КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Н. П. ТМЄНОВА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ МНОЖИН І ВІДНОШЕНЬ
КОМБІНАТОРИКА
ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Н. П. ТМЄНОВА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ МНОЖИН І ВІДНОШЕНЬ
КОМБІНАТОРИКА
ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Навчальний посібник

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2018

УДК 510.3+510.6+519.1(075.8)
Т49

Рецензенти:
д-р екон. наук, канд. техн. наук, проф. В. Л. Плескач,
канд. фіз.-мат. наук Є. А. Кочубінська,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Н. М. Гулаєва

Рекомендовано вченою радою факультету інформаційних технологій (протокол № 19 від 23 січня 2017 року)

Ухвалено науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 4-17/18 н. р. від 31 травня 2018 року)

Тмєнова Н. П.
Т49 Дискретна математика : теорія множин і відношень, комбінаторика, числення висловлювань : навч. посіб. / Н. П. Тмєнова. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2018. – 103 с.

Викладено матеріал, що традиційно вивчається у дисципліні "Дискретна математика": теорія множин і відношень, комбінаторика, числення висловлювань. Описано операції над множинами, закони алгебри множин, представлено відношення, відображення та їхні властивості, розглянуто поняття потужності множин. Подано основні комбінаторні конфігурації – розміщення, сполучення та перестановки з повтореннями й без них; докладно описано рекурентні співвідношення. Розглянуто закони логіки висловлювань, нормальні форми логіки висловлювань, логічне виведення та методи доведення тавтологій у логіці висловлювань. Посібник містить достатню кількість прикладів, що допомагають опанувати матеріал, контрольні запитання та задачі.

Для студентів, які вивчають дисципліну "Дискретна математика".

УДК 510.3+510.6+519.1(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Дискретна математика зародилася в давні часи. Її характерною особливістю є дискретність, тобто антипод неперервності. Можна сказати, що дискретна математика – це розділ математики, який вивчає скінченні множини та різні структури на них.

У застосуваннях дискретної математики особливе місце займають задачі, пов'язані з розробкою технічних пристроїв із дискретним принципом дії, з упорядкуванням тих чи інших об'єктів або дій, побудовою складних конструкцій шляхом оптимального поєднання окремих елементів. Раціональна організація комп'ютерних алгоритмів в інформатиці, раціональне планування виробництва, оптимізація портфеля цінних паперів – усе це проблеми, які вивчає і розв'язує дискретна математика.

Дискретна математика включає такі традиційні розділи.

1. Теорія множин і відношень

У цьому розділі розглядається фундаментальне поняття множини, наводяться операції над множинами, різні типи множин та їх властивості. Детально описується окремий тип множин – відношення, функціональні відображення та їх властивості. Особливу увагу приділено декартовим добуткам множин. Адже такі важливі поняття, як n-арна операція, визначена на множині, або поняття автомата як математичної моделі механічного обчислювального пристрою зручно формулювати саме в термінах декартових добутків множин.

2. Комбінаторика

Комбінаторикою називається розділ математики, присвячений розв'язанню задач про вибір та розміщення елементів скінченної множини згідно із заданими правилами. Ці задачі пов'язані з підрахунком кількості всіх можливих способів виконання певної дії зі скінченної множини таких дій. Методи комбінаторики закладають підґрунтя до багатьох важливих напрямків комп'ютерних наук: важкорозв'язувані задачі комбінаторної оптимізації, оцінювання складності задач та алгоритмів тощо.

3. Математична логіка

Математична логіка – це наука, основним об'єктом вивчення якої є формальні логічні мови, на яких формулюються математичні твердження, поняття істинності та хибності цих тверджень, а також їх доведення. Двійкова логіка є одним із центральних питань у комп'ютерних науках через те, що інформація у сучасних ЕОМ представлена саме у двійковому вигляді.

4. Теорія графів

Теорія графів надає дуже зручний математичний апарат для опису програмних та інших моделей. Файлові структури на носіях пам'яті комп'ютерів, коди комп'ютерних програм, інформаційні системи та бази даних – усім їм відповідають певні графи. Величезну кількість задач, що постають у рамках комп'ютерних наук, можна вдало представити і розв'язати засобами теорії графів. Особливо привабливою у цій теорії є наявність графічної інтерпретації поняття графа.

5. Теорія автоматів

При створенні будь-якого апаратного засобу найпершою вимогою є його моделювання і проектування. Автомати – потужний математичний апарат, що допомагає при розв'язанні таких задач. Теорія автоматів лежить в основі всіх цифрових технологій і програмного забезпечення.

У цьому посібнику детально висвітлено розділи "Теорія множин і відношень", "Комбінаторика" та "Числення висловлювань".

Матеріал супроводжується великою кількістю прикладів.

У кінці кожного розділу наведено контрольні запитання та задачі.

Логічні символи

Перерахуємо логічні символи, які вживатимемо в цьому навчальному посібнику.

$\Rightarrow$ – "спричиняє", "тягне за собою";
$\Leftrightarrow$ – "тоді й тільки тоді";
$\forall$ – "для всіх", "для кожного";
$\exists$ – "існує".

Розділ 1
Теорія множин і відношень

Тема 1. Множини. Операції над множинами

1.1. Інтуїтивне поняття множини

Поняття множини є первісним. Воно не має точного визначення, і його відносять до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в елементарній геометрії є поняття "точка", "пряма", "площина".

Часто приймається формулювання *інтуїтивного поняття множини* Георга Кантора, основоположника теорії множин: "Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається *множиною*. Предмети, які входять до складу множини, називаються її *елементами*".

Суттєвим моментом канторівського розуміння множини є те, що зібрання предметів розглядається як один предмет ("уявляється як єдине ціле"), тобто основна увага переноситься з окремих предметів на зібрання предметів. Фраза "предметів нашої інтуїції чи інтелекту" означає, що природа предметів, які складають множину, ніяк не обмежується. Множина може складатися з людей, точок площини, натуральних чисел, факультетів університету тощо. У фразах "які можна відрізнити один від одного" і "певні предмети" йдеться про те, що для довільних двох предметів має існувати можливість з'ясувати, різні ці предмети чи однакові, а також, якщо задано множину і предмет, то можна визначити, чи є цей предмет елементом заданої множини, чи ні. Звідси випливає, що будь-яка множина повністю визначається своїми елементами.

Альтернативним інтуїтивним визначенням множини є твердження математиків, які працювали під псевдонімом Ніколя Бурбакі: "Множина утворюється з елементів, що мають певні властивості й перебувають у певних відношеннях між собою чи з елементами інших множин".

Прикладами множин є множина простих чисел, множина парних чисел, множина студентів в аудиторії, множина місяців у році тощо.

1.2. Позначення

Множини позначають великими латинськими літерами $(A, S, X, \ldots)$, а елементи множин – малими латинськими літерами $a, s, x, \ldots$

Для позначення того, що x є елементом множини S, застосовується запис $x \in S$, а запис $x \notin S$ означає, що елемент x не належить множині S.

Символ $\in$ називають символом належності.

Множина називається скінченною, якщо вона складається зі скінченної кількості елементів.

Однозначно визначена множина та, елементами якої є $a_1, a_2, \ldots, a_n$, позначається як $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Множина $\{a\}$ – *одноелементна множина* – є множиною, єдиним елементом якої є елемент a.

Кількість елементів скінченної множини S позначають як $|S|$ і називають *потужністю*. Поняття потужності вводять і для нескінченних множин, які розглядатимуться пізніше.

Наприклад, якщо $S = \{a,b,c\}$, то $|S| = 3$.

Порядок слідування елементів у множині не має значення. Наприклад, $\{a,b,c\}$ і $\{c,a,b\}$ – це одна і та сама множина.

Множини, як об'єкти, можуть бути елементами інших множин. Множину, елементами якої є множини, іноді називають *сім'єю*.

Запис $S = \{S_i\}_{i \in I}$ означає, що S є сім'єю, елементами якої є множини S_i, причому індекс i "пробігає" множину I. Запис $S = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ означає, що множини $\{a,b\},\{b,c\}$ є елементами множини S.

Множина, яка складається з елементів деякої множини S так, що ці елементи можуть входити до складу цієї множини в якій завгодно кількості екземплярів, будемо називати *мультимножиною* множини S і позначати $M(S)$.

Із погляду теорії множин, множина та її мультимножина – це один і той самий об'єкт, і вони можуть між собою не розрізнятися. Проте часто, коли йдеться про представлення множини в пам'яті ЕОМ, виникає потреба відрізняти мультимножину від множини.

1.3. Способи задання множин

Для задання множин використовують декілька способів.

1. ***Вербальний (словесний) спосіб.*** Цей спосіб оснований на описі характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множини.

Приклад.

S – множина студентів жіночої статі у певній аудиторії.

2. Множину можна задати ***переліком (списком)*** усіх її елементів у фігурних дужках.

Приклад.

$S = \{1, 2, 3\}$.

3. ***Предикатний спосіб.*** При цьому способі множина задається за допомогою характеристичного предиката – деякої умови, вираженої у формі логічного твердження. Тобто множина задається у вигляді: $A = \{\, x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ – характеристичний предикат, який набуває істинних значень для елементів множини A.

Приклади.

а) $S = \{\, x \mid x$ – натуральне число$\}$;

б) $S = \{\, x \mid x$ – корені рівняння $x^2 - 4 = 0\}$.

4. Множину можна задати ***рекурсивно***, тобто вказати спосіб послідовного породження її елементів.

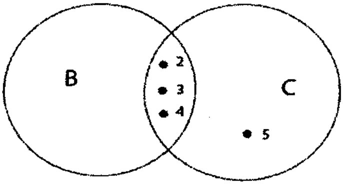
Приклад.

Нехай $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $f_i \in N, i = 1,2,3,..., f_1 = 1, f_2 = 2; f_n = 3 f_{n-2} + f_{n-1}$, $n = 3,4,...$, тоді $f_3 = 3f_1 + f_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$; $f_4 = 3f_2 + f_3 = 3 \cdot 2 + 5 = 11,...$

5. Множину можна задати ***геометрично.*** Для ілюстрації відношень між множинами використовують схеми, які називаються *діаграмами Ейлера – Венна*. При цьому множини зображують геометричними фігурами (колами); множини, що перетинаються, зображують колами, що перетинаються; підмножини зображують вкладеними колами.

Приклад.

Нехай $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2,3,4,5\}$, тоді діаграма Ейлера – Венна має вигляд



Переліком можна задати тільки скінченні множини (нескінченні варто задавати характеристичними предикатами).

Задання множини називатимемо *ненадлишковим*, якщо кожен її елемент входить у дану множину в єдиному екземплярі, і *надлишковим*, якщо хоча б один елемент даної множини входить до її складу більш як в одному екземплярі (випадок мультимножини).

1.4. Парадокс Расселла

Уведені вище поняття теорії множин з успіхом можна використати в основах аналізу, алгебрі, математичній логіці. Однак при більш строгому розгляді такі інтуїтивні уявлення можуть виявитися незадовільними. Недосконалість інтуїтивних уявлень про множини та їх недостатність ілюструються, наприклад, відомим парадоксом, який виявив англійський філософ і математик Бертран Расселл (1901 р.).

Ідея цього парадокса така.

Розіб'ємо всі множини на два класи:

1. Множини, які не є елементами самих себе, тобто $X \notin X$;

2. Множини, які є елементами самих себе, тобто $X \in X$.

Так, множина студентів у даній аудиторії не є студентом, а отже належить до 1-го класу. Так само як і множина всіх зірок на небі не є зіркою. Проте множина звуків також є звуком, множина всіх множин є множиною. Отже, дві останні множини належать до 2-го класу.

Розглянемо множину $F = \{X \mid X - \text{множина}, X \notin X\}$. Виникає питання: а до якого класу належить F, тобто $F \in F$ як елемент чи ні?

Припустимо, що F належить 1-му класу, тобто $F \notin F$, це означає, що F не є елементом самої себе, а отже $F \in F$ (як елемент).

Припустимо, що F належить 2-му класу, тобто $F \in F$, тоді з визначення множини F випливає, що $F \notin F$. Отримали протиріччя, відоме як порадокс Расселла.

Цей парадокс ще відомий у популярній формі як *парадокс цирульника.*

В одному селищі цирульника зобов'язали голити всіх тих мешканців і тільки тих, які не голяться самі. Тобто забороняється голити тих, хто голиться сам. Задамо питання: чи повинен цирульник голити сам себе?

Якщо відповідь "так", то цирульник належить до групи тих, хто голиться сам, а таких йому голити заборонено. Якщо відповідь "ні", то він належить до групи тих, хто не голиться сам, а таких він повинен голити.

Причиною виникнення парадокса є те, що наївне (інтуїтивне) означення множини дає змогу оперувати з елементами довільної природи.

До шляхів подолання парадокса належать такі.

1) Теорія типів:

- елементам (об'єктам) приписується тип 0;
- множинам, елементами яких є елементи типу 0, приписується тип 1;
- множинам, елементами яких є множини типу 1, приписується тип 2 і т. д.

Згідно із цією теорією слід розглядати лише множини, які мають певний тип.

2) Явна заборона приналежності множини самій собі, тобто $X \in X$ – недозволений предикат.

Парадоксу Расселла можна запобігти, однак немає повної впевненості, що не з'являться інші протиріччя. Повноцінним виходом є *аксіоматична побудова теорії множин* та доведення непротиріччя побудованої формальної теорії.

1.5. Універсум. Порожня множина. Підмножини

У теорії множин використовується поняття порожньої (пустої) множини.

Порожня множина – це множина, яка не містить елементів. Позначається вона символом $\varnothing$.

Приклад.

Множина $S = \{x \mid x - \text{непарне число, що ділиться на } 2\}$ буде порожньою.

Означення.

Множина A є *підмножиною* множини B (це позначається $A \subseteq B$), якщо кожний елемент A є елементом множини B, тобто якщо $x \in A$, то $x \in B$.

При цьому множину B називають *надмножиною* множини A.

Означення.

Множина A строго включається до множини B $(A \subset B)$, якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

При цьому множина A – власна підмножина множини B, а множина B – власна надмножина множини A.

Означення.

Універсум (універсальна множина) U – така множина, яка містить усі об'єкти і всі множини.

Приклад.

Універсум U може збігатися із множиною всіх цілих, або натуральних, або дійсних чисел.

Треба відрізняти елементи множини і підмножини цієї множини.

Наприклад, коли пишуть, що $a \in \{a,b,c\}$, то це означає, що a є членом множини, що складається із трьох елементів a,b,c. Якщо ж пишуть, що $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, то це означає, що множина, яка складається з одного елемента a, є підмножиною множини, що складається із трьох елементів a,b,c.

Означення.

Дві множини A і B рівні, коли вони складаються з одних і тих самих елементів:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Приклад.

Множини $A = \{x \mid 1 \le x \le 5, x \in N\}$, $B = \{5,4,3,2,1\}$, $C = \{5,5,4,4,3,2,1\}$ рівні за означенням.

Лема 1.5.1.

Справедлива така еквівалентність: $A \subseteq B$ та $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

Доведення.

Необхідність. Розглянемо будь-який елемент $x \in A$. Множина A є підмножиною множини B, отже $x \in B$. З іншого боку будь-який елемент $x \in B$ (оскільки $B \subseteq A$) належить також множині A, тобто $x \in A$. За означенням рівності маємо $A = B$.

Достатність. Розглянемо будь-який елемент $x \in A$. Оскільки $A = B$, то $x \in B$. Тоді за означенням включення $A \subseteq B$. Розглянемо будь-який елемент $x \in B$. Якщо $A = B$, то $x \in A$. За означенням включення $B \subseteq A$. ▶

Лема 1.5.2.

Порожня множина є підмножиною будь-якої множини A.

Доведення.

Припустимо, що $\varnothing \subseteq A$ – хибне твердження. Це можливо лише тоді, коли існує хоча б один елемент із $\varnothing$, який не є елементом множини A. Проте це неможливо, оскільки $\varnothing$ не має елементів узагалі. Отже $\varnothing \subseteq A$. ▶

Лема 1.5.3.

Порожня множина єдина.

Доведення.

Нехай $\varnothing_1$ і $\varnothing_2$ – дві порожні множини. За попередньою лемою $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ та $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Отже за лемою 1.5.1 $\varnothing_1 = \varnothing_2$. ▶

Означення.

Множину, елементами якої є всі підмножини множини A, називають булеаном множини A і позначають $P(A)$, $B(A)$ або 2^A.

Приклад.

Якщо $A = \{a,b,c\}$, то

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Теорема 1.5.1.

Булеан множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ має 2^n різних підмножин.

Доведення.

Доведемо теорему, використовуючи подання підмножини n-розрядним двійковим числом (двійковим кодом), в якому 1 (або 0) відповідає елементам підмножини: пишемо 1, якщо елемент належить підмножині, і 0 – якщо не належить. Тобто кожній підмножині відповідатиме свій набір нулів і одиниць.

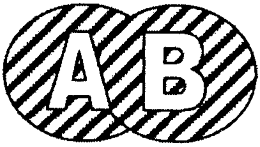
Перший елемент, що вибирається в підмножину із множини, може входити, а може і не входити в підмножину, що будується. Тобто для цього елемента існує дві альтернативи – увійти, або не увійти в підмножину (набути значення або 1, або 0). Для другого елемента залишаються ті ж самі дві альтернативи. І так до останнього n-го елемента. Кількість усіх можливих наборів, які можна скласти з нулів і одиниць, дорівнює, згідно із правилом множення, $\underbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}_{n} = 2^n$. Тому й кількість усіх підмножин дорівнює 2^n. ▶

1.6. Операції над множинами

Розглянемо дві множини A та B і введемо кілька операцій над ними. Для графічних ілюстрацій будемо використовувати діаграми Ейлера – Венна.

Означення.

Об'єднанням двох множин A і B $(A \cup B)$ називається множина, до складу якої входять ті й тільки ті елементи, які входять до складу хоча б однієї із цих множин, тобто $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ або } a \in B\}$.

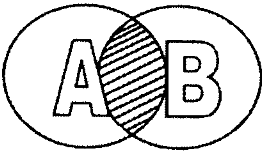


Приклад.

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, отже, $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.

Означення.

Перетином двох множин A і B $(A \cap B)$ називається множина, елементами якої є елементи, що входять як до складу множини A, так і множини B, тобто $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ і } a \in B\}$.

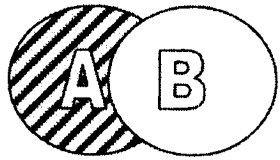


Приклад.

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, отже, $A \cap B = \{2,3\}$.

Означення.

Різницею двох множин A і B $(A \setminus B)$ називається множина $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ і } a \notin B\}$.



Приклад.

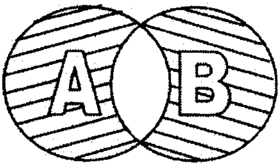
$A=\{0,1,2,5,7\}$, $B=\{0,2,3,4,6\}$, отже, $A\setminus B=\{1,5,7\}$.

Із рисунка видно, що $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

Означення.

Симетричною різницею двох множин A і B ($A\Delta B$, $A\div B$) називається множина

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{x\,|\,x\in A$ і $x\notin B$ або $x\in B$ і $x\notin A\}$.



