения по Кулону проделаем опыт, обычно называемый опытом Морена (по имени одного из основателей научной практической механики). Однако этот же опыт еще задолго до Морена проделал Амонтон — один из первых серьезных исследователей трения. Исследованием трения одним из первых занимался также Леонардо да Винчи.

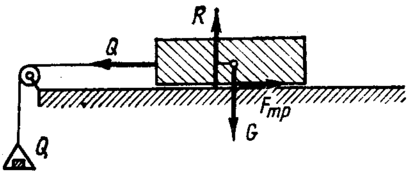


Рис. 96

К телу (рис. 96), лежащему на горизонтальной негладкой плоскости, прикреплена перекинутая через блок нить, к другому концу которой привязана чашка с грузом. На тело действуют следующие силы: вес G, реакция R плоскости, натяжение Q нити, равное весу груза, приложенного к концу нити, сила трения $F_{тр}$, направленная против натяжения нити. Из условия равновесия тела следует, что при покое тела сила трения равна и противоположна той силе Q, которая стремится вывести это тело из состояния покоя.

Постепенно увеличивая груз Q, а следовательно, и натяжение нити, убедимся, что тело начнет двигаться, как только это натяжение достигнет определенного предельного значения. До тех пор, пока натяжение нити меньше этого значения, оно уравновешивается силой трения, и тело находится в покое. Отсюда можно сделать заключение: при покое тела увеличение силы, стремящейся привести тело в движение, вызывает увеличение силы трения от нуля до известного предела $F_{макс}$, больше которого сила трения быть не может. Этот предел называют *силой трения скольжения* при начале движения

$$F_{тр}\leqslant F_{макс}. \qquad (124)$$

Как показывает опыт, максимальное значение силы трения пропорционально нормальному давлению:

$$F_{\text{макс}}=fN. \qquad (124')$$

Под *нормальным давлением* здесь понимают составляющую полного давления, перпендикулярную соприкасающимся плоскостям *. Так, если тело весом G лежит на плоскости, составляющей угол α с плоскостью горизонта (рис. 97), то нормальное давление $N=G\cos\alpha$. При постепенном увеличении угла уменьшается сила нормального давления $F\cos\alpha$ (а следовательно, и сила трения) и увеличивается составляющая веса, направленная вдоль наклонной плоскости $F\sin\alpha$. При некотором угле $\alpha=\alpha_{\text{тр}}$ тело не сможет больше удерживаться трением на наклонной плоскости и начнет сползать вниз. Этот угол называют *углом трения, тангенс его равен коэффициенту трения* для данной пары трущихся материалов (тела и плоскости)

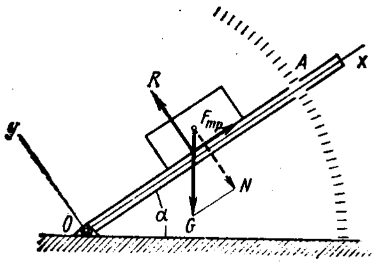


Рис. 97

$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{тр}}=f. \qquad (125)$$

Этот же угол называют *углом естественного ската*, потому что сыпучее тело, лежащее на горизонтальной плоскости, имеет форму конуса, образующие которого наклонены под этим углом к горизонтальному основанию.

Подсчитаем, например, сколько яровой пшеницы можно насыпать на круглую площадку диаметром 10 м, если насыпная плотность яровой пшеницы равна 750 кг/м^3, а $f=0{,}75$? Для этого умножим насыпную плотность яровой пшеницы на объем конуса $V=\pi r^2h/3=\pi r^3\operatorname{tg}\varphi/3$, где φ — угол естественного откоса ($\operatorname{tg}\varphi=f$), и получим ответ (98 000 кг).

Реакцию связи, направленную перпендикулярно плоскости возможных перемещений, называют (§ 21) *идеальной*. Геометрическую сумму идеальной реакции и силы трения называют *полной реакцией*. Сила трения является касательной составляющей, а идеальная реакция — нормальной составляющей полной реакции связи. Угол трения есть угол максимального возможного отклонения полной реакции $R_{\text{тр}}$ опорной поверхности от нормали к ней (рис.

* В технике под термином «давление» обычно понимают величину, численно равную силе, действующей на единицу поверхности. Обратим внимание читателя (как это делал акад. В. Д. Кузнецов) на то, что в формуле (124′) N означает нормальное давление на всю площадь соприкасания.

98, *а*). Множество всевозможных направлений полных реакций представляет собой конус (называемый *конусом трения*) с осью, нормальной к поверхности соприкосновения тел, и углом при вершине, равным удвоенному углу трения. Никакая сила, давящая на тело, не может нарушить его равновесия, если ее линия действия лежит внутри конуса трения (рис. 98, *б*). В самом деле, пусть на тело, лежащее на негладкой горизонтальной плоскости, давит сила F под углом β к вертикали. Разложим эту силу на две составляющие, одна из которых $F_1 = F \sin\beta$ стремится сдвинуть тело по плоскости, а другая $F_2 = F\cos\beta$ создает нормальное давление. Весом тела пренебрегаем. Возникает сила трения, максимальное значение которой

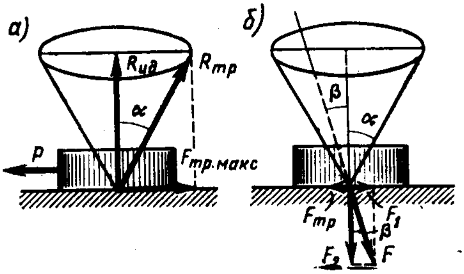


Рис. 98

$$F_{макс} = fN = \operatorname{tg} \alpha F \cos\beta.$$

Чтобы нарушить равновесие и сдвинуть тело, необходимо условие

$$F \sin\beta > F_{макс} \quad \text{или} \quad \beta > \alpha,$$

т. е. линия действия силы F должна проходить вне конуса трения. На этом в прикладной механике основана теория самоторможения.

Задача № 34. Лестница AB (рис. 99) прислонена к стене под углом 30°. По лестнице поднимается человек весом P. Пренебрегая весом лестницы, определить наибольшее расстояние BC, на которое может подняться человек, не уронив лестницы, если коэффициент трения лестницы о пол и о стену $f = \operatorname{tg} 15°$.

Решение. Рассмотрим равновесие лестницы в предельном положении. На лестницу действуют: 1) вес P человека, приложенный в точке C и направленный вниз; 2) полная реакция $R_{тр\,A}$ в точке A, направленная вправо и вверх под углом 90°—15°=75° к стене, так как в предельном положении она составляет с идеальной реакцией угол, равный углу трения; 3) полная реакция $R_{тр\,B}$ в точке B, направленная вверх и влево под углом 75° к полу.

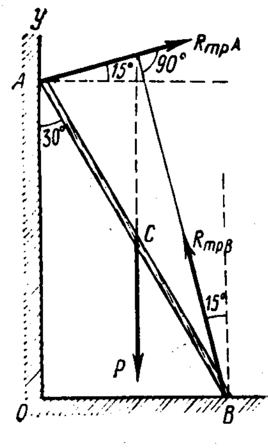


Рис. 99

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum X = 0,\ R_{трA} \cos 15° - R_{трB} \sin 15° = 0;$$

$$\sum Y = 0,\ R_{трA} \sin 15° + R_{трB} \cos 15° - P = 0;$$

$$\sum M_B = 0,\ P \cdot BC \cos 30° - R_{трA} \cdot AB \cos 15° = 0.$$

Определив $R_{тр\,B}$ из первого уравнения, подставим его во второе

$$R_{трA}\sin 15° + R_{трA}\cos^2 15°/\sin 15° = P.$$

Умножив это уравнение на $\sin 15°$, найдем, что $R_{тр\,A} = P\sin 15°$, и, подставляя это значение в третье уравнение равновесия, получим $P\cdot BC\sin 30° = P\cdot AB\sin 15°\cos 15° = P\cdot AB\cdot 0{,}5\sin 30°$, откуда $BC = AB/2$.

Если человек поднимается по лестнице выше $AB/2$, то три силы, действующие на лестницу, не пересекутся в одной точке, и необходимое условие равновесия трех непараллельных сил будет нарушено. Если же человек будет находиться на лестнице ниже, то равновесие сохранится, так как угол трения является максимальным углом, который может составлять полная реакция с идеальной реакцией. В этом случае сила трения будет меньше произведения коэффициента трения на нормальное давление, и три приложенные к лестнице силы пересекутся в одной точке.

Момент пары, противодействующей качению тела по опорной поверхности, называют моментом трения качения.

Трение качения. Трение, возникающее при качении тел, не может быть объяснено механикой абсолютно твердого тела, а потому коснемся его лишь в общих чертах.

Пусть перпендикулярно оси цилиндрического катка (рис. 100) весом G и радиуса r, который лежит на горизонтальной поверхности, приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Вследствие деформаций катка и опорной поверхности их касание происходит не в одной точке, а по некоторой площадке, и нормальная реакция $\vec{R}$ смещена на некоторое расстояние δ. В направлении, обратном силе F, в том месте, где каток касается опорной поверхности, возникает сила $\vec{F}''$, которую называют силой трения качения. При равновесии катка эта сила по модулю равна F и составляет с ней пару (FF''), уравновешиваемую парой (GR), момент которой называют *моментом трения качения*. Плечо δ этой пары при предельном равновесии называют *коэффициентом трения качения*. Коэффициент трения качения имеет размерность длины и его выражают в миллиметрах:

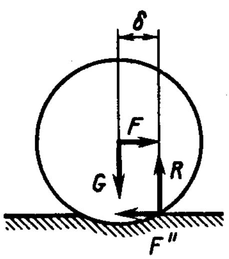


Рис. 100

$$F''r = G\delta.$$

§ 30. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ СИЛЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

«Работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны» *.

Понятие работы. Изучив различные свойства силы (сложение сил, проекции силы, момент силы и пр.), перейдем к очень важному в кинетике понятию *работа силы*, связывающему два фундаментальных понятия: сила и энергия.

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 419.

Энергия может переходить из одного вида в другие. Например, потенциальная энергия воды, поднятой плотиной на гидроэлектростанции, переходит в кинетическую эргию вращающихся турбин, которая в свою очередь превращается в электрическую энергию и по проводам передается на большие расстояния, чтобы опять перейти в кинетическую энергию станков, в тепловую энергию электропечей, в световую, в звуковую и прочие виды энергии. При всех этих явлениях исчезает (или возникает) такое же количество энергии, сколько возникает (или исчезает) энергии всех прочих видов. Это изменение энергии, изменение формы движения, рассматриваемое с количественной стороны, Энгельс называет *работой*.

Из множества различных видов движения в теоретической механике изучается только механическое движение. Переход механического движения в немеханическое или же, наоборот, немеханического в механическое происходит на протяжении некоторого пути и зависит от действующих сил. Поэтому понятие работы в механике связано с понятиями перемещения и силы.

Работу постоянной силы при прямолинейном движении выражают произведением модуля силы на модуль перемещения материальной частицы и на косинус угла между направлениями силы и перемещения: $A=Fs\cos\alpha$.

Работа постоянной силы при прямолинейном движении. Знакомство с понятием работы силы в механике начнем с частного случая — работы постоянной силы при прямолинейном движении точки ее приложения.

Пусть к некоторой материальной частице приложена постоянная сила $\vec{F}$ и точка приложения силы переместилась на прямолинейный отрезок s. В таком случае произведение

$$\boxed{A=Fs\cos\alpha} \tag{126}$$

выражает *работу* постоянной силы F при прямолинейном движении.

Работа* является скалярной величиной, она не имеет направления и вполне характеризуется своим размером и знаком. В формуле (126) модуль силы F и длины пути s всегда положительны. Знаки «+» или «—» определяются знаком косинуса угла α между направлениями силы и перемещения или (так как при прямолинейном движении направление перемещения точки совпадает с направлением ее скорости v) косинусом угла между направлениями силы и скорости. Работа положительна, если угол α острый, и отрицательна, если он тупой. Если направление F совпадает с направлением перемещения, то угол $(\widehat{Fv})=0$, $\cos(\widehat{Fv})=1$, а $A=Fs$. Если же сила направлена противоположно перемещению, то $(\widehat{Fv})=180°$, $\cos(\widehat{Fv})=-1$ и $A=-Fs$.

* Термин «работа» введен в науку Кориолисом и одновременно Понселе в 1829 г.

Сила, перпендикулярная перемещению, работы не совершает, так как $\cos 90° = 0$.

Определим размерность работы в физической системе единиц

$$[A]_ф = L^2MT^{-2}.$$

Единицей работы в СИ является *джоуль* * — работа силы в 1 Н, действующей по направлению перемещения на пути в 1 м (1 Дж = = 1 Н·м = 1 кг·м²·с⁻²).

Размерность работы в технической системе единиц

$$[A]_т = L^1F^1T^0.$$

Если сила выражена в кгс, а длина — в м, то единицей работы является 1 *килограмм-сила-метр* (кгс·м) **.

Элементарной работой силы называют работу силы на столь малом перемещении точки ее приложения, что изменением силы можно пренебречь: $dA = F\cos(\widehat{F \cdot v})ds$.

Элементарная работа силы. В общем случае, если сила переменна или движение точки приложения силы криволинейное, определять работу силы по формуле (126) нельзя. Но, разбив мысленно весь путь на такие маленькие участки, которые можно считать прямолинейными и на которых можно пренебречь изменением модуля и направления силы, определим на каждом из этих участков работу, называемую *элементарной работой силы:*

$$d\,A = F\cos(\widehat{F \cdot v})\,d\,s. \qquad (127)$$

В этом равенстве ds выражает длину элементарного перемещения и является величиной всегда положительной.

Зная работу силы (127) на отдельных элементах пути, можно определить работу на конечном участке. Докажем некоторые теоремы о работе силы.

Элементарная работа равнодействующей равна сумме элементарных работ составляющих: $dA = \Sigma dA_k$.

Теорема об элементарной работе равнодействующей. Пусть к точке O приложен пучок силы F_1, F_2, ..., F_n. Спроецируем все силы пучка и равнодействующую F на ось, проведенную по направлению скорости точки O, и приравняем проекцию равнодействующей сумме проекций составляющих

$$F\cos(\widehat{Fv}) = F_1\cos(\widehat{F_1v}) + F_2\cos(\widehat{F_2v}) + \ldots + F_n\cos(\widehat{F_nv}).$$

Умножив теперь каждый член этого равенства на длину ds элементарного перемещения точки приложения сил, найдем, что эле-

---

* Принято на II Международном конгрессе электриков в 1889 г.

** Эта единица предложена Понселе в 1829 г., но Д. С. Чижов еще в 1823 г. измерял действие машин в «динамических единицах», равных 1 кгс·м.

ментарная работа равнодействующей равна сумме элементарных работ составляющих

$$F\cos(\widehat{Fv})\,ds = F_1\cos(\widehat{F_1v})\,ds + F_2\cos(\widehat{F_2v})\,ds + \ldots + F_n\cos(\widehat{F_nv})\,ds$$

или

$$dA = \sum dA_k, \text{ где } k=1,\ 2,\ldots,\ n. \qquad (127')$$

Под суммой следует понимать алгебраическую сумму, потому что работа не имеет направления, но имеет знак.

Элементарная работа силы связана с проекциями силы на оси координат соотношением: $dA = Xdx + Ydy + Zdz$.

Выражение элементарной работы через проекции силы на оси координат. Разложим силу F на составляющие X, Y, Z и определим элементарную работу силы по сумме работ, ее составляющих. Пусть составляющие силы направлены в положительном направлении осей координат. Тогда углы между составляющими силы и скоростью являются углами между скоростью и положительными направлениями осей координат, а их косинусы определяются формулами (17) направляющих косинусов скорости. В таком случае имеем

$$dA = F\cos(\widehat{Fv})\,ds = X\cos\alpha_v\,ds + Y\cos\beta_v\,ds + Z\cos\gamma_v\,ds,$$

или, подставляя значения направляющих косинусов (14),

$$dA = X\frac{dx}{ds}\,ds + Y\frac{dy}{ds}\,ds + Z\frac{dz}{ds}\,ds$$

и, сокращая на ds, получаем окончательно

$$\boxed{dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.} \qquad (128)$$

Формула (128) имеет очень большое значение в динамике. При выводе этой формулы считаем, что X, Y и Z направлены по осям координат в положительную сторону. Если какие-либо из составляющих силы направлены в отрицательные стороны, то иным станет знак соответствующего косинуса. Поэтому в формуле (128) X, Y и Z являются не модулями составляющих, а проекциями силы на оси координат, т. е. определяются не только величиной, но и знаком. Кроме того, в отличие от (127), где всегда $ds>0$, в (128) величины dx, dy и dz являются дифференциалами координат точки приложения силы и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Заметим, что в общем случае дифференциальный трехчлен $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ не является полным дифференциалом и обозначение элементарной работы $\mathrm{d}A$ не следует понимать как полный дифференциал от A.

Работу силы на данном пути выражают пределом суммы всех элементарных работ силы на элементарных перемещениях, из абсолютных величин которых составляется данный путь: $A=\int\limits_{M_1M_2}(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)$.

Работа силы на данном пути. Возьмем какие-либо два положения M_1 и M_2 точки на ее криволинейной траектории. Работа A силы F на конечном перемещении M_1M_2 выразится суммой элементарных работ силы на всех элементарных перемещениях, на которые разбит конечный участок пути M_1M_2. Эта сумма состоит из бесчисленного множества бесконечно малых слагаемых. Такую сумму называют криволинейным интегралом, взятым по дуге M_1M_2, и обозначают так:

$$A=\int\limits_{M_1M_2} F\cos(\widehat{Fv})\,\mathrm{d}s, \qquad (129')$$

или, если воспользоваться выражением элементарной работы через проекции силы на оси координат,

$$A=\int\limits_{M_1M_2}(X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z). \qquad (129'')$$

Если на точку действуют несколько сил, то работа равнодействующей на конечном участке пути равна сумме работ составляющих на том же участке пути.

Так как сила зависит от координат точки ее приложения, от проекций скоростей точки и от времени

$$F=F(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t),$$

то можно вычислить интеграл только в случае, если известно движение точки. Подставив тогда вместо x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их выражения в зависимости от времени, можно представить работу силы в виде интеграла

$$A=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (129)$$

где t_1 и t_2 — мгновения, соответствующие положению точки в M_1 и M_2.

Работа графически выражается площадью, ограниченной кривой, изображающей зависимость проекции силы на скорость от пути, осью абсцисс и крайними ординатами.

Графическое определение работы. Ввиду сложности математического вычисления работы на практике часто пользуются для этой цели графическим методом. Отложим по оси абсцисс длину пути, пройденного точкой, а по оси ординат — соответствующую проекцию силы на направление скорости, учитывая и знак проекции. Получим некоторую кривую, изображающую зависимость проекции силы на направление скорости от пути точки. Площадь, ограниченная этой кривой, осью абсцисс и двумя крайними ординатами, изображает работу силы на данном пути. Если кривая или часть ее расположена по отрицательную сторону (зниз от оси абсцисс), то соответствующая площадь изображает отрицательную работу.

Для построения графика зависимости силы от пути имеются различные приборы. В частности, специальный прибор — индикатор — служит для записи давления в цилиндре в зависимости от хода поршня. Работу, вычисленную с использованием индикаторной диаграммы, т. е. диаграммы, начерченной этим прибором, называют *индикаторной работой*.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории центра тяжести тела и равна произведению веса тела на изменение высоты центра тяжести тела: $A_G = Gh$.

Работа силы тяжести. Складывая веса всех частиц тела, заменим их одной силой G, равной весу тела и приложенной в центре тяжести тела, координаты которого обозначим x_1, y_1, z_1. Пусть при движении тела (безразлично по какой траектории) центр тяжести тела переместился и координаты его стали x_2, y_2, z_2. Определим проекции веса на оси координат, считая, что Oz направлена вверх:

$$X=0;\ Y=0;\ Z=-G,$$

и, подставив их в (129″), получим под знаком интеграла полный дифференциал, а потому

$$A=\int_{z_1}^{z_2} -G\,dz=-G(z_2-z_1),$$

или

$$A=G(z_1-z_2)=Gh. \qquad (130)$$

Следовательно, работа силы тяжести не зависит от вида траектории точек тела и равна произведению веса тела на разность начальной и конечной высот центра тяжести. Если тело опускается, то сила тяжести тела совершает положительную работу, а если поднимается, то отрицательную.

Элементарная работа силы, приложенной к телу, закрепленному на неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота: $dA = M d\varphi$.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Пусть тело вращается (или может вращаться) вокруг неподвижной оси и к какой-либо точке K этого тела приложена сила F. Примем ось вращения тела за ось Oz прямоугольной системы координат. Элементарная работа силы выразится равенством (129)

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Припомним формулы Эйлера (48), связывающие проекции скорости точки K вращающегося тела с угловой скоростью ω этого тела и координатами x, y и z этой точки:

$$v_x = -y\omega;\quad v_y = +x\omega;\quad v_z = 0.$$

Умножая эти равенства на dt, найдем приращения координат точки приложения силы

$$dx = -y\,d\varphi;\quad dy = +x\,d\varphi;\quad dz = 0.$$

Подставим эти выражения в формулу (128)

$$dA = (-yX + xY)\,d\varphi.$$

Разность, стоящая в скобках, выражает момент данной силы относительно оси Oz

$$M_z = xY - yX,$$

а следовательно, элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол

$$dA = M\,d\varphi. \qquad (131)$$

Если на тело действуют несколько сил, то, составив такие равенства для определения работы каждой из них и просуммировав, найдем, что элементарная работа всех сил равна произведению главного момента сил относительно оси вращения на $d\varphi$.

Чтобы определить работу силы, действующей на тело при его повороте от φ_1 до φ_2, надо проинтегрировать уравнение (131) в этих пределах, выразив момент силы в функции угла поворота

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,d\varphi. \qquad (131')$$

В частном случае, когда момент силы постоянный

$$A = M\varphi, \qquad (131'')$$

работа равна произведению момента силы на угол поворота тела.

Работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации: $A = c\lambda^2/2$.

Работа упругой силы. Определим работу упругой силы F пружины при растяжении ее на λ см, если для растяжения этой пружины на 1 см необходима сила c.

Согласно одному из основных законов теории упругости и сопротивления материалов, называемому законом Гука *, растяжение нагруженного тела прямо пропорционально нагрузке

$$F = cx,$$

где F — нагрузка; x — растяжение; c — коэффициент жесткости.

Подставляя это значение F в выражение (127) и интегрируя в пределах от 0 до λ, найдем работу, необходимую для искомой деформации пружины,

$$A = \int_0^\lambda cx\,\mathrm{d}x = c\lambda^2/2. \qquad (132)$$

Если к пружине приложить силу, например растягивать пружину рукой, то со стороны пружины возникает реакция, называемая *упругой реакцией,* или упругой силой, пружины. По принципу равенства действия и противодействия упругая сила равна и противоположна растягивающей силе F, а поэтому работа упругой силы определяется найденным значением (132). Знак работы упругой силы отрицателен, если деформация увеличивается, и положителен, если деформация уменьшается.

Заметим, что работа упругой силы выражается полученным равенством (132) не только в рассмотренном частном случае. Эта формула относится в равной мере ко всем случаям упругой деформации, в которых упругая реакция подчиняется закону Гука. Сюда относятся растяжение и сжатие прямолинейного бруса, изгиб балки и т. п.

Аналитическая статика

Работу силы на виртуальном перемещении называют виртуальной работой силы.

Изохронные вариации координат. Виртуальные перемещения, т. е. воображаемые, достаточно малые перемещения, не нарушают наложенных связей. Чтобы сообщить телу виртуальное перемещение, не нужно прикладывать к нему дополнительно какие-либо силы, потому что виртуальные перемещения воображаемые. Для виртуального перемещения не требуется никакого времени и оно происходит как бы мгновенно, при фиксированном (постоянном) значении t.

---

* Закон деформации упругого тела открыт Гуком в 1660 г., но опубликован только в 1676 г.

Пусть материальная точка M имеет координаты x, y и z. Дадим этой точке виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$. Тогда координаты точки M получат малые приращения δx, δy, δz, называемые *изохронными вариациями координат*. Это название показывает, что изменения координат происходят изохронно, при данном значении t. Символ δ для обозначения изохронных вариаций δx, δy, δz в отличие от обозначений дифференциалов $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, которые выражают действительные изменения координат точки, происходящие за промежуток времени $\mathrm{d}t$, появился впервые в работах Лагранжа.

Различие между дифференцированием и изохронным варьированием какой-либо функции $f(x, y, z, t)$ обнаруживается при вычислении бесконечно малых изменений этих функций, получающихся вследствие того, что при дифференцировании время t является переменной величиной, а при вариации координат, при виртуальных перемещениях время рассматривают как постоянный параметр. Таким образом,

$$\mathrm{d}f(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

и

$$\delta f(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z.$$

Из сопоставления этих двух равенств следует, что изохронные вариации функции $f(x, y, z, t)$ вычисляют по тому же правилу, что и дифференциалы, но при фиксированном значении t. Отсюда становится ясным и различие между воображаемым виртуальным перемещением (происходящим как бы при остановившемся времени) и действительным перемещением, происходящим с течением времени под действием приложенных сил и реакций наложенных связей.

Если к точке приложена сила $\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$, то, сообщив точке виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$, можно подсчитать элементарную работу этой силы на виртуальном перемещении точки. Ее обозначают δA и иногда коротко называют *виртуальной работой:*

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z. \qquad (133$$

Для производства виртуальной работы не требуется ни времени, ни затраты энергии. Виртуальная работа является воображаемым абстрактным понятием, но очень важным и удобным в научных и технических изысканиях. Это понятие играет большую роль в аналитической механике. На нем построена аналитическая статика, где рассматривается равновесие не только твердого тела, но и изменяемой механической системы.

Если механическая система находится в равновесии, то при любом виртуальном перемещении системы сумма работ всех активных сил равна нулю: $\Sigma\delta A^{a}=0$.

П р и н ц и п в и р т у а л ь н ы х п е р е м е щ е н и й п р и р а в н о в е с и и с и с т е м ы. Пусть какая-либо механическая система находится в равновесии, т. е. все точки системы находятся в равновесии под действием активных сил и идеальных реакций. Покажем, что в этой системе сумма элементарных работ всех активных сил на всяком виртуальном перемещении равна нулю.

Рассмотрим какую-либо одну из точек этой системы. Точка находится в равновесии под действием активных сил, равнодействующую которых обозначим $\vec{F}^{a}$, и идеальных связей, равнодействующую реакций которых обозначим $\vec{F}^{r}$. Так как точка находится в равновесии, то равнодействующая всех приложенных к ней сил равна нулю:

$$\vec{F}^{a}+\vec{F}^{r}=0.$$

Известно, что работа равнодействующей равна сумме работ составляющих. А так как равнодействующая всех сил, приложенных к взятой точке, равна нулю, то, следовательно, будет равна нулю и сумма элементарных работ всех приложенных к точке активных и реактивных сил, если сообщим этой точке какое-либо виртуальное перемещение.

Точка выбрана произвольно и сказанное относится ко всем точкам механической системы.

Дадим теперь механической системе какое-либо виртуальное перемещение. Это перемещение (как всякое виртуальное перемещение) выводит систему из данного положения, но не нарушает связей. Как доказано, сумма работ всех активных сил системы и работ всех идеальных реакций на этом виртуальном перемещении равна нулю:

$$\sum\delta A_{k}^{a}+\sum\delta A_{k}^{r}=0, \text{ где } k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Но вторая сумма этого равенства тождественно равна нулю*, потому что связи идеальные. Следовательно, равна нулю и первая сумма:

$$\sum\delta A_{k}^{a}=0,\quad k=1,2,\ \ldots,\ n. \qquad (134)$$

Это равенство выражает *принцип виртуальных перемещений:* для того чтобы механическая система в некотором положении находилась в равновесии, необходимо, чтобы при любом виртуальном перемещении сумма элементарных работ всех активных сил равня-

* Идеальными связями мы называем такие, при которых сумма виртуальных работ их реакций равна нулю.

лась нулю *. Изучение равновесия механических систем методом виртуальных перемещений составляет предмет аналитической статики.

При решении задач статики по принципу виртуальных перемещений удобно определять элементарную работу по формуле (133); тогда условие (134) принимает вид

$$\sum (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{135}$$

где X_k, Y_k, Z_k — гроекции активных сил, приложенных к точке K.

Это уравнение называют *общим уравнением статики.*

Задача № 35 (М). Однородный стержень AB (рис. 101) длиной $2l$ и весом P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце A стержня. Он опирается на однородный стержень CD той же длины $2l$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину E. Точки A и E лежат на одной вертикали на расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить угол φ, образуемый стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.

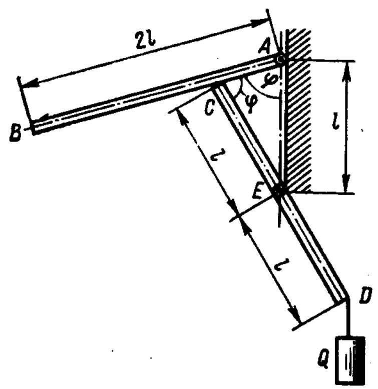


Рис. 101

Решение. В рассматриваемой системе только три активные силы: P, P и $2P$. Все силы вертикальны и при равновесии удовлетворяется равенство (135), которое принимает вид $\sum\limits_1^3 Y \delta y = 0$. Здесь Y_1, Y_2 и Y_3 — проекции активных сил на ось ординат, направленную от точки A вертикально вверх, а δy_1, δy_2 и δy_3 — вариации ординат точек приложения сил. Определим эти ординаты из чертежа:

$$y_1 = -l \cos \varphi; \ y_2 = -l; \ y_3 = -l - l \cos (180 - 2\varphi) = -l + l \cos 2\varphi.$$

Проварьируем эти величины

$$\delta y_1 = l \sin \varphi \delta \varphi; \ \delta y_2 = 0; \ \delta y_3 = -2l \sin 2\varphi \delta \varphi.$$

Подставляя в выражение (135), приходим к уравнению

$$-Pl \sin \varphi \delta \varphi + 4Pl \sin 2\varphi \delta \varphi = 0 \ \text{или} \ -\sin \varphi + 4 \sin 2\varphi = 0.$$

Принимая во внимание, что $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, получаем ответ.

Ответ. $\cos \varphi = 1/8$.

Задача № 36. (№ 18, *Бутенин Н. В.* Введение в аналитическую механику, М., Наука, 1971). При каком соотношении между весами P_1, P_2, P_3 и P_4 грузов A, B, C и D система, изображенная на рис. 102, будет находиться в равновесии? Нить невесома и нерастяжима, трением пренебречь.

---

* Различные доказательства необходимости и достаточности этого принципа см.: *Кирпичев В. А.* Беседы о механике. ГТТИ, М., 1933; *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика. М., Наука, 1973.

Решение. Пусть длины s_1, x_2, x_3 и s_4 определяют положения грузов A, B, C и D и пусть также каждый груз получит виртуальное перемещение. Возьмем сумму виртуальных работ всех активных сил системы, т. е. в данном случае сил тяжести:

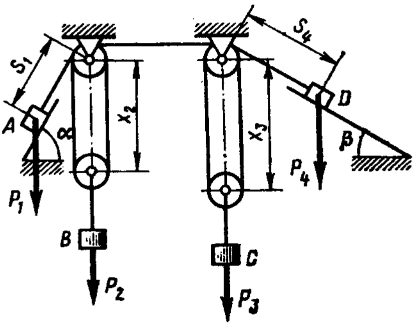


Рис. 102

$$\sum_{k=1}^{k=4} \delta A_k = P_1 \sin \alpha \delta s_1 + P_2 \delta x_2 + P_3 \delta x_3 + P_4 \sin \beta \delta s_4 = 0.$$

Из условия нерастяжимости нити имеем

$$s_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_4 = \text{const}.$$

Отсюда

$$\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3 + \delta s_4 = 0.$$

Этим соотношением четыре вариации связаны между собой, а потому только трем из них можно давать независимые друг от друга значения, например трем первым, а четвертая определится из полученного соотношения

$$\delta s_4 = -(\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3).$$

Подставим значение δs_4 в уравнение равновесия

$$(P_1 \sin \alpha - P_4 \sin \beta)\, \delta s_1 + (P_2 - 2P_4 \sin \beta)\, \delta x_2 + (P_3 - 2P_4 \sin \beta)\, \delta x_3 = 0.$$

Вариации δs_1, δx_2 и δx_3 независимые величины и могут принимать различные значения, а потому написанное равенство может тождественно равняться нулю только при условии, что равны нулю коэффициенты при вариациях. Приравнивая каждую из скобок нулю, найдем ответ.

Ответ. $P_2 = P_3 = 2P_4 \sin \beta$; $P_1 \sin \alpha = P_4 \sin \beta$.

Мощность силы

Величину, характеризующую быстроту приращения работы силы и выражающуюся отношением элементарной работы к элементу времени, называют мощностью силы: $N = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$.

Фактическая работа силы на действительном перемещении всегда происходит с течением времени. Одну и ту же работу можно произвести за различное время. Величину, характеризующую быстроту приращения работы, называют *мощностью силы* N. Разделив произведенную силу работы на время, в течение которого эта работа произведена, получим значение *средней мощности силы*

$$N = |A|/t.$$

В этом случае говорят, хотя и несколько нечетко, что средняя мощность — это работа в единицу времени. При таком определении получается, что мощность является работой, чего не может быть, так как мощность имеет свою размерность. В физической системе единиц

$$[N]_{ф} = L^2M^1T^{-3}.$$

Единицей мощности в СИ является *ватт* [Вт] *. Это мощность силы, производящей работу в 1 Дж за 1 с. На практике часто употребляют единицу мощности киловатт (кВт): 1 кВт=1000 Вт= =102 кгс·м/с.

В технической системе единиц

$$[N]_т = L^1F^1T^{-1}.$$

В технической системе в качестве единицы мощности силы обычно применяют кгс·м/с. Употребляют также другую единицу мощности, называемую лошадиной силой **,

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кгс·м/с} = 736 \text{ Вт}.$$

Чем меньше промежуток времени, за который определена средняя мощность силы, тем ближе она соответствует мощности в данное мгновение, которую определим в пределе, если будем уменьшать промежуток времени, сохраняя начало этого промежутка

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta A/\Delta t = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t. \qquad (136)$$

Таким образом, ***мощность силы*** выражают отношением элементарной работы к элементу времени.

При некоторых частных выражениях работы мощность можно определить по другим формулам. Так, например, если сила направлена по скорости, то $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}s$, и, подставляя в (136), найдем

$$N = Fv, \qquad (137)$$

т. е. мощность можно выразить произведением силы на скорость. При езде на автомобиле по ровной хорошей дороге, где нужно получить большую скорость, но не надо преодолевать большие сопротивления, включают высшие передачи, а при подъеме или на плохой дороге, где нужно развить при полной мощности возможно большую силу тяги, хотя бы за счет потери скорости, включают низшие передачи.

При вращательном движении тела подставим вместо $\mathrm{d}A$ его выражение из формулы (131)

$$N = M\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = M\omega. \qquad (137')$$

Итак, мощность выражается произведением вращающего момента на угловую скорость.

Экономическая эффективность машины определяется ее коэффициентом полезного действия.

Коэффициент полезного действия. Силы, действующие в механических системах и, в частности, в машинах, можно подразделить на движущие силы, работа которых имеет положительный знак ($A_{дв}>0$), и силы сопротивления, работа которых отрицательна ($A_{сопр}<0$). Силы сопротивления в свою очередь можно подразделить на силы вредного сопротивления и

---

* Принято на II Международном конгрессе электриков в 1889 г.

** Единица мощности «лошадиная сила» введена Джемсом Уаттом.

на силы полезного сопротивления, для преодоления которых и предназначена машина и которые можно назвать производственным сопротивлением ($A_{сопр} = A_{вр} + A_{п.с}$). Отношение абсолютной величины работы сил производственных сопротивлений к работе всех движущих сил при установившемся движении называют механическим *коэффициентом полезного действия* (КПД):

$$КПД = |A_{п.с}|/A_{дв}. \qquad (138)$$

Размерность КПД равна единице (отвлеченное число). При всякой работе неизбежны потери энергии, следовательно, в (138) числитель всегда меньше знаменателя и $0 < КПД < 1$.

КПД служит мерой доброкачественности машины, и чтобы определить полезную работу, надо работу движущих сил помножить на КПД. Техническая мысль постоянно направлена на создание машин с высоким КПД. Так, например, КПД паровых машин колеблется от 0,5 до 0,7, и паровые машины вытесняются более экономичными. Паровозы повсюду заменены тепловозами и электровозами. Теперь почти не осталось судов с гребными колесами, они заменены винтовыми, так как КПД водяного колеса в два-три раза ниже КПД винта.

Современный уровень механизации требует огромного потребления энергии в народном хозяйстве, поэтому даже сотые доли КПД машин и агрегатов соответствуют многим тысячам тонн расхода топлива или кВт·ч электроэнергии.

Глава VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 31. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

В динамике изучают механическое движение материальных объектов в связи с приложенными к ним силами.

Предмет динамики. При изучении кинематики были получены необходимые сведения лишь о геометрических свойствах движения, потому что кинематика рассматривает механическое движение без учета сил, приложенных к движущимся объектам. Перейдя затем к изучению кинетики, мы сначала подробно ознакомились с общими основными законами механики, ввели понятия массы и силы, а потом, в статике, изучали системы сил, их эквивалентность и, в частности, равновесие механических систем, покой тел, рассматривая его в связи с силами, приложенными к этим телам.

Теперь предстоит изучать механическое движение в комплексе с силами, приложенными к движущимся объектам, в зависимости от этих сил. Нужно решать вопрос об определении векторов сил, под действием которых данный материальный объект (материальная точка, твердое тело или другая механическая система) совершает свое заданное движение, или же определить движение, которое будет совершать этот материальный объект, если приложить к нему те или иные заданные силы. Этими вопросами занимается *динамика* * — важнейшее подразделение кинетики, в котором изучают движение в связи с силами, приложенными к движущимся объектам.

Основными задачами динамики являются: 1) по заданному движению определить действующие силы; 2) по заданным силам определить движение.

Прямая и обратная задачи динамики. Перед динамикой стоят две основные задачи: 1) по движению материального объекта определить силы, производящие это движение. Такую задачу называют *первой основной задачей динамики*;

2) вторая задача — обратная по отношению к первой, поэтому ее называют *второй основной задачей динамики*: даны силы, действующие на данный материальный объект; требуется определить движение этого объекта под действием данных сил.

Наиболее просты с механической стороны эти задачи для одной материальной точки, хотя и здесь иногда встречаются большие трудности математического характера.

Пусть точка M массой m находится под действием сил, представленных в мгновение t векторами $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ или их равнодействующей $\vec{F}$. Согласно основному закону динамики ускорение, получаемое точкой M от действия сил, направлено по силе и пропорционально ей:

$$m\vec{a}=\vec{F}.$$

Если решают первую основную задачу динамики точки и положение точки определено в векторной форме, т. е. дан радиус-вектор $\vec{r}$ как некоторая векторная функция времени $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то надо определить по (18′) ускорение $\vec{a}$, выражающееся второй производной от радиуса-вектора точки по времени t, и умножить его на массу точки m. Тогда получим следующее выражение основного закона динамики:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}, \qquad (139)$$

где правая часть представляет искомую силу.

Если же решают вторую основную задачу динамики точки и задан вектор силы, но требуется определить радиус-вектор как функцию $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то для решения задачи нужно интегрировать уравнение (139).

Значительно проще решать такие задачи не в векторной, а в координатной форме.

* Название «динамика» введено Лейбницем (1690).

§ 32. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Все основные теоремы динамики точки могут быть выведены из трех дифференциальных уравнений движения материальной точки в прямоугольных координатах: $m\ddot{x}=X$; $m\ddot{y}=Y$; $m\ddot{z}=Z$.

Дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных координатах. Пусть движение точки M задано в прямоугольных координатах кинематическими уравнениями $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$. Преобразуем выражение (139) основного закона динамики. Для этого определим проекции на оси координат ускорения $\vec{a}$ и силы $\vec{F}$. Направляющие косинусы ускорения [формулы (30)] являются вместе с тем и направляющими косинусами силы, так как направление ускорения совпадает с направлением силы. Умножая обе части равенства $ma=F$ на $\cos\alpha_a=a_x/a$, получим

$$ma_x=F\cos\alpha_a.$$

Но согласно выражению (28) $a_x=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. Подставляем это значение и, пользуясь для проекции силы на ось абсцисс (и аналогично для проекций на оси y и z) знакомым по статике обозначением, получим

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=X,\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y,\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=Z} \qquad (140)$$

или если обозначить вторые производные по времени двумя точками, то

$$m\ddot{x}=X,\ m\ddot{y}=Y,\ m\ddot{z}=Z. \qquad (140')$$

Система трех дифференциальных уравнений (140) второго порядка эквивалентна системе шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=X,\ m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=Y,\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=Z;\\ &v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

Уравнения (140) или (141) называют *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в прямоугольных координатах.*

Из уравнений движения выведем все теоремы динамики. Они дают возможность решить и обе основные задачи динамики точки. В первой задаче, когда кинематические уравнения движения (5) даны, решение сводится к дифференцированию этих уравнений: умножив на массу вторую производную от координаты по времени, получим проекцию силы. В обратной задаче, когда заданы проекции силы X, Y и Z, а нужно определить координаты точки x, y и z

как функции времени, решение сводится к интегрированию трех совместных дифференциальных уравнений, где независимым переменным является время.

Три совместных дифференциальных уравнения (140) второго порядка определяют координаты x, y и z в функции времени t. Если движущаяся точка M совершенно свободна, то приложенные к ней силы могут быть функциями ее координат x, y и z, проекций ее скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ и времени: $F=F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$.

Проинтегрировать их в общем виде невозможно, но при некоторых видах функции F эти интегралы могут быть получены. В очень многих случаях вычисления возможно проводить на интегрирующих машинах.

При интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки появляется шесть постоянных интегрирования, которые при решении каждой задачи должны быть определены из начальных условий.

П о с т о я н н ы е   и н т е г р и р о в а н и я. Общие интегралы дифференциальных уравнений движения материальной точки содержат шесть постоянных интегрирования: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Эти постоянные величины зависят от условий задачи, и в каждой частной задаче, при решении которой приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения, постоянные интегрирования должны быть определены из начальных условий. Если заданы положение и скорость движущейся точки для какого-либо мгновения $t=t_0$ (t_0 может быть равным или не равным нулю), то нужно определить постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6 таким образом, чтобы при $t=t_0$ координаты x, y и z получили заданные значения x_0, y_0 и z_0 и производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ — заданные значения v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz}.

Допускают, что данным начальным условиям при заданной массе m и силе F соответствует только одно движение. В справедливости этого положения убедимся на всех примерах, которые будем рассматривать, хотя это положение имеет и математическое доказательство. Поэтому, если найдено какое-либо движение точки M, удовлетворяющее уравнениям (140) и начальным данным, то, следовательно, определено именно то движение, которое искали. Например, камень, брошенный с некоторой начальной скоростью под углом к горизонту, описывает параболу под действием силы тяжести. Однако движения камня зависят не только от действующих на него сил, но и от начальных данных. Если бы начальная скорость, сообщенная камню, или начальные координаты были бы иными, то иным было бы движение камня. Оно по-прежнему было бы равномерным по горизонтали и равнопеременным по вертикали, траекторией камня оставалась бы парабола, но она была бы иной и иначе расположенной, иной была бы и точка падения камня на землю. Значения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 должны быть даны в условиях задачи. Эти постоянные величины вовсе не являются произвольными. Постоянные интегрирования, являясь первоначальными значениями переменных, придают решению каждой задачи механики всю ту общность, какую она способна иметь.

