

624/045/  
0429

Міністерство освіти України  
Вінницький державний технічний університет

А.І. Моргун, А.С. Моргун

Механіка ґрунтів, підвалини та фундаменти

/Розрахунок конструкцій на пружній основі/

Вінниця ВДТУ 1997

2937 - 8

Міністерство освіти України  
Вінницький державний технічний університет

А.І.Моргун, А.С.Моргун

Механіка ґрунтів, підвалини та фундаменти  
/ Розрахунок конструкцій на пружній основі /

Затвержено Ученою радою Вінницького державного  
технічного університету як навчальний посібник  
для студентів всіх будівельних спеціальностей

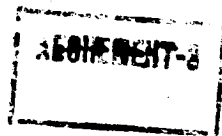
НТБ ВДУ



2937-8

624(075) M 79 1997

Моргун А.І. Механіка ґрунтів. Підвалини та фундаменти



Вінниця ВДУ 1997

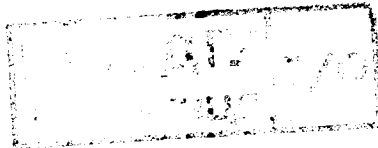
УДК 624.011.8

Розрахунок конструкцій на пружній основі Навч. посібник.  
/Моргун А.І., Моргун А.С.-В.: 1997- 120 стор.Укр. мовою/

Навчальний посібник складено з урахуванням його застосування в курсовому та дипломному проектуванні. Він містить приклади конструювання, методики та програми розрахунків балок, ростверків на пружній основі за методами скінчених різниць та скінчених елементів.

Призначений для студентів будівельних спеціальностей.  
Іл. 34. Табл. 5. Бібліограф. 19 назв.

Рецензенти: О.Ф. Яременко, проф.  
М.М. Сорока, доц.  
В.Г. Луцяк, доц.



## ЗМІСТ

I. Короткий аналіз методів розрахунку конструкцій на пружній основі . . . . .	6
I.1. Основи теорії розрахунку стрічкового фундаменту . . . . .	10
I.1.1. Визначення попередніх розмірів стрічкового балочного фундаменту . . . . .	10
I.1.2. Статичний розрахунок балки постійного перетину на пружній основі з постійним коефіцієнтом жорсткості . . . . .	14
I.1.3. Перевірочний розрахунок основи . . . . .	19
I.1.4. Розрахунок міцності балки . . . . .	20
I.1.4.1. Розрахунок перетинів нормальних до осі балки . . . . .	20
I.1.4.2. Розрахунок перетинів, нахилених до осі балки . . . . .	24
I.1.4.3. Розрахунок консольних виступів фундаменту . . . . .	27
I.1.4.4. Розрахунок величини розкриття тріщин . . . . .	27
I.1.5. Конструювання балки . . . . .	33
I.2. Приклад розрахунку стрічкового фундаменту . . . . .	36
I.2.1. Вхідні дані . . . . .	36
I.2.2. Визначення попередніх розмірів фундаменту . . . . .	36
I.2.3. Статичний розрахунок балки . . . . .	38
I.2.4. Розрахунок міцності балки . . . . .	44
I.2.5. Розрахунок фундаменту по розкриттю тріщин . . . . .	56
I.2.5.1. Розрахунок по розкриттю тріщин, нормальних до поздовжньої осі балки . . . . .	56
I.2.5.2. Розрахунок по розкриттю тріщин, нахилених до поздовжньої осі елемента балки . . . . .	61
I.2.6. Конструювання фундаменту . . . . .	62
I.3. Використання ЕОМ при розрахунках стрічкових фундаментів . . . . .	65
2. Розрахунки балки на пружній основі методом скінчених елементів /МСЕ/ . . . . .	67
2.1. Математична модель розрахунку балки на пружній основі . . . . .	67
2.1.1. Коротка історія розвитку варіаційних методів . . . . .	69
2.2. Основні положення методу скінчених елементів . . . . .	72
2.3. Вибір координатних функцій, побудова матриці жорсткості $[k]$ та вектора вузлових навантажень $\{P\}_k$ . . . . .	79
2.4. Матриця жорсткості для скінченого елемента вигнутої балки . . . . .	81
2.5. Чисельне обчислення балки на пружній основі за МСЕ . . . . .	85
2.5.1. Основна програма та структура вхідних даних . . . . .	85
2.5.2. Приклад розрахунку стрічкового фундаменту за МСЕ . . . . .	87

2.5.3. Лістинг програми розрахунку балки на пружній основі за методом скінчених елементів . . . . .	91
3. Розрахунок системи перехресних балок на пружній основі за методом скінчених елементів /МСЕ/ . . . . .	98
3.1. Компоновка розрахункової системи МСЕ для ростверка . . . . .	.98
3.2. Приклад чисельного обчислення системи перехресних балок на пружній основі за МСЕ . . . . .	.107
3.2.1. Постановка задачі та формування глобальної матриці жорсткості ростверку . . . . .	.107
3.2.2. Формування колонки вільних коефіцієнтів в розрахунковій системі лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/ для ростверку за МСЕ . . . . .	.108
3.3. Програма обчислення ростверку за МСЕ та структура вхідних даних . . . . .	.109
3.3.1. Лістинг програми розрахунку ростверка на пружній основі за МСЕ . . . . .	.III
Література . . . . .	II8

## Скорочення

МСР - метод скінчених різниць.

МСЕ - метод скінчених елементів.

СЛАР - система лінійних алгебраїчних рівнянь.

тс - тонно-сила.

кгс - кілограм-сила.

ЕОМ - електронно-обчислювальні машини.

СЕ - скінчений елемент.

# І. КОРОТКИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

В залежності від прийнятої моделі основи на практиці знаходять застосування наступні методи розрахунку конструкцій на пружній основі:

коефіцієнта постелі /вінклерова основа/ ;

лінійно-деформованого півпростору ;

коефіцієнта жорсткості основи ;

двох коефіцієнтів постелі та інші.

При обчисленні розрахунку тієї чи іншої конструкції /балка, система перехресних балок, плита/ на пружній основі інженер зустрічається з проблемою: який з існуючих методів найкраще підходить в даній ситуації з точки зору забезпечення надійності розрахункових даних, економії матеріальних ресурсів в процесі проектування, будівництва, експлуатації споруди.

Найбільш простим і поширеним є метод коефіцієнта постелі.

Основне рівняння, яке єднає прогини балки на пружній основі і реактивний тиск по підшві, має вигляд:

$$p = c w, \quad /I.I./$$

де  $p$  - реактивний тиск під підшвою фундаменту в перетині ;

$c$  - коефіцієнт постелі ;

$w$  - пружна осадка ґрунту в місці прикладення реактивного тиску.

Фізичний зміст коефіцієнта постелі визначається тим, що він характеризує значення зусилля /тс/, яке потрібно прикласти до одиниці площини /м<sup>2</sup>/, щоб вона отримала осадку, рівну одиниці довжини /м/. Одиниця коефіцієнта постелі - тс/м<sup>3</sup> або кгс/см<sup>3</sup>.

Один із суттєвих недоліків методу коефіцієнта постелі - це те, що величина коефіцієнта постелі не залежить від розмірів і форми фундаменту, крім того не враховується можливість основи розподілю-

вати зовнішнє навантаження і за межами грузової площини.

Модель лінійно-деформованого півпростору враховує можливість основи деформуватися і за межами площини фундаменту. Але розподільна можливість основи за даним методом отримується значно завищеною в порівнянні з експериментальними даними. Тому в теперішній час модель лінійно-деформованого півпростору вважається найбільш вживаною для піданих ґрунтів щільної будови.

Метод двох коефіцієнтів постелі дозволяє розраховувати конструкції на пружній основі з урахуванням сил зчеплення між підповерховим фундаментом і основою. Разом з тим, як показують порівняльні розрахунки, урахування цього фактора в більшості випадків виявляє незначний вплив на величини внутрішніх зусиль фундаменту. Тому в практиці проектування балок на пружній основі врахування сил зчеплення не приділяють значної уваги.

Розрахунок фундаментів за методом коефіцієнта жорсткості основи, який залежить від характеристик ґрунтів та розмірів фундаменту, дозволяє використовувати просте рівняння, аналогічне по формі рівнянню /I.I/, та більш повно відобразити спільну роботу фундаменту та основи.

Вибір раціональної розрахункової моделі балок на пружній основі. Обґрунтування прийнятої моделі

Аналіз наведених методів говорить за те, що найбільш припустимий для розрахунку конструкцій на пружній основі є метод коефіцієнта жорсткості основи. В даному методі прогин фундаменту та реактивний тиск визначають з рівняння:

$$p = w \cdot k, \quad /I.2/$$

де  $p, w$  - те ж, що в рівнянні /I.I/  
 $k$  - коефіцієнт жорсткості основи ;



$$K = \frac{E_0}{W_{\text{const}} \cdot \sqrt{F(1-\mu_0^2)}}, \quad /1.3/$$

$E_0, \mu_0$  - відповідно модулі загальної деформації і коефіцієнт Пуассона для ґрунтів;

$W_{\text{const}}$  - коефіцієнт форми підшви фундаменту /квадрат, круг і т.і./

$F$  - площа підшви фундаменту.

При вірному виборі чисельного значення коефіцієнта жорсткості основи та урахуванні в необхідних випадках його змінності по довжині фундаменту результати розрахунків конструкцій на пружній основі відповідають даним експериментальних досліджень, виконаних в нашій країні та за кордоном.

Далі наведені рекомендації до розрахунку стрічкових фундаментів під колони або під стіни, розрахункові зусилля в яких визначаються за допомогою теорії балок на пружній основі.

Розрахунок балок на пружній основі зв'язаний з інтегруванням диференційного рівняння зігнутої осі балки.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^4} [EJ(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]'' + K_n(x)w = q, \quad /1.4/$$

де  $EJ(x)$  - згинаюча жорсткість перетину балки ;

$K_n(x)$  - погонний коефіцієнт жорсткості основи;

$J(x)$  - момент інерції поперечного перетину балки ;

$x$  - поточна координата по довжині балки ;

$w$  - прогин балки в перетині з координатою  $x$  ;

$q$  - зовнішнє розподілене навантаження.

$$\text{В формулі /1.4/} \quad K_n(x) = K(x) \cdot b(x); \quad /1.5/$$

де  $K(x)$  - коефіцієнт жорсткості основи ;

$b(x)$  - ширина підшви фундаменту.

При розрахунку балок на пружній основі з вільними кінцями крім рівняння /1.4/ використовуються граничні умови:

$$\begin{aligned}
 w''(0) &= 0; & w''(\ell) &= 0; \\
 w'''(0) &= 0; & w'''(\ell) &= 0;
 \end{aligned}$$

де  $\ell$  - довжина балки.

Якщо балка має постійний перетин та постійний коефіцієнт жорсткості основи, рішення крайової задачі може бути досягнуто з використанням метода Б.Н.Жемочкіна, М.І.Горбунова-Посадова, методу початкових параметрів та ін.

За допомогою перерахованих методів можна отримати аналітичні вирази для визначення внутрішніх зусиль в перетинах балки. Проте ці методи потребують розробки більш складних алгоритмів при реалізації розрахунків на ЕОМ в порівнянні з чисельними методами.

Обчислити рівняння /1.4/ при змінному коефіцієнті жорсткості  $K(x)$  можливо лише за допомогою чисельних методів, котрі є наближеними, але дозволяють коли схема розрахунку стійка, отримати результати розрахунку з високою точністю.

Для обчислення диференційних рівнянь існує цілий ряд чисельних методів /метод Рунге, Бундова-Гальоркіна, колокацій, сіток, або скінчення різниць, метод скінчених елементів, граничних елементів та інші/.

Для розрахунків стрічкових фундаментів /одномірна задача/ бажано використовувати метод скінчених різниць як найбільш простий для початкового засвоєння і як найбільш універсальний по широті обсягу класу обчислювальних задач. В даному випадку метод скінчених різниць може бути використаний і в розрахунках стрічкового фундаменту при однорідних ґрунтових умовах коли коефіцієнт жорсткості основи - величина постійна, і в розрахунках стрічкового фундаменту в складних ґрунтових умовах, коли коефіцієнт жорсткості основи - змінна величина. Це дозволяє підійти до розрахунку різних типів ґрунтових умов з єдиних позицій обчислювального ха-

рактору та широко застосувати ЕОМ для самих складних задач.

### I.I. Основи теорії розрахунку стрічкового фундаменту

Метод розрахунку стрічкового фундаменту каркасної будівлі приймається в залежності від відстані між колонами.

Якщо  $l_0 < 2h$ , то фундамент практично буде працювати тільки на стиснення. Розрахунок таких фундаментів виконується як окремого фундаменту з різницею в тім, що до стрічкового фундаменту прикладені не одне зосереджене навантаження, а декілька / рис.1/.

Якщо  $l_0 > 2h$ , фундамент потрібно віднести до гнучких. Розрахунок такого фундаменту виконується як балки на пружній основі.

Для розрахунку балки на пружній основі необхідно попередньо знайти, хоч би наближено, розміри поперечного перетину фундаменту. Як же попередньо назначити розміри поперечного перетину фундаменту, коли зусилля в балці саме залежать від геометричних характеристик перетину, тобто задача стає статично невизначеною. В зв'язку з цим часто виходять з лінійної епюри реактивного тиску ґрунту при установленні попередніх розмірів фундаменту.

#### I.I.I. Визначення попередніх розмірів стрічкового балочного фундаменту

Рекомендації для визначення попередніх розмірів поперечних перетинів стрічкового фундаменту під ряд колон наведені в [7].

Розмір підосви фундаменту при розрахунку в поперечному напрямку визначається за формулою /рис.2/.

$$b_n = \frac{q_0^n}{2(\psi_R - \gamma_{cf} \cdot h_{cf})} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{24 e_0^n (\psi_R - \gamma_{cf} \cdot h_{cf})}{q_0^n}} \right] \quad (1.6)$$

де  $q_0^n$  - розподілене нормативне навантаження ;

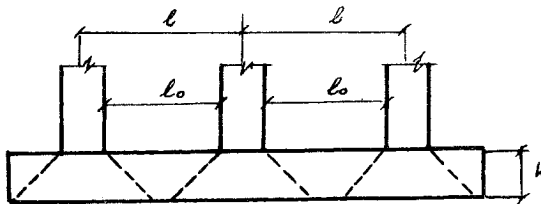


Рис. 1. Розрахункова схема гнучкого стрічкового фундаменту

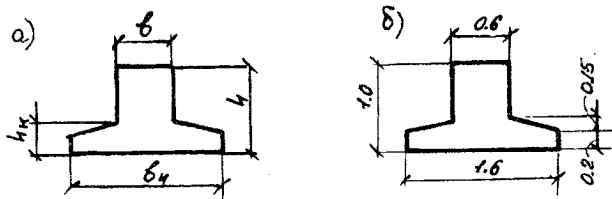
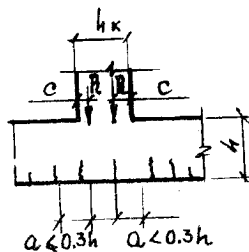


Рис. 2. Поперечний перетин стрічкового фундаменту



$c = a h_k$ , але  
не більше  $h_k / 2$

Рис. 3. Положення опорних реакцій в жорстких вузлах монолітних споруд, що приймаються для визначення коефіцієнта  $k_{лн}$ .

$$q_0^n = \frac{\sum P_{i_0}^n}{l};$$

$\sum P_{i_0}^n$  - сума всіх вертикальних нормативних навантажень;

$l$  - довжина стрічкового фундаменту;

$$\psi = 1 + \frac{6 e_0^n}{b_n}, \quad \text{але не більше } 1,2;$$

$R$  - розрахунковий тиск на основу [17] для середнього значення  $b_n = 1,4 \dots 2,0$ ;

$\gamma_{cp}$  - середнє взважене значення об'ємної ваги фундаменту та розміщеного над ним ґрунту ( $\gamma_{cp} = 2,0 + 2,2 \text{ т/м}^3$ );

$h_{\phi}$  - глибина закладення фундаменту;

$e_0^n = \frac{M_0^n}{\sum P_{i_0}^n}$  - ексцентриситет рівнодіючої всіх сил, розміщених в поперечному напрямку фундаменту.

Формула (1.6) справедлива при  $e_0^n \leq 0,167 b_n$ .

Ширину підшви фундаменту при розрахунку в позадозв'язному напрямку наближено можна обчислити за формулою:

$$b_n = \frac{\kappa q_0^n (1 + 6 e_0^n / l)}{\psi R - \gamma_{cp} \cdot h_{\phi}} \quad /1.7/$$

де  $e_0^n = \frac{M_0^n}{\sum P_{i_0}^n}$  - ексцентриситет рівнодіючої всіх сил  $\sum P_{i_0}^n$ , розташованих на балці в позадозв'язному напрямку;

$M_0^n$  - сума моментів цих сил відносно перетину, розташованого посередині довжини балки;

$$\kappa = 1,2 \text{ при } e_0^n = 0;$$

$$\kappa = 1,8 \text{ при } e_0^n \neq 0 \text{ /при позацентровому прикладенні навантаження/}.$$

Решта позначень ті ж, що в формулі (1.6).

Формула (1.7) справедлива при  $e_0^n = 0,167 \cdot b_n$ .

Висота стрічкового балочного фундаменту

$$h = 0,5 \sqrt{\frac{\sum P_{i_0} (1 + 6 \frac{e_0}{l}) \cdot b_n^2}{\mu \cdot b_n}};$$

/1.8/

де  $\sum P_{i0}$  - сума всіх вертикальних зусиль від розрахункових навантажень, за виключенням ваги фундаменту та розташованого над ним ґрунту;  $\xi_0 = \frac{e}{e} = \frac{M_0}{(\sum P_{i0} \cdot L)}$ ;

$M_0$  - згинаючий момент тах же сил від розрахункових навантажень відносно поперечного перетину фундаменту, який знаходиться посередині довжини;

$l$  - довжина фундаменту;

$L = l$  - відстань між колонами в проміжку при розрахунку арматури по вирівненим /в результаті перерозподілення/моментам;

$l$  - відстань між осями колон, якщо таке перерозподілення не проводиться;

$\mu$  - коефіцієнт армування;

$R_a$  - розрахунковий опір арматури згідно [18] табл. 22.

Ширина ребра фундаменту

$$b = (0.45 \dots 0.55) h. \quad /1.9/$$

Попередньо робоча висота консольного виступу стрічкового балочного фундаменту може бути назначена при дії позацентрального в поздовжньому напрямку навантаження за формулою:

$$h_{ок} = 0.75 l_k \sqrt{\frac{\sum P_{i0} (1 + 6 \xi_0)}{\mu R_a \cdot b \cdot L}}, \quad /1.10/$$

де  $l_k$  - довжина консольного виступу;

Висота консольного виступу в місці його примикання до балки повинна бути такою, щоб не було потреби в установці поперечної арматури.

Для такого випадку повинна виконуватись наступна умова [18. п.3.3]:

$$a \leq k_1 R_p b h_0, \quad /1.11/$$

де  $k_1$  - коефіцієнт, для важкого бетону приймається рівним 0,6;

$R_p$  - розрахунковий опір бетону [ 8. табл.13 ] ;

$h_0$  - ширина поперечного перетину;

$Q$  - поперечна сила.

В застосуванні до конструкції стрічкового фундаменту умова /I.II/ з деяким запасом має вигляд:

$$h_{0\text{ок}} \geq \frac{1.4 R \ell_k}{R_p}, \quad /I.I2/$$

де  $R$  - розрахунковий тиск на основу;

$R_p$  - розрахунковий опір бетону.

I.I.2. Статичний розрахунок балки постійного перетину на пружній основі з постійним коефіцієнтом жорсткості.

Розрахунок стрічкового фундаменту каркасної будівлі можна звести до розрахунку балки на пружній основі з постійним коефіцієнтом жорсткості.

Диференціальне рівняння балки на пружній основі для даного випадку має вигляд:  $EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = q,$  /I.I3/

де  $EJ$  - жорсткість балки; - const.

$k = k_n = \text{const}$  - коефіцієнт жорсткості основи.

Для зображення рівняння в скінчено-різницевої формі балка розбивається на  $n$  проміжків довжиною  $a$ . Довжина проміжка  $a$  вибирається в залежності від потреб точності визначення розрахункових зусиль, а також схеми розміщення зовнішнього навантаження на балці. При великій довжині ділянки знижується точність розрахунку, при малій - зростають затрати машинного часу. Тому розрахунок балки починають при меншому числі проміжків і для підвищення точності розрахунку в подальшому кількість ділянок розбивання збільшують вдвоє, зменшуючи відповідно довжину ділянки. При цьому прагнуть, щоб зосереджені сили були розташовані на границі діля-

нок розбивання /рис.3/.

Рівняння /I.I3/ в скінчено- різницевій формі може бути виражене через прогини  $W$ , згинальні моменти  $M$ , поперечні сили  $Q$ .

Зокрема, рівняння /I.I3/ при заміні похідної другого порядку скінчено-різницевої співвідношення мають вигляд:

$$\frac{EJ}{a^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) = -M_i \quad /I.I4/$$

В формулі /I.I4/ прогини  $w_i$  замінені відношенням реактивного тиску  $p_i$  до значення коефіцієнта постелі в I-му перетині:

$$\frac{EJ_i}{a^2} \left( \frac{p_{i-1}}{K_{i-1}} - 2\frac{p_i}{K_i} + \frac{p_{i+1}}{K_{i+1}} \right) = -M_i \quad /I.I5/$$

Враховуючи, що  $EJ_i = EJ = \text{const}$  та  $a = \text{const}$

рівняння /I.I5/ можна переписати:

$$\frac{p_{i-1}}{K_{i-1}} - 2\frac{p_i}{K_i} + \frac{p_{i+1}}{K_{i+1}} = -\frac{a^2}{EJ} M_i \quad /I.I6/$$

В рівнянні /I.I6/ невідомими будуть реактивний тиск  $p_i$  та згинаючий момент  $M_i$ .

Для скорочення числа невідомих згинаючі моменти в I-му перетині виразимо через реактивний тиск і зовнішнє навантаження по відомих співвідношеннях будівельної механіки:

$$\begin{aligned} M_1 &= a^2/6 (2p_0 + p_1) + M_{1e} \\ M_2 &= a^2/6 (5p_0 + 6p_1 + p_2) + M_{2e} \\ M_3 &= a^2/6 (6p_0 + 12p_1 + 6p_2 + p_3) + M_{3e} \\ M_4 &= a^2/6 (11p_0 + 18p_1 + 12p_2 + 6p_3 + p_4) + M_{4e} \\ &\dots \dots \dots \\ M_i &= a^2/6 (3(i-1)p_0 + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)p_j + p_i) + M_{ie} \end{aligned} \quad /I.I7/$$

де  $j$  - індекс реактивного тиску для внутрішніх перетинів балки;  $M_{ie}$  згинаючий момент в I-му перетині від зовнішнього навантаження.

В рівнянні /I.I6/ підставимо вираз /I.I7/ при  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ :



$$\frac{p_0}{K_0} - 2 \frac{p_1}{K_1} + \frac{p_2}{K_2} = -\frac{a^2}{E_3} \left[ \frac{a^2}{6} (2\rho_0 + \rho_1) + M_2 l \right]; \quad /I.18/$$

$$p_1/K_1 - 2 \frac{p_2}{K_2} + \frac{p_3}{K_3} = -\frac{a^2}{E_3} \left[ \frac{a^2}{6} (5\rho_0 + 6\rho_1 + \rho_2) + M_2 l \right]$$

і т.д.

Невідомі зведемо в ліву частину рівняння /I.18/:

$$\left( \frac{2a^2}{6E_3} - \frac{1}{K_0} \right) \rho_0 + \left( \frac{a^2}{6E_3} - \frac{2}{K_1} \right) \rho_1 + \frac{1}{K_2} \rho_2 = -\frac{a^2}{E_3} M_2 l$$

$$\frac{5a^2}{6E_3} \rho_0 + \left( \frac{5a^2}{6E_3} + \frac{1}{K_1} \right) \rho_1 + \left( \frac{a^2}{6E_3} - \frac{2}{K_2} \right) \rho_2 + \frac{1}{K_3} \rho_3 = -\frac{a^2}{E_3} M_2 l /I.19/$$

і т.д.

Сукупність рівнянь /I.19/ та двох рівнянь рівноваги ( $\sum \gamma = 0$ ,  $\sum M = 0$ ) дозволяють визначити реактивний тиск  $p_i$  по всіх внутрішніх перетинах при розбивці балки на  $n$  проміжків, а також на лівому і правому кінцях балки.

Якщо ввести позначення

$$\eta_i = \frac{6E_3}{K_i a^3}, \quad /I.20/$$

то отримаємо коефіцієнти системи рівнянь стосовно до балки постійної жорсткості. Для балки, яка розподілена на 18 рівних проміжків, система розрахункових рівнянь приведена в табл.1. Для тієї ж балки з урахуванням симетрії її розрахункової схеми кількість невідомих можна скоротити до 10 /табл.2/.

В результаті обчислення систем розрахункових рівнянь /табл.1 або табл.2/ отримуємо розподілення реактивного тиску ґрунту по підшві стрічкового фундаменту. Ці дані дозволяють знайти розподілення згинаючих моментів по довжині балки у відповідності з залежностями /I.17/, а розподілення поперечних сил визначаються за формулами:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{a}{2} (\rho_0 + \rho_1) + Q_{1l} \\ Q_2 = \frac{a}{2} (\rho_0 + 2\rho_1 + \rho_2) + Q_{2l} \\ \dots \\ Q_i = \frac{a}{2} (\rho_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j + \rho_i) + Q_{il} \end{cases} \quad /I.21/$$

№ рів- няння	Індекс тиску																		Вільні члени / в правій частині /	
	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_{17}$		$p_{18}$
1	12+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
2	15	16+ $\gamma$ !	I-2 $\gamma$	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
3	18	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
4	111	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
5	114	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
6	117	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
7	120	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
8	123	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
9	126	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
10	129	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
11	132	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
12	135	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
13	138	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
14	141	178	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
15	144	184	178	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
16	147	190	184	178	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
17	150	196	190	184	178	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	!	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
18	153	102	196	190	184	178	172	166	160	154	148	142	136	130	124	118	112	16+ $\gamma$ !	I- $\gamma$ !	$-(6/a^2) \cdot M_{18}$
19	!	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	$-2 \sum \gamma_0/a$

Система розрахункових рівнянь балки. /  $EJ = \text{const}$  / з урахуванням симетрії розрахункової схеми.

№ рівняння	Індекс тиску										Вільні члени /в праві частині/
	$\rho$										
1	$2 + \gamma$	$1 - 2\gamma$									$-\frac{6}{a^2} M_{16}$
2	5	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$								$-\frac{6}{a^2} M_{26}$
3	8	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$							$-\frac{6}{a^2} M_{36}$
4	11	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$						$-\frac{6}{a^2} M_{46}$
5	14	24	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$					$-\frac{6}{a^2} M_{56}$
6	17	30	24	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$				$-\frac{6}{a^2} M_{66}$
7	20	36	30	24	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$			$-\frac{6}{a^2} M_{76}$
8	23	42	36	30	24	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$		$-\frac{6}{a^2} M_{86}$
9	26	48	42	36	30	24	18	12	$6 + \gamma$	$1 - 2\gamma$	$-\frac{6}{a^2} M_{96}$
10	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	$-\frac{P}{a} \sum Y_6$

де  $Q_{i6}$  - поперечна сила в I-му перетині від зовнішнього навантаження.

Прогини обчислюються за формулою:

$$W = P_i / K_n ;$$

де  $P_i$  - погонний реактивний тиск;

$K_n$  - погонний коефіцієнт жорсткості основи.

Для визначення згинальних моментів  $M_i$  та поперечних сил

$Q_i$  - komponується друга система розрахункових рівнянь, яка різниться від першої величиною вільних членів в правій частині /табл.1 або табл.2/. Вільні члени для першої системи визначаються з урахуванням дії нормативних навантажень на фундамент, а для другої системи - від розрахункових навантажень.

Отримані значення реактивного тиску на підшві стрічкового фундаменту при обчисленні другої системи використовують для визначення  $M_i$  і  $Q_i$  за формулами /1.17/ і /1.21/.

### 1.3.3. Перевірочний розрахунок основи

Визначивши погонний реактивний тиск по підшві фундаменту від дії нормативних навантажень, знаходять максимальний фактичний тиск.

$$p_{\max} = \frac{p_i' + q'}{b_n} ,$$

де  $p_i'$  - погонний реактивний тиск;

$q'$  - погонний тиск від власної ваги балки та вищележачого ґрунту;

$b$  - ширина підшви фундаменту.

Тиск по підшві фундаменту не повинен перевищувати розрахункового тиску на основу, обчисленого за формулою /1.22/ [17]

$$p_{\max} \leq R .$$

## І.І.4. Розрахунок міцності балки

### І.І.4.І. Розрахунок перетинів, нормальних до осі балки.

З метою отримання економічного проектного рішення при розрахунку стрічкового фундаменту виконується перерозподіл епюри згинальних моментів, отриманої з урахуванням того, що матеріал фундаменту працює пружній стадії. Перерозподіл моментів дозволяє зменшити витрати матеріалів, уніфікувати розміри як самого фундаменту, так і арматурних каркасів. В основу методики перерозподілу моментів покладено розрахунок залізобетонних конструкцій за умов граничної рівноваги. При цьому допускається можливість роботи залізобетонної конструкції в стадії пластичних деформацій.

Один із простих методів перерозподілу моментів є статичний метод, наведений в роботі [5].

Статичний метод базується на тому положенні, що внутрішні зусилля /в данім випадку моменти/ можуть при незміннім значенні навантаження регулюватися за рахунок так званого самонапруження, котре викликається дією лишнього невідомого – опорного моменту [5].

У нашому випадку епюра згинальних моментів по довжині фундаменту має характер розподілення, аналогічний епюрі згинальних моментів в нерозрізній балці. У точках прикладення навантаження /опирання колон/ виникають опорні моменти, а між ними – прольотні. Тому перерозподіл зусиль виконуємо як для нерозрізаної балки, яка має опорні та прольотні моменти різних знаків. Зміна моментів у прольоті або на опорі виконується таким чином, щоб зберігалась умова

$$\bar{M}_l = \frac{\bar{M}_n - \bar{M}_l}{\epsilon} x + \bar{M}_x = M \delta_x, \quad /I.22/$$

- де  $\bar{M}_l$  – момент на лівому кінці I-го прольота балки;  
 $\bar{M}_n$  – момент на правому кінці I-го прольота балки;  
 $\bar{M}_x$  – момент у прольоті в перетині X від лівої опори;  
 $M \delta_x$  – момент в перетині x простої балки від дії завданих

рахункових навантажень.