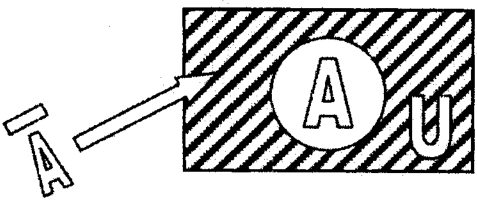
З означення випливає, що $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Приклад.

$A=\{0,1,2,5,7\}$, $B=\{0,2,3,4,6\}$, отже, $A\Delta B=\{1,3,4,5,6,7\}$.

Означення.

Доповненням множини A називають множину $\overline{A}=\{x\,|\,x\notin A, x\in U\}$, тобто $\overline{A}=U\setminus A$.



Зауважимо, що на діаграмах Ейлера – Венна універсальну множину зображують множиною точок деякого прямокутника, в якому у вигляді кіл розташовано всі інші множини, що розглядаються.

Приклад.

$U=\{2,3,4,5,10\}$, $A=\{3,5,10\}$, отже, $\overline{A}=\{2,4\}$.

Очевидно, що $\overline{U}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=U$.

Означення.

Дві множини A і B *не перетинаються*, якщо вони не мають спільних елементів, тобто якщо $A\cap B=\varnothing$.

Відмітимо, що для будь-яких двох скінченних множин A та B справджується рівність: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Для будь-яких трьох скінченних множин A, B і C справедлива така рівність:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+$$
$$+|A\cap B\cap C|.$$

Ці формули є частинним випадком формули включень і виключень, яка докладно розглядатиметься в розділі "Комбінаторика".

Тема 2. Алгебра множин

1.1. Закони алгебри множин

Множина 2^U всіх підмножин універсальної множини U із заданими на ній чотирма операціями (об'єднання, перетину, різниці та доповнення) складає *алгебру множин*.

Означення.

Сім'ю множин $\alpha\subset 2^U$ підмножин множини U називають *алгеброю*, якщо вона задовольняє такі властивості:

1) $\varnothing\in\alpha$;

2) якщо множина $A \in \alpha$, то і її доповнення $\overline{A} = U \setminus A \in \alpha$;

3) якщо множини $A, B \in \alpha$, то $A \cup B \in \alpha$ (тобто є замкненою відносно операцій об'єднання та доповнення).

Пріоритет операцій в алгебрі множин такий:

1. $\overline{A}$;
2. $A \cap B$;
3. $A \cup B$;
4. $A \setminus B$.

Уведені вище операції над множинами називають теоретико-множинними, і ці операції задовольняють певні закони.

Закони алгебри множин сформулюємо у вигляді таких двох теорем.

Теорема 2.1.1.

Для будь-яких підмножин A, B і C деякої універсальної множини U справедливі такі рівності:

M1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (комутативність);

M2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (асоціативність);

M3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивність);

M4) $A \cup \overline{A} = U$ (виключення третього),
$A \cap \overline{A} = \varnothing$ (протиріччя);

M5) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$ (закони тотожності).

Доведення.

Доведення можна проводити, використовуючи означення рівності множин ($A = B \Leftrightarrow \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$) та лему 1.5.1 з підрозділу 1.5 ($A \subseteq B$ та $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$). Також тотожності можна доводити і побудувавши діаграми Ейлера – Венна для лівої та правої частин співвідношень.

Доведемо за допомогою леми 1.5.1 друге співвідношення з М2): $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Нехай
$a \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow a \in A, a \in B, a \in C \Rightarrow a \in (A \cap B)$ i $a \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in (A \cap B) \cap C$, тобто $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Нехай
$a \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow a \in A,\ a \in B,\ a \in C \Rightarrow a \in A, a \in (B \cap C) \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in A \cap (B \cap C)$, тобто $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Доведемо перше співвідношення з М3) тим самим методом: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Нехай $a \in A \cup (B \cap C)$, тоді справедливий один із трьох випадків:

а) $a \in A$ i $a \notin B \cap C$;

б) $a \notin A$ i $a \in B \cap C$;

в) $a \in A$ i $a \in B \cap C$.

Розглянемо кожний із цих випадків:

а) оскільки $a \in A$,
то $a \in A \cup B$ i $a \in A \cup C \Rightarrow a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

б) оскільки $a \in B \cap C \Rightarrow a \in B$ i $a \in C$, тоді
$a \in A \cup B$ i $a \in A \cup C \Rightarrow a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

в) маємо
$a \in A$ i $a \in B \cap C \Rightarrow a \in A \cup B$ i $a \in A \cup C \Rightarrow a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Отже, дістаємо $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Нехай $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow a \in A \cup B$ i $a \in A \cup C$. Можливі два випадки:

1) $a \in A$;

2) $(a \notin A)$ та $(a \in B$ i $a \in C)$;

У випадку 1) маємо $a \in A \Rightarrow a \in A \cup (B \cap C)$.

У випадку 2) записуємо
$a \notin A, a \in B$ i $a \in C \Rightarrow a \in B \cap C \Rightarrow a \in A \cup (B \cap C)$.

Звідси випливає $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Решта співвідношень доводиться аналогічно. ▶

Окрім тотожностей, які були наведені в теоремі 2.1.1, існують також інші важливі тотожності для операцій над множинами.

Теорема 2.1.2.

Для довільних підмножин A і B деякої універсальної множини U справджуються такі рівності:

M6) $A \cup A = A,\ \ A \cap A = A$ (ідемпотентність);

M7) $A \cup (A \cap B) = A,\ \ A \cap (A \cup B) = A$ (поглинання);

M8) $A \cup U = U,\ \ A \cap \varnothing = \varnothing$ (домінування);

M9) $\overline{\varnothing} = U,\ \ \overline{U} = \varnothing,\ \ \overline{\overline{A}} = A$ (подвійне доповнення);

M10) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закони де Моргана).

Доведення.

Покажемо справедливість тотожностей M6), M8), M10) та M7).

На підставі законів M1)–M5) можемо записати:

$$A = A \cup \varnothing = A \cup (A \cap \overline{A}) = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup A) \cap U = A \cup A;$$

$$A = A \cap U = A \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cap A) \cup (A \cap \overline{A}) = (A \cap A) \cup \varnothing = A \cap A.$$

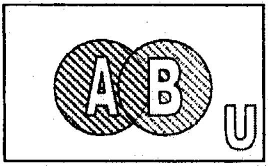
Використовуючи щойно встановлені тотожності M6), маємо

$$A \cup U = A \cup (A \cup \overline{A}) = (A \cup A) \cup \overline{A} = A \cup \overline{A} = U;$$

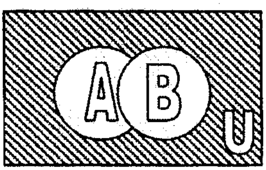
$$A \cap \varnothing = A \cap (A \cap \overline{A}) = (A \cap A) \cap \overline{A} = A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Закон $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ з M10) доведемо, використовуючи діаграми Ейлера – Венна.

Спочатку побудуємо діаграму для ($\overline{A \cup B}$):

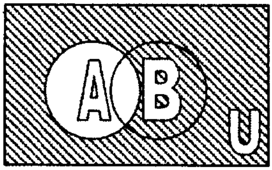


$A \cup B$

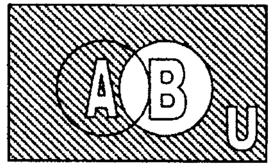


$\overline{A \cup B}$

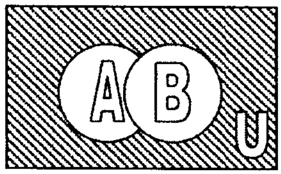
Тепер побудуємо діаграму для ($\overline{A} \cap \overline{B}$):



$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$

Очевидно, що множини ($\overline{A \cup B}$) і ($\overline{A} \cap \overline{B}$) однаково зображуються на діаграмах Ейлера – Венна, тобто $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведемо ще і друге співвідношення з М7).

$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A.$

Інші співвідношення доводять аналогічно. ►

2.2. Покриття, розбиття множини

Використовуючи закони асоціативності та комутативності для операцій об'єднання і перетину множин, можна ввести такі скорочення:

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ – сукупність елементів, які є елементами хоча б однієї із множин $A_1, A_2, ..., A_n$;

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ – сукупність елементів, які є елементами кожної із множин $A_1, A_2, ..., A_n$.

Ці скорочення розширюються і на випадок нескінченної сукупності множин, тобто

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Використовуючи узагальнення операцій об'єднання та перетину на n множинах, можна узагальнити також інші співвідношення, наприклад, закон де Моргана, який узагальнено виглядає так:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} .$$

Означення.

Сукупність підмножин $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ називається покриттям множини A, якщо $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Означення.

Сукупність підмножин $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ називають розбиттям множини A, якщо:

1) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \neq j$.

При цьому підмножини A_i називають класами цього розбиття, $i = \overline{1, n}$.

Приклади.

а) Нехай A – множина студентів даного університету X, які його закінчили, A_i – множина тих студентів університету X, які закінчили i-й факультет цього університету. Сукупність $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ є покриттям множини A, оскільки існує можливість того, що деякі студенти могли закінчити два факультети, а отже потрапляють у дві підмножини сукупності $\{A_i\}$, $i = \overline{1, k}$.

б) Нехай A – множина студентів першого курсу даного факультету, A_i – множина студентів, які навчаються в i-й групі першого курсу цього факультету. Оскільки студент не може навчатися одночасно у двох групах, то сукупність $\{A_i\}$, $i = \overline{1, k}$ – розбиття.

Тема 3. Декартовий добуток. Відношення

3.1. Декартовий добуток

Нехай A і B – дві множини.

Означення.

Декартовим добутком двох множин A і B ($A \times B$) називають множину всіх упорядкованих пар, у яких перший елемент належить множині A, а другий – множині B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Якщо множини A і B скінченні і складаються відповідно з m і n елементів, то $A \times B$ складається з $m \cdot n$ елементів.

Декартовий добуток властивості комутативності не має, тобто $A \times B \neq B \times A$.

Приклад.

Нехай $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$. Тоді декартовий добуток містить $2 \cdot 3 = 6$ елементів. Випишемо їх:

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\},$$

$$B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}.$$

Окремий інтерес викликає випадок, коли множини A і B рівні між собою.

Означення.

Упорядкованою парою елементів множини A називатимемо об'єкт (a,a'), що складається із двох, не обов'язково різних, елементів a та a' множини A, для яких указано, котрий із них вважається першим, а котрий – другим.

Приклад.

Якщо $A = \{1,2,3,4,5\}$, то $(3,4)$ і $(4,3)$ – різні упорядковані пари. Упорядкованими парами є також пари $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$.

Означення.

Множина $C = \{(a, a') \mid a, a' \in A\}$ усіх упорядкованих пар (a, a') елементів із множини A називається *декартовим квадратом* множини A і позначається A^2.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1, a_2, a_3) із A, упорядковані четвірки із A і т. д. Узагалі, упорядкована n-ка елементів із множини A – це n не обов'язково різних між собою елементів із A, заданих у певній послідовності.

Наведене вище означення декартового добутку двох множин і декартового квадрата множини можна звичайним способом узагальнити і на випадок довільної скінченної сукупності множин.

Означення.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають сукупність упорядкованих n-ок елементів вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i \in A_i$, $1 \le i \le n$.

Елементи декартового добутку також називають кортежами або векторами довжини n.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартовий добуток $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називають *декартовим добутком n-го степеня множини* A (позначають A^n).

Властивості асоціативності для декартового добутку не виконуються, але виконується властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перетину і різниці:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B),$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B),$$
$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B).$$

Операція декартового добутку відрізняється від операцій, уведених раніше, тим, що елементи добутку множин суттєво відрізняються від елементів співмножників і є об'єктами іншої природи. Наприклад, якщо R – множина дійсних чисел, то декартовий добуток $R \times R$ – множина всіх точок площини.

3.2. Відношення

Означення.

Довільна підмножина R множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається *відношенням*, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то відношення R, яке задане на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, називається *n-арним відношенням* на множині A.

Якщо $n = 1$, то відношення називається *унарним*, при $n = 2$ відношення називається *бінарним*, при $n = 3$ – *тернарним*.

Коли $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, то говорять, що елементи a_i, $i = \overline{1,n}$, перебувають у відношенні R між собою або відношення R *істинне* для $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R$, то кажуть, що відношення R *хибне* для $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Відношення широко застосовуються в математиці й обчислювальній техніці, при побудові комп'ютерних баз даних, які організовані у вигляді таблиць, де зв'язки між групами даних описуються мовою відношень.

Бінарні відношення зазвичай записують у вигляді співвідношень aRb, де R – відношення, що встановлює зв'язок між елементами $a \in A$ та $b \in B$ (що те ж саме $(a,b) \in R$ чи R істинне для a,b).

Прикладами *бінарних відношень*, наприклад, на множині натуральних чисел є такі: "ділитися на", "менше або дорівнює".

Означення.

Областю визначення відношення R, заданого на A і B $(R \subseteq A \times B)$, є множина всіх $a \in A$ таких, що для деяких $b \in B$ маємо $(a,b) \in R$.

Іншими словами, область визначення R – це множина всіх перших координат упорядкованих пар із R.

Означення.

Областю значень відношення R, заданого на A і B, є множина всіх $b \in B$ таких, що $(a,b) \in R$ для деяких $a \in A$.

Інакше, область значень R є множина всіх других координат упорядкованих пар із R.

Означення.

Універсальне бінарне відношення – це відношення, яке *повністю* збігається з декартовим добутком множин, на яких воно визначено: $U=\{(a,b)\,|\,a\in A$ та $b\in B\}$.

Якщо $A=B$, то $U=\{(a,a')\,|\,a,a'\in A\}$.

Приклад.

$U=A\times A$, де U – "учитися в одній групі", A – множина студентів певної групи факультету.

Означення.

Порожнє бінарне відношення на множині A – це відношення, якому не задовольняє жодна пара елементів із множини A.

Приклад.

Нехай $A=\{2,4,6,8\}$, R – "бути взаємно простими числами" (тобто, НСД$(p_1, p_2)=1$).

Тоді $R=\varnothing$.

Оскільки відношення, задані на A і B, є підмножинами $A\times B$, то для них визначені операції об'єднання, перетину, різниці й доповнення:

1) $(a,b)\in R_1\cup R_2 \Leftrightarrow (a,b)\in R_1$ або $(a,b)\in R_2$,

2) $(a,b)\in R_1\cap R_2 \Leftrightarrow (a,b)\in R_1$ і $(a,b)\in R_2$,

3) $(a,b)\in R_1\setminus R_2 \Leftrightarrow (a,b)\in R_1$ і $(a,b)\notin R_2$,

4) $(a,b)\in \overline{R} \Leftrightarrow (a,b)\notin R$, $\overline{R}$ (або $\neg R$) – заперечення R.

Відмітимо, що ці операції справедливі для загального випадку відношення в $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$

Означення.

Нехай $R\subseteq A\times B$. Тоді відношення $R^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in R\}$, задане на $B\times A$, називається *оберненим* до відношення R.

Приклади.

а) R – "*x – дільник y*", тоді R^{-1} = "*x – кратне y*";

б) $R=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, тоді $R^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$.

Означення.

Нехай $R_1 \subseteq A \times B, R_2 \subseteq B \times C$. *Композицією* (добутком або суперпозицією) відношень R_1 та R_2 є відношення $R_1 * R_2 = \{ (a,c) | a \in A, c \in C \text{ і } \exists b \in B : aR_1b \text{ і } bR_2c \}$, задане на $A \times C$.

Приклад.

Нехай $R_1 = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, $R_2 = \{(2,3),(2,8),(4,5),(6,8)\}$, тоді $R_1 * R_2 = \{(1,3),(1,8),(3,5),(5,8)\}$.

Теорема 3.2.1.

Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то

а) $(R_1 \cup R_2) * R = R_1 * R \cup R_2 * R$;

$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 * R \subseteq R_2 * R$;

б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

$R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$;

в) $(R_1 * R_2)^{-1} = (R_2^{-1}) * (R_1^{-1})$;

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

д) $(R * R_1) * R_2 = R * (R_1 * R_2)$.

Доведення.

а) Якщо $(a,b) \in (R_1 \cup R_2) * R$, то існує елемент $c \in A : (a,c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c,b) \in R$. Отже, $(a,c) \in R_1$ або $(a,c) \in R_2$ і $(c,b) \in R$. Звідси $(a,b) \in R_1 * R$ або $(a,b) \in R_2 * R$, тобто $(a,b) \in R_1 * R \cup R_2 * R$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Доведемо другу частину твердження.

Коли $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1 \cup R_2 = R_2$. Звідси за доведеним вище $(R_1 \cup R_2) * R = R_1 * R \cup R_2 * R = R_2 * R$, тобто $R_1 * R \subseteq R_2 * R$.

б) Нехай $(a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (R^{-1})^{-1} = R.$

Для доведення другої частини зауважимо, що

$(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R^{-1}, (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R_1; (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a) \in R_1^{-1} \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) Нехай $(a,b)\in(R_1*R_2)^{-1}\Leftrightarrow(b,a)\in R_1*R_2\Rightarrow\exists c\in A:(b,c)\in R_1,(c,a)\in R_2$.

Але тоді $(c,b)\in R_1^{-1}$ і $(a,c)\in R_2^{-1}$ $\Rightarrow$ $(a,b)\in R_2^{-1}*R_1^{-1}$, тобто $(R_1*R_2)^{-1}\subseteq R_2^{-1}*R_1^{-1}$.

Обернене включення доводиться аналогічно.

г) Нехай $(a,b)\in(R_1\cap R_2)^{-1}\Leftrightarrow(b,a)\in R_1\cap R_2\Leftrightarrow(b,a)\in R_1$ і $(b,a)\in R_2\Leftrightarrow(a,b)\in R_1^{-1}$ і $(a,b)\in R_2^{-1}\Leftrightarrow(a,b)\in R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$, отже $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$.

д) Нехай $(a,d)\in(R*R_1)*R_2$, тоді $\exists c\in A:(a,c)\in R*R_1$ і $(c,d)\in R_2$. Отже $\exists b\in A:(a,b)\in R$, $(b,c)\in R_1$ і $(c,d)\in R_2$, а це означає що $(b,d)\in(R_1*R_2)$ і $(a,d)\in R*(R_1*R_2)$, тобто $(R*R_1)*R_2\subseteq R*(R_1*R_2)$.

Обернене включення доводиться аналогічно. ►

3.3. Способи задання бінарних відношень

Найпоширеніші такі способи задання бінарних відношень.

1. За допомогою списку пар.

Відношення $R\subseteq A\times B$ можна задавати у вигляді списку пар елементів декартового добутку $A\times B$, для яких задане відношення виконується.

Приклад.

$R=\{(1,2),(1,4),(2,3)\}$.

2. Матричний спосіб.

При цьому способі бінарне відношення $R\subseteq A\times B$ задається прямокутною таблицею (матрицею суміжності $C=\|\sigma ij\|$), що складається з нулів і одиниць, де в шапці таблиці рядки – перші координати пар, а стовпці – другі, причому на перетині i-го рядка і j-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення a_iRb_j, або 0 – якщо не виконується. Тобто

$$\sigma ij = \begin{cases} 1, \text{ якщо} & a_i R b_j, \\ 0, \text{ якщо} & a_i \overline{R} b_j. \end{cases}$$

Для нашого прикладу таблиця і матриця мають вигляд

	2	3	4
1	1	0	1
2	0	1	0

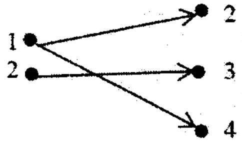
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця універсального відношення U – це матриця, що складається лише з одиниць. Матриця порожнього відношення – матриця, що складається лише з нулів.