В частном случае, при движении точки в одной плоскости можно принять эту плоскость за плоскость xOy, описать движение точки системой первых двух уравнений движения (140), третье же дифференциальное уравнение становится лишним. При интегрировании такой системы появятся всего четыре постоянных интегрирования.

В еще более частном случае, когда сила имеет постоянное направление, а начальная скорость направлена по силе или равна нулю, движение точки прямолинейно. Направив ось Ox по этой траектории, обойдемся первым из уравнений (140), которое и нужно интегрировать, чтобы получить закон искомого движения точки. При этом нельзя забывать, что под X понимается не сила, а ее проекция $F\cos\alpha$. Если $\alpha=0$, то сила направлена в сторону положительной оси Ox, и тогда $X>0$. Если же $\alpha=\pi$, то сила направлена в сторону отрицательного направления оси Ox, тогда $X<0$.

Движение точки можно описать в проекциях на оси естественного трехгранника двумя уравнениями:

$$m\frac{dv}{dt}=F_T;\ m\frac{v^2}{\rho}=F_N.$$

Дифференциальные уравнения движения точки в форме Эйлера. В кинематике изучались три способа определения движения точки: 1) векторный, 2) в прямоугольных координатах, 3) естественный. Соответственно и в динамике можно определить движение точки по заданным силам (или силы по заданному движению) векторным уравнением (139), в проекциях на прямоугольные оси — уравнениями (140), а также естественными уравнениями движения. Из многих форм уравнений движения эти три применяют наиболее часто.

Проецируя ускорение на оси естественного трехгранника, находим (см. § 7), что проекции ускорения на касательную a_T, на главную нормаль a_N и на бинормаль a_b выражаются следующими формулами:

$$a_T=dv/dt,\ a_N=v^2/\rho,\ a_b=0,$$

и вместо трех составляющих полное ускорение имеет только две. Но сила всегда направлена по ускорению точки, а следовательно, проецируя силу на оси естественного трехгранника, и здесь получим только две составляющие (F_T — на касательную и F_N — на главную нормаль) и определим движение точки только двумя уравнениями *:

$$m\frac{dv}{dt}=F_T,\ m\frac{v^2}{\rho}=F_N. \qquad (142)$$

* Эти уравнения называют дифференциальными уравнениями движения материальной точки в форме Эйлера. Они даны Эйлером в 1736 г.

Движение точки в плоскости можно описать двумя уравнениями в полярных координатах.

Уравнение движения точки в полярных координатах. В целом ряде динамических задач, в частности в задачах небесной механики, удобно исследовать движение точки в полярных координатах. Чтобы выразить в полярных координатах ускорение точки M, представим движение точки как сложное, состоящее из относительного прямолинейного движения вдоль полярного радиуса-вектора $r = OM$ и переносного вращательного вместе с полярным радиусом-вектором (рис. 103, *а*, *б*) и заполним схему (74)

$$a - \begin{cases} a_r \begin{cases} a_{rT} = \ddot{r} \\ a_{rN} = 0 \end{cases} \\ a_e \begin{cases} a_{eT} = r\ddot{\varphi} \\ a_{eN} = r\dot{\varphi}^2 \end{cases} \\ a_C = 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{cases}$$

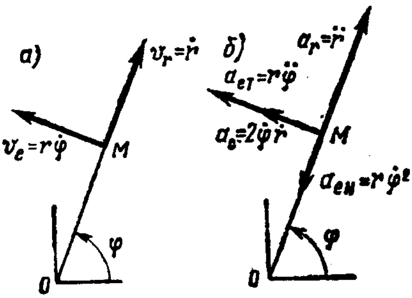


Рис. 103

Радиальное ускорение a_{rad}, т. е. проекция полного ускорения на полярный радиус-вектор, равно разности относительного тангенциального и переносного центростремительного ускорений:

$$a_{rad} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Трансверсальным ускорением a_φ называют проекцию полного ускорения a на направление, перпендикулярное радиальному. Оно равно сумме переносного тангенциального и кориолисова ускорений:

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Помножим на массу эти проекции ускорения точки и приравняв проекциям силы, напишем дифференциальные уравнения движения материальной точки в полярных координатах:

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_{rad}, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

Движение материальной системы, состоящей из n точек, может быть определено системой $3n$ дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения движения точек материальной системы. Пусть имеется материальная система, состоящая из свободных материальных точек. Для каждой из этих точек можно написать по три дифференциальных уравнения движения:

$$m_k\ddot{x}_k = X_k, \quad m_k\ddot{y}_k = Y_k, \quad m_k\ddot{z}_z = Z_k,$$

где m_k — масса k-й точки; $\ddot{x}_k$, $\ddot{y}_k$ и $\ddot{z}_k$ — проекции ускорения точки; X_k, Y_k и Z_k — проекции равнодействующей всех сил, приложенных к этой точке ($k=1, 2, 3, \dots, n$).

Далеко не всегда действующие силы бывают известны. Обычно остаются неизвестными внутренние силы системы, приложенные к ее точкам, т. е. силы взаимодействия между точками этой системы. Для вывода некоторых общих теорем динамики и при решении некоторых частных задач бывает удобным выделить внутренние силы уже при написании дифференциальных уравнений движения. Внешние силы обозначают F^e (от латинского слова exterior — внешний), а внутренние F^i (от латинского interior — внутренний).

Рассмотрим сначала одну из материальных точек системы, например точку с индексом 1 ($k=1$). Все силы, приложенные к этой точке, подразделяют на внешние и внутренние. Сложив все внешние силы, действующие на эту точку, получим равнодействующую $F^e{}_1$, а сложив все внутренние силы, получим равнодействующую внутренних сил $F^i{}_1$. Проекции этих сил обозначим $X^e{}_1$, $Y^e{}_1$, $Z^e{}_1$ и $X^i{}_1$, $Y^i{}_1$, $Z^i{}_1$.

Аналогично поступим с силами, приложенными к остальным точкам, и заменим в написанных выше уравнениях проекции равнодействующей X_k суммой $X_k{}^e+X_k{}^i$; то же сделаем по двум другим осям. Тогда дифференциальные уравнения примут вид

$$m_k\ddot{x}_k=X^e_k+X^i_k,\quad m_k\ddot{y}_k=Y^e_k+Y^i_k,\quad m_k\ddot{z}_k=Z^e_k+Z^i_k, \qquad (144)$$

где $k=1, 2, \dots, n$.

Следовательно, движение свободной механической системы, состоящей из n материальных точек, определяется системой $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка.

Если на систему наложены связи (система не свободна), выражающие некоторую зависимость между координатами точек механической системы, то можно сократить число дифференциальных уравнений движения, о чем будет подробнее сказано в § 41. В ряде случаев оказывается целесообразным классифицировать все силы, действующие на материальные точки механической системы, на две категории по иному признаку, а именно на активные силы и реакции связей. Как уже было сказано, реакции связей часто зависят от движения системы и не могут быть найдены, пока не определено движение системы. Обозначая проекции равнодействующей всех активных сил, действующих на k-ю точку, $X_k{}^а$, $Y_k{}^а$ и $Z_k{}^а$, а проекции равнодействующей всех реакций связей, приложенных к k-й точке, $X_k{}^r$, $Y_k{}^r$ и $Z_k{}^r$, получим систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_k\ddot{x}_k=X^а_k+X^r_k,\quad m_k\ddot{y}_k=Y^а_k+Y^r_k,\quad m_k\ddot{z}_k=Z^а_k+Z^r_k, \qquad (145)$$

где $k=1, 2, \dots, n$.

Во всем курсе (если это специально не оговорено) рассмотрены только свободные механические системы и механические системы с идеальными связями. Понятие идеальных связей уже встречалось в статике (см. § 21) и будет уточнено в динамике (§§ 40, 41). В дальнейшем из дифференциальных уравнений (144) и (145) выведем общие теоремы динамики таких материальных систем.

Решение многих проблем по динамике механических систем сопряжено с большими трудностями математического характера. Интегрирующие машины в очень многих случаях дают возможность преодолеть эти трудности.

Кориолисовыми силами инерции называют две векторные величины, имеющие размерность силы и добавляемые к силам, приложенным к материальной частице, для определения ее относительного ускорения.

Дифференциальные уравнения относительного движения. Все дифференциальные уравнения движения, которые описаны в этой главе, относятся к абсолютному движению, т. е. к движению по отношению к инерциальной системе отсчета. Для написания дифференциальных уравнений движения точки (или частицы) относительно подвижных осей подставим в основное уравнение динамики (77) вместо абсолютного ускорения точки его выражение (73)

$$m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C) = \vec{F},$$

откуда

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_C.$$

Векторную величину

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e, \tag{146}$$

имеющую размерность силы, равную произведению массы материальной частицы на ее переносное ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют *переносной силой инерции Кориолиса.*

Векторную величину

$$\vec{\Phi}_C = -m\vec{a}_C, \tag{147}$$

равную произведению массы материальной частицы на ее кориолисово ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют *поворотной силой инерции Кориолиса* *.

С учетом принятых обозначений получаем

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_C \tag{148}$$

* Обе эти силы предложены Г. Г. Кориолисом (1831) и их часто называют коротко: переносная кориолисова сила и поворотная кориолисова сила. Часто их называют силами инерции Эйлера.

или в проекциях на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_r &= X + \Phi_{ex} + \Phi_{Cx}, \\ m\ddot{y}_r &= Y + \Phi_{ey} + \Phi_{Cy}, \\ m\ddot{z}_r &= Z + \Phi_{ez} + \Phi_{Cz}. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Таким образом, относительное движение материальной точки можно описать такими же (по форме) дифференциальными уравнениями, как и абсолютное, но к действующим на точку силам нужно прибавить две кориолисовы силы инерции: переносную и поворотную.

Эти величины следует отличать от даламберовых сил инерции (§ 39), введение которых позволяет решать задачи динамики методом статики.

Задача № 37. (М). Движение точки массой 2 г выражается уравнениями $x=3\cos 2\pi t$, $y=4\sin \pi t$, где t выражено в секундах. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

Решение. Задача относится к прямым задачам динамики: по данному движению точки надо определить действующую силу. Для ее решения продифференцируем дважды кинематические уравнения движения точки и, умножив на m найденные $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, получим X и Y. Кинематические уравнения движения известны. Дифференцируя дважды, находим

$$\ddot{x} = -4\pi^2 3\cos 2\pi t = -4\pi^2 x; \quad \ddot{y} = -4\pi^2 \sin \pi t = -\pi^2 y.$$

Умножая массу m на проекции ускорения, найдем проекции силы:

$$X = -8\pi^2 x = -78{,}88x; \quad Y = -2\pi^2 y = -19{,}72y.$$

Ответ. $X=0{,}0789x$ Н; $Y=-0{,}0197y$ Н.

Обратим внимание на одно обстоятельство, которое легко усмотреть в только что решенной задаче. Определяя силу по заданному движению материальной точки, мы нашли, что движение произведено силой, являющейся функцией координат точки. Но силу выразить можно и как функцию времени. В самом деле, продифференцировав дважды кинематические уравнения и умножив вторые производные на m, найдем

$$X = -12m\pi^2 \cos 2\pi t; \quad Y = -4m\pi^2 \sin \pi t.$$

Так, одно и то же движение может совершаться под действием различно выраженной силы.

Задача № 38. Из орудия, стоящего на высоте 30 м над уровнем моря (рис. 104), выпущен снаряд массой m кг со скоростью 1000 м/с под углом 30° к плоскости горизонта и под углом 60° к линии берега. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить точку, в которую упадет снаряд.

Решение. Единственной силой, действующей на снаряд во время полета, является его сила тяжести $G=mg$. По данной силе и по начальным данным (местоположение орудия и начальная скорость снаряда) надо определить движение снаряда и место его падения в море. Задача относится к обратным задачам динамики. Для ее решения надо составить и проинтегрировать дифференциальные уравнения движения снаряда.

Задачу будем решать в единицах СИ. Построим систему координат, взяв за начало точку O, находящуюся под орудием на уровне моря. Ось Ox направим горизонтально, перпендикулярно берегу моря, ось Oy — вдоль берега, а ось Oz — вертикально вверх.

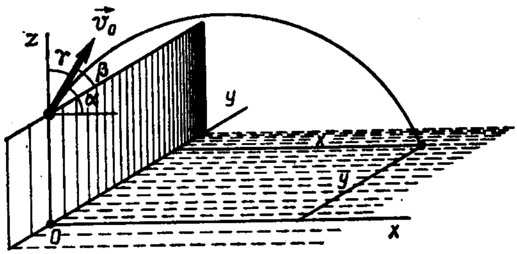


Рис. 104

Для составления дифференциальных уравнений движения надо знать проекции действующей силы на оси координат. На снаряд после вылета его из орудия действовала только одна сила тяжести $G=mg$, направленная по вертикали вниз. Проекции действующей силы

$$X=0;\ Y=0;\ Z=-G.$$

Дифференциальные уравнения движения снаряда напишем в виде (141)

$$m\frac{dv_x}{dt}=0;\ m\frac{dv_y}{dt}=0;\ m\frac{dv_z}{dt}=-G.$$

Сокращаем на m, разделяем переменные

$$dv_x=0;\ dv_y=0;\ dv_z=-g\ dt.$$

Интегрируя, находим

$$v_x=C_1;\ v_y=C_2;\ v_z=-gt+C_3.$$

Чтобы определить постоянные интегрирования, подставим вместо t нуль, а вместо проекций скорости — их начальные значения v_{0x}, v_{0y} и v_{0z}, соответствующие мгновению $t=0$. Получим

$$C_1=v_{0x};\ C_2=v_{0y};\ C_3=v_{0z}.$$

Таким образом, три первые постоянные интегрирования в задаче равны проекциям начальной скорости снаряда. Чтобы определить числовые значения этих проекций, надо знать направляющие косинусы начальной скорости. Снаряд был выпущен под углом 30° к плоскости горизонта, следовательно, угол γ начальной скорости с вертикалью равен 60°. Начальный угол β по условию задачи тоже равен 60°, $\cos\alpha$ определим из равенства единице суммы квадратов направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma={}^1/_2;\ \cos\alpha=\sqrt{2}/2.$$

Теперь нетрудно определить и проекции начальной скорости

$$v_{0x}=500\sqrt{2};\ v_{0y}=500;\ v_{0z}=500.$$

Получены числовые значения постоянных интегрирования

$$C_1=500\sqrt{2}=707;\ C_2=500;\ C_3=500.$$

Подставляя эти значения постоянных в уравнения и выражая проекции скоростей по формуле (15), получим три новых дифференциальных уравнения:

$$dx/dt = 707; \quad dy/dt = 500; \quad dz/dt = 500 - gt.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$x = 707t + C_4; \quad y = 500t + C_5; \quad z = 500t - gt^2/2 + C_6.$$

Для определения C_4, C_5 и C_6 подставим и в эти уравнения вместо t его частное значение 0, а вместо x, y и z — их частные значения x_0, y_0 и z_0:

$$C_4 = x_0; \quad C_5 = y_0; \quad C_6 = z_0.$$

При выбранной системе координат $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = +30$ м, следовательно, $C_4 = 0$; $C_5 = 0$; $C_6 = +30$.

Подставляя эти значения в уравнения, полученные после второго интегрирования, найдем кинематические уравнения движения снаряда

$$x = 707t; \quad y = 500t; \quad z = 30 + 500t - gt^2/2.$$

Чтобы определить точку, в которой снаряд упадет в море, надо знать продолжительность полета снаряда. Для этого приравняем нулю аппликату z, так как в мгновение, когда снаряд коснется моря, он будет находиться в плоскости xOy. Из уравнения $4{,}905t^2 - 500t - 30 = 0$ находим два значения: $t = 101{,}6$ с и $t = -0{,}06$ с. Второе значение отбрасываем, а первое подставляем в кинематические уравнения движения.

Ответ. $x = 71\,831$ м $= 71{,}8$ км; $y = 50\,800$ м $= 50{,}8$ км; $z = 0$.

Из этого примера видно, что движение точки зависит не только от действующих сил, но и от начальных данных. Если бы начальная скорость или начальные координаты были иными, то и движение снаряда отличалось бы от полученного. Значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$ определены для данной задачи, и при этих значениях постоянных может быть только одно найденное решение.

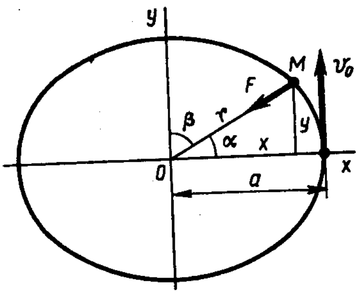


Рис. 105

Задача № 39. Найти плоскую траекторию точки M массой m, притягиваемой к неподвижному центру O с силой, пропорциональной расстоянию r и равной k^2mr при следующих начальных данных:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = a; \quad y_0 = 0; \quad v_{Ox} = 0; \quad v_{Oy} = v_0.$$

Решение. Задача относится к обратным задачам динамики: по заданной силе определить движение. Точка M описывает плоскую траекторию, и понадобятся только два уравнения движения.

Если в какое-либо мгновение t точка M имела координаты x и y и находилась от центра на расстоянии $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 105), то проекции силы на оси координат

$$X = -k^2mr\cos\alpha = -k^2mr(x/r) = -k^2mx;$$

$$Y = -k^2mr\cos\beta = -k^2mr(y/r) = -k^2my.$$

Дифференциальными уравнениями движения точки являются

$$m\frac{dv_x}{dt} = -k^2mx; \quad m\frac{dv_y}{dt} = -k^2my.$$

Сократим на m и умножим первое из уравнений на $v_x dt = dx$, а второе — на $v_y dt = dy$:

$$v_x\, dv_x = -k^2 x\, dx;\quad v_y\, d\, v_y = -k^2 y\, dy,$$

интегрируем и умножаем на 2

$$v_x^2 = -k^2 x^2 + C_1;\quad v_y^2 = -k^2 y^2 + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 подставляем в эти уравнения вместо переменных величин их начальные значения

$$0 = -k^2 a^2 + C_1;\quad v_0^2 = +C_2.$$

Значения постоянных вносим в уравнения, одновременно выражая v_x и v_y по формулам (15):

$$(dx/dt)^2 = k^2 (a^2 - x^2);\quad (dy/dt)^2 = k^2 (v_0^2/k^2 - y^2).$$

Извлекаем квадратные корни, разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = k \int dt + C_3,\quad \arcsin \frac{x}{a} = kt + C_3;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(v_0/k)^2 - y^2}} = k \int dt + C_4,\quad \arcsin \frac{ky}{v_0} = kt + C_4.$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 подставляем в эти уравнения вместо переменных t, x и y их начальные значения

$$\arcsin 1 = C_3;\quad \arcsin 0 = C_4.$$

Следовательно, $C_3 = \pi/2$; $C_4 = 0$. Эти значения постоянных интегрирования вносим в уравнения:

$$\arcsin x/a = kt + \pi/2;\quad \arcsin (k/v_0)\, y = kt,$$

откуда

$$x/a = \cos kt;\quad (k/v_0)\, y = \sin kt.$$

Получены кинематические уравнения движения (5) точки в декартовых координатах. Чтобы определить траекторию, надо из них исключить время. Возводя в квадрат и складывая, получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

Ответ. Эллипс с полуосями a и v_0/k.

Задача № 40. Маятник Борда для определения ускорения свободно падающих тел представляет собой латунный шарик массой 200 г, подвешенный на очень тонкой проволоке длиной 100 мм. При качании шарик в наинизшем положении имеет скорость 8 см/с. Определить натяжение проволоки в ее нижнем конце при наинизшем положении маятника.

Решение. В задаче применена физическая система единиц. Примем L в сантиметрах, M в граммах, T в секундах.

Задача относится к прямым задачам динамики. Чтобы по данному движению латунного шарика, принимаемого за материальную точку, определить действующую силу, напишем второе из естественных уравнений движения материальной точки (142). В наинизшем положении на шарик действует сила натяжения проволоки, проекцию которой T будем считать положительной, так как она направлена внутрь траектории, и сила тяжести $G=200\cdot 981$ дин, проекцию которой будем считать отрицательной:

$$mv^2/\rho = T - G,$$

подставляя числовые значения

$$200\frac{64}{100} = T - 196\,200,$$

получаем ответ.

Ответ. $T = 196\,328$ дин $= 1{,}96328$ Н.

§ 33. КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ *

К исследованию колебаний одной материальной точки могут быть сведены многие технические задачи.

В качестве примера составления и интегрирования дифференциальных уравнений движения рассмотрим прямолинейные колебания материальной точки. Еще совсем недавно изучение колебаний не входило в программу курсов теоретической механики высших учебных заведений. Но необходимость создания новых методов расчета всевозможных машин и различных сооружений, обладающих большой прочностью при небольшой массе, а также необходимость увеличения скоростей и производительности машин стимулировали быстрое развитие раздела динамики, называемого *теорией колебаний*.

С основами явлений колебаний можно ознакомиться на примере колебаний одной материальной точки. К задачам о вибрации точки могут быть непосредственно приведены многие практически важные технические задачи.

Точка, движущаяся по прямой, совершает под действием восстанавливающей силы гармоническое колебание.

Свободные колебания без сопротивления. Пусть точка M, масса которой равна m, притягивается к точке O силой F, пропорциональной расстоянию OM (рис. 106), а начальная скорость точки M направлена по прямой OM или равна нулю. В таком случае точка M будет двигаться по прямолинейной траектории, вдоль которой направим ось x. Начало координат возьмем в точке O (в равновесном положении). Сила F как бы стремится вернуть точку M в равновесное положение O, за что ее называют *восстанавливающей силой*. Примером такой силы могут служить сила упругости стержня, совершающего малые колебания, или равнодействующая сила тяжести G и натяжения T нити при малых колебаниях маят-

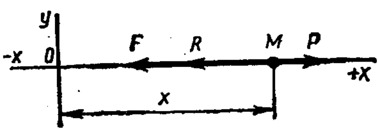


Рис. 106

* Если в рабочую программу включен параграф «Малые колебания системы» (§ 42), то параграф «Колебания материальной точки» (§ 33) можно опустить.

ника и т. п. Чем больше координата x, тем больше модуль этой силы. Вместе с тем сила (точнее говоря, ее проекция на ось Ox) по знаку всегда противоположна знаку координаты x. В самом деле, если точка M находится справа от начала координат O, то координата x положительна, а сила направлена в отрицательную сторону, и, наоборот, если координата x отрицательна, то восстанавливающая сила направлена в положительную сторону. Обозначив коэффициент пропорциональности между силой и расстоянием через c (причем $c>0$), выразим восстанавливающую силу формулой

$$F=-cx. \tag{150}$$

Напишем дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки M

$$m\ddot{x}=-cx.$$

Разделим все члены уравнения на массу m точки и введем обозначение

$$c/m=k^2. \tag{151}$$

Уравнение принимает вид

$$\ddot{x}+k^2x=0. \tag{152}$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования можно составить характеристическое уравнение

$$z^2+k^2=0.$$

Оба корня характеристического уравнения мнимые, следовательно, интеграл дифференциального уравнения (152)

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{153}$$

Этому уравнению придадим более удобный вид, для чего выразим постоянные интегрирования C_1 и C_2 через две другие постоянные величины A и β, однозначно связанные с C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1=A\sin\beta \text{ и } C_2=A\cos\beta. \tag{154}$$

Тогда

$$x=A\sin(kt+\beta). \tag{155}$$

Это уравнение является одним из важнейших уравнений в теории колебаний и описывает наиболее простое колебательное движение, называемое *гармоническим*. Еще в древности было известно, что если некоторая точка M' (рис. 107) равномерно движется по окружности радиусом $O'M'=A$ со скоростью kA, то проекция этой точки M на какую-либо ось Ox, лежащую в плоскости окружности, совершает гармонические колебания. Воспользуемся рис. 107, чтобы нагляднее ознакомить читателя с параметрами гармонического колебания.

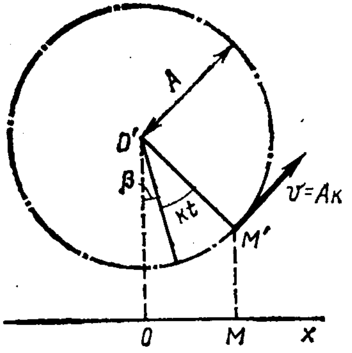


Рис. 107

Если точка M' опишет полную окружность, то точка M совершит одно *полное колебание*.

Время одного полного колебания точки M (или, что то же, время, в течение которого точка M' описывает одну полную окружность) называют *периодом* τ_0 *колебаний*.

Угловая скорость k, с которой поворачивается радиус-вектор $O'M'$ при равномерном движении точки M', равна *циклической*, *круговой* или *угловой частоте* колебаний точки M. Эту величину обычно коротко называют *частотой*, хотя, как будет видно из дальнейшего, оба понятия не вполне идентичны.

Период и угловая частота связаны простым соотношением, которое становится очевидным, если учесть, что τ_0 — это время в течение которого $O'M'$, вращаясь с угловой скоростью $\omega = k$, поворачивается на 2π:

$$\tau_0 = 2\pi/k \text{ и } k = 2\pi/\tau_0, \tag{156}$$

или с учетом равенства (151)

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{m/c}\,. \tag{157}$$

Период имеет размерность времени

$$|\tau| = \mathrm{T}^1.$$

Частота имеет размерность угловой скорости

$$|k| = \mathrm{T}^{-1}.$$

Из (156) видно, что круговая частота k равна числу полных колебаний, совершаемых в 2π с. *Частота* ν колебаний пропорциональна круговой (циклической, угловой) частоте k и равна $k/(2\pi)$.

В технике и в физике частоту обычно измеряют в герцах (Гц). 1 Гц — частота, равная одному полному колебанию (циклу) в секунду. Иначе говоря, *герц* есть частота такого периодического процесса, который повторяется каждую секунду. Обратите внимание на то, что частота и период гармонических колебаний зависят от массы точки и коэффициента c восстанавливающей силы и не зависят от начальных данных.

Максимальное отклонение A точки M от среднего (равновесного) положения O в ту или в другую сторону (или, что то же, радиус круговой траектории точки M') называют *амплитудой*. Амплитуду измеряют в единицах длины

$$[A]=L^1.$$

Аргумент синуса $(kt+\beta)$ называют *фазой колебания*, а β — *начальной фазой*. Физический смысл фазы колебания выявляется при сравнении двух колебаний с одинаковыми частотами, но с разными начальными фазами. Колебание с фазой $(kt+\beta)$ опережает колебание с фазой kt, а колебание с фазой $(kt-\beta)$ отстает от него (разумеется при положительном β).

Напомним, что A и β являются постоянными интегрирования, а следовательно, их определяют по начальным данным. Пусть в начальное мгновение $t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$. Продифференцировав (155) по времени, получим $\dot{x}=Ak\cos(kt+\beta)$ и, подставляя начальные значения $x_0=A\sin\beta$ и $\dot{x}_0=Ak\cos\beta$, получим

$$A=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/k)^2}. \qquad (158)$$

Из тех же равенств можно определить и начальную фазу $\operatorname{tg}\beta=k\dfrac{x_0}{\dot{x}_0}$. Амплитуда и начальная фаза зависят от частоты и от начальных данных.

Задача № 41 (*M*). Груз, вес которого 20 кН, подвешен на тросе (рис. 108). При равномерном спуске груза со скоростью $v=5$ м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса вследствие защемления троса в обойме блока. Пренебрегая весом троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $c=40$ кН/см.

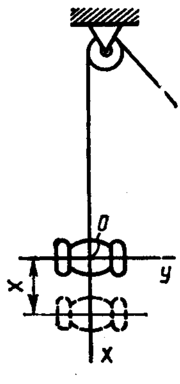


Рис. 108

Решение. Примем следующие единицы измерения: длина — в сантиметрах, время — в секундах, сила — в кН. Рассмотрим движение груза. На груз действуют две силы: вертикально вниз вес груза 20 кН; вертикально вверх — натяжение троса. Груз спускался равномерно, следовательно, до защемления натяжение троса равнялось весу груза. В этом равновесном положении его застала авария. После защемления троса груз не остановился мгновенно. В это мгновение он имел скорость 5 м/с (500 см/с) и продолжал опускаться. Но по мере опускания груза сила натяжения троса возрастала от своего начального значения 20 кН.

Ускорение груза направлено по силе и пропорционально ей. Поэтому опускание груза было замедленным и в некоторое мгновение скорость груза, перейдя через нуль, стала направленной вверх, в направлении силы и ускорения. Движение вверх было ускоренным, но по мере того как груз поднимался, растяжение троса, а следовательно, и его натяжение уменьшались, а потому уменьшалось ускорение груза, скорость же продолжала увеличиваться до момента прохождения через равновесное положение. После этого груз, набрав скорость, продолжал подниматься, но замедленно, так как натяжение троса стало меньше веса и равнодействующая приложенных к грузу сил была направлена вниз. Затем скорость стала равной нулю, груз начал падать вниз, натяжение троса возрастало и движение повторялось снова неопределенное количество раз.

Начало O системы отсчета выберем обязательно в равновесном положении груза, относительно которого происходят колебания, направив ось Ox вертикально вниз. В начальное мгновение (в момент защемления троса) было: $x_0=0$; $\dot{x}_0=500$ см/с. Квадрат круговой частоты определим по (156). После подстановки в формулу $k^2=c/m$ имеем $k^2=40\cdot981/20$. Определим амплитуду по формуле (158):

$$A=\sqrt{500^2/196^2}=11,28 \text{ см}.$$

Таким образом, при равновесном положении груза натяжение троса равно 20 кН. Когда же груз опустился на одну амплитуду, то трос растянулся еще на 11,28 см, а при жесткости троса $c=40$ кН/см натяжение его увеличилось еще на 451,2 кН.

Ответ. 471 кН.

В случае малого сопротивления свободные колебания затухают, а в случае большого не возникают.

Свободные колебания точки при сопротивлении. Под действием восстанавливающей силы $F=-cx$ точка совершает гармонические колебания, которые, раз возникнув, повторяются до тех пор, пока их не прекратит или не изменит какая-либо внешняя сила. Однако в действительности эти колебания не происходят вечно, амплитуда их постепенно уменьшается, колебания «затухают» и прекращаются. Затухание колебаний происходит от того, что помимо восстанавливающей силы всегда имеются всевозможные диссипативные силы (сопротивление среды, силы трения и пр.). Эти силы многочисленны и разнообразны и невозможно их точно выразить математически. Силу сопротивления воздуха при больших скоростях движущихся тел принимают пропорциональной квадрату скорости тела. Но скорости тел при колебательных движениях обычно не бывают столь большими, и силу сопротивления колебаниям точки можно считать пропорциональной первой степени скорости точки

$$R=-b\dot{x}. \qquad (159)$$

Напишем дифференциальное уравнение движения точки, учитывая также и эту силу сопротивления

$$m\ddot{x}=-cx-b\dot{x}.$$

Разделим все члены уравнения на массу точки и введем обозначение

$$b/m=2n; \qquad (160)$$

перенесем все члены влево

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0. \qquad (161)$$

Корни характеристического уравнения $z^2+2nz+k^2=0$

$$z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2} \qquad (162)$$

зависят от коэффициентов n и k. Условие $n<k$ соответствует малому сопротивлению, а условие $n\geqslant k$ — большому.

В случае *малого сопротивления* корни характеристического уравнения комплексные

$$z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2-n^2},$$

и согласно теории дифференциальных уравнений напишем общее решение дифференциального уравнения

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right), \tag{163}$$

или, если воспользоваться соотношением (154),

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right). \tag{164}$$

Множитель e^{-nt} уменьшается с течением времени, что указывает на затухание колебаний. Отношение величин двух последовательных амплитудных отклонений точки от равновесного положения называют *коэффициентом затухания* колебаний точки

$$\psi = e^{n\tau_1/2}, \tag{165}$$

а его натуральный логарифм

$$\ln\psi = n\tau_1/2 \tag{166}$$

называют *логарифмическим декрементом колебаний** точки. В этих формулах

$$\tau_1 = 2\pi/\sqrt{k^2-n^2} \tag{167}$$

— период затухающих колебаний. От действия силы сопротивления период колебаний несколько увеличился ($\tau_1 > \tau_0$), но незначительно. Так, если $n=k/4$, то $\tau_1 = 1{,}03\,\tau$, если $n=k/2$, то $\tau_1 = 1{,}15\,\tau$, и если $n=3k/4$, то $\tau_1 = 1{,}51\,\tau$.

Но если коэффициент n равен коэффициенту k или больше его (случай большого сопротивления), то точка, выведенная из состояния равновесия, не совершает колебаний. При $n>k$ корни характеристического уравнения (162) получаются действительными числами и решение дифференциального уравнения (161) согласно теории дифференциальных уравнений имеет вид

$$x = C_1 e^{\left(-n+\sqrt{n^2-k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-n-\sqrt{n^2-k^2}\right)t}. \tag{168}$$

Движение, описываемое этим уравнением, является не колебательным, а *апериодическим*. При возрастании времени t точка стремится к своему равновесному положению $x=0$, приближаясь к нему асимптотически.

---

* От латинского слова decrementum — убавление. Поэтому иногда встречающееся выражение «декремент затухания» совершенно неправильно.

Вынужденные колебания не угасают и происходят с частотой возмущающей силы.

Вынужденные колебания точки. Пусть на точку M, выведенную из равновесного состояния и совершающую колебания по оси Ox, кроме восстанавливающей силы $F=-cx$, зависящей от положения точки M на оси Ox, и кроме силы сопротивления $R=-b\dot{x}$, пропорциональной скорости $\dot{x}$ точки M, действует еще сила, зависящая от времени, называемая *возмущающей силой*. Эта сила направлена по оси Ox; она обычно бывает периодической и примем ее (точнее выражаясь, ее проекцию на оси Ox) равной

$$P=H\sin pt, \tag{169}$$

где H — максимальное значение модуля силы P; p — частота ее изменения.

Напишем дифференциальное уравнение движения точки M под действием этих сил, перенеся члены, содержащие x и его производные, в левую часть:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin pt, \tag{170}$$

где

$$h=H/m. \tag{171}$$

В отличие от только что проинтегрированного дифференциального уравнения (161) это уравнение имеет правую часть и его решение складывается из общего решения (164), соответствующего однородного уравнения (161) и какого-либо частного решения уравнения (170). Неоднородное уравнение (170) подробно проинтегрировано на с. 311 и его общим решением (при $p\neq k$ и $n<k$ является

$$x=Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right)+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt-\delta). \tag{172}$$

Колебания точки M складываются из свободных затухающих колебаний, описываемых первым членом правой части формулы (172), и гармонических вынужденных колебаний, описываемых вторым членом формулы, происходящих с частотой изменения возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний зависит не только от максимального значения H возмущающей силы, но (гораздо более) от частоты p. При частоте p возмужающей силы, близкой к частоте собственных колебаний, амплитуда может достигать очень большой величины. В этом случае возникает *резонанс*.

Все сказанное здесь относительно прямолинейных колебаний материальной точки полностью соответствует малым колебаниям материальной системы с одной степенью свободы.

Глава IX

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 34. ДВЕ МЕРЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

«Мы находим, что механическое движение действительно обладает двоякой мерой, но убеждаемся также, что каждая из этих мер имеет силу для весьма определенно ограниченного круга явлений». (Энгельс).

Всеобщие уравнения движения. Системы дифференциальных уравнений движения одной материальной точки или точек механической системы выражают связь между движением материальных объектов и приложенными к ним силами. Поэтому, вообще говоря, эти уравнения позволяют решать обе (прямую и обратную) задачи динамики. Решение задач динамики иногда может представить трудности математического характера, поскольку силы могут выражаться очень сложными функциями многих аргументов, зависеть от времени, от координат точек механической системы и от производных этих координат по времени. Поэтому проинтегрировать в общем виде эти системы уравнений невозможно.

Но из систем дифференциальных уравнений движения выведены так называемые *всеобщие уравнения движения*, часто приводящие более коротким путем к решению динамических задач. В этих всеобщих уравнениях встречаемся с двумя кинетическими мерами движения, с важнейшими в динамике понятиями: количество движения (и его момент) и кинетическая энергия. Напомним, что, изучая механическое движение в кинематике, мы не интересовались ни силами, приложенными к движущемуся объекту, ни его массой, ни ее распределением. В кинематике интересовались только вопросом «как движется?» вне зависимости от «что движется?». Но в кинетике, в дополнение к кинематическим мерам движения, вводят две кинетические меры, зависящие не только от скорости, но и от масс движущихся материальных частиц.

Динамика насчитывает семь таких всеобщих уравнений, соответствующих двум мерам механического движения. Одна из этих мер (количество движения) является векторной, а поэтому позволяет написать три уравнения проекций и три уравнения моментов. Вторая же мера механического движения является скалярной и приводит к одному уравнению кинетической энергии.

Каждое из этих семи всеобщих уравнений движения выглядит так или иначе, в зависимости от того, для какого объекта оно составлено, написано ли оно для одной материальной точки, для твердого тела, совершающего определенное движение, или для изменяемой механической системы. Они могут быть написаны в конечном или в дифференциальном виде. В зависимости от условий задачи приходится выбирать уравнение и форму его, соответствующую заданным условиям. При этом полезно иметь в виду, что если проекции силы являются функциями времени, то часто бывает возможно проинтегрировать уравнения проекций количества движения. Уравнение кинетической энергии дает интеграл в тех случаях, когда силы являются функциями расстояния. Этим часто определяется выбор того или другого уравнения для решения задачи. Выводу семи всеобщих уравнений движения для различных движущихся объектов посвящены § 35 ... 37.

С двумя мерами механического движения познакомимся, рассмотрев сначала простой случай: движение одной материальной частицы массой m со скоростью v.

Как только начала создаваться динамика, сейчас же появилась потребность в определенной мере для измерения движения. Такие меры уже намечались в работах Галилея. Декарт признал произведение массы движущегося тела на его скорость mv единственной мерой механического движения. Декарт, как известно, сделал гениальную догадку о сохранении движения (1644). Он считал, что сохраняется именно mv, правда, не отличая четко массы от веса.

Напротив, Гюйгенс в своих работах пользовался, и очень успешно, произведением массы на квадрат скорости. Этим открытием Гюйгенса и утверждением Паскаля, что одно и то же— поднять сто фунтов воды на один дюйм или один фунт на сто дюймов, воспользовался Лейбниц, написав, что декартова мера mv противоречит декартову закону сохранения движения. Лейбниц доказывал, что сохраняется mv^2, а не mv. Тот факт, что mv^2 не сохраняется при ударе неупругих тел, Лейбниц объяснял поглощением движения частицами ударяющихся тел. «Это не противоречит,— писал он,— нерушимой истине сохранения силы в природе. То, что поглощается частицами, не потеряно для общей силы участвующих в движении тел» *.

Лейбниц назвал (1695) эту меру mv^2 «живой силой».

Сторонники Декарта выступили в его защиту. Лейбница основательно поддержал Иван Бернуллли, опубликовавший в 1724 г. сочинение «Дискуссия о законах передачи движения», удостоенное премии Парижской академии наук по конкурсу, объявленному на эту тему.

«...Загорелся знаменитый, длившийся много лет спор, в котором принял участие в первом своем сочинении «Мысли о правильной оценке живых сил» (1746 г.) также и Кант, хотя он неясно разбирался в этом вопросе»,— пишет Энгельс **.

---

* *Лейбниц*: «Краткое доказательство удивительной ошибки Декарта и других относительно закона природы, по которому бог, как эти авторы думают, старается всегда сохранить в природе одно и то же количество движения, но который совершенно разрушает механику» (1686).

** *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 409.

Дебют великого философа был не очень удачен, о чем опубликовал ядовитое четверостишие Лессинг *. Эпиграмма вызвана не только слабостью выступления Канта, но и остротой дискуссии, которая расколола ученый мир на два враждебных лагеря.

Приблизительно в это время М. В. Ломоносов (1758) читал свою диссертацию, в начале которой он говорил и об этой дискуссии: «Самые первые начала механики, даже физики, еще находятся в периоде обсуждений, и наиболее выдающиеся ученые этого столетия не могут прийти к соглашению о них. Самым блестящим примером этого есть величина сил движения, которая согласно одним увеличивается в простом, по другим — в двойном отношении скорости».

Сторонниками меры mv были Дени Папен (один из изобретателей паровой машины), Маклорен, Кларк (английский философ, переводивший Ньютона и Декарта), английский математик Валлис, Яков Бернулли, Вариньон, Мариотт, Мерсен, французский физик Орту де Меран, Вольтер и многие другие, тогда как друг Вольтера маркиза дю Шатле, переведшая Ньютона на французский язык, Лопиталь, Кёниг, Иван Бернулли, академик С.-Петербургской академии Даниил Бернулли, распространивший понятие живых сил на жидкость, Яков Герман, немецкий философ Вольф и многие другие защищали меру mv^2. Голландский математик и физик Гравезанд вначале был на стороне Декарта, но потом перешел на сторону Лейбница.

Свои соображения высказал и Д'Аламбер (1743), после чего этот великий спор затих, но не потому, что Д'Аламбер убедил споривших, а потому, что спор утомил противников и не видно было ему конца. Ведь спорили о том, чем измеряется механическое движение, что сохраняется в природе — mv или mv^2. Вот почему Ньютон, вообще отрицавший закон сохранения движения, вовсе не принял участия в споре. Но во времена Декарта и Лейбница еще не знали, что механическое движение может переходить в другие виды движения, хотя, как видно и из приведенной цитаты Лейбница, эти мысли уже начали зарождаться. Более определенно о немеханических формах движения высказывался М. В. Ломоносов (1744—1745).

По предложению Кориолиса (XIX в.) «живой силой» стали называть $mv^2/2$. Постепенно начала выявляться связь между изменением живой силы и работой.

Четкое толкование понятий обеих мер движения можно найти в «Диалектике природы» Ф. Энгельса. Материальное тело обладает двумя мерами механического движения:

1) живая сила, или кинетическая энергия, характеризует спо-

---

* «Кант берет на себя трудную задачу просвещения мира. Он оценивает живые силы, но свои собственные силы слишком переоценивает» (*Лессинг.* Собр. соч., т. 1, с. 57).

собность механического движения данного тела превращаться в потенциальную энергию или другие виды движения;

2) количество движения характеризует способность механического движения данного тела передаваться другим материальным телам в виде механического же движения.

В каждом движущемся теле обе меры механического движения существуют одновременно и не противоречат одна другой. Подробно остановимся на этом вопросе в параграфах, посвященных теоремам о количестве движения и о кинетической энергии, а также в главе о теории удара.

§ 35. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ И ЕГО ПРОЕКЦИИ

Количеством движения называют меру механического движения, выражающуюся геометрической суммой произведений массы каждой частицы материальной системы и ее скорости: $\vec{Q}=\Sigma m\vec{v}$.

Количество движения точки и системы. Ньютон во введении к «Началам» дал такое определение: «Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе».

Количество движения имеет применение всякий раз, когда механическое движение от одного тела переходит к другому в виде механического же движения. Так, например, один биллиардный шар, ударивши другой, передает ему часть своего механического движения, выражаемого количеством движения.

