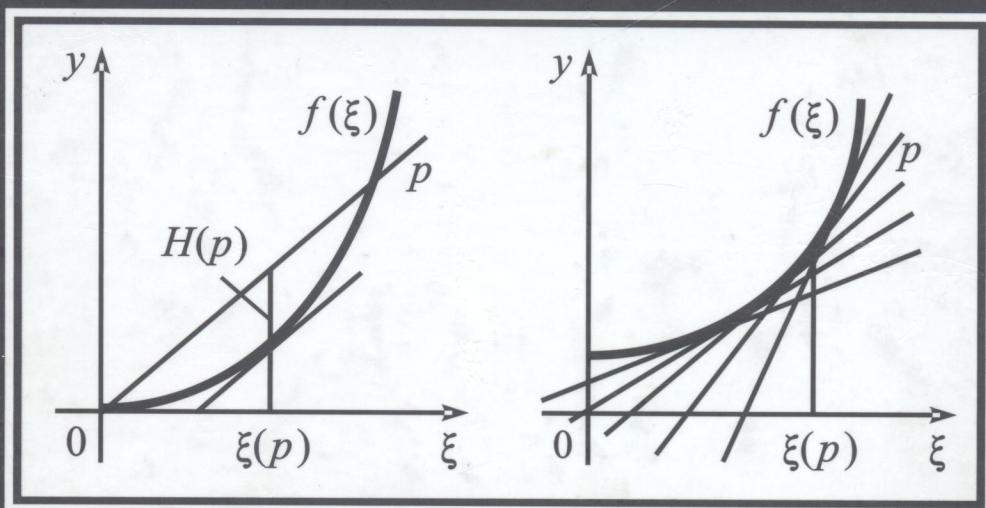


624.04(025)
Б 16

В.А. БАЖЕНОВ

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ



Київ 2012

В.А. БАЖЕНОВ

**ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ
І МЕТОДИ
БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ**

*Затверджено
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як підручник
для студентів вищих навчальних закладів*

Київ «Каравела» 2012

УДК 69.04(075.8)
ББК 38.112я73
Б 16

Гриф надано Міністерством
освіти і науки, молоді та спорту України
(лист №1/11-12367 від 26.07.2012 р.)

Рецензенти:

Л.М. Лобанов,

д.т.н., проф., академік НАН України, заступник директора з наукової роботи
Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України;

А.В. Перельмутер,

д.т.н., головний науковий співробітник науково-виробничого ТОВ «СКАД Софт»;

М.О. Шульга,

д.ф.-м.н., проф., член-кореспондент НАН України, зав. відділу електропружності
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Баженов В.А.

**Б 16 Варіаційні принципи і методи будівельної механіки: Підручник. – К.:
Каравела, 2012. – 720 с.**

ISBN 978-966-2229-44-8

Підручник призначений для вивчення спеціальних курсів будівельної механіки, пов'язаних із викладенням загальних варіаційних принципів і методів будівельної механіки дискретних і континуальних систем з побудовою сучасних чисельних процедур і технологій реалізації.

Застосовується єдина методологія, заснована на ідеї двоїстості з використанням перетворення Юнга-Фенхеля, перетворення Лежандра, нерівності Юнга, двоїстих за Юнгом функцій, двоїстих за Лагранжем постановок варіаційних задач. Для зручності ці матеріали включені до книги і виділені в окремі розділи, присвячені елементам варіаційного числення, двоїстим постановкам варіаційних задач.

Наведені основні варіаційні принципи Лагранжа і Кастільяно, Гамільтона-Остроградського і Гамільтона-Пуанкаре, а також змішані принципи.

Викладені основні підходи прямих методів варіаційного числення: Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Треффца, найменшого квадратичного відхилення, ортогоналізації, Канторовича, метод скінченних елементів як прямий варіаційний метод тощо, технології реалізації.

Розглянуто широке коло лінійних статичних і динамічних задач будівельної механіки, а також геометрично і фізично нелінійні задачі, конструктивно-нелінійні системи.

Підручник призначений для студентів вищих навчальних закладів, які спеціалізуються і, відповідно, виконують дипломні і магістерські роботи з будівельної механіки. Він буде корисним для викладачів будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності та інших суміжних технічних дисциплін.

**УДК 69.04(075.8)
ББК 38.112я73**

ISBN 978-966-2229-44-8

© Баженов В.А., 2012
© Видавництво «Каравела», 2012

ЗМІСТ

Передмова	11
Частина I. ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ДВОЇСТІ ПОСТАНОВКИ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ.....	16
1. Варіаційне числення.....	16
1.1. Основні поняття	16
1.2. Варіація функціонала, необхідна умова екстремуму функціонала	20
1.3. Найпростіша задача варіаційного числення, рівняння Ейлера	30
1.4. Найпростіші випадки інтегрованості рівняння Ейлера	37
1.5. Функціонали виду $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$	43
1.6. Функціонали, що залежать від похідних вищих порядків	46
1.7. Функціонали, що залежать від функцій декількох незалежних змінних	51
1.8. Найпростіша задача із рухомими границями	56
1.9. Задача з рухомими границями для функціоналів виду $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$	62
1.10. Задача з рухомими границями для функціоналів виду $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$	66
1.11. Канонічний вигляд рівнянь Ейлера	71
1.12. Перші інтеграли рівнянь Ейлера	73
1.13. Перетворення Лежандра. Канонічні перетворення	74
1.14. Двоїсті варіаційні принципи. Перетворення Юнга-Фенхеля	80
1.15. Теорема Нетер	98
1.16. Достатні умови екстремуму	101
1.17. Варіаційні задачі на умовний екстремум	117
1.18. Варіаційні задачі на умовний екстремум з додатковими умовами виду $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$	129
1.19. Ізопериметричні задачі	132
2. Функція Лагранжа і двоїстість. Сідлові точки і умови оптимальності	138
2.1. Задача, двоїста за Лагранжем	138
2.1.1. Геометрична інтерпретація двоїстої за Лагранжем задачі	140
2.2. Теореми двоїстості і сідлові точки	141
2.2.1. Розрив двоїстості	141
2.2.2. Критерій сідлової точки	142
2.2.3. Умови оптимальності Ф. Джона і Куна-Таккера	143

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

2.2.4. Зв'язок між критерієм сідлової точки і умовами оптимальності Куна-Таккера.	146
2.3. Властивості двоїстої функції Лагранжа.	147
2.3.1. Диференційовність функції θ	147
2.3.2. Субградієнти опуклих функцій.	148
2.3.3. Субградієнт функції θ	149
2.3.4. Напрями підйому і найшвидшого підйому.	150
2.4. Розв'язання двоїстої за Лагранжем задачі.	151
2.4.1. Градієнтний метод.	151
2.4.2. Метод підйому для недиференційовної двоїстої функції.	153
2.4.3. Метод січних площин.	155
2.5. Розв'язання прямої задачі.	157
2.5.1. Розв'язання збурених прямих задач.	158
2.5.2. Побудова допустимих розв'язків прямої задачі в опуклому випадку.	159
2.6. Задачі лінійного і квадратичного програмування.	160
2.6.1. Лінійне програмування.	160
2.6.2. Квадратичне програмування.	162
2.7. Формулювання двоїстих задач опуклого математичного програмування.	163
3. Постановки двоїстих задач будівельної механіки. Перетворення Лежандра. Нерівність Юнга. Двоїсті за Юнгом функції. Двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач. Приклади.	167
3.1. Загальна постановка двоїстих задач.	167
3.2. Перетворення Лежандра. Теорема Донкіна. Двоїсті за Юнгом функції. Приклад.	169
3.3. Двоїсті постановки варіаційних задач для функціоналів будівельної механіки. Приклад.	173
3.4. Двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач. Приклади.	179
Частина II. ВАРІАЦІЙНІ ПОСТАНОВКИ ЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ.	192
4. Стержневий елемент. Центральний розтяг-стиснення.	192
4.1. Потенціальна енергія пружної деформації. Доповнювальна потенціальна енергія. Двоїсті за Юнгом функції деформації. Перші похідні від питомої потенціальної енергії. Формули Дж. Гріна і Кастільяно.	193
4.2. Робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона.	196
4.3. Двоїсті варіаційні постановки. Принципи Лагранжа і Кастільяно.	198
4.4. Варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно. Принципи можливих переміщень і можливих зусиль.	201
4.5. Приклад. Пряма задача – функціонал Лагранжа.	206

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

4.6. Приклад. Двоїста задача – функціонал Кастільяно.	207
4.7. Приклад. Функціонал Рейснера	208
4.8. Приклад. Функціонал Ху-Васідзу.	210
4.9. Приклад стержневої системи	219
4.10. Перетворення варіаційних задач. Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта.	224
4.10.1. Застосування методу множників Лагранжа.	224
4.10.2. Послідовність перетворення Фрідріхса. Пряме і обернене перетворення Фрідріхса. Приклад	227
4.10.3. Приклади перетворення варіаційних задач. Перетворення за допомогою множників Лагранжа	230
4.10.4. Висновки перетворення варіаційних задач	232
5. Варіаційна постановка задачі про плоский згин	234
5.1. Основні співвідношення задачі про плоский згин прямолінійного стержня	234
5.2. Потенціальна енергія пружної деформації. Доповнювальна потенціальна енергія. Перші похідні від питомої потенціальної енергії. Формули Дж. Гріна і Кастільяно.	235
5.3. Робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона	236
5.4. Двоїсті варіаційні постановки. Функціонали Рейснера і Ху-Васідзу	240
5.5. Функціонали Лагранжа і Кастільяно	243
5.6. Варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно. Принципи можливих переміщень і можливих зусиль.	245
5.6.1. Нетривіальні розв'язки рівняння рівноваги	250
5.6.2. Інші підходи при отриманні варіаційних принципів Лагранжа і Кастільяно, а також відповідних варіаційних рівнянь	255
5.6.3. Перетворення, які базуються на лемі Дю-Буа-Реймонда.	260
5.7. Приклади реалізації варіаційних принципів	262
5.7.1. Функціонали Лагранжа, Кастільяно, Рейснера для однопрогонових балок	262
5.7.2. Приклад нерозрізної балки. Побудова поверхонь функціоналів	270
5.7.3. Приклад реалізації принципів Лагранжа і Кастільяно для задачі згину балки. Побудова поверхонь функціоналів.	279
5.8. Перетворення варіаційних принципів	285
5.8.1. Приклад перетворення варіаційних принципів.	287
6. Варіаційні принципи у випадку сумісної дії згину і розтягу-стиснення	292
7. Енергетичні теореми і варіаційні принципи для одновимірних задач будівельної механіки	298
7.1. Енергія деформації лінійно-пружної системи.	298
7.2. Повна потенціальна енергія деформованої системи.	303
7.3. Основні теореми будівельної механіки	305

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

7.4. Побудова канонічних рівнянь методу переміщень за допомогою варіаційного принципу Лагранжа.	306
7.5. Побудова канонічних рівнянь методу сил за допомогою варіаційного принципу Кастільяно.	309
7.6. Потенціали будівельної механіки. Теорема І.І. Гольденבלата	311
7.6.1. Побудова матриці жорсткості і податливості стержневої системи	314
7.6.2. Приклади. Розбивка матриць на клітини	318
7.7. Двоїста природа теорії споруд	327
8. Побудова рівнянь руху пружних систем на основі дискретних моделей	333
8.1. Метод динамічної рівноваги	333
8.2. Принцип можливих переміщень.	336
8.3. Принцип Гамільтона-Остроградського. Двоїстий принцип Гамільтона-Пуанкаре	337
8.4. Побудова рівнянь руху пружних систем на основі розподілених моделей	343
8.4.1. Принцип можливих переміщень в динамічних задачах для розподілених систем	343
8.4.2. Застосування принципу Гамільтона для розподілених систем	347
9. Динаміка систем з одним ступенем свободи	353
9.1. Рівняння руху системи з одним ступенем свободи.	353
9.1.1. Побудова рівнянь руху системи з одним ступенем свободи на основі дискретної моделі	353
9.1.2. Побудова рівнянь руху системи з одним ступенем свободи на основі розподілених моделей.	353
10. Динаміка систем з багатьма ступенями свободи	357
10.1. Складання рівнянь руху.	357
10.2. Рівняння динамічної рівноваги	357
10.3. Побудова дискретних динамічних моделей за допомогою МСЕ.	362
10.3.1. Скінченноелементна динамічна модель стержневої системи	362
10.3.2. Варіаційне формулювання рівнянь руху	364
10.3.3. Побудова матриці мас	365
10.3.4. Побудова матриці демпфірування.	371
11. Варіаційні принципи в теорії власних коливань пружних систем	376
11.1. Метод Релея.	376
11.2. Метод Релея для систем із скінченним числом ступенів свободи.	377
11.3. Екстремальні властивості власних частот	378
11.4. Вплив змін масових та жорсткісних характеристик системи на власні частоти	380
11.5. Вплив накладання в'язей на власні частоти	381

12. Застосування принципу Гамільтона-Остроградського для побудови системи диференціальних рівнянь коливань.....	382
13. Варіаційні принципи для двовимірних та тривимірних задач	385
13.1. Основні співвідношення лінійної теорії пружності	385
13.2. Теорема Клапейрона.....	388
13.3. Питома потенціальна енергія пружної деформації. Формули Дж. Гріна і Кастільяно.....	390
13.4. Теорема про дивергенцію. Теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли	393
13.5. Інтегральна формула	394
13.6. Формула Папковича	396
13.7. Постановки двоїстих варіаційних задач.....	397
13.7.1. Загальний варіаційний принцип	397
13.7.2. Функціонали Ху-Васідзу	399
13.7.3. Варіаційні задачі Рейснера	400
13.7.4. Функціонали Лагранжа і Кастільяно	401
13.7.5. Функціонали граничних умов.....	403
13.7.6. Функціонали фізичних співвідношень.....	404
13.7.7. Принципи віртуальної роботи і доповнювальної віртуальної роботи	405
13.8. Принцип Гамільтона	409
13.9. Приклад. Виведення тотожних співвідношень Сен-Венана з принципу Кастільяно.....	412
13.10. Приклад. Матриці других похідних від питомої потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної питомої потенціальної енергії ..	416
14. Згин тонких пластин	419
14.1. Основні співвідношення. Функціонали Лагранжа і Кастільяно	419
15. Лінійна теорія тонких оболонок.....	428
15.1. Побудова варіаційного рівняння Лагранжа	435
15.2. Побудова варіаційного рівняння Кастільяно	436
15.3. Принципи Лагранжа і Кастільяно.....	437
16. Підсумки основних результатів	438
16.1. Загальні положення	438
16.2. Основні варіаційні принципи і функціонали.....	444
16.2.1. Розтяг-стиснення	444
16.2.2. Плоский згин.....	446
16.2.3. Сумісна дія розтягу-стиснення і згину.....	447
16.2.4. Просторова задача теорії пружності.....	450
16.2.5. Пластини	452
16.2.6. Оболонки.....	453
16.3. Висновки	453

Частина III. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ	456
17. Основні підходи прямих методів	456
17.1. Методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Треффца	457
17.2. Канонічні рівняння методу Рітца для функціонала Лагранжа. Приклад . . .	460
17.3. Канонічні рівняння методу Бубнова-Гальоркіна для функціонала Лагранжа. Приклад	464
17.4. Матриці систем алгебраїчних рівнянь методу Рітца і методу Бубнова-Гальоркіна	466
17.5. Рівняння методу Треффца. Приклад	467
17.6. Метод найменшого квадратичного відхилення	468
17.7. Метод ортогоналізації	473
17.8. Порівняння основних підходів	476
17.9. Скінченно-різницевий метод Ейлера	477
17.10. Застосування методу множників Лагранжа при реалізації варіаційних методів	479
17.11. Метод Канторовича. Приклад	494
18. Наближені методи розв'язання тривимірних варіаційних задач	497
18.1. Метод Рітца	497
18.2. Метод Бубнова-Гальоркіна	499
18.3. Метод Треффца	499
19. Метод скінченних елементів як прямий варіаційний метод. Загальні положення. Технологія реалізації. Приклади	504
19.1. Реалізація варіаційних розв'язків	504
19.2. Основи методу	506
19.3. Загальні співвідношення дискретних систем	509
19.3.1. Метод переміщень	512
19.3.2. Метод сил	514
19.4. Статико-кінематичний аналіз	515
19.5. Варіаційне формулювання МСЕ	518
20. Розрахунок стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу переміщень	521
20.1. Дискретна модель розрахункової схеми стержневої системи	521
20.2. Кінцеві характеристики стержневих скінченних елементів	523
20.3. Матриця перетворення	526
20.4. Побудова матриці жорсткості стержня в локальній системі координат. . .	528
20.5. Матриці жорсткості стержневих елементів у локальній системі координат.	531
20.6. Матриці жорсткості стержня в глобальній системі координат	535
20.7. Вузлові характеристики скінченно-елементної моделі	540
20.8. Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі	543
20.9. Визначення зусиль у стержнях	546

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

20.10. Приклад розрахунку рами за методом скінченних елементів	548
20.10.1. Геометричні характеристики скінченних елементів	548
20.10.2. Побудова векторів вузлових характеристик.	548
20.10.3. Побудова матриці жорсткості скінченно-елементної моделі	551
20.10.4. Обчислення зусиль у стержнях	553
20.11. Особливості розрахунку просторових стержневих систем	554
20.11.1. Рівняння рівноваги вузлів просторових рам	554
20.11.2. Матриця перетворення.	556
20.12. Матриця жорсткості просторового стержня	558
21. Розрахунок стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу сил	560
21.1. Кінцеві зусилля в скінченних елементах	560
21.2. Матриця податливості скінченного елемента	562
21.3. Вузлові характеристики дискретної моделі	564
21.4. Матриця податливості і матриця жорсткості дискретної моделі.	566
21.5. Рівняння рівноваги вузлів дискретної моделі	568
21.6. Повна система рівнянь та її роз'язок	571
21.7. Обчислення дійсних зусиль у стержнях.	572
22. Сучасні програмні комплекси, що базуються на методи скінченних елементів	574
22.1. Загальні схеми сучасних програмних систем, що використовують МСЕ.	574
22.1.1. Загальна структура розрахункової програмної системи.	574
22.2. Характеристики найбільш поширених програмних систем.	575
23. Деякі перспективні напрями розвитку програмних систем	579
Частина IV. ВАРІАЦІЙНІ ПОСТАНОВКИ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ	582
24. Рівняння геометрично нелінійної теорії пружності	582
24.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії пружності	582
24.2. Варіаційні підходи	587
24.3. Нелінійні співвідношення для одновимірної задачі	590
24.4. Застосування варіаційних принципів в задачах нелінійного деформування балки	592
24.4.1. Функціонал Лагранжа	593
24.4.2. Функціонал типу Кастильяно.	594
24.4.3. Приклади розв'язання геометрично нелінійних задач для балок за допомогою варіаційних підходів	598
24.4.4. Приклади. Потенціальна енергія пружної деформації і доповнювальна потенціальна енергія для нелінійних задач. Теорема Лагранжа і Кастильяно	604
24.4.5. Задача про великі переміщення ферми Мізеса	616

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

24.5. Сумісна дія згину і розтягу-стиснення у геометрично нелінійній постановці	619
25. Геометрично нелінійне деформування тонких пластин	625
25.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії тонких пластин	625
25.2. Основні варіаційні рівняння	630
25.3. Чисельне розв'язання варіаційних рівнянь	633
26. Нелінійне деформування гнучких пологих оболонок	635
26.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії гнучких пологих оболонок	635
26.2. Реалізація варіаційних принципів. Методи Рітца і Бубнова-Гальоркіна	638
27. Поняття про варіаційні принципи в задачах пружнопластичності	640
27.1. Основні гіпотези і рівняння теорії пластичності	640
27.2. Теорема Клапейрона.	642
27.3. Принцип мінімуму повної енергії.	643
27.4. Принцип можливих змін напруженого стану і принцип мінімуму доповнювальної роботи	644
27.5. Апроксимація діаграм деформування фізично нелінійного пружного тіла. Приклади	646
28. Конструктивно-нелінійні системи.	653
28.1. Методи дослідження нелінійного деформування механічних систем з однібічними в'язями	653
28.1.1. Постановка задачі.	653
28.1.2. Варіаційні задачі з рухомими границями.	657
28.1.3. Приклади реалізації деяких варіаційних задач	660
28.2. Дослідження контактних зусиль між шарами складової балки при наявності тертя	667
28.3. Нерівність Фур'є. Нерівність Юнга. Приклади.	672
28.4. Нелінійні задачі згину круглої пластинки	678
28.5. Пошук рівноважних станів механічних систем з обмеженнями проективним методом нелінійного програмування	680
28.6. Побудова траєкторій навантаження нелінійних механічних систем з обмеженнями (загальний випадок)	685
28.7. Критичні та інваріантні стани механічних систем із скінченним числом ступенів свободи.	690
28.8. Аналіз стійкості конструкцій, що односторонньо контактують з жорсткими тілами	698
Література	706

ПЕРЕДМОВА

З історією створення варіаційних принципів механіки можна ознайомитись за збіркою перекладів класичних робіт [43, 230]. Це питання висвітлене в книгах Е.Маха [123], А.Майера [233], Ф.Клейна [96], К.Ланцоша [112], Л.С.Полака [152], Г.Голдстіна [229], С.П.Тимошенка [183], С.А.Бернштейна [32], В.Л.Бердичевського [29], А.П.Філіна [207], книгах [150,202] та інших.

Історично першим варіаційним принципом був принцип можливих переміщень. Його формулювання для важеля містилось ще у „Фізике” Аристотеля (IV ст. до н.е.). Причому Аристотель, як відзначає Ейлер [217], мабуть запозичив цю думку у своїх попередників. Подальші суттєві етапи пов'язані з іменами Стевіна і Галілея. У практично сучасному вигляді принцип можливих переміщень сформульований Йоганом Бернуллі.

Мабуть, перше чітке формулювання варіаційного принципу стосовно фізичної проблеми надане у 1662 р. французьким математиком П'єром Ферма. Перше формулювання варіаційного принципу в механіці було надане у 1744 р. П'єром Мопертюї. Далі були сформульовані варіаційні принципи Мопертюї, Лагранжа, Кастільяно, Гамільтона-Остроградського, Гамільтона-Пуанкаре, Якобі, пізніше у термодинаміці – Уїлларда Гіббса.

Кожний варіаційний принцип стверджує, що для деякого класу задач, якщо задані умови задачі, то з усіх уявних станів, процесів і т.д., у певному розумінні сумісних із цими умовами, в дійсності реалізується такий стан, такий процес, які надають деякому характерному для цього принципу функціонала стаціонарне значення. Іноді говорять не про стаціонарне, а про екстремальне значення, що не завжди рівноцінно. Тож варіаційний принцип характеризується зазначенням класу задач, умов сумісності процесів, що порівнюються з умовами задачі і визначеним для цих процесів функціоналом, який повинен приймати стаціонарне або екстремальне значення.

Взагалі мають місце дві основні групи варіаційних принципів. До однієї з них, яка починається з принципів Ферма, Мопертюї, Лагранжа, Кастільяно, Гамільтона та ін. і має справу із задачами фізики і механіки та інших дисциплін, у найбільшій мірі підходять наведені вище визначення. Тут йдеться про вивчення об'єктивно існуючих процесів. Такий принцип може бути виведений із локальної теорії процесу, з його диференціальних рівнянь Ейлера для функціонала, який характеризує принцип. У цьому випадку більше йдеться про стаціонарне значення функціонала, оскільки для локальних властивостей екстремальність цього значення неістотна. Разом з тим можуть бути класи задач, для яких екстремальність несе додаткову інформацію, наприклад, про дійсність принципу. Слід зазначити, що, якщо варіаційний принцип є еквівалентним диференціальному рівнянню, цей принцип часто надає більшої користі за рахунок його більшої універсальності, а також зручності застосування чисельних методів.

Друга основна група варіаційних принципів має справу із задачами теорії математичної економіки, оптимального управління. Тут йдеться про розробку у заданих умовах певної стратегії, яка забезпечувала б за цих умов максимальну користь. Значення цієї користі, функції цілі і являє собою функціонал, причому, як правило, цей

функціонал необхідно максимізувати. Відповідна математична теорія була створена у середині п'ятидесятих років минулого століття і отримала назву теорії оптимального управління. Теорія оптимального управління являє собою синтез ідей і методів дослідження класичного варіаційного числення, а також сучасних. Значну роль відіграв тут „принцип максимуму” Л.С.Понтрягіна. Цього напрямку варіаційних принципів ми не будемо торкатись.

Варіаційні принципи механіки мають велике теоретичне значення, оскільки:

- виявляють загальну енергетичну природу явищ, які досліджуються;
- дають змогу через загальні вирази для функціоналів знаходити диференціальні рівняння і природні граничні умови (є випадки, коли іншим шляхом їх отримати важко);

- також дають змогу знаходити розв'язки задач, оминаючи складання і розв'язок диференціальних рівнянь, за допомогою так званих прямих методів варіаційного числення, найбільш зручних для реалізації у сучасних чисельних процедурах.

У механіці суцільного середовища існує багато різних і на перший погляд не пов'язаних між собою варіаційних принципів¹. Для систематизації за основу обирають варіаційне рівняння для суцільного середовища. При цьому варіаційні принципи можуть мати різний характер в залежності від того, які функції варіюються, а які використовуються як залежності обмежень. Подальші перетворення ґрунтуються на ідеї двоїстості. Прямій задачі мінімізації функціонала Лагранжа відповідає двоїста задача максимізації функціонала Кастільяно із зворотнім знаком. При цьому екстремальні значення відповідних функціоналів співпадають. За такою схемою будуються і змішані функціонали.

Дана книга присвячена систематизованому викладенню варіаційних принципів будівельної механіки у широкому розумінні цього терміну і методів розв'язання відповідних варіаційних задач.

Книга написана як підручник із спеціального курсу, ознаками якого є:

- більш глибоке викладення одного із фундаментальних розділів курсу будівельної механіки;
- охоплення у мінімально необхідному обсязі знань суміжних галузей, таких як варіаційне числення, опукле програмування, методи математичної фізики тощо;
- наявність значної кількості прикладів, які за відомою тезою Ньютона [103] при вивченні наук не менш повчальні, ніж правила.

Текст підручника за змістом супроводжується короткими історичними відомостями у формі посилань, оскільки за І.В.Гете: «Історія науки є тим, що це наука сама по собі» («Die Geschichte der Wissenschaft ist die Wissenschaft selbst». J.W.Goethe).

Згідно з викладеним вище, матеріал підручника розподілений по чотирьох частинах наступним чином:

Частина I. Елементи варіаційного числення. Двоїсті постановки варіаційних задач.

Частина II. Варіаційні постановки лінійних задач будівельної механіки.

¹ Варіаційні постановки задач можуть бути представлені або у формі інтегральних тотожностей, які в механіці розглядаються як варіаційні начала і носять назву варіаційних рівнянь, або у формі вимог стаціонарності відповідних функціоналів, що в механіці розглядаються як варіаційні принципи.

Частина III. Прямі методи розв'язання варіаційних задач.

Частина IV. Варіаційні постановки нелінійних задач.

У першій частині викладення елементів варіаційного числення базується на загальноновизнаних книгах Р.Куранта, Д.Гільберта [105], М.О.Лаврентьєва, Л.А.Люстерніка [106], Л.Е.Ельсгольца [218, 219], І.М.Гельфанда, С.В.Фоміна [57], В.І.Арнольда [8], Г.В.Алексєєва, В.М.Тихомирова, С.В.Фоміна [5], К.Ланцоша [112], С.Г.Міхліна [125], А.А.Мишкіса [133], Л.Янга [220], Ф.Р.Гантмахера [53], Л.Я.Цлафа [213].

При цьому звернуто увагу на такі необхідні в подальшому поняття як лема Дю-Буа-Реймонда, перетворення Юнга-Фенхеля, перетворення Лежандра, нерівність Юнга, двоїсті за Юнгом функції.

Згідно з загальною методологією М.Базара, К.Шетті [23], Д.Хіммельблау [211], Дж.Хедлі [210] розглянуто функцію Лагранжа, теореми двоїстості. Не зважаючи на те, що ці результати відносяться до задач, які визначаються функціями скінченного числа змінних, вони можуть бути розповсюджені на функціональні аналоги задач опуклого програмування, обмеження яких описуються диференціальними залежностями. Такими аналогами є задачі деформованого твердого тіла, які містять обмеження, що мають як функціональні, так і диференціальні оператори для внутрішніх областей і границь тіла, а екстремум визначається як екстремум відповідного функціонала.

З використанням двоїстих за Юнгом функцій потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, перетворення Юнга-Фенхеля і Лежандра отримані двоїсті постановки варіаційних задач, теореми Лагранжа і Кастільяно, теорема Донкіна. Наведені приклади двоїстих задач для функціоналів.

В цілому перша частина містить мінімальний обсяг знань у цих галузях, які необхідні для подальшого вивчення. Він може бути використаний незалежно у загальних курсах вищої математики для відповідних інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Друга частина базується на матеріалах відомих підручників [3, 4, 10, 21, 22, 25, 26, 38, 40, 41, 45, 53, 68, 92, 98, 114, 118, 149, 157, 168, 178, 188, 191, 194, 203, 215], а також книгах К.Ланцоша [112], К.Васідзу² [44], Л.С.Лейбензона [113, 114], А.І.Лур'є [117], Л.Д.Ландау, Е.М.Лівшица [111], А.Лява [120], В.В.Новожилова [134, 136], Е.Треффца [200], Е.Тонті [199], П.Ф.Папковича [140], Р.Клафа, Дж.Пензієна [95], Л.О.Розіна [170, 172], Л.В.Бердичевського [29], В.І.Слівкера [177], А.П.Філіна [207], Я.А.Пратусевича [159], Н.П.Абовського [1].

Викладення здійснено згідно із загальною ідеєю двоїстості виділенням потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії як двоїстих за Юнгом функцій.

Для простих напружених станів розтягу-стиснення, плоского згину, сумісної дії розтягу-стиснення і згину, а також тривимірних – просторової задачі теорії пружності, двовимірних – теорії пластин і оболонок, використовуючи рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил і їх варіацій, теорему Клапейрона, формулу П.Ф.Папковича [140],

² У літературі російською мовою прижилася невдала транскрипція цього імені як Вашицу. У передмові редактора перекладу книги (Васідзу) справедливо указується на цю лінгвістичну помилку, оскільки в японській мові відсутній звук «ш».

теорему про дивергенцію, перетворення Лежандра, за єдиною методологією побудовані варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно, Рейснера, Ху-Васідзу. Розглянута теорія Р.Куранта і Д.Гільберта перетворення варіаційних задач, зокрема, пряме і зворотне перетворення Фрідрікса [105, 171]. По кожному розділу наведені чисельні приклади. Наведена теорема І.І.Гольденבלата про потенціали будівельної механіки [61], а також основні теореми класичної будівельної механіки стержневих систем [21]. У динаміці стержневих систем отримані принцип Гамільтона-Остроградського і двоїтий принцип Гамільтона-Пуанкаре [14, 94, 95].

В цілому, в будівельній механіці стержневих систем функції потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії є додатно визначеними квадратичними формами. Вони є двоїстими за Юнгом функціями і пов'язані між собою перетворенням Лежандра. Перетворення Лежандра є частинним випадком перетворення Юнга-Фенхеля і за фізичним змістом являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил, тобто відповідає теоремі Клапейрона. Екстремуми двоїстих функцій потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії дають теореми Лагранжа і Кастільяно, та призводять до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці яких (матриці жорсткості і матриці податливості) є матрицями Гессе або матрицями других похідних відповідно від потенціальної енергії пружної деформації (матриця жорсткості) і доповнювальної потенціальної енергії (матриця податливості). Ці матриці є позитивно визначеними і задовільняють критеріям Сильвестра, тобто усі їх головні мінори є позитивно визначеними. Вони є також взаємно оберненими.

Частина III присвячена викладенню прямих методів розв'язання варіаційних задач. Основні ідеї підходів прямих методів розглянуті на чисельних прикладах одновимірних задач з відповідними порівняннями і аналізом результатів, а також у програмних комплексах на основі методу скінченних елементів (МСЕ), як прямого варіаційного методу. Розглянуті характеристики найбільш поширених програмних систем, а також перспективні напрями розвитку програмних систем [21, 85].

Викладені основи і наведені приклади застосування методів Рітца, Бубнова-Гальборкіна, Треффца, методів найменшого квадратичного відхилення, ортогоналізації, скінченно-різницевого методу Ейлера як історично найпростішої моделі МСЕ, методу Канторовича [50, 84, 113, 114, 115, 200, 219, 236, 237]. Показано застосування методу множників Лагранжа при реалізації варіаційних методів.

Частина IV містить варіаційні постановки геометрично нелінійних, фізично нелінійних і конструктивно нелінійних задач. За В.В.Новожиловим [134, 136] викладені рівняння геометрично нелінійної теорії пружності. Окремо розглянуті вирази для потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії. Наведене загальне варіаційне рівняння. Отримані співвідношення для функціонала Лагранжа, а також типу Кастільяно.

Отримані, як частинний випадок, основні співвідношення і функціонали для одновимірної задачі згину балки. Наведені приклади чисельної реалізації, показано ефекти геометричної нелінійності. Показано застосування перетворення Лежандра, теореми Лагранжа і Кастільяно для нелінійних систем, проведено порівняння з відповідними розв'язками [188]. Отримані відповідні функціонали для геометрично

нелінійних задач згину тонких пластин і оболонок і наведені основні схеми їх чисельної реалізації за методом Рітца, Бубнова-Гальоркіна [47, 48].

Наведені теорема Клапейрона і основні варіаційні принципи – принцип мінімуму повної енергії, принцип можливих змін напруженого стану і принцип мінімуму доповнювальної роботи в задачах пружнопластичності. Наведені схеми апроксимації діаграм фізично нелінійного пружного тіла [25, 87, 121, 129]. Наведені чисельні приклади. Отримані вирази для двоїстих функцій потенціальної енергії, перетворення Лежандра, теорем Лагранжа і Кастільяно.

Окремо розглянуті задачі з однобічними в'язями, або конструктивні системи як варіаційні задачі з рухомими границями. Застосовані перетворення Лежандра, теорема Лагранжа і Кастільяно. Для круглих пластин наведені розв'язки С.П.Тимошенка [186, 196]. Наведені нерівності Фур'є, Юнга [112]. Дані основні принципи розрахунку систем з однобічними в'язями [11, 141, 142, 143, 163]. Викладена методика нелінійного дослідження механічних систем з однобічними в'язями [13]. Наведені приклади.

В основу книги покладені спеціальні курси лекцій, прочитаних автором на протязі багатьох років для студентів спеціальності „Промислове і цивільне будівництво”, які спеціалізуються і, відповідно, виконують дипломні і магістерські роботи по кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури.

Природно, що використовується загальна методологія викладання будівельної механіки, яка склалася на кафедрі і базується на відповідному програмному забезпеченні. Автор висловлює щире подяку всім колегам по кафедрі і університету і особисто доц. Ю.В.Вороні, доц. В.В.Отрашевській, к.т.н. О.В.Герашенку за допомогу у підготовці матеріалів до видання.

Частина I. Елементи варіаційного числення. Двоїсті постановки варіаційних задач

1. Варіаційне числення

1.1. Основні поняття

В багатьох задачах механіки, фізики, геометрії та інших важливу роль відіграють змінні величини, які називаються функціоналами. Кажуть, що задано функціонал, якщо кожній функції (або кривій) з деякого класу поставлено у відповідність певне число. Тобто можна сказати, що функціонали – це функції, у яких за незалежну змінну приймаються функції. Для задач, пов'язаних з поняттям функціонала, найбільш розвиненими є методи знаходження найбільшого і найменшого значення функціонала. Такі задачі називаються задачами варіаційного числення. Наведемо приклади функціоналів.

1. *Довжина дуги кривої.* Функціоналом є довжина дуги кривої, що з'єднує дві точки x_0 і x_1 , оскільки ця величина визначається вибором функції $y = y(x)$, графік якої проходить через задані точки. Відомо, що довжина l кривої $y = y(x)$ між точками $(x_0, y(x_0))$ і $(x_1, y(x_1))$ обчислюється за формулою

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

2. *Площа поверхні.* Площа S деякої поверхні також є функціоналом, оскільки вона визначається вибором функції $z = z(x, y)$, яка задає поверхню. Відомо, що

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy ,$$

де D – проекція поверхні на площину xy .

3. *Задача про брахістохрону.* Класичною задачею варіаційного числення є задача про лінію найшвидшого скочування – брахістохрону¹. Це задача про визначення лінії між двома точками A і B , що не лежать на одній вертикальній прямій, по якій матеріальна точка переміститься із A в B за найкоротший час (рис. 1.1). Найкоротшу відстань між A і B визначає пряма лінія, яка з'єднує точки A і B , але, очевидно, що пряма не буде лінією найшвидшого скочування, оскільки при скочуванні по прямій швидкість руху збільшується порівняно повільно. Якщо ж крива біля точки A більш круто

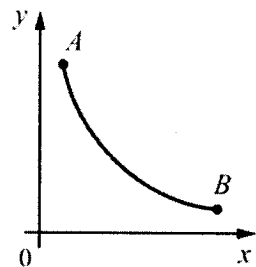


Рис. 1.1

¹ Задача про брахістохрону – перша в історії варіаційна задача.

І. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

спускається донизу, то, хоча шлях і буде довшим, його значна частина проходиться з більшою швидкістю. Задачу про брахістохрону розв'язали І. Бернуллі¹, Я. Бернуллі², І. Ньютон, Х.Гюйгенс³, Г.В.Лейбніц⁴ і Г.Ф.А. Лопіталь⁵. З'ясувалося, що лінією найшвидшого скочування є циклоїда (див. приклад 1.10, п.1.4)⁶.

4. *Задача про геодезичні лінії.* Задача полягає у знаходженні лінії найменшої довжини, яка з'єднає дві задані точки на деякій поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ (рис. 1.2). Такі найкоротші лінії називаються геодезичними. Це є типова задача на зв'язаний або умовний екстремум. Вона зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

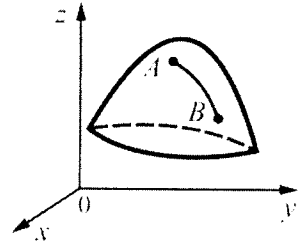


Рис. 1.2

¹ Бернуллі, Іоганн (нім. Johann Bernoulli, 1667—1748) — швейцарський математик, найбільш знайомий представник сім'ї Бернуллі, молодший брат і учень Якоба Бернуллі, провідний математик Європи XVIII ст., вчитель Г.Ф.А.Лопіталя і Л.Ейлера. Поставив і вирішив задачу про брахістохрону, спільно з Я.Бернуллі заклад основи варіаційного числення, основоположник математичної фізики. Оспорював у Якоба пріоритет у постановці варіаційної проблеми. Його наукова кореспонденція складала близько 2500 листів.

² Бернуллі, Якоб (нім. Jakob Bernoulli, 1654—1705) — швейцарський математик, старший брат Іоганна Бернуллі. Спільно з І. Бернуллі поклав початок варіаційному численню, поставив і частково вирішив ізопериметричну задачу, а також поставлену І. Бернуллі задачу про брахістохрону, визначив форму кривої вигину пружного стрижня, ввів термін «інтеграл».

³ Гюйгенс, Християн (нідерл. Christiaan Huygens, 1629—1695) — нідерландський механік, фізик, математик, астроном і винахідник.

⁴ Лейбніц, Готфрід Вільгельм (нім. Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646—1716) — німецький філософ, математик, фізик, історик, юрист, дипломат, винахідник, мовознавець. Разом з І. Ньютоном поділяє заслугу заснування диференціального і інтегрального числення.

⁵ Лопіталь, Гійом Франсуа Антуан (фр. Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, 1661-1704) — французький математик. У 1691-1692 рр. вивчав математику під керівництвом І.Бернуллі. Основні дослідження стосуються математичного аналізу і геометрії. Використав лекції І.Бернуллі у книзі «Аналіз нескінченно малих для дослідження кривих ліній» (1696), яка стала першим підручником з аналізу.

⁶ Незабаром після роботи І. Бернуллі про брахістохрону почали з'являтися (і розв'язуватися) багато задач того ж типу. І. Бернуллі поставив перед своїм учнем Л. Ейлером проблему знайти загальний підхід до їх вирішення. У 1744 р. вийшла праця Ейлера «Methodus inveniendi I lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti», «Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимуму або мінімуму, або розв'язання ізопериметричної задачі, розглядуваної в найширшому сенсі», в якому були закладені теоретичні основи нового розділу математичного аналізу. Зокрема, апроксимуючи криві ламаними, Ейлер вивів диференціальне рівняння другого порядку, яке мають задовольняти екстремалі. Згодом Лагранж назвав його *рівнянням Ейлера*. У 1759 р. з'являється перша робота Лагранжа і з нею нові методи дослідження. Лагранж «варіює» криву, підозрювану на екстремум, виділяє з *приростів функціоналів головні лінійні частини*, які називає *варіаціями*, і користується тим, що в точці екстремуму варіація має дорівнювати нулю. Метод Лагранжа стає згодом загальноприйнятим. Цим методом і ми виведемо у подальшому рівняння Ейлера. Відзначимо, що після робіт Лагранжа за пропозицією Ейлера весь розділ математики, до якого застосовувався метод Лагранжа, почали називати *варіаційним численням*.

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

де функції $y(x)$ і $z(x)$ задовольняють додаткову умову $\varphi(x, y, z) = 0$ (див. п. 1.17).

5. *Ізопериметрична задача.* Найдавнішою з відомих екстремальних задач є, мабуть, класична ізопериметрична задача: необхідно знайти замкнену лінію заданої довжини L , що обмежує максимальну площу S .

Розв'язання ізопериметричної задачі дається таким твердженням: якщо спрямлювана крива довжини L обмежує плоску фігуру, що має площу S , то

$$L^2 \geq 4\pi S \quad (1.1)$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли крива – коло.

Нерівність (1.1) називається *ізопериметричною*, її доведення можна знайти в [35]¹.

*Перша задача Дідони*². Серед всіх дуг довжини L , що містяться в півплощині, обмеженій прямою l , з кінцями $A, B \in l$, знайти таку, яка разом з відрізком $[AB]$ обмежує фігуру найбільшої площі S .

¹ Важко сказати, коли вперше була висловлена думка про найбільшу «місткість» кола і сфери серед всіх замкнених кривих однакової довжини, або поверхонь однакової площі. Один з останніх учнів афінської школи платоніків Симпліцій (VI ст. н. е.), що склав незадовго до остаточного краху античної цивілізації великий коментар до праць Аристотеля (IV ст. до н. е.), пише: «Доведено до Аристотеля, бо він користується цим, як відомим, а потім більш повно – Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільш містким є коло, а серед ізоіфаних – куля». У цих словах визначена постановка таких екстремальних задач: *серед плоских замкнених кривих, що мають задану довжину, знайти криву, яка охоплює найбільшу площу, і серед просторових замкнених поверхонь, що мають задану площу, знайти поверхню, яка охоплює найбільший об'єм.* Для філософа-платоніка така постановка задачі є природною і пов'язана з пошуком ідеальних форм. Недаремно коло і куля були в давнину символами геометричної досконалості.

² Прозаїчніше мотивування ізопериметричної і близьких до неї задач можна знайти в дещо наївній, але достатньо виразній формі в легенді про Дідону. Нагадаємо її за «Енеїдою» римського поета Вергілія. Фінікійська царівна Дідона із невеликим загonom жителів міста Тіра, рятуючись від переслідувань тирана – брата Дідони, покинули рідне місто і відправилися на кораблях на захід уздовж берегів Середземного моря. Вибравши на африканському узбережжі зручне місце (нинішня Туніська затока), Дідона і її супутники вирішили заснувати тут поселення. Мабуть, ця ідея не сподобалася місцевим жителям, але Дідоні вдалося умовити їх предводителя Ярба, і він необережно погодився поступитися клаптиком землі, «який можна оточити бичачою шкурою». Ярб не відразу зрозумів хитрість і підступність фінікіянки. Розрізавши шкуру на тонкі смужки, Дідона зв'язала їх в один довгий ремінь і, оточивши їм значну територію, заклала на ній місто Карфаген (фінікійське *Картадашт* – нове місто). На згадку про цю історію цитадель Карфагена дістала назву Бірса (мовою пунійців, так римляни називали жителів Карфагена, – *шкура*). Цією назвою послуговуються і до сьогодні. Всі ці події легенда відносить до 825 (або до 814) р. до н.е.

У такій ситуації виникає та ж сама класична ізопериметрична задача: вказати оптимальну форму ділянки землі, яка при заданій довжині периметра L має найбільшу площу S . Її розв'язком є коло. Інші постановки задачі можна отримати якщо, як це природно припустити, Дідона хотіла зберегти вихід до моря. На відміну від класичної ізопериметричної задачі, ці задачі будемо називати задачами Дідони.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Розв'язання. Нехай ACB довільна допустима дуга з кінцями $A, B \in l$, що обмежує фігуру площі S (рис. 1.3). Відобразивши її симетрично відносно l , дістанемо замкнену криву довжини $2L$, що обмежує фігуру площі $2S$. Із (1.1)

$$(2L)^2 \geq 4\pi 2S, \quad (1.2)$$

звідки

$$S \leq L^2 / (2\pi). \quad (1.3)$$

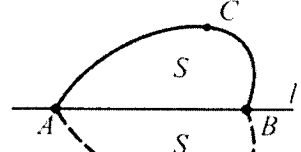


Рис. 1.3

Отже, максимальним значенням $S \in L^2 / (2\pi)$ і це значення досягається, якщо ACB – півколо, що спирається на діаметр $[AB]$. Задача має єдиний розв'язок з точністю до зсуву вздовж прямої.

У наведеній задачі кінці A і B шуканої дуги можна вибирати на прямій l довільно. Розглянемо випадок, коли кінці дуги задаються.

Друга задача Дідони. Серед всіх дуг довжини L , що знаходяться в півплощині, обмеженій прямою l , із заданими кінцями $A, B \in l$ знайти таку, яка разом з відрізком $[AB]$ обмежує фігуру найбільшої площі.

Розв'язання. Ясно, що задача має сенс тільки при $L > |AB|$ (інакше або немає жодної дуги, що задовольняє умови задачі, або (при $L = |AB|$) така дуга тільки одна – сам відрізок $[AB]$). Природно очікувати по аналогії з попередньою задачею, що розв'язком буде дуга кола, для якого $[AB]$ є хордою. Така дуга \widehat{ACB} визначається єдиним чином. Доповнимо її до повного кола дугою ADB (рис. 1.4). Довжину дуги ADB позначимо λ , а площу сегмента, обмеженого цією дугою і відрізком $[AB]$, – σ .

Нехай тепер ACB – довільна дуга, що задовольняє умови задачі і обмежує разом з $[AB]$ площу S . Замкнена крива $ACBD$ має довжину $L + \lambda$ і обмежує площу $S + \sigma$. Згідно із (1.2) $4\pi(S + \sigma) \leq (L + \lambda)^2$, звідки

$$S \leq \frac{1}{4\pi}(L + \lambda)^2 - \sigma.$$

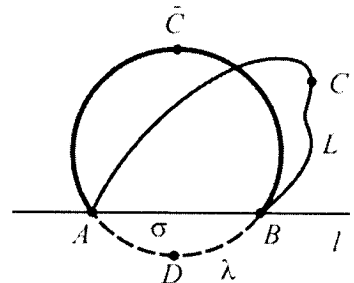


Рис. 1.4

Як і в (1.1), рівність, а отже й максимальна площа S досягаються тоді і тільки тоді, коли крива $ACBD$ є колом, тобто коли дуги рівні: $ACB = \widehat{ACB}$.

Відзначимо таку відмінність двох наведених задач. У першій задачі Дідони множина конкуруючих кривих більша, оскільки положення точок A і B не задане. Втім, не обмежуючи загальності, одну з них, скажімо A , можна вважати фіксованою. Тоді положення точки B визначається додатковою умовою: \widehat{ACB} не

просто дуга кола, як у другій задачі Дідони, але $A\widehat{C}B$ є півколом, що еквівалентно твердженню: у своїх кінцях шукана дуга підходить до прямої l під кутом 90° . Далі буде видно (п.1.8), що тут проявляється загальний принцип: надаючи кінцям шуканої кривої деяку свободу, треба вимагати, щоб в них задовольнялися певні умови, які називаються *умовами трансверсальності*. Форма ж шуканої кривої в обох задачах однакова, вона визначається деяким рівнянням (*рівнянням Ейлера*¹), яке має задовольняти крива. У нашому випадку шукана крива в усіх точках повинна мати однакову кривизну.

Ізопериметрична задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала S за наявності додаткової умови – довжина кривої має бути сталою, тобто значення функціонала

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

залишається сталим. Умови такого типу називаються ізопериметричними (див. п.1.19).

У всіх наведених задачах 1–5 розглядаються функціонали виду $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$. Такі функціонали мають властивість локальності: якщо розбити криву $y = y(x)$ на частини і обчислити значення функціонала для кожної з них, то сума отриманих значень дорівнюватиме значенню функціонала для всієї кривої $y = y(x)$. Саме такі функціонали розглядаються у варіаційному численні.

1.2. Варіація функціонала, необхідна умова екстремуму функціонала

Методи розв'язання варіаційних задач, тобто дослідження функціоналів на максимум і мінімум, дуже схожі з методами диференціального числення дослідження на максимум і мінімум функцій. Тому при викладенні методів знаходження екстремумів функціоналів доцільно нагадати основні поняття і результати математичного аналізу, пов'язані з задачами знаходження екстремумів функцій, і паралельно розглянути аналогічні поняття і відповідні теореми для варіаційних задач.

Приростом Δx аргументу функції $f(x)$ називається різниця між двома значеннями змінної: $\Delta x = x - x_1$. Якщо x є незалежною змінною, то приріст x співпадає з диференціалом: $dx = \Delta x$.

¹ Ейлер, Леонард (нім. Leonhard Euler, 1707—1783) – математик, механік, фізик і астроном. Один із фундаторів варіаційного числення (праці 1727-1741 рр.). У 1744 р. вийшла його праця «Метод нахождения кривых линий» – перша книга з варіаційного числення. Написав видатні мемуари майже по усіх галузях математики і механіки. Список його праць нараховує 850 назв, серед яких ряд багатомісних монографій. З 1909 р. у Швейцарії видається повне зібрання його творів, розраховане на 72 томи. Крім того, лише частково опублікована його наукова переписка, що охоплює 3000 листів.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Аргументом функціонала є функція, тому у варіаційних задачах за приріст змінної приймається приріст функції. Отже, приріст аргументу функціонала це є різниця двох функцій $y(x)$ і $y_1(x)$, яка називається *варіацією* і позначається δy . Тобто $\delta y = y(x) - y_1(x)$, і δy є функцією змінної x . Цю функцію можна диференціювати один або декілька разів і $(\delta y)' = y'(x) - y_1'(x) = \delta y'$, тобто похідна варіації дорівнює варіації похідної. Аналогічно

$$(\delta y)'' = y''(x) - y_1''(x) = \delta y'' ,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\delta y)^{(k)} = y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) = \delta y^{(k)} .$$

Слід вказати на істотну відмінність між δy і dy . Обидві величини є нескінченно малими змінами функції y . Однак, до dy спричинюється нескінченно мала змінна dx незалежної змінної. Разом з тим, величина δy пов'язана зі зміною функції y та появою нової функції $y + \delta y$ (рис. 1.5).

Природа процесу варіювання є такою, що варіюється лише функція y , а варіювання незалежної змінної не відбувається. Тому завжди вважатимемо $\delta x = 0$.

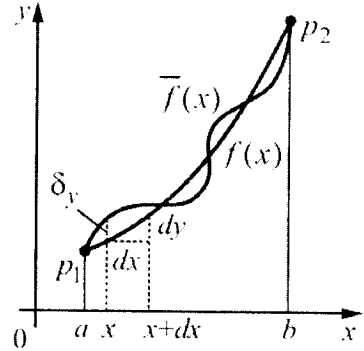


Рис. 1.5

У задачах дослідження функціоналу на екстремум використовується поняття малості варіації, тому необхідно визначитися, коли функції $y(x)$ і $y_1(x)$ є такими, що мало відрізняються одна від одної. Природно вважати близькими функції, для яких малим є модуль їх різниці $y(x) - y_1(x)$ для всіх x із області визначення функції, тобто ступінь близькості функцій оцінювати різницею ординат їхніх графіків для всіх значень x . У такому разі функції, зображені на рис. 1.6 і рис. 1.7, вважатимуться однаково близькими. Але, криві, наведені на рис. 1.7, близькі не тільки за своїми ординатами. Для них, на відміну від кривих на рис. 1.6, мало відрізняються також напрями дотичних при відповідних значеннях x . Тобто малість варіації визначається не тільки величиною $|y(x) - y_1(x)|$, а також і величиною $|y'(x) - y_1'(x)|$.

У багатьох питаннях необхідно розрізняти такі випадки. Інколи є потреба враховувати відмінність також і старших похідних, тобто вважати близькими ті функції, для яких малими є модулі кожної з різниць

$$y(x) - y_1(x) , \quad y'(x) - y_1'(x) , \quad y''(x) - y_1''(x) , \quad \dots , \quad y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) .$$

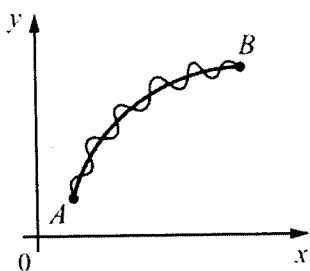


Рис. 1.6

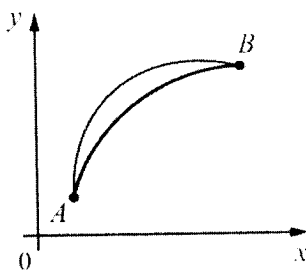


Рис. 1.7

Дано таке означення. Ступінь близькості кривих $y = y(x)$ і $y = y_1(x)$ має порядок k , якщо малими є модулі різниць

$$y(x) - y_1(x), \quad y'(x) - y_1'(x), \quad y''(x) - y_1''(x), \quad \dots, \quad y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x).$$

Зокрема, якщо малим є модуль $y(x) - y_1(x)$, то криві вважаються близькими у розумінні близькості нульового порядку. Якщо малими є модулі різниць $y(x) - y_1(x)$, $y'(x) - y_1'(x)$, то криві близькі у розумінні близькості першого порядку і т. д. Отже, на рис. 1.6 зображені криві, близькі у розумінні близькості нульового порядку, а на рис. 1.7 – у розумінні близькості першого порядку і наведене означення дозволяє розрізнити такі випадки.

Очевидно, що із близькості кривих більшого порядку впливає близькість кривих меншого порядку.

Функція $f(x)$ неперервна при $x = x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, або інакше формулюючи, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Припускається, що x належить області визначення функції.

Можна сформулювати означення неперервності функції також і в інших термінах. Перехід від значення $x = x_0$ до іншого значення аргументу x можна подати як надання значенню x_0 деякого приросту Δx : $x = x_0 + \Delta x$. При цьому функція $y = f(x)$ дістане приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Для неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо щоб її приріст Δy прямував до нуля, якщо до нуля прямує приріст Δx незалежної змінної. Іншими словами, функція називається неперервною, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Як вже зазначалося, варіацією аргументу $y(x)$ функціоналу $v[y(x)]$ є різниця між двома функціями деякого класу $\delta y = y(x) - y_1(x)$. Дано означення неперервності функціоналу.

І. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Функціонал $v[y(x)]$ *неперервний* при $y = y_0(x)$ у розумінні близькості k -ого порядку, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$ при

$$\begin{aligned} |y(x) - y_1(x)| &< \delta, \\ |y'(x) - y_1'(x)| &< \delta, \\ |y''(x) - y_1''(x)| &< \delta, \\ &\dots\dots\dots \\ |y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| &< \delta. \end{aligned}$$

Припускається, що $y(x)$ належить класу функцій, для якого визначено функціонал $v[y(x)]$. Іншими словами, функціонал $v[y(x)]$ називається *неперервним*, якщо малій зміні $y(x)$ відповідає мала зміна функціонала $v[y(x)]$.

Аналогічним поняттю лінійної функції є поняття лінійного функціонала. Функціонал $v[y(x)]$ називається *лінійним*, якщо він задовольняє такі умови:

1. $v[Cy(x)] = Cv[y(x)]$, де C – довільна стала,
2. $v[y_1(x) + y_2(x)] = v[y_1(x)] + v[y_2(x)]$.

Ці дві умови можна записати інакше, а саме, функціонал $v[y(x)]$ є лінійним, якщо

$$v[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] = C_1v[y_1(x)] + C_2v[y_2(x)],$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Лінійними є, наприклад, функціонали $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx$, і

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx.$$

Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ називається *диференційовною* в точці $x = x_0$, якщо приріст функції $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ можна подати у вигляді

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x, \tag{1.4}$$

де $A(x)$ не залежить від Δx , а $\alpha(x, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. При $A \neq 0$ можливість подання (1.4) означає, що нескінченно мала величина $A\Delta x$ еквівалентна нескінченно малій Δf і є для Δf її головною частиною, якщо основною нескінченно малою є Δx . Головна лінійна відносно Δx частина приросту називається диференціалом функції і позначається df . Розділивши вираз для Δf на Δx і переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, дістанемо $A(x) = f'(x)$, отже $df = f'(x)\Delta x$.

Для функції багатьох змінних (а тим більше для функції «нескінченної кількості змінних») є кілька різних означень похідних. Нагадаємо лише основне означення (у нескінченновимірному випадку належить Фреше).

Функція $f: R_n \rightarrow R$ n змінних називається *диференційовною в точці \hat{x}* , якщо знайдуться числа (a_1, a_2, \dots, a_n) (коротко позначимо їх через a) такі, що

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^n a_i h_i + r(h),$$

де $|r(h)| = o(|h|)$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що із $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} < \delta$ випливає $|r(h)| \leq \varepsilon |h|$. Набір $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається *похідною f в точці \hat{x}* і позначається також $f'(\hat{x})$. Підкреслимо, що $f'(\hat{x})$ – це набір із n чисел. При цьому число $a_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (f(\hat{x} + \lambda e_i) - f(\hat{x})) / \lambda$, де

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (одиниця стоїть на i -тому місці), називається *i -тою частинною похідною f* і позначається $f_{x_i}(\hat{x})$, або $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x})$. Таким чином,

$$f'(\hat{x}) = (f_{x_1}(\hat{x}), \dots, f_{x_n}(\hat{x})). \quad \text{Співвідношення} \quad f'(\hat{x}) = 0 \quad \text{означає, що}$$

$$f_{x_1}(\hat{x}) = \dots = f_{x_n}(\hat{x}) = 0.$$

Дамо аналогічне *означення* для функціонала. Якщо приріст функціонала $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ можна подати у вигляді $\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max|\delta y|$, де $L[y(x), \delta y]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max|\delta y|$ – максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ при $\max|\delta y| \rightarrow 0$, то функціонал називається *диференційовним*. Лінійна відносно δy частина приросту функціонала, тобто $L[y(x), \delta y]$, називається *диференціалом*, або *варіацією*, функціонала і позначається δv . Отже, варіація функціонала – це головна лінійна відносно δy частина приросту функціонала.

При дослідженні функціоналів варіація має таке саме значення, як диференціал при дослідженні функцій.

Можна дати інше означення диференціала функції і варіації функціонала. Розглянемо значення функції $f(x + \alpha \Delta x)$ при фіксованих x і Δx та змінних значеннях параметра α . При $\alpha = 1$ матимемо значення функції $f(x + \Delta x)$, при $\alpha = 0$ – вихідне значення функції $f(x)$. Неважко перевірити, що похідна від $f(x + \alpha \Delta x)$ по α при $\alpha = 0$ дорівнює диференціалу функції $f(x)$ в точці x . Дійсно, за правилом диференціювання складної функції маємо

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \right|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x \Big|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x).$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Так само і для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна отримати диференціал шляхом диференціювання $f(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n)$ по α при $\alpha = 0$. Справді,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n) \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df .$$

Для функціоналів виду $v[y(x)]$, або більш складних, варіацію також можна визначити як похідну від функціонала $v[y(x) + \alpha\delta y]$ по α при $\alpha = 0$. Якщо функціонал має варіацію у розумінні головної лінійної частини приросту, то його приріст можна подати у вигляді

$$\Delta v = v[y(x) + \alpha\delta y] - v[y(x)] = L[y(x), \alpha\delta y] + \beta(y, \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y| .$$

Похідна від $v[y(x) + \alpha\delta y]$ по α при $\alpha = 0$ дорівнює

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y, \alpha\delta y] + \beta(y(x), \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y, \alpha\delta y]}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y(x), \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha} = L(y, \delta y), \end{aligned}$$

оскільки внаслідок лінійності $L[y, \alpha\delta y] = \alpha L(y, \delta y)$, а

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y(x), \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta(y(x), \alpha\delta y)\max|\delta y| = 0$$

через те, що $\beta(y(x), \alpha\delta y) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Тому остаточно

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = L(y, \delta y) .$$

Отже, якщо існує варіація у розумінні головної лінійної частини приросту функціонала, то існує і варіація у розумінні похідної по параметру при початковому значенні параметра і ці два означення еквівалентні.

Означення. Функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму, якщо значення функціонала $v[y(x)]$ на будь-якій близькій до $y = y_0(x)$ кривій не більше ніж $v[y_0(x)]$, тобто $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$. Якщо $\Delta v \leq 0$ і при цьому $\Delta v = 0$ тільки при $y = y_0(x)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається *строгий максимум*. Аналогічно дається означення кривої $y = y_0(x)$, на якій реалізується *мінімум*. У цьому випадку $\Delta v \geq 0$ для всіх кривих, близьких до $y = y_0(x)$.

Сформулюємо тепер теорему Ферма¹. Нагадаємо, що точка \hat{x} є точкою локального мінімуму (максимуму) функції f , якщо знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що з нерівності $|x - \hat{x}| < \varepsilon$ випливає нерівність $f(x) \geq f(\hat{x})$ ($\leq f(\hat{x})$).

Теорема 1.1 (Ферма). Нехай f – функція однієї змінної, диференційовна в точці \hat{x} . Якщо \hat{x} – точка локального екстремуму, то

$$f'(\hat{x}) = 0. \quad (1.5)$$

Точки \hat{x} , в яких виконується співвідношення (1.5), називаються *стаціонарними*.

Доведення. Припустимо, що \hat{x} – точка локального мінімуму функції f , але $f'(\hat{x}) = \alpha \neq 0$. Нехай для визначеності $\alpha < 0$. Задавши $\varepsilon = |\alpha|/2$, знайдемо із означення похідної таке $\delta > 0$, що із $|\lambda| < \delta$ випливає $|r(\lambda)| < |\alpha| |\lambda|/2$. Тоді для $0 < \lambda < \delta$ дістанемо

$$f(\hat{x} + \lambda) = f(\hat{x}) + \alpha\lambda + r(\lambda) \leq f(\hat{x}) + \alpha\lambda + \frac{|\alpha|\lambda}{2} = f(\hat{x}) - \frac{|\alpha|\lambda}{2} < f(\hat{x}),$$

тобто \hat{x} не є точкою локального мінімуму f . Протиріччя доводить теорему.

Згідно з теоремою Ферма точки локального екстремуму (максимуму або мінімуму) є стаціонарними. Обернене, зрозуміло, невірне: наприклад, $f(x) = x^3$, $\hat{x} = 0$.

З «одновимірної» теореми Ферма маємо очевидний наслідок.

Наслідок (теорема Ферма для функцій n змінних). Нехай f – функція n змінних диференційовна в точці \hat{x} . Якщо \hat{x} – точка локального мінімуму функції f , то

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow f_{x_i}(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

¹ Перший загальний аналітичний прийом розв'язання екстремальних задач розроблений П'єром Ферма. Відкритий він, мабуть, у 1629 р., але вперше достатньо повно викладений в листі до Роберваля у 1638р. Щоб осягнути первинну думку Ферма можна звернутися до книги Декарта, де цей лист наведений. (Р. Декарт. Геометрія. З додатком вибраних робіт П. Ферма і листування Декарта. – М. – Л.: ГОНТІ, 1938, с. 154). Сучасною мовою (правда, у Ферма лише для поліномів) прийом Ферма зводиться до того, що при знаходженні екстремуму функції $f(x)$ без обмежень в точці екстремуму \hat{x} має виконуватися рівність $f'(\hat{x}) = 0$. Відомо, що перший натяк на цей результат з'явився в словах Кеплера із «Стереометрії винних бочок».

Точного сенсу міркування Ферма набули через 46 років, коли у 1684 р. з'явилася робота Лейбніца, в якій закладалися основи математичного аналізу. Вже сам заголовок цієї роботи, який починається так: «Nova methodus pro maximis et minimis...» («Новий метод знаходження найбільших і найменших значень...»), свідчить про важливість задачі знаходження екстремумів в становленні сучасної математики. У своїй статті Лейбніц не тільки отримує як необхідну умову співвідношення $f'(\hat{x}) = 0$ (цей результат зараз називають *теоремою Ферма*), але і використовує другий диференціал для розрізнення максимуму і мінімуму. Слід зазначити, що більшість наведених Лейбніцем фактів на той час були відомі також і Ньютону. Проте його робота «Метод флюксій», завершена в основному до 1671 р., була опублікована тільки у 1736 р.

Доведення наслідку. Якщо \hat{x} є точкою екстремуму функції f , то точка нуль має бути екстремумом функції $\varphi_i(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda e_i)$. За теоремою Ферма $\varphi_i'(0) = 0$. Але $\varphi_i'(0) = f_{x_i}(\hat{x})$.

Точки $\hat{x} \in R_n$, в яких має місце рівність (1.6), також називаються *стаціонарними*.

Отже необхідною умовою існування екстремуму диференційовної функції $f(x)$ у внутрішній точці $x = x_0$ є умова $df = 0$ у цій точці. Доведемо аналогічну теорему для функціоналів.

Теорема 1.2. Якщо функціонал $v[y(x)]$, що має варіацію, досягає максимуму або мінімуму при $y = y_0(x)$, то $\delta v = 0$ для $y = y_0(x)$.

Доведення. При фіксованих $y_0(x)$ і δy $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$ є функцією α , яка при $\alpha = 0$ за припущенням має максимум або мінімум. Тому похідна $\varphi'(0) = 0$, або $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = 0$, тобто $\delta v = 0$. Припускається, що α в околі точки $\alpha = 0$ може приймати будь-які значення, як додатні, так і від'ємні. Отже, для кривих, на яких досягається екстремум функціонала, варіація дорівнює нулю.

Поняття екстремуму функціонала потребує уточнення. Означення екстремуму дано з урахуванням значень функціонала тільки на близьких кривих, тобто розглядається відносний максимум або мінімум. Разом з тим, вище зазначалося, що можливе різне розуміння близькості кривих. Тому, даючи означення екстремуму функціонала, необхідно визначитися, близькість якого порядку мається на увазі.

Дамо такі *означення*. Якщо функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму або мінімуму відносно всіх кривих, для яких малим є модуль різниці $y(x) - y_0(x)$, тобто відносно кривих, близьких до $y = y_0(x)$ у розумінні близькості нульового порядку, то максимум або мінімум називається *сильним*.

Якщо ж функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму або мінімуму лише відносно кривих $y = y(x)$, близьких до $y = y_0(x)$ у розумінні близькості першого порядку, тобто кривих, близьких до $y = y_0(x)$ не тільки за ординатами, але і за напрямками дотичних, то такий максимум або мінімум називається *слабким*.

Очевидно, що при досягненні на кривій $y = y_0(x)$ сильного максимуму (або мінімуму) тим більше досягається і слабкий екстремум, оскільки із близькості кривої до $y = y_0(x)$ у розумінні близькості першого порядку випливає близькість і нульового порядку. Однак можливо, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається слабкий максимум (або мінімум) і не досягається сильний максимум (або мінімум), тобто серед кривих $y = y(x)$, близьких до $y = y_0(x)$ і по ординатах і по напрямках дотичних, може не бути таких, для яких $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (у випадку мінімуму

$v[y(x)] < v[y_0(x)]$), а серед кривих $y = y(x)$, близьких лише по ординатах, але не близьких по напрямках дотичних, можуть бути і такі, для яких $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (у випадку мінімуму $v[y(x)] < v[y_0(x)]$). Різниця між сильним і слабким екстремумом не матиме істотного значення при виведенні основної необхідної умови екстремуму, але вона досить істотна при дослідженні достатніх умов екстремуму.

Зазначимо, що у разі досягнення екстремуму на кривій $y = y_0(x)$ не тільки $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0} = 0$, але і $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$, де $y = y(x, \alpha)$ – будь-яке сімейство допустимих кривих, причому при $\alpha = 0$ і при $\alpha = 1$ функція $y = y(x, \alpha)$ є відповідно функцією $y = y_0(x)$ і $y = y_0(x) + \delta y$. Справді, $v[y(x, \alpha)]$ є функцією α , оскільки значення α визначає криву сімейства $y = y(x, \alpha)$, а отже і значення функціонала $v[y(x, \alpha)]$. Ця функція за припущенням досягає екстремуму при $\alpha = 0$, тому її похідна при $\alpha = 0$ дорівнює нулю. Мається на увазі, що α може приймати будь-які близькі до $\alpha = 0$ значення і $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0}$ існує. Отже,

$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$. Ця похідна, взагалі кажучи, вже не співпадає з варіацією функціонала, але, як показано, перетворюється у нуль разом з δv на кривих, що реалізують екстремум функціонала.

Відмітимо ще раз зазначену аналогію понять і методів, використовуваних при дослідженні функцій на екстремум, і задач варіаційного числення.

Математичний аналіз

1. Змінна величина y називається функцією змінної величини x якщо кожному значенню x з деякої області зміни x відповідає певне значення величини y , тобто числу x ставиться у відповідність число y .

Позначення: $y = f(x)$.

2. Приростом Δx аргументу функції $f(x)$ називається різниця між двома значеннями цієї змінної $\Delta x = x - x_1$.

3. Функція $f(x)$ називається неперервною, якщо малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції.

Варіаційне числення

1. Змінна величина v називається функціоналом, що залежить від функції $y(x)$, якщо кожній функції $y(x)$ із деякого класу функцій відповідає певне значення v , тобто функції $y(x)$ ставиться у відповідність число v .

Позначення: $v = v[y(x)]$.

2. Варіацією аргументу $y(x)$ функціонала $v[y(x)]$ називається різниця між двома функціями деякого класу $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

3. Функціонал $v[y(x)]$ називається неперервним, якщо малій зміні $y(x)$ відповідає мала зміна функціонала $v[y(x)]$. Розглядається близькість

4. Функція $y = f(x)$ називається лінійною, якщо

$$f(Cx) = Cf(x),$$

де C – довільна стала, і

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

5. Диференціалом df функції $y = f(x)$ називається головна лінійна відносно Δx частина приросту функції

$$df = f'(x)dx.$$

Якщо x – незалежна змінна, то приріст x співпадає з диференціалом: $dx = \Delta x$.

6. Диференціал функції $f(x)$ дорівнює $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \right|_{\alpha=0}$.

7. Теорема 1.3. Якщо диференційовна функція $f(x)$ у внутрішній точці $x = x_0$ досягає максимуму або мінімуму, то в цій точці $df = 0$.

Всі означення цього підрозділу і теорема про рівність нулю варіації функціонала на кривих, що реалізують екстремум, майже без змін переносяться на функціонали, які залежать від декількох невідомих функцій

$$v[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)],$$

або від однієї чи декількох функцій багатьох змінних

$$v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)], v[z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Наприклад, варіація δv функціонала $v[z(x, y)]$ може бути визначена як головна лінійна відносно δz частина приросту $\delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)]$, або як похідна по параметру при нульовому значенні параметра $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z] \right|_{\alpha=0}$. Якщо при

$z = z(x, y)$ функціонал v досягає екстремуму, то при $z = z(x, y)$ варіація $\delta v = 0$ через те, що $v[z(x, y) + \alpha \delta z]$ є функцією α , яка при $\alpha = 0$ за припущенням досягає екстремуму, і тому похідна від цієї функції по α при $\alpha = 0$ перетворюється у нуль,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z] \right|_{\alpha=0} = 0, \text{ або } \delta v = 0.$$

функцій різних порядків.

4. Функціонал $v[y(x)]$ називається лінійним, якщо

$$v[Cy(x)] = Cv[y(x)],$$

де C – довільна стала, і

$$v[y_1(x) + y_2(x)] = v[y_1(x)] + v[y_2(x)].$$

5. Диференціалом, або варіацією, δv функціонала $v[y(x)]$ називається головна лінійна відносно δy частина приросту функціонала.

6. Варіація функціонала $v[y(x)]$ дорівнює $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0}$.

7. Теорема 1.3'. Якщо функціонал $v[y(x)]$, що має варіацію, досягає максимуму або мінімуму при $y = y_0(x)$, то $\delta v = 0$ для $y = y_0(x)$.

1.3. Найпростіша задача варіаційного числення, рівняння Ейлера

Вивчення конкретних задач варіаційного числення доцільно почати з так званої найпростішої задачі, яка формулюється наступним чином. Нехай $F(x, y, z)$ – функція, що має неперервні частинні похідні по всіх змінних до другого порядку включно. Серед усіх функцій $y(x)$, що мають неперервну похідну в інтервалі $x_0 \leq x \leq x_1$ і задовольняють умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

знайти ту функцію, яка реалізує слабкий екстремум функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (1.7)$$

Іншими словами, найпростіша задача варіаційного числення полягає у знаходженні слабого екстремуму функціонала виду (1.7) на множині всіх гладких кривих, що з'єднують дві задані точки. Зокрема, наведені вище приклади варіаційних задач про знаходження найкоротшої лінії і про брахістохрону належать до цього типу.

Вище показано, що необхідною умовою екстремуму є рівність нулю варіації функціонала. Знайдемо цю умову для розглядуваного функціонала.

Варіюючи криву $y = y(x)$, на якій досягається екстремум, дістанемо деяку іншу допустиму криву $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y$, так звану криву порівняння. Побудуємо однопараметричну множину кривих $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$. При $\alpha = 0$ матимемо криву $y = y(x)$, при $\alpha = 1$ – криву $y = \bar{y}(x)$.

Якщо функціонал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

розглядається тільки на кривих множини $y(x, \alpha)$ то його можна вважати функцією α : $\varphi(\alpha) = v[y(x, \alpha)]$, оскільки параметр α визначає криву сімейства $y(x, \alpha)$, а отже і значення функціонала $v[y(x, \alpha)]$. Крива $y = y(x)$, що реалізує екстремум функціонала, відповідає значенню $\alpha = 0$, тобто функція $\varphi(\alpha)$ має екстремум при $\alpha = 0$. Необхідною умовою екстремуму функції є $\varphi'(0) = 0$. Отже, маємо

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx$$

і

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx,$$

де

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)),$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

і

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y',$$

дістанемо

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx,$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx.$$

Вище зазначалося, що $\varphi'(0)$ є варіацією δv функціонала, тобто необхідною умовою екстремуму функціонала v є рівність нулю його варіації: $\delta v = 0$. Для функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

ця умова має вигляд

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0.$$

Підінтегральний вираз є лінійною функцією від δy і $\delta y'$. Інтегруючи частинами, можна дістати вираз для варіації, в якому під інтегралом буде лінійна функція або від δy (перетворення Лагранжа), або від $\delta y'$ (перетворення Дю-Буа-Реймонда).

Щоб отримати лінійну функцію від δy , інтегруємо другий доданок частинами і з урахуванням того, що $\delta y' = (\delta y)'$, дістанемо

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0.$$

Оскільки розглядається задача з нерухомими границями, маємо $\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$ і $\delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$. Тому

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx$$

і необхідна умова екстремуму набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0. \quad (1.8)$$

Значимо, що припускалася неперервність похідної від функції $y(x)$, але припущення про диференційовність функції $y'(x)$ не робилося. Тому наведене перетворення Лагранжа, взагалі кажучи, незаконне.

Щоб позбутися необхідності додаткового припущення про існування другої похідної $y''(x)$, розглянемо інше перетворення варіації, яке запропонував Дю-Буа-Реймонд. Позначимо

$$P(x) = \int_{x_0}^x F_y dx.$$

Тоді

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dP}{dx} \delta y + F_{y'} \delta y' \right) dx.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dP}{dx} \delta y dx = [P \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} P \delta y' dx.$$

Як і раніше, із умови нерухомості границь маємо $\delta y|_{x=x_0} = 0$ і $\delta y|_{x=x_1} = 0$. Тому

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'} - P) \delta y' dx. \quad (1.9)$$

Це перетворення не потребує додаткових припущень щодо функції $y = y(x)$.

Для спрощення отриманих умов (1.8) і (1.9) використаємо такі леми.

Основна лема варіаційного числення (лема Лагранжа). Якщо функція $\Phi(x)$ неперервна на відрізку (x_0, x_1) і

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0$$

для довільної функції $\eta(x)$ такої, що має неперервну похідну на (x_0, x_1) і дорівнює нулю на кінцях відрізка (x_0, x_1) , то $\Phi(x) \equiv 0$ на відрізку $x_0 \leq x \leq x_1$.

Доведення. Припустимо, що в деякій точці $x = \bar{x}$, яка знаходиться на відрізку $x_0 \leq x \leq x_1$, $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, наприклад $\Phi(\bar{x}) > 0$. Оскільки $\Phi(x)$ неперервна, то для

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

достатньо великого n можна побудувати інтервал $[a, a + \pi/n]$, що знаходиться всередині інтервалу $[x_0, x_1]$ і містить точку \bar{x} , на якому значення $\Phi(x)$ більші деякого додатного числа m .

Визначимо функцію $\eta(x)$ таким чином:

$$\eta(x) = \begin{cases} \sin^2 [n(x-a)] & \text{на інтервалі } [a, a + \pi/n], \\ 0 & \text{поза інтервалом.} \end{cases}$$

Функція $\eta(x)$ неперервна, має неперервну похідну і $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, отже за припущенням

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0.$$

Але

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = \int_a^{a+\pi/n} \Phi(x) \sin^2 n(x-a) dx > m \int_a^{a+\pi/n} \sin^2 n(x-a) dx = \frac{\pi m}{2n} > 0.$$

Таким чином, припустивши, що $\Phi(x) \neq 0$ у деякій точці \bar{x} , яка знаходиться на відрізьку $[x_0, x_1]$, дійшли протиріччя.

Зуваження 1. Аналогічний результат справедливий також для функцій двох змінних. А саме, якщо функція $\Phi(x, y)$ неперервна в деякій області D на площині xy і

$$\iint_D \Phi(x, y) \eta(x, y) dx dy = 0$$

для довільної функції $\eta(x, y)$ такої, що має неперервну похідну в області D і дорівнює нулю на границі області, то $\Phi(x) \equiv 0$ в області D .

Застосуємо основну лему для спрощення необхідної умови (1.8) екстремуму найпростішого функціонала (1.7). Усі умови леми задовольняються на кривій, що реалізує екстремум, множник $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})$ є неперервною функцією, а варіація δu є довільною функцією, яка має задовольняти лише передбачені в основній лемі обмеження. Тому із леми випливає, що $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$. Тобто крива $y = y(x)$, яка реалізує екстремум розглядуваного функціонала, є розв'язком диференціального рівняння другого порядку

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

або у розгорнутому вигляді

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Це рівняння називається *рівнянням Ейлера*. Інтегральні криві рівняння Ейлера називаються *екстремалами*. При виведенні рівняння Ейлера допущена вказана раніше неточність щодо існування другої похідної функції $y = y(x)$.

Лема Дю-Буа-Реймонда¹. Якщо функція $\Phi(x)$ неперервна на відрізку (x_0, x_1) і

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta'(x) dx = 0$$

для довільної неперервної функції $\eta(x)$, такої що має неперервну похідну на (x_0, x_1) і дорівнює нулю на кінцях відрізка (x_0, x_1) , то $\Phi(x)$ є сталою на відрізку $x_0 \leq x \leq x_1$.

Доведення. Припустимо, що $\Phi(x)$ не є сталою. Тоді на інтервалі $[x_0, x_1]$ є хоча б дві точки \bar{x} і $\bar{\bar{x}}$, в яких функція $\Phi(x)$ приймає нерівні значення, наприклад $\Phi(\bar{x}) > \Phi(\bar{\bar{x}})$. Нехай c_1 і c_2 – два числа, що задовольняють нерівність $\Phi(\bar{x}) > c_1 > c_2 > \Phi(\bar{\bar{x}})$. При достатньо великому n можна побудувати два інтервали $[a_1, a_1 + \pi/n]$ і $[a_2, a_2 + \pi/n]$, що знаходяться всередині інтервалу $[x_0, x_1]$, не перетинаються і є такими, що для значень x із інтервалу $[a_1, a_1 + \pi/n]$ має місце

$$\Phi(x) > c_1,$$

а для значень x із інтервалу $[a_2, a_2 + \pi/n]$ виконується

$$\Phi(x) < c_2.$$

Задамо функцію $\eta'(x)$ таким чином:

$$\eta'(x) = \begin{cases} \sin^2 [n(x - a_1)] & \text{на інтервалі } [a_1, a_1 + \pi/n], \\ -\sin^2 [n(x - a_2)] & \text{на інтервалі } [a_2, a_2 + \pi/n], \\ 0 & \text{в інших точках інтервалу } [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Функція $\eta(x) = \int_{x_0}^x \eta'(x) dx$ неперервна, має неперервну похідну $\eta'(x)$ і крім того

$$\eta(x_0) = 0,$$

$$\eta(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) dx = \int_{a_1}^{a_1 + \pi/n} \sin^2 n(x - a_1) dx - \int_{a_2}^{a_2 + \pi/n} \sin^2 n(x - a_2) dx = 0.$$

За умовою

¹ Дю-Буа-Реймонд, Поль Давид Густав (нім. Paul David Gustav du Bois-Reymond, 1831–1889) – німецький математик. Його ім'ям названа одна з лем варіаційного числення.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta'(x) dx = 0,$$

але, з іншого боку,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta'(x) dx &= \int_{a_1}^{a_1 + \pi/n} \Phi(x) \sin^2 n(x - a_1) dx - \int_{a_2}^{a_2 + \pi/n} \Phi(x) \sin^2 n(x - a_2) dx > \\ &> (c_1 - c_2) \int_0^{\pi/n} \Phi(x) \sin^2 nx > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, припустивши, що $\Phi(x)$ не є сталою на інтервалі $[x_0, x_1]$, дійшли протиріччя.

Застосовуючи лему Дю-Буа-Реймонда отримаємо повне виведення рівняння Ейлера. Нехай задано клас допустимих кривих $y = y(x)$, які мають неперервну похідну і задовольняють умови $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. На таких кривих визначено функціонал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

де $F(x, y, z)$ – неперервна функція, що має неперервні частинні похідні по всіх змінних до другого порядку включно. Припустимо, що функція $y = y(x)$ реалізує локальний слабкий екстремум функціонала v . В такому разі

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'} - P] \delta y' dx$$

для довільної функції δy , яка має неперервну похідну і дорівнює нулю в точках x_0 і x_1 . Із урахуванням леми Дю-Буа-Реймонда

$$F_{y'} - P = F_{y'} - \int_{x_0}^x F_{y'} dx = C \quad (C - \text{стала}).$$

Ця рівність називається інтегральною формою рівняння Ейлера.

Функція $P(x) = \int_{x_0}^x F_{y'} dx$ неперервна і має неперервну похідну $P'(x) = F_{y'}$. Отже, функція $F_{y'} = C + P(x)$ також має неперервну похідну:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = P'(x) = F_{y'}.$$

Таким чином, ми отримали рівняння Ейлера і довели при цьому диференційовність функції $F_{y'}$.

Нехай тепер в деякій точці (x, y) кривої $y = y(x)$ виконується $F_{y'y'} \neq 0$. При переході від точки з абсцисою x цієї кривої до точки з абсцисою $x + \Delta x$ функції $y(x)$ і $y'(x)$ набувають приростів Δy і $\Delta y'$, які внаслідок неперервності $y(x)$ і $y'(x)$ прямують до нуля при $\Delta x \rightarrow 0$. Маємо

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\bar{F}_{xy'} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{yy'} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} \right],$$

де другі похідні $\bar{F}_{xy'}$, $\bar{F}_{yy'}$, $\bar{F}_{y'y'}$ з рисками зверху позначають значення цих функцій при аргументах

$$x + \theta_1 \Delta x, \quad y + \theta_2 \Delta y, \quad y' + \theta_3 \Delta y' \quad (|\theta_i| < 1).$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ $\bar{F}_{xy'}$, $\bar{F}_{yy'}$, $\bar{F}_{y'y'}$ прямують відповідно до $F_{xy'}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$. Отже,

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x} F_{y'y'} \right),$$

звідки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'} - F_{xy'} - F_{yy'} y'}{F_{y'y'}}$$

і $y''(x)$ існує в будь-якій точці кривої $y = y(x)$, що реалізує екстремум, в якій $F_{y'y'} \neq 0$. Точки екстремалі $y = y(x)$, для яких $F_{y'y'} \neq 0$, називаються *регулярними*.

Отже, ми не тільки вивели рівняння Ейлера, але й довели існування другої похідної $y''(x)$, у будь-якій регулярній точці кривої, що реалізує екстремум.

Таким чином, екстремум функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

може досягатися тільки на екстремалях. Для знаходження кривої, що реалізує екстремум функціонала (1.7), треба проінтегрувати рівняння Ейлера. Загальний розв'язок рівняння містить дві довільні сталі, які визначаються із граничних умов $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Питання про достатні умови екстремуму розглядається у п.1.16.

Приклад 1.1. На яких кривих може досягатися екстремум функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1?$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Рівняння Ейлера має вигляд $y'' + y = 0$, його загальним розв'язком є $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Враховуючи граничні умови, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y = \sin x$.

Приклад 1.2. На яких кривих може досягатися екстремум функціонала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 12xy) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$?

Рівняння Ейлера має вигляд $y'' - 6x = 0$, звідки $y = x^3 + C_1x + C_2$. Враховуючи граничні умови, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Отже, екстремум може досягатися тільки на кривій $y = x^3$.

Зауважимо, що в багатьох випадках при дослідженні на екстремум достатньо використовувати лише рівняння Ейлера. Дійсно, часто з фізичного змісту задачі випливає очевидність існування екстремуму (наприклад, для задачі про брахістохрону, про найкоротшу відстань між точками і т. п.). Якщо серед розв'язків рівняння Ейлера є лише одна екстремаль, яка задовольняє задані граничні умови, вона і є саме тією кривою, що реалізує екстремум. У такому разі досліджувати достатні умови немає потреби.

1.4. Найпростіші випадки інтегрованості рівняння Ейлера

Рівняння Ейлера, виведене у попередньому підрозділі, відіграє фундаментальну роль у варіаційному численні. Воно являє собою, взагалі кажучи, диференціальне рівняння другого порядку, яке не завжди інтегрується у скінченному вигляді. Розглянемо деякі частинні випадки, коли це рівняння зводиться до рівняння першого порядку, або навіть інтегрується у квадратурах.

1. F не залежить від y' :

$$F = F(x, y).$$

Оскільки $F_{y'} \equiv 0$, рівняння Ейлера має вигляд $F_y(x, y) = 0$, тобто є не диференціальним, а скінченним рівнянням, що визначає одну або декілька кривих, які можуть не задовольняти граничні умови $y(x_0) = y_0$ і $y(x_1) = y_1$. Тому розв'язок розглядуваної варіаційної задачі, взагалі кажучи, не існує. Лише в деяких випадках, коли крива $F_y(x, y) = 0$ проходить через граничні точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) , існує крива, на якій може досягатися екстремум.

Приклад 1.3. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Рівняння Ейлера має вигляд $F_y = 0$ або $y = 0$. Екстремаль $y = 0$ проходить через граничні точки тільки при $y_0 = 0$ і $y_1 = 0$ (рис. 1.8). Якщо $y_0 = 0$ і $y_1 = 0$, то,

очевидно, функція $y=0$ реалізує мінімум функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$, оскільки

$v[y(x)] \geq 0$, причому $v=0$ при $y=0$. Якщо хоча б одне із значень y_0 або y_1 не дорівнює нулю, то мінімум функціонала на неперервних функціях не досягається. Це зрозуміло, оскільки можна вибрати послідовність неперервних функцій $y_n(x)$, графіки яких складаються із все крутіше спадаючих із точки (x_0, y_0) до осі абсцис дуг кривої потім із відрізка осі абсцис, майже співпадаючого з усім відрізком (x_0, x_1) , і, нарешті, дуг кривої, що біля точки x_1 круто піднімаються до точки (x_1, y_1) (рис. 1.9). Очевидно, що на кривих такої послідовності значення функціонала відрізняються від нуля як завгодно мало і тому нижня грань значень функціонала дорівнює нулю. Однак, нижня грань не може досягатися на неперервній кривій, оскільки для будь-якої неперервної кривої $y = y(x)$, що не дорівнює тотожно нулю,

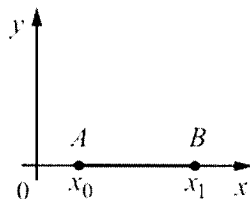


Рис. 1.8

інтеграл $\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$. Ця нижня грань значень функціонала досягається на розривній функції (рис. 1.10):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y(x) = 0 \text{ при } x_0 < x < x_1, \\ y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

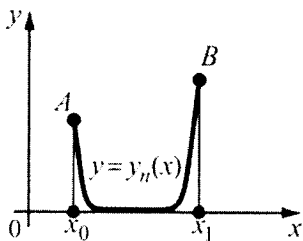


Рис. 1.9

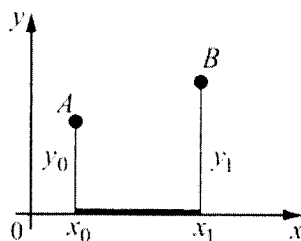


Рис. 1.10

2. Функція F лінійно залежить від y' :

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y',$$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} \right] dx.$$

Рівняння Ейлера в цьому разі набирає вигляду

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} Q(x, y) = 0,$$

або

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} y' = 0,$$

і

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Як і в попередньому випадку, це є скінченне, а не диференціальне рівняння. Крива $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, взагалі кажучи, не задовольняє граничні умови, отже, варіаційна задача, як правило, не має розв'язку у класі неперервних функцій. У разі, коли $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$, вираз $Pdx + Qdy$ є точним диференціалом і

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left[P + Q \frac{dy}{dx} \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} (Pdx + Qdy)$$

не залежить від шляху інтегрування, значення функціонала v є сталим на допустимих кривих і варіаційна задача не має сенсу.

Приклад 1.4. $v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = a$.

Рівняння Ейлера має вигляд $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, або $y - x = 0$. Перша гранична умова задовольняється при будь-якому значенні a , а друга гранична умова – лише при $a = 1$. Якщо $a \neq 1$, то екстремалі, що задовольняє граничні умови, не існує.

Приклад 1.5. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx$, або $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (ydx + xdy)$; $y(x_0) = y_0$,

$y(x_1) = y_1$.

Рівнянням Ейлера є тотожність $1 \equiv 1$. Підінтегральний вираз є точним диференціалом, і інтеграл не залежить від шляху інтегрування:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} d(xy) = x_1 y_1 - x_0 y_0$$

при інтегуванні по довільній кривій. Варіаційна задача не має сенсу.

3. F залежить тільки від y' :

$$F = F(y').$$

В такому разі рівняння Ейлера набирає вигляду $F_{y'y'}y''=0$, оскільки $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$. Звідси $y''=0$, або $F_{y'y'}=0$. Якщо $y''=0$, то $y = C_1x + C_2$ – двопараметричне сімейство прямих ліній. Якщо рівняння $F_{y'y'}(y')=0$ має один або кілька дійсних коренів $y' = k_i$, то $y = k_ix + C$ і отримуємо однопараметричне сімейство прямих, що міститься у вказаному вище двопараметричному сімействі $y = C_1x + C_2$. Таким чином, якщо $F = F(y')$ екстремаліями є прямі лінії $y = C_1x + C_2$.

Приклад 1.6. Довжина дуги кривої

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

має екстремаліями прямі $y = C_1x + C_2$.

Приклад 1.7. Якщо швидкість руху по деякій кривій $y = y(x)$ із точки $A(x_0, y_0)$

в точку $B(x_1, y_1)$ залежить тільки від y' , тобто $\frac{ds}{dt} = v(y')$, то

$$dt = \frac{ds}{v(y')} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')} dx, \quad t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')} dx.$$

Отже, час $t[y(x)]$, який витрачається на переміщення із точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$ по кривій $y = y(x)$, є функціоналом

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')} dx.$$

Екстремаліями цього функціонала є прямі лінії.

4. F залежить тільки від x і y' :

$$F = F(x, y').$$

Рівняння Ейлера набирає вигляду $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$ і має перший інтеграл $F_{y'}(x, y') = C_1$. Оскільки отримане рівняння першого порядку $F_{y'}(x, y') = C_1$ не містить y , воно може бути проінтегроване або шляхом безпосереднього розв'язування відносно y' і подальшого інтегрування, або шляхом введення належним чином вибраного параметра [180].

Приклад 1.8. Розглянемо функціонал, який визначає час t , що витрачається на переміщення по кривій $y = y(x)$ із однієї точки в іншу зі швидкістю руху $v = x$.

Якщо $\frac{ds}{dt} = x$, то $dt = \frac{ds}{x}$ і

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx.$$

Перший інтеграл рівняння Ейлера $F_{y'} = C_1$ має вигляд $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. Це рівняння найпростіше інтегрується, якщо ввести параметр, приймаючи $y' = \operatorname{tg} t$. Тоді

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \sin t$$

або $x = \bar{C}_1 \sin t$, де $\bar{C}_1 = \frac{1}{C_1}$;

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad dy = \operatorname{tg} t \, dx = \operatorname{tg} t \cdot \bar{C}_1 \cos t \, dt = \bar{C}_1 \sin t \, dt.$$

Після інтегрування матимемо $y = -\bar{C}_1 \cos t + C_2$. Отже,

$$x = \bar{C}_1 \sin t, \quad y - C_2 = -\bar{C}_1 \cos t$$

або, виключаючи t , дістанемо

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \bar{C}_1^2$$

– сімейство кіл з центрами на осі ординат.

5. F залежить тільки від y і y' :

$$F = F(y, y').$$

Оскільки $F_{xy'} = 0$, рівняння Ейлера має вигляд $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$. Незавжди перевірити, що при множенні цього рівняння почленно на y' ліва частина перетворюється у точну похідну $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$.

Дійсно,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = y'(F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'').$$

Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл $F - y'F_{y'} = C_1$. Це є рівняння першого порядку, що не містить явно x . Його можна проінтегрувати шляхом розв'язування відносно y' і відокремлення змінних або шляхом введення параметра.

Приклад 1.9. Задача про найменшу поверхню обертання: визначити криву з заданими граничними точками, яка обертаючись навколо осі абсцис утворює поверхню найменшої площі.

Відомо, що площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Підінтегральна функція залежить лише від y і y' , тому перший інтеграл рівняння Ейлера має вигляд

$$F - y'F_{y'} = C_1$$

або у розглядуваному випадку

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Після спрощень дістанемо $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. Це рівняння найпростіше інтегрується за

допомогою підстановки $y' = \operatorname{sh} t$, тоді $y = C_1 \operatorname{ch} t$, а

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt;$$

$$x = C_1 t + C_2.$$

Отже, шукана поверхня утворюється обертанням лінії, рівняння якої у параметричній формі має вигляд

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = C_1 \operatorname{ch} t.$$

Виключивши параметр t , дістанемо $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x-C_2}{C_1}$ – сімейство ланцюгових ліній,

від обертання яких утворюються поверхні, що називаються катеноїдами. Сталі C_1 і C_2 визначаються із умови проходження шуканої лінії через задані граничні точки.

Приклад 1.10. Задача про брахістохрону (див. п.1.1): визначити криву, що з'єднає задані точки A і B , по якій матеріальна точка переміститься із A у B за найкоротший час (тертям і опором середовища нехтуємо).

Розмістимо початок координат в точці A , вісь x спрямуємо горизонтально, вісь y – вертикально донизу. Швидкість руху матеріальної точки $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. Час, що витрачається на переміщення точки з положення $A(0,0)$ в положення $B(x_1, y_1)$, визначається за формулою

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Оскільки цей функціонал належить до найпростішого виду і його підінтегральна функція не містить явно x , то рівняння Ейлера має перший інтеграл $F - y'F_{y'} = C_1$, або в даному випадку

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C.$$

Після спрощень матимемо $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$ або $y(1+y'^2) = C_1$. Введемо параметр

t , вважаючи $y' = \operatorname{ctg} t$, і дістанемо

$$y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t);$$
$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t)dt;$$
$$x = C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Отже, в параметричній формі рівняння шуканої лінії має вигляд

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Змінюючи параметр за допомогою підстановки $2t = t_1$ і враховуючи, що $C_2 = 0$, оскільки при $y = 0$ маємо $x = 0$, дістанемо рівняння сімейства циклоїд у звичайній формі:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1),$$

де $\frac{C_1}{2}$ – радіус круга, що котиться. Радіус визначається з умови проходження циклоїди через точку $B(x_1, y_1)$. Отже, брахістохроною є циклоїда.

1.5. Функціонали виду $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$

У цьому і наступних підрозділах розглядатимуться деякі узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення. Розглянемо спочатку функціонали, підінтегральний вираз яких залежить від декількох функцій, тобто функціонали

виду $v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$. Вважатимемо, що граничні

значення всіх функцій фіксовані:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$
$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \quad y_n(x_1) = y_{n1}.$$

Щоб отримати необхідні умови екстремуму таких функціоналів варіюватимемо лише одну із функцій $y_j(x)$ ($j=1,2,\dots,n$), залишаючи всі інші незмінними. В такому разі функціонал $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ є таким, що залежить лише від однієї варійованої функції $y_i(x)$:

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \tilde{v}[y_i].$$

Згідно з викладеним у п. 1.3, функція $y_i(x)$, що реалізує екстремум цього функціонала, має задовольняти рівняння Ейлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0.$$

Отже, варіюючи по черзі кожен з функцій $y_i(x)$ при незмінних інших функціях, дістанемо систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.10}$$

які визначають, взагалі кажучи, $2n$ -параметричне сімейство інтегральних кривих у просторі x, y_1, y_2, \dots, y_n – сімейство екстремалей розглядуваної варіаційної задачі.

Якщо, наприклад, функціонал залежить від двох функцій $y(x)$ і $z(x)$:

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1,$$

тобто визначається вибором просторової кривої $y = y(x)$ і $z = z(x)$ (рис. 1.11), то при варіюванні $y(x)$ із фіксованою $z(x)$ ми змінюємо криву так, що її проекція на площині xz не змінюється, тобто крива залишається на проектуючому циліндрі $z = z(x)$ (рис. 1.12).

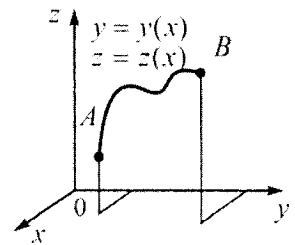


Рис. 1.11

Аналогічно, якщо фіксувати $y(x)$ і варіювати $z(x)$, то крива залишається на проектуючому циліндрі $y = y(x)$. В такому разі матимемо систему двох рівнянь Ейлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{і} \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

При виведенні рівнянь (1.10) припускалося, що всі функції $y_i(x)$ мають неперервні похідні. Подаючи рівняння (1.10) у формі Дю-Буа-Реймонда, можна показати, що за певних умов шукана функція буде мати також неперервну другу похідну. Справді, із (1.10) маємо

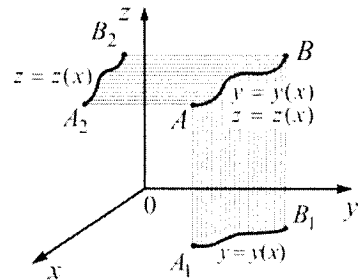


Рис. 1.12

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\int_{x_0}^x F_{y'_k} dx - F_{y'_k} = C_k, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

де C_k – константи. Вздовж екстремалі вираз

$$Q_k(x) = \int_{x_0}^x F_{y'_k} dx$$

є неперервною функцією, що має неперервну похідну. Подамо систему (1.11) у формі

$$F_{y'_k} = Q_k(x) - C_k. \quad (1.12)$$

Припустимо, що функціональний визначник

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \right|$$

вздовж деякої екстремалі $y_k = y_k(x)$ відмінний від нуля і константа C_k у системі (1.12) відповідає екстремалі $y_k = y_k(x)$. Тоді для будь-якого значення x ($x_0 \leq x \leq x_1$) існує розв'язок системи (1.12) відносно y'_k , що співпадає з $y'_k(x)$ і є диференційовним разом із $Q_k(x)$. Звідси випливає, що у разі коли вздовж екстремалі $\Delta \neq 0$, ця екстремаль має неперервну другу похідну.

Приклад 1.11. Знайти екстремалі функціонала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx,$$
$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Система диференціальних рівнянь Ейлера має вигляд,

$$y'' - z = 0, \quad z'' - y = 0.$$

Виключаючи одну з невідомих функцій, наприклад z , дістанемо

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z = y'', \quad z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Враховуючи граничні умови, матимемо

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

Отже, $y = \sin x$, $z = -\sin x$.

Приклад 1.12. Знайти екстремалі функціонала $v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z') dx$.

Система рівнянь Ейлера має вигляд

$$F_{y'y'}y'' + F_{y'z'}z'' = 0, \quad F_{y'z'}y'' + F_{z'z'}z'' = 0.$$

Припустивши, що $F_{y'y'}F_{z'z'}z'' - (F_{y'z'})^2 \neq 0$, дістанемо $y'' = 0$ і $z'' = 0$ або $y = C_1x + C_2$, $z = C_3x + C_4$ – сімейство прямих у просторі.

1.6. Функціонали, що залежать від похідних вищих порядків

У цьому підрозділі розглядаються функціонали, у яких підінтегральна функція залежить не тільки від першої похідної, але й від похідних вищих порядків. Прикладами таких задач є задачі теорії пружності про визначення форми зігнутої балки при тих або інших умовах на кінцях, які пов'язані із знаходженням екстремуму потенціальної енергії системи. Оскільки потенціальна енергія зігнутої балки залежить від кривизни, задача зводиться до знаходженням екстремальних кривих у разі, коли підінтегральний вираз функціонала залежить від похідних невідомої функції першого і другого порядків.

У загальному випадку задача формулюється таким чином: серед всіх кривих $y = y(x)$, що з'єднують дві задані точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, визначити ту, вздовж якої інтеграл

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (1.13)$$

набуває екстремального значення. Вважатимемо, що функція F диференційовна $n + 2$ рази по всіх аргументах і задовольняє такі граничні умови

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \\ y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

тобто в граничних точках задані значення функції $y(x)$ і її похідних до $n - 1$ порядку включно. Припустимо, що екстремум досягається на кривій $y = y(x)$, диференційовній $2n$ разів і $y = \bar{y}(x)$ – деяка крива порівняння також диференційовна $2n$ разів.

Як і у випадку найпростішої задачі розглянемо однопараметричну множину функцій $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[\bar{y}(x) - y(x)]$, або $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$. При $\alpha = 0$ $y(x, \alpha) = y(x)$, при $\alpha = 1$ $y(x, \alpha) = \bar{y}(x)$. Якщо значення функціонала розглядається тільки на кривих вказаного сімейства, то функціонал є функцією параметра α , яка має екстремум при $\alpha = 0$. Тому $\left. \frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$. Ця похідна, як зазначалося у п.1.2, є варіацією δv функціонала v :

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\begin{aligned} \delta v &= \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right]_{\alpha=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx. \end{aligned}$$

Інтеграл справа інтегруємо частинами: другий доданок один раз

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx,$$

третій – два рази

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx,$$

і т. д., останній – n разів

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = [F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_{x_0}^{x_1} + \dots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx.$$

Оскільки розглядається задача з нерухомими границями, при $x = x_0$ і $x = x_1$ варіації $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$. Зважаючи на це, остаточно матимемо

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

На кривій $y = y(x)$, що реалізує екстремум,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0$$

при довільному виборі функції δy . Перший множник під знаком інтеграла є неперервною функцією при $y = y(x)$, тому внаслідок основної леми перший множник тотожно дорівнює нулю:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

Отже, функція $y = y(x)$, що реалізує екстремум функціонала (1.13), має бути розв'язком рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

Це диференціальне рівняння порядку $2n$ називається *рівнянням Ейлера-Пуассона*. Його інтегральні криві називаються екстремальми розглядуваної варіаційної задачі. Загальний розв'язок цього рівняння містить $2n$ довільних сталих, які, взагалі кажучи, можна визначити із $2n$ граничних умов (1.14).

Зауважимо, що при інтегруванні частинами використовувалося зроблене припущення щодо існування у шуканій функції $y = y(x)$ похідної порядку $2n$. Цього обмеження можна позбутися, якщо скористатися перетворенням Дю-Буа-Реймонда (див.п. 1.3). Цим методом можна довести, що у разі, коли шукана крива $y = y(x)$ має n неперервних похідних і вздовж неї $F'_{y^{(n)}, y^{(n)}} \neq 0$, то ця крива має також неперервні похідні порядків $n+1, n+2, \dots, 2n$.

Приклад 1.13. Знайти екстремаль функціонала $v[y] = \int_0^1 y''^2 dx$.

Рівняння Ейлера-Пуассона для цього функціонала набирає вигляду $\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$

або $y'''' = 0$. Загальним розв'язком такого рівняння є функція

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

її похідна

$$y' = 3C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3.$$

Розглянемо різні варіанти граничних умов, які може задовольняти функція $y(x)$.

1) Граничні умови: $y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1$.

За таких умов $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0$. Отже, екстремум може досягатися лише на прямій $y = x$. Для цієї функції $y' = 1$, а $y'' = 0$ на всьому відрізку $[0,1]$ (рис. 1.13).

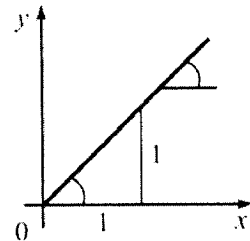


Рис. 1.13

2) Граничні умови: $y(0) = 1, y'(0) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

У цьому разі $C_4 = 1, C_3 = C_2 = C_1 = 0$.

Екстремаль $y = 1$.

Тоді $y' = 0, y'' = 0$ на всьому відрізку $[0,1]$ (рис. 1.14).

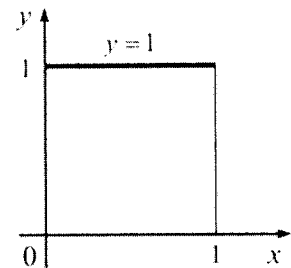


Рис. 1.14

І. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

3) Граничні умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Маємо $C_4 = C_3 = 0$, $C_1 + C_2 = 1$.

$C_1 = -2$, $C_2 = 3$, $3C_1 + 2C_2 = 0$.

Екстремаль $y = -2x^3 + 3x^2$, $y' = -6x^2 + 6x$,
 $y'' = -12x + 6$ $y'' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$.

При $x < \frac{1}{2}$ $y'' > 0$, при $x > \frac{1}{2}$ $y'' < 0$, отже $x = \frac{1}{2}$ — точка перегину (рис. 1.15).

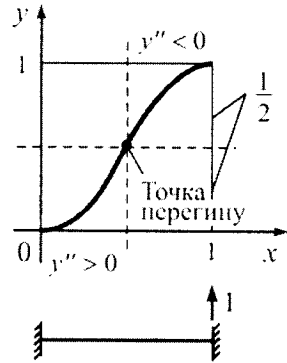


Рис. 1.15

4) Граничні умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

У цьому разі $C_4 = C_3 = 0$; $C_1 + C_2 = 0$.

$3C_1 + 2C_2 = -1$, $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

Екстремаль $y = -x^2(x - 1)$.

$y' = -3x^2 + 2x$ $y' = 0$ при $x = \frac{2}{3}$ (точка екстремуму).

$y|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{27}$.

$y'' = -6x + 2$ $y'' = 0$ при $x = \frac{1}{3}$.

При $x < \frac{1}{3}$ $y'' > 0$ і при $x > \frac{1}{3}$ $y'' < 0$, отже

$x = \frac{1}{3}$ є точкою перегину (рис. 1.16).

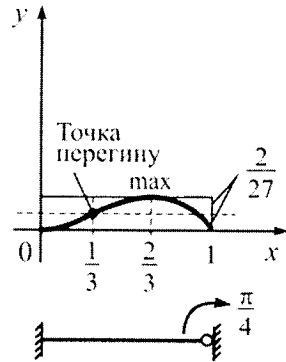


Рис. 1.16

5) Граничні умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

За таких умов $C_4 = 0$, $C_3 = 1$, $C_2 = -1$, $C_1 = 0$.

Екстремаль $y = -x^2 + x$. $y' = -2x + 1$.

Екстремум досягається при $x = \frac{1}{2}$. $y|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

$y'' = -2 < 0$ на всьому відрізку $[0, 1]$ (рис. 1.17).

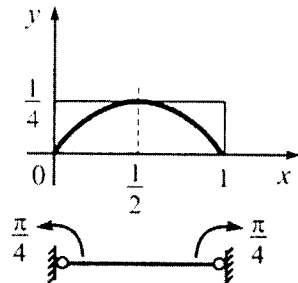


Рис. 1.17

б) Граничні умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

Маємо $C_4 = 0$, $C_3 = -\frac{\pi}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}\pi$, $C_1 = -\pi$.

Екстремаль $y = -2x^3 + 3x^2 - x$, $y|_{x=\frac{1}{2}} = 0$.

$y' = -6x^2 + 6x - 1$, $y'|_{x=0} = -1$; $y'|_{x=1} = -1$ $y'' = -12x + 6$.

$y'' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. При $x < \frac{1}{2}$, $y'' > 0$ і при $x > \frac{1}{2}$

$y'' < 0$, отже в точці $x = \frac{1}{2}$ маємо перегин (рис. 1.18).

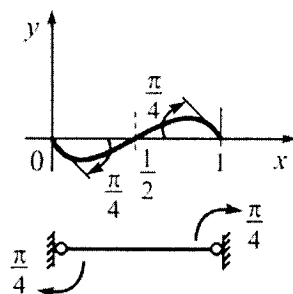


Рис. 1.18

Далі буде показано, що вихідний функціонал $v[y(x)] = \int_0^1 y''^2(x) dx = 0$ являє

собою функціонал Лагранжа для балки з відповідними кінематичними граничними умовами (умови 1) — 6) і реалізація принципу Лагранжа приводить до відповідного рівняння Ейлера, розв'язок якого визначає лінію прогину балки.

Приклад 1.14. Знайти екстремаль функціонала $v[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2) dx$,

що задовольняє умови

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Рівняння Ейлера-Пуассона для цього функціонала має вигляд $y^{IV} - y = 0$. Його загальним розв'язком є функція $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. Враховуючи граничні умови, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$. Отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y = \cos x$.

Приклад 1.15. Знайти екстремаль функціонала

$$v[y] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \mu y''^2 + \rho y \right) dx,$$

що задовольняє граничні умови

$$y(-l) = 0, \quad y'(-l) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

До цієї варіаційної задачі приводить задача про знаходження зігнутої осі пружної циліндричної балки, закріпленої на кінцях. Якщо балка однорідна, то ρ і μ сталі і рівняння Ейлера-Пуассона має вигляд

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2} (\mu y'') = 0 \quad \text{або} \quad y^{IV} = -\frac{\rho}{\mu},$$

звідки

$$y(x) = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Враховуючи граничні умови, остаточно дістанемо

$$y = -\frac{\rho}{24\mu} (x^4 - 2l^2 x^2 + l^4) \text{ або } y = -\frac{\rho}{24\mu} (x^2 - l^2)^2.$$

1.7. Функціонали, що залежать від функцій декількох незалежних змінних

У попередніх підрозділах розглядалися функціонали, що залежать від функцій однієї змінної, тобто від ліній. Багато задач механіки зводиться до дослідження функціоналів, що залежать від функцій декількох змінних, тобто від поверхонь.

Для спрощення викладень обмежимося випадком двох незалежних змінних. Дослідимо на екстремум функціонал

$$v[z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy.$$

Вважатимемо, що на границі C області D значення функції $z(x, y)$ задані, тобто задано просторовий контур \tilde{C} , через який мають проходити всі допустимі поверхні (рис. 1.19).

Для спрощення запису позначимо $\frac{\partial z}{\partial x} = p$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Припустимо, що F – неперервна

функція, яка має частинні похідні по всіх аргументах до третього порядку включно, функцію $z = z(x, y)$, що реалізує екстремум, вважатимемо двічі диференційовною. Нехай $z = \bar{z}(x, y)$ – деяка інша допустима поверхня.

Позначимо $\delta z = \bar{z}(x, y) - z(x, y)$ і розглянемо однопараметричну множину кривих $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z$. Ця множина включає поверхню $z = z(x, y)$ при $\alpha = 0$ і поверхню $z = \bar{z}(x, y)$ при $\alpha = 1$. Функціонал v на функціях із множини $z(x, y, \alpha)$ можна розглядати як функцію змінної α , яка має екстремум при $\alpha = 0$. Тому

$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$. У відповідності з викладеним у п.1.2 похідна від

$v[z(x, y, \alpha)]$ по α при $\alpha = 0$ є варіацією δv функціонала v :

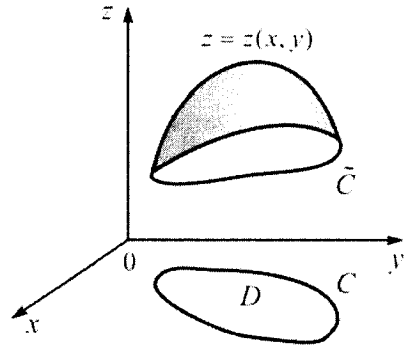


Рис. 1.19

$$\delta v = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)) dx dy \right]_{\alpha=0} =$$

$$= \iint_D (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy,$$

де

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z,$$

$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha \delta p,$$

$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha \delta q.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p, \quad \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q,$$

то

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

де $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ – так звана повна частинна похідна по x . При її обчисленні у вважається сталою, але враховується залежність $z, p, i q$ від x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Використовуючи формулу Гріна

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (P dy - Q dx),$$

дістанемо

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки на контурі C варіація $\delta z = 0$, через те що всі допустимі поверхні проходять через один просторовий контур \tilde{C} . З урахуванням цього маємо

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy$$

і необхідна умова екстремуму

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\iint_D (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = 0$$

набирає вигляду

$$\iint_D \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy = 0.$$

Перший множник підінтегрального виразу є неперервною функцією, а варіація δz має задовольняти лише припущення загального характеру (неперервність, диференційованість, рівність нулю на контурі C і т. п.), отже її можна вважати довільною. Тому внаслідок основної леми (див. зауваження 1, п. 1.3) на поверхні $z = z(x, y)$, що реалізує екстремум,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \equiv 0,$$

отже, $z(x, y)$ є розв'язком рівняння

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0. \quad (1.15)$$

Рівняння (1.15) називається *рівнянням Остроградського*¹. Це є рівняння другого порядку в частинних похідних, яке має задовольняти функція $z(x, y)$, що реалізує екстремум і приймає на контурі C задані значення.

Приклад 1.16.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

на границі C області D значення функції z задані: $z = f(x, y)$.

Рівняння Остроградського в цьому разі має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

або у скороченому запису

$$\Delta z = 0,$$

тобто є рівнянням Лапласа.

Потрібно знайти неперервний в D розв'язок цього рівняння, що приймає на границі області D задані значення. Це є одна із основних задач математичної фізики, яка має назву задачі Діріхле.

¹ Остроградський Михайло Васильович (1801-1862) – російський математик і механік. Народився в с. Пашенна Полтавської області. Роботи відносяться до аналітичної механіки, гідромеханіки, теорії пружності, математичної фізики, математичного аналізу і теорії диференціальних рівнянь. Отримав формулу Гріна-Остроградського (1828), яка була їм узагальнена у 1834 р. на випадок n -кратного інтегралу, вивів формулу перетворення подвійних інтегралів у потрійні. Незалежно від В.Р.Гамільтона відкрив принцип найменшої дії (принцип Гамільтона-Остроградського). Важливі роботи відносяться до варіаційного числення, а також методики викладання у вищій школі.

Приклад 1.17.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy,$$

на границі C області D значення функції z задане.

Рівняння Остроградського має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

або

$$\Delta z = f(x, y).$$

Це рівняння також часто зустрічається в задачах математичної фізики і має назву рівняння Пуассона.