3. За допомогою орієнтованого графа.

Нехай $R \subseteq A \times B$. Елементи множин A та B зображуються точками на площині (вершинами графа), а впорядковані пари – лініями зі стрілками (дугами графа). Якщо aRb, то дуга напрямлена від вершини a до вершини b.

Для нашого прикладу маємо такий граф:



Нехай $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, |A| = m, |B| = n, |C| = k$, тоді $R^{-1} \subseteq B \times A$ – відношення, обернене до R, а $T = R * S \subseteq A \times C$ – композиція відношень R та S. Позначимо через M_R матрицю відношення R, через M_S – матрицю відношення S, а через M_T – матрицю відношення T.

Тоді для матриць та графів відношень R^{-1} і $T = R * S$ справджується таке.

Матриця відношення R^{-1} для R – це транспонована матриця відношення R, тобто $(M_R)^T$, а граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції $(M_T)_{m\times k}$ утворюється як добуток матриць $(M_R)_{m\times n}$ і $(M_S)_{n\times k}$ із подальшою заміною відмінних від 0 елементів одиницями. Щоб побудувати граф відношення $T = R * S$, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S. Граф відношення T дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини B. Кожний шлях, що проходить через вершину $b \in B$ від вершини множини A до вершини множини C, замінюємо однією дугою від вершини множини A до вершини множини C з тим самим напрямком.

3.4. Властивості бінарних відношень

Означення.

Бінарне відношення *тотожності*, задане на A, складається з усіх пар вигляду (a,a), де $a \in A$, і позначається через i_A.

Пари вигляду (a,a), називається *діагональними*, а відношення i_A – *діагоналлю*. Матриця i_A є одиничною.

Приклад.

Рівність на множині дійсних чисел.

Нехай R – бінарне відношення, задане на множині A $(R \subseteq A \times A)$.

Означення.

Бінарне відношення R називається *рефлексивним*, якщо $i_A \subseteq R$, тобто, коли воно включає діагональ. Це означає, що для всіх $a \in A$ виконується aRa.

У матриці рефлексивного відношення всі елементи головної діагоналі – одиниці.

Приклади.

а) Пряма x паралельна прямій y у площині α на множині прямих площини. (Дві прямі паралельні, якщо вони або збігаються, або не мають жодної спільної точки. Оскільки пряма x збігається сама із собою, то $(x,x) \in R$.)

б) Студент x – ровесник студента y на множині студентів факультету. (Кожен студент сам собі ровесник.)

Означення.

Бінарне відношення R називається *антирефлексивним*, якщо aRa хибне для всіх $a \in A$. Ще такі відношення називаються *іррефлексивними*. Це означає, що якщо aRb, то $a \neq b$ або $(R \cap i_A) = \varnothing$.

У матриці антирефлексивного відношення всі елементи головної діагоналі – нулі.

Приклади.

а) Відношення строгої нерівності $(<)$ на множині натуральних або дійсних чисел;

б) відношення "бути старшим" на множині людей.

Означення.

Бінарне відношення R називається *симетричним*, якщо з aRb випливає bRa, тобто $R \subseteq R^{-1}$.

Симетричному відношенню відповідає симетрична матриця.

Приклади.

а) Відношення "пряма x перпендикулярна прямій y у площині α" на множині прямих площини;

б) відношення "студент x є сусідом по парті студента y" на множині студентів групи.

Означення.

Бінарне відношення R називається *асиметричним,* якщо із $(a,b) \in R$ випливає $(b,a) \notin R$, тобто $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Приклад.

Відношення $(a,b) \in R \Leftrightarrow$ "a – син b".

У матриці асиметричного відношення всі елементи головної діагоналі – нулі, і немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі.

Означення.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним*, якщо із aRb і bRa випливає, що $a = b$, тобто $R \cap R^{-1} = i_A$.

Приклад.

Відношення "множина A є підмножиною множини B": якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$.

У матриці антисиметричного відношення немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі.

Означення.

Бінарне відношення R називається *транзитивним*, якщо із aRb *і* bRc випливає aRc, тобто $R^2 \subseteq R$.

Приклади.

а) "Бути дільником" на множині цілих чисел;

б) "бути старшим" на множині людей;

в) трикутник x подібний трикутнику y;

г) місто x зв'язане з лісом y шосейною дорогою.

Якщо елементи матриці транзитивного відношення $r_{ij} = 1$ та $r_{jk} = 1$, то і $r_{ik} = 1$.

Означення.

Бінарне відношення R називається *інтранзитивним*, якщо із $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$ випливає $(a,c) \notin R$.

Приклад.

Відношення $(a,b) \in R \Leftrightarrow$ "a – син b" на множині людей.

3.5. Відношення еквівалентності

Бінарне відношення R, що задане на множині A, називають *відношенням еквівалентності* (або просто еквівалентністю) на A, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто для всіх a, b, c з A справедливі властивості:

а) aRa $(i_A \subseteq R)$ – рефлексивність, де i_A – відношення тотожності;

б) $aRb \Rightarrow bRa$ $(R \subseteq R^{-1})$ – симетричність;

в) aRb і $bRc \Rightarrow aRc$ $(R^2 \subseteq R, R^2 = R * R)$ – транзитивність.

Позначається відношення еквівалентності символом "~" або "≡".

Приклади.

а) Визначимо для натуральних чисел m, n відношення R таким чином:

$mRn \Leftrightarrow rest(m,2) = rest(n,2)$, де $rest(x,2)$ – остача від ділення x на 2. Покажемо, що R – відношення еквівалентності:

1) $mRm \Leftrightarrow rest(m,2) = rest(m,2)$ – рефлексивність;

2) $mRn \Leftrightarrow rest(m,2) = rest(n,2) \Leftrightarrow rest(n,2) = rest(m,2) \Leftrightarrow nRm$ – симетричність;

3) mRn і $nRk \Leftrightarrow rest(m,2) = rest(n,2) = rest(k,2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow rest(m,2) = rest(k,2) \Rightarrow mRk$ – транзитивність.

Отже, R – відношення еквівалентності.

б) Відношення "жити в одному місті" на множині жителів України.

Відношення еквівалентності, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям множини A на класи. Цей зв'язок виражається лемою.

Лема 3.5.1.

Довільне розбиття множини A на класи визначає на множині A відношення еквівалентності.

(Нагадаємо, що $\{A_1, \ldots, A_n\}$ – розбиття множини A, якщо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ та $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$, A_i, A_j – класи розбиття.)

Доведення.

Нехай $a, b \in A$. Покладемо $aRb \Leftrightarrow a$ і b лежать в одному класі розбиття. Покажемо, що це бінарне відношення є відношенням еквівалентності.

1) aRa, оскільки a лежить у деякому класі розбиття – рефлексивність;

2) $aRb \Rightarrow a, b \in K$, де K – деякий клас розбиття, але тоді $b, a \in K \Rightarrow bRa$ – симетричність;

3) $aRb, bRc \Rightarrow a, b, c \in K \Rightarrow a, c \in K \Rightarrow aRc$ – транзитивність. ▶

Теорема 3.5.1.

Між розбиттями множини на класи і відношеннями еквівалентності, заданими на цій множині, існує взаємно однозначна відповідність.

Означення.

Нехай R – відношення еквівалентності на A, $a \in A$. Назвемо *класом еквівалентності* елемента a множину

$$K(a) = \{x \in A \mid aRx\} = [a].$$

Якщо R – еквівалентність на A, то класи розбиття, визначені відношенням R, називають *класами еквівалентності* відношення R.

Означення.

Множину всіх класів розбиття називають *фактор-множиною* множини A і позначають як A/R. Кількість класів еквівалентності відношення еквівалентності R називають *індексом* множини A.

Лема 3.5.2.

Для будь-якого $a \in A$ $[a] \neq \varnothing$.

Доведення.

Оскільки R – відношення еквівалентності, то воно рефлексивне. Тоді

$aRa \Rightarrow a \in [a]$, отже $[a] \neq \varnothing$. ▶

Лема 3.5.3.

$a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$.

Доведення.

Нехай $a \sim b$. Тоді $x \in [a] \Leftrightarrow a \sim x$ (за означенням), $b \sim a$ (за властивістю симетричності), але тоді $b \sim x$ (за властивістю транзитивності), отже $x \in [b]$.▶

Лема 3.5.4.

$a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$.

Доведення.

Доведення проведемо від супротивного. Нехай $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Тоді $\exists c \in A : c \in [a] \cap [b] \Rightarrow c \in [a]$ і $c \in [b] \Rightarrow$ $a \sim c$ і $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ і $c \sim b \Rightarrow a \sim b$. Маємо протиріччя. ▶

3.6. Відношення часткового порядку

Означення.

Бінарне відношення R, визначене на множині A, називають *частковим порядком* на A, якщо воно рефлексивне, транзитивне й антисиметричне, тобто, якщо для всіх $a, b, c \in A$ виконуються властивості:

1) aRa $(i_A \subseteq R)$ – рефлексивність;

2) aRb і $bRc \Rightarrow aRc$ $(R^2 \subseteq R)$ – транзитивність;

3) aRb і $bRa \Rightarrow a = b$ $(R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$ – антисиметричність.

Частковий порядок на A позначають символом $\leq$, а саму *частково упорядковану множину* A позначають $(A, \leq)$.

Приклади.

а) "$a \leq b$" на множині натуральних чисел;

б) "бути не старшим" на множині людей.

Означення.

Бінарне відношення R, що визначене на A, називають відношенням *строгого порядку* ($<$), якщо воно:

1) транзитивне (aRb і $bRc \Rightarrow aRc$);

2) антирефлексивне (aRa хибне для $\forall a \in A$ або $aRb \Rightarrow a \neq b$).

Приклади.

а) Відношення строгої нерівності "$<$" на множині натуральних чисел;

б) "бути молодшим" на множині людей.

Означення.

Якщо виконується $x < y$ (або $x \leq y$), то кажуть, що елемент x передує y (y іде за x).

Означення.

Множина A називається *лінійно (абсолютно) упорядкованою,* якщо для будь-яких двох її елементів x та y виконується $x < y$ або $y < x$ ($x \leq y$ або $y \leq x$).

Приклад.

Множина дійсних чисел із відношенням порядку "$<$" є лінійно впорядкованою.

Означення.

Мінімальним (максимальним) елементом множини A, на якій задано відношення часткового порядку $\leq$, називають такий елемент $x \in A$, що для всякого елемента $y \in A$, що порівнюється з x, справджується $x \leq y$ $(y \leq x)$.

Приклад.

Діти в родині: x не старший за y.

Означення.

Елемент $x \in A$ називають *найменшим (найбільшим)*, якщо для кожного елемента $y \in A$ виконується $x \leq y$ $(y \leq x)$.

Означення.

Лінійно впорядкована множина A називається *цілком упорядкованою*, якщо всяка її непорожня підмножина B має найменший елемент.

Приклад.

Множина натуральних чисел із традиційним відношенням порядку.

Теорема 3.6.1 (принцип двоїстості).

Відношення, обернене до відношення часткового порядку, теж буде відношенням часткового порядку.

Доведення.

Нехай $\leq^{-1}$ – відношення, обернене до відношення $\leq$.

1) Доведемо рефлексивність. Оскільки $i_A \subseteq \leq$, то за властивістю $R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$ маємо $i_A = i_A^{-1} \subseteq \leq^{-1}$, тобто $i_A \subseteq \leq^{-1}$.

2) Доведемо транзитивність. За умовою (тобто за означенням відношення часткового порядку) $\leq * \leq \subseteq \leq$. Тоді на підставі того, що $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$, маємо

$\leq^{-1} * \leq^{-1} = (\leq * \leq)^{-1} \subseteq \leq^{-1}$.

3) Покажемо антисиметричність (aRb і $bRa \Rightarrow a = b$).

За умовою $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq i_A$. Тоді, використовуючи комутативність $A \cap B = B \cap A$ і властивість $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$, маємо

$\leq^{-1} \cap \leq \subseteq i_A$ та $\leq^{-1} \cap \left(\leq^{-1}\right)^{-1} \subseteq i_A$.▶

Зауважимо, що відношення $\leq^{-1}$ позначають символом $\geq$.

Відношення $\leq^{-1}$ називають двоїстим до відношення часткового порядку $\leq$.

Теорема 3.6.2.

У довільній частково упорядкованій множині $(A, \leq)$ існує не більше одного найменшого (а на підставі принципу двоїстості й найбільшого) елемента.

Доведення.

Припустимо, що a і b – два найменші елементи у множині A, тоді $a \leq b$ в силу того, що a – найменший елемент і $b \leq a$ в силу того, що b – найменший елемент. Але тоді з антисиметричності відношення $\leq$ випливає, що $a = b$.▶

Тема 4. Відображення та функції

У попередній темі розглянуто бінарні відношення, які є підмножинами декартового добутку двох множин. Бінарні відношення, що визначені на декартовому квадраті множини A^2, представляють інтерес через те, що вони мають деякі важливі властивості: симетричність, рефлексивність, транзитивність тощо.

Для відношень, які утворені різними множинами (тобто $R \subseteq A \times B$), говорити про такі властивості немає сенсу, оскільки перша і друга координати R мають різну природу.

Приклади.

а) Відношення "учень x навчається в школі y" є підмножиною декартового добутку, де A – множина учнів, а B – множина шкіл.

б) Відношення "x народився в році y" є підмножиною декартового добутку, де A – множина людей, а B – множина років.

Для аналізу таких відношень уводять поняття відображення та функції.

4.1. Функціональні відношення

Означення.

Відношення $f \subset A \times B$ називають *функціональним* (або просто *функцією*), якщо для довільного $a \in A$

$$(a,b) \in f \text{ та } (a,c) \in f \Rightarrow b = c,$$

тобто кожному $a \in A : (a,b) \in f$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$.

Також функціональне відношення f записують так:

$$b = f(a), \text{ де } a \in A, b \in B.$$

Означення.

Областю визначення функції f називається множина

$$\mathrm{Dom}\, f = \{a \in A \mid \exists b \in B, b = f(a)\}$$

(Dom – скорочення від Domain – область).

Означення.

Областю значень функції f називається множина

$$\mathrm{Im}\, f = \{b \in B \mid \exists a \in A, b = f(a)\}$$

(Im – скорочення від Image – образ).

Означення.

Функціональне відношення називається *всюди визначеним*, якщо

$$\mathrm{Dom}\, f = A.$$

Приклади.

а) Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,9,16,25\}$, тоді $R_1 = \{(1,1),(2,4),(3,4),(4,16)\}$ – функціональне, але відношення $R_2 = \{(1,1),(1,4),(3,9)\}$ не є функціональним за означенням.

б) Англо-український словник установлює відповідність між множинами англійських і українських слів. Це відношення не є функціональним, оскільки одному англійському слову зазвичай ставиться у відповідність кілька українських слів. Більше того, воно не є всюди визначеним, оскільки завжди можна знайти англійське слово, яке не міститься в цьому словнику.

Означення.

Якщо $(a,b)\in f$ (або $b=f(a)$), то першу координату a впорядкованої пари (a,b) називають *прообразом*, а другу координату b називають *образом*.

Зазначимо, що відношення, обернене до функціонального, у загальному випадку не є функціональним.

Приклад.

Відношення R_1 із попереднього прикладу – функціональне, а обернене відношення $R_1^{-1}=\{(1,1),(4,2),(4,3),(16,4)\}$ – не функціональне.

Означення.

Якщо функціональне відношення $f\subset A\times B$ всюди визначене на A, то його називають *відображенням* множини A в B і записують так:

$$f:A\to B.$$

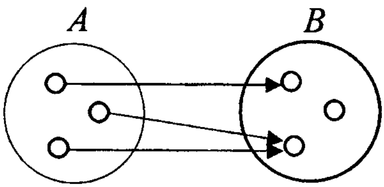
Відображення – окремий випадок функції.

4.2. Типи відображень

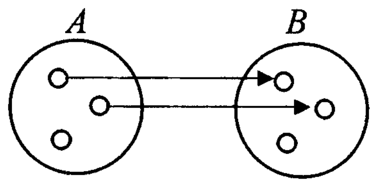
При відображенні A в B кожен елемент $a\in A$ має один і тільки один образ $b\in B$.

Проте зовсім не обов'язково, щоб кожний елемент $b\in B$ був образом деякого елемента з A. З іншого боку, елемент $b\in B$ може бути образом не одного, а кількох елементів із A.

Приклади.



а) відображення



б) функціональне відношення

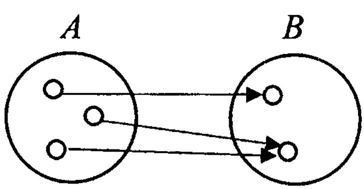
Означення.

Якщо для відображення $f: A \to B$ будь-який елемент $b \in B$ є образом хоча б одного елемента $a \in A$, тобто

$$\forall b \in B \ \exists a \in A: b = f(a),$$

або, що те ж саме, для кожного елемента $b \in B$ існує прообраз, то відображення f називають *сюр'єкцією.*

Ще говорять, що множина A накриває множину B.

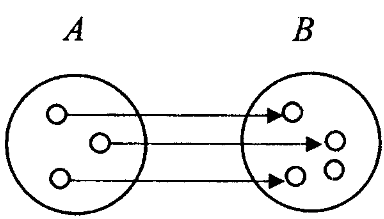


Означення.

Якщо для відображення $f: A \to B$ для будь-яких двох різних елементів a_1 і a_2 з A їх образи b_1 і b_2 також різні, то відображення f називають *ін'єкцією.*

Це записують так:

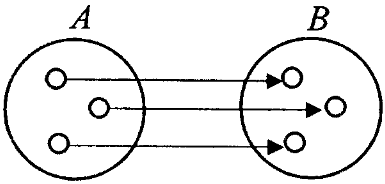
$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$



Означення.

Відображення, яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним, називається *бієкцією.*

У цьому випадку кажуть, що між елементами множин A і B існує *взаємно однозначна відповідність.*



Якщо A – взаємно однозначне відображення, а $A=B$, то $f: A \to A$ називають відображенням множини A на себе.

Приклади.

а) Нехай A і B – множини дійсних чисел і $f: A \to B$ таке, що $f(a)=5a+7$.

Функція f ін'єктивна, тому що, якщо $f(a_1)=f(a_2)$, то $5a_1+7=5a_2+7$, отже $a_1=a_2$.

Функція f сюр'єктивна.

Для будь-якого дійсного b треба знайти таке a, що $f(a)=b=5a+7$.

Розв'язуючи це рівняння відносно a знаходимо: якщо $a=\frac{1}{5}(b-7)$, то $f(a)=b$. Отже, f – бієкція.

б) Нехай A і B – множини дійсних чисел, а $f: A \to B$ має вигляд $f(a)=a^2$.

Функція f не є ін'єкцією, оскільки $f(2)=f(-2)=4$, але $2 \neq -2$.

Функція f не є сюр'єкцією, оскільки не існує дійсного числа a, для якого $f(a)=-1$ (наприклад). Тобто не для кожного елемента з B існує прообраз.

Проте, якщо A і B – множини невід'ємних дійсних чисел, то f буде і сюр'єктивним, і ін'єктивним. Якщо A і B – множини натуральних чисел, то f – ін'єктивне, але не сюр'єктивне.