При  $x = l/2$  формула /I.22/ приймає вигляд

$$\frac{\bar{M}_n - \bar{M}_1}{2} + \bar{M}_k = M \delta_x. \quad /I.23/$$

При перерозподілі зусиль в стрічковому фундаменті під колони необхідно знайти згинальні моменти, які діють на гранях колон. Потрібні величини знаходимо:

$$M_{np}^{гр} = M_n^{oc} - \left( Q_n - \frac{p_{cf} \cdot b_k}{4} \right) \cdot \frac{b_k}{2}, \quad /I.24/$$

де  $M_{np}^{гр}$  - згинальний момент по грані колони;

$M_n^{oc}$  - згинальний момент по осі балки;

$p_{cf} = \sum \frac{p_c}{4}$  - середнє розрахункове значення погонного реактивного ґрунту при навантаженнях, симетричних відносно середини балки;

$\sum p_c$  - сума розрахункових навантажень за відрахуванням власної ваги балки та ґрунту на II уступах;

$l$  - довжина балки;

$b_k$  - розмір поперечного перетину колони в позадвожньому напрямку балки.

Перерозподіл зусиль в конструкціях можна виконувати для досягнення зниження і вирівнювання:

прольотних і наскільки можливо опорних моментів;

опорних і по можливості прольотних моментів.

Для стрічкового фундаменту, який має схему навантаження на рис.4, як показують приведені розрахунки перерозподіл зусиль /згинальних моментів/ доцільно виконувати, вирівнюючи прольотні моменти і на інших від краю опор. Моменти на крайніх опорах, до яких примикають консолі фундаменту, не вирівнюються.

Формула /I.23/, яка використовується в загальному випадку для розрахункової схеми, зображеної на рис.4, має вигляд:

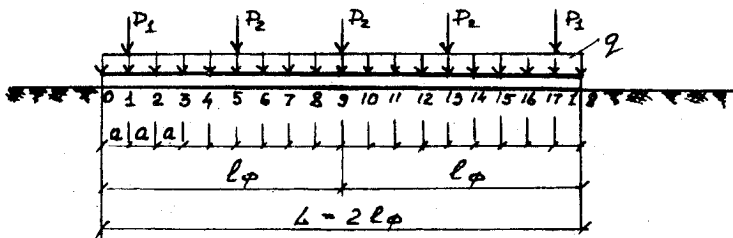


Рис. 4. Схема завантаження і розбивки.

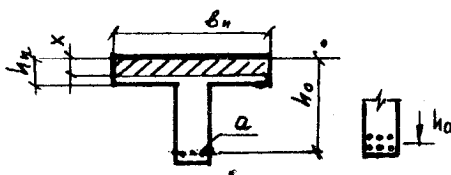


Рис. 5. До розрахунку згинутого елемента таврового перетину.

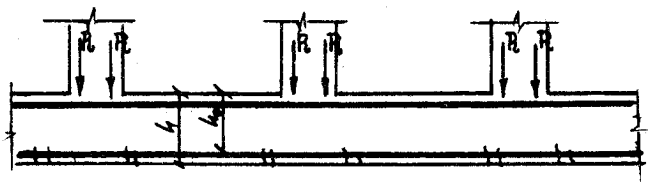


Рис. 6. Позначення величин  $h_0$  і  $h$  для визначення коефіцієнта  $k_m$  по довжині статично-невизначеної балки.

$$\frac{M_1^{np} + M_3^{np}}{2} + M_2 = M\delta_1; \quad \frac{M_5^{np} + M_7^{np}}{2} + M_4 = M\delta_2; \quad /I.25/$$

- де  $M_1^{np}, M_3^{np}$  - моменти по гранях на опорах I-го прольоту;  
 $M_5^{np}, M_7^{np}$  - моменти по гранях на опорах II-го прольоту;  
 $M_2, M_4$  - прольотні моменти I-го і II-го прольотів;  
 $M\delta_1, M\delta_2$  - моменти в прольотах підраховуються як для балки на двох опорах з шарнірами /проста балка/.

Різниця у перерозподілених моментах і моментах, що отримані з розрахунку по пружній стадії роботи конструкції, не повинна перебільшувати 30%.

### Розрахунок поздовжньої арматури.

У прольотах між колонами перетини фундаменту розраховуються як таврові, полиця яких знаходиться у стисненій зоні. При цьому, коли границя стисненої зони проходить у полиці /рис.5/; тобто виконується умова  $M < R_{np} \cdot b_n \cdot h_n \cdot (k_0 - 0.5 h_n)$ , /I.26/ розрахунок ведеться як для прямокутного перетину шириною  $b_n$ .

Визначена величина  $A_0$  за формулою:

$$A_0 = \frac{M}{R_{np} \cdot b_n \cdot k_0^2} \quad /I.27/$$

При відсутності стисненої арматури площа перетину розтягнутої арматури визначається за формулою:

$$F_a = \frac{M}{R_{np} \cdot \gamma \cdot k_0}, \quad /I.28/$$

де  $\delta$  знаходиться по [I3, табл. I8, або I табл. III. I].

Якщо границя стисненої зони проходить в ребрі, тобто умова /I.26/ не виконується, то величина  $A_0$  обчислюється за формулою:

$$A_0 = \frac{M - R_{np} (b_n - \delta) \cdot h_n \cdot (k_0 - 0.5 h_n)}{R_{np} \cdot \delta \cdot k_0^2} \quad /I.29/$$

Площа перетину розтягнутої арматури:

$$F_a = [\varepsilon b_n k_0 + (b_n - \delta) h_n] \frac{R_{np}}{R_a}, \quad /I.30/$$



де  $\xi = x/h_0$ .

Процент армування стрічкового фундаменту

де  $\rho_a = \frac{F_a}{b h_0} \cdot 100$ ,  
 $b$  - ширина ребра тавра.

Площа перетину повадочної арматури  $\rho_a$  приймається не менше 0,95% [ІЗ п.38]. Граничні проценти армування можна прийняти по [І табл. П.9].

Площа розтягнутої арматури на гранях крайніх колон визначається за формулами /І.27 і І.28/. Перетин фундаменту при цьому розраховується як прямокутній шириною /рис.5/.

Площа перетину арматури у грань колон розраховується аналогічно попередньому розрахунку.

#### І.І.4.2 Розрахунки перетинів, нахилених до осі балки

Поперечні сили в перетинах на гранях колон, які використовуються при розрахунку поперечної арматури, визначаються по наступних наближених залежностях:

$$\begin{aligned} Q_{1L}^{pr} &= \frac{Q_{1Lос}^{ос} (l_k - b_k/2)}{e_k}; \\ Q_{1пр}^{pr} &= Q_{1пр}^{ос} - \frac{p_{ср} b_k}{2}; \\ Q_{2пр}^{pr} &= Q_{2пр}^{ос} - \frac{p_{ср} b_k}{2}; \end{aligned} \quad /І.31/$$

де  $Q_{1L}^{pr}$  - значення поперечної сили зліва від перетину і по грані колони;

$Q_{1ос}^{ос} (Q_{1пр}^{ос})$  - осьове значення поперечної сили зліва /справа/ від перетину І;

$l_k$  - довжина консолі фундаменту;

$b_k$  - ширина поперечного перетину колони;

$Q_{2пр}^{pr}$  - значення поперечної сили справа від перетину і по грані колони.

При розрахунку перетинів фундаменту на дію поперечної сили повинна бути виконана умова [ 18, п. 3.29 ] .

$$Q \leq 0,35 R_{np} \cdot b \cdot h_0, \quad /I.32/$$

де  $R_{np}$  - розрахунковий опір бетону при осьовому стиску /приземна міцність/ [ 13, табл.7];

$b$  - ширина ребра фундаменту;

$h_0$  - робоча висота перетину.

Якщо виконується умова

$$Q \leq k_1 R_p b h_0, \quad /I.33/$$

розрахунок на дію поперечної сили не виконується, а поперечна арматура укладається відповідно з конструктивними вимогами [13, п.5.72 - 5.74] .

В формулі /I.33/  $k_1$  - коефіцієнт, який приймається рівним для лінійних елементів /балок, ребер і т.д./ = 0,6;

$R_p$  - розрахунковий опір бетону при осьовому розтягненні приймається по [ 18, табл.7].

При відсутності відігнутих стержнів міцність по поперечній силі перевіряють в умови

$$Q \leq Q_{x\delta}, \quad /I.34/$$

де  $Q$  - поперечна сила в нормальному перетині на початку розглянутого нахиленого перетину.

$Q_{x\delta}$  - гранична поперечна сила, сприймають бетон та хомути визначається за формулою;

$$Q_{x\delta} = \sqrt{8 R_b b h_0^2 \varphi_x}, \quad /I.35/$$

де  $\varphi_x$  - зусилля в хомутах на одиницю довжини елемента в границях нахиленого перетину;

$$\varphi_x = \frac{R_{ax} F_x}{u}, \quad /I.36/$$

де  $R_{ax}$  - розрахунковий опір поперечної арматури при розрахунку нахилених перетинів на дію поперечної сили [13 табл.14];

$F_x$  - площа перетину поперечної арматури;

$u$  - крок хомутів.

Для визначення інтенсивності хомутів знаходять умову

$$q_x = \frac{Q^2}{8 R_{np} b h_0^2} \quad /I.37/$$

При визначенні зусилля  $q_x$  по /I.37/ завдаються сумарною площею  $F_x$ , рівною площі перетину всіх поперечних стержнів /віток, хомутів/, розміщення в площині, перпендикулярній до осі елемента

$$F_x = n_x \cdot f_x, \quad /I.38/$$

де  $n_x$  - число поперечних стержнів /хомутів/;

$f_x$  - площа поперечного перетину одного стержня.

Крок хомутів визначається за формулою:

$$u = \frac{R_{ax} \cdot F_x}{q_x} \quad /I.39/$$

У стисненій зоні згинальних елементів при наявності стисненої поздовжньої арматури, визначеної розрахунком, потрібно укласти поперечні стержні /хомути/. При цьому у зварювальних каркасах хомути розташовуються на відстані не більше 500 мм, або не більше  $20d$  /  $d$  - найменший діаметр стиснених поздовжніх стержнів по /ІЗ.п.5.63//.

У балках висотою більше 150 мм повинна бути укладена вертикальна поперечна арматура. При цьому відстань між вертикальними поперечними стержнями, по конструктивних вимогах, приймається відповідно з [І8. п.52]:

на приопорних ділянках - при зосереджених силах довжина ділянки не більше  $1/4$  прольоту або рівна відстані від ближньої опори до вантажу; при висоті перетину  $h \leq 450$  мм - не більше  $1/2$  і не більше 150 мм при висоті перетину  $h > 450$  мм - не більше  $1/3$  і не більше 500 мм;

на решта частині прольоту при  $h > 300$  мм - не більше  $3/4$   $h$  і не більше 500 мм.

### І.І.4.3. Розрахунок консольних виступів фундаменту.

Консольний виступ розраховують з урахуванням середнього реактивного тиску ґрунту по підшві фундаменту при дії розрахункових навантажень

$$p_{\text{cp}} = \sum p_{oi} / (\Delta b_n), \quad /I.40/$$

де  $\sum p_{oi}$  - сума розрахункових навантажень, діючих на фундамент;  
 $\Delta, b_n$  - відповідно довжина та ширина підшви фундаменту.

Перевірка висоти консолі проводиться за формулою:

$$Q \leq k_1 R_p b_n h_{ок}, \quad /I.41/$$

де  $k_1$  - коефіцієнт приймається рівним 0,6 для лінійних елементів /балок, ребер і т.д./ відповідно ІЗ, п.3.3І

Якщо виконується умова /I.41/ поперечна арматура укладається по конструктивних вимогах.

При розрахунку консолі фундаменту з урахуванням змінного значення її висоти використовується середнє значення робочої висоти консолі :

$$h_{ок} = \frac{h_{ок}^{л} + h_{ок}^{пр}}{2} \quad /I.42/$$

де  $h_{ок}^{л}, h_{ок}^{пр}$  -- відповідно висота консолі на торці фундаменту та на грані колони.

Крок поперечних стержнів на консольному участку приймається з урахуванням середнього значення висоти консолі.

Площа арматури, розташованої по підшві фундаменту в напрямку, перпендикулярному до поздовжньої осі балки, визначається позгиналь-ному моменту, який приходиться на І м.балки:

$$M = \frac{p_{\text{cp}} [(b_n - b) / 2]^2}{2}; \quad /I.43/$$

де  $b_n, b$  - відповідно ширина полиці та ребра.

### І.І.4.4. Розрахунок величини розкриття тріщин

Розрахунок по розкриттю тріщин, нормальних до поздовжньої

осі балки.

Розрахунок по розкриттю тріщин, нормальних до поздовжньої осі балки, не виконується, якщо виконується умова [ I7 п.4.5 ]

$$M \leq M_T, \quad /I.44/$$

де  $M$  - момент від дії постійних, тривалих та короткочасних навантажень;

$M_T$  - момент, який стримує перетин при утворенні тріщин.

Для вільно опертих балок момент  $M_T$  визначається за формулою:

$$M_T = R_{pI} W_T - N_{yc} (e_{0n} + r_y), \quad /I.45/$$

де  $R_{pI}$  - розрахунковий опір бетону осьовому розтягненню;

$W_T$  - момент опору при тріщиноутворенні;

$N_{yc}$  - зовнішня розтягуюча сила, яка визначається по [ I3, формула /224/ ]:

$e_{0n}$  - ексцентриситет відносно центра ваги приведенного перетину;

$r_y$  - відстань від центру ваги приведенного перетину до точки, найбільш віддаленої від розтягнутої зони.

Якщо коефіцієнт армування  $\mu < 0.01$  величини  $W_T$ ,  $r_y$  можна визначити як для бетонного перетину.

Рівняння /I.45/ при цьому отримує вигляд

$$M_T = R_{pI} \cdot W_T. \quad /I.45a/$$

Момент опору може бути визначений за формулою:

$$W_T = [0.292 + 0.75(\mu_1 + 2\mu_1 n) + 0.075(\mu_1' + 2\mu_1' n)] / b h^2; \quad /I.46/$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{(b_n - b) \cdot h_n}{b h} \quad \mu_1' = \frac{z (b_n' - b) \cdot h_n'}{b h}$$

$$\mu_1 = \frac{F_a}{b h}; \quad \mu_1' = \frac{F_a'}{b h}; \quad n = \frac{E_a}{E_b}$$

У загальному випадку розрахунок по розкриттю тріщин проводиться на короткочасове та тривале розкриття тріщин.

Для згинальних елементів типа балок на пружній основі, дозволяється виконати розрахунок лише один раз:

а/ якщо  $M_{qL}/M_n \geq 2/3$  перевіряється тривале розкриття тріщин від дії моменту  $M_{dL}$  ;

б/ якщо  $M_{qL}/M_n < 2/3$  перевіряється короткочасове розкриття тріщин від дії моменту  $M_n$ . Ширина розкриття тріщин, нормальних до поздовжньої осі фундаменту, визначається за формулою:

$$a_T = k c_f \gamma \frac{\sigma_a}{E_s} \cdot 20(3,5 - 100 \bar{m}) \sqrt{d}, \quad /I.47/$$

де  $k$  - коефіцієнт приймається рівним для згинальних елементів - I;

$c_f$  - коефіцієнт приймається рівний при урахуванні:

- короткочасової дії постійних та тривалих навантажень - I

- тривалої дії постійних та тривалих навантажень

для конструкції з бетонів: - природньої вологості I.5;

- які експлуатуються в ґрунті нижче рівня ґрунтових вод - I.2;

$\gamma$  - коефіцієнт приймається рівними при стержневій арматурі періодичного профіля - I, гладкої - I,3;

$\sigma_a$  - напруження в стержнях крайнього ряду арматури;

$\bar{m}$  - коефіцієнт армування перетину, рівний відношенню площі перетину арматури до площі перетину бетону при робочій висоті без урахування стиснення зв'язів полиці: для прямокутних і таврових перетинів

$$\bar{m} = \frac{F_a}{b h_0 + (b_n - b)(h_n - a)} \quad /I.48/$$

значення  $\bar{m}$  приймається не більше 0,02 :

$d$  - діаметр розтягнутої арматури, мм; при різних діаметрах стержнів значення  $d$  приймається рівним:

$$d = \frac{n_1 d_1^2 + \dots + n_k d_k^2}{n_1 d_1 + \dots + n_k d_k} ; \quad /I.49/$$

$d_1 \dots d_k$  - діаметр стержнів розтягнутої арматури;

$n_1 \dots n_k$  - число стержнів з діаметрами відповідно.

Для слабоармованих зігнутих елементів при  $\mu \leq 0,008$  величину  $a_r$ , обчислену за формулою /I.47/, зменшують множенням на коефіцієнт  $k_s$ , який урахує роботу розтягнутого бетону над тріщинами та визначають за формулою:

$$k_s = k_n \cdot k_q,$$

але не більше 1;

$$k_n = \frac{M_n - 0,85 M_T}{M^0 - 0,85 M_T} \cdot \frac{M^0}{M} \cdot \frac{M + 10 W_0}{M_n + 10 W_0} ; \quad /I.50/$$

$M^0$  - момент при якому розтягнутий бетон над тріщинами практично виключається з роботи:

$$M_0 = \left( 0,8 + \frac{35 \mu_n}{\gamma} \right) \bar{M}_T, \quad /I.51/$$

але без урахування розтягнутих зв'язів

$$\mu_n = \frac{F_a}{b h_0} \cdot \frac{E_a}{E_s}.$$

Для статично невизначених згинальних елементів, а також для вільно опертих балок при  $l/h < 7$  біля місць прикладання зосереджених сил і опорних реакцій при  $\mu = 0,002$  ширину розкриття тріщин, обчислену за формулою /I.47/, дозволяється зменшити множенням на коефіцієнт  $k_m$ , який урахує місцеві особливості напруженого стану в залізобетонних конструкціях і можна визначити за формулою:

$$k_m = 1 - \frac{P}{M} \frac{(0,3h - a)(3h_0 - 2h)}{2,8(2h_0 - h)}, \quad /I.52/$$

але не менше 0,8 і не більше 1;

$a$  - відстань від точки прикладання зосередженої сили або опорної реакції до перетину, який розглядається, приймається не більше 0,3 $h$  [ ІЗ.п.4.9 в ] ;

$P$  - абсолютне значення зосередженої сили або реакції;

$M$  - абсолютне значення згинаючого моменту в перетині, який проходить через точку прикладання сили або опорної реакції /рис.3/;

$h$  - відстань від грані елемента, до якої прикладена сила, до розтягнутої грані;

$h_0$  - те ж, до розтягнутої арматури /рис.6/

Для зігнутих елементів напругу  $\sigma_a$  /І.47/ дозволяється визначити за формулою:

$$\sigma_a = R_a \frac{M}{M_{пр}} \quad /І.53/$$

При застосуванні арматури різних класів в формулу /І.53/ вводиться  $R_a$  - розрахунковий опір арматури для граничних станів першої групи по більш міцній арматурі.

Тут  $M_{пр}$  - граничний момент по міцності [ ІЗ, п.4.10 ], рівний при виборі перетину арматури

$$M_{пр} = M_{расч} \frac{F_a \text{ факт}}{F_a \text{ теор}} ; \quad /І.54/$$

де  $M_{расч}$  - момент від дії повного навантаження з коефіцієнтом перевантаження  $\eta > 1$ ;

$F_a \text{ факт}$  - фактична площа прийнятої арматури;

$F_a \text{ теор}$  - площа арматури, яку потребує розрахунок. Знайдене за формулою /І.53/ значення  $\sigma_a$  в випадку розташування арматури в декілька рядів на висоті перетину множиться на коефіцієнт  $\varphi_n$  який визначається за формулою:

$$\varphi_n = \frac{h - x - c}{h - x - a} , \quad /І.55/$$

де  $x = \xi h_0$  - величина для згинальних елементів може бути прийнята



такою ж, як при розрахунках на міцність:

$a_i c$  - відстань від центру ваги перетину арматури відповідно всієї та крайнього рядка стержнів до найбільш розтягнутого волокна.

Значення напруги  $\sigma_a$  від дії повного навантаження з урахуванням коефіцієнта  $\varphi_n$  для стержневої арматури не повинно перебільшувати  $R_{aT}$ .

Розрахунок по розкриттю тріщин, нахилених до поздовжньої осі балки.

Ділянки по довжині згинального елемента, на яких відсутні нахилені тріщини визначаються з умови

$$Q \leq 0,6R_{aT} b k_0. \quad /I.56/$$

Ширина розкриття тріщин, нахилених до поздовжньої осі елемента армованого поперечною арматурою, визначається за формулою:

$$a_T = c_T \cdot k (k_0 + 30 d_{max}) \frac{\sigma_{aT}}{m_n} \cdot \frac{t^2}{E_s}, \quad /I.57/$$

де  $c_T$  - коефіцієнт, який приймається рівним при урахуванні тривалої дії постійних та тривалих навантажень з бетонів:

- природньої вологості  $1,5$ ;
- в водонасиченому стані  $1,2$  ІЗ, п. 4.8

$$k = / 20 - 1200 \mu_n / \cdot 10^3, \text{ але не менше } 8 \cdot 10^3;$$

- $\mu$  - коефіцієнт приймається рівний для стержневої арматури
- періодичного профіля  $- 1$ ;
- гладкої  $- 1,3$ ;

$d_{max}$  - найбільший діаметр хомутив та відігнутих стержнів; при цьому в сумі  $/ k_0 + 30 d_{max} /$  величини  $k_0$  і  $d_{max}$  дані в міліметрах;

$\mu_n$  - коефіцієнт насичення балки поперечною арматурою;

$$\mu_n = \mu_x + \mu_0, \quad /I.58/$$

$\mu_x$  - коефіцієнт насичення балки хомутами;

$$/I.59/$$

$\mu_0$  - коефіцієнт насичення балки відігнутими стержнями

[ ІЗ, п. 4.12 ]

Величина  $t$  визначається з формули

$$t = Q / (b h_0), \quad /1.60/$$

де  $Q$  - найбільша поперечна сила на ділянці, яка розглядається з постійним насиченням поперечною арматурою.

Якщо на балку діє суцільне рівномірно розподілене навантаження /наприклад, тиск ґрунту/, то

$$Q = Q_{\max} - \rho h_0; \quad /1.61/$$

тут  $Q_{\max}$  - максимальна поперечна сила біля опори від прийнятого в розрахунок рівномірно розподіленого навантаження  $\rho$ .

### 1.1.5. Конструювання балки

Армування фундаментної балки виконується з урахуванням матеріалів, для чого обчислюють момент, який стримує один стержень даного діаметра:  $M_d = F_d \cdot R_a \cdot z$ ,

де  $F_d$  - площа перетину стержня даного діаметра;  $z = \frac{M}{R_a F_{a \text{ теор}}}$ ;

$M$  - згинальний момент у розрахунковому перетині;

$F_{a \text{ теор}}$  - площа перетину арматури, знаходиться розрахунком на згинальний момент  $M$ .

Одиничні моменти підраховуються для призначення прольотної арматури, під крайньою та проміжними колонами.

Отримані значення одиничних моментів відкладаються на відповідних участках епюри згинальних моментів, які виникають в балці від реактивного тиску ґрунту. Довжина окремих стержнів визначається з урахуванням їх запуску за перетини, в яких, виходячи з епюри матеріалів, укладання стержнів не потрібно. Величину запуску арматури обчислюють за формулою:

$$w = \frac{Q}{2 q_{\text{хв}}} + 5d, \quad /1.62/$$

але не менше  $20 d$ , де

$Q$  - значення поперечної сили в перетині, де поздовжня арматура не потрібна по розрахунку /теоретичне місце обриву/;

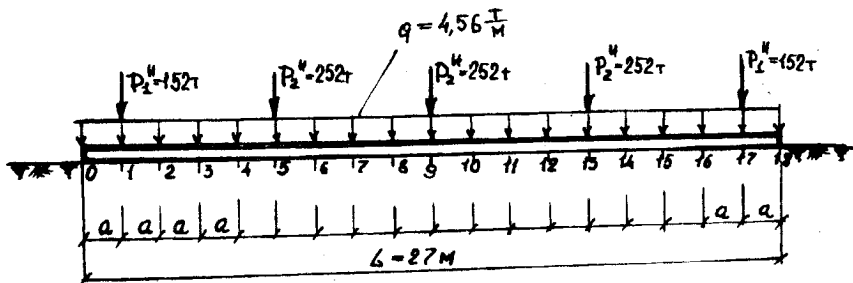


Рис.7. Схема завантаження фундаменту нормативним навантаженням

$$/a = 1,5m/$$

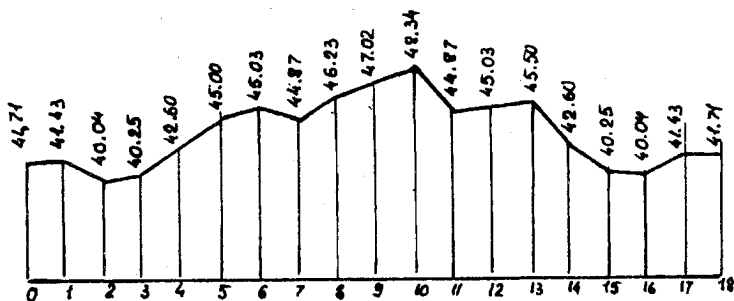


Рис. 8. Епора реактивного тиску ґрунту від нормативних навантажень, Т/М

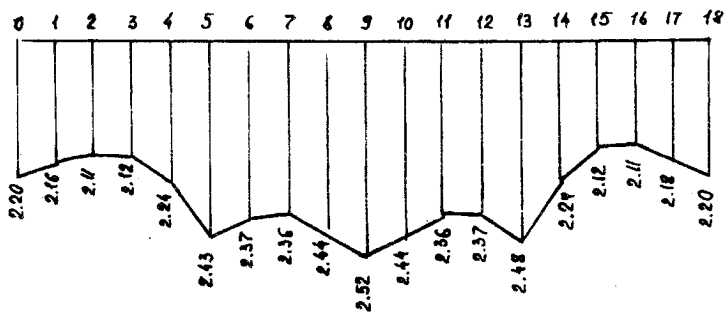


Рис. 9. Епора прогинів балки від нормативних навантажень, см.

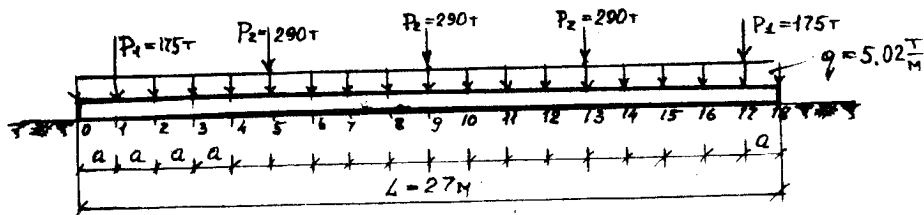


рис. 10. Схема завантаження фундаменту розрахунковим навантаженням /  $a = 1,5\text{м}$  /

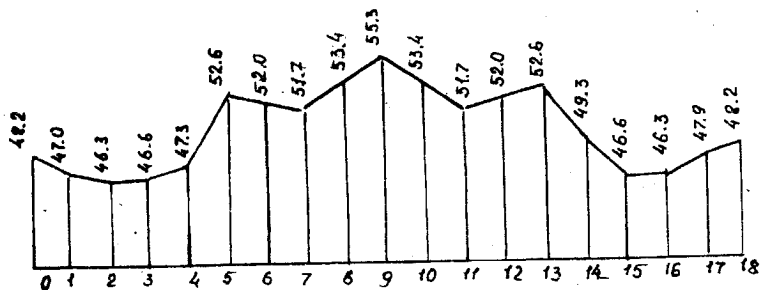


рис. 11. Еюра реактивного тиску ґрунту від розрахункових навантажень, т/м

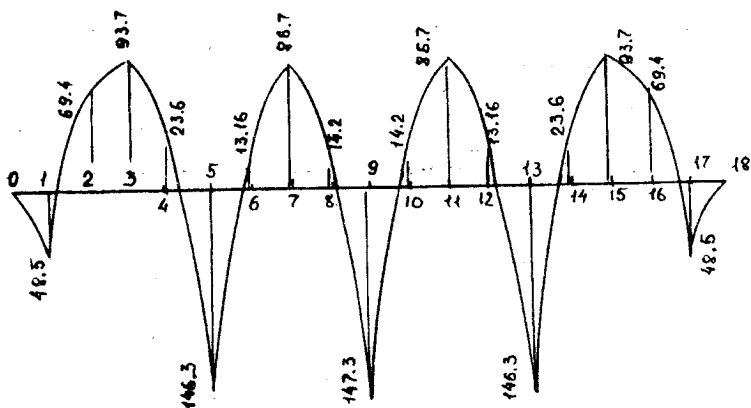


рис. 12. Еюра згинальних моментів від розрахункових навантажень, т/м.

Її можна визначити за графіком:  $q_{xw} = \frac{Ra \cdot n \cdot f_x}{u}$ ,

де  $n$  - число каркасів;

$f_x$  - площа перетину одного поперечного стержня;

$u$  - крок поперечних стержнів;

$d$  - діаметр поздовжньої арматури.

## 1.2. Приклад розрахунку стрічкового фундаменту

Стрічковий фундамент розраховуємо як балку на пружній основі з постійним коефіцієнтом жорсткості методом скінчених різниць [8].

Схеми навантаження фундаменту зосередженими силами від колод /нормативні та розрахункові навантаження/, а також епюри реактивного тиску ґрунту від нормативних та розрахункових навантажень, прогинів балки від нормативних і згинаючих моментів від розрахункових навантажень приведені на рис. 7-12.

### 1.2.1. Вихідні дані

ґрунтові умови. ґрунтові підвалини представлені піском м'яко-зернистим, який має наступні значення показників фізико-механічних властивостей: коефіцієнт пористості  $e = 0,65$ ; об'ємна вага ґрунту  $\gamma = 1,9 \text{ т/м}^3$ ; кут внутрішнього тертя  $\varphi = 32$ ; питоме значення  $C = 1,2 \text{ т/м}^2$ ; коефіцієнт постелі підвалини

$k = 1186 \text{ т/м}^3$ ; модуль деформації ґрунту  $E_0 = 2400 \frac{\text{т}}{\text{м}}$ ; коефіцієнт для піску  $M_0 = 0,3$ .

Фундамент. Глибина закладання фундаменту  $h_{\text{ф}} = 1,4 \text{ м}$ ;

Розмір колод в плані  $b_{\text{к}} \times b_{\text{к}} = 0,4 \times 0,4$ ; бетон марки М 300; робоча арматура класу А-III, поперечна арматура класу А-I.

### 1.2.2. Визначення попередніх розмірів фундаменту

Фундамент проектується таврового перетину. Для визначення

ширини полиці  $b_n$  спочатку визначають розрахунковий тиск на ґрунт підвалини:

$$R = \frac{m \cdot m_2}{k_1} (a \cdot b \cdot \gamma_{\text{I}} + b h_{\text{ф}} \cdot \gamma_{\text{I}}' + D C_{\text{II}}) =$$

$$= \frac{1,3 \cdot 1,1}{10} (1,34 \cdot 2 \cdot 1,9 + 6,35 \cdot 1,9 \cdot 1,9 + 8,55 \cdot 0,2) = 33,88 \text{ тс/м}^2,$$

де  $b = b_n$  попередньо призначена величина ширини полиці фундаменту, котра потім уточнюється в розрахунку.