Приклад 1.18. Задача про знаходження поверхні мінімальної площі, натягнутої на даний контур C , зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Рівняння Остроградського в такому разі набирає вигляду

$$r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + t^2) = 0, \quad (1.16)$$

де

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Це рівняння має просту геометричну інтерпретацію. Щоб її з'ясувати скористаємося формулою середньої кривизни поверхні

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{ED_2 - 2FD_1 + GD}{2(EG - F^2)},$$

де E, F, G та D, D_1, D_2 – коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні.

Якщо поверхня задана явним рівнянням $z = z(x, y)$, то

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D_1 = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D_2 = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Тому

$$H = \frac{(1 + p^2)t - 2spq + (1 + q^2)r}{2\sqrt{(1 + p^2 + q^2)^3}}.$$

В цій формулі чисельник співпадає з лівою частиною рівняння Остроградського (1.16). Отже, рівняння (1.16) означає, що середня кривизна шуканої поверхні

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

дорівнює нулю. Поверхні, що мають нульову середню кривизну, називаються мінімальними.

Для функціонала

$$v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \iint_D \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n,$$

де $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, із основної необхідної умови екстремуму $\delta v = 0$ цілком аналогічно

можна дістати таке рівняння Остроградського

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0,$$

яке має задовольняти функція $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що реалізує екстремум функціонала v .

Наприклад, для функціонала

$$v = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

рівняння Остроградського має вигляд

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Якщо підінтегральна функція функціонала v залежить від похідних вищих порядків, то, застосовуючи кілька разів перетворення, використані при виведенні рівняння Остроградського, як необхідну умову екстремуму дістанемо, що функція, яка реалізує екстремум, має задовольняти рівняння, аналогічне рівнянню Ейлера-Пуассона.

Наприклад, для функціонала

$$v[z(x, y)] = \iint_D F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy$$

матимемо рівняння

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} = 0,$$

де

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Функція, яка реалізує екстремум функціонала v , має задовольняти це рівняння четвертого порядку в частинних похідних.

Зокрема, для функціонала

$$v = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

функція z , що реалізує екстремум, має задовольняти так зване бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

яке коротко записується так: $\Delta \Delta z = 0$.

Для функціонала

$$v = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy$$

функція z , що реалізує екстремум, має задовольняти рівняння $\Delta \Delta z = f(x, y)$.

До бігармонічного рівняння приводять також задачі на екстремум функціонала

$$v = \iint_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

або функціонала більш загального вигляду

$$v = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

де μ – деякий параметр.

1.8. Найпростіша задача із рухомими границями

У п.1.3 при дослідженні функціонала

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

припускалося, що граничні точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) фіксовані. Вважатимемо тепер, що одна або обидві граничні точки можуть зміщуватися. У такому разі клас допустимих кривих розширюється – крім кривих порівняння, які мають спільні граничні точки з досліджуваною кривою, можна розглядати також криві із рухомими граничними точками. Тому, якщо крива $y = y(x)$ реалізує екстремум в задачі з рухомими граничними точками, то екстремум тим більше досягається на кривих, які мають спільні граничні точки з кривою $y = y(x)$. Отже функція $y = y(x)$ має задовольняти основну необхідну умову екстремуму в задачі із нерухомими границями, тобто $y = y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Отже, криві, на яких реалізується екстремум в задачі з рухомими границями, мають бути екстремалами.

Загальний розв'язок рівняння Ейлера містить дві довільні сталі C_1 і C_2 , для визначення яких треба мати дві умови. У задачі з нерухомими граничними точками такими умовами є

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

У задачі з рухомими границями одна або обидві ці умови відсутні і для визначення довільних сталих загального розв'язку рівняння Ейлера використовують основну необхідну умову екстремуму – рівність нулю варіації δv .

Як вже зазначалося, в задачі з рухомими границями екстремум досягається лише на розв'язках $y = y(x, C_1, C_2)$ рівняння Ейлера, тому значення функціонала можна розглядати лише на функціях цього сімейства. При цьому функціонал $v[y(x, C_1, C_2)]$ є функцією параметрів C_1 і C_2 та меж інтегрування x_0 і x_1 , а варіація функціонала співпадає з диференціалом цієї функції. Для спрощення припустимо, що одна з граничних точок, наприклад (x_0, y_0) , закріплена, а інша (x_1, y_1) може зміщуватися і переходить у точку $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$, або, як позначають у варіаційному численні, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Прирости δx_1 і δy_1 називають варіаціями граничних значень x_1 і y_1 .

Допустимі криві $y = y(x)$ і $y = y(x) + \delta y$ будемо вважати близькими, якщо малими є модулі варіацій δy і $\delta y'$ та модулі варіацій граничних значень δx_1 і δy_1 . Екстремалі, що проходять через точку (x_0, y_0) , утворюють пучок екстремалей $y = y(x, C_1)$, і функціонал $v[y(x, C_1)]$ на кривих цього пучка є функцією C_1 і x_1 . Якщо криві пучка у околі розглядуваної екстремалі не перетинаються, то $v[y(x, C_1)]$ можна розглядати як однозначну функцію x_1 і y_1 , оскільки значення x_1 і y_1 задають екстремаль пучка і тим самим визначають значення функціонала.

Обчислимо варіацію функціонала $v[y(x, C_1)]$ на екстремалах пучка $y = y(x, C_1)$ при зміщенні граничної точки із положення (x_1, y_1) у положення $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Оскільки функціонал v на кривих пучка є функцією x_1 і y_1 , то його варіація співпадає з диференціалом цієї функції. Виділимо із приросту Δv головну лінійну частину відносно δx_1 і δy_1 . Приріст Δv подамо у вигляді

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx + \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx. \quad (1.17)$$

До першого доданку правої частини застосуємо теорему про середнє значення

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1,$$

де $0 < \theta < 1$.

Враховуючи неперервність функції F , маємо

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

де $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $\delta x_1 \rightarrow 0$ і $\delta y_1 \rightarrow 0$. Отже,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1.$$

Використаємо розклад підінтегральної функції у другому доданку правої частини подання (1.17) за формулою Тейлора:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y') \delta y + F_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx + R_1, \end{aligned}$$

де R_1 є нескінченно малою вищого порядку ніж δy або $\delta y'$. Інтегруючи другий доданок підінтегральної функції частинами, дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y') \delta y + F_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Оскільки за припущенням гранична точка (x_0, y_0) нерухома, $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Тому

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Зауважимо, що $\delta y|_{x=x_1}$ не дорівнює δy_1 – приросту y_1 , оскільки δy_1 є приростом y_1 при переміщенні граничної точки в положення $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, а $\delta y|_{x=x_1}$ є приростом ординати в точці x_1 при переході від екстремалі, яка проходить

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

через точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) , до екстремалі, що проходить через точки (x_0, y_0) і $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ (рис. 1.20). З рисунку видно, що $BD = \delta y|_{x=x_1}$, $FC = \delta y_1$, $EC \approx y'(x_1)\delta x_1$, $BD = FC - EC$, або $\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$. Наближена рівність справедлива з точністю до нескінченно малих вищого порядку.

Остаточо маємо

$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \approx$$

$$\approx F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y dx,$$

де наближені рівності також справедливі з точністю до членів порядку вище першого відносно δx_1 і δy_1 .

З урахуванням цих рівностей із подання (1.17) дістанемо

$$\begin{aligned} \delta v &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y dx = \\ &= \left(F - y'F_{y'}\right)|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y dx. \end{aligned}$$

Якщо значення функціонала розглядаються лише на екстремалях, то $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ і

$$\delta v = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1.$$

Якщо позначити через $\bar{v}(x_1, y_1)$ функцію, в яку перетворився функціонал v на екстремалях $y = y(x, C_1)$, а через $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ — прирости координат граничної точки, то

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1} dy_1.$$

За припущення, що точка (x_0, y_0) також є рухомою, аналогічно можна показати, що варіація функціонала задається поданням

$$\delta v = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 +$$

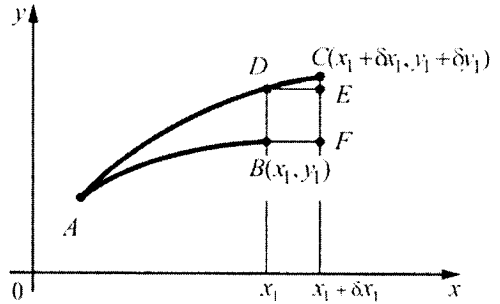


Рис. 1.20

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx,$$

або на екстремалях

$$\delta v = (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'} \Big|_{x=x_0} \delta y_0.$$

Основна необхідна умова екстремуму $\delta v = 0$ набирає вигляду

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'} \Big|_{x=x_0} \delta y_0 = 0. \quad (1.18)$$

Якщо всі варіації δx_0 , δy_0 , δx_1 і δy_1 незалежні, то звідси випливає, що

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad F_{y'} \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

Однак, частіше доводиться розглядати випадок, коли не всі варіації δx_0 , δy_0 , δx_1 і δy_1 є незалежними. Нехай, наприклад, ліва гранична точка (x_0, y_0) може зміщуватися по деякій кривій $y_0 = \varphi(x_0)$, а права гранична точка (x_1, y_1) по кривій $y_1 = \psi(x_1)$. Тоді $\delta y_0 \approx \varphi'(x_0)\delta x_0$, $\delta y_1 \approx \psi'(x_1)\delta x_1$, і умова (1.18) набирає вигляду

$$\delta v = (F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - (F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 = 0$$

або, враховуючи що δx_0 і δx_1 – незалежні прирости, маємо

$$(F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} = 0, \quad (F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_0} = 0,$$

тобто

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0, \quad \left[F + (\varphi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_0} = 0.$$

Ці умови, які задають залежність між кутовими коефіцієнтами φ' , ψ' та y' у граничних точках, називаються умовами *трансверсальності*. Якщо крива $y = y(x)$ задовольняє ці умови, то кажуть, що вона *трансверсальна* кривим $\varphi(x)$ та $\psi(x)$. Умови трансверсальності разом з умовами $y_0 = \varphi(x_0)$ та $y_1 = \psi(x_1)$ дозволяють, взагалі кажучи, визначити одну або кілька екстремалей пучка, на яких може досягатися екстремум.

Приклад 1.19. У варіаційних задачах часто зустрічаються функціонали виду

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Для таких функціоналів умова трансверсальності має досить простий вигляд. Дійсно, у розглядуваному випадку

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$F_{y'} = f(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{Fy'}{1+y'^2},$$

і умова трансверсальності набирає вигляду

$$F + (\psi' - y')F_{y'} = \frac{F(1+y'\psi')}{1+y'^2} = 0.$$

Вважаючи, що в граничній точці $F(x, y) \neq 0$, дістанемо $1 + y'\psi' = 0$ або $y' = -\frac{1}{\psi'}$. Аналогічно на іншому кінці $y' = -\frac{1}{\phi'}$. Тобто для розглядуваного функціонала умова трансверсальності є умовою ортогональності.

Приклад 1.20. Розглянемо задачу центрального розтягу стержня під дією рівномірно розподіленого повздожнього навантаження p і кінематичного навантаження у вигляді горизонтального переміщення на лівому кінці стержня $-\Delta$ (рис. 1.21), яка зводиться, як буде показано далі, до варіаційної задачі з рухомими границями для функціонала Лагранжа

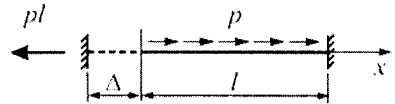


Рис. 1.21

$$J = \int_0^l \left(\frac{1}{2} y'^2 - py \right) dx, \tag{1.19}$$

де l являє собою невідому границю.

Тобто треба дослідити екстремум функціонала (1.19) при таких граничних умовах

$$y(0) = \Delta, \quad y(l) = 0,$$

а також додатковій умові, яка витікає для цієї задачі із варіаційного рівняння для задач з рухомими границями (1.18)

$$y'(l) = 0.$$

Рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0,$$

набирає вигляду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -p.$$

Послідовно отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = -px + C_1,$$

$$y = -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2,$$

$$C_1 = pl, \quad C_2 = -\Delta, \quad l = \sqrt{\frac{2\Delta}{p}}.$$

1.9. Задача з рухомими границями для функціоналів виду $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$

Якщо при дослідженні на екстремум функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$ одна з граничних точок, наприклад $B(x_1, y_1, z_1)$, зміщується, а інша $A(x_0, y_0, z_0)$ нерухома або обидві рухомі, то очевидно, що екстремум може досягатися лише на інтегральних кривих системи рівнянь Ейлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

Справді, якщо на деякій кривій C реалізується екстремум в задачі з рухомими границями, тобто досягається максимальне чи мінімальне значення v у порівнянні із значеннями v на всіх близьких допустимих кривих, і тих, що мають спільні граничні точки з кривою C , і тих, граничні точки яких не співпадають з граничними точками C , то тоді, тим більше на кривій C досягається екстремум відносно більш вузького класу тільки тих близьких кривих, які мають спільні граничні точки з кривою C . Отже, на кривій C мають задовольнятися необхідні умови екстремуму задачі з нерухомими граничними точками і тому крива C є інтегральною кривою системи рівнянь Ейлера.

Загальний розв'язок системи рівнянь Ейлера містить чотири довільні сталі. Припустимо, що точка $A(x_0, y_0, z_0)$ нерухома. Знаючи її координати, можна, взагалі кажучи, визначити дві довільні сталі. Для визначення двох інших сталих потрібні ще два рівняння, які можна дістати із умови $\delta v = 0$. Обчислюючи варіацію слід зважати на те, що функціонал задається лише на розв'язках системи рівнянь Ейлера, оскільки тільки на них може досягатися екстремум. Функціонал v є функцією $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ координат x_1, y_1, z_1 точки $B(x_1, y_1, z_1)$ і варіація функціонала є диференціалом цієї функції. Якщо екстремалі пучка з центром у точці A не перетинаються, точка $B(x_1, y_1, z_1)$ однозначно визначає екстремаль і функція Φ однозначна.

Обчислення варіації можна провести цілком аналогічно тому, як це зроблено у п. 1.8.

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') - F(x, y, z, y', z')] dx. \end{aligned}$$

До першого інтегралу застосуємо теорему про середнє значення і скористаємося неперервністю функції F , у другому інтегралі виділимо головну

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

лінійну частину за допомогою формули Тейлора. Після цих перетворень дістанемо

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z'] dx.$$

Інтегруючи частинами два останні доданки підінтегрального виразу, матимемо

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + [F_{z'} \delta z]_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y + (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) \delta z \right] dx.$$

Оскільки значення v обчислюються лише на екстремалях,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0, \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \equiv 0$$

і тому

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + [F_{z'} \delta z]_{x=x_1}.$$

З тих самих міркувань, що і в п.1.8

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \quad \text{і} \quad \delta z|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1) \delta x_1.$$

Тому

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1} \delta z_1 = 0.$$

Якщо варіації δx_1 , δy_1 , δz_1 незалежні, то з умови $\delta v = 0$ дістанемо

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} = 0, \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0, \quad F_{z'}|_{x=x_1} = 0.$$

Якщо гранична точка $B(x_1, y_1, z_1)$ може зміщуватися по деякій кривій $y_1 = \varphi(x_1)$, $z_1 = \psi(x_1)$, то $\delta y_1 = \varphi'(x_1) \delta x_1$, а $\delta z_1 = \psi'(x_1) \delta x_1$ і умова $\delta v = 0$ або

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

набирає вигляду

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 = 0,$$

звідки, враховуючи, що δx_1 довільна, дістанемо

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0.$$

Ця умова називається *умовою трансверсальності* в задачі про дослідження на екстремум функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx.$$

Умова трансверсальності та рівняння $y_1 = \varphi(x_1)$ і $z_1 = \psi(x_1)$ є рівностями, які дозволяють визначити довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.

Якщо гранична точка $B(x_1, y_1, z_1)$ може зміщуватися по деякій поверхні $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, то $\delta z_1 = \varphi'_x \delta x_1 + \varphi'_y \delta y_1$, причому варіації δx_1 і δy_1 довільні. Отже, умова $\delta v = 0$ або у розгорнутому вигляді

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

набирає вигляду

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'} + \phi'_x F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} + F_{z'} \phi'_y]_{x=x_1} \delta y_1 = 0.$$

Звідси, враховуючи незалежність δx_1 і δy_1 , дістанемо

$$[F - y'F_{y'} + (\phi'_x - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0, [F_{y'} + F_{z'} \phi'_y]_{x=x_1} = 0.$$

Ці дві умови разом з рівнянням $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, взагалі кажучи, дозволяють визначити дві довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.

Якщо рухомою є гранична точка $A(x_0, y_0, z_0)$, то у той самий спосіб можна отримати аналогічні умови.

У загальному випадку для функціоналу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx, \quad (1.20)$$

що залежить від n функцій y_1, y_2, \dots, y_n , варіацію визначимо як головну лінійну частину приросту функціонала відносно всіх приростів $\delta y_i(x)$ функцій $y_i(x)$. Формулу для варіації цього функціонала можна отримати таким самим методом. За припущення, що жодні умови на функції y_1, y_2, \dots, y_n на кінцях не накладаються, така формула має вигляд

$$\begin{aligned} \delta v = & \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} + \\ & + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_0} \delta y_{i0} - \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В цьому поданні через δy_{i0} позначено приріст координати y_i на одному з кінців кривої, а через δy_{i1} – приріст координати y_i на іншому кінці. Формулу для варіації можна подати також у вигляді

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \delta y_i \Big|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1}, \quad (1.22)$$

де символ $\Big|_{x_0}^{x_1}$ вказує, що береться різниця між значеннями відповідної величини у кінцевій і у початковій точках дуги.

Якщо дуга є екстремаллю, то у виразі для варіації підінтегральний член перетворюється на нуль і маємо

$$\delta v = \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \delta y_i \Big|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1}. \quad (1.23)$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Рівність $\delta v = 0$ є умовою екстремуму функціонала (1.20) при довільних граничних умовах.

Приклад 1.21. Знайти умову трансверсальності для функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \text{ якщо } z_1 = \varphi(x_1, y_1).$$

Умови трансверсальності

$$[F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0, [F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1} = 0$$

для розглядуваного функціонала набирають вигляду

$$1 + \varphi'_x z' = 0 \text{ і } y' + \varphi'_y z' = 0 \text{ при } x = x_1$$

або

$$\frac{1}{\varphi'_x} = \frac{y'}{\varphi'_y} = \frac{z'}{-1} \text{ при } x = x_1,$$

тобто вони є умовами паралельності вектора дотичної $\mathbf{t} = (1, y', z')$ до шуканої екстремалі у точці (x_1, y_1, z_1) і вектора нормалі $\mathbf{N} = (\varphi'_x, \varphi'_y, -1)$ до поверхні $z = \varphi(x, y)$ у тій самій точці. Тому умова трансверсальності є у цьому разі умовою ортогональності екстремалі до поверхні $z = \varphi(x, y)$.

Приклад 1.22. Знайти екстремальну відстань між двома поверхнями $z = \varphi(x, y)$

і $z = \psi(x, y)$. Це є задача знаходження екстремуму інтеграла $v = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$

за умови, що координати однієї з граничних точок (x_0, y_0, z_0) задовольняють рівняння $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$, а координати іншої точки (x_1, y_1, z_1) – рівняння $z_1 = \psi(x_1, y_1)$.

Оскільки підінтегральна функція залежить тільки від y' і z' , то екстремалами є прямі лінії (див. приклад 1.12). Оскільки функціонал

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \text{ є частинним випадком розглянутого у}$$

попередньому прикладі функціонала

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \text{ то умови трансверсальності у}$$

обох точках (x_0, y_0, z_0) і (x_1, y_1, z_1) є умовами ортогональності. Тому екстремум може досягатися лише на прямих, ортогональних і до поверхні $z = \varphi(x, y)$ у точці (x_0, y_0, z_0) і до поверхні $z = \psi(x, y)$ у точці (x_1, y_1, z_1) (рис. 1.22).

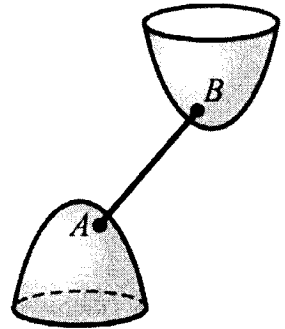


Рис. 1.22

Приклад 1.22. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx,$$

якщо виконуються умови $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, а точка (x_1, y_1, z_1) може переміщуватися по площині $x = x_1$.

Система рівнянь Ейлера у цьому разі має вигляд

$$z'' - y = 0, \quad y'' - z = 0,$$

звідки

$$y'''' - y = 0, \quad y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z = y'', \quad z = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Із умов $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ дістанемо $C_1 + C_3 = 0$ і $C_1 - C_3 = 0$, тому $C_1 = C_3 = 0$.

Враховуючи, що $\delta x_1 = 0$, а δy_1 і δz_1 довільні, із умови у рухомій граничній точці

$$(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0,$$

впливає

$$F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{і} \quad F_{z'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

У розглядуваному прикладі $F_{y'} = 2y'$, $F_{z'} = 2z'$, тому

$$y'(x_1) = 0 \quad \text{і} \quad z'(x_1) = 0$$

або

$$C_2 \operatorname{ch} x_1 + C_4 \cos x_1 = 0 \quad \text{і} \quad C_2 \operatorname{ch} x_1 - C_4 \cos x_1 = 0.$$

Якщо $\cos x_1 \neq 0$, то $C_2 = C_4 = 0$ і екстремум може реалізуватися лише на прямій $y = 0$, $z = 0$. Якщо $\cos x_1 = 0$, тобто $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де k – ціле число, то $C_2 = 0$, C_4 – довільна стала,

$$y = C_4 \sin x, \quad z = -C_4 \sin x.$$

Неважко перевірити, що в останньому випадку при довільному C_4 функціонал $v = 0$.

1.10. Задача з рухомими границями для функціоналів виду $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$

У п.1.6 досліджувався на екстремум функціонал $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$ за умови, що в граничних точках задані фіксовані значення функції $y(x)$ і її першої похідної:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1.$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

У разі, коли значення хоча б деяких з цих величин не фіксовані, розглядувана варіаційна задача називається задачею з рухомими границями.

Якщо в задачі з рухомими границями на кривій C реалізується екстремум, то на цій кривій реалізується екстремум також і для більш вузького класу близьких кривих, які мають спільні граничні точки і спільні напрямки дотичних в граничних точках з кривою C , і тому крива C має бути інтегральною кривою рівняння Ейлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння четвертого порядку $y = y(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$ містить чотири довільні сталі, для визначення яких треба мати чотири рівняння. Ці рівняння можна отримати із основної необхідної умови екстремуму $\delta v = 0$.

Для скорочення викладень припустимо, що граничні значення y і y' у точці x_0 задані: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, а друга гранична точка рухома. Тоді з цих граничних умов можна, взагалі кажучи, визначити дві довільні сталі в загальному рівнянні Ейлера-Пуассона, а дві інші довільні сталі визначаються із умови $\delta v = 0$. При обчисленні варіації можна вважати, що функціонал v визначений лише на розв'язках рівняння Ейлера-Пуассона, оскільки тільки на цих розв'язках може досягатися екстремум. Головна лінійна частина приросту функціонала обчислюється так само, як і у п.1.8:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'') dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'') - F(x, y, y', y'')] dx. \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему про середнє і враховуючи неперервність функції F і функцій $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, дістанемо

$$\Delta v = F(x, y, y', y'') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'') dx + R,$$

де R є нескінченно мала величина порядку вищого ніж найбільший з модулів $|\delta x_1|$, $|\delta y_1|$, $|\delta y|$, $|\delta y'|$, $|\delta y''|$. Отже,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'') dx.$$

Інтегруючи другий доданок підінтегральної функції частинами один раз, а третій – два рази і беручи до уваги, що

$$\delta y|_{x=x_0} = 0, \quad \delta y'|_{x=x_0} = 0 \quad \text{і} \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \equiv 0,$$

дістанемо

$$\delta v = [F \delta x_1 + F_{y'} \delta y + F_{y''} \delta y' - \frac{d}{dx} (F_{y''}) \delta y]_{x=x_1}.$$

Використовуючи отриману у п.1.8 рівність $\delta y_1 = y'(x_1) \delta x_1 + \delta y|_{x=x_1}$ і аналогічну для $\delta y'_1$: $\delta y'_1 = y''(x_1) \delta x_1 + \delta y'|_{x=x_1}$, матимемо

$$\delta v = [F - y' F_{y'} - y'' F_{y''} + y' \frac{d}{dx} (F_{y''})]_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} - \frac{d}{dx} (F_{y''})]_{x=x_1} \delta y_1 + F_{y''} \Big|_{x=x_1} \delta y'_1.$$

Отже, основна необхідна умова екстремуму $\delta v = 0$ набуває вигляду

$$[F - y' F_{y'} - y'' F_{y''} + y' \frac{d}{dx} (F_{y''})]_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} - \frac{d}{dx} (F_{y''})]_{x=x_1} \delta y_1 + F_{y''} \Big|_{x=x_1} \delta y'_1 = 0. \quad (1.24)$$

Якщо δx_1 , δy_1 і $\delta y'_1$ незалежні, то коефіцієнти при δx_1 , δy_1 і $\delta y'_1$ у (1.24) для $x = x_1$ дорівнюють нулю. Якщо між цими варіаціями є деяка залежність, наприклад $y_1 = \varphi(x_1)$, $y'_1 = \psi(x_1)$, то знаходимо $\delta y_1 = \varphi'(x_1) \delta x_1$ і $\delta y'_1 = \psi'(x_1) \delta x_1$ і, підставивши у (1.24), дістанемо

$$[F - y' F_{y'} - y'' F_{y''} + y' \frac{d}{dx} (F_{y''}) + (F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}) \varphi' + F_{y''} \psi']_{x=x_1} \delta x_1 = 0,$$

звідки

$$[F - y' F_{y'} - y'' F_{y''} + y' \frac{d}{dx} (F_{y''}) + (F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}) \varphi' + F_{y''} \psi']_{x=x_1} = 0.$$

Ця умова разом з рівняннями $y_1 = \varphi(x_1)$ $y'_1 = \psi(x_1)$, взагалі кажучи, визначає $x_1, y_1, \text{ і } y'_1$.

Якщо $x_1, y_1, \text{ і } y'_1$ зв'язані одним рівнянням $\varphi(x_1, y_1, y'_1) = 0$, то дві варіації із $\delta x_1, \delta y_1$ і $\delta y'_1$ залишаються довільними, а третя визначається з рівняння

$$\varphi'_{x_1} \delta x_1 + \varphi'_{y_1} \delta y_1 + \varphi'_{y'_1} \delta y'_1 = 0.$$

Наприклад,

$$\delta y'_1 = - \frac{\varphi'_{x_1} \delta x_1 + \varphi'_{y_1} \delta y_1}{\varphi'_{y'_1}}, \quad \text{якщо } \varphi'_{y'_1} \neq 0.$$

Підставляючи $\delta y'_1$ в (1.24) і прирівнюючи нулю коефіцієнти при незалежних варіаціях δx_1 і δy_1 , матимемо два рівняння в точці $x = x_1$, які разом з рівнянням $\varphi(x_1, y_1, y'_1) = 0$, взагалі кажучи, дозволяють визначити $x_1, y_1, \text{ і } y'_1$. Якщо точка $A(x_0, y_0)$ є рухомою, для неї також можна отримати аналогічні умови.

Приклад 1.24. Дослідити на екстремум функціонал $v[y] = \int_0^1 y''^2 dx$.

Задача дослідження екстремуму такого функціонала при нерухомих границях розглядалася у п.1.6 (приклад 1.13). Рівняння Ейлера-Пуассона для цього функціонала має вигляд

$$y^{IV} = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Вважатимемо, що $y'(1)$ змінюється довільним чином, а для $y(0)$, $y'(0)$, $y(1)$ розглянемо такі ж варіанти граничних умов як і у прикладі 1.13.

Якщо прийняти $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = 1$, то із умови $y(0) = 0$ дістанемо $C_4 = 0$, із умови $y'(0) = 1 - C_3 = 1$, із умови $y(1) = 1 - C_1 + C_2 = 0$. Оскільки у розглядуваній задачі $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, а $\delta y'_1$ є довільною функцією, то умова (1.24) набирає вигляду $F_{y''} \Big|_{x=x_1} = 0$ або $y''(1) = 0$, $y''(x) = 2C_2 + 6C_1 x$. При $x=1$ маємо $2C_2 + 6C_1 = 0$, звідки, враховуючи що $C_1 + C_2 = 0$, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Отже, екстремум може досягатися лише на прямій $y = x$ (рис. 1.23,а).

Для інших варіантів граничних умов:

- при $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1)$ - довільна,

$C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$ і екстремум досягається на прямій $y = 1$ (рис. 1.23,б);

- при $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1)$ - довільна,

$C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ і $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ (рис. 1.23,в);

- при $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1)$ - довільна,

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ і екстремум досягається на прямій $y = 0$ (рис. 1.23,г).

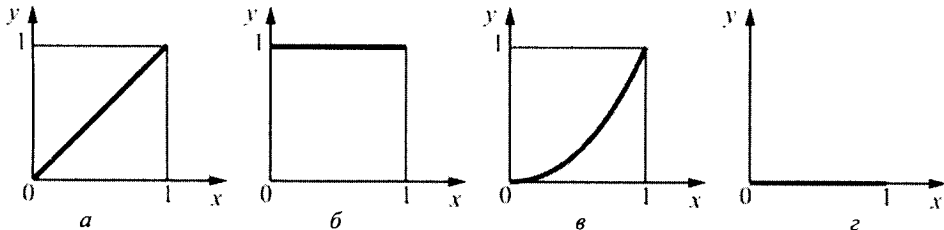


Рис. 1.23

Приклад 1.25. Розглянемо задачу про згин невагомої балки нескінченної довжини на жорсткій основі під дією кінематичного навантаження на лівому кінці у вигляді вертикального переміщення $y(0) = -1$ і кута повороту $y'(0) = 1$ (рис. 1.24), яка зводиться, як буде показано далі, до варіаційної задачі з рухомими границями

для функціонала Лагранжа, пропорційного $J = \int_0^l y''^2 dx$, де l являє собою невідому

змінну границю – величину відриву лівої частини балки від жорсткої основи.

Тобто треба дослідити на екстремум функціонала J при таких граничних умовах:

$$y(0) = -1; \quad y(l) = 0;$$

$$y'(0) = -1; \quad y'(l) = 0,$$

а також додатковій граничній умові, яка витікає для цієї задачі із варіаційного рівняння (1.24) для задач з рухомими границями:

$$y''(l) = 0. \tag{1.25}$$

Послідовно отримаємо:

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4; \quad C_4 = -1,$$

$$y'(x) = 3C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3; \quad C_3 = 1,$$

$$C_1 = \frac{l-2}{l^3}, \quad C_2 = \frac{-2l+3}{l^2},$$

$$y''(x) = 6C_1 x + 2C_2.$$

Умова (1.25) дає:

$$\frac{3(l-2)}{l^2} + \frac{-2l+3}{l^2} = 0; \quad l = 3.$$

Відповідно:

$$y(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x - 1, \quad y'(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1, \quad y''(x) = \frac{2}{9}x - \frac{2}{3}, \quad y'''(x) = \frac{2}{9}.$$

Оскільки величини $y''(0) = -\frac{2}{3}$, $y'''(0) = \frac{2}{9}$, $y''(l) = 0$ і $y'''(l) = \frac{2}{9}$ є пропорційними згинаючим моментам і перерізуючим силам на кінцях з відповідними знаками, схема їх дії показана на рис. 1.24.

Зазначимо, що для даної задачі при $y''(x) = \frac{2}{9}x - \frac{2}{3}$

$$J = \int_0^l \left(\frac{2}{9}x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \frac{4}{9} \left(\frac{l^2}{6} - 6\right); \quad \frac{dJ}{dl} = 0;$$

$$l = 3; \quad \frac{d^2 J}{dl^2} = \frac{4}{27} > 0.$$

Залежність $J(l)$ показана на рис. 1.25.

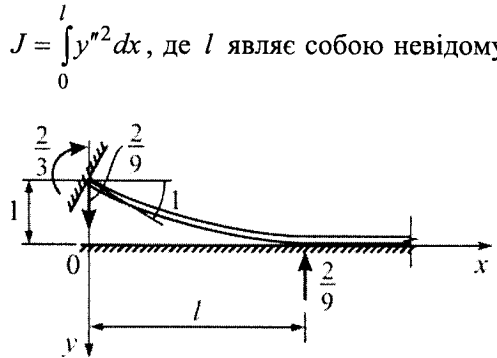


Рис. 1.24

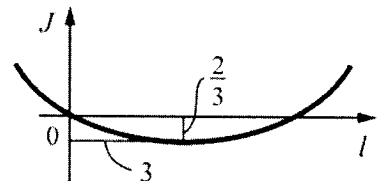


Рис. 1.25

1.11. Канонічний вигляд рівнянь Ейлера

Рівняння Ейлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0,$$

що відповідають функціоналу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx,$$

який залежить від n функцій, утворюють систему n рівнянь другого порядку. Таку систему можна звести до системи $2n$ рівнянь першого порядку. Наприклад, можна прийняти y'_1, y'_2, \dots, y'_n за n нових невідомих функцій і розглядати систему

$$\begin{cases} F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \\ \frac{dy_i}{dx} = y'_i, \end{cases} \quad (1.26)$$

де $y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ – невідомі функції, а x – незалежна змінна. Тут і далі в цьому підрозділі через y'_i позначатимуться нові змінні (що є загальноприйнятим у розглядуваній тематиці). Похідні функцій y_i позначатимемо $\frac{dy_i}{dx}$. Для рівнянь Ейлера можна отримати зручнішу, більш симетричну форму, вводячи замість x, y_1, y_2, \dots, y_n іншу систему змінних – так звані канонічні змінні.

Розглянемо такі величини:

$$p_i = F_{y'_i}, \quad (1.27)$$

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i. \quad (1.28)$$

Виразивши із $p_i = F_{y'_i}$ величини y'_1, y'_2, \dots, y'_n через x, y_1, y_2, \dots, y_n і p_1, p_2, \dots, p_n , можна x, y_1, y_2, \dots, y_n і p_1, p_2, \dots, p_n вважати новими змінними замість змінних $x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$. Зробимо таку заміну в рівняннях Ейлера (1.26). Функцію $F(x, y_i, y'_i)$ в рівнянні Ейлера виразимо через нову функцію $H(x, y_i, p_i)$, що зв'язана з F рівністю

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i$$

(тут y'_i – відповідні функції від x, y_i, p_i). Визначена цим поданням функція $H(x, y_i, p_i)$ називається *функцією Гамільтона*, що відповідає даному функціоналу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx.$$

Змінні x , y_i , p_i , H , зв'язані із старими змінними x , y_i , y_i' , F співвідношеннями (1.27) і (1.28), називаються *канонічними змінними*, що відповідають функціоналу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i') dx$. Перехід від старих змінних до нових

можливий, якщо функціональний детермінант $\frac{D(p_1, p_2, \dots, p_n)}{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}$, тобто детермінант матриці, утвореної із похідних

$$\|F_{y_i' y_k'}\|,$$

відмінний від нуля. Вважатимемо, що ця умова виконується.

Зауважимо, що вказана умова забезпечує лише локальну розв'язуваність рівнянь $p_i = F_{y_i'}$ відносно y_1', y_2', \dots, y_n' , але не гарантує можливості виразити y_1', y_2', \dots, y_n' як функції від x , y_i , p_i , визначені у всій розглядуваній області. Отже, всі наведені міркування мають локальний характер.

З'ясуємо, як змінюється рівняння Ейлера (1.26) при переході до канонічних змінних. Щоб здійснити в рівняннях Ейлера вказану заміну, треба частинні похідні $F_{y_i'}$, тобто частинні похідні F по y_i , взяті при фіксованих y_1', y_2', \dots, y_n' , виразити через частинні похідні H_{y_i} , які беруться при фіксованих p_1, p_2, \dots, p_n .

Для спрощення викладень, пов'язаних із безпосереднім обчисленням цих похідних, скористаємося виразом диференціала функції H . Оскільки перший диференціал є інваріантним стосовно вибору незалежних змінних, можна не зважати на те, здійснений вже перехід до нових змінних чи ні.

Виходячи з вигляду функції H (1.28) її диференціал

$$dH = -dF + \sum_{i=1}^n p_i dy_i' + \sum_{i=1}^n y_i' dp_i,$$

тобто

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i'} dy_i' + \sum_{i=1}^n p_i dy_i' + \sum_{i=1}^n y_i' dp_i. \quad (1.29)$$

Щоб отримати звідси вирази для частинних похідних функції H , необхідно було б виразити dy_i' через x , y_i , і p_i . Однак (це і є важлива особливість канонічних змінних), із рівностей

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

впливає, що у (1.29) доданки, які містять dy_i' , взаємно знищуються і в результаті маємо

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y_i' dp_i.$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Частинні похідні функції H це є коефіцієнти при відповідних диференціалах у правій частині, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Використовуючи наведені вирази, рівняння Ейлера (1.26) можна подати у вигляді

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Ці $2n$ рівнянь першого порядку утворюють систему, еквівалентну (1.26), яка називається *канонічною системою рівнянь Ейлера* розглядуваного функціонала

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx.$$

1.12 Перші інтеграли рівнянь Ейлера

Нагадаємо, що першим інтегралом деякої системи диференціальних рівнянь називається функція, яка вздовж кожної інтегральної кривої цієї системи зберігає стале значення. З'ясуємо, які перші інтеграли може мати канонічна система

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.30)$$

а отже і еквівалентна їй вихідна система

$$\begin{cases} F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \\ \frac{dy_i}{dx} = y'_i. \end{cases}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли функція F , що визначає функціонал, не залежить явно від x , тобто $F = F(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$. Тоді функція

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i \quad \text{також не містить явно } x \text{ і тому}$$

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} = 0,$$

звідки

$$H = \text{const}$$

вздовж кожної екстремалі. Так само неважко перевірити, що у разі коли H залежить від x справедлива формула $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$. Отже, якщо F не залежить явно від x , то функція $H(y_i, p_i)$ є першим інтегралом рівняння Ейлера.

Розглянемо тепер деяку довільну функцію

$$\Phi = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

і з'ясуємо, за яких умов вона буде першим інтегралом системи (1.30). При цьому вже не припускати, що F не залежить явно від x , а розглянемо загальний випадок. Вздовж кожної інтегральної кривої системи (1.30) маємо

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dH}{dy_i} \right).$$

Вираз

$$[\Phi, H] = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dH}{dy_i} \right)$$

називається *дужкою Пуассона* функцій Φ і H . Справедлива формула

$$\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, H].$$

Отже, для того щоб функція $\Phi = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ була першим інтегралом системи рівнянь Ейлера (1.26) необхідно і достатньо, щоб дужка Пуассона $[\Phi, H]$ тотожно дорівнювала нулю.

Якщо не тільки H але і Φ може явно залежати від x , то легко перевірити, що справедлива рівність

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H].$$

1.13. Перетворення Лежандра¹. Канонічні перетворення

Розглянемо ще один метод приведення рівнянь Ейлера до канонічного вигляду, відмінний від викладеного у п.1.11. Ідея цього нового методу полягає в тому, що розглядувана варіаційна задача замінюється іншою, еквівалентною, і такою, що рівняння Ейлера для цієї нової задачі співпадають з рівняннями Ейлера для вихідної задачі.

Нехай спочатку $f(\xi)$ – деяка опукла функція, тобто

$$f''(\xi) > 0. \quad (1.31)$$

Для деякого заданого числа p розглянемо пряму $y = p\xi$ (рис. 1.26). Нехай $\xi = \xi(p)$ – точка, в якій відстань від кривої $y = f(\xi)$ до цієї прямої по вертикалі є найбільшою. Функція $p\xi - f(\xi) = F(p, \xi)$ в точці $\xi = \xi(p)$ має максимум по ξ при фіксованому p .

Введемо нову функцію нової змінної p : $H(p) = F(p, \xi(p))$. Точка $\xi(p)$

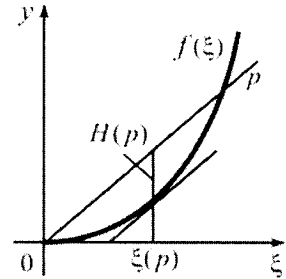


Рис. 1.26

¹ Лежандр, Адрієн Марі (фр. Adrien-Marie Legendre, 1752–1833) – французький математик. У своїх роботах по вивченню диференціальних рівнянь виявив одне важливе перетворення, яке має чудові властивості, що зумовили його застосування для розв'язання багатьох проблем аналізу, так зване дуальне перетворення Лежандра. У варіаційному численні встановив ознаку існування екстремуму.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

визначається із умови екстремуму $\partial F/\partial \xi = 0$. Тобто $f'(\xi) = p$. Оскільки $f(\xi)$ є опуклою функцією, така точка $\xi(p)$ тільки одна. (Так само і для угнутої кривої, для якої $f''(\xi) < 0$).

Таким чином, ми перейшли від змінної і функції ξ , $f(\xi)$ до змінної і функції p , $H(p)$. Нова незалежна змінна

$$p = f'(\xi) \quad (1.32)$$

називається *тангенціальною координатою*. Тобто за незалежну змінну приймається кутовий коефіцієнт дотичної, що проходить через дану точку кривої. Оскільки за умовою $\frac{dp}{d\xi} = f''(\xi) \neq 0$, то із (1.32) можна виразити ξ через p . Нова функція

$$H(p) = -f(\xi) + p\xi. \quad (1.33)$$

Тут ξ є функцією від p , що задається поданням (1.32).

Перетворення, яке визначається формулами (1.32) і (1.33), називається *перетворенням Лежандра*¹.

Зауважимо, що геометрично перетворення Лежандра не є точковим перетворенням. Для визначення координат $p, H(p)$ точки M' недостатньо знати координати $\xi, f(\xi)$ точки M , потрібен ще й кутовий коефіцієнт y'_ξ дотичної в цій точці до розглядуваної кривої $y = f(\xi)$. Тим не менше крива перетворюється знову в криву і дотик зберігається. Такі перетворення, що зберігають дотик, мають назву *дотичних перетворень* або *перетворень дотикання* [208]. Перетворення Лежандра є їх частинним випадком.

Двоїсті функції – це є строго опуклі функції, зв'язані перетворенням Лежандра.

Легко перевірити, що із опуклості функції $f(\xi)$ випливає опуклість функції $H(p)$. Дійсно,

$$dH = -f'(\xi)d\xi + pd\xi + \xi dp = \xi dp,$$

звідки

$$\frac{dH}{dp} = \xi, \quad (1.34)$$

отже,

$$\frac{d^2 H}{dp^2} = \frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{d\xi}} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0,$$

¹ Хоча перетворення було відкрито і використане Л.Ейлером в 1779 р., широко відомим воно стало після того, як Лежандр використав його в 1787 р., саме у зв'язку з цим перетворення отримало ім'я Лежандра. Справедливіше було б, мабуть, називати його перетворенням Ейлера, або перетворенням Ейлера-Лежандра. Перший примітивний приклад цього перетворення знайдений в дослідженнях Лейбніца. Про перетворення Лежандра див., наприклад: Р.Курант и Д.Гильберт. Методы математической физики, т. II, изд. 2-е. Гостехиздат, 1951, М.-Л., гл.1, п.б.

оскільки $f''(\xi) > 0$.

Приклад 1.26. Нехай $f(\xi) = \xi^2$. Тоді $F(p, \xi) = p\xi - \xi^2$, $\xi(p) = \frac{p}{2}$, $H(p) = \frac{p^2}{4}$.

Приклад 1.27. Нехай $f(\xi) = \frac{m\xi^2}{2}$. Тоді $H(p) = \frac{p^2}{2m}$.

Приклад 1.28. Нехай $f(\xi) = \frac{\xi^a}{a}$ ($a > 1$). Тоді

$$f'(\xi) = p = \xi^{a-1},$$

тобто

$$\xi = p^{\frac{1}{a-1}}.$$

Тому

$$H = -\frac{\xi^a}{a} + p\xi = \frac{p^{\frac{1}{a-1}}}{a} + p \cdot p^{\frac{1}{a-1}} = p^{\frac{1}{a-1}} \left(-\frac{1}{a} + 1\right),$$

і

$$H(p) = \frac{p^b}{b},$$

де b зв'язане із a співвідношенням $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Функція $H(p)$, визначена рівністю (1.33), називається *двоїстою по Юнгу* до функції $f(\xi)$.

Перетворення, двократне повторення якого є тотожним перетворенням, називається *інволютивним*. Справедлива така теорема.

Теорема 1.4. Перетворення Лежандра є інволютивним, тобто його квадрат дорівнює тотожному перетворенню: якщо f при перетворенні Лежандра переходить у H , то перетворення Лежандра від H буде знову f .

Доведення. Щоб зробити перетворення Лежандра функції H змінної p , треба, за означенням, розглянути нову незалежну змінну (позначимо її через ξ), скласти функцію

$$\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p), \tag{1.35}$$

знайти точку $p(\xi)$, в якій \bar{H} має максимум:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial p} = 0, \text{ тобто } H'(p) = \xi,$$

і тоді перетворенням Лежандра $H(p)$ буде функція від ξ , рівна $\bar{H}(\xi, p(\xi))$.

Доведемо, що $\bar{H}(\xi, p(\xi)) = f(\xi)$. Справді, $\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p)$ має простий геометричний зміст: це є ордината дотичної до графіка $f(\xi)$, що має нахил p , при абсцисі ξ (рис. 1.27). Дійсно, при фіксованому p функція $\bar{H}(\xi, p)$ є лінійною

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

функцією від ξ , причому $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi} = p$ і при $\xi = \xi(p)$ маємо $\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p) = f(\xi)$ за означенням $H(p)$.

Зафіксуємо тепер $\xi = \xi_0$ і змінюватимемо p . Тоді значення $\bar{H}(\xi, p)$ будуть ординатами точок перетину прямої $\xi = \xi_0$ з дотичними до графіка $f(\xi)$, що мають різний нахил p . З опуклості графіка випливає, що всі ці дотичні лежать нижче кривої, а тому максимум $\bar{H}(\xi, p)$ при фіксованому $\xi(p_0)$ дорівнює $f(\xi)$ (і досягається при $p = p(\xi_0) = f'(\xi_0)$), що треба було довести.

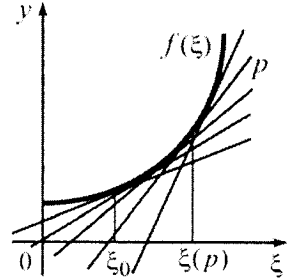


Рис. 1.27

Наслідок. Нехай дано сімейство прямих $y = p\xi - H(p)$, тоді обвідна має рівняння $y = f(\xi)$, де f – перетворення Лежандра функції H .

Таким чином сутність перетворення Лежандра полягає у можливості двоїстого задання кривої – як множини точок і як обвідної сімейства дотичних.

За означенням перетворення Лежандра, $F(p, \xi) = p\xi - f(\xi) \leq H(p)$ для довільних ξ і p . Звідси випливає

$$p\xi \leq f(\xi) + H(p). \tag{1.36}$$

Отримана нерівність називається *нерівністю Юнга*.

Приклад 1.29. Якщо $f(\xi) = \frac{\xi^2}{2}$, то $H(p) = \frac{p^2}{2}$ і маємо відому нерівність

$$p\xi \leq \frac{\xi^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

для всіх ξ і p .

Приклад 1.30. Якщо $f(\xi) = \frac{\xi^a}{a}$, то $H(p) = \frac{p^b}{b}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ і дістанемо нерівність

Юнга

$$p\xi \leq \frac{\xi^a}{a} + \frac{p^b}{b}$$

для всіх $\xi > 0$, $p > 0$, $a > 1$, $b > 1$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Аналогічні міркування справедливі і для функцій декількох незалежних змінних. Припустимо, що $f(\xi)$ – опукла функція векторної змінної $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$,

тобто квадратична форма $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} d\xi, d\xi \right)$ додатно визначена. Тоді перетворенням

Лежандра називається функція $H(\mathbf{p})$ векторної змінної $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, визначена рівностями аналогічними попереднім:

$$H(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \xi(\mathbf{p})) = \max_{\xi} F(\mathbf{p}, \xi), \quad F(\mathbf{p}, \xi) = (\mathbf{p}, \xi) - f(\xi), \quad (1.37)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (1.38)$$

Всі попередні міркування без змін переносяться і на цей випадок. Для функцій декількох змінних також має місце нерівність Юнга

$$\sum_{i=1}^n p_i \xi_i \leq H(p_1, p_2, \dots, p_n) + f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (1.39)$$

де p_1, p_2, \dots, p_n і $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ визначаються формулами (1.37) і (1.38).

У випадку функції двох змінних, якщо $\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)$ і $p_1, p_2, H(p_1, p_2)$ трактувати як координати деяких точок простору, то перетворення Лежандра можна розглядати як перетворення простору (але не точкове). Поверхня, що характеризується функцією $F(\xi_1, \xi_2)$ переходить при цьому в поверхню $H(p_1, p_2)$. Оскільки $p_1, p_2, H, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}$ залежать тільки від $\xi_1, \xi_2, f, \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \frac{\partial F}{\partial \xi_2}$, то перетворення Лежандра зберігає дотик. Як і у випадку функції однієї змінної можна сказати, що перетворення Лежандра дає можливість двоїстого описання поверхні у просторі: як множини точок $\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)$ і як обвідної сімейства її дотичних площин.

Функція однієї або декількох змінних називається *однорідною*, якщо вона задовольняє наступну умову: при одночасному множенні всіх аргументів функції на один і той самий довільний множник значення функції множиться на деякий степінь цього множника. Тобто для однорідної функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при всіх значеннях x_1, x_2, \dots, x_n і довільному t має виконуватися рівність

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Показник k називається *показником однорідності* або *виміром* однорідної функції.

В інших позначеннях: однорідна функція виміру k – це є числова функція $f: R_n \rightarrow R$, така що для довільного $\mathbf{x} \in R_n$ і довільного $t \in R$ справджується рівність

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}).$$

Однорідними є, наприклад, функції $x^2 - 3xy$, $\frac{x^3 - y^3 + 2xz^2}{y^2 + xz}$, $\sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$, які

мають показники однорідності, відповідно, 2, 1, 2/3.

Теорема 1.5 (Ейлера). Якщо у виразі повного диференціала однорідної функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ виміру k

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

замінити диференціал кожної незалежної змінної на цю змінну, дістанемо функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, помножену на показник однорідності k :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.40)$$

Справді, при диференціюванні виразу

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

по t за правилом диференціювання складної функції матимемо

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n} = k \cdot t^{k-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де $u_i = tx_i$. Прийнявши в цьому виразі $t = 1$, дістанемо

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

що і доводить теорему.

Наведена теорема Ейлера по суті стверджує справедливість рівності Юнга для однорідних функцій. Дійсно, якщо позначити

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1.41)$$

то подання (1.40) можна записати у вигляді

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + (k-1) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.42)$$

За умови, що детермінант, утворений із похідних

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

не дорівнює нулю виразимо із (1.41) x_i через p_i , підставимо у другий доданок правої частини (1.42) і отримаємо функцію $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Отже,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + H(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

– рівність Юнга.

Приклад 1.31. Якщо $f(x) = \frac{x^2}{2}$, рівність (1.40) має вигляд $x \cdot x = 2 \cdot \frac{x^2}{2}$.

Позначивши $p = x$, матимемо $px = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$, $H(p) = \frac{p^2}{2}$ і $px = \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$.

Приклад 1.32. Якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – квадратична форма, рівність (1.40) набирає вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

або

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + H(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Запишемо квадратичну форму у вигляді $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, де \mathbf{A} – матриця квадратичної форми. Оскільки \mathbf{A} – симетрична матриця, то $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. За теоремою Ейлера $\mathbf{p}^T \mathbf{x}=2f(\mathbf{x})$, або $\mathbf{p}^T \mathbf{x}=2\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Звідки $\mathbf{p}^T =2\mathbf{x}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T =\frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$. Тоді

$$H(\mathbf{p})=f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p} . \text{ Отже } H(\mathbf{p})=\frac{1}{4}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} .$$

Зауважимо, якщо квадратична форма має вигляд $f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, то $H(\mathbf{p})=\frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} .$

Із прикладу 1.32 випливає

Твердження. Значення квадратичної форми $f(\mathbf{x})$ і її перетворення Лежандра $H(\mathbf{p})$ у відповідних точках співпадають: $f(\mathbf{x})=H(\mathbf{p})$.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{mx^2}{2}$ із прикладу 1.27 маємо $p=mx$ і

$$H(p)=\frac{p^2}{2m}=\frac{mx^2}{2}=f(x).$$

1.14. Двоїсті варіаційні принципи. Перетворення Юнга¹-Фенхеля²

1.14.1. Схема побудови двоїстих варіаційних задач

Відомо, що одна й та сама система рівнянь може бути системою рівнянь Ейлера для різних функціоналів. Наприклад, рівняння аналітичної механіки систем із скінченним числом ступенів свободи можна отримати виходячи із двох різних варіаційних принципів: принципу Гамільтона-Остроградського і принципу Гамільтона-Пуанкаре. В інших розділах механіки також пропонувалися різні варіаційні принципи для одних і тих самих систем рівнянь: принцип Діріхле і принцип Томсона у механіці нестисливої рідини і в електростатиці, принцип Лагранжа, принцип Кастільяно і принцип Рейснера в теорії пружності, принцип максимуму Понтрягіна у варіаційних задачах з обмеженнями і т.ін. Пізніше стало зрозуміло, що всі такі принципи ґрунтуються на одній простій загальній ідеї – ідеї двоїстості. Ця ідея викладається в даному підрозділі.

Розглянемо задачу про мінімум функціонала $I(y)$ на деякій множині M :

$$\underline{I} = \inf_{y \in M} I(y). \quad (1.43)$$

¹ Юнг, Вільям Генрі (1773–1829) – англійський математик. Основні напрями досліджень – теорія диференціальних рівнянь, теорія рядів, теорія множин, один із авторів поняття двоїстих функцій, автор робіт по історії і філософії математики.

² Фенхель, Вернер (дат. Fenchel Werner, 1905–1988) – датський математик. Основні роботи відносяться до теорії груп, теорії поверхонь, диференціальної геометрії.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Припустимо, що можна побудувати функціонал $\Phi(y, p)$ двох змінних y і p , $y \in M$, $p \in N$, такий, що

$$I(y) = \sup_{p \in N} \Phi(y, p). \quad (1.44)$$

Тоді вихідну варіаційну задачу можна представити як мінімаксну задачу

$$\underline{I} = \inf_{y \in M} \sup_{p \in N} \Phi(y, p). \quad (1.45)$$

Вважатимемо, що у (1.45) послідовність обчислення нижньої і верхньої граней можна поміняти:

$$\underline{I} = \sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p). \quad (1.46)$$

Припустимо, що функціонал $\Phi(y, p)$ вибраний таким, що $\inf_{y \in M} \Phi(y, p)$ легко знаходиться. Позначимо його $J(p)$:

$$J(p) = \inf_{y \in M} \Phi(y, p). \quad (1.47)$$

Вихідна задача про обчислення функціонала $I(y)$ еквівалентна задачі про знаходження верхньої грані функціонала $J(p)$ на множині N елементів p :

$$\sup_{p \in N} J(p) = \underline{I}. \quad (1.48)$$

Варіаційну задачу (1.48) називають *двоїстою* до вихідної варіаційної задачі (1.43).

Можна будувати різні двоїсті варіаційні задачі, вибираючи по різному функціонал $\Phi(y, p)$ і множину N . Цей вибір обмежений двома умовами. По-перше, має бути забезпечена можливість міняти послідовність обчислень нижньої і верхньої граней:

$$\inf_{y \in M} \sup_{p \in N} \Phi(y, p) = \sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p). \quad (1.49)$$

По-друге, функціонал $J(p)$ має обчислюватися явно.

У варіаційних принципах, названих на початку цього підрозділу, остання умова задовольняється через те, що функціонал $\Phi(y, p)$ береться лінійним по p .

Існують різні достатні умови виконання (1.49), проте їх перевірка інколи є складнішою, ніж безпосереднє дослідження можливості перестановки нижньої і верхньої граней. Як правило, рівність (1.49) можна перевірити наведеним нижче способом.

Спочатку покажемо, що для будь-якого функціонала $\Phi(y, p)$ і довільних непустих множин M і N

$$\sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p) \leq \inf_{y \in M} \sup_{p \in N} \Phi(y, p). \quad (1.50)$$

Справді,

$$\inf_{y \in M} \Phi(y, p) \leq \Phi(y, p). \quad (1.51)$$

Зафіксуємо будь-який елемент y у правій частині (1.51). Тоді нерівність (1.51) означає, що функціонал від p $\inf_{y \in M} \Phi(y, p)$ не перевищує функціонала від p $\Phi(y, p)$. Тому

$$\sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p) \leq \sup_{p \in N} \Phi(y, p). \quad (1.52)$$

Згідно з (1.52) функціонал від y $\sup_{p \in N} \Phi(y, p)$ обмежений знизу числом $\sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p)$. Тому це число обмежує знизу також і нижню грань функціонала, тобто справедлива нерівність (1.50).

Нерівність (1.50) можна подати також у вигляді

$$\sup_{p \in N} J(p) \leq \inf_{y \in M} I(y). \quad (1.53)$$

Позначимо через \tilde{y} мінімізуючий елемент вихідної варіаційної задачі (1.43), а через \tilde{p} – елемент, на якому досягається

$$\sup_{p \in N} \Phi(\tilde{y}, p).$$

Застосувавши (1.53), дістанемо оцінку

$$J(\tilde{p}) \leq \sup_{p \in N} J(p) \leq \inf_{y \in M} I(y) = I(\tilde{y}). \quad (1.54)$$

Як правило, є можливість порівняти $J(\tilde{p})$ і $I(\tilde{y})$ і у разі, якщо $J(\tilde{p}) = I(\tilde{y})$, маємо

$$\sup_{p \in N} J(p) = \underline{I}.$$

Відзначимо, що двоїстий варіаційний принцип (1.48) дозволяє легко будувати оцінки \underline{I} знизу. Нагадаємо, що побудова оцінок \underline{I} зверху є тривіальною, а саме, достатньо обчислювати значення функціонала $I(y)$ на елементах множини M . Тоді із означення нижньої грані випливає, що

$$\underline{I} \leq I(y).$$

У разі, коли двоїста варіаційна задача побудована, оцінки \underline{I} знизу можна отримати так само просто. Достатньо обчислювати значення функціонала $J(p)$ на елементах множини N

$$J(p) \leq \underline{I}.$$

В деяких випадках не вдається вказати лінійний по p функціонал $\Phi(y, p)$ так, щоб виконувалася рівність (1.44), і можна гарантувати лише справедливості нерівності

$$\sup_p \Phi(y, p) \leq I(y).$$

Тоді із (1.50) матимемо

$$\sup_{p \in N} J(p) \leq \underline{I}.$$

Тому зберігається можливість будувати оцінки \underline{I} знизу.

Истотну роль у конструюванні функціонала $\Phi(y, p)$ відіграють перетворення Юнга-Фенхеля та інші поняття опуклого аналізу, що викладаються нижче.

1.14.2. Опуклі і угнуті функції, їх властивості

Опуклі і угнуті функції мають багато спеціальних важливих властивостей. Наприклад, локальний мінімум опуклої функції на опуклій множині є і глобальним мінімумом. Як буде показано далі, властивості опуклих і угнутих функції можуть бути використані при виведенні умов оптимальності і побудові чисельних схем для задач оптимізації, що містять опуклі і угнуті функції.

Дослідимо деякі важливі властивості опуклих і угнутих функцій, зокрема, їх неперервність і диференційовність.

Означення. Нехай $f: S \rightarrow R_1$, де S — непуста опукла множина у R_n . Кажуть, що функція f *опукла* на S , якщо

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in S$ і $\lambda \in (0,1)$. Функція f *строго опукла* на S , якщо $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ для будь-яких різних x_1 і x_2 із S і $\lambda \in (0,1)$. Функція $f: S \rightarrow R_1$ називається *угнутою (строго угнутою)*, якщо $-f$ опукла (строго опукла) на S .

Наведемо геометричну інтерпретацію сформульованих понять. Нехай x_1 і x_2 — дві різні точки з області ефективності функції f (областю ефективності функції $f(x)$ називається частина області означення $f(x)$, у якій $|f(x)| < \infty$). Розглянемо точку $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, де $\lambda \in (0,1)$. Зауважимо, що $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ дає середнєзважене значення функцій $f(x_1)$ і $f(x_2)$, а $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$ — значення f у середній точці $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Таким чином, для опуклої функції значення f в точках відрізка, що з'єднує x_1 і x_2 , не перевищує середнєзваженого (з тим самим λ) значення величин $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Для угнутої функції відповідний відрізок лежить нижче графіка функції. На рис. 1.28 наведені приклади опуклої і угнутої функцій. Функція, зображена на рис. 1.28,а є опуклою, на рис. 1.28,б — угнутою, на рис. 1.28,в — функція не є ні опуклою, ні угнутою.

Прикладами опуклих функцій є такі функції:

$$f_1(x) = 3x + 4,$$

$$f_2(x) = |x|,$$

$$f_3(x) = x^2 - 2x,$$

$$f_4(x) = -x^{\frac{1}{2}}, \text{ якщо } x \geq 0,$$

$$f_5(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2,$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 - 4x_2 x_3.$$

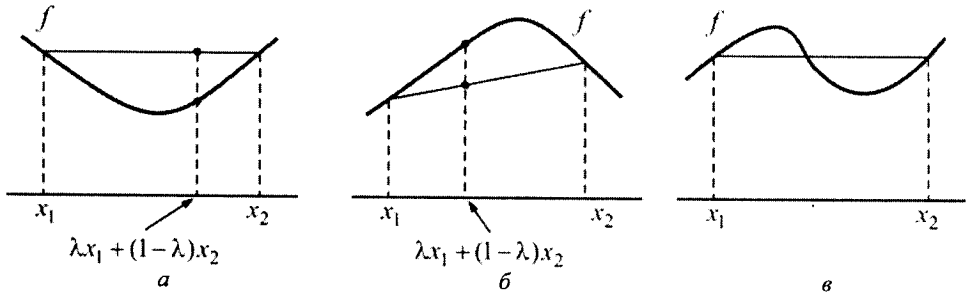


Рис. 1.28

Узявши ці функції із знаком мінус, матимемо приклади угнутих функцій. Всі $f_i(x)$, крім $f_4(x)$, опуклі усюди в R_n . Функція $f_4(x)$ не визначена при $x < 0$. Неважко побудувати приклади, коли функція f опукла не у всьому просторі, а тільки в деякій області. Зокрема, $f(x) = x^3$ опукла в $S = \{x : x \geq 0\}$, але в R_1 не є опуклою.

Оскільки f угнута тоді і тільки тоді, коли $-f$ опукла, всі отримані далі результати можна легко перенести на випадок угнутих функцій.

Поставимо у відповідність функції f множину $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$, яка звичайно називається *множиною рівня*. Наступна лема показує, що S_α опукла при будь-якому дійсному α .

Лема 1. Хай S – непорожня опукла множина в R_n , $f : S \rightarrow R_1$ – опукла функція. Тоді множина $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ є опуклою при довільному дійсному α .

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in S_\alpha$, тобто $x_1, x_2 \in S$ і $f(x_1) \leq \alpha$, $f(x_2) \leq \alpha$. Візьмемо довільне $\lambda \in (0, 1)$ і розглянемо точку $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Через опуклість S точка x належить S . Оскільки функція f опукла, то

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

Отже, $x \in S_\alpha$, тобто S_α – опукла множина.

Важливою властивістю опуклих і угнутих функцій є їх неперервність всередині області ефективності. Приймемо без доведення таку теорему

Теорема 1.6. Нехай S – непорожня опукла множина в R_n , $f : S \rightarrow R_1$ – опукла функція. Тоді f неперервна у внутрішніх точках множини S .

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Слід зазначити, що опуклі і угнуті функції можуть не бути неперервними всюди в S . Проте, як випливає з теореми 1.5, точки розриву можуть знаходитися тільки на межі множини S . Як ілюстрацію цього твердження можна розглянути функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 2 & \text{при } |x| = 1 \end{cases}$$

на множині $S = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$.

Будь-яка функція f , визначена на множині S , може бути повністю задана множиною $\{(x, f(x)) : x \in S\} \subset R_{n+1}$, яка називається *графіком* функції. Можна побудувати дві множини, пов'язані з графіком функції f : надграфік, або епіграф f , що складається зі всіх точок, розташованих не нижче за графік f , і підграфік, або гіпограф, що складається зі всіх точок, розташованих не вище за графік f .

Означення. Нехай S – непорожня множина в R_n , $f : S \rightarrow R_1$. *Надграфіком* функції f , що позначається $\text{epi } f$, називається така множина з R_{n+1} :

$$\{(x, y) : x \in S, y \in R_1, y \geq f(x)\}.$$

Підграфіком функції f , що позначається $\text{hyp } f$, називається множина з R_{n+1} :

$$\{(x, y) : x \in S, y \in R_1, y \leq f(x)\}.$$

На рис. 1.29 зображені надграфіки і підграфіки різних функцій. На рис. 1.29,а ні надграфік, ні підграфік не є опуклими множинами. На рис. 1.29,б і 1.29,в опуклі відповідно надграфік і підграфік. Звідси напрашується висновок, що функція опукла тоді і тільки тоді, коли її надграфік є опуклою множиною. Так само функція угнута тоді і тільки тоді, коли її підграфік – опукла множина. Сформулюємо таку теорему.

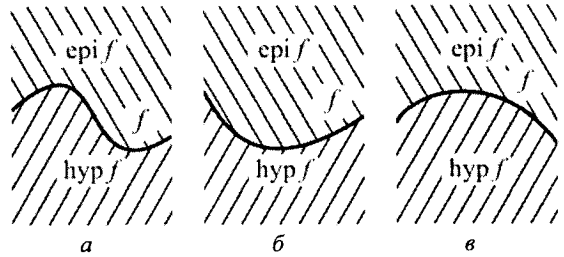


Рис. 1.29

Теорема 1.7. Нехай S – непорожня опукла множина в R_n , $f : S \rightarrow R_1$. Для того, щоб функція f була опуклою, необхідно і достатньо, щоб $\text{epi } f$ був опуклою множиною.

Ця теорема може бути використана для перевірки опуклості або угнутості заданої функції f . Зокрема, застосовуючи теорему, легко встановити, що функція, наведена на рис. 1.29,а, не є ні опуклою, ні угнутою, функція, наведена на рис. 1.29,б, не угнута, а на рис. 1.29,в – не опукла.

Розглянемо функцію $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, яка набуває у точках R_n або скінченних значень, або значення $+\infty$. Множина точок $(n+1)$ -вимірному простору R_{n+1} з

координатами x^1, x^2, \dots, x^n, y , визначеними умовою $y \geq f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ є надграфіком функції $f(x)$. Множину точок R_n , для яких $f(x) < +\infty$, називають ефективною множиною і позначають $\text{dom}f$. Вважатимемо, що множина $\text{dom}f$ є не пустою підобластю R_n , у всіх точках $\text{dom}f$ функція $f(x)$ неперервна і $f(x)$ обмежена знизу на $\text{dom}f$.

Умови $\text{epi}f$ – опукла множина і $f(x)$ – опукла функція є еквівалентними. Із неперервності $f(x)$ випливає, що $\text{epi}f$ – замкнена множина. Якщо $f(x)$ – опукла функція, то $\text{dom}f$ – опукла множина.

Якщо опукла функція задана на деякій опуклій множині $V \subset R_n$, то її можна поширити на весь простір R_n зі збереженням опуклості, прийнявши $f(x) = +\infty$ поза V .

Прикладами опуклих функцій є також функції $e^{\alpha x}$, лінійна функція $a_i x^i$, додатно визначена квадратична форма $a_{ij} x^i x^j$, однорідна функція першого степеня $\sqrt{a_{ij} x^i x^j}$, функції

$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & x > 0, \\ +\infty, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^p, & 0 \leq x, 1 \leq p < +\infty, \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Над опуклими функціями є деякі операції, які зберігають опуклість.

1. Лінійна комбінація $a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x)$ опуклих функцій $f_1(x), \dots, f_m(x)$ з додатними коефіцієнтами є опукла функція.

2. Суперпозиція $\varphi(f(x))$, де $\varphi(y)$ – неспадна опукла функція однієї змінної, $f(x)$ – опукла функція, є опуклою функцією.

3. Функція

$$f(x) = \inf_{x=x_1+\dots+x_m} (f_1(x_1) + \dots + f_m(x_m)),$$

де $f_1(x), \dots, f_m(x)$ – опуклі функції, $x \in R_n$, також опукла. Вона називається конволюцією f_1, \dots, f_m і позначається $f_1(x) \oplus \dots \oplus f_m(x)$. Термін конволюція пов'язаний з тим, що для двох функцій операція нагадує інтегральну згортку.

4. Поточкова верхня грань декількох опуклих функцій

$$f(x) = \sup(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

є опуклою функцією.

Зручним критерієм опуклості є таке твердження.

Лема 2. Для того, щоб диференційовна функція $f(x)$, $x \in R_n$, була опуклою необхідно і достатньо, щоб для будь-яких двох точок x_1 і x_2 виконувалася нерівність

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$0 \leq \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_2} \right) (x_1^i - x_2^i). \quad (1.55)$$

Доведення. Доведення проведемо при додатковому припущенні, що f є двічі неперервно диференційовна функція.

Необхідність. Розглянемо опуклу двічі диференційовну функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$:

$$\varphi\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(\tau_1) + \varphi(\tau_2)). \quad (1.56)$$

Позначимо у (1.56) $\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, $\Delta\tau = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)$. Вважаючи $\Delta\tau$ малим, розкладемо праву частину у ряд по $\Delta\tau$ і утримаємо члени до другого порядку малості включно:

$$\varphi(\tau) \leq \frac{1}{2} \left(\varphi(\tau) - \frac{d\varphi}{d\tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} (\Delta\tau)^2 + \varphi(\tau) + \frac{d\varphi}{d\tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} (\Delta\tau)^2 \right).$$

Звідси $0 \leq d^2\varphi/d\tau^2$. Тому похідна опуклої функції $\varphi(\tau)$ монотонно зростає.

Розглянемо функцію $\varphi(\tau) = f(x^i + \tau y^i)$ однієї змінної τ . Функція $\varphi(\tau)$ опукла. Оскільки $d\varphi/d\tau|_{\tau=0} \leq d\varphi/d\tau|_{\tau=1}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_x y^i \leq \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x+y} y^i. \quad (1.57)$$

Прийнявши у (1.57) $x = x_1$, $y = x_2 - x_1$ матимемо (1.55).

Достатність. Нехай справджується (1.55). Для деякого $0 < \alpha < 1$ розглянемо вираз

$$\Delta = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Перепишемо Δ у вигляді

$$\Delta = \alpha (f(x) - f(x + (1 - \alpha)(y - x))) + (1 - \alpha)(f(y) - f(y + \alpha(x - y))).$$

Застосуємо теорему Лагранжа про скінченні прирости.

$$\Delta = -\alpha \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x + \tau_1(1 - \alpha)(y - x)} (1 - \alpha)(y^i - x^i) - (1 - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x + \tau_2\alpha(y - x)} \alpha(x^i - y^i).$$

Тут $0 \leq \tau_1 \leq 1$, $0 \leq \tau_2 \leq 1$. Приймемо $x_1 = x + \tau_1(1 - \alpha)(y - x)$, $x_2 = y + \tau_2\alpha(x - y)$.

Оскільки $x_1 - x_2 = (x - y)[(1 - \tau_1)(1 - \alpha) + (1 - \tau_2)\alpha]$ і вираз у квадратних дужках більший нуля, то

$$\Delta[(1 - \tau_1)(1 - \alpha) + (1 - \tau_2)\alpha] = \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_2} \right) (x_1^i - x_2^i).$$

З урахуванням (1.55) величина $\Delta \geq 0$, що і доводить опуклість $f(x)$.

Умова строгої опуклості диференційовної функції $f(x)$ еквівалентна строгій нерівності

$$0 < \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_2} \right) (x_1^i - x_2^i) \text{ при } |x_1 - x_2| \neq 0. \quad (1.58)$$

Для застосувань особливо корисним є наступний критерій опуклості, який безпосередньо впливає із леми 2.

Лема 3. Для того, щоб двічі неперервно диференційовна функція була опуклою у деякій опуклій області, необхідно і достатньо, щоб у кожній точці x цієї області була невід'ємною квадратична форма

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \bar{x}^i \bar{x}^j \geq 0. \quad (1.59)$$

Доведення. Вважаючи у (1.55) $x_2^i = x_1^i + \varepsilon \bar{x}^i$ і спрямовуючи ε до нуля, дістанемо, що (1.59) є необхідною умовою опуклості. Навпаки, нехай (1.59) справджується. Тоді

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 f(x^k + t \bar{x}^k)}{\partial x^i \partial x^j} \bar{x}^i \bar{x}^j dt \geq 0.$$

Цей інтеграл можна записати у вигляді

$$0 \leq \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(x^k + t \bar{x}^k)}{\partial x^i} \bar{x}^i \right) dt = \left(\frac{\partial f(x^k + \bar{x}^k)}{\partial x^k} - \frac{\partial f(x^k)}{\partial x^k} \right) \bar{x}^k. \quad (1.60)$$

Вважаючи $\bar{x}^k = x_2^k - x_1^k$, $x^k = x_1^k$ із (1.60) отримаємо (1.55).

1.14.3. Перетворення Лежандра

Візьмемо у R_n двічі неперервно диференційовну функцію $f(x)$ і розглянемо систему нелінійних рівнянь відносно x^i

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = x_i^*, \quad (1.61)$$

де x_i^* – задані числа. Якщо для деяких значень x_i^* розв'язок системи рівнянь (1.61)

є x^i і у точці x^i гессіан $\left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \right|$ відмінний від нуля, то за теоремою про неявні

функції існує окіл O цієї точки, у якому між x^i і x_i^* є взаємно однозначна і неперервно диференційована відповідність

$$x^i = x^i(x_i^*). \quad (1.62)$$

Розглянемо величину

$$f^x = x_k^* x^k - f(x). \quad (1.63)$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Вважатимемо, що у (1.63) x^i виражені через x_k^* за допомогою співвідношень (1.62). Тоді f^\times буде функцією x_k^* . Як вже зазначалося, вона називається перетворенням Лежандра функції $f(x)$.

Приклад 1.33. Обчислимо перетворення Лежандра квадратичної функції

$$f(x) = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j.$$

Система рівнянь (1.61) набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{1}{2} a_{ij} x^j = x_i^*. \quad (1.64)$$

Вважатимемо, що $\det \|a_{ij}\| \neq 0$. Тоді розв'язок рівнянь (1.64) запишеться у формі

$$x^i = a^{(-1)ij} x_j^*.$$

Для $f^\times(x^*)$ отримаємо

$$f^\times(x^*) = x_i^* x^i - \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j = \frac{1}{2} x_i^* x^j = \frac{1}{2} a^{(-1)ij} x_i^* x_j^*.$$

Див. приклад 1.32, п. 1.13.

Приклад 1.34. Нехай $f(x) = \frac{1}{p} |x|^p$, $p > 1$. Легко впевнитися, що

$$f^\times(x^*) = \frac{1}{q} |x^*|^q, \text{ де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (приклад 1.28, п. 1.13).}$$

$$\text{Якщо } f(x) = \frac{a}{p} |x|^p, \text{ } a > 0, \text{ то } f^\times = a^{1-q} \frac{1}{q} |x^*|^q.$$

Для функції $f = \frac{a}{p} (x_i x^i)^{\frac{p}{2}}$ перетворення Лежандра задається формулою

$$f^\times = a^{1-q} \frac{1}{q} (x_i^* x^{*i})^{\frac{q}{2}}.$$

За побудовою перетворення Лежандра визначене лише у малому околі точки x . Однак, якщо функція є строго опуклою у R_n , то перетворення Лежандра можна зробити у всіх точках R_n . Справді, між $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ і x^i існує взаємно однозначна

відповідність: із припущення, що існують дві різні точки x_1 і x_2 , у яких значення

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \text{ однакові, випливає } \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_2} \right) (x_1^i - x_2^i) = 0, \text{ що суперечить (1.58).}$$

Приклад 1.33 свідчить, що функція $f(x)$ може бути не опуклою (якщо матриця a_{ij} має як додатні, так і від'ємні власні значення), однак перетворення Лежандра визначено у всьому просторі R_n .

Приклад 1.35. Розглянемо функцію $f(x) = |x|$. Рівняння (1.61) має вигляд $\pm 1 = x^*$ і однозначно нерозв'язне. Для функції $|x|$ перетворення Лежандра не має сенсу.

Приклад 1.36. Перетворення Лежандра не визначено для довільної функції першого степеня однорідності, оскільки для неї тотожно $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right| = 0$. Справді, диференціюючи по x^i тотожність Ейлера для однорідної функції першого степеня

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = f,$$

дістанемо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^j = 0. \quad (1.65)$$

Рівність (1.65) означає, що рядки матриці $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\|$ лінійно залежні і тому

$$\det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\| = 0.$$

Відсутність однозначної розв'язності можна бачити безпосередньо із системи рівнянь (1.61) на прикладі функції $f = \sqrt{x_i x^i}$. Для цієї функції

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x^k}} = x_i^*. \quad (1.66)$$

Із (1.66) випливає, що x_i^* лежать на сфері одиничного радіусу $x_i^* x^{*i} = 1$, тому між x^i і x_i^* не може бути взаємно однозначної відповідності.

1.14.4. Перетворення Юнга-Фенхеля

Розглянемо у R_n функцію $f(x)$ і побудуємо функцію $f^*(x^*)$ за правилом

$$f^*(x^*) = \sup_x (x_i^* x^i - f(x)). \quad (1.67)$$

Функція $f^*(x^*)$ називається *перетворенням Юнга-Фенхеля* функції $f(x)$. Означення (1.67) можна переписати також у вигляді

$$-f^*(x^*) = \inf_x (f(x) - x_i^* x^i). \quad (1.68)$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Рівність (1.68) має простий геометричний зміст. Побудуємо у R_{n+1} графік функції $f(x)$: $y = f(x)$ і графік лінійної функції $y = x_i^* x^i$ (рис. 1.30). Величина $-f^*(x^*)$ є мінімальною відстанню між ними по вертикалі.

Нехай функція $f(x)$ строго опукла і диференційовна. Тоді нижня грань у (1.68) досягається у єдиній точці, і у цій точці

$$f^* = x_i^* x^i - f(x), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = x_i^*.$$

Отже, для строго опуклих диференційовних функцій перетворення Юнга-Фенхеля збігається з перетворенням Лежандра. Але перетворення Юнга-Фенхеля визначене і для функцій, для яких перетворення Лежандра може не мати сенсу.

Приклад 1.37. Розглянемо перетворення Юнга-Фенхеля функції $f(x) = |x|$. Обчислимо $\inf(|x| - x^* x)$. З рис. 1.31 видно, що $\inf(|x| - x^* x) = 0$ при $-1 < x^* < 1$ і досягається при $x = 0$. При $x^* = \pm 1$ $\inf(|x| - x^* x) = 0$ і досягається відповідно на додатній і від'ємній півосях. При $x^* < -1$ і $x^* > +1$ функція $|x| - x^* x$ прямує до $-\infty$ відповідно при $x \rightarrow -\infty$ і $x \rightarrow +\infty$. Отже,

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & |x^*| \leq 1, \\ +\infty, & |x^*| > 1. \end{cases}$$

Символічний графік функції f^* зображений на рис. 1.32.

Приклад 1.38. Аналогічно будується перетворення Юнга-Фенхеля однорідної функції першого степеня виду $f = \sqrt{x_i x^i}$:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & x_i^* x^{*i} \leq 1, \\ +\infty, & 1 < x_i^* x^{*i}. \end{cases}$$

Приклад 1.39. Розглянемо перетворення Юнга-Фенхеля опуклої ламаної. Якщо $f(x)$ – опукла ламана, то в результаті її перетворення Юнга-Фенхеля дістанемо також

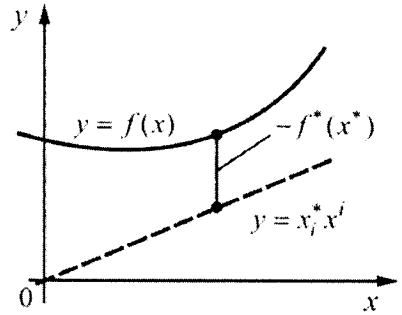


Рис. 1.30

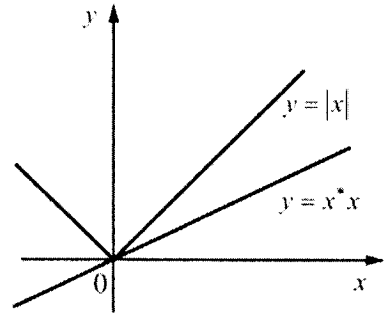


Рис. 1.31

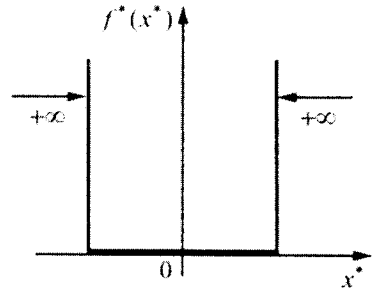


Рис. 1.32

опуклу ламану. При цьому вершини $f(x)$ переходять у відрізки $f^*(x^*)$, а відрізки $f(x)$ – у вершини $f^*(x^*)$.

Розглянемо, наприклад, вершину ламаної, зображену на рис. 1.33. Вершина визначається своїми координатами (x_0, y_0) і кутовими коефіцієнтами x_1^* і x_2^* , що задають напрями півпрямих l_1 і l_2 . Пунктирними лініями на рисунку зображені прямі $y = x_1^*x$ і $y = x_2^*x$, які позначені своїми кутовими коефіцієнтами. При перетворенні Юнга-Фенхеля ця вершина переходить у відрізок, зображений на рис. 1.34.

Справді, при $x^* < x_1^*$ пряма $y = x^*x$ перетинається з півпрямною l_1 і значення величини $x^*x - f(x)$ прямує до $+\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 1.35,а). Так само, при $x^* > x_2^*$ $x^*x - f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 1.35,б).

При $x^* = x_1^*$ пряма $y = x^*x$ паралельна півпрямій l_1 , $f^*(x^*) = x_1^*x_0 - y_0 < 0$ і досягається при $x \leq x_0$ (рис. 1.35,в). Отже, півпрямій l_1 відповідає точка 1 на рис. 1.34. Аналогічно, при $x^* = x_2^*$ пряма $y = x^*x$ паралельна l_2 , $f^*(x^*) = x_2^*x_0 - y_0 > 0$ і досягається при $x \geq x_0$ (рис. 1.35,г). Прямій l_2 відповідає точка 2 на рис. 1.34.

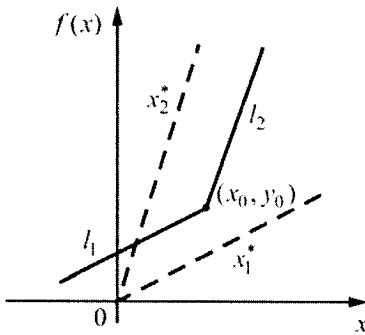


Рис. 1.33

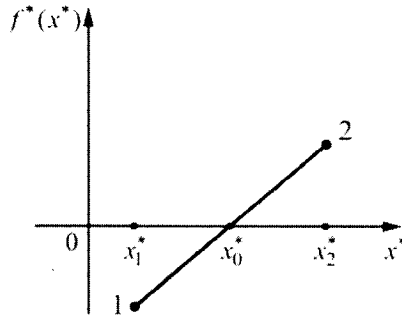


Рис. 1.34

Якщо $x_1^* < x^* < x_2^*$, значення $f^*(x^*)$ визначається віддаленістю вершини (x_0, y_0) від прямої $y = x^*x$, $f^*(x^*) = x^*x_0 - y_0$ і зростає із збільшенням x^* . Позначимо через x_0^* – кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через початок координат і вершину (x_0, y_0) . При $x_1^* < x^* < x_0^*$, $f^*(x^*) < 0$ (рис. 1.35,д), при $x^* = x_0^*$, $f^*(x^*) = 0$ (рис. 1.35,е), при $x_0^* < x^* < x_2^*$, $f^*(x^*) > 0$ (рис. 1.35,ж).

Отже, кут, зображений на рис. 1.33, при перетворенні Юнга-Фенхеля переходить у відрізок, що з'єднає точку 1 і точку 2 (рис. 1.34).

Перетворення Юнга-Фенхеля має цікаві властивості.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

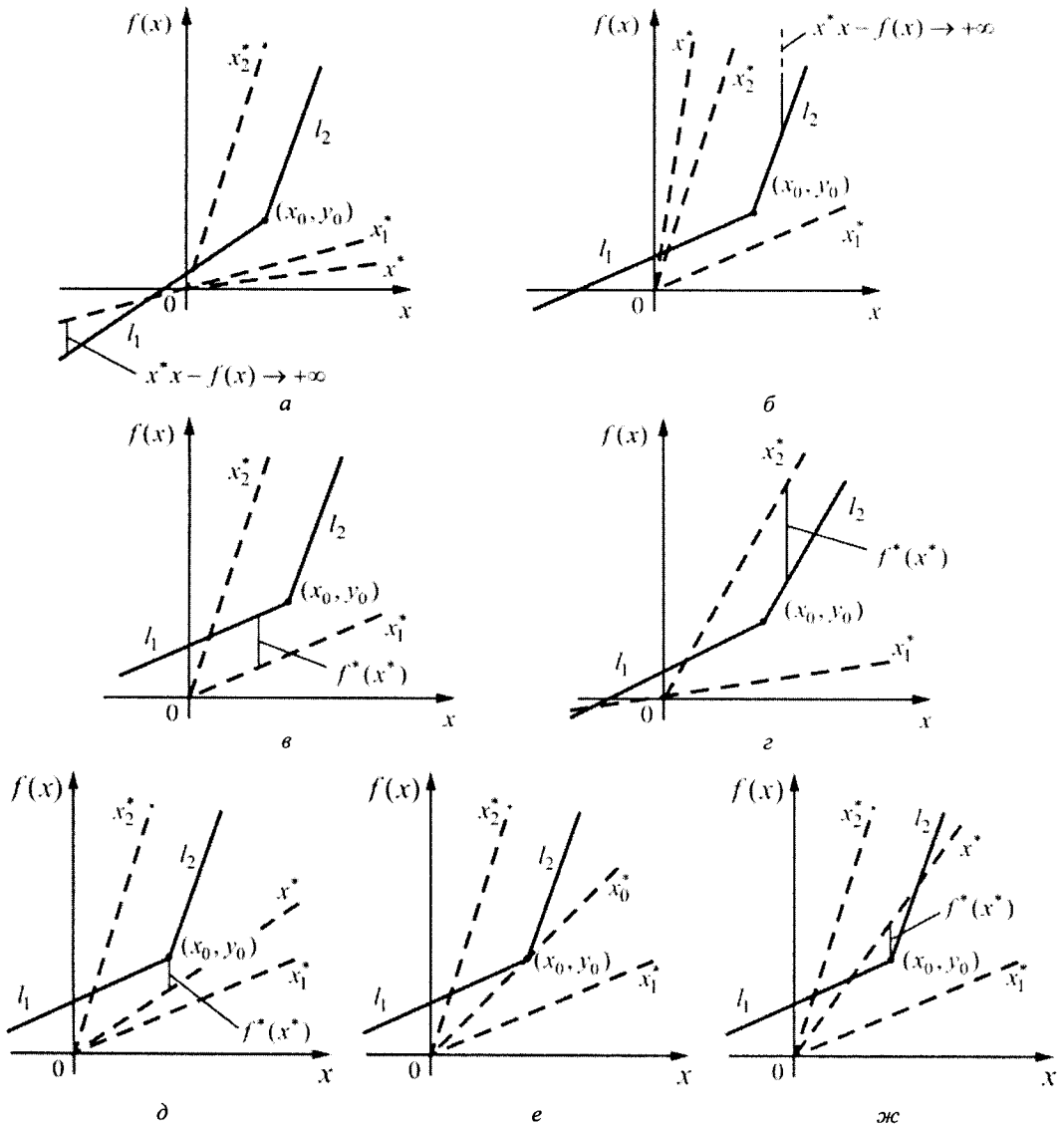


Рис. 1.35

1. Для будь-якої функції $f(x)$ перетворення Юнга-Фенхеля є опукла функція.

Доведення. Розглянемо функцію $f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*)$, $0 \leq \alpha \leq 1$. За означенням (1.67)

$$\begin{aligned} f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*) &= \sup_x [\alpha x_i^* + (1-\alpha)z_i^* x^i - f(x)] = \\ &= \sup_x [\alpha(x_i^* x^i - f(x)) + (1-\alpha)(z_i^* x^i - f(x))]. \end{aligned}$$

Використаємо тепер оцінку $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Дістанемо

$$f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*) \leq \alpha \sup_x (x_i^* x^i - f(x)) + (1-\alpha) \sup_x (z_i^* x^i - f(x)) = \\ = \alpha f^*(x^*) + (1-\alpha) f^*(z^*),$$

що треба було довести.

2. Для будь-якої функції $f(x)$ і довільних x і x^* справедлива нерівність

$$x_i^* x^i \leq f(x) + f^*(x^*). \quad (1.69)$$

Ця нерівність безпосередньо впливає із означення (1.67). Її називають *нерівністю Юнга-Фенхеля*.

Позначимо через $f^{**}(x)$ перетворення Юнга-Фенхеля функції $f^*(x^*)$.

3. Для будь-якої функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$f^{**}(x) \leq f(x). \quad (1.70)$$

Доведення. Запишемо означення $f^{**}(x)$ через $f(x)$:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*} (x^i x_i^* - f^*(x^*)) = \sup_{x^*} (x^i x_i^* + \inf_z (f(z) - x_i^* z^i)).$$

Збільшимо \inf_z , замінивши його значенням функції $f(z) - x_i^* z^i$ у точці $z^i = x^i$. Тоді

$$f^{**}(x) \leq \sup_{x^*} f(x) = f(x).$$

4. Для того, щоб мала місце рівність

$$f^{**}(x) = f(x), \quad (1.71)$$

необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була опуклою і напівнеперервною знизу.

Доведення проведемо у випадку неперервних функцій $f(x)$.

Необхідність. Якщо $f^{**}(x) = f(x)$, то за властивістю 1 $f(x)$ опукла.

Достатність. Нехай $f(x)$ опукла. Відповідно до властивості 3 $f^{**}(x) \leq f(x)$.

Припустимо, що знайдеться точка x_0 , для якої

$$f^{**}(x_0) < f(x_0). \quad (1.72)$$

Побудуємо лінійну функцію $l(x)$ таку, що $l(x_0) > f^{**}(x_0)$ і $f(x) > l(x)$ (рис. 1.36)¹.

Запишемо $l(x)$ у вигляді

$$l(x) = l(x_0) + z_i^* (x^i - x_0^i).$$

Оскільки

¹ Існування такої функції гарантується теоремою відділюваності: для довільної замкненої опуклої множини M у скінченновимірному просторі і довільної точки A , що не належить M , знайдеться площина, що їх розділяє, або, інакше, знайдеться лінійний функціонал $l(x)$, який приймає додатні значення на M і від'ємне значення у точці A . Цю теорему слід застосувати у R_{n+1} до опуклої множини $\text{epi } f$ і точки $(x_0, f^{**}(x_0))$.

$$f(x) > l(x) = l(x_0) + z_i^*(x^i - x_0^i) > f^{**}(x_0) + z_i^*(x^i - x_0^i),$$

маємо

$$z_i^* x^i - f(x) < z_i^* x^i - f^{**}(x_0).$$

Звідси

$$f^*(x^*) = \sup_{x^*} (z_i^* x^i - f(x)) < z_i^* x_0^i - f^{**}(x_0). \quad (1.73)$$

Нерівність (1.73) суперечить нерівності Юнга-Фенхеля для функцій $f^*(x)$ і $f^{**}(x)$

$$x_i^* x^i \leq f^*(x^*) + f^{**}(x).$$

Тому вихідне припущення є невірним і $f^{**}(x) = f(x)$ для всіх x .

5. Для довільної (не обов'язково опуклої) функції $f(x)$ функція $f^{**}(x)$ є максимальна опукла функція, що не перевищує $f(x)$.

Максимальну опуклу функцію можна знайти таким чином: слід взяти графік епі f функції f (на рис. 1.37 надграфік заштрихований) і побудувати максимальну опуклу множину, яка містить епі f , вона і буде надграфіком максимальної опуклої функції, що не перевищує f . Отже, функцію $f^{**}(x)$ отримуємо після «заклеювання» всіх областей неопуклості функції $f(x)$.

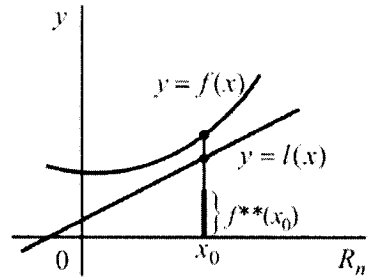


Рис. 1.36

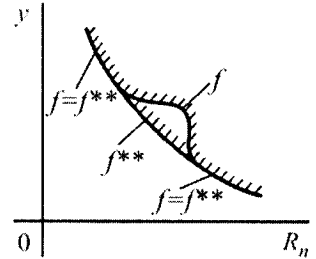


Рис. 1.37

Доведення наведемо для неперервної функції $f(x)$. Позначимо через $\tilde{f}(x)$ максимальну опуклу функцію, що не перевищує $f(x)$, і покажемо, що $\tilde{f}^* = f^*$. Зафіксуємо яку-небудь точку x^* . Оскільки $\tilde{f}(x) \leq f(x)$, то $\tilde{f}^*(x^*) \geq f^*(x^*)$. Тому, якщо $f^*(x^*) = +\infty$ то і $\tilde{f}^*(x^*) = +\infty$ і $\tilde{f}^*(x^*) = f^*(x^*)$.

Нехай тепер значення функції f^* у точці x^* є скінченним. За означенням

$$-f^*(x^*) = \inf_x (f(x) - x_i^* x^i).$$

Позначимо точку, у якій досягається \inf (таких точок може бути багато) через x_0 (рис. 1.38), тоді

$$-f^*(x^*) = f(x_0) - x_i^* x_0^i. \quad (1.74)$$

Із нерівності Юнга-Фенхеля $x_i^* x^i - f^*(x^*) \leq f(x)$ і (1.74) випливає, що

$$x_i^* (x^i - x_0^i) + f(x_0) \leq f(x). \quad (1.75)$$

Покажемо, що $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$. Припустимо протилежне:

$$\tilde{f}(x_0) < f(x_0). \quad (1.76)$$

Згідно з (1.76) значення опуклої функції $\tilde{f}(x)$ у точці x_0 менше, ніж значення у цій точці лінійної функції $x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$. Тому знайдеться область D , у якій $\tilde{f}(x) < x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$, і $\tilde{f}(x) \geq x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$ поза D .

Побудуємо опуклу функцію

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \begin{cases} x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0), & x \in D \\ \tilde{f}(x), & x \notin D. \end{cases}$$

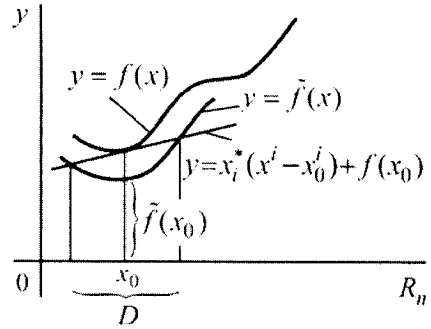


Рис. 1.38

Із (1.75) і нерівності $\tilde{f}(x) \leq f(x)$ випливає,

що $\tilde{\tilde{f}}(x) \leq f(x)$. Крім того, $\tilde{f}(x) < \tilde{\tilde{f}}(x)$ в D . Це суперечить тому, що \tilde{f} – максимальна опукла функція, що не перевищує f .

Аналогічно доводиться, що графік функції $\tilde{f}(x)$ не може знаходитися нижче прямої $y = x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$.

Оскільки

$$\begin{aligned} -\tilde{f}^* &= \inf_x (\tilde{f}(x) - x_i^* x^i) \geq \inf_x (x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0) - x_i^* x^i) = f(x_0) - x_i^* x_0^i = -f^*(x^*), \\ -\tilde{f}^* &= \inf_x (\tilde{f}(x) - x_i^* x^i) \leq \inf_x (f(x) - x_i^* x^i) = -f^*(x^*), \end{aligned}$$

маємо

$$\tilde{f}^*(x^*) = f^*(x^*).$$

Застосовуючи до цієї рівності перетворення Юнга-Фенхеля, дістанемо $\tilde{f}^{**} = \tilde{f} = f^{**}$, що треба було довести.

Перетворення Юнга-Фенхеля дозволяє представити опуклу функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sup_{x^*} (x_i^* x^i - f^*(x^*)). \quad (1.77)$$

Якщо $f(x)$ не є опуклою функцією, то за допомогою перетворення Юнга-Фенхеля будеється найкраща оцінка $f(x)$ знизу опуклою функцією

$$f(x) \geq f^{**}(x) = \sup_{x^*} (x_i^* x^i - f^*(x^*)). \quad (1.78)$$

Нехай функція f залежить від змінних $y = (y_1, \dots, y_m)$ як від параметрів: $f = f(x, y)$. Тоді її перетворення Юнга-Фенхеля f^* по x також буде залежати від

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

параметрів y : $f^* = f^*(x^*, y)$. Що можна стверджувати про залежність f^* від y ?
Справедливе таке твердження.

6. Якщо функція $f = f(x, y)$ лінійно залежить від y , то перетворення Юнга-Фенхеля цієї функції по x є опуклою функцією y .

Доведення. Розглянемо функцію f^* у точці $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Маємо

$$\begin{aligned} f^*(x^*, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) &= \sup_{x^i} [x_i^* x^i - f(x, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)] = \\ &= \sup_{x^i} [x_i^* x^i - \alpha f(x, y_1) - (1 - \alpha)f(x, y_2)] = \\ &= \sup_{x^i} [\alpha(x_i^* x^i - f(x, y_1)) + (1 - \alpha)(x_i^* x^i - f(x, y_2))] \leq \alpha f^*(x^*, y_1) + (1 - \alpha)f^*(x^*, y_2), \end{aligned}$$

що і треба було довести.

З цієї майже очевидної властивості перетворення Юнга-Фенхеля випливають нетривіальні наслідки.

Приклад 1.40. Покажемо, що для симетричних додатно визначених матриць діагональні компоненти оберненої матриці є опуклими функціями компонент матриці. Візьмемо за f додатно визначену квадратичну форму $f = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j$. Тоді

$$f^*(x^*) = \frac{1}{2} a^{(-1)ij} x_i^* x_j^*, \text{ де } a^{(-1)ij} \text{ — компоненти матриці, оберненої до матриці } a_{ij}.$$

Функція f лінійно залежить від параметрів a_{ij} . Як було встановлено, f^* — опукла функція a_{ij} . Прийmemo $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, ..., $x_n^* = 0$. Тоді $2f^* = a^{(-1)11}$ — опукла функція від a_{ij} . Цю ж властивість мають $a^{(-1)22}$, ..., $a^{(-1)nn}$, а також всі лінійні комбінації $a^{(-1)ij}$, які можна отримати при різних наборах x_i^* .

1.15. Теорема Нетер

У п.1.12 показано, що система рівнянь Ейлера, яка відповідає функціоналу

$$\int_a^b F(y_i, y_i') dx, \quad (1.79)$$

де F не залежить явно від x , має перший інтеграл

$$H = \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'} - F.$$

Той факт, що F не залежить явно від x , рівносильний, очевидно, такому: якщо ввести нову змінну

$$x^* = x + \alpha, \quad (1.80)$$

то функція F , а тому і інтеграл (1.79) при цьому не зміниться. Отже, H є першим інтегралом системи рівнянь Ейлера тоді і лише тоді, коли функціонал $\int_a^b F dx$ не змінюється при перетворенні (1.80). Те що H є першим інтегралом *лише* тоді, випливає із формули $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$, отриманої у п.1.12, оскільки $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ тільки якщо $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

Покажемо, що зв'язок між першими інтегралами системи рівнянь Ейлера і інваріантністю функціонала відносно деяких перетворень змінних x і y_1, y_2, \dots, y_n існує також і у загальному випадку.

З'ясуємо перш за все поняття інваріантності функціонала відносно перетворення змінних. Нехай задано функціонал

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i') dx.$$

Розглянемо таке перетворення:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\}. \quad (1.81)$$

Це перетворення переводить деяку криву γ , задану рівняннями

$$y_i = \eta_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

у іншу криву γ^* , рівняння якої можна дістати, підставивши у рівності (1.81), що зв'язують x, y_i із x^*, y_i^* , замість y_1, y_2, \dots, y_n функції $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)$, які задають рівняння кривої γ , і виключивши x із отриманих таким чином $n+1$ рівностей. В результаті цієї операції матимемо n рівнянь виду

$$y_i^* = \eta_i^*(x^*),$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

які і будуть рівняннями кривої γ^* . Функціонал $v[\gamma]$ називається інваріантним відносно даного перетворення, якщо

$$v[\gamma] = v[\gamma^*],$$

тобто

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_i, \frac{dy_i}{dx}\right) dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} F\left(x^*, y_i^*, \frac{dy_i^*}{dx^*}\right) dx^*.$$

Наведемо найпростіші приклади.

Приклад 1.41. Функціонал

$$v[\gamma] = \int_a^b y'^2 dx$$

є інваріантним відносно перетворення

$$x^* = x + c, \quad y^* = y. \quad (1.82)$$

Дійсно, якщо крива γ задається рівнянням

$$y = \eta(x), \quad a \leq x \leq b,$$

то крива γ^* , отримана внаслідок перетворення, задається рівнянням

$$y^* = \eta(x^* - c) \equiv \eta^*(x^*), \quad a \leq x^* - c \leq b.$$

Маємо

$$v[\gamma^*] = \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{d\eta(x^*-c)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_a^b \left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx = v[\gamma].$$

Приклад 1.42. Інтеграл

$$v[\gamma] = \int_a^b xy'^2 dx$$

є функціоналом, не інваріантним стосовно перетворення (1.82). Справді, виконуючи такі самі дії як і в попередньому прикладі, дістанемо

$$\begin{aligned} v[\gamma^*] &= \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{d\eta(x^*-c)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \\ &= \int_a^b (x+c) \left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx = v[x] + c \int_a^b \left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Нехай задано сукупність оборотних перетворень змінних x, y_1, y_2, \dots, y_n , яка залежить від деякого параметра α :

$$x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha), \quad y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.83)$$

де функції φ_0 і φ_i диференційовні, а значенню $\alpha = 0$ відповідає тотожне перетворення, тобто

$$\varphi_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n, 0) \equiv x, \quad \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, 0) \equiv y_i.$$

Теорема 1.8 (Нетер). Кожному перетворенню виду (1.83), що залишає інтеграл (1.79) інваріантним, відповідає деякий перший інтеграл системи рівнянь Ейлера.

Вигляд цього першого інтеграла буде наведений нижче.

Доведення цієї теореми проведемо для частинного випадку перетворень виду

$$x^* = x, \quad y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha). \quad (1.83')$$

Вважаючи величину α нескінченно малою, матимемо

$$y_i^* - y_i = \varphi'_{i\alpha}(x, y_k, 0)\alpha + o(\alpha).$$

Позначимо

$$\left. \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \psi_i(x, y_k),$$

тобто

$$y_i^* - y_i = \alpha \psi_i + o(\alpha).$$

Вважаючи, що крива, яка визначається рівняннями

$$y_i = y_i(x),$$

є екстремаллю, напишемо вираз для варіації функціонала (1.79), що відповідає переходу від y_i до $y_i + \alpha \psi_i$. Використаємо отриману у п. 1.9 формулу для варіації (1.23). Враховуючи, що в нашому випадку x не варіюється, тобто $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, а $\delta y_i = \alpha \psi_i$, маємо

$$\delta v = \alpha \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Під δy_i тут розуміється головна лінійна відносно α частина приросту y_i , а не сам цей приріст. Легко бачити, що це не позначається на результаті, але дає можливість не враховувати малі вищих порядків.

Оскільки за умовою функціонал (1.79) є інваріантним відносно перетворення (1.83), то варіація δv цього функціонала, що відповідає $\delta y_i = \alpha \psi_i$, дорівнює нулю.

Прирівнюючи δv до нуля, дістанемо

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1} = 0,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x=x_1}.$$

Оскільки ця рівність справедлива для довільних точок x_0 і x_1 , то вздовж кожної екстремали

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i = \text{const},$$

тобто

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

Таким чином, по заданому перетворенню (1.81), що залишає функціонал (1.79) інваріантним, побудовано вираз, який вздовж кожної екстремалі залишається сталим, тобто побудовано деякий перший інтеграл системи рівнянь Ейлера. Теорему доведено.

Розглянемо тепер частинний випадок, коли підінтегральна функція F не залежить явно від x . Незалежність F від x означає, що інтеграл (1.79) є інваріантним відносно перетворення

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \alpha, \\ y_i^* &= y_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

Дійсно, воно переводить інтеграл

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx$$

у

$$\int_a^b F(x + \alpha, y_i, y_i') dx.$$

Ці два інтеграли рівні між собою тоді і лише тоді, коли F не залежить явно від x . Обчисливши варіацію функціонала (1.79), що відповідає перетворенню (1.84), матимемо

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) \delta y_i dx - H \cdot (-\alpha) \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Прирівнюючи цей вираз до нуля і розглядаючи його лише на кривих, що задовольняють рівняння Ейлера, дістанемо

$$H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_0} = H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_1},$$

тобто $H = \text{const}$ вздовж інтегральної кривої. Таким чином, ми знову маємо вже встановлений у п. 1.12 результат: для функціоналів, які явно не залежать від часу, функція H є першим інтегралом відповідної системи рівнянь Ейлера.

1.16. Достатні умови екстремуму

Якщо на площині xu через кожну точку деякої області D проходить одна і тільки одна крива сімейства $y = (x, C)$, то кажуть, що це сімейство кривих в області D є *полем*, або, точніше, *власним полем*. Кутовий коефіцієнт дотичної $p(x, y)$ до кривої сімейства $y = (x, C)$, що проходить через точку (x, y) , називається *нахилом поля* в точці (x, y) .

Наприклад, всередині кола $x^2 + y^2 \leq 1$ паралельні прямі $y = x + C$ утворюють поле і нахил цього поля $p(x, y) = 1$. Сімейство парабол $y = (x - a)^2 - 1$ всередині

того ж кола не є полем, оскільки всередині цього кола параболи сімейства перетинаються (рис. 1.39).

Якщо всі криві сімейства $y = (x, C)$ проходять через деяку точку (x_0, y_0) , тобто утворюють пучок кривих, то у разі коли центр пучка знаходиться в цій області, криві, очевидно, не утворюють власного поля в області D . Проте, якщо криві пучка покривають всю область D і ніде, крім центра пучка, в цій області не перетинаються, тобто у всіх точках, які не є

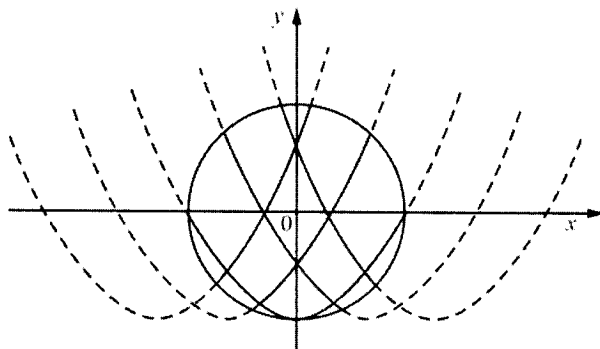


Рис. 1.39

центром пучка, виконуються вимоги, що накладаються на поле, то кажуть, що сімейство $y = (x, C)$ також утворює поле, але на відміну від власного поля таке поле називається *центральним* (рис. 1.40).

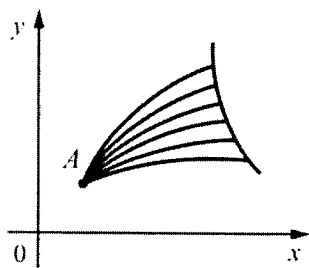


Рис. 1.40

Наприклад, пучок синусоїд $y = C \sin x$ у достатньо малому околі відрізка осі абсцис $0 \leq x \leq a$, $a < \pi$ є центральним полем (рис. 1.41). Той самий пучок синусоїд у достатньо малому околі відрізка осі абсцис $\delta \leq x \leq a$, $\delta > 0$, $a < \pi$ є власним полем (рис. 1.41). Той же пучок синусоїд у околі відрізка осі абсцис $0 \leq x \leq a_1$, $a_1 > \pi$ не є полем.

Якщо власне або центральне поле утворене сімейством екстремалей деякої варіаційної задачі, то

воно називається *полем екстремалей*.

Поняття поля майже без змін переноситься на випадок простору довільної кількості вимірів. Сімейство $y_i = (x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є полем в області D простору x, y_1, y_2, \dots, y_n , якщо через кожну точку в області D проходить одна і тільки одна крива сімейства $y_i = (x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Функціями нахилу поля $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) називають частинні похідні від функцій

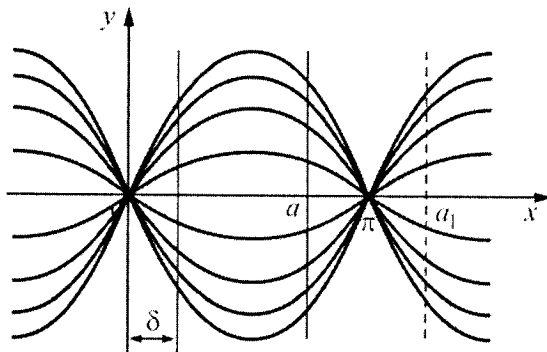


Рис. 1.41

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$y_i = (x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ по x , обчислені в точці $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Отже, щоб мати $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ треба знайти $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ і замінити C_1, C_2, \dots, C_n їх виразами через координати x, y_1, y_2, \dots, y_n . Аналогічно можна визначити і центральне поле.

Нехай крива $y = y(x)$ є екстремаллю варіаційної задачі про екстремум найпростішого функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

Вважатимемо, що граничні точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ нерухомі. Кажуть, що екстремаль $y = y(x)$ включена в поле екстремалей, якщо існує сімейство екстремалей $y = (x, C)$, що утворює поле в деякій області D , яке при певному значенні $C = C_0$ містить екстремаль $y = y(x)$ і ця екстремаль не лежить на границі області D (рис. 1.42). Якщо пучок екстремалей з центром у точці $A(x_0, y_0)$ в околі екстремалі $y = y(x)$, що проходить через цю точку, є полем, то він і є центральним полем, що включає дану екстремаль. За параметр сімейства в такому разі можна прийняти кутовий коефіцієнт дотичної до кривих пучка в точці $A(x_0, y_0)$ (рис. 1.43).

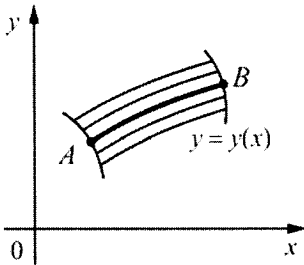


Рис. 1.42

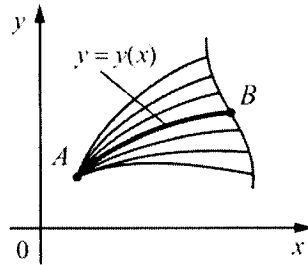


Рис. 1.43

Приклад 1.43. Дано функціонал

$$\int_0^a (y'^2 - y^2) dx.$$

Необхідно включити дугу екстремалі $y = 0$, яка з'єднує точки $(0, 0)$ і $(a, 0)$, де $0 < a < \pi$, в центральне поле екстремалей. Загальний розв'язок рівняння Ейлера $y'' + y = 0$ (приклад 1.1) має вигляд $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Із умови проходження екстремалей через точку $(0, 0)$ маємо $C_1 = 0$, $y = C_2 \sin x$, причому криві цього пучка на відрізку $0 \leq x \leq a$, $a < \pi$ утворюють центральне поле, яке при $C_2 = 0$ включає

екстремаль $y=0$. Параметр сімейства C_2 дорівнює похідній y'_x у точці $(0,0)$. Якщо в розглядуваній задачі прийняти $a \geq \pi$, то сімейство $y = C_2 \sin x$ полем не буде.

Відомо [31], що дві нескінченно близькі криві сімейства $F(x, y, C) = 0$ перетинаються в точках C -дискримінантної кривої, яка визначається рівняннями

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Нагадаємо, що до C -дискримінантної кривої, зокрема, належать обвідна сімейства і геометричні місця кратних точок сімейства. Якщо $F(x, y, C) = 0$ є рівнянням пучка кривих, то центр пучка також належить C -дискримінантній кривій. Тому, якщо для пучка екстремалей $y = y(x, C)$, що проходять через точку (x_0, y_0) , визначити його C -дискримінантну криву $\Phi(x, y) = 0$, то близькі криві сімейства $y = y(x, C)$ перетинатимуться поблизу кривої $\Phi(x, y) = 0$. Зокрема, криві цього сімейства, близькі до розглядуваної екстремалі $y = y(x)$, що проходить через точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, перетинатимуться в точках, близьких до точок дотику (або перетину) кривої $y = y(x)$ і C -дискримінантної кривої (рис. 1.44). Якщо дуга AB екстремалі $y = y(x)$ не має відмінних від точки A спільних точок з C -дискримінантною кривою пучка екстремалей, то достатньо близькі до дуги AB екстремалі пучка не перетинаються, тобто утворюють у околі дуги AB центральне поле, що включає цю дугу (рис. 1.45).

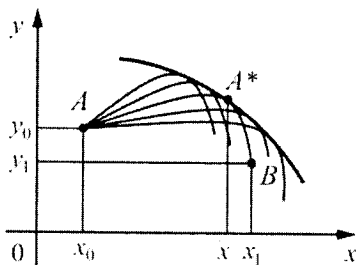


Рис. 1.44

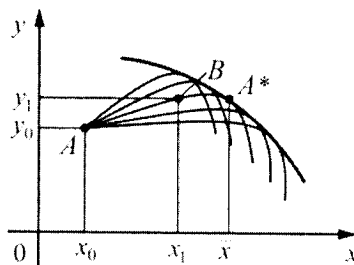


Рис. 1.45

Якщо дуга AB екстремалі $y = y(x)$ має відмінну від A спільну точку A^* із C -дискримінантною кривою пучка $y = y(x, C)$, то близькі до $y = y(x)$ криві пучка можуть перетинатися між собою і з кривою $y = y(x)$ поблизу точки A^* і, взагалі кажучи, поля не утворюють (рис. 1.44). Точка A^* називається *точкою, спряженою з точкою A* .

Отриманий результат можна сформулювати так: для побудови центрального поля екстремалей з центром у точці A , що містить дугу екстремалі AB , достатньо, щоб точка A^* , спряжена з точкою A , не лежала на дузі AB . Ця умова можливості побудови поля екстремалей, яке включає дану екстремаль, має назву умови Якобі.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Умову Якобі неважко сформулювати і аналітично. Нехай $y = y(x, C)$ – рівняння пучка екстремалей з центром у точці A . Для визначеності можна вважати, що параметр C співпадає з кутовим коефіцієнтом y' екстремалей пучка в точці A . C -дискримінантна крива визначається рівняннями

$$y = y(x, C), \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Вздовж кожної фіксованої кривої сімейства похідна $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ є функцією лише від x . Цю функцію позначимо літерою u : $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, де C задане; звідси $u'_x = \frac{\partial^2 y(x, C)}{\partial C \partial x}$. Функції $y = y(x, C)$ є розв'язками рівняння Ейлера, тому

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{d}{dx} F_{y'_x}(x, y(x, C), y'_x(x, C)) \equiv 0.$$

Після диференціювання цієї тотожності по C із урахуванням $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ дістанемо

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u') = 0$$

або

$$(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'})u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0.$$

У цьому поданні функції $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$ є відомими функціями від x , оскільки другий аргумент y є розв'язком рівняння Ейлера $y = y(x, C)$ при значенні $C = C_0$, що визначає екстремаль AB . Це лінійне однорідне рівняння другого порядку відносно u називається *рівнянням Якобі*.