Означення.

Сукупність усіх елементів, образом яких є заданий елемент b, називається *повним прообразом* елемента b і позначається $f^{-1}(b)$, тобто

$$f^{-1}(b)=\{a: f(a)=b\}.$$

Сукупність елементів $f(a)$, які є образами всіх елементів множини $C\subset A$, називається *образом множини* C і позначається $f(C)$. Сукупність усіх елементів із A, образи яких належать якійсь множині $D\subset B$, називають *повним прообразом множини* D і позначають $f^{-1}(D)$.

Приклад.
Нехай
$A=\{1,2,3,4\}, B=\{5,6,7,8,9\}, f=\{(1,5),(2,7),(3,8),(4,5)\}$.

Повний прообраз елемента $5\in B: f^{-1}(5)=\{1,4\}$.

Покладемо $C=\{1,2\}\Rightarrow f(C)=\{5,7\}$.

Нехай $D=\{7,8\}\Rightarrow f^{-1}(D)=\{2,3\}$.

4.3. Добуток відображень. Обернене відображення

Вище введено операцію добутку (композиції) відношень. Оскільки відображення – це відношення спеціального вигляду, то з'ясуємо, що являє собою добуток відображень.

Нехай $F_1: A\to B$ і $F_2: B\to C$ – деякі відображення.

З означення операції добутку відношень маємо $(a,c)\in F_1*F_2 \Leftrightarrow \exists b\in B:(a,b)\in F_1$ і $(b,c)\in F_2$, тобто $F_1(a)=b$ і $F_2(b)=c$. Отже, $F_2(b)=F_2(F_1(a))=c$.

Таким чином, добуток відображень являє собою операцію суперпозиції функцій: $F_1*F_2(a)=F_2(F_1(a))$.

Теорема 4.3.1.

а) Добуток ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням.

б) Добуток сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням.

в) Добуток бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Доведення.

Нехай $f : A \to B$, $f_1 : B \to C$.

а) Нехай $a \neq a_1$. На підставі ін'єктивності f отримуємо, що $f(a) \neq f(a_1)$. Проте на підставі ін'єктивності f_1 маємо $f_1(f(a)) \neq f_1(f(a_1))$, тобто $f * f_1(a) \neq f * f_1(a_1) \Rightarrow f * f_1$ – ін'єкція.

б) На підставі сюр'єктивності відображень f і f_1 $\forall c \in C\ \exists b \in B : f_1(b) = c$. Далі $\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$. Але тоді $f_1(f(a)) = c$, тобто $f * f_1(a) = c \Rightarrow f * f_1$ – сюр'єкція.

в) Випливає з пунктів а) і в). ▶

Означення.

Відображення $\varepsilon_A : A \to A$, яке ставить у відповідність кожному елементу множини A той самий елемент, тобто $\forall a \in A$ $\varepsilon_A(a) = a$, називають *тотожним* відображенням.

Означення.

Відображення $g : B \to A$ називають *оберненим* до відображення $f : A \to B$, якщо $f * g = \varepsilon_A$ і $g * f = \varepsilon_B$. Обернене відображення позначають f^{-1}.

Це означає, що $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.

Приклад.

$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$.

Теорема 4.3.2.

Відображення $f : A \to B$ має обернене відображення f^{-1} тоді й тільки тоді, коли f – бієкція.

Теорема 4.3.3.

Якщо відображення f має обернене, то це відображення єдине.

Доведення.

Припустимо, що існує два відображення g і g', які обернені до f, тобто $f*g=\varepsilon_A$ і $g*f=\varepsilon_B$ та $f*g'=\varepsilon_A$ і $g'*f=\varepsilon_B$. Тоді отримуємо

$$g'=\varepsilon_B*g'=(g*f)*g'=g*(f*g')=g*\varepsilon_A=g. \blacktriangleright$$

Тема 5. Потужність множин

5.1. Основні означення

Розглянемо питання про те, як порівнюються між собою множини за кількістю своїх елементів. Нехай A і B – дві довільні множини.

Означення.

Множини A і B називаються *рівнопотужними* ($A\sim B$), якщо між їх елементами існує взаємно однозначна відповідність (бієкція).

Очевидно, що відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності, і тому рівнопотужні множини часто називають *еквівалентними.*

Означення.

Потужністю або *кардинальним числом* ($\operatorname{card} A$) множини A називають клас еквівалентності, якому належить A за відношенням рівнопотужності.

Якщо A і B – скінченні множини, то їх рівнопотужність означає, що вони мають одну і ту саму кількість елементів. При цьому порожній множині $\varnothing$ відповідає число нуль, а скінченній множині, яка складається з n елементів – число n.

Приклад.

Множина десяткових цифр рівнопотужна множині пальців на руках людини ($\operatorname{card} A = 10$), але не є рівнопотужною множині пальців на руках і на ногах.

Означення.

Множина, що не є скінченною, називається *нескінченною.*

Означення.

Потужність нескінченної множини називають *трансфінітним кардинальним числом*, або просто *трансфінітним числом.*

Означення.

Множина, еквівалентна (рівнопотужна) множині натуральних чисел N, називається *зліченною множиною.*

Потужність зліченної множини позначають трансфітним числом $\aleph_0$ (алеф-нуль).

Зліченну множину A можна визначити як множину, елементи якої можна розташувати у вигляді списку (навіть, якщо цей список буде нескінченним). Тоді кожному елементу множини можна поставити у відповідність його порядковий номер у цьому списку, тобто може бути побудоване відображення із N в A $f(n): N \to A$, де $n \in N$. Таке відображення називають *нумерацією.*

Означення.

Кажуть, шо множина *не більш, ніж зліченна*, якщо вона або скінченна, або зліченна.

5.2. Основні теореми

Теорема 5.2.1.

Об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.

Доведення.

Нехай скінченна множина містить k елементів і визначена нумерація елементів зліченної множини: $a_n \leftrightarrow n$. Елементам скінченної множини присвоїмо номери з 1 по k, а елементи зліченної множини нумеруємо за допомогою зсуву на k : $a_n \leftrightarrow n+k$. Очевидно, що таким чином побудовано нумерацію об'єднання множин. ▶

Теорема 5.2.2.

Будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або злiченна.

Доведення.

Нехай A – зліченна множина, а B – її підмножина. Оскільки A – зліченна, то кожному її елементу відповідає номер – натуральне число. Серед елементів B оберемо елемент із найменшим номером і присвоїмо йому номер 1. Далі з решти елементів виберемо елемент із найменшим номером і присвоїмо йому номер 2. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо строго зростаючу послідовність номерів $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ Якщо через скінченну кількість кроків ми виберемо всі елементи множини B, то вона скінченна. Якщо ж B – нескінченна множина, то ми дістанемо її бієкцію на множину натуральних чисел, яка визначається так: $n_k \to k, k \in N$. ▶

Теорема 5.2.3.

Об'єднання скінченної або зліченної множини зліченних множин є множиною зліченною.

Доведення.

Розглянемо спочатку випадок скінченної кількості зліченних множин. Нехай $A_1,...,A_k$ – ці множини і $a_{ij} \in A_i$ $(i = \overline{1,k})$ – їх елементи, тобто

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12},..., a_{1n},...\}, \ldots, \ A_k = \{a_{k1}, a_{k2},..., a_{kn},...\}.$$

Розглянемо послідовність

$$a_{11},..., a_{k1}, a_{12},..., a_{k2},..., a_{1n},..., a_{kn},...$$

Таку послідовність можна перелічити. Якщо деякий елемент цієї послідовності при переліку вже зустрічався й одержав номер, то він пропускається. Отже, множина $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ – зліченна.

Нехай маємо зліченну множину зліченних множин $A_1, A_2,..., A_n,...$, де $A_i = \{a_{i1}, a_{i2},...\}$. Існує лише скінченна кількість елементів a_{ik}, для яких $i + k = 2$. Аналогічно існує лише скінченна кількість елементів a_{ik}, для яких $i+k=3$ і т. д. Перенумеруємо спочатку всі елементи, для яких $i+k=2$ (наприклад, за зростанням значення i), а потім (за допомогою інших чисел) – елементи, для яких $i+k=3$ і т. д. При цьому кожний елемент a_{ik} одержить деякий номер, і різні елементи матимуть різні номери. Звідси випливає справедливість теореми. ►

Наслідок 5.2.1.

Декартовий добуток $A \times B$ зліченних множин є множина зліченна.

Доведення.

Нехай $A = \{a_1,...,a_n,...\}$, $B = \{b_1,...,b_n,...\}$, тоді множину всіх елементів множини $A \times B$ можна подати як об'єднання зліченної сукупності зліченних множин вигляду:

$$A_1 = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_1,b_n),...\},$$
$$A_2 = \{(a_2,b_1),(a_2,b_2),...,(a_2,b_n),...\},$$
$$\dots$$
$$A_n = \{(a_n,b_1),(a_n,b_2),...,(a_n,b_n),...\},$$
$$\dots$$

Враховуючи попередню теорему, робимо висновок про те, що множина $A \times B$ зліченна. ►

Зауважимо, що існують множини, елементи яких перелічити неможливо. Такі множини логічно називати *незліченними*.

Означення.

Нескінченні множини, які не рівнопотужні множині натуральних чисел, називаються *незліченними*.

Теорема 5.2.4 (Кантора).

Множина всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$ незліченна.

Доведення.

Доведення ґрунтується на діагональному методі Кантора. Як відомо, кожному дійсному числу з інтервалу $(0,1)$ можна однозначно зіставити правильний нескінченний дріб $0,a_1a_2...a_n...$, який має нескінченно багато цифр.

Припустимо, що теорема хибна і множина дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$ злічення. Тоді для цієї множини повинен існувати перелік:

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}...a_{1n}...,$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}...a_{2n}...,$$
$$...$$
$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}...a_{nn}...,$$
$$...$$

Прямуючи по діагоналі (тобто по елементах $a_{11}, a_{22},...,a_{nn},...$), побудуємо новий дріб $0, a'_{11}a'_{22}...a'_{nn}...$, такий, що $a'_{ii} = 1$, якщо $a_{ii} \neq 1$, і $a'_{ii} = 2$, якщо $a_{ii} = 1$, для довільного $i = 1,2,...$

Побудований таким чином дріб не входить до розглянутого переліку, оскільки відрізняється від кожного елемента x_i числом a_{ii}, яке розташоване на діагоналі.

Отже, переліку всіх чисел з інтервалу $(0,1)$ не існує, і припущення про зліченність цієї множини хибне. ▶

Наслідок 5.2.2.

Якщо A – незліченна множина і $B \subseteq A$ – злічення, то множина $A \setminus B$ є незліченна.

Доведення.

Якби $A \setminus B$ була злічення, то на підставі теореми про об'єднання була б зліченною і множина $(A \setminus B) \cup B = A$. Отримали протиріччя. ▶

Наслідок 5.2.3.

Множина всіх ірраціональних чисел незліченна.

Доведення.

Нехай I – множина ірраціональних чисел, Q – раціональних чисел, R – дійсних чисел.

$I = R \setminus Q$, а Q – злічення. Отже, згідно з наслідком 5.2.2 множина I незліченна.

Означення.

Множина, еквівалентна множині дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$, називається множиною *потужності континууму*.

Потужність континууму позначається $\aleph_1$ (алеф-один).

Теорема 5.2.5 (Кантора – Берштейна).

Якщо множина A еквівалентна деякій підмножині B_1 множини B, і множина B еквівалентна деякій підмножині A_1 множини A, то множини A і B рівнопотужні.

Контрольні питання до розділу 1

1. Що називається множиною?
2. Які способи задання множин вам відомі?
3. У чому полягає парадокс Расселла?
4. Що таке булеан множини?
5. Які операції виконуються над множинами?
6. Сформулюйте закони алгебри множин.
7. Що називається покриттям, розбиттям множини?
8. Що таке декартовий добуток множин, декартовий степінь множини?
9. Що таке відношення?
10. Які способи задання відношень існують?
11. Назвіть основні властивості бінарних відношень.
12. Що називається оберненим відношенням?
13. Що таке композиція відношень?
14. У чому полягає відношення еквівалентності?
15. Що називається відношенням строгого часткового порядку?
16. Що таке відношення нестрогого часткового порядку?
17. Якою буде матриця рефлексивного (симетричного, антисиметричного, транзитивного) відношення, заданого на непорожній скінченній множині?
18. Що таке функціональні відношення?
19. Що таке відображення?
20. Які типи відображень Ви знаєте?
21. Що називається добутком відображень?
22. Що таке обернене відображення?
23. Що називається потужністю множини?
24. Що таке рівнопотужні множини?
25. Сформулюйте теорему Кантора.

Задачі до розділу 1

1. Наведені множини задати переліком їхніх елементів:

   1) $A = \{ x + y \mid x, y - \text{прості числа, не більші за } 36\}$;

   2) $A = \left\{ x \in N \middle| x^2 + 2x - 15 = 0 \right\}$.

2. Чи правильно, що

   1) множини $\{1,\{2,5\},6\}$, $\{1,2,5,6\}$ рівні?

   2) множини $\{\{2,3\},\{3,4\}\}$, $\{2,3,4,\}$, $\{2,3,\{4\}\}$ рівні?

   3) $\{a,b\} \in \{\{a,b,c\},\{a,c\},a,b\}$?

   4) $\{a,b\} \subset \{\{a,b,c\},\{a,c\},a,b\}$?

   5) $\{b,c,d\} \subset \{a,\{b,c,d\},e,f\}$?

   6) $x \in \{x\}$?

   7) $\{\varnothing\} \subset \{\{\varnothing\}\}$?

   8) $\{x \in C : x^2 - x + 1 = 0\} = \varnothing$?

3. Навести приклади таких множин A, B, C, для яких $A \in B, B \in C, A \in C$.

4. Як співвідносяться між собою такі множини:

$A = \{1,3\}$, $B -$ множина непарних додатних чисел, C – множина розв'язків рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

5. Записати булеан множин, знайти потужність булеана:

   1) $A = \{0,\{1,2\},4\}$;

   2) $A = \{\{a\},\{b\},c\}$.

6. $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,4,5\}$.

Виписати $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{B}$, $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

7. Нехай задано множини A, B, C: $A = \{(x,y) \mid x + 2 \le y\}$; $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$; $C = \{(x,y) \mid |x| \le 2, |y| \le 2\}$.

Зобразити в системі координат xOy множину $D = A \setminus (B \div C)$.

8. Знайти такі множини $A \subset U$ та $B \subset U$, що для будь-якої множини $X \subset U$ виконується $X \cap A = X \cup B$.

9. Нехай задано множини A та B, $|A| = n$, $|B| = m$. Оцінити кількість елементів у об'єднанні, перетині, різниці, симетричній різниці множин A та B.

10. Група студентів налічує 25 осіб. Із них 15 люблять математику, 10 – фізику, 8 – не люблять ані математику, ані фізику. Скільки студентів люблять і математику, і фізику?

11. У спеціалізованому магазині за тиждень куплено 88 процесорів, 85 моніторів та 52 принтери. Відомо, що 76 покупців придбали процесор і монітор, 41 – процесор і принтер, 43 – монітор і принтер. Відомо також, що 41 покупець купив усі три речі. Скільки покупців здійснили ці покупки. Скільки з них купили монітор і принтер, але не купили процесор?

12. Першу або другу контрольну роботу з математики успішно написали 33 студенти. Першу або третю – 31 студент, другу або третю – 32 студенти. Не менше двох контрольних виконали 20 студентів. Скільки студентів успішно виконали лише одну контрольну?

13. Довести рівність множин (за допомогою леми й означення, діаграмам Ейлера – Венна, таблиць належності):

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

14. Використовуючи закони алгебри множин, довести рівності:

1) $A \cap (A \cup B) = A$;

2) $A \cap A = A$;

3) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

4) $\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \cup B = \overline{A} \cup B$;

5) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

6) $\left(\overline{\overline{A} \cup B \cup C}\right) \cap \left(A \cap \left(B \cup \overline{C}\right)\right) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

7) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

8) $\overline{A \Delta B} = \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

15. Довести, що

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$.

16. Задано дві множини $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ та $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Побудувати $A \times B$. Що собою представляє ця множина?

17. Нехай $A=\{3,4,5\}$, $B=\{c,d\}$, $C=\{1,2\}$. Побудувати A^2, B^2, $A\times B$, $B\times C$, $(A\times B)\times C$, $A\times(B\times C)$. Побудувати тернарне відношення $R\subseteq A\times B\times C$ і бінарні відношення $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$. Знайти відношення $R_1 * R_2$ на множинах A,C. Побудувати відношення $R_1,R_2\subseteq A^2$, $R_1 * R_2$ і $R_2 * R_1$ та матриці цих відношень.

18. Придумати приклади унарних та бінарних відношень.

19. Довести:

1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

2) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

20. $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Записати матриці відношень:

1) відношення $\le$;

2) "мати спільний дільник, відмінний від 1";

3) "a – дільник b".

Також побудувати графи відношень.

21. Нехай $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R_1,R_2\subseteq A^2$, $R_1=\{(1,2),(2,3),(6,2),(6,3)\}$, $R_2=\{(1,2),(1,5),(4,3),(4,5),(3,2),(2,3)\}$. Знайти матриці перетину, об'єднання, композиції цих відношень двома способами.

22. Довести, що R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R * R\subseteq R$.

23. Визначити властивості відношення "Пряма x перетинає пряму y".

24. Чи будуть наступні відношення відношеннями еквівалентності?

1) "Трикутник x подібний трикутнику y";

2) $mRn \Leftrightarrow m-n$ є непарним числом ($m,n\in Z$).

25. Нехай $m,n\in Z$ і $mRn \Leftrightarrow m-n$ є парним числом. Чи є відношення R відношенням еквівалентності? Якщо так, то скільки класів еквівалентності воно має.

26. Якщо R, R_1 – відношення еквівалентності, що задані на множині A, то $R * R_1$ – відношення еквівалентності на A тоді й тільки тоді, коли $R * R_1 = R_1 * R$.

27. Чи є відношення $R=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, задане на декартовому квадраті $A=\{1,2,3,4\}$, бієктивним відображенням?

28. Нехай R задано на декартовому добутку $B\times P$, де B – множина всіх книг у книжковому магазині, P – множина цін. Пара $(x,y)\in R$ тоді й тільки тоді, коли книга x має ціну y. Чи є R функцією? Якщо так, то чи є функція сюр'єкцією та ін'єкцією?

29. Нехай $A=\{a,b,c,d\}, B=\{e,f,g,h\}, C=\{a,b\}\subset A$, $D=\{g,e\}\subset B$, $f=\{(a,e),(b,g),(c,h),(d,e)\}$.

Визначити $f^{-1}(e), f(C), f^{-1}(D)$.

30. Нехай $f:Q\to Q$, $f(x)=x+2$, $g:Q\to Z$, $g(x)=[x^3+2]-1$. Знайти $f*g, g*f$ і дослідити властивості цих композицій (чи є вони функціональними відношеннями, чи є бієкціями). Знайти функцію, обернену до f, та дослідити її властивості.

31. Нехай $\varphi:x\to x+3$, $\psi:x\to x+2$ задані на множині дійсних чисел. $\varphi*\psi$ – ?

32. Показати, що функція $g:R^+\to R^+$, де $g(x)=x^2$, є бієкція та знайти обернену.