Количество движения материальной частицы, обладающей массой m и скоростью $\vec{v}$, выражается вектором $\vec{Q}$, направленным по скорости этой частицы и равным произведению массы частицы и ее скорости:

$$\boxed{\vec{Q}=m\vec{v}.} \tag{173}$$

Размерность количества движения в физической системе единиц

$$[Q]_{\text{ф}}=L^1M^1T^{-1}.$$

За единицу количества движения в СИ принят килограмм-метр в секунду [кг·м/с].

В технической системе единиц размерность количества движения

$$[Q]_{\text{т}}=L^0F^1T^1.$$

Единицей является килограмм-сила, умноженная на секунду [кгс·с], если в технической системе сила выражена в килограмм-силах, а время — в секундах.

Наряду с вектором количества движения в механике применяют проекции количества движения на оси

$$Q_x = mv\cos\alpha_v;\quad Q_y = mv\cos\beta_v;\quad Q_z = mv\cos\gamma_v. \qquad (173')$$

Направляющие косинусы количества движения равны направляющим косинусам скорости (14), так как вектор количества движения материальной точки или частицы направлен по ее скорости:

$$\cos\alpha_Q = \frac{Q_x}{Q} = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha_v;$$

$$\cos\beta_Q = \frac{Q_y}{Q} = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds} = \cos\beta_v;\quad \cos\gamma_Q = \cos\gamma_v.$$

Модуль количества движения легко подсчитать по формуле

$$Q = +\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

Проекция количества движения на ось (как и проекция на ось всякого вектора) — скаляр второго рода и определяется величиной и знаком.

Если умножить проекцию количества движения на единичный вектор этой оси, то получим составляющую, или компоненту, количества движения по оси. Вектор количества движения точки (или материальной частицы) связан со своими компонентами по координатным осям соотношением

$$\vec{Q} = \vec{i}Q_x + \vec{j}Q_y + \vec{k}Q_z.$$

Количество движения материальной системы выражается суммой количеств движения всех частиц этой системы. «Количество движения целого есть сумма количеств движения отдельных частей его» (Ньютон). Таким образом, для материальной системы, содержащей n частиц или n точек

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{v}_k, \qquad (174)$$

где суммирование распространено на все частицы материальной системы.

Под проекцией количества движения системы на какую-либо ось понимают алгебраическую сумму проекций количества движения всех точек системы на эту ось

$$Q_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{kx}, \qquad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \longrightarrow & y \end{matrix} \qquad (174')$$

Количество движения материальной системы есть вектор, направленный по вектору скорости центра масс и равный произведению массы всей системы и скорости центра масс: $\vec{Q}=m\vec{v}_C$.

Выражение количества движения системы через ее массу и скорость центра масс. Координаты центра масс C материальной системы относительно осей Ox, Oy, Oz определяются равенствами (108), где x_k, y_k и z_k — координаты точек системы. Из этих равенств, освободившись от знаменателя, определим статические моменты массы на данное мгновение

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k = m x_C, \quad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix}$$

Продифференцировав по времени, находим, что проекция количества движения на ось равна произведению массы системы и проекции скорости центра масс на ту же ось

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk} = m v_{Cx}, \quad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix} \qquad (175)$$

Но если равны проекции векторов на любую ось, то, следовательно, равны и сами векторы:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{v}_k = m\vec{v}_C.$$

Таким образом, количество движения всякой материальной системы равно количеству движения ее центра масс, если сосредоточить в нем массу всей системы:

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C. \qquad (175')$$

Теоремы о проекциях количества движения точки и системы

Изменение проекции количества движения материальной точки на какую-либо ось и за какой-либо промежуток времени равно проекции импульса силы за то же время на ту же ось $mv_x - mv_{x0} = S_x$.

Уравнения количества движения точки. Напишем дифференциальные уравнения движения материальной точки в форме (141)

$$m\frac{dv_x}{dt} = X; \quad m\frac{dv_y}{dt} = Y; \quad m\frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Умножая каждое из этих уравнений на dt и внося постоянную m под знак дифференциала, получим

$$d mv_x = X\,dt; \quad d mv_y = Y\,dt; \quad d mv_z = Z\,dt \qquad (176)$$

— три уравнения проекций количества движения в дифференциальной форме. Слева в уравнениях (176) имеем дифференциалы проекций количества движения материальной точки на оси координат, а справа проекции элементарного импульса силы на те же оси. Элементарный импульс силы

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt \tag{176'}$$

— это сколь угодно малый вектор, направленный по силе и по модулю равный произведению модуля силы на элемент времени.

Импульс силы за конечный промежуток времени равен пределу геометрической суммы элементарных импульсов за малые части данного промежутка. Следовательно, импульс постоянной силы или импульс переменной силы, зависящей только от времени, за данное время выражается интегралом от вектора $\vec{F}$ по скалярному аргументу t:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt. \tag{177}$$

Если вектор силы постоянен ($\vec{F} = \text{const}$), то импульс силы равен произведению силы на время ее действия. Но если сила со временем меняется, то для вычисления интеграла (177) интегрируют в тех же пределах проекции элементарного импульса на оси координат:

$$S_x = \int_{t_0}^{t} X\,dt, \qquad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix} \tag{177'}$$

По проекциям легко определить модуль и направляющие косинусы вектора, однако в этом редко возникает необходимость и практически обычно ограничиваются определением проекций.

Чтобы получить уравнения проекций количества движения материальной точки в конечной форме, проинтегрируем левую и правую части первого из уравнений (176′) в соответствующих пределах v_{x0}, v_x и t_0, t; а затем аналогично поступим и с двумя другими уравнениями, получим

$$mv_x - mv_{x0} = S_x, \qquad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix} \tag{178'}$$

т. е. изменение проекции количества движения материальной точки на ось равно проекции импульса силы за то же время, на ту же ось. Но если равны проекции на любую ось двух векторов, то, следовательно, равны и эти векторы

$$m\vec{v} - m\vec{v_0} = \vec{S}, \tag{178}$$

т. е. вектор изменения количества движения материальной точки за какое-либо время равен вектору импульса силы, действующей на материальную точку за то же время. Конечно, и здесь под силой надо понимать равнодействующую, если на точку действует не одна, а несколько сил.

Задача № 42. Материальная точка, масса которой $m=3$ кг, движется по горизонтальной прямой налево со скоростью 5 м/с. К ней приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 45 м/с и направленной вправо. Найти модуль этой силы.

Решение. Условие задачи дано в физической системе единиц (СИ). По изменению скорости точки надо определить силу, производящую данное движение точки. Таким образом, задача является прямой задачей динамики. Решать ее будем, применив теорему об изменении количества движения. Примем горизонтальную прямую, по которой движется точка, за ось Ox, считая направление вправо положительным. Тогда

$$S_x = F\cdot 30,\quad mv_x = 3\cdot 45 \text{ и } mv_{x0} = -3\cdot 5.$$

Подставляя эти данные в (182), найдем

$$+F\cdot 30 = 3\cdot 45 + 3\cdot 5 = +150 \text{ кг}\cdot\text{м/с},$$

откуда определим силу.

Ответ. $F=5$ кг·м/с$^2=5$ Н.

Производная по времени от суммы проекций количеств движения всех материальных точек системы на какую-либо ось равна сумме проекций всех внешних сил системы на ту же ось: $\frac{d}{dt}\sum m_k v_{xk} = \sum X_k^e$.

Теорема о проекциях количеств движения системы. Теорема о количестве движения находит большое применение при исследовании движения системы материальных точек, так как в этой теореме исключены все внутренние силы системы.

Пусть дана механическая система, состоящая из n материальных точек. Распределив все силы, приложенные к точкам этой системы, на две категории (силы внешние и силы внутренние), напишем дифференциальные уравнения движения точек системы в форме (144) в проекциях на ось абсцисс:

$$m_1\frac{dv_{x1}}{dt} = X_1^e + X_1^i,$$

$$m_2\frac{dv_{x2}}{dt} = X_2^e + X_2^i,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$m_n\frac{dv_{xn}}{dt} = X_n^e + X_n^i.$$

Сложив отдельно левые и отдельно правые части написанных уравнений, получим

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k\frac{dv_{xk}}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} X_k^e + \sum_{k=1}^{k=n} X_k^i.$$

Но сумма проекций всех внутренних сил системы равна нулю так как внутренние силы, согласно закону равенства действия и противодействия, попарно равны и противоположно направлены:

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k^i = 0.$$

В левой части постоянные m_k внесем под знак производной, заменим сумму производных производной от суммы и получим для проекций на ось абсцисс

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk} = \sum_{k=1}^{k=n} X_k^e} \qquad \begin{matrix} z & \leftarrow & y \\ & \searrow x \nearrow & \end{matrix} \qquad (179')$$

Мы не накладывали никаких ограничений на направление оси абсцисс, поэтому можно сформулировать следующую общую теорему, называемую *теоремой о проекциях количеств движения* системы материальных точек: производная по времени от суммы проекций количеств движений всех точек системы на какую-либо неподвижную ось равна сумме проекций всех внешних сил системы на ту же ось.

Равенства (179′) справедливы для любой неподвижной оси, следовательно, их можно записать в векторной форме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k^e. \qquad (179)$$

Если силы постоянны или зависят только от времени, то умножая уравнения (179′) на dt и интегрируя, найдем, что изменение суммы проекций количеств движения всех точек системы на какую-либо неподвижную ось за некоторый промежуток времени равно сумме проекций импульсов всех внешних сил системы за то же время на ту же ось:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk} - \sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk0} = \sum_{k=1}^{k=n} S_{xk}^e. \qquad (180')$$

При решении задач это уравнение иногда находит применение, но теорему о проекции количеств движения системы чаще применяют в дифференциальном (179′), чем в конечном виде (180′).

Учитывая, что сумма количеств движения всех материальных точек системы есть количество движения $\vec{Q}$ материальной системы, и принимая во внимание, что геометрическая сумма всех сил есть главный вектор $\vec{F}_{гл}$ системы сил (144), можно записать равенства (179) и (179′) в ином виде:

$$\frac{d}{dt}\vec{Q}=\vec{F}^e_{гл}$$

и

$$\dot{Q}_x=X^e_{гл},\ \dot{Q}_y=Y^e_{гл},\ \dot{Q}_z=Z^e_{гл},$$

где $X^e{}_{гл}$, $Y^e{}_{гл}$, $Z^e{}_{гл}$ — проекции на оси координат главного вектора $F^e{}_{гл}$ всех внешних сил системы.

Интегрируя эти равенства, получим уравнения количеств движения системы в конечном виде:

$$Q_x-Q_{x0}=S^e_x, \qquad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \to & y \end{matrix} \qquad (180'')$$

или

$$\vec{Q}-\vec{Q}_0=\vec{S}^e. \qquad (180)$$

Если сумма проекций всех внешних сил системы на ось равна нулю, то сумма проекций количеств движения точек системы на эту ось постоянна.

Интеграл количеств движения. В частном случае, если сумма проекций всех внешних сил системы на какую-либо ось, например на ось Ox, равна нулю, то уравнение (179′) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk}=0,$$

откуда, проинтегрировав, получаем

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk}=\text{const}. \qquad (181)$$

Это равенство называют *интегралом количества движения* системы материальных точек и его можно сформулировать так: если сумма проекций всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то сумма проекций количеств движения всех точек системы на эту ось постоянна.

Справедливо и обратное заключение: если сумма проекций количеств движения системы на какую-либо ось постоянна, то сумма проекций всех внешних сил системы на эту ось равна нулю. В самом деле, дифференцируя (181) по времени, найдем, что производная по времени от суммы проекций количеств движения на ось Ox равна нулю и ввиду (179′) равна нулю сумма проекций на эту ось всех внешних сил системы.

Если равна нулю сумма проекций всех внешних сил не только на ось Ox, но и на оси Oy и Oz, то сохраняется сумма проекций на оси и геометрическая сумма векторов количеств движения точек системы, т. е. если

$$\sum \vec{F}_k^e = 0, \text{ то } \sum m_k \vec{v}_k = C,$$

и обратно, если

$$\sum m_k \vec{v}_k = C, \text{ то } \vec{F}_k^e = 0.$$

Такой случай можно представить себе в изолированной материальной системе, т. е. в системе, на точки которой не действуют никакие внешние силы. Примером почти полностью изолированной механической системы может служить солнечная система (см. с. 114). Количество движения изолированной системы остается неизменным; этот закон называют иногда *принципом сохранения количество движения.*

Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы.

Теорема о движении центра масс. К теореме о проекциях количеств движения примыкает теорема о движении центра масс. Во многих задачах эти теоремы вполне заменяют друг друга. Выше было показано (175), что сумму количеств движения всех материальных точек системы можно представить как количество движения одной точки, совпадающей с центром масс системы, обладающей скоростью центра масс и массой, равной сумме масс всех точек системы:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{xk} = m v_{Cx}, \quad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix}$$

Продифференцируем эти равенства по времени, производные запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{k=n} m_k v_{kx} = m \frac{dv_{Cx}}{dt}, \quad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix}$$

Левые части полученных равенств равны левым частям равенств (179′). Следовательно, равны между собой и правые части и получены уравнения, называемые дифференциальными уравнениями движения центра масс механической системы,

$$m \frac{dv_{Cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} X_k^e; \quad m \frac{dv_{Cy}}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^e; \quad m \frac{dv_{Cz}}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} Z_k^e. \qquad (182')$$

Сравнивая эти уравнения с (140), можно убедиться, что *движение центра масс* математически описывается тремя дифференциальными уравнениями, как и движение материальной точки.

Однако с физической стороны имеется некоторое различие между уравнениями (140) и (182′). Всякая материальная точка обладает некоторой массой и движется согласно (140) под действием всех приложенных к ней сил, а центр масс является геометрической точкой и может не совпадать ни с одной из материальных частиц системы.

Уравнения (182′) показывают, что центр масс движется как материальная точка, которая имеет массу, равную массе всей системы, и к которой приложены силы, равные всем внешним силам, действующим на материальные точки данной системы; внутренние силы не изменяют движения центра масс и не могут нарушить его покоя.

Три уравнения (182′) движения центра масс в прямоугольной системе координат могут быть заменены одним векторным уравнением

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum \vec{F}_k^e. \tag{182}$$

О независимости движения центра масс от внутренних сил. Независимость движения центра масс от действия внутренних сил была установлена Ньютоном. «Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения»,— писал он в «Началах». Теорема о движении центра масс имеет в механике большое значение.

На первый взгляд может показаться, что движение центра масс системы иногда происходит под действием ее внутренних сил. Например, чтобы увеличить скорость парохода, поднимают давление пара, т. е. увеличивают внутренние силы системы. Молодой и здоровый человек с хорошо развитой мускулатурой ног легко обгонит старика с дряблыми мышцами и т. д. и т. п. Но отсюда не следует делать вывод, что центр масс системы передвигается внутренними силами этой системы. В приведенных примерах внутренние силы лишь заставляют точки данной системы воздействовать на окружающие материальные тела, отчего возникают внешние силы, создающие движение центра масс данной системы. Так, человек силой своих мышц (внутренней силой) отталкивается ногами от дороги, отчего в точках соприкосновения подошв с дорогой возникает сила трения (внешняя для человека), направленная в сторону его движения и позволяющая передвигаться всей системе (человеку). Конечно, эта сила зависит от внутренних сил человека, но она является внешней силой, и человек не смог бы идти по поверхности без трения. Ни один силач не может силой своих мышц поднять себя за волосы над землей. Пароход развивает пары, чтобы быстрее вращать гребной винт и лучше отталкиваться им от воды. Давление воды на гребной винт является внешней силой для парохода. Никакое давление пара (внутренняя сила) не создало бы движения парохода, если бы не было гребного винта или воды, взаимодействие которых создает силу тяги, являющуюся внешней силой для парохода.

Теоремы о движении центра масс и о количестве движения системы являются основой для расчета реактивных движений. Ракета для своего полета не нуждается во внешней среде *. Газообразные продукты горения с большой скоростью выбрасываются из сопла. Это движение продуктов горения происходит под действием внутренних сил, а потому не может повлиять на движение центра масс всей системы, включающей газы и корпус ракеты. Если до выброса продуктов горения ракета была неподвижна, то движение газов так компенсируется движением корпуса ракеты в противоположном направлении, что сумма количеств движения всей системы равна нулю и центр масс всей системы остается неподвижным и после взрыва.

Задача № 43 (*М*). На однородную призму (рис. 109), лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма *B*; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, вес призмы *A* втрое больше веса призмы *B*. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину *l*, на которую передвинется призма *A*, когда призма *B*, спускаясь по *A*, дойдет до горизонтальной плоскости.

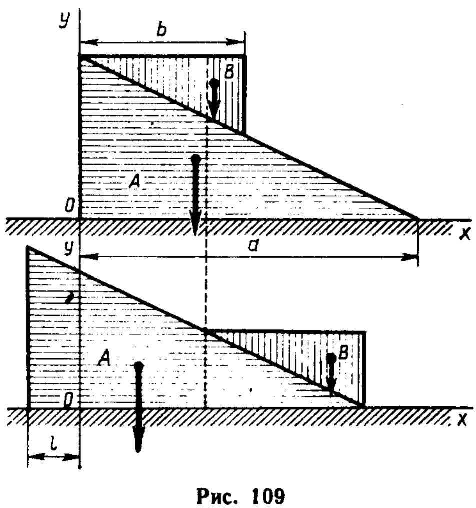


Рис. 109

Решение. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из двух призм *A* и *B*. Призма *B*, спускаясь по призме *A* вправо, как бы вытесняет призму *A*, заставляет ее отодвигаться влево, передавая ей часть своего механического движения. В подобных задачах обычно применяют теорему о проекциях количества движения системы или аналогичную ей теорему о движении центра масс. Покажем при решении этой задачи применение обеих этих теорем.

На систему действуют следующие внешние силы: вес mg призмы *B*, вес $3mg$ призмы *A*, вертикальная реакция горизонтальной плоскости. Внешняя сила трения призм по идеально гладкой горизонтальной плоскости равна нулю. Итак, все внешние силы системы вертикальны. Внутренние силы системы (давление призмы *B* на призму *A*, реакция на это давление, а также силы трения между *A* и *B*, если бы таковые имели место) нас не интересуют.

Заметим, что в условии задачи И. В. Мещерским допущены лишние данные: не нужно оговаривать, что призмы идеально гладкие, так как внутренняя сила трения не влияет на смещение призмы *A*, что призмы однородны, так как точное положение центра масс каждой призмы не имеет значения, также не имеют значения (при соответствующих *a* и *b*) поперечные сечения призм.

1. Применим теорему о проекции количеств движения системы. Проекции

* Идея применения ракеты для полета человека принадлежит Н. И. Кибальчичу (1881) и К. Э. Циолковскому (1903).

всех внешних сил системы на горизонтальную ось Ox равны нулю. Имеет место интеграл количеств движения (185)

$$\sum_{k=1}^{k=2} m_k v_{xk} = C_1.$$

В начале движения призмы были неподвижны, а потому $C_1=0$. Интегрируя это равенство, находим

$$\sum_{k=1}^{k=2} m_k x_k = C_2.$$

Здесь x_k — проекции перемещений призмы на ось Ox. В начале движения никаких перемещений призм не было, а потому $x_1=x_2=0$, а значит, $C_2=0$ и, следовательно, сумма произведений массы каждой призмы и проекции ее перемещения на ось Ox равна нулю. Масса призмы A равна $3m$, масса призмы B равна m. Проекция перемещения призмы A за время опускания призмы B равна l. За то же время проекция на ось Ox перемещения призмы B равна $a—b—l$. Подставляя эти данные в предыдущее равенство, находим

$$-3ml + m(a-b-l) = 0,$$

откуда $l=(a—b)/4$.

2. Решим эту задачу, применив теорему о движении центра масс. Проведем оси координат (см. рис. 109) и определим абсциссу x_C центра масс системы двух призм по формуле (108) до начала движения

$$x_C = (3mx_A + mx_B)/(4m),$$

где x_A и x_B — абсциссы центров тяжестей призм до начала движения.

Когда призма B опустится, абсцисса ее изменится и станет $x_B+a—b—l$; изменится и абсцисса призмы A и станет $x_A—l$. Определим абсциссу центра масс всей системы по той же формуле (108):

$$x_C = [3m(x_A - l) + m(x_B + a - b - l)]/(4m).$$

Но сумма проекций всех внешних сил системы на Ox равна нулю и в начале движения призм центр масс системы был неподвижен, а следовательно, абсцисса x_C центра масс системы не изменилась, и приравнивая друг другу два полученных ее выражения, найдем ответ.

Ответ. $l=(a—b)/4$.

§ 36. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

Момент количества движения материальной точки относительно центра выражается векторным произведением радиуса-вектора и количества движения материальной точки: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{Q}$.

Момент количества движения материальной точки относительно центра. Во многих задачах динамики приходится учитывать не только количество движения материальной точки, но и ее положение по отношению к центру.

Динамической характеристикой механического движения, учитывающей положение материальной точки по отношению к данному центру, является *момент количества движения* точки относительно данного центра.

Пусть количество движения точки K (рис. 110) изображается вектором $\overrightarrow{KB}=\vec{Q}$. Опустим из точки O, принятой за центр момента, перпендикуляр (плечо) h на вектор $\vec{Q}$ или на его продолжение. Соединим центр моментов O с началом и с концом вектора. Произведение количества движения на плечо, или, что то же, удвоенную площадь треугольника OKB, изобразим вектором $\vec{L}_O$, направленным от центра O перпендикулярно плоскости OKB. Вектор $\vec{L}_O$ условились восставлять с той стороны плоскости, с которой вектор $\vec{Q}$ представлялся бы поворачивающимся вокруг центра O против хода стрелок часов. Вектор $\vec{L}_O$ выражают момент количества движения точки K относительно точки O. Пользуясь понятиями векторной алгебры, покажем, что момент количества движения $\vec{L}_O$ точки K относительно какой-либо точки O (центра) выражается векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OK}$ и количества движения $\vec{Q}$ этой точки:

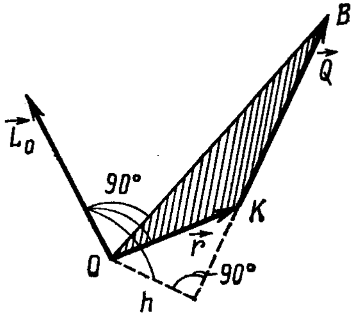


Рис. 110

$$\vec{L}_O=\vec{r}\times\vec{Q}. \qquad (183)$$

Размерность момента количества движения — это размерность количества движения, умноженная на размерность длины. В физической системе

$$[L]_ф=L^2M^1T^{-1};$$

в технической системе единиц момент количества движения имеет размерность произведения в первой степени длины, силы и времени:

$$[L]_x=L^1F^1T^1.$$

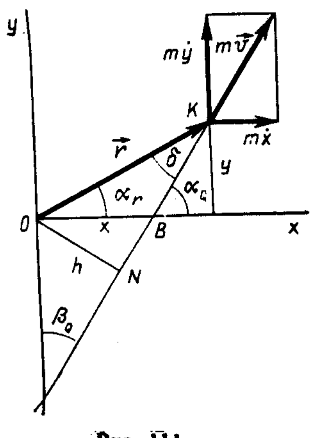


Рис. 111

Заметим, что размерность площади треугольника OKB есть $[r]\times\times[Q]$ — размерность момента количества движения.

Если точка K (рис. 111) движется в плоскости xOy, то момент количества движения точки K относительно начала координат удобно выражать через координаты x, y и проекции количества движения $m\dot{x}$, $m\dot{y}$. Модуль момента количества движения равен произведению Qh, или, как видно из чертежа,

$$L_O = Qh = mvr \sin \delta = mvr \sin (\alpha_Q - \alpha_r).$$

Раскроем синус разности двух углов

$$L_O = mvr (\sin \alpha_Q \cos \alpha_r - \cos \alpha_Q \sin \alpha_r).$$

Заменив синусы и косинусы их значениями

$$\cos \alpha_r = x/r; \quad \cos \alpha_Q = v_x/v; \quad \sin \alpha_r = y/r; \quad \sin \alpha_Q = v_y/v$$

получим окончательно

$$L_O = m(xv_y - yv_x). \tag{183'}$$

Момент количества движения материальной точки относительно оси равен проекции на эту ось момента количества движения точки относительно какого-либо центра, взятого на этой оси.

Момент количества движения материальной точки относительно оси. Пусть вектор $\vec{Q} = \overrightarrow{KB}$ изображает количество движения точки K (рис. 112). Определим момент количества движения точки K относительно оси, изображенной на рисунке вертикально. Возьмем на оси какую-либо точку O и, приняв ее за центр момента, определим сначала момент количества движения материальной точки K относительно центра O

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{Q} = \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{KB}.$$

Вектор $\vec{L}_O$ перпендикулярен плоскости треугольника OKB и по модулю равен удвоенной площади этого треугольника. Спроецировав $\vec{L}_O$ на данную ось, получим момент количества движения данной точки относительно этой оси

$$ON = L_O \cos \vartheta.$$

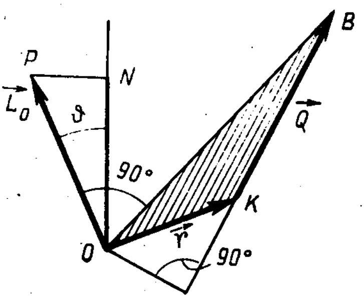


Рис. 112

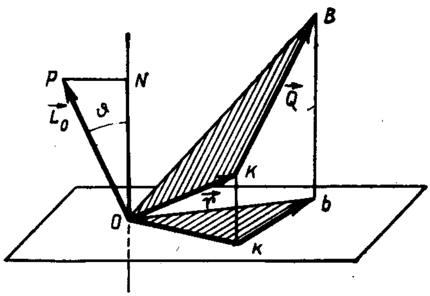


Рис. 113

Как уже было показано (см. § 26), момент вектора относительно оси не зависит от выбора на ней центра O, любую точку оси можно принять за центр момента; это не повлияет на результат.

Чтобы определить момент количества движения относительно оси, надо спроецировать вектор количества движения на плоскость, перпендикулярную оси, и определить момент проекции относительно точки пересечения оси и плоскости.

Имеется и другой способ определения момента вектора относительно оси. Этот способ изложен выше при определении момента силы. Для определения момента количества движения этот способ вполне аналогичен разобранному и заключается в следующем (рис. 113). 1) Через точку O, взятую произвольно на оси, провести плоскость, перпендикулярную оси. 2) Спроецировать на эту плоскость вектор количества движения KB. 3) Определить момент проекции относительно точки O пересечения оси и плоскости. Величина момента этой проекции, взятая с соответствующим знаком, есть момент количества движения материальной точки относительно оси.

Момент количества движения материальной точки относительно оси связан с координатами точки и с проекциями ее количества движения на две другие оси соотношениями вида: $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Момент количества движения материальной точки относительно начала координат выражается векторным произведением радиуса-вектора и вектора количества движения. Напишем это векторное произведение в виде определителя третьего порядка:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки

$$\vec{L}_0 = \vec{i}m(y\dot{z} - z\dot{y}) + \vec{j}m(z\dot{x} - x\dot{z}) + \vec{k}m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Разложим также вектор момента количества движения относительно начала координат по осям координат:

$$\vec{L}_0 = \vec{i}L_x + \vec{j}L_y + \vec{k}L_z.$$

Сравнивая два последних равенства, нетрудно заметить, что:

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{184}$$

В частном, но очень важном, случае системы, расположенной в плоскости xOy, имеем $z = 0$ и $m\dot{z} = 0$ и момент количества движения относительно начала координат

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix},$$

или

$$\vec{L}_0 = \vec{k}m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{184'}$$

Главный момент количеств движения материальной системы относительно центра равен геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно того же центра: $\vec{L}_{глO}=\Sigma\vec{L}_{kO}$.

Главный момент количеств движения системы. Если дана система материальных точек и некоторый центр O, то, определив моменты количеств движения всех материальных точек относительно этого центра, получим пучок векторов, пересекающихся в центре O. Вектор, равный геометрической сумме всех векторов, изображает *главный момент количества движения* системы материальных точек относительно данного центра

$$\vec{L}_{глO}=\sum_{k=1}^{k=n}\vec{L}_{kO}. \tag{185}$$

Эту величину называют также *кинетическим моментом системы* материальных точек *относительно данного центра.*

Главный момент количеств движения материальной системы относительно оси равен алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этой оси: $L_{гл\,x}=\Sigma L_{kx}$.

Момент количества движения материальной частицы относительно оси — величина скалярная. Поэтому для определения главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси надо взять алгебраическую сумму моментов количеств движения всех точек системы относительно этой оси

$$L_{гл\,x}=\sum_{k=1}^{k=n}L_{kx}.$$

Главный момент количеств движения системы относительно оси равен проекции на эту ось главного момента количеств движения той же системы относительно какой-либо из точек оси

$$L_{гл\,x}=L_{глO}\cos\alpha_L.$$

Эту величину называют также *кинетическим моментом системы* материальных точек *относительно оси.*

Для определения главного момента системы относительно координатных осей определим по (184) моменты количеств движения каждой частицы системы и затем просуммируем эти выражения

$$L_{гл\,x}=\sum_{k=1}^{k=n}L_{kx}=\sum_{k=1}^{k=n}m_k(y_k\dot{z}_k-z_k\dot{y}_k) \qquad \begin{array}{c} z \\ x\rightarrow y\end{array} \tag{185'}$$

Главный момент количества движения тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость: $L_z = J_z\omega$.

Главный момент количества движения вращающегося тела. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Построим систему координатных осей $xOyz$, приняв ось вращения за ось Oz. Будем рассматривать это тело как состоящее из множества материальных точек. Тогда главный момент количества движения тела относительно оси Oz определится формулой (185′)

$$L_{\text{гл}\,z} = \sum_{k=1}^{k=n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

Проекции скоростей точек вращающегося тела выразим формулами Эйлера (48):

$$\dot{x}_k = v_{kx} = -y_k\omega; \quad \dot{y}_k = v_{ky} = +x_k\omega.$$

Подставляя (48) в (185′) и вынося общий множитель ω за знак суммы, получим:

$$L_{\text{гл}\,z} = \sum_{k=1}^{k=n} m_k (x_k^2 + y_k^2)\,\omega.$$

В полученном равенстве угловая скорость ω умножена на момент инерции вращающегося тела относительно оси вращения [см. формулу (81)]

$$J_z = \sum_{k=1}^{k=n} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Итак,

$$L_{\text{гл}\,z} = J_z\omega. \tag{186}$$

Знак $L_{\text{гл}\,z}$ всегда совпадает со знаком ω, потому что момент инерции тела относительно какой-либо оси равен сумме произведений массы m_k, каждой материальной частицы на квадрат расстояния этой частицы от оси, т. е. является существенно положительной величиной.

Словами равенство (186) можно выразить так: кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению угловой скорости на момент инерции тела относительно той же оси *.

---

* Равенство (186) впервые появляется у Пуансо (1824) во 2-м издании «Элементы статики».

Теоремы о моменте количества движения

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту действующей на точку силы относительно той же оси: $\dot{L}_x = M_x$.

Теорема моментов (для материальной точки). Пусть какая-либо точка массой m движется под действием силы. Напишем выражение момента количества движения этой точки относительно оси Ox (184)

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}).$$

Дифференцируя по времени левую и правую части этого равенства, получим

$$\mathrm{d}L_x/\mathrm{d}t = m(\dot{y}\dot{z} + y\ddot{z} - \dot{z}\dot{y} - z\ddot{y}) = ym\ddot{z} - zm\ddot{y},$$

но согласно (140)

$$m\ddot{y} = Y \text{ и } m\ddot{z} = Z,$$

где Y и Z — проекции силы, действующей на данную точку.

Следовательно,

$$\mathrm{d}L_x/\mathrm{d}t = yZ - zY.$$

В правой части получен момент силы относительно оси Ox, как это было показано формулой (105) еще в статике.

Согласно этой теореме, называемой *теоремой моментов*, производная по времени от момента количества движений материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, действующей на эту точку, относительно той же оси. Теорема доказана для оси Ox, но совершенно аналогично можно доказать ее и для всякой другой оси:

$$\dot{L}_x = M_x, \quad \dot{L}_y = M_y, \quad \dot{L}_z = M_z. \tag{187}$$

Равенства (187) справедливы для любой оси, следовательно, их можно записать и в векторной форме

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{M}_O. \tag{187'}$$

Таким образом, производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра O равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра O.

Если точка движется в одной плоскости, то равенство (187′) можно рассматривать как скалярное

$$\dot{L}_O = M_O.$$

Математический маятник

Задача № 44. Материальная точка K массой m подвешена на невесомой и нерастяжимой нити длиной l, другой конец которой закреплен неподвижно в точке O (рис. 114). Точке K сообщили горизонтальную начальную скорость v_0 и вывели из равновесного состояния («математиечский маятник»). Определить движение точки при условии, что начальная скорость мала.

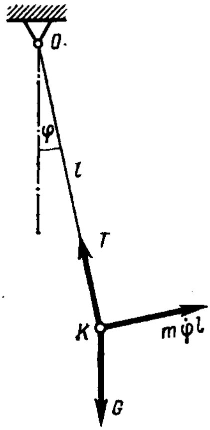


Рис. 114

Решение. На точку действуют сила тяжести $G=mg$ и натяжение T нити. Под действием этих сил и полученной начальной скорости математический маятник движется в вертикальной плоскости. Для решения задачи составим уравнение моментов относительно точки O.

Обозначим через φ угол отклонения маятника, тогда количество движения

$$Q = m\dot{\varphi}l.$$

Помножив на плечо l, получим момент количества движения

$$L_O = m\dot{\varphi}l^2.$$

Момент силы натяжения нити относительно точки O всегда равен нулю, а момент силы G

$$M_O = -Gl \sin\varphi = -mgl \sin\varphi.$$

Подставляя в уравнение моментов (187′) и сокращая на ml, получим

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin\varphi.$$

Чтобы определить движение математического маятника, надо это уравнение проинтегрировать, но оно не интегрируется в элементарных функциях и требует применения эллиптических функций, относящихся к разряду высших трансцендентных функций. Однако в данной задаче угол φ изменяется незначительно, так как точка K до начала движения находилась в наинизшем положении, т. е. в состоянии устойчивого равновесия, и получила незначительную скорость. Поэтому можно положить

$$\sin\varphi \approx \varphi.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Получено линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для интегрирования этого уравнения составим характеристическое уравнение

$$z^2 + g/l = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые

$$z_1 = +i\sqrt{g/l};\; z_2 = -i\sqrt{g/l},$$

следовательно, общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos\sqrt{g/l}\,t - C_2 \sin\sqrt{g/l}\,t,$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Определим эти постоянные по начальным данным, для чего предварительно продифференцируем по времени полученное уравнение

$$\dot{\varphi} = -C_1\sqrt{g/l}\sin\sqrt{g/l}t + C_2\sqrt{g/l}\cos\sqrt{g/l}t$$

и затем, подставив в два последние уравнения начальные данные ($t=0$; $\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=v_0/l$), определим

$$C_1=0,\ C_2=v_0/\sqrt{gl}.$$

Обозначая вторую постоянную буквой α, получим

$$\varphi=\alpha\sin\sqrt{g/l}t.$$

Это уравнение определяет угол поворота нити как функцию времени, т. е. является кинематическим уравнением качания математического маятника.

Величину $\sqrt{g/l}=k$ называют *частотой качаний математического маятника*. Она связана с *периодом* $\tau_м$ *качаний математического маятника* обратной зависимостью

$$\tau_м=2\pi\sqrt{l/g}. \qquad (188)$$

Следовательно, период малых качаний математического маятника зависит только от длины l нити и от g — ускорения тел при их свободном падении.

Ответ. Малые колебания по дуге радиуса l с периодом

$$\tau_м=2\pi\sqrt{l/g}.$$

Если колебания не малые и $\sin\varphi$ нельзя приравнять φ, то колебания маятника неизохорны, т. е. период зависит от амплитуды *.

Если момент действующей на материальную точку силы относительно данной оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно этой оси постоянен.

Интеграл моментов (для материальной точки). В случае, если момент силы, приложенной к данной материальной точке, относительно какой-либо оси, например относительно оси Oz, постоянно равен нулю, то уравнение моментов относительно этой оси имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt}=\frac{d}{dt}m(x\dot{y}-y\dot{x})=0,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$m(x\dot{y}-y\dot{x})=C. \qquad (189)$$

Доказана теорема, называемая *законом сохранения момента количества движения* материальной точки *относительно оси*. Сформулировать ее можно так: если момент силы, действующей на материальную точку, взятый относительно какой-либо оси, постоянно равен нулю, то момент количества движения этой точки относительно той же оси постоянен. Когда на точку действуют несколько сил, то здесь (как и везде) под действующей силой понимается равнодействующая.

* Неизохорность колебаний маятника впервые отметил Пикар (1647).

Закон площадей

Под действием центральной силы точка описывает плоскую траекторию.

Центральная сила. Пусть к точке K массой m приложена сила F, линия действия которой всегда проходит через неподвижный центр O. Такую силу называют *центральной*. Построим в точке O систему прямоугольных координат $xOyz$. Моменты силы F относительно осей координат равны нулю, следовательно, моменты количества движения точки K относительно этих осей постоянны. Обозначим момент количества движения относительно оси Ox буквой A, относительно оси Oy — B и относительно Oz — C:

$$m(y\dot{z}-z\dot{y})=A;\; m(z\dot{x}-x\dot{z})=B;\; m(x\dot{y}-y\dot{x})=C,$$

где x, y, z — координаты точки K в какое-либо мгновение; $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ — проекции скорости точки в то же мгновение.

Умножим первое из написанных выражений на координату x точки K, второе — на y, третье — на z и сложим их:

$$m(xy\dot{z}+\dot{x}yz+x\dot{y}z-xy\dot{z}-\dot{x}yz-x\dot{y}z)=Ax+By+Cz,$$

или

$$Ax+By+Cz=0.$$

Получили уравнение плоскости. Координаты x, y и z точки K должны удовлетворять этому уравнению, следовательно, точка K должна двигаться в этой плоскости. Таким образом, под действием центральной силы точка описывает плоскую траекторию. Например, Земля под действием притяжения к Солнцу движется в плоскости эклиптики.

«Прямая линия, соединяющая планету с Солнцем, описывает равные площади в равные промежутки времени» (Кеплер).

Интеграл площадей. Равенство (189) является первым интегралом дифференциальных уравнений движения точки для рассмотренного случая. Поэтому его называют *интегралом моментов*, или *интегралом площадей*. Чтобы пояснить это название, приведем следующую геометрическую интерпретацию.

Планета P (рис. 115, a) движется вокруг Солнца O, находящегося в одном из фокусов эллипса. Количество движения планеты изобразим вектором $\overrightarrow{mv}$, касательным к орбите. Момент количества движения планеты относительно оси Oz, перпендикулярной плоскости орбиты, равен $mv \cdot OB$, следовательно, по равенству (189)

$$mv \cdot OB = C,$$

а так как масса планеты постоянна, то

$$v \cdot OB = C/m = C_1.$$

Пусть за время dt планета сместилась на элемент дуги $ds = v dt$, радиус-вектор OP планеты описал сектор (заштрихован на рис. 115, *а*). Площадь этого сектора $d\sigma$ равна половине произведения основания на высоту:

$$d\sigma = \frac{1}{2} OB \cdot v\, dt = \frac{C_1}{2}\, dt.$$

Отсюда видно, что площадь σ, описываемая радиусом-вектором планеты, возрастает пропорционально времени t независимо от положения планеты на ее орбите *. Планета движется по своей

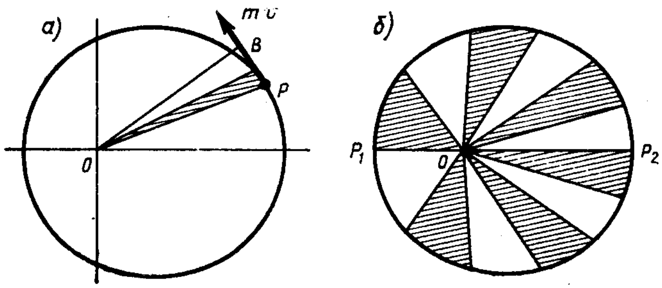


Рис. 115

эллиптической орбите неравномерно. Чем ближе она находится к Солнцу, тем быстрее она движется по орбите, но площади, описываемые радиусом-вектором за одинаковые промежутки времени, всегда одинаковы, независимо от того, находится планета (рис. 115, *б*) в перигелии P_1 (ближайшей к Солнцу точке своей орбиты) или в афелии P_2 (наиболее удаленной точке), или же где-либо в другом месте своей орбиты. На рис. 115, *б* белые и заштрихованные части фигуры обозначают равные площади, соответствующие движению планеты за равные промежутки времени, а именно за $^1/_{12}$ времени полного оборота планеты вокруг Солнца.

Разумеется, закон площадей справедлив не только для движения планет под действием притяжения к Солнцу. Движение каждой материальной точки под действием всякой центральной силы происходит с постоянной *секторной скоростью* ($\dot\sigma$=const).

Вывод закона Ньютона из законов Кеплера. Пользуясь вторым законом Кеплера и его первым законом о движении планет вокруг Солнца по эллипсам, выведем закон тяготения, определив силу по заданному движению точки

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y.$$

* Закон открыт Кеплером и опубликован в 1609 г. Это второй закон Кеплера.

Массу m планеты примем за единицу, а искомую силу — зависящей только от координат x и y планеты (А. С. Галиуллин «Методы решения обратных задач динамики». М., Наука, 1986). Начало системы координат xOy возьмем в центре Солнца, направив ось абсцисс по оси симметрии эллипса. Уравнение траектории имеет вид $\sqrt{x^2+y^2}=ex+p$, где e — эксцентриситет эллипса; $p=r-ex$ — фокальный параметр, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

По законам Кеплера по такой эллиптической орбите планета движется с постоянной секторной скоростью $x\dot{y}-\dot{x}y=C_1$. Это ее свойство служит первым интегралом дифференциальных уравнений движения. Дифференцируя, получаем $xY-yX=0$.

Таким образом, установлено, что момент искомой силы относительно начала координат при всяком положении планеты равен нулю, т. е. сила, действующая на планету, является центральной и всегда направлена к центру Солнца. Проекции этой силы могут быть представлены в виде

$$X=x\xi(x,\ y),\quad Y=y\xi(x,\ y),$$

Для определения этого множителя продифференцируем дважды уравнения траектории

$$(x\dot{y}-\dot{x}y)^2/r^3+\frac{x}{r}X+\frac{y}{r}Y-eX=0.$$

Подставив в полученное соотношение значения X и Y, получим:

$$(x\dot{y}-\dot{x}y)^2/r^3+[x^2/r+y^2/r-ex]\xi(x,\ y)=0.$$

Откуда, принимая во внимание, что $(x\dot{y}-\dot{x}y)=C_1$ и $r-ex=p$, получаем $\xi(x,\ y)=-\frac{C_1^2}{p}\frac{1}{r^3}$, позволяет определить искомую силу

$$X=-\frac{C_1^2}{p}\frac{x}{r^3}\ \text{и}\ Y=-\frac{C_1^2}{p}\frac{y}{r}.$$

Сила, действующая на планету, направлена к центру Солнца и по модулю обратно пропорциональна квадрату расстояния планеты от Солнца, т. е. $F=\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{C_1^2}{pr^2}$.

Производная по времени от суммы моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно оси равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно той же оси.