Зосереджені сили  $R_1^{\text{H}}$ ,  $R_2^{\text{H}}$  замінимо навантаженням, розподіленим по довжині фундаменту

$$q_0^{\text{H}} = \frac{2 R_1^{\text{H}} + 3 R_2^{\text{H}}}{L} = (2 \cdot 152 + 3 \cdot 252) / 24 = 39,2 \text{ тс/м}.$$

Уточнюється ширина полиці фундаменту за формулою /I.7/:

$$b_n = \frac{k q_0^{\text{H}} (1 + b e_0 / L)}{\psi_{\text{I}} R - \gamma_{\text{ф}} h_{\text{ф}}} = \frac{1,2 \cdot 39,2}{1 \cdot 33,88 - 2,2 \cdot 1,4} = 1,52 \text{ м}$$

при  $e_0 = 0$ ,  $\psi_{\text{I}} = 1,0$ .

Визначається розрахунковий тиск на ґрунт підвалини при  $b_n = 1,6 \text{ м}$ .

$$R = \frac{1,3 \cdot 1,1}{10} (1,34 \cdot 1,6 \cdot 1,9 + 6,35 \cdot 1,4 \cdot 1,9 + 8,55 \cdot 0,2) = 32,42 \text{ тс/м}^2.$$

Ширина полиці фундаменту при  $R = 32,42 \text{ тс/м}^2$

$$b_n = \frac{1,2 \cdot 39,2}{1 \cdot 32,42 - 2,2 \cdot 1,4} = 1,6 \text{ м}.$$

Приймається  $b_n = 1,6 \text{ м}$ .

Попередню висоту фундаменту знаходимо за формулою /I.8/:

$$h = 0,5 \sqrt{\frac{\sum P_{i0} (L + 6 \sum) \cdot b^2}{\mu L R_a}} = 0,5 \sqrt{\frac{1220 \cdot 5,6^2}{0,009 \cdot 27 \cdot 2700}} = 0,9 \text{ м}$$

$$\sum P_{i0} = 2 P_1 + 3 P_2 = 2 \cdot 175 + 3 \cdot 290 = 1220 \text{ тс}; \quad \sum = 0; \quad \mu = 0,009;$$

$l = 5,6 \text{ м}$  - відстань в проміжку між колонами з урахуванням того, що підбір арматури буде виконано по вирівняних моментах.

Ширину ребра фундаменту знаходимо в залежності від його висоти.  
 Приймаємо  $h = 0,9$  м;  $b = 0,6$  м.

Робочу висоту консольного виступу, якщо навантаження розподіляється в поздовжньому напрямку, визначимо по формулі:

$$h_{ок} = 0,75 b_k \sqrt{\frac{\sum P_{io}}{\mu R_n b_n L}} = 0,75 \cdot 0,5 \sqrt{\frac{1220}{0,0025 \cdot 2700 \cdot 1,6 \cdot 27}} = 0,24 \text{ м};$$

$$\text{де } b_k = (b_n - b) / 2 = (1,6 - 0,6) / 2 \text{ м}; \quad \mu = 0,0025.$$

Приймаємо висоту консольного виступу  $h_k = 0,35$  м; робочу висоту виступа  $h_{ок} = 0,315$  м.

Перевіримо робочу висоту консольного виступа /див. рис. 2,6/:

$$h_{ок} = \frac{0,2 + 0,55}{2} - 0,035 = 0,24 \text{ м} > \frac{1,4 R b_k}{R_p} = \frac{1,9 \cdot 32,42 \cdot 0,5}{105} = 0,216 \text{ м}.$$

Власна вага при прийнятих розмірах поперечного перетину балки рівна /див. рис. 2,6/

$$q_{опр}^H = F \gamma^H = \left\{ 0,6 \cdot 1,0 + (1,6 - 0,5) \cdot 0,20 + 2 \left[ 0,5 \cdot 0,15 \cdot \frac{(1,6 - 0,6)}{2} \right] \right\} 2,5 = 2,4 \text{ т/м}.$$

### 1.2.3. Статичний розрахунок балки

Визначення зусиль  $R_k, M_k, Q_k$  проводиться методом скінчених різниць при постійному коефіцієнті жорсткості підвалини. Початковий модуль пружності бетону при проектній марці бетону М 300 по міцності на стиснення приймається по [18, табл. 18]:

$$E_c = 2,30 \cdot 10^6 \text{ тс/м}^2,$$

$$\text{Момент інерції } J = \sum J_i = \sum (J_{oi} + F_i \cdot y_i^2) = 0,076 \text{ м}^4.$$

### Розрахунок балки на задані нормативні та розрахункові навантаження

Вага стрічкового фундаменту та ґрунту розташованого на полицях фундаменту зобразимо у вигляді розподіленого навантаження:

$$q^H = q_0^H + (b_k - b) R_p \gamma_k = 2,4 + (1,6 - 0,6) \cdot 1,15 \cdot 1,3 = 4,56 \text{ тс/м};$$

$$q = q_0^H \cdot \mu + (b_k - b) R_p \gamma_k \cdot \mu = 2,4 \cdot 1,1 \cdot (1,6 - 0,6) \cdot 1,15 \cdot 1,3 = 5,45 \text{ тс/м}.$$

При розрахунку зусиль  $R_k, M_k, Q_k$  у стрічковому фундаменті використовуємо метод скінчених різниць, який дозволяє замінити точне рішення диференційного рівняння /а/ наближеним рішенням сис-

теми лінійних рівнянь.

Для побудови системи рівнянь з урахуванням симетрії розрахункові схеми виконуються обчисленням коефіцієнтів в лівій та правій частинах рівнянь від нормативних та розрахункових навантажень.

Розіб'ємо балку на  $n = 18$  ділянок довжиною  $a = 1,5\text{м}$  при загальній довжині балки  $27\text{ м}$ .

Необхідний в подальших розрахунках коефіцієнт жорсткості підвалини:

$$k = p^*/s,$$

де  $p^* = q^*/b_n = (39,2 + 4,56)/1,6 = 27,10\text{ т/м}^2$ ;

$S$  - осадка стрічкового фундаменту визначається по [8].

Для визначення осадки  $S$  обчислимо:

побутовий тиск на рівні підшови фундаменту

$$p_0 = \gamma^* h_{\phi} = 1,9 \cdot 1,4 = 2,66\text{ тс/м}^2;$$

додатковий тиск під підшовою фундаменту

$$p_0 = p^* - p_0 = 27,1 - 2,66 = 24,44\text{ тс/м}^2;$$

Приймаємо висоту елементарного стиснутого шару

$$h_i = 0,2 b_n = 0,2 \cdot 1,6 = 0,32\text{ м}.$$

Приріст побутового тиску по глибині:  $\Delta p_0 = \gamma^* h_i = 1,9 \cdot 0,32 = 0,608\text{ тс/м}^2$ .

Обчислення осадки стрічкового фундаменту наведені в таблиці 3.

Таким чином, коефіцієнт жорсткості підвалини визначається за формулою:

$$k = p^*/s = 27/0,0228 = 1186\text{ тс/м}^2.$$

Погонний коефіцієнт жорсткості підвалини: визначається за формулою:

$$k_n = k \cdot b_n = 1186 \cdot 1,6 = 1898\text{ тс/м}^2.$$

Коефіцієнт в лівій частині системи рівняння для нормативних і розрахункових навантажень визначається за наступними формулами:

$$\gamma = \frac{c e \eta}{k_n \cdot a^2} = \frac{6 \cdot 2,5 \cdot 10^6 \cdot 0,076^3}{1898 \cdot 1,544} = 138,17; \quad 2 + \gamma = 2 + 138,17 = 140,17;$$

$$1 - 2\gamma = 1 - 2 \cdot 138,17 = -275,34; \quad 6 + \gamma = 144; \quad 6 + 2\gamma = 282,34.$$

Коефіцієнти в правій частині системи рівнянь при дії нормативних навантажень визначені в таблиці 4.



Таблица 3

N	z	m	d	Poz	Poz <sup>2</sup>	Pδz	0.2 Poz	E°	Si	I
				тс/М²	тс/М²	тс/М²	тс/М²			
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
0,0	0,4	1,0	24,44	24,16	2,66	0,53	2400	0,00258		
0,32	0,8	0,977	23,88	22,70	3,27	0,65	2400	0,00242		
0,64	1,2	0,881	21,53	19,99	3,88	0,78	2400	0,00213		
0,96	1,6	0,755	18,45	17,07	4,48	0,90	2400	0,00182		
1,28	2,0	0,642	15,69	14,56	5,09	1,02	2400	0,00155		
1,60	2,4	0,555	13,44	12,18	5,70	1,14	2400	0,00130		
1,92	2,8	0,447	10,92	10,59	6,31	1,26	2400	0,00113		
2,24	3,2	0,420	10,26	9,7	6,92	1,38	2400	0,00103		
2,56	3,6	0,374	9,14	8,69	7,52	1,50	2400	0,00093		
2,88	4,0	0,337	8,24	7,86	8,13	1,63	2400	0,00084		
3,20	4,4	0,306	7,48	7,16	8,74	1,75	2400	0,00076		
3,52	4,8	0,280	6,84	6,57	9,35	1,87	2400	0,00070		
3,84	5,2	0,258	6,30	6,07	9,96	1,99	2400	0,00065		
4,16	5,6	0,239	5,84	5,64	10,56	2,11	2400	0,00060		
4,48	6,0	0,223	5,45	5,26	11,17	2,23	2400	0,00056		
4,80	6,0	0,208	5,08	4,94	11,78	2,36	2400	0,00053		
5,12	6,8	0,196	4,79	4,66	12,39	2,38	2400	0,00050		
5,44	6,8	0,185	4,52	4,44	13,0	2,6	2400	0,00047		
5,76	7,2	0,175	4,28	4,28	13,60	2,72	2400	0,00044		
6,08	7,6	0,166	4,06	3,96	14,21	2,84	2400	0,00042		
6,40	8,0	0,158	3,86	3,76	14,82	2,96	2400	0,00040		
6,72	8,4	0,150	3,66	3,58	15,43	3,09	2400	0,00038		
7,04	8,8	0,143	3,49	3,42	16,04	3,21	2400	0,00036		
7,36	9,2	0,137	3,35	3,29	16,64	3,33	2400	0,00035		
7,68	9,6	0,132	3,23		17,25	3,45				

Коефіцієнти правої частини системи рівнянь при дії нормативних

навантажень / розрахункова схема симетрична;  $n = 9$ 

$$a = 1.5 \text{ м}; q'' = 4.56 \text{ тс/м}; P_1'' = 152 \text{ тс}; P_2'' = 252 \text{ тс}$$

Номер рівняння	$-M_{iB}$ тсМ	$-\left(\frac{6}{a^2}\right) M_{iB} \frac{\text{тс}}{\text{м}}$
1	$-M_{1B} = \left(\frac{q''}{2}\right) \cdot a^2 = 4,68$	12,48
2	$-M_{2B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (2a)^2 + P_1'' a = + (18,72 + 228) = + 246,72$	657,92
3	$-M_{3B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (3a)^2 + P_1'' \cdot 2a = 42,12 + 456 = 498,12$	1328,32
4	$-M_{4B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (4a)^2 + P_1'' \cdot 3a = 74,88 + 684 = 758,88$	2023,68
5	$-M_{5B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (5a)^2 + P_1'' \cdot 4a = \left(\frac{4,56}{2}\right) \cdot (5 \cdot 1,5)^2 + 152 \cdot 4 \cdot 1,5 = 1029$	2744
6	$-M_{6B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (6a)^2 + P_1'' \cdot 5a + P_2'' \cdot a = \left(\frac{4,56}{2}\right) (6 \cdot 1,5)^2 + 152 \cdot 5 \cdot 1,5 + 252 \cdot 1,5 = 1686,48$	4497,28
7	$-M_{7B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (7a)^2 + P_1'' \cdot 6a + P_2'' \cdot 2a = \left(\frac{4,56}{2}\right) (7 \cdot 1,5)^2 + 152 \cdot 6 \cdot 1,5 + 252 \cdot 1,5 \cdot 2 = 2353,32$	6275,52
8	$-M_{8B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (8a)^2 + P_1'' \cdot 7a + P_2'' \cdot 3a = \left(\frac{4,56}{2}\right) (8 \cdot 1,5)^2 + 152 \cdot 7 \cdot 1,5 + 252 \cdot 3 \cdot 1,5 = 3029,52$	8078,72
9	$-M_{9B} = \left(\frac{q''}{2}\right) (9a)^2 + P_1'' \cdot 8a + P_2'' \cdot 4a = \left(\frac{4,56}{2}\right) (9 \cdot 1,5)^2 + 152 \cdot 8 \cdot 1,5 + 252 \cdot 4 \cdot 1,5 = 3715,08$	9906,86
10	$-\Sigma \gamma = (q'' L + 2P_1'' + 3P_2'') / 2 = (4,56 \cdot 27 + 2 \cdot 152 + 3 \cdot 252) / 2 = 586,16$	$-\frac{2}{a} \Sigma \gamma = 781,55$

Система рівнянь при дії нормативних навантажень

Номер рівняння	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	Навантаження		
											нормативне	розрахункове	
1	140,17	-275,34	138,17	0	0	0	0	0	0	0	0	12,48	15,06
2	5	147,17	-275,34	138,17	0	0	0	0	0	0	0	657,92	760,24
3	8	12	147,17	-275,34	138,17	0	0	0	0	0	0	1328,32	1535,54
4	11	18	12	147,17	-275,34	138,17	0	0	0	0	0	2023,68	2340,96
5	14	24	18	12	147,17	-275,34	138,17	0	0	0	0	2744,0	3176,50
6	17	30	24	18	12	147,17	-275,34	138,17	0	0	0	4497,28	5202,16
7	20	36	30	24	18	12	147,17	-275,34	138,17	0	0	6275,55	7257,94
8	23	42	36	30	24	18	12	147,17	-275,34	138,17	0	8078,72	9343,84
9	26	48	42	36	30	24	18	12	1282,34	-275,34	0	9906,88	11459,85
10	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	781,55	903,69

Система рівнянь для визначення реактивного тиску при дії нормативних навантажень приведена в табл. 5.

Система рівнянь в табл.2 складена з урахуванням симетрії прикладення навантаження відносно середини балки, що дозволяє скоротити число прийнятих до розгляду ділянок від  $n = 18$  до  $n = 9$ .

Обчислення системи рівнянь /див.табл.3/ з урахуванням дії зосередже них сил /нормативні значення/ та рівномірно розподіленого навантаження від власної ваги балки і ваги вищележачого ґрунту на балку в точках розбивання /див.рис.8/.

$$\begin{aligned} p_0 &= 41,708 \text{ тс/м}; & p_1 &= 41,493 \text{ тс/м}; & p_2 &= 40,044 \text{ тс/м}; & p_3 &= 40,248 \text{ тс/м}; \\ p_4 &= 42,804 \text{ тс/м}; & p_5 &= 45,499 \text{ тс/м}; & p_6 &= 45,031 \text{ тс/м}; \\ p_7 &= 44,865 \text{ тс/м}; & p_8 &= 46,231 \text{ тс/м}; & p_9 &= 47,924 \text{ тс/м}; \end{aligned}$$

Прогини балки  $w(x)$  від нормативних навантажень обчислюються за формулою:

$$w(x) = p_i / k;$$

де  $p_i$  - інтенсивність реактивного тиску ґрунту;

$k_i = k_{ог} \cdot k_{об}$  - погонний коефіцієнт жорсткості.

При цьому отримані наступні значення прогинів:

$$\begin{aligned} w_0 &= 0,0230 \text{ м}; & w_1 &= 0,0218 \text{ м}; & w_2 &= 0,0211 \text{ м}; & w_3 &= 0,0212 \text{ м}; \\ w_4 &= 0,0224 \text{ м}; & w_5 &= 0,0248 \text{ м}; & w_6 &= 0,0237 \text{ м}; & w_7 &= 0,0236 \text{ м}; \\ w_8 &= 0,0244 \text{ м}; & w_9 &= 0,0252 \text{ м}. \end{aligned}$$

### Перевірочний розрахунок підвалини

При прийнятих розмірах підшви стрічкового фундаменту  $b_k = 1,8 \text{ м}$  і заданих характеристиках ґрунту підвалини  $\varphi = 32^\circ$ ,  $c = 0,2 \text{ тс/м}^2$  розрахунковий тиск на ґрунт підвалини  $R_k = 32,42 \text{ тс/м}^2$ .

Максимальний тиск ґрунту на 1 м складає  $49,81 \text{ тс/м}$ , а максимальний тиск ґрунту на одиницю площі  $p = p_{i \text{ max}} (b_k - p_s) / b_k = 47,92 / 1,6 = 29,95 < R_k = 32,42$  де  $p_{i \text{ max}}$  - реактивний тиск ґрунту на одиницю довжини балки від зосередження сил та рівномірно розподіленого навантаження.

Співставлення показує, що ширина балки стрічкового фундаменту вибрана з урахуванням умови  $\rho < R$ .

Максимальне значення прогину балки  $W_s = 0,0252 \text{ м} = 2,52 \text{ см}$ , що менше  $S_{\text{пр}} = 8 \text{ см}$  [І7, табл.І8, п.І.З].

#### І.2.4 Розрахунок міцності балки

Визначення розрахункових значень згинальних моментів та поперечних сил.

Для розрахунку по міцності матеріалу визначимо величини  $M, Q$  від розрахункових навантажень на фундамент, зберігши число ділянок розбиття /див.рис.7.І0/. Складемо систему рівнянь, коефіцієнти якої в лівій частині співпадають з коефіцієнтами системи рівнянь, приведеної в таблиці 5.

Схема обчислень коефіцієнтів правої частини системи рівнянь при дії розрахункових навантажень приведена в таблиці 4.

Рішення системи рівнянь приведеної в табл.5 при дії розрахункових навантажень дало наступне значення інтенсивності реактивного тиску /див.рис.ІІ/:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 42,255 \text{ тс/м}; & \rho_1 &= 47,933 \text{ тс/м}; & \rho_2 &= 46,329 \text{ тс/м}; \\ \rho_3 &= 46,558 \text{ тс/м}; & \rho_4 &= 49,265 \text{ тс/м}; & \rho_5 &= 52,594 \text{ тс/м}; \\ \rho_6 &= 52,054 \text{ тс/м}; & \rho_7 &= 51,862 \text{ тс/м}; & \rho_8 &= 53,433 \text{ тс/м}; \\ \rho_9 &= 55,382 \text{ тс/м}; \end{aligned}$$

Згинаючі моменти в точках розбиття балки, навантаженої розрахунковим навантаженням, визначаються за формулами /І.І7/

/див.рис.І2/

$$\begin{aligned} M_1 &= 48,5 \text{ тс.м}; & M_2 &= -69,4 \text{ тс.м}; & M_3 &= 93,4 \text{ тс.м}; & M_4 &= -23,6 \text{ тс.м}; \\ M_5 &= 116,3 \text{ тс.м}; & M_6 &= -13,2 \text{ тс.м}; & M_7 &= -66,7 \text{ тс.м}; & M_8 &= -11,2 \text{ тс.м}; \\ M_9 &= 147,3 \text{ тс.м}. \end{aligned}$$

Поперечні сили в перетинах обчислюються за формулою

/I.2I/ /рис. I3/

$$Q_{1\delta}^{\wedge} = q a_{\eta}^{\wedge} = -5,45 \cdot 1,5 = -7,53 \text{ тс};$$

$$Q_{1\delta}^{\wedge} = Q_{1\delta}^{\wedge} - P_1 = -7,53 - 175 = -182,53 \text{ тс};$$

$$Q_1^{\wedge} = \frac{a}{2} (p_0 + p_1) + Q_{1\delta}^{\wedge} = \frac{1,5}{2} (48,255 + 47,933) - 7,53 - 64,6 \text{ тс};$$

$$Q_1^{\wedge} = Q_1^{\wedge} - P_1 = 64,6 - 175 = -110,4 \text{ тс}$$

$$Q_{2\delta} = q \cdot 2a - P_1 = -5,45 \cdot 2 \cdot 1,5 - 175 = -190,06 \text{ тс};$$

$$Q_2 = \frac{a}{2} (p_0 + 2p_1 + p_2) + Q_{2\delta} = \frac{1,5}{2} (48,255 + 2 \cdot 47,933 + 46,329) - 190,06 = -47,22 \text{ тс}.$$

Аналогічно обчислюються значення поперечних сил в решті перетинів балки:

$$Q_3 = 14,91 \text{ тс}; \quad Q_4 = 79,25 \text{ тс}; \quad Q_5^{\wedge} = 148,1 \text{ тс}; \quad Q_5^{\wedge} = -141,9 \text{ тс}; \quad Q_6 = -70,9 \text{ тс}$$

$$Q_7 = -0,52 \text{ тс}; \quad Q_8 = 70,92 \text{ тс}; \quad Q_9^{\wedge} = 145 \text{ тс}; \quad Q_9^{\wedge} = -145 \text{ тс}.$$

Для оцінки точності результатів розрахунку виконаних з кроком сітки, рівним 1,5 м був проведений контрольний розрахунок внутрішніх зусиль в балці /згинаючих моментів  $M_i$  і поперечних сил  $Q_i$ / з кроком сітки в 2 рази меншим  $a = 0,75$ м/ коли на балку діють розрахункові навантаження з коефіцієнтом  $n > 1$ .

Співставлення максимальних значень  $M_i$  і  $Q_i$  з шагом сітки

$a = 1,5$  м і  $a = 0,75$  м показує, що внутрішні зусилля змінилися не більш ніж на 5%.

Так, згинаючий момент в перетині 9 /див.рис. I2/ змінюється на величину

$$\frac{M_9^{\wedge} - M_9^{\wedge}}{M_9^{\wedge}} \cdot 100\% = \frac{154,9 - 147,3}{154,9} \cdot 100\% = 4,9\%,$$

а поперечна сила на величину

$$\frac{Q_5^{\wedge} - Q_5^{\wedge}}{Q_5^{\wedge}} \cdot 100\% = \frac{148,45 - 148,1}{148,45} \cdot 100\% = 0,4\%$$

Таким чином, можна зробити висновок про те, що крок сітки  $a = 1,5$  м забезпечує достатню з практичної точки зору точність визначення зусиль в фундаменті.

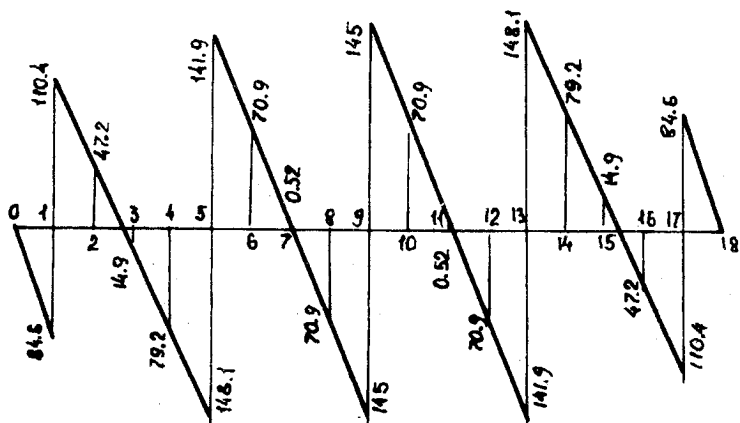


Рис. 13. Епюра поперечних сил від розрахункових навантажень, тс.

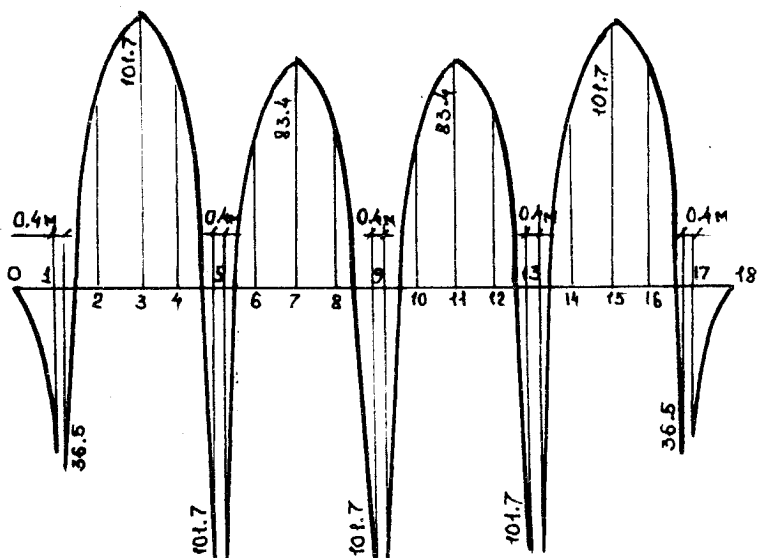


Рис. 14. Епюра згинальних моментів після перерозподілу моментів.

Розрахунок перетинів, нормальних до осі балки.

### Перерозподіл моментів

Середній тиск на I м балки від розрахункових зосереджених навантажень

$$q = \frac{2P_1 + 3P_2}{L} = \frac{2 \cdot 175 + 3 \cdot 290}{27} = 45 \text{ тс/м.}$$

Момент по граням колон визначаєм із наступних виразів

$$M_1^{pp} = M_1^{oc} - \left(Q_1 - \frac{q \cdot b_k}{L}\right) \frac{b_k}{2} = 48,5 - \left(64,6 - \frac{45 \cdot 0,4}{4}\right) \frac{0,4}{2} = 36,48 = 36,5 \text{ тс м;}$$

$$M_5^{pp} = M_5^{oc} - \left(Q_5 - \frac{q \cdot b_k}{L}\right) \frac{b_k}{2} = 146,3 - \left(148,1 - \frac{45 \cdot 0,4}{4}\right) \cdot \frac{0,4}{2} = 117,58 = 117,6 \text{ тс м;}$$

$$M_9^{pp} = M_9^{oc} - \left(Q_9 - \frac{q \cdot b_k}{L}\right) \frac{b_k}{2} = 147,3 - \left(145 - \frac{45 \cdot 0,4}{4}\right) \cdot \frac{0,4}{2} = 119,2 \text{ тс м.}$$

Момент в першому і другому прольотах відповідно рівні:

$$M_{\delta_3} = \frac{M_1^{pp} + M_5^{pp}}{2} + M_3 = \frac{36,5 + 117,6}{2} + 93,7 = 170,75 = 170,8 \text{ тс м;}$$

$$M_{\delta_7} = \frac{M_5^{pp} + M_9^{pp}}{2} + M_7 = \frac{117,6 + 119,2}{2} + 66,7 = 185,1 \text{ тс м.}$$

Перерозподіл моментів виконуємо так, щоб вирівняти їх значення в першому прольоті і на другі і треті від краю опорах / рис.14/

Для крайніх прольотів маємо:

$$\frac{M_1^{pp} + M_5^{pp}}{2} + \bar{M}_3 = M_{\delta_3}, \quad \text{звідки (при } M_3 = M_5)$$

$$M_3 = M_5 = \frac{2 M_{\delta_3} - M_1^{pp}}{3} = \frac{2 \cdot 170 - 36,5}{3} = 101,7 \text{ тс м;}$$

Для інших від країв прольотів

$$\frac{M_5^{pp} + M_9^{pp}}{2} + \bar{M}_7 = M_{\delta_7}, \quad \text{звідки (при } M_5 = M_9)$$

$$M_7 = M_{\delta_7} - M_5^{pp} = 185,1 - 101,7 = 83,4 \text{ тс м.}$$

### Розрахунок поздовжньої арматури

Пролітний перетин фундаменту розраховується як тавровий перетин. Допустимо, що нейтральна вісь балки таврового перетину проходить в середині полиці. В цьому випадку тавровий перетин розраховується як



прямокутній з розмірами  $b_n$  і  $L$ . Приймаємо двохрандне розташування арматури і захистний шар, рівний 3,5 см. Тоді робоча висота

$$h_0 = h - 3 - 3,5 = 100 - 6,5 = 93,5 \text{ см.}$$

Визначимо висоту  $A_0$

$$A_0 = \frac{M}{R_{пр} \cdot b_n \cdot h_0^2} = \frac{10170000}{115 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 0,0632.$$

При  $A=0,0632$  по /ІЗ табл.ІВ/ знайдемо  $\xi = 0,063$ . Висота стисненої зони  $x \approx \xi \cdot h_0 = 6,08$ , що менше найменшої висоти полки таврового перетину  $h_n = 20$  см /І, с 423/.

Таким чином,  $x < h_n$  і площа розтягнутої арматури в перетині 3 /рис. І4/ визначаємо за формулою:

$$F_a = \frac{M}{R_a \cdot \eta \cdot h_0} = \frac{10170000}{2700 \cdot 0,068 \cdot 93,5} = 41,62 \text{ см}^2.$$

Процент армування  $\mu = 100 \cdot F_a / (b_n \cdot h_0) = \frac{100 \cdot 41,62}{60 \cdot 93,5} = 0,74\%$ .

Ця величина знаходиться в рекомендованих границях для бетону марки М 300 і арматури класу А II /0,05 <  $\mu$  < 2,75%/ [І,с.І36]

Приймаємо 4  $\phi$  І8 А II і 4  $\phi$  32 А II /  $F_a = 42,35 \text{ см}^2$  /.

Арматура на грані крайніх колон /перетин І, рис.І4/ розраховується для прямокутних перетинів шириною  $b = 60$  см, робочою висотою  $h_0 = 93,5$  см.

Обчислюємо

$$A_0 = \frac{M}{R_{пр} \cdot b_n \cdot h_0^2} = \frac{36,5 \cdot 10^5}{115 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 0,0605;$$

$$F_a = \frac{M}{R_a \cdot \eta \cdot h_0} = \frac{3650000}{2700 \cdot 0,969 \cdot 93,5} = 14,92 \text{ см}^2,$$

де  $\eta = 0,969$  по /ІЗ, табл.І В/ при  $A_0 = 0,0605$  або  $\eta = 0,969$ -коefficient, визначається по /І, табл. III/

Приймаємо 6  $\phi$  І4 А II + 2  $\phi$  20 А II, /  $F_a = 15,51 \text{ см}^2$  /.

Розглянута арматура в другому від краю прольоті /перетин 7, рис.І4/

$$A = \frac{8340000}{115 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 0,139; \quad \eta = 0,925;$$

$$F_a = \frac{8340000}{2700 \cdot 0,925 \cdot 93,5} = 35,76 \text{ см}^2$$

Приймаємо 4  $\phi$  12 + 4  $\phi$  32 /  $F_a = 36,69 \text{ см}^2$  /.

Площа арматури під другою і третьою від краю колонами

/перетин 5 і 9, рис. I4/;

$$A_0 = \frac{101,7 \cdot 10^5}{115 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 0,168; \quad \nu = 0,907;$$

$$F_a = \frac{101,7 \cdot 10^5}{2700 \cdot 0,907 \cdot 93,5} = 44,42 \text{ см}^2.$$

Приймаємо 4  $\phi$  20 + 4  $\phi$  32 /  $F_a = 44,73 \text{ см}^2$  /

Розрахунок перетинів, нахилених до осі балки.