Якщо розв'язок цього рівняння $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, що дорівнює нулю у центрі пучка при $x = x_0$ (центр пучка завжди належить C -дискримінантній кривій), дорівнює нулю ще в якій-небудь точці інтервалу $x_0 < x < x_1$, то спряжена із A точка, яка визначається рівняннями

$$y = y(x, C_0) \text{ і } \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \text{ або } u = 0,$$

лежить на дузі екстремалі AB . Зауважимо, що всі нетривіальні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, які задовольняють умову $u(x_0) = 0$, відрізняються один від одного лише відмінним від нуля сталим множником і тому перетворюються на нуль одночасно. Якщо існує розв'язок рівняння Якобі, який дорівнює нулю при $x = x_0$ і не дорівнює нулю у всіх інших точках відрізка $x_0 \leq x \leq x_1$, то точок, спряжених з A , на дузі AB немає, – умова

Якобі виконана, і дугу екстремалі AB можна включити в центральне поле екстремалей з центром у точці A .

Зауваження 2. Можна довести, що умова Якобі є необхідною для досягнення екстремуму, тобто для кривої AB , що реалізує екстремум, спряжена із A точка не може належати інтервалу $x_0 < x < x_1$.

Приклад 1.44. З'ясувати, чи виконується умова Якобі для екстремалі функціонала

$$\int_0^a (y'^2 - y^2) dx,$$

яка проходить через точки $A(0,0)$ і $B(a,0)$.

Рівняння Якобі має вигляд

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \text{ або } u'' + u = 0,$$

звідки

$$u = C_1 \sin(x - C_2).$$

Оскільки $u(0) = 0$, то $C_2 = 0$, $u = C_1 \sin x$. Функція u дорівнює нулю в точках $x = k\pi$, де k – ціле число, і тому, якщо $0 < a < \pi$, то на відрізку $0 \leq x \leq a$ функція u перетворюється у нуль тільки в точці $x = 0$ і умова Якобі виконується. Якщо $a \geq \pi$, то на відрізку $0 \leq x \leq a$ функція u дорівнює нулю ще хоча б в одній точці $x = \pi$ і умова Якобі не виконується (порівняти з прикладом 1.43).

Приклад 1.45. Чи виконується умова Якобі для екстремалі функціонала

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx,$$

яка проходить через точки $A(0,0)$ і $B(a,0)$?

Рівняння Якобі має вигляд $u'' - u = 0$. Його загальний розв'язок подамо у формі

$$u = C_1 \sinh x + C_2 \cosh x.$$

Із умови $u(0) = 0$ маємо $C_2 = 0$, $u = C_1 \sinh x$. Криві пучка $u = C_1 \sinh x$ перетинають вісь x лише в точці $x = 0$. Умова Якобі виконується при довільному a .

Припустимо, що у найпростішій задачі про екстремум функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

умова Якобі виконується і екстремаль C , що проходить через точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, можна включити в центральне поле, нахил якого дорівнює $p(x, y)$ (рис. 1.46). (Можна було б також припустити, що екстремаль включена не в центральне, а у власне поле.) Розглянемо приріст Δv функціонала v при переході від екстремалі C до деякої близької екстремалі \tilde{C} :

$$\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx .$$

Символи $\int_C F(x, y, y') dx$ і $\int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx$ у цьому поданні позначають значення функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$, взяті відповідно по дугах кривих \tilde{C}

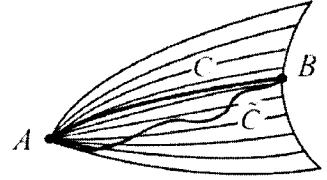


Рис. 1.46

і C. Для визначення знаку приросту Δv запишемо його у іншому, зручнішому для використання, вигляді.

Розглянемо допоміжний функціонал

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p(x, y, p)] dx ,$$

який на екстремалі C перетворюється на $\int_C F(x, y, y') dx$, оскільки на екстремалях

поля $\frac{dy}{dx} = p$. Разом з тим, той же допоміжний функціонал

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p(x, y, p)] dx ,$$

або

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) - p F_p(x, y, p)] dx + F_p(x, y, p) dy \tag{1.85}$$

є інтегралом від точного диференціала. Дійсно, диференціал функції $\bar{v}(x, y)$, в яку перетворюється функціонал $v[y(x)]$ на екстремалях поля згідно з викладеним у п. 1.8, має вигляд

$$d\bar{v} = [F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y')] dx + F_{y'}(x, y, y') dy$$

і лише позначенням кутового коефіцієнта дотичної до екстремалей поля відрізняється від підінтегрального виразу у розглядуваному інтегралі (1.85).

Інтеграл $\int_{\tilde{C}} [F + (y' - p) F_p] dx$ на екстремалі C співпадає з інтегралом

$$\int_C F(x, y, y') dx , \text{ а оскільки функціонал } \int_{\tilde{C}} [F + (y' - p) F_p] dx \text{ є інтегралом від точного}$$

диференціала і тому не залежить від шляху інтегрування, то

$$\int_C F(x, y, y') dx = \int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p)] dx$$

не тільки при $\tilde{C} = C$, але і при будь-якому \tilde{C} .

Отже, приріст

$$\Delta v = \int_C F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, p) dx$$

можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_C F(x, y, y') dx - \int_C [F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p)] dx = \\ &= \int_C [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)] dx. \end{aligned}$$

Підінтегральна функція має назву *функції Вейерштрасса* і позначається $E(x, y, p, y')$:

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p).$$

У цих позначеннях

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y') dx.$$

Очевидно, що достатньою умовою досягнення функціоналом v мінімуму на кривій C буде невід'ємність функції E , оскільки якщо $E \geq 0$, то і $\Delta v \geq 0$, а достатньою умовою максимуму буде $E \leq 0$, оскільки в такому разі і $\Delta v \leq 0$. При цьому для слабкого мінімуму достатньо, щоб нерівність $E(x, y, p, y') \geq 0$ (або $E(x, y, p, y') \leq 0$ для максимуму) виконувалася для значень x, y , близьких до значень x, y на досліджуваній екстремалі C , і для значень y' , близьких до $p(x, y)$ на цій же екстремалі, а для сильного мінімуму та сама нерівність має виконуватися для тих же x, y , але вже для довільних y' , оскільки для сильного екстремуму близькі криві можуть мати довільні напрямки дотичних, а для слабкого екстремуму значення y' на близьких кривих близькі до значень $y' = p$ на екстремалі C .

Таким чином, достатніми умовами досягнення функціоналом v екстремуму на кривій C є такі умови.

Для слабкого екстремуму

1. Крива C є екстремаллю, яка задовольняє граничні умови.
2. Екстремаль C можна включити в поле екстремалей.

Цю умову можна замінити умовою Якобі.

3. Функція $E(x, y, p, y')$ не змінює знаку у всіх точках (x, y) , близьких до кривої C , і для близьких до $p(x, y)$ значень y' . У разі мінімуму $E \geq 0$, у разі максимуму $E \leq 0$.

Для сильного екстремуму

1. Крива C є екстремаллю, що задовольняє граничні умови.
2. Екстремаль C можна включити в поле екстремалей.

Цю умову можна замінити умовою Якобі.

3. Функція $E(x, y, p, y')$ не змінює знаку у всіх точках (x, y) , близьких до кривої C , і для довільних значень y' . У разі мінімуму $E \geq 0$, у разі максимуму $E \leq 0$.

Зауваження 3. Можна довести, що умова Вейерштрасса є необхідною. Точніше, якщо в центральному полі, що включає екстремаль C , у точках екстремалі для деяких y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається. Якщо ця властивість має місце при як завгодно близьких до p значеннях y' , то не досягається і слабкий екстремум.

Приклад 1.46. Дослідити на екстремум функціонал

$$v = \int_0^a y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Екстремальми є прямі лінії $y = C_1x + C_2$. Екстремум може досягатися лише на прямій $y = \frac{b}{a}x$ (рис. 1.47).

Функція

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

На екстремалі $y = \frac{b}{a}x$ нахил поля $p = \frac{b}{a} > 0$ і, якщо y' набуває значень, близьких до $p = \frac{b}{a}$, то $E \geq 0$, і тому всі умови, достатні для досягнення слабого мінімуму, виконуються. Отже, на екстремалі $y = \frac{b}{a}x$ досягається слабкий мінімум. Якщо y' набуває довільних значень, то $(y' + 2p)$ може мати будь-який знак і функція E знаку не зберігає – умови, достатні для досягнення сильного мінімуму не виконуються. Враховуючи зауваження 3, можна стверджувати, що сильний мінімум на прямій $y = \frac{b}{a}x$ не досягається.

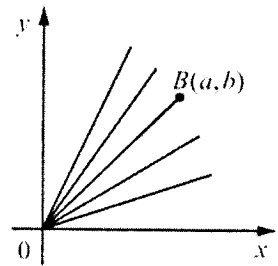


Рис. 1.47

Приклад 1.47. Дослідити на екстремум функціонал

$$v = \int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0$$

у класі неперервних функцій з неперервною першою похідною.

Екстремальми є прямі $y = C_1x + C_2$. Граничні умови задовольняє пряма $y = \frac{b}{a}x$, що включається у пучок екстремалей $y = C_1x$, який є центральним полем. Функція

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + p^4 - yp - (y' - p)(12p - 4p^3 + y) = \\ &= -(y' - p)^2 [y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]. \end{aligned}$$

Функція E має знак, протилежний знаку останнього множника

$$y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2).$$

Цей множник перетворюється у нуль і може змінити свій знак лише при переході y' через значення $y' = -p \pm \sqrt{6 - 2p^2}$. При $6 - 2p^2 \leq 0$ або $p \geq \sqrt{3}$ при довільному y' маємо $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2) \geq 0$. Якщо $6 - 2p^2 > 0$ або $p < \sqrt{3}$, то вираз $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$ змінює знак. Якщо при цьому y' достатньо мало відрізняється від p , то останній вираз є додатним при $p > 1$ і від'ємним при $p < 1$.

Отже, при $p = \frac{b}{a} < 1$ або $b < a$ маємо слабкий мінімум, оскільки $E \geq 0$ при значеннях y' , близьких до p . При $p = \frac{b}{a} > 1$ або $b > a$ маємо слабкий максимум.

При $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ на підставі зауваження 3, можна стверджувати, що немає ні сильного мінімуму, ні сильного максимуму.

Навіть у наведених простих прикладах дослідження знаку функції E досить утруднене, і тому бажано умову збереження знаку функцією E замінити легшою для перевірки умовою.

Припустимо, що функція $F(x, y, y')$ є тричі диференційовною по аргументу y' . За формулою Тейлора маємо

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q),$$

де q знаходиться між p і y' .

Після заміни $F(x, y, y')$ її розкладом за формулою Тейлора функція

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$$

набирає вигляду

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

Звідси видно, що функція E зберігає знак, якщо зберігає знак $F_{y'y'}(x, y, q)$. При дослідженні на слабкий екстремум функція $F_{y'y'}(x, y, q)$ має зберігати знак для значень x і y в точках, близьких до точок досліджуваної екстремалі, і для значень q , близьких до p . Якщо $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ у точках екстремалі C , то внаслідок неперервності ця друга похідна зберігає знак і у точках, близьких до кривої C , і для значень y' , близьких до значень y' на кривій C . Отже, при дослідженні на слабкий мінімум умову $E \geq 0$ можна замінити на умову $F_{y'y'} > 0$ на екстремалі C , а при дослідженні на слабкий максимум умову $E \leq 0$ можна замінити умовою $F_{y'y'} < 0$ на кривій C . Умова $F_{y'y'} > 0$ (або $F_{y'y'} < 0$) має назву умови Лежандра. Умову

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$F_{y'y'} > 0$ (або $F_{y'y'} < 0$) часто називають посиленою умовою Лежандра, а умовою Лежандра називають нерівність $F_{y'y'} \geq 0$ (або $F_{y'y'} \leq 0$).

При дослідженні на сильний мінімум умову $E \geq 0$ можна замінити вимогою $F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0$ в точках (x, y) , близьких до точок кривої C при довільних значеннях q . При цьому, звичайно, припускається, що розклад за формулою Тейлора

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

справедливий при будь-яких y' . При дослідженні на сильний максимум матимемо умову $F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0$ при тих самих припущеннях щодо області зміни аргументів і розкладності функції $F(x, y, y')$ за формулою Тейлора.

Підсумовуючи, наведемо формулювання достатніх умов екстремуму.

Слабкий мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.
2. Умова Якобі.
3. $F_{y'y'} > 0$

на досліджуваній екстремалі.

Сильний мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.
2. Умова Якобі.
3. $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$

для точок (x, y) , близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y' . При цьому вважається, що функція $F(x, y, y')$ є тричі диференційовною по y' для будь-яких y' .

Інакше достатні умови екстремуму функціонала можна подати у такому вигляді.

Слабкий мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.
2. Умова Якобі.
3. $E(x, y, p, y') \geq 0$

для точок (x, y) , близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для y' , близьких до $p(x, y)$.

Сильний мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.
2. Умова Якобі.
3. $E(x, y, p, y') \geq 0$

для точок (x, y) , близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y' .

І нарешті, можна сформулювати ще одне подання достатніх умов екстремуму.

Слабкий мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.

Сильний мінімум

1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.

2. Існує поле екстремалей, яке включає дану екстремаль.

$$3. E(x, y, p, y') \geq 0$$

для точок (x, y) , близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для y' , близьких до $p(x, y)$.

2. Існує поле екстремалей, яке включає дану екстремаль.

$$3. E(x, y, p, y') \geq 0$$

для точок (x, y) , близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y' .

Для отримання достатніх умов максимуму у всіх наведених варіантах формулювання достатніх умов треба знаки нерівностей замінити на протилежні.

Приклад 1.48. Дослідити на екстремум функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx, \quad a > 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $y'' + y = 0$, його загальний розв'язок

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Враховуючи граничні умови дістанемо $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$, якщо $a \neq k\pi$, де k – ціле число.

Отже, при $a \neq k\pi$ екстремум може досягатися тільки на прямій $y = 0$. Якщо $a < \pi$, то пучок екстремалей $y = C_1 \sin x$ з центром у точці $(0, 0)$ є центральним полем. При $a > \pi$ умова Якобі не виконується.

Оскільки підінтегральна функція тричі диференційовна по y' при довільних y' і $F_{y'y'} = 2 > 0$ при будь-яких значеннях y' , то на прямій $y = 0$ при $a < \pi$ реалізується сильний мінімум. Враховуючи зауваження 2, можна стверджувати, що при $a > \pi$ мінімум на прямій $y = 0$ не досягається.

Приклад 1.49. Дослідити на екстремум функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$

(див. задачу про брахістохрону, приклад 1.10 п. 1.4).

Екстремалами є циклоїди

$$x = C_1(t - \sin t) + C_2,$$

$$y = C_1(1 - \cos t).$$

Пучок циклоїд $x = C_1(t - \sin t) + C_2$, $y = C_1(1 - \cos t)$ з центром у точці $(0, 0)$ є центральним полем, яке включає екстремаль

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

де a визначено із умови проходження циклоїди через другу граничну точку $B(x_1, y_1)$, якщо $x_1 < 2\pi a$ (рис. 1.48).

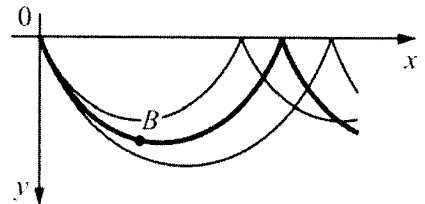


Рис. 1.48

Маємо

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

для будь-яких y' . Отже, при $x_1 < 2\pi a$ на циклоїді

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

реалізується сильний мінімум.

Приклад 1.50. Дослідити на екстремум функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^a y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Розв'язання цього прикладу наведене вище (приклад 1.46), але зараз, враховуючи викладене, дослідження щодо слабкого екстремуму можна спростити.

Екстремаліями є прямі лінії. Пучок $y = Cx$ утворює центральне поле, що включає екстремаль $y = \frac{b}{a}x$, на якій друга похідна $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{b}{a} > 0$. Отже, пряма

$y = \frac{b}{a}x$ реалізує слабкий мінімум. При довільних y' друга похідна $F_{y'y'} = 6y'$ знаку не зберігає, тому наведені вище достатні умови для досягнення сильного мінімуму не виконуються.

Приклад 1.51. Дослідити на екстремум функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1.$$

Перший інтеграл рівняння Ейлера у цьому разі має вигляд

$$\frac{y}{y'^2} + y' \frac{2y}{y'^3} = C, \quad \text{або} \quad y'^2 = 4C_1 y.$$

Здобувши корінь, розділимо змінні і після інтегрування дістанемо $y = (C_1 x + C_2)^2$ – сімейство парабол. Із умови $y(0) = 1$ знаходимо $C_2 = 1$. Пучок парабол $y = (C_1 x + 1)^2$ з центром у точці $A(0,1)$ має C_1 -дискримінантну криву $y = 0$ (рис. 1.49). Через точку $B(a,b)$ проходять дві параболи цього пучка. На дузі AB однієї з них (L_1) лежить точка A^* , спряжена з точкою A , на другій (L_2) спряженої точки немає, і тому на дузі L_2 виконується умова Якобі і може досягатися екстремум. У околі досліджуваної екстремалі $F_{y'y'} = \frac{6y}{y'^4} > 0$ для довільних y' . Однак, на цій підставі не можна стверджувати, що на дузі L_2 реалізується сильний мінімум,

оскільки функція $F(x, y, y') = \frac{y}{y'^2}$ має розрив при $y' = 0$ і тому для довільних значень y' її не можна подати у вигляді

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, p) + \dots$$

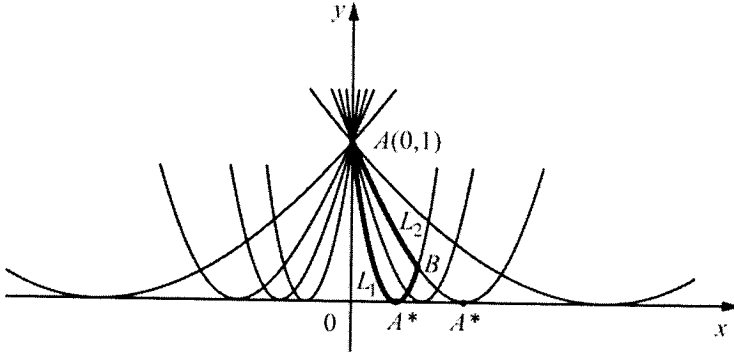


Рис. 1.49

Можна лише стверджувати, що на L_2 досягається слабкий мінімум через те, що для значень y' , близьких до нахилу поля на кривій L_2 , такий розклад функції $F(x, y, y')$ має місце. Для повного дослідження розглядуваного функціонала на екстремум необхідно дослідити функцію $E(x, y, p, y')$:

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y'^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3}(y' - p) = \frac{y(y' - p)^2(2y' + p)}{y'^2 p^3}.$$

Оскільки множник $(2y' + p)$ не зберігає знаку при довільних y' , то на підставі зауваження 3 можна заключити, що сильний мінімум на дузі L_2 не досягається.

Наведена теорія без значних змін переноситься на функціонали виду

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функція E для таких функціоналів має вигляд

$$E = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) - F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) - \sum_{i=1}^n (y_i - p_i)F_{p_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

де p_i – функції нахилу поля, на яке накладаються певні обмеження.

Умова Лежандра $F_{y'y'} \geq 0$ замінюється такими умовами

$$F_{y'_i y'_i} \geq 0, \begin{vmatrix} F_{y'_1 y'_1} & F_{y'_1 y'_2} \\ F_{y'_2 y'_1} & F_{y'_2 y'_2} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} F_{y'_1 y'_1} & F_{y'_1 y'_2} & \dots & F_{y'_1 y'_n} \\ F_{y'_2 y'_1} & F_{y'_2 y'_2} & \dots & F_{y'_2 y'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{y'_n y'_1} & F_{y'_n y'_2} & \dots & F_{y'_n y'_n} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Достатні умови слабкого мінімуму як у найпростішій задачі, так і у складніших, можна дістати також іншим методом, який ґрунтується на дослідженні знаку другої варіації. Введемо необхідні загальні поняття.

Функціонал $L[x, y]$, що залежить від двох функцій називається *білінійним*, якщо при фіксованому x він є лінійним функціоналом від y , а при фіксованому y – лінійним функціоналом від x . Тобто функціонал $L[x, y]$ білінійний, якщо

$$L[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha L[x_1, y] + \beta L[x_2, y],$$

$$L[x, \gamma y_1 + \delta y_2] = \gamma L[x, y_1] + \delta L[x, y_2].$$

Якщо у білінійному функціоналі вважати, що $y = x$, дістанемо вираз, який називається *квадратичним* функціоналом.

Наприклад, вираз $\int_a^b x(t)y(t)dt$ є білінійний функціоналом, а $\int_a^b x^2(t)dt$ – квадратичним функціоналом.

Нагадаємо (див. п.1.2), що функціонал $v[y]$ називається диференційовним, якщо його приріст $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ можна подати у вигляді $\Delta v = L[\delta y] + \beta \max|\delta y|$, де $L[\delta y]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max|\delta y|$ – максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta \rightarrow 0$ при $\max|\delta y| \rightarrow 0$. Головна лінійна відносно δy частина $L[\delta y]$ приросту називається диференціалом або варіацією функціонала і позначається δv .

Введемо тепер поняття другої варіації (другого диференціала) функціонала. Вважатимемо, що функціонал $v[y]$ має другу варіацію, якщо його приріст можна подати у вигляді

$$\Delta v = L_1[\delta y] + L_2[\delta y] + \beta \max|\delta y|^2,$$

де $L_1[\delta y]$ – лінійний функціонал (варіація), $L_2[\delta y]$ – квадратичний функціонал і $\beta \rightarrow 0$ при $\max|\delta y| \rightarrow 0$. Квадратичний функціонал $L_2[\delta y]$ називається *другою варіацією* (другим диференціалом) функціонала $v[y]$ і позначається $\delta^2 v$.

Застосовуючи формулу Тейлора, подамо приріст функціонала у найпростішій задачі в такому вигляді

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx + R,$$

де R має порядок вищий другого відносно δy і $\delta y'$. При дослідженні на слабкий екстремум δy і $\delta y'$ достатньо малі і в такому разі знак приросту Δv визначається знаком доданку у правій частині, який містить найнижчі степені δy і $\delta y'$. На екстремалі перша варіація

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0$$

і тому знак приросту Δv , взагалі кажучи, співпадає із знаком другої варіації

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx.$$

Умова Лежандра разом з умовою Якобі і є умовами, що забезпечують сталість знаку другої варіації, а разом з тим і сталість знаку приросту Δv в задачі про слабкий екстремум. Дійсно, розглянемо інтеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} (\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y') dx, \quad (1.86)$$

де $\omega(x)$ – довільна диференційовна функція. Цей інтеграл дорівнює нулю. Справді,

$$\int_{x_0}^{x_1} (\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y') dx = \int_{x_0}^{x_1} d(\omega \delta y^2) dx = [\omega(x) \delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0,$$

через те, що $\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$.

Додаючи інтеграл (1.86) до другої варіації, дістанемо

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy} + \omega') \delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega) \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2] dx.$$

Виберемо функцію $\omega(x)$ так, щоб підінтегральний вираз з точністю до множника був точним квадратом. Для цього $\omega(x)$ має задовольняти рівняння

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

При такому виборі функції ω друга варіація набирає вигляду

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left(\delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}} \delta y \right)^2 dx,$$

і тому знак другої варіації співпадає зі знаком $F_{y'y'}$. Таке перетворення можливе лише за припущення, що диференціальне рівняння

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

має на відрізку (x_0, x_1) диференційовний розв'язок $\omega(x)$.

Перетворимо це рівняння, вводячи нові змінні підстановкою

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'} \frac{u'}{u},$$

де u – нова невідома функція. В результаті дістанемо

$$(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'})u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0$$

– рівняння Якобі.

Якщо існує розв'язок цього рівняння, що не перетворюється на нуль при $x_0 < x \leq x_1$, тобто задовольняється умова Якобі, то для тих самих значень x існує неперервний і диференційовний розв'язок

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

рівняння

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

Отже, умова Лежандра і умова Якобі гарантують збереження знаку другої варіації.

1.17. Варіаційні задачі на умовний екстремум

Варіаційними задачами на умовний екстремум називаються задачі дослідження на екстремум функціонала v за умови, що на функції, від яких залежить функціонал v , накладаються деякі в'язі.

Прикладом такої задачі є знаходження екстремуму функціонала

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx,$$

за припущення, що функції y_1, y_2, \dots, y_m задовольняють m умов:

$$\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n.$$

Розв'язуючи цю систему відносно y_1, y_2, \dots, y_m (або яких-небудь інших m функцій y_i) і підставляючи їх вирази у $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$, дістанемо функціонал $w[y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n]$, що залежить від $n - m$ аргументів, які вже є незалежними, і тому для дослідження функціонала w застосовні методи, викладені у попередніх підрозділах.

Проте, виключення змінних на практиці може бути досить складною задачею. Разом з тим, змінні часто пов'язані таким чином, що їх неможливо поділити на залежні та незалежні, не порушуючи симетрії задачі. В такому разі зручнішим є інший метод дослідження, так званий метод невизначених множників Лагранжа, який зберігає цілковиту рівноправність змінних. Застосування методу невизначених множників Лагранжа дозволяє не виключати змінні і врахувати додаткові умови не

зменшуючи кількості змінних. Згідно з цим методом до підінтегральної функції функціонала додаються ліві частини рівностей заданих додаткових умов, помножені на деякі невідомі функції $\lambda_i(x)$. Отримана у такий спосіб нова варіаційна задача розглядається як задача на безумовний екстремум. Невідомі множники $\lambda_i(x)$ називаються невизначеними множниками Лагранжа. Вони визначаються із урахуванням рівняння Ейлера та заданих додаткових умов.

Аналогічний метод із застосуванням множників Лагранжа застосовується при дослідженні на екстремум функцій багатьох змінних за наявності додаткових умов.

Екстремуми функцій багатьох змінних. Нагадаємо умови існування екстремуму функцій багатьох змінних. У разі, коли функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційовна в точці (a_1, a_2, \dots, a_n) , вона може мати в цій точці внутрішній екстремум тільки тоді, коли її повний диференціал df дорівнює в цій точці нулю, тобто при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ виконуються рівності:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (1.87)$$

Рівності (1.87) є необхідними умовами екстремуму.

Якщо функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має в деякому околі точки (a_1, a_2, \dots, a_n) неперервні другі частинні похідні і в цій точці виконуються необхідні умови (1.87), то функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має максимум в точці (a_1, a_2, \dots, a_n) у разі, коли другий

диференціал $d^2 f = \sum \sum \frac{d^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \cdot \Delta x_i \Delta x_k$ є від'ємно визначеною

квадратичною формою, а у разі, коли цей диференціал є додатно визначеною квадратичною формою, функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має у цій точці мінімум. Це є достатні умови екстремуму.

Скінченновимірною гладкою екстремальною задачею з обмеженнями типу рівностей (або задачею про умовний екстремум) називається задача:

знайти екстремум $f_0(x)$

$$\text{за умов } f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0. \quad (1.88)$$

Функції $f_k: R_n \rightarrow R, k = 0, 1, \dots, m$ повинні мати деякі властивості гладкості (тобто диференційовності). У цьому пункті припустимо, що в деякому околі U простору R_n всі функції f_k неперервно диференційовні (в тому розумінні, що всі частинні похідні $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ існують і неперервні в U).

Точка $\hat{x} \in U, f_k(\hat{x}) = 0, k = 0, 1, \dots, m$ є точкою локального мінімуму (максимуму) задачі (1.88) в тому разі, якщо знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що коли точка $x \in U$ задовольняє всі обмеження ($f_i(x) = 0, i = 0, 1, \dots, m$) і $|x - \hat{x}| < \varepsilon$, то $f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$ (відповідно $f_0(x) \leq f_0(\hat{x})$).

Функцію

$$L = L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x), \quad (1.89)$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, називають функцією Лагранжа задачі (1.88), числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – множниками Лагранжа.

Правило множників Лагранжа¹.

1. Нехай в задачі (1.88) всі функції f_0, f_1, \dots, f_m неперервно диференційовні в околі точки \hat{x} . Якщо \hat{x} – точка локального екстремуму в задачі (1.88), то знайдуться множники Лагранжа $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m)$ і $\hat{\lambda}_0$, одночасно не рівні нулю і такі, що виконуються умови стаціонарності функції Лагранжа по x

$$L_x(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0 \Leftrightarrow L_{x_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.90)$$

2. Для того, щоб $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, достатньо, щоб вектори $f'_1(\hat{x}), \dots, f'_m(\hat{x})$ були лінійно незалежними.

Таким чином, для визначення $\hat{x}, \hat{\lambda},$ і $\hat{\lambda}_0$ маємо $n + m$ рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad f'_1(x) = \dots = f'_m(x) = 0 \quad (1.91)$$

із $n + m + 1$ невідомими. Слід враховувати, що множники Лагранжа визначені при цьому з точністю до пропорційності. Якщо відомо, що $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ (а це важливий випадок, бо при $\hat{\lambda}_0 = 0$ співвідношення (1.90) свідчать лише про виродженість

¹ Перша згадка про правило множників міститься в роботах Ейлера по ізопериметричним задачам (1744 р.). Потім воно було висловлене Лагранжем в його «Аналітичній механіці» (1788 р.) для широкого класу задач варіаційного числення (так званих задач Лагранжа). У 1797 р. в книзі «Теорія аналітичних функцій» Лагранж торкається питання і про скінченновимірні задачі (Lagrange J. Ls Theorie des fonctions analytiques, Paris, 1813). Він пише: «On peut les reduire a ce principe generate. Lors qu'une fonction -de plusieurs variables doit etre un \ maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs equations, il suffira d'ajouter a la fonction proposee les fonctions qui doivent etre nulles, mul-tipliees chacune par une quantite indeterminee, et la cher-cher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables etaient independantes; les equations qu'on trouvees, serviront a determiner toutes les inconnues». «Можна висловити такий загальний принцип. Якщо шукається максимум або мінімум деякої функції багатьох змінних за умови, що між цими змінними є зв'язок, що задається одним або кількома рівняннями, потрібно додати до функції, що мінімізується, функції, які задають рівняння зв'язку, помножені на невизначені множники, і шукати потім максимум або мінімум побудованої суми, так ніби змінні є незалежними. Отримані рівняння, додані до рівнянь зв'язку, дозволяють визначити всі невідомі».

Відзначимо незвичайність історичного розвитку цієї теми. Услід за методом розв'язання одновимірних екстремальних задач настала ера класичного варіаційного числення. Для задач варіаційного числення з обмеженнями, тобто в нескінченновимірній ситуації, своє знамените правило множників Лагранж сформулював в «Аналітичній механіці» у 1788 р. і лише десь через десятиліття в «Теорії аналітичних функцій» у 1797 р. він застосував його до скінченновимірних задач.

обмежень і не пов'язані з функціоналом), то можна, помноживши всі $\widehat{\lambda}_i$ на константу, отримати $\widehat{\lambda}_0 = 1$. Тоді число рівнянь дорівнюватиме числу невідомих.

У більш симетричній формі рівняння (1.91) записуються таким чином:

$$L_x = 0, L_\lambda = 0.$$

Їх розв'язки називаються *стаціонарними точками* задачі (1.88).

З часів Лагранжа майже впродовж цілого століття правило множників формулювалося із $\widehat{\lambda}_0 = 1$, хоча без додаткових припущень, наприклад лінійної незалежності, у такому вигляді воно невірне. Для підтвердження сказаного розглянемо задачу:

знайти $\inf x_1$

за умови $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Очевидним і єдиним її розв'язком є $\widehat{x} = (0, 0)$ через те, що це є єдина допустима точка.

Спробуємо тепер записати функцію Лагранжа з $\widehat{\lambda}_0 = 1$ і застосувати далі алгоритм (1.90). Маємо $L = x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)$, звідки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_1 + 1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_2 = 0$$

і перше з цих рівнянь несумісне з рівнянням $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Як умову регулярності, яка гарантує, що $\widehat{\lambda}_0 \neq 0$, зазвичай використовують лінійну незалежність похідних $f'_1(\widehat{x}), \dots, f'_m(\widehat{x})$ (див. твердження 2 правила множників Лагранжа). Проте перевірка цієї умови зазвичай є складнішою, ніж перевірка безпосередньо з рівнянь (1.90) того, що $\widehat{\lambda}_0$ не може дорівнювати нулю. Тому наведене вище формулювання теореми, яке не містить ніяких додаткових припущень окрім гладкості є дуже зручним.

Доведення теореми ґрунтується на одній з найважливіших теорем скінченновимірного диференціального числення – теоремі про обернену функцію.

Теорема 1.9 (про обернену функцію). Нехай $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_s), \dots, \psi_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$ – s функцій s змінних неперервно диференційовних в деякому околі точки \widehat{x} . Нехай при цьому якобіан

$$I = \det \left(\frac{\partial \psi_i(\widehat{x})}{\partial x_j} \right)$$

відмінний від нуля. Тоді існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\delta_0 > 0$, що для будь-якого $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)$, $|\boldsymbol{\eta}| \leq \varepsilon_0$ знайдеться $\boldsymbol{\xi}$, $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0$, таке, що $\psi(\widehat{x} + \boldsymbol{\xi}) = \psi(\widehat{x}) + \boldsymbol{\eta}$, і при цьому $\boldsymbol{\xi} \rightarrow 0$ при $\boldsymbol{\eta} \rightarrow 0$.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Доведення правила множників Лагранжа. Нехай точка \hat{x} є точкою локального мінімуму в задачі (1.88). Можливі два випадки: або вектори $f'_0(\hat{x}), \dots, f'_m(\hat{x})$ лінійно залежні, або ці вектори лінійно незалежні.

а) Нехай вектори лінійно залежні. Тоді ненульові $\hat{\lambda}_k, k = 0, 1, \dots, m$, для яких виконуються умови (1.90), можна підібрати за означенням.

б) Нехай вектори лінійно незалежні. Приведемо це до протиріччя з тим, що \hat{x} – точка локального мінімуму в задачі (1.88).

Розглянемо відображення $\Phi(x) = (f_0(x) - f_0(\hat{x}), f_1(x), \dots, f_m(x))$. За умовою вектори $f'_1(\hat{x}), \dots, f'_m(\hat{x})$ лінійно незалежні, тобто ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

дорівнює $m + 1$. Припустимо для визначеності, що перші $m + 1$ стовпчиків матриці A лінійно незалежні, тобто

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отже, функції

$$\Psi_1(x_1, \dots, x_{m+1}) = f_0(x_1, \dots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n),$$

$$\Psi_2(x_1, \dots, x_{m+1}) = f_1(x_1, \dots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n),$$

.....

$$\Psi_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) = f_m(x_1, \dots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n).$$

задовольняють умови теореми про обернену функцію. За цією теоремою для будь-якого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ знайдуться $x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon)$ такі, що

$$f_0(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}) = -\varepsilon,$$

$$f_1(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) = 0,$$

.....

$$f_m(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) = 0, \tag{1.92}$$

причому $x_i(\varepsilon) \rightarrow \hat{x}_i$ при $\varepsilon \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, m + 1$. Але із (1.92) прямо випливає, що точка \hat{x} не є точкою локального мінімуму. Шукане протиріччя отримане. Твердження 2 теореми є очевидним.

Таким чином, екстремуми дійсних функцій $f(x_1, \dots, x_n)$ n змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які підпорядковані досить гладким додатковим умовам у вигляді $m < n$ рівнянь в'язей

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1.93}$$

взагалі кажучи, можна знайти із умов (1.87), виключивши m із n змінних x_1, x_2, \dots, x_n за допомогою рівнянь (1.93).

Якщо ж безпосереднє виключення m змінних неможливе або недоцільне, то застосовують таку необхідну умову максимуму або мінімуму функцій при обмеженнях (1.93)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \tag{1.94}$$

де $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x_1, \dots, x_n)$.

Величини λ_j називаються множниками Лагранжа. Невідомі координати точок $x_i = a_i$ та множники Лагранжа λ_j знаходять із рівнянь (1.93) і (1.94), загальна кількість яких дорівнює $n + m$.

Для ілюстрації застосування методу множників Лагранжа при знаходженні екстремуму функцій багатьох змінних наведемо два приклади задач, пов'язаних із оптимальним визначенням жорсткості на розтяг-стиснення і згин, розв'язаних двома способами: за допомогою безпосереднього виключенням невідомих і за методом множників Лагранжа.

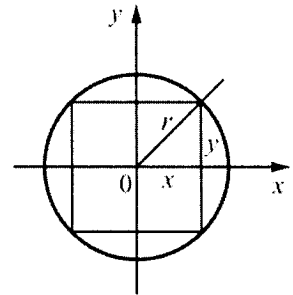


Рис. 1.50

Приклад 1.52. Знайти вписаний у коло прямокутник найбільшої площі.

Площа прямокутника $S = 4xy$ за умови $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 1.50).

Безпосереднє виключення

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad S(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2};$$

$$\frac{dS}{dx} = 4\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} 4x = 0;$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Метод множників Лагранжа

$$\Phi(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4y + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

$$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Отже, маємо квадрат із стороною $r\sqrt{2}$.

Приклад 1.53. Знайти сторони вписаного в коло прямокутника з максимальним моментом інерції.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$I = \frac{bh^3}{12}; \quad b = 2x; \quad h = 2y.$$

$$I = \frac{4}{3}xy^3.$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Безпосереднє виключення

$$I(y) = \frac{4}{3}y^3 \sqrt{r^2 - y^2}.$$

$$\frac{dI}{dy} = 4y^2 \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{-2y}{2\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{4}{3}y^3 = 0.$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}r, \quad x = \frac{r}{2}.$$

Метод множників Лагранжа

$$\Phi(x, y) = \frac{4}{3}xy^3 + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{4}{3}y^3 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4xy^2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

$$x = \frac{r}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

Таким чином, маємо прямокутник із меншою стороною r .

Приклад 1.54. Простим прикладом ізопериметричної задачі (див. далі п. 1.19) є така задача: визначити сторони прямокутника найбільшої площі, що має фіксований периметр.

Площа прямокутника $S = 4xy$ за умови $4(x + y) = c$ (рис. 1.51).

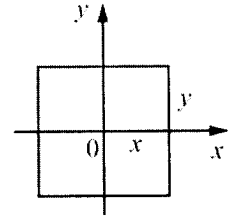


Рис. 1.51

Безпосереднє виключення

$$y = \frac{c}{4} - x, \quad S(x) = 4x\left(\frac{c}{4} - x\right) = cx - 4x^2.$$

$$\frac{dS}{dx} = c - 8x = 0.$$

$$x = \frac{c}{8}; \quad y = \frac{c}{8}.$$

Метод множників Лагранжа

$$\Phi(x, y) = 4xy + \lambda(4x + 4y - c).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4y + 4\lambda = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x + 4\lambda = 0, \\ x + y = \frac{c}{4}. \end{cases}$$

$$x = y = \frac{c}{8}.$$

Отже, маємо квадрат із стороною $\frac{c}{4}$.

Приклад 1.55. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму за умови, що його повна поверхня має площу $2S$.

Нехай сторони паралелепіпеда дорівнюють x , y і z , тоді його об'єм $V = xyz$, а загальна площа поверхні $2S = 2(xy + xz + yz)$. Задача полягає в тому, щоб максимізувати $V = xyz$ за умови $2S = 2(xy + xz + yz)$, або $S = (xy + xz + yz)$.

Функція Лагранжа

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - S).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = yz + \lambda(y + z) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = xz + \lambda(x + z) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = xy + \lambda(x + y) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda)}{\partial \lambda} = xy + xz + yz - S = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що змінні x , y і z за змістом задачі є додатними, послідовно отримуємо

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z},$$

$$yz(x+z) = xz(y+z), \quad z(x-y) = 0, \quad x = y.$$

Аналогічно $y = z$ і, отже, $x = y = z$. Маємо $3x^2 = S$, звідки $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{3}}$.

Тобто, шуканий паралелепіпед є куб зі стороною $\sqrt{\frac{S}{3}}$, а його об'єм $V = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{3}}$.

Значна частина цього підручника присвячена розкриттю задуму Лагранжа у застосуванні до задач різної природи. Викладемо тут ще раз основну думку Лагранжа. Нехай потрібно знайти екстремум в задачі (1.88). Тоді слід побудувати функцію Лагранжа (1.89) і розглянути задачу знаходження екстремуму $L(x, \lambda, \lambda_0)$ без обмежень. Необхідна умова екстремуму в цій задачі без обмежень відповідно до теореми Ферма для функцій n змінних дає потрібні рівняння $L_x = 0$. Отже, згідно з принципом Лагранжа рівняння для екстремуму в задачі з обмеженнями співпадають з рівняннями для задачі знаходження екстремуму $L(x, \lambda, \lambda_0)$ без обмежень при належному виборі множників Лагранжа λ, λ_0 . Для дуже великого числа задач загальний задум Лагранжа виявляється правильним.

Якщо розв'язується варіаційна задача на умовний екстремум, тобто досліджується на екстремум функціонал

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

із додатковими умовами

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n,$$

то згідно з методом невизначених множників для функціонала $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ розглядається інший допоміжний функціонал

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i \right) dx$$

або

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i.$$

Тут $\lambda_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) – деякі невідомі функції.

Функціонал v^* досліджується вже на безумовний екстремум, для чого розв'язується система рівнянь, яка складається із рівнянь Ейлера і додаткових рівнянь в'язей:

$$\begin{cases} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0, & j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m. \\ \varphi_i = 0. \end{cases} \quad (1.95)$$

Кількість рівнянь $m+n$, взагалі кажучи, є достатньою для визначення $m+n$ невідомих функцій y_1, y_2, \dots, y_n і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Граничні умови $y_j(x_0) = y_{j0}$ і $y_j(x_1) = y_{j1}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), які мають не суперечити рівнянням в'язей, взагалі кажучи, дозволяють визначити $2n$ довільних сталих у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.

Очевидно, що знайдені таким чином криві, на яких досягається мінімум або максимум функціонала v^* , є розв'язками і вихідної варіаційної задачі, оскільки при знайдених із системи (1.95) функціях

$$\lambda_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{і} \quad y_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

всі $\varphi_i = 0$ і тому $v^* = v$. Якщо при $y_j = y_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), визначених із системи (1.95), досягається безумовний екстремум функціонала v^* , тобто екстремум відносно всіх близьких кривих, що задовольняють або не задовольняють рівняння в'язей, то, зокрема, екстремум досягається і відносно більш вузького класу тільки таких кривих, які задовольняють рівняння в'язей.

Однак, із наведених міркувань не випливає, що всі розв'язки вихідної задачі на екстремум реалізують безумовний екстремум функціонала v^* , і тому невідомо, чи всі розв'язки можуть бути знайдені таким методом. Має місце таке твердження.

Теорема 1.10. Функції y_1, y_2, \dots, y_n , які реалізують екстремум функціонала

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при додаткових умовах

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n,$$

задовольняють при відповідному виборі множників $\lambda_i(x)$ $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ рівняння Ейлера, складені для функціонала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i \right) dx \quad \text{або} \quad v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx.$$

Функції $\lambda_i(x)$ і $y_j(x)$ визначаються із рівнянь Ейлера

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

і рівнянь

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Функції $\varphi_i = 0$ можна також вважати рівняннями Ейлера для функціонала v^* , якщо аргументами функціонала вважати не тільки функції y_1, y_2, \dots, y_n , але й $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$. Рівняння $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) вважаються незалежними, тобто один із якобіанів порядку m відмінний від нуля, наприклад,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Доведення. Основна умова екстремуму $\delta v = 0$ у розглядуваному випадку набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n (F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j') dx = 0.$$

Інтегруючи другі доданки в кожній дужці частинами, і враховуючи, що

$$(\delta y_j)' = \delta y_j' \quad \text{і} \quad (\delta y_j)_{x=x_0} = 0, \quad (\delta y_j)_{x=x_1} = 0,$$

дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0.$$

Оскільки функції y_1, y_2, \dots, y_n задовольняють незалежні в'язі

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то варіації δy_j не є довільними і застосовувати основну лему поки що не можна.

Варіації δy_j мають задовольняти такі умови, отримані шляхом варіювання рівнянь в'язей $\varphi_i = 0$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy_j} \delta y_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.96)$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Точніше, застосовуючи до різниці

$$\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n) - \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

лівих частин рівнянь $\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n) = 0$ і $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ формулу Тейлора, дістанемо

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy_j} \delta y_j + R_i = 0,$$

де R_i мають порядок вищий першого відносно δy_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Оскільки при обчисленні варіації функціонала враховуються лише члени першого порядку відносно δy_j ($i = 1, 2, \dots, n$), доданки R_i не матимуть істотного значення у подальших викладеннях.

Враховуючи, що варіації δy_j зв'язані m умовами (1.96), довільними можна вважати тільки $n - m$ варіацій, наприклад $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \dots, \delta y_n$, інші визначаються із рівнянь (1.96). Після почленного множення кожного з цих рівнянь на $\lambda_i(x) dx$ і інтегрування у межах від x_0 до x_1 отримаємо

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy_j} \delta y_j dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Додаючи почленно всі ці m рівнянь з рівнянням

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0,$$

матимемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{d\varphi_i}{dy_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right) \delta y_j dx = 0.$$

Якщо ввести позначення

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i,$$

формула набере вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

Через те, що варіації δy_j не є довільними, застосовувати основну лему все ще не можна. Виберемо m множників $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ так, щоб вони задовольняли m рівнянь

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \frac{d\varphi_i}{dy_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_j} = 0, \quad j=1,2,\dots,m.$$

Ці рівняння по відношенню до λ_i є лінійною системою із визначником, відмінним від нуля

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0,$$

отже ця система має розв'язок

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x).$$

При такому виборі $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ основна необхідна умова екстремуму

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* \right) \delta y_j dx = 0$$

набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left(F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

Оскільки для функцій y_1, y_2, \dots, y_n , що реалізують екстремум функціонала v , це функціональне рівняння перетворюється на тотожність вже при довільному виборі δy_j ($j = m+1, m+2, \dots, n$), то можна застосувати основну лему. Прийматимемо по черзі всі δy_j крім однієї рівними нулю і, застосовуючи лему, дістанемо

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n.$$

Беручи до уваги отримані вище рівняння

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

остаточно дістанемо, що функції, які реалізують умовний екстремум функціонала v , і множники $\lambda_i(x)$ мають задовольняти систему рівнянь

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Приклад 1.56. Задача про геодезичні лінії (див. 1.1). Знайти найкоротшу відстань між двома точками $A(x_0, y_0, z_0)$ і $B(x_1, y_1, z_1)$ на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$.

Відомо, що відстань між двома точками на поверхні визначається за формулою

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx.$$

Задача полягає в тому, щоб знайти мінімум l за умови $\varphi(x, y, z) = 0$. Згідно з викладеним розглянемо допоміжний функціонал

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z) \right] dx$$

і запишемо для нього рівняння Ейлера

$$\lambda(x)\varphi_y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

$$\lambda(x)\varphi_z - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Із цих трьох рівнянь визначаються шукані функції $y = y(x)$ і $z = z(x)$, на яких може реалізуватися умовний мінімум функціонала v , і множник $\lambda(x)$.

1.18. Варіаційні задачі на умовний екстремум з додатковими умовами виду

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$$

У попередньому підрозділі розглядалося питання про дослідження на екстремум функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx,$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де функції y_1, y_2, \dots, y_m задовольняють умови

$$\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

У цьому підрозділі досліджується таке ж питання для в'язей, що задаються диференціальними рівняннями

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

У такому випадку також можна довести правило множників, яке полягає в тому, що умовний екстремум досягається на тих самих кривих, на яких реалізується безумовний екстремум функціонала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)\varphi_i.$$

Однак, доведення значно ускладнюється порівняно з випадком скінченних в'язей.

Якщо обмежитися доведенням більш слабкого твердження про те, що криві, на яких досягається умовний екстремум функціонала v , при відповідному виборі

$\lambda_i(x)$ є екстремалами для функціонала v^* , то наведене у попередньому підрозділі доведення, можна з незначними змінами повторити і для розглядуваного випадку.

Дійсно, припустимо, що один з функціональних визначників порядку m відмінний від нуля, наприклад,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)} \neq 0.$$

Тоді в'язі є незалежними і рівняння $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$ можна розв'язати відносно y'_1, y'_2, \dots, y'_n . В результаті розв'язання отримаємо

$$y'_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_{m+1}, y'_{m+2}, \dots, y'_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Якщо вважати $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ довільно заданими функціями, то з цієї системи диференціальних рівнянь визначаються y_1, y_2, \dots, y_m . Таким чином, $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ є довільними диференційовними функціями з фіксованими граничними значеннями і тому їхні варіації є довільними у тому ж розумінні.

Нехай y_1, y_2, \dots, y_n – довільна допустима система функцій, що задовольняє рівняння в'язей $\varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Варіюємо рівняння в'язей¹:

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy'_j} \delta y'_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Домножуючи почленно кожне з отриманих рівнянь на невизначений множник $\lambda_i(x)$ і інтегруючи у межах від x_0 до x_1 , дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy_j} \delta y_j dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i}{dy'_j} \delta y'_j dx = 0.$$

Інтегруючи кожен доданок другого інтеграла частинами і зважаючи на те, що $\delta y'_j = (\delta y_j)'$ і $(\delta y_j)_{x=x_0} = (\delta y_j)_{x=x_1} = 0$, матимемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_i(x) \frac{d\varphi_i}{dy_j} - \frac{d}{dx} \left(\lambda_i(x) \frac{d\varphi_i}{dy'_j} \right) \right] \delta y_j dx = 0. \quad (1.97)$$

Із основної необхідної умови екстремуму $\delta v = 0$ випливає

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx = 0, \quad (1.98)$$

оскільки

¹ Зауважимо, що, як і в попередньому підрозділі, у лівій частині треба було б включити доданки, які містять члени порядку вище першого відносно δy_j і $\delta y'_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) і врахувати вплив цих нелінійних членів у розглядуваному випадку набагато важче.

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j} \delta y_j + F_{y'_j} \delta y'_j \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx.$$

Додаючи почленно рівняння (1.97) і (1.98) і позначивши $F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i$, дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left(F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* \right) \delta y_j dx = 0. \quad (1.99)$$

Через те, що варіації δy_j ($j = 1, 2, \dots, n$) не є довільними, основну лему поки застосовувати не можна. Виберемо m множників $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ так, щоб вони задовольняли рівняння

$$F_{y'_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Якщо записати ці рівняння у розгорнутому вигляді, то вони являють собою систему лінійних диференціальних рівнянь відносно $\lambda_i(x)$ і $\frac{d\lambda_i}{dx}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), яка при зроблених припущеннях має розв'язок $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$, що залежить від m довільних сталих. При такому виборі $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ рівняння (1.99) набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left(F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* \right) \delta y_j dx = 0,$$

де варіації δy_j ($j = m+1, m+2, \dots, n$) вже є довільними, і тому, вважаючи, що всі, крім однієї δy_j , дорівнюють нулю і застосовуючи основну лему, дістанемо

$$F_{y'_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n.$$

Отже, функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які реалізують умовний екстремум функціонала v , і множники $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ мають задовольняти систему $m+n$ рівнянь

$$F_{y'_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

тобто мають задовольняти рівняння Ейлера допоміжного функціонала v^* , який розглядається як функціонал, залежний від $m+n$ функцій $y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

1.19. Ізопериметричні задачі

Ізопериметричними задачами у вузькому розумінні цього слова називаються задачі знаходження геометричної фігури максимальної площі при заданому периметрі. Серед таких екстремальних задач є і варіаційні задачі, наприклад, задача про знаходження замкненої кривої заданої довжини, що обмежує максимальну площу (див. п.1.1). Задаючи криву у параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, можна цю задачу сформулювати так: знайти екстремум функціонала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} xy' dt \text{ або } S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx') dt$$

за умови, що функціонал

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^2 + y^2} dt$$

зберігає стале значення:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l.$$

Отже, ми маємо варіаційну задачу на умовний екстремум із своєрідною умовою:

інтеграл $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ не змінюється.

Останнім часом ізопериметричними називаються задачі значно ширшого класу, а саме задачі визначення екстремуму функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

за умови виконання так званих ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де l_i – сталі, m може бути більше, менше, або дорівнювати n , а також аналогічні задачі для складніших функцій.

Ізопериметричні задачі можна звести до розглянутих у попередньому підрозділі задач на умовний екстремум шляхом введення нових невідомих функцій.

Позначимо

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = z_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

звідки $z_i(x_0) = 0$ і з умови $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ маємо $z_i(x_1) = l_i$. Диференціюючи z_i по x , дістанемо

$$z'_i(x) = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тим самим інтегральні ізопериметричні в'язі $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ замінюються

диференціальними в'язями

$$z'_i(x) = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

і задача зводиться до задачі, розглянутої у попередньому підрозділі.

Застосовуючи правило множників, можна замість дослідження на умовний екстремум функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$ за наявності в'язей $F_i - z'_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

досліджувати на безумовний екстремум функціонал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) (F_i - z'_i) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) (F_i - z'_i).$$

Рівняння Ейлера для функціонала v^* мають вигляд

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$F_{z'_i}^* - \frac{d}{dx} F_{z_i}^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

або

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) F_{iy_j} - \frac{d}{dx} \left(F_{y'_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) F_{iy'_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Із останніх m рівнянь випливає, що всі λ_i є сталими, а перші n рівнянь співпадають з рівняннями Ейлера для функціонала

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) dx.$$

Отже, маємо таке правило: для визначення основної необхідної умови у ізопериметричній задачі про знаходження екстремуму функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$ за наявності в'язей $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) треба розглянути допоміжний функціонал

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) dx,$$

де λ_i – сталі, і записати для нього рівняння Ейлера. Довільні сталі C_1, C_2, \dots, C_{2n} у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера і сталі, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ визначаються із граничних умов

$$y_j(x_0) = y_{j0} \quad y_j(x_1) = y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

та із ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Система рівнянь Ейлера для функціонала v^{**} не змінюється, якщо v^{**} помножити на деякий сталий множник μ_0 і подати його у вигляді

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^m \mu_i F_i dx,$$

де введені позначення $F_0 = F$, $\mu_j = \lambda_j \mu_0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тепер всі функції F_i входять у підінтегральний вираз симетрично, тому екстремалі у вихідній варіаційній задачі і у задачі про знаходження екстремуму функціонала $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$ за наявності

ізопериметричних умов $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx = l_s$ ($s = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m$) співпадають.

Ця властивість має назву *принципу взаємності*. Наприклад, задача про максимум площі, обмеженої замкненою кривою певної довжини, і задача про мінімум довжини замкненої кривої, що обмежує певну площу, взаємні і мають однакові екстремалі.

Приклад 1.57. Знайти криву $y = y(x)$ заданої довжини l , для якої площа криволінійної трапеції $CABD$ (рис. 1.52) є максимальною.

Задача полягає в дослідженні на екстремум

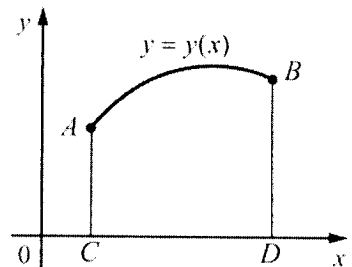


Рис. 1.52

функціонала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

із ізопериметричною умовою

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Запишемо допоміжний функціонал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Оскільки підінтегральна функція не містить x , то рівняння Ейлера для S^{**} має перший інтеграл $F - y'F_{y'} = C_1$, або для розглядуваного функціонала

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

звідки

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Вводячи параметр t підстановкою $y' = \operatorname{tg} t$, дістанемо

$$y - C_1 = -\lambda \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$$

або

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt, \quad x = \lambda \sin t + C_2.$$

Отже, рівняння екстремалей у параметричній формі має вигляд

$$x - C_2 = \lambda \sin t, \quad y - C_1 = -\lambda \cos t,$$

і після виключення t маємо

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

– сімейство кіл. Сталі C_1, C_2, λ визначаються із умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Приклад 1.58. Знайти криву $y = y(x)$ заданої довжини l , яка разом з заданою кривою $y = f(x)$ обмежує максимальну площу (рис. 1.53).

Задача полягає у знаходженні екстремуму функціонала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x)) dx,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

за умови $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$

Введемо допоміжний функціонал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(y - f(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Рівняння Ейлера для цього функціонала співпадає з рівнянням Ейлера, яке розглядалося у попередньому прикладі, тому і в даній задачі максимум може досягатися лише на дугах кіл.

Приклад 1.59. Знайти форму абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного каната заданої довжини l , підвішеного у точках A і B (рис. 1.54).

Оскільки у положенні рівноваги центр тяжіння має займати найнижче положення, задача полягає у знаходженні мінімуму статичного моменту P відносно осі x , яка вважається горизонтально напрямленою. Дослідимо на екстремум функціонал

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

за умови $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$

Введемо допоміжний функціонал

$$P^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

для якого рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$F - y'F_{y'} = C_1,$$

або в даному разі

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{(y + \lambda)y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

звідки

$$y + \lambda = C_1 \sqrt{1 + y'^2}.$$

Введемо параметр t підстановкою $y' = \text{sh } t$. Тоді

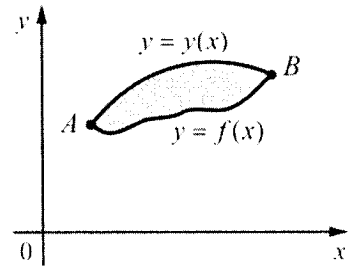


Рис. 1.53

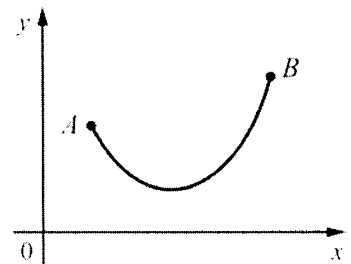


Рис. 1.54

1. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

$$\sqrt{1+y'^2} = \operatorname{ch} t$$

i

$$y + \lambda = C_1 \operatorname{ch} t, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} t,$$

звідки

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Виключивши t , дістанемо

$$y + \lambda = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$$

– сімейство ланцюгових ліній.

Наведене правило розв'язання ізопериметричних задач поширюється і на складніші функціонали.

2. Функція Лагранжа і двоїстість. Сідлові точки і умови оптимальності

Багато задач із різних областей інженерних дисциплін можна формально звести до задач математичного програмування, які полягають у знаходженні нижньої (верхньої) грані функції (функціонала) за певних обмежень. Для якісного аналізу такої задачі необхідно дослідити вигляд функції, екстремум якої шукається, а також з'ясувати — опуклою чи неопуклою є множина, що задається системою обмежень. Методи опуклого програмування дозволяють для опуклих множин (областей) знаходити глобальний мінімум опуклої вниз функції і глобальний максимум опуклої вгору функції. Зазначимо, що для лінійної функції на опуклій множині ці методи дозволяють знайти як глобальний мінімум, так і глобальний максимум. Наведемо деякі поняття, використововані в математичному програмуванні, і основні результати теорії двоїстості.

Для кожної задачі нелінійного програмування можна побудувати деяку іншу задачу нелінійної оптимізації, пов'язану з вихідною. Перша називається *прямою* задачею, а друга — *двоїстою*. За деяких припущень щодо опуклості пряма і двоїста задачі мають однакові оптимальні значення цільових функцій, що дозволяє отримувати розв'язок вихідної задачі, розв'язуючи двоїсту до неї задачу.

У цьому розділі обговорюються деякі властивості двоїстої задачі, які використовуються для побудови загальних стратегій розв'язання прямої і двоїстої задач. Як побічний результат однієї з теорем двоїстості буде сформульована (без припущень про диференційовність) необхідна умова оптимальності, пов'язана з сідловими точками деяких функцій.

2.1. Задача, двоїста за Лагранжем

Розглянемо задачу P нелінійного програмування, яку називатимемо прямою задачею.

Пряма задача P :

$$\begin{aligned} & \text{мінімізувати} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{за умов} && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & && h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & && \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

У літературі зустрічаються різні постановки задачі, двоїстої до задачі P . Серед різних формулювань таких задач двоїста за Лагранжем задача є особливо цікавою для спеціалістів з точки зору створення різних алгоритмів розв'язання як лінійних задач великої розмірності, так і задач опуклого і неопуклого нелінійного програмування. Останнім часом двоїстість за Лагранжем застосовується в аналізі задач дискретної оптимізації, де всі або деякі змінні вважаються цілими. Двоїста за Лагранжем задача формулюється таким чином.

2. ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА І ДВОЇСТІТЬ. СІДЛОВІ УМОВИ І ТОЧКИ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Двоїста задача D:

максимізувати $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$

за умов $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$,

$$\text{де } \theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \right\}.$$

Функція $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ називається двоїстою функцією Лагранжа. Функцію

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \text{ звичайно називають функцією Лагранжа.}$$

Тут $\boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\lambda}$ відповідно m -вимірний і l -вимірний вектори з компонентами μ_i і λ_i . Зауважимо, що для деяких $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ функція θ може набувати значення $-\infty$. У формулюванні двоїстої за Лагранжем задачі обмеження $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ і $h_i(\mathbf{x}) = 0$ введені у цільову функцію з множниками Лагранжа μ_i і λ_i . Слід відмітити, що множники μ_i , що відповідають обмеженням-нерівностям $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, невід'ємні, тоді як λ_i , які відповідають обмеженням-рівностям $h_i(\mathbf{x}) = 0$, можуть мати довільний знак.

Оскільки двоїста задача полягає у максимізації нижньої грані функції $f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x})$, то її інколи називають максимінною двоїстою задачею.

Пряму і двоїсту задачі можна записати також у векторній формі, якою будемо послуговуватися у подальшому. Нехай $\mathbf{g}: R_n \rightarrow R_m$ – вектор-функція з компонентами g_i , $\mathbf{h}: R_n \rightarrow R_l$ – вектор-функція з компонентами h_i .

Пряма задача P:

мінімізувати $f(\mathbf{x})$

за умов $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X.$$

Двоїста задача D:

максимізувати $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$

за умов $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$,

$$\text{де } \theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \right\}.$$

Для кожної задачі нелінійного програмування можна побудувати різні двоїсті задачі залежно від того, які з обмежень розглядаються як нерівності $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ і рівності $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, а які віднесені до визначення множини X . Цей вибір впливає на складність оцінки і обчислення функції θ при розв'язанні двоїстої задачі. Належне визначення множини X обумовлюється структурою задачі.

2.1.1. Геометрична інтерпретація двоїстої за Лагранжем задачі

Розглянемо коротко геометричну інтерпретацію двоїстої задачі. Для спрощення візьмемо задачу з одним обмеженням-нерівністю. У такому разі пряма задача має вигляд:

мінімізувати $f(\mathbf{x})$

за умов $g(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in X$.

На рис. 2.1 у площині (z_1, z_2) наведена множина $G = \{(z_1, z_2) : z_1 = g(\mathbf{x}), z_2 = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$. Очевидно, що G – образ множини X при відображенні (g, f) . Пряма задача полягає у знаходженні точки із множини G , що розташована лівіше осі z_2 з мінімальною ординатою. Очевидно, що такою точкою буде точка (\bar{z}_1, \bar{z}_2) , вказана на рис. 2.1.

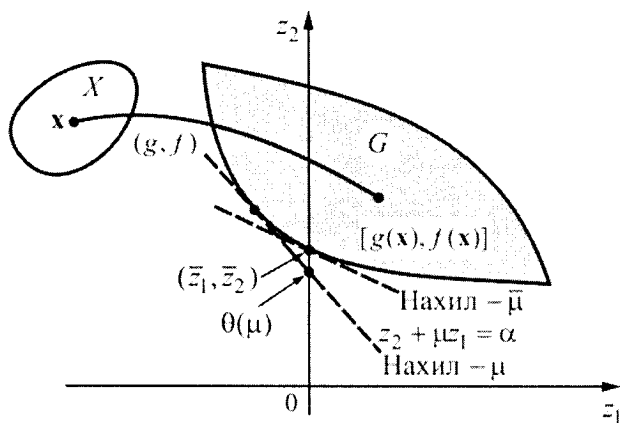


Рис. 2.1

Припустимо тепер, що задане деяке $\mu \geq 0$. Для визначення $\theta(\mu)$ треба мінімізувати $f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$. Інакше кажучи, якщо вважати $z_1 = g(\mathbf{x}), z_2 = f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$, то для визначення $\theta(\mu)$ треба мінімізувати $z_2 + \mu z_1$ на множині G . Зауважимо, що $z_2 + \mu z_1 = \alpha$ – рівняння прямої, яка має нахил $-\mu$ відносно осі z_2 і перетинає її в точці $(0, \alpha)$. Для того, щоб мінімізувати $z_2 + \mu z_1$ на множині G , необхідно переміщувати пряму $z_2 + \mu z_1 = \alpha$ паралельно до самої себе поки вона не стане опорною до множини G , тобто поки G , залишаючись вище прямої, не буде торкатися її. Тоді точка перетину цієї прямої з віссю z_2 вкаже значення $\theta(\mu)$, як це видно на рис. 2.1. Тому двоїста задача полягає у знаходженні такого нахилу опорної гіперплощини, при якому значення координати z_2 точки її перетину з віссю z_2 буде максимальним. Як видно з рис. 2.1, така гіперплощина має нахил $-\bar{\mu}$ і є опорною до множини G в точці

(\bar{z}_1, \bar{z}_2) . Таким чином, оптимальним розв'язком двоїстої задачі є $\bar{\mu}$, а оптимальним значенням цільової функції – \bar{z}_2 . Зауважимо, що оптимальні значення прямої і двоїстої задач співпадають.

2.2. Теореми двоїстості і сідлові точки

У цьому підрозділі досліджується зв'язок між прямою і двоїстою задачами і визначаються умови оптимальності для прямої задачі, пов'язані із сідловими точками.

Наступна *слабка теорема двоїстості* стверджує, що значення цільової функції в будь-якій допустимій точці двоїстої задачі є оцінкою знизу для значень цільової функції в будь-якій допустимій точці прямої задачі.

Теорема 2.1 (слабка теорема двоїстості). Нехай \mathbf{x} – допустимий розв'язок задачі P , тобто $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, а $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ – допустимий розв'язок задачі D . Тоді $f(\mathbf{x}) \geq \theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$.

Наведемо деякі важливі наслідки з цієї теореми.

Наслідок 1. $\inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \geq \sup \{\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\}$.

Наслідок 2. Якщо $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq (\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, де $\bar{\boldsymbol{\mu}} \geq \mathbf{0}$ і $\bar{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, то $\bar{\mathbf{x}}$ і $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ – оптимальні розв'язки прямої і двоїстої задач відповідно.

Наслідок 3. Якщо $\inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = -\infty$, то $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = -\infty$ для всіх $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Наслідок 4. Якщо $\sup \{\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\} = \infty$, то пряма задача не має допустимих розв'язків.

2.2.1. Розрив двоїстості

Із наслідку 1 випливає, що оптимальне значення цільової функції прямої задачі не менше, ніж оптимальне значення цільової функції двоїстої задачі. Якщо виконується строга нерівність, то кажуть, що має місце *розрив двоїстості*. На рис. 2.2 показаний випадок, коли існує розрив двоїстості в задачі з єдиним обмеженням-нерівністю. На цьому рисунку через 1 позначений розрив двоїстості, 2 — оптимальне значення цільової функції прямої задачі, 3 – оптимальне значення цільової функції двоїстої задачі.

Умови, що гарантують відсутність розриву двоїстості, сформульовані в наступній теоремі 2.2, яка звичайно називається *сильною теоремою двоїстості*. Ця теорема стверджує, що при відповідних припущеннях про опуклість і виконання умов регулярності, оптимальні значення цільових функцій прямої і двоїстої задач співпадають.

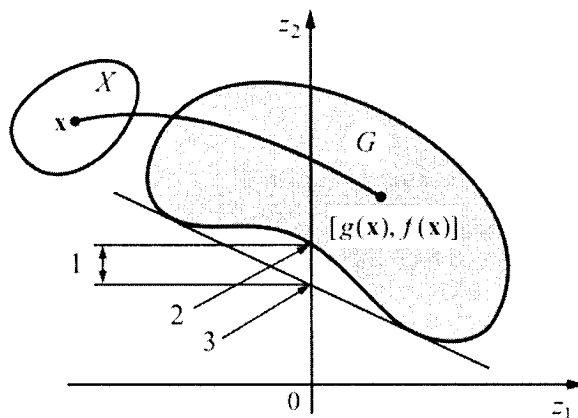


Рис. 2.2

Теорема 2.2 (сильна теорема двоїстості). Нехай X – непорожня опукла множина в R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$, $g: R_n \rightarrow R_m$ опуклі, а $h: R_n \rightarrow R_m$ афінна, тобто $h(x) = Ax - b$. Припустимо, що виконується наступна умова регулярності. Існує такий вектор $\bar{x} \in X$, що $g(\bar{x}) < 0$, $h(\bar{x}) = 0$, крім того, $0 \in \text{int} h(X)$. Тут $h(X) = \{h(x) : x \in X\}$.

Тоді

$$\inf \{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = \sup \{\theta(\mu, \lambda) : \mu \geq 0\}. \quad (2.1)$$

Якщо нижня грань скінченна, то $\sup \{\theta(\mu, \lambda) : \mu \geq 0\}$ досягається у точці $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$, для якої $\bar{\mu} \geq 0$. Якщо нижня грань досягається у точці \bar{x} , то $\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0$.

У наведеній теоремі вимога $0 \in \text{int} h(X)$ і існування такого $\bar{x} \in X$, що $g(\bar{x}) < 0$, $h(\bar{x}) = 0$, можуть розглядатися як деяке узагальнення умови регулярності Слейтера. Так, якщо $X = R_n$, то припущення $0 \in \text{int} h(X)$ виконується автоматично, так що умова регулярності полягає у вимозі існування точки \bar{x} , для якої $g(\bar{x}) < 0$, $h(\bar{x}) = 0$. Щоб переконатися в цьому, покладемо $h(x) = Ax - b$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що ранг матриці A дорівнює m , оскільки інакше можна відкинути зайві обмеження. Будь-який вектор $y \in R_m$ можна подати у вигляді $y = Ax - b$, де $x = A^T (AA^T)^{-1} (y + b)$. Таким чином, $h(X) = R_m$ і $0 \in \text{int} h(X)$.

2.2.2. Критерій сідлової точки

Ґрунтуючись на теоремі 2.2 можна отримати добре відомий критерій оптимальності розв'язків прямої і двоїстої задач в термінах сідлової точки функції Лагранжа. Значимо, що необхідна умова оптимальності вимагає опуклості і регулярності, тоді як достатня умова не потребує цих припущень.

Теорема 2.3 (про сідлову точку). Нехай X – непорожня множина в R_n , і $f: R_n \rightarrow R_1$, $g: R_n \rightarrow R_m$, $h: R_n \rightarrow R_l$. Припустимо, що існують $\bar{x} \in X$ і $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ такі, що $\bar{\mu} \geq 0$ і

$$\varphi(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \varphi(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \quad (2.2)$$

для всіх $x \in X$ і всіх (μ, λ) таких, що $\mu \geq 0$, де $\varphi(x, \mu, \lambda) = f(x) + \mu^T g(x) + \lambda^T h(x)$.

Тоді \bar{x} і $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ є відповідно розв'язками прямої задачі P і двоїстої задачі D .

Навпаки, припустимо, що X – опукла множина, функції f і g опуклі, а h афінна, тобто $h(x) = Ax - b$. Крім того, припустимо, що $0 \in \text{int} h(X)$ і існує $\bar{x} \in X$, такий, що $g(\bar{x}) < 0$, $h(\bar{x}) = 0$. Якщо \bar{x} – оптимальний розв'язок задачі P , то знайдеться вектор $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$, такий, що $\bar{\mu} \geq 0$ і справедливі нерівності (2.2).

2.2.3. Умови оптимальності Ф. Джона і Куна-Таккера

Розглянемо умови оптимальності для задачі P :

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && f(x) \\ &\text{за умов} && g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & && h_i(x) = 0, \quad i=1,2,\dots,l, \\ & && x \in X, \end{aligned}$$

де $f, g_i, h_i: R_n \rightarrow R_m$ і X – непорожня відкрита множина в R_n .

Спочатку сформулюємо необхідні умови оптимальності Ф.Джона. Якщо \bar{x} – точка локального оптимуму розглядуваної задачі, то існує такий ненульовий вектор $(\lambda_0, \mu, \lambda)$, що

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) &= 0, \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad i=1, \dots, m, \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad \lambda_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m. \end{aligned}$$

Скаляри λ_0 , μ_i і λ_i є множниками Лагранжа. Множник λ_0 пов'язаний з цільовою функцією, множник μ_i з i -м обмеженням-нерівністю $g_i(x) \leq 0$, а множник λ_i – з i -м обмеженням-рівністю $h_i(x) = 0$. Умова $\mu_i g_i(\bar{x}) = 0$ називається умовою доповнюючої нежорсткості і вказує, що або $\mu_i = 0$, або $g_i(\bar{x}) = 0$. Таким чином, якщо $g_i(\bar{x}) < 0$, то $\mu_i = 0$. Позначивши через I множину індексів активних обмежень-нерівностей в точці \bar{x} , тобто $I = \{i: g_i(\bar{x}) = 0\}$, перепишемо умову Ф.Джона у такій еквівалентній формі. Якщо \bar{x} – локальний оптимальний розв'язок задачі P , то знайдеться такий ненульовий вектор $(\lambda_0, \mu_I, \lambda)$, де μ_I – вектор множників Лагранжа, пов'язаних з обмеженнями $g_i(x) \leq 0$ при $i \in I$, що

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i \in I.$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то умови Ф. Джона фактично є зайвими, оскільки по суті вони просто вказують, що градієнти функцій, які визначають активні обмеження-нерівності, і градієнти функцій, які задають обмеження-рівності, утворюють систему лінійно залежних векторів. При відповідних припущеннях, що називаються *умовами регулярності*, гарантується додатність λ_0 і умови Ф. Джона переходять в умови Куна-Таккера. Типовою умовою регулярності є вимога лінійної незалежності системи векторів, що складається з градієнтів функцій, які задають обмеження-нерівності при $i \in I$, і градієнтів функцій, які задають обмеження-рівності, в точці $\bar{\mathbf{x}}$.

Необхідні умови оптимальності Куна-Таккера можна сформулювати в такому вигляді. Нехай $\bar{\mathbf{x}}$ – локальний оптимальний розв'язок задачі P і виконується деяка відповідна умова регулярності. Тоді існує такий вектор $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, що

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

$$\mu_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Як і раніше, μ_i і λ_i – множники Лагранжа, пов'язані з обмеженнями $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ і $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $\mu_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ – умова доповнюючої нежорсткості. Якщо позначити $I = \{i: g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$, то необхідні умови Куна-Таккера можна подати у вигляді

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i \in I.$$

При відповідних припущеннях про опуклість умови Куна-Таккера є також і достатніми умовами оптимальності. Зокрема, нехай $\bar{\mathbf{x}}$ – допустимий розв'язок задачі P і нехай для цієї точки виконуються умови Куна-Таккера, тобто

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i \in I,$$

де $I = \{i: g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Якщо f – псевдоопукла функція, g_i – квазіопуклі при $i \in I$, h_i – квазіопуклі при $\lambda_i > 0$ і квазіугнуті при $\lambda_i < 0$ функції, то $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв'язок задачі P .

Для пояснення умов Куна-Таккера розглянемо таку задачу:

мінімізувати $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

2. ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА І ДВОЇСТІТЬ. СІДЛОВІ УМОВИ І ТОЧКИ ОПТИМАЛЬНОСТІ

за умов

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leq 5, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ -x_1 &\leq 0, \\ -x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Задача ілюструється рисунком 2.3. Оптимальною точкою є $\bar{x} = (2, 1)^T$. Спочатку перевіримо, що в точці \bar{x} виконуються умови Куна-Таккера. У цій точці множина індексів активних обмежень $I = \{1, 2\}$. Отже, відповідно до вимоги доповнюючої нежорсткості мають виконуватися рівності $\mu_3 = \mu_4 = 0$. Оскільки $\nabla f(\bar{x}) = (-2, -2)^T$, $\nabla g_1(\bar{x}) = (4, 2)^T$, $\nabla g_2(\bar{x}) = (1, 2)^T$, то $\nabla f(\bar{x}) + \mu_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \mu_2 \nabla g_2(\bar{x}) = \mathbf{0}$ при $\mu_1 = \frac{1}{3}$ і $\mu_2 = \frac{2}{3}$, тобто в точці \bar{x} виконуються умови Куна-Таккера. Оскільки f , g_1 , g_2 – опуклі функції, умови Куна-Таккера є достатніми для оптимальності, тобто \bar{x} – дійсно оптимальна точка.

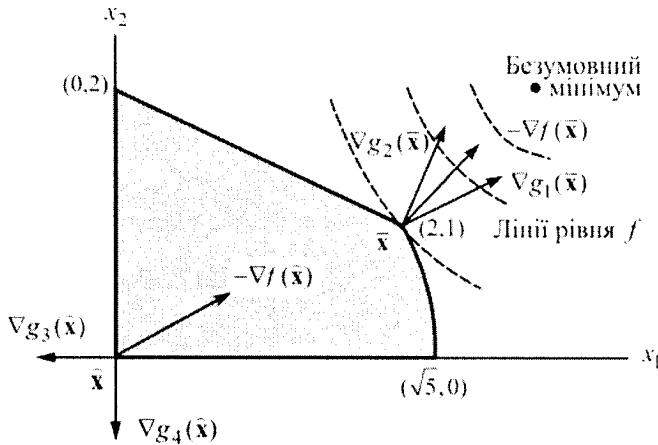


Рис. 2.3

Перевіримо тепер, чи виконуються умови Куна-Таккера в точці $\hat{x} = (0, 0)^T$. Тут $I = \{3, 4\}$, отже відповідно до вимоги доповнюючої нежорсткості має бути $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Оскільки $\nabla f(\hat{x}) = (-6, -4)^T$, $\nabla g_3(\hat{x}) = (-1, 0)^T$, $\nabla g_4(\hat{x}) = (0, -1)^T$, то $\nabla f(\hat{x}) + \mu_3 \nabla g_3(\hat{x}) + \mu_4 \nabla g_4(\hat{x}) = \mathbf{0}$ при $\mu_3 = -6$ і $\mu_4 = -4$. Умова невід’ємності множників Лагранжа не виконується. Це показує, що \hat{x} не є точкою Куна-Таккера і, отже, не може бути оптимальною.

На рис. 2.3 показані градієнти цільової функції і функцій активних обмежень як у точці \bar{x} , так і у точці \hat{x} . Відмітимо, що $-\nabla f(\bar{x})$ лежить у конусі, натягнутому на

градієнти функцій активних обмежень в точці \bar{x} , а $-\nabla f(\bar{x})$ не належить відповідному конусу. Умови Куна-Таккера для задачі з обмеженнями-нерівностями можна геометрично пояснити таким чином. Вектор \bar{x} є точкою Куна-Таккера тоді і тільки тоді, коли вектор $-\nabla f(\bar{x})$ лежить в конусі, натягнутому на градієнти функцій активних обмежень в точці \bar{x} .

2.2.4. Зв'язок між критерієм сідлової точки і умовами оптимальності Куна-Таккера

У попередньому пункті обговорювалися умови оптимальності Куна-Таккера для задачі P :

$$\begin{aligned} \text{мінімізувати} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{за умов} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

В теоремі 2.3 для цієї ж задачі сформульовані умови оптимальності розв'язку прямої і двоїстої задач, пов'язані із сідловими точками функції Лагранжа. Зв'язок між цими двома типами умов оптимальності встановлює наступна теорема.

Теорема 2.4. Нехай $S = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Розглянемо задачу P , яка полягає в мінімізації $f(\bar{x})$ за умови $\mathbf{x} \in S$. Припустимо, що в точці $\bar{x} \in S$ виконуються умови оптимальності Куна-Таккера, тобто існують такі вектори $\bar{\mu} \geq \mathbf{0}$ і $\bar{\lambda}$, що

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \nabla \mathbf{g}(\bar{x})\bar{\mu} + \nabla \mathbf{h}(\bar{x})\bar{\lambda} &= \mathbf{0}, \\ \bar{\mu}^T \mathbf{g}(\bar{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нехай $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. Припустимо, що функції f і g_i при $i \in I$ опуклі в точці \bar{x} , а h_i афінна, якщо $\bar{\lambda}_i \neq 0$. Тоді точка $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ задовольняє умову оптимальності сідлової точки

$$\varphi(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \varphi(\mathbf{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \tag{2.4}$$

для всіх $\mathbf{x} \in X$ і всіх (μ, λ) , для яких $\mu \geq \mathbf{0}$. Тут $\varphi(\mathbf{x}, \mu, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Навпаки. Нехай $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$, де $\bar{x} \in \text{int } X$, $\bar{\mu} \geq \mathbf{0}$, задовольняє умову оптимальності сідлової точки (2.4). Тоді \bar{x} – допустимий розв'язок задачі P і, крім того, вектор $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ задовольняє умови Куна-Таккера (2.3).

Наведена теорема 2.4 стверджує, що у разі, коли \bar{x} – точка Куна-Таккера, то при деяких припущеннях про опуклість множники Лагранжа, які фігурують в умовах Куна-Таккера, задовольняють умови критерію сідлової точки (2.4). І навпаки, множники μ , λ із критерію сідлової точки є множниками Лагранжа в умовах Куна-Таккера. Більш того, згідно з теоремами 2.2, 2.3 і 2.4, оптимальні значення змінних двоїстої за Лагранжем задачі в точності співпадають з

множниками Лагранжа з умов Куна-Таккера і з множниками, що фігурують в критерії сідлової точки.

2.3. Властивості двоїстої функції Лагранжа

У п. 2.2 вивчався взаємозв'язок між прямою і двоїстою задачами. У теоремі 2.2 стверджується, що за деяких умов оптимальні значення цільових функцій прямої і двоїстої задач співпадають. Це дає можливість не розв'язувати пряму задачу безпосередньо, а знаходити розв'язки двоїстої до неї задачі. Для полегшення розв'язання двоїстої задачі, слід спиратися на властивості двоїстої функції Лагранжа. Зокрема, нижче зазначається, що θ – угнута функція, а також обговорюються диференційовність і субдиференційовність двоїстої функції Лагранжа, характеризуються напрями підйому і найшвидшого підйому для функції θ .

Далі в цьому розділі для спрощення вважатимемо, що X – компакт. Зазначимо, що це припущення не є дуже обмежувальним. У разі, коли X – необмежена множина, а множина розв'язків обмежена, можна додати відповідні нижні і верхні границі на змінні таким чином, щоб розв'язок знаходився усередині відповідного багатовимірного паралелепіпеда. Для зручності позначатимемо через \mathbf{w} вектор, складений з компонент векторів $\boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\lambda}$, а через $\boldsymbol{\beta}$ – вектор-функцію, складену з $g_i, i=1,2,\dots,m, h_i, i=1,2,\dots,l$. Наступна теорема стверджує, що θ – угнута функція.

Теорема 2.5. Нехай X – непорожня компактна множина в R_n , $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\boldsymbol{\beta}: R_n \rightarrow R_{m+l}$ – неперервні функції. Тоді двоїста функція Лагранжа

$$\theta(\mathbf{w}) = \inf \{ f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}$$

угнута на R_{m+l} .

Відомо, що у разі, коли функція θ угнута, будь-який її локальний оптимум є і глобальним. Цей факт робить привабливою задачу знаходження максимуму θ . Проте, основна трудність у розв'язанні двоїстої задачі полягає в тому, що не відомий її явний вигляд, оскільки θ може бути обчислена в точці тільки після того, як розв'язана відповідна підзадача мінімізації. Далі звернемось до властивостей диференційовності і субдиференційовності двоїстої функції Лагранжа, які є корисними при розв'язанні задачі максимізації двоїстої функції θ .

2.3.1. Диференційовність функції θ

Розглянемо диференційовність двоїстої функції Лагранжа $\theta(\mathbf{w}) = \inf \{ f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}$. Зручно ввести таку множину:

$$X(\mathbf{w}) = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} \text{ робить мінімальною } f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{x} \in X \}.$$

Диференційовність функції θ в деякій точці \bar{w} залежить від елементів множини $X(\bar{w})$. Зокрема, якщо $X(\bar{w})$ складається з однієї точки, то функція θ диференційована у \bar{w} . Справедлива така теорема.

Теорема 2.6. Нехай X – непорожній компакт у R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\beta: R_n \rightarrow R_{m+1}$ – неперервні, $\bar{w} \in R_{m+1}$. Припустимо, що $X(\bar{w})$ складається з єдиної точки $\{\bar{x}\}$. Тоді функція θ диференційована у \bar{w} і градієнти $\nabla\theta(\bar{w}) = \beta(\bar{x})$.

2.3.2. Субградієнти опуклих функцій

Розглянемо важливе поняття субградієнта опуклих і угнутих функцій. Оскільки надграфік опуклої функції і підграфік угнутої є опуклими множинами, то в їх граничних точках існують опорні гіперплощини, які приводять до поняття субградієнта. Субградієнти відіграють важливу роль при розв’язанні задачі максимізації двоїстої функції Лагранжа, вони природним чином приводять до визначення напрямів підйому.

Означення. Нехай S – непорожня опукла множина в R_n , $f: S \rightarrow R_1$ – опукла функція. Вектор ξ називається *субградієнтом* функції f у точці $\bar{x} \in S$, якщо

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \text{ для всіх } x \in S.$$

Аналогічно, якщо $f: S \rightarrow R_1$ – угнута функція, то ξ називається *субградієнтом* f у точці $\bar{x} \in S$, якщо

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \text{ для всіх } x \in S.$$

З наведеного означення випливає, що сукупність всіх субградієнтів функції f у точці \bar{x} є опуклою множиною. На рис. 2.4 показані приклади субградієнтів опуклої (рис. 2.4,а) і угнутої функцій(рис. 2.4,б). З прикладів видно, що функція $f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$ відповідає опорній гіперплощині до надграфіка або підграфіка функції f . Субградієнт ξ відповідає тангенсу кута нахилу опорної гіперплощини.

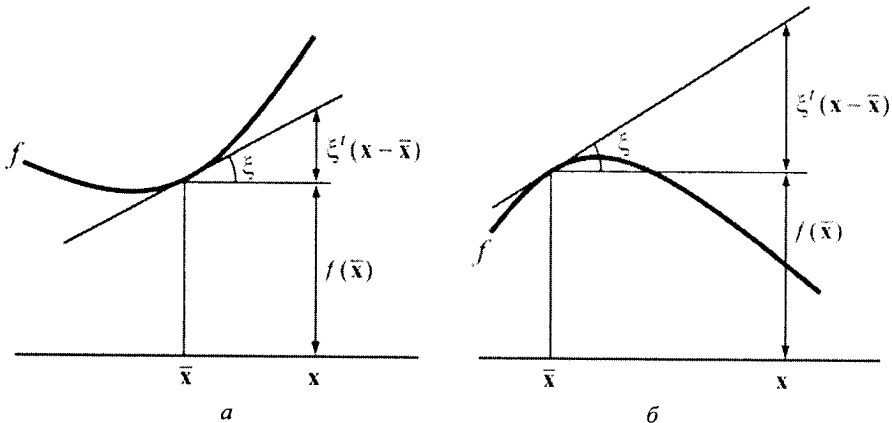


Рис. 2.4

Наступна теорема стверджує, що кожна опукла або угнута функція має принаймні один субградієнт у будь-якій внутрішній точці своєї області ефективності.

Теорема 2.7. Нехай S – непорожня опукла множина в R_n , $f: S \rightarrow R_1$ – опукла функція. Тоді для будь-якої точки $\bar{x} \in \text{int } S$ існує вектор ξ такий, що гіперплощина

$$H = \{(\mathbf{x}, y) : y = f(\bar{\mathbf{x}}) + \xi^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\}$$

є опорною до епі f у точці $[\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}})]$. Зокрема

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + \xi^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in S,$$

тобто ξ є субградієнтом $f(\mathbf{x})$ у точці $\bar{\mathbf{x}}$.

Доведення цієї теореми ґрунтується на тому, що опукла множина має опорну гіперплощину в кожній своїй граничній точці.

Наслідок. Нехай S – непушта опукла множина в R_n , $f: S \rightarrow R_1$ – строго опукла функція. Тоді для кожного $\mathbf{x} \in \text{int } S$ існує такий вектор ξ , що

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + \xi^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in S.$$

Теорема, обернена до теореми 2.7, в загальному випадку не є вірною, тобто якщо в кожній точці $\mathbf{x} \in \text{int } S$ функція f має субградієнт, то вона не обов'язково опукла.

2.3.3. Субградієнт функції θ

У наведеній вище теоремі 2.5 стверджується, що θ – угнута функція і, отже, за теоремою 2.7 вона субдиференційовна, тобто має субградієнти. Наступна теорема стверджує, що кожен вектор $\bar{\mathbf{x}} \in X(\bar{\mathbf{w}})$ визначає субградієнт функції θ в точці $\bar{\mathbf{w}}$.

Теорема 2.8. Нехай X – непорожній компакт в R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\beta: R_n \rightarrow R_{m+l}$ неперервні, так що для будь-якого $\bar{\mathbf{w}} \in R_{m+l}$ множина $X(\bar{\mathbf{w}})$ непорожня. Якщо $\bar{\mathbf{x}} \in X(\bar{\mathbf{w}})$, то $\beta(\bar{\mathbf{x}})$ – субградієнт функції θ в точці $\bar{\mathbf{w}}$.

Приклад 2.1. Розглянемо таку задачу:

$$\begin{aligned} \text{мінімізувати} & \quad -x_1 - x_2 \\ \text{за умов} & \quad x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ & \quad x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ або } 3. \end{aligned}$$

Позначимо $g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3$, $X = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ або } 3\}$. Тоді двоїста функція Лагранжа набирає вигляду:

$$\theta(u) = \inf \left\{ -x_1 - x_2 + \mu(x_1 + 2x_2 - 3) : x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ або } 3 \right\} = \begin{cases} -6 + 6\mu & 0 \leq \mu \leq 1/2, \\ -3 & 1/2 \leq \mu \leq 1, \\ -3\lambda & \mu \geq 1. \end{cases}$$

Нехай $\bar{\mu} = \frac{1}{2}$. Для того, щоб знайти субградієнт функції θ в точці $\bar{\mu}$, розглянемо таку допоміжну задачу:

$$\text{мінімізувати} \quad -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3),$$

$$\text{за умови} \quad x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ або } 3.$$

Легко бачити, що множиною $X(\bar{\mu})$ оптимальних розв'язків останньої задачі є $\{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. Тоді в силу теореми 2.8 $g(3,0) = 0$, $g(3,1) = 2$, $g(3,2) = 4$. $g(3,3) = 6$ – субградієнти функції θ в точці $\bar{\mu}$. Відмітимо, що $3/2$ також є субградієнтом функції θ в точці $\bar{\mu}$, проте не представляється у вигляді $g(\bar{x})$ для деякого $\bar{x} \in X(\bar{\mu})$.

Із цього прикладу видно, що теорема 2.8 дає тільки деяку достатню характеристику субградієнтів. Необхідні і достатні умови того, що вектор є субградієнтом двоїстої функції Лагранжа, будуть сформульовані в теоремі 2.10. Проте, раніше наведемо теорему 2.9, що встановлює ще один важливий результат.

Теорема 2.9. Нехай X – непорожній компакт в R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\beta: R_n \rightarrow R_{m+1}$ – неперервні і $\bar{w}, d \in R_{m+1}$. Тоді

$$\theta'(\bar{w}, d) \geq d^T \beta(\bar{x}) \text{ для деякого } \bar{x} \in X(\bar{w}).$$

Наслідок. Нехай виконуються припущення теореми і $\partial\theta(\bar{w})$ – сукупність субградієнтів функції θ в точці \bar{w} . Тоді

$$\theta'(\bar{w}, d) = \inf \{ d^T \xi : \xi \in \partial\theta(\bar{w}) \}.$$

Теорема 2.10. Нехай X – непорожній компакт в R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\beta: R_n \rightarrow R_{m+1}$ – неперервні. Вектор ξ є субградієнтом функції θ в точці $\bar{w} \in R_{m+1}$ тоді і тільки тоді, коли він належить опуклій оболонці множини $\{\beta(y) : y \in X(\bar{w})\}$.

2.3.4. Напрями підйому і найшвидшого підйому

Двоїста задача полягає в максимізації функції θ за умови, що $\mu \geq 0$. Якщо задана деяка точка $w^T = (\mu^T, \lambda^T)$, то природним є бажання визначити напрями, уздовж яких функція зростає. Наведемо таке означення.

Означення. Вектор d називається *напрямом підйому* функції θ в точці w , якщо існує таке $\delta > 0$, що

$$\theta(w + v d) > \theta(w) \text{ при кожному } v \in (0, \delta).$$

Зауважимо, що у разі коли функція θ угнута, вектор d є напрямом підйому функції θ в точці w тоді і тільки тоді, коли $\theta'(w, d) > 0$. Функція θ досягає максимуму в точці w тоді і тільки тоді, коли в ній не існує напрямів підйому, тобто тоді і тільки тоді, коли $\theta'(w, d) \leq 0$ для всіх d .

За наслідком з теореми 2.9 вектор \mathbf{d} є напрямом підйому функції θ в точці \mathbf{w} тоді і тільки тоді, коли $\inf \{ \mathbf{d}^T \xi \in \partial\theta(\mathbf{w}) \} > 0$, тобто тоді і тільки тоді, коли для деякого $\varepsilon > 0$ при кожному $\xi \in \partial\theta(\mathbf{w})$ виконується нерівність $\mathbf{d}^T \xi \geq \varepsilon > 0$.

Оскільки функція θ має максимізуватися, то цікаво мати не просто напрям підйому, а напрям, уздовж якого θ зростає найшвидше.

Означення. Вектор $\bar{\mathbf{d}}$ називається *напрямом найшвидшого підйому* функції θ в точці \mathbf{w} , якщо

$$\theta'(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{d}}) = \max_{\|\mathbf{d}\| \leq 1} \theta'(\mathbf{w}, \mathbf{d}).$$

Теорема 2.11. Нехай X – непорожній компакт у R_n , функції $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\beta: R_n \rightarrow R_{m+l}$ опуклі. Позначимо через ξ субградієнт із $\partial\theta(\mathbf{w})$ з найменшою евклідовою нормою. Тоді напрям найшвидшого підйому $\bar{\mathbf{d}}$ функції θ в точці \mathbf{w} визначається таким чином:

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } \bar{\xi} = \mathbf{0}, \\ \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|}, & \text{якщо } \bar{\xi} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

2.4. Розв'язання двоїстої за Лагранжем задачі

У попередньому підрозділі описані різні властивості двоїстої функції Лагранжа, які у цьому підрозділі використовуватимуться при визначенні алгоритмів розв'язання задачі максимізації двоїстої функції в області $\{(\mu, \lambda), \mu \geq 0\}$. Зокрема, обговорюватимуться деякі процедури підйому і метод січних площин стосовно розв'язання двоїстої задачі.

2.4.1. Градієнтний метод

Для заданих $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ значення двоїстої функції Лагранжа можна дістати із розв'язку такої допоміжної задачі:

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && f(\mathbf{x}) + \bar{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ &\text{за умови} && \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Наслідок з наступної теореми 2.12 дає необхідну умову першого порядку, за якої функція $f(\mathbf{x})$ має в точці $\bar{\mathbf{x}}$ локальний оптимум.

Теорема 2.12. Нехай функція $f: R_n \rightarrow R_1$ диференційовна в точці $\bar{\mathbf{x}}$ і $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} < 0$ для деякого вектора \mathbf{d} . Тоді існує таке $\delta > 0$, що $f(\bar{\mathbf{x}} + \mu \mathbf{d}) < f(\bar{\mathbf{x}})$ для всіх $\mu \in (0, \delta)$, тобто \mathbf{d} – напрямом спуску f із точки $\bar{\mathbf{x}}$.

Наслідок. Нехай функція $f: R_n \rightarrow R_1$ диференційовна в $\bar{\mathbf{x}}$. Якщо $f(\mathbf{x})$ має в точці $\bar{\mathbf{x}}$ локальний мінімум, то $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

Припустимо, що $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв’язок. Тоді за теоремою 2.6 маємо $\nabla\theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})^T = [\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})^T, \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})^T]$. Якщо $\nabla\theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \neq \mathbf{0}$, то за теоремою 2.12 цей вектор є напрямом підйому і функція θ зростатиме при пересуванні із $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ вздовж $\nabla\theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Проте, якщо деякі компоненти $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ дорівнюють нулю, а відповідні $g_i(\bar{\mathbf{x}})$ від’ємні, то $\bar{\boldsymbol{\mu}} + \nu \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ при $\nu \geq 0$, отже, не задовольняється умова невід’ємності. Щоб врахувати цю обставину, використаємо модифікований напрям $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})]$, де $\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}})$ визначається таким чином:

$$\hat{g}_i(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{cases} g_i(\bar{\mathbf{x}}), & \text{якщо } \bar{\mu}_i < 0, \\ \max[0, g_i(\bar{\mathbf{x}})], & \text{якщо } \bar{\mu}_i = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Наступна теорема стверджує, що $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})]$ визначає допустимий напрям підйому для функції θ в точці $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Більш того, $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})]$ – нульовий вектор тільки в тому разі, коли в двоїстій задачі досягнуто максимум.

Теорема 2.13. Нехай $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \in R_{m+l}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}} \geq \mathbf{0}$. Припустимо, що функція θ диференційовна у точці $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ і її градієнт дорівнює $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})]$. Якщо $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})] \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, то $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})]$ – допустимий напрям підйому для функції θ в $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Якщо $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})] = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, то θ досягає на області $\{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\}$ максимуму в точці $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$.

Справді, нехай $\mathbf{d}^T = [\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}})^T, \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})^T]$. За побудовою функції $\hat{\mathbf{g}}$ напрям \mathbf{d} є допустимим. Якщо $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, то $\nabla\theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})^T \mathbf{d} > 0$ і за теоремою 2.12 вектор \mathbf{d} є напрямом підйому. Нехай тепер $[\hat{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})] = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Оскільки $\hat{g}_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ для всіх i , то $g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$ і $\bar{\mu}_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ при всіх i . Інакше

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0} \quad \text{і} \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.6)$$

Розглянемо двоїсту задачу максимізації $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ при $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$. У точці $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ виконуються умови Куна-Таккера, якщо існує такий вектор $\mathbf{h} \leq \mathbf{0}$, що $\nabla\theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})^T = (\mathbf{b}, \mathbf{0})$ і $\bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{b} = 0$. Із (2.6) випливає, що при $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})$ ці умови виконуються. Оскільки θ – угнута функція, то для того, щоб точка $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ була оптимальною, достатньо виконання умов Куна-Таккера.

Алгоритм градієнтного методу. Якщо виконуються припущення теореми 2.6, то функція θ диференційовна і для розв’язання задачі максимізації θ на множині $\{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\}$ можна застосувати таку схему.

На другому кроці алгоритму розв’язується задача мінімізації функції однієї змінної ν . Для спрощення припускатимемо, що існує скінченне оптимальне значення ν_k . Якщо це не так, то або оптимальне значення цільової функції не

обмежене, або обмежене, але не досягається при жодному ν . У першому випадку процедура зупиняється і робиться висновок, що цільова функція двоїстої задачі необмежена на допустимій множині, а пряма задача нерозв'язна. У другому випадку за ν_k можна обрати довільне достатньо велике число.

Початковий етап. Вибрати вектор (μ_1, λ_1) , такий, що $\mu_1 \geq 0$, покласти $k=1$ і перейти до основного етапу.

Основний етап. Крок 1. При заданому (μ_k, λ_k) розв'язати таку допоміжну задачу:

$$\begin{array}{ll} \text{мінімізувати} & f(\mathbf{x}) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \text{за умови} & \mathbf{x} \in X. \end{array}$$

Нехай \mathbf{x}_k – єдиний оптимальний розв'язок. Побудувати вектор $[\mathbf{g}(\mathbf{x}_k), \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)]$ відповідно до (2.5). Якщо цей вектор нульовий, то зупинитися; (μ_k, λ_k) – оптимальний розв'язок. Інакше перейти до кроку 2.

Крок 2. Розглянемо таку задачу:

$$\begin{array}{ll} \text{максимізувати} & \theta[(\mu_k, \lambda_k) + \nu(\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k), \mathbf{h}(\mathbf{x}_k))] \\ \text{за умов} & \mu_k + \nu \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k) \geq 0, \\ & \nu \geq 0. \end{array}$$

Нехай ν_k – оптимальний розв'язок. Покласти $(\mu_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (\mu_k, \lambda_k) + \nu_k [\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k), \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)]$. Надати k значення $k+1$ і перейти до кроку 1.

2.4.2. Метод підйому для недиференційовної двоїстої функції

У п. 2.3 встановлено, що вектор \mathbf{d} є напрямом підйому для функції θ в точці (μ, λ) , якщо $\mathbf{d}^T \xi \geq \varepsilon > 0$ для кожного $\xi \in \partial\theta(\mu, \lambda)$. Для знаходження такого напрямку можна використати задачу:

$$\begin{array}{ll} \text{максимізувати} & \varepsilon \\ \text{за умов} & \mathbf{d}^T \xi \geq \varepsilon \text{ при } \xi \in \partial\theta(\mu, \lambda), \\ & d_i \geq 0, \text{ якщо } \mu_i = 0, \\ & -1 \leq d_i \leq 1, i = 1, \dots, m+l. \end{array}$$

Зауважимо, що обмеження $d_i \geq 0$, якщо $\mu_i = 0$, гарантують, що вектор \mathbf{d} є можливим напрямом, а нормуючі обмеження $-1 \leq d_i \leq 1$ забезпечують скінченність розв'язку задачі.

Розв'язання задачі знаходження напрямку пов'язане з такими труднощами.

1. Множина $\partial\theta(\mu, \lambda)$ і, отже, обмеження задачі відомі лише в неявному вигляді.

Проте, можна використовувати теорему 2.10, яка дає повну характеристику множини субградієнтів.

2. Множина $\partial\theta(\mu, \lambda)$ звичайно містить нескінченну кількість векторів-субградієнтів, так що маємо задачу лінійного програмування з нескінченною

кількістю обмежень. Проте, якщо $\partial\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ – багатогранник, то обмеження $\mathbf{d}^T \boldsymbol{\xi} \geq \varepsilon$ при $\boldsymbol{\xi} \in \partial\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ можна замінити обмеженнями $\mathbf{d}^T \boldsymbol{\xi}_j \geq \varepsilon, j = 1, \dots, \gamma$, де $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_\gamma$ – екстремальні точки множини $\partial\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$. Отже, в цьому разі маємо задачу лінійного програмування із скінченною кількістю обмежень.

Алгоритм підйому. Нижче розглядатиметься процедура підйому для задачі максимізації функції θ на множині $\{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\}$. Метод застосовується незалежно від того, чи є $\partial\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ багатогранною множиною, чи ні. На першому кроці робиться спроба побудувати напрям підйому за допомогою розв'язання деякої задачі лінійного програмування із скінченною кількістю обмежень. На другому кроці перевіряється, чи є отриманий на першому кроці напрям дійсно напрямом підйому.

В силу теореми 2.10 виконання кроку 2 вимагає знання всіх оптимальних розв'язків задачі мінімізації $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$, що може бути пов'язано із значними труднощами. На третьому кроці функція θ максимізується уздовж напрямку підйому, знайденого на попередніх кроках. Розв'язується задача одновимірної оптимізації відносно змінної v . Для спрощення викладення вважатимемо, що існує скінченне оптимальне значення v_k . Якщо це не так, то або оптимальне значення цільової функції необмежене, або, якщо воно обмежене, то не досягається ні при якому v . У першому випадку процедура зупиняється і робиться висновок, що цільова функція двоїстої задачі необмежена і множина допустимих розв'язків прямої задачі порожня. У другому випадку за v_k вибирається достатньо велике число.

Ця процедура в стислій формі описана нижче. Припускається, що функції $f, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ неперервні, а X – компакт, так що множина $X(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ непорожня при кожному $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$.

Початковий етап. Вибрати вектор $\mathbf{w}_1^T = (\boldsymbol{\mu}_1^T, \boldsymbol{\lambda}_1^T)$, такий, що $\boldsymbol{\mu}_1 \geq \mathbf{0}$. Розв'язати задачу мінімізації $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_1^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$. Нехай \mathbf{x}_1 – оптимальний розв'язок і $\boldsymbol{\xi}_1^T = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1)^T, \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)^T]$. Покласти $k = \gamma = 1$ і перейти до основного етапу.

Основний етап. Крок 1. При заданих $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_\gamma$ розв'язати таку задачу:

$$\begin{aligned} & \text{максимізувати} && \varepsilon \\ & \text{за умов} && \mathbf{d}^T \boldsymbol{\xi}_j \geq \varepsilon, j = 1, \dots, \gamma, \\ & && d_i \geq 0, \text{ якщо } i\text{-та компонента } \boldsymbol{\lambda}_k \text{ дорівнює } 0, \\ & && -1 \leq d_i \leq 1, i = 1, \dots, m + l. \end{aligned}$$

Нехай $(\mathbf{d}_\gamma, \varepsilon_\gamma)$ – оптимальний розв'язок. Якщо $\varepsilon_\gamma = 0$, то процедура зупиняється; напрямок підйому не існує і $\mathbf{w}_k^T = (\boldsymbol{\mu}_k^T, \boldsymbol{\lambda}_k^T)$ – оптимальний розв'язок. Якщо $\varepsilon_\gamma > 0$, перейти до кроку 2.

Крок 2. Розв'язати таку допоміжну задачу:

мінімізувати $\mathbf{d}_\gamma^T \xi$
 за умови $\xi \in \partial\theta(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$.

Нехай $\xi_{\gamma+1}$ – оптимальний розв’язок цієї задачі. Якщо $\mathbf{d}_\gamma^T \xi_{\gamma+1} > 0$, то \mathbf{d}_γ – напрям підйому; перейти до кроку 3. Якщо $\mathbf{d}_\gamma^T \xi_{\gamma+1} \leq 0$, то надати γ значення $\gamma + 1$ і перейти до кроку 1.

Крок 3. Покласти $\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_\gamma$ і розв’язати таку задачу:

максимізувати $\theta(\mathbf{w}_k + \upsilon \mathbf{d}_k)$
 за умов $(\mathbf{w}_k + \upsilon \mathbf{d}_k)_i \geq 0, i = 1, \dots, m,$
 $\upsilon \geq 0,$

де $(\mathbf{w}_k + \upsilon \mathbf{d}_k)_i$ є i -та компонента вектора $\mathbf{w}_k + \upsilon \mathbf{d}_k$. Нехай υ_k – оптимальний розв’язок. Покласти $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \upsilon \mathbf{d}_k$ і перейти до кроку 4.

Крок 4. Нехай \mathbf{x}_{k+1} – оптимальний розв’язок задачі мінімізації $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_{k+1}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$, де $(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^T, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T) = \mathbf{w}_{k+1}^T$. Покласти $\xi_1^T = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1})^T, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})^T]$. Замінити k на $k + 1$, покласти $\gamma = 1$ і перейти до кроку 1.

2.4.3. Метод січних площин

У методах розв’язання двоїстої задачі, що обговорювалися раніше, на кожній ітерації будується допустимий напрям, уздовж якого двоїста функція Лагранжа зростає. Розглянемо іншу стратегію розв’язання двоїстої задачі, за якої на кожному кроці оптимізується функція, яка апроксимує двоїсту функцію Лагранжа.

Нагадаємо, що двоїста функція Лагранжа θ має вигляд

$$\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \right\}.$$

Якщо позначити $z = \theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ то нерівність $z \leq f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ має виконуватися для кожного $\mathbf{x} \in X$. Тоді двоїста задача, що полягає в максимізації $\theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ при $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} &\text{максимізувати} && z \\ &\text{за умов} && z \leq f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X, \\ &&& \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Зауважимо, що остання задача є задачею лінійного програмування відносно змінних $z, \boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\lambda}$. На жаль, число обмежень тут нескінченне і вони представлені у неявному вигляді. Припустимо, що відомі точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ із X , і розглянемо таку задачу:

$$\begin{aligned} &\text{максимізувати} && z \\ &\text{за умов} && z \leq f(\mathbf{x}_j) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_j), \\ &&& \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Це є задача лінійного програмування із скінченним числом обмежень. Її можна розв'язати симплексним методом. Нехай (z_k, μ_k, λ_k) – її оптимальний розв'язок. Якщо цей розв'язок задовольняє (2.7), то він є оптимальним розв'язком двоїстої задачі. Щоб перевірити, чи виконується (2.7), розглянемо допоміжну задачу:

мінімізувати $f(\mathbf{x}) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$

за умови $\mathbf{x} \in X$.

Нехай \mathbf{x}_k – оптимальний розв'язок цієї задачі,

$$\theta(\mu_k, \lambda_k) = f(\mathbf{x}_k) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k).$$

Якщо $z_k \leq \theta(\mu_k, \lambda_k)$, то (μ_k, λ_k) – оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Інакше для $(\mu, \lambda) = (\mu_k, \lambda_k)$ нерівність (2.7) не виконується при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$. Тому додамо обмеження

$$z \leq f(\mathbf{x}_k) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$$

до обмежень (2.8) і знову розв'яжемо задачу лінійного програмування. Очевидно, що в оптимальній точці (z_k, μ_k, λ_k) ця нерівність не має виконуватися. Інакше кажучи, додатковими обмеженнями від області визначення відсікаються точки, наперед відомі як неоптимальні. Звідси і назва методу – метод січних площин.

Алгоритм методу січних площин. При викладенні методу січних площин припускається, що функції f , \mathbf{g} і \mathbf{h} неперервні, X – компакт, так що множина $X(\mu, \lambda)$ непорожня при кожному (μ, λ) .

Початковий етап. Знайти таку точку $\mathbf{x}_0 \in X$, що $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \leq \mathbf{0}$ і $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
Покласти $k = 1$ і перейти до основного етапу.

Основний етап. Крок 1. Розв'язати таку задачу, зазвичай звану *основною задачею*:

максимізувати z

за умов $z \leq f(\mathbf{x}_j) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_j), j = 1, \dots, k-1,$

$$\mu \geq \mathbf{0}.$$

Покласти (z_k, μ_k, λ_k) рівним оптимальному розв'язку цієї задачі і перейти до кроку 2.

Крок 2. Розв'язати таку *підзадачу*:

мінімізувати $f(\mathbf{x}) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$

за умови $\mathbf{x} \in X$.

Нехай \mathbf{x}_k – оптимальний розв'язок цієї задачі і $\theta(\mu_k, \lambda_k) = f(\mathbf{x}_k) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$. Якщо $z_k = \theta(\mu_k, \lambda_k)$, то зупинитися. В цьому разі (μ_k, λ_k) – оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Інакше, тобто якщо $z_k > \theta(\mu_k, \lambda_k)$, надати k значення $k+1$ і повернутися до кроку 1.

На кожній ітерації до основної задачі додається обмеження, і, отже, число її обмежень монотонно зростає. Якщо число обмежень в основній задачі стає надмірно великим, то всі неактивні обмеження можна відкинути. До того ж зазначимо, що оптимальні розв'язки основної задачі утворюють незростаючу послідовність $\{z_k\}$. Оскільки кожне z_k є верхньою межею оптимального значення цільової функції двоїстої задачі, то можна зупинити процедуру при $z_k - \max_{1 \leq j \leq k} \theta(\mu_j, \lambda_j) < \varepsilon$, де ε – деяке мале число.

Метод січних площин як метод тангенціальної апроксимації. Алгоритм січних площин для знаходження максимуму двоїстої функції можна інтерпретувати як метод тангенціальної апроксимації. За означенням функції θ маємо

$$\theta(\mu, \lambda) \leq f(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{x} \in X.$$

Таким чином, при будь-якому фіксованому $\mathbf{x} \in X$ гіперплощина

$$(\mu, \lambda, z): \mu \in R_m, \lambda \in R_l, z = f(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

обмежує функцію θ зверху.

Основна задача на k -тій ітерації еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} &\text{максимізувати} && \widehat{\theta}(\mu, \lambda) \\ &\text{за умови} && \mu \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \widehat{\theta}(\mu, \lambda) = \min \{ f(\mathbf{x}_j) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) : j = 1, \dots, k-1 \}.$$

Зазначимо, що $\widehat{\theta}$ – кусково-лінійна функція, яка апроксимує функцію θ за допомогою $(k-1)$ обмежуючих гіперплощин.

Нехай (z_k, μ_k, λ_k) – оптимальний розв'язок основної задачі. При розв'язанні підзадачі отримаємо $\theta(\mu_k, \lambda_k)$ і \mathbf{x}_k . Якщо $z_k > \theta(\mu_k, \lambda_k)$, то нове обмеження $z \leq f(\mathbf{x}_k) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ вводиться в основну задачу, визначаючи нову точнішу кусково-лінійну апроксимацію функції θ . Оскільки

$\theta(\mu_k, \lambda_k) = f(\mathbf{x}_k) + \mu_k^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda_k^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$, то гіперплощина $\{(z, \mu, \lambda): z = f(\mathbf{x}_k) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\}$ є дотичною до графіка функції θ в точці (z_k, μ_k, λ_k) .

2.5. Розв'язання прямої задачі

Раніше вивчені різні властивості двоїстої функції і описані деякі процедури розв'язання двоїстої задачі. Проте основною метою є знаходження оптимального розв'язку прямої задачі.

У цьому підрозділі наведемо деякі теореми, які допомагають при знаходженні розв'язку як прямої, так і збуреної прямої задачі, яка буде визначена нижче. Проте для неопуклих задач через можливий розрив двоїстості звичайно необхідні додаткові зусилля для знаходження оптимального розв'язку прямої задачі.

2.5.1. Розв'язання збурених прямих задач

В процесі розв'язання двоїстої задачі при обчисленні функції θ в точці (μ, λ) доводиться розв'язувати таку задачу:

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && f(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ &\text{за умови} && \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Наступна теорема показує, що оптимальний розв'язок $\bar{\mathbf{x}}$ цієї задачі є також оптимальним розв'язком прямої задачі, в якій деякі обмеження піддані збуренню.

Теорема 2.14. Нехай задано вектор (μ, λ) , де $\mu \geq 0$. Розглянемо задачу мінімізації функції $f(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$. Нехай $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв'язок цієї задачі. Тоді $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв'язок такої задачі:

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{за умов} && g_i(\mathbf{x}) \leq g_i(\bar{\mathbf{x}}), \quad i \in I, \\ &&& h_i(\mathbf{x}) = h_i(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ &&& \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Тут $I = \{i : \mu_i > 0\}$.

Наслідок. Нехай виконуються припущення теореми і $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $\mu^T \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Тоді $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв'язок такої задачі:

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{за умов} && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in I, \\ &&& h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ &&& \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Зокрема, \mathbf{x} – оптимальний розв'язок вихідної прямої задачі, а (μ, λ) – оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Із останньої теореми маємо, що у міру того, як в заданій точці (μ, λ) обчислюється двоїста функція θ , визначається точка $\bar{\mathbf{x}}$, що є оптимальним розв'язком задачі, тісно пов'язаної з вихідною, тобто задачі, в якій обмеження $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ і $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ при $i = 1, 2, \dots, m$ замінені на $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})$ і $g_i(\mathbf{x}) \leq g_i(\bar{\mathbf{x}})$, $i \in I$.

Припустимо, що в ході розв'язання двоїстої задачі для даного вектора (μ, λ) такого, що $\mu \geq 0$, існує $\hat{\mathbf{x}} \in X(\mu, \lambda)$. Крім того, припустимо, що для деякого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності $|g_i(\hat{\mathbf{x}})| \leq \varepsilon$ при $i \in I$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq \varepsilon$ при $i \notin I$ і $|h_i(\hat{\mathbf{x}})| \leq \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, l$. Якщо ε – достатньо мале число, то $\hat{\mathbf{x}}$ – майже допустима точка. Припустимо тепер, що $\bar{\mathbf{x}}$ – оптимальний розв'язок прямої задачі P . Тоді за означенням функції $\theta(\mu, \lambda)$ і внаслідок того, що $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $\mu_i \geq 0$ маємо

$$f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \mu_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \mu_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}).$$

З останньої нерівності випливає

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) + \varepsilon \left[\sum_{i \in I} \mu_i + \sum_{i=1}^l |\lambda_i| \right].$$

Таким чином, якщо ε – достатньо мале число, так що достатньо мале $\varepsilon \left[\sum_{i \in I} \mu_i + \sum_{i=1}^l |\lambda_i| \right]$, то отримаємо так званий *майже оптимальний розв’язок*. У багатьох практичних задачах такий розв’язок є прийнятним.

Наступна теорема стверджує, що у разі відсутності розриву двоїстості, умова доповнюючої нежорсткості є необхідною для оптимальності.