Теорема моментов (для системы). Пусть движение системы материальных точек определяется дифференциальными уравнениями (144). Присвоим каждой точке этой системы свой порядковый номер (1, 2,..., n). На всякую точку K, принадлежащую этой системе, действуют внешние силы, равнодействующая которых F^e_k, и внутренние силы, равнодействующая которых F^i_k. Обозначим через M^e_{kx}

момент относительно оси Ox равнодействующей всех внешних сил, приложенных к этой точке, а через M^i_{kx} — момент относительно той же оси равнодействующей всех внутренних сил, приложенных к той же точке; обозначим через M_{kx} — момент относительно Ox равнодействующей всех приложенных к точке сил, как внешних, так и внутренних. Тогда

$$M_{kx} = M^e_{kx} + M^i_{kx}.$$

Подставим это выражение в первое из уравнений моментов (187), написанное для этой точки:

$$\mathrm{d}L_{kx}/\mathrm{d}t = M^e_{kx} + M^i_{kx}.$$

Составим такие же уравнения и для всех других точек системы и просуммируем их почленно

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\mathrm{d}L_{kx}}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{k=n} M^e_{kx} + \sum_{k=1}^{k=n} M^i_{kx}.$$

Согласно аксиоме равенства действия и противодействия внутренние силы системы попарно равны и действуют по одной прямой в противоположные стороны, а потому сумма моментов всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{k=n} M^i_{kx} = 0.$$

В правой части остается только первый член (первая сумма). Заменив в левой части сумму производных через производную от суммы, получим окончательно уравнение моментов относительно оси Ox (и аналогично для двух других осей)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{k=n} L_{kx} = \sum_{k=1}^{k=n} M^e_{kx}} \qquad \begin{array}{c} z \\ x \to y \end{array} \qquad (190)$$

Сформулируем следующую общую теорему, называемую *теоремой моментов системы материальных точек* относительно оси: производная по времени от суммы моментов количества движения всех материальных точек системы относительно какой-либо оси равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно той же оси.

Формулировка и содержание этой теоремы очень схожи с теоремой о проекции количеств движения системы, только слова «проекция на ось» заменены здесь словами «момент относительно оси».

Равенства (190) можно выразить через главные моменты внешних сил системы

$$\frac{d}{dt} L_{\text{гл}\,x} = M^e_{\text{гл}\,x}, \qquad \begin{array}{c} z \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ x \rightarrow y \end{array}$$

Производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-либо оси равна главному моменту внешних сил системы относительно той же оси.

Равенства (190) справедливы для любой неподвижной оси. Следовательно, их можно записать в векторной форме

$$\dot{\vec{L}}_{\text{гл}O} = \vec{M}^e_{\text{гл}O}. \tag{190'}$$

Производная по времени от вектора кинетического момента системы относительно какой-либо точки равна главному моменту внешних сил системы относительно той же точки.

Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо оси равна нулю, то сумма моментов количеств движения точек системы относительно этой оси постоянна.

Интеграл моментов (для системы). Если сумма моментов относительно какой-либо оси Ox всех внешних сил системы равна нулю во все время движения, то по (190)

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{k=n} L_{kx} = 0,$$

откуда получаем интеграл моментов

$$\sum_{k=1}^{k=n} L_{kx} = C. \tag{191}$$

Если же (постоянно) равна нулю сумма моментов всех внешних сил системы относительно точки, то

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{k=n} \vec{L}_{kO} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{L}_{kO} = C. \tag{191'}$$

Таким образом, если сумма моментов всех внешних сил относительно точки O постоянно равняется нулю, то вектор кинетического момента системы относительно этой точки O остается постоянным во все время движения системы.

Задача № 45 (М). Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку A каната ухватился человек, к точке B подвязан груз одинаковой массы с человеком (рис. 116, *а*). Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью v_r относительно каната?

Решение. Требуется по заданной относительной скорости человека определить движение груза B. Рассмотрим движение всей системы, изображенной на чертеже. На точки системы действуют три внешние силы: вес $P=mg$ человека, вес $P=mg$ груза и реакция в оси блока; натяжение каната является внутренней силой в рассматриваемой системе (рис. 116, *б*).

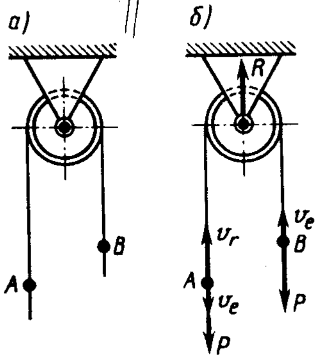


Рис. 116

Механическое движение человека передается грузу в виде механического же движения. В подобных случаях обычно бывает полезно применять теоремы о количестве движения или о его моменте. В данной задаче, чтобы исключить неизвестную реакцию в оси, применим теорему о моментах для системы относительно оси вращения блока:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{k=2} L_{kx} = \sum_{k=1}^{k=2} M_{kx}^{e}.$$

Внутренние силы системы не входят в уравнение моментов. Сумма моментов двух сил P равна нулю, так как моменты этих сил равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно, имеем интеграл моментов (191)

$$L_{1x} + L_{2x} = C.$$

Определим моменты количеств движения точек системы. Момент количества движения человека относительно центра блока равен произведению массы человека на его скорость и на плечо r (радиус блока). Под скоростью в этих теоремах следует понимать абсолютную скорость. В условии задачи задана скорость человека относительно каната. Чтобы получить абсолютную скорость, надо добавить к v_r переносную скорость, которой является скорость каната. Направления относительной и переносной скоростей в данном случае противоположны, поэтому абсолютная скорость выразится их разностью, и момент количества движения человека относительно оси блока равен:

$$L_{1x} = -m(v_r - v_e)r.$$

Знак минус поставлен потому, что вектор количества движения человека направлен по ходу часов относительно центра блока.

У груза B имеется только одна скорость — скорость v_e каната. Поскольку нет относительной скорости груза, его переносная скорость одновременно является и абсолютной, и момент количества движения груза

$$L_{2x} = +mv_e r.$$

Интеграл моментов принимает следующий вид:

$$-m(v_r - v_e)r + mv_e r = C.$$

Определим постоянную интеграции C. В начальное мгновение человек был неподвижен, скорость каната тоже равнялась нулю, следовательно, $C=0$. Решая уравнение относительно v_e, находим ответ.

Ответ. Груз будет подниматься вместе с канатом со скоростью $v_e = v_r/2$.

Закон моментов в относительном движении системы имеет тот же вид, что и в абсолютном движении, если переносное движение поступательное вместе с центром масс системы.

Закон моментов при относительном движении. Во многих случаях абсолютное движение системы целесообразно рассматривать как сложное, состоящее из переносного поступательного движения вместе с центром масс и относительного движения относительно осей $xCyz$, движущихся поступательно вместе с центром масс.

Чтобы определить относительное движение в общем случае, надо к силам, действующим на каждую материальную частицу, добавить кориолисовы силы инерции (см. § 32): поворотные и переносные.

Таким образом, чтобы получить теорему моментов для относительного движения системы, нужно в правую часть уравнений (190′) добавить сумму моментов всех кориолисовых сил инерции.

В рассматриваемом случае за переносное движение принято поступательное движение вместе с центром масс, поэтому поворотные кориолисовы силы равны нулю. Что же касается переносных сил системы, их равнодействующая приложена в центре масс, а потому момент ее тоже равен нулю.

Поэтому теорема моментов для относительного движения системы (190′) выражается совершенно так же, как и при абсолютном, если переносное движение есть поступательное движение вместе с центром масс.

Дифференциальным уравнением вращения тела вокруг данной неподвижной оси Oz является уравнение $J_z\ddot{\varphi} = M^e_{\text{гл}\,z}$.

Дифференциальное уравнение вращения тела. Подставим выражение (186) в уравнение моментов

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M^e_{\text{гл}\,z}. \tag{192}$$

Принимая во внимание известные из кинематики соотношения, перепишем это равенство в следующей форме:

$$J_z\varepsilon = M^e_{\text{гл}\,z}, \tag{192′}$$

или

$$\boxed{J_z\ddot{\varphi} = M^e_{\text{гл}\,z}.} \tag{192″}$$

Зная моменты внешних сил, приложенных к вращающемуся твердому телу, можно найти вторую производную от угла поворота по времени. Интегрируя полученное уравнение, можно выразить угол поворота φ как функцию времени t и определить вращение тела. Конечно, при интегрировании появятся две постоянные, которые надо определить по начальным данным, т. е. по начальным значениям φ и $\dot{\varphi}$.

Уравнение (192) называют *дифференциальным уравнением вращательного движения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

Плоское движение тела описывают: уравнениями движения центра масс и уравнением вращения вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости движения.

Дифференциальное уравнение плоского движения тела. Если твердое тело движется параллельно плоскости, то его движение можно рассматривать как состоящее из поступательного движения вместе с полюсом и относительного вращательного вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости движения.

При относительном движении необходимо учитывать кориолисовы силы. Но если за полюс принять центр масс тела, то, как было показано, момент этих сил равен нулю, а потому дифференциальные уравнения плоского движения тела имеют вид:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_k^e; \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_k^e; \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z^e. \qquad (193)$$

При интегрировании системы трех дифференциальных уравнений второго порядка имеем шесть постоянных интегрирования.

Момент инерции относительно оси

Дифференциальные уравнения (192) и (193) показывают, что вращательное и плоское движения тела зависят от его момента инерции. Роль момента инерции тела относительно оси вращения аналогична роли массы тела при его поступательном движении. Как было сказано во введении в кинетику, момент инерции тела относительно оси вращения является мерой инерции тела при вращении вокруг этой оси и выражается суммой

$$J = \sum m_k r_k^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

или, более точно, интегралом $J = \int r^2 \mathrm{d}m$, распространенным на всю массу тела. Момент инерции тела можно определить экспериментально или вычислить по соответствующим формулам. Ввиду исключительного значения этого понятия для кинетики приведем некоторые теоремы и несколько примеров вычисления моментов инерции различных тел относительно различных осей.

Частицы твердого тела имеют, вообще говоря, неодинаковую массу и находятся на разных расстояниях от оси, относительно которой определяют момент инерции.

Радиус инерции. Только в том случае, если все частицы тела отстоят от оси на одинаковом расстоянии, r^2 выходит за знак интеграла (83″) и момент инерции тела выражается произведением квадрата этого расстояния на массу тела. Такой случай можно представить себе, если предположить, что вся масса тела расположена по поверхности круглого цилиндра, построенного вокруг данной оси. В технике (например, в различных каталогах) часто вместо значения момента инерции какой-либо детали машин или какого-либо тела приводят так называемый *радиус инерции* этого тела относительно данной оси, понимая под этим радиус такого воображаемого круглого полого цилиндра, построенного вокруг данной оси, который обладает той же массой m и тем же моментом инерции J относительно этой оси, что и данное тело. Иными словами, под радиусом инерции $r_и$ тела относительно данной оси понимают такую величину, имеющую размерность длины, на квадрат которой надо умножить массу тела, чтобы получить значение момента инерции тела относительно этой оси:

$$J = m r_и^2, \tag{194}$$

откуда

$$r_и = \sqrt{J/m}. \tag{195}$$

Если фигура лежит в плоскости xOy, то $J_z = J_x + J_y$.

Теорема о плоской фигуре. Докажем теорему, называемую теоремой о плоской фигуре и полезную при решении многих задач. Материальные тела, одно из измерений которых значительно меньше двух остальных, в механике часто принимают за плоские материальные фигуры. Пусть любая плоская фигура лежит в плоскости xOy. В этом случае координаты z_k точек этой фигуры равны нулю и моменты инерции (84) относительно координатных осей

$$J_x = \sum m_k y_k^2; \quad J_y = \sum m_k x_k^2; \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Складывая два первых равенства, получаем третье; следовательно, для всякой плоской фигуры, лежащей в плоскости xOy,

$$J_z = J_x + J_y \tag{196}$$

независимо от направления осей Ox и Oy в этой плоскости.

Здесь также имеет место круговая подстановка. Применяя ее, имеем: если плоская фигура лежит в плоскости yOz, то $J_x = J_y + J_z$, если в плоскости zOx, то $J_y = J_z + J_x$,

$$\begin{array}{ccc} z & \rightarrow & y \\ & \nwarrow\ \swarrow & \\ & x & \end{array}.$$

Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции того же тела относительно оси, ей параллельной, но проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями: $J_z = J_{zC} + mc^2$ (Эйлер).

Теорема о параллельных осях. Найдем зависимость между моментами инерции одного и того же тела относительно различных осей, параллельных между собой. Пусть известен момент инерции тела относительно некоторой оси Cz, проходящей через центр масс C тела, и требуется определить момент инерции тела относительно оси Oz', ей параллельной и отстоящей от нее на расстоянии c. Построим прямоугольные координатные оси с началом в центре масс C, направив ось Oy в плоскости обеих осей (рис. 117). Построим также параллельную им систему координатных осей $x'Oy'z'$. Координаты каждой точки K в обеих системах связаны соотношениями $x'=x$; $y'=y-c$; $z'=z$.

Искомый момент инерции тела относительно оси Oz' подсчитаем по формуле

$$J_{z'}=\sum m_k\left[x_k'^2+y_k'^2\right]=\sum m_k\left[x_k^2+(y_k-c)^2\right]=$$

$$=\sum m_k\left[(x_k^2+y_k^2)+c^2-2cy_k\right].$$

Раскрывая квадратные скобки, находим

$$J_{z'}=\sum m_k(x_k^2+y_k^2)+\sum m_k c^2-2\sum c m_k y_k.$$

Вынесем общие множители c^2 и c за знаки второй и третьей сумм. Первый член правой части выражает момент инерции J_{z_C} тела относительно центральной оси Cz, второй член равен произведению суммы масс всех материальных частиц (т. е. массы всего тела) на квадрат расстояния c между осями, а третий член равен нулю, так как $\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k y_k$ является статическим моментом масс относительно центральной оси. Если точка C является центром масс системы материальных точек, то сумма всех произведений, полученных от умножения массы m_k каждой из материальных точек этой системы на их радиусы-векторы (проведенные из центра масс C), равна нулю:

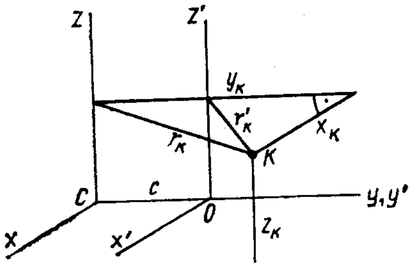


Рис. 117

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{r}_k=0.$$

Следовательно, равны нулю так называемые статические моменты масс системы относительно любых координатных осей, проведенных через центр масс, в частности $\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k y_k=0$.

Получаем

$$J_{z'}=J_{z_C}+mc^2. \tag{197}$$

Равенство (197) можно прочитать так: момент инерции тела относительно оси равен моменту инерции того же тела относительно оси, проведенной через центр масс тела параллельно данной оси, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями *.

Теорема о пересекающихся осях. Приведем без вывода формулу** для вычисления момента инерции J тела относительно оси, проходящей через начало координат $xOyz$ и составляющей с осями координат углы α, β и γ:

$$J = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{y\cdot z} \cos\beta\cos\gamma - 2J_{z\cdot x} \cos\gamma\cos\alpha - 2J_{x\cdot y} \cos\alpha\cos\beta, \qquad (198)$$

где

$$J_{y\cdot z} = \sum m_k y_k z_k; \quad J_{z\cdot x} = \sum m_k z_k x_k;$$

$$J_{x\cdot y} = \sum m_k x_k y_k, \qquad \begin{matrix} & z & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ x & \rightarrow & y \end{matrix} \qquad (199)$$

— так называемые центробежные моменты инерции. Центробежные моменты инерции тела равны сумме произведений массы каждой точки тела на две ее координаты. Поэтому в отличие от всегда положительных моментов инерции тела ($\Sigma m_k r^2_k > 0$) центробежные моменты инерции в зависимости от распределения массы в теле и от направления координатных осей могут оказаться положительными или отрицательными, или равняться нулю. Три оси координат, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называют *главными осями инерции тела****, а моменты инерции тела относительно этих осей называют *главными моментами инерции* ($J_{x\,\text{гл}}$, $J_{y\,\text{гл}}$ и $J_{z\,\text{гл}}$). Если оси координат $xOyz$ совпадают с главными осями инерции, то формула (198) очень упрощается и принимает вид

$$J = J_{x\,\text{гл}} \cos^2\alpha + J_{y\,\text{гл}} \cos^2\beta + J_{z\,\text{гл}} \cos^2\gamma. \quad *)$$

Примеры вычисления момента инерции ****

Задача № 46. Определить момент инерции тонкого однородного прямолинейного стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню в его конце. Вычисления провести с различной точностью: сосредоточив массу m стержня

* Эту теорему часто, но совершенно необоснованно называют теоремой Штейнера. Якоб Штейнер никогда этой теоремы не доказывал, а найденное им (1840) соотношение для распределения точек на плоскости имеет к (197) весьма отдаленное отношение. Теорема была известна еще Гюйгенсу и строго доказана Эйлером (1749).

** Эта формула получена Коши (1827). Аналогичную формулу, но в эйлеровых углах дал Л. Эйлер (1763).

*** Главные оси инерции открыты Сегнером (1755) и независимо от него Эйлером (1758).

**** Моменты инерции различных тел приведены в справочнике (Фаворин М. В. Моменты инерции тел/Под ред. М. М. Гернета. М., 1977, с. 511).

в двух точках, в четырех точках, в восьми точках и учитывая, что масса распределена по стержню непрерывно и равномерно.

Решение 1. Разделим мысленно стержень на две равные части и массу каждой половины сосредоточим в ее середине (рис. 118, *а*). Момент инерции стержня подсчитаем по формуле (82) как момент инерции неизменяемой системы двух материальных точек

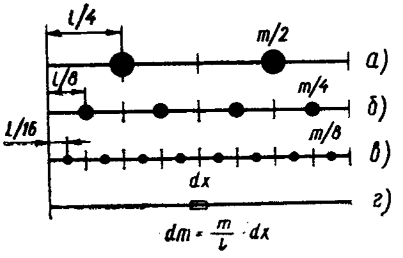


Рис. 118

$$J_y = \sum_{k=1}^{k=2} m_k r_k^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{m}{2} \times \left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{ml^2}{32}(1+9) = \frac{ml^2}{3,2}.$$

2. Разделим мысленно стержень на четыре равные части, массу каждой части будем считать сосредоточенной в ее центре (рис. 118, *б*). Момент инерции стержня подсчитаем по той же формуле (82) для системы четырех материальных точек

$$J_y = \sum_{k=1}^{k=4} m_k r_k^2 = \frac{m}{4}\left(\frac{l}{8}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{3l}{8}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{5l}{8}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{7l}{8}\right)^2 =$$

$$= \frac{ml^2}{4\cdot 64}(1+9+25+49) = \frac{ml^2}{3,05}.$$

3. Разделим мысленно стержень на восемь частей и массу каждой части сосредоточим в ее середине (рис. 118, *в*), а затем подсчитаем момент инерции стержня по формуле (82):

$$J_y = \sum_{k=1}^{k=8} m_k r_k^2 = \frac{ml^2}{8\cdot 256}(1+9+25+49+81+121+169+225) =$$

$$= \frac{ml^2\cdot 680}{2048} = \frac{ml^2}{3,01}.$$

4. Чем на большее число частей разбивается стержень, тем меньше оказывается масса каждой части. Разобьем стержень на сколь угодно большое число сколь угодно малых отрезков длиной $\mathrm{d}x$ каждый (рис. 118, *г*). Чтобы подсчитать массу такого отрезка, надо помножить его длину на массу единицы длины $\rho = m/l$. Сумма конечного числа слагаемых [см. формулу (82)] превратится в предел интегральной суммы, т. е. в интеграл (83). Получим точное решение задачи, взяв интеграл $J = \int r^2 \mathrm{d}m$, распространенный по всей массе стержня

$$J = \int_0^l x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{ml^2}{3}.$$

Ответ. 1) $J = ml^2/3{,}20$; 2) $J = ml^2/3{,}05$; 3) $J = ml^2/3{,}01$; 4) $J = ml^2/3$.

Задача № 47. Вычислить момент инерции однородного тонкого круглого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска в его центре.

Решение. Если плотность диска обозначим через ρ, то масса диска $m = \rho\pi r^2$, откуда, дифференцируя, получим $\mathrm{d}m = \rho\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$.

Подставляем в (83)

$$J = \int_0^r r^2 \,\mathrm{d}m = \int_0^r \rho\, 2\pi r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{\rho \cdot 2\pi r^4}{4} \Bigg|_0^r = \frac{mr^2}{2}.$$

Ответ. Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной диску в его центре, равен половине произведения массы диска на квадрат его радиуса.

Задача № 48. Определить момент инерции однородного круглого цилиндра относительно его оси.

Решение. Поступая, как в предыдущей задаче, имеем

$$m = \rho\pi r^2 h; \ \mathrm{d}m = \rho \cdot 2\pi h r \,\mathrm{d}r;$$

$$J = \int_0^r \rho \cdot 2\pi h r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{mr^2}{2}.$$

Ответ. Момент инерции цилиндра относительно его оси равен половине произведения массы цилиндра на квадрат его радиуса.

Задача № 49. Определить момент инерции однородного круглого цилиндра относительно образующей.

Решение. По теореме о параллельных осях имеем

$$J_z = J_{zC} + mc^2 = mr^2/2 + mr^2 = 1{,}5\ mr^2.$$

Ответ. Момент инерции цилиндра относительно образующей равен трем вторым произведения массы цилиндра на квадрат его радиуса.

Задача № 50. Определить радиус инерции цилиндра относительно его оси.

Решение. Подставляя в (194) данные цилиндра, находим

$$r_и = \sqrt{J/m} = \sqrt{mr^2/(2m)} = r\sqrt{2}/2.$$

Ответ. Радиус инерции цилиндра равен 0,707 его радиуса.

Задача № 51. Вычислить момент инерции диска относительно диаметра.

Решение. Построим оси координат с началом в центре диска, направив ось Oz перпендикулярно его плоскости. Тогда, по теореме о плоской фигуре (196)

$$J_z = J_x + J_y.$$

Так как моменты инерции однородного диска относительно каждого его диаметра одинаковы, то $J_x = J_y$.

Известно, что $J_z = mr^2/2$, а следовательно, $J_x = mr^2/4$.

Ответ. Момент инерции круглого диска относительно диаметра равен одной четверти произведения массы диска на квадрат его радиуса.

Задача № 52. Вычислить момент инерции диска относительно касательной.

Решение. Моменты инерции диска относительно каждого из его диаметров одинаковы. Для решения задачи применим теорему о параллельных осях, выбрав диаметр, параллельный касательной:

$$J = mr^2/4 + mr^2 = (5/4)\,mr^2.$$

Ответ. Момент инерции диска относительно касательной равен пяти четвертым произведения массы диска на квадрат его радиуса.

Задача № 53. Вычислить момент инерции прямого тонкого стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню в его середине.

Решение. Обозначим массу единицы длины стержня ρ. Тогда масса стержня

$m=\rho l$, дифференциал массы $dm=\rho dl$. Момент инерции определяем по формуле (81):

$$J=\int_{-l/2}^{l/2}\rho l^2\,d\,l=\frac{\rho l^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{+l/2}=\frac{\rho l^3}{12}=\frac{ml^2}{12}.$$

Тот же момент инерции можно получить, применив формулу (197) о моментах инерции тела относительно параллельных осей. Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной ему в конце его ($J=ml^2/3$), известен из задачи № 46. Расстояние этой оси от центральной равно $l/2$. Следовательно, по формуле (197) искомый момент инерции относительно центральной оси

$$J=ml^2/3-m\,(l/2)^2=ml^2/12.$$

Ответ. Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню в его середине, равен одной двенадцатой произведения массы стержня на квадрат его длины.

Физическим маятником называют твердое тело, способное качаться относительно оси под действием собственного веса.

Физический маятник. Твердое тело, закрепленное на горизонтальной или на наклонной оси так, что оно может качаться относительно этой оси под действием собственного веса, называют *физическим маятником*. Определим период качаний физического маятника на горизонтальной оси. Обозначим буквой φ угол, составляемый плоскостью, проведенной через ось подвеса O и центр масс C маятника с вертикальной плоскостью. Будем считать, что на физический маятник действует только его вес G и реакция оси подвеса (рис. 119, *а*). Для составления дифференциального уравнения качаний физического маятника воспользуемся уравнением (192)

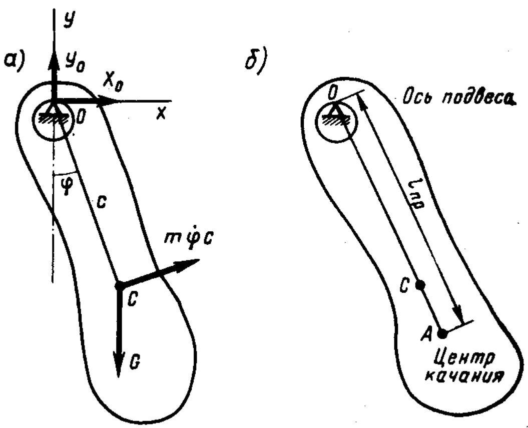


Рис. 119

$$J\ddot\varphi=-Gc\sin\varphi.$$

Здесь J — момент инерции физического маятника относительно оси подвеса; c — расстояние центра масс от оси подвеса.

Если угол достаточно мал, то, полагая $\sin\varphi\approx\varphi$, получим

$$\ddot\varphi+\frac{Gc}{J}\varphi=0,$$

т. е. дифференциальное уравнение, уже проинтегрированное в задаче № 44. Оно описывает гармонические колебания, частота которых в данном случае $k=\sqrt{Gc/J}$, а период

$$\tau_{ф}=2\pi\sqrt{J/(Gc)}. \qquad (200)$$

Длину l математического маятника с таким же периодом качаний, что и данный физический, называют *приведенной длиной физического маятника**. Чтобы определить эту длину, приравняем период $\tau_{м}$ качаний математического маятника $\tau_{м}=2\pi\sqrt{l/g}$ периоду $\tau_{ф}$ качаний физического маятника (200). Получим

$$l_{пр}=J/(mc). \qquad (201)$$

Отложим от точки O (рис. 119, *б*) по прямой OC отрезок OA, равный приведенной длине физического маятника. Точку A называют *центром качания* маятника, а ось, проведенную через центр качания параллельно оси подвеса маятника,— *осью качания* маятника. Если ось качания сделать осью подвеса, то период качаний не изменится. Это свойство использовано в «оборотном маятнике Катера» для гравиметрических измерений **.

Экспериментальное определение моментов инерции ***

Задача № 54. Для определения момента инерции шатун подвесили на горизонтальную призму (рис. 120). Через ту же призму перекинули тонкую нить, на одном конце которой висел небольшой грузик, а другой натягивали рукой. Отклонив шатун и грузик из равновесного положения, заставили их свободно качаться в параллельных плоскостях. Изменяя длину нити между призмой и грузом, добились того, чтобы период качания грузика стал равен периоду качания шатуна. Определить момент инерции шатуна относительно оси подвеса, если масса шатуна $m=40{,}0$ кг, расстояние центра тяжести шатуна от оси подвеса $c=75{,}0$ см и длина нити $l=107{,}9$ см.

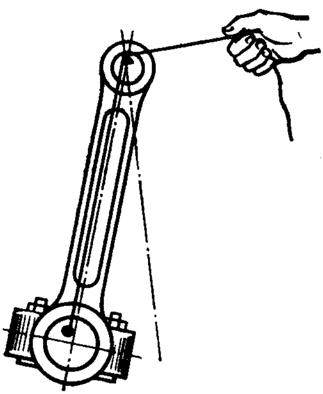


Рис. 120

Решение. Принимая груз на нити за математический маятник, применим для решения формулу (201) приведенной длины физического маятника

$$J=mcl,$$

или

$$J=40\cdot75\cdot107{,}9=323\,700\ кг\cdot см^2=32{,}37\ кг\cdot м^2.$$

* Задача определения приведенной длины маятника была поставлена Марсеном (1646). Над ней работали многие ученые (Декарт, Роберваль, Кавендиш, Пикар и др.). Полное и точное решение этой задачи Гюйгенсом (1673) явилось едва ли не первым случаем геометрического интегрирования, первым точным решением задачи по динамике твердого тела, первым введением понятия момента инерции и, безусловно, создало эпоху в развитии физико-математических наук.

** Оборотный маятник создал Прони в 1792 г., т. е. на 25 лет раньше Катера (1817).

*** Экспериментальные методы определения моментов инерции рассмотрены в кн.: *Гернет М. М.* и *Ратобыльский В. Ф.* Определение моментов инерции. М., 1969, с. 1—150, 1977, с. 1—511.

При этом способе экспериментального определения моментов инерции амплитуда колебаний не ограничена, так как формула (201) справедлива для колебаний физического и математического маятника с любыми одинаковыми амплитудами.

Ответ. $J=32{,}37$ кг·м².

Теорема Резаля. Прецессия оси гироскопа *

Задача № 55 (*М*). Волчок вращается вокруг своей оси (рис. 121, *а*) против движения часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega=600$ с⁻¹; ось OA наклонена к вертикали; нижний конец оси OA остается неподвижным; центр тяжести C волчка находится на оси OA на расстоянии $OC=30$ см от точки O;

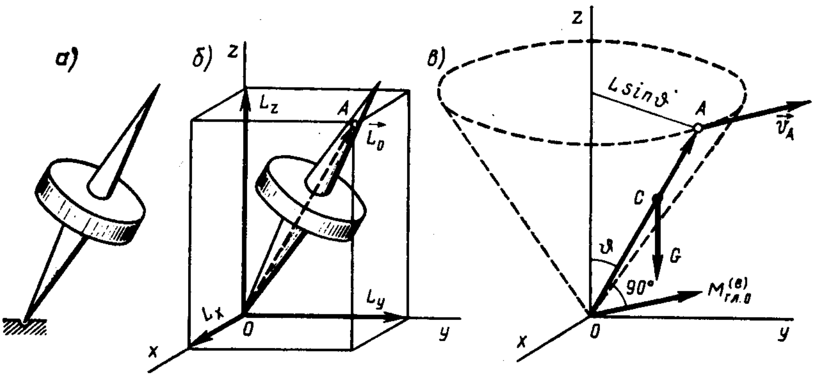


Рис. 121

радиус инерции волчка относительно оси равен 10 см. Определить движение оси OA волчка, допуская, что при задании весьма большой угловой скорости ω главный момент количеств движения волчка направлен по оси OA и равен $J\omega$.

Решение. Гироскоп (волчок) имеет ось симметрии **. Согласно условию задачи главный момент количества движения волчка направлен по оси симметрии. Если бы ось была неподвижной, то такое направление кинетического момента являлось бы очевидным. Но основным свойством всякого гироскопа является его способность быстро вращаться вокруг оси при одновременном поворачивании оси вращения. Если угловая скорость ω гироскопа вокруг оси очень велика, а угловая скорость ω_1, с которой поворачивается ось гироскопа, невелика, то с достаточной точностью можно допустить, что главный момент количеств движения гироскопа относительно точки опоры O направлен по оси симметрии и равен произведению угловой скорости на момент инерции гироскопа относительно оси симметрии:

$$L_O=J\omega.$$

Построим систему координатных осей $xOyz$ с началом в точке O (рис. 121, *б*) и отложим вдоль оси симметрии вектор $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{L_O}$ в такую сторону, чтобы

* Термин «гироскоп» предложил Фуко (1852).

** Не всякий гироскоп имеет ось симметрии. Теория несимметричного гироскопа создана С. В. Ковалевской в 1888 г.

вращение гироскопа представлялось происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть от A к O.

Проекции вектора $\vec{L}_O$ на оси координат представляют собой главные моменты количеств движения $L_{\text{гл}\,x}$, $L_{\text{гл}\,y}$ и $L_{\text{гл}\,z}$ гироскопа относительно этих осей. Эти же величины являются координатами точки A. При движении системы главный момент $\vec{L}_O$ не остается постоянным, точка A (конец вектора), описывая годограф, перемещается в пространстве и координаты ее меняются. Проекции скорости v_A точки A на оси координат равны первым производным от текущих координат точки по времени, т. е. производным от главных моментов количеств движения системы относительно осей, которые в свою очередь равны главным моментам внешних сил относительно тех же осей:

$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = \frac{dL_{\text{гл}\,x}}{dt} = M^e_{\text{гл}\,x};$$

$$v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt} = \frac{dL_{\text{гл}\,y}}{dt} = M^e_{\text{гл}\,y};$$

$$v_{Az} = \frac{dz_A}{dt} = \frac{d\,L_{\text{гл}\,z}}{dt} = M^e_{\text{гл}\,z},$$

или в векторной форме

$$\vec{v}_A = \vec{M}^e_{\text{гл}\,O}.$$

Таким образом, на примере гироскопа доказана *теорема Резаля:* скорость конца вектора главного момента количеств движения, взятого относительно точки O, равна главному моменту всех внешних сил системы относительно той же точки.

Применим эту теорему к решению данной задачи. Определим главный момент внешних сил относительно точки O. Внешними силами являются вес гироскопа и реакция в точке O (рис. 121, *в*). Главный момент внешних сил относительно точки O направлен перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через OC, и равен произведению веса mg на плечо $CO \cdot \sin\vartheta$. По теореме Резаля

$$v_A = M^e_O = mg \cdot CO \cdot \sin\vartheta,$$

причем направление скорости v_A перпендикулярно вертикальной плоскости, содержащей в себе ось симметрии гироскопа. Так как точка A принадлежит этой оси, то движение точки A определяет движение оси гироскопа. Ось симметрии гироскопа описывает коническую поверхность. Это движение оси гироскопа называется *прецессией*. Точка A описывает окружность радиуса $J\omega \sin\vartheta$, двигаясь с окружной скоростью, численно равной

$$\omega_1 J\omega \sin\vartheta = v_A = mg \cdot CO \cdot \sin\vartheta.$$

Следовательно, ось гироскопа вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью

$$\omega_1 = \frac{mg \cdot CO \cdot \sin\vartheta}{J\omega \cdot \sin\vartheta} = \frac{981 \cdot 30}{100 \cdot 600} = 0{,}49\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ. Ось OA вращается вокруг вертикали против часовой стрелки, описывая круглый конус с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 0{,}49\ \text{с}^{-1}$.

§ 37. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинетической энергией называют меру механического движения, выражающуюся половиной суммы произведений массы каждой частицы материальной системы на квадрат ее скорости: $T = \Sigma mv^2/2$.

Кинетическая энергия. Перейдем теперь к изучению другой меры — кинетической энергии, которая наряду с количеством движения существует во всяком движущемся материальном теле. Кинетическая энергия каждой материальной точки выражается половиной произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2}}. \tag{202}$$

Кинетическую энергию системы определяют как сумму кинетических энергий всех точек этой системы. Сумму надо брать, конечно, арифметическую, потому что, как видно из (202), кинетическая энергия есть величина скалярная и всегда положительная

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k v_k^2, \tag{203}$$

или

$$T = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \tag{203'}$$

Размерность кинетической энергии: в физической системе единиц

$$[T]_{ф} = \mathrm{L^2 M^1 T^{-2}},$$

в технической системе единиц

$$[T]_{т} = \mathrm{L^1 F^1 T^0}.$$

Кинетической энергией механической системы называется мера механического движения, характеризующая его способность превращаться в эквивалентное количество другого вида движения и выражающаяся половиной суммы произведений массы каждой материальной частицы механической системы на квадрат ее скорости.

В случаях движения неизменяемой механической системы (твердого тела) выражению (203) можно придать вид, более удобный для вычисления.

Кинетическая энергия поступательно движущегося тела выражается половиной произведения массы на квадрат скорости: $T=mv^2/2$.

Кинетическая энергия поступательно движущегося тела. Скорости всех частиц поступательно движущегося тела между собой равны (38), поэтому если твердое тело совершает поступательное движение, то в формуле кинетической энергии (203) квадрат скорости как общий множитель выходит за знак суммы:

$$T=\frac{v^2}{2}\sum m_k,$$

где $k=1, 2, 3, \dots, n$.

Сумма масс всех частиц тела равна массе m всего тела и

$$T=mv^2/2.$$

Итак, кинетическая энергия поступательно движущегося тела, как и кинетическая энергия материальной точки, равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его частиц.

Кинетическая энергия вращающегося тела выражается половиной произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости: $T=J\omega^2/2$.

Кинетическая энергия вращающегося тела. Скорости частиц вращающегося твердого тела пропорциональны угловой скорости тела и расстояниям частиц от оси вращения [см. уравнение (49)]

$$v_k=\omega r_k.$$

Возводя это равенство в квадрат и подставляя в (203), получим

$$T=\sum m_k\omega^2 r_k^2/2.$$

Выносия общий множитель $\omega^2/2$ за знак суммы и принимая во внимание, что сумма произведений массы каждой частицы на квадрат расстояния этой частицы от оси выражает момент инерции тела относительно оси [формула (82)], получаем окончательно

$$T=J\omega^2/2. \qquad (204)$$

Кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии его центра масс, в котором предполагается сосредоточенной масса всего тела, плюс кинетическая энергия тела в его вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс тела: $T=mv_C^2/2+J_C\omega^2/2$.

Формула Кёнига. Выведем формулу для определения кинетической энергии твердого тела, совершающего плоское движение. Для определения проекций скорости были выведены формулы (59)

$$v_{kx}=v_{Ex}-y_{1k}\omega,$$
$$v_{ky}=v_{Ey}+x_{1k}\omega,$$

где x_{1k} и y_{1k} — координаты точки k относительно осей с началом в произвольном полюсе E. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, найдем квадрат полной скорости любой точки тела:

$$v_k^2=v_E^2+(x_{1k}^2+y_{1x}^2)\,\omega^2-2v_{Ex}y_{1k}\omega+2v_{Ey}x_{1k}\omega.$$

Подставляем в (203) значение v^2_k

$$T=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{m_k}{2}\left[v_E^2+(x_{1k}^2+y_{1k}^2)\,\omega^2-2v_{Ex}y_{1k}\omega+2v_{Ey}x_{1k}\omega\right].$$

Разобьем эту сумму на четыре части и вынесем за знаки Σ величины, не зависящие от k:

$$T=\frac{v_E^2}{2}\sum_{k=1}^{k=n}m_k+\frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{k=n}m_k(x_{1k}^2+y_{1k}^2)+$$

$$+v_{Ey}\omega\sum_{k=1}^{k=n}m_kx_{1k}-v_{Ex}\omega\sum_{k=1}^{k=n}m_ky_{1k}.$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{k=n}m_k=m$ — масса всего тела; $\sum\limits_{k=1}^{k=r}m_k\,(x_{1k}^2+y_{1k}^2)=J_E$ — момент инерции тела относительно оси, проходящей через E перпендикулярно плоскости движения; $\sum\limits_{k=1}^{k=n}m_kx_{1k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{k=n}m_ky_{1k}$ — статические моменты масс (см. § 26) относительно осей координат, имеющих начало в полюсе E.

Если за полюс принять центр масс C тела, то последние два члена обращаются в нуль и кинетическая энергия получает простое выражение

$$\boxed{T=mv_C^2/2+J_C\omega^2/2.}\qquad(205)$$

Эта формула доказана для плоского движения твердого тела *. Но она остается справедливой при всяком движении твердого тела. Ее можно прочитать так: кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии материальной точки, обладающей массой всего тела и скоростью центра масс, плюс кинетическая энергия тела в его вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс.

При разложении движения в кинематике можно принимать за полюс любую точку тела. При определении кинетической энергии по формуле (205) необходимо принимать за полюс центр масс тела, иначе появятся члены, содержащие статические моменты масс **.

* Она является частным случаем более общей формулы, доказанной Кёнигом (1751).

** Как показал Коши (1827), существуют и некоторые другие определенные точки, которыми в формуле (205) можно заменить центр масс C (см. предыдущие издания: *Гернет М. М.* Курс теоретической механики).

Теорема об изменении кинетической энергии

Изменение кинетической энергии материальной точки равно работе, приложенной к точке силы: $T-T_0=A$.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Напишем дифференциальные уравнения (141) движения материальной точки:

$$m\frac{dv_x}{dt}=X;\; m\frac{dv_y}{dt}=Y;\; m\frac{dv_z}{dt}=Z.$$

Умножим первое из этих уравнений на $v_x=dx/dt$, второе — на $v_y=dy/dt$ и третье — на $v_z=dz/dt$. Сокращая dt в знаменателях правых и левых частей, получим:

$$mv_x\,dv_x=X\,dx;\; mv_y\,dv_y=Y\,dy;\; mv_z\,dv_z=Z\,dz$$

или

$$d m\frac{v_x^2}{2}=X\,dx;\; d m\frac{v_y^2}{2}=Y\,dy;\; d m\frac{v_z^2}{2}=Z\,dz.$$

Сложим все три уравнения и заменим в левой части сумму дифференциалов дифференциалом суммы

$$d\,\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

В числителе левой части имеем квадрат полной скорости (16), а правая часть выражает элементарную работу силы (128). Следовательно,

$$d\frac{mv^2}{2}=dA, \tag{206}$$

т. е. дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе. Интегрируя равенство (206), получим

$$mv^2/2=A+C.$$

Постоянную интегрирования определим из начальных данных. В начальное мгновение скорость точки $v=v_0$, работа равнялась нулю. Подставляя эти данные, получим $C=mv_0{}^2/2$ и окончательно

$$mv^2/2-mv_0^2/2=A. \tag{207}$$

Равенство (207) можно прочитать так: изменение кинетической энергии материальной точки при перемещении этой точки на каком-либо участке пути равно работе силы, приложенной к точке, на том же участке пути. Уравнение (207) называют *уравнением кинетической энергии.*

Дадим другой вывод формулы (207). Пусть точка M движется по своей траектории под действием силы $\vec{F}=m\vec{a}$. Работа силы на элементарном пути ds

$$dA=F\cos(\widehat{Fv})\,ds=ma\cos(\widehat{Fv})\,ds.$$

Но проекция $a\cos(\widehat{Fv})$ ускорения a на скорость v выражает тангенциальное ускорение $a_T=dv/dt$, а потому

$$dA=m\frac{dv\,ds}{dt}=mv\,dv$$

и

$$A=\int_{v_0}^{v} mv\,dv=mv^2/2-mv_0^2/2.$$

Если на материальную точку действуют несколько сил, то A означает работу равнодействующей приложенных к точке сил.

Уравнение (207) можно записать более коротко:

$$\boxed{T-T_0=A.}$$

Изменение кинетической энергии материальной системы равно сумме работ внешних и внутренних сил системы: $T-T_0=A$.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы. Пусть механическая система состоит из материальных точек. Разбив на две категории все силы, действующие на точки системы, напишем дифференциальные уравнения в форме (144):

$$m_k\ddot{x}_k=X_k^e+X_k^i;\quad m_k\ddot{y}_k=Y_k^e+Y_k^i;\quad m_k\ddot{z}_k=Z_k^e+Z_k^i,$$

где $k=1, 2, 3, \dots, n$.