Поперечні сили в перетинах на гранях колон по яких визначається площа поперечної арматури /хомутів/, визначаються за формулами

$$Q_{1L}^{oc} (l_{к.пр} - b_{к/2}) = \frac{64,6 (1,5 - 0,4/2)}{1,5} = 56,0 \text{ тс},$$

де  $l_{к.пр} = 1,5 \text{ м}$

$$Q_{1L}^{гп} = Q_{1L}^{oc} - \rho_{ср} \cdot b_{к} = 110,4 - \frac{45 \cdot 0,4}{2} = 101 \text{ тс},$$

$$Q_{5L}^{гп} = Q_{5L}^{oc} - \rho_{ср} \cdot b_{к} = 148,1 - 9,0 = 139,0 \text{ тс}.$$

$Q_{1L}^{гп}$  - значення поперечної сили по грані колони зліва від перетину I - /див. рис. I3/ по грані колони;

$Q_{1L}^{oc}$  - значення поперечної сили по осі колони зліва від перетину I /див. рис. I3/.

Значення поперечних сил на гранях решти колон мало різняться від  $Q_{5L}^{гп} = 139,0 \text{ тс}$ , тому поперечна арматура в далекому розрахунку для решти перетинів визначена по  $Q_{5L}^{гп}$ .

Розрахунок  $Q_{1L}^{гп} = 56,0 \text{ тс}$

При заданій марці бетону маємо

$$0,35 R_{пр} b_{к0} = 0,35 \cdot 115 \cdot 60 \cdot 93,5 = 225800 \text{ кгс} = 225,8 \text{ тс}.$$

$$k_1 R_p \cdot b_{к0} = 0,6 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5 = 28,6 \text{ тс}.$$

Через те маж місце нерівність

$$28,6 < Q = 56,0 < 225,8 \text{ тс},$$

то розміри поперечних перетинів будуть достатні, а поперечні стержні укладаються по розрахунку /I3/

Якщо висота консолі - величина змінна, то робочу висоту перетину приймаємо рівною середньому значенню висоти на довжині нахиленого перетину /рис.15/:

$$h_{\text{оф}} = 0,5 / 23,5 + 93,5 / = 58,5 \text{ см}; h_{\text{ф}} = 65 \text{ см}$$

Потрібну інтенсивність хомутів визначаємо виходячи з  $Q = 56 \text{ тс}$

$$q_k = \frac{Q^2}{8 R_b k_o^2} = \frac{56000^2}{8 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 58,5^2} = 224,6 \frac{\text{кгс}}{\text{см}}$$

Приймаємо в перетині на консольному вильоті /рис.15/ поперечну арматуру у вигляді чотирьох хомутів діаметром 8 мм при чотирьох каркасах поздовжньої арматури. Площа поперечного перетину хомутів буде рівна  $2,01 \text{ см}^2$ . Крок хомутів визначаємо за формулою:

$$u_1 = \frac{R_{ax} \cdot F_x}{q_{x1}} = \frac{2700 \cdot 2,01}{224,6} = 24,16 \text{ см.}$$

Приймаємо  $u_1 = 20 \text{ см.}$

При цьому згідно /ІЗ, п.3.33/ повинні бути витримані наступні умови:

$$\frac{R_{ax} \cdot F_x}{u} = \frac{2700 \cdot 2,01}{20} = 271,4 \frac{\text{кгс}}{\text{см}} > \frac{R_b \cdot b}{2} = \frac{8,5 \cdot 60}{2} = 255 \frac{\text{кгс}}{\text{см}};$$

$$u_{\text{max}} = \frac{1,5 \cdot R_{\text{ф}} \cdot b \cdot h_o^2}{Q} = \frac{1,5 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 58,5^2}{56000} = 46,8 \text{ см} > u = 20 \text{ см.}$$

Крім того, повинні бути виконані конструктивні вимоги

[ІЗ, п.5.73]:

$$u = 20 \text{ см} \leq h_{\text{ф}}/3 = \frac{65}{3} = 21,7 \text{ см};$$

$$u = 20 \text{ см} < 50 \text{ см.}$$

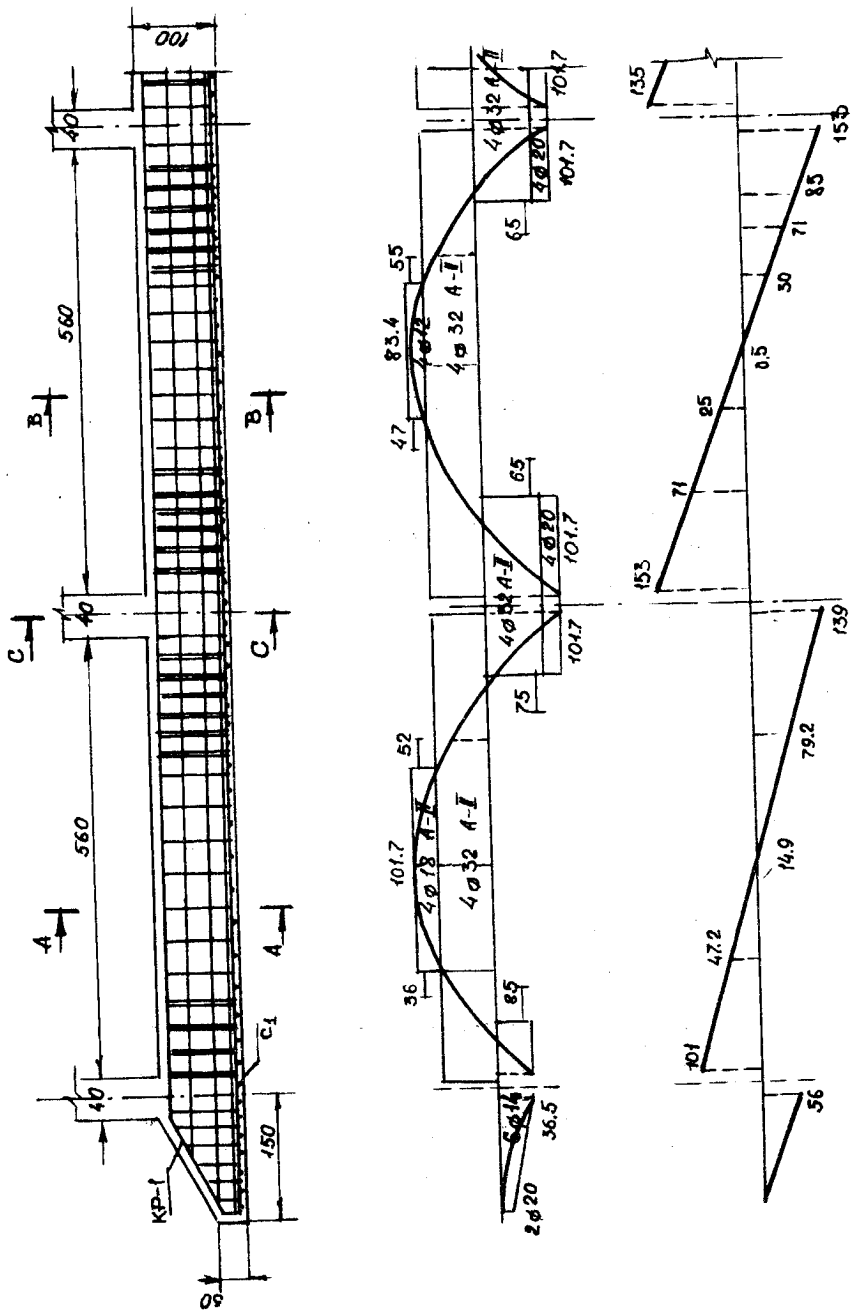
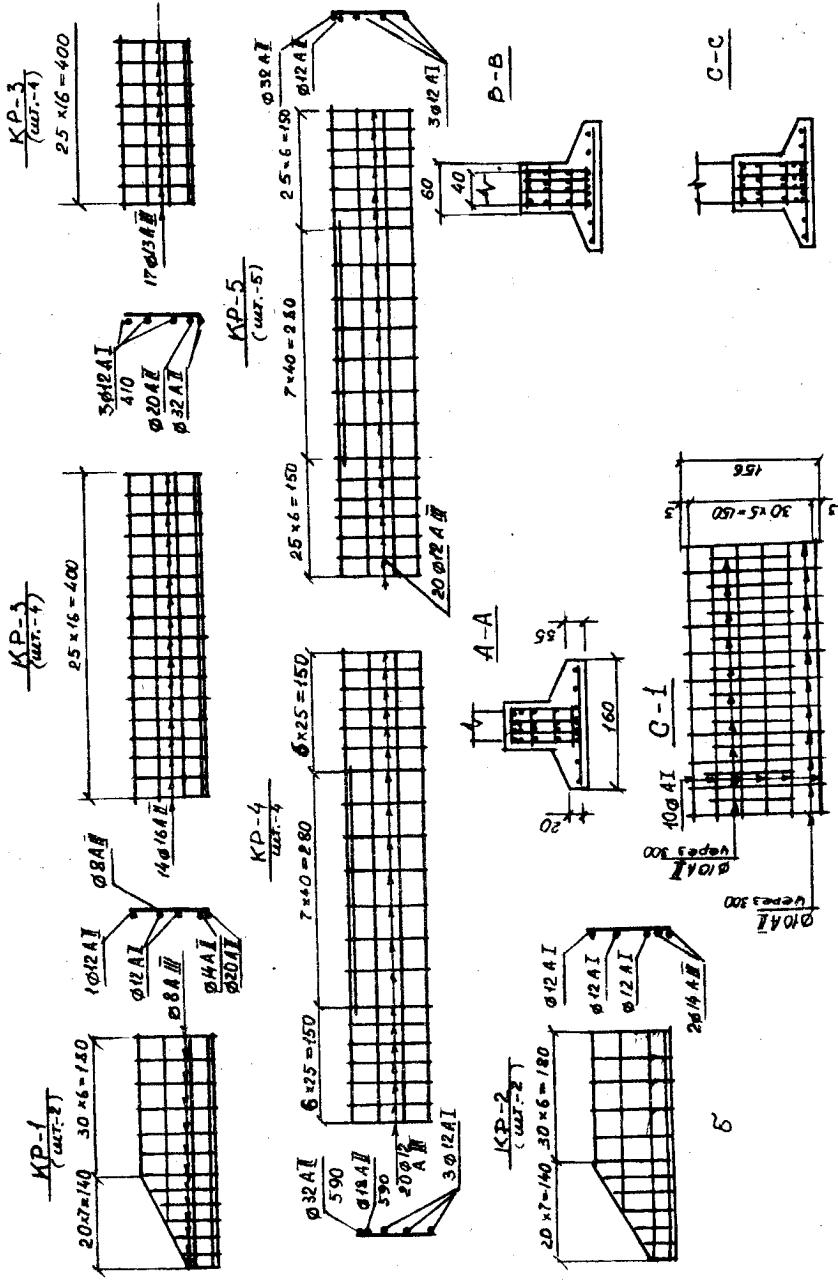


Рис. 15. Конструкція стрічкового фундаменту  
/див. також сторінку 52/



Продолжения рис. 15.

Розрахунок на  $Q_{11}^{гр} = 101,4$  тс

Перевіряємо вимоги /I2, п.3.30/

$$0,35 R_{пo.б.кo} = 35 \cdot 115 \cdot 60 \cdot 93,5 = 225800 \text{ кгс} = 225,8 \text{ тс} > \\ > = 101,4 \text{ тс.}$$

Тому, що  $k_1 R_{p.б.k.} = 0,6 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5 = 28600 \text{ кгс} = 28,6 \text{ тс}$ , то поперечну арматуру підбираємо із розрахунку по міцності.

Згідно /I2, п.5.73/ крок  $a_1$  біля опори повинен бути не більше  $h/3 = 100/3 = 33 \text{ см}$  і  $50 \text{ см}$ , а в прольоті  $a_2 \leq 50 \text{ см}$  і  $3/4 h = 0,75 \cdot 100 = 75 \text{ см}$ . Приймаємо крок хомутів біля опори  $a = 30 \text{ см}$ , в прольотах визначаєм крок хомутів з урахуванням зменшення числа каркасів з восьми біля опори до чотирьох в прольоті.

Максимально допустимий крок хомутів біля опори згідно формули /51/, /I2/.

$$a_{max} = \frac{q \cdot l}{a} = \frac{1,5 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2}{101000} = 66,22 \text{ см} > a = 30 \text{ см}$$

Потрібна інтенсивність хомутів приопорної ділянки

$$q_{x1} = \frac{Q^2}{8 R_p \cdot b \cdot k_o^2} = \frac{101000^2}{8 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 286,0 \text{ кгс/см} > \frac{R_p \cdot b}{2} = \\ = \frac{8,5 \cdot 60}{2} = 255 \text{ кгс/см.}$$

Звідси площа поперечного перетину хомутів за формулою /54/, /I2/

$$F_x = \frac{q_{x1} \cdot l_1}{R_{ax}} = \frac{286,0 \cdot 30}{2400} = 3,58 \text{ см}^2$$

Приймаємо в поперечному перетині вісім хомутів

$$(4 \phi 8 A_{III} + 4 \phi 12 A_{III}; F_x = 6,53 \text{ см}^2).$$

Інтенсивність хомутів в прольоті підбирається з урахуванням зменшення поперечної сили з віддаленням перетину від опори. В даному випадку поперечна сила на відстані  $150 \text{ см}$  від другої опори рівна  $79,2 \text{ тс/рис.15/}$ . Тоді

$$q_{x2} = \frac{79200^2}{8 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 175,9 \text{ кгс/см} < \frac{R_p \cdot b}{2} = \frac{8,5 \cdot 60}{2} =$$

$$= 255 \text{ кгс/см}^2$$

Тому що умова /50/ /12/ не виконується, приймаємо

$$q_{x2} = \frac{R_f \cdot b}{2} = 255 \text{ кгс/см}^2.$$

Тоді крок хомутів в прольоті /  $F_x = 4,52 \text{ см}^2$ , 4  $\phi$  12/

$$u_2 = \frac{R_{ax} \cdot F_x}{q_{x2}} = \frac{2700 \cdot 4,52}{255} = 47,8 \text{ см}$$

Приймаємо  $u_2 = 40 \text{ см}$ , що задовільняє вимогам /13, п. 5.73/.

Розрахунок на поперечне навантаження  $Q_{51}^{np} = 139 \text{ тс}$

Аналогічно попереднім розрахункам маємо нерівність

$$28,6 \text{ тс} < Q_{51}^{np} = 139 \text{ тс} < 225,8 \text{ тс}.$$

Конструктивні вимоги по /13, п.5.73/ наступні. Крок хомутів на припорному участку

$$u_1 \leq \frac{h}{3} = 100/3 = 33 \text{ см};$$

$$u_1 \leq 50 \text{ см}.$$

Шаг хомутів в прольоті

$$u_2 \leq \frac{3h}{4} = 0,75 \cdot 100 = 75 \text{ см};$$

$$u_2 \leq 50 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр хомутів  $d_x = 12 \text{ мм}$ . Потрібна інтенсивність хомутів

$$q_{x2} = \frac{139000^2}{8 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 541,7 \text{ кгс/см} > \frac{R_f \cdot b}{2} = \frac{8,5 \cdot 60}{2} = 255 \text{ кгс/см}$$

Крок хомутів при восьми каркасах в перетині /  $F_x = 9,05 \text{ см}^2$ /

$$u_1 = \frac{2700 \cdot 9,05}{541,7} = 45,1 \text{ см}.$$

Приймаємо  $u_1 = 30 \text{ см}$  та перевіряємо вимоги /13, п.5.73/

$$u_1 = 30 \text{ см} < \frac{h}{3} = 100/3 = 33 \text{ см};$$

$$u_1 = 30 \text{ см} < 50 \text{ см}.$$

Максимально допустимий крок хомутів

$$u_{\max} = \frac{1,5 R_0 \cdot b \cdot h^2}{Q} = \frac{1,5 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2}{139000} = 48,11 \text{ см} > u = 30 \text{ см.}$$

Хомути з кроком 30 см згідно /ІЗ, п.5.73/ повинні бути укладені на відстані  $l_{0n} = \frac{l}{4} = 600/4 = 150 \text{ см.}$

В прольотній ділянці хомути укладаються в залежності від поперечної сили на його кінцях.

В даному випадку = 71 тс. Потрісна інтенсивність хомутів

$$q_{x2} = \frac{71000^2}{8 \cdot 8,5 \cdot 60 \cdot 93,5^2} = 141,3 \text{ кгс/см} > \frac{R_0 \cdot l}{2} = \frac{8,5 \cdot 60}{2} = 255 \text{ кгс/см}^2$$

Крок хомутів

$$u_2 = \frac{2700 \cdot 4,5^2}{255} = 47,85 \text{ см. Приймаємо } u_2 = 45 \text{ см}$$

Значення поперечних сил на гранях третьої колони /див.перетин 9, рис.ІЗ/ приблизно дорівнює поперечній силі  $Q_{3n}^{np} = 139 \text{ тс,}$  тому кількість поперечної арматури решти опорних та прольотних перетинів приймаємо по раніше виконаному розрахунку на  $Q = 139 \text{ тс.}$

В перетинах ІЗ і І7 /див. рис.ІЗ/ в результаті симетрії балки і навантаження кількість поперечної арматури приймається рівною відповідно кількості арматури в перетинах 5 і І /див. рис.ІЗ/.

### Розрахунок консольних виступів балки

Середній реактивний тиск ґрунту підвалини при дії розрахункових навантажень

$$p_{\phi} = \frac{2 \cdot 175 + 3 \cdot 290}{27 \cdot 1,6} = 28,2 \text{ тс/м}^2.$$

Перевіряємо достатність висоти консолі при

$$Q = p_{\phi} \cdot \frac{b_n \cdot b}{2} = 28,2 \cdot \frac{1,6 \cdot 0,6}{2} = 14,1 \text{ тс/м;}$$

$$R_0 = 8,5 \text{ кгс/см}^2 = 85 \text{ тс/м}^2 \text{ згідно СНІП П .21.75;}$$



$$\frac{a}{k_1 \cdot b \cdot R_p} = \frac{I_4 \cdot I}{0,6 \cdot I, 0,85} = 0,276 \text{ м} < h = h - a = 0,35 - 0,035 = 0,315 \text{ м.}$$

Таким чином, згідно умови /47/ /ІЗ, п.3.3І/ поперечна арматура в консолі балки позначається не розрахунком, а конструктивними вимогами. В даному випадку укладання поперечних стержнів не потрібно.

Для розрахунку арматури по підшві фундамента визначимо величину згинаючого моменту:

$$A_0 = \frac{P_{cp} [(l_n - l) / 2]^2}{2} = \frac{28,2 \cdot 0,15^2}{2} = 3,52$$

Обчислимо:

$$A_0 = \frac{M}{R_{np} \cdot b \cdot h_0^2} = \frac{352500}{115 \cdot 100 \cdot 31,5^2} = 0,0309.$$

В таблиці І7 /ІЗ/ для балки з бетону марки М 300 з арматурою класу А ІІ при  $m_{\delta_1} = 0,85$  знаходимо  $A_p = 0,438$

Так як  $A_0 = 0,0309 < A_p = 0,438$ , то стиснутої арматури по розрахунку не потрібно.

З таблиці І8 /ІЗ/ при  $A = 0,909$  знаходимо  $\nu = 0,980$ .

Площа розтягнутої арматури визначається за формулою

$$F_a = \frac{M}{R_a \cdot \nu \cdot h_0} = \frac{352500}{2700 \cdot 0,980 \cdot 31,5} = 4,23 \text{ см}^2$$

Приймаємо на І м 6  $\emptyset$  І0А ІІ /  $F_a = 4,71 \text{ см}^2$  /

### І.2.5.І. Розрахунок фундамента по розкриттю тріщин

#### Розрахунок по розкриттю тріщин, нормальних до повздожньої осі балки

Перетин З /див. рис. І2/. Визначаєм необхідність обчислення ширини розкриття тріщин /ІЗ, п.4.6/. Для цього обчислюємо момент тріщиноутворення  $M_t$ .

$$\text{Враховуючи, що } \mu = \frac{F_a}{6 h_0} = \frac{42,35}{60 \cdot 93,5} = 0,0075 < 0,01,$$

момент  $M_T$  знаходимо без урахування арматури за формулою 233 [ІЗ.]

$$M_T = R_{pI} \cdot \omega_T = R_{pI} \cdot /0,292 + 0,0075 \cdot \gamma_1' / * / 6 h^2 / =$$

$$= 15/0,292 + 0,0075 \cdot 0,67 / \cdot 60 \cdot 100^2 = 26,8 \text{ тс м};$$

$$\gamma_1' = \frac{2}{6} \frac{(6n - 6) \cdot h n'}{6 h} = \frac{2 \cdot /160 - 60 / \cdot 20}{60 \cdot 100} = 0,67.$$

Тому, що  $M_T = 26,8 \text{ тс м} < M = 81,4 \text{ тс м}$ , то перевірка ширини розкриття тріщин необхідна.

При розрахунку поздовжньої арматури ми приймали, що навантаження малої сумарної тривалості відсутнє, тому можна вважати, що

$$M_{q1} / M_n = 81,4 / 81,4 = 1,0 > 0,667.$$

Тоді, згідно з [ІЗ, п.4.7] допускається проводити розрахунок тільки на тривале розкриття тріщин від моменту  $M_{q1}$ . Ширину розкриття тріщин знаходимо за формулою /І.47/.

Для цього знайдемо:

$$\sigma_a = R_a - \frac{M}{M_{np}} = 3400 \cdot 81,4 / 103,5 = 2674 \text{ кгс/см}^2$$

$$M_{np} = M_{расч} \cdot F_a_{расч} / F_a_{теор} = 101,7 \cdot 42,35 / 41,62 = 103,5 \text{ тс м}.$$

Так як поздовжня арматура розташована в два ряди, обчислюємо коефіцієнт

$$\varphi = \frac{h - x - c}{h - x - a} = \frac{100 - 6,08 - 3,5}{100 - 6,08 - 6,5} = 1,04$$

Напруга в нижньому стержні арматури

$$\sigma_a = 2674 \cdot 1,04 = 2780 \text{ кгс/см}^2$$

Ширину розкриття тріщин визначаємо за формулою

$$s_m = k \cdot c_q \cdot \gamma \left( \frac{\sigma_a}{E_a} \right) \cdot 20 \cdot /3,5 - 100 \mu / \cdot \sqrt{d} =$$

$$= 1 \cdot 1,5 \cdot 1,0 \cdot \frac{2780}{2 \cdot 10^6} \cdot 20 /3,5 - 100 \cdot 0,0061 / \cdot 27,92 = 0,366 \text{ мм}$$

$$0,366 > 0,3 \text{ мм},$$

$$\text{де } k = 1; c_q = 1,5; \gamma = 1; d = \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 d_1 + n_2 d_2} = \frac{22^2 + 32^2}{22 + 32} =$$

$$= 27,92 \text{ мм};$$

$$\bar{M} = \frac{F_a}{6h_0 + (6h - 6) \cdot (h_n - a)} = \frac{42,35}{60 \cdot 93,5 + 160 - 60 \cdot 20 - 6,5} = 0,0061.$$

Розрахункова величина ширини розкриття тріщин більша гранично припустимої. Тому що  $\mu = 0,0061 < 0,008$ , то згідно /ІЗ, п.4.9.6/ обчислене  $\sigma_m = 0,366$  мм допускається зменшити домноженням на 0,568. Для цього обчислюємо

$$\bar{\mu} \cdot n = 0,0061 \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{29 \cdot 10^5} = 0,042; \quad M^0 = \left(0,8 + \frac{35}{1,0}\right) \cdot M_T =$$

$$= \left(0,8 + \frac{3,5 \cdot 0,042}{1,0}\right) \cdot 26,8 = 60,84 \text{ тсм};$$

де  $M_T = M_T = 26,8$  тсм.

$$\text{Згідно /ІЗ, п.4.9/ приймаємо } M^0 = 60,84 \text{ тсм} < 2,5 M_T =$$

$$= 2,5 \cdot 26,8 = 67 \text{ тсм}.$$

Обчислимо коефіцієнти

$$K = \frac{M_n - 0,85 M_T}{M^0 - 0,85 M_T} \cdot \frac{M^0}{M} \cdot \frac{M + 10 \cdot W_0}{M_n + 10 \cdot W_0} = \frac{81,4 - 0,85 \cdot 26,8}{60,84 - 0,85 \cdot 26,8} \cdot \frac{60,84 \cdot 1}{81,4} =$$

$= 1,15$ , де  $M = M_{qL} = M_n = 81,4$  тсм:

$$k_p = 1,5 M_T / M_n = 1,5 \cdot 26,8 / 81,4 = 0,494;$$

$$k_s = k_n \cdot k_p = 1,15 \cdot 0,499 = 0,568.$$

З урахуванням коефіцієнта  $k$  розрахункова шири на тріщин

$$\sigma_m = 0,366 \cdot 0,568 = 0,208 \text{ мм} \quad 0,3 \text{ мм}.$$

Перетин 5 /див. рис. І2/. Визначимо необхідність обчислення

$\sigma_m$ . Обчислимо момент тріщиноутворення за формулою /223/ /ІЗ/:

$$M_T = R_{pII} \cdot W_T - N_{yc} (e - \gamma_y) = 150 \cdot 0,345 - 19,7 \cdot 0,242 + 0,225 = 42,6 \text{ тсм}$$

$$\text{де } W_T = \gamma \cdot W_0 = 1,75 \cdot 0,197 = 0,345 \text{ м}^3;$$

$\gamma$  - коефіцієнт, який визначається по т.27 /ІЗ, п.3.6/ ;

$W_0$  - момент опору для розтягнутої грані перетину, визначається

по правилах пружного опору матеріалів.

$$N_{yc} = \sigma_{yc} (F_a + F_a') = 400 / 44,73 + 4,52 = 19,7 \text{ тс};$$

$$e_0 = \frac{F_a \cdot y_a - F_a' \cdot y_a'}{F_a - F_a'} = \frac{44,73 \cdot 32,2 - 4,52 \cdot 57,8}{44,3 + 4,52} = 24,15 \text{ см};$$

$$y_a = y_0 - a = 38,7 - 6,5 = 32,2 \text{ см}; \quad y_a' = h - y_0 - a' = 100 - 38,7 - 3,5 = 57,8 \text{ см};$$

$$\gamma_y = \omega_0 / F_n = 0,197 / 0,875 = 0,225 \text{ м};$$

$F_n = 0,875 \text{ м}^2$  - площа поперечного перетину балки

Згинальний момент від нормативних навантажень на грані колони в перетині 5 / див. рис. 12/ визначимо за формулою:

$$M_{5A}^{np} = M_{5A}^{oc} - (Q_5 - \frac{q_0 \cdot l}{4}) \cdot \frac{6x}{2} = 127,2 - 128,7 - \frac{39,26 \cdot 0,14}{2} / 0,2 = 103 \text{ тсм};$$

$$dE \quad q_0'' = \frac{2 \cdot P_1'' + 3 \cdot P_2''}{2} = \frac{2 \cdot 152 + 3 \cdot 252}{27} = 39,26 \text{ тс/м}.$$

Тому що має місце нерівність  $M_t = 42,6 \text{ тс м} < M = 103 \text{ тсм}$ , то необхідно виконати розрахунок  $\alpha_m$ , перевірити  $\alpha_m$ .

Аналогічно розрахунку для перетину 3 / див. рис. 12/ приймаємо  $M_{3A} / M_n = 103 / 103 = 1 > 0,67$  і виконуємо розрахунок  $\alpha_m$  в перетині 5 на тривалі розкриття тріщин. Визначимо:

$$\sigma_a = R_a (M / M_{np}) = 3400 \cdot 103,0 / 147,3 = 2378 \text{ кгс/см}^2,$$

$$\text{де } M_{np} = M_{расч.} \cdot F_a \cdot \eta_{расч} / F_a \cdot \eta_{расч} = 146,3 \cdot 44,73 / 44,42 = 147,3 \text{ тс м}$$

Тому що арматура розташована у два ряди, обчислюємо коефіцієнт

$$\varphi_n = - \frac{h - x - c}{h - x - a} = \frac{100 - 6,08 - 3,5}{100 - 6,08 - 6,5} = 1,03$$

Напруга в нижньому стержні арматури

$$\sigma_a = 2378 \cdot 1,03 = 2449 \text{ кгс/см}^2.$$

Коефіцієнт армування

$$\mu = \frac{F_a}{b h_0 + (b_n - b) \cdot (h_n - a)} = \frac{44,73}{60 \cdot 93,5 + (160 - 60) \cdot 20 - 6,5} = 0,006$$

Ширину розкриття тріщини визначаємо за формулою:

$$\alpha_m = k \cdot c_y \cdot \gamma \left( \frac{\sigma_a}{E_a} \right) \cdot 20 / 3,5 - 100 \mu / \sqrt[3]{d} = 1,0 \cdot 1,5 \cdot 1,0 \cdot \frac{2449}{2 \cdot 10^6} = 20.$$

$$\cdot / 3,5 - 100 \cdot 0,0064 / \cdot \sqrt[3]{28,48} = 0,321 > 0,3 \text{ мм};$$

де  $k=I$ ;  $C_q = 1,5$ ;  $\eta = I$ ;

$$d = \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 d_1 + n_2 d_2} = \frac{20^2}{20} + \frac{32^2}{32} = 28,48 \text{ мм.}$$

Тому що  $\mu = 0,0064 < 0,008$ , то  $a_m$  допускається зменшити /ІЗ, п.4.9.6, використавши коефіцієнт  $k_s$ .

Обчислимо

$$\bar{\mu} \cdot n = 0,0064 \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{2,9 \cdot 10^5} = 0,044;$$

$$M_T = R_{Pz} \cdot \bar{w}_T = R_{Pz} \cdot (0,22264) = 15 \cdot 0,292 \cdot 60 \cdot 100^2 = 26,3 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$\bar{w}_T$  визначено без урахування розтягнутих зв'язів /ІЗ, п.4.9/;

$$M_0 = /0,8 + \frac{35 \cdot \bar{\mu} \cdot n}{\eta} / M_T = /0,8 + 35 \cdot 0,044 / \cdot 26,3 = 2,34 \cdot 26,3 = 61,5 \text{ тс} \cdot \text{м},$$

$$k_n = \frac{M_n - 0,85 M_T}{M_0 - 0,85 M_T} \cdot \frac{M_0}{M} \cdot \frac{M + 10 W_0}{M_n + 10 W_0} = \frac{103,0}{61,5} - \frac{0,86 \cdot 42,6}{0,85 \cdot 42,6} =$$

$$\cdot \frac{61,5}{103,0} \cdot 1,0 = 1,58,$$

$$\text{де } M = M = M = 103,0 \text{ тс} \cdot \text{м}; \quad k_q = 1,5 \cdot \frac{42,6}{103,0} = 0,620;$$

$$k_s = k_n \cdot k_q = 1,58 \cdot 0,620 = 0,98$$

тобто ширину розкриття тріщини з урахуванням  $k_s$  можна понизити до величини

$$a_m = 0,321 \cdot 0,98 = 0,314 \text{ мм.}$$

Для статично невизначених зігнутих елементів біля місць прикладання зосереджених сил при  $\mu < 0,02$  ширину розкриття тріщини допускається зменшити до множення на коефіцієнт  $k_m$  /ІЗ, п.4.9, в/

$$k_m = I - \frac{R}{M} \cdot \frac{/0,3 h - a /}{2,8} \cdot \frac{/3 h_0 - 2 h /}{/2 k_0 - h /} = 1,0 - \frac{63}{103} \times$$

$$\times \frac{/0,3 - 1,0 /}{28 / 2,0} - \frac{0,1 /}{0,935} - \frac{2,0}{1,0} \cdot \frac{1,0 /}{0,935} = 1,0 - 0,041 = 0,959.$$

Розрахункова ширина розкриття тріщини

$$a_m = 0,314; \quad k_m = 0,314 \cdot 0,919 = 0,301 \approx 0,3 \text{ мм.}$$

І.2.5.2. Розрахунок на розкриття тріщин, нахилених до  
поздовжньої осі елемента балки

Перетин 5. Згідно /ІЗ, П.4.І7/ розглянемо перетин, розташований на відстані  $k_0$  зліва від другої опори /перетин 5/. Поперечну силу визначаємо за формулою /60/ ІЗ.

$$Q = Q_{\max} - q_0 \cdot k_0 = 128,7 - 39,26 \cdot 0,935 = 92,0 \text{ тс.}$$

Визначимо необхідність розрахунку ширини розкриття нахилених тріщин:

$$0,6 R_{rT} \cdot b \cdot k_0 = 0,6 \cdot 15 \cdot 60 \cdot 93,5 = 50,5 \text{ тс} < 92 \text{ тс}$$

$$\text{Приймаємо } \frac{Q_{\text{пр}}}{Q_n} / \sqrt{2} = \frac{92}{92} / \sqrt{2} = 1 > 2/3 = 0,67,$$

тоді згідно /ІЗ, п.4.7,6/ перевіряємо тривале розкриття тріщин.