33. Нехай $f:A\to B$ – деяке відображення. Довести, що

$f^{-1}(X\cap Y)=f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$.

34. Довести, що якщо $f:A\to B, g:B\to C$, то $(f*g)^{-1}=g^{-1}*f^{-1}$.

35. Установити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2, і натуральним рядом.

36. Довести, що множина натуральних чисел, кратних 3, і множина натуральних чисел, кратних 5, є рівнопотужними.

37. Довести, що множина цілих чисел зліченна.

38. Довести, що множина Q всіх раціональних чисел зліченна.

39. Довести, що множина всіх ірраціональних чисел має потужність континууму.

Розділ 2
Комбінаторика

Тема 6. Метод математичної індукції

У різних сферах своєї діяльності (науці, побуті чи виробництві) людина у своїх логічних висновках застосовує дедуктивний або індуктивний підхід, який базується на поняттях дедукції та індукції.

Дедукція являє собою перехід від загального до окремого, *індукція* – перехід від окремого до загального. Спільним для цих підходів є те, що вони доводять істинність чи хибність деяких тверджень, які до цього сприймаються як гіпотези (припущення). Ці твердження поділяють на загальні й окремі. Наприклад, твердження про те, що всі натуральні парні числа діляться на 2, є загальним, а твердження, що число $x = 6$ ділиться на 2, є окремим.

6.1. Повна індукція і неповна індукція

Індукція, на відміну від дедукції, виходить з окремих тверджень і тому не завжди дозволяє переходити від них до загальних тверджень. Розглядають неповну (звичайну) індукцію, повну індукцію і математичну індукцію.

Звичайна індукція створює висновок про істинність чи хибність математичного твердження на основі певних окремих результатів, одержаних при дослідженні тієї чи іншої математичної властивості. Це твердження можна вважати дійсним лише в разі дослідження всіх без винятку можливих окремих результатів, що буває лише тоді, коли їх кількість є *скінченною.* У випадку, коли кількість можливих результатів *нескінченна,* отримати висновок про істинність або хибність твердження за допомогою звичайної індукції неможливо.

Приклад.

Нехай є тричлен $x^2 + x + 41$. При підстановці в нього чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 одержимо прості числа 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 87, 113, 131, 151 відповідно.

Здається, можна припустити, що у разі підстановки в цей тричлен будь-якого цілого додатного числа завжди в результаті одержуватимемо просте число. Однак це не так. Уже у випадку $x = 40$ тричлен ділиться на 41, а за умови $x = 41$ тричлен $x^2 + x + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 2)$, тобто ділиться на 41 і 43.

Повна індукція полягає в тому, що загальне твердження доводиться окремо в кожному зі скінченного числа можливих випадків.

Приклад.

Нехай треба встановити, що кожне парне число в межах $4 \le n \le 12$ можна подати у вигляді суми двох простих чисел. Випишемо ці числа і відповідні розклади: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 5 + 3$; $10 = 7 + 3$; $12 = 7 + 5$. Отже, кожне із чисел, що нас цікавлять, подається у вигляді суми двох простих доданків.

6.2. Математична індукція

Математична індукція дозволяє робити достовірні узагальнення на основі неповної індукції.

Метод математичної індукції використовується для доведення істинності певного твердження для всіх натуральних чисел. Математична індукція, яка ще має назву *індукція за побудовою*, використовується також для доведення логічних формул.

Теорема 6.2.1.

Будь-яке твердження $P(n)$ дійсне для будь-якого n у випадку, якщо воно дійсне для $n = 1$, та з істинності цього твердження для довільного $n = k$ випливає його істинність для $n = k + 1$.

Із теореми випливає *метод математичної індукції*, що складається з виконання наведених нижче пунктів, що стосуються одержання твердження $P(n)$:

1. Висувається нова гіпотеза у вигляді твердження $P(n)$ про деяку математичну властивість, яка може бути як істинною, так і хибною.

2. Здійснюється перевірка гіпотези $P(n)$ для $n = 1$. Якщо $P(n = 1)$ підтверджується, то переходимо до п. 3. Інакше гіпотеза вважається неправильною і відбувається перехід до п. 1.

3. Доводиться гіпотеза $P(n)$ для $n=k+1$ за умови, що $P(n=k)$ істинне.

4. Якщо $P(n=k+1)$ істинне, то доведення гіпотези $P(n)$ для будь-якого натурального n одержано. Якщо $P(n=k+1)$ хибне, то переходимо до п.1.

Зауважимо, що перший крок алгоритму являє собою неповну індукцію. Другий крок є *базою* методу математичної індукції. Третій крок є *індукційним кроком* методу.

Приклад.

Знайти вираз для суми перших n непарних чисел натурального ряду $P(n)=1+3+...+(2n-1)$.

Проаналізувавши перші початкові числа ряду, отримуємо гіпотезу, що $P(n)=n^2$.

1-й крок: $P(n=1)=1=1^2=1$. Правильно.

2-й крок: Нехай твердження правильне для $n=k$.

Тоді $P(n=k)=1+3+...+(2k-1)=k^2$.

Розглянемо

$$P(n=k+1)=1+3+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=$$
$$=P(n=k)+(2(k+1)-1)=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Гіпотезу підтверджено. ▶

Тема 7. Загальна характеристика комбінаторних задач

Під *комбінаторикою* зазвичай розуміють розділ дискретної математики, присвячений розв'язанню задач про вибір та розміщення елементів *скінченної* множини згідно із заданими правилами. Ці задачі пов'язані з підрахунком кількості всіх можливих способів виконання певної дії зі скінченної множини таких дій.

Наприклад, скількома різними способами можна розставити дужки у виразі $a+b+c+d+e$, якщо операція $+$ асоціативна, а літери a,b,c,d,e – деякі дійсні числа?

Кожне правило, за яким відбувається вибір та розміщення елементів множини, визначає спосіб побудови деякої конструкції з елементів вихідної множини, що називається *комбінаторною конфігурацією (або об'єктом)*. Прикладами основних комбінаторних конфігурацій є розміщення, перестановки, сполучення, про які буде сказано далі. Отже, можна сказати, що метою комбінаторики є вивчення комбінаторних конфігурацій.

Термін "комбінаторика" ввів Готфрід Лейбніц – німецький філософ та математик, який в 1666 р. опублікував свою роботу "Міркування про комбінаторне мистецтво". Значний внесок у розвиток комбінаторики зробив учень Лейбніца – Якоб Бернуллі, який увів ряд комбінаторних понять і вказав їх застосування для підрахунку ймовірностей. Можна вважати, що з появою робіт Г. Лейбніца і Я. Бернуллі комбінаторні методи виділились у самостійну частину математики.

Спочатку основною областю застосування комбінаторики були азартні ігри. Однак за останні кілька десятків років комбінаторні методи стали інструментом розв'язання великої кількості практично важливих задач, таких як складання розкладів, планування виробництва, розміщення об'єктів на деякій території. Методи комбінаторики застосовують у біології, хімії, фізиці, економіці, при розв'язанні задач кодування й побудові обчислювальних пристроїв тощо.

7.1. Комбінаторні задачі

Виділимо важливі типи комбінаторних задач.

1) *Задача на доведення існування* комбінаторних конфігурацій, які задовольняють певні умови.

Спочатку формулюються вимоги до класу комбінаторних конфігурацій, які потрібно побудувати. Потім доводиться, що хоча б одна така конфігурація існує, незважаючи на те, що побудувати таку конфігурацію досить непросто. Тому інколи буває достатньо теоретичного доведення її існування.

Приклад.

Існування магічних та латинських квадратів.

2) *Задача підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій*, які відповідають вихідним правилам їх побудови.

Одним із розповсюджених способів розв'язання задач такого типу є:

- правило суми;
- правило добутку;
- принцип включення-виключення.

Приклад.

Скількома різними способами можна розмістити групу студентів із 30 осіб на 30 чи більше місцях?

3) *Задача побудови комбінаторних конфігурацій.*

Приклад.

Потрібно не лише порахувати кількість можливих варіантів розподілу 30 студентів на 30 місцях, а й побудувати всі ці розподіли або деякі з них.

4) *Задача про пошук серед комбінаторних конфігурацій такої, яка приводила б деяку функцію до оптимуму.* Ця задача містить задачі комбінаторної оптимізації.

Приклад.

Як приклад можна привести задачу комівояжера, яка полягає у відшуканні найвигіднішого маршруту, що проходить через вказані міста хоча б по одному разу з наступним поверненням у вихідне місто (в умовах задачі вказується критерій вигідності маршруту – найкоротший, найдешевший тощо).

Методи розв'язання комбінаторних задач називають *методами комбінаторного аналізу.* Оскільки комбінаторика має справу зі скінченними множинами, то її часто називають *теорією скінченних множин.*

7.2. Правило суми та добутку

В основі розв'язування багатьох задач комбінаторики лежать два основні правила комбінаторики: правило суми і правило добутку.

Правило суми стверджує, що якщо є можливість вибрати елемент із деякої множини елементів A m способами, а елемент із множини B, яка *не має* спільних елементів із множиною A, – k способами, то вибрати елемент множини A або елемент множини B можна $m+k$ способами.

Це правило зручно продемонструвати за допомогою такої моделі. Якщо маємо дві урни, і в одній із них міститься m куль, а в іншій – k, то кількість способів, якими можна буде вийняти кулю з тієї чи іншої урни, дорівнюватиме $m+k$.

У загальному випадку правило суми можна сформулювати таким чином.

Якщо якусь дію можна виконати n_1 або $n_2,\ldots,$ або n_k способами, то кількість можливих способів реалізації цієї дії буде така:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k .$$

Приклад.

На денне чергування у студентському гуртожитку може піти або студент із кімнати 1, де проживають три студенти, або студент із кімнати 2, де проживають чотири студенти. Скількома способами можна вибрати одного студента на денне чергування в гуртожитку?

Загальна кількість способів, якими можна вибрати одного студента або з кімнати 1, або з кімнати 2 на денне чергування буде $3+4=7$.

Мовою множин правило суми формулюється так.

Нехай M – це об'єднання множин $M_1, M_2, \ldots, M_k$, які попарно не перетинаються ($M_i \cap M_j = \varnothing,\ i<j$), тоді кількості елементів множин зв'язані співвідношенням

$$|M| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} M_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |M_i| .$$

Правило добутку використовується тоді, коли кожний елемент множини A можна вибрати разом з елементом множини B. Відповідно до кожного з m способів вибору елемента множини A зіставляється k способів вибору елемента множини B. Тоді загальна кількість способів сумісного вибору елементів множини A з елементів множини B дорівнює $m \cdot k$.

Це правило можна узагальнити таким чином.

Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і так далі до k-ї, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад.

Із міста A у місто B йде 5 доріг, а з міста B в місто C – 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C ?

Щоб проїхати з міста A в місто C , треба проїхати з A до B та з B до C . Тоді, за правилом добутку, існує $5 \cdot 3 = 15$ способів.

Мовою множин правило добутку формулюється так.

Якщо $M_1, M_2, ..., M_k$ – скінченні множини, то

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|.$$

Пригадаємо, що коли ми розглядали декартовий добуток $A \times B$, де $|A| = n$, $|B| = m$, то ми керувалися саме правилом добутку для того, щоб указати, що кількість пар декартового добутку дорівнює $n \cdot m$.

Тема 8. Основні комбінаторні конфігурації

8.1. Розміщення, сполучення та перестановки

Розглянемо основні комбінаторні конфігурації (об'єкти) – розміщення, сполучення та перестановки, попередньо означивши важливе поняття вибірки.

Означення.

Набір елементів $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}$ n-елементної множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ називається *k-вибіркою* з n елементів.

Якщо задано порядок елементів вибірки, то ця вибірка називається *впорядкованою*, якщо порядок не задано, то вибірка називається *невпорядкованою*.

Приклад.

а) Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складемо трьохзначні числа 123, 431, 345,... і т.д. Це впорядковані тризначні вибірки, тому що, наприклад, 123 і 321 – різні числа.

б) Із 30 учнів класу обиратимемо двох чергових. Будь-яка пара чергових є невпорядкованою двоелементною вибіркою, тому що порядок їх вибору не важливий.

Означення.

Упорядковані k-вибірки з n-елементної множини називають *розміщенням з n елементів по k* або ***k-розміщеннями.***

Кількість усіх таких розміщень позначають через A_n^k.

Означення.

Невпорядковані k-вибірки з n-елементної множини називають *сполученнями (комбінаціями) з n елементів по k* або ***k-сполученнями.***

Кількість усіх таких сполучень позначають через C_n^k.

Означення.

Розміщення з n елементів по n називається *перестановкою.* Перестановки з n елементів називають також *n-перестановками.*

Кількість усіх перестановок n-елементної множини позначають через P_n.

Відмітимо, що вибірки можуть бути з повтореннями (коли той самий елемент із множини A може зустрічатися у виборці декілька разів) і без повторень (коли вибірка не містить однакових елементів).

Теорема 8.1.1.

Кількість усіх перестановок n-елементної множини така: $P_n = n!$

Доведення.

Послідовно вибиратимемо елементи множини A і розміщуватимемо їх у заданому порядку на n місцях.

На першому місці розмістимо довільний із n елементів множини A, тобто маємо n можливостей. Після заповнення першого місця на другому місці розмістимо довільний із $(n-1)$ елементів і т. д. За основним правилом комбінаторики (правилом добутку) маємо

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Тобто існує $n!$ можливостей упорядкувати n-елементну множину A.▶

Приклад.

Скількома різними способами можна розмістити п'ять книжок на книжковій полиці?

Кількість розміщень дорівнює кількості способів упорядкування 5-елементної множини: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.▶

Теорема 8.1.2.

Кількість усіх k-розміщень із n елементів така: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доведення.

Кожне k-розміщення є впорядкованою послідовністю завдовжки k, члени якої попарно різні й вибираються з n-елементної множини. Тоді перший член цієї послідовності може бути вибраний n способами, після вибору першого члена послідовності другий – $(n-1)$ способами, третій – $(n-2)$ способами і т. д., k-й член може бути вибраний $n-(k-1) = n-k+1$ способами. Тоді за правилом добутку маємо

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \ ▶$$

Приклад.

Скількома різними способами можна розмістити 5 студентів в аудиторії, яка має 20 місць?

Шукана кількість способів дорівнює кількості розміщень із 20 елементів по 5 елементів, тобто

$A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$.

Зауважимо, що теорему 8.1.1 можна було одержати як наслідок теореми 8.1.2, оскільки $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

Теорема 8.1.3.

Кількість усіх сполучень із n елементів по k така:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доведення.

Довільне k-елементне розміщення можна отримати, обравши k-елементне сполучення, а потім упорядкувати його елементи. Першу дію можна виконати C_n^k способами, другу (упорядкування), незалежно від обраної комбінації згідно з теоремою 8.1.1 $(n=k)$ можна виконати $k!$ способами. За правилом добутку маємо

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$

Звідси випливає, що $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. ►

Числа C_n^k називають *біноміальними коефіцієнтами.*

Приклад.

Скільки 3-елементних сполучень можна отримати з літер *a, b, c, d, e.*

За теоремою 8.1.3 кількість 3-елементних сполучень $C_5^3 = 10$, а саме: $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\},\{c,d,e\}$.

8.2. Розміщення, сполучення та перестановки з повтореннями

Теореми, розглянуті вище, стосувалися вибірок без повторень. Тепер спробуємо встановити аналогічні теореми для вибірок із повтореннями.

Позначимо кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по k через $\widetilde{A}_n^k$.

Теорема 8.2.1.

Справджується рівність $\widetilde{A}_n^k = n^k$.

Доведення.

Кожне із шуканих розміщень є впорядкованою послідовністю завдовжки k. Оскільки розміщення з повтореннями, то кожний член цієї послідовності може бути вибраний будь-яким із n способів. За правилом добутку маємо

$$\underbrace{(n \cdot n \cdot \ldots \cdot n)}_{k} = n^k . ►$$

Приклад.

Скільки слів із чотирьох літер можна скласти з літер "М", "А"?

Складемо декілька таких слів: ММMA, МАМА, МААА,... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється, порядок елементів у вибірці є суттєвим. Тому це розміщення з повтореннями із двох літер "М" і "А" по 4 літери: $\tilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями).

Нехай є n елементів k різних типів, n_j $(j = \overline{1,k})$ – кількість елементів j-го типу, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Перестановки з n елементів за такої умови називають ***перестановками з повтореннями***. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Теорема 8.2.2.

Кількість різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких n_1 елементів – 1-го типу, n_2 елементів – 2-го типу, ..., n_k елементів – k-го типу, така:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доведення.

Кожну звичайну перестановку можна дістати у два кроки:

1) обрати перестановку з повтореннями $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, в якій елементи однакового типу не розрізняються;

2) почати розрізняти елементи одного типу (наприклад, увівши нумерацію) і зробити k перестановок елементів однакового типу.

Кількість способів, якими можна зробити перший крок (за означенням), дорівнює $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Елементи 1-го типу можна переставити $n_1!$ способами, 2-го типу – $n_2!$ способами і т. д., k-го типу – $n_k!$ способами.

Отже, за правилом добутку другий крок можна виконати $n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$ способами. Оскільки загальна кількість звичайних перестановок дорівнює $n!$, то за тим самим правилом добутку дістаємо $n! = P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$, звідси отримуємо

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} \blacktriangleright$$

Приклад.

Знайдемо кількість слів, які можна утворити, переставляючи літери слова МАТЕМАТИКА.

У слові МАТЕМАТИКА 2 літери – "М", 3 – "А", 2 – "Т", 1 – "Е", 1 – "И", 1 – "К". Усього у слові 10 літер. За формулою з теореми 8.2.2 маємо

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 6} = 151200.$$

Числа $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ називають *поліноміальними коефіцієнтами.*

Позначимо через $\tilde{C}_n^k$ кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по k (усіх k-елементних невпорядкованих вибірок, кожний елемент якої належить одному з n типів).

Теорема 8.2.3.

Кількість різних комбінацій (сполучень) із n елементів по k елементів із повтореннями така:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Доведення.

Для доведення виконаємо "кодування" кожного сполучення таким чином: якщо сполучення включає n_1 елементів 1-го типу, то записуємо підряд n_1 одиниць, ставимо нуль і після нього ставимо підряд n_2 одиниць, якщо сполучення включає n_2 елементів 2-го типу, і т. д.

Наприклад, для множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ сполученню $abbce$ відповідає "код" 101101001, а $bbbee$ – "код" 011100011.

Очевидно, що кожний "код" для k сполучень із n елементів із повтореннями містить k одиниць і $(n-1)$ нулів, тобто це є перестановка з повтореннями із $(k+n-1)$ елементів, яка містить k одиниць і $(n-1)$ нулів. Отже, шукана кількість k-сполучень $\tilde{C}_n^k$ збігається з кількістю перестановок із повтореннями $P_{n+k-1}(k,n-1)$ із $(n+k-1)$ елементів.

Таким чином $\tilde{C}_n^k = P_{n+k-1}(k,n-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$. ▶

Приклад.

У хлібному відділі магазину є буханки білого та чорного хліба. Скількома способами можна купити 6 буханок хліба?

Позначимо буханки білого та чорного хліба літерами Б та Ч відповідно. Складемо декілька вибірок: БЧЧЧЧЧ, БББЧЧЧ,... – це сполучення з повтореннями.