Рассмотрим отдельно какую-либо из точек системы и напишем для нее уравнение кинетической энергии. На эту точку действуют как внешние, так и внутренние силы, и в правой части уравнения кинетической энергии напишем сумму работ внешних и внутренних сил, приложенных к этой точке:

$$m_kv_k^2/2-m_kv_{k0}^2/2=A_k^e+A_k^i.$$

Составим такие же уравнения для всех точек и возьмем сумму

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{m_kv_k^2}{2}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{m_kv_{k0}^2}{2}=\sum_{k=1}^{k=n}A_k^e+\sum_{k=1}^{k=n}A_k^i. \qquad (208)$$

В левой части имеем разность кинетических энергий системы, а в правой — сумму работ всех внешних и внутренних сил системы;

следовательно, изменение кинетической энергии материальной системы при каком-либо ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на том же перемещении системы:

$$T-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i;\ T-T_0=A. \qquad (209)$$

Припомним, что внутренние силы системы не вошли в уравнение проекций количеств движения системы (179′) и в уравнения моментов системы (190). Однако они имеются в уравнении (208) кинетической энергии системы. Происходит это потому, что сумма проекций на любую ось и сумма моментов всех внутренних сил относительно любой оси всегда равна нулю, так как внутренние силы системы попарно равны и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Но сумма работ внутренних сил системы в общем случае не равна нулю.

Пусть, например, две точки системы отталкивают друг друга внутренними равными и противоположно направленными силами и под действием этих сил расстояние между точками увеличивается. Перемещения обеих точек направлены по силам, работы обеих сил положительны и сумма работ этих сил не равна нулю. Внутренние силы системы можно рассматривать как силы взаимодействия точек, взятых по две. Поэтому сказанное о двух точках распространяется на все точки системы.

Силы взаимодействия между каждыми двумя частицами направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти частицы. Если расстояние между частицами не изменяется, то относительное перемещение этих частиц может быть только в направлении, перпендикулярном этой прямой. Но силы, перпендикулярные перемещениям, работы не совершают, а потому работа внутренних сил неизменяемой системы (абсолютно твердого тела) равна нулю.

Если система состоит из нескольких твердых тел, то работа внутренних сил каждого твердого тела равна нулю, но работа внутренних сил, действующих между каждыми двумя твердыми телами, принадлежащими к этой системе, в общем случае не равна нулю.

Задача № 56 (*М*). Цилиндрический вал диаметром 10 см и весом 0,5 тс, на который насажено маховое колесо диаметром 2 м и весом 3 тс, вращается в данное мгновение с угловой скоростью 60 об/мин, а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов еще сделает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05? При решении задачи массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу.

Решение. Примем следующие единицы измерения: L — в сантиметрах, F — в тоннах-силах, T — в секундах. Требуется определить количество оборотов вала до остановки. Механическое движение (вращение) вала с маховиком исчезает, переходит в другие виды движения. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии (209).

На вал с насаженным на него маховым колесом действуют силы: 1) вес всей системы, состоящей из веса махового колеса и веса вала $G=3{,}5$ тс;

2) реакции в опорах; 3) сила трения в подшипниках, равная произведению веса на коэффициент трения; $F_{тр}=0{,}05\cdot 3{,}5$ тс.

Точка приложения первой из этих сил неподвижна, а потому работа первой из этих сил равна нулю.

Реакции перпендикулярны перемещениям, а потому работа реакции равна нулю.

Работу сил трения определим по (131″) как работу силы, приложенной к вращающемуся телу. Момент силы трения относительно оси вращения равен произведению силы трения на плечо (на радиус вала):

$$M_{тр}=0{,}05\cdot 3{,}5\cdot 5=0{,}875 \text{ тс}\cdot\text{см}.$$

Работа отрицательна, так как сила направлена против скорости, т. е. если вращение вала происходит против хода часовой стрелки ($\varphi>0$), то $M_{тр}<0$, а потому $A=M_{тр}\varphi<0$; если же $\varphi<0$, то $M_{тр}>0$, а потому $A<0$:

$$A=-0{,}05\cdot 3{,}5\cdot 5\varphi=-0{,}875\varphi.$$

Кинетическую энергию системы определим по (204) как кинетическую энергию вращающегося тела.

Момент инерции системы равен сумме момента инерции маховика и момента инерции вала. Хотя вес вала только в шесть раз меньше веса махового колеса, но момент инерции вала исчезающе мал по сравнению с моментом инерции махового колеса, так как момент инерции зависит не столько от массы тела, сколько от ее распределения. Действительно, если масса маховика равномерно распределена по ободу, то

$$J=mR^2=\frac{3}{981}100^2=\frac{30\,000}{981} \text{ тс}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2.$$

Момент инерции цилиндрического вала определяем как момент инерции цилиндра относительно его оси (см. задачу № 48):

$$J=\frac{mr^2}{2}=\frac{0{,}5}{2\cdot 981}5^2=\frac{12{,}5}{2\cdot 981} \text{ тс}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2.$$

Следовательно, момент инерции вала в 4800 раз меньше момента инерции маховика, и при решении задачи моментом инерции вала следует пренебречь.

Определим начальную угловую скорость

$$\omega_0=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\cdot 60}{30}=2\pi.$$

Конечная угловая скорость равна нулю.

Все полученные данные подставляем в (209):

$$-\frac{30\,000\cdot 4\pi^2}{981\cdot 2}=-0{,}875\varphi.$$

Из этого уравнения можно определить число оборотов вала до остановки. Так как φ выражена в радианах, а в каждом 2π обороте 2π радиан, то, обозначая искомое число оборотов x, получим

$$\varphi=2\pi x.$$

Подставляем φ в предыдущее уравнение и, решая, получаем ответ.

Ответ. Вал сделает до остановки 109,7 оборота.

Задача № 57. (№ 35. *Яблонский А. А.* Курс теоретической механики, ч. 2. М., 1962). Доска весом G_1 лежит на двух одинаковых цилиндрических катках весом G каждый, находящихся на горизонтальной плоскости. К доске приложена постоянная горизонтальная сила P. При движении системы скольжение между катками и доской отсутствует. Определить ускорение доски, пренебрегая сопротивлением качению.

Решение. К механической системе, состоящей из доски и двух катков, применим теорему об изменении кинетической энергии в форме (209):

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^e + \sum_{k=1}^{k=n} A_k^i.$$

Определим кинетическую энергию системы. При качении катка без скольжения его мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения с неподвижной плоскостью. Кинетическую энергию каждого из цилиндрических катков определим по формуле (204):

$$T_ц = \frac{J_{мцс}\omega^2}{2} = \left(\frac{Gr^2}{2g} + \frac{Gr^2}{g}\right)\frac{v_C^2}{2r^2} = \frac{3G}{4g}\,v_C^2.$$

Кинетическую энергию доски, движущейся поступательно со скоростью v, равной скорости верхней точки обода каждого катка, определим по (202)

$$T_д = G_1 v^2/2g.$$

Модули скоростей точек фигуры пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра скоростей, следовательно,

$$v = 2v_C.$$

Кинетическая энергия всей механической системы, т. е. двух цилиндрических катков и доски,

$$T = 2T_ц + T_д = \frac{3}{2}\,\frac{G}{g}\,v_C^2 + \frac{1}{2}\,\frac{G_1}{g}\,v^2 = \frac{1}{8}\,\frac{v^2}{g}\,(3G + 4G_1).$$

Аналогично

$$T_0 = \frac{1}{8}\,\frac{v_0^2}{g}\,(3G + 4G_1).$$

Определим работу внешних сил. На систему действуют внешние силы (рис. 122); движущая сила P, веса G_1, G и G, нормальные реакции R_1 и R_2 неподвижной плоскости и силы трения скольжения $F_{1тр}$ и $F_{2тр}$.

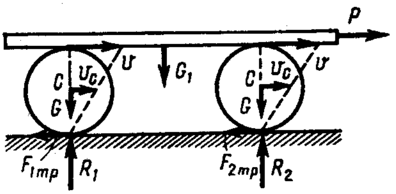


Рис. 122

Работа сил тяжести на горизонтальном перемещении их точек приложения равна нулю. Работа идеальных реакций и сил трения, приложенных в мгновенных центрах скоростей катков, равна нулю. Сумма работ всех внешних сил содержит только работу силы P на пути s:

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^e = Ps.$$

Но в уравнение кинетической энергии системы входит также работа внутренних сил системы. Определим ее. Работа внутренних сил каждого из твердых тел всегда равна нулю. Работа внутренних сил взаимодействия между твердыми телами системы (между доской и катком) в данном случае тоже равна нулю, так как эти силы равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к точкам, элементарные перемещения которых одинаковы, так как нет скольжения доски по каткам. Таким образом, имеем

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^i = 0.$$

Подставляя значения T, T_0 и $\sum_{k=1}^{k=n} A_k^e$ в уравнение (209), находим

$$\frac{1}{8g}(3G + 4G_1)(v^2 - v_0^2) = Ps.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим

$$\frac{1}{4g}(3G + 4G_1)\frac{v\,dv}{dt} = P\frac{ds}{dt}.$$

Ответ. $a = \dfrac{4P}{3G + 4G_1}g.$

§ 38. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Силовым полем называют часть пространства, приведенную какими-либо телами в такое состояние, при котором в каждой ее точке на данную материальную частицу действует сила, независящая от скорости этой частицы.

Силовое поле. Пусть к материальной частице, находящейся внутри некоторой области (части пространства), приложена сила F. Эта сила, как и всякая другая, вызвана какими-нибудь материальными телами. Если материальная частица передвигается в этой области, то действующая на нее сила $\vec{F}$ может изменяться в зависимости от положения частицы (быть функцией ее координат) или же оставаться постоянной, но не должна зависеть от скорости частицы. Такую часть пространства называют *силовым полем.*

Предположим, что существует такая функция U координат этой материальной частицы $U = U(x, y, z)$, частные производные которой по x, y и z равны проекциям X, Y и Z силы F поля на соответствующие оси координат:

$$\partial U/\partial x = X;\ \partial U/\partial y = Y;\ \partial U/\partial z = Z. \qquad (210)$$

Функцию называют *силовой функцией**, а силу $\vec{F}$ поля, проекции которой на оси равны частным производным от силовой функции по этим осям, называют *градиентом силовой функции*

$$\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z = \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (211)$$

* Термин ввел Гамильтон.

Подставим в формулу (128), выражающую элементарную работу силы, вместо X, Y и Z частные производные силовой функции

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU,$$

т. е. элементарная работа силы поля равна полному дифференциалу силовой функции

$$dA = dU. \tag{212}$$

В потенциальном поле работа силы поля, приложенной к материальной частице, зависит только от начального и конечного положений этой частицы.

Потенциальное поле. Силовое поле, в котором имеется силовая функция U, называют *потенциальным полем*. Пусть в потенциальном поле движется материальная частица, перемещающаяся с произвольной скоростью и безразлично по какой траектории из одного положения, которое примем за начальное, в какое-либо другое, которое назовем конечным. Обозначим через U_0 значение силовой функции в той точке поля, которая принята за начальное положение частицы, а через U — в конечной точке и затем, проинтегрировав левую и правую части равенства (212) в соответствующих пределах от 0 до A и от U_0 до U, получим

$$A = U - U_0. \tag{213}$$

Таким образом, независимо от скорости частицы и формы траектории работа силы потенциального поля равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках траектории. Пусть имеется такое положение точки, для которого значение силовой функции равно нулю. Назовем это положение *нулевым* и примем его за начальное ($U_0 = 0$). В таком случае

$$A = U.$$

Следовательно, силовая функция выражает ту работу, которую производит сила поля при переходе материальной частицы из нулевого положения в данное.

Потенциальная энергия материальной точки равна работе сил потенциального поля при переходе точки из данного положения в нулевое.

Потенциальная энергия материальной частицы. Наряду с силовой функцией U понадобится величина Π, связанная с силовой функцией простой зависимостью

$$\Pi = -U \tag{214}$$

и называемая *потенциальной энергией* *.

Равенство (214) вместе с предыдущим равенством (213) позволяют выяснить физическую сущность этого понятия: потенциаль-

* Термин «потенциальная энергия» встречается у Лазаря Карно. Во всеобщее употребление термины «кинетическая энергия» и «потенциальная энергия» были введены Ранкиным, определившим кинетическую энергию как активную, а потенциальную — как энергию положения.

ная энергия материальной точки, находящейся в каком-либо данном положении, равна работе, которую могут произвести силы потенциального поля при переходе точки из данного положения в нулевое.

Поясним это следующими примерами.

Потенциальная энергия пружины. Сжатая пружина обладает потенциальной энергией, обусловленной упругими деформациями в материале пружины. Если пружина сжата на величину x, то, как было показано (132), при переходе ее в ненапряженное состояние сила упругости может совершить работу $A=cx^2/2$. Эта способность сжатой пружины совершать работу является потенциальный энергией пружины

$$\Pi=cx^2/2.$$

Так же выразится и потенциальная энергия растянутой пружины.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести. Материальная частица или тяжелое тело, поднятые на некоторую высоту, обладают потенциальной энергией, равной той работе, которую совершит сила тяжести при опускании тела до «нулевого положения». Однако нулевое положение в поле силы тяжести не может быть так естественно определено, как в поле упругой силы. Для пружины и вообще в случаях упругих сил нулевым положением является то, при котором отсутствует деформация. Для тяжелого тела нулевым положением может быть уровень пола, уровень земли и т. п. Уровень, относительно которого отсчитывают потенциальную энергию тела, поднятого на некоторую высоту, может быть выбран совершенно произвольно. Но эта условность в выборе нулевого положения не сказывается на расчетах, так как в расчеты всегда входит не полная потенциальная энергия, а ее изменение. Нужно лишь отсчитывать потенциальную энергию относительно одного и того же уровня. Поэтому для определения потенциальной энергии тела в поле силы тяжести построим систему прямоугольных координатных осей, направив ось Oz вертикально вверх, но не будем пока уточнять положение начала отсчета и подсчитаем проекции силы тяжести

$$X=0;\ Y=0;\ Z=-G.$$

Определим дифференциал силовой функции

$$X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z=-G\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}U.$$

Интегрируя, найдем силовую функцию силы тяжести

$$U=-Gz+C.$$

Постоянная интегрирования C зависит от начала отсчета, но изменение силовой функции от начала отсчета не зависит. Пусть, например, некоторому положению тела соответствует силовая функция

$$U_1 = -Gz_1 + C,$$

а при другом положении тела силовая функция изменилась и стала

$$U_2 = U_1 + \Delta U_1 = -Gz_2 + C.$$

Изменение силовой функции не зависит от постоянной C

$$U_2 - U_1 = \Delta U_1 = G(z_1 - z_2) = -Gh.$$

Также не зависит от начала отсчета и постоянной C изменение потенциальной энергии тела, равное $+Gh$.

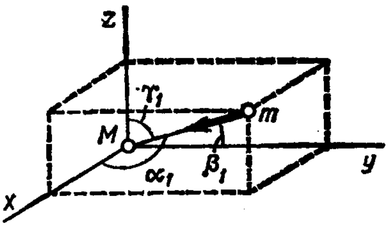


Рис. 123

Силовая функция поля всемирного тяготения. По закону всемирного тяготения планеты притягиваются к Солнцу с силой $F = kMm/r^2$, где M — масса Солнца; m — масса планеты; k — постоянная величина *. Построив систему координат с началом в центре Солнца (рис. 123), определим проекции силы на оси, для чего умножим модуль силы на ее направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = -\cos\alpha_1 = -x/r;\ \cos\beta = -\cos\beta_1 = -y/r;$$

$$\cos\gamma = -\cos\gamma_1 = -z/r.$$

Получим

$$X = -kMmx/r^3;\ Y = -kMmy/r^3;\ Z = -kMmz/r^3.$$

Найдем дифференциал силовой функции:

$$\mathrm{d}U = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = -kMm\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{r^3}.$$

Числитель дроби в правой части представляет собой $r\mathrm{d}r$, в чем можно убедиться, продифференцировав равенство $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, поэтому

$$\mathrm{d}U = -kMmr\mathrm{d}r/r^3 = -kMm\mathrm{d}r/r^2.$$

Интегрируя, находим силовую функцию ньютонианского поля

$$U = kMm/r + C. \qquad (215)^{**}$$

Или, если ввести так называемое гауссово число $\mu = kM$, где M — масса Солнца, то

$$U = \mu m/r + C.$$

Потенциальная энергия выражается так же, но с обратным знаком.

---

* Коэффициент k был определен Кавендишем (1798) из опытов над притяжением двух шаров — большого свинцового и маленького медного.

** Открыта Лагранжем в 1773 г.

При движении материальной частицы под действием силы потенциального поля сумма кинетической и потенциальной энергий частицы остается постоянной.

Закон сохранения механической энергии. На материальную частицу, находящуюся в потенциальном поле, действует сила этого поля, поэтому при движении частицы скорость, а следовательно, и кинетическая энергия ее в общем случае меняются. Выражая в уравнении (207) работу A равенством (213), найдем зависимость изменения кинетической энергии от изменения силовой функции

$$mv^2/2-mv_0^2/2=U-U_0. \tag{216}$$

Это равенство называют *интегралом кинетической энергии*. Оно показывает, что изменение кинетической энергии материальной частицы, движущейся в потенциальном поле, равное изменению силовой функции, не зависит от пути материальной частицы, а зависит лишь от ее начального и конечного положений в потенциальном поле.

Если в равенстве (216) силовую функцию выразим посредством (214) через потенциальную энергию, то получим

$$mv^2/2-mv_0^2/2=\Pi_0-\Pi,$$

откуда

$$mv^2/2+\Pi=mv_0^2/2+\Pi_0,$$

т. е.

$$mv^2/2+\Pi=\mathrm{const}. \tag{217}$$

Таким образом, если материальная частица движется в потенциальном поле под действием сил этого поля, то во всякое мгновение при всяком положении частицы сумма ее кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная. Равенство (217) выражает *закон сохранения механической энергии* и имеет применение в тех случаях, когда на частицу не действуют никакие силы, кроме сил потенциального поля. Поэтому потенциальные поля называют также *консервативными* (от лат. conservativus — сохраняющий).

Так, например, закон сохранения механической энергии справедлив при движении планет в поле ньютонианского тяготения: чем ближе к Солнцу находится планета на своей эллиптической орбите, тем меньше ее потенциальная энергия и соответственно больше кинетическая (см. § 36 — закон площадей). Скорость периодических комет, движущихся по очень вытянутым эллипсам, в перигелии во много раз превышает их скорость в афелии, но в любой точке орбиты сумма кинетической и потенциальной энергий кометы есть для этой кометы величина постоянная.

При движении тела вблизи земной поверхности на тело кроме силы тяжести действуют различные диссипативные силы, например сила сопротивления воздуха, поэтому закон сохранения механической энергии здесь неприменим: происходит *рассеяние* механической энергии, переход ее в другие немеханические виды. Вместе с тем и немеханические виды энергии могут переходить в механическую энергию. Переход не только механической, но и всякой другой энергии из данного вида в эквивалентное количество энергии всякого другого вида подчинен *всеобщему закону сохранения и превращения энергии,* изучаемому в курсах физики. Согласно этому закону во всякой изолированной системе сумма энергий всех видов (кинетической, потенциальной, тепловой, электрической и т. п.) остается постоянной.

Открытие закона сохранения механической энергии [выражаясь точнее, вывод равенства (217)] обычно приписывают Гельмгольцу. Но он провел разработку лишь математической стороны вопроса, однако физическая сущность равенств (216) и (217) не могла получить правильного освещения в трудах Гельмгольца, понимавшего движение не как внутренне присущий материи атрибут, а как нечто внешнее по отношению к материи, «существо которой», по выражению Гельмгольца, «в самом себе представляется для нас покоящимся и бездейственным».

Открытие же всеобщего закона сохранения и превращения энергии приписывают обычно Р. Майеру или Джоулю. Но никакое крупнейшее открытие не может принадлежать одному человеку. В частности, открытие этого закона было подготовлено трудами Декарта, Гюйгенса, Лейбница, Ломоносова, Сади Карно и многих других ученых. Постановка этой проблемы и, в частности, изучение перехода тепловой энергии в механическую было вызвано в первой половине XIX в. развитием промышленности и применением паровых машин, практически осуществляющих этот переход энергии.

Равновесные положения механической системы в потенциальном поле, при которых потенциальная энергия системы достигает минимума, устойчивы.

Теорема Лежен Дирихле. Отметим интересные свойства равновесия механических систем в потенциальном поле:

1) если система находится в покое в потенциальном поле и занимает положение, при котором потенциальная энергия Π минимальна (а следовательно, силовая функция U максимальна), то система находится в *устойчивом равновесии,* т. е., будучи незначительно выведена из этого положения, она стремится вернуться к нему, совершая около него малые колебания;

2) наоборот, если потенциальная энергия при равновесии системы имеет максимум, то система находится в состоянии *неустой-*

чивого равновесия и, будучи выведана из этого состояния, не может остаться близкой к первоначальному положению равновесия *.

Так, например, на рис. 124, *а* изображен физический маятник в состоянии равновесия. Если потенциальная энергия маятника минимальна, то равновесие устойчиво, если же потенциальная энергия максимальна, то равновесие неустойчиво.

Рассмотрим другой пример, известный под названием задачи О. И. Сомова (см.: *Кузьмин П. А.* Малые колебания и устойчивость движения. М., 1973). На

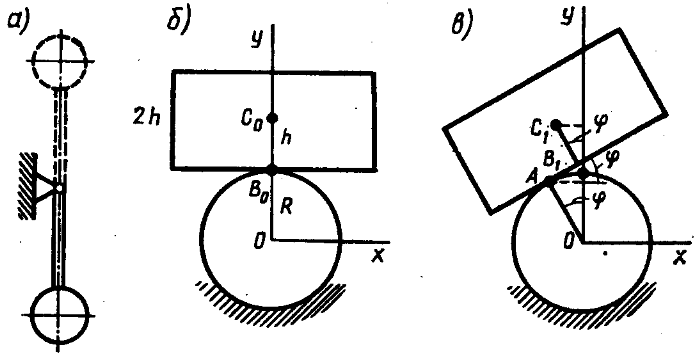


Рис. 124

круглое неподвижное бревно радиусом R (рис. 124, *б*) перпендикулярно его горизонтальной оси положен тяжелый однородный брусок прямоугольного сечения высотой $2h$. Выяснить условия устойчивости равновесия.

Необходимым и достаточнмы условием равновесия бруска является условие, чтобы его центр тяжести находился строго над осью бревна. По теореме Дирихле равновесие устойчиво, если при достаточно малом перемещении бруска высота его центра тяжести увеличивается. Сообщим бруску малое перемещение. Оно является качением без скольжения бруска по бревну (рис. 124, *в*). При этом брусок наклонится на малый угол φ и будет касаться бревна точкой A, а прежняя точка касания B_0 при повороте бруска переместится вместе с ним и займет положение B_1. По условиям качения без скольжения прямолинейный отрезок AB_1 равен дуге $AB_0 = R\varphi$. Центр тяжести бруска переместится из C_0 в C_1.

Построим оси декартовых координат с центром O на оси бревна. Определим ординату центра тяжести C_0 бруска в равновесном состоянии

$$y_0 = R + h$$

и при возмущенном состоянии

$$y_1 = OA \cos\varphi + AB_1 \sin\varphi + B_1C_1 \cos\varphi = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + h\cos\varphi.$$

Условие устойчивости равновесия принимает вид

$$y_1 - y_0 = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + h\cos\varphi - R - h > 0,$$

или

$$R\varphi\sin\varphi > (R + h)(1 - \cos\varphi),$$

---

* Закон был открыт Лагранжем (1788) и в отношении устойчивости равновесия при максимуме силовой функции строго доказан Дирихле (1846); в отношении же неустойчивости равновесия, при котором условие максимума силовой функции не выполнено, доказан для широкого класса случаев А. М. Ляпуновым (1892 и 1897), но пока еще никем не доказан в общем виде.

откуда

$$\varphi\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} > 1+\frac{h}{R}.$$

Преобразуем левую часть неравенства, учитывая, что $\dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\mathrm{tg}\,\dfrac{\varphi}{2}$:

$$\varphi\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi/2}=2\frac{\varphi/2}{\mathrm{tg}\,\varphi/2}\approx 2,$$

и неравенство принимает вид

$$2 > 1+h/R \text{ или } h < R.$$

Следовательно, равновесие бруска устойчиво, если высота бруска меньше диаметра бревна, в противном случае оно неустойчиво. Полученный вывод легко проверить опытным путем.

Задача № 58 (*М*). Тело брошено с поверхности Земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью v_0. Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебрегаем. Радиус Земли $R=6\,370\,000$ м, $v_0=1000$ м/с.

Решение. Рассматриваем движение тела в поле тяготения Земли. На тело действует лишь одна сила $F=kMm/(R+h)^2$, где M—масса Земли. Коэффициент k для силы земного притяжения определим из тех соображений, что сила притяжения к Земле всякого тела, находящегося вблизи земной поверхности, равна весу тела $mg=kMm/R^2$, откуда $k=R^2g/M$.

Начальная кинетическая энергия тела $T_0=mv_0^2/2$, конечная $T=0$.

Начальная потенциальная энергия по (215)

$$\Pi_0=-kMm/R+C=-gRm+C;$$

конечная

$$\Pi=-gR^2m/(R+H)+C.$$

Приравниваем сумму энергий в начале движения сумме энергий в конце движения:

$$mv_0^2/2-gRm+C=-gR^2m/(R+H)+C,$$

откуда находим

$$H=Rv_0^2/(2gR-v_0^2).$$

Подставляя числовые значения, получаем ответ.

Ответ. $H=51\,000$ м.

Глава X

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА И ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§ 39. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

В основном законе динамики (77) Ньютон установил зависимость между силой, действующей на точку, и изменением движения. Этот закон определяет пути решения задач динамики свободной материальной точки. Здесь возникают трудности только математического характера.

Но оставалась неисследованной динамика несвободных систем, т. е. таких систем, на точки которых наложены связи. Быстрое развитие промышленности и торговли выдвигало все новые требования к теоретической механике; понадобились методы, которые давали бы большее применение к машинам, т. е. как раз в области динамики несвободных систем.

Многие крупные ученые проявляли большое остроумие и находчивость, решая различные частные задачи по движению твердого тела и по движению несвободных точек. Однако необходимо было найти общий метод, который дал бы возможность аналитически выразить действие связей, указать общие принципы решения подобных задач.

Честь создания таких методов выпала на долю Д'Аламбера * и Лангранжа.

Д'Аламбер предложил для решения всех задач динамики новый принцип. «Данное правило,— писал он позже в Энциклопедии,— приводит все задачи, относящиеся к движению тел, к более простой задаче о равновесии».

Здесь у Д'Аламбера были свои предшественники (Гюйгенс, Яков Бернулли, Яков Герман). «Однако только Д'Аламбер подошел к этому принципу с более общей точки зрения и придал ему всю ту простоту и плодотворность, на которые только он был способен» **. Поэтому этот принцип называют принципом Д'Аламбера.

Д'Аламбер усматривал достоинство своего метода и в том, что в нем не были применены такие понятия, как сила: «метафизика этих понятий никогда не станет ясной». Но в формулировку принципа Д'Аламбера позднее были введены понятия не только силы, но и так называемых сил инерции, и ему была придана та форма, которая приведена в этом параграфе.

Силой инерции материальной частицы называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной частицы телам, сообщающим ей ускорение.

С и л а и н е р ц и и. Если в задаче динамики или статики требуется определить движение или условия равновесия какого-либо материального объекта, то, составляя уравнения движения или равновесия этого материального объекта, в них включают только те силы, которые на него реально действуют. В эти уравнения не должны входить силы, с которыми данное тело действует на окружающие тела.

Однако в динамике есть и такой метод решения задач, где наряду с силами, приложенными к данному объекту и сообщающими

* *Д'Аламбер.* Динамика. Трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом. Пер. с франц. проф. В. П. Егоршина. М., 1950.

** *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. Пер. с франц./Под ред. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. М., 1938, с. 176.

этому объекту ускорение, учитывают также и силы, с которыми данный объект противодействует телам, сообщающим ему ускорение.

Пусть имеется некоторая материальная частица M (рис. 125, *а*) и другие материальные объекты M_1, M_2, M_3, ..., действие которых на данную материальную частицу M представлено силами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... Эти силы сообщают материальной частице M ускорение a.

Материальная частица M противодействует телам M_1, M_2, M_3, ... Силы противодействия равны силам $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... и противоположно направлены (рис. 125, *б*), но не уравновешиваются ими, так как силы противодействия приложены не к материальной частице M, а к телам M_1, M_2, M_3, ...

Приложим (совершенно условно) эти силы противодействия не к телам M_1, M_2, M_3, ..., к которым они приложены в действительности, а к материальной частице M и сложим их (рис. 125, *в*). Эту геометрическую сумму сил противодействия движущейся частицы M телам M_1, M_2, M_3, ..., сообщающим ей ускорение, называют *силой инерции* и обозначают Φ.

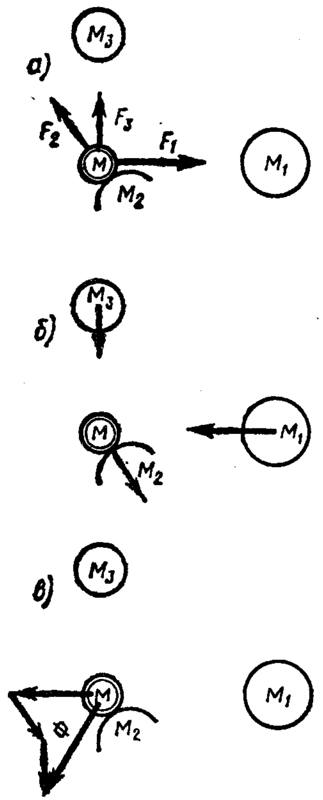


Рис. 125

Понятие «сила инерции» нельзя отождествлять с уже знакомым понятием «инерция». Еще Лазар Карно, первый определивший (1803) силу инерции как силу, «которую тело сообщает всем другим телам, стремящимся вывести его из данного состояния», указывал, что «сила инерции» — величина, вводимая в вычисления наравне с другими силами, тогда как «инерция» — это проявление присущего материи свойства сохранять движение без действия сил.

Сила инерции материальной частицы выражается произведением массы частицы на ее ускорение и направлена противоположно ускорению: $\vec{\Phi}=-m\vec{a}$.

Ускорение $\vec{a}$, получаемое частицей M под действием сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., согласно основному закону динамики (78), направлено по равнодействующей всех этих сил и пропорционально ей.

Составляющие силы, геометрическая сумма которых является силой инерции, равны, но противоположны силам $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., действующим на частицу M, а потому сила инерции частицы M равна произведению массы частицы на ее ускорение, но направлена в сторону, противоположную ускорению:

$$\boxed{\vec{\Phi} = -m\vec{a}.} \tag{218}$$

Как видно из этого равенства, размерность силы инерции Φ есть размерность обычных ускоряющих сил, т. е. в физической системе единиц

$$[\Phi]_{ф} = L^1M^1T^{-2};$$

в технической системе единиц

$$[\Phi]_{т} = L^0F^1T^0.$$

Единицей силы инерции в технической системе единиц является килограмм-сила (кгс), а в СИ — Ньютон (Н) и кратные им единицы.

Касательной силой инерции называют составляющую силы инерции, равную произведению массы частицы на ее касательное ускорение и направленную против касательного ускорения: $\vec{\Phi}_T = -m\vec{a}_T$.

Составляющие силы инерции. В различных задачах динамики, в которых применяют силы инерции, эти силы приходится проецировать на оси и раскладывать по различным направлениям, причем особенно часто по направлениям касательной и главной нормали. Так как сила инерции противоположна ускорению частицы, то и направляющие косинусы силы инерции по величине равны, а по знаку противоположны направляющим косинусам ускорения, и компонента силы инерции по касательной к траектории точки M равна

$$\vec{\Phi}_T = -m\vec{a}_T. \tag{219}$$

или по абсолютной величине

$$|\Phi_T| = \left| m\frac{dv}{dt} \right|. \tag{219'}$$

Эту компоненту называют *касательной силой инерции*. Как видно из полученного равенства, касательная сила инерции частицы равна произведению массы частицы на ее касательное ускорение и направлена в сторону, противоположную касательному ускорению, т. е. против скорости при ускоренном движении и по скорости — при замедленном.

Нормальной силой инерции называют составляющую силы инерции, равную произведению массы частицы на нормальное ускорение и направленную против нормального ускорения: $\vec{\Phi}_N = -m\vec{a}_N$.

Компоненту силы инерции, направленную по главной нормали к траектории частицы, называют *нормальной силой инерции* материальной частицы

$$\vec{\Phi}_N = -m\vec{a}_N; \qquad (220)$$

по абсолютной величине

$$|\Phi_N| = m\frac{v^2}{\rho}. \qquad (220')$$

Нормальная сила инерции точки или частицы равна произведению ее массы на нормальное ускорение и направлена против нормального ускорения, т. е. всегда в сторону выпуклости траектории. Нормальную силу инерции частицы вращающегося тела

$$|\Phi_N| = m\omega^2 r$$

называют *центробежной силой.*

Касательную и нормальную силы инерции можно рассматривать как проекции силы инерции $\vec{\Phi}$ на касательную и на главную нормаль. В таком случае они являются скалярными величинами, как всякие проекции силы на ось.

Если ко всем действующим на точку силам добавить силу инерции, то все силы можно считать на данное мгновение взаимно уравновешенными и применять законы статики: $\Sigma\vec{F}+\vec{\Phi}=0$.

Принцип Д'Аламбера для одной материальной точки. Изложим принцип Д'Аламбера сначала для одной материальной точки, а потом распространим его на механическую систему. Согласно основному уравнению статики (88') точка находится в состоянии равновесия, если сумма всех приложенных к ней активных сил и реакций равна нулю:

$$\sum\vec{F} = 0.$$

Основным уравнением динамики является уравнение (77'):

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}.$$

Пусть некоторая точка M массой m под действием всех приложенных к ней активных сил и реакций связи получила ускорение $\vec{a}$. Будем считать, что к точке M приложена также и сила инерции $\vec{\Phi}$. Тогда, сложив почленно равенства (77') с равенством (218), получим

$$\sum\vec{E} + \vec{\Phi} = m\vec{a} - m\vec{a} = 0,$$

или

$$\sum\vec{F} + \vec{\Phi} = 0.$$

Уравнение динамики переходит в уравнение статики, если ко всем действующим на точку активным силам и реакциям связей прибавить еще и силу инерции Φ, а следовательно, при этом условии задачу динамики можно решать методами статики. В этом заключается *принцип Д'Аламбера* *.

Если спроецировать все приложенные к точке силы (включая и силу инерции) на оси координат, то принцип Д'Аламбера можно записать в такой форме:

$$\sum X+\Phi_x=0,\ \sum Y+\Phi_y=0,\ \sum Z+\Phi_z=0. \qquad (221')$$

Здесь

$$\Phi_x=-m\ddot{x},\ \Phi_y=-m\ddot{y},\ \Phi_z=-m\ddot{z}. \qquad (218')$$

Обозначим через F^a равнодействующую всех приложенных к точке активных сил, а равнодействующую всех реакций обозначим F^r. Тогда равенство (221) можно записать так:

$$\vec{F}^a+\vec{F}^r+\vec{\Phi}=0. \qquad (221'')$$

Динамической реакцией связи называют реакцию связи, вызванную действием сил инерции.

Динамические реакции. Силы инерции необходимо учитывать при определении сил, действующих на связи. Силы инерции изменяют реакции связей, и в телах, осуществляющих связь, производят такие же действия, как и прочие известные силы: деформируют эти тела, вызывают в них внутренние напряжения и даже могут разрушить.

Реакции связи, вызванные силами инерции, называют *динамическими реакциями*. При решении следующих задач применим принцип Д'Аламбера к определению динамических реакций.

Задача № 59. Ускорение скоростного лифта высотного здания при подъеме изменяется в пределах от +2 до —2 м/с². Определить натяжение троса, если масса кабины с пассажирами 1200 кг.

Решение. Задачу решаем методом Д'Аламбера в СИ. Натяжение троса происходит от веса G (статическая нагрузка) и силы инерции Φ (динамическая нагрузка). К действующим на кабину лифта силам (вес $G=mg=1200\cdot9{,}81=11\,772$ Н и натяжение T троса) мысленно прикладываем силу инерции $\Phi=-ma=1200\cdot2=2400$ Н и рассматриваем равновесие лифта.

Если лифт поднимается ускоренно, то ускорение направлено вверх, а сила инерции — вниз, проекция ее на ось ординат отрицательна:

$$\sum Y=0,\ T-G-\Phi=0,$$

откуда, считая ускорение максимальным, находим

$$T=G+\Phi=11\,772+2400=14\,172\text{ Н}.$$

* Силы инерции (218) Д'Аламбера, позволяющие решать задачи динамики методами статики, следует отличать от сил инерции (146) и (147) Кориолиса, применяемых при исследовании относительного движения.

Если лифт поднимается замедленно, то ускорение направлено вниз, а сила инерции — вверх:

$$\sum Y = 0, \ T - G + \Phi = 0,$$

откуда

$$T = G - \Phi = 11\,772 - 2400 = 9372 \text{ Н}.$$

Сила инерции реальна для троса (для связи), так как она меняет его натяжение. На кабину лифта сила инерции не действует, так как не приводит ее ни в состояние покоя, ни в равномерное прямолинейное движение.

Ответ. $T_{max} = 14172$ Н; $T_{min} = 9372$ Н.

Задача № 60 (М). Автомобиль весом 1000 кгс движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 10$ м/с; радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ м. Определить давление автомобиля на мост в мгновение прохождения его через середину моста.

Решение. Рассмотрим автомобиль, движущийся на мосту (рис. 126).

На автомобиль действуют его вес $G = 1000$ кгс и реакция моста R. Эти силы не уравновешивают друг друга, так как автомобиль не находится в равновесии. К этим действующим на автомобиль силам приложим мысленно еще силу инерции, равную массе автомобиля, умноженной на ускорение и направленную против ускорения. Автомобиль движется равномерно по криволинейной траектории, поэтому он имеет центростремительное ускорение. Нормальная сила инерции

$$\Phi_N = -ma_N = \frac{1000}{9{,}8}\,\frac{100}{50} = \approx 204 \text{ кгс}.$$

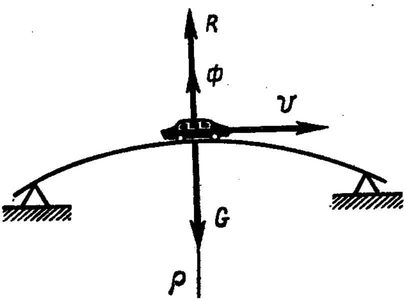


Рис. 126

Силу инерции прикладываем к автомобилю, направляем ее вверх, против нормального ускорения. (В формулах сил инерции знак «—» показывает, что сила инерции направлена против ускорения. Дав такое направление силе (в данном случае вверх), мы тем самым учитываем знак «—» и в дальнейшем считаем силу положительной.

После того как сила инерции прибавлена, система сил как бы находится в равновесии и можно применять к ней уравнения статики. Составим сумму проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; \ R + \Phi - G = 0; \ R + 204 - 1000 = 0,$$

откуда

$$R = 1000 - 204 = 796 \text{ кгс}.$$

Сила инерции не действует на автомобиль, так как в таком случае он находился бы под действием уравновешенной системы сил и двигался бы равномерно и прямолинейно *.

Ответ. $R = 796$ кгс. В СИ $R = 796 \cdot 9{,}81 = 7808{,}76$ Н.

Задача № 61 (№ 220. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю.* и *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. М., 1961). Определить, с какой скоростью должен двигаться искусственный спутник Земли на высоте $h = 900$ км, если орбиту спутника принять за окружность, центр которой находится в центре

---

* Рекомендуем читателям решить эту задачу не по принципу Д'Аламбера, а с применением уравнения (142) (см.: *Савин Г. Н., Кильчевский Н. А., Путята Т. В.* Теоретическая механика. Гостехиздат УССР, 1963, с. 314).

Земли. Радиус Земли $R=6370$ км. Ускорение тела, свободно падающего у поверхности Земли, $g=9{,}81$ м/с^2. Сила притяжения спутника обратно пропорциональна квадрату расстояния спутника от центра Земли. Спутник считать точечной массой.

Решение. На спутник действует сила притяжения, направленная к центру Земли,

$$F=kMm/(R+h)^2,$$

где m — масса спутника; $kM=R^2g$ (см. задачу № 58). Следовательно, сила притяжения, действующая на спутник,

$$F=mgR^2/(R+h)^2.$$

Эта сила сообщает спутнику нормальное ускорение, направленное к центру Земли

$$a_N=v^2/(R+h).$$

Приложим мысленно к спутнику центробежную силу инерции Φ_N, равную ma_N и направленную противоположно центростремительному ускорению. По принципу Д'Аламбера эта сила уравновешивает единственную действующую на спутник силу F. Следовательно,

$$mv^2/(R+h)=mgR^2/(R+h)^2,$$

откуда находим скорость спутника

$$v=R\sqrt{g/(R+h)}=6\,370\,000\sqrt{9{,}81/7\,270\,000}=7400\ \text{м/с}.$$

Ответ. $v=7{,}4$ км/с.

Если к каждой точке материальной системы приложить силу инерции, то систему можно считать на данное мгновение находящейся в равновесии и применять к ней уравнения статики.

Принцип Д'Аламбера для материальной системы. Пусть на материальные точки системы действуют активные силы и реакции связей. Приложим к каждой точке силу инерции, равную произведению массы точки и ее ускорения, но направленную против ускорения точки. Тогда для каждой точки можно написать:

$$\vec{F}^a_k+\vec{F}^r_k+\vec{\Phi}_k=0,$$

где $\vec{F^a}_k$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к этой точке; $\vec{F^r}_k$ — равнодействующая реакций связей, наложенных на эту точку: $\vec{\Phi}_k=-m_ka_k$ — сила инерции этой частицы.

Составив такие уравнения для всех точек системы, убедимся, что каждую из этих точек можно считать находящейся в данное мгновение в равновесии. Таким образом, если к каждой точке системы приложить силу инерции, то систему можно рассматривать как находящуюся в данное мгновение в равновесии и применять к ней уравнения статики. В этом заключается принцип Д'Аламбера для материальной системы.

Он очень удобен при различных вычислениях и расчетах, например, при изучении движения механизмов и их звеньев и в ряде других случаев.

Твердое тело рассматривают как неизменяемую механическую систему, состоящую из материальных частиц, прикладывая к каждой материальной частице силу инерции, равную и противоположную ускорению этой частицы, помноженному на ее массу.

С силами инерции поступают как с обычными реальными силами, переносят их по методу Пуансо в другие точки этого тела, складывают, приводят их к динаме, к паре сил или к равнодействующей. В качестве примера рассмотрим силы инерции звена, принимаемого за плоскую материальную фигуру и вращающегося вокруг перпендикулярной к нему оси, не проходящей через центр масс звена.

Задача № 62.* Определить модуль, направление и точку приложения равнодействующей всех сил инерции звена, вращающегося вокруг неподвижной оси O при следующих данных: масса звена m, момент инерции относительно оси вращения J, расстояние центра масс C от оси вращения $OC=c$, угловая скорость в данное мгновение ω, угловое ускорение ε.

Силы инерции плоской фигуры, вращающейся вокруг перпендикулярной к ней нецентральной оси, эквивалентны одной силе, по модулю равной произведению массы и ускорения центра масс, и приложенной в центре качания.

Решение. Построим систему координатных осей xOy (рис. 127) с началом на оси вращения, направив ось Ox к центру масс звена. Тогда координаты центра масс звена

$$x_C=\sum m_k x_k/m=c;\quad y_C=\sum m_k y_k/m=0,$$

где m_k — масса материальной частицы; x_k и y_k — ее координаты. Суммирование распространено на все материальные частицы звена. К каждой материальной частице звена мысленно приложены центробежная сила инерции и касательная сила инерции. Требуется найти равнодействующую всех этих сил.