Величину  $a_m$  знаходимо за формулою:

$$a_m = C_q \cdot k \cdot (k_0 + 30 d_{\max}) \frac{\mu_n}{\mu_n} \cdot \frac{b^2}{E_n} = 1,5 \cdot 14 \cdot 10^3 \cdot 1295 \cdot \frac{1}{0,005}$$

$$\frac{16,4^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,366 \text{ мм,}$$

$$\text{де } C_q = 1,5; \quad \eta = 1,0 \quad b = \frac{92,000}{60 \cdot 93,5} = 16,4 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\mu_n = \mu_x = \frac{F_x}{E \cdot u} = \frac{9,05}{60 \cdot 30} = 0,005;$$

$$k = 1/20 - 1200 \mu_n / \cdot 10^3 = 1/20 - 1200 \cdot 0,05 / \cdot 10^3 = 14 \cdot 10^3$$

$$k_0 + 30 d_{\max} = 935 + 30 \cdot 12 = 1295 \text{ мм.}$$

В зв'язку з тим, що  $a_m = 0,366 > a_m = 0,3 \text{ мм}$  /ІЗ, п.4. тІ/; приймаємо на припорній ділянці крок хомутів  $u = 25 \text{ мм}$ .

Обчислимо

$$\mu_n = \mu_x = \frac{F_x}{E \cdot u} = 9,05 / 60 \cdot 25 = 0,00603;$$

$$k = 1/20 - 1200 \cdot 0,00603 / \cdot 10^3 = 12,76 \cdot 10^3;$$

$$a_m = 1,5 \cdot 12,76 \cdot 10^3 / 1295 / 0,00603 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^6} = 0,276 \text{ мм} < 0,3 \text{ мм}$$

Тому що значення поперечних сил  $Q_1$  і  $Q_2$  практично рівні, то на припорних ділянках третьої колони /перетин 9/ крок хомутів  $u$

також приймаєм рівним 25 см. В перетині I /справа/ діє  $a_n^r < a_n$  і крок хомутів можна прийняти більшим із розрахунку на міцність, але з ціллю уніфікації каркасів К4/рис.І56/ приймаєм  $u = 25$  см. В перетині I /зліва/ приймаємо шаг хомутів  $u = 30$  см відповідно з розрахунком на міцність.

### І.2.6. Конструювання фундаменту.

Для побудови епюри матеріалів попередньо обчислюєм одиничні моменти. В першому прольоті /див. перетин 3, рис.І4/ при  $\sigma = 41,62 \text{ см}^2$  /прийнято 4  $\phi$  І8 і 4  $\phi$  32/ отримаємо

$$z = \frac{M}{R_o \cdot F_a \cdot \gamma_{\text{еор}}} = \frac{10170000}{2700 \cdot 41,62} = 90,5 \text{ см};$$

$$M_{\phi 18} = F_{o18} \cdot R_a \cdot z = 2,545 \cdot 2700 \cdot 90,5 = 6,22 \text{ тс м};$$

$$M_{\phi 32} = F_{o32} \cdot R_a \cdot z = 0,043 \cdot 2700 \cdot 90,5 = 19,65 \text{ тс м};$$

Аналогічно виконаємо обчислення для арматури, розташованої під крайніми колонами /див. перетин І, рис.І4/,

$$z = \frac{3650000}{2700 \cdot 14,92} = 90,6 \text{ см};$$

$$M_{\phi 14} = 1,539 \cdot 2700 \cdot 90,6 = 3,8 \text{ тс м};$$

$$M_{\phi 20} = 3,142 \cdot 2700 \cdot 90,6 = 7,7 \text{ тс м};$$

для арматури розташованої під другою і третьов колонами /див. перетин 5 і 9, рис. І4/,

$$z = \frac{10170000}{2700 \cdot 44,42} = 84,8 \text{ см};$$

$$M_{\phi 20} = 3,142 \cdot 2700 \cdot 84,8 = 7,19 \text{ тс м};$$

$$M_{\phi 32} = 8,043 \cdot 2700 \cdot 84,8 = 18,41 \text{ тс м};$$

для арматури в другому прольоті /див. перетин 7, рис. І4/

$$z = \frac{8340000}{2700 \cdot 35,76} = 86,38$$

$$M_{\phi 12} = 1,131 \cdot 2700 \cdot 86,38 = 2,64 \text{ тс м};$$

$$M_{\phi 32} = 8,043 \cdot 2700 \cdot 86,38 = 18,76 \text{ тс м},$$

Отримані значення одиничних моментів відкладаємо на відповідних ділянках епюри згинаючих моментів /див.рис.15/.

Далі визначаєм довжину запуску поздовжньої арматури за перетини, де вони непотрібні по розрахунку.

При визначенні поперечної сили  $Q$  в перетинах, де поздовжня арматура непотрібна по розрахунку, криволінійну епюру  $Q$  можна прийняти лінійною.

Величину запуску на ділянках фундаменту справа від крайньої колони визначимо за формулою:

$$W = \frac{Q}{2 \cdot q_{xw}} + 5d = \frac{82000}{2 \cdot 548} + 5 \cdot 2 = 85, \quad 20 \cdot 3,2 = 64 \text{ см}$$

$$\text{де } q_{xw} = \frac{P_a \cdot \kappa \cdot f_x}{u} = \frac{2100 \cdot 4 \cdot 0,503}{30} + \frac{2700 \cdot 4 \cdot 1,131}{30} = 548 \text{ кгс/см}^2$$

Аналогічно визначимо величину запуску поздовжньої арматури зліва від перетину 3 /перший проліт/:

$$W = \frac{Q}{2 \cdot q_{xw}} + 5d = \frac{25000}{2 \cdot 305,4} + 5 \cdot 1,8 = 50 \quad 20 \cdot 1,8 = 36 \text{ см}$$

$$q = \frac{P_a \cdot \kappa \cdot f_x}{u} = \frac{2700 \cdot 4 \cdot 1,131}{40} = 305,4$$

справа від перетину 3 / другий проліт /

$$W = \frac{Q}{2 \cdot q_{xw}} + 5d = \frac{58000}{2 \cdot 698} + 5 \cdot 1,8 = 45; \text{ приймаємо } 52 \text{ см};$$

$$q_{xw} = \frac{P_a \cdot \kappa \cdot f_x}{u} = \frac{2700 \cdot 8 \cdot 1,131}{35} = 698;$$

зліва від перетину 5 /перший проліт/

$$W = \frac{Q}{2 \cdot q_{xw}} + 5d = \frac{95}{2 \cdot 814,32} + 5 \cdot 3,2 = 75 \text{ см};$$

$$q_{xw} = \frac{P_a \cdot \kappa \cdot f_x}{u} = \frac{2700 \cdot 8 \cdot 1,31}{30} = 814,32 \text{ кгс/см};$$

справа від перетину 5 / другий проліт/

$$W = \frac{Q}{2 \cdot q_{xw}} + 5d = \frac{80}{2 \cdot 814,32} + 5 \cdot 3,2 = 65 \text{ см};$$



$$q_{xw} = \frac{R_a \cdot \kappa \cdot f_x}{a} = \frac{2700 \cdot 8 \cdot 1,31}{30} = 814,32 \text{ кгс/см};$$

зліва від перетину 7 / другий проліт/

$$W = 5d + \frac{a}{2 q_{xw}} = \frac{25000}{2 \cdot 305,37} + 5 \cdot 1,2 = 47 \text{ см.}$$

$$q_{xw} = \frac{R_a \cdot \kappa \cdot f_x}{a} = \frac{2700 \cdot 4 \cdot 1,31}{40} = 305,37 \text{ кгс/см};$$

справа від перетину 7 / другий проліт/

$$W = \frac{a}{2 q_{xw}} + 5d = \frac{30000}{2 \cdot 305,4} + 5 \cdot 1,2 = 55 \text{ см};$$

$$q_{xw} = \frac{2700 \cdot 4 \cdot 1,31}{40} = 305,4 \text{ кгс/см};$$

зліва від перетину 9 / третя опора/

$$W = \frac{a}{2 q_{xw}} + 5d = \frac{86000}{2 \cdot 814,32} + 5 \cdot 3,2 = 68,8 \text{ см};$$

$$q_{xw} = \frac{2700 \cdot 8 \cdot 1,31}{30} = 814,32 \text{ кгс/см.}$$

Отримані в результаті розрахунку величини запуску використані при конструюванні фундаменту /див. рис. І5/

При висоті перетину стрічковго фундаменту  $h = 1,0\text{м} > 0,7\text{ м}$  біля бокових граней /І3, п.5.І7/ необхідно поставити конструктивні поздовжні стержні з відстанню між ними по висоті не більше  $0,4\text{ м}$  / в даному випадку два ряди/. Площа перетину цих стержнів приймається  $f_{ax} \geq 0,001 b' h'$ . Тут  $b'$  - половина ширини ребра балки;  $h'$  - відстань між стержнями по висоті елемента. Крім того, діаметр поздовжніх стержнів приймається не менше діаметра поперечних /8, п.3.І06/. Поздовжні конструктивні стержні повинні з'єднуватись шпильками діаметром 6-8 мм з арматури класу А-І з кроком 500 мм по довжині балки /8, п.3.І04/.

Для анкеровки кінців поперечної арматури біля верхніх /нижніх/граней балки укладають поздовжні стержні діаметром 10-12 мм.

### 1.3. Використання ЕСМ при розрахункових стрічкових фундаментах

Для розрахунку стрічкового фундаменту, завантаженого зосередженими силами та рівномірно розподіленим навантаженням, складено програму, яка дає можливість отримати картину напружено-деформованого стану фундаменту.

На рис.16 наведена узагальнена схема програми розрахунку балки на пружній основі за методом скінчених різниць /МСП/. Програма дозволяє провести розрахунок балки постійного та змінного перетину по довжині з постійним та змінним коефіцієнтами жорсткості підвалини.

Програма складена на алгоритмічній мові РЛ/І. Лістинг програми наведено в [19], сторінка 86.

Число невідомих при виконанні I етапу розрахунку балки за МСП /дискретизація балки/ дорівнює числу вузлів. Основна програма "ВАЛКА" викликає підпрограму "CAUSP", за допомогою якої обчислюється СЛАР.

Розрахунок починається з об'яви параметрів, котрі визначають розрахункову модель "фундамент-підвалина" і вводу вхідних даних: навантаження, геометричні і фізичні характеристики балки, коефіцієнти жорсткості підвалини, призначення кроку сітки на балці.

Далі обчислюють жорсткість балки  $EJ_x$ , і коефіцієнти жорсткості підвалини  $K_x$  у відповідності з відомими законами їхньої зміни по довжині балки. Визначаючи коефіцієнти при невідомих і вільних членах системи розрахункових рівнянь, намічених точках балки попередньо обчислюють поперечні сили та згинаючі моменти від зовнішнього навантаження.

За допомогою данної програми можна обчислити систему лінійних рівнянь, яка включає більше 200 невідомих /рівнянь/. Програма складена так, що в результаті обчислення системи отримуємо значен-

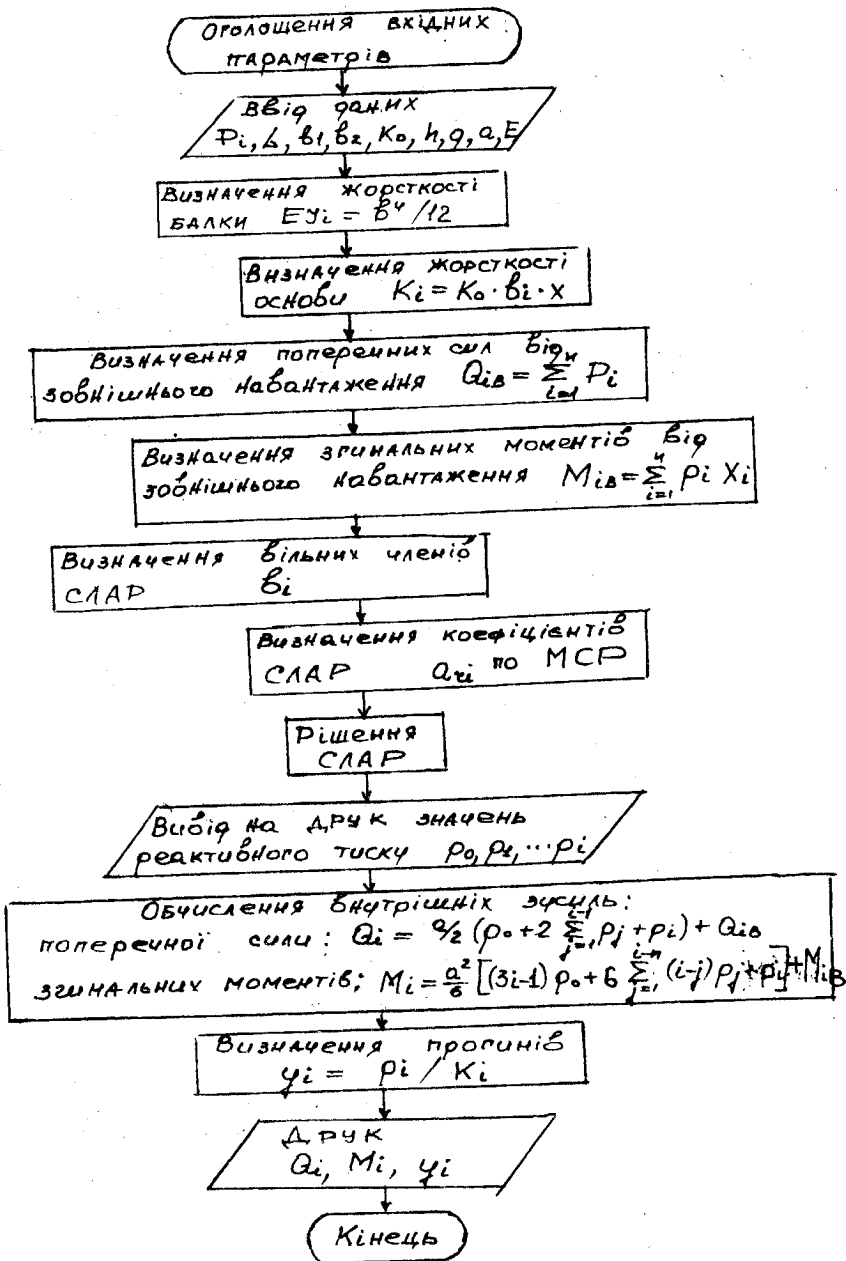


Рис. 16. Узагальнена схема програми розрахунку балок на пружній основі за МСР.

ня реактивного тиску в точках розбивки балки.

За допомогою програми по невідомим значеннях реактивного тиску ґрунту обчислюють також поперечні сили, згинаючі моменти та прогини балки в тих же точках.

Термін розрахунку зусиль  $M$  та  $Q$  в стрічкових фундаментах, а також реактивного тиску ґрунту і осадок підвалини залежить від числа участків розбиття /крок сітки/ і складає 3-6 хв.

## 2. Розрахунки балки на пружній основі методом скінчених елементів /МСЕ/

### 2.1. Математична модель розрахунку балки на пружній основі

В практичних розрахунках напружено-деформованого стану реальної конструкції урахувати всі особливості вихідного об'єкту, котрі впливають на їхню поведінку, неможливо і не потрібно. Об'єкт замінюється деякою фізичною моделлю з скінченим числом властивостей, які характеризують даний вихідний об'єкт.

Фізичні моделі, які використовують в механіці деформованих тіл, підкоряються тим чи іншим фізичним законам. Фізичні моделі дають математичне формулювання її поведінки /тобто будується математична модель/. Потім вибирається метод дослідження цієї математичної моделі та проводиться дослідження.

Так в курсі будівельної механіки в числі ряду інших вивчають напружений стан пружних систем. Дослідження будь-якої балочної системи потребує попереднього вивчення поведінки складових її балочних елементів. А останні можуть мати змінну жорсткість  $EI$  / $x$ /, знаходитись на пружній основі змінної жорсткості  $k/x$ /, підпадати під дію поперечного навантаження інтенсивності  $q$  / $x$ / . Вигин таких

балок описується диференційним рівнянням четвертого порядку з змінними коефіцієнтами.

$$[EI/x/ \quad W''''/x/] + k/x/ \cdot W/x/ = q/x/, \quad /2.1/$$

де  $W/x/$  - поперечний прогин балки.

де Так, диференційне рівняння /2.1/ разом з деякими граничними умовами являють математичну модель вигину балки на пружній основі змінної жорсткості. Отримати рішення диференційного рівняння /2.1/ можна за допомогою методу початкових параметрів, методу Рітца, методу скінчених різниць, методу скінчених елементів та іншими.

Вибір методу дослідження може вплинути на стійкість алгоритму - чутливість результату обчислення до похибок числових операцій. При обчисленнях крайових задач механіки суцільних середовищ в наш час широке розповсюдження отримав метод скінчених елементів. Сприяла цьому і математична спорідненість багатьох далеко різних по фізичній суті проблем. Діапазон його застосування черезмірно широкий - будівельна справа та машинобудування, гідро та аеродинаміка, гірська справа, моделювання та математична фізика.

В основі МСЕ лежить варіаційне обчислення, котре володіє рядом суттєвих переваг: велика узагальненість, яка дає широкі можливості використання, незалежність від форми зображення руху тіла, логічна чіткість. В варіаційних методах загальною характеристикою є енергія, тобто деяка скалярна величина. Основні розрахункові рівняння МСЕ можуть бути отримані безпосередньо із варіаційного принципу Лагранжа. Реалізація МСЕ на ЕОМ достатньо зручна.

Великою перевагою МСЕ є його виключна нечутливість в відношенні характеру закріплення конструкції, закону зміни зовнішнього навантаження. Метод зацікавив дослідників головним чином тією властивістю, що суцільне середовище розбивається наряд елементів, які можна розглядати як конкретні його частини. МСЕ завоював популярність як виключно корисний інженерний метод.

## 2.1.1. Коротка історія розвитку варіаційних методів

Ще на зорі розвитку природознавчих наук вчених цікавило питання знайти найбільш загальні закономірності /принципи/, які б включали в собі зміст багатьох явищ, та були б для них єдиною основою.

Вперше в фізиці /оптика/ такий принцип був сформульований в XVII столітті. Це принцип найменшого часу розповсюдження світла, принцип П'єра Фермі, французького математика. Суть його- рухачись в неоднорідному середовищі від тч. А до тч. В промінь світла забезпечує ту траєкторію, яка забезпечить мінімум часу руху,

Оскільки час - один з основних елементів в механіці руху, то в деяких дослідників виникла ідея застосувати його до обчислення аналітичних задач механіки. Це стимулювало вчених до пошуку аналогічного по своїй структурі принципу в механіці.

Одна з таких задач, запропонована в 1696 році І.Бернуллі привела до виникнення варіаційного обчислення а в подальшому до формулювання загального варіаційного принципу механіки.

Це задача про б р а х і с т о х р о н у або криву найшвидшого спуску /рис.17/. Потрібно було визначити траєкторію, по якій тіло, масою М /вільне падіння/ з тч. А найшвидше переміститься в тч. В. Рішення задачі отримали незалежно сам автор, його брат Я. Бернуллі, Г. Лейбніц, І.Ньютон, Г.Лопіталь. Цією траєкторією виявилась циклоїда. Задача І.Бернуллі виявила великий вплив на його сучасників, тому що показала, що найкоротша відстань із А в В по прямій, тобто по найкоротшому відрізку не буде найкоротшою відстанню.

Незважаючи на геніальні прозріння окремих вчених того часу залишилось незрозумілим, котра ж конкретно величина в механіці в процесі руху приймає екстремальне значення. Ця проблема з'явилась в XVII віці і доведена до такої математичної ясності як і принцип Фермі лише на початку XIX сторіччя

Принцип найменшої дії в найбільш завершеному вигляді був сформульований Л.Ейлером та Ж.Лагранжем - істиною траєкторією руху буде та, на якій вираз потенціальної енергії системи прийме найменше значення.

В варіаційному обчисленні основною задачею саме і є пошук умов, за яких функціонал /тобто вираз потенціальної енергії системи/ приймає стаціонарне /найменше/ значення. За цих умов в МСЕ визначаються переміщення споруди та величини внутрішніх зусиль в них.

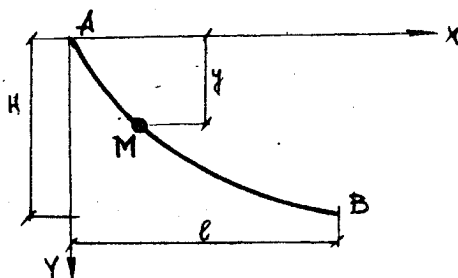


Рис. 17. Задача про брахістохрону.

Функціоналом в варіаційній задачі розрахунку будівельних конструкцій є вираз повної потенціальної енергії системи. Вона складається із суми робіт внутрішніх / $u$ / та зовнішніх / $A$ / сил /2.2/. Так в задачі про плоский згин стержня, лежачого на пружній основі, /рис. 18/ функціонал повної потенціальної енергії системи або варіаційний принцип Лагранжа записується в вигляді:

$$I = \Pi = u - A \quad /2.2/$$

Для пружної основи справедлива гіпотеза Вінклера

$$p(x) = - c w(x) \quad /2.3/$$

це  $p(x)$  - реактивний тиск ґрунту;

$w$  - вертикальне переміщення;

$c$  - коефіцієнт Пастелі.

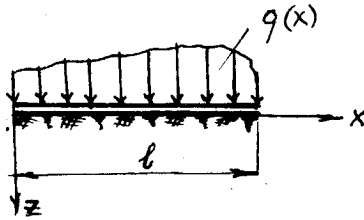


рис. 18 Балка на пружній основі

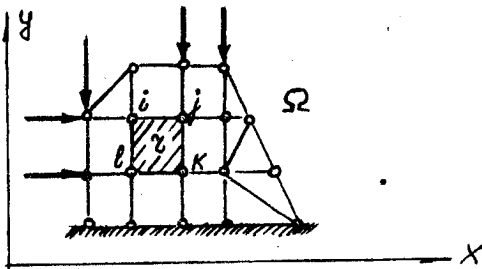


рис. 19 Розрахункова схема двовимірної області.

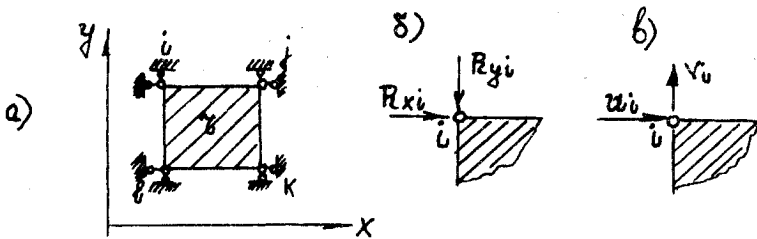


рис. 20, а/ SE двовимірної області;  
 б/ Реакції у додатково накладених зв'язках;  
 в/ Переміщення в додатково накладених зв'язках.



Вважаємо, що робота зовнішніх сил  $A$  на можливих переміщеннях викликана кінцевим значенням діючих сил

$$A = \int_0^l q(x)w(x) dx + \int_0^l p(x)w(x) dx = \int_0^l (q(x)w(x) - cw^2(x)) dx \quad / 2.4/$$

Дійсна робота внутрішніх сил:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad /2.5/$$

З урахуванням вищесказаного функціонал  $I$  можна записати:

$$I = \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l (q(x)w(x) - cw^2(x)) dx \quad /2.6/$$

Оскільки в стані стійкої рівноваги будівельної конструкції в даному випадку балка, величина  $\Pi$  /потенціальна енергія системи/ мінімальна, то варіаційне рівняння Лагранжа буде мати вигляд:

$$\delta \Pi = \delta (U - A) = 0 \quad /2.7/$$

Тобто отримуємо, що задача вигину балки на пружній основі відноситься до крайової задачі, що описується диференціальним рівнянням IV порядку /2.6, 2.7/. Для її обчислення доцільно застосовувати МСЕ.

## 2.2. Основні положення методу скінчених елементів

Розрахунок по МСЕ починається з дискретизації розрахункової системи. Об'єкти теорії пружності /дво - або тривимірні області/ розподіляються на СЕ відповідної статичної природи. Для двовимірних областей застосовують трикутні або прямокутні СЕ, для масивних тіл - СЕ в формі тетраедра або паралелепіпеда.

Нехай розрахункова схема являє собою двовимірну область /рис. 19/ всі характеристики області залежать від двох координат/

Кожний SE цієї області зберігає всі геометричні та фізичні властивості розрахункового середовища. На границі області задані граничні умови, тобто компоненти сил або переміщень.

Класичний підхід до задачі про напружено-деформований стан області  $\Omega$  рекомендує проаналізувати нескінченно малий елемент цієї області, що приводить до розрахункових рівнянь в частинних похідних.

Метод МСЕ розглядає елемент скінчених розмірів, тобто проходить перехід від системи з нескінченим числом степеней свободи напружено-деформованого стану до системи із скінченим числом параметрів. Основна система для об'єкту на рис./19/ являє собою совокупність SE. Вузлам розрахункової системи наються додаткові зв'язки. Наприклад, для плоскої задачі теорії пружності можна зупинитись на двох зв'язках, котрі виключають лінійні переміщення на площині /рис.20 а,б,в/. По аналогії із стержневими системами від переміщень вузлів /рис.20,в/ в додатково накладених зв'язках виникають реакції /рис.20,б/. Кожний вузол має два компоненти вузлових переміщень -  $u, v$ . В пружній стадії деформування між реакціями в додаткових зв'язках та вузловими переміщеннями існує лінійна залежність.

$$R_{ix} = k_{11} u_i + k_{12} v_i + k_{13} u_j + k_{14} v_j + k_{15} u_k + k_{16} v_k + k_{17} u_e + k_{18} v_e, \quad (2.8)$$

де  $k_{ij}$  - коефіцієнти жорсткості. Фізичний зміст  $k_{ij}$  - це зусилля в вузлі " i ", яке виникає від одиничного переміщення по напрямку j коли решта переміщень дорівнюють нулю.

Вираз типу /2.8/ записується для всіх восьми компонентів вузлових сил SE ч/рис.20 а/.

$$\begin{Bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ \dots \\ R_{lx} \\ R_{ly} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \dots \\ u_e \\ v_e \end{Bmatrix} \quad /2.9/$$

В матричних символах

$$\{R\}_r = [k] \cdot \{q\}_r \quad /2.10/$$

де  $\{R\}_r = [k] \cdot \{q\}_r$  - вектор вузлових реакцій /2.11/

Число компонентів вектора вузлових реакцій дорівнює сумі ступеней свободи СЕ.

Та ж сума визначає число компонентів вектора переміщень СЕ.

$$\{q\}_r = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vdots \\ v_e \end{Bmatrix} \quad /2.12/$$

Після визначення коефіцієнтів матриці жорсткості подальший розрахунок йде по універсальній методиці незалежно від форми або властивостей використаних СЕ.

Вивід матриці жорсткості - специфічна операція МСЕ, і кінцевому розрахунку степінь точності виразу типу /2.8/ визначає і ступінь точності обчислення задачі в цілому. Точні коефіцієнти жорсткості одномірних СЕ приводять до точних рішень задач про напружено-деформований стан стержневих систем.

Для СЕ більшої мірності приходиться вести мову про наближені рішення, оскільки тоді маємо справу з плоскою або тривимірною задачею теорії пружності. Та для всіх СЕ обчислення матриці жорсткості базується на варіаційних принципах будівельної механіки.

Для організації єдиної системи з СЕ необхідно виконати умови рівноваги сил та умов нерозривності переміщень в вузлах СЕ.

Умови нерозривності переміщень виконуються автоматично, тому що, переміщення вузлів розрахункової системи спільні для декількох СЕ, котрі примикають до одного вузла. Реакції в додаткових зв'язках вузлів та зовнішні вузлові сили повинні задовільняти умовам рівноваги:

$$[k] \cdot \{q\} = \{P\}, \quad /2.13/$$

де  $[k]$  - матриця коефіцієнтів системи, котра по фізичному змісту буде матрицею жорсткості всієї області  $\Omega$ ;  $\{q\}$  - вектор-стовбець вузлових сил, розрахункової системи;  $\{P\}$  - вектор-стовбець вузлових сил, еквівалентний зовнішньому навантаженню. Із матриці коефіцієнтів  $[k]$  виключаються ті стрічки та стовпці, номери яких відповідають вузловим зв'язкам, котрі викликають переміщення області  $\Omega$  як твердого тіла. Ця операція аналогічна накладанню зв'язків і являє собою завдання граничних умов.

Рівняння /2.13/ являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ і включає рівняння рівноваги з урахуванням граничних умов, котрі задані в переміщеннях вузлів розрахункової схеми.

Цю ж саму систему лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ безпосередньо отримують з умови мінімуму функціоналу повної потенціальної енергії, тобто з варіаційного рівняння Лагранжа /2.7/

$$\delta \Pi = \delta (U - A) = 0,$$

де  $U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\epsilon} d\Omega$  - робота внутрішніх сил /потенціальна енергія деформації/ в області  $\Omega$ ;

$A = \int_{\Omega} q w d\Omega$  - робота зовнішніх сил /потенціал зовнішніх сил/.

$\sigma$  та  $\epsilon$  - функції напруги та деформації;

$w$  - функція переміщень по області  $\Omega$ ;

$q$  - функція навантаження по області  $\Omega$ ;

Обчислити варіаційну задачу - це значить знайти таку систему переміщень, котра дає мінімум функціоналу повної потенціальної енергії системи.