Отже, $\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = \dfrac{7!}{6!(7-6)!} = 7$. ▶

8.3. Схема визначення типу комбінації

Зведемо у систему отримані формули всіх шести видів комбінацій із повтореннями та без. Наведемо алгоритм визначення типу комбінації за схемою на с. 67.

8.4. Властивості біноміальних коефіцієнтів

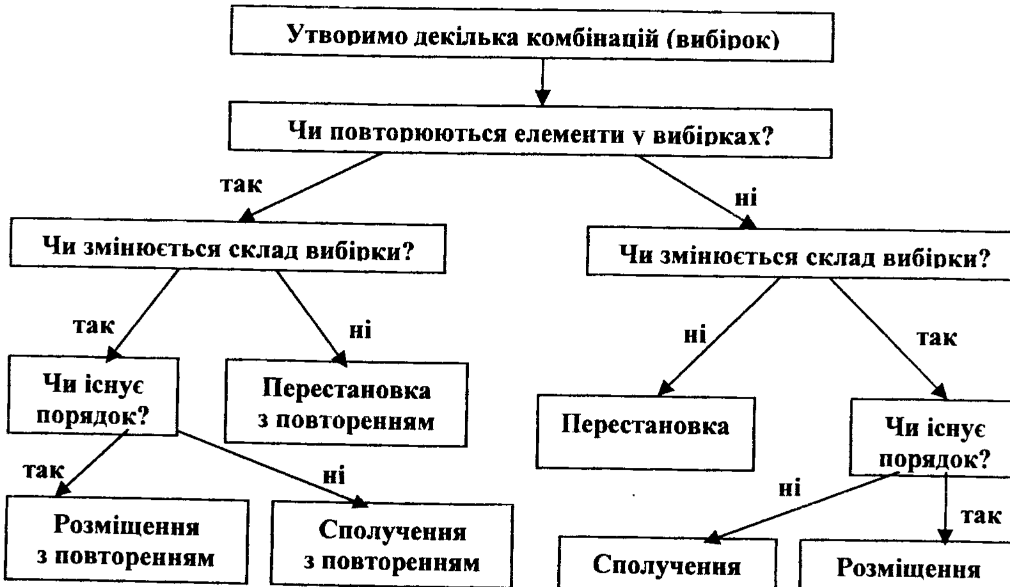
Наведемо основні властивості біноміальних коефіцієнтів C_n^k.

1. *Властивість симетрії:*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Доведення.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$ ▶


Утворимо декілька комбінацій (вибірок)
Чи повторюються елементи у вибірках?
так
ні
Чи змінюється склад вибірки?
Чи змінюється склад вибірки?
так
ні
ні
так
Чи існує порядок?
Перестановка з повторенням
Перестановка
Чи існує порядок?
так
ні
ні
так
Розміщення з повторенням
Сполучення з повторенням
Сполучення
Розміщення

2. *Властивість додавання:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Доведення.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot((n-k)+k) = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \blacktriangleright$$

3. *Властивість винесення за дужки:*

$$C_n^k = \frac{n}{k}\cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

Доведення.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot C_{n-1}^{k-1}. \blacktriangleright$$

8.5. Біном Ньютона

Кількість сполучень C_n^k також називають, як уже вказано, біноміальними коефіцієнтами. Зміст цієї назви встановлює теорема 8.5.1, відома як формула бінома Ньютона.

Теорема 8.5.1.
Нехай a, b – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k. \qquad (8.5.1)$$

Доведення.
Доведення проводитимемо за методом математичної індукції.
1) Доведемо для $n=1$:

$$(a+b)^1 = a+b = b+a = 1\cdot a^0\cdot b^1 + 1\cdot a^1\cdot b^0 =$$

$$= C_1^0\cdot a^0\cdot b^1 + C_1^1\cdot a^1\cdot b^0 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k\cdot a^k\cdot b^{1-k} .$$

2) Нехай теорема справедлива для $(n-1)$. Доведемо її для довільного n:

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)^{n-1} = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a\cdot C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} b\cdot C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\cdot a^{k+1}\cdot b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\cdot a^k\cdot b^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1}\cdot a^k\cdot b^{n-k} + C_{n-1}^{n-1}\cdot a^n\cdot b^0 + C_{n-1}^0\cdot a^0\cdot b^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k} =$$

$$= C_{n-1}^0\cdot a^0\cdot b^n + \sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)\cdot a^k\cdot b^{n-k} + C_{n-1}^{n-1}\cdot a^n\cdot b^0 =$$

$$\left| C_{n-1}^0 = C_n^0 = 1, C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1, C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \right| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot a^k\cdot b^{n-k} . \blacktriangleright$$

Наслідок 8.5.1.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n .$$

Доведення.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot 1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \blacktriangleright$$

Наслідок 8.5.2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\cdot C_n^k = 0 .$$

Доведення.

$$0^n = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \;. ▶$$

Із властивості додавання $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ випливає ефективний спосіб рекурентного обчислення значень біноміальних коефіцієнтів C_n^k, який можна зобразити у графічній формі, відомій як *трикутник Паскаля.*

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \quad n=1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \quad n=2 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad n=3 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad n=4 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

У $(n+1)$-му рядку трикутника Паскаля стоять коефіцієнти розкладу (8.5.1), причому кожний коефіцієнт, крім двох крайніх, які дорівнюють 1, – це сума двох коефіцієнтів із попереднього рядка, що розташовані ліворуч і праворуч від нього. Кількість сполучень C_n^k міститься в $(n+1)$-му рядку на $(k+1)$-му місці.

Теорема 8.5.2 є узагальненням бінома Ньютона.

Теорема 8.5.2 (поліноміальна).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0, \\ n_1+n_2+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k} \,,$$

де $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ – кількість різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких n_1 елементів – 1-го типу, n_2 елементів – 2-го типу,…, n_k елементів – k-го типу.

Нагадаємо, що в теоремі 8.2.2 установлено, що $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Наслідок 8.5.3.

Нехай $x_1 = x_2 = ... = x_k = 1$, тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0, ..., n_k \geq 0, \\ n_1 + n_2 + ... + n_k = n}} P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = k^n .$$

8.6. Розбиття множини. Числа Стірлінга, Белла

Нагадаємо, що *розбиттям* n-елементної множини A називається множина $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ її підмножин, така, що

1) $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$;

2) $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k = A$.

Підмножини $A_i, i = \overline{1,k}$, називають *класами* розбиття.

За допомогою *чисел Стірлінга 1-го роду* підраховують кількість розбиттів n-елементної множини на k циклів. Ці числа позначають як S_k^n і читають так: "k циклів із n".

Приклад.

Цикл 4-елементної підмножини $\{a,b,c,d\}$ 6-елементної множини $\{a,b,c,d,e,f\}$ записують скорочено у вигляді $[a,b,c,d]$, що слід розуміти як $[a,b,c,d]$, $[d,a,b,c]$, $[c,d,a,b]$, $[b,c,d,a]$, де кінець циклу переходить у його початок.

Цикли $[a,b,c,d]$ та $[a,b,d,c]$ – різні.

Означення.

Число S_k^n, яке означає кількість різних способів зображення n-елементної множини у вигляді k циклів, називається *числом Стірлінга 1-го роду.*

Справедлива така рекурентна формула:

$$S_k^n = (n-1)S_k^{n-1} + S_{k-1}^{n-1},$$

$$(S_0^0 = S_n^n = 1, S_1^n = (n-1)!, \ n > 0, \ n \in N).$$

Означення.

Число $S(n,k)$, яке означає кількість різних способів розбиття n-елементної множини рівно на k-класів називається числом *Стірлінга 2-го роду.*

З означення випливає, що $S(n,1)=S(n,n)=1$.

Теорема 8.6.1.

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)\text{, де } 1<k<n.$$

Доведення.

При довільному розбитті множини $\{1,2,\ldots,n\}$ на k класів, елемент n може потрапити або до одноелементного класу $\{n\}$, або до класу з більшою кількістю елементів.

Якщо цей елемент потрапив до одноелементного класу, то залишиться знайти кількість різних способів розбиття множини $\{1,2,\ldots,n-1\}$ на $k-1$ класів. Отже, таких способів буде $S(n-1,k-1)$.

Якщо елемент n потрапляє до класу з більшою кількістю елементів, то необхідно знайти розбиття множини $\{1,2,\ldots,n-1\}$ на k класів і потім додати до одного із цих класів елемент n. Таких способів існує $k\cdot S(n-1,k)$.

Таким чином остаточно отримуємо загальну кількість способів побудови різних розбиттів n-елементної множини на k класів, яка дорівнює

$$S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)=S(n,k).\ \blacktriangleright$$

Наслідок 8.6.1.

$$S(n,2)=2^{n-1}-1, n\geq 2.$$

Доведення.

Доведення проведемо методом математичної індукції за числом n.

При $n=2$ $S(2,2)=2^{2-1}-1=2^1-1=1$. Правильно (бо $S(k,k)=1$). Отже, база індукції виконується.

Нехай дане твердження правильне для $n=k\geq 2$. Підставимо у формулу теореми 9 $n=k+1, k=2$. Тоді

$$S(k+1,2)=S(k,1)+2S(k,2)=1+2\cdot(2^{k-1}-1)=1+2^k-1\cdot 2=2^k-1.\ \blacktriangleright$$

Приклад.

$S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = S(3,1) + 2S(3,2) + 3(S(3,2) + 3S(3,3)) =$
$= S(3,1) + 5S(3,2) + 9S(3,3) = 1 + 5(S(2,1) + 2S(2,2)) + 9S(3,3) =$
$= 1 + 5(1 + 2 \cdot 1) + 9 \cdot 1 = 1 + 5 \cdot 3 + 9 = 25$.

Позначимо через $B(n)$ *загальну* кількість можливих розбиттів n-елементної множини на класи.

Число $B(n)$ називається *числом Белла.*

Очевидно, що $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$.

Приклад.

Нехай $A = \{a,b,c\}$, тоді є такі розбиття цієї множини на k класів:

1) $k=1$: $\{\{a,b,c\}\}$ – одне розбиття;

2) $k=2$: $\{\{a,b\},\{c\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\}\}$, $\{\{b,c\},\{a\}\}$ – три розбиття;

3) $k=3$: $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ – одне розбиття.

Отже, $S(3,1) = 1$ (кількість способів розбиття на один клас), $S(3,2) = 3$, $S(3,3) = 1$.

Тоді $B(3) = S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) = 1 + 3 + 1 = 5$.

Для чисел Белла існує така рекурентна залежність:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k) .$$

Вважаємо, що $B(0) = 1$.

Наслідок 8.6.2.

Кількість відношень еквівалентності на n-елементній множині, які мають індекс k , дорівнює числу Стірлінга 2-го роду $S(n,k)$.

(Згадаємо, що кількість класів еквівалентності відношення еквівалентності R називають *індексом* множини A).

Наслідок 8.6.3.

Кількість усіх відношень еквівалентності, які можна визначити на n-елементній множині, дорівнює числу Белла $B(n)$.

Тема 9. Основні методи комбінаторного аналізу

9.1. Метод рекурентних співвідношень

Числову послідовність (a_n) можна задати *рекурентним співвідношенням (рекурентним рівнянням)*. Таке рівняння описує правило для знаходження елементів послідовності через один або декілька попередніх, причому задано відповідну кількість початкових елементів.

Розв'язком рекурентного співвідношення називають послідовність, яка задовольняє це рівняння. Інакше кажучи, послідовність задано рекурентною формулою, а потрібно знайти явний вираз для a_n через n.

Метод рекурентних співвідношень у комбінаториці дає можливість знаходити розв'язок комбінаторної задачі для n предметів через розв'язок аналогічної задачі з меншою кількістю предметів.

Приклад.

Рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n(n+1)$ визначає послідовність $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, якщо покласти $a_1 = 1$.

9.1.1. Числа Фібоначчі

У XIII ст. італійський математик Леонардо Пізанський, відомий як Фібоначчі, дослідив "задачу про кролів". Формулюється вона таким чином.

В обгороджене місце помістили молоду різностатеву пару кролів. Після досягнення двомісячного віку кожна пара кролів щомісяця дає приплід – нову пару. Потрібно визначити кількість пар кролів через n місяців.

У кінці першого місяця кількість пар кролів $f_1 = 1$. Оскільки ця пара не дає приплоду впродовж двох місяців, то і $f_2 = 1$. Щоб визначити кількість пар після n місяців, додамо їх кількість у попередньому місяці f_{n-1} і кількість новонароджених f_{n-2}: кожна новонароджена пара походить від пари щонайменше двомісячного віку.

Отже, послідовність f_n задовольняє рівняння $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ з початковими умовами $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Члени послідовності $\{f_n\}$ називаються *числами Фібоначчі.*

Загального методу розв'язання рекурентних рівнянь немає. Проте певний клас рівнянь можна розв'язувати однаковим методом.

Далі розглянемо загальні методи розв'язання деяких типів рекурентних співвідношень.

9.1.2. Означення рекурентних співвідношень

Означення.

Рекурентне співвідношення вигляду

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \ldots + c_p(n)a_{n-p} + f(n)$$

називається *лінійним неоднорідним рекурентним співвідношенням (ЛНРС) p-го порядку.*

Лінійне рекурентне співвідношення вигляду

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \ldots + c_p(n)a_{n-p}$$

називається *лінійним однорідним рекурентним співвідношенням (ЛОРС) p-го порядку.*

У цих означеннях коефіцієнти c_i є функціями від n, які в загальному випадку можуть бути довільними. Обмежимо ще вигляд лінійних рекурентних співвідношень.

Означення.

Рекурентне співвідношення вигляду

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_p a_{n-p} + f(n),\ c_p \neq 0,$$

називається *ЛНРС зі сталими коефіцієнтами p-го порядку.*

Означення.
Лінійне рекурентне співвідношення вигляду
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_p a_{n-p}, \; c_p \neq 0,$$
називається *ЛОРС зі сталими коефіцієнтами* p *-го порядку.*

9.1.3. Лінійні однорідні рекурентні співвідношення

Розглянемо спочатку ЛОРС першого порядку $(p=1)$
$$a_n = \begin{cases} c, & \text{якщо } n = 0; \\ b \cdot a_{n-1}, & \text{якщо } n > 0. \end{cases}$$
Із цього співвідношення дістаємо послідовність
$a_0 = c$, $a_1 = bc$, $a_2 = b^2 \cdot c, \ldots, a_n = b^n \cdot c$.

Очевидно, що розв'язком такого співвідношення є $a_n = b^n \cdot c$.

Припустимо, що $a_n = r^n$ для деякого значення r. Тоді, оскільки $a_n = b \cdot a_{n-1}$, знаходимо $r^n = b \cdot r^{n-1}$. Скоротимо на r^{n-1}, дістанемо $b = r$. Отже $a_n = b^n$. Далі, якщо домножити обидві частини рівності $r^n = b \cdot r^{n-1}$ на константу c, то дістанемо $c \cdot r^n = b \cdot c \cdot r^{n-1}$. Таким чином, якщо $a_n = r^n$ є розв'язком співвідношення $a_n = b \cdot a_{n-1}$, то розв'язком буде і $a_n = c \cdot r^n$. Отже, загальний розв'язок має вигляд $c \cdot b^n$ і, задаючи значення a_0, можна визначити значення c.

Розглянемо випадок ЛОРС другого порядку $(p=2)$, тобто
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}. \qquad (9.1.3.1)$$
Знову припустимо, що маємо розв'язок вигляду $a_n = r^n$, тоді отримуємо $r^n = c_1 \cdot r^{n-1} + c_2 \cdot r^{n-2}$, або після скорочення на r^{n-2} дістаємо
$$r^2 = c_1 \cdot r + c_2. \qquad (9.1.3.2)$$
Значення r можна знайти, розв'язуючи рівняння (9.1.3.2), яке називається *характеристичним рівнянням* співвідношення (9.1.3.1).

Окремо розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння $r^2 = c_1 \cdot r + c_2$ має *кратний* корінь $r = a$. Припустимо, що $a_n = a^n$ та $a_n = n \cdot a^n$ – розв'язки даного ЛОРС. Нам відомо, що $a_n = a^n$ є розв'язком, але необхідно переконатися, що $a_n = n \cdot a^n$ теж є його розв'язком. Оскільки корінь $r = a$ кратний, то характеристичне рівняння має вигляд $(r-a)^2 = 0$ або

$$r^2 - 2ar + a^2 = 0;$$
$$r^2 = 2ar - a^2.$$

Звідси із (9.1.3.2) дістаємо, що $c_1 = 2a, c_2 = -a^2$.

Тоді рекурентне співвідношення набуває вигляду

$$a_n = 2a \cdot a_{n-1} - a^2 \cdot a_{n-2}.$$

Підставимо $n \cdot a^n$ у це співвідношення:

$$na^n = 2a(n-1)a^{n-1} - a^2(n-2)a^{n-2} = 2na^n - 2a^n - na^n + 2a^n = na^n.$$

Отже, $a_n = na^n$ є коренем даного ЛОРС.

Відмітимо, що оскільки ЛОРС лінійне, то і довільна лінійна комбінація розв'язків ЛОРС також буде розв'язком ЛОРС.

9.1.4. Лінійні неоднорідні рекурентні співвідношення

Нехай задано ЛНРС

$$a_n = \begin{cases} c, & \text{якщо } n = 1; \\ a \cdot a_{n-1} + b, & \text{якщо } n > 1, \end{cases}$$

де $a \neq 1$. Знаходимо за цим означенням:

$$a_1 = c;$$
$$a_2 = a \cdot a_1 + b = ac + b;$$
$$a_3 = a \cdot a_2 + b = a^2c + ab + b;$$
$$a_4 = a \cdot a_3 + b = a^3c + a^2b + ab + b;$$
$$\ldots$$

$$a_n = a^{n-1}c + a^{n-2}b + a^{n-3}b + ... + ab + b = a^{n-1}c + b(a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1) =$$
$$= a^{n-1}c + b(\frac{a^{n-1}-1}{a-1}) = a^{n-1}(c + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 9.1.4.1.

а) Якщо P_n – розв'язок ЛОРС, яке відповідає ЛНРС

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + ... + c_p(n)a_{n-p} + f(n) \qquad (9.1.4.1)$$

і Q_n – його окремий розв'язок, то $a_n = P_n + Q_n$ – розв'язок ЛНРС (9.1.4.1).

б) Нехай Q_n – окремий розв'язок ЛНРС (9.1.4.1). Тоді кожний розв'язок (9.1.4.1) має вигляд $P_n + Q_n$, де P_n – розв'язок відповідного ЛОРС.

Доведення.

а) З умови випливає, що

$$P_n = c_1P_{n-1} + c_2P_{n-2} + ... + c_pP_{n-p};$$

$$Q_n = c_1Q_{n-1} + c_2Q_{n-2} + ... + c_pQ_{n-p} + f(n).$$

Додаючи почленно ці вирази, дістаємо

$$P_n + Q_n = c_1(P_{n-1} + Q_{n-1}) + c_2(P_{n-2} + Q_{n-2}) + ... + c_p(P_{n-p} + Q_{n-p}) + + f(n).$$

А це означає що $a_n = P_n + Q_n$ – розв'язок ЛНРС (9.1.4.1).