Займемся сначала центробежными силами. Если радиус-вектор k-й частицы обозначим $\vec{r}_k$, а угол, составляемый радиусом-вектором с осью Ox, обозначим α_k (рис. 127, *б*), то центробежная сила этой частицы и ее проекции на ось Ox и Oy выразятся следующим образом:

$$\Phi_{kN}=m_k r_k\omega^2;$$

$$\Phi_{kNx}=m_k r_k\omega^2\cos\alpha_k=m_k r_k\omega^2(x_k/r_k)=m_k x_k\omega^2;$$

$$\Phi_{kNy}=m_k r_k\omega^2\sin\alpha_k=m_k r_k\omega^2(y_k/r_k)=m_k y_k\omega^2.$$

Центробежная сила направлена обратно центростремительному ускорению (от оси вращения O звена), следовательно, центробежные силы всех частиц плоского звена представляют собой плоский пучок сил, пересекающихся в точке O.

Равнодействующая Φ_N этого пучка (центробежная сила звена) приложена в той же точке O, проекции этой силы

$$\Phi_{Nx}=\sum\Phi_{kNx}=\sum m_k x_k\omega^2=\omega^2\sum m_k x_k=mc\omega^2,$$

$$\Phi_{Ny}=\sum\Phi_{kNy}=\sum m_k y_k\omega^2=\omega^2\sum m_k y_k=0.$$

* Эта задача предусмотрена программами УМУ как необязательный дополнительный вопрос.

Следовательно, центробежная сила звена направлена по оси Ox, т. е. от оси вращения звена к центру масс, и равна произведению массы звена на центростремительное ускорение центра масс

$$\Phi_N = mc\omega^2.$$

Перейдем теперь к касательным силам инерции (рис. 127, *в*). Касательная сила инерции элементарной частицы равна произведению массы этой частицы на ее касательное ускорение и направлена против ускорения

$$\Phi_{kT} = m_k r_k \varepsilon.$$

Проекции этой силы на оси координат

$$\Phi_{kTx} = + m_k r_k \varepsilon \sin \alpha_k = + m_k r_k \varepsilon (y_k/r_k) = + m_k y_k \varepsilon;$$

$$\Phi_{kTy} = - m_k r_k \varepsilon \cos \alpha_k = - m_k r_k \varepsilon (x_k/r_k) = - m_k x_k \varepsilon.$$

Линии действия касательных сил инерции различных частиц не пересекаются в точке, и, чтобы сложить эти силы, надо, следуя методу Пуансо, перенести их

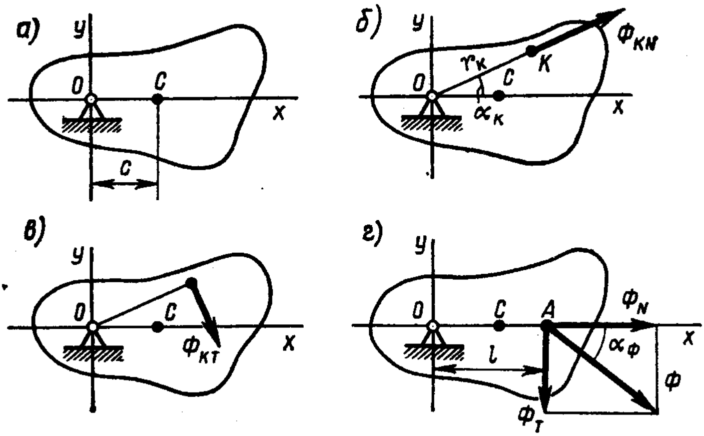


Рис. 127

к одной точке, например к точке O, добавив соответствующие пары, моменты которых равны моментам данных сил относительно точки приведения.

Момент касательной силы инерции, приложенной к k-й точке относительно начала координат O, подсчитаем по формуле (98):

$$M_{kO} = x_k Y_k - y_k X_k = x_k \Phi_{kTy} - y_k \Phi_{kTx} = - m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \varepsilon.$$

Проекции главного вектора касательных сил инерции

$$\Phi_{Tx} = \sum \Phi_{kTx} = + \sum m_k y_k \varepsilon = + \varepsilon \sum m_k y_k = 0;$$

$$\Phi_{Ty} = \sum \Phi_{kTy} = - \sum m_k x_k \varepsilon = - \varepsilon \sum m_k x_k = - mc\varepsilon.$$

Следовательно, главный вектор касательных сил инерции равен (по модулю) произведению массы звена на тангенциальное ускорение центра масс звена

$$\Phi_{\text{гл} T} = mc\varepsilon.$$

Но этот главный вектор не является равнодействующей касательных сил инерции, так как при перенесении этих сил появился главный момент касательных сил инерции относительно точки приведения, равный алгебраической сумме моментов тангенциальных сил инерции всех частиц

$$M_{\text{гл}O} = \sum M_{kO} = -\sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \varepsilon = -\varepsilon \sum m_k (x_k + y_k) = -J\varepsilon.$$

Итак, главный момент касательных сил инерции звена относительно оси вращения равен произведению момента инерции на угловое ускорение, взятое с обратным знаком.

Представим главный момент в виде пары, силы которой равны главному вектору касательных сил инерции, а плечо l равно отношению главного момента к главному вектору

$$l = J\varepsilon/(mc\varepsilon) = J/(mc).$$

Получилось выражение (201) приведенной длины физического маятника $l_{\text{пр}}$. Одна из сил пары уравновешивается главным вектором $\Phi_{\text{гл}\,T}$ касательных сил инерции и остается равнодействующая касательных сил инерции, которая равна произведению массы звена на касательное ускорение центра масс, но приложена в центре качания A звена.

Перенесем в центр качания A по линии действия центробежную силу Φ_N (рис. 127, *г*), сложим здесь обе составляющие (Φ_N и Φ_T) силы инерции и найдем равнодействующую всех сил инерции звена.

Определим модуль равнодействующей

$$\Phi = mc\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Определим направляющие косинусы

$$\cos \alpha_{\Phi} = \omega^2/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \cos \beta_{\Phi} = -\varepsilon/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Ответ. Сила инерции равна произведению массы звена на ускорение центра масс, направлена против ускорения центра масс, но приложена не в центре масс, а в центре качания.

Все силы инерции твердого тела эквивалентны одной силе — главному вектору сил инерции — и одной паре, момент которой равен главному моменту сил инерции относительно точки приложения главного вектора.

Иногда бывает сложно рассматривать силы инерции, приложенные к каждой частице тела. Но, следуя методу Пуансо (§ 28), можно перенести все эти силы к произвольной точке тела (удобно приводить их к центру масс) и заменить их одной силой и одной парой сил. Сила — главный вектор сил инерции — равна сумме всех сил инерции и приложена в точке приведения:

$$\vec{\Phi}_{\text{гл}} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{a}_k.$$

Момент пары — главный момент сил инерции — равен сумме моментов всех сил инерции относительно точки приведения

$$\vec{M}^{\Phi}_{\text{гл}O} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{M}^{\Phi}_{kO}.$$

Определим главный вектор сил инерции твердого тела и главный момент сил инерции для некоторых случаев движения систем.

При всяком движении тела главный вектор сил инерции равен произведению массы тела и ускорения центра масс и направлен против этого ускорения: $\vec{\Phi}_{гл} = -m\vec{a}_C.$

Главный вектор сил инерции, приложенных к каждой частице какого-либо тела, равен сумме векторов этих сил:

$$\vec{\Phi}_{гл} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{k=n} m_k\vec{a}_k.$$

Напомним, что по теореме о движении центра масс (§ 35) сумма количеств движения всех точек системы равна произведению массы системы и скорости центра масс:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k\vec{v}_k = m\vec{v}_C.$$

Продифференцировав это равенство по времени и умножив на —1, найдем:

$$-\sum_{k=1}^{k=n} m_k\vec{a}_k = -m\vec{a}_C.$$

В левой части этого равенства имеем сумму всех сил инерции точек системы, т. е. главный вектор сил инерции, следовательно,

$$\vec{\Phi}_{гл} = -m\vec{a}_C.$$

Эта формула справедлива при всяком движении любого тела. По ней всегда можно определить главный вектор сил инерции. При этом большое удобство заключается в том, что главный вектор является инвариантом, не зависит от центра приведения. Но лишь в совокупности с главным моментом сил инерции главный вектор сил инерции эквивалентен системе всех сил инерции. Главный же момент сил инерции зависит не только от движения тела и от центра приведения, но также и от распределения в теле его материальных частиц, от геометрии масс тела.

Рассмотрим несколько простейших случаев определения главного момента сил инерции.

Если тело движется поступательно, то главный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю. Силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс и равной произведению массы тела и его ускорения: $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C$

При поступательном движении тела все его частицы имеют одинаковое ускорение, а силы инерции частиц пропорциональны их массам и параллельны друг другу. Такая система сил была рассмотрена при определении центров тяжести. Она приводится к равнодействующей, приложенной в центре масс, по модулю равной сумме модулей всех слагаемых сил.

Момент равнодействующей, а следовательно, и сумма моментов всех составляющих сил инерции относительно центра масс равен нулю. Равнодействующая всех сил инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C$ по модулю равна массе тела, помноженной на ускорение его точек, и направлена в сторону, обратную направлению ускорения.

Если фигура вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости в центре масс, то силы инерции эквивалентны паре сил с моментом, равным произведению момента инерции относительно оси вращения и углового ускорения фигуры с обратным знаком: $M_C^{\Phi} = -J_C\varepsilon$.

В р а щ е н и е ф и г у р ы в о к р у г ц е н т р а л ь н о й о с и. Если неподвижная ось вращения проходит через центр масс фигуры, то, следовательно, центр масс неподвижен и $a_C = 0$. Поэтому равен нулю и главный вектор сил инерции:

$$\vec{\Phi}_{гл} = -m\vec{a}_C = 0.$$

Чтобы определить главный момент фигуры относительно оси вращения, разложим силы инерции ее материальных частиц на центробежные и касательные.

Линии действия центробежных частиц пересекаются на оси вращения в центре масс и моменты их равны нулю.

Касательные силы инерции частиц ($\Phi_{Tk} = -m_k r_k \varepsilon$) перпендикулярны отрезку r_k, соединяющему частицы с центром масс. Чтобы определить момент касательной силы инерции частицы, надо помножить силу на плечо, т. е. на r_k, а чтобы получить главный момент сил инерции, надо просуммировать моменты сил инерции частиц:

$$M_{глC} = -\sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2 \varepsilon = -J_C\varepsilon.$$

Итак, главный момент сил инерции относительно оси вращения равен произведению углового ускорения плоской фигуры и ее момента инерции относительно оси вращения.

В этом примере тело принято за плоскую материальную фигуру. Так поступают при подсчете сил инерции различных шкивов, шестерен и других тел, у которых третье измерение (высота) значительно меньше двух других (длины и ширины). То же относится к телам, вращающимся вокруг своей главной центральной оси инерции.

Если фигура движется в своей плоскости, то силы инерции эквивалентны главному вектору, приложенному в центре масс, и паре сил с моментом, равным моменту инерции, помноженному на угловое ускорение: $\vec{\Phi} = m\vec{a}_C$; $M_C^{\Phi} = -J_C\varepsilon$.

Если какое-нибудь плоское звено механизма, или иное тело, принимаемое за плоскую фигуру, движется в своей плоскости, то рассмотрим его движение как сложное, состоящее из переносного поступательного движения вместе с центром масс фигуры и относительного вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Тогда силы инерции в поступательном движении фигуры приводятся к одной силе инерции, приложенной в центре масс, как было показано в § 12, 13,

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

а силы инерции фигуры во вращательном движении приводятся к паре сил инерции с моментом, равным моменту инерции фигуры относительно центральной оси, помноженному на угловое ускорение, взятое со знаком, обратным знаку углового ускорения

$$M_C^{\Phi} = -J_C\varepsilon.$$

Итак, все силы инерции фигуры при ее плоском движении приводятся к одной силе Φ и к паре сил инерции.

Вращение тела вокруг главной центральной оси

Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, уравновешено, если осью вращения является главная центральная ось инерции.

Если в статике требуется определить реакции в подшипниках тела, закрепленного на неподвижной оси, то составляют шесть уравнений (120) равновесия всех активных сил и реакций связей:

$$\sum X = 0; \ \sum Y = 0; \ \sum Z = 0,$$

$$\sum M_x = 0; \ \sum M_y = 0; \ \sum M_z = 0.$$

В динамике для решения той же задачи можно воспользоваться принципом Д'Аламбера, мысленно приложив к каждой частице тела силы инерции и составив уравнения равновесия для системы всех активных сил, реакций связей и сил инерции

$$\sum X + \sum \Phi_{kx} = 0; \ \sum Y + \sum \Phi_{ky} = 0; \ \sum Z + \sum \Phi_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x + \sum M_{kx}^{\Phi} = 0; \ \sum M_y + \sum M_{ky}^{\Phi} = 0; \ \sum M_z + \sum M_{kz}^{\Phi} = 0.$$

Определим такое распределение масс во вращающемся теле, при котором давление на подшипники не зависело бы от скорости вращения тела и оставалось бы таким же, как и при статическом равновесии, иными словами, при котором проекции и моменты сил не влияли бы на решение системы уравнений (120). Для упрощения расчетов примем, что тело вращается равномерно с угловой скоростью ω. Это не отразится на конечных результатах. Тогда к каждой частице следует приложить одну центробежную силу $\Phi_k = m_k\omega^2 r_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Проекции этих сил на оси координат определим через направляющие косинусы $\left(\cos\alpha_{\Phi} = \frac{x}{r}; \ \cos\beta_{\Phi} = \frac{y}{r}; \ \cos\gamma_{\Phi} = 0\right)$:

$$\Phi_{kx} = m_k\omega^2 r_k \cos\alpha_{\Phi} = m_k\omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = m_k\omega^2 x_k;$$

$$\Phi_{ky}=m_k\omega^2 r_k \cos\beta_\Phi=m_k\omega^2 r_k \frac{y_k}{r_k}=m_k\omega^2 y_k;$$

$$\Phi_{kz}=m_k\omega^2 r_k \cos\gamma=0.$$

Составив такие выражения для всех точек тела и просуммировав, получим:

$$\sum\Phi_{kx}=\sum m_k x_k\omega^2=mx_C\omega^2;$$

$$\sum\Phi_{ky}=\sum m_k y_k\omega^2=my_C\omega^2;$$

$$\sum\Phi_{kz}=0,$$

где m — масса тела, а x_C и y_C — координаты центра масс.

Моменты центробежных сил точек тела относительно координатных осей можно определить по формулам (105) или же последовать правилу, что для определения момента силы относительно оси надо эту силу спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси, и определить момент прекции относительно точки пересечения оси и плоскости. Таким образом,

$$M_{kx}^{\Phi}=-m_k y_k z_k\omega^2;$$

$$M_{ky}^{\Phi}=m_k z_k x_k\omega^2;$$

$$M_{kz}^{\Phi}=0.$$

Суммируя моменты центробежных сил для всех точек, найдем, принимая во внимание формулы (199):

$$\sum M_{kx}^{\Phi}=-\sum m_k y_k z_k\omega^2=-J_{yz}\omega^2;\ \sum M_{ky}^{\Phi}=\sum m_k x_k z_k\omega^2=$$

$$=J_{y.z}\omega^2;\ \sum M_{kz}=0.$$

Определив суммы проекций на оси и суммы моментов относительно осей координат всех сил инерции, подставим их выражения в систему уравнений:

$$\sum X+mx_C\omega^2=0,\ \sum Y+my_C\omega^2=0;\ \sum Z=0;$$

$$\sum M_{kx}-J_{y.z}\omega^2=0;\ \sum M_{ky}+J_{z.x}\omega^2=0;\ \sum M_{kz}=0.$$

Совершенно естественно, что эти уравнения отличаются от статических уравнений (120). Нетрудно видеть, что реакции связей вращающегося тела не уравновешиваются активными силами, они зависят от угловой скорости вращающегося тела.

Но при некоторых условиях геометрии масс вращающегося тела эти уравнения не будут отличаться от статических уравнений (120), а следовательно, давления в опорах не будут зависеть от скоростей его точек. Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$x_C=0;\; y_C=0;\; J_{y\cdot z}=0;\; J_{z\cdot x}=0.$$

Если выполнены два первых условия, то это означает, что центр масс C лежит на оси вращения Oz. Такая ось называется *центральной осью,* а тело, вращающееся вокруг центральной оси, является *статически уравновешенным.*

Если не выполнены два последних условия, т. е. центробежные моменты инерции $J_{y\cdot z}$ и $J_{z\cdot x}$ не равны нулю, то ось вращения Oz не является *главной осью инерции,* а вращающееся тело *моментно не уравновешено.*

Если выполнены все четыре условия, то ось вращения Oz является *главной центральной осью инерции.* Реакции в опорах такого *полностью уравновешенного* тела не зависят от скоростей его точек и равны статическим реакциям.

§ 40. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Пять лет спустя после смерти Д'Аламбера, в 1788 г., в Париже была издана «Аналитическая механика» Лагранжа; второе, значительно дополненное издание вышло в 1811—1815 гг. Это одно из лучших сочинений по механике, обогатившее ее новыми могучими методами.

В основу статики был положен «принцип виртуальных перемещений», который теперь можно сформулировать так: при равновесии системы сумма работ всех активных сил на всяком виртуальном перемещении (см. § 30) равна нулю. Тот же принцип в соединении с принципом Д'Аламбера был положен в основу динамики.

Корни принципа виртуальных перемещений уходят в глубокую древность. Довольно общую формулировку принципа для сил тяжести дали Торричелли (1644), Иван Бернулли (1717) и др. Доказательство принципа Лагранжем (1796) является лишь видоизменением доказательства, которое предложил в 1783 г. Лазар Карно. Одновременно с Лагранжем строгое доказательство опубликовал Фурье (1798). Большая заслуга Лагранжа заключается в том, что он положил этот принцип в основу всей механики.

Во всякой механической системе с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции на всяком виртуальном перемещении равна нулю: $\Sigma[(X-m\ddot{x})\delta x+(Y-m\ddot{y})\delta y+(Z-m\ddot{z})\delta z]=0.$

Если механическая система не находится в равновесии, то, приложив к каждой точке силы инерции, можно согласно принципу Д'Аламбера рассматривать эту систему как находящуюся в данное мгновение в равновесии и применять к ней все уравнения статики и, в частности, уравнение (134).

В самом деле, для каждой точки системы по (221″)

$$\vec{F}_k^{\text{а}}+\vec{F}_k^{\text{r}}+\vec{\Phi}_k=0.$$

Но если равна нулю равнодействующая всех активных сил, реакций связей и сил инерции, приложенных к каждой точке, то равна нулю и сумма виртуальных работ всех сил, приложенных к каждой точке, а потому равна нулю и сумма виртуальных работ всех сил системы

$$\sum_{k=1}^{k=n}\delta A_k^{\text{а}}+\sum_{k=1}^{k=n}\delta A_k^{\text{r}}+\sum_{k=1}^{k=n}\delta A_k^{\Phi}=0.$$

Если связи системы идеальные, то сумма работ реакций связей на всяком виртуальном перемещении тождественно равна нулю и в написанном равенстве средняя сумма отпадает:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\delta A_k^{\text{а}}+\sum_{k=1}^{k=n}\delta A_k^{\Phi}=0. \qquad (222)$$

Следовательно, во всякой системе с идеальными связями на всяком виртуальном перемещении сумма работ всех активных сил и всех сил инерции равна нулю. В частном случае, если система находится в равновесии, силы инерции системы равны нулю, и получается уравнение (134).

Уравнение (222) обычно пишут в так называемой аналитической форме, в которой оно особенно удобно при различных применениях. Обозначая проекции активных сил системы на оси координат через X_k, Y_k и Z_k, представляя проекции сил инерции каждой частицы как произведение массы частицы на проекции ускорения с обратным знаком ($-m_k\ddot{x}_k$, $-m_k\ddot{y}_k$, $-m_k\ddot{z}_k$) и обозначая через δx_k, δy_k и δz_k проекции виртуальных перемещений, можно выразить элементарные работы по формуле (133):

$$\sum_{k=1}^{k=n}[(X_k-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(Y_k-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(Z_k-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k]=0. \qquad (223)$$

Уравнение (223) называют *общим уравнением динамики системы* с идеальными связями.

Задача № 63 (М). Центробежный регулятор Уатта (рис. 128, *а*) вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить угол отклонения ручек OA и OB от вертикали, принимая во внимание только вес P каждого из шаров A и B и вес P_1 муфты C; все стержни имеют одинаковую длину l.

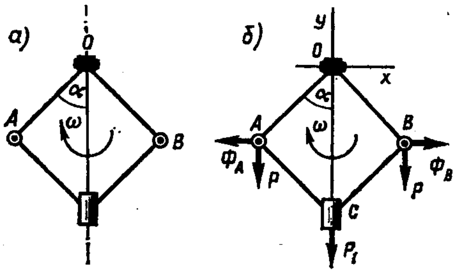


Рис. 128

Решение. Составим общее уравнение динамики для центробежного регулятора. К трем действующим на регулятор активным силам (к весу муфты и шаров) добавим еще силы инерции. Регулятор вращается равномерно и имеются только две силы инерции — центробежные силы шаров. Для решения задачи составим таблицу. Построим координатные оси (рис. 128, *б*), спроецируем на них силы, найдем координаты точек приложения сил и их вариации.

№	Сила	X	Y	x	y	δx	δy
1	P_A	0	$-P$		$-l\cos\alpha$		$l\sin\alpha\delta\alpha$
2	P_B	0	$-P$		$-l\cos\alpha$		$l\sin\alpha\delta\alpha$
3	P_1	0	$-P_1$		$-2l\cos\alpha$		$2l\sin\alpha\delta\alpha$
4	Φ_A	$\frac{P}{g}\omega^2 l\sin\alpha$	0	$-l\sin\alpha$		$-l\cos\alpha\delta\alpha$	
5	Φ_B	$\frac{P}{g}\omega^2 l\sin\alpha$	0	$l\sin\alpha$		$+l\cos\alpha\delta\alpha$	

Найденные значения проекций сил и приращений координат точек их приложения внесем в уравнение (222):

$$-2Pl\sin\alpha\delta\alpha - 2P_1 l\sin\alpha\delta\alpha + 2\frac{P}{g}\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha\delta\alpha = 0.$$

Полагаем, что $\alpha \neq 0$, и сокращаем все члены уравнения на $2l\sin\alpha\delta\alpha$:

$$-P - P_1 + \frac{P}{g}l\omega^2\cos\alpha = 0,$$

откуда определяем угол отклонения ручек.

Ответ. $\cos\alpha = (P+P_1)g/(Pl\omega^2)$.

Для работы регулятора необходимо условие $\omega > \sqrt{(P+P_1)g/(Pl)}$, так как $\cos\alpha < 1$.*)

§ 41. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Обобщенными координатами системы называют независимые друг от друга величины, вполне и однозначно определяющие положения системы в произвольно выбранное мгновение.

Обобщенные координаты. Положение в пространстве свободной материальной точки определяется тремя координатами, независимыми друг от друга. Такая точка имеет три степени свободы. Для определения положения в мгновение t системы, состоящей из n свободных точек, необходимо $3n$ координат.

Если на систему наложены связи, ограничивающие движение этой системы, то определить ее положение можно меньшим числом координат. Так, например, тело с двумя закрепленными точками может совершать только вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через эти две точки. Для определения положения этого тела в данное мгновение достаточно знать его угол поворота φ. Положение кривошипно-ползунного механизма (рис. 129) полностью и однозначно можно определить углом φ или дугой A_0A. Регулятор Уатта (см. рис. 128, *а*) имеет две степени свободы и для определения его положения нужно задать две независимые друг от друга величины, например: угол α отклонения ручки OA от вертикали и угол φ поворота плоскости AOB вокруг оси Oy.

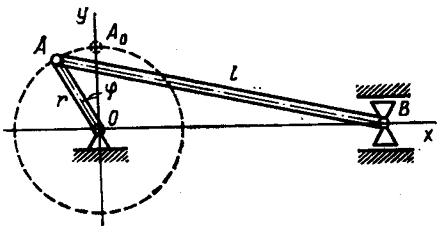


Рис. 129

Величины, определяющие положение системы, не должны быть между собой зависимы. Так, в регуляторе Уатта (см. рис. 128) углы φ и α не зависят друг от друга. Можно определить положение механической системы и другими независимыми величинами, например углом φ и длиной OC, но две зависимые величины OC и α не определят положения системы.

Определять положение системы надо однозначно, для этого необходимо, чтобы были однозначны параметры, определяющие это положение. Например, в кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 129) угол φ или дуга A_0A однозначно определяют положение всего механизма, но угол OBA не пригоден для определения положения механизма, так как каждому его значению соответствует не одно, а два положения кривошипно-ползунного механизма.

Независимые друг от друга величины, полностью и однозначно определяющие возможные положения системы в данное произвольно выбранное мгновение, называют *обобщенными координатами системы* и обозначают q. Обобщенные координаты обычно имеют размерность длины или угла, но возможны размерности и других величин.

В рассматриваемых здесь механических системах с так называемыми *голономными, конечными* или *интегрируемыми* связями (ограничивающими только положения, а не скорости точек системы) число обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы. Если система неполносвязная, т. е. имеет более одной степени свободы, то каждой обобщенной координате q приписывают порядковый индекс $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Декартовы координаты точек связаны с обобщенными координатами механической системы, являются функциями обобщенных координат и, возможно, времени. Так, если положение системы точек определяется s обобщенными координатами, то эти уравнения в параметрической форме имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1,\ q_2, \ldots, q_s,\ t); \\ y_k &= y_k(q_1,\ q_2, \ldots, q_s,\ t); \\ z_k &= z_k(q_1,\ q_2, \ldots q_s,\ t), \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

Обобщенные координаты, как и всякие координаты, характеризуют положение неподвижной системы или положение движущейся системы, занимаемое ею в данное мгновение. Чтобы охарактеризовать движение системы, надо выразить обобщенные координаты как непрерывные однозначные функции времени. Изменение каждой обобщенной координаты характеризует соответствующее изменение в положении системы. Так, в последнем из разобранных примеров (регулятор Уатта) изменение одной обобщенной координаты означает поворот вокруг вертикальной оси, а изменение другой обобщенной координаты выражает изменение наклона ручек к вертикальной оси.

Обобщенная скорость выражается первой производной от обобщенной координаты по времени.

Обобщенная скорость. Для характеристики движения системы, определяемого обобщенной координатой $q_i = q_i(t)$, где $i = 1, 2, \ldots, s$, не только в пространстве, но и во времени, возьмем первую производную от этой координаты по времени

$$\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t. \tag{225}$$

Полученная величина является пространственно-временной характеристикой изменения одной из обобщенных координат. Ее называют *обобщенной скоростью,* соответствующей данной координате. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная скорость, поэтому число обобщенных скоростей в системе равно числу обобщенных координат.

Обобщенная координата обычно выражается длиной или углом, соответственно этому обобщенная скорость может иметь размерность либо скорости точки, либо угловой скорости тела.

Обобщенной силой называют скалярную величину, равную отношению суммы виртуальных работ всех сил системы при изменении только одной из обобщенных координат к вариации этой координаты.

Обобщенная сила. Пусть положение механической системы в данное мгновение t определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Дадим одной из координат q_i мысленно сколь угодно малое изменение δq_i, сохранив для всех остальных обобщенных координат то значение, которое они в данное мгновение имеют. Вследствие изменения одной из обобщенных координат материальные точки системы получат мысленные виртуальные перемещения, а все приложенные к этим точкам силы произведут виртуальную работу (135)

$$\sum_{k=1}^{k=n}(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k).$$

Сумма работ всех реакций на данном виртуальном перемещении равна нулю (так как связи предполагаем идеальными), поэтому она выражает работу всех активных сил системы. Из уравнений (224) найдем вариации декартовых координат точек системы, соответствующие приращению δq_i, обобщенной координаты q_i при фиксированном (неизменном) значении других обобщенных координат:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q; \quad \delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\delta q_i; \quad \delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\delta q_i.$$

Эти вариации подставим в предыдущее выражение:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i.$$

Эту сумму виртуальных работ всех сил (или, что то же, всех активных сил), приложенных к системе, при изменении только одной из обобщенных координат q_i можно записать как произведение вариации δq_i этой координаты на скалярную величину

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right), \tag{226}$$

называемую *обобщенной силой*, соответствующей координате q_i.

Если дадим воображаемое приращение какой-либо другой из обобщенных координат этой системы при фиксированном значении всех остальных обобщенных координат, то совершенно аналогично получим выражение обобщенной силы, соответствующей этой второй обобщенной координате. В системе столько же обобщенных сил, сколько в ней обобщенных координат.

Размерность обобщенной силы равна размерности работы, поделенной на размерность обобщенной координаты, а эта последняя обычно имеет размерность длины или угла. Следовательно, обобщенная сила обычно имеет размерность силы или же размерность момента силы в зависимости от размерности соответствующей обобщенной координаты.

Задача № 64. Определить обобщенную силу в регуляторе Уатта (см. рис. 128, *а*), соответствующую обобщенной координате $q=\alpha$. Точечные грузы A и B имеют одинаковый вес P, вес муфты C равен P_1, а стержни имеют одинаковую длину l м.

Решение. Декартовы координаты точек приложения силы как функции обобщенной координаты (параметр α), их вариации и виртуальные работы всех активных и инерционных сил определены при решении задачи № 63. Для вычисления обобщенной силы воспользуемся некоторыми полученными при решении задачи № 63 данными и составим сумму виртуальных работ только активных сил при вариации $\delta\alpha$

$$\sum \delta A^{\mathrm{a}} = -2Pl \sin\alpha\delta\alpha - 2P_1 l \sin\alpha\delta\alpha .$$

Разделив эту сумму виртуальных работ активных сил системы на $\delta\alpha$, получим ответ.

Ответ. $Q_\alpha = -2l(P+P_1)\sin\alpha$.

Разность производной по времени от обобщенного импульса и частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной координате равна обобщенной силе: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$.

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Выразим в обобщенных координатах проекции скоростей точек системы на оси декартовых координат. Для этого продифференцируем по времени соотношения (224)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_k &= \frac{\partial x_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_k}{\partial t};\\
\dot{y}_k &= \frac{\partial y_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial y_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial y_k}{\partial t};\\
\dot{z}_k &= \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial z_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial z_k}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

Возьмем теперь частные производные этих проекций скоростей $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ по какой-либо одной обобщенной скорости $\dot{q}_i$:

$$\partial\dot{x}_k/\partial\dot{q}_i = \partial x_k/\partial q_i;\quad \partial\dot{y}/\partial\dot{q}_i = \partial y_k/\partial q_i;\quad \partial\dot{z}_k/\partial\dot{q}_i = \partial z_k/\partial q_i. \qquad (228)$$

Эти соотношения справедливы только для голономных систем, поэтому воспользуемся ими для вывода дифференциальных уравнений движения таких систем в обобщенных координатах. Возьмем частные производные от (203′) кинетической энергии $T = {}^1/_2\Sigma m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$ системы по обобщенной координате q_i и по обобщенной скорости $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial\dot{x}_k}{\partial q_i}+\dot{y}_k\frac{\partial\dot{y}_k}{\partial q_i}+\dot{z}_k\frac{\partial\dot{z}_k}{\partial q_i}\right)$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=\sum m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial\dot{x}_k}{\partial\dot{q}_i}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}_k}{\partial\dot{q}_i}+\dot{z}_k\frac{\partial\dot{z}_k}{\partial\dot{q}_i}\right).$$

Производную от кинетической энергии по обобщенной скорости, называемую *обобщенным импульсом,* представим в другом виде, для чего воспользуемся соотношениями (228)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=\sum m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+\dot{y}_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+\dot{z}_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right).$$

Продифференцируем обобщенный импульс по времени

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=\sum m_k\left(\ddot{x}_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+\ddot{y}_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+\ddot{z}_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)+$$
$$+\sum m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial\dot{z}_k}{\partial q_i}+\dot{y}_k\frac{\partial\dot{y}_k}{\partial q_i}+\dot{z}_k\frac{\partial\dot{z}_k}{\partial q_i}\right)^*.$$

Преобразуем первую сумму правой части этого равенства, приняв во внимание дифференциальные уравнения движения системы в форме (140′): $m_k\ddot{x}_k=X_k$, $m_k\ddot{y}_k=Y_k$, $m_k\ddot{z}_k=Z_k$, вторую сумму, равную $\partial T/\partial q$, перенесем влево

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right).$$

В правой части имеем обобщенную силу системы, соответствующую координате q_i. Обозначая согласно (226) правую часть этого равенства через Q_i, получим уравнения движения материальной системы в обобщенных координатах, называемые иначе *уравнениями* (второго рода) *Лагранжа*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,}\quad \text{где } i=1,2,\ldots,s. \tag{229}$$

---

* При дифференцировании учтено, что операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_i переместительны, т. е. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}=$ $=\frac{\partial\dot{x}_k}{\partial q_i}$.

В потенциальном поле обобщенная сила равна частной производной от силовой функции по обобщенной координате: $Q_i = \dfrac{\partial U}{\partial q_i}$.

Уравнения Лагранжа в случае существования силовой функции. Если к механической системе приложены только силы поля и существует силовая функция U, то, подставляя выражение (226) вместо проекций силы поля X, Y и Z, их выражения (210) через частные производные силовой функции U, получим следующее выражение обобщенной силы Q_i через силовую функцию U:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Или, так как $U = -\Pi$ (где Π — потенциальная энергия), то убеждаемся, что обобщенная сила равна частной производной от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой с обратным знаком:

$$Q_i = -\partial \Pi / \partial q_i. \tag{230}$$

Подставляя в уравнение Лагранжа вместо обобщенной силы ее выражение через потенциальную энергию, получим удобную форму уравнений Лагранжа для случая консервативной системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \tag{231}$$

Функцией Лагранжа называют разность кинетической и потенциальной энергий системы: $L = T - \Pi$.

Иногда этому выражению придают более простой вид, пользуясь тем, что потенциальная энергия Π не зависит от скоростей и, следовательно, частные производные потенциальной энергии по обобщенным скоростям равны нулю. Перенеся все члены уравнения (231) в левую сторону и добавив равное нулю $-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{232}$$

где

$$L = T - \Pi \tag{233}$$

называют *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом.*

Задача № 65 (М). В зацеплении, показанном на чертеже (рис. 130), колесо 1 приводится в движение моментом M_1; к колесу 2 приложен момент сопротивления M_2 и к колесу *3* — момент сопротивления M_3. Найти угловое ускорение первого колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых m_1, m_2, m_3 и радиусы r_1, r_2, r_3.

Решение. Эта система состоит из трех находящихся в зацеплении дисков, имеет одну степень свободы, ее движение определяется одним уравнением Лагранжа. Составим его в форме (228).

За обобщенную координату q удобно принять угол поворота φ_1 первого колеса: $q=\varphi_1$. Тогда, по (225), обобщенной скоростью системы будет угловая скорость первого колеса $\dot{q}=\omega_1$.

Подсчитаем кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенную скорость. Кинетическая энергия этой системы равна сумме кинетических энергий трех колес, принимаемых за диски:

$$T = \sum_{k=1}^{k=3} T_k.$$

Кинетическую энергию первого колеса определим по (204); момент инерции J однородного круглого диска относительно его оси равен половине произведения массы диска на квадрат радиуса (см. задачу № 25). Следовательно,

$$T_1 = J\omega_1^2/2 = \left(m_1 r_1^2/2\right)\left(\omega_1^2/2\right) = m_1 r_1^2 \omega^2/4.$$

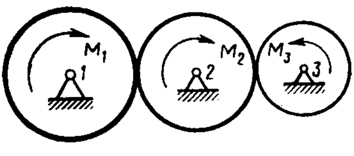


Рис. 130

Аналогично, кинетическая энергия второго и третьего диска

$$T_2 = \left(m_2 r_2^2/2\right)\left(\omega_2^2/2\right);\ T_3 = \left(m_3 r_3^2/2\right)\left(\omega_3^2/2\right),$$

но их надо выразить в функции обобщенной скорости $\dot{q}=\omega_1$. Диски находятся в зацеплении и окружные скорости должны быть одинаковы

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 r_1/r_2 \text{ и } \omega_3 = \omega_1 r_1/r_3.$$

Поэтому

$$T_2 = \left(m_2 r_2^2/2\right)\left(\omega_1^2 r_1^2/2r_2^2\right) = m_2 r_1^2 \omega_1^2/4,\ T_3 = m_3 r_1^2 \omega_1^2/4$$

и кинетическая энергия всей системы

$$T = (m_1 + m_2 + m_3)\, r_1^2 \omega_1^2/4.$$

Определим теперь обобщенную силу Q. Для этого дадим обобщенной координате φ_1 приращение $\delta\varphi_1$, т. е. повернем мысленно первый диск на малый угол $\delta\varphi_1$, например по ходу часовой стрелки, тогда второй диск повернется против хода часовой стрелки на угол

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 r_1/r_2,$$

а третий диск по ходу на угол

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_1 r_1/r_3.$$

К дискам приложены моменты, и сумма виртуальных работ всех сил системы при этом выразится так:

$$\sum_{k=1}^{k=3} \delta A_k = (M_1 - M_2 r_1/r_2 - M_3 r_1/r_3)\delta\varphi_1.$$

Обобщенная сила равна отношению суммы виртуальных работ всех сил системы при изменении одной (в данном случае единственной) обобщенной координаты к вариации этой координаты, следовательно,

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^{k=3} \delta A_k}{\delta \varphi_1} = M_1 + M_2 \frac{r_1}{r_2} - M_3 \frac{r_1}{r_3}.$$

Теперь имеются все необходимые величины для составления уравнения Лагранжа (228). Возьмем частную производную от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{q} = \omega_1$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}{2} \omega_1.$$

От этой величины возьмем полную производную по времени и получим первый член левой части уравнения Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}{2} \frac{\mathrm{d}\,\omega_1}{\mathrm{d}t}.$$

Второй член левой части равен нулю, так как в данной системе кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты $\partial T/\partial \varphi = 0$.

Уравнение (228) в решаемой задаче имеет вид

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}{2} \frac{\mathrm{d}\,\omega_1}{\mathrm{d}t} = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} - M_3 \frac{r_1}{r_3}.$$

Решив это уравнение относительно $\mathrm{d}\omega_1/\mathrm{d}t = \varepsilon_1$, получаем ответ.

Ответ. $\varepsilon_1 = \dfrac{2(M_1 - M_2 r_1/r_2 - M_3 r_1/r_3)}{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}$.

Задача № 66 (*Новожилов И. В.* и *Зацепин М. Ф.* Методические указания к расчету по курсу «Теоретическая механика. Динамика». М., 1984). Составить и проинтегрировать на ЭВМ дифференциальное уравнение движения машины с кулисным механизмом, кинематическая схема которой представлена на рис. 131, и построить графики $\varphi_1(t)$, $\omega_1(t)$, $\varepsilon_1(t)$. Механическая система с одной степенью свободы состоит из пяти звеньев. При вращении махового колеса *1* палец кривошипа *A* описывает окружность радиусом $r_1 = OA$. Палец *A* ходит в прорези кулисы *2*, сообщая ей возвратно-поступательное движение по вертикали. В точке *C* на кулису насажен двухступенчатый каток *4*; при движении кулисы каток перекатывается (без скольжения) по неподвижной рейке. Каток *4* имеет также реечное соединение и со штоком *5*, которому сообщает движение по вертикали. К штоку *5* приложена полезная нагрузка, которая моделируется силой $F = -\mu_1 v_5$. Движущий момент $M = M_O - k\omega_3$ приложен к шкиву *3*, соединенному с маховиком *1* ременной передачей. Предполагается, что ремень невесомый, нерастяжимый, проскальзывание его относительно шкива и маховика отсутствует.

Дано: $OA = r_1 = 0{,}06$ м; $R_1 = 0{,}36$ м; $r_3 = 0{,}09$ м; $R_4 = 0{,}24$ м; $r_4 = 0{,}08$ м; $\rho_{ин\,4} = 0{,}12$ м; $M_O = -27$ Н·м; $k = 0{,}214$ Н·м·с; $\mu = 309$ Н·с/м; $J_1 = 1{,}8$ кг·м²; $m_2 = 15$ кг; $m_3 = 7{,}71$ кг; $m_4 = 16$ кг; $m_5 = 0$; $\tau_1 = 0{,}257$ с; $\omega_1(0) = 24{,}5$ с$^{-1}$; $\varphi_1(0) = 1{,}57$. Параметры машины и начальные условия подобраны так, что движение близко к периодическому с периодом τ_1.

Решение. Механическая система имеет одну степень свободы, следовательно, для решения задачи надо составить и проинтегрировать одно уравнение Лагранжа в обобщенных координатах:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

В качестве обобщенной координаты q выберем угол φ_1 между положительным направлением оси абсцисс (горизонтально вправо) и кривошипом OA. Тогда обобщенной скоростью становится угловая скорость ω_1 кривошипа OA.

Кинетическая энергия T всей системы равна арифметической сумме кинетической энергии звеньев:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Выразим кинетическую энергию каждого звена как функцию обобщенной координаты $q = \varphi_1$ и обобщенной скорости $\dot{q} = \omega_1$.

Кривошип OA представляет собой одно целое с маховиком *1*. Вращаются они с угловой скоростью ω_1 и их общий момент инерции $J_1 = 1{,}8$ кг·м² задан в условии задачи, а кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2.$$

Для определения кинетической энергии поступательно движущейся кулисы *2* определим ее скорость и для этого разложим по осям координат скорость $v_A = \omega_1 r_1$ пальца кривошипа A. Получим v_{Ax} — скорость перемещения пальца кривошипа A по прорези кулисы и v_{Ay} — скорость, которую палец A кривошипа сообщает кулисе:

$$v_{Ay} = \omega_1 r_1 \cos \varphi_1 = v_2.$$

Кулиса движется поступательно, поэтому скорости всех ее точек одинаковы и кинетическая энергия кулисы

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\omega_1 r_1 \cos \varphi_1)^2.$$

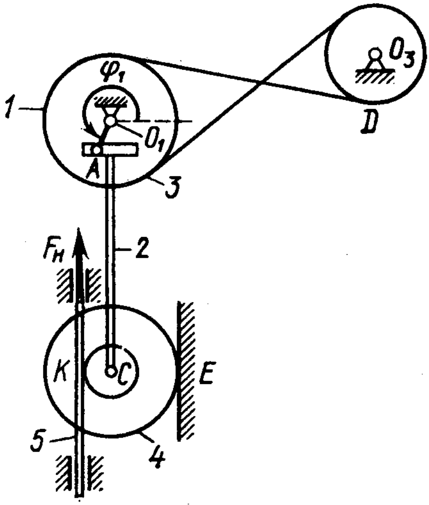


Рис. 131

Третье звено — шкив *3* принимаем за однородный цилиндр и момент инерции его $J_3 = m_3 r_3^2/2$. Чтобы подсчитать угловую скорость ω_2 и выразить ее через обобщенную скорость системы ω_1, заметим, что скорости всех точек ремня по модулю одинаковы и вращательная скорость шкива ($\omega_1 R_1$) равна по модулю вращательной скорости маховика ($\omega_3 r_3$). Однако по знаку они противоположны, так как вращения происходят в противоположные стороны. Поэтому

$$\omega_3 = -\omega_1 R_1 / r_3$$

и кинетическая энергия шкива

$$T_3 = \frac{1}{4} m_3 R_1^2 \omega_1^2.$$

Четвертое звено совершает плоское движение и его кинетическую энергию определим по формуле (205) Кенига. Центр масс этого звена (точка C) принадлежит одновременно и кулисе *2*, а потому скорость v_C равна скорости кулисы ($v_C = \omega_1 r_1 \cos \varphi_1$). По-видимому, этот двухступенчатый шкив с рейками имеет сложную геометрию масс и нельзя принять его за однородный круглый цилиндр, как в случае с шкивом *3* при определении его кинетической энергии. Но в условии задачи дан радиус инерции шкива *4* относительно его центральной оси ($\rho = 0{,}12$ м) и для определения момента инерции J_4 шкива *4* надо его массу помножить на квадрат радиуса инерции. Чтобы определить ω_4, заметим, что в точке E

находится мгновенный центр скоростей шкива 4, а, следовательно, $v_C = \omega_4 R_4$ и

$$\omega_4 = \omega_1 r_1 \cos\varphi_1 / R_4.$$

Кинетическая энергия четвертого звена

$$T_4 = \frac{1}{2}\left(m_4\omega_1^2 r_1^2 \cos^2\varphi_1 + m_4\rho_{\text{ин}4}^2\omega_1^2 r_1^2 \cos^2\varphi_1 / R_4^2\right) =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{2}\left(m_4 + m_4\frac{\rho_{\text{ин}4}^2}{R_4^2}\right) r_1^2\cos^2\varphi_1.$$

Кинетическую энергию штока 5 считаем равной нулю, так как массой m_5 пренебрегаем. Но в дальнейшем понадобится скорость v_5 штока.