Як прийнято в варіаційних методах, шукана функція переміщень зображується у вигляді ряду:

$$u = \sum_{i=1}^n q_i f_i, \quad /2.14/$$

де  $f_i$  - апроксимуючі координати функції,  $q_i$  - невідомі ступені свободи з фізичної точки зору являють лінійні та вузлові переміщення.

В результаті введення такої апроксимації /2.14/ функціонал повної потенціальної енергії системи перетворюється на скінченно-мірну функцію ступеней свободи  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Ступені свободи знаходяться із умови мінімуму функціоналу, тобто з рівняння виду:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \Pi(q) = \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i} - \frac{\partial A(q)}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad /2.15/$$

Після диференціювання функції багатьох змінних маємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial U(q_2)}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial U(q_n)}{\partial q_n} = \frac{\partial A(q_1)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U(q_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial U(q_2)}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial U(q_n)}{\partial q_n} = \frac{\partial A(q_n)}{\partial q_n} \end{cases} \quad /2.16/$$

По аналогії з будівельною механікою стержневих систем ці рівняння називаються канонічними. Кожний член цих рівнянь можна зобразити у вигляді добутку  $k_{ij} \cdot q_j$  де  $k_{ij}$  - коефіцієнти канонічних рівнянь, які складають матрицю жорсткості  $[k]$ . Елементи правого стовпця рівнянь /2.16/ - це вузлові навантаження, до яких зведено місцеве навантаження, розподілене по області системи:

$$P_i = \frac{\partial A(q_i)}{\partial q_i}.$$

З урахуванням введених позначень:

$$[k] \cdot \{q\} = \{P\} \quad - /2.17/$$

Рівняння /2.16, 2.17/ - це розрахункові рівняння МСЕ. З фізичної точки зору це рівняння рівноваги. Таке обчислення варіаційної задачі аналогічного методу Рітца. Різницею між цими методами є вид координатної /апроксимуючої/ функції  $f_i$ , котра в МСЕ локальна, тобто відрізняється від нуля лише на обмеженій зоні  $\Omega_i$ , яка називається "зірком" скінчених елементів, що включають вузол  $i$  /рис.21/. Така властивість функції МСЕ не лише облегшує її вибір, але й додає всій процедурі МСЕ велику чіткість.

В методі Рітца координатна функція  $f_i$  розповсюджується на всю зону.

Розбивка розрахункової системи на "n" скінчених елементів дає можливість зобразити функціонал повної потенціальної енергії системи в вигляді окремих функціоналів  $\Pi_r$  для кожного СЕ, тобто:

$$\Pi = \sum_{r=1}^n \Pi_r = \sum_{r=1}^n U_r - \sum_{r=1}^n A_r \quad /2.18/$$

В зв'язку з цим розрахункові рівняння /2.16/ можна зобразити в вигляді суми:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \sum \Pi_r(q_i) = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum U_r(q_i) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum A_r(q_i) \quad /2.19/$$

В рівнянні /2.19/  $A_r$  залежить лише від степенів свободи, котрі служать коефіцієнтами координатних функцій та відрізняються від нуля в області СЕ. Ці ступені свободи створюють вектор

$$\{q_r\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad /2.20/$$

Отже, для побудови рівнянь типу /2.16/ для кожного СЕ потрібно виконати операції

$$\frac{\partial}{\partial q_r} U_r(q_r) = [k] \cdot \{q\}_r; \quad \frac{\partial}{\partial q_r} A_r(q_r) = \{P\}_r \quad /2.21/$$

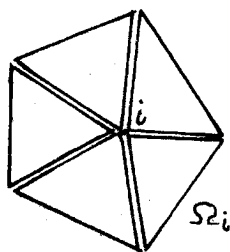


рис. 21 "Зірка" скінчених елементів.

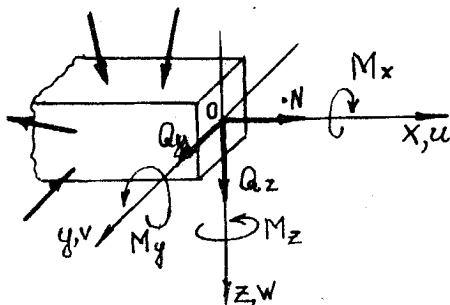


рис. 22 Елемент стержня в загальноприйнятій системі координат та внутрішні зусилля в ньому.

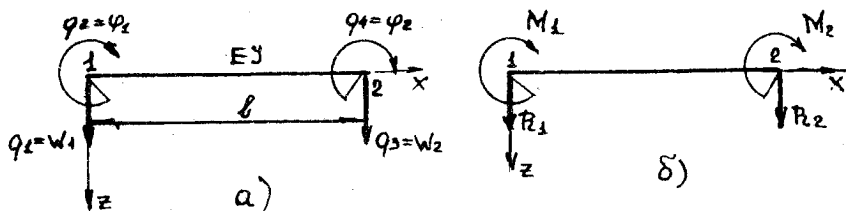


рис. 23 а/ Додатній напрямок вузлових невідомих для одномірного СЕ в місцевій системі координат ;  
б/ Фізичний зміст вузлових реакцій.

Тут  $\{P_r\}$  - вектор вузлових навантажень, до яких приведено місцеве навантаження, розподілене на області СЕ;  $[k]_r$  - матриця жорсткості СЕ.

Якщо ступені свободи мають фізичний зміст переміщень, то  $[k_{ij}]_r$  - елементи матриці жорсткості - це зусилля, яке виникає по напрямку  $i$ -го ступені свободи від  $j$ -го одимичного переміщення при умові, що решта ( $i \neq j$ ) ступенів вільності.

З принципа можливих переміщень:

$$[k_{ij}]_r = \int_{\Omega} \sigma_j \epsilon_i d\Omega_r, \quad /2.22/$$

де  $\sigma_j$  - напруга по зоні СЕ від переміщення  $q_j=1$ ;  $\epsilon_i$  - деформація по зоні СЕ від переміщення  $q_i=1$ .

$$P_i = \int_{\Omega} \rho f_i d\Omega_r, \quad /2.23/$$

де  $P_i$  - член вектора вузлових навантажень  $\{P\}$ ;

$f_i (i=1,2,3,\dots,n)$  - апроксимуючі координатні функції;  $\rho$  - функція навантаження по області  $\Omega_i$  /в загальному вигляді  $P(x)$ /.

### 2.3. Вибір координатних функцій, побудова матриці жорсткості $[k]$ та вектора вузлових навантажень

$\{P\}_r$  При розрахунках стержневих систем розглядаються одимірні області з ізотропного матеріалу, всі характеристики яких товщина модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, напружено-деформований стан/ - функції одного аргумента. За вихідну передумову розрахунку прийнята гіпотеза плоских перетинів. Важаємо, що напруження та деформації зв'язані лінійною залежністю Гука. На рис.2І зображено стержень в загальноприйнятій системі координат  $x,y,z$ , де  $x$  - ось стержня,  $y, z$  - головні осі інерції поперечного перетину.



Під дією навантаження в деформованому стержні виникають внутрішні зусилля  $M_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z, N$ . Деформований стан стержня характеризується лінійними  $u, v, w$  та кутовими  $\alpha, \gamma_y, \gamma_z$  переміщеннями відносно координатних осей  $x, y, z$ .

Функціонал повної потенціальної енергії системи записується

у вигляді:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (M_y \gamma_y + M_z \gamma_z + M_x \alpha + Q_y \gamma_y + Q_z \gamma_z + N \epsilon_x) dx - \int_0^l (\rho_x(x)u + \rho_y(x)v + \rho_z(x)w + m_x \alpha + m_y \gamma_y + m_z \gamma_z) dx, \quad /2.24/$$

де  $\mathcal{K}_y, \mathcal{K}_z$  - кривизни пружної лінії в площинах  $xOz$  та  $xOy$  відповідно;  $\gamma_y, \gamma_z$  - кути зсуву в тих же площинах;  $\alpha$  - кут повертання відносно осі  $X$ ;  $\epsilon_x$  - лінійна деформація в напрямку осі  $X$ ;  $\rho_x(x), \rho_y(x), \rho_z(x)$  - інтенсивність розподілених навантажень по довж осей  $x, y, z$  відповідно;  $m_x(x), m_y(x), m_z(x)$  - інтенсивність розподілених моментів відносно осей  $x, y, z$ .

При обчисленні практичних задач розрахунку стержневих систем часто враховуються не всі можливі лінійні та вузлові переміщення, а лише деякі з них. Так в задачі про розтягнення стержня достатньо визначити лінійне переміщення  $u$ , в задачі про чистий вигин стержня визначають лінійне переміщення  $w$ . Тому, розглядаючи конкретну задачу, функціонал повної потенціальної енергії /2.24/ в залежності від виду напруженого стану записують скорочено.

В задачі про розтягнення стержня функціонал повної потенціальної енергії має вигляд:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l N \epsilon_x dx - \int_0^l \rho(x) u(x) dx \quad \text{або} \quad /2.24.a/$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l E F \frac{du(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx - \int_0^l \rho(x) u(x) dx$$

де  $u(x)$  - переміщення, направлені по довж осі стержня;  $\frac{du(x)}{dx} = \epsilon_x$  - деформація відносного по довження;  $E \frac{du(x)}{dx} = \sigma_x$  - нормальні напруження рівномірно розподілені по перетину;  $\rho$  - функція зовнішніх сил, направлених по довж осі стержня [2]. В задачі про чистий згин функціонал записується за формулою /2.6/.

## 2.4. Матриця жорсткості для скінченного елемента втягнутої балки

Розглянемо задачу про плоский вигин стержня /рис.18/. Область системи в цьому випадку одновимірна  $\Omega = l$ . На основі гіпотези плоских перетинів використовуються інтегральні характеристики напруги  $M_y = EJ \frac{d^2 w}{dx^2}$  та деформацій  $\chi_y = \frac{d^2 w}{dx^2}$ .

Функціонал записується у вигляді /2.6/.

Вид функціоналу зумовлює вибір кривої для апроксимації переміщень. Оскільки функціонал включає в себе необхідні похідні 2-го порядку, то для його існування апроксимуюча крива повинна бути поліномом не нижче 2-го порядку. При використанні скінченного елемента /СЕ/ з двома вузлами /рис.23/ бажане число коефіцієнтів поліному - кратне двом. В зв'язку з цим нехай шукама функція зображується рядом 3-го порядку з чотирма складовими

$$w(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3. \quad /2.25/$$

Апроксимація переміщень виразом типу - /2.25/ підтверджується ще й тим, що переміщення точок вигибного стержня описується функціями 3-го порядку /базисними функціями/. Скінчений елемент /СЕ/ вигибного стержня має два вузли, котрим надається два ступеня свободи /рис.22/ які мають фізичну суть:  $q_1 = w_1, q_3 = w_2$  - вертikalьні переміщення вузлів 1 і 2;  $q_2 = \varphi_1, q_4 = \varphi_2$  - кути повертання вузлів 1 і 2.

Невідомі параметри  $d_i$  в /2.25/ визначаються з умови рівності значень шукамої функції та її похідних значенням інтерполюючого полінома в вузлових точках.

$$p(0) = w(0) ; \quad p(a) = w(a) ;$$

$$\frac{\partial p(0)}{\partial x} = \frac{\partial w(0)}{\partial x} ; \quad \frac{\partial p(a)}{\partial x} = \frac{\partial w(a)}{\partial x} \quad /2.26/$$

Введемо для вузлових значень функцій  $w(x)$  позначення

$$w(0) = q_1 ; \quad \frac{\partial w(0)}{\partial x} = q_2 ; \quad w(l) = q_3 ; \quad \frac{\partial w(l)}{\partial x} = q_4 . \quad /2.27/$$

На основі цих залежностей скласти рівняння

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad /2.28/$$

Обчисливши систему /2.28/, маємо:

$$d_1 = q_1 ; \quad d_3 = 1/l^2 (-3q_1 - 2lq_2 + 3q_3 - lq_4) ; \quad /2.29/$$

$$d_2 = q_2 ; \quad d_4 = 1/l^3 (2q_1 + lq_2 - 2q_3 - lq_4) .$$

Підставивши /2.29/ в /3.25/ маємо зручну для обчислення коефіцієнтів жорсткості апроксимуючу функцію переміщень

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 q_i E_i(x) . \quad /2.30/$$

де  $E_i$  - координатні функції /одномірні функції Ерміта, рис.24/, які описують розподілення переміщень по області СЕ, коли одне із вузлових переміщень дорівнює одиниці, а решта дорівнюють нулю.

Координатні функції мають деякі загальні властивості, що дає можливість записати їх безпосередньо, обминувши алгебраїчні операції /2.28/, /2.29/:

1/ кожна координатна функція  $E_i (i=1,2,4)$  виражає закон зміни переміщень по області СЕ, коли  $i$  - те вузлове переміщення різниться від нуля, а решта дорівнюють нулю;

2/ координатна функція  $E_i (i=1,2,4)$  приймає значення рівне одиниці в вузлі  $i$  ; в решті вузлах  $E_i = 0$  ;

3/ кожна координатна функція  $E_i$  являє собою поліном тієї ж

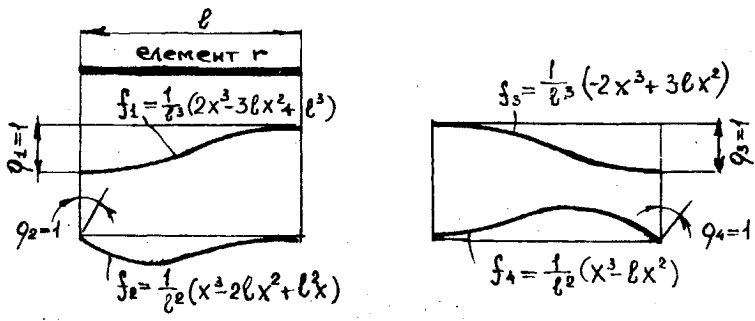


рис. 24 Функції Ерміта для одномірного елемента.

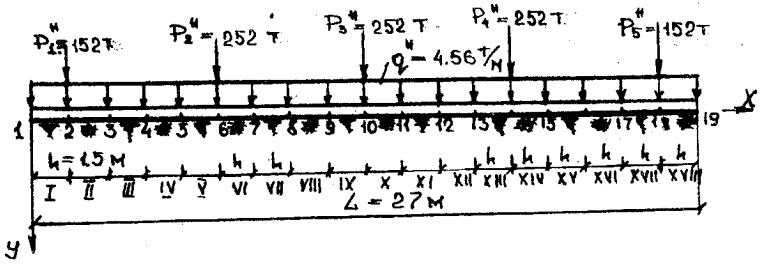


Рис. 26. Схема навантаження балки та розбивка на скінченні елементи

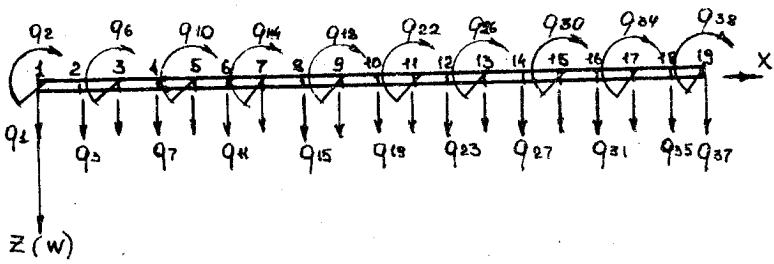


Рис. 27. Розрахункова схема балки при обчисленні її по МСЕ

степені, яка прийнята для апроксимації переміщень по області СЕ.

$$E_1 /x/ = 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} + 2 - \frac{x^3}{3} ; \quad E_2 /x/ = x - \frac{2}{l} \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{2}$$

$$E_3 /x/ = 3 - \frac{x^2}{2} - 2 - \frac{x^3}{3} ; \quad E_4 /x/ = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{2} \quad /2.31/$$

В розгорнутому вигляді /2.30/ має вигляд:

$$w(x) = q_1 \frac{1}{6} (2x^3 - 3lx^2 + l^3) + q_2 \frac{1}{6} (x^3 - 2lx^2 + l^2x) +$$

$$+ q_3 \frac{1}{6} (3lx^2 - 2x^3) + q_4 \frac{1}{6} (x^3 - lx^2). \quad /2.32/$$

Оскільки ступені свободи вигибного стержня мають чіткий фізичний зміст, такі функції можна побудувати з використанням представлення про деформований стержень із будівельної механіки стержневих систем.

Коефіцієнти матриці жорсткості виводяться відповідно до /2.22/

Матриця жорсткості установлює співвідношення між вузловими переміщеннями СЕ та реакціями в додаткових зв'язках, відповідних прийнятим ступеням свободи.

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EY \begin{vmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad /2.33/$$

Фізичний зміст вузлових реакцій витікає з фізичного змісту ступеней свободи /рис.23/:  $R_1, R_2$  - зосереджені реакції по напрямку лінійних переміщень  $w_1$  і  $w_2$ ;  $M_1, M_2$  - зосереджені реактивні моменти по напрямку вузлів повертання  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ .

Оскільки фізичний зміст лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ - рівняння рівноваги сил, прикладених до вузлів розрахункової системи, виникає потреба в приведенні розподілених навантажень до вузлових.

Приведення розподіленого навантаження до вузлового виконується по /2.23/. Так для рівномірно розподіленого навантаження  $p(x) = p$

$$P_1 = \int_0^l p f_1 dx = \int_0^l p \left( \frac{2x^3 - 3lx^2 + l^3}{l^3} \right) dx = \frac{pl}{2}; \quad /2.34/$$

$$P_2 = \int_0^l p f_2 dx = \int_0^l p \frac{(x^3 - 2lx^2 + l^2x)}{l^2} dx = \frac{pl^2}{12};$$

$$P_3 = \frac{pl}{2}; \quad P_4 = -\frac{pl^2}{12};$$

де  $P_2, P_4$  - зосереджені моменти, прикладені в вузлах СЕ;

$P_1, P_3$  - зосереджені сили, прикладені в вузлах СЕ.

## 2.5. Чисельне обчислення балки на пружній основі за МСЕ

На стор. 91 наведено програму на мові "Бейсик" для реалізації розрахунку балки на пружній основі методом скінчених елементів. На рис. 25 показано основні етапи обчислення задачі,

Програма дозволяє визначити внутрішні зусилля та переміщення /прогини/ балки.

### 2.5.1. Основна програма та структура вхідних даних

Канонічні рівняння МСЕ являють собою систему лінійних рівнянь. Програма дозволяє обчислити системи лінійних рівнянь, котрі мають до 50 невідомих. Число невідомих при дискретизації балки дорівнює удвоєному числу скінчених елементів плюс 2. Основна програма викликає підпрограму "GAUSS", за допомогою якої обчислюється система рівнянь за методом Гаусса.

В програмі використані наступні умовні позначення:

Y - кількість СЕ балки;

o - довжина СЕ;

NUZ - кількість завантажених вузлів балки;

G - величина розподіленого навантаження;

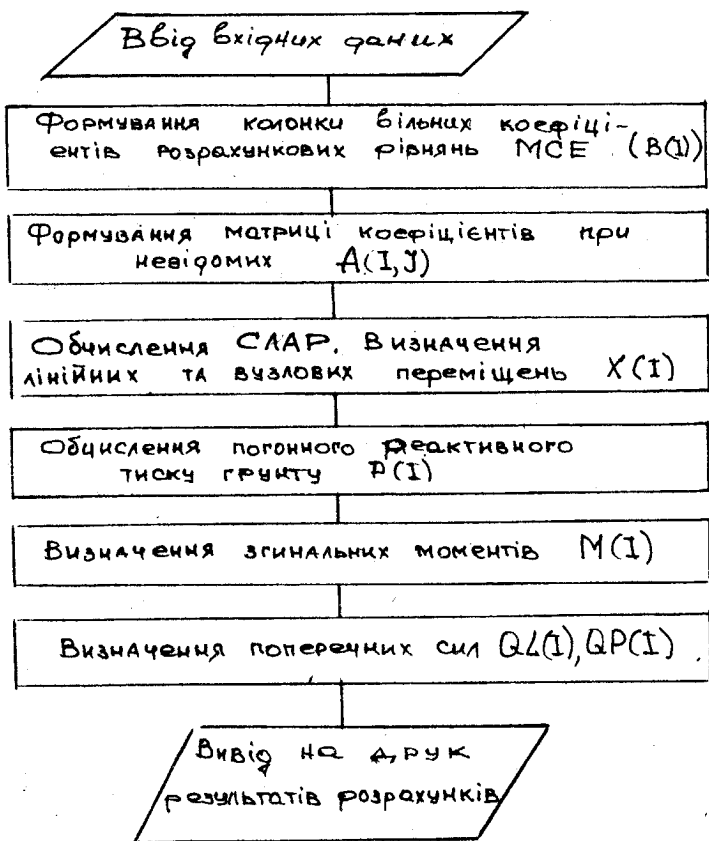


Рис. 25 Блок-схема обчислення балки на пружній основі за МСЕ.

- $B_P$  - ширина підшви балки;  
 $EJ$  - згинальна жорсткість балки;  
 $K$  - коефіцієнт постелі;  
 $n$  - порядок розрахункової СЛАР;  
 $P_N; P_N(n)$  - номер вузла навантаження;/зовнішні зосереджені сили/;  
 $A(n, n)$  - матриця коефіцієнтів перед невідомими в канонічних рівняннях МСЕ;  
 $X(n)$  - вектор невідомих в канонічних рівняннях МСЕ /лінійні та вузлові переміщення СЕ/;  
 $B(n)$  - вектор вільних коефіцієнтів в канонічних рівняннях МСЕ;  
 $G_B(x)$  - вектор приведеного розподіленого навантаження на кожний СЕ;  
 $B_i(4 \times 4)$  - вектор вузлових реакцій /реактивних сил та реактивних моментів/;  
 $M_B(i)$  - зовнішній згинальний момент;  
 $M(i)$  - згинальні моменти в балці;  
 $Q_L(i), Q_P(i)$  - поперечні сили в  $i$ -му вузлі відповідно зліва та справа;  
 $Q_{BL}(i), Q_{BP}(i)$  - зовнішні поперечні сили в  $i$ -му вузлі відповідно зліва та справа;  
 $P(i)$  - вектор погонного реактивного тиску ґрунту;  
 $P_{и}(i)$  - вектор питомого реактивного тиску ґрунту.

### 2.5.2. Приклад розрахунку стрічкового фундаменту за МСЕ

Розглядається стрічковий фундамент, вхідні дані для нього взято з прикладу /І.4/. Деякі з них уточнені з урахуванням діючих БНіп. На рис.26 показана дискретизація балки на скінчені елементи та схема завантаження балки на пружній основі. На рис. 27 наведено невідомі кожного СЕ - вертикальні переміщення та кути повертання.



Балка довжиною 27 метрів розбита на  $Y = 18$  СЕ довжиною  $0 = 1,5$  м. Кожен СЕ має два ступеня свободи:  $q_1$  - вертикальне переміщення вузла I,  $q_2$  - його кут поворотання /рис.26/. Число невідомих за МСЕ визначається за формулою  $N = 2 \times J + 2$ .

Вираз потенціальної енергії /функціоналу/ для обчислення даної задачі за МСЕ для  $i$ -го скінченного елемента згідно /2.6/.

$$I = \Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l c w^2 dx - q \int_0^l w dx,$$

де  $w$  - інтерполяційна функція згідно /2.32/.

Після підстановки виразу  $w(x)$  в вираз потенціалу обчислюються похідні  $\frac{\partial I(w^{(i)})}{\partial \{q\}^{(i)}}$ . Отриманий при цьому вираз для похідної зображується в вигляді:

$$\frac{\partial I(w^{(i)})}{\partial q^{(i)}} = [K]^{(i)} \{q\}^{(i)} + \{P\}^{(i)}; \quad /2.35/$$

де  $[K]^{(i)}$  - матриця жорсткості іго СЕ знаходиться по /2.33/;

$\{P\}^{(i)}$  - вектор вузлових навантажень, члени вектора обчислюються згідно /2.34/.

$$\{P\}^{(i)} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho l/2 \\ \rho l^2/12 \\ \rho l/2 \\ -\rho l^2/12 \end{vmatrix}; \quad /2.36/$$

де  $\rho$  - приведенне рівномірно розподілене навантаження на СЕ.

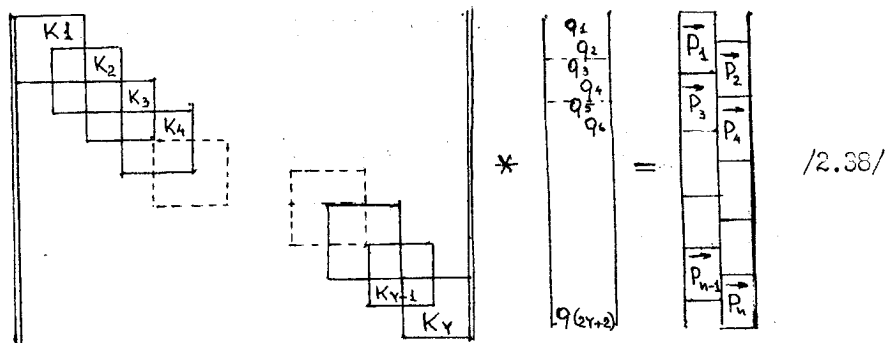
Оскільки балка лежить на пружній основі, то до елементів  $[K]^{(i)}$  потрібно зробити доданок, який враховує роботу пружної основи  $(\frac{1}{2} \int_0^l c w^2 dx)$  згідно з таблицею /24/ /2/.

Розрахункові рівняння по МСЕ для  $i$ -го скінченного елемента -/2.35/ по наведеному прикладу мають вигляд: /2.37/.

Розрахункові рівняння для всієї балки на пружній основі схематично в матричній формі можна зобразити формулою /2.38/.

Розроблена та реалізована програма на алгоритмічній мові "Бей-сик" для ПЕОМ типу "Іскра". Програма обчислює епюри переміщень  $w(x)$ ,

$$\begin{vmatrix} \frac{12EJ}{l^3} + \frac{c13l}{35} & \frac{6EJ}{l^2} - \frac{11cbl^2}{210} & \frac{12EJ}{l^3} + \frac{9cbl}{70} & \frac{6EJ}{l^2} + \frac{13cbl^2}{420} \\ \frac{6EJ}{l^2} - \frac{11cbl^2}{210} & \frac{4EJ}{l} + \frac{cbl^3}{105} & -\frac{6EJ}{l^2} - \frac{13cbl^2}{420} & \frac{2EJ}{l} - \frac{cbl^3}{140} \\ -\frac{12EJ}{l^3} + \frac{9cbl}{70} & -\frac{6EJ}{l^2} - \frac{13cbl^2}{420} & \frac{12EJ}{l^3} + \frac{13cbl}{35} & -\frac{6EJ}{l^2} + \frac{11cbl^2}{210} \\ \frac{6EJ}{l^2} + \frac{13cbl^2}{420} & \frac{2EJ}{l} - \frac{cbl^3}{140} & -\frac{6EJ}{l^2} + \frac{11cbl^2}{210} & \frac{4EJ}{l} + \frac{cbl^3}{105} \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{\rho l}{2} \\ \frac{\rho l^2}{12} \\ \rho \frac{l}{2} \\ -\rho \frac{l^2}{12} \end{matrix} \quad /2.37/$$



реактивного тиску  $\rho/l$ , згинальних моментів  $M/l$  та поперечних сил  $Q_{\text{лів}}, Q_{\text{пр.}}$  в вузлових точках СЕ.

Згинальні моменти для першого та останнього вузла відомі з граничних умов та в даному випадку дорівнюють нулю. Згинальні моменти для решти вузлів  $i=2,3,\dots, M-1$  визначаються в відповідності з правилами будівельної механіки по /1.17/.

Поперечні сили по довжині балки при відомому реактивному тиску знаходяться із співвідношень /1.21/.

Нижче наведено лістинг програми та результати розрахунку. Епюри реактивного тиску, моментів та поперечних сил від нормативних навантажень приведено на рис. 27/суцільні лінії/. Співставлення результатів розрахунку стрічкового фундаменту за МСЕ з розрахунком цього ж фундаменту по МСР в прикладі 1.2/ пунктир на рис. 27/ показують їх повне співпадання. Результати розрахунку цього ж фундаменту на розрахункове навантаження наведено на стор. 92.