б) Нехай, Q_n і R_n – розв'язки ЛНРС (9.1.4.1), тоді

$$R_n = c_1R_{n-1} + c_2R_{n-2} + ... + c_pR_{n-p} + f(n);$$

$$Q_n = c_1Q_{n-1} + c_2Q_{n-2} + ... + c_pQ_{n-p} + f(n).$$

Віднімаючи перше рівняння від другого, дістаємо

$$R_n - Q_n = c_1(R_{n-1} - Q_{n-1}) + c_2(R_{n-2} - Q_{n-2}) + ... + c_p(R_{n-p} - Q_{n-p}).$$

Отже, $R_n - Q_n$ – розв'язок ЛОРС, що відповідає (9.1.4.1). Позначимо $P_n = R_n - Q_n$, тоді $R_n = P_n + Q_n$ – розв'язок ЛНРС (9.1.4.1). ▶

Із цієї теореми випливає, що пошук розв'язку ЛНРС зводиться до пошуку його окремого розв'язку. Для пошуку такого розв'язку вводиться *така умова*: окремий розв'язок Q_n для ЛНРС (9.1.4.1) має такий самий вигляд, як і функція $f(n)$.

9.2. Метод генератрис

Нехай маємо деяку числову послідовність $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Означення.

Сума вигляду

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

називається *генератрисою* послідовності $\{a_n\}$.

Ідея методу генератрис полягає в такому: коли необхідно знайти всі члени деякої послідовності $\{a_n\}$, то за допомогою рекурентних співвідношень для членів послідовності $\{a_n\}$ або з деяких інших міркувань обчислюють генератрису $A(s)$. Після цього, розкладаючи її в ряд і відшукуючи коефіцієнти при s^n, знаходять a_n.

Означення.

Згорткою двох послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називають послідовність $\{c_n\}$, загальний член якої має вигляд

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_k b_{n-k} + ... + a_n b_0 .$$

Теорема 2.

Генератриса згортки двох послідовностей дорівнює добутку генератрис цих послідовностей.

Доведення.

Нехай $\{c_n\}$ – згортка послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, а $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$, $B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n$, $C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$ – генератриси послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ відповідно.

Перемножуючи два ряди $A(s)$, $B(s)$, знаходимо, що коефіцієнт при s^n в одержаному добутку дорівнює

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_k b_{n-k} + ... + a_n b_0 ,$$

тобто рівний c_n. Отже, $A(s) \cdot B(s) = C(s)$. ▶

9.3. Метод включень і виключень

Метод включень і виключень базується на такій теоремі.

Теорема 9.3.1.

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – скінченні множини. Тоді,

$$|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - .... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n|.$$

Доведення.

Щоб довести теорему, необхідно показати, що кожний елемент із множини $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$ враховується у правій частині нашої рівності лише один раз. Нехай $a \in A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$ – такий елемент, який входить до складу m множини $A_i (i = \overline{1,n})$. Тоді елемент a підраховується у правій частині нашої рівності стільки разів:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - .... + (-1)^{m+1} C_m^m =$$

$$= -(C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + ... + (-1)^m C_m^m - C_m^0) =$$

$$= -(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k - C_m^0) = -(0-1) = 1.$$

А це означає, що кожний елемент a із $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$ враховується у правій частині нашої формули лише один раз.▶

Зауважимо, що частинні випадки цієї формули при $n = 2$ і $n = 3$ ми розглядали в розділі "Множини і відношення".

9.4. Принцип Діріхле (принцип коробок)

Найпростішу форму принципу Діріхле запишемо в такому вигляді.

Теорема 9.4.1.

Якщо $f : A \to B$ – сюр'єкція і $|A| = n > |B| = m$, то принаймні один елемент b із B матиме два прообрази у множині A.

Доведення.

Припустимо, що кожний елемент b із B має єдиний прообраз у множині A. Тоді множина A повинна мати m елементів, а це суперечить тому, що f – сюр'єкція і $n > m$. ▶

Інше формулювання принципу Діріхле таке.

Теорема 9.4.2.

Якщо $k+1$ або більше предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два чи більше предметів.

Доведення.

Припустимо, що жодна коробка не містить більше одного предмета. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше k. Це суперечить тому, що є щонайменше $k+1$ предмет. ▶

Приклад.

У будь-якій групі із 367 осіб принаймні двоє народилися в один день (можливо у різні роки).

Контрольні питання до розділу 2

1. У чому полягає метод математичної індукції?
2. Які типи комбінаторних задач Вам відомі?
3. Сформулюйте правила суми та добутку.
4. Які основні комбінаторні конфігурації Вам відомі?
5. Що таке перестановки, розміщення, сполучення без повторень? Сформулюйте основні теореми.
6. Що таке перестановки, розміщення, сполучення з повтореннями? Сформулюйте основні теореми.
7. Які властивості біноміальних коефіцієнтів Ви знаєте?
8. Сформулюйте теорему про біном Ньютона.
9. Сформулюйте поліноміальну теорему.
10. Дайте означення чисел Стірлінга 1-го та 2-го роду, чисел Белла.
11. Які методи комбінаторного аналізу Вам відомі?

12. У чому полягає задача Фібоначчі?

13. Дайте означення лінійних однорідних та неоднорідних рекурентних співвідношень.

14. Що таке генератриса? У чому полягає метод генератрис?

15. У чому полягає метод включень і виключень?

16. Сформулюйте принцип Діріхле (принцип коробок).

Задачі до розділу 2

1. Довести методом математичної індукції

$$P(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Довести методом математичної індукції

$$P(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

3. Знайти формулу для обчислення суми

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

4. Довести, що $10^n - 9n - 1$ ділиться на 81.

5. Кількість діагоналей опуклого n-кутника дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$. Довести це методом математичної індукції.

6. Довести, що для будь-якого натурального n

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

7. Довести нерівність Коші методом математичної індукції.

Для будь-якого набору невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справджується нерівність

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

8. Скількома способами із 28 кісток доміно можна вибрати кістку, на якій є або 1, або 2?

9. Чи можна застосувати правило суми до обчислення кількості елементів в об'єднанні множин $\{1,2,3\}$ і $\{5,3\}$?

10. В одній групі навчається 25 осіб, а в іншій – 20. Скількома способами можна вибрати на конференцію:

1) одного делегата від двох груп;

2) по одному делегату від кожної групи.

11. Скільки існує чотиризначних чисел, які діляться на 5?

12. Скільки існує поліномів n-го степеня з коефіцієнтами 0, 1, 2?

13. Певний шифр містить 2 літери українського алфавіту, за якими ідуть 3 цифри. Яка загальна кількість можливих шифрів?

14. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, де p_i – прості числа, α_i – натуральні. Знайти кількість усіх дільників числа n?

15. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$. Виписати розміщення і сполучення без повторень і з повтореннями із 4 елементів по 3.

16. Скільки шестизначних чисел, кратних 5, можна скласти із цифр 1,2,3,4,5,6 за умови, що числа не повторюються?

17. Знайти n, якщо $\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 A_{n+3}^{k+3}, k \le n.$

18. У чемпіонаті країни з футболу (вища ліга) беруть участь 18 команд, причому кожні 2 команди зустрічаються між собою 2 рази. Скільки матчів команди зіграють протягом сезону?

19. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи літери в словах АНАНАС, АНОНС та НОНСЕНС?

20. Скількома способами можна розподілити 10 спеціалістів по чотирьох цехах: першому, другому, третьому та четвертому так, щоб у них потрапили відповідно 1, 2, 3 і 4 спеціалісти?

21. Є 2 одиниці, 3 трійки, 5 двійок, 5 четвірок та 5 п'ятірок. Скількома способами їх можна переставити так, щоб парні числа стояли на парних місцях?

22. У ліфт 14-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

23. Скільки є шестизначних чисел, які не містять цифри 1? А цифри 0?

24. Скількома способами можна покласти 15 однакових куль у 5 урн?

25. У поштовому відділенні продають листівки 10 видів. Скількома способами можна купити 8 різних листівок? Скількома способами можна купити 8 листівок, але не обов'язково різних? Скількома способами 8 покупців можуть купити по листівці?

26. Знайти кількість розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

у цілих невід'ємних числах?

27. Визначити кількість розв'язків нерівності

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16$$

у цілих невід'ємних числах?

28. Довести рівність

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = \sum_{i=0}^{k} C_{n-k+i-1}^i .$$

29. Записати розклад $(2a+b)^6$.

30. Визначити коефіцієнт при $x^{12}y^{13}$ у розкладі $(x+y)^{25}$.

31. Записати четвертий член розкладу $(a+\sqrt{b})^{12}$.

32. Знайти коефіцієнт:

1) при $x^3y^2z^4$ в розкладі $(x+y+z)^9$;

2) при y^2z^4 в розкладі $(2+y+z)^9$.

33. Записати розклад $(x_1+x_2+x_3+x_4)^4$.

34. Знайти $S(6,4)$.

35. Нехай $A=\{1,2,3,4\}$. Знайти кількість відношень еквівалентності на множині A, індекс яких дорівнює 2. Виписати відповідні розбиття.

36. Чи буде $a_n = 3\cdot 2^n - (-1)^n$ розв'язком рекурентного співвідношення

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},\ n = 2,3,\ldots,\ a_0 = 2,\ a_1 = 7 .$$

37. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

$$S_n = \begin{cases} a, & n = 1, \\ S_{n-1} + n\cdot a^n, & n > 1. \end{cases}$$

38. Знайти розв'язок ЛОРС

$$a_n = \begin{cases} 6, & n = 0, \\ 3a_{n-1}, & n \ge 1. \end{cases}$$

39. Скільки буде кролів у задачі Фібоначчі через рік.

40. Знайти загальний розв'язок рекурентних співвідношень:

1) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$,

2) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$, $a_0 = 2, a_1 = 4$,

3) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,

4) $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6$,

5) $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3 \cdot 2^n$,

6) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6 \cdot 3^n$.

41. Нехай $a_n = C_m^n$, $n = \overline{0,m}$. Знайти генератрису послідовності.

42. Розв'язати рівняння $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$, де $n \ge 0, a_0 = 3, a_1 = 7$, за допомогою методу генератрис.

43. З'ясувати, яку найменшу кількість прізвищ повинен містити телефонний довідник, щоб у ньому гарантовано розмістилися хоча б два прізвища, які починаються з однієї і тієї ж літери та закінчуються однаковою літерою.

Розділ 3
Елементи математичної логіки

Логіка як аналіз методів побудови міркувань та логічних висновків виникла у Давній Греції, і її становлення пов'язують з Арістотелем (384–322 до н.е.). Математичну формалізацію арістотелевої логіки здійснено англійським логіком Джорджем Булем (1815—1864), якого вважають засновником математичної логіки.

Математична логіка – це наука, основним об'єктом вивчення якої є формальні логічні мови, на яких формулюються математичні твердження, поняття істини та хибності цих тверджень, а також їх доведення. Виникнення математичної логіки як математичної дисципліни пов'язують перш за все зі строгим обґрунтуванням основ математики, і зокрема, теорії множин як фундаменту цих основ.

Тема 10. Числення висловлювань

10.1. Основні означення

Числення висловлювань є найпростішою моделлю логічних міркувань людини. Наведені далі означення не є строгими.

Означення.

Висловлюванням називають твердження або оповідальне речення, яке можна інтерпретувати як істинне або хибне.

Означення.

Істина або хибність, приписана деякому висловлюванню, називається *значенням істинності* (або логічним значенням) цього висловлювання.

Позначають це так: "істина" – T (True) або 1, "хибність" – F (False) або 0.

Означення.

Інтерпретацією висловлювання називають приписування йому значення істинності.

Означення.

Простим висловлюванням називається висловлювання, яке не можна подати як сполучення певних коротких висловлювань.

Висловлювання, яке збудовано згідно з певними правилами із простих, називається *складним*.

Приклади.

1. Сьогодні сонячна погода.
2. Десять ділиться на п'ять.
3. Якщо йде дощ, то на небі хмари.
4. Відомо, що якщо число парне, то воно ділиться на два.
5. Чи існує життя на Марсі?
6. Героям слава!

Тут 1, 2 – прості, а 3, 4 – складні висловлювання.

Не є висловлюваннями питальні та окличні речення, тому 5, 6 не є висловлюваннями.

У численні висловлювань для позначення простих висловлювань вживатимемо *алфавіт*: $Al = \{A, B, C, ..., A_1, ...\}$, а також спеціальні символи, які називаються *логічними зв'язками* і які застосовують для побудови складних висловлювань: $\{\neg$ – заперечення ("не"), $\vee$ – диз'юнкція ("або"), $\wedge$ – кон'юнкція ("і"), $\rightarrow$ – імплікація ("якщо – то"), $\leftrightarrow$ – еквівалентність ("тоді й тільки тоді")$\}$.

Прості висловлювання $A, B, ... \in Al$ називають *атомарними формулами* (*атомами*).

Наведемо формальне означення *синтаксису числення висловлювань* (тобто правил, за якими будуються складні висловлювання з атомарних (простих)), що дає можливість вирізняти серед усіх слів в алфавіті Al слова, які називатимемо *правильно побудованими формулами* (*ППФ*).

Означення.

ППФ у численні висловлювань визначають таким чином:

1) атомарні формули є ППФ;

2) якщо A – ППФ, то $\neg A$ (інше позначення $\overline{A}$) – теж ППФ;

3) якщо A і B – ППФ, то $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ – теж ППФ;

4) ППФ є ті й тільки ті формули, що побудовані за правилами 1) – 3).

Означення.

Якщо A є атомарною фомулою, то нехай $h(A)$ означає логічне значення формули A. Функцію h називатимемо *інтерпретацією*, або *функцією логічних значень*. Отже,

$$h : Al \to \{0, 1\}.$$

Семантика – це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності. Логічне значення складного висловлювання залежить від логічних значень атомарних формул, з яких побудоване це висловлювання за допомогою логічних зв'язок, тобто

якщо $A = B \circ C$, то $h(A) = h(B \circ C) = h(B) \circ h(C)$, де $\circ \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$;

якщо $A = \neg B$, то $h(A) = h(\neg B) = \neg h(B)$.

Означення.

Якщо A і B є ППФ, то:

1) $h(\neg A) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) = 0$, і $h(\neg A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) = 1$;

2) $h(A \vee B) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) = 1$ або $h(B) = 1$;

3) $h(A \wedge B) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) = 1$ і $h(B) = 1$;

4) $h(A \to B) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) \le h(B)$;

5) $h(A \leftrightarrow B) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $h(A) = h(B)$.

Операції $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, є бінарними логічними зв'язками, а операція $\neg$ – унарною.

Семантику введених операцій зручно задавати у формі *таблиць істинності:*

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

За допомогою таких таблиць можна побудувати таблицю істинності довільної складної формули числення висловлювань, яка побудована з атомарних формул $A, B, C, \ldots$

Ця таблиця включає логічні значення складових підформул, які залежать від логічних значень атомарних формул $A, B, C, \ldots$

Атомарні формули $A, B, C, \ldots$ називаються *пропозиційними змінними* складної формули.

Логічне значення складного висловлювання можна обчислити підрахунком значень підформул, з яких воно збудоване.

Означення.

Казатимемо, що формула A *істинна* за деякої інтерпретації h тоді й тільки тоді, коли $h(A)=1$. Якщо $h(A)=0$, то говоримо, що формула A *хибна* за інтерпретації h.

Означення.

Формула A називається *тавтологією (тотожно-істинною)*, якщо вона істинна за будь-якої інтерпретації h.

Означення.

Формула A називається *суперечністю (тотожно-хибною)*, якщо вона хибна за будь-якої інтерпретації h.

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула B *випливає* з формули A, або, що висловлювання B є *логічним наслідком* висловлювання A (це позначають так: $A \models B$).

Якщо висловлювання $A \leftrightarrow B$ є тавтологією, то кажуть що формули A і B *логічно еквівалентні* (це позначають таким чином: $A \simeq B$ або $A \equiv B$).

Для формул A, що є тотожно-істинними (або тотожно-хибними), записуємо $A \cong 1$ ($A \equiv 0$).

Запис $\models A$ (або $\vdash A$) означає, що A є тавтологією.

Означення.

Формула A називається *виконанною*, якщо існує хоча б одна інтерпретація h, за якої ця формула істинна, в іншому випадку A – *невиконанна* або *суперечна*.

10.2. Закони логіки висловлювань

Наведені еквівалентності перевіряють безпосередньо за допомогою таблиць істинності.

1. Ідемпотентність:

$(X \wedge X) \cong X \cong (X \vee X)$.

2. Комутативність:

а) $(X \wedge Y) \cong (Y \wedge X)$;

б) $(X \vee Y) \cong (Y \vee X)$.

3. Асоціативність:

а) $((X \wedge Y) \wedge Z) \cong (X \wedge (Y \wedge Z))$;

б) $((X \vee Y) \vee Z) \cong (X \vee (Y \vee Z))$.

4. Дистрибутивність:

а) $((X \wedge Y) \vee Z) \cong ((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z))$;

б) $((X \vee Y) \wedge Z) \cong ((X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z))$.

5. Доповнюваність:

а) $(X \vee \neg X) \cong 1$;

б) $(X \wedge \neg X) \cong 0$;

в) $\neg(\neg X) \cong X$.

6. Виключення імплікації та еквівалентності:

а) $(X \to Y) \cong (\neg X \vee Y)$;

б) $X \leftrightarrow Y \cong (X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

7. Закони де Моргана:

а) $\neg(X \wedge Y) \cong (\neg X \vee \neg Y)$;

б) $\neg(X \vee Y) \cong (\neg X \wedge \neg Y)$.

8. Закони поглинання:

а) $(X \vee Y) \wedge X \cong X$;

б) $(X \wedge Y) \vee X \cong X$.

9. Співвідношення для сталих:

а) $X \vee 1 \cong 1$;

б) $X \wedge 1 \cong X$;

в) $X \vee 0 \cong X$;

г) $X \wedge 0 \cong 0$.

10.3. Нормальні форми логіки висловлювань

Означення.
Літералом називають атом або його заперечення.
Приклади літералів: A, $\overline{B}$.

Означення.
Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{A, \overline{A}\}$ називають *контрарною.*

Означення.
Говорять, що формулу F записано в *кон'юнктивній нормальній формі* (*КНФ*), якщо вона має вигляд
$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \ (n \geq 1),$$
де кожна з формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – літерал або диз'юнкція літералів і всі формули $F_i, i = \overline{1,n}$, – різні.

Приклад.
Нехай A, B і C – атоми. Тоді $F = (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B)$ – формула, записана у КНФ. У ній $F_1 = (A \vee \overline{B} \vee \overline{C})$, $F_2 = (\overline{A} \vee B)$, тобто F_1 – диз'юнкція літералів $A, \overline{B}, \overline{C}$, а F_2 – диз'юнкція літералів $\overline{A}$ і B.

Означення.
Говорять, що формулу F записано у *диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ)*, якщо вона має вигляд
$$F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n \ (n \geq 1),$$
де кожна з формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – літерал або кон'юнкція літералів і всі формули $F_i, i = \overline{1,n}$, – різні.

Приклад.
Нехай A, B і C – атоми. Тоді $F = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ – формула, записана у ДНФ. У ній $F_1 = (\overline{A} \wedge B)$, $F_2 = (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$, тобто F_1 – кон'юнкція літералів $\overline{A}$ і B, а F_2 – кон'юнкція літералів $A, \overline{B}, \overline{C}$.

Довільну формулу можна перетворити на одну з нормальних форм, застосувавши закони логіки висловлювань.