Теорема 2.15. Припустимо, що $\bar{\mathbf{x}}$ і $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ – оптимальні розв’язки відповідно прямої і двоїстої задач і $f(\bar{\mathbf{x}}) = \theta(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Тоді $\bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $\bar{\mathbf{x}} \in X(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, тобто $\bar{\mathbf{x}}$ – розв’язок задачі мінімізації $f(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$.

Можна також зазначити, що, як випливає з теореми, при відсутності розриву двоїстості серед точок множини $X(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, де $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ – розв’язок двоїстої задачі, знайдеться оптимальний розв’язок прямої задачі.

2.5.2. Побудова допустимих розв’язків прямої задачі в опуклому випадку

За деяких припущень про опуклість на кожній ітерації алгоритму розв’язання двоїстої задачі можна отримувати допустимі точки прямої задачі. Досягається це за допомогою деякої задачі лінійного програмування. Нехай задана деяка допустима для вихідної задачі точка \mathbf{x}_0 і нехай побудовані точки $\mathbf{x}_j \in X(\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\lambda}_j)$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Припустимо, що ці точки отримані в процесі максимізації двоїстої функції Лагранжа за допомогою одного з методів, що обговорювалися у підрозд.2.4. Наступна теорема стверджує, що допустимі розв’язки прямої задачі можна дістати, розв’язуючи таку задачу лінійного програмування P' :

Задача P' :

$$\begin{aligned} &\text{мінімізувати} && \sum_{j=0}^k v_j f_j(\mathbf{x}_j) \\ &\text{за умов} && \sum_{j=0}^k v_j \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \leq 0, \quad \sum_{j=0}^k v_j \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^k v_j = 1, \\ &&& v_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Теорема 2.16. Нехай X – непорожня опукла множина у R_n , $f: R_n \rightarrow R_1$ і $\mathbf{g}: R_n \rightarrow R_m$ – опуклі функції, $\mathbf{h}: R_n \rightarrow R_l$ – афінна функція, тобто $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Нехай $\bar{\mathbf{x}}_0$ – деякий початковий допустимий розв’язок задачі P , а $\mathbf{x}_j \in X(\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\lambda}_j)$ при $j = 0, 1, \dots, k$ отримані за допомогою будь-якого алгоритму розв’язання двоїстої задачі. Позначимо через \bar{v}_j , $j = 0, 1, \dots, k$ оптимальний розв’язок задачі P' , і нехай

$\bar{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^k \bar{v}_j \mathbf{x}_j$. Тоді $\bar{\mathbf{x}}_k$ – допустимий розв’язок задачі P . Крім того, якщо

$z_k - \theta(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \varepsilon$ для деякого $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, то $f(\bar{\mathbf{x}}_k) \leq \gamma + \varepsilon$, де $z_k = \sum_{j=0}^k \bar{v}_j f(\mathbf{x}_j)$,

$$\gamma = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}\}.$$

Отже, на кожній ітерації методу розв’язання двоїстої задачі, розв’язуючи задачу лінійного програмування P' , можна отримати допустиму точку прямої задачі. Навіть якщо значення цільової функції прямої задачі $\{f(\bar{\mathbf{x}}_k)\}$ утворюють не обов’язково спадну послідовність, вона все ж таки обмежена зверху незростаючою послідовністю $\{z_k\}$.

Зауважимо, що коли z_k достатньо близькі до обчислених в допустимій для двоїстої задачі точці $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ значень цільової функції, то $\bar{\mathbf{x}}_k$ – майже оптимальний допустимий розв’язок прямої задачі. Відмітимо також, що при використанні методу січних площин розв’язувати задачу P' не треба, оскільки вона співпадає з двоїстою до основної задачі, що розв’язується на кроці 1. Оптимальні змінні $\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_k$ можна відновити за розв’язком основної задачі і $\bar{\mathbf{x}}_k$ вважається

рівним $\sum_{j=0}^k \bar{v}_j \mathbf{x}_j$. Варто також зазначити, що критерій закінчення процесу в

алгоритмі січних площин $z_k = \theta(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$ можна інтерпретувати як отримання $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$ і $\varepsilon = 0$ в останній теоремі.

2.6. Задачі лінійного і квадратичного програмування

У цьому підрозділі обговорюються окремі випадки двоїстості по Лагранжу. Зокрема, стисло розглядається двоїстість в лінійному і квадратичному програмуванні.

2.6.1. Лінійне програмування

Розглянемо таку задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} &\text{Мінімізувати} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{за умов} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ &&& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Позначимо $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Тоді двоїста за Лагранжем задача полягає в максимізації $\theta(\boldsymbol{\lambda})$, де

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \inf \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} + \inf \{(\mathbf{c}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A})\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Очевидно, що

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} \lambda^T \mathbf{b}, & \text{если } (\mathbf{c}^T - \lambda^T \mathbf{A}) \geq \mathbf{0}, \\ -\infty & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Отже, двоїсту задачу можна подати у вигляді:

$$\begin{array}{ll} \text{максимізувати} & \lambda^T \mathbf{b} \\ \text{за умов} & \mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}. \end{array}$$

Таким чином, в лінійному програмуванні двоїста задача не включає змінних прямої задачі. Більш того, двоїста задача також є задачею лінійного програмування. Легко перевірити, що двоїста до двоїстої задача співпадає з вихідною прямою задачею. У теоремі 2.17 встановлюються зв'язки між прямою і двоїстою задачами.

Теорема 2.17. Розглянемо сформульовані вище пряму і двоїсту задачі лінійного програмування. Може бути одна з наступних ситуацій, що взаємно виключають одна одну.

1. Пряма задача має допустимі розв'язки і її цільова функція необмежена в допустимій області. В цьому разі множина допустимих розв'язків двоїстої задачі порожня.

2. Двоїста задача має допустимі розв'язки і її цільова функція необмежена в допустимій області. В цьому випадку множина допустимих розв'язків прямої задачі порожня.

3. Обидві задачі мають допустимі розв'язки. В цьому разі обидві задачі мають оптимальні розв'язки $\bar{\mathbf{x}}$ і $\bar{\lambda}$ відповідно, при цьому $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}^T \mathbf{b}$, $(\mathbf{c}^T - \bar{\lambda}^T \mathbf{A}) \bar{\mathbf{x}} = 0$.

4. Допустимі області обох задач порожні.

Доведення. Нехай вектори \mathbf{x} і λ такі, що $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ і $\mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}$. Тоді $\lambda^T \mathbf{b} = \lambda^T \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Тому

$$\inf\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \geq \sup\{\lambda^T \mathbf{b} : \mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}\}. \quad (2.9)$$

Якщо значення цільової функції прямої задачі необмежені, то із (2.9) випливає, що двоїста до неї задача не має допустимих розв'язків. Так само з (2.9) випливає, що якщо значення цільової функції двоїстої задачі необмежені, то допустима область прямої задачі порожня. Нехай тепер обидві задачі мають допустимі розв'язки. Знову використовуючи (2.9), дістанемо, що значення $\inf\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ скінченне і, отже, пряма задача повинна мати розв'язок. Позначимо його через $\bar{\mathbf{x}}$. З умов Куна-Таккера випливає існування такого вектора $\bar{\lambda} \in R_m$, що

$$\mathbf{c} - \mathbf{A}^T \bar{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{c}^T - \bar{\lambda}^T \mathbf{A}) \bar{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.11)$$

В силу (2.10) вектор $\bar{\lambda}$ – допустимий розв'язок двоїстої задачі, а із (2.11) маємо

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}^T \mathbf{b}.$$

Тоді з (2.9) випливає, що $\bar{\lambda}$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Останній можливий випадок полягає в тому, що допустимі області обох задач порожні.

2.6.2. Квадратичне програмування

Розглянемо таку задачу квадратичного програмування:

мінімізувати $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x}$

за умов $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$,

де \mathbf{H} – симетрична додатно визначена матриця, так що цільова функція строго опукла. Двоїста за Лагранжем задача полягає в максимізації $\theta(\boldsymbol{\mu})$ при $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, де

$$\theta(\boldsymbol{\mu}) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) : \mathbf{x} \in R_n \right\}. \quad (2.12)$$

Зауважимо, що при фіксованому $\boldsymbol{\mu}$ функція $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$ строго опукла і досягає мінімуму в точці, що задовольняє рівність

$$\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Таким чином, двоїста задача може бути подана у вигляді

максимізувати $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$

за умов $\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} = -\mathbf{d}$,
 $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Отримаємо тепер альтернативну форму двоїстої задачі. Оскільки \mathbf{H} – додатно визначена матриця, то існує \mathbf{H}^{-1} і єдиний розв'язок рівняння (2.13) визначається таким чином:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{d} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}).$$

Підставляючи цей вираз для \mathbf{x} в (2.12), дістанемо

$$\theta(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d},$$

де $\mathbf{D} = -\mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T$, $\mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}$. Тоді двоїсту задачу можна записати таким чином:

максимізувати $\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}$

за умови $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Розв'язати двоїсту задачу можна порівняно легко, використовуючи таку схему. При заданому $\boldsymbol{\mu}$ покладемо $\nabla \theta(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{D} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{c} = \mathbf{g}$. Визначимо $\hat{\mathbf{g}}$ за формулою

$$\hat{g}_i = \begin{cases} g_i, & \text{якщо } \mu_i \geq 0 \text{ або } g_i \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } \mu_i = 0 \text{ і } g_i < 0. \end{cases}$$

Якщо $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$, то за теоремою 2.13 вектор $\boldsymbol{\mu}$ – оптимальний розв'язок. Інакше $\hat{\mathbf{g}}$ – допустимий напрям спуску. Оптимізуючи θ з точки $\boldsymbol{\mu}$ уздовж напрямку $\hat{\mathbf{g}}$ так, щоб не порушити додатності, приходимо до нової точки. Потім процес повторюється.

2.7. Формулювання двоїстих задач опуклого математичного програмування

У цьому підрозділі наведемо основні результати теорії двоїстості для задач опуклого програмування.

Нехай маємо таку екстремальну задачу:

$$\text{мінімізувати} \quad f(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

$$\text{за умов} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, l, \quad (2.15)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1 \leq n,$$

де $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, функції $f(\mathbf{x})$ і $g_i(\mathbf{x})$ $i=1, 2, \dots, m$ опуклі вниз, а функції $h_i(\mathbf{x})$, $i=1, 2, \dots, l$ — лінійні. Функції $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ і $h_i(\mathbf{x})$ мають неперервні перші похідні.

Задача (2.14) — (2.15) називається прямою задачею. Двоїста до неї задача будується на основі таких положень.

1) Мінімізація цільової функції прямої задачі замінюється максимізацією цільової функції двоїстої задачі.

2) Цільова функція двоїстої задачі є функцією Лагранжа

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

3) Кожній умові прямої задачі відповідає нова змінна μ_i або λ_i у двоїстій задачі. Змінні μ_i , що відповідають умовам-нерівностям, обмежені по знаку, тобто невід'язні ($\mu_i \geq 0$), а змінні λ_i , що відповідають умовам-рівностям, по знаку не обмежені, тобто є вільними змінними.

4) Кожній невід'язній змінній x_j прямої задачі відповідає у двоїстій задачі умова-нерівність

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1, \quad (2.17)$$

а вільній змінній x_j — рівність

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j=n_1+1, n_1+2, \dots, n. \quad (2.18)$$

Таким чином, на основі цих положень можна записати таку пару двоїстих задач.

$$\text{Мінімізувати} \quad f(\mathbf{x})$$

$$\text{за умов} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, l,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1 \leq n.$$

Максимізувати $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x})$

за умов $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1,$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n,$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.19)$$

Наведемо приклад побудови двоїстої функції для задачі з одним обмеженням-рівністю.

Приклад 2.2. Пряма задача:

мінімізувати $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4$ (2.20)

за умови $h(x, y) = x + 2y - 5 = 0.$ (2.21)

У геометричному сенсі задача полягає у знаходженні екстремального значення функції $f(x, y)$ на кривій C , яка є перетином поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $h(x, y) = 0$, як показано на рис.

2.5. Легко перевірити, що оптимальне значення цільової функції при заданому обмеженні досягається у точці $(x, y) = (1, 2)$ і дорівнює 10.

Цільова функція двоїстої задачі

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4 - \lambda(x + 2y - 5). \quad (2.22)$$

Множник Лагранжа λ використано у виразі функції $F(x, y, \lambda)$ для врахування додаткової умови (2.21). Зауважимо, що вираз (2.22) для функції $F(x, y, \lambda)$ показує, що шукаються стаціонарні значення сімейства поверхонь, яке задається параметром λ . На рис. 2.5 штриховими лініями показана поверхня, що відповідає значенню $\lambda = 6$.

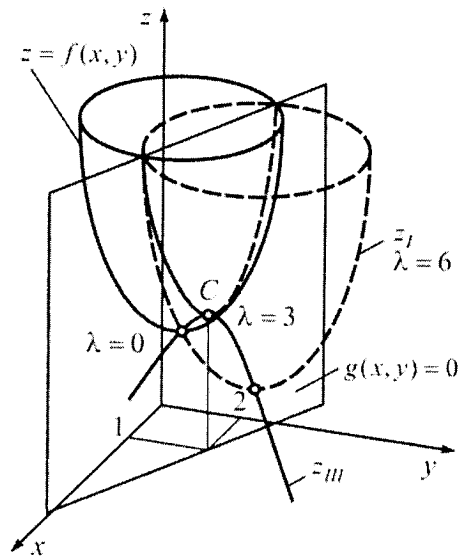


Рис. 2.5

Змінним x і y прямої задачі відповідають у двоїстій задачі такі рівності

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y + 5 - \lambda = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 6y - 4 - 2\lambda = 0. \quad (2.24)$$

Розв'язавши рівняння (2.23) і (2.24) відносно x і y дістанемо

$$x = \frac{1}{4}(5\lambda - 11), \quad (2.25)$$

$$y = \frac{1}{4}(3\lambda - 1). \quad (2.26)$$

Підставимо вирази (2.25) і (2.26) у (2.22) і виключимо x і y із $F(x, y, \lambda)$. Тоді функція $F(x, y, \lambda)$ набере вигляду

$$\theta(\lambda) = \frac{1}{16}(-22\lambda^2 + 132\lambda - 38). \quad (2.27)$$

Отримана двоїста функція $\theta(\lambda)$ є функцією однієї незалежної змінної λ . Умова стаціонарності задається рівнянням

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{1}{16}(-44\lambda + 132) = 0, \quad (2.28)$$

з якого отримуємо $\lambda = 3$ і враховуючи (2.25) і (2.26) $x = 1$, $y = 2$.

Екстремальне мінімальне значення прямої задачі (2.20), (2.21), співпадає з максимальним значенням відповідної двоїстої задачі. Цю властивість можна пояснити таким чином. Пряма задача полягає у знаходженні мінімального значення z_{\min} функції $z = f(x, y)$ на кривій C . Із (2.22), задаючись довільним λ , отримуємо поверхню, яка відповідає цьому значенню λ . Координати стаціонарної точки знайдемо з рівнянь (2.25), (2.26), мінімальне значення на цій поверхні – з рівнянь (2.27). Оскільки крива C лежить на поверхні, то для будь-якого значення λ справджується

$$z_{\min} \geq \theta(\lambda). \quad (2.29)$$

Отже, мінімальне значення на кривій C є максимальним значенням функції $\theta(\lambda)$. Крива, визначувана рівняннями (2.25), (2.26) і (2.27), зображена на рис. 2.5 суцільною лінією, λ — параметр цієї кривої.

Вважають, що задача опуклого програмування (2.14) – (2.15) задовольняє умову Слейтера, якщо існує точка \mathbf{x}_0 , для якої виконується обмеження (2.15), при $g_i(\mathbf{x}_0) < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Для пари двоїстих задач справедливі такі твердження.

1) Якщо \mathbf{x}^* — розв'язок прямої задачі, що задовольняє умову Слейтера, то можна знайти такий $m+1$ -вимірний вектор $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, що вектор $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ буде розв'язком двоїстої задачі. При цьому екстремальні значення цільових функцій двоїстих задач співпадають:

$$f(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*). \quad (2.30)$$

Рівність (2.30) називається першою теоремою двоїстості.

2) Якщо $(\mathbf{x}^*, (\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*))$ — розв'язки пари двоїстих задач (2.14), то справедливі співвідношення

$$\boldsymbol{\mu}_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.31)$$

Ці співвідношення являють собою твердження другої теореми двоїстості (теореми про доповнюючу нежорсткість).

3) Щоб вектор \mathbf{x}^* був розв'язком прямої задачі, достатньо, а при дотриманні умови Слейтера і необхідно, існування такого вектора $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, при якому б вектор $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ задовольняв систему співвідношень

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, l,$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \frac{\partial h_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1,$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \frac{\partial h_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j=n_1+1, n_1+2, \dots, n,$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1,$$

$$\mu_i^* \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$\mu_i^*(g(\mathbf{x}^*)) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

(2.32)

Пояснимо сенс наведеного твердження. Введемо функцію Лагранжа задачі (2.14):

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}).$$

У такому разі умови (2.32) еквівалентні співвідношенню

$$F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*),$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_1,$$

яке означає, що $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа задачі (2.14). Отже, при дотриманні умови Слейтера точка \mathbf{x}^* є розв'язком прямої задачі (2.14) тоді і тільки тоді, коли знайдеться такий вектор $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ ($\lambda_i^* \geq 0, i=1, 2, \dots, m$), при якому $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ — сідлова точка функції Лагранжа прямої задачі. Ці твердження є змістом теореми Куна-Такера.

Хоча наведені результати відносяться до задач, які визначаються функціями скінченної кількості змінних, їх можна поширити на функціональні аналоги задач опуклого програмування, обмеження яких описуються, наприклад, диференціальними залежностями. Такими аналогами є задачі граничного аналізу твердого деформівного тіла. Умовами в них є обмеження, які містять як функціональні, так і диференціальні оператори для внутрішніх областей і граничних точок тіла, а екстремум визначається для функціонала інтегрального вигляду. Однак те, що формулювання є складнішим, не може бути на заваді використання теорії двоїстих задач опуклого програмування.

3. Постановки двоїстих задач будівельної механіки. Перетворення Лежандра. Нерівність Юнга. Двоїсті за Юнгом функцій. Двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач. Приклади

3.1. Загальна постановка двоїстих задач

Класичний прийом побудови двоїстої задачі полягає у наступному. Задача мінімізації

$$f(x) \rightarrow \inf, x \in X, \quad (3.1)$$

де X – лінійний простір, $f: X \rightarrow R$, включається до класу подібних їй задач, які залежать від параметру:

$$F(x, y) \rightarrow \inf x \in X, y \in Y,$$

де Y – деякий інший лінійний простір, $F: X \times Y \rightarrow R$, $F(x, 0) = f(x)$, (функцію F називають збуренням f). Зазвичай F вважається опуклою. Двоїстою до задачі по відношенню до даного збурення називається задача

$$-F^*(0, y^*) \rightarrow \sup, y^* \in Y^*, \quad (3.2)$$

де F^* – функція двоїста (спряжена) до F у розумінні Лежандра-Юнга-Фенхеля.

Для простіших задач опуклого програмування

$$f_0(x) \rightarrow \inf, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in B,$$

де X – лінійний простір, $f_i: X \rightarrow R$ – опуклі функції на X , B – опукла множина в X (частинними випадками є задачі лінійного програмування), застосовуються наступні стандарти збурення, що залежать від параметрів $y \in R^m$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $f_0(x) \rightarrow \inf, f_i(x) \leq y_i, i = 1, \dots, m, x \in B$. Теорема двоїстості для загальних класів задач опуклого програмування стверджують, що при деяких припущеннях щодо збурень F значення задач (3.1) і (3.2) співпадають і більше того, розв'язок однієї із задач є множником Лагранжа для іншої [122 (т.2, с. 46-47), 198].

Можна записати (див. п. 2.7):

Пряма задача P :

мінімізувати $f(x)$

за умов $g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m,$
 $h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n,$
 $x \in X.$

Двоїста задача D :

максимізувати $F(x, \mu, \lambda)$

за умов $\mu \geq 0$, де

$$F(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(x),$$

$$x \in X,$$

за умов

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \geq 0$$

при $j = 1, 2, \dots, n_1,$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \\ \text{при } j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \end{aligned} \right\}$$

Функцію $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x})$ звичайно називають двоїстою функцією Лагранжа.

У випадку квадратичного програмування (п. 2.6):
пряма задача

$$\text{мінімізувати } \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x}$$

$$\text{за умов } \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

де \mathbf{H} – симетрична додатно визначена матриця, тобто цільова функція є строго опуклою.

Двоїста за Лагранжем задача полягає у максимізації $\theta(\boldsymbol{\mu})$ при $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, де

$$\theta(\boldsymbol{\mu}) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}); \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \right\}$$

При цьому функція $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$ є строго опуклою і досягає мінімуму у точці, яка задовольняє рівність

$$\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

Тобто двоїста задача може бути переписана у вигляді:

$$\text{максимізувати } \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

$$\text{за умов } \begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} &= -\mathbf{d}, \\ \boldsymbol{\mu} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Можна отримати іншу форму двоїстої задачі. Ураховуючи, що \mathbf{H} – додатно визначена матриця, то існує \mathbf{H}^{-1} і єдиний розв'язок рівняння (3.3) дорівнює

$$\mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu})$$

і відповідно

$$\theta(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d},$$

де $\mathbf{D} = -\mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T$, $\mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}$.

Двоїста задача тоді може бути записана так:

$$\text{максимізувати } \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}$$

$$\text{за умови } \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}.$$

3.2. Перетворення Лежандра. Теорема Донкіна. Двоїсті за Юнгом функції. Приклад

Перетворення Лежандра – допоміжний математичний прийом, який полягає у переході від функцій на лінійному просторі до функцій на спряженому просторі. Воно аналогічно проєктивній двоїстості і тангенціальним координатам у алгебраїчній геометрії або побудові спряженого банахового простору в математичному аналізі.

Нехай $y = f(x)$ опукла, $f''(x) > 0$.

Перетворенням Лежандра функції $y = f(x)$ називається нова функція $g(p)$ нової змінної p , яка будується наступним чином (п. 1.13).

На графіку функції $f(x)$ (рис. 3.1) беремо точку $x = x(p)$, у якій крива найбільш віддалена по вертикалі від прямої $y = px$. При цьому функція $F(p, x) = px - f(x)$ у точці $x(p)$ матиме максимум по x при фіксованому p , тоді $g(p) = F(p, x(p))$. Точка $x(p)$ визначається із умови екстремуму $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ або $f'(x) = p$. Оскільки функція $f(x)$ є опуклою, така точка $x(p)$ єдина. Тобто здійснюється така послідовність операцій:

1. $y = f(x)$;
2. $p, y = px$;
3. $F(x, p) = px - f(x)$;
4. $\max F(x, p) = g(p)$;
5. $x = x(p), \frac{dF}{dx} = p - f'(x) = 0, p = f'(x)$;
6. $f(x) + g(p) = px, x = g'(p)$.

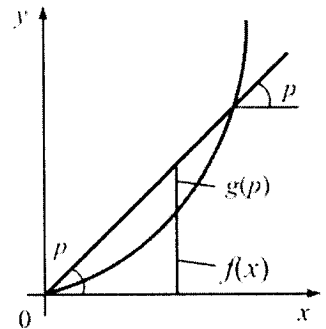


Рис. 3.1

Дві функції $f(x), g(p)$, які являють собою

перетворення Лежандра одна до одної, називаються двоїстими за Юнгом. За означенням перетворення Лежандра $F(x, p) = px - f(x) \leq g(p)$, звідки витікає нерівність Юнга

$$f(x) + g(p) \geq px.$$

Інволютизм (інколи називають дуалізм перетворення Лежандра) можна пояснити так.

Нехай задана функція F змінних x_1, \dots, x_n :

$$F = F(x_1, \dots, x_n).$$

Введемо нову сукупність змінних за допомогою перетворення

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Вважатимемо, що детермінант (гессіан) матриці других похідних (матриці Гессе) не дорівнює нулю:

$$\det \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right] \neq 0.$$

Визначимо нову функцію H наступним чином

$$H = \sum_{i=1}^n x_i p_i - F. \quad (3.4)$$

Виразимо x_i через p_i і підставимо в (3.3). Функція H залежатиме тільки від нових змінних p_i

$$H = H(p_1, \dots, p_n).$$

Розглянемо тепер нескінченно малу варіацію функціонала H , що викликана довільними нескінченно малими варіаціями p_i :

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = \sum_{i=1}^n (x_i \delta p_i + p_i \delta x_i) - \delta F = \sum_{i=1}^n \left[x_i \delta p_i + \left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right]. \quad (3.5)$$

Оскільки H – функція тільки p_i , можна було б виразити x_i через p_i і, відповідно, варіації x_i через варіації p_i . Проте очевидно, що ця операція зайва, тому що коефіцієнти при δx_i автоматично дорівнюють нулю, адже $p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Тому із (3.5)

відразу отримаємо

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Інволютизм для функції n змінних можна ілюструвати наступною схемою.

	<i>Стара система</i>		<i>Нова система</i>
Змінні	$x_1, x_2, \dots, x_n.$		p_1, p_2, \dots, p_n
Функції	$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$		$H = H(p_1, p_2, \dots, p_n).$

Перетворення Лежандра

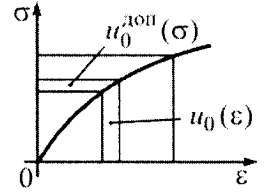
$p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad H = \sum x_i p_i - F,$	$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad F = \sum x_i p_i - H,$
$H = H(p_1, p_2, \dots, p_n).$	$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$

Таким чином, у перетворенні Лежандра у той час, коли нові змінні являють собою частинні похідні старої функції по старих змінних, старі змінні є частинними похідними нових функцій по нових змінних. Тобто поняття “стара” й “нова” системи цілком еквівалентні.

Залежності у перетворенні Лежандра $p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ і $x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ являють собою відомі

у механіці теореми Лагранжа і Кастільяно і визначають відповідні фундаментальні варіаційні принципи механіки.

Приклад 3.1. Робота внутрішніх сил при одновісному напруженому стані дорівнює сумі питомої потенціальної енергії пружної деформації $u_0(\varepsilon)$ і так званої доповнювальної питомої потенціальної енергії $u_0^{\text{доп}}(\sigma)$ (рис. 3.2) Ця рівність являє собою перетворення Лежандра.



$$\underbrace{u_0(\varepsilon)}_{\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon} + \underbrace{u_0^{\text{доп}}(\sigma)}_{\int_0^\sigma \varepsilon d\sigma} = \sigma\varepsilon,$$

де $u_0(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$, $u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma$ – двоїсті за Юнгом

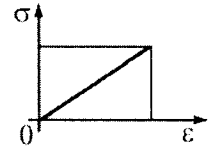


Рис. 3.2

функції.

$$u_0(\varepsilon) + u_0^{\text{доп}}(\sigma) = u_0; \quad u_0 = \sigma \cdot \varepsilon.$$

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} \delta \sigma + \left(\sigma - \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon + \left(\varepsilon - \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} \right) \delta \sigma.$$

Якщо $\sigma = \varepsilon E$, $\frac{1}{2} \varepsilon^2 E + \frac{\sigma^2}{2E} = \sigma\varepsilon$, отримаємо:

	<i>Стара система</i>		<i>Нова система.</i>
Змінні	ε		σ
Функції	$u_0(\varepsilon)$		$u_0^{\text{доп}}(\sigma)$.
	Перетворення Лежандра		
	$\sigma = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}; \quad u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \delta\varepsilon - u_0(\varepsilon).$		$\varepsilon = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma}; \quad u_0(\varepsilon) = \delta\varepsilon - u_0^{\text{доп}}(\sigma).$
	$u_0^{\text{доп}}(\sigma).$		$u_0(\varepsilon).$

Залежності $\frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \sigma$ і $\frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} = \varepsilon$ в теорії пружності мають назву формул

Дж.Гріна і Кастільяно.

Аналогічні висновки можна зробити і при нелінійній залежності $\sigma - \varepsilon$.

Значимо, що *спряженою функцією* до функції $f: X \rightarrow R$, визначеної на векторному просторі X , що знаходиться у двоїстості (відносно білінійної форми $\langle x, y \rangle$) з векторним простором Y називається функція на Y , що задається співвідношенням [122 (т.5, с. 82-83)]

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} (\langle x, y \rangle - f(x)). \quad (3.11)$$

Для функції, заданої на Y , спряжена функція визначається аналогічно.

Якщо $f(x)$ – гладка, зростаюча на нескінченності швидше лінійної функція, то $f^*(y)$ є перетворенням Лежандра функції $f(x)$.

Для одновимірних строго опуклих функцій означення, рівносильне (3.11), було дано Юнгом у інших термінах. В.Юнг визначив спряжену функцію до функції

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt,$$

де $\varphi(t)$ неперервна і строго зростає, співвідношенням

$$f^*(y) = \int_0^y \psi(t) dt,$$

де $\psi(t)$ – функція, обернена до $\varphi(t)$.

Для опуклої функції і спряженої до неї виконується нерівність Юнга

$$\langle x, y \rangle \leq f(x) + f^*(y).$$

Спряжена функція – опукла замкнена функція. Оператор спряження $*$: $f \rightarrow f^*$ однозначно відображає сукупність власних опуклих функцій на X на сукупність власних опуклих функцій на Y .

Поняття перетворення Лежандра може бути дещо розширене, якщо функція f залежить від двох систем змінних x_1, x_2, \dots, x_n ; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ (активних і пасивних), то

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = -\frac{\partial g}{\partial \eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Про це йдеться у відомій в аналітичній механіці теоремі Донкіна (далі надане її доведення).

$$\text{Наприклад: } f(\xi) = \frac{m\xi^2}{2}; \quad g(p) = \frac{p^2}{2m}; \quad \xi(p) = \frac{p}{m}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\xi^2}{2}; \quad \frac{\partial g}{\partial m} = -\frac{p^2}{2m^2}$$

і згідно з теоремою Донкіна,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -\frac{\partial g}{\partial m}.$$

Теорема 3.1 (Донкіна). Нехай задана деяка функція $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, гессіан якої відмінний від нуля:

$$\det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{i,k} \neq 0,$$

і нехай існує перетворення змінних, викликане функцією $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Тоді існує перетворення, обернене до перетворення (3.6), яке теж породжено деякою функцією $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

при цьому породжуюча функція Y оберненого перетворення пов'язана з породжуючою функцією X прямого перетворення, формулою

$$Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X. \quad (3.8)$$

Якщо функція включає параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, тобто $X = X(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то Y теж включає ці параметри, тобто $Y = Y(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ і

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.9)$$

Доведення. Гессіан функції X співпадає з якобіаном правих частин у рівняннях (3.6). Тому завдяки відмінності гессіана від нуля з рівнянь (3.6) можна виразити змінні (x_1, \dots, x_n) через (y_1, \dots, y_n) :

$$x_i = f_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Нехай функція $Y = Y(y_1, \dots, y_n)$ виражена формулою (3.8), у якій змінні x_i замінені виразами (3.10). Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - X \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Але, згідно з рівнянням (3.6), дві суми, які знаходяться в правій частині цієї рівності, взаємно знищуються і, отже, має місце формула (3.7).

Нехай тепер X включає окрім змінних x_1, \dots, x_n ще і параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Тоді ці параметри є в прямому перетворенні (3.6), а тому і в оберненому:

$$x_i = f_i(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Функція Y визначається рівністю (3.8), де x_i замінені на $f_i(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, тому

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - X \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Теорема Донкіна доведена.

3.3. Двоїсті постановки варіаційних задач для функціоналів будівельної механіки. Приклад

Застосуємо до функціоналів наведені у п. 1.13 міркування щодо побудови перетворення Лежандра. Як приклад розглянемо функціонал

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx. \quad (3.12)$$

Позначимо

$$p = F_{y'}(x, y_i, y'_i), \quad (3.13)$$

$$H(x, y, p) = -F + py', \quad (3.14)$$

вважаючи, що в правій частині цієї рівності y' є функцією x, y і p , визначеною поданням (3.13).

Розглянемо новий функціонал

$$v[y, p] = \int_{x_0}^{x_1} (-H(x, y, p) + py') dx, \quad (3.15)$$

в якому y і p розглядаються як дві незалежні функції, а y' є похідною від y . Цей функціонал співпадає, очевидно, з вихідним функціоналом (3.12), якщо за p взяти вираз (3.13). Напишемо для функціонала (3.15) рівняння Ейлера і дістанемо

$$-\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.16)$$

Це є канонічні рівняння для функціонала $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$.

Доведемо, що функціонали (3.12) і (3.14) набувають екстремальних значень на тих самих кривих, тобто доведемо еквівалентність рівнянь (3.15) і рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (3.17)$$

Тим самим отримаємо нове, незалежне від наведеного вище, виведення канонічних рівнянь. Зазначимо, що перехід від функції F змінних x, y, y' до функції H змінних x, y, p є інволютивним, тобто, зробивши перетворення Лежандра для H , дістанемо функцію $F(x, y, y')$. Дійсно, оскільки

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \frac{\partial F}{\partial y} dy + y' dp,$$

то
$$\frac{\partial H}{\partial p} = y'$$

і тому

$$-H + p \frac{\partial H}{\partial p} = F - py' + py' = F. \quad (3.18)$$

Доведемо еквівалентність варіаційних задач (3.12) і (3.15). Для цього треба показати, що мінімум $v[y, p]$ по p при фіксованому $y \in v[y]$. Дійсно, в такому разі мінімум $v[y, p]$ при зміні p і y буде співпадати з мінімумом $v[y]$.

Доведемо, що $\min_p v[y, p] = v[y]$. Оскільки $v[y, p]$ не містить p' , то для знаходження мінімуму $v[y, p]$ достатньо знайти мінімум підінтегрального виразу в кожній точці, тобто вважати

$$\frac{\partial}{\partial p}[-H + py'] = 0.$$

Звідси

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

З урахуванням (3.18)

$$-H + p \frac{\partial H}{\partial p} = F,$$

тобто, $\min_p v[y, p] = v[y]$.

Отже, доведено еквівалентність варіаційних задач (3.12) і (3.15), а тому й еквівалентність відповідних їм рівнянь Ейлера (3.17) і (3.16).

Ми розглянули функціонали, що залежать від однієї функції. Такі самі міркування справедливі і у випадку n функцій.

Приклад 3.2. Розглянемо функціонал

$$\int_{x_0}^{x_1} (Py'^2 + Qy^2) dx,$$

де P і Q – функції від x . Для цього функціонала $p = 2Py'$, $H = Py'^2 - Qy^2$, звідки

$$H = \frac{p^2}{4P} - Qy^2.$$

Відповідні канонічні рівняння:

$$\frac{dp}{dx} = 2Qy, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2P}.$$

Для розглядуваного функціонала рівняння Ейлера у звичайній формі має вигляд

$$2yQ - \frac{d}{dx}(2Py') = 0.$$

Приклад 3.3. Розглянемо задачу про розтяг стержня дотичним розподіленням

навантаженням q_x і силою N_b на правому кінці (рис. 3.3), статична, геометрична і фізична сторони якої описуються системою рівнянь рівноваги $\frac{dN}{dx} = -q_x$, сумісності деформацій

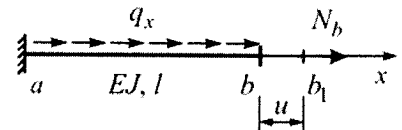


Рис. 3.3

$\epsilon = \frac{du}{dx}$ і закону Гука $\sigma = \epsilon E$.

Запишемо наступний функціонал

$$\Pi^{\Pi}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF(u')^2 dx - \int_a^b q_x u dx - N_b u_b$$

при додатковій умові $u_a = 0$ і проведемо для нього описане вище перетворення. Тоді

$$p = F_{u'}(x, u, u') = EFu' = N; \quad H(x, u, p) = -F + pu' = -\frac{1}{2} EF(u')^2 + q_x u + Nu'.$$

Рівняння Ейлера

$$-\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{dp}{dx} = 0; \quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{du}{dx} = 0; \quad -\frac{dN}{dx} - q = 0; \quad -\frac{N}{EF} + \frac{du}{dx} = 0;$$

$$\Pi(u, N) = \int_a^b (-H(x, u, p) + pu') dx - N_b u_b = \int_a^b \left(\frac{1}{2} EF(u')^2 - q_x u - Nu' + pu' \right) dx - N_b u_b.$$

Ураховуючи, що

$$u' = \frac{N}{EF}, \quad p = N, \quad pu' = \frac{N^2}{EF},$$

для цієї задачі робота зовнішніх сил

$$A = \int_a^b q_x u dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N|_{a_2}^{b_2},$$

$$\int_a^b q_x u dx = - \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = -uN|_a^b + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx; \quad q_x = -\frac{dN}{dx}; \quad - \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = -uN|_a^b + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx,$$

$$\int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = uN|_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx} N dx.$$

Тоді отримаємо

$$\int_a^b q_x u dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N|_{a_2}^{b_2} = -uN|_{a_1}^{b_1} - uN|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N|_{a_2}^{b_2},$$

$$\int_a^b N \frac{du}{dx} dx = \int_a^b q_x u dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N|_{a_2}^{b_2} + (N - \bar{N})u|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u})N|_{a_2}^{b_2}.$$

При $u = \bar{u}$

$$\int_a^b N \varepsilon dx = \int_a^b q_x u dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + (N - \bar{N})u|_{a_1}^{b_1}.$$

Якщо

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u'; \quad N = EFu'; \quad q_x = 0,$$

$$\int_a^b N \varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_a^b EFu'^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx.$$

При цьому

$$\frac{1}{2} \int_a^b EFu'^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EFu_b^2}{l}; \quad \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx = \frac{N^2 l}{2EF}.$$

$$\Pi(u, N) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - q_x u - \frac{N^2}{EF} + N \frac{du}{dx} \right) dx - N_b u_b.$$

За формулою інтегрування частинами

$$\int_a^b N \frac{du}{dx} dx = Nu|_a^b - \int_a^b u \frac{dN}{dx} dx.$$

Отже,

$$\Pi(u, N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - q_x u - u \frac{dN}{dx} \right) dx + Nu|_a^b - N_b u_b.$$

Остаточно отримаємо функціонал

$$\Pi^K(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx$$

при додаткових умовах $\frac{dN}{dx} + q_x = 0$; $N = N_b$.

Оскільки таке перетворення є інволютивним, зробимо обернене перетворення:

$$\Pi^K(N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - q_x u - u \frac{dN}{dx} \right) dx + Nu|_a^b - N_b u_b;$$

$$p = F_{N'}(x, N, N') = -u; \quad H(x, N, p) = -F + pN' = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} + q_x u + u \frac{dN}{dx} + pN'.$$

Рівняння Ейлера:

$$-\frac{\partial H}{\partial N} - \frac{dp}{dx} = 0; \quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{dN}{dx} = 0; \quad -\frac{N}{EF} + \frac{du}{dx} = 0; \quad q_x + \frac{dN}{dx} = 0;$$

$$\Pi(N, u) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - q_x u - u \frac{dN}{dx} - pN' - uN' \right) dx + Nu|_a^b - N_b u_b;$$

$$-\int_a^b u \frac{dN}{dx} dx = \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - Nu|_a^b;$$

$$\Pi(N, u) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - q_x u \right) dx - N_b u_b = \frac{1}{2} \int_a^b EF(u')^2 dx - \int_a^b q_x u dx - N_b u_b.$$

Отже, ми отримали вихідний функціонал.

Тобто, якщо поширити результати, що відносяться до задач, які визначаються функціоналами скінченного числа змінних, на функціональні аналоги задач опуклого програмування, обмеження яких описуються диференціальними

залежностями і екстремум яких визначається для функціоналів інтегрального типу, отримуємо таку постановку двоїстих за Лагранжем задач.

<p align="center"><i>Пряма задача</i></p> $\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF(u')^2 dx - \int_a^b q_x u dx - N_b u_b \rightarrow \min.$ $u_a = 0.$	<p align="center"><i>Двоїста задача</i></p> $\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx \rightarrow \max.$ $\frac{dN}{dx} + q_x = 0; N = N_b.$
---	---

Якщо розподілене навантаження відсутнє ($q_x = 0$), функціонали спрощуються:

$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF(u')^2 dx - \bar{N}_b u_b.$	$\Pi^{\text{К}}(N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - u \frac{dN}{dx} \right) dx +$ $+(N - N_b)u_b = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} + (N - N_b)u_b.$
---	--

Функцію переміщень u будемо розшукувати у вигляді

$$u = a_0 + a_1 x$$

Ураховуючи граничні умови,

$$x = 0 \Rightarrow u_a = 0; \quad a_0 = 0;$$

$$x = b \Rightarrow u = u_b, \quad a_1 = \frac{u_b}{l}$$

і

$$u = \frac{u_b x}{l}.$$

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{EF}{2l} u_b^2 - \bar{N}_b u_b.$$

$$\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} + (N - N_b) \frac{N_b l}{EF} -$$

двоїста функція Лагранжа.

Відповідно маємо:

Пряма задача

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{EF}{2l} u_b^2 - N_b u \rightarrow \min.$$

Двоїста за Лагранжем задача

$$\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF}, \quad N = N_b.$$

Із умови стаціонарності цієї функції

$$\frac{d\Pi^{\text{Л}}(u)}{du} = \frac{EF}{l} u_b - N_b = 0;$$

$$u_b = \frac{N_b l}{EF}.$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}(N)}{dN} = -\frac{Nl}{EF} + u_b = 0; \quad u_b = \frac{N_b l}{EF}.$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}(N)}{dN} = -\frac{Nl}{EF} + \frac{N_b l}{EF} = 0; \quad N = N_b.$$

Ураховуючи, що

$$\frac{d^2 \Pi^{\text{Л}}(u)}{du_b^2} = \frac{EF}{l} > 0,$$

Ураховуючи, що

$$\frac{d^2 \Pi^{\text{К}}(N)}{dN^2} = -\frac{l}{EF} < 0,$$

функціонал (рис. 3.4,а) має мінімум, який дорівнює

$$\Pi_{\min}^{\text{Л}}(u) = -\frac{N_b^2 l}{2EF}.$$

функціонал (рис. 3.4,б) має максимум, який дорівнює

$$\Pi_{\max}^{\text{К}}(N) = -\frac{N_b^2 l}{2EF}.$$

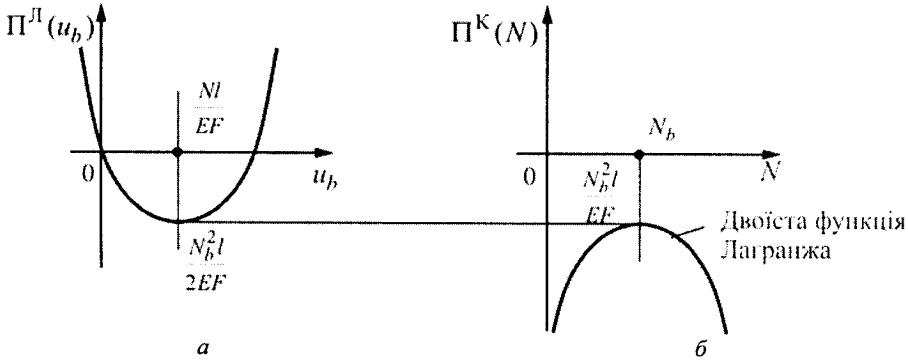


Рис. 3.4

Функції $\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{EF}{2l} u_b^2$ і $\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \frac{N_b^2}{EF}$ є двоїстими за Юнгом, і нерівність Юнга може бути записана у вигляді рівності:

$$\frac{EF}{2l} u_b^2 + \frac{1}{2} \frac{N_b^2}{EF} = N_b u_b,$$

яка являє собою принцип збереження енергії, тобто рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил.

3.4. Двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач. Приклади

Вирази для перетворення Лежандра у випадку обмежень $N = \bar{N}$, $\Delta = \bar{\Delta}$ можна отримати так (рис. 3.5)

При обмеженні $N = \bar{N}$

$$\bar{N}\Delta = N\Delta + (\bar{N} - N)\Delta = \frac{1}{2} k\Delta^2 + \frac{N^2}{k} + (\bar{N} - N)\Delta$$

або

$$\frac{1}{2} k\Delta^2 + \frac{N^2}{2k} = \bar{N}\Delta + (\bar{N} - N)\Delta.$$

При обмеженнях $N = \bar{N}$, $\Delta = \bar{\Delta}$

$$\bar{N}\bar{\Delta} = N\Delta + (\bar{N} - N)\Delta + (\bar{\Delta} - \Delta)\bar{N}$$

або

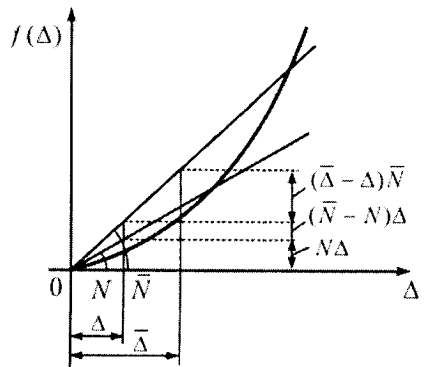


Рис. 3.5

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{N^2}{2k} = \bar{N}\bar{\Delta} + (N - \bar{N})\Delta + (\Delta - \bar{\Delta})\bar{N}.$$

Приклад 3.4. Перетворення Лежандра для задачі, розглянутої вище, має вигляд:

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} = \bar{N}\Delta + (N - \bar{N})\Delta,$$

а при виконанні умов рівноваги, сумісності деформацій, граничних умов згідно з теоремою Клапейрона отримуємо перетворення Лежандра у вигляді:

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} = N\Delta$$

при $N = \bar{N}$; $N = k\Delta$.

Нагадаємо, що функції $f(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2$ і $g(N) = \frac{1}{2}\frac{N^2}{k}$ є двоїстими за Юнгом.

Розглянемо таку задачу:

$$\text{мінімізувати } \frac{1}{2}\frac{N^2}{k}$$

$$\text{за умови } N = \bar{N}.$$

Функція Лагранжа має вигляд

$$F(N, \lambda) = \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \lambda(N - \bar{N}),$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{N}{k} + \lambda = 0.$$

Ураховуючи, що умовою рівності у перетворенні Лежандра є $N = k\Delta$,

$$\lambda = -\Delta,$$

функція Лагранжа

$$F(N, \Delta) = \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} - \Delta(N - \bar{N}),$$

яка є потенціалом зусиль і переміщень, і дає можливість шляхом прирівнювання нулеві відповідних частинних похідних отримати рівняння рівноваги і сумісності деформацій.

Двоїстою до попередньої задачі з урахуванням залежності $N = k\Delta$ буде задача

$$\left\{ -\frac{1}{2}k\Delta^2 + \bar{N}\Delta \right\} \rightarrow \max \quad \text{або} \quad F^{\text{II}}(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - \bar{N}\Delta.$$

Можна отримати такі постановки двоїстих за Лагранжем задач (рис. 3.6):

$$\text{Мінімізувати } -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \Delta(N - \bar{N})$$

$$\text{за умови } N = k\Delta.$$

$$\text{Максимізувати } -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k}$$

$$\text{за умови } N = \bar{N}.$$

Перша задача може бути зведена до безумовної задачі

$$\left(\frac{1}{2}k\Delta^2 - \bar{N}\Delta \right) \rightarrow \min,$$

а функція Лагранжа другої задачі має вигляд

$$F^K(N) = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{k} + \frac{\bar{N}}{k} (N - \bar{N}).$$

Такий результат можна отримати із загальних залежностей для квадратичного програмування при $H = \frac{1}{k}; x = N; \Delta = 1; b = \bar{N}; c = -\bar{N}; d = 0;$

$$u = \Delta.$$

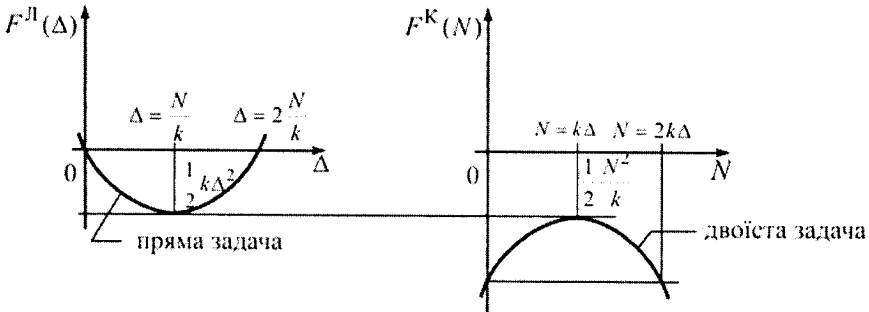


Рис. 3.6

В механіці прийнято більш зручним і наочним використання функції (функціонала) Лагранжа у вигляді $F^L(\Delta) = \frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta$ (рис. 3.7) з подальшим пошуком екстремального (мінімального) значення цієї функції від Δ

$$\min\left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta\right) = -\frac{N^2}{2k}.$$

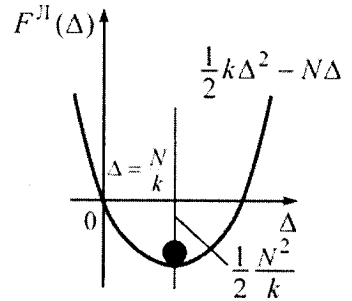


Рис. 3.7

При цьому формулюється відомий принцип Лагранжа-Діріхле: для консервативної системи стійка, нестійка, байдужа рівноваги мають місце, відповідно:

Стойка рівновага	Нестійка рівновага	Байдужа рівновага
$\delta \Pi^L = 0$	$\delta \Pi^L = 0$	$\delta \Pi^L = 0$
$\delta^2 \Pi^L > 0$	$\delta^2 \Pi^L < 0$	$\delta^2 \Pi^L = 0$
min	max	const

На рис. 3.8 показані перетворення Лежандра при зміні параметрів Δ, N, k .

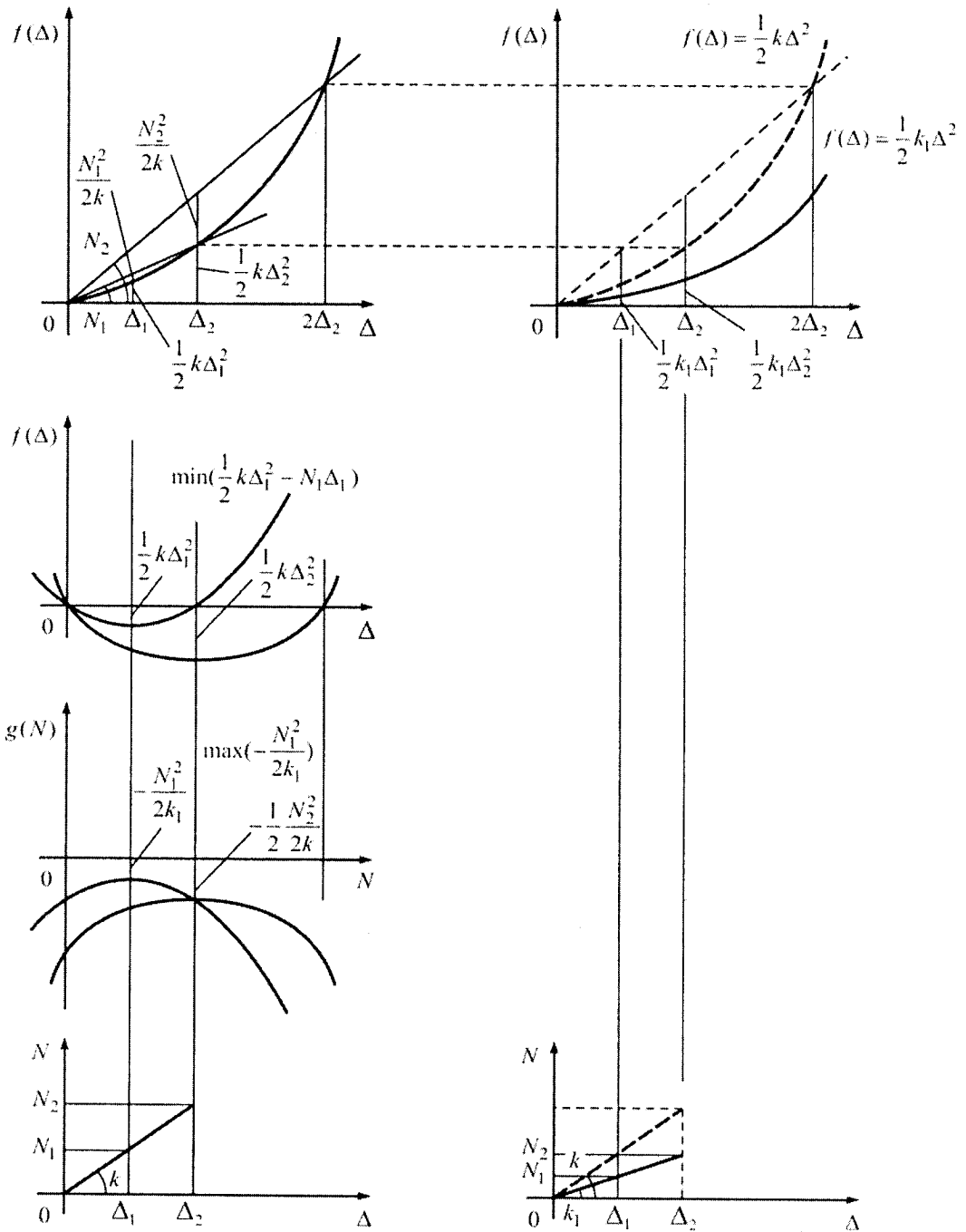


Рис. 3.8

Таким чином, принцип Лагранжа реалізує досягнення нижньої границі відповідної функції (функціонала) за Юнгом-Фенхелем

$$-g(N) = \inf_{\Delta} \left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta \right),$$

$$\max \left(N \Delta - \frac{1}{2} k \Delta^2 \right) = g(N) \Rightarrow \min \left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta \right) = -g(N) = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{k},$$

$$-\frac{1}{2} k \Delta^2 - \frac{N^2}{2k} = -N \Delta, \quad g(N) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{k}.$$

Принцип Кастільяно

$$\left(-N \Delta + \frac{1}{2} k \Delta^2 \right) \rightarrow \max \text{ при } N = \bar{N},$$

$$F(N, \Delta, \lambda) = -N \Delta + \frac{1}{2} k \Delta^2 + \lambda (N - \bar{N}),$$

$$\frac{\delta F(N, \Delta, \lambda)}{\delta \lambda} = 0; \quad N = \bar{N},$$

$$\frac{\delta F(N, \Delta, \lambda)}{\delta \Delta} = 0; \quad N = k \Delta,$$

$$\frac{\delta F(N, \Delta, \lambda)}{\delta N} = 0;$$

$$-\Delta + \lambda = 0, \quad \lambda = \Delta,$$

$$F^K(N) = -\frac{N^2}{2k} + \frac{\bar{N}}{k} (N - \bar{N}),$$

$$\max F^K(N) = -\frac{N^2}{2k}, \quad N = \bar{N}.$$

Тобто,

$$\min \left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta \right) = \max \left(-\frac{N^2}{2k} + \frac{\bar{N}}{k} (N - \bar{N}) \right),$$

$$\Delta = \frac{N}{k}, \quad N = \bar{N}.$$

Таким чином, принцип Кастільяно реалізує досягнення верхньої границі відповідної функції (функціонала) за Юнгом-Фенхелем

$$\sup_{N=\bar{N}} \left(-\frac{N^2}{2k} + \frac{\bar{N}}{k} (N - \bar{N}) \right).$$

Екстремальні значення функцій (функціоналів) Лагранжа і Кастільяно співпадають за умови, коли перша (перший) досягає \min (як прийнято у механіці), а друга (другий) – \max ¹. Якщо друга двоїста функція обрана у вигляді $\Pi^K(N) = \frac{N^2}{2k}$,

¹ Зазначимо, що принцип мінімуму функціоналу повної потенціальної енергії (функціоналу Лагранжа) є двоїстим до принципу максимуму функціоналу доповнювальної потенціальної енергії

то вона, відповідно, досягає \min і це являє собою відомий у будівельній механіці принцип найменшої роботи, що є принципом мінімуму доповнювальної потенціальної енергії $\frac{N^2}{2k}$ при $N = \bar{N}$.

Таким чином

$$\frac{1}{2}N\Delta + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} = \bar{N}\Delta \text{ при } N = k\Delta; N = \bar{N}; k = \frac{EF}{l}.$$

1. Це перетворення Лежандра можна представити у вигляді

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} = \bar{N}\Delta + (N - \bar{N})\Delta, \tag{3.19}$$

або при $N = \bar{N}$ і $\Delta = \frac{N}{k}$ маємо класичний вираз перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} = N\Delta,$$

яке передбачає проведення наступних операцій:

$$F_1(\Delta, N) = \left\{ N\Delta - \frac{1}{2}k\Delta^2 \right\} \rightarrow \max$$

із $\frac{\partial F_1}{\partial \Delta} = 0$

витікає умова

$$\Delta = \frac{N}{k}.$$

Екстремальне значення

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{2}\frac{N^2}{k}.$$

$$F_2(\Delta, N) = \left\{ N\Delta - \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} \right\} \rightarrow \max$$

із $\frac{\partial F_2}{\partial N} = 0$

витікає умова

$$N = k\Delta.$$

Екстремальне значення

$$\bar{F}_2 = \frac{1}{2}k\Delta^2.$$

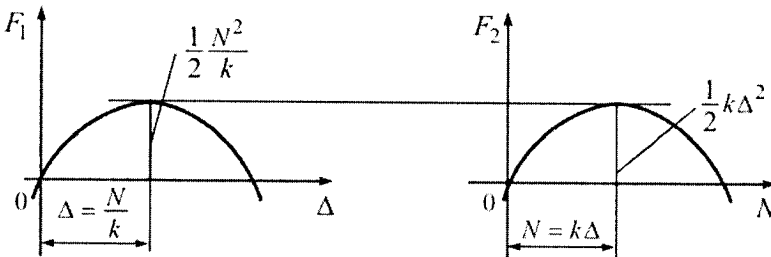


Рис. 3.9

(функціоналу Кастільяно) з протилежним знаком, що витікає із постановки двоїстих варіаційних задач. Тому термін «функціонал Кастільяно» надалі вживається дещо умовно. Екстремуми функціоналів у цих випадках співпадають за величиною і знаком, а на реалізацію варіаційних процедур це не впливає.

При цьому функції $\frac{1}{2}k\Delta^2$ і $\frac{1}{2}\frac{N^2}{k}$ є двоїстими за Юнгом, їх значення співпадають.

2. Можуть бути такі постановки задач, які також визначаються перетворенням Лежандра:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2}{k} &= N\Delta, \\ \frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta &= -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} \text{ при } N = k\Delta. \\ \min\left\{\frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta\right\} &= \max\left\{-\frac{1}{2}\frac{N^2}{k}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}k\Delta^2 = -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k}. \end{aligned}$$

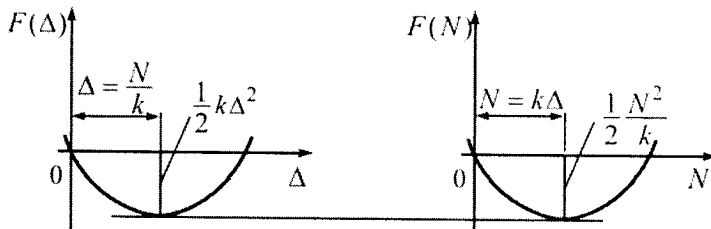


Рис. 3.10

При цьому вважається, що $N = \text{const}$.

3. Якщо ввести це обмеження, тобто $N = \bar{N}$ отримаємо наступні постановки двоїстих за Лагранжем задач:

Пряма задача

$$\left\{\frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta\right\} \rightarrow \min \text{ при } N = \bar{N}.$$

$$F(\Delta, N, \lambda) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta + \lambda(N - \bar{N}).$$

$$\frac{\partial F(\Delta, N, \lambda)}{\partial \Delta} = 0; \quad N = k\Delta.$$

$$\frac{\partial F(\Delta, N, \lambda)}{\partial N} = 0; \quad \lambda = \Delta.$$

$$\frac{\partial F(\Delta, N, \lambda)}{\partial \lambda} = 0; \quad N = \bar{N}.$$

Функція Лагранжа

$$F_1(\Delta, N) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta + \Delta(N - \bar{N}),$$

Двоїста задача

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{N^2}{k}\right\} \rightarrow \max \text{ при } N = \bar{N}.$$

$$F(N, \lambda) = -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \lambda(N - \bar{N}).$$

$$\frac{\partial F(N, \lambda)}{\partial N} = 0; \quad \lambda = \frac{N}{k} = \Delta.$$

$$\frac{\partial F(N, \lambda)}{\partial \lambda} = 0; \quad N = \bar{N}.$$

$$\Delta = \frac{\bar{N}}{k}.$$

Функція Лагранжа

$$F_2(\Delta, N) = -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \Delta(N - \bar{N}).$$

або

$$F_1(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - \bar{N}\Delta.$$

Перехід до нової змінної

$$\frac{\partial F_1(\Delta)}{\partial \Delta} = 0; \bar{N} = k\Delta.$$

$$N = k\Delta; \Delta = \frac{\bar{N}}{k}.$$

$$\bar{F}_1(N) = -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \frac{\bar{N}}{k}(N - \bar{N})$$

і відповідно двоїста задача:

$$\left\{ -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} \right\} \rightarrow \max \text{ при } N = \bar{N}.$$

Зазначимо, що екстремальні задачі для функцій Лагранжа

$$F_1(\Delta, N) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta + \Delta(N - \bar{N}), \quad F_2(\Delta, N) = -\frac{1}{2}\frac{N^2}{k} + \Delta(N - \bar{N})$$

дозволяють отримати рівняння рівноваги і сумісності деформацій:

$$F_1(\Delta, N) = F_2(\Delta, N),$$

$$F_1(\Delta, N) - F_2(\Delta, N) = 0,$$

$$d[F_1(\Delta, N) - F_2(\Delta, N)] = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Delta} d\Delta + \frac{\partial F_1}{\partial N} dN - \frac{\partial F_2}{\partial \Delta} d\Delta - \frac{\partial F_2}{\partial N} dN = 0.$$

Відповідні екстремальні задачі:

$$dF_1 = 0.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Delta} d\Delta + \frac{\partial F_1}{\partial N} dN = 0$$

при

$$\frac{\partial F_2}{\partial \Delta} d\Delta + \frac{\partial F_2}{\partial N} dN = 0.$$

$$dF_2 = 0.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \Delta} d\Delta + \frac{\partial F_2}{\partial N} dN = 0$$

при

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Delta} d\Delta + \frac{\partial F_1}{\partial N} dN = 0.$$

Тобто умови, які забезпечують $dF_1 = 0$, є додатковими умовами відповідної двоїстої задачі і навпаки.

Якщо

$$F_1(\Delta, N) = \frac{1}{2}k\Delta^2 - \bar{N}\Delta,$$

то

$$dF_1 = 0.$$

$$\left\{ \frac{1}{2}k\Delta^2 - \bar{N}\Delta \right\} \rightarrow \min$$

Перехід до нової змінної

$$\frac{\partial F_2(\Delta, N)}{\partial N} = 0; N = k\Delta.$$

$$\frac{\partial F_2(\Delta, N)}{\partial \Delta} = 0; N = \bar{N}.$$

$$\bar{F}_2(\Delta, N) = -\frac{1}{2}k\Delta^2 + \Delta(k\Delta - \bar{N})$$

і відповідно пряма задача:

$$\left\{ \frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta \right\} \rightarrow \min \text{ при } N = \bar{N}.$$

за умов

$$N = \bar{N}; N = k\Delta.$$

Оскільки умови обмежень витікають із $dF_1 = 0$, то екстремальна задача є безумовною, тобто

$$\left\{ \frac{1}{2} k \Delta^2 - \bar{N} \Delta \right\} \rightarrow \min.$$

Наведені постановки екстремальних задач являють собою відомі принципи Лагранжа і Кастільяно.

за умов

$$N = \bar{N}; N = k\Delta,$$

або $\left\{ -\frac{1}{2} \frac{N^2}{k} \right\} \rightarrow \max$ при $N = \bar{N}$.

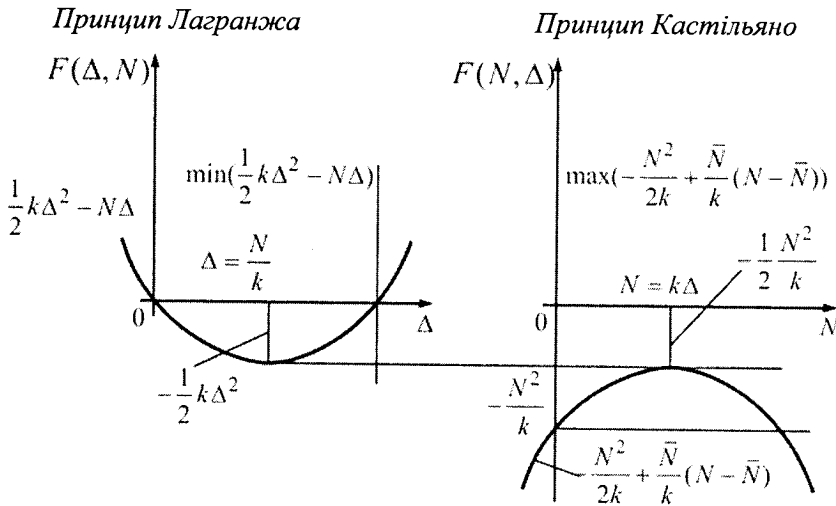


Рис. 3.11

Перетворення Лежандра при $N = k\Delta$ має вигляд

$$\frac{1}{2} k \Delta^2 + \frac{N^2}{2k} = N \Delta.$$

За означенням

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{k} = \max_{\Delta} \left(N \Delta - \frac{1}{2} k \Delta^2 \right); \quad \frac{1}{2} k \Delta^2 = \max_N \left(N \Delta - \frac{1}{2} \frac{N^2}{k} \right),$$

звідки

$$-\frac{1}{2} \frac{N^2}{k} = \min_{\Delta} \left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta \right), \quad -\frac{1}{2} k \Delta^2 = \max_N \left(-\frac{N^2}{2k} \right), \quad \max_N \left(-\frac{N^2}{2k} \right) = \min_{\Delta} \left(\frac{1}{2} k \Delta^2 - N \Delta \right).$$

Тобто, прямій варіаційній задачі, наприклад, $(\frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta) \rightarrow \min$ відповідає отримана за допомогою перетворення Лежандра відповідна двоїста варіаційна задача $(-N^2/2k) \rightarrow \max$, і навпаки. При чому додаткові умови однієї задачі є умовами екстремуму відповідної двоїстої задачі, і навпаки, а саме:

$$\left(\frac{1}{2}k\Delta^2 - N\Delta\right) \rightarrow \min_{\Delta}$$

Додаткова умова $\Delta = N/k$ дає природну умову у вигляді рівняння рівноваги $N = k\Delta$.

Відповідно,

$$-\frac{N^2}{2k} \rightarrow \max_N$$

при додатковій умові $N = \bar{N}$

$$\max\left(-\frac{N^2}{2k}\right) = \max\left[-\frac{N^2}{2k} + \Delta(N - \bar{N})\right],$$

$$N = \bar{N}$$

дає природну граничну умову у вигляді рівняння сумісності деформацій

$$\Delta = \frac{N}{k} = \frac{Nl}{EF}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l},$$

ураховуючи, що $\sigma = \frac{N}{F}$ і закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Таким чином, перетворення Лежандра дозволяє побудувати постановки двоїстих варіаційних задач, які являють собою, відповідно, принципи Лагранжа і Кастільяно.

У випадку багатопараметричних задач, ураховуючи статичні співвідношення $\mathbf{AS} = \mathbf{F}$, геометричні співвідношення $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Delta}$, фізичні співвідношення $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{BS}$ [21] отримаємо:

Пряма задача

$$\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{BS} \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{AS} = \mathbf{F}.$$

Функція Лагранжа будуватиметься наступним чином. До функції вихідної задачі $\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{BS}$ додаються умови задачі, помножені на нові змінні, які визначаються вектором $\boldsymbol{\lambda}$ (вектор множників Лагранжа). Тобто

$$F(\mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{BS} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{F} - \mathbf{AS}).$$

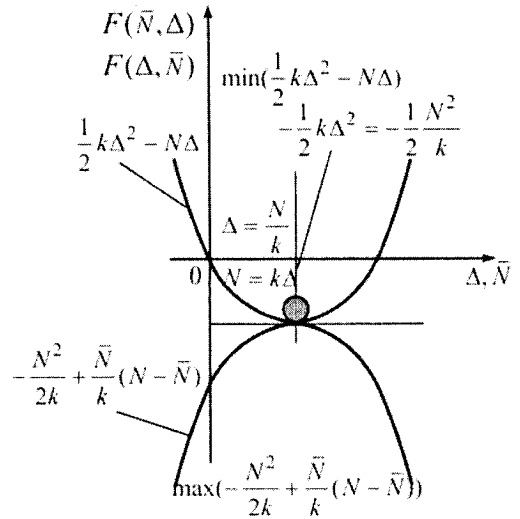


Рис. 3.12

Для отримання умов двоїстої задачі необхідно прирівняти нулеві перші частинні похідні функції Лагранжа по змінних вихідної задачі

$$\frac{\partial F(\mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Тоді двоїста екстремальна задача буде мати вигляд:

$$F(\mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{B}\mathbf{S} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{S}) \rightarrow \max,$$

$$\mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Вираз $\mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ являє собою геометричні рівняння, звідки $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Delta}$ і остаточно двоїста задача буде мати такий вигляд

$$\mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{B}\mathbf{S} \rightarrow \max,$$

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Delta} - \mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{0}.$$

Тобто можна отримати такі постановки двоїстих за Лагранжем задач.

Мінімізувати $\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta}$		Максимізувати $-\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{B}\mathbf{S}$
за умови $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$.		за умови $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F}$.

Для цієї пари екстремальних двоїстих задач згідно з основною теоремою двоїстості (п. 2.2) цільові функції рівні:

$$\frac{1}{2} \mathbf{S}^{*T} \mathbf{B}\mathbf{S}^* = \mathbf{F} \boldsymbol{\Delta}^* - \frac{1}{2} \mathbf{S}^{*T} \mathbf{B}\mathbf{S}^*,$$

що відповідає закону збереження енергії

$$\mathbf{S}^{*T} \mathbf{B}\mathbf{S}^* = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta}^*,$$

де \mathbf{S}^* , $\boldsymbol{\Delta}^*$ – розв'язки відповідних екстремальних задач.

Зазначимо, що перша задача може бути зведена до безумовної задачі

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta} \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{A}^T \overline{\boldsymbol{\Delta}} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0},$$

або

$$\frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Delta})^T \overline{\mathbf{K}} (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Delta}) - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta} \rightarrow \min,$$

де $\overline{\mathbf{K}}$ – відповідна матриця жорсткості.

Таким чином, пряма задача математично відповідає принципу Лагранжа, а двоїста – принципу Кастільяно.

В даній книжці з метою збереження математичної методології Лежандра, Юнга-Фенхеля-Лагранжа під функцією (функціоналом) Кастільяно будемо розуміти двоїсту за Лагранжем функцію (функціонал) до функції (функціоналу) Лагранжа і відповідно принцип Кастільяно вважати двоїстим до принципу Лагранжа і навпаки.

Перетворення Лежандра у випадку функції зусиль і переміщень скінченного числа змінних

$$\mathbf{N}^T = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}, \quad \Delta^T = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$$

будується наступним чином.

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\Delta) = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta.$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(\bar{\mathbf{N}}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}.$$

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил являє собою перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^T \Delta.$$

При цьому повинні бути виконані умови рівноваги, сумісності деформацій і граничні умови.

Умова, що перетворює нерівність Юнга у рівність

$$\mathbf{N} = \mathbf{K} \Delta, \quad \text{або} \quad \Delta = \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}},$$

при цьому матриці \mathbf{K} і \mathbf{B} , які являють собою відповідно матриці жорсткості і піддатливості є взаємно оберненими $\mathbf{K} \mathbf{B} = \mathbf{E}$. Ці матриці є матрицями других похідних (матрицями Гессе) від потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, їх коефіцієнти дорівнюють:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j}; \quad \delta_{ij} = \frac{d^2 U^{\text{доп}}(\bar{\mathbf{N}})}{\partial N_i \partial N_j}.$$

Згідно з *теоремою Донкіна*, якщо дві двоїсті за Юнгом функції потенціальної енергії $U(\Delta)$ і $U^{\text{доп}}(\bar{\mathbf{N}})$ залежать від одного і того ж параметра або групи параметрів, які не є активними, тобто не беруть участі у перетворенні Лежандра (η), то має місце залежність:

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \eta} = - \frac{\partial U^{\text{доп}}(\bar{\mathbf{N}})}{\partial \eta}$$

$$U(\Delta) = \frac{1}{2} k \Delta^2, \quad U^{\text{доп}}(\bar{N}) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{k},$$

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial k} = \frac{1}{2} \Delta^2, \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(\bar{N})}{\partial k} = - \frac{1}{2} \frac{N^2}{k^2} = - \frac{1}{2} \Delta^2.$$

Відповідні екстремальні задачі у перетворенні Лежандра дають двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач.

<p align="center"><i>Пряма задача</i></p> $\left\{ \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta - \mathbf{N}^T \Delta \right\} \rightarrow \min,$ <p>за умови $\Delta = \bar{\Delta}.$</p>	<p align="center"><i>Двоїста задача</i></p> $\left\{ - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}} + \mathbf{N}^T \bar{\Delta} \right\} \rightarrow \max,$ <p>за умови $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}.$</p>
---	---

Слід мати на увазі, якщо

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

де \mathbf{A} – додатно визначена симетрична матриця

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad \mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_n],$$

то:

1. умова стаціонарності має вигляд

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{3.20}$$

2. мінімальне значення дорівнює:

$$f_{\min} = -\frac{1}{2} \mathbf{x}_{st}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{st} = -\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{x}_{st},$$

де \mathbf{x}_{st} – розв'язки рівняння (3.20).

Частинні похідні від двоїстих функцій

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_1} = K_{11} \Delta_1 + \dots + x_{1n} \Delta_n = N_1; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_1} = \delta_{11} N_1 + \dots + \delta_{1n} N_n = \Delta_1,$$

.....

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_n} = K_{n1} \Delta_1 + \dots + K_{nn} \Delta_n = N_n; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_n} = \delta_{11} N_1 + \dots + \delta_{nn} N_n = \Delta_n$$

визначають рівняння методу переміщень і методу сил у будівельній механіці.

Частина ІІ. Варіаційні постановки лінійних задач будівельної механіки

4. Стержневий елемент. Центральний розтяг-стиснення

Розглянемо прямолінійний стержень постійної жорсткості EF , до якого прикладене повздовжнє навантаження $q_x(x)$. Тут і далі при розв'язанні задач статки припускається, що зовнішні сили мають потенціал, тобто робота цих сил при переміщенні точок їх прикладення не залежить від шляху, вздовж якого відбувається переміщення, а залежить тільки від початкового і кінцевого положення точки прикладення сили. Крім того вважаємо, що справедливою є гіпотеза природного ненапруженого стану.

На рис. 4.1,а показано додатні напрями поздовжньої сили N , переміщення u . Кінці стержня розташовані в точках з координатами $x=a$, $x=b$.

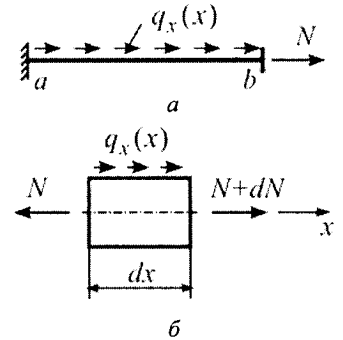


Рис. 4.1

Напружено-деформований стан стержня описується трьома групами рівнянь:

1. Статична сторона задачі

$$-N + N + dN + q_x dx = 0; \quad \frac{dN}{dx} = -q_x, \quad x \in (a, b), \quad (4.1)$$

$$N = \int_F \sigma_x dF. \quad (4.2)$$

2. Геометрична сторона задачі – зв'язок між деформаціями і переміщеннями (рівняння сумісності деформацій):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (4.3)$$

3. Фізична сторона задачі – закон Гука:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E, \quad (4.4)$$

де E – модуль Юнга¹.

Підставивши (4.3) і (4.4) в (4.2) та взявши інтеграл по площі отримаємо:

$$N = EF\varepsilon_x = EF \frac{du}{dx}. \quad (4.5)$$

Для постановки крайової задачі ці рівняння слід доповнити граничними умовами. Точки a_1, b_1 – точки, в яких задані зусилля (позначені рисками)

$N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}|_{a_1}^{b_1}$, а a_2, b_2 – точки, в яких задані переміщення (позначені рисками)

¹ Юнг, Томас (англ. Thomas Young, 1773–1829) – англійський фізик, лікар, астроном і сходознавець, один з творців хвилевої теорії світла. При дослідженні розтягу-стиснення вперше ввів поняття модулю пружності (модуль Юнга). Один із фундаторів науки про опір матеріалів.

$$u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}|_{a_2}^{b_2}.$$

Тоді крайова задача розтягу-стиснення стержня може бути сформульована так:

$$\left. \begin{aligned} \text{У зусиллях і переміщеннях} \\ \frac{dN}{dx} + q_x = 0 \\ EF \frac{du}{dx} - N = 0 \end{aligned} \right\} \in a, b,$$

$$N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}, \quad u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{У переміщеннях} \\ EF \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0, \quad x \in a, b, \\ EF \frac{du}{dx} \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}, \quad u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}. \end{aligned} \right\}$$

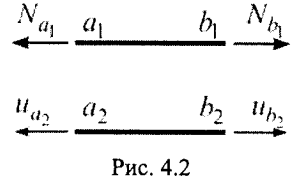


Рис. 4.2

4.1. Потенціальна енергія пружної деформації. Доповнювальна потенціальна енергія. Двоїсті за Юнгом функції деформації. Перші похідні від питомої потенціальної енергії. Формули Дж. Гріна і Кастільяно

В процесі деформування пружної системи в ній накопичується енергія, завдяки якій після розвантаження система приймає свій первісний стан. Ця енергія називається потенціальною енергією пружної деформації. Вона чисельно дорівнює роботі внутрішніх сил, а за законом збереження енергії у разі пружної деформації – роботі зовнішніх сил.

Потенціальна енергія пружної деформації пружного тіла обчислюється за формулою

$$U = \iiint_V u_0 dv,$$

де u_0 - питома (на одиницю об'єму) потенціальна енергія.

У одновимірному випадку (стержень) питома потенціальна енергія пружної деформації дорівнює $u_0(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon$. Як

двоїста за Юнгом вводиться функція доповнювальної (доповнює до прямокутника на рис. 4.3) питомої потенціальної енергії.

$$u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma.$$

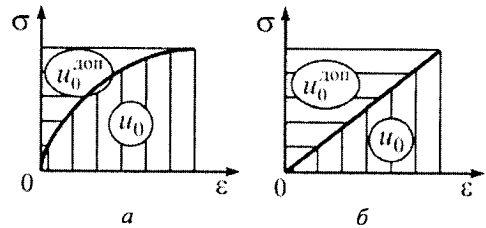


Рис. 4.3

Таким чином, маємо:

$$u_0(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon; \quad u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma. \tag{4.6}$$

Перші похідні від питомої потенціальної енергії

$$\frac{du_0(\epsilon)}{d\epsilon} = \sigma; \quad \frac{du_0^{\text{доп}}(\sigma)}{d\sigma} = \epsilon; \quad u_0(\epsilon) + u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \sigma\epsilon; \quad \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon + \int_0^\sigma \epsilon d\sigma = \sigma\epsilon.$$

Слід мати на увазі, що згідно із перетворенням Лежандра

$$u_0(\varepsilon) + u_0^{\text{доп}}(\sigma) = u_0 = \sigma \varepsilon. \quad (4.7)$$

Повна варіація дорівнює:

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0}{\partial \sigma} \delta \sigma = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \sigma} \delta \sigma + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} \delta \sigma,$$

але $u_0^{\text{доп}}(\sigma) = u_0 - u_0(\varepsilon)$, а $u_0(\varepsilon) = u_0 - u_0^{\text{доп}}(\sigma)$.

Тоді

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} \delta \sigma + \left(\sigma - \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon + \left(\varepsilon - \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma} \right) \delta \sigma, \quad (4.8)$$

тобто умови повної варіації дають теореми Дж. Гріна і Кастільяно

$$\sigma = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial \sigma}.$$

У випадку закону Гука $\sigma = \varepsilon E$ (рис. 4.3,б). $u_0(\varepsilon) = u_0^{\text{доп}}(\sigma)$

$$u_0(\sigma) = \frac{\varepsilon^2 E}{2}; \quad u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Звідси можна отримати формулу Клапейрона

$$2u_0 = \sigma \varepsilon.$$

Перші похідні від питомої потенціальної енергії у випадку лінійної деформації являють собою відповідно формули Дж. Гріна і Кастільяно, які впливають із залежностей перетворення Лежандра

$$\frac{du_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sigma; \quad \frac{du_0^{\text{доп}}(\sigma)}{d\sigma} = \varepsilon, \quad (4.9)$$

а другі похідні дорівнюють відповідно коефіцієнтам жорсткості E і податливості $1/E$

$$\frac{d^2 u_0(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = E; \quad \frac{d^2 u_0^{\text{доп}}(\sigma)}{d\sigma^2} = \frac{1}{E}. \quad (4.10)$$

Для стержня з лінійно-пружного матеріалу

$$u_0 = u_0^{\text{доп}} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \quad (4.11)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} EF \varepsilon^2, \quad U_0^{\text{доп}} = \frac{1}{2EF} N^2, \quad (4.12)$$

де EF і $1/EF$ є відповідно коефіцієнтами жорсткості і податливості елемента.

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\varepsilon) = \int_0^l u_0 dx = \frac{1}{2} \int_0^l N \varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^l EF \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EF \varepsilon^2 dx. \quad (4.13)$$

Відповідно доповнювальна потенціальна енергія

$$u^{\text{доп}}(N) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx. \quad (4.14)$$

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

Питомі (на одиницю довжини) значення потенціальної енергії:

$$U_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} EF \varepsilon^2; U_0^{\text{доп}}(N) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF}.$$

Перші похідні від потенціальної енергії (аналог формул Дж. Гріна і Кастільяно)

$$\frac{dU_0(\varepsilon)}{dx} = N^1; \frac{dU_0(N)}{dN} = \varepsilon^2.$$

¹ Сформульоване положення є теоремою Лагранжа і визначається формулою Лагранжа (першою формулою Кастільяно), яка як і сам принцип можливих переміщень, справедлива для будь-якої (лінійної або нелінійної) деформованої системи.

Природа формули Лагранжа аналогічна природі формули Дж.Гріна в теорії пружності.

Із зазначеною формулою пов'язують ім'я Лагранжа, мабуть, в тому сенсі, що вона витікає з варіаційного принципу Лагранжа. Проте, безпосередньо її отримав Кастільяно, і оскільки є й інша симетрична формула, що формулу називають також першою формулою Кастільяно.

² Кастільяно, Карло Альберто (італ. Carlo Alberto Castigliano, 1847–1884) – італійський механік та інженер.

У 1884 р. засновник берлінської школи теорії споруд Еміль Вінклер (1835–1888) в некролозі з приводу кончини Кастільяно, не приховуючи захоплення і гиркоти писав: "Теорія споруд була певною мірою заснована італійцями, такими як Галілео, Марчетті, Фабрі, Гранді та ін. Останнім часом у відповідь на запити, висунуті розвитком залізниць, згадана теорія досягла нових значних успіхів, і італійці знову відіграли провідну роль у цьому поступі. Серед недавніх публікацій слід відмітити роботи Аллієві, Біадего, Каневацці, Керадіні, Клерікетті, Кремони, Фаваро, Фаверо, Фігарі, Гвіді, Модільяні, Савіотті, Сайно, і це лише деякі з авторів, яких варто згадати в цьому переліку. Праці Кастільяно виділяються навіть серед цих робіт. Хоча ми, німці, також пишаємось своїми досягненнями в механіці, однак повинні визнати, що ми багато чого навчилися у наших італійських колег, і що, на жаль, мовні бар'єри все ще перешкоджають скорішому розповсюдженню їх теоретичних розробок" [241].

У своїй дипломній роботі Кастільяно досліджував пружні системи за допомогою теореми про мінімум роботи деформації. Незабаром виявилось, що ця теорема багато в чому збігається з принципом найменшої роботи $P = \text{minimum}$, відкритим Луїджі Федеріго Менабреа ще в 1857 р. Обурений зневажливим ставленням до себе, Менабреа видав в 1875 р. статтю, в якій відстоював свій пріоритет. Кастільяно за декілька місяців у відповідь опублікував есе, об'ємом 150 сторінок, під назвою *Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elasticità* (Нова теорія рівноваги пружних систем), у якій він пішов набагато далі Менабреа і сформулював серцевину своєї головної роботи, яка з'явилася згодом в 1879 р.

Головна робота Кастільяно базується на трьох твердженнях щодо енергії деформації: "Якщо ми виразимо функцію внутрішньої роботи тіла або пружної системи через відносні переміщення точок прикладення зовнішніх сил, то похідні цієї функції по переміщенням дадуть величини відповідних сил":

$$\partial \Pi (\dots, \delta_k, \dots) / \partial \delta_k = F_k$$

Перша теорема Кастільяно ще раніше вже була застосована до фізичних проблем Дж.Гріном. Перекладення цієї теореми для задач теорії споруд – справжній витвір Кастільяно, сформульований їм вперше в 1873 в дипломній роботі.

Друга теорема Кастільяно формулюється таким чином: "Якщо виразити внутрішню роботу тіла або пружної системи як функцію зовнішніх сил, то похідна цього виразу за однією з сил дасть відносне переміщення точки прикладення сили":

$$\partial \Pi (\dots, F_k, \dots) / \partial F_k = \delta_k$$

З цього виразу можна отримати *третьою теоремою Кастільяно*: «Напруження, що виникають між частинами тіла або системи після деформації, є такими, що робота внутрішніх сил є мінімальною, з чого слідує рівняння, що виражають рівновагу сил, прикладених до кожної з частин». Ця теорема

Другі похідні – відповідно коефіцієнти жорсткості і податливості

$$\frac{d^2 U_0(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = EF; \quad \frac{d^2 U_0(N)}{dN^2} = \frac{1}{EF}.$$

4.2. Робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона

У випадку розтягу-стиснення роботу зовнішніх сил (рис. 4.4) запишемо так:

$$A_{3C} = \int_a^b q_x u dx + Nu|_a^b = \int_a^b q_x u dx + \bar{N}u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N|_{a_2}^{b_2}. \quad (4.15)$$

Інтеграл $\int_a^b q_x u dx$ перетворимо за формулою інтегрування частинами

$$\int_a^b q_x u dx = - \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = -Nu|_a^b + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx,$$

$$\left[\begin{array}{l} u = u; \quad dx = \frac{du}{dx} dx \\ dv = \frac{dN}{dx} dx \quad v = N \end{array} \right].$$

Таким чином, отримуємо формулу Гріна:

$$- \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = -Nu|_a^b + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx$$

і відповідно наступну залежність:

відповідає принципу Менабреа, на який Кастільяно посилається явно у вступі, але при цьому він додає, що дав її строге доведення в своїй дипломній дисертації в 1873 р.

У вступі до своєї головної роботи Кастільяно стверджує, "що дана книга, яка повністю охоплює теорію пружних зусиль у спорудах, ... заснована виключно на теоремах про похідні внутрішньої роботи". Таким чином він ввів принцип енергії в теорію споруд.

Увагу своїх німецьких колег до головної роботи Кастільяно "Теорія рівноваги пружних систем та її застосування" привернув Еміль Вінклер.

У 1882 р., не знаючи про відповідні роботи Менабреа і Кастільяно, Вільгельм Фрянкель (1841–1895) отримав принцип Менабреа для плоских n разів статично невизначуваних систем і лінійно-пружного континуума з принципу можливих змін напруженого стану. Фрянкель сподівався, що його принцип забезпечить "однорідне розуміння всієї сукупності інженерно-будівельних проблем". У тому ж самому році Маттіас Коен (1848–1924) звернувся до загальної теореми роботи, яку Мор з успіхом використовував в теорії розкільних стержневих систем, і застосував її у формі принципу можливих змін напруженого стану для обчислення переміщень в статично визначуваних балках і реакцій опор в нерозрізній балці. При цьому він вперше сформулював рівняння роботи одиничної сили у вигляді відомого інтеграла від добутку:

$$1 \cdot \delta_j = \int_{(i)} \frac{M_1 \cdot M_j}{EI} dx.$$

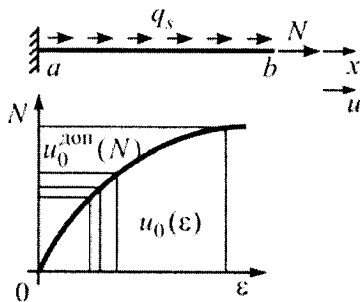


Рис. 4.4

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

$$\int_a^b q_x u dx + \bar{N} u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N|_{a_2}^{b_2} = \int_a^b N \varepsilon dx - (N - \bar{N}) u|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N|_{a_2}^{b_2},$$

до правої частини якої додамо рівність:

$$\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx = \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx,$$

яка отримується як сума двох залежностей:

$$\int_a^b q_x u dx = -N u|_a^b + \int_a^b N \varepsilon dx \quad \text{і} \quad \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = N u|_a^b - \int_a^b N \frac{du}{dx} dx.$$

Тоді остаточно отримаємо наступний вираз:

$$\int_a^b q_x u dx + \bar{N} u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N|_{a_2}^{b_2} = \int_a^b N \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - (N - \bar{N}) u|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N|_{a_2}^{b_2}, \quad (4.16)$$

який являє собою рівність робіт зовнішніх (ліва частина) і внутрішніх (права частина) сил, $A_{3C} = A_{BC}$. При цьому права частина є аналогом відомої у просторовій задачі теорії пружності формули П.Ф.Папковича [140]

$$A_{BC} = \int_a^b N \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - (N - \bar{N}) u|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N|_{a_2}^{b_2}. \quad (4.17)$$

Якщо для певного деформованого стану виконується рівняння рівноваги $\frac{dN}{dx} + q_x = 0$, рівняння сумісності деформацій $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, а також граничні умови $u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}|_{a_2}^{b_2}$ і $N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}|_{a_1}^{b_1}$, то відповідні характеристики цього стану u, ε, N є дійсними і тому саме для цього дійсного стану отримаємо:

$$\int_a^b N \varepsilon dx = \int_a^b q_x u dx + \bar{N} u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N|_{a_2}^{b_2}, \quad \int_a^b N \varepsilon dx = u(\varepsilon) + u^{\text{доп}}(N),$$

$$u_0 = N \varepsilon = \int_0^\varepsilon N d\varepsilon + \int_0^N \varepsilon dN = u_0(\varepsilon) + u_0^{\text{доп}}(N).$$

Якщо залежність $N - \varepsilon$ є лінійною, тоді

$$2U = \int_a^b q_x u dx + \bar{N} u|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N|_{a_2}^{b_2}. \quad (4.18)$$

Вираз (4.18) являє собою теорему Клапейрона: для дійсного стану лінійно пружної системи, у якому задовольняються рівняння рівноваги, сумісності

деформацій, фізичної сторони задачі та граничні умови, подвійна потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішніх сил.

Ураховуючи, що робота внутрішніх сил ототожнюється з потенціальною енергією пружної деформації і за законом збереження енергії дорівнює роботі зовнішніх сил згідно з теоремою Клапейрона при статичному навантаженні лінійно пружної системи, яка знаходиться у дійсному стані, робота зовнішніх сил обчислюється як половина добутку остаточного значення узагальненої сили на остаточне значення відповідного узагальненого переміщення, якщо зовнішнє навантаження є кінематичним, тобто задається за допомогою узагальнених переміщень, то робота внутрішніх сил ототожнюється із доповнювальною потенціальною енергією, яка для лінійно пружної системи дорівнює потенціальній енергії пружної деформації

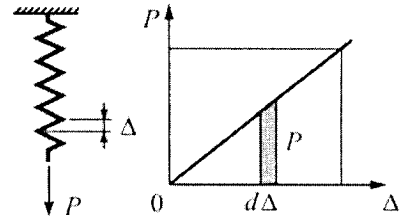


Рис. 4.5

$$A_{3C} = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{k\Delta^2}{2} = \frac{1}{2} P\Delta, \quad P = k\Delta.$$

4.3. Двоїсті варіаційні постановки. Принципи Лагранжа і Кастільяно

Перетворення Лежандра у даному випадку має вигляд

$$U_0(\varepsilon) + U_0^{\text{доп}}(N) = U_0 = N\varepsilon.$$

Повна варіація дорівнює

$$\delta U_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0}{\partial N} \delta N = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(N)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial N} \delta N + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(N)}{\partial N} \delta N,$$

але

$$U_0^{\text{доп}}(N) = u_0 - u_0(\varepsilon), \quad \text{а} \quad U_0(\varepsilon) = u_0 - u_0^{\text{доп}}(N).$$

Тоді

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}(N)}{\partial N} \delta N + \left(N - \frac{\partial U_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon + \left(\varepsilon - \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(N)}{\partial N} \right) \delta N.$$

Якщо $N = EF\varepsilon$, то остаточно $U_0(\varepsilon) + U_0^{\text{доп}}(N) = N\varepsilon$, де

$$U_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} EF\varepsilon^2, \quad U_0^{\text{доп}}(N) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF}.$$

Рівняння (4.16) може бути записане у вигляді:

$$\int_a^b N \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} - (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0,$$

або $\Pi(\varepsilon, u, N) = \Pi_1(\varepsilon, u, N) - \Pi_2(\varepsilon, u, N) = 0$ і, відповідно,

$$\Pi_1(\varepsilon, u, N) = \Pi_2(\varepsilon, u, N),$$

де індексом позначені так звані перші і другі форми відповідних функціоналів

$$\Pi_1(\varepsilon, u, N) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\Pi_2(\varepsilon, u, N) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b N \varepsilon dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Тоді можна записати наступні постановки варіаційних задач

$$\delta \Pi_1 = 0$$

$$\delta \Pi_2 = 0$$

при

$$\delta \Pi_2 = 0$$

$$\delta \Pi_1 = 0.$$

$$\delta \Pi_1(\varepsilon, u, N) = \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_1}{\partial N} \delta N = 0$$

$$\delta \Pi_2(\varepsilon, u, N) = \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial \Pi_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_2}{\partial N} \delta N = 0$$

і відповідне варіаційне рівняння

і відповідне варіаційне рівняння

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial \Pi_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_2}{\partial N} \delta N = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_1}{\partial N} \delta N = 0$$

У розгорнутому вигляді, використовуючи залежність

$$-\int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - N u \Big|_a^b,$$

отримаємо:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \int_a^b (EF \varepsilon - N) \delta \varepsilon dx,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \int_a^b (EF \varepsilon - N) \delta \varepsilon dx,$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial u} \delta u = - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial u} \delta u = - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial N} \delta N = \int_a^b \left(-\varepsilon + \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial N} \delta N = \int_a^b \left(-\varepsilon + \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

і варіаційне рівняння в цілому у вигляді:

і варіаційне рівняння в цілому у вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (N - EF \varepsilon) \delta \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + \\ & + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b (N - EF \varepsilon) \delta \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + \\ & + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні і маємо задачу на абсолютний екстремум. Функціонали $\Pi_1^{XB}(\varepsilon, u, N)$ і $\Pi_2^{XB}(\varepsilon, u, N)$ мають назву відповідно першої і другої форми функціоналів Ху-Васідзу:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{XB}(\varepsilon, u, N) = & \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \\ & - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \int_a^b q_x u dx - \\ & - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^{XB}(\varepsilon, u, N) = & \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \\ & - \int_a^b N \varepsilon dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + \\ & + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1}. \end{aligned}$$

Якщо приймається додаткова умова $N = EF\varepsilon$, отримаємо, відповідно, першу і другу форми функціоналів Рейснера

$$\begin{aligned} \Pi_1^P(u, N) = & \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \\ & - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^P(u, N) = & - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + \\ & + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_1^P(u, N) = 0$$

і відповідне варіаційне рівняння

$$\frac{\partial \Pi_2^P}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_2^P}{\partial N} \delta N = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_2^P}{\partial u} \delta u = - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\frac{\partial \Pi_2^P}{\partial N} \delta N = \int_a^b \left(-\varepsilon + \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

і варіаційне рівняння в цілому у вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - \\ & - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

Якщо при додатковій умові $N = EF\varepsilon$ прийняти ще інші додаткові умови, а саме:

$$N = EF\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta \Pi_2^P(u, N) = 0$$

і відповідне варіаційне рівняння

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_1^P}{\partial N} \delta N = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial u} \delta u = - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial N} \delta N = \int_a^b \left(-\varepsilon + \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

і варіаційне рівняння в цілому у вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - \\ & - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

$$N = EF\varepsilon; \quad \frac{dN}{dx} + q_x = 0; \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1},$$

то отримаємо так звані основні функціонали Лагранжа і Кастільяно, які залежать лише від однієї із змінних u і N .

$$\delta \Pi^L(u) = 0,$$

$$\delta \Pi^K(N) = 0,$$

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EFu'^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N}u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

$$\Pi^{\text{К}}(N) = - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx + \bar{u}N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Стосовно отриманих варіаційних постановок зазначимо, що функціонал Рейснера (перша форма) може бути отриманий із функціонала Лагранжа з використанням перетворення Лежандра, а також множників Лагранжа для урахування додаткових умов. Друга форма функціонала Рейснера передбачає урахування за допомогою множників Лагранжа додаткових умов для функціонала Кастільяно. Функціонали типу Ху-Васідзу отримуються із відповідних функціоналів Рейснера шляхом урахування умови $N = EF\varepsilon$ за допомогою множників Лагранжа.

Принципи Лагранжа і Кастільяно сформулюємо наступним чином:

Принцип Лагранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лагранжа стаціонарне (мінімальне) значення. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівняння сумісності деформації і рівняння в'язей (кінематичні граничні умови).

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам.

Таке формулювання принципу Кастільяно тут і надалі пов'язане із збереженням математичної методології Лежандра, Юнга-Фенхеля-Лагранжа, за якого варіаційна задача Кастільяно розглядається як двоїста до прямої варіаційної задачі Лагранжа і навпаки. Як уже зазначалось, екстремальні значення функціоналів Лагранжа і Кастільяно співпадають, коли перший досягає min, а другий – max. Якщо друга двоїста функція (функціонал) обрана у вигляді $\Pi^{\text{К}}(N) = \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx$, то вона відповідно досягає min, і це являє відомий у механіці принцип найменшої роботи.

4.4. Варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно. Принципи можливих переміщень і можливих зусиль

Варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно мають вигляд

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(u) = 0,$$

$$\delta \Pi^{\text{К}}(N) = 0,$$

$$-\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_a^{b_1} = 0.$$

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій дає у вигляді природних умов рівняння рівноваги як рівняння Ейлера $\frac{dN}{dx} + q_x = 0$, а також природні статичні граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах. Для різних типів балок це показано у табл. 4.1.

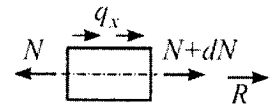
Варіаційне рівняння Лагранжа

$$N_b \delta u_b - N_a \delta u_a - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx = 0,$$

ураховуючи, що під інтегралом стоїть рівнодіюча R ,

$$R dx + q_x dx + dN = 0, \quad R = -\frac{dN}{dx} - q_x$$

являє собою принцип можливих переміщень, а саме: якщо сума робіт усіх сил, які діють на систему, при будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю, то система знаходиться у рівновазі. При цьому під можливими розуміються переміщення, які описуються гладкими безперервними функціями і задовольняють умовам в'язей. Його формулювання є ще у «Фізике» Аристотеля, суттєві етапи розвитку пов'язані з іменами Леонардо да Вінчі¹, Галілея², Стевіна^{1,2,3,4,5}.

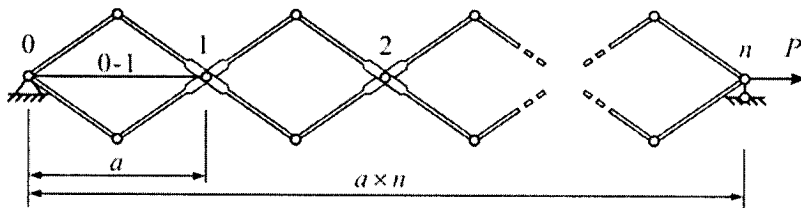


¹ Леонардо да Вінчі (іт. Leonardo da Vinci, 1452–1519) – видатний італійський вчений, дослідник, винахідник і художник, архітектор, анатоміст та інженер, одна з найвизначніших постатей італійського Відродження. У його творчості механіка займала важливе місце. В галузі опору матеріалів він є безпосереднім попередником Г.Галілея, у будівельній механіці досліджував теорію арок, куполів. Один із перших визначив коефіцієнт тертя, досліджував механіку руху людини, польоту птахів, проектував машини і механізми. Досліджував поняття сили, моменту, складання сил.

² Галілей, Галілео (іт. Galileo Galilei, 1564–1642) – італійський фізик, механік, математик, астроном, один із засновників точного природознавства. У невеликій роботі „Механіка” виклав загальну теорію простих машин. У 1638 р. у Голландії були видані його „Беседи и математические доказательства двух новых наук” (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze). У цій книзі, написаній у формі діалогів, викладені фундаментальні дослідження з механіки матеріалів і динаміки. Перші два діалоги присвячені основам опору матеріалів і будівельній механіці. Досліджував згин балок. Цікаві його висновки про пропорційність в органічному світі і техніці. Накреслив шляхи до створення нової ньютоніанської динаміки.

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

Іноді пряме застосування принципу можливих переміщень дозволяє отримати розв'язок задачі швидше та простіше порівняно із використанням рівнянь рівноваги. В якості прикладу розглянемо задачу [177], схема якої показана на рисунку.



З'єднання стержнів в проміжних вузлах цієї системи здійснюється по типу «ножиці». В цій статично визначуваній системі необхідно знайти зусилля у стержні, який з'єднує вузли 0 і 1. Звісно, можна отримати шукане зусилля S_{01} , рухаючись від правого навантаженого вузла і послідовно розглядаючи рівновагу кожного вузла, але пряме застосування принципу можливих переміщень дозволяє досягти мети скоріше.

Оскільки система є статично визначуваною, то внутрішні зусилля не залежать від фізичних властивостей її елементів. Тому можна вважати, що всі стержні, крім стержня 0-1, є абсолютно твердими, і можлива робота внутрішніх сил в цих стержнях дорівнює нулю. В результаті можливої роботи всіх внутрішніх сил системи можна визначити виразом $-S_{01}\Delta$, де через Δ позначене можливе горизонтальне переміщення вузла 1. Неважко помітити, що при такому переміщенні вузла 1 всі чарунки цієї системи однаково змінять свої розміри, і отже, різниця переміщень будь-яких сусідніх вузлів дорівнюватиме Δ . Таким чином, останній вузол отримає переміщення $n\Delta$, а робота зовнішніх сил буде дорівнювати $Pn\Delta$. Виходячи з принципу можливих переміщень, запишемо

$$Pn\Delta - S_{01}\Delta = 0,$$

¹ Стевін, Сімон (нідерл. Simon Stevin, 1548–1620) – фламандський математик-універсал, механік і інженер. Один із фундаторів сучасної статки і гідростатики. У математиці ввів десятковий дріб, запропонований Бонфісом, від'ємні корені рівнянь.

² Вперше принцип можливих переміщень для твердих тіл був чітко сформульований Ж.Л. Лагранжем в його «Аналітичній механіці» (1788), чому і носить його ім'я, хоча основні ідеї цього принципу можна виявити в значно раніших роботах (див., наприклад, Varignon. Nouvelle mécanique – лист Іоганна Бернуллі до Варіньона, т.2, Paris, 1725, р. 174). До тіл, що деформуються, цей принцип вперше був застосований З.-Д. Пуассоном (1781–1840) в 1833 р. (Traité de mécanique).

³ Формулювання Лагранжем цієї теореми зробило значний внесок у розвиток теорії рівноваги системи і механіки у цілому. Доведення теореми мало деякі вади, які пізніше усунув німецький математик Петер Густав Лежен-Діріхле (1805–1859).

⁴ Лежен-Діріхле П.Г. Об устойчивости равновесия. – В кн.: Лагранж. Аналитическая механика. – Т.1. – С. 537.

⁵ Пуассон, Сімеон Дені (фр. Siméon-Denis Poisson, 1781–1840) – французький математик, механік і фізик, один із засновників математичної фізики. Дослідження присвячені варіаційному численню, теорії ймовірності, математичній фізиці, механіці, зокрема, теорії пружності, опору матеріалів. Написав «Курс механіки» (1811), який багато разів перевидавався.

звідки $S_{01}\Delta = nP$.

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$u_b \delta N_b - u_a \delta N_a + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx = 0$$

являє собою принцип можливих зусиль (можливих змін напруженого стану): якщо сума робіт, які здійснюються при будь-яких можливих змінах зусиль дорівнює нулю, то система задовольняє рівнянням сумісності деформацій¹. При цьому під можливими розуміються статично можливі системи зусиль.

Таблиця 4.1

Варіаційне рівняння Лагранжа					
Задані зовні граничні умови $u _{a_2}^{b_2}$	$u_a = 0 \quad u_b = 0$	$u_a = 0 \quad -$	$u_a = 0 \quad -$	$u_a = 0 \quad -$	Природні граничні умови $u _{a_2}^{b_2}$
Природні граничні умови $N _{a_1}^{b_1}$	$- \quad -$	$- \quad N_b$	$- \quad N_b$	$- \quad N_b$	Задані зовні граничні умови $u _{a_2}^{b_2}$
					Варіаційне рівняння Кастільяно

У випадку неоднорідних граничних умов

$$u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}|_{a_2}^{b_2} \quad \text{і} \quad N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}|_{a_1}^{b_1}$$

отримаємо відповідно:

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$(N - \bar{N}) \delta u|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx = 0.$$

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$(u - \bar{u}) \delta N|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx = 0.$$

¹ Одним з перших учених, що намагалися сформулювати принцип можливих змін напруженого стану був італійський математик, механік, військовий інженер Луїджі Федеріко Менабреа. Перша його робота, присвячена цьому питанню, з'явилася в 1857 р. (Menabrea L.F. Principio generale per determinare le tensioni e le prissioni in un sistema elastico. Reale Akademia delle Scienze di Torino). Проте вона містила неточності, що привели до великої і тривалої дискусії. Один з її учасників французький математик Жозеф Луї Франсуа Бертран (фр. Joseph Louis François Bertrand; 1822–1900) в листі до Менабреа в 1869 р. повідомив його про необхідність внесення виправлень, які були враховані Менабреа в 1870 р. По суті, сучасне формулювання принципу можливих змін напруженого стану належить Бертрану.

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

Таким чином:

У принципі Лагранжа маємо додаткові умови (обмеження)

$$N = EF\varepsilon; \varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}; u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}|_{a_2}^{b_2},$$

і отримані природні умови

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -q_x; N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}|_{a_1}^{b_1}.$$

У принципі Кастільяно маємо додаткові умови (обмеження)

$$N = EF\varepsilon; \frac{\partial N}{\partial x} = -q_x; N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}|_{a_1}^{b_1},$$

і отримані природні умови

$$\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}; u|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}|_{a_2}^{b_2}.$$

Тобто додаткові умови однієї варіаційної задачі є природними для іншої і навпаки. Такі задачі утворюють пару двоїстих варіаційних задач. Вони розв'язуються або шляхом розв'язання кожної варіаційної задачі окремо, або шляхом спільного розв'язування рівнянь природних (додаткових) умов обох задач. Наведені залежності пояснюються формальною спряженістю операторів диференціальних рівнянь рівноваги $\frac{\partial N}{\partial x} = -q_x$ і сумісності деформацій $\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}$, що відображається у формулі Гріна

$$\int_a^b \frac{dN}{dx} u dx = Nu|_a^b - \int_a^b N \frac{du}{dx} dx,$$

а за фізичним змістом є наслідком теореми Клапейрона і закону збереження енергії.

Значимо, що рівняння

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N|_{a_2}^{b_2} = 0$$

може бути отримане інакше

$$\delta \Pi_2(N) = 0, \quad \Pi_2(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx + \bar{u} N|_{a_2}^{b_2}, \quad \frac{dN}{dx} + q_x = 0 \quad \in a, b, \quad N|_{a_1}^{b_1} = \bar{N},$$

За допомогою формули інтегрування частинами можемо записати:

$$-\int_a^b \frac{du}{dx} \delta N dx = -u \delta N|_a^b + \int_a^b \frac{d\delta N}{dx} dx.$$

Оскільки варійований напружений стан є можливим, то

$$-\int_a^b \frac{du}{dx} \delta N dx = -u \delta N|_a^b.$$

Додавши цю рівність до виразу

$$\delta \Pi_2(N) = \int_a^b \frac{N}{EF} \delta N dx + \bar{u} \delta N|_{a_2}^{b_2} = 0,$$

будемо мати

$$\delta \Pi_2(N) = -\int_a^b \left(\frac{N}{EF} - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N|_{a_2}^{b_2} = 0,$$

$$\Pi_2(N) = - \int_a^b \left(\frac{N^2}{2EF} - \frac{du}{dx} N \right) dx + (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Знову застосуємо формулу інтегрування частинами і отримаємо

$$\delta \Pi_2(N) = F_{N'} \delta N \Big|_a^b + \int_a^b \left(F_N - \frac{d}{dx} F_{N'} \right) \delta N dx + \bar{u} \delta N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

причому

$$F(N) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - \frac{du}{dx} N, \quad F_N = \frac{N}{EF} - \frac{du}{dx}, \quad F_{N'} = 0.$$

4.5. Приклад. Пряма задача – функціонал Лагранжа

Функціонал Лагранжа має такий вигляд

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_0^l EF(u')^2 - \bar{N}_b u_b. \quad (4.24)$$

Функцію переміщень будемо розшукувати у вигляді $u = a_0 + a_1 x$. Враховуючи граничні умови

$$x=0, u_a=0 \rightarrow a_0=0, \quad x=b, a_1 b = u_b \rightarrow a_1 = \frac{u_b}{b}, \quad u = \frac{u_b}{l} x.$$

Підставляючи $u = \frac{u_b}{l} x$ до (4.24), перетворюємо функціонал на функцію однієї змінної u_b :

$$\Pi^{\text{Л}}(u_b) = \frac{EF}{2l} u_b^2 - \bar{N}_b u_b.$$

Із умови стаціонарності функціонала цієї функції

$$\frac{d\Pi^{\text{Л}}(u_b)}{du_b} = \frac{EF}{l} u_b - \bar{N}_b = 0, \quad (4.25)$$

звідки $u_b = \frac{\bar{N}_b l}{EF}$.

Зазначимо, що рівняння (4.25) є рівнянням рівноваги, яке і дає розв'язок наведеної статично визначеної задачі.

Ураховуючи, що $\frac{d^2 \Pi^{\text{Л}}}{du_b^2} = \frac{EF}{l} > 0$, то

функціонал Лагранжа має мінімум, який дорівнює

$$\Pi_{\text{min}}^{\text{Л}} = - \frac{\bar{N}_b^2 l}{2EF}.$$

На рис. 4.6 показана аксонометрія поверхні $\Pi^{\text{Л}}(u_b)$.

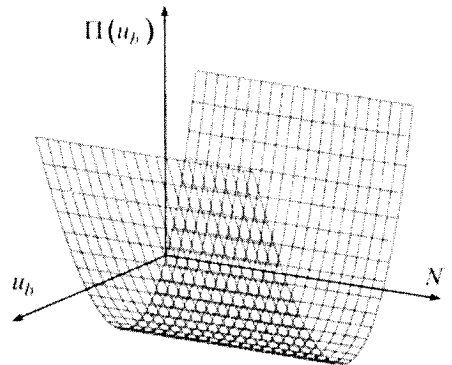
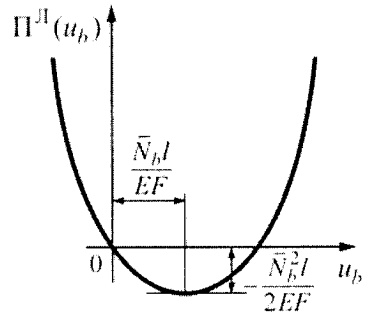
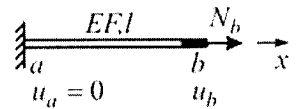


Рис. 4.6

4.6. Приклад. Двоїста задача – функціонал Кастільяно

Функціонал Кастільяно має такий вигляд

$$\Pi^K(N) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx.$$

Додаткові умови

$$\frac{dN}{dx} = -q_x = 0, \quad x = l, \quad N = \bar{N}_b, \quad \text{або}$$

$$N = \text{const}, \quad x = l, \quad N = \bar{N}_b.$$

За допомогою методу множників Лагранжа отримаємо

$$\Pi^K(N, \mu) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx + \mu(N - \bar{N}_b),$$

$$\frac{d\Pi^K}{dN} = -\frac{Nl}{EF} + \mu = 0, \quad \mu = \frac{\bar{N}_b l}{EF}, \quad \frac{d\Pi^K}{d\mu} = N - \bar{N}_b = 0, \quad N = \bar{N}_b,$$

$$\Pi^K = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} + \frac{\bar{N}_b l}{EF} (N - \bar{N}_b) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} + \frac{\bar{N}_b l}{EF} N - \frac{\bar{N}_b^2 l}{EF},$$

$$\frac{d\Pi^K}{dN} = -\frac{Nl}{EF} + \frac{\bar{N}_b l}{EF} = 0, \quad N = \bar{N}_b,$$

$$\frac{d^2\Pi^K}{dN^2} = -\frac{l}{EF} < 0.$$

Функціонал Кастільяно має максимум

$$N = \bar{N}_b, \quad \Pi^K = -\frac{\bar{N}_b^2 l}{2EF}.$$

На рис. 4.7 показана аксонометрія поверхні $\Pi(N)$.

Змішаний функціонал

$$\begin{aligned} \Pi(u_b, N) &= \frac{EF}{2l} u_b^2 - \bar{N}_b u_b + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF} - \frac{\bar{N}_b l}{EF} (N - \bar{N}_b). \end{aligned}$$

На рис. 4.8 показана аксонометрія поверхні $\Pi(u_b, N)$.

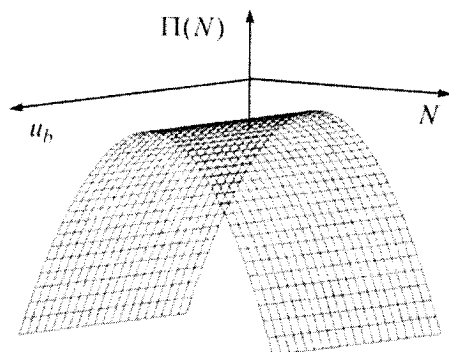
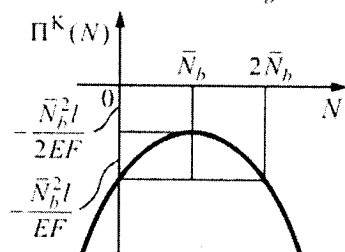


Рис. 4.7

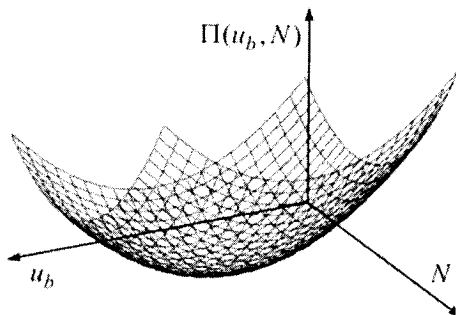


Рис. 4.8

4.7. Приклад. Функціонал Рейснера

Із виразу для повного функціонала

$$\int_a^b \left(\varepsilon_x - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0,$$

для задачі, яка розглядалася раніше, $\varepsilon_x = \frac{N}{EF}$, якщо

задовольнити рівняння рівноваги $q_x = 0$, $\frac{dN}{dx} = 0$,



$N = \bar{N}_b = \text{const}$, можемо отримати першу форму функціонала Рейснера, в якому одночасно варіюються зусилля N і переміщення u :

$$\Pi_{21}(N, u) = \int_a^b \left(N \frac{du}{dx} - \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} \right) dx - u_b \bar{N}_b.$$

Представляючи $u(x)$ у вигляді $u(x) = \frac{u_b x}{L}$,

функціонал $\Pi_{21}(N, u)$ перетворюється на функцію двох змінних u_b, N :

$$\Pi_{21}(N, u_b) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EF} + N u_b - u_b \bar{N}_b. \quad (4.26)$$

На рис. 4.9 показана аксонометрія поверхні $\Pi_{21}(N, u_b)$.