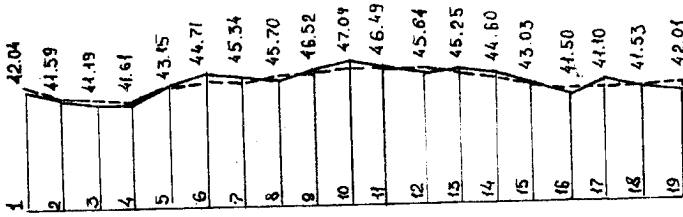


Рис. 28а. Епюра реактивного тиску (за МСЕ суцільна лінія)

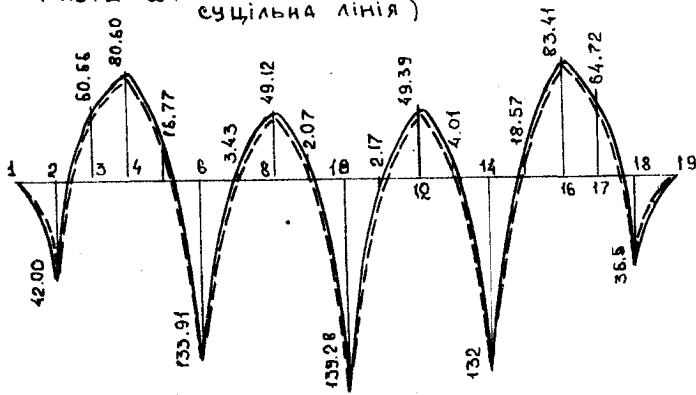


Рис. 28б. Епюра згинальних моментів (за МСЕ суцільна лінія)

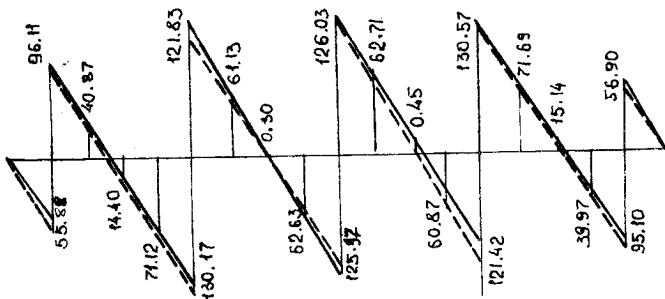


Рис. 28в. Епюра поперечних сил (за МСЕ суцільна лінія)

### 2.5.3. Лістинг програми розрахунку балки на пружній основі за методом скінчених елементів

Вхідні дані до розрахунку балки на пружній основі  
за методом скінчених елементів (MCE)

Кількість скінчених елементів балки	CE	Y = 18
Довжина CE		O = 1.5
Кількість завантажених вузлів	NUZ	= 5
Величина розподіленого навантаження	B	= 4.56
Ширина підшви балки	BP	= 1.6
Згинальна жорсткість балки	EI	= 220400
Коефіцієнт постелі	K	= 1898
Порядок розрахункової СЛАП	N	= 38

N вузла навантаження , величина навантаження

PN	PH(PN)
2	152
6	252
10	252
14	252
18	152

Результати розрахунку балки на пружній основі за MCE

I :	P(i)	M(i)	QL(i)	QP(i)	X(i)	PU(i)
1 :	42.04	0.00	0.00	0.00	0.022149	26.27
2 :	41.59	42.00	55.88	-96.12	0.021914	26.00
3 :	41.18	-60.67	-40.88	-40.88	0.021698	25.74
4 :	41.60	-80.63	14.38	14.38	0.021920	26.00
5 :	43.14	-16.81	71.10	71.10	0.022731	26.97
6 :	44.70	133.83	130.14	-121.86	0.023553	27.94
7 :	45.33	-3.56	-61.17	-61.17	0.023885	28.33
8 :	45.70	-49.31	0.27	0.27	0.024078	28.56
9 :	46.53	-2.31	62.60	62.60	0.024517	29.08
10 :	47.06	139.01	125.96	-126.04	0.024796	29.41
11 :	46.53	-2.43	-62.68	-62.68	0.024517	29.08
12 :	45.70	-49.54	-0.35	-0.35	0.024078	28.56
13 :	45.33	-3.92	61.09	61.09	0.023885	28.33
14 :	44.70	133.35	121.78	-130.22	0.023553	27.94
15 :	43.14	-17.41	-71.18	-71.18	0.022731	26.97
16 :	41.60	-81.34	-14.45	-14.45	0.021920	26.00
17 :	41.18	-61.51	40.80	40.80	0.021698	25.74
18 :	41.59	41.04	96.04	-55.96	0.021914	26.00
19 :	42.04	-1.08	-0.08	-0.08	0.022149	26.27

Вхідні дані до розрахунку балки на пружній основі  
за методом скінчених елементів (МСЕ)

Кількість скінчених елементів балки	CE	Y = 18
Довжина CE	O = 1.5	
Кількість завантажених вузлів	NUZ = 5	
Величина розподіленого навантаження	G = 5.45	
Ширина підмови балки	BP = 1.6	
Етигальна жорсткість балки	EI = 220400	
Коефіцієнт постелі	K = 1898	
Порядок розрахункової СААР	N = 38	

N вузла навантаження , величина навантаження

PN	PN(PN)
2	175
6	290
10	290
14	290
18	175

Результати розрахунку балки на пружній основі за МСЕ

I	P(i)	M(i)	QL(i)	QP(i)	X(i)	PU(i)
1	48.60	0.00	0.00	0.00	0.025604	30.37
2	48.08	48.35	64.33	-110.67	0.025333	30.05
3	47.61	-69.87	-47.07	-47.07	0.025083	29.75
4	48.09	-92.87	16.52	16.52	0.025337	30.06
5	49.86	-19.45	81.81	81.81	0.026269	31.16
6	51.65	153.89	149.77	-140.23	0.027213	32.28
7	52.37	-4.21	-70.39	-70.39	0.027594	32.73
8	52.79	-56.85	0.31	0.31	0.027816	33.00
9	53.75	-2.76	72.04	72.04	0.028320	33.59
10	54.36	159.87	144.95	-145.05	0.028641	33.98
11	53.75	-2.90	-72.14	-72.14	0.028320	33.59
12	52.79	-57.12	-0.40	-0.40	0.027816	33.00
13	52.37	-4.62	70.30	70.30	0.027594	32.73
14	51.65	153.34	140.14	-149.86	0.027213	32.28
15	49.86	-20.15	-81.90	-81.90	0.026269	31.16
16	48.09	-93.70	-16.62	-16.62	0.025337	30.06
17	47.61	-70.84	46.98	46.98	0.025083	29.75
18	48.08	47.24	110.57	-64.43	0.025333	30.05
19	48.60	-1.24	-0.09	-0.09	0.025604	30.37

CLS

y = 18  
nuz = 5  
bp = 1.6  
o = 1.5  
g = 4.56  
k = 1898  
ei = 220400  
n = 38

OPEN "varvak.dat" FOR OUTPUT AS #1

PRINT #1, "Вихідні дані до розрахунку балки на пружній основі"  
PRINT #1, "за методом скінчених елементів (МСЕ)"  
PRINT #1,  
PRINT #1, "Кількість скінчених елементів балки CE Y = "; y  
PRINT #1, "Довжина CE O = "; o  
PRINT #1, "Кількість завантажених вузлів NUZ = "; nuz  
PRINT #1, "Величина розподіленого навантаження G = "; g  
PRINT #1, "Ширина підшви балки BP = "; bp  
PRINT #1, "Еквівалентна жорсткість балки EI = "; ei  
PRINT #1, "Коефіцієнт постелі K = "; k  
PRINT #1, "Порядок розрахункової СЛАП N = "; n  
PRINT #1,

DIM ph(y + 1)

PRINT #1, "N вузла навантаження, величина навантаження"

PRINT #1,

PRINT #1, TAB(9); "PN"; TAB(20); "PH(PN)"

in1: INPUT "Введіть номер навантаженого вузла PN = "; pn

IF pn = 0 THEN GOTO in2

INPUT "Введіть величину навантаження PH(pn) = "; ph(pn)

PRINT #1, TAB(9); pn; TAB(21); ph(pn)

FOR i = 1 TO y + 1

PRINT "PH ("; i; ") = "; ph(i)

NEXT i

DO

LOOP UNTIL INKEY# <> ""

CLS : GOTO in1

in2: BEEP

PRINT #1,

DIM A(n, n), X(n)

DIM b1(4 \* y), gb(y), B(n)

gb(1) = ph(1) / o + ph(2) / (2 \* o) + g

FOR i = 2 TO y - 1

gb(i) = g + ph(i) / (2 \* o) + ph(i + 1) / (2 \* o)

NEXT i

gb(y) = ph(y) / (2 \* o) + ph(y + 1) / o + g

z = 1

FOR i = 1 TO y

b1(z) = gb(i) \* o / 2: b1(z + 1) = gb(i) \* o ^ 2 / 12

b1(z + 2) = b1(z): b1(z + 3) = -b1(z + 1)

z = z + 4

NEXT i

B(1) = b1(1): B(2) = b1(2)

```

z = 3: f = 0
FOR i = 3 TO n - 2
  B(i) = b1(z) + b1(z + 2)
  z = z + 1
  f = f + 1
  IF f < 2 THEN GOTO 2
  f = 0
  z = z + 2
2 NEXT i
  B(n - 1) = b1(4 * y - 1)
  B(n) = b1(4 * y)

20 A(1, 1) = 12 * ei / o ^ 3 + 13 * o * k / 35
30 A(1, 3) = -12 * ei / o ^ 3 + 9 * o * k / 70
40 A(1, 2) = 6 * ei / o ^ 2 - 11 * k * o ^ 2 / 210
50 A(1, 4) = 6 * ei / o ^ 2 + 13 * k * o ^ 2 / 420
60 A(2, 1) = 6 * ei / o ^ 2 - 11 * k * o ^ 2 / 210
70 A(2, 2) = 4 * ei / o + k * o ^ 3 / 105
80 A(2, 3) = -6 * ei / o ^ 2 - 13 * k * o ^ 2 / 420
90 A(2, 4) = 2 * ei / o - k * o ^ 3 / 140
100 A(3, 1) = -12 * ei / o ^ 3 + 9 * o * k / 70
110 A(3, 2) = -6 * ei / o ^ 2 - 13 * k * o ^ 2 / 420
120 A(3, 3) = 24 * ei / o ^ 3 + 26 * o * k / 35
130 A(3, 4) = 0: A(3, 5) = -12 * ei / o ^ 3 + 9 * o * k / 70
  A(3, 6) = 6 * ei / o ^ 2 + 13 * k * o ^ 2 / 420
140 A(4, 1) = 6 * ei / o ^ 2 + 13 * k * o ^ 2 / 420
  A(4, 2) = 2 * ei / o - k * o ^ 3 / 140: A(4, 3) = 0
150 A(4, 4) = 8 * ei / o + 2 * k * o ^ 3 / 105
  A(4, 5) = -6 * ei / o ^ 2 - 13 * k * o ^ 2 / 420
160 A(4, 6) = 2 * ei / o - k * o ^ 3 / 140

170 m = 3
180 FOR l = 5 TO n - 3 STEP 2
190 A(l, m) = A(3, 1)
  A(l, m + 1) = A(3, 2)
  A(l, m + 2) = A(3, 3)
  A(l, m + 3) = A(3, 4)
  A(l, m + 4) = A(3, 5)
  A(l, m + 5) = A(3, 6)
  A(l + 1, m) = A(4, 1)
  A(l + 1, m + 1) = A(4, 2)
  A(l + 1, m + 2) = A(4, 3)
  A(l + 1, m + 3) = A(4, 4)
  A(l + 1, m + 4) = A(4, 5)
  A(l + 1, m + 5) = A(4, 6)
  m = m + 2
NEXT l

200 A(n - 1, n - 3) = -12 * ei / o ^ 3 + 9 * k * o / 70
  A(n - 1, n - 2) = -6 * ei / o ^ 2 - 13 * k * o ^ 2 / 420
  A(n - 1, n - 1) = 12 * ei / o ^ 3 + 13 * k * o / 35
  A(n - 1, n) = -6 * ei / o ^ 2 + 11 * k * o ^ 2 / 210
  A(n, n - 3) = 6 * ei / o ^ 2 + 13 * k * o ^ 2 / 420
  A(n, n - 2) = 2 * ei / o - k * o ^ 3 / 140
  A(n, n - 1) = -6 * ei / o ^ 2 + 11 * k * o ^ 2 / 210
  A(n, n) = 4 * ei / o + k * o ^ 3 / 105

```

PRINT  
PRINT "  
PRINT

----- GAUSS ----- "

```
960 DIM M1(n), m2(n)
970 FOR i = 1 TO n
980 M1(i) = i: m2(i) = i: NEXT i
990 IR = 0: K1 = 1: K2 = 1
1000 REM M9
1010 IR = IR + 1: AM = 0
1020 FOR i = 1 TO n: IF M1(i) < 0 THEN GOTO 1090
1030 FOR j = 1 TO n
1040 IF m2(j) < 0 THEN GOTO 1070
1050 IF ABS(AM) >= ABS(A(i, j)) THEN GOTO 1070
1060 AM = A(i, j): I1 = i: J1 = j
1070 REM M40
1080 NEXT j
1090 REM M48
1100 NEXT i
1110 IF ABS(AM) < 9.999999E-39 THEN GOTO 1310
1120 M1(I1) = -K1: K1 = I1
1130 FOR i = 1 TO n
1140 A(I1, i) = A(I1, i) / AM: NEXT i
1150 B(I1) = B(I1) / AM: IF IR = n THEN GOTO 1240
1160 FOR i = 1 TO n: AM = A(i, J1)
1170 IF (M1(i) < 0) OR (ABS(AM) < 9.999999E-39) THEN GOTO 1220
1180 FOR j = 1 TO n
1190 IF m2(j) > 0 THEN A(i, j) = A(i, j) - A(I1, j) * AM
1200 NEXT j
1210 B(i) = B(i) - B(I1) * AM
1220 REM M45
1230 NEXT i
1240 REM M701
1250 m2(J1) = -K2: K2 = J1: IF IR < n THEN GOTO 1000
1260 REM M70
1270 FOR j = 1 TO n: X(K2) = B(K1): AM = X(K2)
1280 FOR i = 1 TO n: B(i) = B(i) - A(i, K2) * AM: NEXT i
1290 K1 = -M1(K1): K2 = -m2(K2): NEXT j
1300 GOTO 1390
1310 REM
1320 FOR i = 1 TO n
1330 IF (M1(i) > 0) AND (ABS(B(i)) > 9.999999E-39) THEN GOTO 1370
1340 NEXT i
1350 NP = 1: PRINT " Система имеет много решений "
1360 GOTO 1450
1370 REM M78
1380 NP = 2: PRINT " Система не имеет решений ": GOTO 1450
1390 REM M200
1400 NP = 0

PRINT " Система имеет единственное решение ": PRINT
1405 INPUT " Выводить на печать X (i) ( Yes / No ) "; prin$
PRINT
IF prin$ = "y" THEN PRINT : PRINT " Включите принтер ."
IF prin$ = "y" THEN : BEEP: PRINT : INPUT t: GOTO 1410

IF prin$ = "n" THEN GOTO 1410
PRINT
```



GOTO 1405

```
1410 s = 1
    FOR i = 1 TO n
    s = s + 1
    IF s = 23 THEN s = 1: INPUT t
    PRINT " X ( "; i; " ) = "; X(i)
    IF prin$ = "y" THEN LPRINT " X ( "; i; " ) = "; X(i)
    NEXT i
```

```
1450 DIM qbl(y + 1), qbp(y + 1), mb(y + 1), pu(y + 1)
    DIM p(y + 1), xl(y + 1)
    DIM m(y + 1)
    DIM ql(y + 1), qp(y + 1)
```

```
1460 l = 1: FOR i = 1 TO y + 1
    p(i) = X(1) * k
    l = l + 2
    NEXT i
```

```
    FOR i = 1 TO y + 1
    s = 0
```

```
    FOR j = 1 TO i - 1
    s = s + ph(j)
```

```
    NEXT j
    qbl(i) = -s - g * o * (i - 1)
    qbp(i) = qbl(i) - ph(i)
```

```
    NEXT i
    FOR i = 1 TO y + 1
    s = 0
    FOR j = 1 TO i - 1
    s = s + ph(j) * o * (i - j)
```

```
    NEXT j
    mb(i) = -s - (g * o ^ 2 * (i - 1) ^ 2) / 2)
    NEXT i
```

```
    FOR i = 2 TO y + 1
    ma = 0
```

```
    FOR j = 2 TO i - 1
    ma = ma + (i - j) * p(j)
```

```
    NEXT j
    m(i) = o^2 / 6 * ((3 * (i-1)-1) * p(1)+6 * ma+p(i))+mb(i)
    NEXT i
```

```
    ql(2) = o / 2 * (p(1) + p(2)) + qbl(2)
```

```
    qp(2) = ql(2) - qbl(2) + qbp(2)
```

```
    FOR i = 3 TO y + 1
    qa = 0
```

```
    FOR j = 2 TO i - 1
    qa = qa + p(j)
```

```
    NEXT j
    ql(i) = o / 2 * (p(i) + 2 * qa + p(i)) + qbl(i)
```

```
    qp(i) = ql(i) - qbl(i) + qbp(i)
```

```
    NEXT i
    FOR i = 1 TO y + 1
    pu(i) = p(i) / bp
```

```
    NEXT i
    FOR i = 1 TO y + 1
    xl(i) = p(i) / k
```

```
    NEXT i
```

```

999B REM
PRINT #1,
PRINT #1, " Результати розрахунку балки на пружній основі за MCE "
PRINT #1,
PRINT #1, "-----"
PRINT #1, TAB(2); "I "; TAB(9); "P(i)"; TAB(19); "M(i)"; TAB(29); "QL(i)";
PRINT #1, TAB(39); "QP(i)"; TAB(49); "X(i)"; TAB(62); "PU(i)"
PRINT #1, "-----"
FOR i = 1 TO y + 1
PRINT #1, TAB(1); i; TAB(5); ":";
PRINT #1, TAB(7); USING "###.##"; p(i); TAB(17); m(i); TAB(27); q1(i);
PRINT #1, TAB(37); USING "###.##"; qp(i);
PRINT #1, TAB(47); USING "###.#####"; x1(i);
PRINT #1, TAB(60); USING "###.##"; pu(i)
NEXT i
PRINT #1, "-----"
CLOSE
1670 END

```

### 3. Розрахунок системи перехресних балок на пружній основі за методом скінчених елементів /МСЕ/

#### 3.1. Компонівка розрахункової системи МСЕ для ростверка

Скінчений елемент приведений на рис. 29 урахує роботу пружної основи за границями самого скінченого елемента. Пружна основа за границями СЕ включається в роботу із-за деформації СЕ на основі урахування зсувних деформацій з використанням моделі Пастернака.

Цей СЕ можна використовувати як при розрахунках окремих балок так і при розрахунках системи перехресних балок /балочних ростверків/.

Потенціальна енергія деформації такого СЕ

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3, \quad /3.1/$$

де  $\Pi_2 + \Pi_3 = A$  - робота зовнішніх сил;

$\Pi_1$  - потенціальна енергія СЕ балки:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E J_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + G J_{\text{кр}} \left( \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx; \quad /3.2/$$

де  $E J_y$  - згинальна жорсткість СЕ в площині  $xOz$  ;

$G J_{\text{кр}}$  - крутильна жорсткість;  $J_{\text{кр}}$  - момент інерції при закручуванні;  $G$  - модуль пружності другого роду;  $w$  - переміщення в напрямку осі  $oz$  .

$\Pi_2$  - потенціал пружної основи в рамках балки:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy; \quad /3.3/$$

де  $C_1, C_2$  - коефіцієнти постелі.

$\Pi_3$  - потенціал зовнішнього навантаження:

$$\Pi_3 = \int_{\Omega} p w d\Omega; \quad /3.4/$$

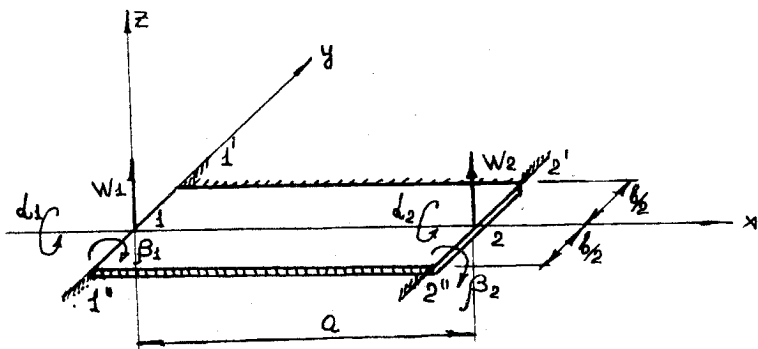


Рис. 29 Скінчений елемент для розрахунку балочних ростверків / систем перехресних балок /

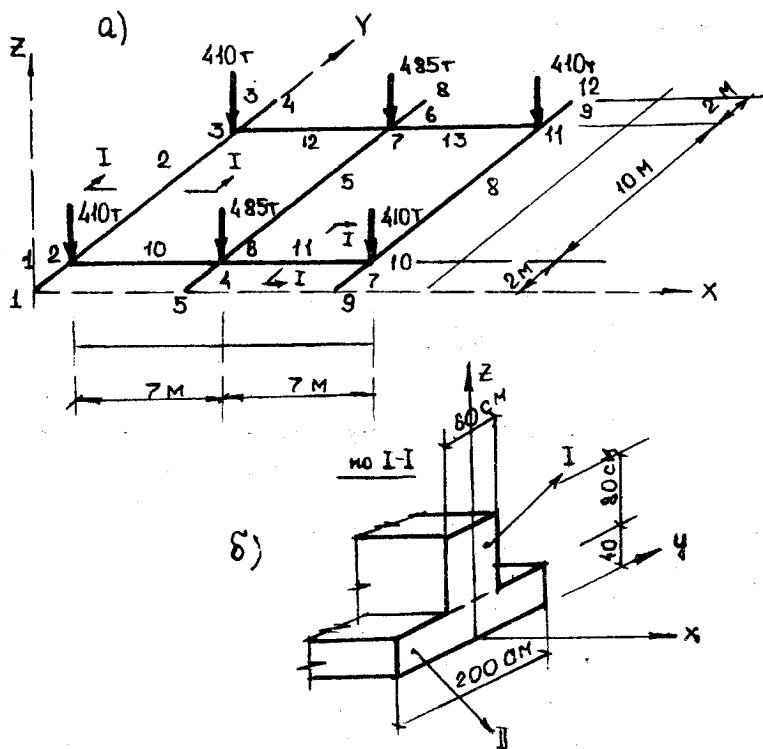


Рис. 30 а/ Розрахункова схема системи перехресних балок;  
б/ Розміри поперечного перетину балок.

де  $p$  - приведенне розподілене по площині  $\Omega$  СЕ зовнішнє навантаження.

Апроксимуючу функцію переміщень для наведеного на рис. / 29 / скінченного елемента можна записати у вигляді:

$$w(x, y) = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 + q_4 f_4 + q_5 f_5 + q_6 f_6 \quad / 3.5 /$$

або:

$$w(x, y) = w_1 \left( \frac{2x^2 - 3lx^2 + l^3}{l^3} \right) + d_1 y \frac{(l-x)}{l} + \beta_1 \left( \frac{-y^3 + 2ly^2 - l^2 y}{l^2} \right) +$$

$$+ w_2 \left( \frac{3lx^2 - 2x^3}{l^3} \right) + d_2 y \frac{x}{l} + \beta_2 \left( \frac{lx^2 - x^3}{l^2} \right); \quad / 3.6 /$$

де  $q_1, q_2 \dots q_6$  - ступені свободи, які мають конкретний фізичний зміст:  $q_1$  - лінійне переміщення вузла I;  $q_2$  - кут повертання в площині  $zOy$  /рис. 29 /;  $q_3$  - кут повертання в площині  $zOx$ .

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ d_1 \\ \beta_1 \\ w_2 \\ d_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad / 3.7 /$$

Як відомо /2.13/, розрахункові рівняння МСЕ для одного скінченного елемента мають вигляд:

$$[k] \cdot \{q\} = \{p\},$$

де  $[k]$  - матриця жорсткості СЕ;

$\{q\}$  - вектор ступеней свободи для наведеного на рис. 28, СЕ має 6 елементів / 3.7 /;  $\{p\}$  - колонка вілних коефіцієнтів, для наведеного СЕ це вектор з шести елементів:

$$\{p\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}^T.$$

Приведення розподіленого навантаження до вузлового використовується



$\frac{12EJ}{a^3} + \frac{13C_1 b a}{35} + \frac{6C_2 b}{5a}$	0	$-\frac{6EJ}{a^2} - \frac{11}{210}C_1 a b^2 - \frac{1}{10}C_2 b$	$-\frac{12EJ}{a^2} + \frac{9}{70}C_1 a b - \frac{6C_2 b}{5a}$	0	$\frac{6EJ}{a^2} + \frac{13}{420}C_1 a b - \frac{1}{10}C_2 b$
0	$\frac{6J_{np}}{a} + \frac{1}{36}C_1 a b^3 + C_2 \frac{b^3}{12a} + C_2 \frac{a \cdot b}{3}$	0	0	$-\frac{6J_{np}}{a} + C_1 \frac{a b^3}{72} - C_2 \frac{b^3}{12a} + C_2 \frac{a \cdot b}{6}$	0
$-\frac{6EJ}{a^2} - \frac{11}{210}C_1 a^2 b - \frac{1}{10}C_2 b$	0	$\frac{4EJ}{a} + \frac{1}{105}C_1 a^3 b + \frac{2}{15}C_2 a b$	$\frac{6EJ}{a^2} - \frac{13}{420}C_1 a^2 b + \frac{1}{10}C_2 b$	0	$\frac{2EJ}{a} - \frac{1}{140}C_1 a^3 b - \frac{1}{30}C_2 a b$
$-\frac{12EJ}{a^3} + \frac{9}{70}C_1 a b - \frac{6}{5}C_2 \frac{b}{a}$	0	$\frac{6EJ}{a^2} - \frac{13}{420}C_1 a b^2 + \frac{C_2 b}{10}$	$\frac{12EJ}{a^3} + \frac{13}{35}C_1 a b + \frac{6}{5}C_2 \frac{b}{a}$	0	$\frac{6EJ}{a^2} + \frac{11}{210}C_1 a^2 b + \frac{C_2 b}{10}$
0	$-\frac{6J_{np}}{a} + \frac{C_1 a b^3}{72} - \frac{C_2 b^3}{12a} + \frac{C_2 a b}{6}$	0	0	$\frac{6J_{np}}{a} + \frac{1}{36}C_1 a b^3 + \frac{C_2 b^3}{12a} + C_2 \frac{a b}{3}$	0
$-\frac{6EJ}{a^2} + \frac{13}{420}C_1 a^2 b - \frac{C_2 b}{10}$	0	$\frac{2EJ}{a} - \frac{C_1 a^3 b}{140} - \frac{1}{30}C_2 a b$	$\frac{6EJ}{a^2} + \frac{11}{210}C_1 a^2 b + \frac{C_2 b}{10}$	0	$\frac{4EJ}{a} + \frac{C_1 a^3 b}{105} + \frac{2}{15}C_2 a b$

Рис. 31. Матрица жорсткості  $[K]$  для балки /СЕ/ на рис. 29 на пружній основі

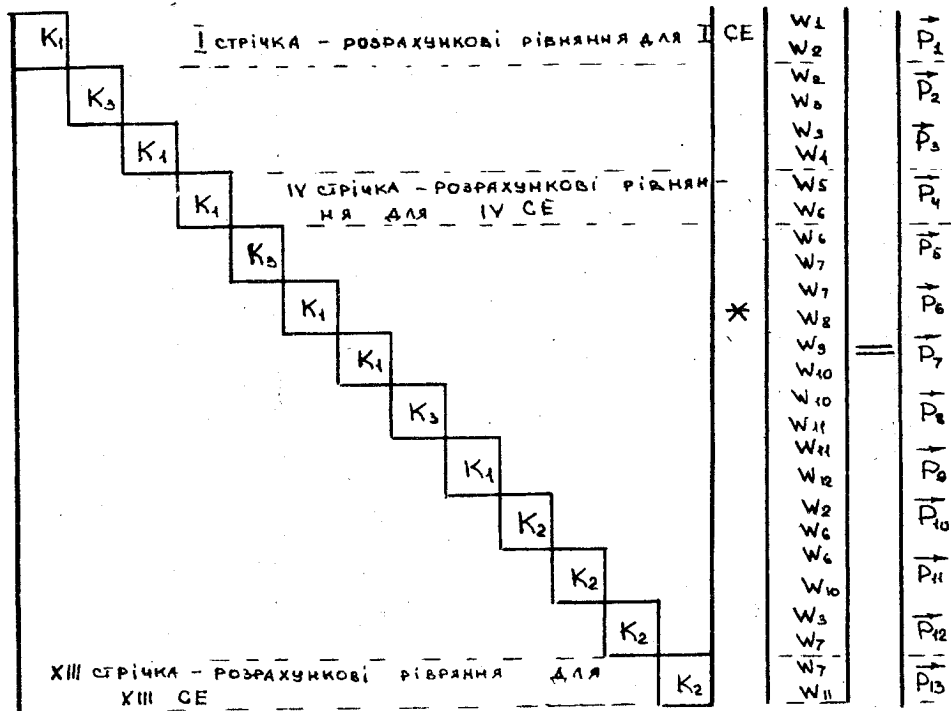
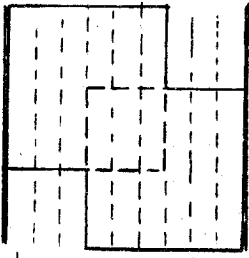


Рис. 32. Початковий варіант компоновки системи розрахункових рівнянь МСЕ.



a)

A1



$s_{w_2}$   $s_{d_2}$   $s_{\beta_2}$   $s_{w_6}$   $s_{d_6}$   $s_{\beta_6}$   $s_{w_{10}}$   $s_{d_{10}}$   $s_{\beta_{10}}$

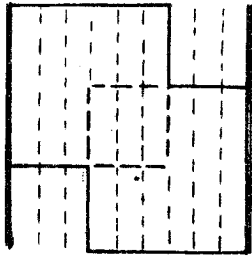
$w_2$   
 $d_2$   
 $\beta_2$   
 $w_6$   
 $d_6$   
 $\beta_6$   
 $w_{10}$   
 $d_{10}$   
 $\beta_{10}$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \rho_{10} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline -\rho_{10} a_2^2 / 12 \\ \hline \rho_{10} a_2 / 2 + \rho_{11} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{10} a_2^2 / 12 + \rho_{11} a_2^2 / 12 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{11} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{11} a_2^2 / 12 \\ \hline \end{array}$$

$\Sigma PA1$

b)

A2



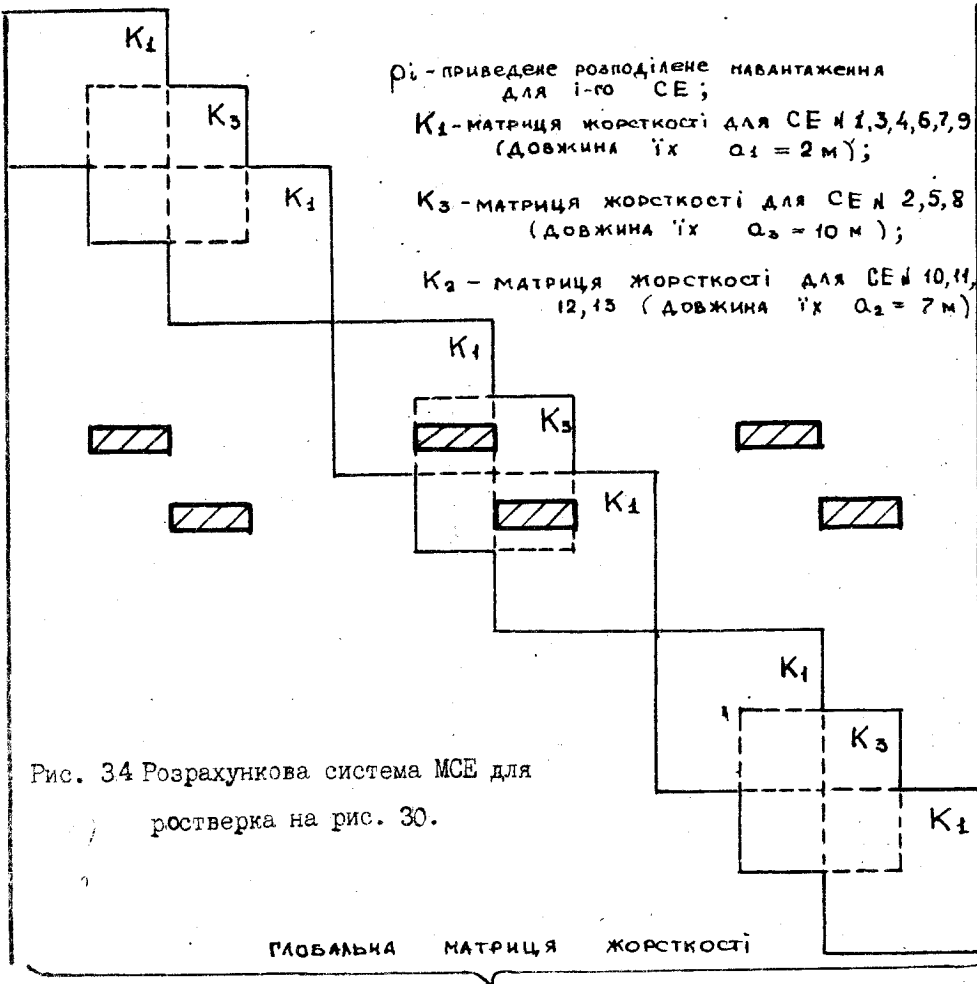
$s_{w_3}$   $s_{d_3}$   $s_{\beta_3}$   $s_{w_7}$   $s_{d_7}$   $s_{\beta_7}$   $s_{w_{11}}$   $s_{d_{11}}$   $s_{\beta_{11}}$

$w_3$   
 $d_3$   
 $\beta_3$   
 $w_7$   
 $d_7$   
 $\beta_7$   
 $w_{11}$   
 $d_{11}$   
 $\beta_{11}$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \rho_{12} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline -\rho_{12} a_2^2 / 12 \\ \hline \rho_{12} a_2 / 2 + \rho_{13} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{12} a_2^2 / 12 + \rho_{13} a_2^2 / 12 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{13} a_2 / 2 \\ \hline 0 \\ \hline \rho_{13} a_2^2 / 12 \\ \hline \end{array}$$

$\Sigma PA2$

Рис. 33. Елементи стиснення / накладення / матриці жорсткості та вільних коефіцієнтів з метою зниження порядку розрахункової СЛАР



\*

$W_1$	$\rho_1 a_1 / 2$	
$d_1$	0	
$\beta_1$	$-\rho_1 a_1^2 / 12$	
$W_2$	$\rho_1 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_2$	0	+
$\beta_2$	$\rho_1 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	-
$W_3$	$\rho_2 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_3$	0	+
$\beta_3$	$-\rho_2 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	-
$W_4$	$\rho_2 a_1 / 2$	
$d_4$	0	
$\beta_4$	$\rho_2 a_1^2 / 12$	
$W_5$	$\rho_1 a_1 / 2$	
$d_5$	0	
$\beta_5$	$-\rho_1 a_1^2 / 12$	
$W_6$	$\rho_1 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_6$	0	
$\beta_6$	$\rho_1 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	
$W_7$	$\rho_2 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_7$	0	
$\beta_7$	$-\rho_2 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	
$W_8$	$\rho_2 a_1 / 2$	
$d_8$	0	
$\beta_8$	$\rho_2 a_1^2 / 12$	
$W_9$	$\rho_1 a_1 / 2$	
$d_9$	0	
$\beta_9$	$-\rho_1 a_1^2 / 12$	
$W_{10}$	$\rho_1 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_{10}$	0	+
$\beta_{10}$	$\rho_1 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	-
$W_{11}$	$\rho_2 a_1 / 2 + \rho_2 a_2 / 2$	
$d_{11}$	0	+
$\beta_{11}$	$-\rho_2 a_1^2 / 12 + \rho_2 a_2^2 / 12$	-
$W_{12}$	$\rho_2 a_1 / 2$	
$d_{12}$	0	
$\beta_{12}$	$\rho_2 a_1^2 / 12$	

Рис. 34 Розрахункова система МСЕ для роторка на рис. 30.