Для побудови нормальних форм треба виконати таку послідовність перетворень.

Крок 1.

Застосувати правила $F \to G \cong (\neg F \vee G)$ й $F \leftrightarrow G \cong (F \to G) \wedge (G \to F)$ (**закони 6а** та **6б**) для усунення логічних операцій "$\to$" та "$\leftrightarrow$".

Крок 2.

Застосувати закон подвійного заперечення $\neg(\neg F) \cong F$ та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3.

Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми.

Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції (**закон 4а**)

$$((F \wedge G) \vee H) \cong ((F \vee H) \wedge (G \vee H)).$$

Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції (**закон 4б**)

$$((F \vee G) \wedge H) \cong ((F \wedge H) \vee (G \wedge H)).$$

Зауважимо, що ДНФ або КНФ можуть бути побудовані неоднозначно.

10.4. Логічне виведення в логіці висловлювань

Означення.

Говорять, що формула G – *логічний наслідок* формул $F_1, F_2, \dots, F_n$, або що G *логічно випливає* з $F_1, F_2, \dots, F_n$, якщо в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$, формула G також виконується.

При цьому формули $F_1, F_2, ..., F_n$ називають *гіпотезами (аксіомами)* формули G. Той факт, що формула G логічно випливає з $F_1, F_2, ..., F_n$ позначають $F_1, F_2, ..., F_n \models G$ (або можна використовувати символ $\vdash$).

Теорема 10.4.1.

Формула G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді й лише тоді, коли формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ є тавтологією.

Доведення.

Необхідність. Нехай G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$ та h – довільна їх інтерпретація. Якщо формули $F_1, F_2, ..., F_n$ істинні в інтерпретації h, то за означенням логічного наслідку формула G також істинна в h. Звідси випливає, що формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ істинна в інтерпретації h. З іншого боку, якщо не всі формули з $F_1, F_2, ..., F_n$ істинні в інтерпретації h, тобто принаймні одна з них хибна в h, то формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ істинна в h. Отже, формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ істинна в довільній інтерпретації, або $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ є тавтологією. Тоді, якщо формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то і формула G має бути істинною в цій інтерпретації, тобто G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$. ▶

Якщо G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$, то формулу $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ називають *логічною теоремою*, а G – її *висновком*. У такому разі говорять, що формулу G *можна вивести* з формул $F_1, F_2, ..., F_n$ і G – *вивідна формула*. Вираз $F_1, F_2, ..., F_n \models G$ називають *правилом виведення.*

Теорема 10.4.2 (принцип прямої дедукції).

Формула G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді й лише тоді, коли $(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \wedge \overline{G})$ – суперечність.

Доведення.

За попередньою теоремою формула G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді й лише тоді, коли формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ є тавтологією. Отже, G – логічний наслідок формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді й лише тоді, коли заперечення формули $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G)$ – суперечність.

Справді,

$$\overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \to G} \cong \overline{\overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n)} \vee G} \cong$$

$$\cong \overline{\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee ... \vee \overline{F_n} \vee G} \cong$$

$$\cong \overline{\overline{F_1}} \wedge \overline{\overline{F_2}} \wedge ... \wedge \overline{\overline{F_n}} \wedge \overline{G} \cong F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \wedge \overline{G}. ▶$$

10.5. Застосування правил виведення в логіці висловлювань

Розглянемо правила виведення та їх застосування в логіці висловлювань. Ці правила обґрунтовують кроки *доведення логічних теорем*, яке полягає в перевірці того, чи висновок є логічним наслідком множини гіпотез.

Деякі важливі правила виведення та відповідні їм тавтології наведено в таблиці.

Таблиця

№	Правило виведення	Тавтологія	Назва правила виведення
1.	$P \models P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$	Уведення диз'юнкції
2.	$P \wedge Q \models P$	$(P \wedge Q) \to P$	Виключення кон'юнкції
3.	$P, Q \models P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to (P \wedge Q)$	Уведення кон'юнкції
4.	$P, P \to Q \models Q$	$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$	Modus ponens
5.	$\overline{Q}, P \to Q \models \overline{P}$	$(\overline{Q} \wedge (P \to Q)) \to \overline{P}$	Modus tollens

Закінчення табл.

№	Правило виведення	Тавтологія	Назва правила виведення
6.	$P \to Q,\ Q \to R \models P \to R$	$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$	Гіпотетичний силогізм
7.	$P \vee Q,\ \overline{P} \models Q$	$((P \vee Q) \wedge \overline{P}) \to Q$	Диз'юнктивний силогізм
8.	$P \vee Q, \overline{Q} \vee R \models P \vee R$	$((P \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee R)) \to (P \vee R)$	Резолюція

Теорема 10.5.1 (дедукції).

Якщо Г є множиною формул, A та B – формули і $\Gamma, A \models B$, то $\Gamma \models A \to B$. Зокрема, якщо $A \models B$, то $\models A \to B$.

Твердження дедукції складає додаткове правило виведення.

Якщо твердження містить багато гіпотез, то потрібно застосувати декілька правил виведення для того, щоб довести істинність висновку.

Приклад.

Припустимо, що імплікація "Якщо падає сніг, то ми катаємося на лижах", і її гіпотеза "Падає сніг" істинні. Тоді за правилом *modus ponens* висновок імплікації "Ми катаємося на лижах" також істинний.

10.6. Методи доведення тавтології в численні висловлювань

Перевірити, чи є задана формула тавтологією або суперечністю, можна за допомогою таблиць істинності. У методі таблиць істинності потрібно розглядати всі можливі інтерпретації формули, і тому цей метод часто називають *тривіальним*. Проте його застосування вимагає великих затрат часу. Тому розроблено й інші методи перевірки того, чи є задана формула є тавтологією.

Розглянемо деякі з таких методів.

1. *Метод Куайна*

Метод Куайна є безпосереднім узагальненням тривіального методу. Нехай $\{p,q,...,r\}$ – упорядкована множина формул, які входять до запису формули $P(p,q,...,r)$. Візьмемо першу із цих формул – p і припишемо їй, наприклад, значення $1\,(0)$. Підставимо це значення у формулу P і виконаємо обчислення, які виникають після такої підстановки. Одержимо нову формулу $P'(q,...,r)$, до якої застосуємо ту саму процедуру, тобто вибираємо формулу q, приписуємо їй значення $1\,(0)$ і виконуємо обчислення. На якомусь кроці одержуємо, що формула P'' є тавтологією або суперечністю незалежно від значень атомарних формул, які входять до складу формули P''. На цьому кроці алгоритм закінчує свою роботу і це означає, що в деяких випадках метод Куайна потребує розгляду меншої кількості інтерпретацій, а не всіх можливих інтерпретацій.

2. Метод редукції

Цей метод дозволяє з'ясувати, є чи ні задана формула тавтологією шляхом "зведення до абсурду". Указаний метод є ефективним у тому випадку, коли аналізована формула включає велику кількість імплікацій.

Нехай формула P має вигляд, наприклад, $P = Q \to R$. Припустимо, що для деякої інтерпретації h формула хибна. Тоді згідно з таблицею істинності для імплікації, маємо $h(Q)=1$ і $h(R)=0$. Тепер замість формули P розглядатимемо формули Q і R, застосовуючи той самий метод. У результаті, коли формула є тавтологією, ми прийдемо до суперечності з тим, що деяка атомарна формула або деяка підформула при одній і тій самій інтерпретації повинна бути одночасно істинною і хибною.

3. Метод резолюцій

Існують комп'ютерні програми, які розроблені для автоматизації міркувань, виконаних за допомогою доведення логічних теорем. У багатьох із цих програм використано правило виведення, відоме як резолюція. *Правило резолюції* записують у вигляді $P \vee Q, \overline{Q} \vee R \models P \vee R$. На основі цього правила Дж. Робінсон у 1965 р. запропонував метод резолюцій автоматичного доведення логічних теорем.

Нехай формулу F записано в кон'юнктивній нормальній формі:

$$F = D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_m .$$

Тут кожна з формул $D_i (i = \overline{1, m})$ – літерал або диз'юнкція літералів. Формулу D_i називають *елементарною диз'юнкцією (диз'юнктом або клаузою)*. Кількість літералів у формулі D_i називають *рангом* елементарної диз'юнкції.

Розглядають також елементарну диз'юнкцію з рангом 0, яку позначають □ і називають пустим диз'юнктом; така диз'юнкція не містить жодного літералу. За означенням елементарну диз'юнкцію з рангом 0 вважають такою, що дорівнює $0 \,(\mathrm{F} - \mathrm{False})$.

За принципом прямої дедукції формулу G можна вивести з формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді й лише тоді, коли $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \wedge \overline{G}$ – суперечність. Так буде, якщо одна з формул $F_1, F_2, ..., F_n$ хибна або формула G істинна.

Нехай формулу $F = F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \wedge \overline{G}$ записано в КНФ $F = D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_m$, де $D_1, D_2, ..., D_m$ – її елементарні диз'юнкції. Очевидно, що цю КНФ можна записати у вигляді множини її елементарних диз'юнкцій $S = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$. Множину S називають *невиконанною (суперечною)*, якщо формула F невиконанна (суперечна).

Припустимо, що елементарні диз'юнкції D_1 і D_2 такі, що D_1 містить літерал L_1, контрарний до літералу L_2 з D_2. Викреслимо літерал L_1 із D_1 та L_2 із D_2; побудуємо диз'юнкцію решти літералів цих елементарних диз`юнкцій. Отриману елементарну диз'юнкцію називають *резольвентою*.

Приклад.

Побудуємо резольвенту пари елементарних диз'юнкцій $D_1 = P \vee R \vee T$ і $D_2 = \overline{P} \vee Q$. Ці елементарні диз'юнкції містять контрарну пару літералів P і $\overline{P}$, які можна викреслити з D_1 і D_2. Утворимо диз'юнкцію літералів, що залишилися. Одержимо резольвенту $R \vee T \vee Q$.

Теорема 10.6.1.

Резольвента D елементарних диз'юнкцій D_1 і D_2 – логічний наслідок диз'юнкцій D_1 і D_2.

Виведення формули D з елементарних диз'юнкцій множини S за методом резолюцій полягає в побудові такої скінченної послідовності елементарних диз'юнкцій $D_1', D_2', \ldots, D_k'$, що кожна D_i' $(i = \overline{1,k})$ являє собою або елемент множини S, або резольвенту елементарних диз'юнкцій, які передують D_i', причому $D = D_k'$.

Елементарну диз'юнкцію D можна вивести із множини S, якщо існує виведення D із S.

Головну ідею методу резолюцій формулюють так: перевірити, чи містить множина елементарних диз'юнкцій S диз'юнкцію $\square$. Якщо S містить $\square$, то множина S невиконанна. Якщо S не містить $\square$, то перевіряють, чи можна вивести $\square$ із множини S. Виведення $\square$ із S називають *доведенням невиконанності множини S* або *спростуванням S*.

Побудуємо *алгоритм методу резолюцій.*

Задано множину гіпотез $F_1, F_2, \ldots, F_n$ і висновок G. Алгоритм дає змогу визначити, чи є формула G логічним наслідком множини гіпотез.

Крок 1.

Побудувати кон'юнкцію множини гіпотез $F_1, F_2, \ldots, F_n$ і заперечення висновку $\overline{G}$ у вигляді $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \overline{G}$.

Звести отриману формулу до КНФ і записати множину її елементарних диз'юнкцій S.

Крок 2.

Записати кожну елементарну диз'юнкцію множини S в окремому рядку.

Крок 3.

Вибрати дві елементарні диз'юнкції, які містять контрарну пару літералів, і побудувати їх резольвенту. Записати одержану резольвенту в новому рядку, якщо в попередніх рядках ще немає такої елементарної диз'юнкції.

Крок 4.

Крок 3 виконувати до отримання диз'юнкції з рангом 0. Одержання елементарної диз'юнкції з рангом 0 свідчить про те, що формулу G можна вивести з $F_1, F_2, ..., F_n$. Якщо неможливо отримати резольвенту, відмінну від елементів множини S і вже побудованих резольвент, то множина S неспростовна.

Кінець алгоритму.

Контрольні питання до розділу 3

1. Що таке висловлювання та інтерпретація висловлювання?
2. Які логічні зв'язки Вам відомі?
3. Що таке правильно побудовані формули?
4. Що являє собою таблиця істинності?
5. Сформулюйте означення: тавтологія, суперечність.
6. Сформулюйте закони логіки висловлювань.
7. Нормальні форми логіки висловлювань.
8. Сформулюйте алгоритм зведення формули до кон'юнктивної (диз'юнктивної) нормальної форми.
9. Що означає те, що формула G є логічним наслідком формул $F_1, F_2, ..., F_n$?
10. Сформулюйте принцип прямої дедукції.
11. Які правила виведення Вам відомі?
12. У чому полягає метод Куайна?
13. Що являє собою метод редукції?
14. У чому полягає метод резолюцій?

Задачі до розділу 3

1. Навести приклади простих і складних висловлювань, а також речень, які не є висловлюваннями.

2. Записати мовою числення висловлювань твердження:

1) Ведмідь зможе поїсти меду тоді й тільки тоді, коли він полізе на дерево, і на цьому дереві житимуть дикі бджоли.

2) Якщо чотирикутник є ромбом, то його діагоналі перпендикулярні, але неправильним є те, що, коли діагоналі чотирикутника перетинаються під прямим кутом, то цей чотирикутник є ромбом.

3. Побудувати таблиці істинності для формул:

1) $(A \vee B \vee C) \to (A \wedge B \wedge C)$;

2) $\neg A \wedge (B \to (A \leftrightarrow \neg C))$.

4. Перевірити за допомогою таблиць істинності, чи будуть формули тавтологіями:

1) $((C \to D) \to C) \to D$;

2) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to B)$.

5. Побудувати синтаксичне дерево, що відповідає формулі $((\neg P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2)) \to ((P_1 \to (P_2 \vee P_3)) \to (P_1 \to P_3))$.

6. Довести 1-й закон дистрибутивності і 2-й закон де Моргана.

7. Показати логічну еквівалентність формул за означенням та за допомогою законів логіки висловлювань:

1) $(A \vee B) \to (A \vee C)$ і $B \to (A \vee C)$;

2) $(A \leftrightarrow B) \to (A \leftrightarrow C)$ і $A \wedge (B \to C) \vee \neg A \wedge (C \to B)$;

3) $((B \wedge C) \to A) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \to A)$ і $(B \leftrightarrow C) \to A$.

8. Перевірити, чи є формули тавтологіями за допомогою законів логіки висловлювань:

1) $((C \to D) \to C) \to D$;

2) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to B)$.

9. Побудувати таблиці істинності для формул:

1) $X | X$;

2) $(X|Y)|(X|Y)$;

3) $X \downarrow X$;

4) $(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$.

10. Чи будуть формули логічно еквівалентними?

1) $X \to Y$ і $((X \wedge Y) \oplus X) \oplus 1$;

2) $(X \wedge Y \vee (\neg X \to Y \wedge Z)) \leftrightarrow (\neg X \to \neg Y) \to Z$ і $(X \to Y) \oplus (Y \oplus Z)$.

11. Побудувати КНФ:

1) $(X \to Y) \wedge ((\neg Y \to Z) \to \neg X)$;

2) $(X \wedge (Y \vee \neg(Z \to U))) \leftrightarrow (X \vee (\neg Y \leftrightarrow Z))$.

12. Побудувати ДНФ:

1) $(X \to Y) \leftrightarrow (Y \to X)$;

2) $(X \to Y) \downarrow \neg(Y \to Z)$.

13. Чи правильно стоїть знак $\models$ у співвідношеннях (перевірити трьома способами):

1) $X \to Y, Y \to Z, Z \to U \models X \to U$;

2) $(X \wedge Y) \to Z, (X \vee Y) \to \neg Z \models X \wedge Y \wedge Z$.

14. З'ясувати, яке правило виведення використано в такому міркуванні: "Похолоднішало і почав іти дощ. Отже, похолоднішало".

15. З'ясувати, яке правило виведення використано в такому міркуванні: "Якщо сьогодні йтиме дощ, то сьогодні ми не поїдемо на пікнік. Якщо ми не поїдемо на пікнік сьогодні, то ми поїдемо на пікнік завтра. Отже, якщо сьогодні йтиме дощ, то ми поїдемо на пікнік завтра".

16. Довести, що з гіпотез "Якщо ти надішлеш мені e-mail, то я закінчу писати програму", "Якщо ти не надішлеш мені e-mail, то я рано піду спати" та "Якщо я рано піду спати, то я прокинуся бадьорим" випливає висновок "Якщо я не закінчу писати програму, то я прокинуся бадьорим".

17. Довести, що для будь-яких формул A, B, C числення висловлювань

$$A \to (B \to C), B \models A \to C.$$

18. З'ясувати методом Куайна та редукції, чи є формули тавтологіями:

1) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_3))$;

2) $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$.

19. Чи правильно стоїть знак $\models$ у співвідношеннях:

1) $X \to Y, Y \to Z, Z \to U \models X \to U$;

2) $X \to Y, Z \to U, \neg Y \vee \neg U \models \neg X \vee \neg Y$.

20. Показати невиконанність множини $S = \{\overline{p} \vee q, \overline{q}, p\}$ за допомогою методу резолюцій.

21. Чи є формула C логічним наслідком множини диз'юнктів $S' = \{P, \overline{P} \vee Q \vee R, \overline{Q} \vee C, \overline{R} \vee C\}$.

Список літератури

1. *Кривий С. Л.* Дискретна математика: підручник для студентів вищ. навч. закл. / С. Л. Кривий. – Чернівці–Київ : Вид. дім "Букрек", 2014. – 568 с.

2. *Нікольський Ю. В.* Дискретна математика / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – К. : Вид. група BHV, 2007. – 368 с.

3. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика : учебник для вузов / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2013. – 432 с.

4. *Бондарчук Ю. В.* Основи дискретної математики : навч. посіб. / Ю. В. Бондарчук, Б. В. Олійник. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська академія", 2009.– 159 с.

5. *Гаврилов Г. П.* Сборник задач по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М. : Наука, 1977. – 368 с.

6. *Базилевич Л.* Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник / Л. Базилевич. – Л. : Видавець І. Е. Чижиков, 2013. – 487 с.

7. *Лавров И. А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Физматлит, 2004. – 256 с.

8. *Карнаух Т. О.* Вступ до дискретної математики / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2006. – 113 с.

9. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1979. – 272 с.

10. *Ядренко М. Й.* Дискретна математика : навч. посіб. М. Й. Ядренко. – К. : ВПЦ "Експрес", 2003. – 244 с.

11. *Матвієнко М. П.* Дискретна математика : навч. посіб. / М. П. Матвієнко. – К. : "Ліра-К", 2013. – 348 с.

12. *Борисенко О. А.* Дискретна математика : підручник О. А. Борисенко. – Суми : ВТД "Університетська книга", 2007. – 255 с.

Навчальне видання

ТМЄНОВА Наталія Пилипівна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ТЕОРІЯ МНОЖИН І ВІДНОШЕНЬ
КОМБІНАТОРИКА
ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Навчальний посібник

Редактор *Л. Магда*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 6,1. Наклад 100. Зам. № 218-8640. Вид. № Іт2.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 05.02.19

Видавець і виготовлювач
ВПЦ"Київський університет",
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02