Із умови стаціонарності цієї функції отримаємо:

$$\frac{\partial \Pi_{21}}{\partial N} = -\frac{NL}{EF} + u_b = 0, \quad u_b = \frac{NL}{EF},$$

$$\frac{\partial \Pi_{21}}{\partial u_b} = N - \bar{N}_b = 0, \quad u = \frac{\bar{N}_b}{EF} x.$$

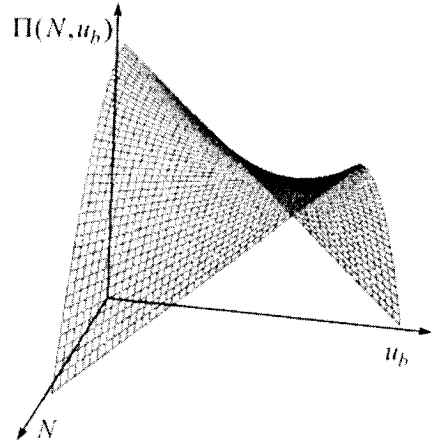


Рис. 4.9

Визначимо характер стаціонарності функціонала Рейснера (функція (4.26))

$$A = \frac{\partial^2 \Pi_{21}}{\partial N^2} = -\frac{L}{EF}, \quad B = \frac{\partial^2 \Pi_{21}}{\partial N \partial u_b} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 \Pi_{21}}{\partial u_b^2} = 0, \quad AC - B^2 < 0.$$

Тобто точка стаціонарності функції $\Pi_{21}(N, u_b)$ не є ні максимумом, ні мінімумом.

$$\text{У точці стаціонарності } \Pi_{21} \left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\bar{N}_b^2 L}{EF}.$$

З іншого боку,

$$\Pi_{21} \left(N, \frac{\bar{N}_b L}{EF} \right) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EF} + N \frac{\bar{N}_b L}{EF} - \bar{N}_b \frac{\bar{N}_b L}{EF} = -\frac{L}{2EF} (N - \bar{N}_b)^2 - \frac{\bar{N}_b^2 L}{2EF}.$$

Очевидно, що

$$\Pi_{21}\left(N, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) < \Pi_2\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

Разом з тим

$$\Pi_{21}(\bar{N}_b, u_b) = -\frac{1}{2} \frac{\bar{N}_b^2 L}{EF} = \Pi_2\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

Звідки

$$\Pi_{21}\left(N, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) \leq \Pi_2\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) = \Pi_{21}(\bar{N}_b, u_b).$$

У нелінійному програмуванні [23] прийнято говорити, що функція або функціонал $F(y, z)$ має сідлоутворюючу точку (y_0, z_0) , якщо в її околі виконується нерівність $F(y, z_0) \leq F(y_0, z_0) \leq F(y_0, z)$. У нашому випадку враховуючи знак рівності сідлоутворююча точка є виродженою. Тобто точка стаціонарності функціонала Рейснера є виродженою сідлоутворюючою точкою.

Умови стаціонарності функціонала Π_{21} можна записати інакше, спочатку по змінній N : $\frac{\partial \Pi_{21}}{\partial N} = 0$, $N = \frac{EF}{L} u_b$, оскільки $\frac{\partial^2 \Pi_{21}}{\partial N^2} = -\frac{L}{EF} < 0$, то ця точка є максимумом:

$$\max_N \Pi_{21}(N, u_b) = -\frac{1}{2} \frac{EF}{L} u_b^2 + \frac{EF}{L} u_b^2 - u_b \bar{N}_b = \frac{1}{2} \frac{EF}{L} u_b^2 - u_b \bar{N}_b.$$

Точка стаціонарності функції $\Pi_{21}(N, u_b)$ по u_b є точкою мінімуму, оскільки $\frac{\partial^2 \Pi_{21}}{\partial u_b^2} = \frac{EF}{L} > 0$, при цьому $u_b = -\frac{\bar{N}_b L}{EF}$. Тобто

$$\min_{u_b} \max_N \Pi_{21}(N, u_b) = -\frac{1}{2} \frac{\bar{N}_b^2 L}{EF} = \Pi_{21}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

Таким чином, точка стаціонарності функціонала Рейснера є точкою мінімуму по переміщенням і зусиллям та точкою максимуму по зусиллям і переміщенням.

На рис. 4.10 показана поверхня $F(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy - 2y$, яка є окремим випадком функції $\Pi_{21}(N, u_b)$ (функціонала Рейснера).

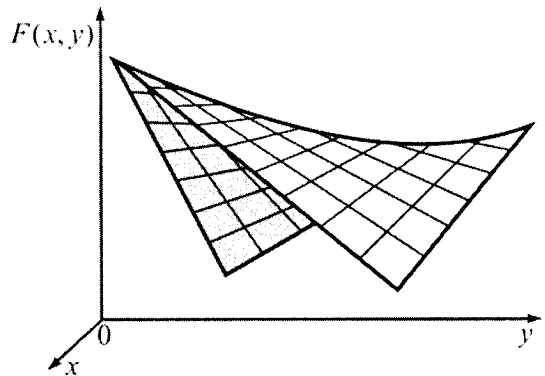


Рис. 4.10

Вона являє собою лінійну поверхню, яка утворена обертанням прямих, які розташовані в різних площинах $x = \text{const}$. У площині $y = \text{const}$ ці прямі перетинають параболу. В точці стаціонарності $x = y = 2$ ця поверхня має вироджену сідлоутворюючу точку.

4.8. Приклад. Функціонал Ху-Васідзу

Із виразу для повного функціонала

$$\int_a^b \left(\varepsilon_x - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_a^b = 0,$$

для задачі, що подається на рис. 4.11, враховуючи, що $q_x = 0$, $\frac{dN}{dx} = 0$, $\delta N = EF \delta \varepsilon$,

а також $\delta \left(N \frac{du}{dx} \right) = \delta N \frac{du}{dx} + N \frac{\delta du}{dx}$, звідки

$$\int_a^b \frac{du}{dx} \delta N dx = \int_a^b \delta \left(N \frac{du}{dx} \right) dx - \int_a^b N \frac{\delta du}{dx} dx,$$

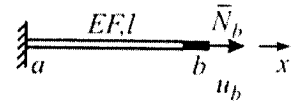


Рис. 4.11

можна отримати першу форму функціонала Ху-Васідзу, в якому одночасно варіюються зусилля N , деформації ε і переміщення u :

$$\Pi_{31}(N, \varepsilon, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx + \int_a^b N \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon \right) dx - u_b \bar{N}_b.$$

Представляючи $u(x)$ у вигляді $u(x) = \frac{u_b x}{L}$, функціонал $\Pi_{31}(N, \varepsilon, u)$ перетворюємо у функцію трьох змінних N , ε , u_b :

$$\Pi_{31}(N, \varepsilon, u_b) = \frac{1}{2} EFL \varepsilon^2 + N \left(\frac{u_b}{L} - \varepsilon \right) L - u_b \bar{N}_b.$$

Із умови стаціонарності цієї функції отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{31}}{\partial N} &= \frac{u_b}{L} - \varepsilon = 0, & u_b &= \varepsilon L, \\ \frac{\partial \Pi_{31}}{\partial \varepsilon} &= EFL \varepsilon - NL = 0, & N &= EF \varepsilon, \\ \frac{\partial \Pi_{31}}{\partial u_b} &= N - \bar{N}_b = 0, & N &= \bar{N}_b, \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{\bar{N}_b}{EF}, \quad u = \frac{\bar{N}_b}{EF} b.$$

Як і у попередньому прикладі, для функціонала Рейснера, дослідимо характер стаціонарності функціонала. У точці стаціонарності $N = \bar{N}_b$, $\varepsilon = \frac{\bar{N}_b}{EF}$, $u_b = \frac{\bar{N}_b}{EF} b$:

$$\Pi_{31} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{N}_b^2 L}{EF},$$

в той же час

$$\Pi_{31}(\bar{N}, \varepsilon, u_b) = \frac{1}{2} EFL\varepsilon^2 + \bar{N}_b L\varepsilon,$$

звідки

$$\Pi_{31}(\bar{N}, \varepsilon, u_b) - \Pi_{31}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) = \frac{1}{2} \frac{EF}{L} \left(L^2 \varepsilon^2 - \frac{2L^2}{EF} \bar{N}_b \varepsilon + \frac{\bar{N}_b^2 L^2}{(EF)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{EF}{L} \left(L\varepsilon - \frac{\bar{N}_b L}{EF} \right)^2 \geq 0$$

і

$$\Pi_{31}(\bar{N}_b, \varepsilon, u_b) \geq \Pi_{31}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

З іншого боку

$$\Pi_{31}\left(N, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\bar{N}_b^2 L}{EF} = \Pi_{31}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

Таким чином

$$\Pi_{31}(\bar{N}_b, \varepsilon, u_b) \geq \Pi_{41}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) = \Pi_{31}\left(N, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right)$$

і точка стаціонарності функціонала Π_{31} є виродженою сідлоутворюючою точкою.

Умова стаціонарності по ε дає $\frac{\partial \Pi_{31}}{\partial \varepsilon} = 0$ $\varepsilon = \frac{N}{EF}$, $\frac{\partial^2 \Pi_{31}}{\partial \varepsilon^2} = EFL > 0$, точка

стаціонарності є мінімумом:

$$\min_{\varepsilon} \Pi_{41}(N, \varepsilon, u_b) = \Pi_{41}\left(N, \frac{N}{EF}, u_b\right) = \Pi_{31}(N, u_b).$$

Тоді

$$\max_N \min_{u_b, \varepsilon} \Pi_{41}(N, \varepsilon, u_b) = \max_N \min_{u_b} \Pi_{31}(N, u_b) = \Pi_{31}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right) = \Pi_{41}\left(\bar{N}_b, \frac{\bar{N}_b}{EF}, \frac{\bar{N}_b L}{EF}\right).$$

Таким чином, точка стаціонарності функціонала Ху-Васідзу є точкою максимімуму, відповідно, по зусиллям, переміщенням і деформаціям, або навпаки, мінімаксимумом, відповідно, по переміщенням, деформаціям і зусиллям.

Екстремальні властивості функціоналів

Таким чином, як витікає із наведених прикладів, варіаційні задачі для так званих змішаних функціоналів Рейснера і Ху-Васідзу можуть бути отримані із повного функціонала, який, в свою чергу, може бути побудований із частинних за допомогою множників Лагранжа (п. 1.17, п. 2.1). Цей метод дозволяє перейти від зв'язаних до вільних варіаційних задач, а також встановити їх екстремальні властивості.

Нехай має місце зв'язана варіаційна задача: знайти мінімум функціонала $f(x)$ при додаткових обмеженнях $g_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Функції x , які задовольняють ці умови, утворюють множину G . Вважатимемо, що існує єдиний розв'язок цієї задачі x_0 . За допомогою методу множників Лагранжа, будемо вільну варіаційну задачу для функціонала

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x), \quad (4.27)$$

де λ_i – множники Лагранжа, а λ – вектор, утворений із λ_i .

Нехай (x_0, λ_0) є єдиним розв'язком варіаційної задачі для функціонала (4.27).

λ_0 дає мінімум по x при x_0 :

$$F(x_0, \lambda_0) \leq F(x, \lambda_0), \quad \min_x F(x, \lambda_0) = F(x_0, \lambda_0). \quad (4.28)$$

Будемо вважати, що існує єдиний розв'язок цієї варіаційної задачі у деякій точці λ_0

$$\min_x F(x, \lambda) = h(\lambda).$$

Тоді $F(x_0, \lambda_0) = f(x_0) = h(\lambda_0)$.

Нехай $x \in G$, тоді $F(x, \lambda) = f(x)$ і $\min_{x \in G} F(x, \lambda) = \min f(x) = f(x_0) = h(\lambda_0)$.

Тоді $h(\lambda) \leq h(\lambda_0)$ і $\max_{\lambda} h(\lambda) = h(\lambda_0)$.

Таким чином

$$f(x_0) = \max_{\lambda} \min_x F(x, \lambda) \quad (4.29)$$

і $f(x_0)$ є розв'язком задачі на максимінімум.

Умова (4.29) може бути записана в іншій формі:

$$x_0 \in G \quad F(x_0, \lambda) = F(x_0, \lambda_0) = f(x_0),$$

тоді

$$F(x, \lambda_0) \geq F(x_0, \lambda_0) = F(x_0, \lambda).$$

У такому випадку стверджують, що функціонал $F(x, \lambda)$ має сідлову точку (x_0, λ_0) , якщо в околі (x_0, λ_0) виконується нерівність $F(x, \lambda_0) \geq F(x_0, \lambda_0) \geq F(x_0, \lambda)$ (див. п. 2.2). У нашому випадку сідлова точка є виродженою, оскільки праворуч має місце рівність.

Таким чином, вихідна зв'язана варіаційна задача на мінімум функціонала $f(x)$ при додаткових умовах $g_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) може бути приведена до вільної варіаційної задачі на максимінімум для функціонала $F(x, \lambda)$. Точка стаціонарності функціонала $F(x, \lambda)$ є сідловою, точніше виродженою сідловою точкою.

Ці результати природно витікають із загальних положень теорії нелінійного програмування.

У нелінійному програмуванні [23] доводиться, що для прямої задачі P нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} & \text{мінімізувати } f(x) \\ & \text{за умов } \quad g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & \quad \quad h_r(x) = 0, \quad r=1,2,\dots,l, \\ & \quad \quad x \in X \end{aligned}$$

за допомогою множників Лагранжа можна сформулювати двоїсту за Лагранжем задачу D :

$$\begin{aligned} & \text{максимізувати } \theta(\mu, \lambda) \\ & \text{за умови } \mu \geq 0, \end{aligned}$$

де $\theta(\mu, \lambda) = \inf\{f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{r=1}^l \lambda_r h_r(x) : x \in X\}$. Функція $\theta(\mu, \lambda)$ має назву

двоїстої функції Лагранжа, а функцію $\varphi(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{r=1}^l \lambda_r h_r(x)$

називають функцією Лагранжа (п. 2.1).

Або у векторній формі пряма задача P :

$$\begin{aligned} & \text{мінімізувати } f(x) \\ & \text{за умов } \quad \mathbf{g}(x) \leq 0, \\ & \quad \quad \mathbf{h}(x) = 0, \\ & \quad \quad x \in X \end{aligned}$$

двоїста задача D – максимізувати $\theta(\mu, \lambda)$ за умови $\mu \geq 0$, де

$$\theta(\mu, \lambda) = \inf\{f(x) + \mu^T \mathbf{g}(x) + \lambda^T \mathbf{h}(x) : x \in X\}.$$

При цьому для кожної задачі нелінійного програмування можна побудувати різні двоїсті задачі в залежності від того, які із обмежень розглядаються у вигляді нерівностей $g(x) \leq 0$ і рівнянь $h(x) = 0$, та які віднесені до множини X .

Стосовно задач, які розглядаються, коли додаткові умови являють собою тільки рівняння, задача спрощується. Пара двоїстих задач нелінійного програмування у нашому випадку може бути визначена так.

Пряма задача P :

$$\begin{aligned} & \text{мінімізувати } f(x) \\ & \text{за умови } \quad g_i(x) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \\ & \text{де функціонал і множина, на якій} \\ & \text{він визначений є опуклими.} \end{aligned}$$

Двоїста задача D :

$$\begin{aligned} & \text{максимізувати } F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \\ & \text{за умови } \quad \delta_x F(x, \lambda) = 0, \\ & \text{де } \delta_x \text{ – варіація функціонала по } x. \end{aligned}$$

Для такої пари двоїстих задач, які показано у теорії нелінійного програмування, витікає твердження (п. 2.2). Якщо x_0 – розв'язок прямої задачі, то існує λ_0 , таке що (x_0, λ_0) утворюють розв'язок двоїстої задачі. При цьому екстремальні значення

функціоналів двоїстих задач рівні між собою $f(x_0) = F(x_0, \lambda_0)$. Точка (x_0, λ_0) є сідловою точкою функції, тобто $F(x_0, \lambda) \leq F(x_0, \lambda_0) \leq F(x, \lambda_0)$. Таким чином, x_0 буде розв'язком прямої задачі тоді і тільки тоді, коли є вектор λ_0 , при якому (x_0, λ_0) є сідловою точкою функції $F(x, \lambda)$. Для загального випадку з додатковими умовами у вигляді нерівностей це положення відоме як теорема Куна-Таккера (п. 2.2).

Для наведених раніше прикладів отримаємо

$$\min_{u_b} \Pi_1(u_b) = \max_{N_b} \Pi_2(N_b),$$

а також аналогічні залежності для інших функціоналів.

Приклад 4.1. Розглянемо відому в опорі матеріалів задачу про так званий брус рівного опору при стиску.

Нехай на вільному кінці стержня прикладена стискаюча сила P (рис. 4.12,а), питома вага матеріалу дорівнює γ . Необхідно обрати закон зміни площі поперечного перерізу так, щоб напруження σ в кожному перерізі було однаковим.

Двома нескінченно близькими перерізами виріжемо елемент бруса і розглянемо його рівновагу (рис. 4.12,б).

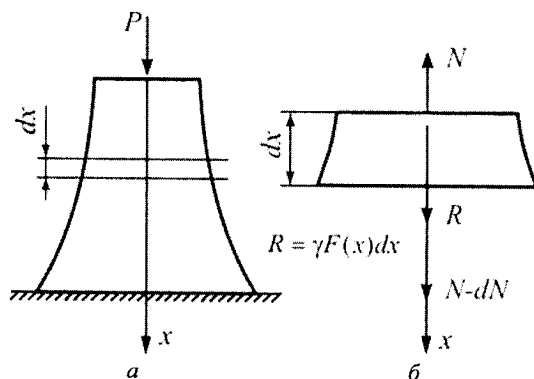


Рис. 4.12

Рівняння рівноваги може бути записане наступним чином:

$$\Sigma X = 0; \quad -N + \gamma F(x) dx + N + dN = 0,$$

звідки

$$\gamma F(x) dx + dN = 0,$$

і отже,

$$\frac{dN}{dx} = -\gamma F(x). \tag{4.30}$$

Цілком звичайний вигляд мають фізичне співвідношення (закон Гука):

$$N = EF\varepsilon \tag{4.31}$$

та геометричне співвідношення, еквівалентне рівнянню сумісності деформацій:

$$\varepsilon = u' . \tag{4.32}$$

Наведемо також вирази для потенціальної енергії деформації

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V E\varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l E\varepsilon^2 F(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l E(u')^2 F(x) dx, \tag{4.33}$$

доповнювальної потенціальної енергії

$$U^{\text{доп}} = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF(x)} dx, \tag{4.34}$$

роботи зовнішніх сил при переході в недеформований стан

$$A = -Pu(0) - \iiint_V \gamma u(x) dV = -Pu(0) - \int_0^l \gamma u(x) F(x) dx. \quad (4.35)$$

Тоді варіаційні постановки задач Лагранжа і Кастільяно будуть мати наступний вигляд:

Пряма задача - функціонал Лагранжа

Двоїста задача - функціонал Кастільяно

$$d\Pi^L(u) = 0,$$

$$d\Pi^K(N) = 0,$$

$$\Pi^L(u) = \frac{1}{2} \int_0^l EF(x)(u')^2 dx - \int_0^l \gamma u(x) F(x) dx - Pu(0).$$

$$\Pi^K(N) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF(x)} dx.$$

Додаткові умови:

Додаткові умови:

$$N = EF(x)\epsilon, \quad \epsilon = u'.$$

$$N = EF(x)\epsilon, \quad \frac{dN}{dx} = -\gamma F(x).$$

Введемо позначення

Введемо в розрахунковій області

$$G(x, u, u') = \frac{1}{2} E(u')^2 F(x) - \gamma u(x) F(x)$$

множник Лагранжа $\lambda = \lambda(x)$ і перетворимо

та запишемо функціонал Лагранжа наступним чином:

варіаційну задачу Кастільяно, додавши

$$\Pi^L(u) = \int_0^l G(x, u, u') dx - Pu(0), \quad (4.36)$$

інтеграл від рівного нулю виразу $-\lambda \frac{d\delta N}{dx}$:

$$\begin{aligned} d\Pi^K(N, \lambda) &= - \int_0^l \frac{NdN}{EF} dx - \int_0^l \lambda \frac{dN}{dx} dx = \\ &= - \int_0^l \frac{NdN}{EF} dx - \lambda dN \Big|_0^l + \int_0^l dN \frac{d\lambda}{dx} dx. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Умови стаціонарності функціоналів:

$$G_u - \frac{d}{dx} G_{u'} = 0,$$

$$d\Pi^K(N, \lambda) = - \int_0^l dN \left(\frac{N}{EF} - \frac{d\lambda}{dx} \right) dx -$$

$$-\lambda dN \Big|_0^l = 0,$$

$$\text{де } G_u = \frac{dG}{du} = -\gamma F, \quad G_{u'} = \frac{dG}{du'} = EFu' = N,$$

і, отже, рівнянням Ейлера задачі буде

що можливо тільки, коли

$$-\gamma F - N' = 0,$$

$$\frac{N}{EF} - \frac{d\lambda}{dx} = 0. \quad (4.38)$$

або

Ніщо не заважає прийняти $\lambda = u$,

внаслідок чого можемо записати

$$\frac{dN}{dx} = -\gamma F(x).$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EF} = \epsilon.$$

Таким чином, з умов стаціонарності функціоналів Лагранжа і Кастільяно витікає відповідно рівняння рівноваги (4.30) і рівняння сумісності деформацій (4.32).

Знайдемо тепер невідому функцію $F(x)$. Врахуємо, що

$$N = -[\sigma]F(x), \quad [\sigma] = \text{const},$$

де $[\sigma]$ - абсолютна величина припустимого напруження при стиску.

Тоді

$$\frac{dN}{dx} = -[\sigma] \frac{dF}{dx},$$

і рівняння рівноваги (4.30) набуває наступного вигляду

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dx, \quad (4.39)$$

Інтегруючи (4.39), отримаємо:

$$\ln F(x) + C = \frac{\gamma}{[\sigma]} x. \quad (4.40)$$

Постійну C знайдемо, виходячи з того, що площа перерізу з координатою $x = 0$ відома і дорівнює $F(0) = F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$. Тоді згідно (4.40) визначаємо:

$$\ln F_0 + C = 0 \Rightarrow C = -\ln F_0,$$

завдяки чому маємо

$$\ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = \frac{\gamma}{[\sigma]} x,$$

і далі,

$$F(x) = F_0 \exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} x\right). \quad (4.41)$$

Отже, з рівняння рівноваги можна знайти закон, за яким повинна змінюватись площа поперечного перерізу бруса з постійними напруженнями. При цьому величини напружень, деформацій та переміщень становлять відповідно

$$\sigma = -[\sigma] = -\frac{P}{F_0} = \text{const}, \quad (4.42)$$

$$\varepsilon = -\frac{[\sigma]}{E} = -\frac{P}{EF_0} = \text{const}, \quad (4.43)$$

$$u(x) = \frac{[\sigma]}{E}(l-x) = \frac{P(l-x)}{EF_0} = u_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad (4.44)$$

де

$$u_0 = u(0) = \frac{[\sigma]l}{E} = \frac{Pl}{EF_0}. \quad (4.45)$$

За допомогою виразів (4.43) та (4.44) функціонал Лагранжа може бути записаний наступним чином:

$$\Pi^{\text{Л}}(u_0) = \frac{Eu_0^2}{2} \int_0^l F(x) \frac{x^2}{l^2} dx - Pu_0 - \gamma u_0 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) F(x) dx.$$

Після підстановки розподілу $F(x)$, заданого виразом (4.41), і проведення інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{Л}}(u_0) &= \frac{EF_0 u_0^2 [\sigma]}{2 \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right] - P u_0 - u_0 \frac{[\sigma]^2}{\gamma l} F_0 \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - \frac{\gamma}{[\sigma]} l - 1 \right] = \\ &= \frac{EF_0 u_0^2 [\sigma]}{2 l^2 \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right] - P u_0 - u_0 \frac{[\sigma]^2}{\gamma l} F_0 \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - \frac{\gamma}{[\sigma]} l - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Нарешті, з урахуванням (4.45) вираз для функціонала Лагранжа набуває остаточного вигляду:

$$\Pi^{\text{Л}}(u_0) = \frac{EF_0 [\sigma]}{l^2 \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right] \left(\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0 [\sigma] l}{E} \right). \quad (4.47)$$

Зауважимо, що потенціальній енергії деформації відповідає вираз

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E(u')^2 F(x) dx = \frac{EF_0 [\sigma] u_0^2}{2 l^2 \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right] = \frac{F_0 [\sigma] \sigma^2}{2 E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right], \quad (4.48)$$

а роботи зовнішніх сил при переході в недеформований стан

$$A = -P u(0) - \int_0^l \gamma u(x) F(x) dx = -\frac{F_0 [\sigma]^2 u_0}{\gamma l} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right] = \frac{F_0 [\sigma]^2 \sigma}{\gamma E} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.49)$$

Найменшого значення функціонал Лагранжа досягає при $u_0 = \frac{[\sigma] l}{E}$:

$$\min \Pi^{\text{Л}}(u_0) = -\frac{F_0 [\sigma]^3}{2 E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.50)$$

При цьому потенціальна енергія деформації дорівнює

$$U = \frac{F_0 [\sigma]^3}{2 E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right], \quad (4.51)$$

а робота зовнішніх сил при переході в недеформований стан

$$A = -\frac{F_0 [\sigma]^3}{E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.52)$$

Звернемось тепер до модифікованого функціонала Кастільяно $\Pi^{\text{К}}(N, \lambda)$, визначеного на множині статично можливих напружень:

$$\Pi^{\text{К}}(N, \lambda) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx - \int_0^l \lambda(x) \left[\frac{dN}{dx} + \gamma F(x) \right] dx - (N(0) + P) \lambda(0). \quad (4.53)$$

Як було з'ясовано вище, $\lambda(x) = u(x)$. Крім того врахуємо, що

$$N = \sigma F(x), \quad \sigma = \text{const}, \quad \frac{dN}{dx} = \sigma \frac{dF}{dx}, \quad u(x) = \frac{[\sigma]}{E} (l - x),$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\gamma}{[\sigma]} F_0 \exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} x\right) = \frac{\gamma}{[\sigma]} F(x).$$

Тоді функціонал Кастільяно може бути записаний у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi^K(\sigma) &= -\frac{\sigma^2}{2E} \int_0^l F(x) dx - \frac{[\sigma]}{E} \int_0^l (l-x) \left[\sigma \frac{dF}{dx} + \gamma F(x) \right] dx - F_0 (\sigma + [\sigma]) u_0 = \\ &= -\frac{\sigma^2 F_0}{2E} \int_0^l \left(\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} x\right) \right) dx - \frac{[\sigma] F_0 \gamma}{E} \left(\frac{\sigma}{[\sigma]} + 1 \right) \int_0^l (l-x) \left(\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} x\right) \right) dx - \frac{[\sigma]^2 F_0 l}{E} \left(\frac{\sigma}{[\sigma]} + 1 \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Виконаємо інтегрування і отримаємо:

$$\Pi^K(\sigma) = -\frac{[\sigma] F_0}{E \gamma} \left(\frac{\sigma^2}{2} + [\sigma] \sigma + [\sigma]^2 \right) \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.55)$$

Доповнювальна потенціальна енергія запишеться наступним чином

$$U^{\text{доп}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF(x)} dx = \frac{F_0 [\sigma] \sigma^2}{2E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.56)$$

Як завжди в лінійно-пружних задачах виконується рівність $U = U^{\text{доп}}$. Найбільшого значення функціонал Кастільяно досягає при $\sigma = -[\sigma]$:

$$\max \Pi^K(\sigma) = -\frac{F_0 [\sigma]^3}{2E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right], \quad (4.57)$$

тоді як доповнювальна потенціальна енергія при такому значенні σ дорівнює

$$U^{\text{доп}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF(x)} dx = \frac{F_0 [\sigma]^3}{2E \gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{[\sigma]} l\right) - 1 \right]. \quad (4.58)$$

На рис. 4.13,а і б показані схематичні графіки відповідно функціоналів Лагранжа і Кастільяно.

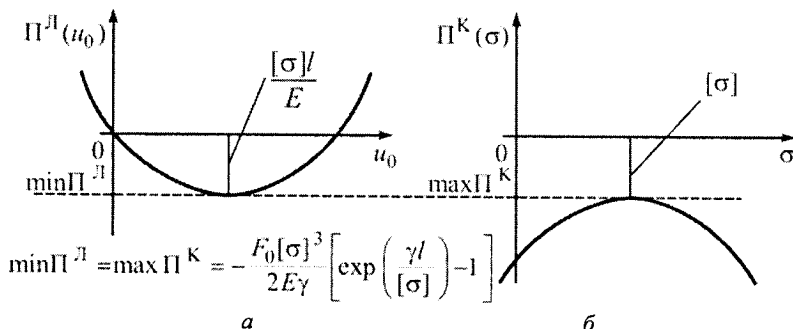


Рис. 4.13

Задача про брус рівного опору може розглядатись також як найпростіша задача оптимального проектування з обмеженнями на параметри або як задача оптимізації форми деформівного тіла. Як зазначалось у передмові, такі підходи в даному підручнику не розглядаються. Відмітимо тільки, що більш складні задачі оптимізації стержневих систем і методи їх розв'язання можна знайти в книзі [63]. Інші аспекти оптимального проектування розглянуті в роботах [201, 212].

4.9. Приклад стержневої системи

Розглянемо стержневу систему, що показана на рис. 4.14

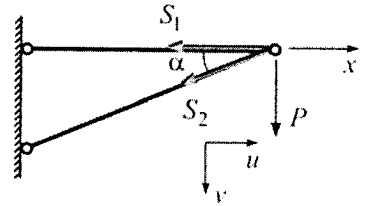


Рис. 4.14

Отримаємо спочатку рівняння рівноваги і рівняння сумісності деформацій за допомогою розв'язку прямої задачі (функціонал Лагранжа) і двоїстої задачі (функціонал Кастільяно).

Функціонал Лагранжа має вигляд

$$\Pi_1^{\text{Л}}(u_1) = \frac{1}{2} EF \int_0^L (u_1')^2 dx; \quad \Pi_2^{\text{Л}}(u_2) = \frac{1}{2} EF \int_0^L (u_2')^2 dx;$$

$$u_1 = \frac{\Delta_1}{l_1} x; \quad u_2 = \frac{\Delta_2}{l_2} x;$$

$$\Delta_1 = u; \quad \Delta_2 = u \cos \alpha - v \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{системи}}^{\text{Л}}(u, v) &= \frac{EF}{l} u^2 + \frac{EF}{l_2} (u \cos \alpha - v \sin \alpha)^2 - Pv = \\ &= \frac{EF}{2l} u^2 + \frac{EF}{2l_2} u^2 \cos^2 \alpha - \frac{EF}{l_2} u v \cos \alpha \sin \alpha + \frac{EF}{2l} v^2 \sin^2 \alpha - Pv, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}(u, v)}{\partial u} = \frac{EF}{l_1} u + \frac{EF}{l_2} u \cos^2 \alpha - \frac{EF}{l_2} v \cos \alpha \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{EF \Delta_1}{l_1} + \frac{EF \Delta_2}{l_2} \cos \alpha = 0,$$

$$S_1 + S_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}(u, v)}{\partial v} = -\frac{EF}{l_2} u \cos \alpha \sin \alpha + \frac{EF}{l_2} v \sin^2 \alpha - P = 0,$$

$$S_2 \sin \alpha + P = 0,$$

$$\mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{P} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix},$$

$$\Pi_{\text{системи}}^{\text{К}}(S_1, S_2) = \int_0^L \frac{S_1^2}{EF} dx + \int_0^L \frac{S_2^2}{2EF} dx$$

при додаткових умовах

$$\begin{aligned}
 & -S_1 - S_2 \cos \alpha = 0, \quad S_2 \sin \alpha + P = 0, \\
 \Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^L \frac{S_1^2}{2EF} dx + \int_0^L \frac{S_2^2}{2EF} dx + \lambda_1(-S_1 - S_2 \cos \alpha) + \lambda_2(S_2 \sin \alpha + P) = 0, \\
 \frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial S_1} &= \Delta_1 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = u, \\
 \frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial S_2} &= \Delta_2 - \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha = 0, \quad \lambda_2 = v, \\
 & \Delta_1 = u, \quad \Delta_2 = u \cos \alpha - v \sin \alpha, \\
 \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Пряма задача (функціонал Лагранжа)

$$\begin{aligned}
 \Pi_1^\Pi(u_1) &= \frac{EF}{2} \int_0^{L_1} (u_1')^2 dx - \bar{N}_1 u_1 \Big|_0^{L_1}, & \Pi_2^\Pi(u_2) &= \frac{EF}{2} \int_0^{L_2} (u_2')^2 dx - \bar{N}_2 u_2 \Big|_0^{L_2}, \\
 u_1 &= \frac{\Delta_1}{L_1} x, & u_2 &= \frac{\Delta_2}{L_2} x, \\
 \Pi_1^\Pi(u_1) &= \frac{EF}{2L_1} \Delta_1^2 - P \Delta_1 \operatorname{ctg} \alpha. & \Pi_2^\Pi(u_2) &= \frac{EF}{2L_2} \Delta_2^2 + \frac{P}{\sin \alpha} \Delta_2.
 \end{aligned}$$

Функціонал Лагранжа

$$\Pi^\Pi(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{EF}{2L_1} \Delta_1^2 + \frac{EF}{2L_2} \Delta_2^2 - P \Delta_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{P}{\sin \alpha} \Delta_2. \quad (4.59)$$

Умова екстремуму функціонала Лагранжа

$$\frac{\partial \Pi^\Pi(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_1} = \frac{EF}{L_1} \Delta_1 - P \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad \frac{\partial \Pi^\Pi(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_2} = \frac{EF}{L_2} \Delta_2 + \frac{P}{\sin \alpha} = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix} \frac{EF}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \operatorname{ctg} \alpha \\ -\frac{P}{\sin \alpha} \end{Bmatrix}. \quad (4.60)$$

Значення невідомих

$$\Delta_1 = \frac{PL_1 \operatorname{ctg} \alpha}{EF}, \quad \Delta_2 = -\frac{PL_2}{EF \sin \alpha}.$$

Значення функціонала Лагранжа

$$\Pi^\Pi = \left(\frac{PL_1 \operatorname{ctg} \alpha}{EF} - \frac{PL_2}{EF \sin \alpha} \right) = -\frac{P^2}{2EF \sin^2 \alpha} (L_1 \cos^2 \alpha + L_2).$$

Для побудови поверхні використаємо методику з [211]. За допомогою

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

перетворення ми позбудемося членів, які містять перші степені координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A = \frac{EF}{2L_1}, \quad 2B = 0, \quad C = \frac{EF}{2L_2}, \quad 2D = -P \operatorname{ctg} \alpha, \quad 2E = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad F = 0.$$

Переносимо початок координат в точку $(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C})$, тобто

$$\Delta_1 = \bar{\Delta}_1 - \frac{D}{A}, \quad \Delta_2 = \bar{\Delta}_2 - \frac{E}{C},$$

тоді вище наведений вираз для функціоналу Лагранжа в площині $(\Delta_1 O \Delta_2)$ набуде вигляду

$$\Pi^{\text{Л}}(\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2) = \frac{EF}{2L_1} \bar{\Delta}_1^2 + \frac{EF}{2L_2} \bar{\Delta}_2^2 - \frac{P^2}{2EF \sin^2 \alpha} (L_1 \cos^2 \alpha + L_2) = 0,$$

або

$$\frac{\frac{(\bar{\Delta}_1)^2}{\frac{P^2 L_1}{(EF \sin \alpha)^2} (L_1 \cos^2 \alpha + L_2)}}{\frac{(\bar{\Delta}_2)^2}{\frac{P^2 L_2}{(EF \sin \alpha)^2} (L_1 \cos^2 \alpha + L_2)}} = 1. \quad (4.61)$$

Це еліпс (рис. 4.15) із півосями

$$a = \frac{P}{EF \sin \alpha} \sqrt{L_1 (L_1 \cos^2 \alpha + L_2)}, \quad b = \frac{P}{EF \sin \alpha} \sqrt{L_2 (L_1 \cos^2 \alpha + L_2)}.$$

В свою чергу, функціонал двоїстої задачі (функціонал Кастільяно) має наступний вигляд

$$\Pi^K(S_1, S_2) = -\frac{1}{2EF} \int_0^{L_1} S_1^2 dx - \frac{1}{2EF} \int_0^{L_2} S_2^2 dx,$$

при додаткових умовах

$$\begin{cases} -S_1 - S_2 \cos \alpha = 0, \\ S_2 \sin \alpha + P = 0. \end{cases}$$

Запишемо функціонал Кастільяно наступним чином

$$\Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2EF} \int_0^{L_1} S_1^2 dx - \frac{1}{2EF} \int_0^{L_2} S_2^2 dx + \lambda_1 (-S_1 - S_2 \cos \alpha) + \lambda_2 (S_2 \sin \alpha + P), \quad (4.62)$$

Визначення множників Лагранжа

$$\frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial S_1} = -\Delta_1 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\Delta_1,$$

де

$$\frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial S_2} = -\Delta_2 - \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\Delta_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\Delta_2}{\sin \alpha}.$$

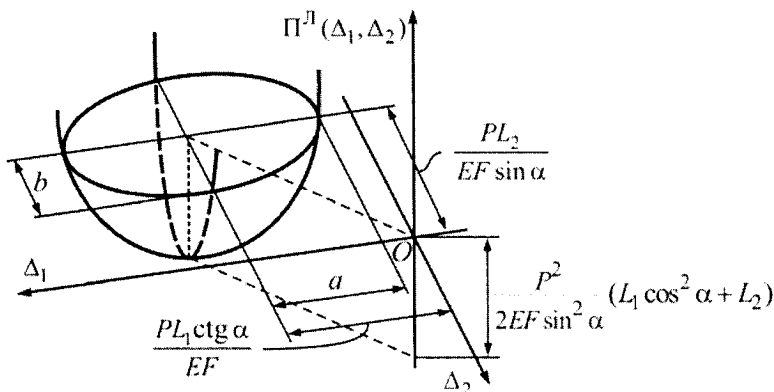


Рис. 4.15

Функціонал Кастільяно

$$\Pi^K(S_1, S_2) = -\frac{L_1}{2EF} S_1^2 - \frac{L_2}{2EF} S_2^2 + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 + \frac{P}{\sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2). \quad (4.63)$$

Умова екстремуму функціонала Кастільяно

$$\frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2)}{\partial S_1} = -\frac{L_1}{EF} S_1 + \Delta_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi^K(S_1, S_2)}{\partial S_2} = -\frac{L_2}{EF} S_2 + \Delta_2 = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{EF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.64)$$

Значення невідомих

$$S_1 = \frac{\Delta_1 EF}{L_1}, \quad S_2 = \frac{\Delta_2 EF}{L_2}.$$

Значення функціонала Кастільяно

$$\Pi^K\left(\frac{\Delta_1 EF}{L_1}, \frac{\Delta_2 EF}{L_2}\right) = \frac{EF}{2} \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2}\right) + \frac{P}{\sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2).$$

За допомогою перетворення ми позбудемося членів, які містять перші степені координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A = -\frac{L_1}{2EF}, \quad 2B = 0, \quad C = -\frac{L_2}{2EF}, \quad 2D = \Delta_1, \quad 2E = \Delta_2, \quad F = \frac{P}{\sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2).$$

Переносимо початок координат в точку $(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C})$, тобто

$$S_1 = \bar{S}_1 - \frac{D}{A}, \quad S_2 = \bar{S}_2 - \frac{E}{C},$$

тоді рівняння (4.63) в площині $(S_1 OS_2)$ набуде вигляду

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

$$\Pi^K(\bar{S}_1, \bar{S}_2) = -\frac{L_1}{2EF} \bar{S}_1^2 - \frac{L_2}{2EF} \bar{S}_2^2 - \frac{EF}{2} \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2} \right) + \frac{P}{\sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2) = 0,$$

або

$$\frac{(\bar{S}_1)^2}{\frac{(EF)^2 \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2} \right) + \frac{2PEF}{L_1 \sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2)}}{+ \frac{(\bar{S}_2)^2}{\frac{(EF)^2 \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2} \right) + \frac{2PEF}{L_2 \sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2)}} = 1. \quad (4.65)$$

Це – еліпс із піввісьями (рис. 4.16)

$$a = \sqrt{\frac{(EF)^2 \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2} \right) + \frac{2PEF}{L_1 \sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2)}{2}},$$

$$b = \sqrt{\frac{(EF)^2 \left(\frac{\Delta_1^2}{L_1} + \frac{\Delta_2^2}{L_2} \right) + \frac{2PEF}{L_2 \sin \alpha} (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2)}{2}}.$$

Порівнюючи вирази (4.60) і (4.64)

$$\begin{bmatrix} \frac{EF}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \operatorname{ctg} \alpha \\ -\frac{P}{\sin \alpha} \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{L_1}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{EF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix},$$

бачимо, що

$$\begin{bmatrix} \frac{EF}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L_1}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{EF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L_1} \frac{L_1}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L_2} \frac{L_2}{EF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

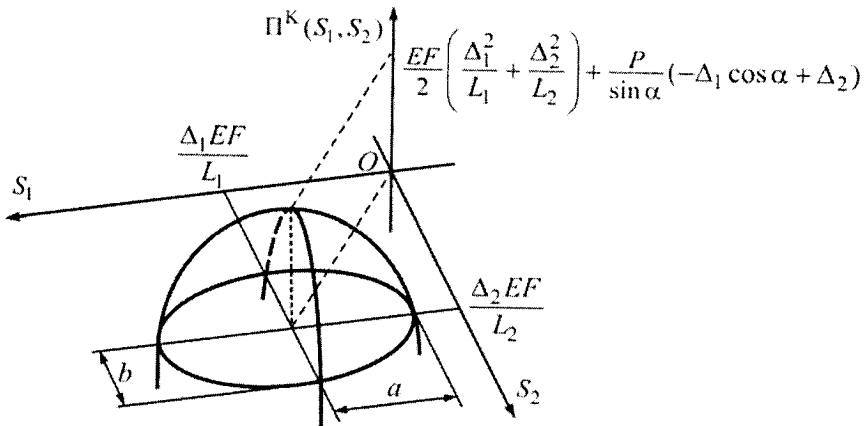


Рис. 4.16

4.10. Перетворення варіаційних задач. Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта

Метод множників Лагранжа приводить до перетворень варіаційних задач, за допомогою яких можна одній варіаційній задачі поставити у відповідність інші, еквівалентні їй у тому розумінні, що функціонали, які розглядаються у цих еквівалентних задачах, одночасно досягають свого екстремального значення. При цьому виникає можливість задачі на мінімум з мінімальним значенням d функціонала поставити у відповідність еквівалентну їй задачу на максимум, який дорівнює тій же величині d .

При цьому виходять із наступного загального принципу. Якщо функціонал $J[u, v, \dots]$ при заданих умовах неперервності і додаткових умовах досягає стаціонарного значення для деякої системи функцій u, v, \dots , і якщо ця система функцій задовольняє деяким співвідношенням, то функціонал J залишається стаціонарним для цієї системи функцій також і у тому випадку, якщо одне або декілька із цих співвідношень заздалегідь приєднати до додаткових умов задачі.

Співвідношення, які отримані шляхом прирівнювання до нуля варіації функціонала, тобто рівняння Ейлера і природні граничні умови, будемо називати природними умовами, а додаткові або граничні умови, які входять до умов задачі, - додатковими умовами, або в'язями. Тоді із наведеного вище принципу витікає наступне: якщо в будь якій варіаційній задачі приєднати одну або декілька із відповідних природних умов до додаткових умов задачі, то стаціонарний характер функціонала зберігається і для нової задачі.

4.10.1. Застосування методу множників Лагранжа

Розглянемо таку задачу.

1. Знайти стаціонарне значення функціонала $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u') dx$ при звичайних умовах неперервності і граничних умовах $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ і з додатковою умовою $\frac{du}{dx} - u' = 0$.

Правило множників Лагранжа стверджує (п. 1.17), що розв'язок задачі 1 є також розв'язком задачі.

2. Знайти стаціонарне значення виразу.

$$H(u, u', \lambda, \mu_0, \mu_1) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx + \mu_0 [u(x_0) - u_0] + \mu_1 [u(x_1) - u_1],$$

де невідомими є функції $u(x)$, $u'(x)$, $\lambda(x)$ і параметри μ_0 , μ_1 , причому у новій задачі на ці параметри не накладено ніяких граничних і додаткових умов.

Диференціальні рівняння Ейлера і природні граничні умови для цієї задачі мають вигляд:

$$F_{u'} - \lambda = 0, \quad F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dx} - u' = 0 \quad (4.66)$$

для внутрішніх точок інтервалу і

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) + \mu_0 &= 0, \quad \lambda(x_1) + \mu_1 = 0, \\ u(x_0) - u_0 &= 0, \quad u(x_1) - \mu_1 = 0\end{aligned}$$

для кінців інтервалу.

Якщо виключити із цих рівнянь λ, μ_0, μ_1 , то можна отримати диференціальне рівняння Ейлера для функції $u(x)$.

Якщо до задачі 2 на основі загального принципу приєднати умови $\frac{du}{dx} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ як додаткові умови, ми знову повернемося до задачі 1.

Але якщо ввести як додаткові умови до задачі 2 рівняння Ейлера і природні граничні умови (4.66) задачі 1, то ми отримаємо так зване перетворення Фрідрікса.

3. Отримана таким чином задача 3 може бути сформульована у такому ж вигляді як і задача 1, якщо шляхом інтегрування частинами прибрати з підінтегрального виразу інтегралу H похідну $\frac{du}{dx}$ і ввести потім нові функціональні аргументи p, p' і новий підінтегральний вираз $\Psi(x, p, p')$ за допомогою рівнянь

$$\begin{aligned}F_{u'} &= p, \quad F_u = p', \\ pu' + p'u - F &= \Psi.\end{aligned}$$

Для того, щоб здійснити це перетворення (перетворення Лежандра) (пп. 1.13, 1.14), треба з перших двох рівнянь виразити u і u' через p, p' і x , а отриманні значення u і u' підставити у ліву частину останнього рівняння. Ця умова буде виконана, якщо $F_{u'u}F_{uu} - (F_{uu'})^2 \neq 0$, для усіх значень x, u і u' . Тобто

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \lambda \frac{du}{dx} dx &= \lambda u \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u \frac{d\lambda}{dx} dx = pu \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} p' u dx, \\ \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx &= - \int_{x_0}^{x_1} [pu' + p'u - F] + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0.\end{aligned}$$

Таким чином можна отримати задачу, еквівалентну задачі 1:

4. Знайти стаціонарне значення виразу

$$- \int_{x_0}^{x_1} \Psi(x, p, p') dx + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0$$

при додатковій умові $\frac{dp}{dx} - p' = 0$, не ставлячи жодних крайових умов.

Природні граничні умови задачі 4:

$$\frac{d}{dx} \Psi_{p'} - \Psi_p = 0$$

для внутрішніх точок інтервалу і

$$\Psi_{p'} \Big|_{x=x_0} - u_0 = 0, \quad \Psi_{p'} \Big|_{x=x_1} - u_1 = 0$$

для кінців інтервалу.

Згідно із загальним принципом, за допомогою якого ми перетворили задачу 1 у задачу 4, ці природні умови повинні співпадати із додатковими умовами задачі 1. Це безпосередньо підтверджується тим, що перетворення, обернене перетворенню Лежандра, має вигляд рівнянь

$$\Psi_{p'} = u, \quad \Psi_p = u', \quad up' + u'p - \Psi = F.$$

Із цих формул витікає, що застосовуючи перетворення Фрідрікса до задачі 4, (яка не містить граничних умов), можна повернутись до задачі 1.

Таким чином, перетворення Фрідрікса має інволютивний характер і перетворює природні умови однієї задачі у додаткові умови іншої.

Можна показати, що, якщо для вихідної задачі 1 (тепер задача 1') ми маємо мінімум, рівний d , то для інволютивно відповідної задачі 4 (тепер задача 4'), те ж саме значення d є максимумом.

Це твердження, звичайно, справедливе лише при виконанні певних обмежуючих умов. А саме, потрібно щоб при будь-якій функції $\lambda(x)$, яка має кусково-неперервну похідну, вираз H дійсно досягав мінімуму d , який залежить від λ , якщо тільки заздалегідь вважати, що $\lambda(x_1) + \mu_1 = 0$, $\lambda(x_0) + \mu_0 = 0$. Таким чином задача знаходження d_λ приводить, якщо усунути $\frac{du}{dx}$ в інтегралі H шляхом інтегрування частинами, до задачі:

2'. Знайти мінімум виразу

$$\begin{aligned} H &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx - \mu_0 [u(x_0) - u_0] + \mu_1 [u(x_1) - u_1] = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F - \frac{d\lambda}{dx} u - \lambda u' \right] dx - \lambda(x_0)u_0 + \lambda(x_1)u_1, \end{aligned}$$

де $\lambda(x)$ вважається заданою функцією.

Відповідні розв'язки u і u' цієї задачі задовольняють рівняння

$$F_{u'} - \lambda = 0, \quad F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0. \quad (4.67)$$

Будемо вважати, що ці рівняння однозначно визначають функції u і u' при будь-яких λ і $\frac{d\lambda}{dx}$. Оскільки задача 1' з мінімумом d може бути отримана із задачі 2' шляхом приєднання обмежуючих додаткових умов $\frac{du}{dx} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$, то ясно, що $d \geq d_\lambda$. З іншого боку, розв'язок u задачі 1' задовольняє рівняння (4.66) при $\lambda = \bar{\lambda} = F_{u'}$, оскільки за визначенням рівняння (4.66) однозначно дають u і u' , то звідси витікає що $d_\lambda = d$. Тобто $d = \max d_\lambda$.

Достатньою ознакою виконання цих положень є умови:

$$F_{u'u'} F_{uu} - (F_{uu'})^2 > 0, \quad F_{u'u'} > 0.$$

Наведена вище теорія перетворень варіаційних проблем може бути безпосередньо розповсюджена як на випадок задач, що містять декілька невідомих функцій і похідні вищих порядків, так і на ті задачі, в яких функціональний аргумент є функцією багатьох змінних.

4.10.2. Послідовність перетворення Фрідрікса. Пряме і обернене перетворення Фрідрікса. Приклад

Наведемо у загальному випадку послідовність перетворення Фрідрікса.

1. Розглядається варіаційна задача на умовний екстремум для функціонала $\Pi(u)$.

Природні умови $\delta\Pi(u) = 0$ з урахуванням подальшого перетворення у новий функціонал можуть бути представлені у вигляді:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u} = A(u, \lambda(u)) = B(u).$$

Додаткові умови – $\varphi(u) = 0$.

2. Будується повний функціонал

$$\Pi_{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \lambda\varphi(u).$$

Умови стаціонарності:

$$\frac{\partial\Pi_{\Pi}(u, \lambda)}{\partial u} = A(u, \lambda) = 0,$$

або виключаючи λ ,

$$A(u, \lambda(u)) = B(u) = 0, \quad \frac{\partial\Pi_{\Pi}(u, \lambda)}{\partial\lambda} = \varphi(u) = 0.$$

3. Будується функціонал $\Pi_1(u, \lambda)$ і відповідна варіаційна задача $\delta\Pi_1(u, \lambda) = 0$ при додатковій умові $\frac{\partial\Pi_1(u, \lambda)}{\partial u} = A(u, \lambda) = 0$. Умова стаціонарності дає $\frac{\partial\Pi_1(u, \lambda)}{\partial\lambda} = \varphi(u) = 0$.

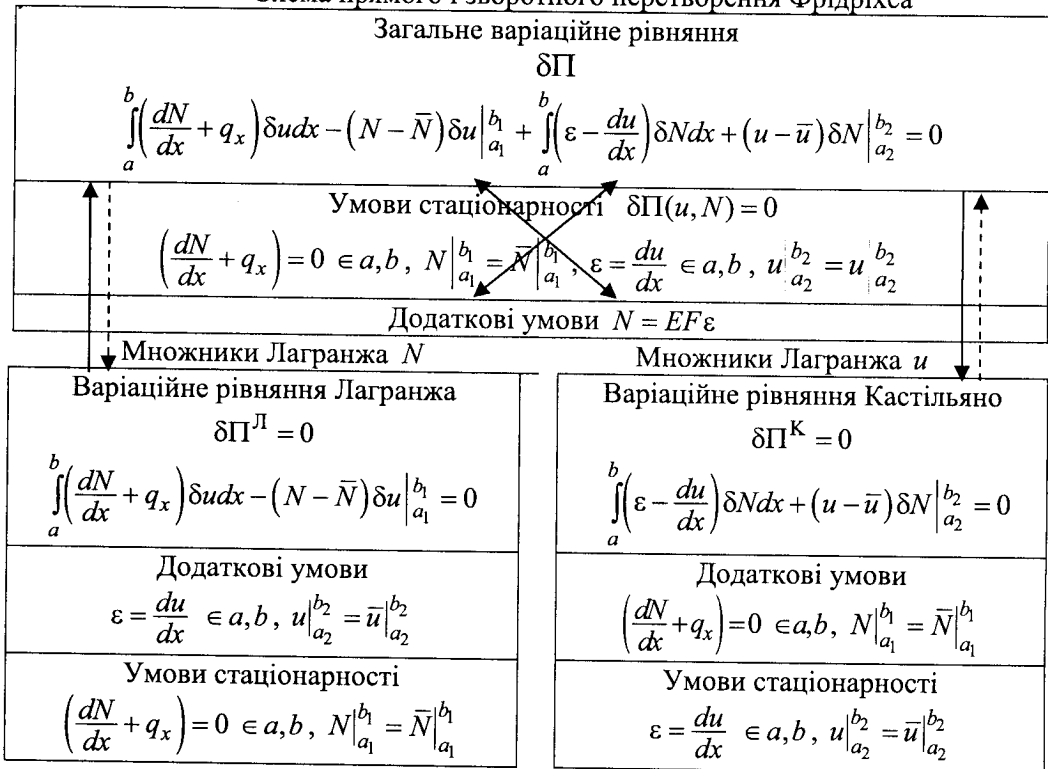
4. Якщо рівняння $\frac{\partial\Pi_{\Pi}}{\partial u} = A(u, \lambda)$ при кожному λ дозволяє однозначно виразити u через λ , здійснюється перехід до функціонала $\Pi_2(\lambda)$. Додаткова умова для $\Pi_2(\lambda)$ представляє собою рівняння $A(u, \lambda) = A(u(\lambda), \lambda) = B(\lambda)$, яке отримане із $A(u, \lambda) = 0$ після виключення u . Умова стаціонарності функціонала $\Pi_2(\lambda) - \varphi(\lambda) = 0$. Таким чином, додаткові умови функціонала $\Pi_2(\lambda)$ є рівняннями, еквівалентними умовам стаціонарності функціонала $\Pi(u)$, а умови стаціонарності функціонала $\Pi_2(\lambda)$ є перетвореними додатковими умовами до функціонала $\Pi(u)$.

Послідовність прямого і оберненого перетворення Фрідрікса наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Пряме перетворення Фрідрікса						
$\Pi(u)$	→	$\Pi_n(u, \lambda) = \Pi(u) + \lambda \varphi(u)$	→	$\Pi_1(u, \lambda)$	→	$\Pi_2(\lambda)$
Природні умови $\delta \Pi(u) = 0$ $\frac{\partial \Pi}{\partial u} = A(u, \lambda(u)) = B(u)$		Природні умови $\delta \Pi_n(u, \lambda) = 0$ $\frac{\partial \Pi_n(u, \lambda)}{\partial u} = A(u, \lambda) = 0$ $\frac{\partial \Pi_n(u, \lambda)}{\partial \lambda} = \varphi(u) = 0$		Природні умови $\delta \Pi_1(u, \lambda) = 0$ $\frac{\partial \Pi_1(u, \lambda)}{\partial \lambda} = \varphi(u) = 0$		Природні умови $\delta \Pi_2(\lambda) = 0$ $\varphi(\lambda) = 0$
Додаткові умови $\varphi(u) = 0$		Додаткові умови відсутні		Додаткові умови $\frac{\partial \Pi_1(u, \lambda)}{\partial u} = A(u, \lambda) = 0$		Додаткові умови $A(u, u(\lambda)) = B(\lambda) = 0$
Зворотне перетворення Фрідрікса						
$\Pi(u)$	←	$\Pi_n(u, \lambda)$	←	$\Pi_1(u, \lambda)$	←	$\Pi_2(\lambda)$

Схема прямого і зворотного перетворення Фрідрікса



- ▶ — пряме перетворення Фрідрікса
- - -▶ — зворотне перетворення Фрідрікса.

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(N - \frac{\partial u d \varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0$$

Додаткові умови відсутні.

Відповідний функціонал – функціонал Ху-Васідзу – $\Pi(\varepsilon, u, N)$.

Умови стаціонарності (рівняння Ейлера):

фізичні	статичні	геометричні
$N = EF\varepsilon$.	$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \in a, b, N \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big _{a_1}^{b_1}$.	$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, u \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big _{a_2}^{b_2}$.

Додаткова умова $N = EF\varepsilon$ (фізичне рівняння)

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Відповідний функціонал – функціонал Рейснера $\Pi(u, N)$.

Умови стаціонарності:

статичні

геометричні

Додаткові умови

Фізичні $N = EF\varepsilon$.	
Геометричні $\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, u \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big _{a_2}^{b_2}$.	

Додаткові умови

Фізичні $N = EF\varepsilon$.	
Статичні $\frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b, N \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big _{a_1}^{b_1}$.	

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Відповідний функціонал –
функціонал Лагранжа.

$$\Pi^{\Pi}(u, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\Pi^{\Pi}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF (u')^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Умови стаціонарності - статичні

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \in a, b, N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}$$

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Відповідний функціонал –
функціонал Кастільяно.

$$\Pi^K(N) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Умови стаціонарності - геометричні

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}$$

4.10.3. Приклади перетворення варіаційних задач. Перетворення за допомогою множників Лагранжа

1. Функціонал Лагранжа

$$\Pi_1(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u},$$

$$\Pi(u, \varepsilon, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \lambda \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) dx + \mu (u - \bar{u}) \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_a^b EF \varepsilon \delta \varepsilon dx - \int_a^b q_x \delta u dx - \bar{N} \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \lambda \delta \varepsilon dx + \int_a^b \varepsilon \delta \lambda dx - \\ & - \int_a^b \lambda \frac{d\delta u}{dx} dx - \int_a^b \frac{du}{dx} \delta \lambda dx + \delta \mu (u - \bar{u}) \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

$$\lambda = -EF\varepsilon = -N,$$

$$\int_a^b \frac{du}{dx} \delta N dx = u \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} - \underbrace{\int_a^b u \frac{d\delta N}{dx} dx}_0, \quad \mu = -N.$$

Тоді повний функціонал

$$\Pi(\varepsilon, u, N) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b N \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) dx - N (u - \bar{u}) \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta \Pi = \int_a^b N \delta \varepsilon dx - \int_a^b q_x \delta u dx - \bar{N} \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \delta N \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) dx - \delta N (u - \bar{u}) \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b N \delta \varepsilon dx + \int_a^b N \frac{d\delta u}{dx} dx = 0.$$

Враховуючи, що

$$\int_a^b N \frac{d\delta u}{dx} dx = - \int_a^b \frac{dN}{dx} \delta u dx + N \delta u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

варіація повного функціонала

$$\delta \dot{\Pi} = - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Функціонал Кастільяно

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0$$

при додаткових умовах

$$-\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Таким чином, отримаємо варіаційний принцип Кастильяно

$$\delta \Pi_2(N) = 0,$$

$$\Pi_2(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b, \quad N \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{N}.$$

2. Функціонал Кастильяно

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}; \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b, \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N},$$

$$\Pi(N, \lambda, \mu, q) = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \lambda \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) dx + \mu (N - \bar{N}) \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\delta \Pi = -\int_a^b \frac{N}{EF} \delta N dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \frac{d\delta N}{dx} \lambda dx + \int_a^b \frac{dN}{dx} \delta \lambda dx + \int_a^b \lambda \delta q_x dx + \int_a^b q_x \delta \lambda dx + (N - \bar{N}) \Big|_{a_1}^{b_1} \delta \mu = 0.$$

Враховуючи, що

$$\bar{u} \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = \int_a^b \frac{du}{dx} \delta N dx + \int_a^b u \frac{d\delta N}{dx} \Rightarrow \lambda = -u,$$

$$-\int_a^b \frac{dN}{dx} \delta u dx = -\delta u N \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b N \frac{d\delta u}{dx} \Rightarrow \mu = u.$$

Тоді повний функціонал

$$\Pi(N, u) = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \left(u \frac{dN}{dx} + q_x \right) dx + u (N - \bar{N}) \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Варіація повного функціонала

$$\delta \Pi = -\int_0^L \frac{N}{EF} \delta N dx + (\bar{u} - u) N \Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \delta N dx - \int_a^b \delta u \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) dx - \int_a^b u \frac{d\delta N}{dx} dx + \delta u (N - \bar{N}) \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$-\int_a^b u \frac{d\delta N}{dx} dx = \int_a^b u \frac{du}{dx} \delta N dx - u \delta N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta \Pi = -\int_0^L \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Звідси отримаємо варіаційний принцип Лагранжа

$$\delta \Pi_1(u) = 0,$$

$$\Pi^{\text{II}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1},$$

додаткові умови

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b; \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

4.10.4. Висновки перетворення варіаційних задач

Наведемо деякі висновки перетворення варіаційних задач.

1. Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта будується на основі наступних положень. Будь-яку із умов стаціонарності функціонала можна включити до додаткових умов, така варіаційна задача буде еквівалентна вихідній. Друге положення полягає у використанні методу множників Лагранжа для урахування додаткових умов і отримання еквівалентних варіаційних задач. У багатьох задачах, наприклад, для опуклих функцій, використання наведених положень, дозволяє відслідкувати також зміну екстремальних властивостей функціоналів. У ряді задач без обмежень можна штучно ввести додаткові умови, щоб потім внести їх до функціонала за допомогою множників Лагранжа і проводити подальші перетворення. Це дозволяє отримати різні формулювання однієї і тієї ж варіаційної задачі із різними змінними і, зокрема, здійснити важливе перетворення Фрідрікса.

2. Теорія перетворення варіаційних проблем Р. Куранта і Д. Гільберта дозволяє поставити у відповідність одне одному різні функціонали з додатковими умовами і побудувати повний функціонал без будь-яких додаткових умов, із якого як частинні випадки можуть бути отримані усі можливі функціонали з додатковими умовами і сформульовані відповідні частинні варіаційні принципи.

3. Повними функціоналами називаються функціонали, для яких варіаційна задача формулюється без додаткових умов і охоплює усі компоненти простору станів. При цьому під основним простором станів розуміють сукупність полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль).

Повний функціонал є найбільш загальною енергетичною характеристикою даної системи, оскільки, з одного боку, з повного функціонала можуть бути отримані усі можливі частинні функціонали у даному просторі, з іншого – його досить для визначення усіх компонентів полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль), тобто для повного розв'язку задачі у даному просторі станів.

4. Функціонали, для яких варіаційна задача формулюється з додатковими умовами, що визначають підпростір у обраному просторі станів, мають назву частинних функціоналів.

Частинні функціонали отримуються із повних шляхом введення додаткових умов на деякі компоненти даного простору станів.

5. Таким чином, у обраному просторі станів поняття повного і частинного функціоналів визначені і мають абсолютний характер. Разом з тим при переході від одного простору до іншого ці поняття стають відносними. Тобто повний функціонал, визначений у деякому просторі, може бути розглянутий як частинний

4. СТЕРЖНЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСНЕННЯ

у розширеному просторі. Він є частинним по відношенню до повного функціонала у розширеному просторі.

6. Загальний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи надають повному функціоналу стаціонарне значення.

7. Загальна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови (природні умови функціонала) містять у собі повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії, які виражені через компоненти відповідного простору станів.

Як правило, можна дати більш детальне формулювання загального варіаційного принципу: дійсному напружено-деформованому стану системи відповідає не просто стаціонарне значення, а мінімакс (або максімін, або сідлова точка) повного функціонала. Виключення складають функціонали, які не мають екстремумів, ні мінімаксів, ні максімінів.

8. Частинний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи, які задовольняють даним обмеженням у вигляді додаткових умов, надають частинному функціоналу стаціонарне значення при даних додаткових умовах, тобто у підпросторі даного простору станів.

Як правило, частинний функціонал має не просто стаціонарне значення, а умовний екстремум, або мінімакс, або максімін, або сідлову точку.

9. Частинна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови задачі на умовне стаціонарне значення частинного функціонала (природні умови функціонала) разом з додатковими умовами складають повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії.

5. Варіаційна постановка задачі про плоский згин

5.1. Основні співвідношення задачі про плоский згин прямолінійного стержня

Нехай до прямолінійного стержня постійної жорсткості EI прикладене поперечне навантаження $q(x)$. На рис. 5.1,а показано додатні напрями осей координат, моментів M і поперечних сил Q . Кінці стержня розташовані в точках із координатами $x = a$; $x = b$.

Напружено-деформований стан стержня описується трьома групами рівнянь:

1. Статична сторона задачі – рівняння рівноваги.

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad x \in (a, b).$$

Причому $M = \int_F \sigma z dF$.

2. Геометрична сторона задачі – зв'язок між деформаціями і переміщеннями (рівняння сумісності деформацій).

$$\varepsilon = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{(\rho + z)\alpha - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{z}{\rho} = z\kappa.$$

Тут через κ позначена кривизна, яку можна представити у вигляді

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad x \in (a, b).$$

У результаті маємо

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

3. Фізична сторона задачі – закон Гука.

$$\sigma = \varepsilon E; \quad \tau = \gamma G; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

$$M = \int_F \sigma z dF = EI \kappa.$$

Для постановки крайової задачі ці рівняння слід доповнити граничними умовами:

a_1, b_1 – точки, в яких задані компоненти зусиль (позначені рисками)

$$M, M'|_{a_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1};$$

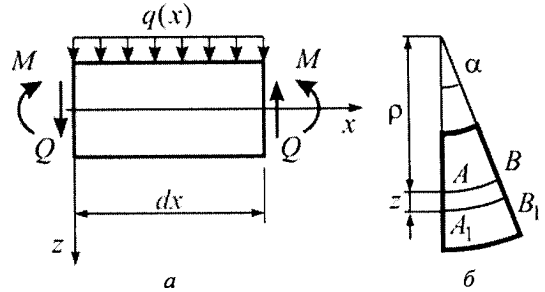
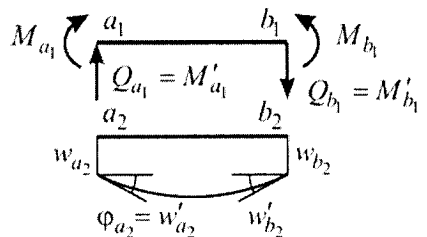


Рис. 5.1



a_2, b_2 – точки, в яких задані компоненти переміщень (позначені рисками)

$$w, w'|_{a_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}.$$

Тоді крайова задача згину стержня може бути сформульована так:

<p align="center"><i>у зусиллях і переміщеннях</i></p> $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q, \quad x \in a, b$ $M, M' _{a_1} = \bar{M}, \bar{M}' _{a_1}, \quad w, w' _{a_2} = \bar{w}, \bar{w}' _{a_2}.$	<p align="center"><i>у переміщеннях</i></p> $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q, \quad w, w' _{a_2} = \bar{w}, \bar{w}' _{a_2}, \quad x \in a, b$ $-EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big _{a_1} = \bar{M}, \bar{M}' _{a_1}.$
--	---

5.2. Потенціальна енергія пружної деформації. Доповнювальна потенціальна енергія. Перші похідні від питомої потенціальної енергії. Формули Дж. Гріна і Кастільяно

У випадку закону Гука $\sigma = \epsilon E$ для одновимірної задачі перетворення Лежандра має вигляд (п. 4.1)

$$u_0(\epsilon) + u^{\text{доп}}(\sigma) = \sigma \epsilon,$$

$$u_0(\epsilon) = u_0^{\text{доп}}(\sigma),$$

$$u_0(\sigma) = \frac{\epsilon^2 E}{2}; \quad u_0^{\text{доп}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Формула Клапейрона

$$2u_0 = \sigma \epsilon.$$

Перші похідні від питомої потенціальної енергії являють собою відповідно формули Дж. Гріна і Кастільяно, які витікають із залежностей перетворення Лежандра

$$\frac{du_0(\epsilon)}{d\epsilon} = \sigma; \quad \frac{du_0^{\text{доп}}(\sigma)}{d\sigma} = \epsilon,$$

а другі похідні дорівнюють відповідно коефіцієнтам жорсткості E і податливості $\frac{1}{E}$

$$\frac{d^2 u_0(\epsilon)}{d\epsilon^2} = E; \quad \frac{d^2 u_0(\sigma)}{d\sigma^2} = \frac{1}{E}.$$

Потенціальна енергія пружної деформації балки обчислюється наступним чином:

$$U(M, \kappa) = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dv = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{M}{I} z \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^l M \kappa dx,$$

Ураховуючи, що $I = \iint_F z^2 dF$ і $M = EI\kappa$, можна записати

$$U(\kappa) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx.$$

Відповідно доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(M) = \frac{1}{2} \int_0^l M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Питомі (на одиницю довжини) значення потенціальної енергії

$$U_0(\kappa) = \frac{1}{2} EI \kappa^2; \quad U_0^{\text{доп}}(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI}.$$

Перші похідні від питомої потенціальної енергії (аналог формул Дж.Гріна і Кастільяно)

$$\frac{dU_0(\kappa)}{d\kappa} = M; \quad \frac{dU_0^{\text{доп}}(M)}{dM} = \kappa.$$

Другі похідні – відповідно, коефіцієнти жорсткості і податливості

$$\frac{d^2U_0(\kappa)}{d\kappa^2} = EI; \quad \frac{d^2U_0^{\text{доп}}(M)}{dM^2} = \frac{1}{EI}.$$

5.3. Робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона

У випадку згину роботу зовнішніх сил (рис. 5.2,а) запишемо так:

$$A_{3C} = \int_a^b q w dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Інтеграл $\int_a^b q w dx$ перетворимо за формулою

інтегрування частинами:

$$\int_a^b q w dx = - \int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx = -w M' \Big|_a^b + \int_a^b \frac{dM}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

$$u = w \Rightarrow du = \frac{dw}{dx} dx;$$

$$dv = \frac{d^2 M}{dx^2} dx \Rightarrow v = \frac{dM}{dx}.$$

$$\int_a^b \frac{dM}{dx} \frac{dw}{dx} dx = w' M \Big|_a^b - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx$$

$$u = \frac{dw}{dx} \Rightarrow du = \frac{d^2 w}{dx^2} dx;$$

$$dv = \frac{dM}{dx} dx \Rightarrow v = M.$$

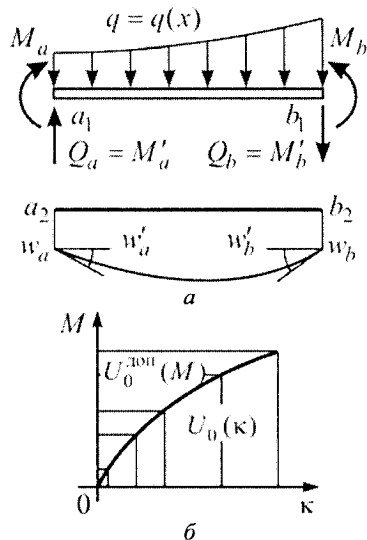


Рис.5.2

Таким чином, отримуємо формулу Гріна:

$$-\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx = -w M' \Big|_a^b + w' M \Big|_a^b - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (5.1)$$

і, відповідно, залежність:

$$\int_a^b q w dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} = \int_a^b M \kappa dx + (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

до правої частини якої додаємо рівність:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx = \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx,$$

яка отримується як сума двох залежностей

$$\int_a^b q w dx = -M' w \Big|_a^b + M w' \Big|_a^b + \int_a^b M \kappa dx,$$

$$\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx = M' w \Big|_a^b - M w' \Big|_a^b + \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx.$$

Тоді остаточно отримуємо наступний вираз:

$$\int_a^b q w dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + M' \bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2} - M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} =$$

$$= \int_a^b M \kappa dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx + (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad (5.2)$$

який являє собою рівність робіт зовнішніх (ліва частина) і внутрішніх (права частина) сил, $A_{3C} = A_{BC}$. При цьому права частина є аналогом відомої у просторовій задачі теорії пружності формули П.Ф.Папковича [141]

$$A_{BC} = \int_a^b M \kappa dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx + (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Якщо для певного деформованого стану виконується рівняння рівноваги $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$, рівняння сумісності деформацій $\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$, а також граничні умови

$w|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}|_{a_2}^{b_2}$; $w'|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}'|_{a_2}^{b_2}$; $M|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}|_{a_1}^{b_1}$; $M'|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}'|_{a_1}^{b_1}$, то відповідні характеристики цього стану w, M, κ є дійсними і тому саме для цього дійсного стану отримаємо:

$$\int_a^b M \kappa dx = \int_a^b q w dx + \bar{M}' w|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2},$$

$$\int_a^b M \kappa dx = U(\kappa) + U^{\text{доп}}(M),$$

$$U_0 = M \kappa = \int_0^\kappa M \delta \kappa + \int_0^M \kappa \delta M = U_0(\kappa) + U_0^{\text{доп}}(M).$$

Якщо залежність M - κ є лінійною

$$U(\kappa) = U^{\text{доп}}(M) = U,$$

то

$$2U = \int_a^b q w dx + \bar{M}' w|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2} \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) являє собою теорему Клапейрона: для дійсного стану лінійно пружної системи, у якому задовольняються рівняння рівноваги, сумісності деформацій, фізичної сторони задачі та граничні умови, подвійна потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішніх сил.

Рівняння рівності робіт зовнішніх і внутрішніх сил є функціоналом, який у разі дійсних M, w, κ являє собою функціонал теореми Клапейрона, а саме:

$$\int_a^b M \kappa dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} - \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2} = 0, \quad (5.4)$$

$$\Pi(w, M, \kappa) = 0.$$

Екстремальне значення цього функціонала, як впливає із (5.4), дорівнює нулю.

Якщо задані криві порівняння, тобто $\bar{w} = w + \delta w$, $\bar{M} = M + \delta M$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \delta \varepsilon$, отримаємо відповідне $\delta \Pi(w, M, \varepsilon) = 0$

$$\delta \left[\int_a^b M \kappa dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} - \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2} \right] = 0$$

і варіаційне рівняння, яке витікає із правої частини рівняння (5.2).

$$\int_a^b \left(M - \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial \kappa} \right) \delta \varepsilon dx + \int_a^b \left(\kappa - \frac{\partial U_0^{\text{доп}}}{\partial M} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta N dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx +$$

$$+ (-M' + \bar{M}') \delta w|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) \delta w'|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) \delta M'|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M|_{a_2}^{b_2}. \quad (5.5)$$

Тут взята до уваги залежність

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\delta(M\kappa) = M\delta\kappa + \kappa\delta M + \left(M - \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial\kappa}\right)\delta\kappa + \left(\kappa - \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(M)}{\partial M}\right)\delta M,$$

яка по суті, визначає умови повної варіації.

Перетворення Лежандра

$$U_0(\kappa) + U_0^{\text{доп}}(M) = U_0 = M\kappa.$$

Повна варіація дорівнює

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial\kappa}\delta\kappa + \frac{\partial U_0}{\partial M}\delta M = \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial\kappa}\delta\kappa + \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(M)}{\partial\kappa}\delta\kappa + \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial M}\delta M + \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(M)}{\partial M}\delta M,$$

але

$$U_0^{\text{доп}}(M) = U_0 - U_0(\kappa), \text{ а } U_0(\kappa) = U_0 - U_0^{\text{доп}}(M).$$

Тоді

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial\kappa}\delta\kappa + \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(M)}{\partial M}\delta M + \left(M - \frac{\partial U_0(\kappa)}{\partial\kappa}\right)\delta\kappa + \left(\kappa - \frac{\partial U_0^{\text{доп}}(M)}{\partial M}\right)\delta M.$$

Якщо $M = EI\kappa$, то

$$U_0(\kappa) = \frac{1}{2}EI\kappa^2, \quad U_0(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI}.$$

Приклад 5.1. Розглянемо перетворення Лежандра у випадку згину.

Теорема Клапейрона має вигляд

$$\frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx = \int_a^b q w dx + \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M'|_{a_2}^{b_2}$$

за умови $w, w'|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}^{b_2}$, $M, M'|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1}^{b_1}$.

Скориставшись залежністю $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$, а також інтегральною формулою

$$-\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx = -\bar{M}' w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1} - \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' M'|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx, \text{ отримаємо перетво-}$$

рення Лежандра у вигляді:

$$\frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx = \int_a^b M \kappa dx.$$

$$\frac{\partial}{\partial\kappa} \left(\int_a^b M \kappa dx - \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx \right) = 0, \quad \int_a^b (M - EI\kappa) dx = 0; \quad M = EI\kappa.$$

$$\frac{\partial}{\partial M} \left(\int_a^b M \kappa dx - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx \right) = 0, \quad \int_a^b \left(\kappa - \frac{M}{EI} \right) dx = 0; \quad \kappa = \frac{M}{EI}.$$

5.4. Двоїсті варіаційні постановки. Функціонали Рейснера і Ху-Васідзу

Рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил (5.1), може бути переписана у вигляді

$$\int_a^b M \kappa dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx + (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2} -$$

$$- \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} + M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} = 0, \quad (5.6)$$

або

$$\Pi(\kappa, w, M) = \Pi_1(\kappa, w, M) - \Pi_2(\kappa, w, M) = 0,$$

де через Π_1 і Π_2 позначені наступні функціонали:

$$\Pi_1(\kappa, w, M) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\Pi_2(\kappa, w, M) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b M \kappa dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} - M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} -$$

$$- (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} - (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

При будь-яких M і w значення функціоналів Π_1 і Π_2 дорівнюють одне одному, в чому легко пересвідчитись, наприклад, перетворюючи за допомогою формули

Гріна (5.1) інтеграл $\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx$, який входить до складу Π_2 . Отже, функціонал

$\Pi(\kappa, w, M)$, заданий виразом (5.6), набуває нульового значення при будь-яких статично можливих M і геометрично можливих w .

Відрізнити дійсний НДС дозволяють постановки варіаційних задач на основі функціоналів Π_1 і Π_2 , які містять інформацію про зв'язок між зусиллями та деформаціями і утворюють пару двоїстих задач варіаційного числення, коли додаткові умови однієї задачі є природними умовами іншої:

$\delta \Pi_1 = 0$	$\delta \Pi_2 = 0$
або	або
$\delta_\kappa \Pi_1 + \delta_w \Pi_1 + \delta_M \Pi_1 = 0$	$\delta_\kappa \Pi_2 + \delta_w \Pi_2 + \delta_M \Pi_2 = 0$
при додатковій умові $\delta \Pi_2 = 0$.	при додатковій умові $\delta \Pi_1 = 0$.

Виконуючи варіювання і використовуючи можливість міняти місцями операції варіювання та диференціювання, послідовно отримуємо

$\delta_{\kappa}\Pi_1 = \int_a^b (EI\kappa - M)\delta\kappa dx,$ $\delta_w\Pi_1 = -\int_a^b \frac{d^2\delta w}{dx^2} M dx - \int_a^b q\delta w dx -$ $-\bar{M}'\delta w _{a_1}^{b_1} + \bar{M}\delta w' _{a_1}^{b_1} - M'\delta w _{a_2}^{b_2} + M\delta w' _{a_2}^{b_2},$ $\delta_M\Pi_1 = -\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2}\right)\delta M dx +$ $+(\bar{w} - w)\delta M' _{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w')\delta M _{a_2}^{b_2}$	$\delta_{\kappa}\Pi_2 = \int_a^b (EI\kappa - M)\delta\kappa dx,$ $\delta_w\Pi_2 = -\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q\right)\delta w dx +$ $+(M' - \bar{M}')\delta w _{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M})\delta w' _{a_1}^{b_1},$ $\delta_M\Pi_2 = -\int_a^b \kappa\delta M dx - \int_a^b \frac{d^2\delta M}{dx^2} w dx +$ $+\bar{w}\delta M' _{a_2}^{b_2} - \bar{w}'\delta M _{a_2}^{b_2} + w\delta M' _{a_1}^{b_1} - w'\delta M _{a_1}^{b_1}$
--	--

і варіаційні рівняння у вигляді:

$-\int_a^b (EI\kappa - M)\delta\kappa dx - \int_a^b \frac{d^2\delta w}{dx^2} M dx +$ $-\bar{M}'\delta w _{a_1}^{b_1} + \bar{M}\delta w' _{a_1}^{b_1} - M'\delta w _{a_2}^{b_2} + M\delta w' _{a_2}^{b_2} -$ $-\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2}\right)\delta M dx - \int_a^b q\delta w dx +$ $+(\bar{w} - w)\delta M' _{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w')\delta M _{a_2}^{b_2} = 0.$	$-\int_a^b (EI\kappa - M)\delta\kappa dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q\right)\delta w dx +$ $+(M' - \bar{M}')\delta w _{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M})\delta w' _{a_1}^{b_1} -$ $-\int_a^b \kappa\delta M dx - \int_a^b \frac{d^2\delta M}{dx^2} w dx + \bar{w}\delta M' _{a_2}^{b_2} -$ $-\bar{w}'\delta M _{a_2}^{b_2} + w\delta M' _{a_1}^{b_1} - w'\delta M _{a_1}^{b_1} = 0.$
--	--

Додаткові умови відсутні, і отже, маємо задачу на абсолютний екстремум.

Функціонали $\Pi_1(\kappa, w, M)$ і $\Pi_2(\kappa, w, M)$ називають відповідно першою і другою формою функціонала Ху-Васідзу в задачах згину балки і позначають $\Pi_1^{XB}(\kappa, w, M)$, $\Pi_2^{XB}(\kappa, w, M)$.

Варто зауважити, що в результаті використання інтегральних тотожностей

$$-\int_a^b \frac{d^2\delta M}{dx^2} w dx = -\delta M'w|_a^b + \delta M w'|_a^b - \int_a^b \delta M \frac{d^2 w}{dx^2} dx,$$

$$-\int_a^b \frac{d^2\delta w}{dx^2} M dx = -\delta w' M|_a^b + \delta w M'|_a^b - \int_a^b \delta w \frac{d^2 M}{dx^2} dx$$

частинні варіації $\delta_w\Pi_1$ та $\delta_M\Pi_2$ перетворюються відповідно на

$$\delta_w \Pi_1 = - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad (5.7)$$

$$\delta_M \Pi_2 = - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (\bar{w} - w) \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad (5.8)$$

а варіаційні рівняння $\delta \Pi_1^{XB}(\kappa, w, M) = 0$ та $\delta \Pi_2^{XB}(\kappa, w, M) = 0$ набувають ідентичного вигляду:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1^{XB}(\kappa, w, M) = & - \int_a^b (EI\kappa - M) \delta \kappa dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \\ & - (M - \bar{M}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \\ & + (\bar{w} - w) \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2^{XB}(\kappa, w, M) = & - \int_a^b (EI\kappa - M) \delta \kappa dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \\ & - (M - \bar{M}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \\ & + (\bar{w} - w) \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0, \end{aligned}$$

який свідчить про еквівалентність варіаційної постановки задачі повній системі рівнянь згину балки.

Якщо приймається додаткова умова $M = EI\kappa$, отримуємо відповідно першу і другу форму функціонала Рейснера:

$$\begin{aligned} \Pi_1^P(w, M) = & - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx - \\ & - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + \bar{M} w \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) M \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') M \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^P(w, M) = & - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} - \\ & - (M - \bar{M}) w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

і відповідні варіаційні рівняння

$$\delta \Pi_1^P(w, M) = \delta_w \Pi_1^P + \delta_M \Pi_1^P = 0,$$

$$\delta \Pi_2^P(w, M) = \delta_w \Pi_2^P + \delta_M \Pi_2^P = 0,$$

де

де

$$\begin{aligned} \delta_w \Pi_1^P = & - \int_a^b M \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - \int_a^b q \delta w dx - \\ & - \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \delta w M \Big|_{a_2}^{b_2} + \delta w' M \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_w \Pi_2^P(w, M) = & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + \\ & + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1}, \end{aligned}$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\delta_M \Pi_1^P = - \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx -$$

$$-(\bar{w}' - w') \delta M|_{a_2}^{b_2} + (\bar{w} - w) \delta M'|_{a_2}^{b_2}.$$

$$\delta_M \Pi_2^P = - \int_a^b \frac{M}{EI} \delta M dx - \int_a^b \frac{d^2 \delta M}{dx^2} w dx +$$

$$+ \delta M' w|_{a_1}^{b_1} - \delta M w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} \delta M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M|_{a_2}^{b_2}.$$

Після підстановки частинних варіацій отримуємо варіаційні рівняння в цілому

$$- \int_a^b M \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - \int_a^b q \delta w dx - \bar{M}' \delta w|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ \bar{M} \delta w'|_{a_1}^{b_1} - \delta w M'|_{a_2}^{b_2} + \delta w' M|_{a_2}^{b_2} +$$

$$+ \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx -$$

$$-(\bar{w}' - w') \delta M|_{a_2}^{b_2} + (\bar{w} - w) \delta M'|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

$$- \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx +$$

$$+ (M' - \bar{M}') \delta w|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w'|_{a_1}^{b_1} -$$

$$- \int_a^b \frac{M}{EI} \delta M dx - \int_a^b \frac{d^2 \delta M}{dx^2} w dx +$$

$$+ \delta M' w|_{a_1}^{b_1} - \delta M w'|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} \delta M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Якщо скористатись виразами для частинних варіації $\delta_w \Pi_1$ (5.7) та $\delta_M \Pi_2$ (5.8), то варіаційні рівняння $\delta \Pi_1^P(\kappa, w, M) = 0$ та $\delta \Pi_2^P(\kappa, w, M) = 0$ знову набудуть ідентичного вигляду:

$$\delta \Pi_1^P(\kappa, w, M) = \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx -$$

$$- \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w|_{a_1}^{b_1} -$$

$$-(M - \bar{M}) \delta w'|_{a_1}^{b_1} -$$

$$+ (\bar{w} - w) \delta M'|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

$$\delta \Pi_2^P(\kappa, w, M) = \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx -$$

$$- \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w|_{a_1}^{b_1} -$$

$$-(M - \bar{M}) \delta w'|_{a_1}^{b_1} -$$

$$+ (\bar{w} - w) \delta M'|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

5.5. Функціонали Лагранжа і Кастільяно

Якщо окрім додаткової умови $M = EI\kappa$, прийняті ще інші умови, а саме,

$$\kappa = - \frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$w|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}|_{a_2}^{b_2}, \quad w'|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}'|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0,$$

$$M'|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}'|_{a_1}^{b_1}, \quad M|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}|_{a_1}^{b_1},$$

то отримаємо функціонали Лагранжа і Кастільяно, які залежать лише від однієї змінної w чи M :

$$\Pi^L(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad (5.9)$$

Отже маємо пару двійстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лагранжа і Кастільяно:

$$\delta \Pi^L(w) = 0$$

при додатковій умові $\delta \Pi^K(M) = 0$.

В розгорнутій формі вказані варіаційні задачі мають наступний вигляд:

$$\delta \Pi^L(w) = \int_a^b EI w'' \delta w'' dx - \int_a^b q \delta w dx - \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0,$$

додаткові умови: $M = EI \kappa$;

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \in a, b; \quad w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}$$

являють собою рівняння сумісності деформації і кінематичні граничні умови.

Після відповідних перетворень варіаційні задачі Лагранжа і Кастільяно набувають вигляду:

$$\delta \Pi^L(w) = \delta_w \Pi_1 = - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0$$

і містить у собі рівняння рівноваги (рівняння Ейлера) і природні (статичні) граничні умови.

Принципи Лагранжа і Кастільяно сформулюємо наступним чином:

Принцип Лагранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лагранжа

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}. \quad (5.10)$$

$$\delta \Pi^K(M) = 0$$

при додатковій умові $\delta \Pi^L(w) = 0$.

$$\delta \Pi^K(M) = - \int_a^b \frac{M}{EI} \delta M dx + \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

додаткові умови: $M = EI \kappa$;

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q \in a, b; \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}$$

являють собою рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

$$\delta \Pi^K(M) = \delta_M \Pi_2 = - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0$$

і містить у собі рівняння сумісності деформацій (рівняння Ейлера) і природні (кінематичні) граничні умови.

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно

стаціонарне (мінімальне) значення¹. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівняння сумісності деформації і рівняння в'язей (кінематичні граничні умови).

стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам^{2,3}.

Зазначимо, що перша форма функціонала Рейснера може бути отримана із функціонала Лагранжа з використанням множників Лагранжа для урахування додаткових умов. Друга форма функціонала Рейснера з використанням множників Лагранжа для урахування додаткових умов може бути отримана із функціонала Кастільяно. Функціонали типу Ху-Васідзу отримують з відповідних функціоналів Рейснера шляхом урахування за допомогою множників Лагранжа умови $M = EI\kappa$.

5.6. Варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно. Принципи можливих переміщень і можливих зусиль

Розглянемо зігнутий стержневий елемент (рис. 5.3) під дією розподіленого навантаження.

Згідно з принципом Лагранжа

$$\delta\Pi^L(w) = 0,$$

де повна потенціальна енергія виражається через прогини співвідношенням

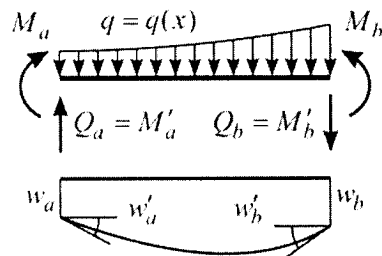


Рис. 5.3

¹ Поняття про екстремальності потенціальної енергії пружної деформації зустрічається у Л.Ейлера і І.Бернуллі, з іменами яких пов'язано виникнення варіаційного числення. І.Бернуллі в 1738 р. у листі до Ейлера запропонував йому вивести рівняння вигину балки (рівняння Я.Бернуллі) шляхом розв'язання варіаційної проблеми для функціонала $\int \frac{ds}{\rho^2}$, що з точністю до множника $\frac{1}{2} EI$ є потенціальною енергією пружної деформації балки. Доказ цього положення Л.Ейлер опублікував в 1744 р.

² Фрідель Хартманн дослідив справедливість теорем Кастільяно в своїй монографії «Математичні основи будівельної механіки» (1985). Виходячи з теореми вкладення С.Л.Соболева, він отримав нерівність $m-i > n/2$, в якій m є порядком похідних функцій, які входять у вираз енергії, i - індексом сингулярності, а n - розмірністю континууму. Теореми Кастільяно справедливі тільки тоді, коли ця нерівність задоволена. Якщо до балки ($n=1$) прикладені зосереджені сили, то індекс сингулярності $i=0$. Врахуємо, що $m=2$ (до виразу енергії входять другі похідні прогинів) і отримаємо в результаті підстановки $2 - 0 > 1/2$. Отже, вищенаведена нерівність задоволена, і теореми Кастільяно можуть бути застосовані. Для двовимірних ($n=2$) і тривимірних тіл ($n=3$), які завантажені зосередженими силами, нерівність не задовольняється, оскільки $m=1 \leq n/2$. Якщо діє зосереджений момент ($i=1$), то теореми Кастільяно також застосовуються тільки для балок і пластин, деформування яких відбувається згідно гіпотези Кірхгофа-Лява. У разі прикладення навантажень, яким відповідають розв'язки із більшим індексом сингулярності, теореми Кастільяно не можуть бути використані в жодному випадку [242].

³ Соболев Сергій Львович (1908–1989) – радянський математик і механік, один з найвизначніших математиків ХХ століття, що вніс основоположний внесок до сучасної науки, в своїх фундаментальних дослідженнях започаткував ряд нових наукових напрямів в сучасній математиці.

$$\Pi^I(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI(w'')^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M} w|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}' w'|_{a_1}^{b_1}$$

при додаткових умовах

$$M = EI\kappa; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \in a, b; \quad w, w'|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння Лагранжа можна отримати у розгорнутому вигляді, якщо скористатись загальним виразом $\delta\Pi = 0$ для функціонала $\Pi(x, w, w', w'')$, який залежить від другої похідної (п. 1.6):

$$\left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) \delta w|_a^b + F_{w''} \delta w'|_a^b + \int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \delta w dx = 0. \quad (5.11)$$

Вважаючи для спрощення граничні умови однорідними, тобто

$$w, w'|_{a_2}^{b_2} = 0; \quad M, M'|_{a_1}^{b_1} = 0$$

і враховуючи, що

$$F(x, w, w', w'') = \frac{1}{2} EI(w'')^2 - q w.$$

послідовно отримаємо:

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -q; \quad F_{w'} = \frac{\partial F}{\partial w'} = 0; \quad F_{w''} = \frac{\partial F}{\partial w''} = EI w'' = -M.$$

$$M' \delta w|_a^b - M \delta w'|_a^b + \int_a^b \left(-\frac{d^2 M}{dx^2} - q \right) \delta w dx = 0.$$

Для отримання варіаційного рівняння Кастільяно.

$$\delta\Pi^K(M) = 0,$$

де

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2},$$

при додаткових умовах

$$M = EI\kappa; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q; \quad M, M'|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1}^{b_1}$$

згідно з методом множників Лагранжа побудуємо функціонал:

$$\Pi(M, \lambda) = -\int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx + \int_a^b \lambda \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx.$$

Як і при одержанні варіаційного рівняння Лагранжа, приймаємо для спрощення.

$$w, w'|_{a_2}^{b_2} = 0; \quad M, M'|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

У загальному випадку варіаційне рівняння $\delta\Pi^K = 0$ для функціонала $\Pi^K(x, M, M', M'')$, який залежить від другої похідної має вигляд:

$$(F_{M'} - \frac{\partial}{\partial x} F_{M''}) \delta M \Big|_a^b + F_{M''} \delta M' \Big|_a^b + \int_a^b (F_M - \frac{\partial}{\partial x} F_{M'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{M''}) \delta M dx = 0.$$

Враховуючи, що

$$F(x, M, M', M'') = -\frac{M^2}{2EI} + \lambda \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right)$$

i

$$F_M = -\frac{M}{EI}; F_{M'} = 0; F_{M''} = \lambda,$$

$$-\frac{d\lambda}{dx} \delta M \Big|_a^b + \lambda \delta M' \Big|_a^b + \int_a^b \left(-\kappa + \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \right) \delta M dx = 0,$$

$$M = EI\kappa, \quad \kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Послідовно отримаємо

$$w \delta M' \Big|_a^b - w' \delta M \Big|_a^b + \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0,$$

$$M'_b \delta w_b - M'_a \delta w_a - M_b \delta w'_b + M_a \delta w'_a + \int_a^b \left(-\frac{d^2 M}{dx^2} - q \right) \delta w dx = 0.$$

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій дає у вигляді природних умов рівняння рівноваги як рівняння Ейлера $\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$, а також природні статичні граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах. Для різних типів балок це показано у табл. 5.1.

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$-M'_b \delta w_b - M'_a \delta w_a - M_b \delta w_b + M_a \delta w_a + \int_a^b \left(-\frac{d^2 M}{dx^2} - q \right) \delta w dx = 0,$$

враховуючи, що під інтегралом стоїть рівнодіюча R ,

$$R dx + q dx + dQ = 0, \quad R = -\frac{dQ}{dx} - q = -\frac{d^2 M}{dx^2} - q$$

$$w_b \delta M'_b - w_a \delta M'_a - w'_b \delta M_b + w'_a \delta M_a + \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0.$$

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій, дає у вигляді природних умов рівняння сумісності деформацій як рівняння Ейлера $\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$, а також природні (кінематичні) граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах (див. табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Варіаційне рівняння Лагранжа								
1	2	3	4	5	6	7	8	
Задані зовні граничні умови $w, w' _{a_2} = 0$	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ $w_b = 0$ $w'_b = 0$	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ $w_b = 0$ -	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ - -	$w_a = 0$ - $w_b = 0$ -	$w_a = 0$ - $w_b = 0$ -	$w_a = 0$ - - -	- - - -	Природні граничні умови $w, w' _{a_2} = 0$
Природні граничні умови $M, M' _a = 0$	- - - -	- - - M_b	- $M_a = 0$ - $M_b = 0$	- - $M_a = 0$ $M_b = 0$	- - $M_a = 0$ $M_b = 0$	- $Q_b = 0$ $M_a = 0$ $M_b = 0$	$Q_a = 0$ $Q_b = 0$ $M_a = 0$ $M_b = 0$	Задані зовні граничні умови $M, M' _a = 0$
Нетривіальні розв'язки рівняння рівноваги $Elw'''' = 0$						x	$1, x$	
Умови щодо навантажень, за яких існує розв'язок рівняння					$\int_0^l q(x)xdx = 0$	$\int_0^l q(x)dx = 0$ $\int_0^l q(x)xdx = 0$		
								Варіаційне рівняння Кастильяно

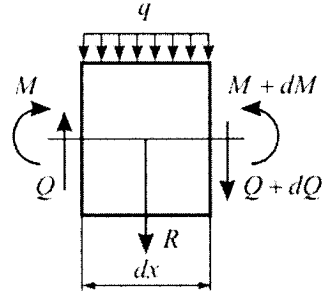
являє собою принцип можливих переміщень, а саме: якщо сума робіт усіх сил, які діють на систему, при будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю, то система перебуває у рівновазі. При цьому під можливими розуміються переміщення, які описуються гладкими безперервними функціями і задовольняють умовам в'язей¹.

¹ У деяких книгах з будівельної механіки при формулюванні начала можливих переміщень включається додаткова вимога нескінченної малості тих переміщень, на яких підраховується можлива робота. Це істотно тільки для геометрично нелінійної постановки задачі.

Варіаційне рівняння Кастильяно

$$w_b \delta M'_a - w_a \delta M'_a - w'_b \delta M_b + w'_a \delta M_a + \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0$$

являє собою принцип можливих зусиль: якщо сума робіт, які здійснюються при будь-яких можливих змінах зусиль дорівнює нулю, то система задовольняє рівнянням сумісності деформацій. При цьому під можливими розуміються статично можливі системи зусиль.



У випадку неоднорідних граничних умов

$$w, w'|_{a_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2} \quad \text{і} \quad M, M'|_{a_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_2}$$

отримаємо відповідно:

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$(M' - \bar{M}) \delta w'|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w|_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} \left(-\frac{d^2 M}{dx^2} - q \right) \delta w dx = 0.$$

Варіаційне рівняння Кастильяно

$$(w - \bar{w}) \delta M'|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M|_{a_2}^{b_2} + \int_{a_1}^{b_1} \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0.$$

Таким чином:

у принципі Лагранжа маємо додаткові умови (обмеження)

$$M = EI\kappa; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad w, w'|_{a_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}$$

і отримані природні умови

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q; \quad M, M'|_{a_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1}.$$

у принципі Кастильяно маємо додаткові умови (обмеження)

$$M = EI\kappa; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q; \quad M, M'|_{a_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1}$$

і отримані природні умови

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad w, w'|_{a_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}.$$

Тобто додаткові умови однієї варіаційної задачі є природними для іншої і навпаки. Такі задачі утворюють пару варіаційних двоїстих задач. Вони розв'язуються, або шляхом розв'язання кожної варіаційної задачі окремо, або шляхом спільного розв'язування рівнянь природних (додаткових) умов обох задач.

У ряді літературних джерел у формулюваннях замість слова «робота» використовується термін «можлива робота». При цьому по сенсу викладу під вказаним терміном мається на увазі абстракція, що відрізняється від дійсної роботи тим, що сили, що проводять роботу, можуть відноситися до одного стану системи, а відповідні ним переміщення – до іншого. Разом з тим дається визначення цього поняття в розділі, присвяченому принципу можливих переміщень, як роботи сил на можливому переміщенні, хоча в самому формулюванні вказаного тут принципу термін «можлива робота» не використовується і замість нього застосовано просто слово «робота». Аналогічно останньому дається визначення можливої роботи і в класичному курсі П.Аппеля [7]. Як правило, у формулюванні принципу можливих переміщень не використовується термін можлива робота і в інших джерелах [112, 118, 136 та ін.].

Наведені залежності пояснюються формальною спряженістю операторів диференціальних рівнянь рівноваги $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$ і сумісності деформацій

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI},$$

що відображається у формулі Гріна

$$\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx = M'w|_a^b - Mw'|_a^b + \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx,$$

а за фізичним змістом є наслідком теореми Клапейрона і закону збереження енергії.

За допомогою методу множників Лагранжа можна “поміняти місцями” додаткові і природні умови, тобто із функціонала Лагранжа отримати функціонал Кастільяно і навпаки. Таке перетворення у варіаційному численні має назву перетворення Фрідрікса (п. 4.10). Теорія перетворень функціоналів надана в [105]. Зазначимо, що екстремальні значення функціоналів Лагранжа і Кастільяно, а також усіх функціоналів, які отримані за допомогою множників Лагранжа співпадають.

Функціонал Лагранжа $\Pi = U + A$ називається повною потенціальною енергією системи, що дорівнює сумі потенціальної енергії пружної деформації і роботи зовнішніх сил. При цьому потенціальна енергія пружної деформації U обчислюється як робота внутрішніх сил і вважається додатною, а робота зовнішніх сил A обчислюється як добуток сили на переміщення і вважається від’ємною. Інколи повна потенціальна енергія системи ототожнюється з роботою зовнішніх і внутрішніх сил при переході системи від деформованого стану до первісного. Зазначимо що функціонал (або функція) Π може бути отримана як двоїста за Юнгом до доповнювальної потенціальної енергії, тобто роботи внутрішніх сил.

5.6.1. Нетривіальні розв’язки рівняння рівноваги

Приклад 5.2. Розглянемо випадки нетривіальних розв’язків рівняння рівноваги $EIw'''' = q$. Одержати рівняння рівноваги балки на двох опорах під дією розподіленого навантаження (рис. 5.4).

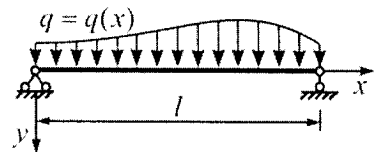


Рис. 5.4

Запишемо повну потенціальну енергію для балки

$$\Pi = U + A = \int_0^l \frac{EI(w'')^2}{2} dx - \int_0^l q w dx = \int_0^l \left[\frac{EI(w'')^2}{2} - q w \right] dx.$$

Позначимо

$$F(w, w'') = \frac{EI(w'')^2}{2} - qw.$$

Тоді

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\Pi = \int_0^l F(w, w'') dx .$$

Обчислюючи частинні похідні, можемо записати

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{EI(w'')^2}{2} - qw \right] = -q ,$$

$$F_{w'} = \frac{\partial F}{\partial w'} = \frac{\partial}{\partial w'} \left[\frac{EI(w'')^2}{2} - qw \right] = 0 ,$$

$$F_{w''} = \frac{\partial F}{\partial w''} = \frac{\partial}{\partial w''} \left[\frac{EI(w'')^2}{2} - qw \right] = EIw'' .$$

Підставивши одержані величини до рівняння Ейлера, дістанемо:

$$-q + \frac{d^2}{dx^2} (EIw'') = 0 ,$$

тобто диференціальне рівняння рівноваги балки. Якщо $EI = \text{const}$, то

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 .$$

Розв'язок даного рівняння визначить функцію прогинів, яка надасть мінімуму повній потенціальній енергії балки.

Якщо розглянути неінтегральні члени, то

$$\begin{aligned} \left[\left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} \right) \delta w \right]_a^b + [F_{w''} \delta w']_a^b &= \left[0 - \frac{d}{dx} (EIw'') \delta w \right]_0^l + [EIw'' \delta w']_0^l = \\ &= -EIw''_a \delta w + EIw''_b \delta w + EIw''_b \delta w - EIw''_a \delta w = 0 . \end{aligned}$$

Конкретний вигляд природних граничних умов залежить від типу кінематичних граничних умов балки. Кінематичні граничні умови задають варіації $\delta v(0)$, $\delta v(l)$ і $\delta v'(0)$, $\delta v'(l)$, які, в свою чергу, задають природні граничні умови. Можливі варіанти наведено в зведеній таблиці 5.1. Отже, крайова задача, що описує згин балки, визначається навантаженням $q(x)$, а також кінематичними і природними граничними умовами. Залежно від граничних умов можна розрізнити два типи задач. В задачах першого типу розв'язок існує при будь-якому розподіленому навантаженні $q(x)$. В задачах другого типу розв'язок існує тільки тоді, коли навантаження задовольняє додатковим умовам. Визначальним в даному випадку є характер розв'язку рівняння рівноваги однорідної задачі

$$EIw^{IV} = 0$$

з відповідними граничними умовами. Якщо крайова однорідна задача має лише тривіальний розв'язок, то вона належить до першого типу. В протилежному разі – до другого. Розглянемо означене питання докладніше.

Розв'язок однорідного рівняння визначається співвідношенням

$$w_0(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x) + C_4 Y_4(x),$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – константи, які визначаються з граничних умов, а $Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x), Y_4(x)$ – фундаментальна система функцій:

$$Y_1(x) = 1, \quad Y_2(x) = x, \quad Y_3(x) = \frac{x^2}{2!}, \quad Y_4(x) = \frac{x^3}{3!}.$$

Легко впевнитись, що для граничних умов геометрично незмінюваних балок (див. рядки 1 – 4 табл.5.1)

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0,$$

тобто для зазначених схем $y_0 \equiv 0$.

Для геометрично змінюваної балки, що має лише одну шарнірну опору (див. стовпець 6 табл.5.1)

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0.$$

Таким чином, нетривіальний розв'язок для цієї балки має вигляд

$$w_0(x) = C_2 Y_2(x) = C_2 x,$$

де C_2 – довільна константа.

Для неопертої балки (стовпець 7 табл.5.1) існують два нетривіальні розв'язки. Легко впевнитись в тому, що

$$w_0^{(1)} = C_1 \quad (C_1 \text{ можна взяти таким, що дорівнює } 1),$$

$$w_0^{(2)} = C_2 x \quad (C_2 \text{ можна взяти таким, що дорівнює } 1).$$

Визначимо надалі розв'язок неоднорідного рівняння

$$EI w^{IV} = q(x).$$

Рівняння задовольняється частинним розв'язком

$$w_*(x) = \frac{1}{3!} \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

де $f(\xi) = q(x)/EI$. Цей розв'язок який відповідає початковим умовам

$$w_*(0) = w'_*(0) = w''_*(0) = w'''_*(0) = 0.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишеться як сума розв'язків однорідного і неоднорідного рівнянь

$$w(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x) + C_4 Y_4(x) + w_*(x).$$

Проаналізуємо застосування зазначеного розв'язку для різних граничних умов.

Для балки, що має затиснення з обох сторін (див. стовпець 2 табл.5.1), на підставі граничних умов на лівому кінці ($x=0$), маємо $C_1 = 0, C_2 = 0$. Запишемо граничні умови для правого кінця ($x=l$):

$$w(l) = C_3 Y_3(l) + C_4 Y_4(l) + w_*(l) = 0,$$

$$w'(l) = C_3 Y_3'(l) + C_4 Y_4'(l) + w'_*(l) = 0.$$

Отже, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно довільних констант

$$\begin{bmatrix} Y_3(l) & Y_4(l) \\ Y_3'(l) & Y_4'(l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_*(l) \\ w_*'(l) \end{Bmatrix}$$

або

$$\begin{bmatrix} \frac{l^2}{2!} & \frac{l^3}{3!} \\ l & \frac{l^2}{2!} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{1}{3!} \int_0^l (l-\xi)^3 f(\xi) d\xi \\ \frac{1}{2!} \int_0^l (l-\xi)^2 f(\xi) d\xi \end{Bmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці коефіцієнтів не дорівнює нулю

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \frac{l^2}{2!} & \frac{l^3}{3!} \\ l & \frac{l^2}{2!} \end{vmatrix} = \frac{l^4}{12} \neq 0,$$

система має один і тільки один розв'язок при будь-якій функції $f(x)$.

Для балки, затисненою на лівому і шарнірно опертою на правому кінці (див. стовпець 3 табл.5.1), також маємо $C_1 = 0, C_2 = 0$. З граничних умов для правого кінця ($x=l$) маємо:

$$\begin{aligned} w(l) &= C_3 Y_3(l) + C_4 Y_4(l) + w_*(l) = 0, \\ w''(l) &= C_3 Y_3''(l) + C_4 Y_4''(l) + w_*''(l) = 0. \end{aligned}$$

Відносно констант C_3, C_4 отримаємо систему

$$\begin{bmatrix} Y_3(l) & Y_4(l) \\ Y_3''(l) & Y_4''(l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_*(l) \\ w_*''(l) \end{Bmatrix}$$

або з урахуванням значень фундаментальної системи функцій

$$\begin{bmatrix} \frac{l^2}{2!} & \frac{l^3}{3!} \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{1}{3!} \int_0^l (l-\xi)^3 f(\xi) d\xi \\ \int_0^l (l-\xi) f(\xi) d\xi \end{Bmatrix}.$$

Визначник матриці коефіцієнтів відмінний від нуля

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \frac{l^2}{2!} & \frac{l^3}{3!} \\ 1 & l \end{vmatrix} = \frac{l^3}{3} \neq 0.$$

Звідси випливає, що задача має розв'язок при будь-якій функції $f(x)$.

Аналогічна ситуація має місце в балках, що мають затисненим лівий і не закріплений правий кінець (див. стовпець 4 табл.5.1) або обидва шарнірно опертих кінця (див. стовпець 5 табл.5.1).

Інша ситуація виникає при аналізі геометрично змінюваної балки, яка має шарнірну опору при $x = 0$ і вільний кінець при $x = l$ (див. стовпець 6 табл.5.1). Для лівого кінця балки з граничних умов можна записати

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Граничні умови на правому кінці:

$$\begin{aligned} w''(l) &= C_2 Y_2''(l) + C_4 Y_4''(l) + w_*''(l) = 0, \\ w'''(l) &= C_2 Y_2'''(l) + C_4 Y_4'''(l) + w_*'''(l) = 0. \end{aligned}$$

Перепишемо систему в матричній формі

$$\begin{bmatrix} 0 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \int_0^l (l-\xi) f(\xi) d\xi \\ 0 \\ l \\ \int_0^l f(\xi) d\xi \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} 0 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

і, отже, система може мати розв'язок лише в разі виконання певних умов. Дійсно, система складається з двох рівнянь

$$\begin{aligned} lC_4 &= - \int_0^l (l-\xi) f(\xi) d\xi, \\ C_4 &= - \int_0^l f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Обидві рівності можливі одночасно, якщо $\int_0^l \xi f(\xi) d\xi = 0$, тобто навантаження

має задовольняти рівнянню рівноваги $\sum M_A = 0$. При цьому константа C_2 може бути довільною, тобто балка може мати будь-який поворот відносно шарніра.

Розглянемо неоперту балку (див. стовпець 7 табл.5.1). Із граничних умов на лівому кінці $C_3 = C_4 = 0$. Запишемо умови на правому кінці

$$\begin{aligned} w''(l) &= C_1 Y_1''(l) + C_2 Y_2''(l) + w_*''(l) = 0, \\ w'''(l) &= C_1 Y_1'''(l) + C_2 Y_2'''(l) + w_*'''(l) = 0. \end{aligned}$$

Ці співвідношення можна перетворити до наступного вигляду

$$\int_0^l (l-\xi) f(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^l f(\xi) d\xi = 0,$$

звідки випливає, що

$$\int_0^l \xi f(\xi) d\xi = 0.$$

Отже, можна зробити висновок, що функція $f(\xi)$ має задовольняти двом умовам:

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\int_0^l f(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^l \xi f(\xi) d\xi = 0,$$

тобто навантаження повинно бути самоврівноваженим. Константи C_1, C_2 можуть бути довільними. Це означає, що деформована балка може займати будь-яке положення на площині.

5.6.2. Інші підходи при отриманні варіаційних принципів Лагранжа і Кастільяно, а також відповідних варіаційних рівнянь

Розглянемо приклади інших підходів отримання варіаційних принципів Лагранжа і Кастільяно.

Основна інтегральна формула (формула Гріна) має вигляд

$$-\int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} = -M'w|_a^b + Mw'|_a^b - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx.$$

і дозволяє переносити диференціальний оператор з однієї функції на іншу.

Звідки витікає залежність, яка по суті являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил.

$$\int_a^b q w dx = -M'w|_a^b + Mw'|_a^b + \int_a^b M \kappa dx.$$

$$\int_a^b M \kappa dx = \int_a^b q w dx + M'w|_a^b - Mw'|_a^b.$$

Оскільки (див. рис)

$$M \kappa = \frac{1}{2} EI \kappa^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} = U_0(\kappa) + U_0^{\text{доп}}(M)$$

і відповідно

$$\int_a^b M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx = U_0(\kappa) + U_0^{\text{доп}}(M). \quad (5.12)$$

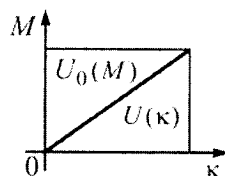
Для лінійних задач $U_0(\kappa) = U^{\text{доп}}(M)$.

Тоді отримаємо формулу Клапейрона.

$$2U(\kappa) = \int_a^b q w dx + \bar{M}'w|_{a_1}^{b_1} - \bar{M}w'|_{a_1}^{b_1} + M'\bar{w}|_{a_2}^{b_2} - M\bar{w}'|_{a_2}^{b_2}, \quad (5.13)$$

де робота зовнішніх сил на границях записана з урахуванням граничних умов

$$M, M'|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_1}^{b_1}; \quad w, w'|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}^{b_2}$$



Оскільки при отриманні залежностей (5.12), (5.13) використані умови рівноваги $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$; сумісності деформацій $\kappa = \frac{d^2 w}{dx^2}$, фізичної сторони задачі $M = EI\kappa$, а також наведені вище граничні умови, можна стверджувати, що функції w і M , які входять до них, є дійсними.

Тепер рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил набуває вигляду

$$-\int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_a^b q w dx + \bar{M}'w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M}w' \Big|_{a_1}^{b_1} + M\bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2} - M\bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

де надкреслені члени відповідають визначенням граничними умовами w і M .



Рис. 5.5

Урахуємо, що

$$\delta_w \left(-\int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx \right) = -\int_a^b M \frac{d^2 (\delta w)}{dx^2} dx = \int_a^b EI w'' \delta w'' dx = \delta \left(\frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx \right),$$

а підстановка першого члену “ w ” дає тотожність. Остаточно отримуємо таке варіаційне рівняння.

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}'w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M}w' \Big|_{a_1}^{b_1} \right] = 0.$$

Воно має назву варіаційного рівняння Лагранжа

$$\delta \Pi^L(w) = 0.$$

Відповідний функціонал має назву функціонала Лагранжа (залежить від функції w)

$$\delta \Pi^L(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}'w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}w' \Big|_{a_1}^{b_1}$$

і має такі додаткові умови: граничні умови

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

рівняння сумісності деформацій

$$M = EI\kappa; \quad \kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Урахуємо, що

$$\delta_M \left(\int_a^b M \kappa dx \right) = \delta \left(\int_a^b \frac{M}{EI} \delta M dx \right) = \delta \left(\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx \right),$$

а підстановка першого члену M дає тотожність. Остаточно отримуємо таке варіаційне рівняння.

$$\delta \left[-\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} \right] = 0.$$

Воно має назву варіаційного рівняння Кастильєно

$$\delta \Pi^K(M) = 0.$$

Відповідний функціонал має назву функціонала Кастильєно (залежить від функції M)

$$\delta \Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Причому має такі передні умови і границі умови

$$M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Рівняння рівноваги

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

Приклади отримання варіаційних рівнянь.

Функціонал Лагранжа:

$$\Pi^{\Pi}(w) = \delta \left[\frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + w' \bar{M} \Big|_{a_1}^{b_1} \right] = 0,$$

при додаткових умовах $M = EI\kappa$, $\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$, $w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}$,

де \bar{M} ; \bar{M}' - зосереджені зусилля на кінцях a_1 і b_1 .