Шток совершает поступательное движение, и скорость штока определяется скоростью любой из его точек, например скоростью точки K, в которой рейка штока контактирует (без проскальзывания) со шкивом 4. Мгновенный центр скоростей шкива 4 находится в точке E, следовательно, скорость точки K шкива 4:

$$v_5 = \omega_4 (R_4 + r_4) = \omega_1 r_1 (R_4 + r_4)\cos\varphi_1 / R_4.$$

Теперь просуммируем полученные выражения энергии всех деталей и получим выражение кинетической энергии системы как функцию обобщенной координаты и обобщенной скорости:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[J_1 + \frac{m_3 R_1^2}{2} + \left(m_2 + m_4 + m_4\frac{\rho_{\text{ин}4}^2}{R_4^2}\right) r_1^2 \cos^2\varphi_1\right].$$

Подставив числовые значения параметров, получим следующее выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(2{,}3 + 0{,}126\cos^2\varphi_1).$$

Для вычисления обобщенной силы Q дадим системе виртуальное перемещение, мысленно повернув кривошип OA на малый угол $\delta\varphi_1$. При этом звенья механизма получат соответствующие перемещения, а приложенные к ним силы произведут виртуальные работы. Этими силами являются: движущий момент $M_\text{д}$, приложенный к шкиву 3, сила $F_\text{н}$, приложенная к штоку 5, и силы тяжести кулисы 2 и катка 4, так как система расположена вертикально. Составим сумму этих работ

$$\sum \delta A = M_\text{д}\delta\varphi_3 + F_\text{н}\delta y_k + (m_2 g + m_4 g)\,\delta y_C.$$

Входящие в это равенство вариации $\delta\varphi_3$, δy_K и δy_C определим из уже найденных соотношений:

$$\omega_3 = -\omega_1\frac{R_1}{r_3};\quad v_K = v_5 = \omega_1 r_1\frac{R_4 + r_4}{R_4}\cos\varphi_1;\quad v_C = \omega_1 r_1\cos\varphi_1,$$

помножив эти соотношения на сколь угодно малую величину δt, имеющую размерность времени, получим:

$$\delta\varphi_3 = -\delta\varphi_1\frac{R_1}{r_3};\quad \delta y_K = \delta\varphi_1 r_1 \cos\varphi_1\frac{R_4 + r_4}{R_4};\quad \delta y_C = \delta\varphi_1 r_1\cos\varphi_1.$$

Внесем это в сумму виртуальных работ всех сил системы, поделим ее на вариацию $\delta\varphi_1$ и найдем обобщенную силу Q

$$Q = -M_д \frac{R_1}{r_3} + F_н r_1 \cos\varphi_1 \frac{R_4 + r_4}{R_4} + (m_2 g + m_4 g)\, r_1 \cos\varphi_1 .$$

С учетом числовых значений параметров получим

$$Q = 108 - 3{,}42\dot\varphi_1 - 1{,}98\dot\varphi_1 \cos^2\varphi_1 - 20{,}6\cos\varphi_1 .$$

Получив все необходимые данные, перейдем к составлению уравнения Лагранжа.

Подсчитаем обобщенный импульс системы, т. е. возьмем частную производную от кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot q = \dot\varphi_1 = \omega_1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q} = \dot\varphi_1 \,(2{,}3 + 0{,}126\cos^2\varphi_1).$$

Взяв производную от этой величины по времени, получим первый член уравнения Лагранжа (229)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial T}{\partial \dot q} = \ddot\varphi_1 \,(2{,}3 + 0{,}126\cos^2\varphi_1) - \dot\varphi_1 \cdot 0{,}126\sin 2\varphi_1 .$$

Определим частную производную от кинетической энергии по обобщенной координате $q = \varphi_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = -\dot\varphi^2 0{,}063\sin 2\varphi_1 .$$

Подставим эти выражения в уравнение Лагранжа (229)

$$\ddot\varphi_1 \,(2{,}3 + 0{,}126\cos^2\varphi_1) - 0{,}063\sin 2\varphi_1 = Q .$$

Обозначим угловое ускорение кривошипа ($\ddot q = \dot\omega_1 = \varepsilon$)

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\,\omega_1}{\mathrm{d}\,t} = \big(Q + 0{,}063\dot\varphi_1^2 \sin 2\varphi_1\big)/\big(2{,}3 + 0{,}126\cos^2\varphi_1\big).$$

Решать эти уравнения рекомендуется на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе.

Применим метод Эйлера с шагом $\Delta t = \tau/24 = 0{,}0107$. Напишем в соответствии с конечно-разностной схемой метода Эйлера уравнения, связывающие значения φ_1 и ω_1 в начале и в конце каждого шага интегрирования:

$$\varphi_1(k+1) = \varphi_1(k) + \omega_1(k)\,\Delta t;$$

$$\omega_1(k+1) = \omega_1(k) + \varepsilon_1(k)\,\Delta t .$$

Примем следующие обозначения переменных в программе

t	Δt	φ_1	ω_1	ε_1	Q
T	DT	F1	DM1	E1	Q

Приводим один из возможных вариантов программы.

```
DATA DT, T, P1, OM1
* 0.0107, 0.0, 1.57, 24.5/
DO 12 K=1,25
CS=cos (F1)
Q=108—3,24*OM1—1.98*OM1*CS*CS—20.6*CS
E1=(Q+0.063*OM1**2*SIN(F1+2)/(2.3+0.126*CS*CS)
PRINT 31, T
F1, OM1, E1
31 FORMAT (8E15.3)
F1=F1+OM1*DT
OM1=OM1+E1*DT
12T=T+DT
STOP
END.
```

Ответ. Результаты решения задачи на ЭВМ приведены в графиках (рис. 132).

(* § 42. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ *

Движение, при котором точки системы перемещаются последовательно в ту и в другую сторону от некоторых средних своих положений, называют колебательным.

Колебательное движение и малые колебания системы. Во многих областях техники часто приходится рассматривать *колебательные движения* механических *систем,* т. е. такие движения, при которых точки системы перемещаются последовательно то в ту, то в другую сторону относительно их некоторого среднего положения. Сюда же относят вибрации машин и их деталей, возникающие при различных условиях, вибрации инженерных сооружений и их отдельных элементов, а также автомобилей, судов, самолетов и пр.

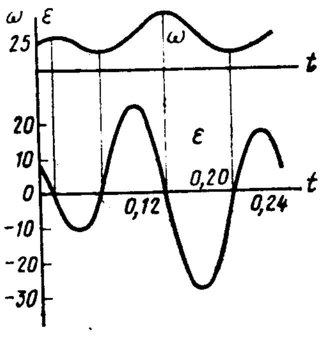


Рис. 132

Колебательные движения систем происходят около положения устойчивого равновесия. Так, например, маятник, выведенный из состояния устойчивого равновесия, совершает колебания около этого положения; корабль, спокойно стоявший в порту, находившийся в равновесном состоянии, но выведенный какой-либо внешней причиной из этого состояния, качается относительно своего устойчивого положения равновесия.

Устойчивым называют такое равновесие системы, к которому система остается сколь угодно близкой в случае, если (достаточно мало) изменить ее положения или сообщить ей (достаточно малые) скорости.

* По решению кафедры, если это будет признано необходимым, в рабочую программу вместо § 42 может быть включен § 33 «Колебания материальной точки».

Механическая система, выведенная из равновесного состояния, или, как говорят, получившая некоторое *возмущение* равновесного состояния, приходит в движение. Если равновесие системы устойчиво и начальное возмущение не слишком велико, то механическая система остается в ближайшей окрестности невозмущенного равновесного состояния, совершает малые колебания около положения устойчивого равновесия или возвращается в равновесное состояние, совершив около положения равновесия несколько затухающих колебаний.

Колебательные движения механических систем удобно описывать уравнениями Лагранжа в обобщенных координатах. При составлении уравнений будем отсчитывать обобщенные координаты всегда от положения устойчивого равновесия, относительно которого и происходят колебания механических систем. В большинстве случаев эти уравнения нелинейны и их интегрирование связано с большими трудностями. Однако при решении многих технических задач оказывается возможным в этих уравнениях отбрасывать квадраты и более высокие степени координат и скоростей. Такая операция называется *линеаризацией уравнений*. Линеаризованные уравнения не могут, конечно, в точности отобразить движения системы и дают несколько искаженную картину явления. Искажения тем менее существенны, чем меньше отброшенные члены уравнений в сравнении с оставшимися. Если значения координат и скоростей во все время движения остаются очень малыми, то их квадратами и высшими степенями вполне можно пренебречь, подобно тому, как в дифференциальном исчислении пренебрегают бесконечно малыми высших порядков. Таким образом, колебания, описываемые линеаризованными уравнениями при сделанном выборе начала отсчета, должны быть только *малыми колебаниями* около положения устойчивого равновесия.

Исследованием колебаний занимается специальная наука — теория колебаний *. В дальнейшем будем рассматривать лишь простейшие вопросы: малые колебания механических систем с одной степенью свободы. Как было уже сказано, рассматриваемые системы являются системами идеальными с голономными и стационарными связями.

Координаты состояния механической системы при ее равновесии равны нулю: $q=0$; $\dot{q}=0$.

Координаты состояния системы. Если механическая система имеет одну степень свободы, то ее положение определяется одной обобщенной координатой q. Чтобы определить механическое состояние этой системы, нужно знать также и обобщенную скорость $\dot{q}$. Эти величины, т. е. обобщенную координату q и обобщен-

---

* Выделить теорию колебаний в самостоятельный отдел науки предлагал Томас Юнг (1807).

ную скорость $\dot{q}$, называют *координатами состояния системы*. Мы уже условились при исследовании малых колебаний системы отсчитывать q от положения устойчивого равновесия системы. Следовательно, при равновесном положении системы $q=q_0=0$. Кроме того, для равновесного состояния системы необходимо, чтобы равнялась нулю и скорость $\dot{q}=\dot{q}_0=0$. Итак, при равновесии системы координаты состояния равны нулю. Координаты состояния, не равные нулю, определяют отклонения системы от этого состояния или возмущения равновесного состояния.

Колеблющиеся материальные системы обычно являются консервативными, т. е. колебания происходят в потенциальном поле, поэтому уравнение Лагранжа удобно писать в форме (231) или (232), для чего необходимо подсчитать потенциальную энергию системы.

Напомним, что в выражение потенциальной энергии входит произвольная постоянная C, несущественная для расчетов, так как в расчетах всегда встречается не сама потенциальная энергия, а ее изменение. Но все же будем так определять эту постоянную, чтобы потенциальная энергия системы при равновесном устойчивом положении, при равенстве нулю обобщенных координат, тоже равнялась нулю. Тогда при отклонении системы от равновесного положения потенциальная энергия получается положительной, потому что равновесие является устойчивым, а потенциальная энергия в этом положении ($\Pi=0$) согласно теореме Лежен Дирихле (см. § 38) должна иметь минимум.

Заметим, что при состоянии равновесия системы равны нулю не только потенциальная энергия системы ($\Pi_0=0$), но и кинетическая энергия ($T_0=0$), а следовательно, при невозмущенном равновесном состоянии равна нулю полная механическая энергия системы ($T_0+\Pi_0=0$).

Фазовой плоскостью называют плоскость декартовых координат xOy, на которые наносят координаты состояния системы: $x=q$, $y=\dot{q}$.

Ф а з о в а я п л о с к о с т ь. Построим плоскую декартову систему координат xOy и будем откладывать по оси абсцисс обобщенную координату $x=q$, а по оси ординат — обобщенную скорость $y=\dot{q}$. Плоскость xOy называют *фазовой плоскостью*. Во всякое данное мгновение состояние механической системы можно представить на фазовой плоскости точкой с координатами $x=q$, $y=\dot{q}$, называемой *представляющей*, или *изображающей*, точкой. При движении системы меняются координаты состояния q и $\dot{q}$, а представляющая точка движется по фазовой плоскости, описывая *фазовую траекторию*.

Фазовая плоскость особенно удобна для изображения колебательных процессов. При колебании механической системы координаты состояния не выходят за определенные пределы, поэтому вся картина движения системы в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Рассмотрим пример — гармонические колебания:

$$q = x = A \sin(kt + \beta).$$

Продифференцировав это уравнение по времени, найдем

$$\dot{q} = y = Ak \cos(kt + \beta).$$

Исключая время из этих уравнений, получим уравнение фазовой траектории

$$x^2 + y^2/k^2 = A^2.$$

В данном случае вся фазовая плоскость заполнена множеством вложенных друг в друга эллипсов с общим центром в начале координат и с одинаковым отношением полуосей. Эти однотипные эллипсы отличаются друг от друга только параметром A, зависящим от начальных данных. Это семейство фазовых траекторий называют *фазовой диаграммой* или *фазовым портретом*.

Метод фазовой плоскости в особенности полезен при изучении свойств нелинейных механических систем *.

Кинетическая энергия полносвязной механической системы при малых колебаниях равна половине произведения коэффициента инерции на квадрат обобщенной скорости: $T = a\dot{q}^2/2$.

Кинетическая энергия. Выразим кинетическую энергию системы с одной степенью свободы через обобщенную скорость, для чего воспользуемся соотношениями (227), выражающими зависимости проекций скоростей точек механической системы от обобщенных координат и обобщенных скоростей. В случае рассматриваемой системы с одной степенью свободы эти зависимости принимают вид

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q}\dot{q};\quad \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial q}\dot{q};\quad \dot{z}_k = \frac{\partial z_k}{\partial q}\dot{q}. \tag{227'}$$

Подставляя эти выражения в формулу (203′) кинетической энергии системы, выразим кинетическую энергию полносвязной механической системы через координаты состояния этой системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_k}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_k}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2. \tag{234}$$

Итак, кинетическая энергия полносвязной системы равна половине произведения квадрата обобщенной скорости и некоторой величины

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_k}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_k}{\partial q}\right)^2\right] = f(q), \tag{235}$$

* См.: *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М., 1971.

являющейся функцией обобщенной координаты; кинетическая энергия системы с одной степенью свободы может быть выражена так:

$$T=f(q)\dot{q}^2/2. \tag{236}$$

Если за обобщенную координату системы принято местонахождение какой-либо точки [например, дуговая координата A_0A пальца кривошипа A кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 129)], то величина $f(q)$ имеет размерность массы и называется *массой системы, приведенной к точке* (в нашем примере масса механизма, приведенная к пальцу кривошипа). Если же за обобщенную координату принят угол поворота [например, угол поворота кривошипа (см. рис. 129)], то величина $f(q)$ имеет размерность момента инерции и называется *приведенным моментом инерции*. При движении системы с изменением обобщенной координаты изменяется и величина (235), т. е. приведенная масса или приведенный момент инерции. При поступательном движении неизменяемой системы (твердого тела) приведенная масса равна массе тела

$$f(q)=m,$$

и кинетическая энергия (234) выражается формулой (202). При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси приведенный момент инерции равен моменту инерции этого тела относительно оси вращения

$$f(q)=J,$$

а кинетическая энергия выражается формулой (204). Вообще же при движении полносвязных систем эти параметры почти всегда являются переменными величинами, хотя при всех значениях q функция $f(q)$ остается положительной, что явствует из (236), если учесть, что кинетическая энергия отрицательных значений иметь не может ($T>0$).

Однако при малых колебаниях системы изменения обобщенной координаты тоже малы, а потому и функция $f(q)$ не может изменяться значительно. В самом деле, разложив $f(q)$ в ряд Маклорена и подставив в (236), получим

$$T=\frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}\left[f(q)_{q=0}+\frac{q}{1}\left(\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}\right)_{q=0}+\right.$$
$$\left.+\frac{q^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2f(q)}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q=0}+\ldots\right]\dot{q}^2.$$

Заметим, что квадрат обобщенной скорости $\dot{q}^2$ есть величина второго порядка малости и чтобы учесть в выражении кинетической энергии T лишь члены не ниже второго порядка малости, нужно пренебречь всеми членами этого ряда, кроме первого постоянного члена $f(q)_{q=0}$, который обозначим a, и при исследовании малых колебаний полносвязной системы можно с точностью до величины второго порядка малости определять кинетическую энергию по формуле

$$T = a\dot{q}^2/2, \tag{237}$$

где a — постоянная положительная величина, называемая *обобщенным коэффициентом инерции*

$$a = f(q)_{q=0}. \tag{238}$$

Потенциальная энергия полносвязной механической системы при малых колебаниях равна половине произведения обобщенного коэффициента жесткости на квадрат обобщенной координаты: $П = cq^2/2$.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия никогда не зависит от скорости и в рассматриваемых здесь полносвязных механических системах является функцией только одной обобщенной координаты q:

$$П = П(q).$$

Разложим эту функцию по степеням q в ряд Маклорена

$$П(q) = П_{q=0} + \frac{q}{1}\left(\frac{dП}{dq}\right)_{q=0} + \frac{q^2}{2}\left(\frac{d^2П}{dq^2}\right)_{q=0} + \dots$$

Как только что было сказано, при изучении малых колебаний принимают потенциальную энергию в положении устойчивого равновесия системы равной нулю, следовательно, $П_{q=0} = 0$. Кроме того, учтем, что производная от потенциальной энергии по обобщенной координате равна и обратна по знаку обобщенной силе (230), а обобщенная сила в положении равновесия системы равна нулю, следовательно, и второй член ряда равен нулю, и с точностью до величин второго порядка малости получаем выражение потенциальной энергии системы через обобщенную силу

$$П = cq^2/2, \tag{239}$$

где

$$c = \left(\frac{d^2П}{dq^2}\right)_{q=0}. \tag{240}$$

По теореме Дирихле потенциальная энергия в положении устойчивого равновесия системы имеет минимум, следовательно, вторая производная $d^2П/dq^2$ положительна для всех значений q, не выходящих из ближайшей окрестности.

Постоянная положительная величина c характеризует потенциальную энергию системы и называется *обобщенным коэффициентом жесткости.*

Функция рассеяния полносвязной механической системы при малых колебаниях пропорциональна квадрату обобщенной скорости: $R = b\dot{q}^2/2$.

Рассеяние механической энергии. Закон сохранения механической энергии $T+\Pi=\text{const}$ применим лишь в системах, где отсутствуют диссипативные силы. Примером таких систем можно считать солнечную систему, полагая, что на планеты кроме сил всемирного тяготения не действуют никакие другие силы. В рассматриваемых же в этой главе механических системах, выведенных из состояния устойчивого равновесия и совершающих колебания, всегда действуют более или менее значительные силы сопротивления. При движении таких систем происходит утечка кинетической энергии и пренебрегать ею не всегда возможно. Установить точно и полностью влияния диссипативных сил на движение механической системы бывает трудно даже в каждом отдельном случае. В общей же теории малых колебаний ограничимся предположением (довольно близким к действительности), что на точки системы действует сила сопротивления

$$\vec{F}_k^R = -b_k\vec{v}_k,$$

пропорциональная по модулю, обратная по направлению скорости этой точки. Проекции этой силы на оси координат равны коэффициенту b_k, помноженному на проекцию скорости точки:

$$X_k^R = -b_k\dot{x}_k;\quad Y_k^R = -b_k\dot{y}_k;\quad Z_k^R = -b_k\dot{z}_k.$$

Заметим, что проекции этой силы на оси равны (взятыми со знаком минус) частным производным от одной и той же функции

$$R = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} b_k\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right). \tag{241}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} = b_k\dot{x}_k = -X_k^R;\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_k} = -Y_k^R;\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_k} = -Z_k^R.$$

Пользуясь этими равенствами, составим по общей формуле (226) выражение для обобщенной силы Q_i^R всех сопротивлений системы, соответствующей обобщенной координате q_i:

$$Q_i^R = \sum_{k=1}^{k=n}\left(X_k^R\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k^R\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k^R\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)$$

и, приняв во внимание (228), получим

$$Q^R = -\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_l}+\frac{\partial R}{\partial \dot{y}_k}\frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}_l}+\frac{\partial R}{\partial \dot{z}_k}\frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}_l}\right) \qquad (242)$$

или

$$Q_l^R = -\partial R/\partial \dot{q}_l. \qquad (242')$$

Если в равенстве (241) вместо проекций скоростей $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ каждой точки подставим их значения (227), то выразим R однородной квадратичной функцией от обобщенных скоростей с переменными коэффициентами, зависящими от обобщенных координат. Раскладывая эти коэффициенты по степеням малых величин q_1, q_2, ..., q_s, ограничимся лишь постоянными членами и придем к приближенному выражению функции R через обобщенные скорости и постоянные коэффициенты

$$R = \frac{1}{2}\left(b_{1,1}\dot{q}_1^2 + b_{2,2}\dot{q}_2^2 + \ldots + b_{s,s}\dot{q}_s^2 + \right.$$
$$\left. + 2b_{1,2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + 2b_{s-1,s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s\right). \qquad (243)$$

Эта функция характеризует скорость рассеяния механической энергии. Поэтому ее называют *функцией рассеяния* или *диссипативной функцией* Рэлея *.

В особо интересном случае малых колебаний механических систем с одной степенью свободы функция Рэлея очень упрощается

$$R = b\dot{q}^2/2. \qquad (244)$$

Обобщенные силы в уравнениях малых колебаний могут зависеть от обобщенной координаты, от обобщенной скорости и от времени.

Обобщенные силы при малых колебаниях. Силы, действующие на материальные тела, могут зависеть от положения тел и скоростей; они могут изменяться с течением времени или оставаться постоянными. Аналогично, обобщенные силы в уравнениях Лагранжа, описывающих малые колебания механических систем, могут зависеть от тех же факторов. Ознакомимся с обобщенными силами, которые применяются при составлении уравнений малых колебаний с одной степенью свободы и являются функциями обобщенной координаты, или обобщенной скорости, или времени.

Восстанавливающая сила возникает при нарушении устойчивого равновесия системы и обусловливает колебательные свойства системы.

Восстанавливающая сила. Если система выведена из состояния устойчивого равновесия, т. е. если получены начальные возмущения состояния устойчивого равновесия, то возникают консервативные силы, стремящиеся возвратить систему в равновесное положение. Эти силы возникают по разным причинам и обусловлены потенциальным полем, в котором нахо-

* Dissipation — рассеяние, утечка. Диссипативную функцию ввел в науку Д. Рэлей в 1878 г.

дится данная механическая система. Так, в физическом маятнике восстанавливающая сила — это момент его веса относительно оси подвеса, а при колебании корабля восстанавливающая сила вызвана архимедовой силой. В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие упругих сил, порожденных деформацией этих элементов.

В рассматриваемых здесь системах с одной степенью свободы потенциальная энергия выражается равенством (239), а обобщенная сила связана с потенциальной энергией равенством вида (230). Поэтому, чтобы определить восстанавливающую обобщенную силу в системах с одной степенью свободы, нужно лишь продифференцировать потенциальную энергию по обобщенной координате

$$Q^{(\Pi)} = -cq. \tag{245}$$

Коэффициент c, называемый обычно коэффициентом жесткости, при колебаниях различных механических систем имеет разные значения и должен быть определен в каждой задаче. Во многих задачах этот коэффициент действительно характеризует упругие свойства вибрирующих систем. Но свое название он сохраняет не только при вибрации упругих систем, но и при малых колебаниях полносвязных систем во всяком потенциальном поле.

Обобщенная сила сопротивления характеризует диссипативные силы системы, вызывающие затухание малых колебаний.

Обобщенная сила сопротивления. Если на точки системы действуют силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости точек, то *обобщенную силу сопротивления* $Q^{(R)}$ определим как взятую со знаком минус производную от функции Рэлея по обобщенной скорости. В случае малых колебаний системы с одной степенью свободы имеем

$$Q^{(R)} = -b\dot{q}. \tag{246}$$

Возмущающая сила вызывает изменения основного движения системы.

Возмущающая сила. Внешние силы, действующие на механическую систему и зависящие от времени, называют *возмущающими силами*. Зависимость этих сил от времени может быть различной, но обычно возмущающие силы являются периодическими функциями времени. Такие функции можно разложить в ряд Фурье, и периодическая возмущающая сила в общем случае может быть сведена к частному случаю силы, изменяющейся по простому гармоническому закону, т. е. по закону синуса

$$Q^{(t)} = H \sin pt, \tag{247}$$

где H — амплитуда возмущающей силы; p — частота.

Возмущающие силы, изменяющиеся по закону синуса, очень часто встречаются в технике. Так, например, пусть механическая система представлена горизонтальной балкой (рис. 133), заделанной одним концом в стену. Выведенная из состояния равновесия балка совершает малые колебания под действием восстанавливающих сил. На свободном конце балки установлен мотор. Якорь мотора, вращающийся с угловой скоростью $\omega = p$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа, неуравновешен, и составляющая $\Phi_N \sin pt$ центробежной силы является возмущающей силой при вибрации горизонтальной балки.

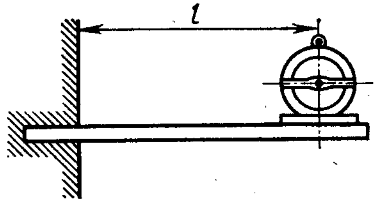


Рис. 133

Для определения обобщенных коэффициентов (a — инерции, b — вязкости, c — жесткости) нет необходимости всякий раз раскладывать функции в ряд и пренебрегать затем членами высших порядков малости. Названные величины и обобщенные силы обычно легко определяются непосредственно из условий задач.

Малые колебания полносвязной механической системы могут быть описаны одним дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Вынужденные колебания с сопротивлением. Для определения малых колебаний полносвязной системы воспользуемся уравнением Лагранжа, составив его при сделанных допущениях. А именно: выразим кинетическую энергию системы половиной произведения обобщенного коэффициента инерции и квадрата обобщенной скорости (237)

$$T = a\dot{q}^2/2.$$

Взяв частную производную $\partial T/\partial \dot{q}$, а затем полную производную по времени, получим первый член уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}.$$

Второй член левой части уравнения Лагранжа равен нулю, так как в принятом выражении (237) кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты

$$\partial T/\partial q = 0.$$

Восстанавливающей силой является сила потенциального поля, определяемая равенством (245)

$$Q^{(\Pi)} = -cq,$$

где c — обобщенный коэффициент жесткости.

Считая, что на точки системы действуют диссипативные силы, пропорциональные их скоростям, выразим обобщенную силу сопротивления равенством (246)

$$Q^{(R)} = -b\dot{q}.$$

Возмущающую силу системы примем изменяющейся со временем по синусоидальному закону (247)

$$Q^{(t)} = H \sin pt.$$

Уравнение колебаний системы, составленное по схеме уравнений Лагранжа при сделанных допущениях, имеет вид

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} + H \sin pt.$$

Перенеся члены, содержащие q и $\dot{q}$, из правой части в левую, разделив обе части на a и введя обозначения

$$b/a = 2n, \quad c/a = k^2, \quad H/a = h, \tag{248}$$

придадим уравнению такой вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt. \tag{249}$$

Итак, дифференциальным уравнением малых колебаний системы при указанных силах является неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Интегрирование дифференциального уравнения (249). Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, общее решение такого уравнения складывается из общего решения q_* соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (249).

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \tag{250}$$

составим характеристическое уравнение $z^2 + 2nz + k^2 = 0$.

В случае $n < k$ (случай малого сопротивления) * характеристическое уравнение имеет комплексные корни

$$z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2},$$

и общее решение однородного уравнения (250) имеет вид

$$q_* = e^{-nt}\left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}\, t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}\, t\right). \tag{251}$$

---

* При $n > k$ корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны: система не совершает колебательного движения.

Постоянные C_1 и C_2 можно определить лишь после получения частного решения неоднородного уравнения (249). Это частное решение будем искать в виде

$$q_{**}=B\sin(pt-\delta),$$

где B и δ — постоянные величины, при которых написанное выражение должно удовлетворять уравнению (249). Чтобы определить эти постоянные величины, возьмем первую и вторую производные от q_{**} по времени

$$\dot{q}_{**}=Bp\cos(pt-\delta);\quad \ddot{q}_{**}=-Bp^2\sin(pt-\delta).$$

Подставим в (249) вместо q, $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ написанное выражение q_{**} и его производных.

$$-Bp^2\sin(pt-\delta)+2nBp\cos(pt-\delta)+k^2B\sin(pt-\delta)=h\sin pt.$$

Преобразуем правую часть этого равенства

$$h\sin pt=h\sin(pt-\delta+\delta)=h\sin(pt-\delta)\cos\delta+h\cos(pt-\delta)\sin\delta.$$

Перенесем все члены влево и соберем члены, содержащие $\sin(pt-\delta)$ и $\cos(pt-\delta)$:

$$[B(k^2-p^2)-h\cos\delta]\sin(pt-\delta)+(2Bnp-h\sin\delta)\cos(pt-\delta)=0.$$

Это равенство превращается в тождество, если

$$B(k^2-p^2)=h\cos\delta \text{ и } B2np=h\sin\delta,$$

или после элементарных преобразований

$$B=h/\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2};\quad \operatorname{tg}\delta=2np/(k^2-p^2).$$

Найдено следующее частное решение неоднородного уравнения (249)

$$q_{**}=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt-\delta),$$

где δ определяется по полученной формуле.

Сложив его с общим решением (251) однородного уравнения, получим общее решение неоднородного уравнения (249)

$$q=q_*+q_{**}=e^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t+\right.$$

$$\left.+C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right)+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt-\delta). \qquad (252)$$

Это уравнение описывает малые колебания механической системы с одной степенью свободы при гармонической возмущающей силе, определяемой по (247), и при силе сопротивления, пропорциональной скоростям точек системы.

Прежде чем рассматривать движения (малые колебания) системы, описываемые уравнением (252), рассмотрим более простые колебания, которые система совершает при отсутствии возмущающей силы ($Q^{(t)}=0$) или силы сопротивления ($Q^{(R)}=0$), или обеих сил.

Уравнения таких колебаний получим из уравнений (249) и (252), положив в них соответствующие величины равными нулю.

Амплитуда и начальная фаза свободных колебаний определяются начальными условиями, а круговая частота и период от начальных условий не зависят.

С в о б о д н ы е   н е з а т у х а ю щ и е   к о л е б а н и я. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, находящуюся в каком-либо потенциальном поле в состоянии устойчивого равновесия. Если такой системе сообщить достаточно малые возмущения, ее равновесное состояние нарушится и система будет совершать малые колебания около равновесного положения. Пусть на систему не действуют никакие внешние, зависящие от времени силы и мы пренебрегаем силами сопротивления. Тогда единственной обобщенной силой системы явится восстанавливающая сила $Q^{(П)}=-cq$, возмущающая же сила $Q^{(t)}$ и обобщенная сила сопротивления $Q^{(R)}$ равны нулю. При таком условии равны нулю и величины H, h, b, $2n$, δ, а дифференциальное уравнение (249) в таком случае имеет вид, уже хорошо знакомый (см. с. 237).

$$\ddot{q}+k^2q=0. \tag{253}$$

Чтобы получить его интеграл, достаточно в (252) учесть, что величины n и h равны нулю:

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{254'}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют из начальных условий, но чтобы придать полученному решению более удобный вид, заменим постоянные C_1 и C_2 двумя другими постоянными, однозначно с ними связанными соотношениями

$$C_1=A\sin\beta \text{ и } C_2=A\cos\beta. \tag{255}$$

Тогда в правой части получим синус суммы $(kt+\beta)$ и решение запишем так:

$$q=A\sin(kt+\beta). \tag{254}$$

Для определения постоянных A и β продифференцируем (254)

$$\dot{q}=Ak\cos(kt+\beta).$$

Если в начальное мгновение, когда $t=0$, обобщенные координаты и скорость равнялись q_0 и $\dot{q}_0$, то

$$A=\sqrt{q_0^2+(\dot{q}/k)^2} \text{ и } \beta=\operatorname{arctg} kq_0/\dot{q}_0. \tag{256}$$

Величину β называют *начальной фазой*, а величину A — *амплитудой свободных колебаний системы*. Размерность амплитуды колебаний системы равна размерности обобщенной координаты, обычно это угол или длина. При колебании рассматриваемой механической системы ее различные точки в зависимости от своего положения в системе могут колебаться около своих равновесных положений, двигаясь не в одном направлении, с различными скоростями и амплитудами, зависящими от амплитуды A колебаний системы. Система в свою очередь зависит от начальных условий движения q_0 и $\dot{q}_0$ и от потенциального силового поля, в котором происходят рассматриваемые колебания. Но колебания всех частиц системы происходят с одинаковой круговой частотой

$$k=\sqrt{c/a} \tag{257}$$

и с одинаковым периодом колебаний системы

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{a/c}, \tag{258}$$

которые не зависят от начальных условий и всецело определяются свойствами самой системы.

Всякая система, находящаяся в силовом поле, может быть охарактеризована *частотой* k так называемых *свободных*, или *собственных, колебаний*, возникающих в этой системе, если она выведена из состояния устойчивого равновесия, т. е. если ей сообщены некоторые (достаточно малые) возмущения. Свободные колебания системы не могут происходить с другой частотой и с другим периодом, частота собственных колебаний присуща данной системе, как ее масса и размеры.

Линейным осциллятором называют механическую систему, совершающую колебания, определяемые восстанавливающей силой и силой сопротивления, пропорциональной скорости.

Свободные затухающие колебания. Колебания механической системы называют свободными, если они определяются только состоянием самой системы, т. е. восстанавливающей силой, зависящей от обобщенной координаты q, и сопротивлением, пропорциональным скорости $\dot{q}$. Такую систему называют *линейным осциллятором*. Если механическая система является линейным осциллятором, то возмущающая сила $Q^{(t)}$ равна нулю, а следовательно, равны нулю величины H и h. При этом в дифференциальном уравнении (249) исчезает правая часть и оно становится однородным уравнением (250)

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0.$$

Его интеграл получим, заменив h нулем в формуле (252)

$$q=e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t+C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t).$$

Если воспользоваться соотношением (255), то

$$q = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \beta). \tag{259}$$

Наиболее существенное отличие уравнения (259) от уравнения (254), иначе говоря, наиболее существенное изменение в свободном колебании системы, внесенное наличием силы сопротивления, заключается в множителе e^{-nt}, который с течением времени непрерывно уменьшается, вследствие чего амплитуды колебаний с сопротивлением убывают по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к нулю. Такие колебания называют *затухающими*.

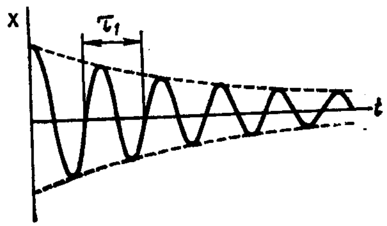


Рис. 134

Переходя к определению периода затухающих колебаний, обратим внимание на то, что вообще *периодом периодического движения* называют промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки (или системы) через одно и то же положение в одном и том же направлении. В случае затухающих колебаний только равновесное положение удовлетворяет такому определению периода. Всякое же другое положение система, совершающая затухающие колебания, проходит через неравные промежутки времени (рис. 134). Поэтому под *периодом затухающих колебаний* понимают промежуток времени τ_1 между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия в одинаковом направлении. В таком же смысле колебания, описываемые уравнением (259), могут быть названы *изохронными*. Период затухающих колебаний можно определить по формуле

$$\tau_1 = 2\pi/\sqrt{k^2 - n^2}. \tag{260}$$

Для практических расчетов удобна формула, которую рекомендует, в частности, проф. И. М. Бабаков в учебнике «Теория колебаний»,

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]. \tag{260'}$$

Сравнивая (260) и (258), видим, что сопротивление увеличивает период свободных колебаний, но незначительно.

Гораздо больше оно влияет на убывание амплитуд. Так, например, при $n = 0{,}05k$ сопротивления увеличивают период на 0,125%, а амплитуда за время одного полного колебания уменьшается более чем на 25%. На рис. 134 изображен график затухающих колебаний для случая $n = 0{,}05k$, позаимствованный из «Лекций» проф. Е. Л. Николаи.

Отношение абсолютных значений двух последовательных амплитудных отклонений системы от равновесного положения называют *коэффициентом затухания* или *декрементом колебаний*

$$\Psi = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+\tau_1/2)}} = e^{n\tau_1/2}. \qquad (261)$$

Для характеристики быстроты убывания амплитуды удобнее пользоваться натуральным логарифмом коэффициента затухания

$$\ln \Psi = n\tau_1/2, \qquad (262)$$

называемым *логарифмическим декрементом колебаний* механической системы. На рис. 134 пунктиром изображены кривые, уравнения которых $q = Ae^{-nt}$ и $q = -Ae^{-nt}$. График затухающих колебаний расположен между этими двумя кривыми и поочередно их касается.

Задача № 67. Физический маятник, период малых колебаний которого в безвоздушной среде равен 1 с, заставили качаться в среде, сопротивляющейся по закону $R = -2\dot{q}H$. Момент инерции маятника относительно оси подвеса равен 1 кг·м². Определить период затухающих колебаний маятника и уменьшение амплитуды в течение трех качаний.

Решение. Задачу решаем в СИ. Примем за обобщенную координату q угол поворота маятника. Определим параметры колебаний. Обобщенная скорость $\dot{q} = \omega$, коэффициент инерции $a = J = 1$.

Круговая частота. Период $\tau_0 = 1$ с $= 2\pi k$, откуда $k = 2\pi = 6{,}28$. Коэффициент $b = 2$; $a = 1$; $2n = b/a$, откуда $n = 1$. Период затухающих колебаний $\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{6{,}28}{6{,}20} = 1{,}0129$ с, или по (260′) $\tau_1 = 1 + 1/78{,}9568 = 1{,}0127$. Логарифмический декремент $n\tau_1/2 \approx 1/2$; отношение каждого максимального отклонения к последующему (через полпериода) равно коэффициенту затухания, следовательно, если амплитуду при первом размахе принять за 1, то следующие уменьшаются в отношении $1/\psi$.

Ответ. $\tau_1 = 1{,}01$ с; $A_1 = 1{,}000$; $A_2 = 0{,}606$; $A_3 = 0{,}368$; $A_4 = 0{,}223$; $A_5 = 0{,}134$; $A_6 = 0{,}082$.

Под действием восстанавливающей и возмущающей сил система совершает сложное колебание, являющееся результатом наложения трех гармонических колебаний: свободного, сопровождающего свободного и вынужденного.

Вынужденные колебания без сопротивления. Пусть система движется под действием двух обобщенных сил — восстанавливающей $Q^{(\Pi)} = -cq$ и возмущающей $Q^{(t)} = H \sin pt$. Величина pt может быть названа фазой возмущающей силы, постоянную p назовем круговой частотой возмущающей силы, а период этих изменений обозначим через τ. Действие сопротивления пока не учитываем, поэтому, положив в уравнении (249) $n = 0$, получим следующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления:

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin pt. \qquad (263)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, надо в (252) положить равным нулю не только n, но и δ, так как $\operatorname{tg}\delta = 2np/(k^2-p^2)$, а следовательно, если $n=0$, то и $\delta=0$. Имеем

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2-p^2} \sin pt.$$

Определим постоянные. Если в начальное мгновение $q=q_0$ и $\dot{q}=\dot{q}_0$, то

$$C_1 = q_0 \text{ и } C_2 = \dot{q}_0 k - hp/[k(k^2-p^2)]$$

и

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \frac{hp}{k(k^2-p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2-p^2} \sin pt. \quad (264)$$

Первые два слагаемых описывают свободные колебания с частотой k. Воспользовавшись соотношениями (255), эти два слагаемых можно представить в виде $q_1 = A \sin(kt+\beta)$. Если в начальное мгновение $q_1=\dot{q}_1=0$, то эти колебания во все время действия возмущающей силы не возникают. Третье слагаемое правой части уравнения (264)

$$q_2 = \frac{hp}{k(k^2-p^2)} \sin kt$$

— гармоническое колебание, происходящее с частотой k свободных колебаний, но с амплитудой, зависящей от возмущающей силы. Это колебание всегда, при любых начальных условиях, сопровождает вынужденные колебания и его называют *свободным сопровождающим колебанием*. Четвертое слагаемое

$$q_3 = \frac{h}{k^2-p^2} \sin pt$$

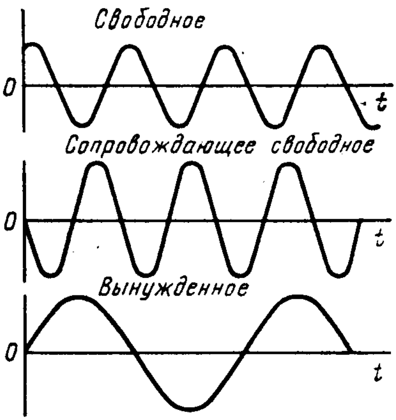


Рис. 135

описывает вынужденные колебания. Таким образом, колебания системы являются результатом линейного наложения трех гармонических колебаний: 1) свободных, 2) свободных сопровождающих и 3) вынужденных (рис. 135):

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = A \sin(kt+\beta) - \frac{hp}{k(k^2-p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2-p^2} \sin pt. \quad (264')$$

На рис. 135 приведены только частоты этих колебаний, но, разумеется, не изображены амплитуды и начальные фазы.

Вынужденные колебания происходят с частотой p, равной частоте возмущающей силы. Они не зависят от начальных данных. Для изменения амплитуды вынужденных колебаний при заданной возмущающей силе обычно приходится изменять конструкцию системы, ее жесткость, геометрию масс. Напомним, что для изменения амплитуды свободных колебаний достаточно изменить начальное отклонение или начальную скорость.