підходячої нумерації вузлів можна контролювати розміщення коефіцієнтів в глобальні матриці жорсткості [ 2 ] .

При відповідній нумерації вузлів отримуємо матрицю стрічкового типу замість повної матриці. Стрічкова матриця характерна тим, що всі її ненульові коефіцієнти розміщуються поблизу головної діагоналі, а всі коефіцієнти за границями деякої полоси, окресленої лініями паралельними головній діагоналі, дорівнюють нулю. Нульові коефіцієнти можуть зустрічатися і в середині полоси. Схематично це видно за формулою / 3.10 / .

Ширина полоси  $B$  обчислюється за формулою:

$$B = (R + 1) \cdot Q \quad /3.11/$$

де  $R$  - найбільша по елементах величина різниці між номерами вузлів в окремому елементі;  $Q$  - число невідомих /число степеней свободи/ в кожному вузлі. Мінімізація величини  $B$  пов'язана з мінімізацією  $R$  . Цього можна досягти послідовною нумерацією вузлів при переміщенні в напрямку найменшого розміру тіла.

Результативна система буде складена ідеально, коли вона:

1. симетрична, 2. матриця  $[k]$  достатньо визначена.

Симетрія дозволяє вводити в ЕОМ лише половину матриці жорсткості. Існування симетрії в матриці стрічкового типу дозволяє значно скоротити об'єм пам'яті для збереження глобальної матриці. При вільному програмуванні проходить перетворення матриці  $[k]$  , наведеної під номером /3.10/ в прямокутній масив, ширина якого співпадає з шириною полоси матриці, а довжина дорівнює числу рівнянь.

Додатня визначеність матриці означає, що коефіцієнти, які знаходяться по головній діагоналі, завжди додатні, та набагато більші по величині за будь-який інший коефіцієнт відповідної стрічки чи стовпця.

Одним з найбільш ефективних методів обчислення системи рівнянь

при використанні МСЕ - відомий варіант метода виключення Гаусса.

Матриця приводиться до трикутного вигляду після чого рішення знаходяться зворотною прогонкою.

### 3.2. Приклад чисельного обчислення системи перехресних балок на пружній основі за МСЕ

#### 3.2.1. Постановка задачі та формування глобальної матриці жорсткості ростверку

На рис.30 наведено розрахункову схему системи перехресних балок, нумерацію вузлів, скінчених елементів, та розміри поперечного перетину балок. Ростверк виготовлено з важкого бетону марки В-25. Модуль пружності бетону  $E_b = 30 \times 10^3$  МПа. Згідно розмірів поперечного перетину на рис.30б момент інерції

$$J_y = 60 \cdot 80 \cdot 80^2 + 200 \cdot 40 \cdot 20^2 = 0.3392 \text{ м}^4.$$

$$\text{Згинальна жорсткість } E J_y = 30 \cdot 10^3 \text{ МПа} \cdot 0.3392 \text{ м}^4 = 10,176 \cdot 10^5 \text{ тм}^2.$$

Для визначення крутного моменту  $M_{кр}$ , тобто момента, який діє в площині поперечного перетину стержней /балок/, потрібно обчислити крутильну жорсткість  $G J_k$ , де  $J_k$  - момент інерції опору при закручуванні,  $G$  - модуль пружності при зсуві /він же модуль пружності II роду/

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 100 \text{ т/м}^2}{2(1+0,167)} = 12,8545 \cdot 10^5 \text{ т/м}^2. \quad /3.12/$$

Коли перетин балки може бути розбитий на частини з прямокутних елементів, згідно [9]:  $J_k = \sum_{i=1}^n y_{ki}^2$ .

$$\text{Для перетину на рис.30б} \quad J_k = J_{k1} + J_{k2} \quad /3.13/$$

Для прямокутного перетину згідно [9]:

$$y_k = \beta \cdot h \cdot b^3; \quad /3.14/$$

де  $\beta$  визначається за табл.14 [9] у відношенні від  $h/b$ .

За  $h$  приймається довша сторона прямокутного елемента перетину [9].

Для першої частини перетину /див.рис.30б/  $h_1 = 80 \text{ см}$ ,  $b_1 = 60 \text{ см}$ ;  
 $\frac{h_1}{b_1} = \frac{80}{60} = 1,33$ . По т.І4 [9] згідно лінійного інтерполювання

$\beta_1 = 0,17$ . Для другої частини перетину  $h_2 = 200 \text{ см}$ ,  $b_2 = 40 \text{ см}$ ;

$$h_2/b_2 = 200/40 = 5; \beta_2 = 0,29.$$

$$J_K = 0,17 \cdot 80 \cdot 60^3 + 0,29 \cdot 200 \cdot 40^3 = 0,066496 \text{ м}^4.$$

$$G J_K = 0,066496 \text{ м}^4 \cdot 12,8545 \cdot 10^5 \text{ т/м}^2 = 0,8547 \cdot 10^5 \text{ тм}^2.$$

Жорсткість підвалини відповідно на зтиснення та зсув:

$$C_1 = 4200 \text{ т/м}^2, \quad C_2 = 0,1 \text{ т/м}^2.$$

Для раціонального формування загальної матриці жорсткості [K] нумерацію СЕ зручно проводити повздовж довгих в плані балок по мірі віддалення їх від вибраних осей. Потім нумерувати поперечні їм балки /рис.30а/. Нумерація вузлів проводиться аналогічно.

Для наведеного на рис.30 прикладу маємо ІЗ СЕ. Компонуємо розрахункову систему. Глобальна матриця жорсткості буде складатись з суми матриць жорсткості кожного СЕ /див.рис.32/.

Для збереження наглядності в колонці невідомих залишені лише лінійні переміщення СЕ.

Оскільки переміщення сусідніх СЕ мають однакову назву маємо можливість зменшити число невідомих в розрахунковій СЛАР, зробивши:

І/ накладку матриць жорсткості для СЕ № 1,2,3; 4,5,6; 7,8,9; 10,11; 12,13., /див.рис.33/;

ІІ/ просумувати коефіцієнти перед невідомими /рис.33а, 33б/ та додати їх у відповідні стрічки /17 та 20/ симетрично /див.рис.33/. Такі ж дії виконуються з вільними коефіцієнтами /див.рис.34/.

3.2.2. Формування колонки вільних коефіцієнтів в розрахунковій системі лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/ для ростверку за МСЕ.

Для кожного СЕ ростверку колонка вільних коефіцієнтів обчислюється по /3.9/.

Попередньо, зосереджене у вузлах ростверка навантаження /рис.30/ переводиться у розподілене навантаження по кожному скінченному елементу.

Наприклад, для І СЕ /його довжина 2м/. У вузлі 2, який примикає до І СЕ прикладена  $P_2 = 410$  т. До вузла 2 примикає ще два СЕ /№2 та №10/. Силу 410 розподіляєм на ці 3 СЕ.

Щоб отримати  $\rho_1 \frac{1}{3}$  від 410 т ділимо на довжину І СЕ /на 2 м/.

$$\rho_1 = \frac{410 \text{ т}}{3 \cdot 2 \text{ м}} = 68,33 \text{ т/м} \quad . \text{ Аналогічні викладки проводяться для}$$

кожного СЕ

$$\rho_1 = \frac{410 \text{ т} \cdot 2}{3 \cdot 10 \text{ м}} = 27,33 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_2 = 410 \text{ т} / 3 \cdot 2 \text{ м} = 68,33 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_4 = 485 \text{ т} / 4 \cdot 2 \text{ м} = 60,625 \frac{\text{т}}{\text{м}};$$

$$\rho_5 = \frac{485 \text{ т} \cdot 2}{4 \cdot 10 \text{ м}} = 24,25 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_6 = \frac{485 \text{ т}}{4 \cdot 2 \text{ м}} = 60,625 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_7 = \rho_1 = 68,33 \frac{\text{т}}{\text{м}};$$

$$\rho_8 = \rho_2 = 27,33 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_9 = \rho_3 = 68,33 \frac{\text{т}}{\text{м}}; \quad \rho_{10} = \rho_{11} = \rho_{12} = \rho_{13} = \left( \frac{410}{3} + \frac{485}{4} \right) \cdot \frac{1}{7 \text{ м}} = 36,845 \frac{\text{т}}{\text{м}}.$$

Для І СЕ колонка вільних коефіцієнтів в  $\bar{P}_1$ :

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 68.33 \\ 0 \\ -22.78 \\ 68.33 \\ 22.78 \end{bmatrix}$$

Для решти СЕ початкове формування колонки вільних коефіцієнтів представлено на рис.33.

### 3.3. Програма обчислення ростверку за МСЕ та структура вхідних даних

В результаті дій п.3.2.1, 3.2.2 отримуємо кінцеву СЛАР для розрахунку ростверку по МСЕ /див.рис.34/.

Описана вище послідовність формування розрахункової СЛАР запрограмована на алгоритмічній мові "Бейсик" та наведена нижче.

Програма дозволяє визначити внутрішні зусилля та переміщення системи перехресних балок від дії статичного навантаження. Програма звертається до підпрограми "Gauss" для обчислення коренів СЛАР. Число невідомих розрахункової СЛАР дорівнює утроєному числу вузлів ростверка та являють собою лінійні та кутові переміщення вузлів. В програмі використані наступні ідентифікатори:

$K$  /6,6/ - проміжна матриця жорсткості СЕ;

$K1$  /6,6/,  $K2$  /6,6/,  $K3$  /6,6/ - матриці жорсткості в розрахункових рівняннях для СЕ з довжиною відповідно:  $a_1=2m$ ,  $a_2=7m$ ,  $a_3=10m$ .

- порядок розрахункової СЛАР /число невідомих кутових та лінійних переміщень/;

$A1$  /9,9/,  $A2$  /9,9/ - допоміжні матриці жорсткості для поперечних матриць /рис.33/;

$A$  / $N,N$ / - глобальна матриця жорсткості розрахункової СЛАР МСЕ;

$B$  / $N$ / - вектор вільних коефіцієнтів в розрахунковій СЛАР /рис.34/;

$X$  / $N$ / - вектор невідомих кутових та лінійних переміщень;

$L$  - довжина СЕ;

$C$  - ширина СЕ;

$EI$  - згинальна жорсткість;

$C_1, C_2$  - коефіцієнти жорсткості підвалини відповідно на стиснення та зсув;

$GI$  - крутильна жорсткість;

$NV$  - число вузлів системи перехресних балок;

$G = \frac{E}{2}(1+\mu)$  - модуль пружності при зсуві /модуль пружності II роду/.

Для співставлення та виявлення достовірності розрахунку системи перехресних балок по запрограмованій програмі методом скінчених елементів /МСЕ/ цей розверк /схема на рис.30/ було розраховано за допомогою обчислювального комплексу /СК/ "Ліра" на ЕСМ ЕС 1045. Результати співставлення наведено на рис.35/в рамці - розрахунок по СК "Ліра".

### 3.3.I. Лістинг програми розрахунку ростверка на пружній основі за МСЕ

Вихідні дані до розрахунку системи перехресних балок на пружній основі за методом скінчених елементів (МСЕ).

Кількість скінчених елементів SE	Y =13
Число вузлів ростверка	NU =12
Порядок розрахункової СЛАР	N =36
Модуль пружності 1 роду матеріалу SE	E=3300000
Коефіцієнт жорсткості підвалини на стиснення	C1=4200
Коефіцієнт жорсткості підвалини на зсув	C2=0.1
Поперечна ширина скінченого елемента	O=2

Результати обчислення розрахункової СЛАР ростверка:

X ( 1 ) = 6.01672E-03  
X ( 2 ) = 0  
X ( 3 ) = 4.838535E-04  
X ( 4 ) = 5.06057E-03  
X ( 5 ) = 0  
X ( 6 ) = 4.60249E-04  
X ( 7 ) = 5.06058E-03  
X ( 8 ) = 0  
X ( 9 ) = -4.602532E-04  
X ( 10 ) = 6.016739E-03  
X ( 11 ) = 0  
X ( 12 ) = -4.838579E-04  
X ( 13 ) = 5.338426E-03  
X ( 14 ) = -3.372534E-02  
X ( 15 ) = 4.292974E-04  
X ( 16 ) = 4.490088E-03  
X ( 17 ) = -3.577498E-02  
X ( 18 ) = 4.083532E-04  
X ( 19 ) = 4.490089E-03  
X ( 20 ) = 3.343225E-02  
X ( 21 ) = -4.083551E-04  
X ( 22 ) = 5.338431E-03  
X ( 23 ) = 3.151684E-02  
X ( 24 ) = -4.292989E-04  
X ( 25 ) = 6.01672E-03  
X ( 26 ) = 0  
X ( 27 ) = 4.838539E-04  
X ( 28 ) = 5.06057E-03  
X ( 29 ) = 0  
X ( 30 ) = 4.60249E-04  
X ( 31 ) = 5.06058E-03  
X ( 32 ) = 0  
X ( 33 ) = -4.602532E-04  
X ( 34 ) = 6.016739E-03  
X ( 35 ) = 0  
X ( 36 ) = -4.838579E-04



```
10 o = 2
   n = 36
```

```
c1 = 4200
c2 = .1
e = 3300000
```

```
DIM k(6, 6), K1(6, 6), K2(6, 6), k3(6, 6), a(36, 36), a1(9, 9), a2(9, 9), B(36)
```

```
DIM x(40)
```

```
g = e / ((1 + .167) * 2): gi = .066496 * g: ei = e * .3392
```

```
FOR m = 1 TO 3
```

```
IF m = 1 THEN l = 2
```

```
IF m = 2 THEN l = 7
```

```
IF m = 3 THEN l = 10
```

```
k(1, 1) = 12 * ei / 1 ^ 3 + 13 * c1 * o * 1 / 35 + 6 * c2 * o / (5 * 1)
```

```
k(2, 2) = gi / 1 + c1 * 1 * o ^ 3 / 36 + c2 * o ^ 3 / (12 * 1) + c2 * 1 * o / 3
```

```
k(3, 3) = 4 * ei / 1 + c1 * 1 ^ 3 * o / 105 + 2 * c2 * 1 * o / 15
```

```
k(4, 4) = k(1, 1): k(5, 5) = k(2, 2): k(6, 6) = k(3, 3)
```

```
k(1, 2) = 0: k(2, 1) = 0: k(2, 3) = 0: k(3, 2) = 0: k(2, 4) = 0: k(4, 2) = 0
```

```
k(2, 6) = 0: k(6, 2) = 0: k(3, 5) = 0: k(5, 3) = 0: k(4, 5) = 0: k(5, 4) = 0
```

```
k(5, 6) = 0: k(6, 5) = 0: k(1, 5) = 0: k(5, 1) = 0
```

```
k(1, 3) = -6 * ei / (1 ^ 2) - 11 * c1 * (1 ^ 2) * o / 210 - c2 * o / 10
```

```
k(1, 4) = -12 * ei / (1 ^ 3) + 9 * c1 * 1 * o / 70 - 6 * c2 * o / (5 * 1)
```

```
k(1, 6) = -6 * ei / (1 ^ 2) + 13 * c1 * (1 ^ 2) * o / 420 - c2 * o / 10
```

```
k(2, 5) = -gi / 1 + c1 * 1 * (o ^ 3) / 72 - c2 * (o ^ 3) / (12 * 1) + c2 * 1 * o / 6
```

```
k(3, 4) = 6 * ei / (1 ^ 2) - 13 * c1 * (1 ^ 2) * o / 420 + c2 * o / 10
```

```
k(3, 6) = 2 * ei / 1 - c1 * (1 ^ 3) * o / 140 - c2 * 1 * o / 30
```

```
k(4, 6) = 6 * ei / (1 ^ 2) + 11 * c1 * (1 ^ 2) * o / 210 + c2 * o / 10
```

```
k(3, 1) = k(1, 3): k(4, 1) = k(1, 4): k(4, 3) = k(3, 4): k(5, 2) = k(2, 5)
```

```
k(6, 1) = k(1, 6): k(6, 3) = k(3, 6): k(6, 4) = k(4, 6)
```

```
IF m = 1 THEN GOSUB 20
```

```
IF m = 2 THEN GOSUB 30
```

```
IF m = 3 THEN GOSUB 40
```

```
NEXT m
```

```
GOTO 50
```

```
20 FOR i = 1 TO 6
```

```
FOR j = 1 TO 6
```

```
K1(i, j) = k(i, j)
```

```
NEXT j
```

```
NEXT i
```

```
FOR i = 1 TO 6
```

```
FOR j = 1 TO 6
```

```
PRINT K1(i, j):
```

```
NEXT j
```

```
PRINT
```

```
NEXT i
```

```
INPUT u
```

```
RETURN
```

```
30 FOR i = 1 TO 6
```

```
FOR j = 1 TO 6
```

```
K2(i, j) = k(i, j)
```

```
NEXT j
```

```
NEXT i
```

```
FOR i = 1 TO 6
```

```
FOR j = 1 TO 6
```

```
PRINT K2(i, j):
```

```
NEXT j
```

```

PRINT
NEXT i
INPUT w
RETURN

40 FOR i = 1 TO 6
  FOR j = 1 TO 6
    k3(i, j) = k(i, j)
  NEXT j

  NEXT i
  FOR i = 1 TO 6
    FOR j = 1 TO 6
      PRINT k3(i, j):
    NEXT j
  PRINT
  NEXT i
  INPUT w
  RETURN

50 REM формування матриці жорсткості для півздовжніх балок
  FOR i = 1 TO 6
    FOR j = 1 TO 6
      a(i, j) = K1(i, j)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 4 TO 9
    FOR j = 4 TO 9
      a(i, j) = a(i, j) + k3(i - 3, j - 3)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 7 TO 12
    FOR j = 7 TO 12
      a(i, j) = a(i, j) + K1(i - 6, j - 6)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 13 TO 18
    FOR j = 13 TO 18
      a(i, j) = K1(i - 12, j - 12)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 16 TO 21
    FOR j = 16 TO 21
      a(i, j) = a(i, j) + k3(i - 15, j - 15)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 19 TO 24
    FOR j = 19 TO 24
      a(i, j) = a(i, j) + K1(i - 18, j - 18)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = 25 TO 30
    FOR j = 25 TO 30
      a(i, j) = K1(i - 24, j - 24)
    NEXT j: NEXT i
  FOR i = 28 TO 33
    FOR j = 28 TO 33
      a(i, j) = a(i, j) + k3(i - 27, j - 27)
    NEXT j
  NEXT i

```

```

FOR i = 31 TO 36
FOR j = 31 TO 36
a(i, j) = a(i, j) + K1(i - 30, j - 30)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 1 TO 12
FOR j = 1 TO 12
PRINT a(i, j):
NEXT j
PRINT
NEXT i
INPUT u
FOR i = 13 TO 24
FOR j = 13 TO 24
PRINT a(i, j):
NEXT j
PRINT
NEXT i
INPUT u
FOR i = 25 TO 36
FOR j = 25 TO 36
PRINT a(i, j):
NEXT j
PRINT
NEXT i
INPUT u
REM    формування матриці жорсткості для поперечних балок
FOR i = 1 TO 6
FOR j = 1 TO 6
a1(i, j) = K2(i, j)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 4 TO 9
FOR j = 4 TO 9
a1(i, j) = a1(i, j) + K2(i - 3, j - 3)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 1 TO 9
FOR j = 1 TO 9
PRINT a1(i, j):
NEXT j
PRINT
NEXT i
INPUT u
FOR i = 1 TO 6
FOR j = 1 TO 6
a2(i, j) = K2(i, j)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 4 TO 9
FOR j = 4 TO 9
a2(i, j) = a2(i, j) + K2(i - 3, j - 3)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 1 TO 9
FOR j = 1 TO 9
PRINT a2(i, j):
NEXT j
PRINT

```

```

NEXT i
FOR j = 1 TO 9
FOR i = 1 TO 9
IF j = 1 THEN sw2 = sw2 + a1(i, j): sw3 = sw3 + a2(i, j)
IF j = 2 THEN sa2 = sa2 + a1(i, j): sa3 = sa3 + a2(i, j)
IF j = 3 THEN sb2 = sb2 + a1(i, j): sb3 = sb3 + a2(i, j)
IF j = 4 THEN sw6 = sw6 + a1(i, j): sw7 = sw7 + a2(i, j)
IF j = 5 THEN sa6 = sa6 + a1(i, j): sa7 = sa7 + a2(i, j)
IF j = 6 THEN sb6 = sb6 + a1(i, j): sb7 = sb7 + a2(i, j)
IF j = 7 THEN sw10 = sw10 + a1(i, j): sw11 = sw11 + a2(i, j)
IF j = 8 THEN sa10 = sa10 + a1(i, j): sa11 = sa11 + a2(i, j)
IF j = 9 THEN sb10 = sb10 + a1(i, j): sb11 = sb11 + a2(i, j)

```

```

NEXT i
NEXT j
PRINT sw2, sa2, sb2, sw6, sa6, sb6, sw10, sa10, sb10
PRINT sw3, sa3, sb3, sw7, sa7, sb7, sw11, sa11, sb11
INPUT u

```

REM кінцeve формування матриці жорсткості

```

a(17, 4) = a(17, 4) + sw2
a(17, 5) = a(17, 5) + sa2
a(17, 6) = a(17, 6) + sb2
a(20, 7) = a(20, 7) + sw3
a(20, 8) = a(20, 8) + sa3
a(20, 9) = a(20, 9) + sb3
a(17, 28) = a(17, 28) + sw10
a(17, 29) = a(17, 29) + sa10
a(17, 30) = a(17, 30) + sb10
a(20, 31) = a(20, 31) + sw11
a(20, 32) = a(20, 32) + sa11
a(20, 33) = a(20, 33) + sb11
a(17, 16) = a(17, 16) + sw6
a(17, 17) = a(17, 17) + sa6
a(17, 18) = a(17, 18) + sb6
a(20, 19) = a(20, 19) + sw7
a(20, 20) = a(20, 20) + sa7
a(20, 21) = a(20, 21) + sb7

```

REM формування колонки вільних коефіцієнтів

```

DATA 68.33,0,-22.78,204.98,0,-204.98,204.98,0,204.98
DATA 68.33,0,22.78,60.625,0,-20.21,181.875,515.84,-181.875
DATA 181.875,515.84,181.875
DATA 60.625,0,20.21,68.33,0,-22.78
DATA 204.98,0,-204.98,204.98,0,204.98,68.33,0,22.78

```

```
FOR i = 1 TO 36
```

```
READ B(i)
```

```
NEXT i
```

```
PRINT
```

```
PRINT "
```

```
PRINT
```

----- GAUSS ----- "

```

960 DIM M1(n), m2(n)
970 FOR i = 1 TO n
980 M1(i) = i: m2(i) = i: NEXT i
990 IR = 0: K1 = 1: K2 = 1
1000 REM M9
1010 IR = IR + 1: AM = 0
1020 FOR i = 1 TO n: IF M1(i) < 0 THEN GOTO 1090
1030 FOR j = 1 TO n
1040 IF m2(j) < 0 THEN GOTO 1070

```

```

1050 IF ABS(AM) >= ABS(a(i, j)) THEN GOTO 1070
1060 AM = a(i, j): I1 = i: J1 = j
1070 REM M40
1080 NEXT j
1090 REM M48
1100 NEXT i
1110 IF ABS(AM) < 9.999999E-39 THEN GOTO 1310
1120 M1(I1) = -K1: K1 = I1
1130 FOR i = 1 TO n
1140 a(I1, i) = a(I1, i) / AM: NEXT i
1150 B(I1) = B(I1) / AM: IF IR = n THEN GOTO 1240
1160 FOR i = 1 TO n: AM = a(i, J1)
1170 IF (M1(i) < 0) OR (ABS(AM) < 9.999999E-39) THEN GOTO 1220
1180 FOR j = 1 TO n
1190 IF m2(j) > 0 THEN a(i, j) = a(i, j) - a(I1, j) * AM
1200 NEXT j
1210 B(i) = B(i) - B(I1) * AM
1220 REM M45
1230 NEXT i
1240 REM M701
1250 m2(J1) = -K2: K2 = J1: IF IR < n THEN GOTO 1000
1260 REM M70
1270 FOR j = 1 TO n: x(K2) = B(K1): AM = x(K2)
1280 FOR i = 1 TO n: B(i) = B(i) - a(i, K2) * AM: NEXT i
1290 K1 = -M1(K1): K2 = -m2(K2): NEXT j
1300 GOTO 1390
1310 REM
1320 FOR i = 1 TO n
1330 IF (M1(i) > 0) AND (ABS(B(i)) > 9.999999E-39) THEN GOTO 1370
1340 NEXT i
1350 NP = 1: PRINT " Система имеет много решений "
1360 GOTO 1450
1370 REM M78
1380 NP = 2: PRINT " Система не имеет решений ": GOTO 1450
1390 REM M200
1400 NP = 0

PRINT " Система имеет единственное решение ": PRINT
1405 INPUT " Выводить на печать X (i) (Yes / No) ": prin$
PRINT
IF prin$ = "y" THEN PRINT : PRINT " Включите принтер ."
IF prin$ = "y" THEN : BEEP: PRINT : INPUT t: GOTO 1410

IF prin$ = "n" THEN GOTO 1410
PRINT
GOTO 1405

1410 Open "sis1.dat" for output as #1
s = 1
FOR i = 1 TO n
s = s + 1
IF s = 23 THEN s = 1: INPUT t
PRINT " X ( "; i; " ) = "; x(i)
PRINT #1, " X ( "; i; " ) = "; x(i)
IF prin$ = "y" THEN LPRINT " X ( "; i; " ) = "; x(i)
NEXT i
Close #1

1450 STOP

```

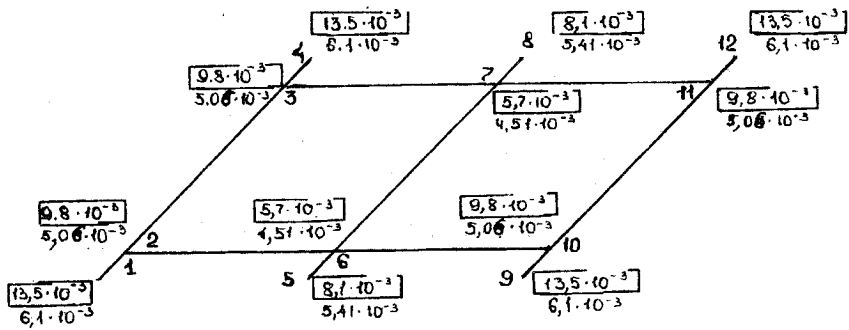


Рис. 35. Результати співставлення переміщень вузлів ростверка, розраховані по запропонованій програмі та по ОК"Ліра"

## Литература

1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс, изд. 3-е, испр. - М. Стройиздат, 1991, 767 стр.
2. Варвак П.М. Метод конечных элементов - К: Вища школа, 1981, 176с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гос. издат технико-теоретической литературы, 1956, 420 стр.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966,
5. Инструкция по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий. М.: Госстройиздат, 1975
6. Инструкция по проектированию конструкций панельных жилых зданий. ВСН 32-77-М.: Стройиздат, 1978
7. Кальницкий А.А., Пешковский Л.И. Расчет и конструирование железобетонных фундаментов гражданских и промышленных зданий и сооружений - М.: Высш. школа, 1974
8. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругих основаниях. - К.5 Будівельник, 1967, 184 стр.
9. Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление Материалов. - К: Вища школа, 1973, 671 стр.
10. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. -Л.: Судостроение, 1977, 280 стр.
11. Протусевич Л.А. Вариационные методы в строительной механике. - М.: Гостехиздат, 1948, стр.
12. Руководство по конструированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона / без предварительного напряжения /. М.: Стройиздат, 1978
13. Руководство по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона / без предварительного напряжения/. - М.: Стройиздат, 1977.
14. Руководство по проектированию свайных фундаментов НИИОСП Госстроя СССР - М.: Стройиздат, 1980
15. Руководство по проектированию статически неопределимых железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат, 1975.

16. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.- М.: Мир, 1979, 392 стр.
17. СНиП 2.02.01-85. Основания зданий и сооружений.  
- М.: Стройиздат, 1985
18. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции.  
- М.: Стройиздат, 1985
19. Моргун А.И., Ваганов И.И., Маевская И.В., Моргун А.С. Расчет оснований и фундаментов на ЭВМ. К.:УМК ВО, 1989, 120 стр.



Міністерство освіти України  
Вінницький державний технічний університет

Навчальне видання

Анатолій Іванович Моргун, Алла Серафимівна Моргун

Механіка ґрунтів, підвалини та фундаменти  
/Розрахунок конструкцій на пружній основі/

Навчальний посібник

Вінниця ВДТУ 1997

Редактор Т.А.Ягельська

Тир.50 прим.

---

ВДТУ, 286021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95

---