Оскільки функціонал Лагранжа залежить від другої похідної отримуємо

$$\delta \Pi^{\Pi}(w) = 0, \quad \nu[w(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, w, w', w'') dx \quad \delta \nu[w(x)] = 0,$$

$$\left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) \delta w \Big|_{x_0}^{x_1} + F_{w''} \delta w' \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \delta w dx = 0,$$

$$F = \frac{1}{2} EI w'' - qw; \quad F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -q; \quad F_{w'} = \frac{\partial F}{\partial w'} = 0; \quad F_{w''} = \frac{\partial F}{\partial w''} = EI w'';$$

$$\frac{d}{dx} (EI w'') = EI w'''; \quad M = -EI w''; \quad M' = Q = -EI w''.$$

Тоді варіаційне рівняння для функціонала Лагранжа має вигляд

$$\Pi^{\Pi}(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 - \int_a^b q w dx,$$

$$M'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1} - M\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b (EIw^{IV} - q)\delta w dx = 0.$$

При $M, M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1} \neq 0$.

У загальному випадку

$$(M' - \bar{M}')\delta w\Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M})\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b (EIw^{IV} - q)\delta w dx = 0.$$

Розглянемо функціонал Кастільяно

$$\delta \Pi^K(M) = - \int_a^b \kappa \delta M dx + \int_a^b \delta q w dx - w \delta \bar{M}'\Big|_{a_2}^{b_2} - w' \delta M\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx - \int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx + \bar{w} M'\Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' M\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Будемо вважати для спрощення

$$\bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2} = 0,$$

$$F_M = \frac{\partial F}{\partial M}; \quad F_{M'} = \frac{\partial F}{\partial M'}; \quad F_{M''} = \frac{\partial F}{\partial M''}; \quad F(M) = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} - \frac{d^2 M}{dx^2} w;$$

$$F_{M'} = 0; \quad F_{M''} = -w; \quad F_M = -\frac{M}{EI}; \quad \frac{d^2}{dx^2} F_{M''} = \frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$w' \delta M\Big|_a^b - w \delta M'\Big|_a^b + \int_a^b \left(-\frac{M}{EI} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0,$$

$$w \delta M'\Big|_a^b - w' \delta M\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0.$$

Варіаційне рівняння для функціонала Кастільяно

$$w_b \delta M'_b - w_a \delta M'_a - w'_b \delta M_b + w'_a \delta M_a + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0,$$

у випадку, коли $w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2} \neq 0$.

У загальному випадку

$$(w - \bar{w}) \delta M'\Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M\Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta w dx = 0,$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$\delta w(\delta w')$ – змінюється переміщення (принцип Лагранжа); $\delta M(\delta M')$ – змінюється зусилля (принцип Кастільяно).

Зазначимо, що наведені варіаційні рівняння Лагранжа і Кастільяно можуть бути отримані й безпосередньою підстановкою у відповідні залежності величин $w + \delta w$ і $M + \delta M$.

Наприклад підставивши $w + \delta w$, отримаємо вираз, який залежить від першої варіації δw

$$-\int_a^b M \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - \int_a^b q \delta w - \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Перший інтеграл за формулою Гріна дорівнює

$$-\int_a^b M \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx = -\int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} \delta w dx + M' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - M \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1},$$

ураховуючи, що $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ і $\frac{d^2 M}{dx^2} = -EI w^{IV}$, остаточно одержимо

$$(M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b (EI w^{IV} - q) \delta w dx = 0,$$

що являє собою розгорнутий вигляд варіаційного рівняння Лагранжа $\delta \Pi^I(w) = 0$.

Аналогічно підставляючи $M + \delta M$, отримаємо вираз, який залежить від першої варіації δM

$$-\int_a^b \kappa \delta M dx + \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \frac{d^2 \delta M}{dx^2} w dx = 0.$$

Перший інтеграл:

$$-\int_a^b \kappa \delta M dx = -\int_a^b \frac{M}{EI} \delta M dx.$$

Другий інтеграл за формулою Гріна дорівнює:

$$-\int_a^b \frac{d^2 \delta M}{dx^2} w dx = -w \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + w' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \delta M \frac{d^2 w}{dx^2} dx$$

і остаточно одержимо

$$-\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (-w + \bar{w}) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' + \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0;$$

або

$$(w - \bar{w}) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0$$

що являє собою розгорнутий вигляд варіаційного рівняння Кастильєно $\delta\Pi^K(M) = 0$.

5.6.3. Перетворення, які базуються на лемі Дю-Буа-Реймонда

Зазначимо, що співвідношення $Q = \frac{dM}{dx}$ може бути також отримане з умови мінімуму функціонала $\delta\Pi_1(w)$, якщо скористатися рівнянням

$$\delta\Pi_1(w) = \int_a^b (F_w \delta w + F_{w'} \delta w') dx + F_{w''} \delta w \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{w''} \delta w' dx,$$

а також, перетворенням, яке базується на лемі Дю-Буа-Реймонда.

Позначимо

$$\int_0^x \frac{\partial F}{\partial w} dx = Q^*, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{dQ^*}{dx} = -q, \quad \delta\Pi_1'(w) = \int_a^b (F_w \delta w + F_{w'} \delta w') dx.$$

$$\delta\Pi_1^1(w) = \int_a^b \left[\frac{dQ^*}{dx} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' \right] dx.$$

Після інтегрування частинами отримаємо

$$\int_a^b \frac{dQ^*}{dx} \delta w dx = Q_x^* \delta w \Big|_a^b + \int_a^b \left[-Q^* + \frac{\partial F}{\partial w'} \right] \delta w' dx.$$

$$\delta\Pi_1(w) = Q_x^* \delta w \Big|_a^b - M \delta w' \Big|_a^b + \int_a^b \left[-Q^* + \frac{\partial F}{\partial w'} \right] \delta w' dx + \int_a^b \frac{dM}{dx} \delta w' dx.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial F}{\partial w'} = 0$, одержимо $\frac{dM}{dx} = Q^* + C$, де константа C являє собою реакцію на кінці, тобто $Q = Q^* + C$ і $Q = \frac{dM}{dx}$.

Принцип Кастильєно

Сформульований принцип Кастильєно

$$\delta\Pi_2(M) = 0,$$

$$\Pi_2(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \in a, b \quad M, \bar{M}',$$

якщо скористатись формулою Гріна, може бути представлений у вигляді

$$\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (w - \bar{w}) \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) можна отримати із мінімуму функціонала.

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\delta\Pi_2(M) = \left(F_{M'} - \frac{d}{dx} F_{M''} \right) \delta M \Big|_a^b + F_{M''} \delta M' \Big|_a^b + \int_a^b \left(F_M - \frac{d}{dx} F_{M'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{M''} \right) \delta M dx = 0,$$

якщо функціонал $\Pi_2(M)$ представити у вигляді

$$\Pi_2(M) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} M \right) dx + (w - \bar{w}) \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2} M, \quad F_M = \frac{M}{EI} + \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad F_{M'} = 0, \quad F_{M''} = 0.$$

Аналогічно тому, як це було зроблено для функціонала Лагранжа, із умови мінімуму функціонала Кастільяно можна отримати співвідношення $\varphi = \frac{dw}{dx}$, якщо скористатися залежністю.

$$\int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} M dx = \int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} w dx - w M \Big|_a^b + w' M \Big|_a^b$$

і відповідно виразити $F = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} + \frac{d^2 M}{dx^2} w$, а також застосувати рівняння

$$\Pi_2(M) = \int_a^b (F_M \delta M + F_{M'} \delta M') dx + F_{M''} \delta M' \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{M''} \delta M dx.$$

Тоді, згідно з перетворенням, яке будується на лемі Дю-Буа-Реймонда

$$\int_0^L \frac{\partial F}{\partial M} dx = -\varphi^*, \quad \frac{\partial F}{\partial M} = -\frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{M}{EF},$$

$$\delta\Pi_2(M) = \int_a^b \left[-\frac{d\varphi^*}{dx} \delta M + \frac{\partial F}{\partial M'} \delta M' \right] dx.$$

Після інтегрування частинами

$$-\int_a^b \frac{d\varphi^*}{dx} \delta M dx = -\varphi^* \delta M \Big|_a^b + \int_a^b \left[\varphi^* + \frac{\partial F}{\partial M'} \right] \delta M' dx,$$

$$\delta\Pi_2(M) = \varphi^* \delta M \Big|_a^b + w \delta M' \Big|_a^b + \int_a^b \left[\varphi_x^* + \frac{\partial F}{\partial M''} \right] \delta M' dx - \int_a^b \frac{dw}{dx} \delta M' dx.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial F}{\partial M'} = 0$, одержимо $\frac{dw}{dx} = \varphi^* + C$, де константа C являє собою кут повороту на кінці, тобто

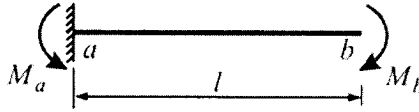
$$\varphi = \varphi^* + C, \quad \varphi = \frac{dw}{dx}.$$

5.7. Приклади реалізації варіаційних принципів

5.7.1. Функціонали Лагранжа, Кастільяно, Рейснера для однопрогонових балок

Розглянемо приклади реалізації варіаційних принципів Лагранжа, Кастільяно, Рейснера.

Приклад 5.3.



Пряма задача
(функціонал Лагранжа)

$$\Pi^{\text{Л}}(w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx - M_b w'_b,$$

$$w = a_1 x^2, \quad w' = 2a_1 x,$$

$$w'_b = 2a_1 l, \quad w'' = 2a_1$$

$$\Pi^{\text{Л}}(a_1) = \frac{EI}{2} 4a_1^2 l - M_b 2a_1 l = 0$$

$$\frac{d\Pi^{\text{Л}}(a_1)}{da_1} = 4EI a_1 l - 2M_b l = 0$$

$$a_1 = \frac{M_b}{2EI}, \quad w = \frac{M_b x^2}{2EI}$$

$$\frac{d^2\Pi^{\text{Л}}(a_1)}{da_1^2} = 4EI l > 0$$

$$\Pi^{\text{Л}} \rightarrow \min$$

$$\Pi_{\min}^{\text{Л}} = 2EI \frac{M_b^2}{4(EI)^2} - \frac{2M_b^2 l}{2EI} = -\frac{M_b^2 l}{2EI}.$$

Двоїста задача
(функціонал Кастільяно)

$$\Pi^{\text{К}} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx,$$

$$x=0, \quad M = -M_b \quad x=l, \quad M = -M_b$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0, \quad M = \text{const}$$

$$\Pi^{\text{К}}(M, \mu) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \mu(M + M_b)$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}}{dM} = -\frac{Ml}{EI} + \mu = 0, \quad \mu = -\frac{M_b l}{EI}$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}}{d\mu} = M + M_b = 0, \quad M = -M_b$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{К}} &= -\frac{1}{2} \frac{M^2 l}{EI} - \frac{M_b l}{EI} (M + M_b) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{M^2 l}{EI} - \frac{M_b l}{EI} M - \frac{M_b^2 l}{EI} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\Pi^{\text{К}}}{dM^2} = -\frac{l}{EI} < 0 \quad \Pi^{\text{К}} \rightarrow \max$$

$$M = -M_b, \quad \Pi^{\text{К}} = -\frac{1}{2} \frac{M_b^2 l}{EI}$$

$$M = 0, \quad M = -2M_b, \quad \Pi^{\text{К}} = -\frac{M_b^2 l}{EI}.$$

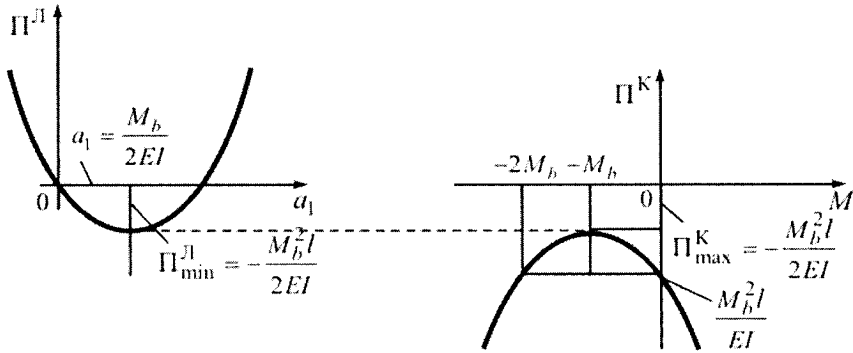


Рис. 5.6

Реалізація першої форми функціонала Рейснера для цієї задачі дає:

$$\Pi_1^P(M, w) = - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} - \bar{M}_b w' \Big|_a^{b_1}$$

$$w = ax^2, \quad w' = 2ax, \quad w'' = 2a.$$

$$\Pi_1^P = -2Mal - \frac{M^2 l}{2EI} - \bar{M}_b 2al = -2al(M + \bar{M}_b) - \frac{M^2 l}{2EI},$$

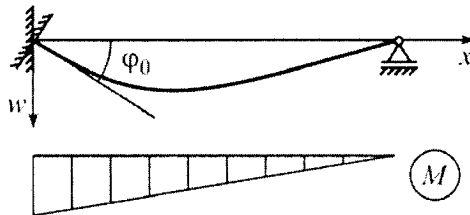
$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial a} = -2l(M + \bar{M}_b) = 0, \quad M = -\bar{M}_b,$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial M} = -2al - \frac{Ml}{EI} = 0, \quad a = -\frac{M}{2EI} = \frac{\bar{M}_b}{2EI},$$

$$A = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial M^2} = -\frac{l}{EI} < 0, \quad B = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial M \partial a} = -2l < 0, \quad C = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial a^2} = 0.$$

Звідки $AC - B^2 < 0$ і точка стаціонарності функціонала Π_1^P не є максимумом, або мінімумом, а являє собою вироджену сідловидну точку.

Приклад 5.4.



Пряма задача
(функціонал Лагранжа)

Граничні умови

$$x = 0, \quad w = 0, \quad w' = \varphi_0$$

$$x = l, \quad w = 0$$

Двоїста задача
(функціонал Кастільяно)

$$M = a_0 + a_1 x, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = 0$$

$$w = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

$$w' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, \quad w'' = 2a_2 + 6a_3x.$$

$$w'|_{x=0} = \varphi_0, \quad a_1 = \varphi_0$$

$$w'|_{x=l} = \varphi_0l + a_2l^2 + a_3l^3 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{\varphi_0}{l^2} - \frac{a_2}{l}$$

$$w'' = 2\left(a_2 - \frac{3\varphi_0}{l^2}x + \frac{3a_2}{l}x\right)$$

$$\Pi^{\text{Л}} = \frac{1}{2} \int_0^l 4EI \left(a_2 - \frac{3\varphi_0}{l^2}x + \frac{3a_2}{l}x\right)^2 dx =$$

$$= 2EI \left(a_2^2l + 3\varphi_0a_2 + \frac{3\varphi_0^2}{l}\right),$$

$$\frac{d\Pi^{\text{Л}}}{da_2} = 2EI(2a_2l + 3\varphi_0) = 0, \quad a_2 = -\frac{3\varphi_0}{2l},$$

$$\frac{d^2\Pi^{\text{Л}}}{da_2^2} = 4EI l > 0, \quad \Pi^{\text{Л}} \rightarrow \min$$

$$a_2 = 0, \quad \Pi^{\text{Л}} = \frac{6\varphi_0^2 EI}{l},$$

$$a_2 = -\frac{3\varphi_0}{l}, \quad \Pi^{\text{Л}} = \frac{6\varphi_0^2 EI}{l}.$$

$$x = 0, \quad M = a_0$$

$$x = l, \quad M = 0, \quad a_1 = -\frac{a_0}{l}$$

$$M = a_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\Pi^{\text{К}} = -\frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx + a_0\varphi_0 =$$

$$= -\frac{1}{2EI} \int_0^l a_0^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx + a_0\varphi_0 =$$

$$= -\frac{a_0^2}{2EI} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) dx + a_0\varphi_0 = -\frac{a_0^2 l}{6EI} + a_0\varphi_0$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}}{da_0} = -\frac{a_0 l}{3EI} + \varphi_0 = 0, \quad a_0 = \frac{3EI\varphi_0}{l},$$

$$\frac{d^2\Pi^{\text{К}}}{da_0^2} = -\frac{l}{3EI} < 0,$$

$$\Pi^{\text{К}} \rightarrow \max$$

$$\Pi_{\max}^{\text{К}} = \frac{3\varphi_0^2 EI}{2l}.$$

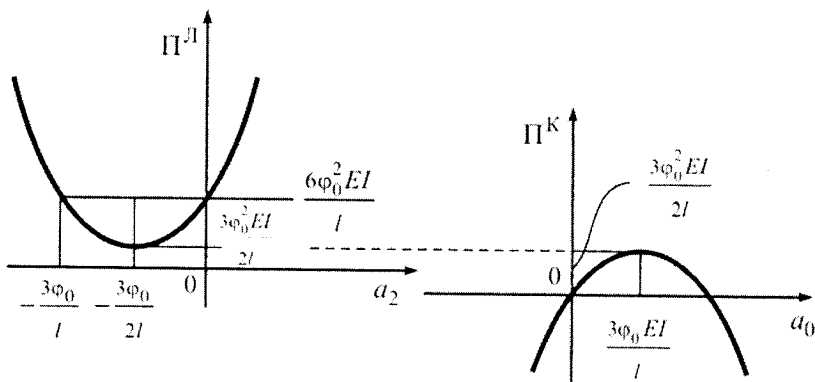
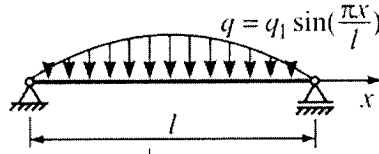


Рис. 5.7

Приклад 5.5.



Пряма задача
(функціонал Лагранжа)

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w' = \frac{f_1 \pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$w'' = -f_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$w''' = -f_1 \frac{\pi^3}{l^3} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad w^{IV} = f_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

$$EI w^{IV} = q,$$

$$EI \frac{f_1 \pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} = q = q_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad f_1 = \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI}.$$

$$\Pi^I = \frac{1}{2} EI \int_0^l (w'')^2 dx - \int_0^l q w dx, \quad \delta \Pi = 0.$$

$$u = \frac{1}{2} EI f_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EI \pi^4}{4l^3} f_1^2,$$

$$A = \int_0^l q_1 f_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{q_1 f_1 l}{2},$$

$$\Pi = \frac{EI \pi^4}{4l^3} f_1^2 - \frac{q_1 l}{2} f_1,$$

$$\frac{d\Pi}{df_1} = 0, \quad f_1 = \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI},$$

$$\frac{d^2 \Pi}{df_1^2} = \frac{EI \pi^4}{2l^3} > 0,$$

Двоїста задача
(функціонал Кастільяно)

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q; \quad M|_{x=0} = 0; \quad M|_{x=l} = 0.$$

$$\Pi(M, \lambda) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^l \lambda \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx.$$

Рівняння Ейлера

$$F_M - \frac{d}{dx} F_{M'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{M''};$$

$$-\frac{M}{EI} + \frac{d^2 \lambda}{dx^2} = 0; \quad \lambda = -w; \quad q = q_1 \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$M = M_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \lambda = \lambda_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\frac{d^2 \lambda}{dx^2} = \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \right) \lambda_1 \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\Pi(M, \lambda) = -\frac{1}{2EI} M_1^2 \frac{l}{2} - \frac{\lambda_1 M_1 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2} + \lambda_1 q_1 \frac{l}{2},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_1} = -\frac{M_1 \pi^2}{2l} + \frac{q_1 l}{2} = 0, \quad M_1 = \frac{q_1 l^2}{\pi^2}, \quad \lambda = -w,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_1} = -\frac{M_1 l}{2EI} + \frac{\lambda_1 \pi^2}{2l} = 0,$$

$$\lambda_1 = -\frac{M_1 l^2}{\pi^2 EI} = -\frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI},$$

$$\frac{d^2 \Pi}{dM_1^2} = -\frac{\pi^2}{2l} < 0$$

$$\Pi_{\min}^L = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \left(\frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI} \right)^2 - \frac{q_1 l}{2} \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI} = -\frac{1}{4} \frac{q_1^2 l^5}{\pi^4 EI}.$$

$$\Pi_{\max}^K = -\frac{l}{EI} \frac{q_1^2 l^4}{\pi^4} + \frac{q_1^2 l^5}{2\pi^4 EI} - \frac{q_1^2 l^5}{2\pi^4 EI} = -\frac{1}{4} \frac{q_1^2 l^5}{\pi^4 EI}$$

$$\Pi_{\min}^L = \Pi_{\max}^K.$$

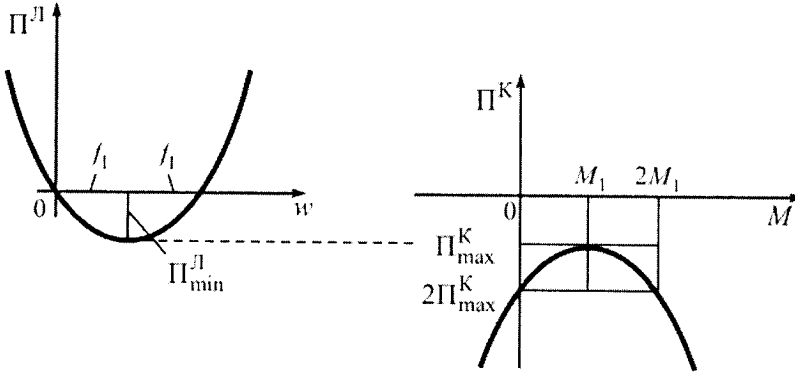


Рис. 5.8

Функціонал Рейснера для цієї задачі дає

$$\Pi_1^P(M, w) = \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^l w \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx,$$

$$M = M_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad q = q_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$w_a = 0 \quad w_b = 0,$$

$$M_a = 0 \quad M_b = 0,$$

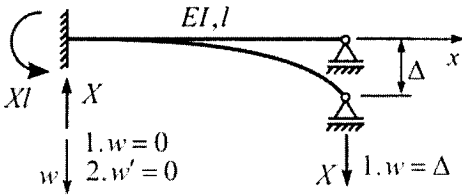
$$\Pi_1^P(M, w) = -\frac{1}{2EI} M_1^2 \frac{l}{2} - \left(\frac{\pi^2}{l^2} \right) M_1 f_1 \frac{l}{2} - q_1 f_1 \frac{l}{2},$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial M_1} = -\frac{M_1 l}{2EI} + \frac{\pi^2}{2l} f_1 = 0, \quad f_1 = \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI},$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P}{\partial f_1} = \frac{\pi^2 M_1}{2l} - \frac{q_1 l}{2} = 0, \quad M_1 = \frac{q_1 l^2}{\pi^2}.$$

Приклад 5.6.

Пряма задача
(функціонал Лагранжа)



$$\Pi^{\text{Л}}(w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx$$

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3; EI w^{IV} = q.$$

$$1. w|_{x=0} = 0; a_0 = 0$$

$$2. w' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2; w'|_{x=0} = 0; a_1 = 0$$

$$3. w|_{x=l} = \Delta; a_2 l^2 + a_3 l^3 = \Delta; a_2 = \frac{\Delta}{l^2} - a_3 l;$$

$$w'' = 2a_2 x + 6a_3 x = \frac{2\Delta}{l^2} - 2a_3 l + 6a_3 x;$$

$$\Pi^{\text{Л}} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{2\Delta}{l^2} - 2a_3 l + 6a_3 x \right)^2 dx$$

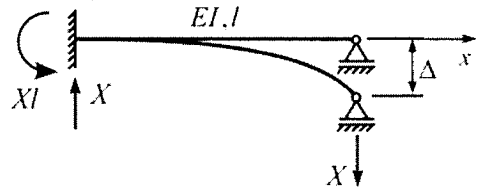
$$\frac{d\Pi^{\text{Л}}}{da_3} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{2\Delta}{l^2} - 2a_3 l + 6a_3 x \right) \times (-2l + 6x) dx = 0$$

$$a_3 = -\frac{\Delta}{2l^3}$$

$$a_2 = \frac{\Delta}{l^2} + \frac{\Delta}{2l^2} = \frac{3}{2} \frac{\Delta}{l^2}$$

$$w = \frac{3}{2} \frac{\Delta}{l^2} x^2 - \frac{\Delta}{2l^3} x^3 = \frac{\Delta x^2}{2l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right)$$

Двоїста задача
(функціонал Кастільяно)



$$\Pi^{\text{К}}(M) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + X\Delta$$

$$M = -Xl + Xx = X(x-l); \frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Граничні умови

$$M|_{x=0} = -Xl; M'|_{x=0} = X$$

$$\Pi^{\text{К}}(X) = -\frac{1}{2EI} \int_0^l X^2 (x-l)^2 dx + X\Delta = -\frac{X^2 l^3}{6EI} + X\Delta;$$

Інтегрування проведено способом заміни змінної

$$\int_0^l (x-l)^2 dx = \int_{-l}^0 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-l}^0 = \frac{l^3}{3}$$

$$x-l = t; dx = dt$$

$$\frac{d\Pi^{\text{К}}(X)}{dX} = -\frac{l^3}{3EI} X + \Delta = 0;$$

$$X = -\frac{3EI\Delta}{l^3};$$

$$w' = \frac{3\Delta}{l^2}x - \frac{3\Delta}{l^3}x^2,$$

$$w'' = \frac{3\Delta}{l^2} - \frac{3\Delta}{l^3}x = \frac{3\Delta}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$X = Q|_{x=l}; \quad Q = M'';$$

$$M = -EIw''; \quad Q = -EIw'''$$

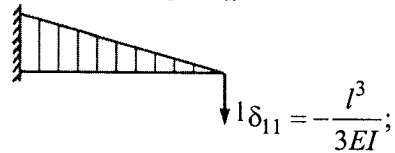
$$w''' = 6a_3 = -\frac{3\Delta}{l^3}; \quad Q = X = \frac{3EI\Delta}{l^3}$$

$$k_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}; \quad k_{11} = \frac{3EI}{l^3}; \quad k_{11}\Delta = X$$

$$k_{11}\delta_{11} = 1$$

$$\Pi_{\min}^{\text{II}} = \frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{3\Delta}{l^3}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{3}{2} \frac{EI\Delta^2}{l^3}.$$

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$



$$\frac{d^2\Pi^K(X)}{dX^2} = -\frac{l^3}{3EI} < 0 \quad \text{max.}$$

$$\Pi_{\max}^{\text{K}} = \frac{l^3}{6EI} \frac{9(EI)^2 \Delta^2}{l^6} + \frac{3EI\Delta^2}{l^3} = \frac{3}{2} \frac{EI\Delta^2}{l^3}.$$

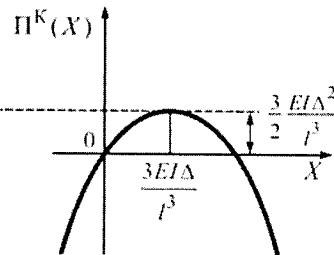
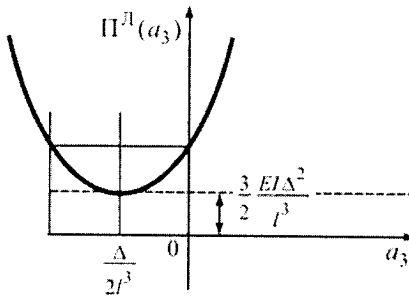


Рис. 5.9

$$U(\Delta) = \frac{3}{2} \frac{EI\Delta^2}{l^3}.$$

Теорема Лагранжа

$$\frac{dU(\Delta)}{d\Delta} = \frac{3EI\Delta}{l^3} = X$$

$$U^{\text{доп}}(X) = \frac{X^2 l^3}{6EI}.$$

Теорема Кастільяно

$$\frac{\partial U^{\text{доп}}(X)}{\partial X} = \frac{Xl^3}{3EI} = \Delta$$

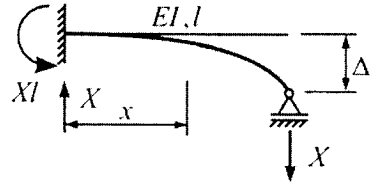
5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

Функціонал Рейснера для цієї задачі

$$\Pi_1^P(w, M) = - \int_0^l M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx - \int_a^b q w dx -$$

$$- \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$M = X(x-l),$$



1. $q = 0$; $w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $x = 0$;

$\bar{M}' = \bar{M} = 0$ – задані зовні моменти, $\bar{w}, \bar{w}' = 0$ – задані зовні, $M', M \neq 0$, тому $w, w' = 0$.

Звідки

$$a_0 = 0, a_1 = 0,$$

$$w = a_2 x^2 + a_3 x^3, w' = 2a_2 x + 3a_3 x^2, w'' = 2a_2 + 6a_3 x,$$

$$x = l: \bar{M}' = \bar{M} = 0, \bar{w} = \Delta, \bar{w}' = 0, M = 0,$$

$$2a_2 + 6a_3 l = 0, a_2 = -3a_3 l,$$

$$w'' = -6a_3 l + 6a_3 x = 6a_3 (x - l),$$

$$w = -3a_3 l x^2 + a_3 x^3,$$

$$w \Big|_{x=l} = -2a_3 l^3,$$

$$\Pi_1^P(w, M) = - \int_0^l M 6a_3 (x-l) dx - \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx + M'_l (\Delta + 2a_3 l^3).$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P(w, M)}{\partial M'_l} = \Delta + 2a_3 l^3, a_3 = -\frac{\Delta}{2l^3}.$$

$$\frac{\partial \Pi_1^P(w, M)}{\partial M} = - \int_0^l 6a_3 (x-l) dx - \frac{1}{EI} \int_0^l M dx = 0.$$

$$M = X(x-l), - \int_0^l 6a_3 (x-l) dx - \frac{1}{EI} \int_0^l X(x-l) dx = 0,$$

$$X = -6a_3 EI = \frac{3EI\Delta}{l^3},$$

$$\Pi_1^P(w, M) = -\frac{X^2 l^3}{6EI} + 2a_3 X l^3,$$

$$A = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial X^2} = -\frac{l^3}{3EI} < 0, B = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial a_3 \partial X} = 2l^3 < 0, C = \frac{\partial^2 \Pi_1^P}{\partial a_3^2} = 0,$$

$$AC - B^2 < 0$$

і точка стаціонарності являє собою вироджену сідловидну точку.

5.7.2. Приклад нерозрізної балки. Побудова поверхонь функціоналів

Розглянемо нерозрізну балку (рис. 5.10). Додатні напрямки зображено на рис. 5.11.

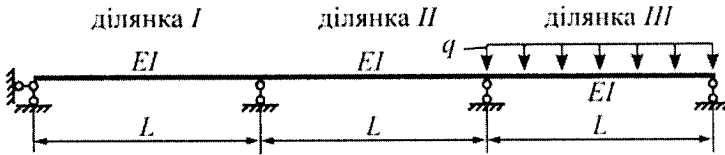


Рис. 5.10

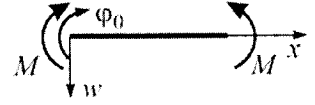


Рис. 5.11

Пряма задача (принцип Лагранжа)

Розглянемо ділянку I (рис.5.12)

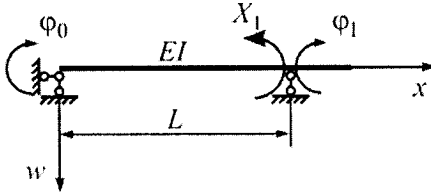


Рис. 5.12

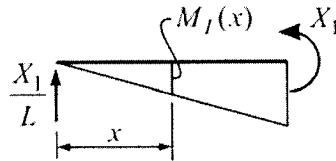


Рис. 5.13

$$w_I(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad \frac{dw_I(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, \\ \frac{d^2w_I(x)}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x. \quad (5.15)$$

З умов

$$w_I(0) = 0, \quad \frac{dw_I(0)}{dx} = \varphi_0, \quad \frac{d^2w_I(0)}{dx^2} = 0$$

отримаємо

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \varphi_0, \quad a_2 = 0$$

А з умов

$$w_I(L) = \varphi_0L + a_3L^3 = 0, \quad \frac{dw_I(L)}{dx} = -a_3L^2 + 3a_3L^2 = \varphi_1$$

отримаємо

$$\varphi_0 = -a_3L^2, \quad a_3 = \frac{\varphi_1}{2L^2}, \quad \varphi_0 = -\frac{\varphi_1}{2}.$$

Тоді

$$w_I(x) = -\frac{\varphi_1}{2}x + \frac{\varphi_1}{2L^2}x^3, \quad \frac{d^2w_I(x)}{dx^2} = \frac{3\varphi_1}{L^2}x.$$

Функціонал Лагранжа

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{I}}(\varphi_1) &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 w_I(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \bar{M} \delta \frac{dw_I(x)}{dx} \Big|_0^L = \\ &= \frac{3EI}{2L} (\varphi_1)^2 + [X_1 \varphi_1 - X_0 \varphi_0] = \frac{3EI}{2L} (\varphi_1)^2 + X_1 \varphi_1. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала Лагранжа

$$\frac{d\Pi^{\text{I}}(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{3EI}{L} \varphi_1 + X_1 = 0,$$

звідки

$$\varphi_1 = -\frac{L}{3EI} X_1. \quad (5.16)$$

Враховуючи, що $\frac{d^2\Pi^{\text{I}}(\varphi_1)}{d(\varphi_1)^2} = \frac{3EI}{L} > 0$, функціонал Лагранжа має мінімум у

точці $\varphi_1 = -\frac{L}{3EI} X_1$, який дорівнює

$$\Pi^{\text{I}}\left(-\frac{L}{3EI} X_1\right) = \frac{3EI}{2L} \left(-\frac{L}{3EI} X_1\right)^2 - \frac{L}{3EI} (X_1)^2 = -\frac{L}{6EI} (X_1)^2.$$

Розглянемо ділянку III (рис. 5.14). Загальні вирази для переміщень задаються рівняннями (5.15).

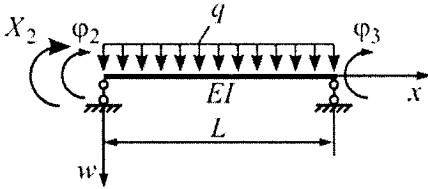


Рис. 5.14

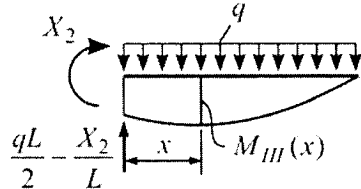


Рис. 5.15

З умов

$$w_{\text{III}}(0) = 0, \quad \frac{dw_{\text{III}}(0)}{dx} = \varphi_2$$

отримаємо

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \varphi_2,$$

а з умов

$$\begin{aligned} w_{\text{III}}(L) &= \varphi_2 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0, \\ \frac{d^2 w_{\text{III}}(L)}{dx^2} &= \frac{-2\varphi_2 - 2a_3 L^2}{L} + 6a_3 L = 0 \end{aligned}$$

отримаємо

$$a_2 = \frac{-\varphi_2 - a_3 L^2}{L}, \quad a_3 = \frac{\varphi_2}{2L^2}, \quad a_2 = -\frac{3\varphi_2}{2L}.$$

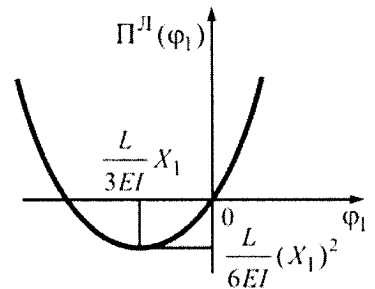


Рис. 5.16

Тоді

$$w_{III}(x) = \varphi_2 x - \frac{3\varphi_2}{2L} x^2 + \frac{\varphi_2}{2L^2} x^3, \quad \frac{d^2 w_{III}(x)}{dx^2} = -\frac{3\varphi_2}{L} + \frac{3\varphi_2}{L^2} x.$$

Функціонал Лагранжа

$$\begin{aligned} \Pi^I(\varphi_2) = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 w_{III}(x)}{dx^2} \right]^2 dx - \int_0^L q w_{III}(x) dx + \bar{M} \delta \frac{dw_{III}(x)}{dx} \Big|_0^L = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[-\frac{3\varphi_2}{L} + \frac{3\varphi_2}{L^2} x \right]^2 dx - \\ & - q \int_0^L \left(\varphi_2 x - \frac{3\varphi_2}{2L} x^2 + \frac{\varphi_2}{2L^2} x^3 \right) dx + [X_3 \varphi_3 - X_2 \varphi_2] = \frac{3EI}{2L} (\varphi_2)^2 - \frac{qL^2}{8} \varphi_2 - X_2 \varphi_2. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала Лагранжа

$$\frac{d\Pi^I(\varphi_2)}{d\varphi_2} = \frac{3EI}{L} \varphi_2 - \frac{qL^2}{8} - X_2 = 0,$$

звідки

$$\varphi_2 = \frac{L}{3EI} X_2 + \frac{qL^3}{24EI}. \quad (5.17)$$

Враховуючи,

що

$$\frac{d^2 \Pi^I(\varphi_2)}{d(\varphi_2)^2} = \frac{3EI}{L} > 0, \quad \text{функціонал}$$

Лагранжа має мінімум у точці

$$\varphi_2 = \frac{L}{3EI} X_2 + \frac{qL^3}{24EI}, \text{ який дорівнює}$$

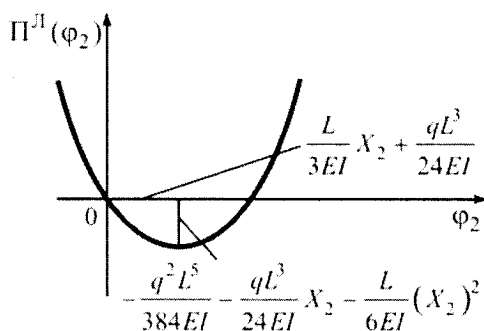


Рис. 5.17

$$\begin{aligned} \Pi^I \left(\frac{L}{3EI} X_2 + \frac{qL^3}{24EI} \right) = & \frac{3EI}{2L} \left(\frac{L}{3EI} X_2 + \frac{qL^3}{24EI} \right)^2 - \\ & - \left(\frac{qL^2}{8} + X_2 \right) \left(\frac{L}{3EI} X_2 + \frac{qL^3}{24EI} \right) = -\frac{q^2 L^5}{384 EI} - \frac{qL^3}{24 EI} X_2 - \frac{L}{6 EI} (X_2)^2. \end{aligned}$$

Розглянемо ділянку II (рис. 5.18). Загальні вирази для переміщень задаються рівняннями (5.15).

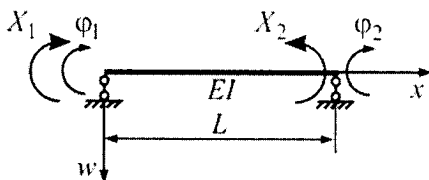


Рис. 5.18

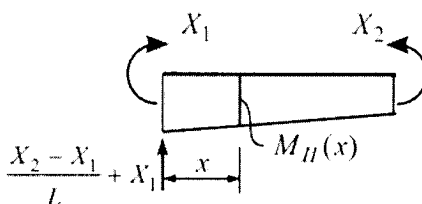


Рис. 5.19

З умов

$$w_{II}(0) = 0, \quad \frac{dw_{II}(0)}{dx} = \varphi_1$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

отримаємо

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \varphi_1.$$

А з умов

$$w_{II}(L) = \varphi_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0, \quad \frac{dw_{II}(L)}{dx} = a_1 - 2\varphi_1 - 2a_3 L^2 + 3a_3 x^2 = \varphi_2$$

отримаємо

$$a_2 = \frac{-\varphi_1 - a_3 L^2}{L}, \quad a_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{L^2}, \quad a_2 = \frac{-2\varphi_1 - \varphi_2}{L}$$

Тоді

$$w_{II}(x) = \varphi_1 x - \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{L} x^2 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{L^2} x^3,$$

$$\frac{d^2 w_{II}(x)}{dx^2} = -\frac{4\varphi_1 + 2\varphi_2}{L} + \frac{6\varphi_1 + 6\varphi_2}{L^2} x.$$

Функціонал Лагранжа

$$\begin{aligned} \Pi^{\Pi}(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 w_{II}(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \bar{M} \delta \frac{dw_{II}(x)}{dx} \Big|_0^L = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[-\frac{4\varphi_1 + 2\varphi_2}{L} + \frac{6\varphi_1 + 6\varphi_2}{L^2} x \right]^2 dx + [X_2 \varphi_2 - X_1 \varphi_1] = \\ &= \frac{2EI}{L} \left((\varphi_1)^2 + \varphi_1 \varphi_2 + (\varphi_2)^2 \right) + X_2 \varphi_2 - X_1 \varphi_1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Умова екстремуму функціонала Лагранжа

$$\frac{d\Pi^{\Pi}(\varphi_1, \varphi_2)}{d\varphi_1} = \frac{2EI}{L} (2\varphi_1 + \varphi_2) - X_1 = 0, \quad \frac{d\Pi^{\Pi}(\varphi_1, \varphi_2)}{d\varphi_2} = \frac{2EI}{L} (\varphi_1 + 2\varphi_2) + X_2 = 0$$

звідки

$$\varphi_1 = \frac{L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2, \quad \varphi_2 = -\frac{L}{6EI} X_1 - \frac{L}{3EI} X_2. \quad (5.19)$$

Значення функціонала Лагранжа

$$\Pi^{\Pi} \left(\frac{L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2, -\frac{L}{6EI} X_1 - \frac{L}{3EI} X_2 \right) = -\frac{L}{6EI} \left((X_1)^2 + X_1 X_2 + (X_2)^2 \right).$$

Для побудови поверхні використаємо ту ж саму методику, що і в попередньому випадку. За допомогою попереднього перетворення ми позбудемося члена, який містить добуток координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A = \frac{2EI}{L}, \quad 2B = \frac{2EI}{L}, \quad C = \frac{2EI}{L}, \quad 2D = -X_1, \quad 2E = X_2, \quad F = 0.$$

Повертаємо вісі координат на кут α , який задовольняє умові

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Використовуючи підстановку

$$\varphi_1 = \varphi'_1 \cos \alpha - \varphi'_2 \sin \alpha, \quad \varphi_2 = \varphi'_1 \sin \alpha + \varphi'_2 \cos \alpha,$$

перетворимо рівняння (5.16) до вигляду

$$\Pi^{\text{I}}(\varphi'_1, \varphi'_2) = \frac{3EI}{L}(\varphi'_1)^2 + \frac{EI}{L}(\varphi'_2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(X_2 - X_1)\varphi'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + X_2)\varphi'_2. \quad (5.20)$$

За допомогою завершального перетворення ми позбудемося членів, який містить перші ступені координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A' = \frac{3EI}{L}, \quad 2B' = 0, \quad C' = \frac{EI}{L}, \quad 2D' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_2 - X_1), \quad 2E' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + X_2), \quad F' = 0.$$

Переносимо початок координат в точку $(-\frac{D'}{A'}, -\frac{E'}{C'})$, тобто

$$\varphi'_1 = \bar{\varphi}_1 - \frac{D'}{A'}, \quad \varphi'_2 = \bar{\varphi}_2 - \frac{E'}{C'},$$

тоді рівняння (5.19) в площині (φ_1, φ_2) набере вигляду

$$\Pi^{\text{I}}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = \frac{3EI}{L}(\bar{\varphi}_1)^2 + \frac{EI}{L}(\bar{\varphi}_2)^2 - \frac{L}{6EI}((X_1)^2 + X_1X_2 + (X_2)^2) = 0,$$

або

$$\frac{(\bar{\varphi}_1)^2}{\frac{L^2((X_1)^2 + X_1X_2 + (X_2)^2)}{18E^2I^2}} + \frac{(\bar{\varphi}_2)^2}{\frac{L^2((X_1)^2 + X_1X_2 + (X_2)^2)}{6E^2I^2}} = 1. \quad (5.21)$$

Це еліпс з піввісями (рис. 5.20)

$$a = \frac{L}{EI\sqrt{18}} \sqrt{((X_1)^2 + X_1X_2 + (X_2)^2)}, \quad b = \frac{L}{EI\sqrt{6}} \sqrt{((X_1)^2 + X_1X_2 + (X_2)^2)}.$$

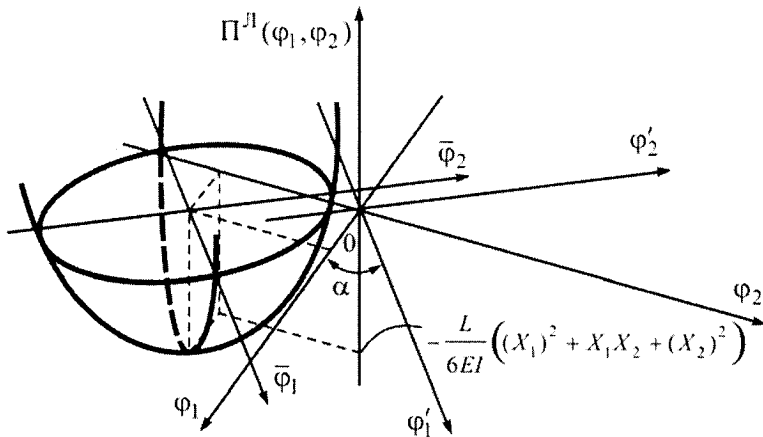


Рис. 5.20

Двоїста задача (принцип Кастільяно)

Розглянемо ділянку I (рис. 5.13)

Вираз для моменту

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$M_I(x) = \frac{X_1}{L} x.$$

Функціонал Кастільяно

$$\begin{aligned} \Pi^K(X_1) &= -\frac{1}{2EI} \int_0^L [M_I(x)]^2 dx - \bar{w}' \delta M_I(x) \Big|_0^L = \\ &= -\frac{1}{2EI} \int_0^L \left[\frac{X_1}{L} x \right]^2 dx - [\varphi_1 X_1 - \varphi_0 X_0] = -\frac{1}{2EI} \frac{(X_1)^2}{L^2} \frac{L^3}{3} - \varphi_1 X_1 = -\frac{L}{6EI} (X_1)^2 - \varphi_1 X_1. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала Кастільяно

$$\frac{d\Pi^K(X_1)}{dX_1} = -\frac{L}{3EI} X_1 - \varphi_1 = 0,$$

звідки

$$X_1 = -\frac{3EI}{L} \varphi_1. \quad (5.22)$$

Враховуючи, що $\frac{d^2\Pi^K(X_1)}{d(X_1)^2} = -\frac{L}{3EI} < 0$,

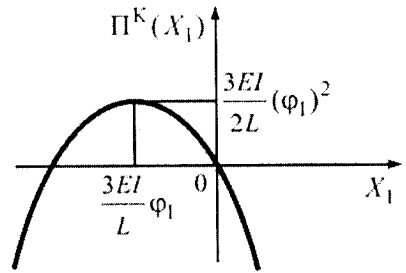


Рис. 5.21

функціонал Кастільяно має максимум у точці

$$X_1 = -\frac{3EI}{L} \varphi_1, \text{ який дорівнює}$$

$$\Pi^K\left(-\frac{3EI}{L} \varphi_1\right) = -\frac{L}{6EI} \left(-\frac{3EI}{L} \varphi_1\right)^2 + \frac{3EI}{L} (\varphi_1)^2 = \frac{3EI}{2L} (\varphi_1)^2.$$

Розглянемо ділянку III (рис. 5.14).

Вираз для моменту

$$M_{III}(x) = X_2 - \frac{X_2}{L} x + \frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2.$$

Функціонал Кастільяно

$$\begin{aligned} \Pi^K(X_2) &= -\frac{1}{2EI} \int_0^L [M_{III}(x)]^2 dx - \bar{w}' \delta M_{III}(x) \Big|_0^L = -\frac{1}{2EI} \int_0^L \left[X_2 - \frac{X_2}{L} x + \frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right]^2 dx - \\ &- [\varphi_3 X_3 - \varphi_2 X_2] = -\frac{q^2 L^5}{240EI} - \frac{qL^3 X_2}{24EI} - \frac{L(X_2)^2}{6EI} + \varphi_2 X_2. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала Кастільяно

$$\frac{d\Pi^K(X_2)}{dX_2} = -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{LX_2}{3EI} + \varphi_2 = 0,$$

звідки

$$X_2 = \frac{3EI}{L} \varphi_2 - \frac{qL^2}{8}. \quad (5.23)$$

Враховуючи, що $\frac{d^2\Pi^K(X_2)}{d(X_2)^2} = -\frac{L}{3EI} < 0$,
 функціонал Кастільяно має максимум у
 точці $X_2 = \frac{3EI}{L}\varphi_2 - \frac{qL^2}{8}$, який
 дорівнює

$$\Pi^K\left(\frac{3EI}{L}\varphi_2 - \frac{qL^2}{8}\right) =$$

$$= \frac{3EI}{2L}(\varphi_2)^2 - \frac{qL^2}{8}\varphi_2 - \frac{q^2L^5}{640EI}.$$

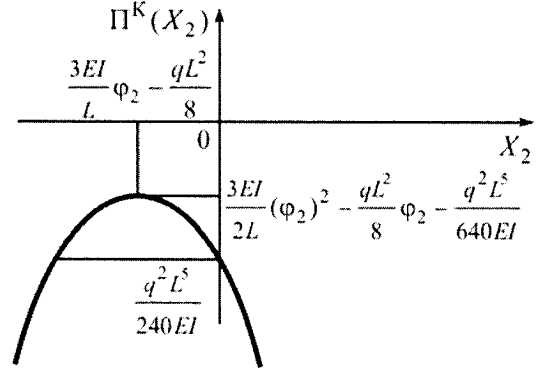


Рис. 5.22

Розглянемо ділянку II (рис. 5.18).
 Вираз для моменту

$$M_{II}(x) = \frac{X_2 - X_1}{L}x + X_1.$$

Функціонал Кастільяно

$$\Pi^K(X_1, X_2) = -\frac{1}{2EI} \int_0^L [M_{II}(x)]^2 dx - \bar{w} \delta M_{II}(x)|_0^L = -\frac{1}{2EI} \int_0^L \left[\frac{X_2 - X_1}{L}x + X_1 \right]^2 dx -$$

$$-[\varphi_2 X_2 - \varphi_1 X_1] = -\frac{L}{6EI} \left((X_1)^2 + X_1 X_2 + (X_2)^2 \right) - \varphi_2 X_2 + \varphi_1 X_1. \quad (5.24)$$

Умова екстремуму функціонала Кастільяно

$$\frac{d\Pi^K(X_1, X_2)}{dX_1} = -\frac{L}{6EI} (2X_1 + X_2) + \varphi_1 = 0,$$

$$\frac{d\Pi^K(X_1, X_2)}{dX_2} = -\frac{L}{6EI} (X_1 + 2X_2) - \varphi_2 = 0,$$

звідки

$$X_1 = \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2, \quad X_2 = -\frac{2EI}{L}\varphi_1 - \frac{4EI}{L}\varphi_2. \quad (5.25)$$

Значення функціонала Кастільяно

$$\Pi^K\left(\frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 - \frac{2EI}{L}\varphi_1 - \frac{4EI}{L}\varphi_2\right) = \frac{2EI}{L} \left((\varphi_1)^2 + \varphi_1 \varphi_2 + (\varphi_2)^2 \right).$$

Для побудови поверхні використаємо методику з [1]. За допомогою попереднього перетворення ми побудуємося члена, який містить добуток координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A = -\frac{L}{6EI}, \quad 2B = -\frac{L}{6EI}, \quad C = -\frac{L}{6EI}, \quad 2D = \varphi_1, \quad 2E = -\varphi_2, \quad F = 0.$$

Повертаємо вісі координат на кут α , який задовольняє умові

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

Використовуючи підстановку

$$X_1 = X'_1 \cos \alpha - X'_2 \sin \alpha, \quad X_2 = X'_1 \sin \alpha + X'_2 \cos \alpha,$$

перетворимо рівняння (5.15) до вигляду

$$\Pi^K(X'_1, X'_2) = -\frac{L}{4EI}(X'_1)^2 - \frac{L}{12EI}(X'_2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)X'_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)X'_2. \quad (5.26)$$

За допомогою завершального перетворення ми позбудемося членів, який містить перші ступені координат. Коефіцієнти рівняння:

$$A' = -\frac{L}{4EI}, \quad 2B' = 0, \quad C' = -\frac{L}{12EI}, \quad 2D' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad 2E' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad F' = 0.$$

Переносимо початок координат в точку $\left(-\frac{D'}{A'}, -\frac{E'}{C'}\right)$, тобто

$$X'_1 = \bar{X}_1 - \frac{D'}{A'}, \quad X'_2 = \bar{X}_2 - \frac{E'}{C'},$$

тоді рівняння (5.26) в площині (X_1OX_2) набере вигляду

$$\Pi^K(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = -\frac{L}{4EI}(\bar{X}_1)^2 - \frac{L}{12EI}(\bar{X}_2)^2 + \frac{2EI}{L}((\varphi_1)^2 + \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_2)^2) = 0,$$

або

$$\frac{(\bar{X}_1)^2}{\frac{8E^2I^2((\varphi_1)^2 + \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_2)^2)}{L^2}} + \frac{(\bar{X}_2)^2}{\frac{24E^2I^2((\varphi_1)^2 + \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_2)^2)}{L^2}} = 1. \quad (5.27)$$

Це еліпс із піввісьями (рис. 5.23)

$$a = \frac{EI}{L} \sqrt{8((\varphi_1)^2 + \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_2)^2)}, \quad b = \frac{EI}{L} \sqrt{24((\varphi_1)^2 + \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_2)^2)}.$$

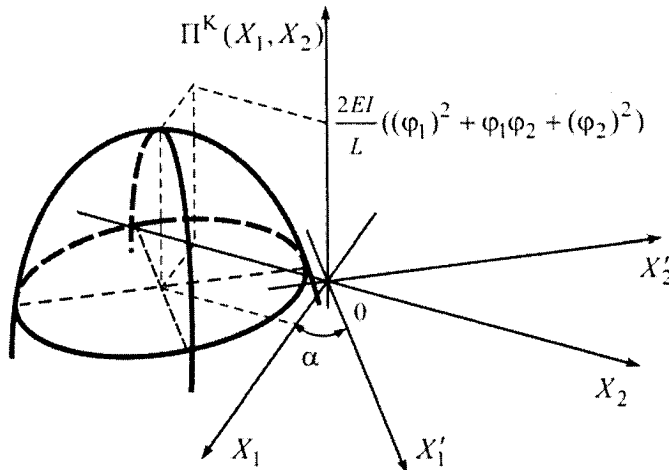


Рис. 5.23

Зворотність функціоналів Лагранжа і Кастільяно

І ділянка Порівнюючи вирази (5.16) і (5.22) бачимо, що з виразу (5.16)

отримується вираз (5.22) і навпаки: з (5.22) – (5.16).

III ділянка Порівнюючи вирази (5.17) і (5.23) бачимо, що визначивши φ_2 з виразу (5.17) можна отримати вираз (5.23) і навпаки.

II ділянка Порівнюючи вирази (5.25) і (5.19), які в матричному записі мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix},$$

бачимо, що

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \frac{L}{3EI} - \frac{2EI}{L} \frac{L}{6EI} & \frac{4EI}{L} \frac{L}{6EI} - \frac{2EI}{L} \frac{L}{3EI} \\ -\frac{2EI}{L} \frac{L}{3EI} + \frac{4EI}{L} \frac{L}{6EI} & -\frac{2EI}{L} \frac{L}{6EI} + \frac{4EI}{L} \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Усі шойно одержані матриці податливості і жорсткості мають суттєвий недолік – вони не є симетричними. Це пояснюється тим, що зосереджені моменти і кути повороту на правих кінцях однопрогонових балок мають протилежний напрямок. Так, для середнього прогону ці напрями зображені на рис. 5.14. Зведемо ці напрями до деякого спільного, взявши за базовий напрям дії зосереджених моментів (рис. 5.24).

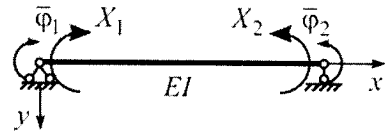


Рис. 5.24

Зв'язок між кутами повороту

$$\varphi_1 = \bar{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = -\bar{\varphi}_2,$$

або у матричній формі

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{E}_1 \bar{\varphi}.$$

Тут

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо побудовану матрицю жорсткості, яка виражає зв'язок між кінцевими моментами і поворотами

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}\varphi = \mathbf{r}\mathbf{E}_1\bar{\varphi} = \mathbf{K}\bar{\varphi}.$$

Нова матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} \\ -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Далі розглянемо побудовану матрицю податливості

$$\varphi = \delta\mathbf{X}, \quad \bar{\varphi} = \delta\mathbf{X}, \quad \bar{\varphi} = \mathbf{E}_1^{-1}\delta\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & -\frac{l}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Легко переконатись, що

$$\Phi \mathbf{KD} = \mathbf{DK} = \mathbf{E}.$$

5.7.3. Приклад реалізації принципів Лагранжа і Кастільяно для задачі згину балки. Побудова поверхонь функціоналів

На рис. 5.25 показана схема балки, яка перебуває під дією навантаження у вигляді переміщення Δ і кута повороту φ на лівому кінці, а також невідомі при розв'язанні задачі за принципом Лагранжа, w_0, w'_0 , а також Кастільяно X_1, X_2 .

Зазначимо, що для процедури реалізації принципів слід обрати відповідно функції переміщень $w(x)$ і згинаючих моментів $M(x)$ так, щоб вони задовольняли додатковим умовам: для принципу Лагранжа це умови сумісності деформацій $\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$; $w, w'|_{a_2} = \bar{w}, \bar{w}'|_{a_2}$, а для принципу

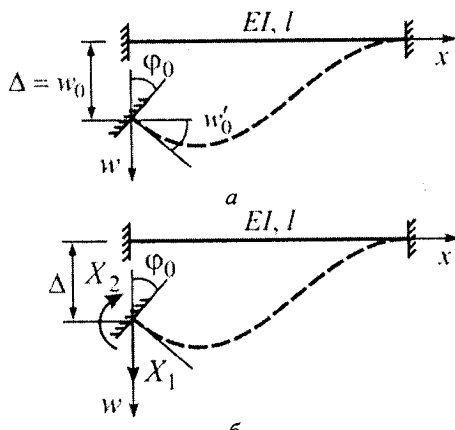


Рис. 5.25

Кастільяно – умови рівноваги $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$ і статичні граничні умови

$$M, M'|_{a_2} = \bar{M}, \bar{M}'|_{a_2}.$$

Оскільки балка є кінематично визначуваною і двічі статично невизначуваною для ілюстрацій принципу двоїстості кінематичні граничні умови на лівому кінці балки $w_0 = \Delta$ і $w'_0 = \varphi$ введемо за методом множників Лагранжа.

Пряма задача (принцип Лагранжа)

$$\Pi^L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx +$$

$$+\lambda_1 (w_0 - \Delta) + \lambda_2 (w'_0 - \varphi).$$

Із загального випадку варіаційного рівняння

$$(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'}) \delta w|_0^l + F_{w'} \delta w'|_0^l + \int_a^b (F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''}) \delta w dx = 0$$

Двоїста задача (принцип Кастільяно)

$$\Pi^K(M) = -\int_0^l \frac{M^2}{2EI} + \bar{w} M'|_0^l - \bar{w}' M|_0^l,$$

$$\Pi^K(M) = -\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + X_1 \Delta + X_2 \varphi.$$

Функцію $M(x)$ задаємо у вигляді $M = X_2 - X_1 x$, що задовольняє умовам рівноваги $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$ і статичним

знаходимо $\lambda_1 = M'_0 = Q_0$, $\lambda_2 = -M_0$.

$$\Pi^{\text{II}}(w, M_0 M'_0) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx +$$

$$+ M'_0 (w - \Delta) - M_0 (w'_0 - \varphi).$$

Задаючи функцію $w(x)$ у вигляді ряду

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

і реалізуючи граничні умови на правому кінці ($w|_{x=l} = 0$, $w'|_{x=l} = 0$), послідовно отримаємо

$$a_2 = -\frac{3w_0}{l^2} - \frac{2w'_0}{l}; \quad a_3 = \frac{2w_0}{l^3} + \frac{w'_0}{l^2};$$

$$M_0 = -EI w'' = EI \left(\frac{6w_0}{l^2} + \frac{4w'_0}{l} \right);$$

$$M'_0 = Q_0 = EI \left(-\frac{12w_0}{l^3} - \frac{6w'_0}{l^2} \right);$$

$$\Pi^{\text{II}}(w_0, w'_0) = EI \left(\frac{6w_0}{l^3} + \frac{6w_0 w'_0}{l^2} + \frac{2w_0'^2}{l} \right) + Q_0 (w_0 - \Delta) - M_0 (w'_0 - \varphi)$$

або

$$\Pi^{\text{II}}(w_0, w'_0) = EI \left(-\frac{6w_0^2}{l^3} - \frac{6w_0 w'_0}{l^2} - \frac{2w_0'^2}{l} + \frac{12w_0 \Delta}{l^2} + \frac{6w_0 \varphi}{l^2} + \frac{6w_0' \Delta}{l^2} + \frac{4w_0' \varphi}{l} \right).$$

Умови екстремуму $\Pi^{\text{II}}(\Delta, \varphi)$ дають рівняння задачі у переміщеннях з матрицею Гессе, яка є матрицею жорсткості **K**.

$$\mathbf{KZ} + \mathbf{R} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^{\text{II}}}{\partial \Delta^2} & \frac{\partial^2 \Pi^{\text{II}}}{\partial \Delta \partial \varphi_0} \\ \frac{\partial^2 \Pi^{\text{II}}}{\partial \varphi_0 \partial \Delta} & \frac{\partial^2 \Pi^{\text{II}}}{\partial \varphi_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \{\Delta_0 \quad \varphi_0\}^T, \quad \mathbf{R} = \{X_1 - X_2\}^T.$$

граничним умовам $M|_{x=0} = X_2$ і

$$M'|_{x=0} = -X_1.$$

Тоді отримаємо

$$\Pi^K(X_1, X_2) = -\frac{1}{2EI} (X_2^2 l - 2X_1 X_2 \frac{l^2}{2} + X_1^2 \frac{l^3}{3}) + X_1 \Delta + X_2 \varphi.$$

Умови екстремуму $\Pi^K(X_1, X_2)$ дають рівняння задачі у зусиллях з матрицею Гессе, яка є матрицею податливості **B**.

$$\mathbf{BX} + \Delta = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \{X_1 \quad X_2\}^T,$$

$$\Delta = \{-\Delta - \varphi\}^T.$$

Нагадаємо, що $\mathbf{K D} = \mathbf{E}$. Детермінант $\text{Det} \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta \partial \varphi} \right] \neq 0$.

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

Зазначимо, що за умов, які випливають із перетворення Лежандра $\frac{\partial \Pi^L}{\partial \Delta} = 0$; $\frac{\partial \Pi^L}{\partial \varphi} = 0$, або відповідних умов $\frac{\partial \Pi^K}{\partial X_1} = 0$ і $\frac{\partial \Pi^K}{\partial X_2} = 0$, що містять у собі системи рівнянь рівноваги, сумісність деформацій і фізичної форми задачі, нерівність Юнга дає рівність

$$\Pi(\Delta, \varphi) + \Pi(X_1, X_2) = X_1 \Delta + X_2 \varphi,$$

де

$$\Pi(\Delta, \varphi) = EI \left(\frac{6\Delta^2}{l^3} + \frac{6\Delta\varphi}{l^2} + \frac{2\varphi^2}{l} \right); \quad \Pi(X_1, X_2) = \frac{l}{2EI} X_2^2 - \frac{l^2}{2EI} X_1 X_2 + \frac{l^3}{6EI} X_1^2$$

відповідно двоїсті за Юнгом функції.

Оскільки вони є квадратичними формами і підпорядковані перетворенню Лежандра, їх відповідні значення співпадають.

Проведемо дослідження визначення характеру екстремального значення функціонала Лагранжа і вигляду відповідної поверхні.

Коефіцієнти b_{11}, b_{22} подання виразу у вигляді квадратичної форми $\Pi^L = b_{11}w_0 + b_{22}w_0'$ є власними числами λ_i матриці $\frac{1}{2}H(x)$, де матриця Гессе.

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^L}{\partial w_0^2} & \frac{\partial^2 \Pi^L}{\partial w_0 \partial w_0'} \\ \frac{\partial^2 \Pi^L}{\partial w_0 \partial w_0'} & \frac{\partial^2 \Pi^L}{\partial w_0'^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix};$$

матриця жорсткості системи

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Визначимо власні числа λ_i :

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[\frac{1}{2} H(x) - \lambda E \right] &= \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^3} - \lambda & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{6EI}{l^3} - \lambda \right) \left(\frac{2EI}{l} - \lambda \right) - \left(\frac{3EI}{l^2} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{\frac{\Delta l}{EI} + \frac{\varphi l^2}{2EI}}{\frac{l^4}{(EI)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{(2\Delta + \varphi l) 6EI}{l^3} = X_1^* \\ X_2 &= \frac{\frac{\varphi l^3}{3EI} + \frac{\Delta l^2}{2EI}}{\frac{l^4}{(EI)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{(3\Delta + 2\varphi l) 2EI}{l^2} = X_2^* \end{aligned} \right.$$

Екстремальне значення функціонала Кастільяно

$$\begin{aligned} \Pi_{\max}^K &= \Pi^K(X_1^*, X_2^*) = \\ &= \frac{EI}{l^3} \left[6\Delta^2 + 6\Delta\varphi l + 2\varphi^2 l^2 \right]. \end{aligned}$$

Визначимо характер екстремального значення функціонала Кастільяно і вигляду поверхні, яку описує відповідне рівняння.

Коефіцієнти b_{11}, b_{22} подання Π^K у вигляді квадратичної форми $\Pi^K = b_{11}\tilde{X}_1 + b_{22}\tilde{X}_2$ є власними числами λ_i матриці $\frac{1}{2}H(x)$, де матриця Гессе має вигляд

$$\lambda^2 - \left(\frac{6EI}{l^3} - \frac{2EI}{l} \right) \lambda + \frac{12(EI)^2}{l^4} - \frac{9(EI)^2}{l^4} = 0,$$

$$= \lambda^2 - \left(\frac{6EI + 2EI l^2}{l^3} \right) \lambda + \left(\frac{3EI}{l^2} \right)^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3EI + EI l^2}{l^3} \pm \sqrt{\left(\frac{3EI + EI l^2}{l^3} \right)^2 - \left(\frac{3EI}{l^2} \right)^2}.$$

Оскільки

$$\frac{3EI + EI l^2}{l^3} > \sqrt{\frac{3EI + EI l^2}{l^3} - \left(\frac{3EI}{l^2} \right)^2},$$

то власні числа є додатними, $\lambda_1 > \lambda_2$ ($\lambda_1 = b_{11}$, $\lambda_2 = b_{22}$), що відповідає поверхні у вигляді западини і мінімуму в точці з координатами (Δ, φ) (рис. 5.22).

Екстремальне значення функціонала Лагранжа:

$$\Pi_{\min} = \Pi^{\text{Л}}(\Delta, \varphi) = \frac{6w_0^2}{l^3} + \frac{6w_0 w_0'}{l^2} + \frac{2w_0'^2}{l} = \frac{EI}{l^3} [6\Delta^2 + 6\Delta\varphi l + 2\varphi^2 l^2].$$

Для уточнення вигляду еліптичного параболоїду розглянемо часткові випадки рівності нулю граничних умов і визначимо рівняння кривих $\Pi^{\text{Л}}(w_0)$ і $\Pi^{\text{Л}}(w_0')$, що утворені точками перетину поверхні з

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 \Pi^K}{\partial X_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & -\frac{l}{EI} \end{bmatrix} B$$

изначимо власні числа λ_i :

$$\text{Det} \left[\frac{1}{2} H(x) - \lambda E \right] = \text{Det} \begin{bmatrix} -\frac{l^3}{6EI} - \lambda & \frac{l^2}{4EI} \\ \frac{l^2}{4EI} & -\frac{l}{2EI} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{l^3 + 3l}{6EI} \right) \lambda + \frac{l^4}{48(EI)^2} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{l^3 + 3l}{12EI} \pm \sqrt{\frac{(l^3 + 3l)^2 - 3l^4}{12EI}}.$$

Оскільки

$$\frac{l^3 + 3l}{12EI} > \sqrt{\frac{(l^3 + 3l)^2 - 3l^4}{12EI}},$$

то власні числа є від'ємними, $\lambda_1 < \lambda_2$ ($\lambda_1 = b_{11}$, $\lambda_2 = b_{22}$), що відповідає поверхні у вигляді вершини і максимуму в точці з координатами (X_1^*, X_2^*) .

Кут повороту осей \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 відносно X_1, X_2 становить

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2l^2}{l^3/3 - l} = \frac{1}{2} \arctg \frac{6l^2}{l^3 - 3l} = \frac{1}{2} \arctg \frac{6l}{l^2 - 3}$$

$$\theta > 0 : \begin{cases} l > 0 \\ l^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow l > \sqrt{3}.$$

Для уточнення вигляду еліптичного параболоїду розглянемо часткові випадки рівності нулю граничних умов і визначимо рівняння кривих $\Pi^K(X_2)$ і $\Pi^K(X_1)$, що утворені точками перетину поверхні з координатними площинами

координатними площинами $\Pi^{\text{Л}} - w_0$ і $\Pi^{\text{Л}} - w'_0$ відповідно, а також екстремальні точки цих кривих.

$\Pi^{\text{К}} - X_2$ і $\Pi^{\text{К}} - X_1$ відповідно, а також екстремальні точки цих кривих.

Частинний випадок 1

$$\varphi = 0.$$

$$\Pi^{\text{Л}}(w_0) = \frac{EI6w_0^2}{l^3} - \frac{12EI\Delta(w_0 - \Delta)}{l^3}.$$

Умова екстремуму функціонала:

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial w_0} = \frac{12EIw_0}{l^3} - \frac{12EI\Delta}{l^3} = 0,$$

звідки

$$w_0 = \Delta, \quad \Pi^{\text{Л}}_{\min}(w_0) = \frac{6EI}{l^3} \Delta^2.$$

Графік $\Pi^{\text{Л}}(w_0)$ має вигляд, наведений на рис. 5.27,а і утворює відповідний слід на площині $\Pi^{\text{Л}} - w_0$.

$$\varphi = 0, \quad X_2 = \frac{X_1}{2l}.$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{К}}(X_1) = & -\frac{l}{2EI} \left(\frac{X_1}{2l} \right)^2 + \frac{l^2}{2EI} X_1 \frac{X_1}{2l} l^2 - \\ & - \frac{l^3}{6EI} X_1^2 + X_1 \Delta = -\frac{l^3}{24EI} X_1^2 + X_1 \Delta. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала:

$$\frac{\partial \Pi^{\text{К}}}{\partial X_1} = -\frac{l^3}{12EI} X_1 + \Delta = 0,$$

звідки

$$X_1 = -\frac{12EI}{l^3} \Delta, \quad \Pi^{\text{К}}_{\max}(X_1) = \frac{6EI}{l^3} \Delta^2.$$

Графік $\Pi^{\text{К}}(X_1)$ має вигляд, наведений на рис. 5.27,б і утворює відповідний слід на площині $\Pi^{\text{К}} - X_1$.

Частинний випадок 2

$$\Delta = 0.$$

$$\Pi^{\text{Л}}(w'_0) = EI \frac{2w_0'^2}{l} - \frac{4EI\varphi}{l} (w'_0 - \varphi).$$

Умова екстремуму функціонала:

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial w'_0} = \frac{4EIw'_0}{l} - \frac{4EI\varphi}{l} = 0,$$

звідки

$$\Pi^{\text{Л}}_{\min}(w'_0) = \frac{2EI}{l} \varphi^2.$$

Графік $\Pi^{\text{Л}}(w'_0)$ має вигляд, наведений на рис. 5.27,в і утворює відповідний слід на площині $\Pi^{\text{Л}} - w'_0$.

$$\Delta = 0, \quad X_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{X_2}{l}.$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{К}}(X_2) = & -\frac{l}{2EI} X_2^2 + \frac{l^2}{2EI} \left(\frac{3}{2} \frac{X_2}{l} \right) X_2 l^2 - \\ & - \frac{l^3}{6EI} \left(\frac{3}{2} \frac{X_2}{l} \right)^2 + X_2 \varphi = -\frac{l}{8EI} X_2^2 + X_2 \varphi. \end{aligned}$$

Умова екстремуму функціонала:

$$\frac{\partial \Pi^{\text{К}}}{\partial X_2} = -\frac{l}{4EI} X_2 + \varphi = 0,$$

звідки

$$X_2 = \frac{4EI}{l} \varphi, \quad \Pi^{\text{К}}_{\max}(X_2) = \frac{2EI}{l} \varphi^2.$$

Графік $\Pi^{\text{К}}(X_2)$ має вигляд, наведений на рис. 5.27,г і утворює відповідний слід на площині $\Pi^{\text{К}} - X_2$.

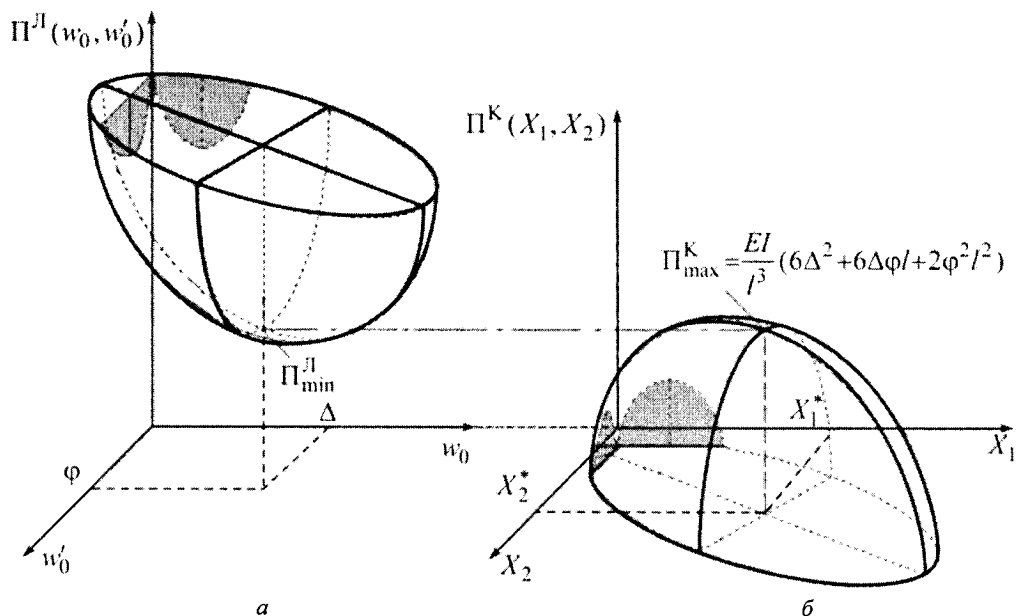


Рис. 5.26

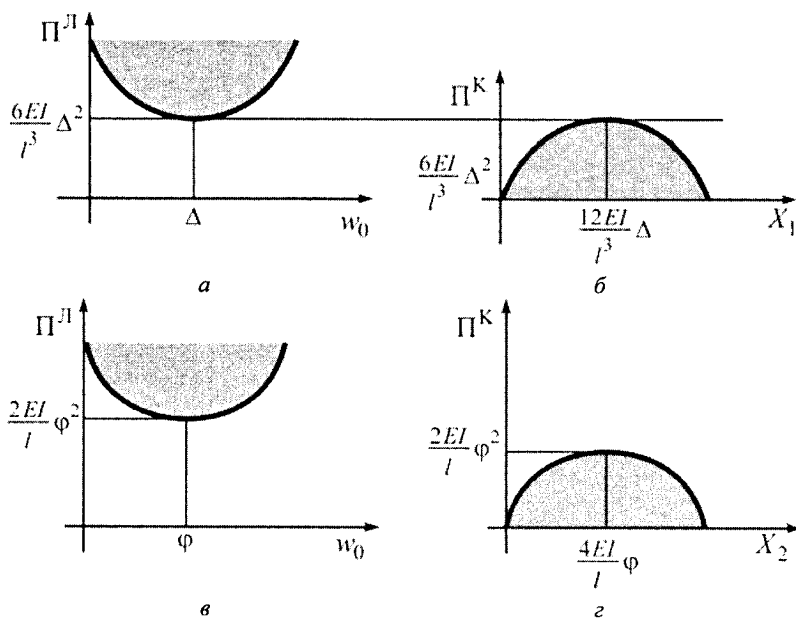


Рис. 5.27

5.8. Перетворення варіаційних принципів

Теорія Куранта-Гільберта [104, 105] дозволяє здійснювати перетворення варіаційних принципів.

Далі наведено послідовне перетворення за методом множників Лагранжа функціонала Лагранжа у першу форму функціонала Рейснера за допомогою перетворення Лежандра і далі – у функціонал Кастільяно. Перетворення функціонала Лагранжа у функціонал Кастільяно і функціонала Кастільяно у функціонал Лагранжа передбачає взаємну заміну природних і додаткових умов для функціоналів і має назву перетворення Фрідрікса.

Розглянемо функціонал Лагранжа.

$$\Pi^{\text{Л}} = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad \kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \in a, b, \quad w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'$$

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \lambda \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + \mu_1 (w - \bar{w}) \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_2 (w' - \bar{w}') \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$F_w = -q; \quad F_{w'} = \lambda,$$

$$\delta \Pi = -\frac{d\lambda}{dx} \delta w \Big|_a^b + \lambda \delta w' \Big|_a^b - \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \left(\frac{d^2 \lambda}{dx^2} - q \right) \delta w dx + \mu_1 \delta w \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_2 \delta w' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\lambda = -M,$$

$$M' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - M \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + M' \delta w \Big|_{a_2}^{b_2} - M \delta w' \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_1 \delta w \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_2 \delta w' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$M' = \bar{M}'; \quad M = \bar{M}, \quad \frac{\mu_1 = -M'}{\mu_2 = M} \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M},$$

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ &+ \int_a^b (-M) \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - M' (w - \bar{w}) \Big|_{a_2}^{b_2} + M (w' - \bar{w}') \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Перша форма функціонала Рейснера

$$\Pi_1^{\text{Р}} = -\frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx - \int_a^b q w dx - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - M' (w - \bar{w}) \Big|_{a_2}^{b_2} + M (w' - \bar{w}') \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$- \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx = - \int_a^b w \frac{d^2 M}{dx^2} dx - M w' \Big|_a^b + M' w \Big|_a^b,$$

$$\Pi_1^{\text{Р}} = - \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b w \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx - M w' \Big|_{a_1}^{b_1} + M' w \Big|_{a_1}^{b_1} -$$

$$- M w' \Big|_{a_2}^{b_2} + M' w \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - M' (w - \bar{w}) \Big|_{a_2}^{b_2} + M (w' - \bar{w}') \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta w \rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0,$$

$$\Pi_1^P = -\frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - Mw' \Big|_{a_1}^{b_1} + M'w \Big|_{a_1}^{b_1} + M\bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2} - M\bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

Формула Кастільяно

$$\Pi^K = -\int_a^b \frac{M^2}{2EI} + M' \bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2} - M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \in a, b, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Розглянемо функціонал Кастільяно.

$$\Pi^K = -\int_a^b \frac{M^2}{2EI} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \in a, b, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\Pi^K = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} + \int_a^b \lambda \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_1 (M - \bar{M}) \Big|_{a_1}^{b_1} + \mu_2 (M' - \bar{M}') \Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$F_M = -\frac{M}{EI}; \quad F_{M'} = \lambda, \quad \int_a^b \left(\frac{d^2 \lambda}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) \delta M dx,$$

$$\delta \Pi^K = -\frac{d\lambda}{dx} \delta M \Big|_a^b + \lambda \delta M' \Big|_a^b + \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_1 \delta M \Big|_{a_1}^{b_1} + \mu_2 \delta M' \Big|_{a_1}^{b_2},$$

$$\lambda = -w,$$

$$w' \delta M \Big|_{a_1}^{b_1} - w \delta M' \Big|_{a_1}^{b_1} + w' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - w \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + \mu_1 \delta M \Big|_{a_1}^{b_1} + \mu_2 \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}', \quad w' = \bar{w}', \quad w = \bar{w}, \quad \frac{\mu_1 = -w'}{\mu_2 = w} \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Друга форма функціонала Рейснера

$$\begin{aligned} \Pi_2^P &= -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_a^b w \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \\ &\quad - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} - w' (M - \bar{M}) \Big|_{a_1}^{b_1} + w (M' - \bar{M}') \Big|_{a_1}^{b_1}, \\ &\quad - \int_a^b w \frac{d^2 M}{dx^2} dx = - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx + Mw' \Big|_a^b - M'w \Big|_a^b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^P = & -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx - \int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_a^b q w dx + M w' \Big|_{a_1}^{b_1} - M' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + M w' \Big|_{a_2}^{b_2} - M' w \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} - w' (M - \bar{M}) \Big|_{a_1}^{b_1} + w (M' - \bar{M}') \Big|_{a_1}^{b_1}, \\ \delta M \rightarrow & \frac{M}{EI} = -\frac{d^2 w}{dx^2}. \end{aligned}$$

Формула Лагранжа

$$\begin{aligned} \Pi^\Pi = & \frac{1}{2} \int_a^b EI (w'')^2 dx - \int_a^b q w dx + w' \bar{M} \Big|_{a_1}^{b_1} - w \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}, \\ w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = & \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

5.8.1. Приклад перетворення варіаційних принципів

На балку з постійною жорсткістю EI_0 діє розподілене навантаження $q(x)$, зосереджена сила \bar{P}_b в точці $x = b$, момент \bar{M}_c в точці $x = c$ (рис. 5.28). Задача розглядається при таких геометричних граничних умовах:

$$w(0) = \bar{w}_0, w'(0) = \bar{w}'_0, w(l) = 0. \quad (5.28)$$

Принцип мінімуму потенціальної енергії свідчить: серед всіх можливих деформацій κ і переміщень w дійсні деформації і переміщення надають повній потенційній енергії

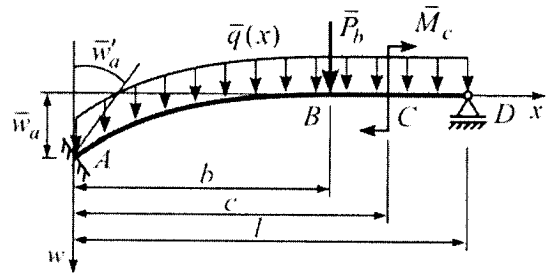


Рис. 5.28

$$\Pi = \int_0^l A(\kappa) dx - \int_0^l q(x) w(x) dx - \bar{P}_b w(b) - \bar{M}_c w'(c) \quad (5.29)$$

абсолютний мінімум.

У виразі (5.29) невід’ємна функція

$$A(\kappa) = \frac{1}{2} EI_0 (\kappa)^2 \quad (5.30)$$

являє собою питому потенціальну енергію внутрішніх сил.

Мінімум виразу (5.29) шукається за додаткових умов:

1) деформації κ задовольняють рівнянням сумісності

$$\kappa(x) = w''(x), \quad 0 < x < l, \quad (5.31)$$

2) функція прогину $w(x)$ задовольняє геометричним граничним умовам (5.28).

У цьому і полягає зміст терміну „можливі деформації і переміщення”.

Таким чином, фактично має місце задача про умовний мінімум функціонала. Шляхом введення множників Лагранжа можна перейти до задачі про стаціонарність функціонала без додаткових умов.

Розглядається функціонал

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} = & \int_0^l A(\kappa) dx - \int_0^l \bar{q}(x)w(x) dx - \bar{P}_b w(b) - \bar{M}_c w'(c) + \int_0^l \lambda_1(x)(\kappa - w'') dx + \\ & + \lambda_0 (w(0) - \bar{w}_0) + \lambda_2 (w'(0) - \bar{w}'_0) + \lambda_3 (w(l) - 0). \end{aligned} \quad (5.32)$$

У виразі (5.32) варіюються три незалежні функції $\kappa(x)$, $w(x)$, $\lambda_1(x)$ і три незалежні константи λ_0 , λ_2 і λ_3 . Варіація функціонала (5.32), обумовлена варіюванням кожної з наведених вище величин, представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = & \int_0^l \frac{dA}{d\kappa} \delta \kappa dx - \int_0^l \bar{q}(x) \delta w(x) dx - \bar{P}_b \delta w(b) - \bar{M}_c \delta w'(c) + \\ & + \int_0^l (\kappa - w'') \delta \lambda_1(x) dx + \int_0^l \lambda_1(x) \delta \kappa(x) dx - \int_0^l \lambda_1(x) \delta w''(x) dx + (w(0) - \bar{w}_0) \delta \lambda_0 + \\ & + \lambda_0 \delta w(0) + (w'(0) - \bar{w}'_0) \delta \lambda_2 + w(l) \delta \lambda_3 + \lambda_3 \delta w(l) + \lambda_2 \delta w'(0). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Перетворимо вираз (5.33). Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} \int_0^l \lambda_1(x) \delta w''(x) dx &= \int_0^{b-0} \lambda_1(x) \delta w''(x) dx + \int_{b+0}^{c-0} \lambda_1(x) \delta w''(x) dx + \int_{c+0}^l \lambda_1(x) \delta w''(x) dx = \\ &= \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_0^{b-0} - \int_0^{b-0} \lambda_1'(x) \delta w'(x) dx + \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_{b+0}^{c-0} - \int_{b+0}^{c-0} \lambda_1'(x) \delta w'(x) dx + \\ &+ \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_{c+0}^l - \int_{c+0}^l \lambda_1'(x) \delta w'(x) dx = \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_0^{b-0} - \lambda_1'(x) \delta w(x) \Big|_0^{b-0} + \\ &+ \int_0^{b-0} \lambda_1''(x) \delta w(x) dx + \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_{b+0}^{c-0} - \lambda_1'(x) \delta w(x) \Big|_{b+0}^{c-0} + \int_{b+0}^{c-0} \lambda_1''(x) \delta w(x) dx + \\ &+ \lambda_1(x) \delta w'(x) \Big|_{c+0}^l - \lambda_1'(x) \delta w(x) \Big|_{c+0}^l + \int_{c+0}^b \lambda_1''(x) \delta w(x) dx = \\ &= \int_0^l \lambda_1''(x) \delta w(x) dx - \lambda_1(0) \delta w'(0) + [\lambda_1(b-0) - \lambda_1(b+0)] \delta w'(b) + \\ &+ [\lambda_1(c-0) - \lambda_1(c+0)] \delta w'(c) + \lambda_1(l) \delta w'(l) + \lambda_1'(0) \delta w(0) - \\ &- [\lambda_1'(b-0) - \lambda_1'(b+0)] \delta w(b) - [\lambda_1'(c-0) - \lambda_1'(c+0)] \delta w(c) - \lambda_1'(l) \delta w(l). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Враховуючи (5.34), (5.33) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = & \int_0^l \left[\lambda_1(x) + \frac{dA}{d\kappa} \right] \delta \kappa(x) - [\lambda_1''(x) + \bar{q}(x)] \delta w(x) + [\kappa - w''] \delta \lambda_1(x) dx + \\ & + [\lambda_0 - \lambda_1'(0)] \delta w(0) + [\lambda_2 + \lambda_1(0)] \delta w'(0) + (w(0) - \bar{w}_0) \delta \lambda_0 + (w'(0) - \bar{w}'_0) \delta \lambda_2 + \end{aligned}$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГІН

$$\begin{aligned}
 &+ [\lambda'_1(b-0) - \lambda'_1(b+0) + \bar{P}_b] \delta w(b) - [\lambda_1(b-0) - \lambda_1(b+0)] \delta w'(b) + \\
 &+ [\lambda'(c-0) - \lambda'(c+0)] \delta w(c) - [\lambda_1(c-0) - \lambda(c+0) + \bar{M}_c] \delta w'(c) - \\
 &- \lambda_1(l) \delta w'(l) - [\lambda'_1(l) + \lambda_3] \delta w(l) + w(l) \delta \lambda_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Отримуємо умови стаціонарності:

$$\frac{dA}{d\kappa} = -\lambda_1(x), \tag{5.36}$$

$$\kappa = w'', \tag{5.37}$$

$$\lambda_1'' = -\bar{q}(x), \tag{5.38}$$

$$\lambda'_1(0) = \lambda_0, \tag{5.39}$$

$$\lambda_1(0) = -\lambda_2, \tag{5.40}$$

$$w(0) = \bar{w}_0, \tag{5.41}$$

$$w'(0) = \bar{w}'_0, \tag{5.42}$$

$$\lambda_1(b-0) - \lambda_1(b+0) = 0, \tag{5.43}$$

$$\lambda'_1(b-0) - \lambda'_1(b+0) = -\bar{P}_b, \tag{5.44}$$

$$\lambda_1(c-0) - \lambda(c+0) = -\bar{M}_c, \tag{5.45}$$

$$\lambda'_1(c-0) - \lambda'(c+0) = 0, \tag{5.46}$$

$$\lambda_1(l) = 0, \tag{5.47}$$

$$\lambda'_1(l) = -\lambda_3, \tag{5.48}$$

$$w(l) = 0. \tag{5.49}$$

Розберемо фізичний зміст умов стаціонарності (5.36) – (5.49).

В силу (5.29) рівняння (5.36) записується у вигляді

$$EI\kappa = -\lambda_1(x). \tag{5.50}$$

Співвідношення (5.50) являє собою фізичний закон – зв'язок деформацій і зусиль. Переходячи до стандартних позначень,

$$\lambda(x) = M(x),$$

перепишемо у вигляді

$$EI\kappa = -M(x). \tag{5.51}$$

Рівняння (5.37) задає зв'язок деформацій і переміщень.

Співвідношення

$$M''(x) = -\bar{q}(x) \tag{5.52}$$

задає рівняння рівноваги.

Введемо позначення $\lambda_0 = R_A$, де R_A – реакція в опорі A , тоді рівняння (5.39) записується у вигляді

$$M'(0) = R_A. \tag{5.53}$$

Далі, позначивши момент в опорі A через M_A , в силу (5.40) отримаємо

$$M(0) = -M_A. \quad (5.54)$$

Аналогічно на опорі D в силу (5.47) і (5.48), запишемо

$$M(l) = 0, \quad M'(l) = -R_D. \quad (5.55)$$

Співвідношення (5.41), (5.42), (5.49) задають геометричні граничні умови.

Умови (5.44), (5.45) і (5.46), (5.47) задають умови сполучення в точках B і C відповідно:

$$M(b-0) - M(b+0) = 0, \quad (5.56)$$

$$M'(b-0) - M'(b+0) = -\bar{P}_b \quad (5.57)$$

і

$$M(c-0) - M(c+0) = -\bar{M}_c, \quad (5.58)$$

$$M'(c-0) - M'(c+0) = 0. \quad (5.59)$$

Як вже указувалося, функціонал (5.32) і співвідношення (5.36) – (5.49) (або (5.37), (5.41), (5.42), (5.49), (5.50)–(5.59)) взаємно обумовлюють один одного.

Задачу, що розглядається, (рис. 5.19) можна сформулювати як задачу про стаціонарність функціонала (5.31), і тоді співвідношення (5.37) – (5.50) являються рівняннями стаціонарності. Можна виходити із співвідношень (5.36) – (5.49) і прийти до задачі про стаціонарність функціонала, причому екстремум шукається без додаткових умов. Якщо вибирати певні співвідношення з системи (5.36) – (5.49) як додаткові умови, то із узагальненого принципу про абсолютний екстремум після відповідних перетворень отримаємо задачу про умовний екстремум.

Природно, якщо прийняти, що при варіюванні $w(x)$ задовольняє геометричним граничним умовам (5.41), (5.42) і (5.49), а також, що деформації κ та переміщення w варіюються не незалежно, а задовольняють рівнянню сумісності (5.37), то з узагальненого принципу буде слідувати принцип Лагранжа.

Для переходу до принципу Кастільяно перепишемо вираз (5.35) для функціонала (5.32) в нових позначеннях:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = & \int_0^l A(\kappa) dx - \int_0^l \bar{q}(x) w(x) dx - \bar{P}_b w(b) - \bar{M}_c w'(l) + \int_0^l M(x) (\kappa - w'') dx + \\ & + R_A (w(0) - \bar{w}_0) + M_A (w'(0) - \bar{w}'_0) + R_D w(l). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Інтегруючи частинами, аналогічно (5.33) можна показати, що

$$\begin{aligned} \int_0^l M(x) w''(x) dx = & \int_0^l M''(x) w(x) dx - M(0) w'(0) + [M(b-0) - M(b+0)] w'(b) + \\ & + [M(c-0) - M(c+0)] w'(c) + M(l) w'(l) + M'(0) w(0) - \\ & - [M'(b-0) - M'(b+0) + \bar{P}_b] w(b) - [M'(c-0) - M'(c+0)] w(c) - M'(c) w(c). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Підставляючи (5.61) в (5.60), отримаємо

$$\tilde{\Pi} = \int_0^l (M(x) \kappa(x) + A(\kappa)) dx - \int_0^l (M''(x) + \bar{q}(x)) w(x) dx + (M(0) + M_A) w'(0) +$$

5. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКИЙ ЗГИН

$$\begin{aligned}
 &+(R_A - M'(0))w(0) + (R_D - M'(l))w(l) - R_A \bar{w}_0 - M_A \bar{w}'_0 - M(l)w'(l) - \\
 &\quad - (M(b-0) - M(b+0))w(b) + (M'(b-0) - M'(b+0))w(b) - \\
 &\quad - (M(c-0) - M(c+0))w(c) + (M'(c-0) - M'(c+0))w(c). \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

Тепер перейдемо від задачі про абсолютний екстремум до задачі про умовний екстремум. Будемо вважати, що мають місце наступні умови:

- 1) виконуються рівняння рівноваги (5.52);
- 2) співвідношення (5.53), (5.54) і (5.55);
- 3) умови сполучення в точках B і C (5.56) – (5.59).

Тоді вираз (5.62) перетвориться до вигляду:

$$\tilde{\Pi} = \int_0^l (M(x) \kappa(x) + A(\kappa)) dx - R_A \bar{w}_0 - M_A \bar{w}'_0. \quad (5.63)$$

Визначимо величину

$$B = -M\kappa - A. \quad (5.64)$$

Вираз (5.64) являє собою перетворення Лежандра. Знак „мінус” у першому доданку обумовлений вибраним правилом знаків в теорії згину балки.

Якщо вважати, що функції $\kappa(x)$ і $M(x)$ не є незалежними, а пов'язані фізичним законом (5.51), то

$$B(M) = \frac{1}{2} \frac{M^2(x)}{EI_0} \quad (5.65)$$

є невід'ємною функцією.

З урахуванням (5.64) і (5.65) приходимо до функціонала

$$\Pi_I = - \int_0^l B(M) dx - R_A \bar{w}_0 - M_A \bar{w}'_0, \quad (5.66)$$

варіація якого визначає принцип Кастільяно: з усіх допустимих функцій $M(x)$ тих, що задовольняють умовам 1), 2) і 3), моменти дійсного стану надають функціоналу (5.66) абсолютного максимуму.

6. Варіаційні принципи у випадку сумісної дії згину і розтягу-стиснення

Залежності варіаційних принципів у випадку сумісної дії згину і розтягу-стиснення можна отримати як суму відповідних співвідношень для окремих станів. В даному випадку вважається справедливою гіпотеза малих переміщень, що дає можливість, по-перше, скласти рівняння рівноваги для недеформованого стану і, по-друге, користуватись принципом незалежності дії сил (принципом суперпозиції).

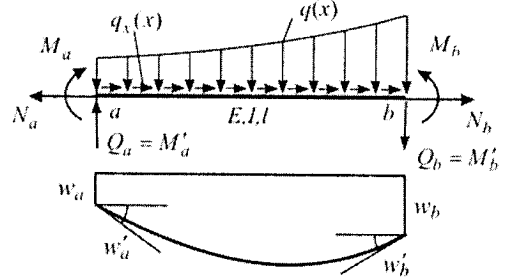


Рис. 6.1

На рис. 6.1 показаний стержневий елемент. Загальна потенціальна енергія являє собою суму відповідних значень потенціальних енергій пружної деформації і доповнювальних потенціальних енергій згину $u_0^{зг}(x) + u_0^{доп. зг}(M)$, а також розтягу-стиснення $u_0^{р-с}(ε) + u_0^{доп. р-с}(N)$

$$u_0^{зг}(κ) + u_0^{р-с}(ε) + u_0^{доп. зг}(M) + u_0^{доп. р-с}(N)$$

і дорівнює роботі зовнішніх сил згідно із теоремою Клапейрона:

$$A_{ЗС} = \int_a^b q w dx + \int_a^b q_x u dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}. \quad (6.1)$$

Зазначимо, що загалом роботи внутрішніх сил записуються у вигляді, запропонованому П.Ф.Папковичем:

$$A_{ВС} = \int_a^b M κ dx + \int_a^b N ε dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx - \int_a^b \left(κ + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx - \int_a^b \left(ε - \frac{du}{dx} \right) N dx + (-M' + \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2} + (-N + \bar{N}) u \Big|_{a_2}^{b_2} + (-u + \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

і, таким чином, теорема Клапейрона, яка являє собою випадок рівності у нерівності Юнга, дійсна тільки при виконанні умов статичної сторони задачі – рівноваги, геометричної сторони задачі – сумісності деформацій, а також статичних і кінематичних граничних умов:

$$κ = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad ε = \frac{du}{dx}; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x); \quad \frac{dN}{dx} = -q_x;$$

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}; \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}; \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}; \quad N \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{N} \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Враховуючи, що $δu = δA$, для лінійних залежностей $M - κ$ і $N - ε$

$$2\delta u = M\delta\kappa + \kappa\delta M + \left(M - \frac{\partial u_0^{3r}(\kappa)}{\partial\kappa} \right) \delta\kappa + N\delta\varepsilon + \varepsilon\delta N + \left(N - \frac{\partial u_0^{p-c}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right) \delta\varepsilon,$$

загальне варіаційне рівняння отримаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(M - \frac{\partial u_0^{3r}(\kappa)}{\partial\kappa} \right) \delta\kappa dx + \int_a^b \left(N - \frac{\partial u_0^{p-c}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right) \delta\varepsilon dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx} + q \right) \delta w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - \\ & - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (-M + \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \\ & - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_2}^{b_2} + (\bar{w} - w) \delta N' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Загальний варіаційний принцип:

$$\delta\Pi^{3ar}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Із загального варіаційного рівняння (6.2) можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} & \Pi_1^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = \\ & = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \\ & - \int_a^b \left(\kappa - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx - \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \\ & - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - (w - \bar{w}) \bar{M}' \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (w' - \bar{w}') \bar{M} \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} & \Pi_2^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = \\ & = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b N \varepsilon dx - \\ & - \int_a^b M \kappa dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + (\bar{M} - M) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

Варіаційні принципи

$$\Pi_1^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

$$\Pi_2^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

Варіаційне рівняння Рейснера

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - \\ & - (\bar{M}' - M') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \end{aligned}$$

$$-(N - \bar{N})\delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u})\delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Додаткові умови $M = EI\kappa$; $N = EF\varepsilon$.

Із варіаційного рівняння Рейснера можуть бути отримані I і II форми функціонала Рейснера, а також відповідні варіаційні рівняння.

$$\begin{aligned} \Pi_1^P(w, M, u, N) = & - \int_a^b M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \\ & + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \\ & - \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (\bar{w} - w) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2} - \\ & - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$M = EI\kappa; N = EF\varepsilon.$$

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$u_0(\kappa, \varepsilon) = u_0^{3\Gamma}(\kappa) + u_0^{P-C}(\varepsilon),$$

$$u_0^{3\Gamma}(\kappa) = \frac{1}{2} EI \kappa^2, \quad u_0^{P-C}(\varepsilon) = \frac{1}{2} EF \varepsilon^2,$$

$$\frac{\partial u_0(\kappa, \varepsilon)}{\partial \kappa} = M, \quad \frac{\partial u_0(\kappa, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = N,$$

$$u = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx,$$

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + \\ & + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0. \end{aligned}$$

$$\Pi^I(w, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx -$$

$$- \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^P(w, M, u, N) = & - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \\ & - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + (\bar{M} - M) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$M = EI\kappa; N = EF\varepsilon.$$

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$u_0(M, N) = u_0^{3\Gamma}(M) + u_0^{P-C}(N),$$

$$u_0^{\text{доп.3}\Gamma}(M) = \frac{M^2}{2EI}; \quad u_0^{\text{доп. P-C}}(N) = \frac{N^2}{2EF},$$

$$\frac{\partial u_0^{\text{доп.}}(M, N)}{\partial M} = \kappa; \quad \frac{\partial u_0^{\text{доп.}}(M, N)}{\partial N} = \varepsilon,$$

$$u^{\text{доп.}} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx,$$

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + \\ & + (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

$$\Pi^K(M, N) = - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx +$$

$$+ \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Принцип Лагранжа

$$\delta\Pi^L(w, u) = 0.$$

Додаткові умови

$$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \in a, b, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b,$$

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Формулювання принципів Лагранжа і Кастільяно для випадку сумісної дії згину і розтягу-стиснення аналогічне формулюванням для розтягу-стисненню (п.4.3) і плоского згину (п.5.5):

Принцип Лагранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лагранжа стаціонарного (мінімального) значення. При цьому під можливими розуміють переміщення, які задовольняють рівнянням сумісності деформацій і рівнянням в'язей (кінематичним граничним умовам).

Принципи Лагранжа і Кастільяно утворюють, так звану, пару двоїстих варіаційних задач, коли додаткові умови однієї задачі є природними умовами другої і навпаки.

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \in a, b; \quad \frac{dN}{dx} + q_x = 0 \in a, b.$$

Граничні умови

$$M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1},$$

які разом із додатковими умовами

$$M = EI\kappa \in a, b$$

дають систему рівнянь крайової задачі механіки стержнів.

Таким чином, вимога тотожного дорівнювання нулю лівої частини варіаційного рівняння Лагранжа дає у вигляді природних граничних умов рівняння рівноваги, як рівняння Ейлера, а також природні статичні граничні умови, яких не вистачало у заданих попередніх умовах.

Принцип Кастільяно

$$\delta\Pi^K(M, N) = 0.$$

Додаткові умови

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \in a, b, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b, \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарного (максимального) значення. При цьому під можливими розуміють зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам.

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \in a, b; \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b.$$

Граничні умови

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2},$$

які разом із додатковими умовами









$$M = EI\kappa, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q \in a, b, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1},$$

дають систему рівнянь крайової задачі механіки стержнів.

Таким чином, вимога тотожного дорівнювання нулю лівої частини варіаційного рівняння Кастільяно дає у вигляді природних граничних умов рівняння сумісності деформацій, а також природні (кінематичні) граничні умови, яких не вистачало у заданих попередніх умовах.

Для різних типів балок у випадку однорідних граничних умов $M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0, N, N' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0, w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = 0, u \Big|_{a_2}^{b_2} = 0$ це показано в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Варіаційне рівняння Лагранжа					
Задані зовні граничні умови $w, w' \Big _{a_2}^{b_2} = 0$ $u \Big _{a_2}^{b_2} = 0$	$w_a = 0, w_b = 0$ $w'_a = 0, w'_b = 0$ $u_a = 0, u_b = 0$	$w_a = 0, w_b = 0$ $w'_a = 0, w'_b = 0$ $u_a = 0, u_b = 0$	$w_a = 0, w'_a = 0, u_a = 0$	$w_a = 0, w_b = 0$ $u_a = 0, u_b = 0$	Природні граничні умови $w, w' \Big _{a_2}^{b_2} = 0$ $u \Big _{a_2}^{b_2} = 0$
Природні граничні умови $M, M' \Big _{a_1}^{b_1} = 0$ $N \Big _{a_1}^{b_1} = 0$	— — — — — —	— — — $M_b = 0$ — $N_b = 0$	— $Q_b = 0$ — $M_b = 0$ — $N_b = 0$	— — $M_a = 0, M_b = 0$ — —	Задані зовні граничні умови $M, M' \Big _{a_1}^{b_1} = 0$ $N \Big _{a_1}^{b_1} = 0$
					Варіаційне рівняння Кастільяно

Варіаційне рівняння Лагранжа (при однорідних граничних умовах):

$$M' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - M \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + N \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx = 0.$$

Ураховуючи, що під інтегралом стоять рівності R_1 і R_2 (рис. 6.2),

$$R_1 dx + q dx + dQ = 0, \quad R_1 = -\frac{dQ}{dx} - q = -\frac{d^2 M}{dx^2} - q,$$

$$R_2 dx + q_x dx + dN = 0, \quad R_2 = -\frac{dN}{dx} - q_x$$

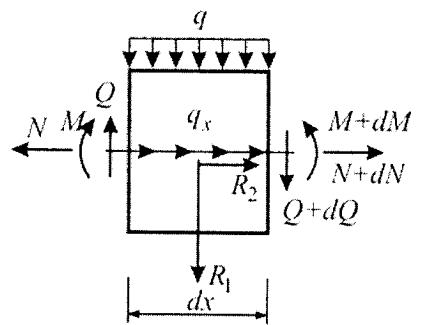


Рис. 6.2

являє собою принцип можливих переміщень, а саме, якщо сума робіт усіх сил, які діють на систему, при будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю, то

система знаходиться у рівновазі. При цьому під можливими розуміють переміщення, які описуються гладкими неперервними функціями і задовольняють умовам в'язей.

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$-w\delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - w'\delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + u\delta N \Big|_{a_2}^{b_2} - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx = 0$$

являє собою принцип можливих зусиль: якщо сума робіт, які здійснюються при будь-яких можливих змінах зусиль, дорівнює нулю, то система задовольняє рівнянням сумісності деформацій. При цьому під можливими розуміють статично можливі системи зусиль.

Зазначимо, що функціонал Лагранжа може бути представлений у вигляді [20]

$$\Pi^{\text{Л}} = \frac{1}{2} \int_a^b (\mathbf{du})^T \mathbf{D} \mathbf{du} dx - \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx,$$

де прийнято $\mathbf{q}^T = \{q_x, q\}$, $N = EF\varepsilon$, $M = EI\kappa$, в матричній формі $\mathbf{N} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{N}^T = \{N, M\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon, \kappa\}$ – вектори внутрішніх зусиль і деформацій в стержні, \mathbf{D} – матриця пружних констант

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EF & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}\mathbf{u},$$

тут $\mathbf{u}^T = \{u, w\}$ – вектор переміщень довільної точки стержня, \mathbf{d} – матриця диференціювання

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix},$$

причому, матриці рівнянь рівноваги і рівнянь сумісності деформацій формально є взаємно транспонованими.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_x \\ -q \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa \end{Bmatrix}.$$

7. Енергетичні теореми і варіаційні принципи для одновимірних задач будівельної механіки

Напружено-деформований стан будь-якої системи може бути визначений за допомогою двох еквівалентних підходів: локального і інтегрального. Локальний підхід базується на повній системі рівнянь будівельної механіки (рівняння статички, геометричні і фізичні рівняння). Інтегральний підхід ґрунтується на варіаційному численні. Основними поняттями тут є енергія деформації системи, робота зовнішніх і внутрішніх сил і т.п. Означений підхід спирається на екстремальні принципи, виходячи з яких можна вивчати із загальних позицій як задачі статички, так і задачі динаміки і стійкості, а відтак такі принципи можуть вважатися універсальними.

7.1. Енергія деформації лінійно-пружної системи

У процесі деформування пружної системи в її елементах накопичується енергія, внаслідок чого після зняття зовнішнього навантаження система повертається до свого первісного вигляду. Означена енергія називається *потенціальною енергією деформації*. Вона дорівнює дійсній роботі внутрішніх сил і вважається додатною. В плоских стержневих системах потенціальна енергія деформації складається з енергії розтягнення-стиснення, згину й зсуву і може бути записана у вигляді

$$U = \frac{1}{2} \sum_0^l \int (N\varepsilon + M\kappa + Q\gamma) dx. \quad (7.1)$$

Відносні деформації пов'язані із зусиллями за допомогою фізичних співвідношень (закон Гука):

$$N = EF\varepsilon, \quad M = EI\kappa, \quad \eta Q = GF\gamma \quad (7.2)$$

або

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \kappa = \frac{M}{EI}, \quad \gamma = \frac{\eta Q}{GF}. \quad (7.3)$$

Підставляючи першу (7.2) або другу групу (7.3) фізичних співвідношень у (7.1) одержуємо вираз для потенціальної енергії деформації через зусилля:

$$U = \sum_0^l \int \frac{N^2}{2EF} dx + \sum_0^l \int \frac{M^2}{2EI} dx + \sum_0^l \int \frac{\eta Q^2}{2GF} dx \quad (7.4)$$

або через деформації

$$U = \sum_0^l \int \frac{EF\varepsilon^2}{2} dx + \sum_0^l \int \frac{EI\kappa^2}{2} dx + \sum_0^l \int \frac{GF\gamma^2}{2\eta} dx. \quad (7.5)$$

Потенціальну енергію деформацію можна записати через зовнішні навантаження. Так, якщо до системи прикладене n узагальнених зовнішніх сил P_1, P_2, \dots, P_n , то на підставі принципу суперпозиції зусилля можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} N &= \bar{N}_1 P_1 + \bar{N}_2 P_2 + \dots + \bar{N}_n P_n; \\ M &= \bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2 + \dots + \bar{M}_n P_n; \\ Q &= \bar{Q}_1 P_1 + \bar{Q}_2 P_2 + \dots + \bar{Q}_n P_n, \end{aligned} \quad (7.6)$$

де $\bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i$ – зусилля від дії узагальненої сили $P_i = 1$.

Якщо підставити залежності (7.6) до (7.4), то після перетворень дістанемо:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\delta_{11} P_1^2 + \delta_{12} P_1 P_2 + \dots + \delta_{1n} P_1 P_n + \delta_{21} P_2 P_1 + \delta_{22} P_2^2 + \dots + \\ &\quad + \delta_{2n} P_2 P_n + \dots + \delta_{n1} P_n P_1 + \delta_{n2} P_n P_2 + \dots + \delta_{nn} P_n^2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Коефіцієнти δ_{ij} – це елементи матриці податливості.

Виконаємо згадані перетворення, коли енергія визначається тільки одним доданком, що залежить від згину

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx, \quad (7.8)$$

а навантаження становлять лише дві сили P_1 і P_2 . Тоді згідно з (7.6) згинальні моменти можуть бути записані у вигляді $M = \bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2$. Потенціальна енергія (7.8) в такому разі запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} U &= \sum \int_0^l \frac{(\bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2)^2}{2EI} dx = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 P_1^2 + 2\bar{M}_1 \bar{M}_2 P_1 P_2 + \bar{M}_2^2 P_2^2}{2EI} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[P_1^2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx + P_1 P_2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx + P_2^2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} [P_1^2 \delta_{11} + P_1 P_2 \delta_{12} + P_2 P_1 \delta_{21} + P_2^2 \delta_{22}]. \end{aligned}$$

Отже, потенціальна енергія деформації є квадратичною формою навантаження. В матричній формі вона може бути записана як

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}, \quad (7.9)$$

де $\mathbf{P}^T = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}$ – вектор навантажень, \mathbf{B} – матриця податливості.

Аналогічно можна виразити потенціальну енергію (7.5) у вигляді квадратичної форми переміщень. Дійсно, підставимо до (7.9) співвідношення $\mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta$. Маємо

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \Delta)^T \mathbf{B} (\mathbf{K} \Delta) = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K}^T \mathbf{B} \mathbf{K} \Delta.$$

Взявши до уваги, що внаслідок симетрії $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$, а добуток матриці податливості і матриці жорсткості дорівнює одиничній матриці $\mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{E}$, отримаємо

$$U = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta, \quad (7.10)$$

де $\Delta = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_n\}^T$ – вектор переміщень, \mathbf{K} – матриця жорсткості.

В розгорнутому вигляді співвідношення (7.10) набуває вигляду квадратичної форми переміщень

$$U = \frac{1}{2}(k_{11}\Delta_1^2 + k_{12}\Delta_1\Delta_2 + \dots + k_{1n}\Delta_1\Delta_n + k_{21}\Delta_2\Delta_1 + k_{22}\Delta_2^2 + \dots + k_{12}\Delta_2\Delta_n + \dots + k_{n1}\Delta_n\Delta_1 + k_{n2}\Delta_n\Delta_2 + \dots + k_{nn}\Delta_n^2). \quad (7.11)$$

Сформулюємо основні властивості потенціальної енергії:

- Потенціальна енергія деформації завжди додатна. Це є наслідком співвідношень (7.4) і (7.5).
- Потенціальна енергія деформацій є квадратичною формою навантаження (7.9) або квадратичною формою переміщень (7.10).
- До потенціальної енергії не можна застосовувати принцип суперпозиції (незалежності дій), тобто потенціальна енергія деформацій від дії на споруду кількох навантажень не дорівнює сумі енергій від окремої дії кожного навантаження.

Справді, розглянемо три стани розтягнутого стержня. В першому стані на стержень діє розтягуюча сила P_1 (рис. 7.1,а), в другому – сила P_2 (рис. 7.1,б), а в третьому – обидві сили водночас (рис. 7.1,в). У кожному завантаженні потенціальну енергію обчислюємо за формулою

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx.$$

Тоді для першого завантаження:

$$U_1 = \int_0^l \frac{P_1^2}{2EF} dx,$$

для другого:

$$U_2 = \int_0^l \frac{P_2^2}{2EF} dx,$$

для третього:

$$U_3 = \int_0^l \frac{(P_1 + P_2)^2}{2EF} dx = \int_0^l \frac{P_1^2}{2EF} dx + \int_0^l \frac{P_2^2}{2EF} dx + \int_0^l \frac{P_1 P_2}{EF} dx.$$

Звідси випливає, що потенціальна енергія деформації від одночасної дії обох сил

$$U_3 = U_1 + U_2 + \int_0^l \frac{P_1 P_2}{EF} dx = U_1 + U_2 + P_1 \frac{P_2 l}{EF}.$$

Останній доданок, що порушує принцип незалежності дій, можна тлумачити як роботу сили P_1 на відповідному переміщенні $P_2 l / EF$, яке зумовлене силою P_2 . Таку роботу називають можливою.

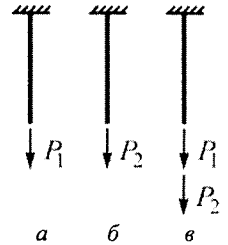


Рис. 7.1

Подання потенціальної енергії у вигляді квадратичної форми навантаження (7.7) і квадратичної форми переміщень (7.10) дає змогу сформулювати дві важливі теореми.

Теорема Кастільяно. Частинна похідна від потенціальної енергії деформації по одній із діючих незалежних узагальнених сил дорівнює переміщенню в напрямі цієї сили.

Насправді, почергово продиференціювавши квадратичну форму навантаження (7.7) по кожній діючій силі одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n, \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \dots + \delta_{2n}P_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial U}{\partial P_n} &= \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nn}P_n. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Суми, що розміщені в правій частині рівностей, являють собою величини переміщень $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, виражені через узагальнені сили і відповідні переміщення. Отже

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta_1, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \Delta_2, \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial P_n} = \Delta_n$$

і взагалі

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i. \tag{7.13}$$

Легко впевнитись в тому, що друга частинна похідна від (7.13) по кожній узагальненій силі P_j дорівнює відповідному одиничному переміщенню (елементу матриці податливості):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} = \delta_{ij}. \tag{7.14}$$

Окремим випадком теореми Кастільяно є теорема Менабреа: частинні похідні від потенціальної енергії деформації по реакціям зайвих в'язей системи дорівнюють нулю.

Приклад 7.1. Визначити прогин вільного кінця консольної балки від дії рівномірно розподіленого навантаження (рис. 7.2,а).

Окрім заданого навантаження, прикладемо до вільного кінця A балки узагальнену силу, що відповідає шуканому переміщенню – вертикальну силу P (рис. 7.2,б), яка фіксує характер і напрям переміщення.

Запишемо вираз для згинального моменту в довільному перерізі із абсцисою x :

$$M = -(qx^2/2 + Px).$$

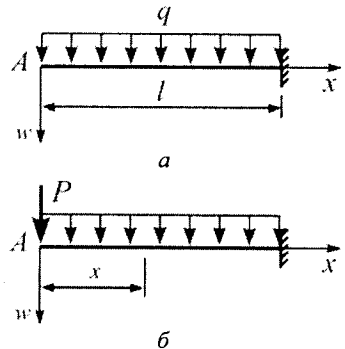


Рис. 7.2

$$w = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3.$$

Постійні інтегрування визначимо із граничних умов:

при $x=0$ $w(0) = C_1 = \Delta$, $w''(0) = 2C_3 = 0$;

при $x=l$ $w(l) = C_1 + C_2l + C_3l^2 + C_4l^3 = 0$,

$w'(l) = C_2 + 3C_4l^2 = 0$.

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$C_1 = \Delta$, $C_2 = -3\Delta/2l$, $C_3 = 0$, $C_4 = \Delta/2l^3$.