Если частота p вынужденных меньше частоты k (свободных) собственных колебаний (случай «малой» частоты), то амплитуда вынужденных колебаний $A_3=h/(k^2-p^2)$, а фаза pt вынужденных колебаний совпадает с фазой pt возмущающей силы. Но если $p>k$ (случай «большой» частоты), то выражение, написанное для A_3, становится отрицательным, однако амплитуда не может быть отрицательной. Это кажущееся несоответствие объясняется тем, что при $p>k$ фаза вынужденных колебаний противоположна фазе возмущающей силы и уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$q_3=\frac{h}{p^2-k^2}\sin(pt+\pi).$$

Резонанс. Если частоты собственных и вынужденных колебаний близки между собой, то амплитуды получаются очень большими. Напомним, что при интегрировании уравнения (249) мы положили $p\neq k$. Если $p=k$, то дифференциальное уравнение (263) имеет вид

$$\ddot{q}+k^2q=h\sin kt. \tag{265}$$

Будем искать частное решение вида

$$q=Bt\cos kt.$$

Определив $\ddot{q}=-2Bk\sin kt-Btk^2\cos kt$ и подставив его вместе с q в дифференциальное уравнение, получим

$$-2Bk\sin kt=h\sin kt,$$

откуда

$$B=-h/(2k).$$

Находим общее решение дифференциального уравнения движения

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$

Дифференцируем по времени

$$\dot{q}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt-\frac{h}{2k}\cos kt+\frac{h}{2}t\sin kt.$$

Если в начальное мгновение $q=q_0$ и $\dot q=\dot q_0$, то $C_1=q_0$ и $C_2=\dot q_0/k+h/(2k^2)$ и общее решение принимает вид

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot q_0}{k}\sin kt+\frac{h}{2k^2}\sin kt-\frac{ht}{2k}\cos kt,$$

или, полагая $q_0=A\sin\beta$ и $\dot q_0/k=A\cos\beta$, получим

$$q=A\sin(kt+\beta)+\frac{h}{2k^2}\sin kt-\frac{ht}{2k}\cos kt. \qquad (266)$$

Следовательно, и при равенстве частот движение состоит из трех колебательных движений, однако вынужденные колебания представлены членом, в коэффициент которого входит множителем время. С течением времени это третье слагаемое, называемое *вековым* членом, безгранично растет по абсолютной величине. Размах вынужденных колебаний непрерывно растет по линейному закону. Это явление называется *резонансом*. График вынужденных колебаний при резонансе представлен на рис. 136.

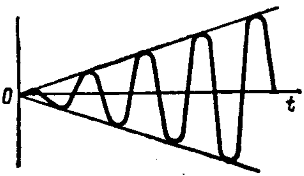


Рис. 136

Задача № 68 (М). Статический прогиб рессор товарного вагона 5 см. Определить критическую скорость вагона, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания на рессорах; длина рельсов 12 м.

Решение. Возмущающую силу считаем гармонической. Жесткость рессор $c=mg/5$ выражает обобщенный коэффициент жесткости. Обобщенный коэффициент инерции $a=m$;

$$k=\sqrt{c/m}=\sqrt{m\cdot 980/(5\cdot m)}=14\text{с}^{-1}.$$

Если поезд идет со скоростью v см/с, то вагон получает толчки на стыках через каждые $1200/v$ с. Таков период τ возмущающей силы. Частота возмущающей силы $p=2\pi/\tau=2\pi v/1200$, откуда $v=1200p/(2\pi)$. Галопирование вагона произойдет при резонансе, т. е. при равенстве частот собственных и вынужденных колебаний.

Подставляя в выражение, полученное для скорости, $p=k=14$ с$^{-1}$, найдем

$$v=1200\cdot 14/(2\pi)=2675 \text{ см/с}.$$

Чтобы выразить скорость в км/ч, умножим выраженную в см/с скорость на 0,036.

Ответ. $v=96$ км/ч.

При наличии сопротивления свободные колебания системы затухают и остаются только вынужденные.

Влияние сопротивления на вынужденные колебания. Если в системе кроме восстанавливающей и возмущающей сил имеются силы сопротивления, описываемые обобщенной силой $Q^{(R)}$, то дифференциальным уравнением движения системы является уравнение (249), а его решением — уравнение (252).

Первый член правой части уравнения (252) с возрастанием t стремится к нулю, и соответствующие ему собственные колебания системы с течением времени затухают, поэтому ими можно пренебречь, и остаются только вынужденные колебания системы

$$q_{\text{вын}}=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt-\delta)=A_{\text{вын}}\sin(pt-\delta). \qquad (267)$$

Они происходят с частотой возмущающей силы. Сопротивление не влияет на период вынужденных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий. Но она не зависит также и от времени, а потому вынужденные колебания с течением времени не угасают. Амплитуда (а следовательно, и напряжения, возникающие в упругих системах) зависит от возмущающей силы, главным образом от частоты p. Чтобы выявить эту зависимость, допустим, что упругая механическая система находится в состоянии равновесия и что на нее действует постоянная сила H. От действия этой постоянной силы система получит так называемое статическое отклонение

$$A_{\text{ст}}=H/c.$$

Разделив и помножив это равенство на коэффициент инерции a и приняв во внимание (248), выразим так статическое отклонение

$$A_{\text{ст}}=h/k^2.$$

Отношение амплитуды $A_{\text{вын}}$ вынужденных колебаний к статическому отклонению $A_{\text{ст}}$ называют *коэффициентом динамичности* η:

$$\eta=\frac{A_{\text{вын}}}{A_{\text{ст}}}=\frac{h}{(h/k^2)\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2+4\frac{n^2}{k^2}\frac{p^2}{k^2}}}. \qquad (268)$$

Отношение частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний

$$z=p/k \qquad (269)$$

носит название *коэффициента расстройки* и отношение величины n, измеряемой в $с^{-1}$, к частоте собственных колебаний называют *безразмерным коэффициентом вязкости* *

$$\beta=n/k. \qquad (270)$$

---

* Безразмерный коэффициент вязкости β связан с обобщенными коэффициентами a, b, c соотношением $\beta=ab/(2c^2)$.

Введя эти обозначения в предыдущее равенство, получим

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \tag{271}$$

Коэффициент динамичности η позволяет охарактеризовать динамический эффект, вызываемый возмущающей силой. Он зависит от двух величин: z и β. Задавшись каким-либо значением β и откладывая по оси абсцисс различные значения z, по оси ординат соответствующие значения коэффициента динамичности η, получим так называемые *резонансные кривые*. На рис. 137 изображены резонансные кривые для значений безразмерного коэффициента вязкости: 0,25; 0,15 и 0,10. Пунктиром нанесена уходящая в бесконечность при $z = p/k = 1$ резонансная кривая, соответствующая $\beta = 0$, т. е. вынужденным колебаниям без сопротивления.

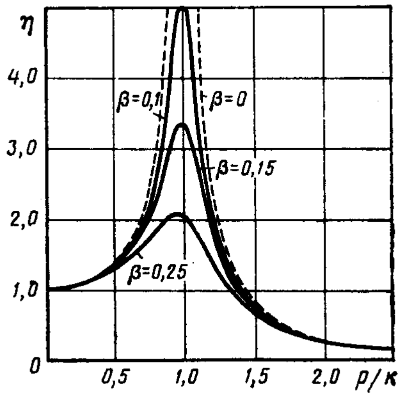


Рис. 137

Как показывает график, представленный на рис. 137, в областях, достаточно далеких от резонанса, амплитуды вынужденных колебаний с сопротивлением почти не зависят от безразмерного коэффициента вязкости. В этих областях при вычислении амплитуд вынужденных колебаний можно не учитывать сопротивлений и пользоваться более простой формулой

$$A_{\text{вын}} = h/(k^2 - p^2). \tag{272}$$

При резонансе ($p = k$) амплитуда вынужденных колебаний при наличии сопротивлений остается конечной, но наибольшее значение амплитуда имеет, если $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, в чем легко убедиться, определив максимум амплитуды при различных p, считая h, k и n данными.

В вынужденных колебаниях с сопротивлением всегда бывает сдвиг фазы колебания по отношению к фазе возмущающей силы. Величина этого сдвига определяется формулой $\delta = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2}$ (см. с. 311).

Задача № 69. Определить период малых колебаний маятника, состоящего из шарика, принимаемого за точку M массой m_1, укрепленного на конце невесомого стержня AM длиной l. Точка A стержня находится в центре однородного диска массой m_2 и радиусом r. Диск может катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Стержень и диск скреплены между собой (рис. 138). Движение маятника происходит в вертикальной плоскости.

Решение. Построим правую систему декартовых координат с началом в центре диска при положении устойчивого равновесия системы. Ось Oy направим вертикально вниз.

Определим связи, наложенные на систему. Диск может катиться по горизонтальному рельсу. Эта связь может быть выражена уравнением $y_A=0$. Но качание диска происходит без скольжения. Такую связь можно выразить условием, чтобы скорость точки касания диска равнялась нулю. Хотя связь наложена на скорость, но для диска, катящегося в своей плоскости, она является голономной (в отличие от катящегося по плоскости шара). В самом деле, приняв центр диска за полюс и разложив плоское движение диска на переносное поступательное вместе с полюсом и относительное вращательное вокруг полюса, получим для точки касания $v_A-\omega r=0$ или $\mathrm{d}x_A/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)r$.

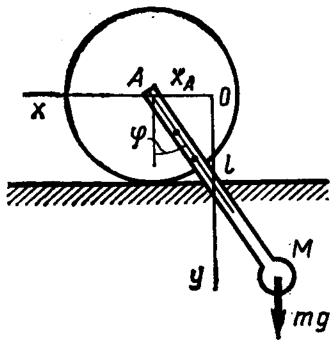


Рис. 138

Интегрируя, получаем второе уравнение связи

$$x_A=r\varphi.$$

Следовательно, связь интегрируемая, т. е. голономная.

Система имеет одну степень свободы, ее положение определяется одной обобщенной координатой, а ее движение — одним уравнением Лагранжа. За обобщенную координату можно взять, например, абсциссу x_A центра диска или угол φ отклонения маятника от вертикали, но не надо брать за обобщенные координаты обе эти величины и составлять два уравнения Лагранжа по каждой из координат, потому что обобщенные координаты должны быть независимыми друг от друга величинами, а x_A и φ являются зависимыми и связаны соотношением $x_A=r\varphi$. Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы. Выбор той или иной обобщенной координаты зависит от нас. Выберем φ. Выразим в этой обобщенной координате и обобщенной скорости $\dot\varphi$ кинетическую и потенциальную энергии системы. Определим сначала координаты шарика M, принимаемого за материальную точку, учитывая, что по уравнению связи $x_A=r\varphi$:

$$x=r\varphi-l\sin\varphi;\quad y=l\cos\varphi.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, найдем проекции скорости:

$$\dot x=r\dot\varphi-l\cos\varphi\dot\varphi,\quad \dot y=-l\sin\varphi\dot\varphi.$$

Определим квадрат полной скорости точки M

$$v_M^2=(r^2+l^2-2rl\cos\varphi)\dot\varphi^2$$

и кинетическую энергию точки M

$$T_1=\frac{m_1}{2}(r^2+l^2-2rl\cos\varphi)\dot\varphi^2.$$

Кинетическую энергию диска определим по формуле Кёнига, учитывая, что $\dot x_A=r\dot\varphi$:

$$T_2=m_2\dot x_A^2/2+(m_2r^2/2)(\dot\varphi^2/2)\text{ или }T_2=(3/4)m_2r^2\dot\varphi^2.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий точки M и диска

$$T=\frac{1}{2}\left[m_1(r^2+l^2-2rl\cos\varphi)+\frac{3}{2}m_2r^2\right]\dot\varphi^2.$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной (см. § 38) и этим обстоятельством следует воспользоваться так, чтобы в положении равновесия, при котором все обобщенные координаты равны нулю, потенциальная энергия также равнялась нулю. По теореме Дирихле, равновесие устойчиво, если около этого положения имеется область, в которой потенциальная энергия является определенно положительной функцией обобщенных координат. Это имеет место в случае

$$\Pi = m_1 g l (1 - \cos\varphi) \quad (\text{при } \varphi = 0 \ \Pi = 0; \ \text{при } \varphi \neq 0 \ \Pi > 0).$$

Функция Лагранжа $L = T - \Pi$,

$$L = \frac{1}{2}\left[m_1 (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]\dot{\varphi}^2 - m_1 g l (1 - \cos\varphi).$$

Подсчитаем величины, входящие в уравнение (232):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left[m_1 (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left[m_1 (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]\ddot{\varphi} + 2m_1 rl \sin\varphi\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_1 rl \sin\varphi\dot{\varphi}^2 - m_1 g l \sin\varphi.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\left[m_1 (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]\ddot{\varphi} + 2m_1 rl \sin\varphi\dot{\varphi}^2 - m_1 rl \sin\varphi\dot{\varphi}^2 + m_1 g l \sin\varphi = 0.$$

Колебания малые, и полагаем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и пренебрегаем малыми величинами второго и высшего порядка, а также произведениями малых величин. Линеаризованное уравнение движения системы принимает вид

$$\left[m_1 (l - r)^2 + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]\ddot{\varphi} + m_1 g l \varphi = 0.$$

Выражение в квадратных скобках есть обобщенный коэффициент инерции, а $m_1 g l$ — обобщенный коэффициент жесткости. Частоту собственных колебаний системы можем получить непосредственно по формуле (257). Но можно составить дифференциальное уравнение (253)

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 g l}{m_1 (l - r)^2 + 3m_2 r^2/2}\varphi = 0.$$

Интегрируя, получим уравнение гармонических колебаний. Конечно, частота этих колебаний зависит не только от масс, но и от их распределения. Система представляет собой своеобразный физический маятник, и квадрат частоты свободных колебаний пропорционален статическому моменту веса и обратно пропорционален моменту инерции маятника относительно мгновенной оси.

Ответ. $k = +\sqrt{m_1 g l \Big/ \left[m_1 (l - r)^2 + \frac{3}{2} m_2 r^2\right]}.$

Задача № 70 (№ 12. *Яблонский А. А.* и *Норейко С. С.* Курс теории колебаний. М., 1966). Определить частоту свободных поперечных колебаний двухопорной балки, изображенной на рис. 139. На балке находится груз весом mg; расстояния от груза до опор балки $a=l_1$ и $b=l_2$. Сечение и материал балки считать известными, весом балки пренебречь.

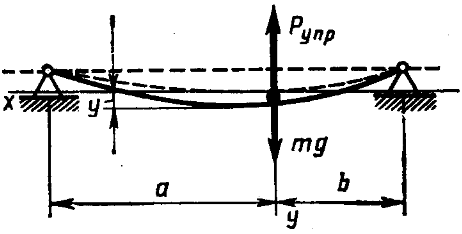


Рис. 139

Решение. Система имеет одну степень свободы. Построим декартовы координаты с началом в центре масс груза при равновесном положении системы и направим ось Oy вертикально вниз. За обобщенную координату системы примем ординату y_C центра масс.

Выразим в обобщенной координате и обобщенной скорости кинетическую и потенциальную энергии системы. Массой балки пренебрегаем, и кинетическая энергия системы равна кинетической энергии груза при его поступательном движении

$$T = m\dot{y}^2/2.$$

Следовательно, коэффициент инерции $a=m$ (см. с. 305).

Несколько сложнее определить потенциальную энергию, потому что система находится в потенциальном поле силы тяжести и в потенциальном поле упругости балки и полная потенциальная энергия $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$. Потенциальная энергия системы в поле силы тяжести

$$\Pi_1 = -mgy.$$

Потенциальную энергию сил упругости найдем из разности двух частных ее значений: при прогибе $(f+y)$ и при нулевом положении, когда прогиб балки в месте расположения груза равен f,

$$\Pi_2 = c\,(f+y)^2/2 - cf^2/2.$$

Тогда

$$\Pi = -mgy + cfy + cy^2/2 = (-mg + cf)\,y + cy^2/2.$$

Заметим, что при равновесном положении системы потенциальная энергия согласно теореме Дирихле должна иметь минимум, а потому ее производная $(\partial\Pi/\partial y) = (-mg+cf)+cy$ должна обратиться в нуль, если вместо y подставить нуль — его значение, соответствующее равновесному положению системы

$$(\partial\Pi/\partial y)_{y=0} = (-mg + cf) = 0.$$

Следовательно, потенциальная энергия системы

$$\Pi = cy^2/2,$$

где c — коэффициент жесткости балки. Поскольку сечение и материал балки известны, он может быть определен по формуле сопротивления материалов

$$c = 3EJ_э\,(l_1 + l_2)/(l_1^2 l_2^2).$$

Здесь E — модуль упругости материала; $J_э$ — экваториальный момент поперечного сечения балки.

Разделив c на $a=m$, найдем по формуле (257) квадрат частоты колебаний системы, а для получения ответа остается только извлечь квадратный корень.

Ответ. $k=\sqrt{c/a}=\sqrt{3EJ_э\,(l_1+l_2)/(ml_1^2l_2^2)}$.

Задача № 71. К концам M_1 и M_2 тонкого однородного стержня (рис. 140, *а*) массой m и длиной $2r$ подвязаны две невесомые нити одинаковой длины l. Верхние концы N_1 и N_2 нитей неподвижно закреплены на горизонтальной прямой на расстоянии $2r$ друг от друга. Стержень повернули на малый угол вокруг центральной вертикальной оси и отпустили без начальной скорости. Исследовать малые колебания *.

Решение. При заданном движении будет изменяться высота центра масс стержня, но он не может отклоняться в сторону. Положение системы определяется высотой центра масс, углом поворота стержня вокруг вертикальной оси и

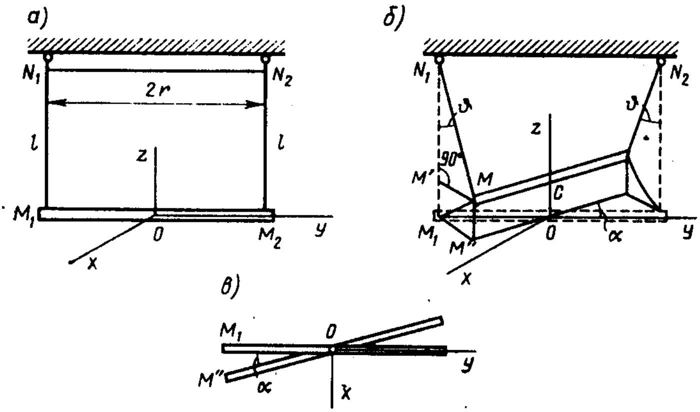


Рис. 140

углом отклонения нитей от вертикали. Но эти параметры зависят друг от друга, система имеет одну степень свободы, положение ее определяется одной обобщенной координатой, а движение — одним уравнением Лагранжа. Это уравнение удобно записать в форме (231), так как система находится в потенциальном поле тяжести и единственной активной силой системы является вес стержня.

За обобщенную координату нельзя выбрать высоту центра масс, потому что обобщенная координата должна однозначно определять положение системы, а каждому положению центра масс соответствуют два положения системы. Угол поворота стержня вокруг вертикальной оси можно принять за обобщенную координату, но удобнее в качестве таковой выбрать угол наклона нитей к вертикали, так как через этот угол легко выразить потенциальную энергию системы. Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Пусть в произвольное мгновение t угол поворота стержня был α, а угол наклона нитей ϑ (рис. 140, *б*). Спроецируем стержень на горизонтальную плоскость xOy (рис. 140, *в*). Равнобедренный треугольник $M''OM_1$ и прямоугольный треугольник $N_1M'M$ (рис. 140, *б*) имеют равные стороны $M'M = M_1M''$:

$$M_1M'' = 2r\sin\frac{\alpha}{2}, \quad MM' = l\sin\vartheta.$$

Эти два равенства позволяют выразить угол α в обобщенной координате $q = \vartheta$

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{l}{2r}\sin\vartheta\right).$$

* Первые научные исследования колебаний нитяных подвесов проведены Даниилом Бернулли в Петербурге в 1732 г.

Определим в обобщенной координате и положение центра масс

$$z_C = l - l\cos\vartheta.$$

Переходим теперь к вычислению входящих в уравнение (231) кинетической и потенциальной энергий системы.

Кинетическую энергию определим по формуле Кёнига. Чтобы выразить ее в обобщенных координате и скорости, продифференцируем по времени выражения, полученные для z_C и α:

$$\dot{z}_C = v_C = l\sin\vartheta\dot{\vartheta};\quad \dot{\alpha} = \omega = \frac{2l\cos\vartheta}{\sqrt{4r^2 - l^2\sin^2\vartheta}}\dot{\vartheta}.$$

Подставляя эти величины в (205) и учитывая, что стержень длиной $2r$ имеет момент инерции $J_C = mr^2/3$, получим довольно сложное выражение

$$T = \frac{m}{2}\left(v_C^2 + \frac{r^2}{3}\omega^2\right) = \frac{m}{2}\left(l^2\sin^2\vartheta + \frac{4}{3}\,\frac{r^2l^2\cos^2\vartheta}{4r^2 - l^2\sin^2\vartheta}\right)\dot{\vartheta}^2.$$

При малых колебаниях можно положить $\cos^2\vartheta = 1$ и $\sin^2\vartheta = 0$:

$$T = ml^2\dot{\vartheta}^2/6.$$

Следовательно, обобщенный коэффициент инерции $a = ml^2/3$.

Вычисляя потенциальную энергию Π системы, так определим постоянную C, чтобы Π обращалось в нуль при $\vartheta = 0$:

$$\Pi = mgl\,(1 - \cos\vartheta).$$

Как видно из этого равенства, при $\vartheta = 0$ потенциальная энергия системы имеет минимум, что по теореме Дирихле означает устойчивое равновесие. Разложим $\cos\vartheta$ в ряд. Тогда

$$\Pi = mgl\left(1 - 1 + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \ldots\right).$$

Отбросив все члены выше второго порядка, получим приближенно

$$\Pi = mgl\vartheta^2/2.$$

Дифференцируя это равенство по обобщенной координате, найдем восстанавливающую силу $Q^{(\Pi)} = \dfrac{d\Pi}{d\vartheta}$, а дифференцируя дважды, найдем и обобщенный коэффициент жесткости $c = mgl$, поделив который на коэффициент инерции, определим квадрат круговой частоты колебаний

$$k^2 = c/a = 3mgl/(ml^2) = 3g/l.$$

Период колебаний связан с круговой частотой соотношением (258)

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/(3g)}.$$

Заметим, что если к стержню присоединить тело с неизвестным моментом инерции и из опыта определить τ_1 колебания бифилярного подвеса вместе с телом, то можно определить момент инерции тела *.

Ответ. Малые колебания с периодом $\tau = 2\pi\sqrt{l/(3g)}$.

---

* См.: *Гернет М. М.* и *Ратобыльский В. Ф.* Определение моментов инерции. М., 1969, 248 с.

Глава XI

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 43. УДАРНЫЕ СИЛЫ

Ударом называют кратковременное взаимодействие тел, вызывающее за ничтожно малый промежуток времени резкое изменение скоростей их точек.

Ударный импульс. Иногда материальные тела находятся во взаимодействии всего лишь тысячные или даже стотысячные доли секунды, но при этом возникают настолько большие силы, что их импульс за столь малый промежуток времени достигает значительной величины и получается резкое, почти мгновенное изменение скорости точек этих материальных тел. Такое кратковременное взаимодействие тел называют *ударом*, возникающие при этом силы называют *ударными силами*; а импульс ударной силы за время удара — *ударным*, или *мгновенным, импульсом*. Удар называют *центральным*, если мгновенный импульс проходит через центр масс ударяемого тела (рис. 141, *а*). При *прямом ударе* (рис. 141, *б*) относительная скорость перед ударом направлена перпендикулярно общей касательной *AB*, проведенной к ударяющимся телам в точке удара, в противном случае удар называют *косым* (рис. 141, *в*).

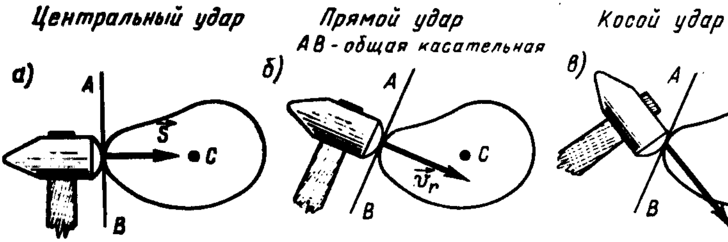


Рис. 141

Ударные силы во много тысяч раз превосходят вес ударяющего тела. Так, например, легким ударом молотка можно забить в деревянную стену гвоздь, но нужна громадная сила, чтобы тот же гвоздь вдавить, не вбить в стену. Пуля, вес которой измеряется граммами, при выстреле пробивает доску, но пуля должна была бы весить многие тонны, чтобы сделать в доске дырку своим весом. Поэтому в приближенной теории удара пренебрегают весом тел за время удара и всеми прочими неударными («конечными») силами, а также перемещениями тел и считают, что векторы скоростей точек ударяющихся тел изменяются мгновенно.

«Количество движения системы никогда не изменяется от ударов при встрече ее тел» (Ньютон).

Прямой центральный удар двух тел. Пусть два тела движутся поступательно и прямолинейно, причем центры масс C_1 и C_2 этих тел движутся по одной прямой, которую примем за ось Ox (рис. 142, *а*). В некоторое мгновение t первое тело, движущееся с большей скоростью, настигает второе, и начинается удар, продолжающийся в течение малого отрезка времени. Пусть для каждого тела удар является *центральным*. Предположим, что удар является *неупругим*, т. е. таким, при котором полученные за время удара деформации соударяющихся тел полностью сохраняются к концу удара. При отсутствии упругих сил телá не отталкиваются друг от друга и после удара продолжают двигаться с некоторой общей скоростью u (рис. 142, *б*). Определим мгновенный импульс S, действующий на каждое из тел со стороны другого. Для каждого из тел этот импульс является импульсом внешней реакции, и его легко определить, написав для каждого из тел уравнение (178′). В данном случае эти уравнения примут следующий вид (рис. 142, *в*):

$$\left.\begin{aligned} m_1(u-v_1) &= -S; \\ m_2(u-v_2) &= +S, \end{aligned}\right\} \qquad (273)$$

где m_1 и m_2 — массы первого и второго тел; v_1 и v_2 — скорости тел (выражаясь точнее, проекции их скоростей на прямую удара Ox) перед ударом.

Из этих двух уравнений определим мгновенный импульс

$$S = m_1 m_2 (v_1 - v_2)/(m_1 + m_2) \qquad (274)$$

и скорость обоих тел после неупругого удара

$$u = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2). \qquad (275)$$

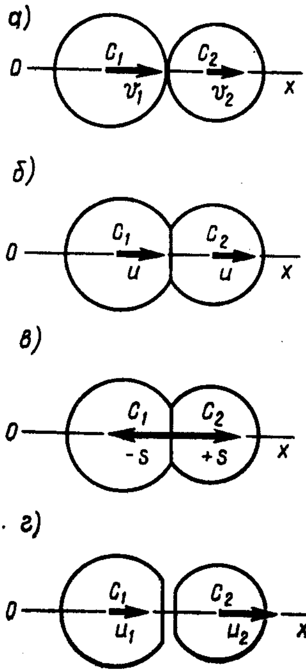


Рис. 142

Если равенство (275) умножим на m_1+m_2, то убедимся, что сумма количеств движений обоих тел при ударе не изменилась.

В природе не существует абсолютно неупругих тел и в действительности явление удара не заканчивается к тому мгновению, когда скорости тел становятся равными u. Во время удара тела стремятся восстановить свою первоначальную форму, они отталкиваются друг от друга и отделяются, имея различные скорости u_1 и u_2 (рис. 142, *г*).

Чтобы определить эти скорости и мгновенный импульс, разделим весь процесс удара на две стадии: 1) от начала соприкосновения тел до мгновения, при котором их скорости сравнялись; 2) от этого мгновения до конца контакта. Удар, при котором полученные за время удара деформации соударяющихся тел частично сохраняются к концу удара, называют *не вполне упругим*.

Уравнения для первой стадии удара ничем не отличаются от только что полученных; мгновенный импульс определяется по уравнению (274) и скорость — по (275). Исходными уравнениями для второй стадии явятся те же уравнения (273), с той лишь разницей, что u будет в них играть роль начальной скорости, а конечными будут u_1 и u_2. Иным становится мгновенный импульс ударной реакции за эту вторую стадию удара. Обозначим его kS. Физическое значение коэффициента k, зависящего от упругих свойств соударяющихся тел, рассмотрим в дальнейшем. Имеем

$$\left.\begin{aligned} m_1(u_1-u) &= -kS; \\ m_2(u_2-u) &= +kS. \end{aligned}\right\} \qquad (273')$$

Из системы уравнений (273) и (273′) найдем скорости не вполне упругих тел после удара:

$$u_1=u+k(u-v_1); \quad u_2=u+k(u-v_2). \qquad (275')$$

Сложив два уравнения (273), а также два уравнения (273′), в правых частях получим нуль. Приравнивая друг другу левые части сумм, получим

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2.$$

Таким образом, количество движения системы и при неупругом ударе не изменилось. Это объясняется тем, что для системы соударяющихся тел ударная сила является внутренней, а потому согласно интегралу количеств движения (185) $\Sigma m_k v_k=\text{const}$.

Отношение тангенсов угла падения и угла отражения равно коэффициенту восстановления: $k=\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$.

Коэффициент восстановления. Из тех же уравнений (275′) легко получить величину k, называемую *коэффициентом восстановления* *

$$k=\frac{|u_1-u_2|}{|v_1-v_2|}. \qquad (276)$$

---

* Понятие «коэффициент восстановления» введено в науку Ньютоном. Им же впервые экспериментально определен коэффициент восстановления k различных материалов. Ньютон считал величину k постоянной для определенной пары тел. В действительности же k сильно зависит от относительной скорости v_r, с которой происходит удар. Средние значения k при $v_r=2{,}8$ м/с следующие: для слоновой кости 8/9, для стали и пробки 5/9, для дерева 1/2, для стекла 15/16.

В числителе этого равенства видим относительную скорость тел после не вполне упругого удара, а в знаменателе — до удара. Величина k всегда положительна, поэтому взято отношение абсолютных значений относительных скоростей. Таким образом, коэффициент восстановления равен отношению модуля относительной скорости центров масс соударяющихся тел после прямого центрального удара к модулю относительной скорости их до удара.

Если маленький шарик ударяется о гладкую плиту под углом падения $\alpha \neq 0$ (рис. 143), то, принимая удар за центральный и раскладывая движение по осям координат, заметим, что ударный импульс направлен перпендикулярно гладкой плите, а потому проекция скорости шарика на гладкую плиту от удара не изменяется, но изменяется проекция скорости на нормаль к поверхности:

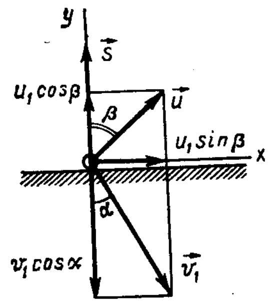


Рис. 143

$$v_1 \sin\alpha = u_1 \sin\beta; \quad k v_1 \cos\alpha = u_1 \cos\beta,$$

откуда

$$k = \operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}\beta, \tag{276'}$$

т. е. отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления.

Центр удара

Задача № 72. В плоскости, проведенной через центр масс C и ось вращения тела, найти такую точку, через которую должен проходить перпендикулярный этой плоскости мгновенный импульс, чтобы ось вращения не испытывала удара (рис. 144).

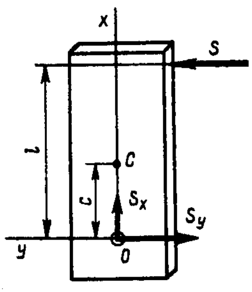


Рис. 144

Решение. Для определения этой точки, называемой центром удара *, рассмотрим ударные силы, действующие на тело во время удара. Приложенный к телу ударный импульс $\vec{S}$ вызывает мгновенные давления на подшипники, в которых укреплена ось вращения тела, следовательно, возникают соответствующие мгновенные реакции в подшипниках. Опустим из центра масс C перпендикуляр $CO = c$ на ось вращения тела. Примем направление OC за ось Ox, а ось Oy направим перпендикулярно ей и оси вращения. Если подшипники расположены на одинаковых расстояниях от точки O, а импульс $\vec{S}$ приложен в плоскости xOy, то реакции в подшипниках можно заменить одной реакцией, приложенной в точке O, и данную задачу свести к плоской. Пренебрегая действием за время удара конечных сил, составим дифференциальные уравнения (199) плоского движения

* Название «центр удара» принадлежит Дж. Валлису (1668).

тела под действием приложенного импульса $\vec{S}$ и импульса ударной реакции, который разложим на S_x и S_y:

$$m(u_x - v_x) = S_x;$$

$$m(u_y - v_y) = S - S_y;$$

$$J_C(\omega_2 - \omega_1) = S(l - c) + S_y c.$$

Здесь m — масса тела; v и u — скорости центра масс до и после удара; J_C — момент инерции тела относительно центральной оси, параллельной оси вращения; ω_1 и ω_2 — угловая скорость тела до и после удара; l — плечо импульса относительно оси вращения тела; c — расстояние центра масс от оси вращения.

В данном случае $v_x = 0$; $u_x = 0$; $v_y = v$; $u_y = u$; $\omega_1 = v/c$; $\omega_2 = u/c$.

Первые два уравнения плоского движения принимают вид

$$0 = S_x;\quad m(\omega_2 - \omega_1)c = S - S_y.$$

Первое из них показывает, что проекция ударной реакции подшипника на ось Ox равна нулю. Из второго уравнения выразим мгновенный импульс

$$S = S_y + mc(\omega_2 - \omega_1)$$

и подставим это выражение в уравнение моментов

$$J_C(\omega_2 - \omega_1) = [S_y + mc(\omega_2 - \omega_1)](l - c) + S_y c,$$

откуда

$$S_y l = (J_C + mc^2 - mcl)(\omega_2 - \omega_1).$$

По теореме о параллельных осях первые два слагаемых в квадратных скобках выражают момент инерции J тела относительно оси вращения и поэтому

$$S_y l = (J - mcl)(\omega_2 - \omega_1).$$

Это равенство показывает, что при

$$l = J/(mc) \tag{277}$$

ось вращения не испытывает ударов. Полученная формула, определяющая при рассмотренных условиях центр удара, имеет большое значение при конструировании различных машин, вращающиеся детали которых подвергаются ударам.

Обратим внимание на тождественность полученного равенства с (201), определяющим центр качания физического маятника, хотя, вообще говоря, центр качания и центр удара отличаются друг от друга и совпадают лишь в отдельных случаях *.

§ 44. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Движение точки переменной массы определяется уравнением $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\times(\vec{u} - \vec{v})$.

Пусть некоторая материальная точка M движется относительно неподвижной системы координат $xOyz$ под действием силы F. Предположим, что масса m точки M не остается постоянной, а изменяется, являясь, например, функцией времени координат точки M, длины пройденного пути, но не зависит от скорости точки

$$m = m(t, x, y, z, s).$$

* Различие между центром качания и центром удара установил Иван Бернулли в 1714 г.

Дифференциальные уравнения (140) не могут выразить движения точки M, так как в этих уравнениях масса предполагалась неизменной. Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы получим, предположив, что изменение массы этой точки происходит от присоединения к ней новых частиц (*изменяющих точек* *) или как отделение от нее изменяющих точек. В случае увеличения массы точки M массы изменяющих точек положительны, а в случае уменьшения присоединенные массы отрицательны.

Присоединение или отбрасывание возможно лишь, если скорости изменяющих точек не равны скорости точки M. Поэтому в мгновение, когда изменяющая точка отрывается от точки M или присоединяется к ней, между ними возникает мгновенное взаимодействие, аналогичное удару, изменяющее количество движения точки M. Однако это взаимодействие не изменяет количества движения всей материальной системы, состоящей из точки M и изменяющих точек, так как внутренние силы не могут изменить количества движения системы.

Обозначим через $\vec{a}^m$ ускорение, получаемое точкой M от присоединения или отбрасывания изменяющих точек, и через $\vec{a}^e$ — ускорение точки M от равнодействующей $\vec{F}$ приложенных к ней сил, обусловленных другими материальными телами. Таким образом, полное ускорение $\vec{a}$ точки M складывается из двух составляющих:

$$\vec{a}=\vec{a}^e+\vec{a}^m.$$

Руководствуясь принципом независимости действия сил, абстрагируемся от влияния внешних сил и найдем выражения для проекций на оси координат ускорения $\vec{a}^m$, сообщаемого точке M изменяющими точками.

Пусть в мгновение t масса точки M равна m и ее абсолютная скорость равна $\vec{v}$. Масса изменяющей точки $\mathrm{d}m$ в то же мгновение пусть имеет абсолютную скорость $\vec{u}$. Через бесконечно малый промежуток времени $\mathrm{d}t$, когда изменяющая масса присоединится к точке M, их общая скорость (при отсутствии внешних сил) станет равной $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$. Выразим по (174) проекции количества движения системы до присоединения к точке M изменяющей массы

$$Q_{Ox}=mv_x+\mathrm{d}\,mu_x$$

и после присоединения

$$Q_x=(m+\mathrm{d}\,m)(v_x+\mathrm{d}\,v_x)=mx_x+\mathrm{d}\,mv_x+m\,\mathrm{d}\,v_x+\mathrm{d}\,m\,\mathrm{d}\,v_x.$$

---

* Термин введен И. В. Мещерским.

Приравняем согласно (181) эти два выражения друг другу и после элементарных преобразований получим

$$\mathrm{d}v_x=\frac{\mathrm{d}m}{m}(u_x-v_x).$$

Деля на $\mathrm{d}t$, найдем проекцию ускорения на ось абсцисс

$$a_x^m=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_x-v_x).$$

Умножив это равенство на массу m, найдем проекцию *прибавочной силы* на ось Ox и аналогично на две другие оси

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_x-v_x);\quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_y-v_y);\quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_z-v_z).$$

Учитывая, что кроме прибавочной силы и независимо от нее на точку M действует сила F, проекции которой обозначим X, Y и Z, получим дифференциальные уравнения движения точки переменной массы

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=X+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_x-v_x);\\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=Y+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_y-v_y);\\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}&=Z+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u_z-v_z).\end{aligned}\right\} \tag{278}$$

Эти равенства справедливы как при $\mathrm{d}m>0$, так и при $\mathrm{d}m<0$. Они справедливы и для поступательного движения тела, если центр масс этого тела не перемещается в теле значительно от присоединения к телу или отбрасывания изменяющих точек.

Три уравнения можно заменить одним уравнением, написанным в векторной форме,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{u}-\vec{v}). \tag{278'}$$

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы называют уравнениями И. В. Мещерского, предложившего их в 1897 г. Но еще ранее (1812) они были опубликованы Г. Бюкуа *, а на 30 лет позже Мещерского те же уравнения, только в менее общей форме, были получены итальянским математиком и механиком Леви-Чивита.

---

* См.: *Михайлов Г. К.* К истории динамики системы переменного состава и теории реактивного движения. М., 1974.

§ 45. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ УДАРЕ

Потеря кинетической энергии системы, происходящая от ударов при встрече ее тел, равна кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям (Л. Карно).

Теорема Карно. Кинетическая энергия является мерой, характеризующей способность механического движения превращаться в эквивалентное количество других видов движения (теплота, электричество и т. п.). Удары тел всегда сопровождаются явлениями, требующими затраты энергии (нагревание тел, звук и пр.), поэтому удары, происходящие при встрече тел всякой механической системы, обязательно уменьшают кинетическую энергию системы.

Мгновенный импульс при прямом центральном неупругом ударе двух тел может быть выражен любой из следующих формул:

$$m_1(u-v_1)=-S,\quad m_2(u-v_2)=S,$$

$$m_1m_2(v_1-v_2)/(m_1+m_2)=S.$$

Кинетическую энергию системы двух тел до удара обозначим T_0, а после удара T. Изменение кинетической энергии

$$T-T_0=\left(\frac{m_1u^2}{2}+\frac{m_2u^2}{2}\right)-\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{m_1(u^2-v_1^2)}{2}+\frac{m_2(u^2-v_2^2)}{2},$$

или

$$T-T_0=\frac{m_1(u-v_1)(u+v_1)}{2}+\frac{m_2(u-v_2)(u+v_2)}{2}.$$

Если тела неупруги, то, принимая во внимание (273), получим

$$T-T_0=\frac{-S(u+v_1)}{2}+\frac{S(u+v_2)}{2}=-\frac{S(v_1-v_2)}{2}.$$

Подставив вместо S его значение из равенства (274), убедимся, что кинетическая энергия системы уменьшилась:

$$T-T_0=-\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}<0. \qquad (279)$$

Если одно из тел, например второе, до удара было неподвижно ($v_2=0$), то начальная кинетическая энергия системы равна кинетической энергии первого тела

$$T_0=m_1v_1^2/2$$

и

$$T-T_0=-\frac{m_2}{m_1+m_2}T_0. \qquad (279')$$

Следовательно, в этом случае потеря кинетической энергии зависит исключительно от отношения масс ударяющихся тел. При ковке металла переход кинетической энергии в тепловую целесообразен, а потому наковальня должна быть во много раз массивнее молота. Так, например, если молот в 99 раз легче наковальни, то $T-T_0=0{,}99T_0$, т. е. 99% энергии уходит, главным образом, на полезную работу (на ковку) и лишь 1% затрачивается на сотрясение наковальни. Напротив, при забивании свай надо сообщить сваe возможно бóльшую скорость, т. е. надо по возможности сохранить при ударе кинетическую энергию системы, а потому целесообразно ударять сваю массивной «бабой». Так, например, если масса «бабы» в 99 раз больше массы сваи, то $T-T_0=0{,}01T_0$ и 99% энергии уходит на полезную работу (забивку сваи) и лишь 1% теряется на звук, теплоту и пр. Так чисто механические вопросы приводят к экономическим решениям.

Потерю кинетической энергии при ударе выразим более удобной формулой, доказанной знаменитым французским ученым Лазаром Карно, «организатором побед» французской революции.

Возведем в квадрат равенство (274) и потом разделим правую часть полученного равенства на левую:

$$\frac{S^2(m_1+m_2)^2}{m_1^2m_2^2(v_1-v_2)^2}=1.$$

Умножим теперь на полученное выражение (т. е. на единицу) равенство (279):

$$T-T_0=-\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}\;\frac{S^2(m_1+m_2)^2}{m_1^2m_2^2(v_1-v_2)^2}=$$

$$=-\left[\frac{S^2}{2m_2}+\frac{S^2}{2m_1}\right],$$

или, имея в виду равенства (273),

$$T-T_0=-\left[\frac{m_1(v_1-u)^2}{2}+\frac{m_2(v_2-u)^2}{2}\right], \qquad (280)$$

где (v_1-u) и (v_2-u) выражают скорости, потерянные первым и вторым телами при ударе.

Поэтому равенство (280) читают так: потеря кинетической энергии неупругих тел при ударе равна сумме кинетической энергии, которую имели бы эти тела, если бы их скорости были равны тем скоростям, которые они потеряли при ударе.

Аналогично можно показать, что в случае не вполне упругого удара потеря кинетической энергии равна $(1-k)/(1+k)$ доле кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям:

$$T-T_0=-\frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m_1(v_1-u_1)^2}{2}+\frac{m_2(v_2-u_2)^2}{2}\right]. \qquad (280')$$

Если бы существовали абсолютно упругие тела ($k=1$), то их соударение происходило бы без потери кинетической энергии, т. е. без нагревания, без звука и пр.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Михаил Михайлович Гернет

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Зав. редакцией А. В. Дубровский. Редактор М. А. Алексеева. Младший редактор Н. М. Щепина. Художественный редактор Л. К. Громова. Технический редактор Н. В. Яшукова.

ИБ № 6280

Изд. № ОТ-627. Сдано в набор 17.12.86. Подп. в печать 20.04.87.
Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Объем 21,07 усл. печ. л. 21,07 усл. кр.-отт. 22,16 уч.-изд. л.
Тираж 40 000 экз. Зак. № 849. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.