Отже, рівняння пружної лінії має вигляд:

$$w = \Delta \left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3} \right).$$

Кривизна деформованої осі балки виражається залежністю

$$\kappa = w'' = 3\Delta x/l^3.$$

Потенціальна енергія деформації

$$U = \int_0^l \frac{EI\kappa^2}{2} dx = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{3\Delta x}{l^3} \right)^2 dx = \frac{3EI\Delta^2}{2l^3}.$$

Узагальнена сила, яка відповідає переміщенню Δ і є опорною реакцією V_A , визначається за теоремою Лагранжа:

$$V_A = \frac{dU}{d\Delta} = \frac{3EI}{l^3} \Delta.$$

7.2. Повна потенціальна енергія деформівної системи

У процесі деформування в споруді накопичується енергія деформації, зумовлена внутрішніми силами. Однак точки прикладення зовнішніх сил в процесі деформування переміщуються, і тому ці сили також здійснюють роботу. Взагалі з енергетичної точки зору деформування споруди – це процес обміну енергіями двох систем сил – зовнішніх і внутрішніх. Повна потенціальна енергія деформованої системи може бути представлена у вигляді

$$\Pi = U + A, \tag{7.18}$$

де U – потенціальна енергія деформації (робота пружних сил), яка завжди вважається додатною, A – енергія (потенціал) зовнішніх сил, яка дорівнює роботі зовнішніх сил зі знаком "мінус".

Повна енергія деформації може розглядатися як робота, яку здійснюють внутрішні сили пружності і зовнішнє навантаження при переході системи з деформованого в первісний недеформований стан, внаслідок чого робота внутрішніх сил є додатною, а зовнішніх – від'ємною.

Так, для розтягнутого стержня потенціал зовнішніх сил

$$A = -P \cdot \Delta l = -P u_p.$$

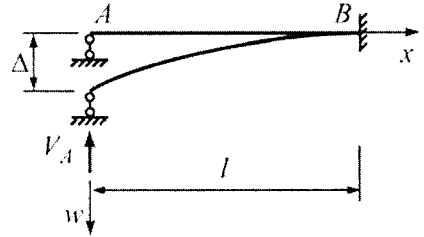


Рис. 7.3

Для зігнутої балки (рис. 7.4)

$$A = - \int_A^B w(x)q(x)dx.$$

Потенціальна енергія деформації може бути виражена через внутрішні сили:

- для розтягнутих (стиснених) елементів

$$U^{p-c} = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx, \quad (7.19)$$

- для зігнутих елементів

$$U^{3r} = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx, \quad (7.20)$$

або з урахуванням того, що $N = EFu'$, $M = EIw''$ через переміщення:

$$U^{p-c} = \frac{1}{2} \int_0^l EF(u')^2 dx, \quad U^{3r} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(w'')^2 dx. \quad (7.21)$$

Усі ці вирази можуть бути записані за єдиною формою:

$$U^c = \int_0^l u_0^c dx, \quad (7.22)$$

де u_0^c – густина енергії деформації, тобто енергія, що віднесена до довжини стержня, c – характеристика деформованого стану (розтягнення, згин тощо). При розтягненні і згині

$$u_0^{p-c} = \frac{N^2}{2EF} = EF \frac{(u')^2}{2}, \quad u_0^{3r} = \frac{M^2}{2EI} = EI \frac{(w'')^2}{2}. \quad (7.23)$$

Енергія деформації всієї системи дорівнює сумі енергій її елементів:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (7.24)$$

Повна потенціальна енергія деформації в разі потреби може бути представлена також через кілька дискретних параметрів, які визначають стан усієї системи. Наприклад, для консольної балки (рис. 7.5)

$$\Pi = U + A = \frac{1}{2} \int_A^B EI(w'')^2 dx - \int_A^B q(x)w(x)dx - Pw(a) - M\phi_l.$$

Оскільки кут повороту є першою похідною від прогинів, тобто $\phi_l = w'(l)$, зауважимо, що повна потенціальна енергія балки залежить від функції прогинів $w(x)$ як від аргументу.

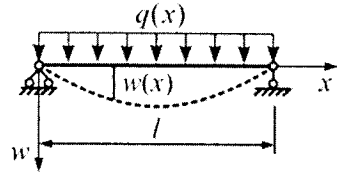


Рис. 7.4

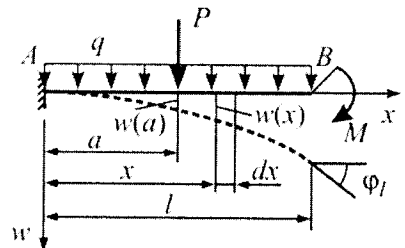


Рис. 7.5

7.3. Основні теореми будівельної механіки

Згідно з теоремою Клапейрона

$$\int_a^b M \kappa dx = \int_a^b q w dx + M'w \Big|_a^b - Mw' \Big|_a^b + \sum_i P_i \Delta_i,$$

$$\int_a^b M_1 \kappa_2 dx = M_1' w_2 \Big|_a^b - M_1 w_2' \Big|_a^b + P_1 \Delta_{12},$$

$$\int_a^b M_2 \kappa_1 dx = M_2' w_1 \Big|_a^b - M_2 w_1' \Big|_a^b + P_2 \Delta_{21},$$

але $M_1 = EI\kappa_1$, $M_2 = EI\kappa_2$. Тому $P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$.

Теорема Бетті. Якщо є два стани пружної системи, то робота сил першого стану на переміщеннях по їх напрямку, зумовлене силами другого стану, дорівнює роботі сил другого стану на переміщеннях по їх напрямку, викликаних силами першого стану¹.

Теорема Максвелла. Якщо є два одиничних стани, то переміщення першого стану в напрямку сили другого стану чисельно дорівнює переміщенням другого стану в напрямку сили першого $\delta_{12} = \delta_{21}$ ².

Теорема Релея. Якщо є два одиничні стани пружної системи, які зумовлені одиничним переміщенням опор, то опорні реакції першого стану в напрямку переміщень другого стану дорівнює опорним реакціям другого стану в напрямку переміщень першого стану (рис. 7.7)

$$r_{12} = r_{21}.$$

Теорема про взаємність реакцій і переміщень. Якщо маємо два стани пружної системи, то реакція в'язі 2, що зумовлена дією сили $P_1=1$, дорівнює за величиною і

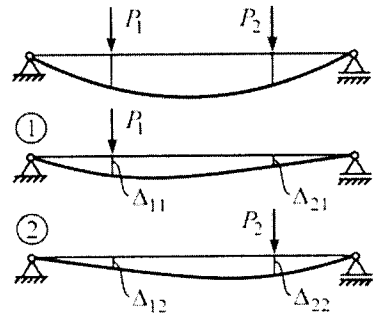


Рис. 7.6

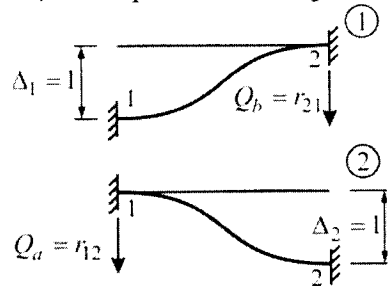


Рис. 7.7

¹ Теорема була доведена у 1872 р. італійським математиком Енріко Бетті (італ. Enrico Betti, 1823–1892). У 1882 р. цю теорему і її наслідки довів Кастільяно, використовуючи комутативність добутку скалярної функції (Betti, E., 1913. Teoria della elasticita. In: Opere matematiche, vol. II, pp. 291–378. Milan: Hoepli. (In Il nuovo cemento, series II, vol. VII). Castigliano, C. A. P., 1882. Intorno ad una proprieta dei sistemi elastici. Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino, (2), 17, pp. 705–713.)

² Максвелл, Джеймс Кларк (англ. James Clerk Maxwell; 1831–1879) – британський фізик і математик. Теорема була доведена Максвеллом до доведення більш загальної теореми Бетті. Проте робота Максвелла залишилась непоміченою інженерами і ученими. У 1874 р. незалежно від Максвелла і Бетті взаємність переміщень була доведена німецьким ученим Христіаном Отто Мором (1835–1918) (Maxwell, J.C., 1864/2. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine, vol. 27, pp. 294–299. Mohr, O., 1874/1. Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkstrager. Zeitschrift des Arch.- & Ing.Vereins zu Hannover, vol. 20, pp. 223–238. Mohr, O., 1874/2. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschrift des Architekten- und IngenieurVereins zu Hannover, vol. 20, pp. 509–526).

протилежна за знаком переміщенням в напрямі сили P_1 від одиничного зміщення в'язі 2 (рис. 7.8)

$$r_{21} = -\delta_{12}.$$

Теорема Кастільяно. Інтеграл Мора

$$U_0^{\text{доп}}(M) = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx; \quad \frac{\partial U_0^{\text{доп}}}{\partial P_i} \Delta_i = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx,$$

$$M = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + b_1 M_1 + b_2 M_2 + \dots + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots,$$

де $\frac{\partial M}{\partial P_i} = a_i$ - момент у одиничному стані.

Тому

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} dx, \quad M = -P_i x - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial P_i} = -x.$$

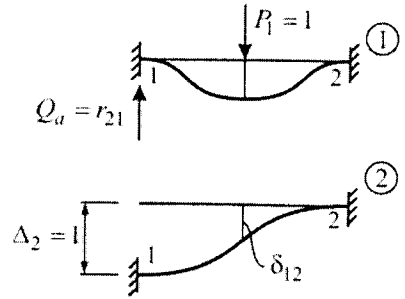


Рис. 7.8

7.4. Побудова канонічних рівнянь методу переміщень за допомогою варіаційного принципу Лагранжа

Канонічні рівняння методу переміщень можна одержати на підставі варіаційного принципу Лагранжа. Справді, будь-яке переміщення Δ або зусилля, наприклад, згинальний момент M , в кінематично невизначуваній системі можуть бути представлені у вигляді лінійних комбінацій:

$$\Delta = \bar{\delta}_1 Z_1 + \bar{\delta}_2 Z_2 + \dots + \bar{\delta}_i Z_i + \dots + \bar{\delta}_n Z_n + \Delta_p, \quad (7.25)$$

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_i Z_i + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p. \quad (7.26)$$

У цих співвідношеннях $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_n$ - переміщення; $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ - згинальні моменти в основній системі методу переміщень, зумовлені дією основних невідомих Z_1, Z_2, \dots, Z_n , які дорівнюють одиниці; Δ_p, M_p - відповідні переміщення і згинальний момент від зовнішнього навантаження.

Повна потенціальна енергія основної системи при урахуванні лише деформацій згину запишеться у вигляді

$$\Pi = U + A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EI \kappa^2 dx - P \Delta, \quad (7.27)$$

де n - кількість стержнів, P і Δ - узагальнене зовнішнє навантаження і відповідне узагальнене переміщення. Умова стаціонарності повної потенціальної енергії:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_i} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EI \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial Z_i} dx - P \frac{\partial \Delta}{\partial Z_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7.28)$$

Враховуючи те, що кривизна κ може бути виражена через згинальний момент

$$\kappa = \frac{M}{EI},$$

запишемо

$$\kappa = \frac{\bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_i Z_i + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p}{EI}, \quad (7.29)$$

звідки

$$\frac{\partial \kappa}{\partial Z_i} = \frac{\bar{M}_i}{EI}. \quad (7.30)$$

Враховуючи також, що $\frac{\partial \Delta}{\partial Z_i} = \bar{\delta}_i$, з (7.28) одержимо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_i} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{(\bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p) \bar{M}_i}{EI} dx - P \bar{\delta}_i. \quad (7.31)$$

Після нескладних перетворень маємо:

$$Z_1 \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_i}{EI} dx + Z_2 \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_i}{EI} dx + \dots + Z_n \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_i}{EI} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P \bar{\delta}_i = 0. \quad (7.32)$$

Для з'ясування фізичного змісту коефіцієнтів при невідомих розглянемо раму (рис. 7.9,а).

Основна система методу переміщень і основні невідомі наведено на рис. 7.9,б. На рис. 7.9,в і рис. 7.9,г зображено допоміжний одиничний стан, зумовлений дією одиничного невідомого $Z_i = 1$ і відповідна епюра, побудована в основній системі, а на рис. 7.9,д і рис. 7.9,е – допоміжний одиничний стан від дії $Z_j = 1$ і одинична епюра \bar{M}_j .

На схемах допоміжних станів зображено узагальнені реакції додаткових в'язей. Як і раніше, всі реакції позначено символом r із двома індексами. Перший індекс відповідає номеру невідомого, в напрямі якого діє реакція, другий – номеру невідомого, який викликає дану реакцію. Отже, r_{ij} – реакція в'язі j від одиничного переміщення $Z_i = 1$.

Можлива робота сил стану i (рис. 7.9,в) на переміщення стану j (рис. 7.9,д) може бути виражена або через зовнішні сили:

$$A_{ij} = r_{ij} \cdot 1$$

або через внутрішні:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx.$$

Оскільки ці роботи дорівнюють одна одній, можна записати, що

$$r_{ji} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (7.33)$$

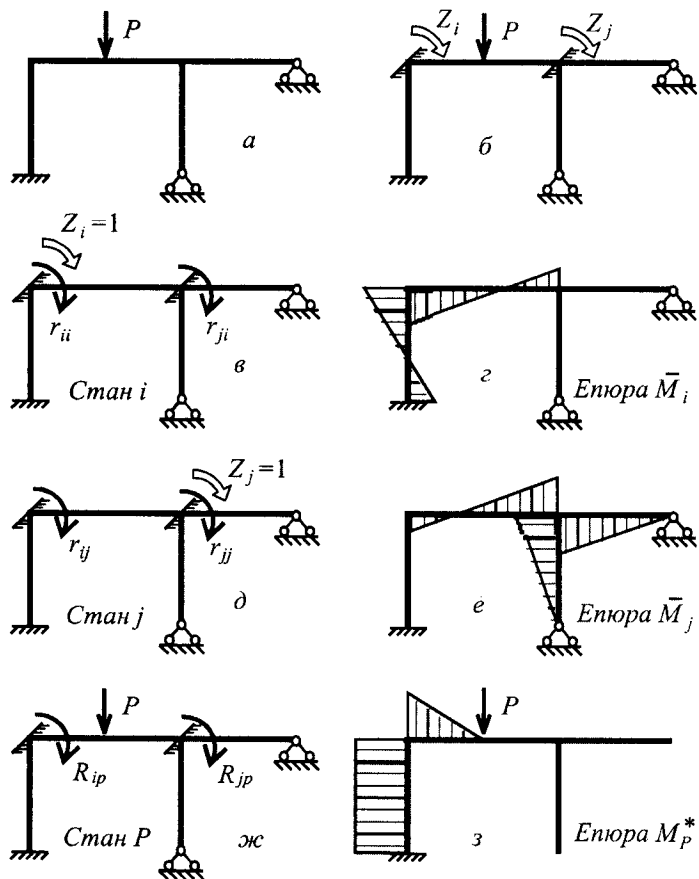


Рис. 7.9

Отже, коефіцієнти при невідомих у рівнянні (7.32) являють собою реакції в додаткових в'язях від одиничних переміщень цих в'язей.

Для з'ясування фізичного змісту вільного члена

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P \bar{\delta}_i$$

у рівнянні (7.32) розглянемо вантажний стан основної системи (рис.7.9,ж).

Застосуємо до станів i і p теорему про взаємність робіт:

$$A_{pi} = A_{ip}.$$

Робота A_{ip} зовнішніх сил стану i на переміщеннях стану p дорівнюватиме нулю, оскільки у вантажному стані додаткові в'язі не переміщуються. На цій підставі можна вважати, що і аналогічна робота внутрішніх сил дорівнюватиме нулю:

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx = 0. \quad (7.34)$$

Робота A_{pi} зовнішніх сил стану p на переміщеннях стану i дорівнює роботі внутрішніх сил:

$$A_{pi} = P\delta_{pi} + R_{ip} \cdot 1 = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (7.35)$$

Порівнюючи рівняння (7.34) і (7.35) доходимо до висновку, що

$$P\delta_{pi} + R_{ip} = 0 \Rightarrow R_{ip} = -P\delta_{pi} = -\Delta_{pi}. \quad (7.36)$$

Таким чином, вільний член рівняння (7.32)

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P\bar{\delta}_i = 0 + R_{ip} = R_{ip}$$

являє собою реакцію додаткової в'язі i від дії зовнішнього навантаження на основну систему. Отже, рівняння (7.32) може бути переписано в такий спосіб:

$$r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} = 0 \quad (7.37)$$

Зрештою вільний член R_{ip} можна виразити через внутрішні зусилля. Оскільки Δ_{pi} – це переміщення у напрямі зовнішнього навантаження у статично невизначуваній основній системі методу переміщень від $Z_i=1$, для його визначення достатньо помножити одиничну епюру \bar{M}_i (рис. 7.9,г) на вантажну епюру M_p^* , що побудована в будь-якій статично визначуваній системі, яка одержується з основної системи методу переміщень відкиданням “зайвих” в'язей або просто в основній системі методу сил для вихідної схеми, наприклад, в основній системі (рис. 7.9,з). Отже, на підставі теореми взаємності реакцій і переміщень

$$R_{ip} = -\Delta_{pi} = -\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p^* \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (7.38)$$

При запису умов стаціонарності по кожному з n невідомих параметрів дістанемо систему n рівнянь:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} &= 0. \end{aligned}$$

7.5. Побудова канонічних рівнянь методу сил за допомогою варіаційного принципу Кастільяно

Система канонічних рівнянь методу сил може бути записана в матричному вигляді:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} + \Delta = \mathbf{0}, \quad (7.39)$$

де $\mathbf{X}^T = \{X_1 X_2 \dots X_n\}$ – вектор основних невідомих, $\Delta^T = \{\Delta_{1P} \Delta_{2P} \dots \Delta_{nP}\}$ – вектор вантажних переміщень, \mathbf{B} – матриця податливості основної системи в напрямках відкинутих в’язей:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7.40)$$

Нагадаємо властивості елементів матриці податливості:

- головні коефіцієнти являють собою додатні числа: $\delta_{ii} > 0$;
- побічні коефіцієнти є симетричними відносно головної діагоналі, тобто $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Для визначення системи канонічних рівнянь методу сил можна скористатись іншим підходом, що базується на теоремі Кастільяно, точніше на окремому її випадку, згідно з яким частинні похідні від потенціальної енергії деформації по реакціям зайвих в’язей системи дорівнюють нулю (теорема Менабреа).

Потенціальна енергія деформацій при урахуванні тільки згинальних моментів виражається співвідношенням

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx. \quad (7.41)$$

Керуючись принципом незалежності дій, згинальний момент в довільному перерізі будь-якого стержня основної системи n раз статично невизначуваної розрахункової схеми може бути виражений через прикладені сили:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \quad (7.42)$$

де $\bar{M}_i = \bar{M}_i(x)$, $M_p = M_p(x)$ – функції координати x перерізу стержня, які виражають згинальні моменти в основній системі, що зумовлені дією основних невідомих $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і заданого зовнішнього навантаження відповідно.

Необхідною умовою екстремуму функціонала потенціальної енергії є рівність нулю її першого диференціала, що еквівалентно рівності нулю всіх її перших похідних по незалежним параметрам навантаження X_1, X_2, \dots, X_n . Інакше кажучи, повинна мати місце рівність

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = 0. \quad (7.43)$$

Як відомо, похідну можна внести під знак інтеграла:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \int_0^l \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx = 0.$$

Виконаємо диференціювання, вважаючи жорсткості стержнів EI постійними:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum_0^l \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_i} dx = 0. \quad (7.44)$$

Похідна від згинального моменту (7.42) має вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p) = \bar{M}_i.$$

Підставивши похідну до (7.44), одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = X_1 \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + X_2 \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + X_n \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx + \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = 0.$$

Беручи до уваги те, що вирази при невідомих і вільний член являють собою переміщення, запишемо

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0.$$

Означене рівняння виражає умову нерозривності деформації в напрямі «зайвої» відкинutoї в'язі і називається канонічним рівнянням методу сил. Диференціюючи потенціальну енергію U почергово по кожному параметру X_i ($i=1,2,\dots,n$), одержимо систему канонічних рівнянь методу сил.

7.6. Потенціали будівельної механіки. Теорема І.І.Гольденבלата

Згідно з теоремою Клапейрона для стержневої системи

$$U_0 + U^{\text{доп}} = \sum_i P_i \Delta_i.$$

Якщо $U_0 = U_0(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n)$, а $U^{\text{доп}} = U^{\text{доп}}(P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n)$, обчислюючи варіацію по Δ_i від обох частин рівнянь, отримаємо

$$\frac{\partial U_0}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i + 0 = P_i \delta \Delta_i$$

і, відповідно, теорему Лагранжа

$$\frac{\partial U_0}{\partial \Delta_i} = P_i,$$

яка формулюється так. Перша похідна від потенціальної енергії пружної деформації системи по узагальненому переміщенню дорівнює відповідній узагальненій силі.

Обчислюючи варіацію по P_i , отримаємо

$$0 + \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial P_i} \delta P_i + 0 = \Delta_i \delta P_i$$

і, відповідно, теорему Кастільяно

$$\frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial P_i} = \Delta_i,$$

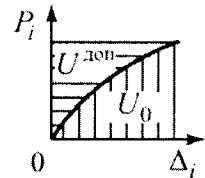


Рис. 7.10

яка формулюється так. Перша похідна від доповнювальної потенціальної енергії системи по узагальненій силі дорівнює відповідному узагальненому переміщенню.

Слід зазначити, що ці теореми справедливі для нелінійних систем. Якщо, у випадку лінійної системи, взяти до уваги, що

$$\mathbf{P} = [k_{ij}]\Delta, \quad \Delta = [\delta_{ij}]\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^T = \{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n\}, \quad \Delta^T = \{P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n\},$$

можна отримати вирази

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} = k_{ij}.$$

Друга похідна від потенціальної енергії пружної деформації по узагальненим переміщенням визначає відповідні коефіцієнти матриці жорсткості.

$$\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial P_i \partial P_j} = \delta_{ij}.$$

Друга похідна від доповнювальної потенціальної енергії по узагальненим силам визначає відповідні коефіцієнти матриці податливості.

У загальному випадку потенціали будівельної механіки стержневих систем можуть бути змінними, тобто залежати як від узагальнених переміщень $(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n)$, так і від узагальнених сил $(P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n)$

$$U(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_s, P_1 P_2 \dots P_r), \quad s + r = n.$$

Обчислюючи повну першу варіацію від такого загального потенціалу і прирівнюючи її нулю, тобто формулюючи варіаційну проблему, можна цю задачу представити у вигляді частинних варіаційних задач і, відповідно, частинних функціоналів, кількість яких дорівнюватиме кількості сполучень із n елементів по 2 (в задачі можуть бути задані як сили, так і переміщення).

Відомо, що сполучення із n елементів по k елементів це підмножина з k елементів з n -елементної множини, які відрізняються хоча б одним елементом. Число сполучень - C_n^k . Має місце біном Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \quad a = b = 1, \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Тобто загальне число функціоналів даної стержневої системи дорівнює 2^n , оскільки сюди входять функціонали потенціальної енергії повної деформації і доповнювальної потенціальної енергії. Оскільки $U_0 + U^{\text{доп}} = \sum_i P_i \Delta_i$, то кількість

так званих додаткових функціоналів дорівнюватиме $2^n - 2$.

Це положення доведено І.І.Гольденблатом, інколи формулюється як теорема про потенціали будівельної механіки, далі воно розглядається докладно.

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U_0 = U_0(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n).$$

Узагальнена сила як функціонал узагальнених координат

$$P_k = P_k(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n).$$

$$U_0(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n) = \int_0^{(q_1 q_2 \dots q_n)} \sum_i P_i(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n) dq_i ,$$

$$U_{k_1 k_2 \dots k_r}(P_{k_1} P_{k_2} \dots P_{k_r}, \Delta_{s_1} \Delta_{s_2} \dots \Delta_{s_{n-r}}) = U_0 - P_{k_1} \Delta_{k_1} - P_{k_2} \Delta_{k_2} - \dots - P_{k_r} \Delta_{k_r} .$$

Тут $s_1 s_2 \dots s_{n-r}$ має усі значення $1, 2, \dots, n$ за винятком $k_1 k_2 \dots k_r$.

$$\frac{\partial U_{k_1 k_2 \dots k_r}}{\partial \Delta_i} = P_i - \text{для усіх } i \text{ за винятком } k_1 k_2 \dots k_r ;$$

$$\frac{\partial U_{k_1 k_2 \dots k_r}}{\partial P_p} = -\Delta_p - \text{для усіх } p, \text{ що мають значення } k_1 k_2 \dots k_r ;$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \Delta_p} = \frac{\partial P_p}{\partial \Delta_i} - \text{для усіх } i \text{ і } p \text{ не рівних } k_1 k_2 \dots k_r ;$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \Delta_p} = \frac{\partial P_p}{\partial \Delta_i} - \text{для усіх } i \text{ і } p \text{ не рівних } k_1 k_2 \dots k_r ;$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial P_p} = \frac{\partial \Delta_p}{\partial \Delta_i} - \text{для усіх } i \text{ не рівних } k_1 k_2 \dots k_r \text{ і } p, \text{ що мають значення } k_1 k_2 \dots k_r .$$

При цьому слід врахувати, що повний диференціал

$$dU_0 = \sum_i P_i d\Delta_i .$$

Таким чином, існує 2^n функцій $U_{k_1 k_2 \dots k_n}$, включаючи U_0 , які утворюють певну систему функціоналів. В тому числі існує потенціал $u_{1,2,\dots,n}$, який приводить до виразів

$$\frac{\partial U_{1,2,\dots,n}}{\partial P_r} = -\Delta_r ,$$

де $r = 1, 2, \dots, n$.

Цей функціонал з точністю до знаку є узагальненим потенціалом Кастільяно для нелінійних систем.. Тобто, поряд із потенціальною енергією $U_0(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n)$ і потенціалами Кастільяно $U_{1,2,\dots,n}(P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n)$ існує ще $2^n - 2$ потенціалів.

Приклад 7.3. Розглянемо задачу про згин консольної балки, яка навантажена на вільному кінці силою і моментом (рис. 7.11).

Для цієї задачі

$$w = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^2}{2EI}, \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI},$$

потенціальна енергія пружної деформації

$$U_0 = \frac{6EI}{l^2} w^2 + \frac{2EI}{l} \varphi^2 - \frac{6EI}{l^2} w\varphi ,$$

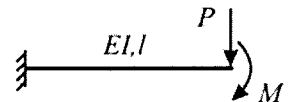


Рис. 7.11

$$U_1(\varphi, P) = U_0 - Pw = -\frac{l^3}{24EI} P^2 + \frac{EI}{2l} \varphi^2 - \frac{l}{2} P\varphi,$$

$$U_2(w, M) = U_0 - M\varphi = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3} w^2 - \frac{1}{8} \frac{M^2 l}{EI} \varphi^2 - \frac{3}{2} \frac{Mw}{l},$$

$$U_{1,2}(P, M) = U_0 - M\varphi - Pw = -\frac{l^3}{6EI} P^2 + \frac{l}{2EI} M^2 + \frac{l^2}{2EI} MP.$$

Останній вираз співпадає з функціоналом Кастильяно. Враховуючи викладене вище, отримаємо:

$$\frac{\partial U_0(w, \varphi)}{\partial \varphi} = M = \frac{4EI}{l} \varphi - \frac{6EI}{l^2} w, \quad \frac{\partial U_1(\varphi, P)}{\partial P} = -w = -\frac{Pl^3}{12EI} - \frac{1}{2} \varphi,$$

$$\frac{\partial U_2(\varphi, P)}{\partial \varphi} = M = \frac{EI}{l} \varphi - \frac{Pl}{2}, \quad \frac{\partial M(\varphi, P)}{\partial P} = -\frac{\partial w(\varphi, P)}{\partial \varphi} \text{ і т.д.}$$

Причому тільки у лінійному випадку потенціал Кастильяно за абсолютною величиною дорівнює потенціальній енергії пружної деформації. У нелінійному випадку

$$|U_0| \neq |U_{1,2,\dots,n}|.$$

Зайві невідомі $X_1 \dots X_n$ в нелінійній статично невизначеній системі можуть бути знайдені із рівнянь

$$\frac{\partial U_{1,2,\dots,n}}{\partial X_r} = 0,$$

де $r = 1, 2, \dots, s$, оскільки узагальнені переміщення $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_s$ за напрямками зайвих невідомих повинні дорівнювати нулеві.

Якщо використати інші потенціали, то можна написати рівняння, що відповідають різним варіантам змішаного методу для розв'язання нелінійних задач будівельної механіки.

Нехай за зайві невідомі прийняті узагальнені сили $X_1 \dots X_k$ і узагальнені переміщення $\Delta_{k+1} \Delta_{k+2} \dots \Delta_n$. Для оптимально обраної основної системи усі переміщення за напрямками $X_1 \dots X_k$ і усі зусилля за напрямками $\Delta_{k+1} \Delta_{k+2} \dots \Delta_n$ повинні дорівнювати нулеві

$$\frac{\partial U_{1,2,\dots,k}}{\partial \Delta_p} = 0, \quad 0 \leq p \leq k, \quad \frac{\partial U_{1,2,\dots,k}}{\partial X_r} = 0, \quad k \leq r \leq n.$$

Усі рівняння є наслідком наступного варіаційного принципу: зайві невідомі $X_1 \dots X_k$ і переміщення $\Delta_{k+1} \Delta_{k+2} \dots \Delta_n$ повинні бути обрані так, щоб відповідний потенціал $U_{1,2,\dots,k}(X_1 X_2 \dots X_k, \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n)$ досягав стаціонарного значення.

7.6.1. Побудова матриць жорсткості і податливості стержневої системи

Розглянемо стержневий елемент, який обома кінцями жорстко приєднується до вузлів (рис. 7.12). Якщо навантаження прикладене до вузлів, то деформування елемента можна розкласти на два етапи.

На першому етапі елемент видовжується на величину $\Delta u = u_j - u_i$ та повертається як жорстке ціле на кут $\psi = \frac{1}{l}(w_j - w_i)$. При цьому ані згинальних моментів, ані поперечних сил в стержні не виникає.

На другому етапі вузол i обертається на кут $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \psi$, а вузол j - на кут $\Delta\varphi_j = -\varphi_j + \psi$.

Таким чином, деформований стан елемента характеризується трьома параметрами $\Delta\varphi_i$, $\Delta\varphi_j$, Δu . Всередині елемента деформації змінюються наступним чином:

$$u(x) = (u_j - u_i) \frac{x}{l}, \quad (7.45)$$

$$\Delta\varphi(x) = \Delta\varphi_i \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) + \Delta\varphi_j \left(2\frac{x}{l} - 3\frac{x^2}{l^2}\right). \quad (7.46)$$

Напружений стан елемента характеризується також трьома параметрами: поздовжньою силою N і згинальними моментами M_i та M_j . Всередині стержня поздовжня сила є постійною, а моменти змінюються за лінійним законом. Постійною також є поперечна сила $Q = \frac{M_j - M_i}{l}$, яка не є незалежним параметром.

Між компонентами деформованого та напруженого станів існують фізичні співвідношення:

$$N = \frac{EF}{l} \Delta u, \quad (7.47)$$

$$M(x) = -EI \frac{d}{dx} \Delta\varphi(x) = \frac{EI}{l} \left[\Delta\varphi_i \left(4 - \frac{6x}{l}\right) + \Delta\varphi_j \left(\frac{6x}{l} - 2\right) \right]. \quad (7.48)$$

Потенціальна енергія пружної деформації елемента обчислюється наступним чином

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l [-M(\Delta\varphi)' + Nu'] dx = \frac{1}{2} EI \int_0^l [(\Delta\varphi)']^2 dx + \frac{1}{2} EF \int_0^l (u')^2 dx = \\ &= \frac{EI}{2l^2} \int_0^l \left[\Delta\varphi_i \left(4 - \frac{6x}{l}\right) + \Delta\varphi_j \left(\frac{6x}{l} - 2\right) \right]^2 dx + \frac{EF(\Delta u)^2}{2l} = \\ &= \frac{2EI}{l} \left[(\Delta\varphi_i)^2 + (\Delta\varphi_j)^2 - \Delta\varphi_i \Delta\varphi_j \right] + \frac{EF}{2l} (\Delta u)^2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

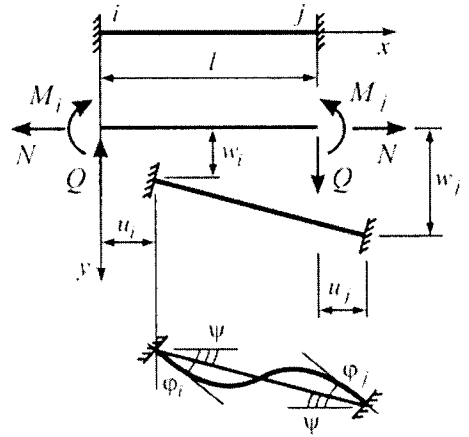


Рис. 7.12

Для того, щоб отримати компоненти матриці жорсткості, візьмемо другі похідні від потенціальної енергії пружної деформації

$$\frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta\varphi_i)^2} = \frac{4EI}{l}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta\varphi_j)^2} = \frac{4EI}{l}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta\varphi_i)\partial(\Delta\varphi_j)} = -\frac{2EI}{l}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta u)^2} = \frac{EF}{l}.$$

Отже, матриця жорсткості елемента, який обома кінцями жорстко приєднується до вузлів, має вигляд

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} & 0 \\ -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Для побудови матриці податливості знайдемо доповнювальну енергію деформації стержня. Моменти всередині стержня подамо наступним чином

$$M(x) = M_i(1 - \frac{x}{l}) + M_j \frac{x}{l}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} U^{\text{доп}} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left[M_i(1 - \frac{x}{l}) + M_j \frac{x}{l} \right]^2 dx + \frac{N^2 l}{2EF} = \\ &= \frac{l}{6EI} [M_i^2 + M_j^2 + M_i M_j] + \frac{l}{2EF} N^2. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Знайдемо другі похідні від додаткової потенціальної енергії по параметрам напруженого стану

$$\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial M_i^2} = \frac{l}{3EI}; \quad \frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial M_j^2} = \frac{l}{3EI}; \quad \frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial M_i \partial M_j} = \frac{l}{6EI}; \quad \frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial N^2} = \frac{l}{EF}.$$

Відповідно матриця податливості стержня матиме вигляд

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EF} \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

Неважко пересвідчитись в тому, що

$$\mathbf{bk} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тобто $\mathbf{b} = \mathbf{k}^{-1}$.

Цілком аналогічно можна показати, що деформації стержневого елемента, який жорстко приєднаний до вузла i та шарнірно – до вузла j , характеризується вектором $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\Delta\varphi_i, \Delta u\}^T$.

Сили, що діють на елемент, характеризуються вектором $\mathbf{S} = \{M_i, N\}^T$.
 Всередині елемента $N = \text{const}$; $M(x) = M_i(1 - \frac{x}{l})$; $u(x) = (u_j - u_i)\frac{x}{l}$;
 $\Delta\varphi(x) = \Delta\varphi_i \left(1 - 3\frac{x}{l} + \frac{3x^2}{2l^2}\right)$.

Потенціальна енергія деформації

$$U = \frac{3EI}{2l}(\Delta\varphi_i)^2 + \frac{EF}{2l}(\Delta u)^2. \quad (7.53)$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}} = \frac{M_i^2 l}{6EI} + \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (7.54)$$

Двічі диференціюючи потенціальну енергію деформації по відповідним параметрам, знаходимо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta\varphi_i)^2} = \frac{3EI}{l}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta u)^2} = \frac{EF}{l}.$$

Таким чином, матриця жорсткості елемента має вигляд

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

Другі похідні функції доповнювальної потенціальної енергії мають значення

$$\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial(M_i)^2} = \frac{l}{3EI}; \quad \frac{\partial^2 U^{\text{доп}}}{\partial N^2} = \frac{l}{EF},$$

а матриця податливості для цього елемента запишеться наступним чином:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & \frac{l}{EF} \end{bmatrix}. \quad (7.56)$$

Знову зовсім неважко помітити, що матриці жорсткості і податливості елемента є взаємно оберненими:

$$\mathbf{bk} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нарешті стержневий елемент, який шарнірно приєднаний до обох вузлів, має наступні характеристики:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\Delta u\}; \quad \mathbf{S} = \{N\}; \quad U = \frac{EF}{2l}(\Delta u)^2; \quad U^{\text{доп}} = \frac{N^2 l}{2EF};$$

$$\mathbf{k} = \left[\frac{EF}{l}\right]; \quad \mathbf{b} = \left[\frac{l}{EF}\right]; \quad \mathbf{bk} = 1 \quad (7.57)$$

Матриця податливості стержневої системи є квадратною матрицею, що має блочно-діагональну структуру. Блоки, що розташовані на головній діагоналі,

являють собою матриці податливості окремих стержнів, а всі інші блоки є нульовими.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Аналогічно може бути побудована матриця жорсткості стержневої системи:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{k}_m \end{bmatrix}, \quad (7.59)$$

де \mathbf{k}_i – це матриці жорсткості окремих елементів системи, вигляд і порядок яких залежить від їхнього типу.

Як і у випадку окремих елементів, матриці податливості і жорсткості є взаємно оберненими:

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}.$$

7.6.2. Приклади. Розбивка матриць на клітини

Матрицю податливості лінійної пружної системи зазвичай будують шляхом послідовного прикладення одиничних сил до деякої множини точок. У свою чергу, матрицю жорсткості такої системи можна отримати, якщо послідовно нав'язувати одиничне переміщення деякій точці з тієї ж множини і одночасно забезпечувати нерухомість інших точок. Ці матриці, як відомо, є взаємно оберненими.

Водночас, матрицею податливості часто називають матрицю системи канонічних рівнянь методу сил, а матрицею жорсткості відповідно - матрицю канонічних рівнянь методу переміщень. Природно, виникає питання, чи існує аналогічна залежність між цими матрицями.

Розглянемо раму, наведену на рис. 7.13,а. Така рама є двічі статично або один раз кінематично невизначуваною. Відповідно матриця податливості основної системи методу сил $\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$ (рис. 7.13,б) має ранг 2, а матриця жорсткості основної системи методу переміщень $[r_{33}]$ (рис. 7.13,в) має ранг 1.

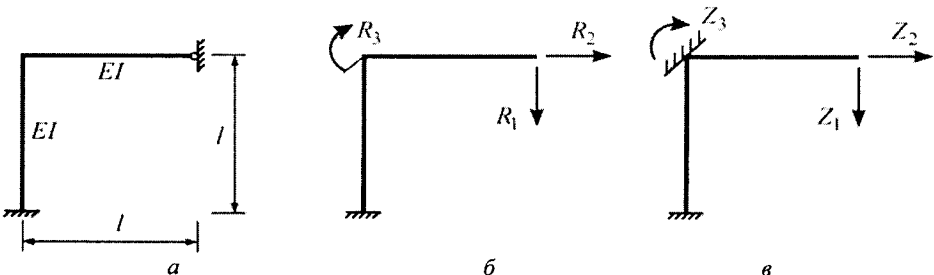


Рис. 7.13

Щоб з'ясувати характер взаємної залежності цих матриць, перш за все, зрівняємо їх ранги. Для цього умовно додамо до основної системи методу сил з невідомими реакціями R_1 та R_2 , які прикладені замість відкинutoї шарнірно нерухомої опори (рис. 7.13,б), зайве “невідоме” R_3 – нульовий момент у фіктивному пружному затисненні основної системи методу переміщень. У свою чергу, до основної системи методу переміщень з невідомим кутом повороту Z_3 (рис. 7.13,в) умовно додамо два зайвих “невідомих” Z_1 та Z_2 – переміщення шарнірної опори, які насправді відсутні.

В результаті будемо мати вектор реакцій $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3\}^T$ та вектор переміщень, $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, Z_3\}^T$. Співвідношення методу сил та методу переміщень в матричному записі набувають вигляду

Метод сил

$$[\delta_{ik}]\mathbf{R} = \mathbf{Z}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

$$R_3 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0$$

Метод переміщень

$$[r_{ik}]\mathbf{Z} = \mathbf{R}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad R_3 = 0$$

Якщо надати всім силам, які діють на основну систему, одиничні значення і розглянути окремі стани, то можна за допомогою формули Максвелла-Мора побудувати матрицю податливості $[\delta_{ik}]_{3 \times 3}$. Одиничні епюри згинальних моментів, необхідні для обчислення компонент матриці податливості, показані на рис. 7.14.

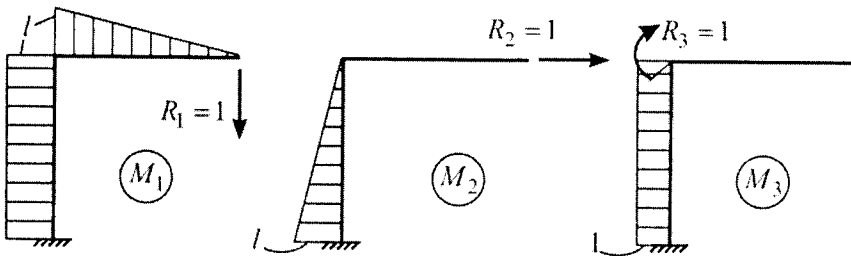


Рис. 7.14

Зважаючи на досить простий вигляд наведених епюр, для обчислення коефіцієнтів δ_{ik} застосовуємо правило Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{ll}{2} \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI} lll = \frac{4l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} \frac{ll}{2} \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI}; \quad \delta_{33} = \frac{1}{EI} l|l = \frac{l}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} ll \frac{l}{2} = \frac{l^3}{2EI}; \quad \delta_{13} = \frac{1}{EI} l|l = \frac{l^2}{EI}; \quad \delta_{23} = \frac{1}{EI} \frac{ll}{2} l = \frac{l^2}{2EI}.$$

Тепер неважко сформулювати матрицю податливості:

$$[\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} \frac{4l^3}{3EI} & \frac{l^3}{2EI} & \frac{l^2}{EI} \\ \frac{l^3}{2EI} & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} = \frac{l^2}{EI} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

Для побудови матриці жорсткості системи, показаної на рис. 7.13,в використаємо епюри згинальних моментів від одиничних переміщень опор (рис. 7.15).

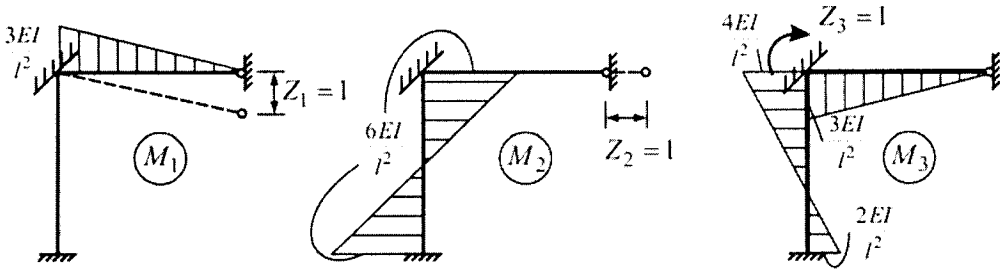


Рис. 7.15

За схемою методу переміщень в канонічній формі з рівноваги вузла та окремих елементів рами знаходимо коефіцієнти матриці жорсткості як реакції в'язей:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{3EI}{l^3}; & r_{12} &= 0; & r_{13} &= -\frac{3EI}{l}; \\ r_{21} &= 0; & r_{22} &= \frac{12EI}{l^3}; & r_{23} &= -\frac{6EI}{l^2}; \\ r_{31} &= -\frac{3EI}{l^2}; & r_{32} &= -\frac{6EI}{l^2}; & r_{33} &= \frac{7EI}{l}. \end{aligned}$$

Отже, розширена матриця жорсткості основної системи методу переміщень має вигляд

$$\mathbf{K} = [r_{ik}] = [\delta_{ik}]^{-1} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 3/l & 0 & -3 \\ 0 & 12/l & -6 \\ -3 & -6 & 7l \end{bmatrix}.$$

Шляхом безпосередніх обчислень можна пересвідчитись в тому, що

$$\mathbf{KB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тобто, як і слід було очікувати розширені матриці $[r_{ik}]$ і $[\delta_{ik}]$ є взаємно оберненими.

Встановивши зв'язок між розширеними матрицями податливості та жорсткості, зазначимо, що для розв'язання задачі за методом сил використовується один блок

$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$ розширеної матриці $[\delta_{ik}]_{3 \times 3}$. Так само для розв'язання задачі за методом переміщень використовується один блок $[r_{33}]$ розширеної матриці $[r_{ik}]_{3 \times 3}$.

Взагалі відомо, що для розв'язання систем лінійних рівнянь та обернення матриць іноді зручно розбивати матриці на блоки (клітини). Так, наприклад, матричному рівнянню

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} = \mathbf{b}$$

можна надати наступний вигляд

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{b},$$

де

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Bmatrix}, m < n.$$

Розв'язання систем матричних рівнянь

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2,$$

приводить до рівняння

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2,$$

яке дає m лінійних рівнянь для перших та невідомих x_1, x_2, \dots, x_m , якщо тільки відома зворотна матриця \mathbf{A}_{22}^{-1} порядку $n - m$. Цей метод особливо зручний, якщо треба знайти лише перші m невідомих.

Зворотна матриця \mathbf{A}^{-1} отримується також розбиттям на клітини.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix},$$

де

$$\mathbf{C}_{11} = \left[\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \right]^{-1}, \mathbf{C}_{21} = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{C}_{11},$$

$$\mathbf{C}_{22} = \left[\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \right]^{-1}, \mathbf{C}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{22},$$

тобто обернення матриць порядку n зводяться до обернення матриць менших порядків (m і $n - m$).

Приклад 7.4. Розглянемо балку, наведену на рис. 7.16,а. Основна система методу сил показана на рис. 7.16,б, а методу переміщень – на рис. 7.16,в. На рисунках 7.16,г,д,е,ж,з,і містяться епюри згинальних моментів, необхідні для побудови розширених матриць податливості і жорсткості.

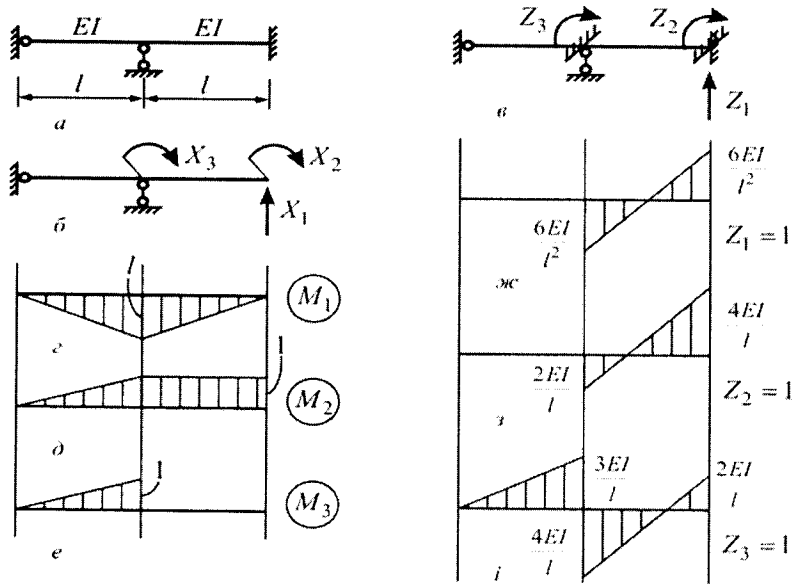


Рис. 7.16

Коефіцієнти матриці податливості, обчислені за допомогою правила Верещагіна, мають значення

$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI}; \delta_{22} = \frac{4l}{3EI}; \delta_{33} = \frac{l}{3EI}; \delta_{12} = \frac{5l^2}{6EI}; \delta_{13} = -\frac{l^2}{3EI}; \delta_{23} = \frac{l}{3EI}.$$

Зв'язок між силами та переміщеннями за наявності матриці податливості має вигляд

$$\delta_{ik} \mathbf{X} = \mathbf{Z},$$

причому, матриця та вектори подаються у блочному вигляді:

$$\mathbf{X}_x = \{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2\}^T, \mathbf{X}_z = \{\mathbf{X}_3\}^T, \mathbf{Z}_x = \{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2\}^T, \mathbf{Z}_z = \{\mathbf{Z}_3\}^T.$$

$$\delta_{ik} = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{xz} \\ \delta_{zx} & \delta_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2l^3}{3EI} & -\frac{5l^2}{6EI} \\ -\frac{5l^2}{6EI} & \frac{4l}{3EI} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{l^2}{3EI} \\ \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{l^2}{3EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

З рівноваги вузла та окремих елементів балки знаходимо коефіцієнти матриці жорсткості:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{12EI}{l^3}; & r_{12} &= \frac{6EI}{l^2}; & r_{13} &= \frac{6EI}{l^2}; \\ r_{21} &= \frac{6EI}{l^2}; & r_{22} &= \frac{4EI}{l}; & r_{23} &= \frac{2EI}{l}; \\ r_{31} &= \frac{6EI}{l^2}; & r_{32} &= \frac{2EI}{l}; & r_{33} &= \frac{7EI}{l}. \end{aligned}$$

Матрицю жорсткості статично визначуваної рами також запишемо у блочному вигляді:

$$\mathbf{r}_{ik} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{7EI}{l} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{xx} & \mathbf{r}_{xz} \\ \mathbf{r}_{zx} & \mathbf{r}_{zz} \end{bmatrix}.$$

Тепер припустимо, що виникла потреба за допомогою матриці податливості знайти клітину матриці жорсткості \mathbf{r}_{zz} . Тоді, користуючись наведеними вище властивостями матриць, розбитих на блоки, знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{zz} &= \delta_{zz} - \delta_{zx} \delta_{xx}^{-1} \delta_{xz} = \frac{l}{3EI} - \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} -l & 1 \end{bmatrix} \frac{3EI}{l} \begin{bmatrix} 2l^2 & -\frac{5}{2}l \\ -\frac{5}{2}l & 4 \end{bmatrix} \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{3EI} - \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} -l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{7l^2} & \frac{10}{7l} \\ \frac{10}{7l} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{l}{3EI} - \frac{l}{3EI} \frac{4}{7} = \frac{l}{7EI}. \end{aligned}$$

Порівнюючи елементи δ_{zz} і \mathbf{k}_{zz} , бачимо, що

$$\mathbf{k}_{zz} = \mathbf{r}_{33} = \bar{\delta}_{zz}^{-1} = \left[\frac{l}{7EI} \right]^{-1} = \frac{7EI}{l}.$$

Тепер, навпаки, припустимо, що виникла потреба за допомогою матриці жорсткості знайти блок матриці податливості δ_{xx} . Користуючись властивостями матриць, розбитих на блоки, знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_{xx} &= \mathbf{r}_{xx} - \mathbf{r}_{xz} \mathbf{r}_{zz}^{-1} \mathbf{r}_{zx} = \frac{6EI}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & l \\ l & \frac{2}{3}l^2 \end{bmatrix} - \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{l} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{6EI}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & l \\ l & \frac{2}{3}l^2 \end{bmatrix} - \frac{6EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2l}{7} \\ \frac{2l}{7} & \frac{2l^2}{21} \end{bmatrix} = \frac{6EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & \frac{5}{7}l \\ \frac{5}{7}l & \frac{4}{7}l^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тепер

$$\bar{\delta}_{xx} = \bar{r}_{xx}^{-1} = \left(\frac{6EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & \frac{5l}{7} \\ \frac{5l}{7} & \frac{4}{7}l^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{5}{l} \\ -\frac{5}{l} & \frac{8}{l^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2l^3}{3EI} & -\frac{5l^2}{6EI} \\ -\frac{5l^2}{6EI} & \frac{4l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Отже, для знаходження окремого блока матриці жорсткості немає необхідності обертати всю матрицю податливості і навпаки.

Нарешті розглянемо ту саму задачу з позицій змішаного методу. Невідомими є реакції X_1 , X_2 і кут повороту перерізу над середньою опорою Z_3 (рис. 7.17,а). Фізичний зміст перших двох рівнянь полягає у рівності нулю переміщень Z_1 та Z_2 , а третього рівняння – у відсутності реакції X_3 у пружному затисненні.

Така система природнім чином розбивається на клітини:

$$\mathbf{X}_x = \{X_1 X_2\}^T, \quad \mathbf{X}_z = \{X_3\}^T, \quad \mathbf{Z}_x = \{Z_1 Z_2\}^T, \quad \mathbf{Z}_z = \{Z_3\}^T.$$

$$\delta_{xx} \mathbf{X}_x + \delta_{xz} \mathbf{Z}_z = \mathbf{Z}_x, \quad r_{zx} \mathbf{X}_x + r_{zz} \mathbf{Z}_z = \mathbf{X}_z.$$

Коефіцієнти системи рівнянь визначасмо, користуючись епюрами моментів, наведеними на рис. 7.17,б,в,г:

$$\delta_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix},$$

$$r_{zx} = [l \quad -1], \quad \delta_{xz} = \begin{bmatrix} -l \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_{zz} = \frac{3EI}{l}.$$

Якщо головним предметом дослідження є реакції X_1 і X_2 , то можемо розглянути редуковану систему

$$\bar{\delta}_{xx} \mathbf{X}_x = \mathbf{Z}_x,$$

де

$$\bar{\delta}_{xx} = \delta_{xx} - \delta_{xz} r_{zz}^{-1} r_{zx} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3EI} [l \quad -1] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{3EI} \\ -\frac{l^2}{3EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2l^3}{3EI} & -\frac{5l^2}{6EI} \\ -\frac{5l^2}{6EI} & \frac{4l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що саме таку систему отримаємо, якщо будемо розглядати систему безпосередньо з позицій методу сил (рис. 7.16,б). Епюри згинальних моментів в одиничних станах показані на рис. 7.18.

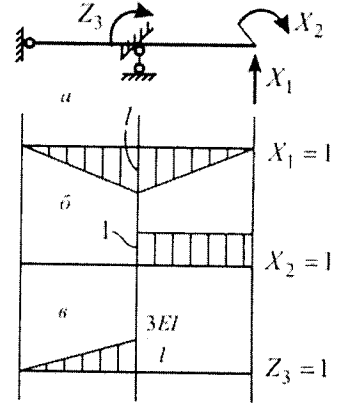


Рис. 7.17

Обчислюючи коефіцієнти матриці податливості, переконаємось, що вони мають значення, які повністю збігаються з коефіцієнтами матриці $\bar{\delta}_{xx}$:

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{1}{3} l^2 = \frac{2l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{1}{3} l^2 + \frac{1}{EI} 1 \cdot l = \frac{4l}{3EI};$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} l = -\frac{5l^2}{6EI}.$$

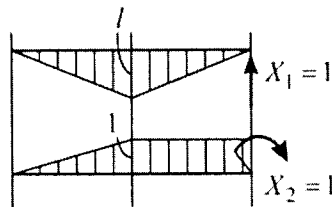


Рис. 7.18

Якщо головний інтерес становить кут повороту Z_3 , то розглядається редукована система

$$\bar{r}_{zz} Z_z = X_z,$$

де

$$\bar{r}_{zz} = r_{zz} - r_{zx} \delta_{xx}^{-1} \delta_{xz} = \frac{3EI}{l} [l \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3EI}{l} [l \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3EI}{l} + \frac{4EI}{l} = \frac{7EI}{l}.$$

Таку саму матрицю $\bar{r}_{zz} = r_{33} = \frac{7EI}{l}$ отримаємо, якщо будемо розглядати систему безпосередньо за методом переміщень (рис. 7.19).

Насамкінець розглянемо приклад розрахунку статично невизначуваної нерозрізної балки (рис. 7.20,а). Основна система методу сил показана на рис. 7.20,б, а методу переміщень – на рис. 7.20,в. На рисунках 7.20,г,д,е,ж,з,і містяться епюри згинальних моментів в одиничних та вантажних станах. Дійсна епюра моментів показана на рис. 7.20,к.

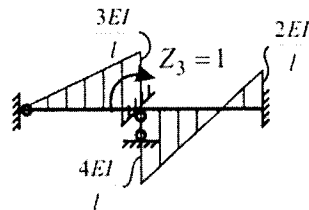


Рис. 7.19

Системи розв'язувальних рівнянь при розрахунку за методом сил та методом переміщень в матричному вигляді записуються наступним чином:

<i>Метод сил</i>	<i>Метод переміщень</i>
$\delta_{ik} \mathbf{R} + \Delta_{ip} = \mathbf{Z}.$	$r_{ik} \mathbf{Z} + \mathbf{R}_{ip} = \mathbf{R}.$
З урахуванням того, що	
$R_1 = X_1; R_2 = 0; Z_1 = 0; Z_2 = ?$	$Z_1 = 0; Z_2 = ?; R_1 = ?; R_2 = 0.$
маємо такі системи рівнянь	
$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$	$r_{12} Z_2 + R_{1p} = R_1,$
$\delta_{21} X_1 + \Delta_{2p} = Z_2.$	$r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0.$

Коефіцієнти та матриці цих рівнянь

$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI}; \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^2}{3EI}; \delta_{22} = \frac{l}{3EI}; \quad r_{12} = \frac{3EI}{l^2}; R_{1p} = 0, r_{22} = \frac{6EI}{l}; R_{2p} = \frac{ql^2}{8},$$

$$\delta_{ik} = \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} 2l^2 & -l \\ -l & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{ik} = \frac{3EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{ql^4}{24EI}, \Delta_{2p} = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

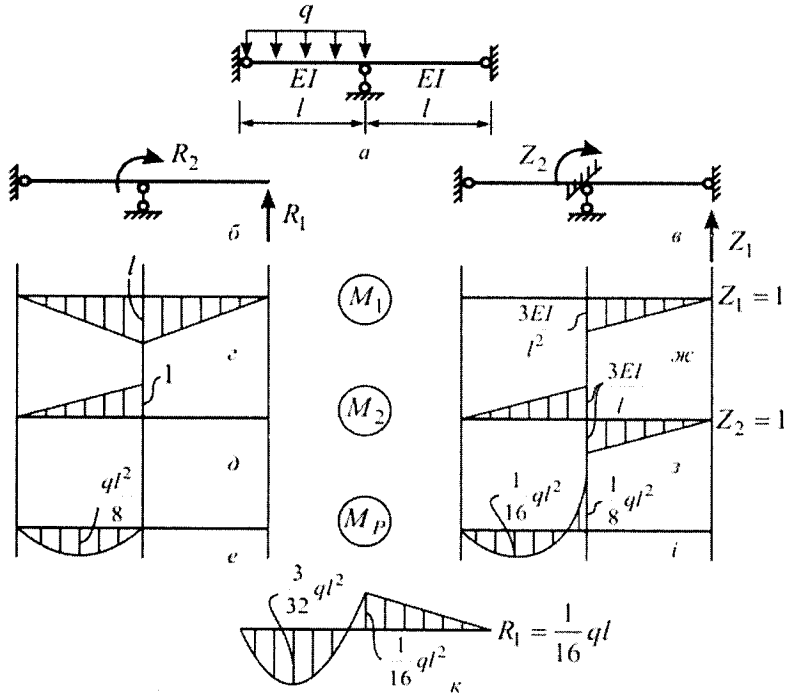


Рис. 7.20

Неважно пересвідчитись, що матриці податливості та жорсткості є взаємно оберненими: $r_{ik} = \delta_{ik}^{-1}$.

Розв'язок системи

з першого рівняння

$$X_1 = -\frac{ql}{16},$$

з другого рівняння

$$Z_2 = \delta_{21}X_1 + \Delta_{2p} = -\frac{l^2}{3EI} \left(-\frac{ql}{16} \right) - \frac{ql^3}{24EI} = -\frac{ql^3}{48EI}.$$

з другого рівняння

$$Z_2 = -\frac{ql^3}{48EI},$$

з першого рівняння

$$R_1 = \frac{3EI}{l^2} \left(-\frac{ql^3}{48EI} \right) + 0 = -\frac{ql}{16}.$$

7.7. Двоїста природа теорії споруд

Загальновідомо, що умови рівноваги, закон поведінки матеріалу і кінематичні співвідношення дають 15 рівнянь або диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно 15 невідомих скалярних функцій трьох змінних, а саме:

- трьох переміщень,
- шести деформацій,
- шести напружень.

Логічне ядро теорії пружності характеризується цією триединою структурою. При вирішенні задач теорії пружності використовуються два підходи: виключення напружень і виключення переміщень.

Якщо, у разі повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла, деформації і напруження виключені з системи рівнянь, векторне диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{(1-2 \cdot \nu)} \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \mathbf{g} = 0.$$

Ця система трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно вектора переміщень \mathbf{u} при відомих об'ємних силах \mathbf{k} і двох константах матеріалу E (модуль пружності) і ν (коефіцієнт Пуассона) плюс геометричні граничні умови була названа на честь Габрієля Ламе і Клод-Луї Марі Анрі Нав'є¹. Об'єднавши рівняння і крайові умови, отримаємо вирішення диференціальних рівнянь в переміщеннях Ламе-Нав'є, яке названо терміном "метод переміщень" математичної теорії пружності.

Другий шлях полягає у виключенні переміщень і деформацій і переході - знову для випадку повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла – до тензорного диференціального рівняння, названого на честь Еуженіо Бельтрамі² і Джона Генрі Мічелла³:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} = - \left[\text{grad} \mathbf{g} + \text{grad}^T \mathbf{g} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \cdot (\text{div} \mathbf{g}) \cdot I \right].$$

Зважаючи на силові крайові умови, компоненти тензора напружень σ_{ij} (s - сума діагональних компонент тензора напружень σ_{ij} , I - одиничний тензор) можуть бути визначені з цієї системи шести диференціальних рівнянь в частинних похідних.

¹ Нав'є, Клод-Луї Марі-Анрі Нав'є (фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier, 1785–1836) – французький інженер і учений, автор ряду праць з будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності, гідравліки і гідродинаміки, автор першого курсу опору матеріалів (1826). Є одним з фундаторів теорії пружності. В 1821 р. сформулював основні рівняння математичної теорії пружності, сформулював рівняння, які потім були названі рівняннями Нав'є-Стокса, створив концепцію кількості руху.

² Бельтрамі, Еуженіо (іт. Eugenio Beltrami, 1835–1900) – італійський математик, відомий своїми працями з диференціальної геометрії і математичної фізики. Починаючи з 1871 р. займався дослідженнями в галузі аналітичних функцій і механіки.

³ Мічелл, Джон Генрі (англ. John Henry Michell, 1863–1940) – австралійський математик і механік. Роботи у галузі математики, фізики, гідравліки й теорії пружності. Встановив у теорії пружності диференціальні залежності між компонентами напружень (1899). Дав розв'язок двовимірної задачі теорії пружності (1899).

Підходи, що приводять до вирішення диференціальних рівнянь Бельтрамі-Мічелла в напруженнях, названі "методом сил" математичної теорії пружності.

У літературі перший підхід, що використовує диференціальні рівняння в переміщеннях Ламе-Нав'є і геометричні крайові умови (умови, що визначають переміщення на поверхні тіла) названий першою крайовою задачею, а другий підхід, що використовує диференціальні рівняння Бельтрамі-Мічелла в напруженнях і статичні крайові умови (умови, що визначають сили на поверхні тіла) називають другою крайовою задачею теорії пружності. Можливий також третій підхід для розв'язання задач теорії пружності, коли на одній частині поверхні тіла S_1 задані напруження, а на іншій частині S_2 – переміщення.

Розробка методу переміщень та пов'язане з цим виявлення двоїстої природи теорії споруд забезпечило найпотужніше просування знань у цій фундаментальній будівельній теоретичній дисципліні під час її консолідації. Загальна теорема роботи (рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил), яку з успіхом застосовував Мор починаючи з 1874 р. для розкритих систем, має двоїсту структуру: принцип можливих змін напруженого стану (основа методу сил) і принцип можливих переміщень (основа методу переміщень, рис. 7.21).



Рис. 7.21

У теорії статично невизначуваних систем і практиці розрахунку конструкцій метод сил, що базується на принципі можливих змін напруженого стану, швидко став домінувати в прямій або посередній формі теорем Кастільяно (2-а теорема Кастільяно). Це було зумовлено загальною тенденцією до формалізації аналізу споруд, яка знайшла своє втілення у δ -символах. Хоча Мор і його студент Роберт Ланд (1857–1899) визнавали фундаментальну роль принципу можливих переміщень, метод переміщень залишався на другому плані. Одна з причин полягала, звісно, в тому, що формулюванням на основі умов рівноваги надавали перевагу, як більш знайомим для інженерів. Тим не менш, δ – символи, близько зв'язані з методом сил, передбачили метод переміщень в формальних термінах і сприяли його висуненню на передній план.

Метод переміщень, розвинений Людвігом Манном у 1927 р. на основі формалізму Лагранжа, приводить до системи рівнянь зі змінними переміщеннями у вигляді невідомих і іноді згадується як рівняння пружності 2 типу. Манн вперше використовував принцип можливих переміщень для визначення зусиль у в'язях. Формальний розвиток методу переміщень йшов за методом сил. Двоїста природа стала очевидною вже в 1903 р., коли вийшла книга В.Л.Кирпічова "Лишние неизвестные в строительной механике"¹, яка містить всього 140 сторінок. У ній Кирпічов розвивав теоретичні основи як методу сил, так і методу переміщень. Друге видання цієї зовні невибагливої, але дуже змістовної роботи вийшло через 21 рік після смерті її автора. Цікаво зазначити, що В.Л.Кирпічов був у 1885–1898 рр. засновником і першим директором Харківського технологічного, а у 1898–1913 рр. - засновником і першим директором Київського політехнічного інституту. Одним із відомих учнів В.Л.Кирпічова був С.П.Тимошенко, який писав про нього «Его совет принес мне большую пользу. Он помог мне определить направление моей дальнейшей деятельности» [92]. Вчителем С.П.Тимошенка був також професор Київського політехнічного інституту К.К.Симінський².

На жаль, книга Кирпічова ніколи не з'явилась на англійській, чи французькій, або німецькій мовах. Тому користь для формування теорій аналізу споруд вона принесла тільки в Росії і Радянському Союзі. На заході вона була проігнорована внаслідок незнання російської мови. Тільки після запуску першого штучного супутника (1957) почалося поступове визнання на заході наукового прогресу, досягнутого в Росії і Радянському Союзі. Одним із прикладів цього визнання було видання книги І.М.Рабіновича "Строительная механика в СССР 1917–1957" англійською в перекладі Джорджа Херрманна. У цій роботі Рабінович окрім іншого робить огляд найважливіших публікацій по методу сил і методу переміщень, котрі з'явилися в Радянському Союзі за 40 років. Видатною в цьому відношенні є

¹ Кирпічов Віктор Львович (1845 – 1913) – російський фізик, професор механіки. Праці: *Беседы о механике.* – С.-Пб.: К.Л.Риккер, 1907. *Лишние неизвестные в строительной механике: Расчёт статически неопределимых систем.* – 2-е изд. – М.-Л. : Гостехиздат, 1934. Учитель С.П.Тимошенко.

² Симінський Костянтин Костянтинович (1879 – 1932) – інженер-дослідник будівельної механіки, професор Київського політехнічного інституту, дійсний член АН УРСР (з 1926 року; у 1931-1932 р.р. – її віце-президент). Створив теорію міцності гранітів, досліджував просторові конструкції.

монографія А.А.Гвоздьова, датована 1927 р., оскільки в ній вперше в російській технічній літературі був в повному обсязі представлений метод переміщень. До 1933 р. Я.М.Ріппенбейном була закладена основа тривимірного методу переміщень, який через три роки Б.М.Горбунов і Ю.В.Кротов представили за допомогою тензорної алгебри у формі "моторної символіки"^{1,2} Ріхарда фон Мізеса³. Продовження формалізації методу переміщень було зроблене Д.В.Вайнбергом і В.Г.Чудновським. В монографії яка вийшла в 1948 р., було представлено тривимірний метод переміщень в тензорній формі. У цій роботі відображена також важливість обчислювальних аспектів теорії розрахунку споруд.

Інший шанс довести свою рівнозначність методу сил з'явився у методі переміщень в 1938 р., коли вийшла робота Арно Шлеуснера, в якій за допомогою апарату варіаційного числення ясно показана концептуальна розбіжність між принципом можливих змін напруженого стану і принципом можливих переміщень при малих переміщеннях.

У 1957 р. Аргіріс представив матричне формулювання теорії статично невизначуваних систем і сформулював теорію розрахунку споруд в матричному вигляді⁴. Описуючи спонукальні мотиви своєї роботи, Аргіріс відмічав, що жоден із звичайних статичних методів не може ефективно застосовуватися для визначення полів напружень і матриці податливості сильно статично невизначуваних систем сучасних авіаконструкцій. Подібні труднощі мають місце і в інших додатках статички. Корисними в деяких випадках можуть виявитися ітераційні методи, але в цілому вони занадто трудомісткі для розрахунку несучих авіаконструкцій мембранного і оболонкового типу. Здолати ці труднощі виявилось можливим за допомогою матричного формулювання статички, орієнтованого на використання електронно-цифрових обчислювальних машин. Матричне формулювання не лише дозволяє робити обчислення найбільш ясним способом, але є також ідеальною формою запису для цифрових комп'ютерів. Викладки матричної теорії настільки прозорі і зрозумілі, що нові, практично цінні співвідношення, котрі за звичайного запису були б неможливими і важко осяжними, тепер вдається отримати дуже легко.

Для розрахунку конструкції тепер необхідно лише три основні прості матриці плюс вектор-стовпець навантаження. Крім того, аналіз в матричній формі дозволяє також впоратися з нелінійно-пружними і динамічними задачами. Аргіріс сформував словник практичних термінів:

¹ Слідуючи за поняттям «мотора», введеного Е.Штуді в 1903 р. математик Ріхард фон Мізес розвинув математичну допомогу механікам у формі «моторної символіки».

² Штуді, Едуард (нім. Study Eduard, 1862–1930) – німецький математик, геометр. Приймав участь у розвитку символічних позначень у теорії інваріантів.

³ Ріхард Едлер фон Мізес (нім. Richard Edler von Mises, 1883–1953) – математик і механік австрійського походження. Народився у м. Лемберг, Австро-Угорщина (тепер Львів, Україна). Основні роботи присвячені аеродинаміці, прикладній механіці, механіці рідин, аеронавтиці, статистиці і теорії ймовірностей. Досліджував стійкість циліндричних оболонок, ввів „моторну символіку”.

⁴ Перші ідеї використання матриць в аналізі споруд були виражені Едвардом Штуді ще в 1903 р.

7. ЕНЕРГЕТИЧНІ ТЕОРЕМИ І ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Метод сил	↔	Метод переміщень
Сили	↔	Переміщення
Напруження	↔	Деформації
Внутрішні сили	↔	Переміщення вузлів
Податливість = Переміщення:Сила	↔	Жорсткість= Сила:Переміщення
Метод одиничного навантаження	↔	Метод одиничного переміщення
Статично визначувана система	↔	Кінематично визначувана система
Статично невизначувана система	↔	Кінематично невизначувана система
Матриця податливості	↔	Матриця жорсткості
Узагальнення сили	↔	Узагальнення переміщення
...	↔	...

і показав в матричному формулюванні двійсту природу теорії споруд :

Метод сил		Метод переміщень	
Сила R		Переміщення r	
Податливість F	$FK=I=KF$	Жорсткість K	
Переміщення r		Сила R	
Узагальнена сила Q $R=BQ$		Узагальнене переміщення q $R=AQ$	
Узагальнена податливість $F_q=B'FB$	$A'B=I=B'A$ $F_qK_q=I=K_qF_q$	Узагальнена жорсткість $K_q=A'KA$	
Узагальнене переміщення $q=B'r=F_qQ$		Узагальнена сила $Q=A'R=K_qq$	
Узагальнене послідовне збирання		Узагальнене паралельне збирання	
Напруження в елементах S $S=BR$		Деформації в елементах v $v=ar$	
Деформації в елементах v $r=\bar{b}'v$		Напруження в елементах S $R=\bar{a}'S$	
Податливість елементів f (від напружень S)		Жорсткість елементів k (від деформацій v)	
Податливість всієї споруди $F=\bar{b}'fb$		Жорсткість всієї споруди $K=\bar{a}'ka$	
Завжди можливо замінити a, b відповідно на \bar{a}', \bar{b}'			
ДОДАВАННЯ ПОДАТЛИВОСТЕЙ (Спеціальне послідовне збирання)		ДОДАВАННЯ ЖОРСТКСТЕЙ (Спеціальне паралельне збирання)	
 <p style="text-align: center;">$F_a + F_b = F$</p>		 <p style="text-align: center;">$K_a + K_b = K$</p>	

Аргіріс таким чином досяг успіху в перетворенні аналізу споруд на закінчену формалізовану теорію; він підвів підсумки серії своїх піонерних статей в 1960 р. в спільній з С.Келсі монографії «Енергетичні теореми і аналіз споруд». Описуючи історію створення методу скінченних елементів, Рей В.Клаф дуже справедливо оцінив цю монографію як найбільш важливу роботу, коли-небудь написану по теорії аналізу споруд¹.

¹ Есе Аргіріса (1965) „Комп’ютер формує теорію”.

8. Побудова рівнянь руху пружних систем на основі дискретних моделей

Визначальним моментом динамічного розрахунку є процедура побудови системи рівнянь, які безпосередньо використовуються для аналізу коливань деформівної конструкції. З цією метою, як правило, використовується скінченна система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Кількість рівнянь в системі дорівнює кількості ступенів свободи моделі, що застосовується.

Якщо розглядуваний об'єкт являє собою набір дискретних мас, з'єднаних безмасовими пружними елементами, то побудувати систему рівнянь можна прямим застосуванням принципів механіки, які розглядатимуться далі. У складніших випадках дискретна модель будується за допомогою прийомів, що полягають у зосередженні мас в окремих точках споруди або у введенні жорстких дисків, які мають масу та скінченні розміри і з'єднані з пружною безмасовою системою. Для континуальних систем, де така ідеалізація є дуже грубою, системи рівнянь будують з використанням прямих методів.

Якість розрахункової динамічної моделі залежить від того, як точно вона описує динамічні процеси, що відбуваються в розглядуваній механічній системі. При розв'язанні конкретних задач доцільно використовувати моделі з невеликою кількістю ступенів свободи. Виявляється, що в багатьох практично важливих випадках застосування таких моделей дає добрі результати.

У динаміці споруд при виведенні рівнянь руху використовуються три підходи. Перші два базуються на диференціальних принципах механіки – принципі Д'аламбера¹ та принципі можливих переміщень, а третій – на інтегральному принципі механіки – принципі Гамільтона².

8.1. Метод динамічної рівноваги

Одним з широко застосовуваних методів побудови рівнянь руху є підхід, що базується на принципі Д'аламбера. Згідно з принципом Д'аламбера, якщо до заданих активних сил, які діють на точку механічної системи, і реакцій в'язей, які накладаються, додати сили інерції, дістанемо врівноважену систему сил.

¹ Д'аламбер, Жан Лерон (Д'аламбер, Даламбер; фр. Jean Le Rond d'Alembert, D'Alembert; 1717–1783) – французький учений-енциклопедист. Широко відомий як філософ, математик і механік. Його «Трактат о динамике» (1743) є першою роботою, де були сформульовані загальні принципи складання диференціальних рівнянь руху матеріальних систем, причому задачі динаміки зводились до задач статики. Д'аламбер по суті розповсюдив на динаміку застосування принципу віртуальних переміщень. Основні математичні дослідження Д'аламбера відносяться до теорії диференціальних рівнянь. Його праці разом з дослідженнями Л.Ейлера і Д.І.Бернуллі стали основою математичної фізики.

² Гамільтон, Вільям Роуен (англ. William Rowan Hamilton, 1805–1865) – видатний ірландський математик і фізик XIX ст. Основні роботи присвячені математичній оптиці, механіці, варіаційному численню. Встановив для консервативних систем загальний інтегральний варіаційний принцип класичної механіки (1833). Цей принцип був узагальнений М.В.Остроградським (1850) на неконсервативні системи (принцип Гамільтона-Остроградського).

Розглянемо шарнірну систему, яка складається з лінійно-пружних стержнів, що несуть зосереджену масу m у вузлі. На масу діє вертикальна сила $P(t)$ (рис. 8.1,а).

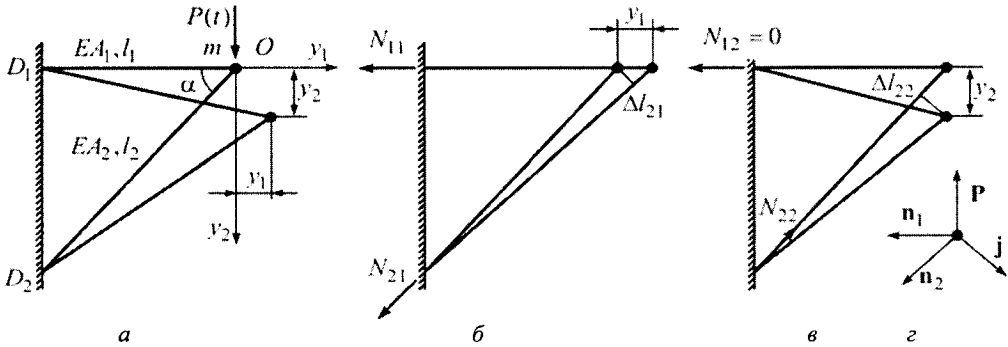


Рис. 8.1

Положення маси визначається двома координатами: $y_1(t)$ і $y_2(t)$. Якщо знехтувати масою стержнів, то розглядувана динамічна система матиме два ступені свободи. Складемо рівняння руху маси.

На рис. 8.1,б і 8.1,в зображено два незалежних деформованих стани системи: перший $y_1 \neq 0, y_2 = 0$ і другий $y_1 = 0, y_2 \neq 0$. Зміна довжини стержнів D_1O і D_2O , що відповідає першому деформованому стану, визначається такими співвідношеннями:

$$\Delta l_{11} = y_1, \quad \Delta l_{21} = y_1 \cos \alpha. \quad (8.1)$$

Зміна довжини стержнів, що відповідає другому деформованому стану, задається такими виразами:

$$\Delta l_{12} \cong 0, \quad \Delta l_{22} = -y_2 \sin \alpha \quad (8.2)$$

Зміна довжини стержнів, що відповідає деформованому стану, який зображено на рис.8.1,а, записується у вигляді

$$\Delta l_1 = y_1, \quad \Delta l_2 = y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha. \quad (8.3)$$

Згідно із законом Гука зусилля в стержнях, що відповідають цьому деформованому стану, визначаються так:

- у стержні D_1O

$$N_1 = \Delta l_1 EF_1 / l_1 = s_1 y_1, \quad (8.4)$$

- у стержні D_2O

$$N_2 = \Delta l_2 \cdot EF_2 / l_2 = \Delta l_{21} EF_2 / l_2 + \Delta l_{22} EF_2 / l_2 = s_2 (y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha), \quad (8.5)$$

де

$$s_1 = \frac{EF_1}{l_1}, \quad s_2 = \frac{EF_2}{l_2}. \quad (8.6)$$

Відокремимо масу від стержнів, замінивши їх дію відповідними реакціями. Таким чином, в процесі руху на масу діє сила P і реакції в'язей N_1 і N_2 . Прикладемо також сили інерції J_1 і J_2 , що діють у додатному напрямі відповідних осей і визначаються так:

$$J_1 = -\ddot{m}y_1, \quad J_2 = -\ddot{m}y_2. \quad (8.7)$$

8. ПОБУДОВА РІВНЯНЬ РУХУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ

Діаграму сил, що діють на матеріальну точку, зображено на рис. 8.1,з, де вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (-N_1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = (-N_2 \cos \alpha, N_2 \sin \alpha), \\ \mathbf{p} &= (0, P), \quad \mathbf{j} = (J_1, J_2). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Згідно з принципом Д'аламбера ця система сил є врівноваженою. Таким чином, маємо таку векторну рівність:

$$\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{p} + \mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (8.9)$$

Записуючи покоординатно рівняння (8.9), дістаємо

$$J_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha = 0, \quad J_2 + N_2 \sin \alpha + P = 0. \quad (8.10)$$

Підставляючи в (8.10) співвідношення (8.5) – (8.7), визначасмо

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1 - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_2 &= 0, \\ m\ddot{y}_2 - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_1 + s_2 \sin^2 \alpha y_2 &= P(t). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Систему (8.11) зручно записати в матричному вигляді:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{p}, \quad (8.12)$$

де $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ – вектор переміщень; \mathbf{M} – матриця мас,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad (8.13)$$

\mathbf{K} – матриця жорсткості:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \cos^2 \alpha & -s_2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -s_2 \sin \alpha \cos \alpha & s_2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Отже, вимушені коливання конструкції описуються системою двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Значимо, що при побудові рівнянь руху не враховувалися сили опору руху.

Таким чином, для складання рівнянь руху було застосовано принцип Д'аламбера у поєднанні з методом переміщень. Часто з цією метою використовується поєднання принципу Д'аламбера з іншим методом будівельної механіки – методом сил.

Продемонструємо цей підхід на прикладі шарнірної системи, яка розглядалася раніше (рис. 8.1,а). Позначимо δ_{ik} – переміщення у напрямі y_i від дії одиничної сили у напрямі y_k ($i, k=1, 2$). У напрямі y_1 діє сила інерції J_1 , а у напрямі y_2 – сила інерції J_2 та зовнішнє навантаження $P(t)$. Рівняння для переміщень маси, які складаються з використанням методу сил, мають вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} J_1 + \delta_{12} (J_2 + P(t)), \\ y_2 &= \delta_{21} J_1 + \delta_{22} (J_2 + P(t)). \end{aligned} \quad (8.14)$$

З урахуванням (8.7), систему (8.14) переписемо так:

$$\begin{aligned} \delta_{11} m\ddot{y}_1 + \delta_{12} m\ddot{y}_2 + y_1 &= \delta_{12} P(t), \\ \delta_{21} m\ddot{y}_1 + \delta_{22} m\ddot{y}_2 + y_2 &= \delta_{22} P(t). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Введемо матрицю податливості розглядуваної механічної системи:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Матриці податливості і жорсткості пружної системи є симетричними внаслідок відомих з курсу статки теорем про взаємність переміщень (теорема Максвела) і взаємність реакцій (теорема Релея). Існує також теорема про взаємність реакцій і переміщень (п.7.3). Згадані теореми узагальнюються на область динаміки лінійних пружних конструкцій. В звичних для будівельної механіки термінах ці теореми сформульовані в роботі [75].

З урахуванням (8.13) та (8.16) систему (8.15) перепишемо у векторному вигляді:

$$\mathbf{VM}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{p}. \quad (8.17)$$

Система (8.17) еквівалентна системі (8.12). Справді, помноживши векторну рівність (8.17) на матрицю жорсткості \mathbf{K} , запишемо

$$\mathbf{KVM}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{KV}\mathbf{p},$$

звідки, з урахуванням того, що матриця податливості \mathbf{V} обернена до матриці жорсткості \mathbf{K} , дістанемо (8.12).

Для простих динамічних систем найефективнішим є метод динамічної рівноваги.

8.2. Принцип можливих переміщень

Якщо розглядувана механічна система має складну структуру і складається з дискретних мас та тіл скінченних розмірів, безпосередньо записати рівняння динамічної рівноваги дуже важко. У такому разі часто ефективним є застосування принципу можливих переміщень (принципу Д'аламбера-Лагранжа).

Можливими (віртуальними) називаються нескінченно малі переміщення, за допомогою яких можна перевести систему з однієї конфігурації в іншу, що наближена до неї і відноситься до такого самого моменту часу, без порушення накладених в'язей.

В задачах динаміки принцип можливих переміщень або загальне рівняння динаміки формулюється так: рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Принцип можливих переміщень еквівалентний рівнянням динамічної рівноваги, проте варіаційне формулювання, що наводитиметься далі, набагато ширше застосовується в задачах механіки.

Повернемося до задачі, яку показано на рис.8.1,а. Вектор можливих переміщень $\delta\mathbf{r}$ визначається варіюванням δy_1 і δy_2 двох незалежних параметрів y_1 і y_2 :

$$\delta\mathbf{r} = (\delta y_1, \delta y_2)^T. \quad (8.18)$$

У цьому разі аналітично принцип можливих переміщень записується у вигляді

$$(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{p} + \mathbf{j}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0, \quad (8.19)$$

де символом (\cdot) позначено операцію скалярного добутку.

В механіці рівняння (8.19) називається загальним рівнянням динаміки. В покоординатному вигляді рівняння (8.19) переписується так:

$$(J_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha) \delta y_1 + (J_2 - N_2 \sin \alpha + P) \delta y_2 = 0. \quad (8.20)$$

Оскільки варіації δy_1 і δy_2 незалежні, рівність (8.20) виконуватиметься тільки тоді, коли множники при δy_1 і δy_2 дорівнюють нулю. Таким чином, ми знову приходимо до системи (8.10), а від неї – до системи (8.12).

З огляду на викладене доходимо висновку, що коли як вихідний прийняти принцип Д'аламбера, то з нього виводиться принцип можливих переміщень, і навпаки.

8.3. Принцип Гамільтона-Остроградського. Двоїстий принцип Гамільтона-Пуанкаре

Інтегральним підходом, за допомогою якого можна реалізувати ефективні алгоритми побудови рівнянь руху, є принцип Гамільтона. Цей варіаційний принцип виконується як для скінченномірних, так і для континуальних динамічних систем. З метою спрощення викладу розглянемо скінченномірні динамічні системи.

Нехай стан деякої механічної системи характеризується n узагальненими координатами $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$. Розглянемо $(n+1)$ -мірний розширений координатний простір q_1, q_2, \dots, q_n, t (рис. 8.2). Нехай в момент часу t_1 механічна система знаходиться в точці B , що визначає деякий динамічний стан системи. Припустимо, що система зазнає деякого динамічного впливу. Внаслідок цього впливу стан системи еволюціонуватиме.

Узагальнені координати

$$\mathbf{q}^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t), \dots, q_n^0(t))^T$$

опишуть деяку криву в розглядуваному координатному просторі. Нехай в момент часу t_2 система знаходитиметься в точці C . Отже, за проміжок часу від t_1 до t_2 механічна система перемістилася по кривій BC .

Кожному моменту часу $t \in [t_1, t_2]$ відповідає деяка точка на кривій BC . Під дією сил, що прикладаються, механічна система деформується. В кожний момент часу t можна визначити кінетичну енергію системи $T(t)$, енергію деформації $U(t)$, а також роботу $A(t)$ зовнішніх сил на відповідних переміщеннях; до зовнішніх сил належать також неконсервативні сили опору руху (дисипативні сили). Коли б система рухалася по іншій кривій, що з'єднує точки B і C , то кожному моменту часу t відповідали б, взагалі кажучи, інші значення T, U і A .

Розглянемо однопараметричне сімейство кривих

$$\mathbf{q}(t, \alpha) = (q_1(t, \alpha), q_2(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha))^T.$$

Скаляр α є параметром. Припустимо, що параметр вибрано так, що при $\alpha=0$ крива $\mathbf{q}(t, 0)$ збігається з кривою руху системи ("прямий шлях"), тобто

$$\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}^0(t).$$

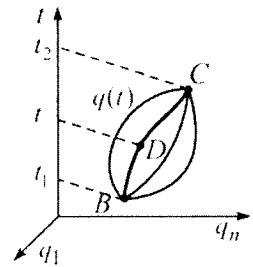


Рис. 8.2

Якщо зафіксуємо α і змінюватимемо час t , то опишемо деяку криву, яка з'єднує точки B і C . При фіксованому α кожному моменту часу t відповідає точка $q_1(t, \alpha), q_2(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha)$ кривої $\mathbf{q}(t, \alpha)$. Можна розрахувати кінетичну енергію $T(t, \alpha)$, енергію деформації $U(t, \alpha)$ і роботу зовнішніх сил $A(t, \alpha)$.

У випадку, коли при аналізі механічної системи застосовувався перший підхід (розглядалися рівняння динамічної рівноваги), при переміщенні по кривій $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}^0(t)$ ці рівняння виконуються, тобто векторна сума сил інерції, пружних сил і зовнішніх сил дорівнювала нулю. Для точок, що лежать на інших кривих сімейства, рівняння динамічної рівноваги, взагалі кажучи, не виконуватиметься. Як за величинами $T(t, \alpha)$, $U(t, \alpha)$ і $A(t, \alpha)$ можна судити, чи є відповідний шлях "прямим". Саме це питання розглядається у варіаційному принципі Гамільтона.

Ще раз розглянемо сімейство функцій $\mathbf{q}(t, \alpha)$. У разі фіксованого α при зміні t одержимо деяку криву сімейства, у разі фіксованого t при варіюванні α одержимо точки, що лежать на різних кривих сімейства. Розглянемо деякі фіксовані змінні t' і α' . Їм відповідає точка $\mathbf{q}(t', \alpha') = (q_1(t', \alpha'), q_2(t', \alpha'), \dots, q_n(t', \alpha'))^T$ кривої $\mathbf{q}(t, \alpha)$. Обчислимо в цій точці $T(t', \alpha')$, $U(t', \alpha')$ і $A(t', \alpha')$. Тепер, не змінюючи t' , дамо α' приріст $\Delta\alpha$, тобто розглянемо

$$\alpha'' = \alpha' + \Delta\alpha.$$

При α'' можна розрахувати величини $T(t', \alpha'')$, $U(t', \alpha'')$ і $A(t', \alpha'')$. Таким чином, при фіксованому t' величини T , U і A є функціями від α . Розрахуємо диференціали цих функцій при $\alpha = \alpha'$:

$$\begin{aligned} dT(t', \alpha') &= \left. \frac{\partial T(t', \alpha')}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha'} d\alpha, \\ dU(t', \alpha') &= \left. \frac{\partial U(t', \alpha')}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha'} d\alpha, \\ dA(t', \alpha') &= \left. \frac{\partial A(t', \alpha')}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha'} d\alpha. \end{aligned}$$

У варіаційному численні вводяться спеціальні позначення і термінологія. Диференціали $dT(t, \alpha)$, $dU(t, \alpha)$ і $dA(t, \alpha)$ називають варіаціями і позначають відповідно $\delta T(t, \alpha)$, $\delta U(t, \alpha)$ і $\delta A(t, \alpha)$.

При фіксованих α варіації залежать від t і можуть бути проінтегровані в межах від t_1 до t_2 . Принцип Гамільтона стверджує, що на "прямих" шляхах (в нашому випадку "прямим" шляхам відповідає $\alpha=0$):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0. \quad (8.21)$$

Одержимо за допомогою принципу Гамільтона рівняння руху системи, яку зображено на рис.8.1,а. Як зазначалось, у межах побудованої динамічної моделі за

припущення, що масою стержня можна знехтувати, стан системи характеризується координатами $y_1(t)$, $y_2(t)$. Таким чином, в цьому разі розширений координатний простір y_1 , y_2 , t має розмірність 3. Еволюція системи описується кривими в цьому просторі. Нехай в момент часу t_1 система знаходиться в точці $B(y_1^0(t_1), y_2^0(t_1), t_1)$, в момент часу t_2 – в точці $C(y_1^0(t_2), y_2^0(t_2), t_2)$. Під дією навантаження $P(t)$ стан системи еволюціонує по "прямому" шляху $y^0(t) = (y_1^0(t), y_2^0(t))$. Варіювання траєкторії руху визначається співвідношеннями

$$y_1(t) = y_1^0(t) + \delta y_1(t), \quad y_2(t) = y_2^0(t) + \delta y_2(t), \quad (8.22)$$

де $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$ – достатньо гладкі функції, що задовольняють умови

$$\delta y_1(t_1) = \delta y_2(t_1) = 0, \quad \delta y_1(t_2) = \delta y_2(t_2) = 0. \quad (8.23)$$

В момент часу t кінетична енергія системи

$$T(t) = \frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} + \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2}. \quad (8.24)$$

Потенціальна енергія деформації стержнів визначається виразом

$$U(t) = \frac{EF_1}{2l_1}(\Delta l_1)^2 + \frac{EF_2}{2l_2}(\Delta l_2)^2. \quad (8.25)$$

Згідно з (8.4) вираз (8.25) переписується у вигляді

$$U(t) = \frac{s_1}{2} y_1^2(t) + \frac{s_2}{2} (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2. \quad (8.26)$$

Варіація роботи сили $P(t)$

$$\delta A(t) = P(t) \delta y_2(t). \quad (8.27)$$

Після підстановки (8.24), (8.26) і (8.27) у (8.21) одержимо:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} + \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2} \right) - \frac{1}{2} (s_1 y_1^2(t) + s_2 (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2) dt + \int_{t_1}^{t_2} P(t) \delta y_2(t) dt = 0. \quad (8.28)$$

Рівність (8.28) переписується у вигляді

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2} dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1^2(t) dt + \\ & + \delta \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1 y_2 dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} s_2 \sin^2 \alpha y_2^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} P(t) \delta y_2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Перетворимо окремі доданки у виразі (8.29). З урахуванням властивостей операції варіювання її можна міняти місцями з диференціюванням у часі:

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta. \quad (8.30)$$

Крім того, оскільки згідно з (8.23) варіації δy_1 і δy_2 дорівнюють нулю при t_1 і t_2 , то комутують операції варіювання та інтегрування:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta. \quad (8.31)$$

Виходячи з (8.31), маємо

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1^2(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) \delta y_1(t) dt, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) y_2(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) \delta y_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) \delta y_1(t) dt, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} s_2 \sin^2 \alpha y_2^2(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) \delta y_2(t) dt. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Використовуючи (8.30), (8.31) і виконуючи інтегрування частинами, на основі (8.23) можна одержати:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_1^2}{2} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \delta \dot{y}_1^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}_1 \delta \dot{y}_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}_1 \frac{d}{dt} \delta y_1 dt = \\ &= m \dot{y}_1 \delta y_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{y}_1 \delta y_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{y}_1 \delta y_1) dt. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Аналогічно можна записати:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{y}_2^2}{2} dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{y}_2 \delta y_2) dt. \quad (8.34)$$

З урахуванням (8.32) – (8.34) після відповідного групування рівність (8.28) записується у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-m\ddot{y}_1 - (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) + s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) \right] \delta y_1(t) + \right. \\ \left. + \left[-m\ddot{y}_2 + s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) - s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) + P(t) \right] \delta y_2(t) \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Згідно з принципом Гамільтона на "прямих" шляхах рівність (8.35) виконується при будь-яких варіаціях $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$, які задовольняють (8.23). Оскільки варіації $\delta y_1(t)$ і $\delta y_2(t)$ незалежні, за основною лемою варіаційного числення рівняння (8.35) задовольняється в загальному випадку лише за умови, що вирази, які записані в кожних квадратних дужках, дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha)y_1(t) - s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_2(t) &= 0, \\ m\ddot{y}_2 - s_2 \cos \alpha \sin \alpha y_1(t) + s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) &= P(t). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона, ми одержали рівняння руху, які збігаються з рівняннями, наведеними в пп. 8.1 і 8.2.

Ще раз зазначимо, що кожний з трьох принципів, що розглядалися, може бути взятий за вихідний, інші два можна отримати з нього як наслідок.

У розглянутій вище задачі кінетична енергія системи, задана виразом (8.24), є функцією швидкостей, потенціальна енергія згідно (8.26) є функцією координат, а значення зовнішньої сили є параметром, який не варіюється. Взагалі, для більшості механічних систем кінетична енергія виражається через узагальнені координати та їх перші похідні за часом, потенціальна енергія – тільки через узагальнені координати, а робота неконсервативних сил на можливих переміщеннях, викликаних варіюванням узагальнених координат, є лінійною функцією цих варіацій. Саме завдяки цій обставині вдається досить легко перейти від інтегральної рівності (8.21) до системи диференціальних рівнянь (8.36). Поряд із рівністю (8.21) для запису принципу Гамільтона може бути застосований наступний вираз:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (8.37)$$

де так звана функція Лагранжа (кінетичний потенціал)

$$L = L(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) = T - U \quad (8.38)$$

є різницею між кінетичною та потенціальною енергією системи.

Значимо, що вирази (8.21) і (8.37) часто називають принципом Гамільтона-Остроградського. Згідно цьому принципу стан системи характеризується змінними Лагранжа t, y_j, \dot{y}_j ($j=1, \dots, n$), тобто моментом часу, а також положенням та швидкостями точок системи.

Існує також інше формулювання принципу Гамільтона – у формі Пуанкаре¹ (принцип Гамільтона-Пуанкаре), в якому для характеристики стану системи використовуються змінні Гамільтона t, y_j, p_j ($j=1, \dots, n$), де p_j – узагальнені імпульси, що визначаються рівностями

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}, \quad j=1, \dots, n, \quad (8.39)$$

причому змінні Гамільтона можуть бути виражені через змінні Лагранжа і навпаки, а стан системи можна характеризувати як значеннями змінних Лагранжа, так і значеннями змінних Гамільтона.

¹ Пуанкаре, Анрі (1854–1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ. Основні дослідження присвячені теорії чисел, алгебрі, топології, алгебраїчній топології, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, основам математики. Залишив більш як 1000 наукових робіт у різних галузях знань.

Математичний запис принципу Гамільтона-Пуанкаре має вигляд:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{y}_j - H \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (8.40)$$

де функція Гамільтона $H = H(y_j, p_j, t)$ є результатом переходу від функції Лагранжа $L(y_j, \dot{y}_j, t)$ за допомогою перетворення Лежандра та теореми Донкіна

$$H(y_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n p_j \hat{y}_j - L(y_j, \hat{y}_j, t). \quad (8.41)$$

Через \hat{y}_j позначені узагальнені швидкості, виражені через змінні Гамільтона.

Знову розглянемо систему, зображену на рис. 8.1,а. Згідно (8.38), (8.24), (8.26) в момент часу t кінетичний потенціал системи

$$\begin{aligned} L(t, y_j, \dot{y}_j) &= T(t, \dot{y}_j) - U(t, y_j) = \frac{m\dot{y}_1^2(t)}{2} + \\ &+ \frac{m\dot{y}_2^2(t)}{2} - s_1 \frac{y_1^2(t)}{2} - s_2 \frac{(y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Знаходимо узагальнені імпульси:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} = m \dot{y}_j(t), \quad j = 1, 2 \quad (8.43)$$

та виражаємо через них швидкості:

$$\hat{y}_j = \frac{p_j}{m}, \quad j = 1, 2. \quad (8.44)$$

За допомогою (8.41) запишемо функцію Гамільтона:

$$\begin{aligned} H(y_j, p_j, t) &= \frac{p_1^2(t)}{m} + \frac{p_2^2(t)}{m} - \left[\frac{p_1^2(t)}{2m} + \frac{p_2^2(t)}{2m} - \frac{s_1}{2} y_1^2(t) - \frac{s_2}{2} (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2 \right] = \\ &= \frac{p_1^2(t)}{2m} + \frac{p_2^2(t)}{2m} + \frac{s_1}{2} y_1^2(t) + \frac{s_2}{2} (y_1(t) \cos \alpha - y_2(t) \sin \alpha)^2. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Після підстановки (8.44), (8.45), (8.27) в (8.40) будемо мати

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[p_1 \dot{y}_1 + p_2 \dot{y}_2 \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{s_1}{2} y_1^2 - \frac{s_2}{2} (y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)^2 \right) P y_2 \right] dt = 0. \quad (8.46)$$

Виконаємо в (8.46) варіювання і отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} [\dot{y}_1 \delta p_1 + \dot{y}_2 \delta p_2 + p_1 \delta \dot{y}_1 + p_2 \delta \dot{y}_2 - \frac{p_1}{m} \delta p_1 - \frac{p_2}{m} \delta p_2 - s_1 y_1 \delta y_1 - s_2 y_1 \delta y_1 \cos^2 \alpha - \\ - s_2 y_2 \delta y_2 \sin^2 \alpha + s_2 y_2 \delta y_1 \sin \alpha \cos \alpha + s_2 y_1 \delta y_2 \sin \alpha \cos \alpha + P \delta y_2] dt = 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

За допомогою інтегрування частинами побудуємо варіацій швидкостей і після перегрупування запишемо:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{y}_1 - \frac{p_1}{m} \right) \delta p_1 + \left(\dot{y}_2 - \frac{p_2}{m} \right) \delta p_2 - \left[\dot{p}_1 + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1 - s_2 y_2 \sin \alpha \cos \alpha \right] \delta y_1 - \right. \\ \left. - \left[\dot{p}_2 - s_2 y_1 \sin \alpha \cos \alpha + s_2 y_2 \sin^2 \alpha - P \right] \delta y_2 \right\} dt = 0, \quad (8.48)$$

Внаслідок довільності варіацій з інтегральної рівності (8.48) витікає наступна система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= m\dot{y}_1(t), \quad p_2(t) = m\dot{y}_2(t), \\ \dot{p}_1(t) + (s_1 + s_2 \cos^2 \alpha) y_1(t) - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_2(t) &= 0, \\ \dot{p}_2(t) - s_2 \sin \alpha \cos \alpha y_1(t) + s_2 \sin^2 \alpha y_2(t) &= P(t). \end{aligned} \quad (8.49)$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона-Остроградського (8.21) була отримана система двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $y_1(t), y_2(t)$, а за допомогою принципу Гамільтона-Пуанкаре (8.40) була побудована система чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку відносно узагальнених координат $y_1(t), y_2(t)$ та узагальнених імпульсів $p_1(t), p_2(t)$.

8.4. Побудова рівнянь руху пружних систем на основі розподілених моделей

В ряді задач динаміки споруд використання розрахункових схем, в яких інерційне навантаження представлено виключно зосередженими силами або моментами, як це має місце в дискретних моделях, може призвести до грубих оцінок параметрів досліджуваних динамічних процесів. У цьому разі необхідно застосовувати моделі, які мають розподілені інерційні навантаження. Іноді інерційне навантаження має комбінований характер і потребує для свого представлення поєднання розподілених та зосереджених навантажень.

При вивченні розрахункових схем, що мають розподілене інерційне навантаження, застосування методу динамічної рівноваги безпосередньо не приводить до скінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. В таких випадках найчастіше використовується принцип можливих переміщень або принцип Гамільтона, що реалізуються на основі прямих методів.

8.4.1. Принцип можливих переміщень в динамічних задачах для розподілених систем

Нехай розглядаються коливання шарнірно опертої балки, що має розподілену масу $m(x)$ та згинну жорсткість $EI(x)$, під дією розподіленого навантаження $q(x,t)$ (рис. 8.3).

Під дією навантаження система деформується і в ній виникають моменти $M(x,t)$. Деформація характеризується параметром кривизни $\kappa(x,t)$. Коливання балки описуються функцією прогинів $w(x,t)$.

У розглядуваній моделі реалізується розподілене інерційне навантаження $i(x,t)$, що спрямоване в додатний бік осі w і визначається за формулою

$$i(x,t) = -m(x)\ddot{w}(x,t), \quad (8.50)$$

де символ $(\ddot{\cdot})$ позначає операцію обчислення другої часткової похідної за часом.

Розглянемо тепер у фіксований момент часу t нескінченно мале можливе переміщення $\delta w(x,t)$ відносно деформованого стану $w(x,t)$. На рис.8.3 показано деформовані стани $w(x,t)$ і $w(x,t) + \delta w(x,t)$. Можливі переміщення $\delta w(x,t)$ являють собою достатньо гладкі функції x , що задовольняють геометричні граничні умови:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0. \quad (8.51)$$

В результаті переміщень має місце варіація параметра деформації $\delta \kappa(x,t)$. Згідно з принципом можливих переміщень рух пружної системи відбувається так, що робота всіх діючих на неї зовнішніх сил, внутрішніх сил і сил інерції на будь-якому нескінченно малому переміщенні дорівнює нулю.

Виділимо в околі точки x ділянку балки довжиною dx . Розглянемо роботу всіх сил, що діють на цю ділянку в момент t на нескінченно малому переміщенні. Робота зовнішніх сил

$$\delta A_q = q(x,t)\delta w(x,t)dx, \quad (8.52)$$

робота сил інерції

$$\delta A_I = -m(x)\ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)dx, \quad (8.53)$$

робота внутрішніх сил

$$\delta A_M = -M(x,t)\delta \kappa(x,t)dx. \quad (8.54)$$

В останньому виразі знак “мінус” в правій частині ставиться тому, що внутрішні сили намагаються перешкодити переміщенням, що відбуваються під дією зовнішніх сил, оскільки внутрішні сили спрямовані протилежно переміщенням точок їх прикладання.

Таким чином, для розглядуваної балки математично принцип можливих переміщень записується у вигляді

$$\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx - \int_0^l m(x)\ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)dx - \int_0^l M(x,t)\delta \kappa(x,t)dx = 0. \quad (8.55)$$

Рівняння (8.55) є основою для побудови за допомогою прямих методів скінченної системи рівнянь, що описують коливання балки. Розглянемо сімейство лінійно незалежних базисних функцій $\phi_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$), що задовольняють геометричні граничні умови

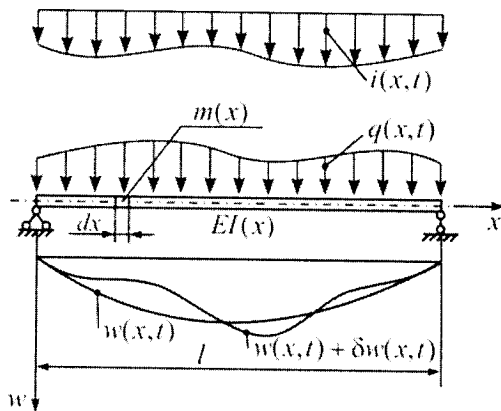


Рис. 8.3

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.56)$$

Подамо функцію переміщення $w(x, t)$ у вигляді

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \varphi_i(x), \quad (8.57)$$

де $y_i(t)$ – узагальнені координати, які є незалежними функціями часу.

Подамо варіацію переміщень $\delta w(x, t)$ у вигляді

$$\delta w(x, t) = \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x), \quad (8.58)$$

де $\delta y_i(t)$ – довільні незалежні варіації узагальнених координат.

Застосування представлень (8.57) та (8.58) реалізує перехід від розглядуваної континуальної моделі задачі до дискретної.

Використовуючи представлення (8.57) та (8.58), прискорення $\ddot{w}(x, t)$, моменти $M(x, t)$ і варіації деформації можна записати так:

$$\ddot{w}(x, t) = \sum_{j=1}^n \ddot{y}_j(t) \varphi_j(x), \quad (8.59)$$

$$M(x, t) = -EI(x) \sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x), \quad (8.60)$$

$$\delta \kappa(x, t) = - \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x), \quad (8.61)$$

де символ (") позначає операцію обчислення другої похідної.

Значимо, що для зручності викладок у виразах (8.59) та (8.60) порівняно з виразом (8.57) змінено позначення індексу, за яким виконується додавання. Така заміна законна і часто застосовуватиметься далі.

Підставляючи (8.57) – (8.61) в рівняння (8.55), одержуємо

$$\int_0^l q(x, t) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx - \int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \ddot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx - \int_0^l EI(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx = 0. \quad (8.62)$$

Рівняння (8.62) переписується так:

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^l m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) \ddot{y}_j(t) + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^l EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx \right) y_j(t) - \right. \\ \left. - \int_0^l q(x, t) \varphi_i(x) dx \right] \delta y_i(t) = 0. \quad (8.63)$$

Введемо:

- матрицю мас

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx; \quad (8.64)$$

- матрицю жорсткості

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$k_{ij} = \int_0^l EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx; \quad (8.65)$$

- вектор узагальнених навантажень

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T,$$

де

$$q_i = \int_0^l q(x, t) \varphi_i(x) dx; \quad (8.66)$$

- вектор узагальнених сил інерції

$$\mathbf{f}_I = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}, \quad (8.67)$$

- вектор узагальнених пружних сил

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{K}\mathbf{y}(t), \quad (8.68)$$

де $\mathbf{y}(t)$ – вектор узагальнених координат

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T.$$

При нових позначеннях рівняння (8.63) записується у вигляді

$$(\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_I(t) - \mathbf{f}_s(t)) \cdot \delta\mathbf{y}(t) = 0, \quad (8.69)$$

де $\delta\mathbf{y}(t)$ – варіація вектора узагальнених координат,

$$\delta\mathbf{y}(t) = (\delta y_1(t), \delta y_2(t), \dots, \delta y_n(t))^T.$$

Рівняння (8.69) являє собою запис принципу можливих переміщень для випадку узагальнених сил та узагальнених переміщень. Це рівняння аналогічне рівнянню (8.19), яке сформульоване для дискретних систем.

Оскільки варіації компонент $\delta y_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) вектора $\delta \bar{y}$ незалежні, рівність (8.69) може виконуватися тільки тоді, коли перший вектор скалярного добутку тотожно дорівнює нулю:

$$\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_I(t) - \mathbf{f}_s(t) = \mathbf{0}. \quad (8.70)$$

З урахуванням (8.67) і (8.68) система (8.70) записується у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{q}(t). \quad (8.71)$$

Одержана система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку являє собою дискретну модель вихідної континуальної задачі.

Підхід, що застосовувався, називають узагальненим методом Гальоркіна. У класичному методі Гальоркіна, на відміну від викладеного раніше, система базисних функцій $\varphi_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) повинна задовольняти не тільки геометричні, а й силові граничні умови.

8.4.2. Застосування принципу Гамільтона для розподілених систем

Формально принцип Гамільтона для скінченномірних та розподілених динамічних систем записується одним і тим же рівнянням:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (8.72)$$

де T – кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи, яка включає енергію деформації та потенціал консервативних зовнішніх сил; A – робота неконсервативних сил.

Проте в розподілених системах на відміну від скінченномірних при фіксованому t кінетична енергія, потенціальна енергія і робота неконсервативних сил є не функціями, а функціоналами; віртуальна варіація функцій, що визначають стан системи в кожний момент часу залежить від просторових змінних і задовольняє геометричні граничні умови. При $t=t_1$ і $t=t_2$ віртуальні варіації дорівнюють нулю.

Розглянемо балку, яку зображено на рис. 8.4. Балка має розподілену масу $m(x)$ і згинну жорсткість $EI(x)$. В точці A балка несе точкову масу m_1 . На балку діє розподілене поперечне динамічне навантаження $q(x,t)$ і зосереджена поздовжня сила N . Коливання балки описуються функцією прогинів $w(x,t)$. Побудуємо рівняння коливань для даної системи. Кінетична енергія балки

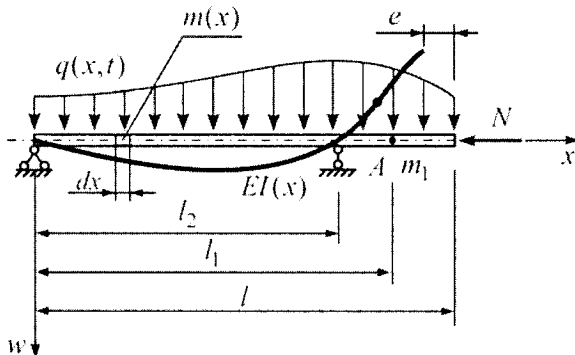


Рис. 8.4

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{w}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} m_1 (\dot{w}(l_1,t))^2 dx, \quad (8.73)$$

де символ (\cdot) позначає операцію диференціювання по t .

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії згинної деформації $U_W(t)$ та потенціальної енергії $U_N(t)$ осьового навантаження N :

$$U(t) = U_W(t) + U_N(t).$$

Потенціальна енергія згинної деформації

$$U_W(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x)(w''(x,t))^2 dx, \quad (8.74)$$

де символ (\square) позначає операцію диференціювання по x .

Потенціальна енергія осьового навантаження N

$$U_N(t) = -N e(t), \quad (8.75)$$

де $e(t)$ – горизонтальна складова руху правого кінця балки: знак “мінус” характеризує зменшення потенціалу сили N при збільшенні $e(t)$.

Можна показати, що горизонтальне переміщення правого кінця балки в процесі згинних коливань визначається виразом

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (8.76)$$

Таким чином,

$$U_N(t) = -\frac{N}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (8.77)$$

Робота неконсервативних сил характеризується співвідношенням

$$A(t) = \int_0^l q(x,t)w(x,t)dx. \quad (8.78)$$

Після підстановки (8.73), (8.74), (8.77) і (8.78) у (8.72) та виконання операцій варіювання одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x)\dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)dx + m_1\dot{w}(l_1,t)\delta\dot{w}(l_1,t) - \int_0^l EJ(x)w''(x,t)\delta w''(x,t)dx + \right. \\ \left. + N \int_0^l w'(x,t)\delta w'(x,t)dx + \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx \right] dt = 0. \quad (8.79)$$

Виходячи з рівняння (8.79) за допомогою методу Рітца будуємо скінченну систему рівнянь. Система базисних функцій $\varphi_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) повинна задовольняти геометричні граничні умови:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.80)$$

Функція переміщення має вигляд

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \varphi_i(x). \quad (8.81)$$

Використовуючи (8.81), розпишемо варіації всіх функцій у виразі (8.79):

$$\begin{aligned} \delta w(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x), \quad \delta \dot{w}(x, t) = \sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x), \\ \delta w'(x, t) &= \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i'(x), \quad \delta w''(x, t) = \sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x). \end{aligned} \quad (8.82)$$

Зазначимо, що

$$\delta y_i(t_1) = \delta y_i(t_2) = 0.$$

З урахуванням (8.81) і (8.82) вираз (8.79) переписується так:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x) \right) dx + m_1 \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(l_1) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(l_1) \right) - \right. \\ \left. - \int_0^l EI(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx + \right. \\ \left. + N \int_0^l \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j'(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i'(x) \right) dx + \int_0^l q(x, t) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Використовуючи позначення (8.51) та виконуючи аналогічно (8.33) інтегрування частинами, запишемо таку послідовність рівностей:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x) \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(x) \right) dx dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \delta \dot{y}_i dt = \right. \\ \left. = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \frac{d}{dt} \delta y_i(t) dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \delta y_j \delta \dot{y}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j(t) \right) \delta y_i(t) dt. \right. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Введемо позначення:

$$\bar{m}_{ij} = m_1 \varphi_i(l_1) \varphi_j(l_1), \quad (8.85)$$

$$k_{Gij} = N \int_0^l \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx. \quad (8.86)$$

Аналогічно (8.84) можна записати:

$$\int_{t_1}^{t_2} m_1 \left(\sum_{j=1}^n \dot{y}_j(t) \varphi_j(l_1) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta \dot{y}_i(t) \varphi_i(l_1) \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij} \ddot{y}_j(t) \right) \delta y_i(t) dt. \quad (8.87)$$

Використовуючи позначення (8.52), (8.53) і (8.86), запишемо такі вирази:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI(x) \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j''(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i''(x) \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} y_j(t) \right) \delta y_i dt, \quad (8.88)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) \varphi_j'(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i'(x) \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{Gij} y_j(t) \right) \delta y_i dt, \quad (8.89)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l q(x,t) \left(\sum_{i=1}^n \delta y_i(t) \varphi_i(x) \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n q_i \delta y_i(t) \right) dt. \quad (8.90)$$

З урахуванням (8.84), (8.87) – (8.90) рівняння (8.83) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j - \sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij} \ddot{y}_j - \sum_{j=1}^n k_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n k_{Gij} y_j + q_i \right] \delta y_i(t) dt = 0. \quad (8.91)$$

Введемо:

- матрицю геометричної жорсткості

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} k_{G11} & k_{G12} & \dots & k_{G1n} \\ k_{G21} & k_{G22} & \dots & k_{G2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{Gn1} & k_{Gn2} & \dots & k_{Gnn} \end{pmatrix},$$

- матрицю узагальнених мас, що відповідає дискретній масі m_1 :

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \dots & \bar{m}_{1n} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \dots & \bar{m}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{m}_{n1} & \bar{m}_{n2} & \dots & \bar{m}_{nn} \end{pmatrix}.$$

- вектор узагальнених сил інерції

$$\mathbf{f}_I = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}}, \quad (8.92)$$

- вектор узагальнених пружних сил

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{K}_G\mathbf{y}. \quad (8.93)$$

В нових позначеннях рівняння (8.91) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}_I(t) - \mathbf{f}_s(t) + \mathbf{q}(t)) \cdot \delta \mathbf{y}(t) dt = 0. \quad (8.94)$$

Звідки, зважаючи на довільність компонент вектора $\delta \mathbf{y}$, за основною лемою варіаційного числення одержуємо систему рівнянь

$$\mathbf{f}_I(t) - \mathbf{f}_s(t) + \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (8.95)$$

З урахуванням (8.92) і (8.93) система (8.95) набуває у вигляду

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{K}_G\mathbf{y} = \mathbf{q}. \quad (8.96)$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона та використовуючи метод Рітца, ми одержали систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка є дискретною моделлю задачі про коливання розподіленої системи.

За допомогою введених вище матриць і векторів функцію Лагранжа для дискретної моделі можемо записати наступним чином:

$$L = L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = T - U = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_G \mathbf{y}, \quad (8.97)$$

тоді як вираз для роботи неконсервативних сил набуде вигляду

$$A(t) = \mathbf{y}^T \mathbf{q}. \quad (8.98)$$

В свою чергу принцип Гамільтона (точніше Гамільтона-Остроградського) буде мати форму

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L + A) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_G \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{q} \right) dt = 0. \quad (8.99)$$

Якщо у (8.99) виконати варіювання та за допомогою інтегрування частинами позбутися варіацій похідних від узагальнених координат $\delta(\dot{\mathbf{y}})$, то отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{y}^T (-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{K} \mathbf{y} + \mathbf{K}_G \mathbf{y} + \mathbf{q}) dt = 0, \quad (8.100)$$

звідки витікає система диференціальних рівнянь (8.96).

Застосуємо тепер для побудови дискретної моделі принцип Гамільтона у формі Пуанкаре, в якому для характеристики стану системи використовуються не узагальнені швидкості \dot{y}_j , а узагальнені імпульси p_j , що визначаються рівностями

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.101)$$

З огляду на вигляд функції Лагранжа (8.97) можемо записати

$$p_j = \sum_{i=1}^n (m_{ij} + \hat{m}_{ij}) \dot{y}_j. \quad (8.102)$$

Введемо вектор узагальнених імпульсів

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))^T \quad (8.103)$$

і перепишемо (8.102) у векторному вигляді

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}}) \dot{\mathbf{y}}. \quad (8.104)$$

У свою чергу при відомих імпульсах вектор узагальнених швидкостей може бути визначений за формулою

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p}(t). \quad (8.105)$$

За допомогою перетворення Лежандра знайдемо функцію Гамільтона:

$$H(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}^T) = \mathbf{p}^T(t) \dot{\mathbf{y}}(t) - L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G) \mathbf{y} \quad (8.106)$$

і підставимо її у вираз, який відповідає принципу Гамільтона-Пуанкаре:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathbf{p}^T(t)\dot{\mathbf{y}}(t) - H(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}^T) + A(t)) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G) \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{q} \right) dt. \quad (8.107)$$

Виконаємо в (8.107) варіювання

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathbf{p}^T \mathbf{y} + \mathbf{p}^T \delta \dot{\mathbf{y}} - \delta \mathbf{p}^T (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p} - \delta \mathbf{y}^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G) \mathbf{y} + \delta \mathbf{y}^T \mathbf{q}) dt \quad (8.108)$$

і за допомогою інтегрування частинами позбудемось варіацій швидкостей:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \mathbf{p}^T \left[\dot{\mathbf{y}} - (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p} \right] - \delta \mathbf{y}^T \left[\dot{\mathbf{p}}^T + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G) \mathbf{y} - \mathbf{q} \right] \right\} dt. \quad (8.109)$$

Нарешті, зважаючи на довільність варіацій, можемо записати наступну систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}}) \dot{\mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{p}}^T + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G) \mathbf{y} = \mathbf{q}. \quad (8.110)$$

Таким чином, за допомогою принципу Гамільтона-Остроградського була отримана дискретна динамічна модель у вигляді системи n звичайних диференціальних рівнянь *другого* порядку відносно узагальнених координат $y_j(t)$, а за допомогою принципу Гамільтона-Пуанкаре була побудована система $2n$ диференціальних рівнянь *першого* порядку відносно узагальнених координат $y_j(t)$ та узагальнених імпульсів $p_j(t)$.

9. Динаміка систем з одним ступенем свободи

9.1. Рівняння руху системи з одним ступенем свободи

9.1.1. Побудова рівнянь руху системи з одним ступенем свободи на основі дискретної моделі

Розглянемо систему, яку зображено на рис. 9.1. Балка OA має сталу жорсткість EI та несе на кінці зосереджену дискретну масу m . Вважатимемо балку безмасовою. Таку систему можна подати у вигляді моделі з одним ступенем свободи. Характер руху системи цілком визначатиметься вертикальними переміщеннями $y(t)$ зосередженої маси.

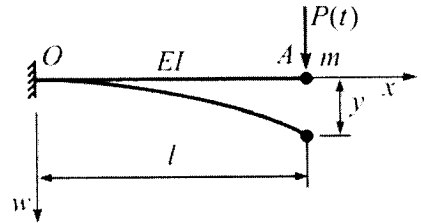


Рис. 9.1

Застосуємо до балки принцип Д'аламбера в поєднанні з методом сил. Переміщення точки A запишеться у вигляді

$$y(t) = \delta_{11} (-m\ddot{y} + P(t)), \quad (9.1)$$

де δ_{11} – коефіцієнт піддатливості, що є вертикальним переміщенням точки A при дії вертикальної одиничної сили,

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}.$$

Перепишемо рівняння (9.1) у такому вигляді:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}, \quad (9.2)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (9.3)$$

Рівність (9.2) являє собою рівняння руху маси в системі з одним ступенем свободи при дії зовнішньої сили $P(t)$, що змінюється з часом. Таким чином, закон руху маси m визначається неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Для повної визначеності необхідно ще знати зміщення маси $y(0) = y_0$ та її швидкість $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ у початковий момент часу ($t=0$).

9.1.2. Побудова рівнянь руху системи з одним ступенем свободи на основі розподілених моделей

Розглянемо виведення рівняння коливань консольної башти під дією вітрового навантаження (рис. 9.2).

Погонну масу задано функцією $m(x)$, згинну жорсткість – функцією $EI(x)$. Розподілене вітрове навантаження задається функцією $q(x,t)$. Крім того, вважатимемо, що балка сприймає постійне вертикальне навантаження N , яке прикладається зверху. Прогин осі балки визначається функцією $w(x,t)$.

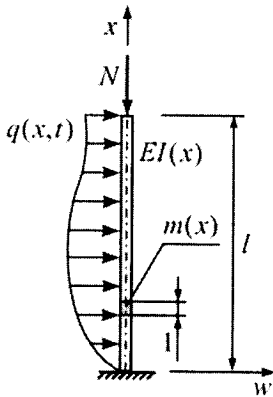


Рис. 9.2

Щоб одержати рівняння руху, застосуємо принцип Гамільтона для розподілених систем, який викладено у п.8.4.2.

Принцип Гамільтона записується у вигляді

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - U(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0. \quad (9.4)$$

Кінетична енергія башти

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{w}(x,t))^2 dx. \quad (9.5)$$

Повна потенціальна енергія системи U дорівнює сумі потенціальної енергії деформації згину U_W і потенціальної енергії осрової сили U_N :

$$U = U_W + U_N = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (w''(x,t))^2 dx - \frac{N}{2} \int_0^l (w'(x,t))^2 dx. \quad (9.6)$$

Робота зовнішніх сил

$$A(t) = \int_0^l q(x,t) w(x,t) dx. \quad (9.7)$$

Прийемо одночленну апроксимацію функції $w(x,t)$:

$$w(x,t) = y(t)\varphi(x), \quad (9.8)$$

де $\varphi(x)$ – базисна функція, що задовольняє геометричні граничні умови

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (9.9)$$

Якщо віднормувати функцію $\varphi(x)$ так, щоб $\varphi(l) = 1$, то узагальнена координата $y(t)$ описуватиме коливання вершини башти. Після підстановки (9.5)–(9.7) у (9.4) та виконання операції варіювання одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x) \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) dx - \int_0^l EI(x) w''(x,t) \delta w''(x,t) dx + \right. \\ \left. + N \int_0^l w'(x,t) \delta w'(x,t) dx + \int_0^l q(x,t) \delta w(x,t) dx \right] dt = 0. \quad (9.10)$$

З урахуванням апроксимації (9.8) можна записати такі вирази:

$$\dot{w}(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{y}(t)\varphi(x), \quad w'(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x} = y(t)\varphi'(x), \quad w''(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y(t)\varphi''(x),$$

$$\delta w(x,t) = \delta y(t)\varphi(x), \quad \delta \dot{w}(x,t) = \delta \dot{y}(t)\varphi(x), \quad \delta w'(x,t) = \delta y(t)\varphi'(x),$$

$$\delta w''(x,t) = \delta y(t)\varphi''(x). \quad (9.11)$$

Підставляючи (9.11) у (9.10), одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[y \delta y \int_0^l m(x) (\varphi(x))^2 dx - y \delta y \int_0^l EI(x) (\varphi''(x))^2 dx + N y \delta y \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx + \delta y \int_0^l q(x, t) \varphi(x) dx \right] dt = 0. \quad (9.12)$$

Після інтегрування частинами першого члена рівняння (9.12) воно набере вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\ddot{y} + ky - k_G y - p(t)] \delta y dt = 0, \quad (9.13)$$

де

$$m = \int_0^l m(x) (\varphi(x))^2 dx \quad \text{— узагальнена маса,}$$

$$k = \int_0^l EI(x) (\varphi''(x))^2 dx \quad \text{— узагальнена жорсткість,}$$

$$k_G = N \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx \quad \text{— узагальнена геометрична жорсткість,}$$

$$p(t) = \int_0^l q(x, t) \varphi(x) dx \quad \text{— узагальнене навантаження.}$$

Внаслідок довільності варіації δy вираз в квадратних дужках у рівнянні (9.13) дорівнює нулю. Таким чином, одержимо рівняння руху

$$m\ddot{y}(t) + \tilde{k}y(t) = p(t), \quad (9.14)$$

де $\tilde{k} = k - k_G$ — сумарна жорсткість.

Запишемо рівняння (9.14) у вигляді

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{m}, \quad (9.15)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}}. \quad (9.16)$$

Для повної постановки розглядуваної задачі рівняння (9.14) слід доповнити початковими умовами. Якщо вважати, що в початковий момент часу $t=0$ відомі переміщення та швидкості точок, які знаходяться на осі башти,

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad (9.17)$$

та їх швидкості

$$\dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x),$$

то початкові умови для рівняння (9.14) визначаються співвідношеннями

$$y(0) = \int_0^l w_0(x) \varphi(x) dx, \quad (9.18)$$

$$\dot{y}(0) = \int_0^l \dot{w}_0(x) \varphi(x) dx. \quad (9.19)$$

Найчастіше зустрічаються такі два варіанти постановки розглядуваної задачі.

В першій постановці вважається, що в початковий момент часу башта знаходиться у стані спокою, тобто

$$w_0(x) \equiv 0, \quad \dot{w}_0(x) \equiv 0,$$

що приводить до початкових умов

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

У другій постановці розглядається режим усталених коливань, коли початкові умови не мають істотного значення.

10. Динаміка систем з багатьма ступенями свободи

10.1. Складання рівнянь руху

Як зазначалось, числом ступенів свободи розрахункової динамічної моделі системи називається кількість незалежних параметрів, що визначають положення системи в будь-який момент часу. У попередньому розділі розглядалися коливання найпростіших пружних систем, які описувалися розрахунковими динамічними моделями з одним ступенем свободи. Для правильного представлення складніших систем доводиться використовувати моделі з кількома, а іноді й з багатьма ступенями свободи. Реальна деформівна система має нескінченну кількість ступенів свободи. Перехід до динамічної моделі зі скінченною кількістю ступенів свободи пов'язаний з деякою процедурою схематизації. Можна виділити два основні підходи до побудови розрахункових динамічних моделей. Один з них базується на трансформації континуальної моделі, що пов'язана з виділенням елементів, у яких деформаціями можна нехтувати, та деформівних елементів, масу яких можна не враховувати. Інший підхід базується на застосуванні прямих методів.

Для безпосереднього виводу рівнянь руху застосовують один з трьох методів: складання рівнянь динамічної рівноваги, принципу можливих переміщень і принципу Гамільтона. Ці методи викладено в розділі 8, де вони застосовуються при складанні рівнянь коливань таких об'єктів, як шарнірна система, що несе зосереджену масу, та балка, що має розподілену масу. У розділі 9 за допомогою цих методів складалися рівняння руху систем з одним ступенем свободи. У цьому розділі вказані методи застосовуватимемо при складанні рівнянь коливань плоских рам.

10.2. Рівняння динамічної рівноваги

Розглянемо складання рівнянь руху рами, яку зображено на рис. 10.1,а. Стержні рами вважаємо невагомими. Рама несе s точкових мас. До деяких мас прикладене динамічні навантаження. Внаслідок взаємодії зовнішнього навантаження, пружних сил, сил інерції та сил опору в рамі збуджується коливальний рух. Спочатку при виведенні рівнянь руху сили опору, що зв'язані з дисипацією енергії, не враховуватимемо.

Розглядувана модель являє собою дискретну динамічну систему. Дискретизацію виконано шляхом прирівнювання до нуля розподіленої маси деформівних елементів конструкції. Число ступенів свободи визначається характером руху дискретних мас. Якщо вважати, що стояки рами нестисливі, то маси, які на них розташовані, можуть здійснювати тільки горизонтальні переміщення. Маси, які розміщені на ригелі, можуть мати як горизонтальні, так і вертикальні переміщення. Таким чином, загальна кількість ступенів свободи системи n дорівнює сумі кількості мас, що розташовані на стояках, та подвійної кількості мас, що розташовані на ригелі (маси, які зосереджені у вузлах рами, відносяться до стояків). Таким чином, рух рами (рис. 10.1,б) визначатиметься вектором переміщень

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T. \quad (10.1)$$

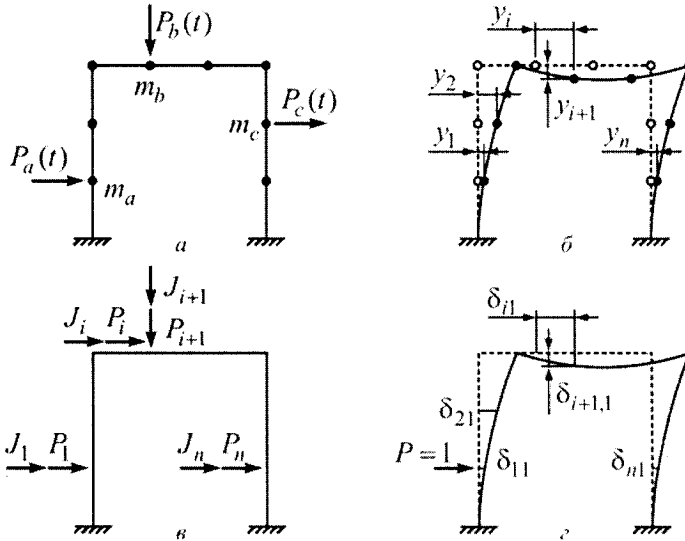


Рис.10.1

Як бачимо з рис. 10.1,а, до деяких мас прикладене зовнішнє навантаження. Відповідно до вектора переміщень $y(t)$ уведемо вектор зовнішніх навантажень (рис. 10.1,б)

$$\mathbf{p}(t) = \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\}^T, \quad (10.2)$$

де $P_i(t)$ дорівнює зовнішньому навантаженню, яке діє на масу m_b у напрямі y_i . Якщо в цьому напрямі на масу не діє зовнішнє навантаження, то $P_i(t) = 0$.

У будь-який момент руху на раму діє вектор сил інерції (рис. 10.1,в)

$$\mathbf{j} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}^T, \quad (10.3)$$

де

$$J_i = -m_i \ddot{y}_i. \quad (10.4)$$

Якщо ввести матрицю мас

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

то вектор сил інерції можна записати у вигляді

$$\mathbf{j} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}. \quad (10.6)$$

Номер мас відповідає номеру переміщення. Так, маса m_b , яка розташована на ригелі (рис. 10.1,б), входить у вираз (10.6) як множник при \ddot{y}_i з номером i , а при \ddot{y}_{i+1} – з номером $i+1$, оскільки вона бере участь у двох незалежних рухах.

момент інерції I_k . Відповідно вважається, що компоненти P_i і P_j вектора зовнішньої дії прикладаються в точці C . У системі (10.10) при \ddot{y}_k як множник входить момент інерції I_k . Елементи k -го стовпця матриці B являють собою переміщення δ_{ik} i -ї маси ($i=1,2,\dots,n$), що зумовлені дією одиничного моменту, який прикладений в точці C в напрямі кута повороту y_k .

Отже, система (10.10) разом з початковими умовами (10.11) описує вимушені коливання рами. Як зазначалось, для складання цих рівнянь застосовувався принцип Д'аламбера в поєднанні з методом сил. З цією метою можна використовувати також поєднання методу Д'аламбера з методом переміщень.

Уведемо в'язі, що перешкоджають переміщенням y_i при $i \geq 2$, та задамо переміщення $y_i = 1$ (рис. 10.3,а). Позначимо k_{i1} ($i=1,\dots,n$) реакцію, що виникає у i -й в'язі. Аналогічну процедуру повторимо послідовно ще $n-1$ разів, задаючи чергове переміщення y_j

($j=2,\dots,n$) таким, що дорівнює одиниці і перешкоджає іншим переміщенням. Коефіцієнти k_{ij} називають коефіцієнтами впливу жорсткості і вони визначаються як реакція i -ї в'язі при нав'язуванні одиничного переміщення в напрямі j -го ступеня свободи. Матриця

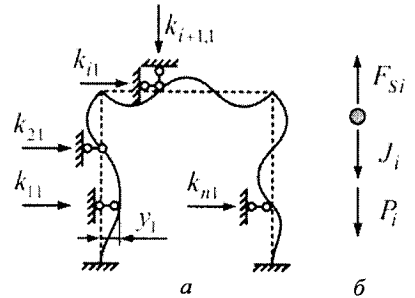


Рис.10.3

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

називається матрицею жорсткості.

Вектор пружних реакцій у в'язях

$$\mathbf{f}_S = \{F_{S1} \ F_{S2} \ \dots \ F_{Sn}\}^T \quad (10.13)$$

за допомогою матриці жорсткості \mathbf{K} подається у вигляді

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{K} \mathbf{y}. \quad (10.14)$$

На масу m_i у загальному випадку діють сила пружного опору F_{Si} , сила інерції J_i та зовнішня сила P_i , сума яких за принципом Д'аламбера в кожний момент часу t повинна дорівнювати нулю (рис. 10.3,б):

$$P_i + J_i - F_{Si} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

У векторному вигляді наведена система рівностей записується так:

$$\mathbf{p} + \mathbf{j} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (10.15)$$

Згідно з (10.6) і (10.14) система (10.15) переписується у вигляді

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{p}. \quad (10.16)$$

Згідно з (10.14) наведене вище векторне співвідношення переписується у вигляді

$$\mathbf{f}_D = -\nu \mathbf{K} \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}_0 \ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{C} \ddot{\mathbf{y}}, \quad (10.21)$$

де матриця

$$\mathbf{C} = \nu \mathbf{K} + \mathbf{C}_0. \quad (10.22)$$

На масу m_i у загальному разі діють сила пружного опору балки F_{Si} , сила демпфірування F_{Di} , сила інерції J_i та зовнішня сила P_i , сума яких за принципом Д'аламбера в кожний момент часу повинна дорівнювати нулю (рис. 10.4,б):

$$P_i + J_i + F_{Di} - F_{Si} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.23)$$

Ці співвідношення можна записати у векторній формі:

$$\mathbf{p} + \mathbf{j} + \mathbf{f}_D - \mathbf{f}_S = \mathbf{0}. \quad (10.24)$$

З урахуванням (10.6), (10.14) і (10.21) рівняння (10.24) переписується у вигляді

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{p}. \quad (10.25)$$

Якщо задано не матрицю жорсткості \mathbf{K} , а матрицю податливості \mathbf{V} , то, помноживши на неї зліва рівність (10.25), одержимо рівняння руху, що виражаються через матрицю \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{V} \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{V} \mathbf{p}. \quad (10.26)$$

10.3. Побудова дискретних динамічних моделей за допомогою МСЕ

Деформівна система, що несе зосереджені або розподілені маси, являє собою динамічну систему з нескінченним числом ступенів свободи. У підрозд. 10.2 було побудовано дискретну пружну систему зі скінченним числом ступенів свободи, яка моделює поведінку вихідної системи, а потім для неї записувались рівняння динамічної рівноваги. Далі розглянемо інший підхід до побудови динамічних моделей зі скінченним числом ступенів свободи, який базується на прямих методах. Шукане поле переміщень представляється у вигляді скінченного ряду по базисних функціях від просторових змінних. Ці функції домножуються на узагальнені координати, які залежать від часу. На основі цього представлення за допомогою принципу Гамільтона будується система звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, яка й є дискретною моделлю вихідної континуальної системи. Зрозуміло, що якість одержаної моделі істотно залежить від вдалого вибору базисних функцій. У разі складних деформівних систем для побудови базисних функцій широко використовується МСЕ. У методі скінченних елементів базисні функції будуються на основі функцій форм окремих скінченних елементів, а вектором узагальнених координат є вектор вузлових переміщень $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$, де n – число ступенів свободи дискретної моделі.

10.3.1. Скінченноелементна динамічна модель стержневої системи

Як і в статичних задачах перший етап розв'язання методом скінченних елементів задач динаміки деформівних систем полягає в переході від континуального об'єкта до його дискретної розрахункової моделі, яка називається

скінченноелементною. Додаткові моменти тут порівняно зі статичною задачею зумовлені необхідністю враховувати інерційні сили та сили опору. Процес побудови скінченноелементної моделі для стержневої системи полягає в поділі розрахункової схеми на окремі стержні (скінченні елементи) та вузли. Скінченні елементи повинні являти собою прямолінійні стержні зі сталою жорсткістю та сталою погонною масою, на які може діяти рівномірно розподілене динамічне навантаження. У разі врахування дисипації енергії в процесі коливань відповідні параметри, які характеризують природу розподілених сил опору руху, в межах елемента вважаються сталими. При розв'язуванні задач статички стержневих систем вузлами вважаються точки:

- з'єднання двох або більше стержнів;
- ступінчастої зміни жорсткості стержнів;
- прикладання зосереджених сил і моментів;
- ступінчастої зміни інтенсивності розподіленого навантаження;
- опорні вузли.

При побудові скінченноелементних моделей для динамічних задач вузлами додатково вважають точки:

- ступінчастої зміни погонної маси;
- розташування дискретних мас;
- ступінчастої зміни параметрів розподілених сил опору;
- розташування зовнішніх демпферів.

Для плоскої дискретної моделі можливі чотири типи скінченних елементів, які різняться виглядом вузлів, що прилягають до скінченного елемента. Перехід від розрахункової схеми до скінченноелементної моделі показано на рис. 10.5.

Розглядається рама (рис. 10.5,а), яка складається зі стержнів жорсткістю EI та погонною масою \bar{m} . Стойки несуть по дві зосереджені маси, а ригель – одну. На ригель діють динамічні навантаження $P_1(t)$ і $P_2(t)$. Є зовнішній демпфер. Скінченноелементну модель рами показано на рис. 10.5,б.

Вузлами вважаються точки, в яких змінюється геометрія рами, точки розташування дискретних мас, місця прикладання зосереджених навантажень, а також точка кріплення до рами зовнішнього демпфера.

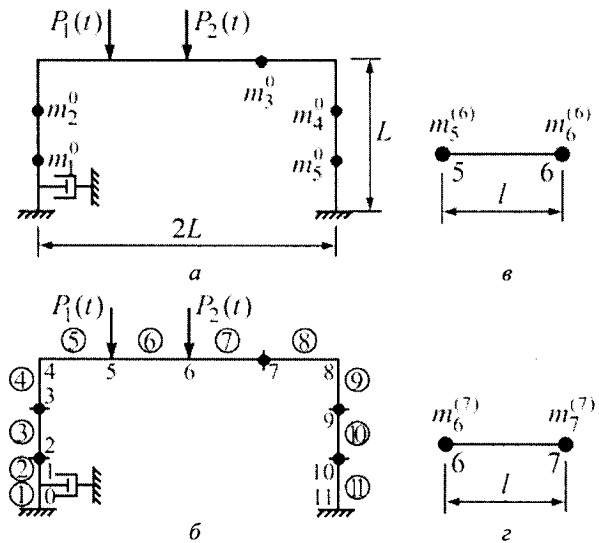


Рис.10.5

10.3.2. Варіаційне формулювання рівнянь руху

Варіаційний підхід до виведення рівнянь руху може базуватися на принципі можливих переміщень (принцип Д'аламбера-Лагранжа) або на принципі Гамільтона. У розділі 8 розглядалося застосування цих принципів для виведення рівнянь руху найпростіших дискретних та розподілених деформівних систем. Тут спинимось на особливостях реалізації цих підходів для побудови рівнянь руху стержневих систем на базі МСЕ. Далі побудову будемо виконувати на основі принципу Гамільтона. Зазначимо, що при застосуванні принципу можливих переміщень всі викладки фактично збігатимуться.

Нехай розглядаються коливання деякої стержневої системи. Принцип Гамільтона записується так:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (10.27)$$

де T – загальна кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи, що включає як енергію деформації, так і потенціал будь-яких консервативних зовнішніх сил; A – робота, яку виконано неконсервативними силами, що діють на систему, включаючи затухання та інші довільні зовнішні навантаження.

При переході від розрахункової схеми стержневої системи до скінченноелементної моделі рівняння (10.27) переписується так:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{e=1}^r T^e - \delta \sum_{e=1}^r U^e \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \sum_{e=1}^r A^e \right) dt = 0, \quad (10.28)$$

де r – число скінченних елементів моделі, T^e – кінетична енергія, U^e – потенціальна енергія деформації, A^e – робота неконсервативних сил в елементі e .

Згідно із загальною схемою МСЕ переміщення в межах кожного елемента виражаються за допомогою вектора вузлових переміщень δ через координатні функції Φ_i . Виконуючи перетворення, що аналогічні тим, які виконувались у п. 8.4.2 (див. (8.81)–(8.94)), рівняння (10.28) можна подати у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{e=1}^r \mathbf{f}_I^e(t) - \sum_{e=1}^r \mathbf{f}_S^e(t) + \sum_{e=1}^r \mathbf{f}_D^e(t) + \sum_{e=1}^r \mathbf{q}^e(t) \right) \delta(\delta(t)) dt = 0, \quad (10.29)$$

де $\mathbf{f}_I^e(t)$, $\mathbf{f}_S^e(t)$, $\mathbf{f}_D^e(t)$, $\mathbf{q}^e(t)$ – доданки, що позначають відповідні елементу e вектори узагальнених сил інерції, узагальнених пружних сил, узагальнених сил опору та узагальнених навантажень.

Аналогічно тому, як це робилось у разі рівнянь (8.94), можна одержати відносно вектора вузлових переміщень $\delta(t)$ систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{e=1}^r \mathbf{f}_I^e(t) - \sum_{e=1}^r \mathbf{f}_S^e(t) + \sum_{e=1}^r \mathbf{f}_D^e(t) + \sum_{e=1}^r \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{0}. \quad (10.30)$$

Безпосередній запис цієї системи диференціальних рівнянь у вигляді, аналогічному (8.95), потребує побудови матриці мас \mathbf{M} , матриці жорсткості \mathbf{K} , матриці демпфірування \mathbf{C} скінченноелементної моделі, а також вектора вузлового навантаження \mathbf{q} . Для цього формують матрицю мас \mathbf{M}_e , матрицю жорсткості \mathbf{K}_e , матрицю демпфірування \mathbf{C}_e та вектор вузлових навантажень \mathbf{q}_e для кожного скінченного елемента окремо, а потім, підсумовуючи, одержують відповідні матриці та вектор для всієї системи. Для побудови матриць \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{C}_e та вектора \mathbf{q}_e розглянемо інтеграли

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_I^e(t) \cdot \delta(\delta(t)) dt, & \delta \int_{t_1}^{t_2} U^e dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_S^e(t) \cdot \delta(\delta(t)) dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta A^e dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_D^e(t) \cdot \delta(\delta(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{q}^e \delta(\delta(t)) dt. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Принциповий момент тут полягає в тому, що інтеграли (10.31) є скалярами і не залежать від системи координат. Тому побудову матриці мас \mathbf{M}'_e , матриці жорсткості \mathbf{K}'_e та матриці демпфірування \mathbf{C}'_e , які визначають вектори відповідно \mathbf{f}'_I , \mathbf{f}'_S і \mathbf{f}'_D , можна виконувати в місцевій системі координат, і вже під час формування матриць \mathbf{M} , \mathbf{K} і \mathbf{C} для всієї скінченноелементної моделі перед підсумовуванням відбувається перехід до загальної системи координат. Усе викладене стосується також формування вектора \mathbf{q} .

Далі при поданні конкретних викладок застосовуються основні схеми та позначення, які використовувалися в [81] при розгляді задач статички стержневих систем для викладення процедури побудови матриці жорсткості та вектора вузлових навантажень. У пп. 10.3.3 і 10.3.4 розглянемо питання побудови матриці мас та матриці демпфірування. Основні співвідношення для побудови матриці жорсткості та вектора вузлових навантажень наводяться в п. 10.3.5.

10.3.3. Побудова матриці мас

Згідно із загальною схемою реалізації МСЕ, яку наведено раніше, матриця мас \mathbf{M} скінченноелементної моделі формується шляхом побудови матриці мас із окремих елементів у місцевій системі координат, перетворення їх до глобальної системи і підсумовування відповідних компонент з компонентами матриць мас інших елементів, що мають спільні вузли. Другий та третій етапи цієї схеми повністю збігаються з аналогічними етапами побудови матриці жорсткості. Тому далі розглядатимемо тільки процедуру побудови матриці мас окремого елемента в місцевій системі координат.

При розв'язуванні за допомогою МСЕ задач динаміки деформівних систем використовують два види матриці мас: матрицю зосереджених мас і матрицю розподілених мас.

Матриця зосереджених мас. При побудові матриці зосереджених мас скінчен-

ноелементної моделі стержневої системи погонна маса кожного елемента вважається зосередженою у вузлових точках, а розподіл маси визначається методами статистики споруд. Якщо вважати в межах елемента погонну масу сталою, то в кожному вузлі зосереджується половина маси елемента. Так, шостий скінченний елемент скінченноелементної моделі, яку зображено на рис. 10.5,б, має на лівому та правому кінцях однакові маси $m_5^{(6)}$ та $m_6^{(6)}$, що дорівнюють $\frac{ml}{2}$, де $l = L/2$ – довжина елемента (рис. 10.5,в). Якщо крім погонної маси в елементах у

деякому вузлі скінченноелементної моделі є зосереджена маса m_i^0 , то вона поділяється на рівні частини за кількістю елементів, що сходяться у вузлі, і ці частини додаються до відповідних мас елементів. Наприклад, сьомий скінченний елемент (рис. 10.5,г) має на лівому кінці масу $m_6^{(7)} = \frac{ml}{2}$,

а на правому – масу $m_7^{(7)} = \frac{ml}{2} + \frac{m_3^0}{2}$.

Отже, нехай e – скінченний елемент, у j -му вузлі якого зосереджена маса $m_j^{(e)}$, а у $(j+1)$ -му – $m_{j+1}^{(e)}$ (рис. 10.6).

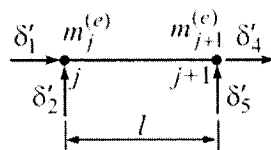


Рис. 10.6

Запишемо матрицю мас M'_e у місцевій системі координат. Якщо враховуються сили інерції лише від поступального руху, то інтеграл від варіації кінетичної енергії розглядуваного елемента має вигляд

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{m_j^{(e)} \dot{\delta}_1'^2}{2} + \frac{m_j^{(e)} \dot{\delta}_2'^2}{2} + \frac{m_{j+1}^{(e)} \dot{\delta}_4'^2}{2} + \frac{m_{j+1}^{(e)} \dot{\delta}_5'^2}{2} \right) dt. \quad (10.32)$$

Виконавши викладки, аналогічні (8.33), праву частину рівності (10.32) можна подати у вигляді (10.31):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(m_j^{(e)} \ddot{\delta}_1' \delta(\delta_1') + m_j^{(e)} \ddot{\delta}_2' \delta(\delta_2') + m_{j+1}^{(e)} \ddot{\delta}_4' \delta(\delta_4') + m_{j+1}^{(e)} \ddot{\delta}_5' \delta(\delta_5') \right) dt. \quad (10.33)$$

У цій формулі і далі вираз $\delta(\delta_i')$ означає операцію варіювання вузловим переміщенням δ_i' .

За допомогою співвідношення (10.33) можна одержати матрицю мас елемента e у місцевій системі координат:

$$M'_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} m_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (10.34)$$

Таким чином, матриця зосереджених мас є діагональною матрицею, у якій елементи по діагоналі для ступенів свободи, що відповідають кутам повороту, дорівнюють нулю. Якщо деякі дискретні маси вихідної розрахункової схеми стержневої системи (див. рис. 10.5,а) мають ненульові моменти інерції, у матриці мас відповідних скінченних елементів діагональні елементи, що відповідають кутам повороту, ненульові.

Матриця розподілених мас. Цей підхід при побудові матриці мас викладено в п.8.4.2. Тут конкретизуємо наведені там співвідношення, коли базисні функції будуються на основі функцій переміщень окремого елемента.

При цьому підході велике значення має тип граничних умов на кінцях елемента. Розглянемо скінченний елемент першого типу (рис. 10.7). Його кінетична енергія обчислюється, виходячи з розподіленого представлення маси елемента. Інтеграл від варіації кінетичної енергії в місцевій системі координат записується у вигляді

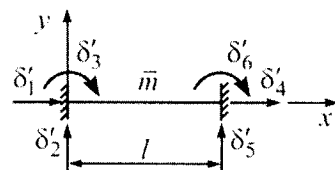


Рис.10.7

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \int_0^l \left(\frac{\mathbf{m} \dot{u}^2(x)}{2} + \frac{\mathbf{m} \dot{w}^2(x)}{2} \right) dx \right\} dt. \quad (10.35)$$

Виразимо переміщення $\mathbf{u}(x) = \{u(x) \ w(x)\}^T$ у межах елемента за допомогою вектора вузлових переміщень $\delta' = \{\delta'_1 \ \delta'_2 \ \delta'_3 \ \delta'_4 \ \delta'_5 \ \delta'_6\}^T$ через функції форм елемента [81]:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & \Phi_6 \end{bmatrix} \delta' = \Phi \delta'. \quad (10.36)$$

Вираз (10.35) можна переписати так:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \int_0^l \bar{\mathbf{m}} (\Phi \dot{\delta}')^T \Phi \dot{\delta}' dx \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \bar{\mathbf{m}} \int_0^l (\dot{\delta}')^T \Phi^T \Phi \dot{\delta}' dx \right\} dt. \quad (10.37)$$

Аналогічно (8.33) можна подати праву частину рівності, що наведена раніше, у вигляді (10.31):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(-\bar{\mathbf{m}} \int_0^l \Phi^T \Phi dx \right) \dot{\delta}' \right\}^T \delta(\delta') dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\mathbf{M}'_{pe} \ddot{\delta}' \right)^T \delta(\delta') dt, \quad (10.38)$$

де ненульові елементи матриці

$$\mathbf{M}'_{pe} = \mathbf{m} \int_0^l \Phi^T \Phi dx = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{62} & m_{63} & 0 & m_{65} & m_{66} \end{pmatrix} \quad (10.39)$$

розраховуються за формулою

$$m_{ij} = \mathbf{m} \int_0^l \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx. \quad (10.40)$$

Таким чином, вектор узагальнених сил інерції, що відповідають елементу e , у місцевій системі координат записується у вигляді

$$\mathbf{f}_i^{e'}(t) = -\mathbf{M}'_{pe} \ddot{\delta}'_i. \quad (10.41)$$

Скінченний розглядуваний елемент має жорсткий вузол на початку та жорсткий вузол на кінці. Як вказано в [81], координатні функції такого елемента мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 - \frac{x}{l}, & \Phi_2 &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & \Phi_3 &= -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}, \\ \Phi_4 &= \frac{x}{l}, & \Phi_5 &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, & \Phi_6 &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Виконуючи інтегрування за формулою (10.40), одержуємо

$$\mathbf{M}'_{pe} = \frac{\mathbf{m}l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22l & 0 & 54 & 13l \\ 0 & -22l & 4l^2 & 0 & -13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13l & 0 & 156 & 22l \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (10.43)$$

Таку матрицю мас має, наприклад, шостий скінченний елемент скінченноелементної моделі, яку зображено на рис. 10.5,б.

Розглянемо побудову матриці мас для скінченного елемента, який крім погонної маси має в одному вузлі зосереджену масу $m_{j+1}^{(e)}$ (рис. 10.8).

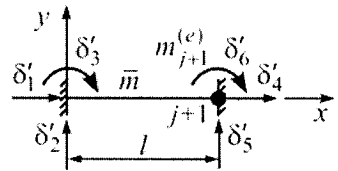


Рис.10.8

Такий вигляд має сьомий скінченний елемент скінченноелементної моделі, яку показано на рис. 10.6. Інтеграл від варіації кінетичної енергії розглядуваного елемента

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \int_0^l \left(\frac{\mathbf{m}u^2(x)}{2} + \frac{\mathbf{m}w^2(x)}{2} \right) dx \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{m_{j+1}^{(e)} \delta_4'^2}{2} + \frac{m_{j+1}^{(e)} \delta_5'^2}{2} \right\} dt. \quad (10.44)$$

Після використання представлення (10.36) за допомогою першого інтеграла можна записати розподілену матрицю мас, яка задається співвідношеннями (10.43). Другий доданок визначає зосереджену матрицю мас, у якій ненульовими будуть тільки четвертий та п'ятий діагональні елементи. Таким чином,

$$\mathbf{M}'_e = \mathbf{M}'_{pe} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.45)$$

У скінченноелементній моделі, яку показано на рис. 10.5.6, матриці мас першого, п'ятого і шостого елементів записуються в місцевій системі координат на основі співвідношень (10.43), для другого, сьомого та дев'ятого – на основі співвідношень (10.45). У четвертого, восьмого та одинадцятого елементів зосереджену масу розташовано в лівій вузловій точці. Легко показати, що для цих елементів матриця мас у місцевій системі координат визначається так:

$$\mathbf{M}'_e = \mathbf{M}'_{pe} + \begin{bmatrix} m_{j+1}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.46)$$

У третього і десятого елементів зосереджені маси ϵ в обох вузлових точках. Матриця

$$\mathbf{M}'_e = \mathbf{M}'_{pe} + \begin{bmatrix} m_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{j+1}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.47)$$

Після побудови матриці мас у місцевій системі координат для кожного елемента скінченноелементної моделі обчислюються напрямні косинуси для кожного скінченного елемента та матриці перетворення \mathbf{T}_e вузлових переміщень із загальної координатної системи до місцевої [81]. Далі обчислюються коефіцієнти матриці мас у загальній системі координат:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{M}'_e \mathbf{T}_e. \quad (10.48)$$

Після цього формується матриця мас \mathbf{M} для всієї розрахункової стержневої моделі.

Вираз (10.43) визначає розподілену матрицю мас для скінченного елемента з жорсткими вузлами на кінцях. У [81] побудовані матриці жорсткості для інших типів елементів. Визначимо для цих елементів розподілені матриці мас.

Розглянемо елемент із жорстким закріпленням на початку та шарніром на кінці (рис. 10.9).

Координатні функції для цього елемента задаються виразами

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}, \quad \Phi_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}, \\ \Phi_3(x) &= -x + \frac{3x^2}{2l} - \frac{x^3}{2l^2}, \\ \Phi_4(x) &= \frac{x}{l}, \quad \Phi_5(x) = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}, \quad \Phi_6(x) = 0. \end{aligned} \quad (10.49)$$

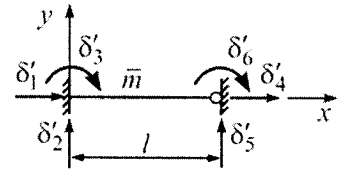


Рис. 10.9

Матриця мас визначається співвідношеннями

$$\mathbf{M}'_{pe} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & -36l & 0 & 58,5 & 0 \\ 0 & -36l & 8l^2 & 0 & -16,5 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58,5 & -16,5 & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.50)$$

Для стержня з шарніром на початку координат та із жорстким закріпленням на кінці (рис. 10.10) координатні функції задаються такими співвідношеннями:

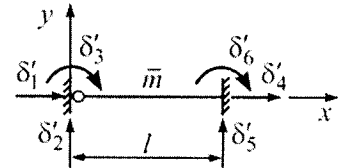


Рис. 10.10

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}, \quad \Phi_2(x) = 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}, \quad \Phi_3(x) = 0, \quad \Phi_4(x) = \frac{x}{l}, \\ \Phi_5(x) &= \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3}, \quad \Phi_6(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2l^2}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

За формулою (10.40) визначаємо матрицю мас для цього типу скінченного елемента:

$$\mathbf{M}'_{pe} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 & 0 & 58,5 & 16,5l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58,5 & 0 & 0 & 204 & 36l \\ 0 & 16,5l & 0 & 0 & 36l & 8l^2 \end{bmatrix}. \quad (10.52)$$

Для стержня з шарніром на початку та шарніром на кінці (рис. 10.11) координатні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}, \quad \Phi_2(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \Phi_3(x) = 0, \\ \Phi_4(x) &= \frac{x}{l}, \quad \Phi_5(x) = \frac{x}{l}, \quad \Phi_6(x) = 0. \end{aligned} \quad (10.53)$$

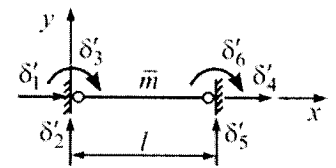


Рис. 10.11

Матриця мас

$$\mathbf{M}'_{pe} = \frac{\mathbf{m}l}{420} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.54)$$

10.3.4. Побудова матриці демпфірування

У процедурі побудови матриці демпфірування багато спільного з процедурою побудови матриці жорсткості [81]. Як зазначалось у п.10.3.2, матриця демпфірування будується виходячи з третього доданку рівняння (10.28). Цей доданок являє собою інтеграл від суми робіт δA^e , що виконуються на кожному елементі неконсервативними внутрішніми силами опору руху та зовнішніми силами на можливих переміщеннях. З урахуванням (10.29) інтеграл $\int_{t_1}^{t_2} \delta A^e dt$ запишеться у вигляді, що відповідає (10.31):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A_{bH}^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_D^e(t) \cdot \delta(\delta(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{q}^e \cdot \delta(\delta(t)) dt, \quad (10.55)$$

де δA_b^e , δA_{bH}^e – робота відповідно внутрішніх та зовнішніх неконсервативних сил на можливих переміщеннях елемента e .

За допомогою інтеграла $\int_{t_1}^{t_2} \delta A_{bH}^e dt$ можна визначити складові вузлового навантаження. На основі інтеграла $\int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e dt$ будується узагальнена сила опору \mathbf{f}_D^e ,

що відповідає елементу e , яка визначається матрицею демпфірування \mathbf{C}'_e .

Нагадаємо, що розглядається дисипація енергії як за рахунок внутрішнього опору руху, пов'язаного з властивостями матеріалу, так і зумовлена дією зовнішніх демпферів. Наприклад, на розглядувану раму крім розподілених сил опору в процесі коливань діє зосереджена сила опору від зовнішнього демпфера, приєднаного до лівого стояка.

Розглянемо спочатку побудову матриці демпфірування для скінченного елемента e (рис. 10.12), у якого опір руху зумовлений властивостями матеріалу.

Інтеграл від віртуальної роботи внутрішніх неконсервативних сил у місцевій системі координат записується так:

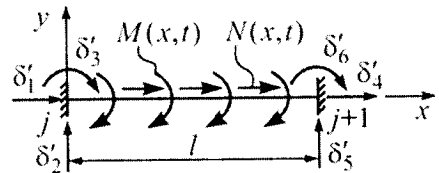


Рис.10.12

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^l (N(x,t) \delta \varepsilon(x,t) + M(x,t) \delta \kappa(x,t)) dx \right\} dt, \quad (10.56)$$

де N – поздовжнє навантаження; M – розподілений момент, що зумовлений внутрішнім опором; $\delta \varepsilon(x,t)$ – варіація поздовжньої деформації; $\delta \kappa(x,t)$ – варіація кривизни.

Вираз (10.56) є вихідним. Далі, базуючись на прийнятій теорії внутрішнього опору, що пов'язує $N(x,t)$ і $M(x,t)$ з переміщеннями $u(x,t)$ і $w(x,t)$, і використовуючи представлення (10.36), можна перетворити інтеграл $\int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e dt$ у вигляд, який

відповідає першому доданку в правій частині рівності (10.55). Це дає можливість побудувати матрицю демпфірування C'_e елемента e .

Приймемо закон в'язкопружного деформування матеріалу:

$$\sigma = E\varepsilon + \nu E\dot{\varepsilon}, \quad (10.57)$$

де E – модуль пружності; ν – коефіцієнт, що характеризує в'язкість матеріалу.

Використовуючи фізичний закон (10.57), можна записати такі співвідношення, що пов'язують поздовжні сили $N(x,t)$ та згинаючі моменти $M(x,t)$ з компонентами вектора переміщень $\mathbf{u}(x,t) = \{u(x,t) \ w(x,t)\}^T$:

$$N(x,t) = EAu'(x,t) + \nu EA\dot{u}'(x,t); \quad (10.58)$$

$$M(x,t) = EJw''(x,t) + \nu EJ\dot{w}''(x,t). \quad (10.59)$$

Перші доданки в правій частині виразів (10.58) та (10.59) характеризують вплив консервативних сил, які враховуються при визначенні потенціальної енергії U , а другі доданки

$$N(x,t) = \nu EA\dot{u}'(x,t); \quad (10.60)$$

$$M(x,t) = \nu EJ\dot{w}''(x,t) \quad (10.61)$$

характеризують вплив внутрішніх неконсервативних сил.

З урахуванням (10.60) і (10.61) віртуальна робота внутрішніх неконсервативних сил у скінченному елементі e в місцевій системі координат подається так:

$$\delta A_b^e(t) = -\nu \int_0^l (EA\dot{u}'(x,t)\delta u'(x,t) + EJ\dot{w}''(x,t)\delta w''(x,t)) dx. \quad (10.62)$$

За допомогою матриці пружних констант

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EF & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

і матриці диференціювання

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix},$$

які введено в [81] при побудові матриці жорсткості, вираз (10.62) переписується у вигляді

$$\delta A_b^e(t) = -v \int_0^l (\dot{\mathbf{d}}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \delta(\mathbf{d}\mathbf{u}) dx. \quad (10.63)$$

При записуванні (10.63) урахувалася перестановочність операцій варіювання та диференціювання.

З урахуванням (10.36) віртуальну роботу (10.63) можна подати у вигляді:

$$\delta A_b^e(t) = -v \int_0^l (\mathbf{d}\Phi \dot{\delta}')^T \mathbf{D} \mathbf{d}\Phi \delta(\delta') dx. \quad (10.64)$$

За допомогою матриці

$$\mathbf{B} = \mathbf{d}\Phi = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{d\Phi_4}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} & 0 & \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \end{bmatrix}$$

інтеграл (10.64) переписується так:

$$\delta A_b^e(t) = -v \int_0^l (\mathbf{B} \dot{\delta}')^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\delta') dx = -v \int_0^l (\dot{\delta}')^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\delta') dx = (\dot{\delta}')^T \left(-v \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \right) \delta(\delta'). \quad (10.65)$$

Уведемо матрицю

$$\mathbf{C}'_e = v \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx. \quad (10.66)$$

З урахуванням (10.65) і (10.66) інтеграл від віртуальної роботи внутрішніх неконсервативних сил можна записати у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (-\mathbf{C}'_e \dot{\delta}') \cdot \delta(\delta') dt. \quad (10.67)$$

Отже, згідно з (10.55) вектор узагальнених сил опору, що відповідає елементу e , подається у вигляді

$$\mathbf{f}'_D = -\mathbf{C}'_e \dot{\delta}'. \quad (10.68)$$

Таким чином, матриця \mathbf{C}_e , що визначається співвідношенням (10.66), є матрицею демпфірування елемента e , яка відповідає фізичному закону (10.67).

Виходячи з (10.66), легко показати [81], що при прийнятому фізичному законі матриця демпфірування відрізняється від матриці жорсткості елемента множителем v , який характеризує в'язкість матеріалу:

$$\mathbf{C}'_e = v \mathbf{K}'_e. \quad (10.69)$$

Природно, що при іншому фізичному законі матриця демпфірування матиме інший вигляд.

У скінченноелементній моделі, яку показано на рис. 10.5,б, за формулою (10.69) обчислюватимуться матриці демпфірування для 2–11-го елементів. При обчисленні матриці демпфірування для першого скінченноелементного елемента слід урахувати вплив зовнішнього демпфера, приєднаного в першому вузлі.

Побудова матриці демпфірування для скінченних елементів, на які в процесі коливань крім розподілених сил опору діє зосереджена сила опору від приєднаного у вузлі зовнішнього демпфера, виконується так. Розглянемо скінченний елемент e , який зображено на рис. 10.13.

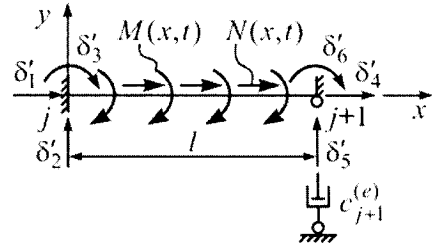


Рис.10.13

У цього елемента внутрішній опір визначається законом (10.57) і до правого вузла приєднаний зовнішній демпфер з

коефіцієнтами в'язкості $c_{j+1}^{(e)}$. Інтеграл від віртуальної роботи сил опору в місцевій системі координат записується так:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_b^e(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^l (N(x,t) \delta \varepsilon(x,t) + M(x,t) \delta \kappa(x,t)) dx - c_{j+1}^{(e)} \dot{w}(e,t) \delta w(e,t) \right\} dt. \quad (10.70)$$

Аналогічно тому, як це зроблено для (10.56), інтеграл (10.70) можна перетворити у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_e^e(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left((-v \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx) \delta' \right)^T \delta(\delta') - c_{j+1}^{(e)} \delta'_5 \cdot \delta(\delta'_5) \right\} dt. \quad (10.71)$$

Таким чином, у цьому разі матриця демпфірування в місцевій системі координат

$$\mathbf{C}'_e = v \mathbf{K}'_e + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{j+1}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.72)$$

Для скінченного елемента, який має зовнішній демпфер у лівому вузлі (рис. 10.14), матриця демпфірування в місцевій системі координат запишеться у вигляді

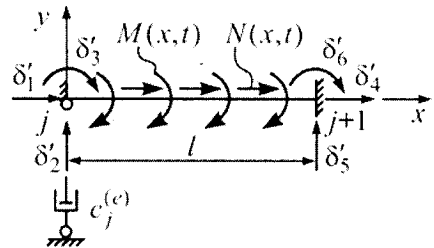


Рис.10.14

$$\mathbf{C}'_e = v \mathbf{K}'_e + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.73)$$

Якщо скінченний елемент має демпфери в лівому та правому вузлах (рис. 10.15), його матриця демпфірування запишеться так:

$$C'_e = \nu K'_e + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_j^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{j+1}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.74)$$

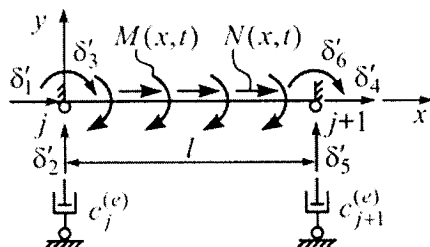


Рис.10.15

Після того як одержано матриці демпфірування в місцевій системі координат скінченноелементної моделі, обчислюються напрямні косинуси для кожного скінченного елемента та матриці перетворення T_e кутових переміщень із загальної координатної системи до місцевої. Далі обчислюються коефіцієнти матриці демпфірування у загальній системі координат за формулою

$$C_e = (T_e)^T C'_e T_e. \quad (10.75)$$

Після цього формується матриця демпфірування C для всієї розрахункової стержневої моделі. У практичних розрахунках сформулювати відповідний фізичний закон на зразок (10.57) з врахуванням затухання важко. Звичайно параметри затухання виражаються у формі відносних коефіцієнтів затухання та визначаються експериментально. Якщо необхідно знайти матрицю затухання C , вона, як правило, визначається за відомими параметрами затухання.

11. Варіаційні принципи в теорії власних коливань пружних систем

11.1. Метод Релея

Коли система здійснює вільні коливання за відсутності сил опору руху, її повна механічна енергія, що визначається початковим положенням та початковою швидкістю, залишається незмінною, тобто

$$T + U = h = \text{const}, \quad (11.1)$$

де T , U – енергія системи відповідно кінетична та потенціальна.

Якщо система здійснює одне з головних коливань, то всі її точки одночасно досягають положень найбільшого відхилення в той момент, коли всі узагальнені швидкості дорівнюють нулю, і одночасно проходять через положення рівноваги, у цей момент дорівнюють нулю всі узагальнені координати. У положенні найбільшого відхилення кінетична енергія перетворюється на нуль, а потенціальна енергія досягає свого максимального значення:

$$U_{\max} = h. \quad (11.2)$$

У положенні рівноваги, навпаки, перетворюється на нуль потенціальна енергія і досягає максимуму кінетична енергія. Цей максимум дорівнює тій же константі h :

$$T_{\max} = h. \quad (11.3)$$

Таким чином, коли система здійснює одне з головних коливань, то

$$T_{\max} = U_{\max}. \quad (11.4)$$

Рівність (11.4) виражає принцип збереження енергії для головних форм коливань. На цьому принципі базується метод Релея визначення частот власних коливань. Пояснимо цей підхід на прикладі коливань системи з одним ступенем свободи, яку зображено на рис. 11.1,а.

При відповідному виборі початкових умов вільні коливання маси (рис. 11.1,б) описуються виразом

$$y(t) = y_0 \sin \omega t. \quad (11.5)$$

Швидкість коливального руху задається співвідношенням (рис. 11.1,в)

$$\dot{y}(t) = y_0 \omega \cos \omega t. \quad (11.6)$$

Потенціальна енергія системи повністю визначається енергією пружних деформацій пружини

$$U = \frac{1}{2} ky^2(t) = \frac{1}{2} ky_0^2 \sin^2 \omega t, \quad (11.7)$$

а кінетична енергія маси

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2(t) = \frac{1}{2} my_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t. \quad (11.8)$$

У момент часу $t = T/4 = \pi/2 \omega$ (рис. 11.1) кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна енергія досягає максимальної величини:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} ky_0^2. \quad (11.9)$$

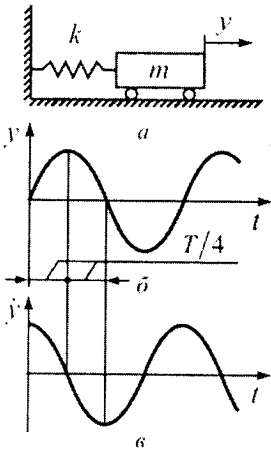


Рис.11.1

Аналогічно при $t = T/2 = \pi/\omega$ потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична енергія досягає максимуму

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m y_0^2 \omega^2. \quad (11.10)$$

Згідно з принципом збереження енергії

$$\frac{1}{2} m y_0^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k y_0^2. \quad (11.11)$$

Таким чином,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (11.12)$$

Вираз (11.12), природно, збігається з відомою формулою для системи з одним ступенем свободи, але тепер він отриманий із застосуванням методу Релея з умови рівності потенціальної та кінетичної енергій.

11.2. Метод Релея для систем із скінченним числом ступенів свободи

Застосування методу Релея для аналізу розглянутого осцилятора не дає жодних переваг, проте при вивченні складніших пружних систем такий підхід дає змогу сформулювати ряд важливих варіаційних принципів, на яких базуються, зокрема, сучасні ефективні обчислювальні алгоритми чисельного аналізу вільних коливань пружних систем.

Нехай система зі скінченним числом ступенів свободи здійснює вільні коливання. Кінетична та потенціальна енергії визначаються виразами відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T(t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (11.13)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{y}(t). \quad (11.14)$$

Для l -ї головної форми коливань, яка задається виразом

$$\mathbf{y}_l(t) = y_l \sin(\omega_l t + \varphi_l),$$

де ω_l – l -та власна частота; а $\mathbf{y}_l = \{y_{1l} \ y_{2l} \ \dots \ y_{nl}\}^T$ – відповідний власний вектор

$$T = \frac{1}{2} \omega_l^2 \cos^2(\omega_l t + \varphi_l) \mathbf{y}_l^T \mathbf{M} \mathbf{y}_l, \quad (11.15)$$

$$U = \frac{1}{2} \sin^2(\omega_l t + \varphi_l) \mathbf{y}_l^T \mathbf{K} \mathbf{y}_l. \quad (11.16)$$

Звідси для розглядуваної головної форми коливань

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_l^2 \mathbf{y}_l^T \mathbf{M} \mathbf{y}_l, \quad (11.17)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{y}_l^T \mathbf{K} \mathbf{y}_l. \quad (11.18)$$

Прирівнюючи (11.17) і (11.18) згідно принципу збереження енергії, одержуємо

$$\omega_l^2 = \frac{\mathbf{y}_l^T \mathbf{K} \mathbf{y}_l}{\mathbf{y}_l^T \mathbf{M} \mathbf{y}_l}. \quad (11.19)$$

Таким чином, квадрати власних частот та власні форми пов'язані між собою тотожним співвідношенням, яке називається формулою Релея.

У розгорнутому вигляді формула Релея записується так:

$$\omega_l^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_{il} y_{jl}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} y_{il} y_{jl}}, \quad (11.20)$$

де k_{ij} , m_{ij} – елемент матриці відповідно \mathbf{K} та \mathbf{M} .

Нові можливості для динамічного аналізу з'являються, якщо записати дріб, що стоїть в правій частині формули (11.19), для довільного вектора $\mathbf{y} = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n\}^T$. Отже, вводимо функцію

$$R(\mathbf{y}) = R(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_i y_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} y_i y_j}, \quad (11.21)$$

яка називається дробом Релея, або функцією Релея. Дріб Релея відіграє велику роль при обчисленні власних значень та власних векторів.

11.3. Екстремальні властивості власних частот

Нехай для узагальненої проблеми власних значень

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (11.22)$$

визначено спектр власних частот та побудовано матрицю Φ ортонормованих власних векторів. Будь-який вектор \mathbf{y} можна однозначно подати у вигляді

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{a}, \quad (11.23)$$

де компоненти вектора $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}^T$ визначаються співвідношенням

$$a_i = \mathbf{y}^T \mathbf{M} \Phi_i. \quad (11.24)$$

За допомогою (11.23) можна записати функцію Релея для вектора \mathbf{y} у вигляді

$$R(\mathbf{y}) = \frac{a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2 + \dots + a_n^2 \omega_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = R_1(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (11.25)$$

Формула (11.25) виражає значення функції Релея для вектора \mathbf{y} через коефіцієнти його розкладання в ортонормованому базисі власних векторів.

З формули (11.25) випливає ряд важливих наслідків. Нехай вектор \mathbf{y} є першою формою коливань, тобто

$$\mathbf{y} = a_1 \Phi_1, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0,$$

тоді

$$R(\mathbf{y}) = \omega_1^2.$$

Якщо вектор \mathbf{y} є n -ю формою коливань (11.25), тобто

$$\mathbf{y} = a_n \Phi_n, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0,$$

то

$$R(\mathbf{y}) = \omega_n^2.$$

Для решти векторів $\bar{\mathbf{y}}$ згідно з послідовністю розташування власних частот у спектрі

$$\omega_1^2 \leq R(\mathbf{y}) \leq \omega_n^2. \quad (11.26)$$

За допомогою співвідношень (11.25), (11.26) можна сформулювати *варіаційний принцип Релея*, який стверджує, що форма коливань, яка відповідає нижчій власній частоті, надає дробу Релея мінімального значення. Інакше кажучи, нижча (головна) власна частота задовольняє співвідношення

$$\omega_1^2 = \min \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}, \quad (11.27)$$

в якому до порівняння допускаються будь-які значення вектора $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Розглянемо підпростір V_{n-1} розмірності $n-1$, який є ортогональним до першої власної форми \mathbf{y}_1 , тобто будь-який вектор $\mathbf{y} \in V_{n-1}$ задовольняє умову $\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}_1 = 0$. Якщо вектор $\mathbf{y} \in V_{n-1}$, то для нього в поданні (11.23) $a_1 = 0$, і для будь-якого вектора $\mathbf{y} \in V_{n-1}$ маємо

$$\omega_2^2 \leq R(\mathbf{y}) \leq \omega_n^2. \quad (11.28)$$

Аналогічно розглянемо підпростір V_{n-k-1} розмірності $n-k-1$, який є ортогональним до перших $k-1$ власних форм $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$, тобто будь-який вектор $\mathbf{y} \in V_{n-k-1}$ задовольняє умови $\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, k-1$). У будь-якого вектора $\mathbf{y} \in V_{n-k-1}$ в поданні (11.23) $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$, і для векторів $\mathbf{y} \in V_{n-k-1}$ маємо

$$\omega_k^2 \leq R(\mathbf{y}) \leq \omega_n^2. \quad (11.29)$$

Із цих співвідношень випливає *розширений варіаційний принцип Релея* – власна частота ω_k задовольняє співвідношення

$$\omega_k^2 = \min_{\mathbf{y} \in V_{n-k-1}} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}. \quad (11.30)$$

Узагальнюючи наведене, можна сформулювати *мінімаксий варіаційний принцип Куранта* – власна частота ω_k задовольняє співвідношення

$$\omega_k^2 = \max_{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}} \min_{y \in V_{n-k-1}} \frac{y^T \mathbf{K} y}{y^T \mathbf{M} y}, \quad (11.31)$$

де $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ – довільні лінійно незалежні вектори; V_{n-k-1} – підпростір, який ортогональний до векторів $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$, тобто будь-який вектор $\mathbf{y} \in V_{n-k-1}$ задовольняє умову

$$\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (11.32)$$

Із викладеного випливає, що власні частоти системи можна знайти як розв'язок задачі про мінімум дробу Релея. Такі самі частоти починаючи з другої можна одержати також як розв'язок мінімаксної задачі.

Як зазначалося, варіаційні принципи широко використовують для побудови алгоритмів наближеного обчислення частот та форм коливань пружних систем з великою кількістю ступенів свободи. Крім того, за їх допомогою можна оцінити вплив деяких змін умов задачі на поведінку власних частот.

11.4. Вплив змін масових та жорсткісних характеристик системи на власні частоти

Нехай масові та жорсткісні характеристики змінюються при незмінному числі ступенів свободи. Розглядається питання про вплив цих змін на власні частоти системи. Якщо в результаті цих змін дріб Релея збільшується, то власні частоти системи можуть тільки зростати. Справді, дріб Релея вихідної системи позначимо R , зміненої системи – \bar{R} та нехай $R \leq \bar{R}$. Тоді

$$\min R \leq \min \bar{R}, \quad (11.33)$$

але оскільки згідно з (11.27)

$$\omega_1^2 = \min R, \quad \bar{\omega}_1^2 = \min \bar{R},$$

то

$$\omega_1^2 \leq \bar{\omega}_1^2, \quad (11.34)$$

де $\bar{\omega}_1$ – власна частота зміненої системи.

Скориставшись мінімаксним варіаційним принципом Куранта (11.31), можна показати, що і для $i \geq 2$

$$\bar{\omega}_i^2 \leq \omega_i^2. \quad (11.35)$$

Як випливає з (11.12), у систем з одним ступенем свободи збільшення жорсткості спричинює збільшення частоти, а збільшення маси – зменшення частоти. Для систем з кількома ступенями свободи це положення можна узагальнити так. Додавання до матриці жорсткості \mathbf{K} невід'ємно визначеної матриці \mathbf{K}' не зменшує дріб Релея і, таким чином, не може зменшити жодної частоти спектру, а додавання до матриці мас \mathbf{M} невід'ємно визначеної матриці \mathbf{M}' не збільшує дріб Релея і, таким чином, не може збільшити жодної частоти цієї послідовності.

11.5. Вплив накладання в'язей на власні частоти

Вважатимемо, що на систему накладено ідеальну в'язь, яка визначається вектором $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T$, якщо всі можливі значення вектора \mathbf{y} задовольняють умову

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y} = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n = 0. \quad (11.36)$$

Нехай на систему накладено r ідеальних в'язей, які визначаються лінійно незалежними векторами $\mathbf{u}_1 = \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}\}^T$, $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$, тобто всі можливі значення вектора \mathbf{y} задовольняють умови

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{y} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (11.37)$$

При визначенні частот та форм власних коливань це означає, що в n -вимірному просторі власних форм \mathbf{y} виділено $(n-r)$ -вимірний підпростір V_{n-r} . Нехай

$$\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-r} \quad (11.38)$$

є спектром власних частот системи із в'язями (11.37). Для спектра (11.38) виконуються нерівності

$$\omega_i \leq \omega'_i \leq \omega_{i+r}, \quad i = 1, 2, \dots, n-r, \quad (11.39)$$

де ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) – частоти вихідної системи без в'язей.

12. Застосування принципу Гамільтона-Остроградського для побудови системи диференціальних рівнянь коливань

Принцип Гамільтона-Остроградського (принцип найменшої дії) може бути записаний у вигляді

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (12.1)$$

де T – кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи; A – робота неконсервативних сил.

Для зображеної на рис. 12.1 балки

$$T(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l m(x) [\dot{w}(x,t)]^2 dx; \quad (12.2)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l EI(x) [w''(x,t)]^2 dx; \quad (12.3)$$

$$A(t) = \int_0^l q(x,t) w(x,t) dx. \quad (12.4)$$

Скінченну систему рівнянь будемо за допомогою методу Рітца:

$$w(x,t) = \sum y_i(t) r_i(x), \quad (12.5)$$

$$\dot{w}(x,t) = \sum \dot{y}_i(t) r_i(x), \quad (12.6)$$

$$w''(x,t) = \sum y_i''(t) r_i(x). \quad (12.7)$$

Функціоналам (12.2)–(12.4) тепер можна надати наступного вигляду

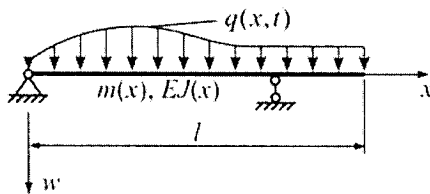


Рис. 12.1

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j; \quad (12.8)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^n k_{ij} y_i y_j; \quad (12.9)$$

$$A(t) = \sum_{j=1}^n Q_j, \quad (12.10)$$

де

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) r_i(x) r_j(x) dx; \quad (12.11)$$

$$k_{ij} = \int_0^l EI(x) r_i''(x) r_j''(x) dx; \quad (12.12)$$

12. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСЬКОГО ДЛЯ ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ

$$Q_j(t) = \int_0^l q(x,t)r_j(x)dx, \quad (12.13)$$

або в векторному вигляді

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}; \quad (12.14)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}; \quad (12.15)$$

$$A(t) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}. \quad (12.16)$$

Тут \mathbf{y} – вектор узагальнених координат; $\dot{\mathbf{y}}$ – вектор узагальнених швидкостей; \mathbf{Q} – вектор узагальнених сил; $\mathbf{M}_{n \times n}$ – матриця мас; $\mathbf{K}_{n \times n}$ – матриця жорсткості.

Принцип Гамільтона – Остроградського тепер запишемо наступним чином:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \right) dt = 0. \quad (12.17)$$

Виконуючи варіювання, отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \delta \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \delta \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \right) dt = 0. \quad (12.18)$$

Для того, щоб позбутися варіацій узагальнених швидкостей, проінтегруємо частинами перший доданок і отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{y}^T (-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{K} \mathbf{y} + \mathbf{Q}) dt = 0.$$

Звідки витікає система диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (12.19)$$

Застосуємо тепер для побудови системи диференціальних рівнянь принцип Гамільтона у формі Пуанкаре (принцип Гамільтона–Пуанкаре). При цьому замість узагальнених швидкостей \dot{y}_i будемо використовувати узагальнені імпульси p_i , які визначаються рівностями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12.20)$$

Виходячи з вигляду функцій Лагранжа

$$L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}, \quad (12.21)$$

знаходимо вектор узагальнених імпульсів:

$$\mathbf{p} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}, \quad (12.22)$$

або в поелементному запису

$$p_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} \dot{y}_i. \quad (12.23)$$

В свою чергу при відомих імпульсах узагальнені швидкості знаходяться наступним чином:

$$\dot{y} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}. \quad (12.24)$$

Математичний запис принципу Гамільтона-Пуанкаре має вигляд:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{p}^T \dot{y} - H) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (12.25)$$

де функція Гамільтона отримана за допомогою перетворення Лежандра:

$$H(y, \dot{y}, t) = \mathbf{p}^T \dot{y} - L(y, \dot{y}, t) = \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}. \quad (12.26)$$

Підставимо вираз для функції Гамільтона (12.26) в рівняння (12.25) і виконаємо варіювання:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathbf{p}^T \dot{y} + \mathbf{p}^T \delta \dot{y} - \delta \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} - \delta \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \delta \mathbf{y}^T \mathbf{Q}) dt = 0. \quad (12.27)$$

За допомогою інтегрування частинами позбудемось варіацій узагальнених швидкостей

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p}^T \delta \dot{y} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}}^T \delta y dt$$

і перепишемо (12.27) у наступному вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(\dot{y} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})^T \delta \mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{y} - \mathbf{Q})^T \delta \mathbf{y} \right] dt = 0. \quad (12.28)$$

Зважаючи на довільність варіацій, можемо записати систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{y} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} = 0 \\ \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{y} - \mathbf{Q} = 0. \end{cases} \quad (12.29)$$

Таким чином, за допомогою принципу Гамільтона-Остроградського отримана система n диференціальних рівнянь другого порядку (12.19) відносно узагальнених координат y_i , а за допомогою принципу Гамільтона-Пуанкаре побудована система $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку (12.29) відносно узагальнених координат y_i та узагальнених імпульсів p_i .

13. Варіаційні принципи для двовимірних та тривимірних задач

13.1. Основні співвідношення лінійної теорії пружності

Розглянемо лінійну задачу теорії пружності. Нехай в об'ємі V , який зайнятий пружним тілом, діє вектор об'ємних сил $\mathbf{g} = \{X, Y, Z\}^T$, де X, Y, Z – компоненти вектора об'ємних сил, віднесені до одиниці об'єму у напрямку осей декартової системи координат x, y, z (рис. 13.1).

Об'єм V обмежується поверхнею S , яка складається із двох частин: $S = S_1 + S_2$. На S_1 заданий вектор поверхневих сил \mathbf{P}_S , а на S_2 – вектор переміщень \mathbf{u}_S :

$$\mathbf{P}_S = \{P_{xv}, P_{yv}, P_{zv}\}^T, \quad \mathbf{u}_S = \{u, v, w\}^T.$$

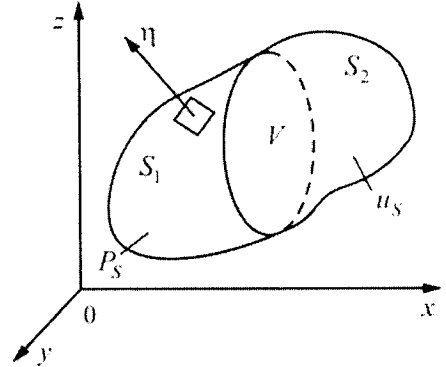


Рис. 13.1

1. Напруження. Напружений стан у точці тіла визначається дев'ятьма компонентами тензора напружень

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

які задовольняють рівнянням рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

і $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$

Виключимо $\tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ і будемо описувати напружений стан у точці тіла тільки шістьма компонентами $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \tag{13.1}$$

2. Деформації. Деформований стан у точці тіла визначається шістьма компонентами тензора деформацій $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$.

3. Співвідношення деформації – переміщення. У геометрично лінійній теорії пружності використовуються такі співвідношення між деформаціями і переміщеннями:

3.1 Рівняння Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (13.2)$$

3.2 Рівняння Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = 0,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0. \quad (13.3)$$

4. Співвідношення напруження – деформації.

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta, \quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta, \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta,$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

де $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}$ – параметр Ламе, або:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), \quad G\gamma_{xy} = \tau_{xy},$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x), \quad G\gamma_{yz} = \tau_{yz}, \quad (13.4)$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y), \quad G\gamma_{zx} = \tau_{zx}.$$

5. Граничні умови. Враховуючи, що

$$P_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n$$

$$P_{yv} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n,$$

$$P_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

де l, m, n – направляючі косинуси одиничної зовнішньої нормалі η до поверхні: $l = \cos(x, \eta)$, $m = \cos(y, \eta)$, $n = \cos(z, \eta)$, отримаємо $P_{xv} = \bar{P}_{xv}$, $P_{yv} = \bar{P}_{yv}$, $P_{zv} = \bar{P}_{zv}$ на поверхні S_1 і, відповідно, $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$ на поверхні S_2 .

Таким чином, ми отримали усі визначальні співвідношення лінійної теорії пружності: рівняння рівноваги (13.1), співвідношення деформації – переміщення

(13.2), (13.3), співвідношення напруження – деформації (13.4), а також граничні умови на поверхні тіла.

Ці співвідношення містять 15 невідомих функцій, а саме 6 компонент напружень, 6 компонент деформацій, 3 компоненти переміщення, які входять у 15 рівнянь (13.1), (13.3), (13.4).

Ці рівняння зручно представити у матричній формі, якщо ввести такі позначення.

Вектори

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \quad \mathbf{u} = \{u, v, w\}^T.$$

Матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}.$$

Тоді отримаємо матричне рівняння рівноваги в об'ємі V :

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V.$$

Матричне рівняння, що пов'язує деформації і переміщення (рівняння Коші):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S.$$

Рівняння Сен-Венана:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \in V.$$

Напруження і деформації зв'язуються матрицею податливості:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad \in V, S.$$

Граничні умови на S_1 : $\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1$.

Граничні умови на S_2 : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2$.

Ці рівняння можуть бути записані у переміщеннях і напруженнях:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$$

У переміщеннях, якщо виразити напруження через переміщення $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{P}_S \in S_1,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$$

У напруженнях, якщо скористатися рівнянням сумісності деформацій:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1.$$

Представлення лінійної задачі теорії пружності у переміщеннях приводить до рівнянь Ламе, у напруженнях – до рівнянь Бельтрамі-Мічелла. Зазначимо, що наведені співвідношення, звичайно, не вичерпують усіх задач теорії пружності.

13.2. Теорема Клапейрона

Якщо пружне тіло знаходиться у рівновазі, то робота зовнішніх сил на пружних переміщеннях u, v, w дорівнює

$$A = \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \iint_S (P_{xv}u + P_{yv}v + P_{zv}w) dS.$$

Використовуючи відомі формули

$$P_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n,$$

$$P_{yv} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n,$$

$$P_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,$$

отримаємо

$$A_2 = \iint_S (P_{xv}u + P_{yv}v + P_{zv}w) dS = \iint_S [(\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{zx}w)l + (\tau_{xy}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w)m + (\tau_{zx}u + \tau_{yz}v + \sigma_z w)n] dS.$$

Згідно з формулою Гауса-Остроградського

$$\iint_S [Ll + Mm + Nn] dS = \iiint_V \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

З урахуванням геометричних залежностей

$$dydz = \pm l dS, \quad dzdx = \pm m dS, \quad dxdy = \pm n dS.$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} A_2 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{zx}w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}u + \tau_{yz}v + \sigma_z w) \right] dx dy dz = \\ &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dx dy dz + \\ &+ \iiint_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy dz. \\ A &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) v + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) w \right] dx dy dz + \iiint_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}] dx dy dz. \end{aligned}$$

Враховуючи рівняння рівноваги, можна зробити висновок, що перший інтеграл дорівнює нулю, а другий являє собою подвійну потенціальну енергію пружної деформації. Тому можна записати:

$$2U = \iiint_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}] dx dy dz.$$

Таким чином отримаємо

$$\iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \iint_S (P_{xv}u + P_{yv}v + P_{zv}w) dS = 2U$$

або у матричному вигляді

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS.$$

Тобто для дійсного стану лінійно пружної системи, у якому задовольняються рівняння рівноваги, сумісності деформацій, фізичної сторони задачі та граничні умови, подвійна потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі

зовнішніх сил. Це положення становить теорему Клапейрона^{1,2,3}.

Ураховуючи, що $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$, а $\mathbf{g}^T = -(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T$ вираз для теореми Клапейрона

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV = - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS$$

являє собою теорему про дивергенцію і у наведеному вигляді дозволяє переносити операцію диференціювання з вектора $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ на вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

і навпаки, що часто використовується для отримання різних варіаційних постановок задач теорії пружності [172].

13.3. Питома потенціальна енергія пружної деформації. Формули Дж.Гріна і Кастільяно

Розглянемо процес деформації від початкового природного ненапруженого стану. Потенціальна енергія пружної деформації, віднесена до одиниці об'єму буде мати вигляд:

$$u_0 = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}^{\boldsymbol{\varepsilon}} (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{yz} d\gamma_{xy} + \tau_{zx} d\gamma_{yz} + \tau_{xy} d\gamma_{zx}),$$

а потенціальна енергія деформації усього тіла буде дорівнювати

$$U = \iiint_V u_0 dV.$$

У випадку одноосового розтягу-стиснення (рис. 13.2)

$$u_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x. \quad (13.5)$$

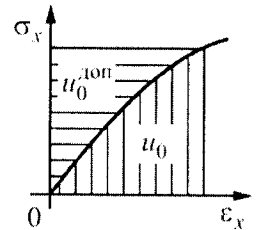


Рис. 13.2

Оскільки матеріал тіла є пружним, питома потенціальна енергія пружної деформації u_0 не повинна залежати від шляху інтегрування, тобто

¹ Клапейрон, Бенуа Поль-Еміль (фр. Benoît Paul Émile Clapeyron, 1799–1864) – французький інженер, фізик і механік. Дві найбільш значні роботи Клапейрона – Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme (Трактат про рушійну силу тепла) [Clapeyron, 1926] і теорема його імені в теорії пружності. Надання цій теоремі імені Клапейрона може бути приписане Ламе, який у 1852 р. представив теорему Клапейрона для загального випадку просторового континууму в першій монографії з теорії пружності [Lame, 1852, стор. 80-92]. Клапейрон також дав формулювання теореми трьох моментів.

² Ламе, Габріель (фр. Gabriel Lamé, 1795–1870) – французький математик, фізик і інженер. Автор «Лекцій з математичної теорії пружності твердих тіл» (1852) – першого трактату по теорії пружності.

³ Значно пізніше Клапейрона німецький учений Г.Пранге (нім. Prange G. 1885–1941) вказав на те, що теорема Клапейрона є в загальному випадку розповсюдженням теореми Ейлера про однорідні скалярні функції на складні однорідні функціонали (Prange G., 1916. Die Variations-und Minimalprinzipie der Statik der Baukonstruktionen Technische Universität in Hannover).

13. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ТА ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ

підінтегральний вираз (13.5) повинен дорівнювати диференціалу du_0 функції u_0 , а саме:

$$du_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x} d\varepsilon_x + \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_y} d\varepsilon_y + \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_z} d\varepsilon_z + \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{zx}} d\gamma_{zx},$$

звідки отримаємо

$$\sigma_x = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_y}, \quad \sigma_z = \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{yz}}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{zx}}. \quad (13.6)$$

Функція u_0 має назву пружного потенціалу, тому що функції (13.6) визначають потенціальний характер рівняння стану у пружному тілі – компоненти вектора напружень визначаються через компоненти вектора деформацій шляхом диференціювання функції u_0 . Формули (13.6) мають назву формул Дж. Гріна¹.

Вони можуть бути представлені у матричному вигляді:

$$\frac{du_0}{d\varepsilon} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x}, \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_y}, \frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_z}, \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{xy}}, \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{yz}}, \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{zx}} \right\}^T, \quad du_0 = \left\{ \frac{du_0}{d\varepsilon} \right\}^T \cdot d\varepsilon = d\varepsilon^T \frac{du_0}{d\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{du_0}{d\varepsilon}.$$

Будемо вважати, що співвідношення (13.6) можуть бути обернені, тобто компоненти деформацій можна виразити через компоненти напружень. Для цього детермінант, утворений із других частинних похідних u_0 по усіх змінних $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ повинен відрізнятися від нуля.

Введемо нову функцію

$$u_0^{\text{доп}} = \varepsilon^T \sigma - u_0,$$

яка може бути виражена тільки через компоненти напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

Для одноосового розтягу-стиснення (рис. 13.2):

$$u_0^{\text{доп}} = \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x d\sigma_x.$$

Тоді

$$du_0^{\text{доп}} = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx}} d\tau_{zx},$$

з іншого боку

$$du_0^{\text{доп}} = d\sigma^T \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma} = d\sigma^T \varepsilon + d\varepsilon^T \sigma - du_0 = d\sigma^T \varepsilon + d\varepsilon^T \left(\sigma - \frac{du_0}{d\varepsilon} \right) = d\sigma^T \varepsilon,$$

звідки

¹ Грін, Джордж (англ. George Green; 1793–1841) – англійський математик і фізик. Встановив співвідношення між інтегралами за об'ємом і по поверхні (формула Гріна). У тому ж році незалежно від Гріна ту ж формулу отримав М.В.Остроградський (формула Гріна-Остроградського). Розробив теорію потенціалу. Вивів основні рівняння теорії пружності виходячи із закону збереження енергії, застосованого до деформованого пружного тіла.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du_0^{\text{доп}}}{d\sigma}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy}}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz}}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx}}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Формули (13.7) мають назву формул Кастільяно. Функція $u_0^{\text{доп}}$ називається доповнювальною потенціальною енергією пружної деформації, віднесеної до одиниці об'єму тіла або доповнювальною питомою потенціальною енергією пружної деформації.

$$u_0 + u_0^{\text{доп}} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma},$$

тобто $u_0^{\text{доп}}$ доповнює u_0 до значення потенціальної енергії деформації, віднесеної до одиниці об'єму тіла $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$. Функцію $u_0^{\text{доп}}$ можна також назвати доповнювальним пружним потенціалом.

Зазначимо, що в основі наведених вище перетворень лежить перетворення Лежандра.

У випадку лінійних співвідношень напруження-деформації

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Оскільки функція питомої потенціальної енергії пружної деформації не залежить від шляху навантаження, враховуючи лінійність, можна обрати пропорційне навантаження, тобто вважати, що множина напружень

$$(\lambda \sigma_x, \lambda \sigma_y, \lambda \sigma_z, \lambda \tau_{xy}, \lambda \tau_{yz}, \lambda \tau_{zx})$$

відповідає множині деформацій

$$(\lambda \varepsilon_x, \lambda \varepsilon_y, \lambda \varepsilon_z, \lambda \gamma_{xy}, \lambda \gamma_{yz}, \lambda \gamma_{zx}),$$

де λ – довільна позитивна константа. Пропорційне навантаження зводиться до монотонного збільшення параметру λ від 0 до 1. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &u_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) = \\ &= \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Враховуючи, що $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} u_0^{\text{доп}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - u_0 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (13.9)$$

де \mathbf{D} і \mathbf{C} – відповідно матриці жорсткості і податливості, причому $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$.

З (13.8) і (13.9) випливають теореми Дж.Гріна і Кастільяно про перші похідні від питомої потенціальної енергії пружної деформації:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon} = \sigma, \quad \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma} = \varepsilon.$$

Зазначимо, що при цьому відповідні другі похідні визначають коефіцієнти матриць жорсткості і податливості

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = D_{ij}, \quad \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = C_{ij},$$

а самі матриці жорсткості і податливості являють собою матриці других похідних (матриці Гессе) від питомої потенціальної енергії пружної деформації.

Співвідношення фізичної сторони задачі у формі узагальненого закону Гука (13.4) дасть можливість отримати вирази:

$$u_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2),$$

$$u_0^{\text{доп}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2),$$

похідні від яких становлять формули Дж.Гріна і Кастільяно.

13.4. Теорема про дивергенцію. Теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил в матричному вигляді виражається наступним чином

$$\iiint_V \sigma^T \varepsilon dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{u} \mathbf{P}_S dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \mathbf{P} dS, \quad (13.10)$$

що по суті являє собою теорему про дивергенцію.

Взагалі, в будівельній механіці та теорії пружності досить часто використовуються теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли. Основні з них наведені нижче.

1. Теорема про дивергенцію

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

2. Теорема про ротор

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

3. Теорема про градієнт

$$\int_V \nabla \Phi(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{r}).$$

4. Теореми Гріна

$$\int_F \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dV + \int_F \Psi \nabla^2 \Phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Psi \nabla \Phi) = \int_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS,$$

$$\int_F (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) = \int_S \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS.$$

5. Частинні випадки

$$\int_V \nabla^2 \Phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \Phi = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (\text{теорема Гаусса}),$$

$$\int_V |\nabla \Phi|^2 \cdot dV + \int_V \Phi \nabla^2 \Phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS.$$

13.5. Інтегральна формула

Для отримання виразу (13.10) в п.13.2 була проведена досить кропітка робота. Всі викладки можна було значно скоротити, якщо використати наступне загальне інтегральне співвідношення, яке по суті являє собою теорему Клапейрона:

$$\iiint_V \mathbf{a}^T (\mathbf{A}\mathbf{b}) dV = \iint_S \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{b}) dS - \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) \mathbf{b} dV, \quad (13.11)$$

де $\mathbf{a}(x, y, z) = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ – довільний вектор з трьома компонентами, які є функціями координат; $\mathbf{b}(x, y, z) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}^T$ – довільний вектор з шістьма компонентами, які також є функціями координат. Нижче доводиться справедливості цього співвідношення.

Перш за все розпишемо детально підінтегральні вирази. Маємо

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \left\{ \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_4}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial z}, \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_4}{\partial x} + \frac{\partial b_5}{\partial z}, \frac{\partial b_3}{\partial z} + \frac{\partial b_5}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial x} \right\}^T,$$

тому

$$\mathbf{a}^T (\mathbf{A}\mathbf{b}) = a_1 \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_4}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial z} \right) + a_2 \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_4}{\partial x} + \frac{\partial b_5}{\partial z} \right) + a_3 \left(\frac{\partial b_3}{\partial z} + \frac{\partial b_5}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial x} \right). \quad (13.12)$$

Далі,

$$\mathbf{A}_S \mathbf{b} = \{ (lb_1 + mb_4 + nb_6), (mb_2 + lb_4 + nb_5), (nb_3 + mb_5 + lb_6) \}^T,$$

після чого

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{b}) &= a_1 (lb_1 + mb_4 + nb_6) + a_2 (mb_2 + lb_4 + nb_5) + a_3 (nb_3 + mb_5 + lb_6) = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_4 + a_3 b_6)l + (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_3 b_5)m + (a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_3)n. \end{aligned} \quad (13.13)$$

І нарешті,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{a} = \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial y}, \frac{\partial a_3}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial a_2}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial y}, \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial x} \right\}^T,$$

завдяки чому

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{a}) \mathbf{b} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial z} +$$

$$+ b_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) + b_5 \left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial y} \right) + b_6 \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \quad (13.14)$$

Тепер запишемо ліву частину співвідношення (13.11) та перетворимо її тотожним чином:

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{a}^T (\mathbf{A}\mathbf{b}) dV &= \iiint_V \left[a_1 \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_4}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial z} \right) + a_2 \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_4}{\partial x} + \frac{\partial b_5}{\partial z} \right) + a_3 \left(\frac{\partial b_3}{\partial z} + \frac{\partial b_5}{\partial y} + \frac{\partial b_6}{\partial x} \right) \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_1 b_1 + a_2 b_4 + a_3 b_6) + \frac{\partial}{\partial y} (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_3 b_5) + \frac{\partial}{\partial z} (a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_3) \right] dV - \\ &- \iiint_V \left[b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_4 \frac{\partial a_2}{\partial x} + b_6 \frac{\partial a_3}{\partial x} + b_4 \frac{\partial a_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + b_5 \frac{\partial a_3}{\partial y} + b_6 \frac{\partial a_1}{\partial z} + b_5 \frac{\partial a_2}{\partial z} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial z} \right] dV. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Оскільки за формулою Гауса-Остроградського

$$\iint_S (Pl + Qm + Rn) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

то перший з інтегралів в правій частині (13.15) може бути послідовно перетворений наступним чином:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_1 b_1 + a_2 b_4 + a_3 b_6) + \frac{\partial}{\partial y} (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_3 b_5) + \frac{\partial}{\partial z} (a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_3) \right] dV = \\ = \iint_S [(a_1 b_1 + a_2 b_4 + a_3 b_6)l + (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_3 b_5)m + (a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_3)n] dS = \\ = \iint_S \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{b}) dS. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Тут використана рівність (13.13).

Звернемось тепер до другого інтегралу в правій частині рівності (13.15). Перегрупуовуючи компоненти підінтегрального виразу та використовуючи (13.14), маємо:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_4 \frac{\partial a_2}{\partial x} + b_6 \frac{\partial a_3}{\partial x} + b_4 \frac{\partial a_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + b_5 \frac{\partial a_3}{\partial y} + b_6 \frac{\partial a_1}{\partial z} + b_5 \frac{\partial a_2}{\partial z} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial z} \right] dV = \\ = \iiint_V \left[b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial z} + b_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) + b_5 \left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial y} \right) + b_6 \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \right] dV = \\ = \iiint_V \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) dV. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Знайдені вирази об'ємних інтегралів (13.16) та (13.17) підставимо в праву частину рівності (13.15) і отримуємо:

$$\iiint_V \mathbf{a}^T (\mathbf{A}\mathbf{b}) dV = \iint_S \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{b}) dS - \iiint_V \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) dV.$$

Таким чином справедливість співвідношення (13.11) доведена.

13.6. Формула Папковича

При виводі багатьох загальних положень будівельної механіки та теорії пружності корисною виявляється формула, яку отримав П.Ф.Папкович, виходячи з виразу для роботи зовнішніх сил

$$A_{3C} = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{P}_S^T \mathbf{u}_S dS. \quad (13.18)$$

Розглянемо чотири різних напружено-деформованих стани. *Перший* стан характеризується векторами об'ємних \mathbf{g} та поверхневих \mathbf{P}_S сил. Для *другого* стану відомим є вектор переміщень \mathbf{u} , який в точках границі набуває значень \mathbf{u}_S . З параметрів *третього* стану відомими є напруження $\boldsymbol{\sigma}$, а *четвертого* - деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$ всередині розрахункової області.

Вважатимемо, що величина A_{3C} , задана виразом (13.18), – це робота сил першого стану на переміщеннях другого. Далі, компоненти напружень можна розглядати як узагальнені внутрішні сили, що складаються з рівних та протилежно спрямованих напружень, які діють на протилежних площинках елементарного паралелепіпеда. Тоді узагальнені переміщення, на яких здійснюється робота цими силами, будуть являти собою диференціальні операції над переміщеннями, а саме $\mathbf{A}^T \mathbf{u}$. Вираз для роботи узагальнених внутрішніх сил третього стану на узагальнених переміщеннях, які відповідають другому стану, за допомогою загального інтегрального співвідношення може бути тотожно перетворений наступним чином:

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dV = - \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{u}_S^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma}) dS,$$

або

$$\iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dV + \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dV - \iint_S \mathbf{u}_S^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma}) dS = 0. \quad (13.19)$$

Нарешті, запишемо тривіальну тотожність для роботи узагальнених внутрішніх сил третього стану на узагальнених переміщеннях четвертого стану:

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = 0. \quad (13.20)$$

Додамо до правої частини формули (13.18) рівні нулю ліві частини тотожностей (13.19) та (13.20) і отримаємо співвідношення

$$A_{3C} = \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \mathbf{u} dV + \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_S (\mathbf{P}_S - \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_S dS + \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (13.21)$$

яке має назву формули Папковича.

Ще раз зауважимо, що в формулі (13.21) використовуються елементи чотирьох довільних станів, причому робота зовнішніх сил, яка відповідає першому довільно обраному напруженому стану і здійснює роботу на переміщеннях другого довільного напруженого стану, поєднується, деякою мірою штучно, з компонентами напружень третього та компонентами деформацій четвертого довільного напруженого стану.

13.7. Постановки двоїстих варіаційних задач

13.7.1. Загальний варіаційний принцип

Співвідношення

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS$$

являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил. З урахуванням формули П.Ф.Папковича¹ вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iint_{S_1} \mathbf{P}^T \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{P} dS = 0 \end{aligned} \quad (13.22)$$

або

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}^T \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS. \quad (13.23)$$

Якщо для одного напружено-деформованого стану виконуються умови: рівноваги

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V;$$

деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S;$$

фізичних співвідношень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V, S;$$

граничні умови

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2; \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_S \in S_1,$$

то цей стан буде дійсним і задовольнятиме теоремі Клапейрона.

Необхідну умову екстремуму цього функціонала $\delta\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ можна отримати задаючи $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Відповідне варіаційне рівняння має вигляд:

$$\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})\delta\mathbf{u} dV - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})\delta\boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)\delta\mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)\delta\mathbf{P} dS = 0.$$

Питома потенціальна енергія деформації і доповнювальна питома потенціальна енергія пов'язані залежністю $2U = u_0 + u_0^{\text{доп}}$, а варіація цієї величини дорівнює

$$2\delta U = \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial u_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \delta\boldsymbol{\sigma}.$$

З урахуванням цього загальне варіаційне рівняння запишемо у вигляді:

¹ П.Ф.Папковичем зазначено, що отримана залежність, яка представляється на перший погляд досить штучною, насправді дуже зручна як для доведення ряду загальних теорем теорії пружності, так і для оцінки цих теорем у ряді решти основних залежностей теорії пружності. Все ті загальні теореми теорії пружності, які ми мали на увазі тут розглянути, можна вивести безпосередньо з рівності (13.21). Для цього потрібно лише привести чотири напружені стани, що є у формулі (13.21) довільними напруженими станами, кожного разу в певне співвідношення один з одним.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iiint_V \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \right) \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \\ & + \iiint_V \left(\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \right) \delta \mathbf{u} + \iint_{S_1} \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}_S \right) \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_S \right) \delta \mathbf{P} dS = 0. \end{aligned}$$

Загальний варіаційний принцип $\delta \Pi^{\text{зар}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$. Додаткові умови відсутні.

Рівняння Ейлера дають рівняння крайової задачі теорії пружності:

<p><i>у переміщеннях</i></p> $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ $\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V$ $\mathbf{A}_S \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{P}_S \in S_1$ $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$	<p><i>у переміщеннях і напруженнях</i></p> $\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \in V$ $\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1$ $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$
---	---

Рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил може бути переписана у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) &= \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) \mathbf{u} dV - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \\ &+ \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \mathbf{u} dS - \iint_{S_1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{P} dS = 0, \end{aligned}$$

або

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \Pi_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) - \Pi_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}),$$

де через Π_1 і Π_2 позначені наступні функціонали:

$$\Pi_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS,$$

$$\Pi_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) dV + \iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS.$$

При будь-яких $\boldsymbol{\sigma}$ і \mathbf{u} значення функціоналів Π_1 і Π_2 дорівнюють одне одному, в чому легко пересвідчитись, наприклад, перетворюючи за допомогою формули (13.19) інтеграл $\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} dV$, який входить до складу Π_2 . Отже, функціонал

$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u})$, набуває нульового значення при будь-яких статично можливих $\boldsymbol{\sigma}$ і геометрично можливих \mathbf{u} .

Відрізнити дійсний НДС дозволяють постановки варіаційних задач на основі функціоналів Π_1 і Π_2 , які утворюють пару двоїстих задач варіаційного числення, коли попередні умови однієї задачі є природними умовами іншої:

$\delta \Pi_1 = 0$ <p>при попередній умові $\delta \Pi_2 = 0$.</p>	$\delta \Pi_2 = 0$ <p>при попередній умові $\delta \Pi_1 = 0$.</p>
---	---

13.7.2. Функціонали Ху-Васідзу

У разі, коли варіюються всі три змінні $\Pi_1 = \Pi_1(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$, $\Pi_2 = \Pi_2(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$, отримаємо таку пару двоїстих задач варіаційного числення:

$$\delta\Pi_1 = \delta_\sigma\Pi_1 + \delta_\varepsilon\Pi_1 + \delta_u\Pi_1 = 0 \quad \Bigg| \quad \delta\Pi_2 = \delta_\sigma\Pi_2 + \delta_\varepsilon\Pi_2 + \delta_u\Pi_2 = 0$$

Виконуючи варіювання і використовуючи можливість міняти місцями операції варіювання та диференціювання, послідовно отримуємо

$\begin{aligned} \delta_\sigma\Pi_1 &= -\iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \\ &\quad - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma} dS, \\ \delta_\varepsilon\Pi_1 &= \iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV, \\ \delta_u\Pi_1 &= \iiint_V (\mathbf{A}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \delta\mathbf{u} dV - \\ &\quad - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta\mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P} dS, \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta_\sigma\Pi_2 &= -\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dV + \\ &\quad + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_1} \mathbf{u}_S^T (\mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma}) dS, \\ \delta_\varepsilon\Pi_2 &= \iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV, \\ \delta_u\Pi_2 &= -\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta\mathbf{u} dV + \\ &\quad + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta\mathbf{u} dS, \end{aligned}$
--	--

і варіаційні рівняння у вигляді:

$\begin{aligned} &-\iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS + \\ &+ \iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV - \iiint_V (\mathbf{A}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \\ &-\iiint_V \mathbf{g}^T \delta\mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta\mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P} dS = 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} &-\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{A} \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{u} dV + \\ &+ \iint_{S_1} \mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} dS + \iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV + \\ &+ \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma} dS + \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta\mathbf{u} dV + \\ &+ \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta\mathbf{u} dS = 0. \end{aligned}$
--	---

Додаткові умови відсутні, і отже, маємо задачу на абсолютний екстремум.

Функціонали $\Pi_1(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$ і $\Pi_2(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$ називають відповідно першою і другою формою функціонала Ху-Васідзу в задачах теорії пружності і позначають $\Pi_1^{XB}(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$, $\Pi_2^{XB}(\sigma, \varepsilon, \mathbf{u})$.

Варто зауважити, що в результаті використання інтегральних тотожностей

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{A}^T \delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV &= -\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T \delta\mathbf{u} dV + \iint_S (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma})^T \delta\mathbf{u}_S dS, \\ -\iiint_V (\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dV &= \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV + \iint_S (\mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_S dS, \end{aligned}$$

частинні варіації $\delta_u \Pi_1$ та $\delta_\sigma \Pi_2$ перетворюються відповідно на

$$\begin{aligned} \delta_u \Pi_1 = & - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \\ & + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS, \end{aligned} \quad (13.24)$$

$$\begin{aligned} \delta_\sigma \Pi_2 = & \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS, \end{aligned} \quad (13.25)$$

а варіаційні рівняння $\delta \Pi_1^{\text{XB}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = 0$ та $\delta \Pi_2^{\text{XB}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = 0$ набувають ідентичного вигляду:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1^{\text{XB}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = & - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS + \iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV - \\ & - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{P}}_S)^T \delta \mathbf{u} dS = 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \delta \Pi_2^{\text{XB}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = & \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS + \iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) dV - \\ & - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS = 0, \end{aligned}$$

який свідчить про еквівалентність варіаційної постановки задачі повній системі рівнянь теорії пружності.

13.7.3. Варіаційні задачі Рейснера

Якщо приймається додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, отримуємо відповідно першу і другу форму функціонала Рейснера:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{\text{P}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & - \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} dV + \\ & + \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \\ & - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\text{P}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \mathbf{u} dV + \\ & + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{P} dS \end{aligned}$$

і відповідні варіаційні рівняння:

$$\delta \Pi_1^{\text{P}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \delta_\sigma \Pi_1^{\text{P}} + \delta_u \Pi_1^{\text{P}} = 0,$$

де

$$\begin{aligned} \delta_\sigma \Pi_1^{\text{P}} = & - \iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS, \end{aligned}$$

$$\delta_u \Pi_1^{\text{P}} = \iiint_V (\mathbf{A}^T \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV -$$

де

$$\delta \Pi_2^{\text{P}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \delta_\sigma \Pi_2^{\text{P}} + \delta_u \Pi_2^{\text{P}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta_\sigma \Pi_2^{\text{P}} = & - \iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A}\delta \boldsymbol{\sigma})^T dV + \\ & + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_S dS, \end{aligned}$$

$$\delta_u \Pi_2^{\text{P}} = - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV +$$

$$-\iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS \quad \left| \quad + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS.$$

Після підстановки частинних варіацій отримуємо варіаційні рівняння в цілому

$$\begin{array}{l} -\iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ -\iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS + \iiint_V (\mathbf{A}^T \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \\ -\iiint_V \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS = 0. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} -\iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma})^T dV + \\ + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_S dS - \\ -\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS = 0. \end{array}$$

Якщо скористатись виразами для частинних варіації $\delta_u \Pi_1$ (13.24) та $\delta_\sigma \Pi_2$ (13.25), то варіаційні рівняння $\delta \Pi_1^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0$ та $\delta \Pi_2^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0$ знову набудуть ідентичного вигляду:

$$\begin{array}{l} \delta \Pi_1^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -\iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ -\iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \\ + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS = 0. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \delta \Pi_2^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -\iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \\ -\iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \\ + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS = 0. \end{array}$$

13.7.4. Функціонали Лагранжа і Кастільяно

Якщо окрім попередньої умови $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, прийняті ще інші умови, а саме,

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2, \quad \left| \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1,$$

то отримаємо функціонали Лагранжа і Кастільяно¹, які залежать лише від однієї змінної \mathbf{u} або $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{array}{l} \Pi^L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV - \\ - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \iint_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{P} dS \end{array}$$

¹ Першим звернув увагу на те, що $\Pi^L(\mathbf{u})$ і $\Pi^K(\boldsymbol{\sigma})$ у формулах Лагранжа і Кастільяно в певних постановках є функціоналами Луїджі Донаті. У своїх роботах 1888, 1889 і 1894 рр. він чітко роз'яснив зв'язок між цими функціоналами і поняттями пружного потенціалу в термінах теорії пружності і варіаційного числення (Donati L. Sur lavoro di deformazione dei sistemi elastici: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo IX, ser. IV, p. 345, 1888. Donati L. Illustrazione al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo X, ser. IV, p. 267, 1889. Donati L. Ulteriore osservazioni intorno al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo XV, ser. IV, p. 449, 1894).

Отже маємо пару двоїстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лагранжа і Кастільяно:

$$\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

В розгорнутій формі вказані варіаційні задачі мають наступний вигляд:

$$\delta\Pi^L(\mathbf{u}) = \iiint_V (\mathbf{A}^T \delta\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV - \\ - \iiint_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \iint_{S_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS,$$

додаткові умови:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon};$$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S; \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2$$

являють собою рівняння сумісності деформації і кінематичні граничні умови.

Після відповідних перетворень варіаційні задачі Лагранжа і Кастільяно набувають вигляду:

$$\delta\Pi^L(\mathbf{u}) = \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) \delta\mathbf{u} dV + \\ + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S) \delta\mathbf{u} dS = 0$$

і містить у собі рівняння рівноваги (рівняння Ейлера) і природні (статичні) граничні умови.

Відповідні цим рівнянням варіаційні постановки задач становлять принципи Лагранжа і Кастільяно¹:

Принцип Лагранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лагранжа стаціонарне (мінімальне) значення. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівнянням сумісності деформацій і рівнянням в'язей (кінематичні граничні умови).

$$\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

$$\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = - \iiint_V (\delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} dV + \\ + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T (\mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma}) dS = 0,$$

додаткові умови:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon};$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1$$

являють собою рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

$$\delta\Pi^K(\boldsymbol{\sigma}) = - \iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T \mathbf{u}) \delta\boldsymbol{\sigma} dV + \\ + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \delta\mathbf{P} dS = 0$$

і містить у собі рівняння сумісності деформацій (рівняння Ейлера) і природні (кінематичні) граничні умови

постановки задач становлять принципи

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам.

¹ Зазначимо, що К.Васідзу запобігає термінології «принцип Лагранжа» і «принцип Кастільяно», називаючи їх відповідно «принцип мінімуму потенціальної енергії» і «принцип мінімуму доповнювальної енергії» [44], підкреслюючи їх двоїсту форму.

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S,$$

які разом із додатковими умовами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V,$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S,$$

які разом із додатковими умовами

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V,$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

13.7.5. Функціонали граничних умов

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV = - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS,$$

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{u} dV = \delta \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_S \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS.$$

Перший член загального варіаційного рівняння:

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \delta \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^2 dV = \delta \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV.$$

Другий член:

$$- \iiint_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = -\delta \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_S \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS.$$

Тоді загальне варіаційне рівняння може бути представлено у вигляді:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV \right) - \delta \left(\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV \right) - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \delta \mathbf{P}_S dS = 0.$$

Функціонал граничних умов (I форма).

$$\Pi_1^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS.$$

Додаткові умови:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V.$$

Якщо взяти до уваги, що

$$- \iiint_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \delta \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS = 0$$

і додати до варіаційного рівняння форми I граничних умов, отримаємо

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV \right) - \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \delta \mathbf{P}_S dS = 0,$$

але

$$-\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{P}_S dS .$$

Складаючи ці два рівняння, отримаємо варіаційне рівняння для форми II функціонала граничних умов.

$$-\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P})^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS = 0 .$$

Функціонал

$$\Pi_2^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS,$$

$$\delta \Pi_2^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0 .$$

Додаткові умови:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \in V .$$

13.7.6. Функціонали фізичних співвідношень

Із загального варіаційного рівняння

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \\ & + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS = 0 \end{aligned}$$

з урахуванням залежності

$$-\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_{S_2} \mathbf{u} \delta \mathbf{P}_S dS$$

отримаємо функціонал фізичних співвідношень

$$\Pi^\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS .$$

Додаткові співвідношення.

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2 .$$

Варіаційне рівняння:

$$\delta \Pi^\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 .$$

Зазначимо, що варіаційні принципи можна застосовувати до пружного тіла, яке складається із декількох різних матеріалів за умови, що співвідношення напруження-деформації кожного матеріалу забезпечують існування функції енергії деформації і функції доповнювальної енергії. Так, якщо тіло складається із n різних матеріалів, а функція енергії деформації i -го матеріалу позначена A_i , то, наприклад, принцип мінімуму потенціальної енергії можна переформулювати,

замінивши $\iiint_V A dV$ на $\sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} A_i dV$. При цьому звичайно повинна зберігатись

безперервність компонент переміщення на границі різних матеріалів.

Інколи застосовуються інші формулювання варіаційних принципів [44].

13.7.7. Принципи віртуальної роботи і доповнювальної віртуальної роботи

Розглянемо співвідношення

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS, \quad (13.24)$$

яке виражає рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Обчислимо повну варіацію від обох частин рівняння (13.24)

$$\begin{aligned} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV &= \iiint_V \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV + \iiint_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{g} dV + \\ + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_1} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{P}_S dS &+ \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \delta \mathbf{P} dS + \iint_{S_2} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}_S dS. \end{aligned}$$

З урахуванням незалежності варіацій:

$$\begin{aligned} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} \delta \mathbf{u} \mathbf{P}_S dS &= 0, \\ - \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \iiint_V \delta \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \delta \mathbf{P}_S \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} \mathbf{u} \delta \mathbf{P}_S dS &= 0. \end{aligned}$$

Якщо віртуальні переміщення обрати таким чином, щоб $\delta \mathbf{u} = 0 \in S_2$, а варіації напружень так, щоб вони задовольняли рівняння рівноваги $\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma} = 0 \in V$ і $\delta \mathbf{P}_S = 0 \in S_1$ отримаємо

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS = 0, \quad (13.25)$$

$$- \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u} \delta \mathbf{P}_S dS = 0. \quad (13.26)$$

Перший із цих виразів називається принципом віртуальної роботи, базується на принципі можливих переміщень і містить у собі рівняння статички, другий – базується на принципі можливих напружень і містить у собі рівняння сумісності деформацій.

Принцип віртуальної роботи

Розглянемо задачу теорії пружності

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \in V, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (13.27)$$

$$P_{xv} = \overline{P}_{xv}, P_{yv} = \overline{P}_{yv}, P_{zv} = \overline{P}_{zv} \in S_1. \quad (13.28)$$

Надамо тілу будь-які нескінченно малі віртуальні переміщення $\delta u, \delta v, \delta w$ із стану рівноваги:

$$-\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dV + \\ + \iint_{S_1} \left[(P_{xv} - \overline{P}_{xv}) \delta u + (P_{yv} - \overline{P}_{yv}) \delta v + (P_{zv} - \overline{P}_{zv}) \delta w \right] dS = 0. \quad (13.29)$$

Оберемо віртуальні переміщення таким чином, щоб

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \in S_2.$$

Тоді, використовуючи формулу Гауса-Остроградського

$$\iiint_V \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S [Ll + Mm + Nn] dS,$$

а також геометричні залежності на границі

$$dydz = \pm l dS, dzdx = \pm m dS, dxdy = \pm n dS$$

згідно з якими, наприклад,

$$\iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz = \iint_S \sigma_x l \delta u dS - \iiint_V \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy dz$$

отримаємо:

$$\iiint_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right] dV - \\ - \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \iint_S (P_{xv} \delta u + P_{yv} \delta v + P_{zv} \delta w) dS = 0,$$

де

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \varepsilon_z = \frac{\partial \delta w}{\partial z},$$

$$\delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z}, \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x},$$

або у матричному вигляді

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \boldsymbol{\varepsilon} dS = 0, \quad (13.30)$$

причому

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\delta u} \in V, S, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \boldsymbol{\delta u} = 0 \in S_2. \quad (13.31)$$

Це і є принцип віртуальної роботи. З математичної точки зору він полягає у вимозі стаціонарності функціонала (13.24) при попередніх умовах (обмеженнях) у вигляді рівнянь сумісності деформацій і граничних умов (13.31). Тобто являє собою задачу на умовний екстремум функціонала, яка перетворюється або розв'язується за допомогою множників Лагранжа.

Якщо вважати, що множниками Лагранжа є переміщення і підставити (13.31) в (13.30), то можна отримати рівняння (13.27), (13.28). Таким чином, з фізичної точки зору принцип віртуальної роботи еквівалентний рівнянням рівноваги в V і граничним умовам у напруженнях на поверхні S_1 .

Зазначимо, що вираз (13.29) являє собою відомий принцип можливих переміщень - якщо можлива робота зовнішніх сил при будь-яких нескінченно малих кінематично можливих переміщеннях дорівнює можливій роботі внутрішніх сил, система знаходиться у рівновазі.

Принцип доповнювальної віртуальної роботи

Розглянемо пружне тіло, яке знаходиться у стані рівноваги. Тоді:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \in V, \quad (13.32)$$

$$u - \bar{u} = 0, \quad v - \bar{v} = 0, \quad w - \bar{w} = 0 \in S_2. \quad (13.33)$$

Будемо вважати, що у тілі виникають нескінченно малі варіації напружень $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{xy}, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}$ від положення рівноваги. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} - \iiint_V \left[\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta\tau_{xy} + \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta\tau_{yz} + \right. \\ \left. + \left(\gamma_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta\tau_{zx} \right] dV + \iint_{S_2} \left[(u - \bar{u}) \delta P_{xv} + (v - \bar{v}) \delta P_{yv} + (w - \bar{w}) \delta P_{zv} \right] dS = 0, \quad (13.34) \end{aligned}$$

звідки після перетворень і інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx} + \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \left(\frac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dV - \\ - \iint_{S_1} (u \delta P_{xv} + v \delta P_{yv} + w \delta P_{zv}) dS - \iint_{S_2} (\bar{u} \delta P_{xv} + \bar{v} \delta P_{yv} + \bar{w} \delta P_{zv}) dS = 0. \end{aligned}$$

Якщо обрати віртуальні переміщення таким чином, щоб вони задовольняли рівнянням рівноваги і граничним умовам у напруженнях, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial z} = 0 \in V, \\ \frac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \delta P_{xv} = \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{zx} n = 0 \\ \delta P_{yv} = \delta\tau_{xy} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n = 0 \in S_1, \\ \delta P_{zv} = \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{yz} m + \delta\sigma_z n = 0 \end{aligned}$$

отримаємо

$$-\iiint_V (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dV - \iint_{S_2} (\bar{u} \delta P_{xv} + \bar{v} \delta P_{yv} + \bar{w} \delta P_{zv}) dS = 0,$$

або в матричному вигляді

$$-\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \delta \mathbf{P} dS = 0. \quad (13.35)$$

Причому

$$\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma} = 0 \in V, \quad \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} = \delta \mathbf{P}_S = 0 \in S_2. \quad (13.36)$$

Це і є принцип доповнювальної віртуальної роботи. З математичної точки зору він полягає у вимозі стаціонарності функціонала (13.24) при попередніх умовах (обмеженнях) у вигляді рівнянь рівноваги і граничних умов (13.36). Тобто являє собою задачу на умовний екстремум функціонала, яка перетворюється, або розв'язується за допомогою множників Лагранжа.

Якщо вважати, що множниками Лагранжа є напруження і підставити (13.36) в (13.35), то можна отримати рівняння (13.32), (13.33). Таким чином, з фізичної точки зору принцип доповнювальної віртуальної роботи еквівалентний рівнянням сумісності деформацій (співвідношенням деформації-переміщення) і граничним умовам у переміщеннях на поверхні S_2 .

Зазначимо, що вираз (13.34) являє собою відомий принцип можливих напружень – якщо можлива робота зовнішніх сил при будь якій нескінченно малій статично можливій зміні напружених станів дорівнює можливій роботі внутрішніх сил, система задовольняє геометричним рівнянням сумісності деформацій.

Із повного функціонала як вільної варіаційної задачі можна отримати різні частинні функціонали, як невільні варіаційні задачі з додатковими умовами. За додаткові умови приймають будь-які вирази із рівнянь Ейлера і природних граничних умов, які реалізують стаціонарне значення повного функціонала (вільна варіаційна задача). Виконуючи додаткові умови попередньо, тобто до варіювання, і виключаючи з їхньою допомогою частину функціональних аргументів із першого функціонала, отримуємо відповідний частинний функціонал.

Частинні варіаційні принципи стверджують, що з цих можливих полів напруженого і деформованого стану пружного тіла, які задовольняють додатковим умовам, дійсно мають місце лише ті, які надають відповідному частинному функціоналу стаціонарного значення.

Для варіаційного рівняння з деякими додатковими умовами рівняннями Ейлера є ті рівняння і природні граничні умови, які разом із додатковими умовами складають повну схему рівнянь і граничних умов, тобто рівнянь Ейлера і граничних умов для повного варіаційного рівняння.

Як приклад можна навести частинні варіаційні принципи Лагранжа, Кастільяно, Рейснера, граничних умов та інші.

Принцип Лагранжа отримується, якщо за додаткові умови приймаються фізичні і геометричні рівняння, а також геометричні граничні умови. Тобто можливими функціями переміщень є лише ті, які задовольняють цим додатковим умовам. А із цих можливих переміщень дійсними будуть ті, які надають функціоналу Лагранжа

стаціонарного значення. При цьому рівняннями Ейлера є статичні рівняння і природні (статичні) граничні умови.

Принцип Кастільяно отримується, якщо за додаткові умови прийняті фізичні і статичні рівняння, а також статичні граничні умови. Тобто можливими функціями є лише ті, які задовольняють цим додатковим умовам. А з можливих функцій напружень (зусиль) дійсними будуть ті, які надають функціоналу Кастільяно стаціонарного значення, при цьому рівняннями Ейлера є геометричні рівняння і природні (геометричні) граничні умови.

Принцип Рейснера отримується, якщо за додаткові умови прийняти фізичні рівняння.

Якщо за додаткові умови прийняті усі статичні, геометричні і фізичні рівняння, то отримаємо функціонал граничних умов. Із цього функціонала як умови стаціонарності витікають усі граничні умови.

Для пружних тіл, скріплених в окремих точках, лініях, площинах, тобто для багатоконтактних систем, також є можливою побудова повного і частинного функціоналів.

При цьому становить інтерес функціонал граничних умов для багатоконтактної задачі. Можна показати, що класичні методи будівельної механіки (методи сил, переміщень, змішаний), система функціоналів для будівельної механіки і різні варіанти методу скінченних елементів виходять із функціонала граничних умов багатоконтактної задачі. Дійсно, розіб'ємо систему (континуальну або стержневу) на елементи, поєднання яких будемо виконувати в окремих точках. Приймаємо за додаткові умови виконання статичних, геометричних і фізичних рівнянь всередині області кожного елемента. Якщо задача є лінійною, то для цього можна побудувати матриці жорсткості або податливості скінченних елементів. Розв'язок задачі отримується за допомогою функціонала граничних умов, із якого витікають як природні граничні умови алгебраїчні рівняння класичної будівельної механіки. Якщо форма, розміри спільних елементів і зв'язки між ними прийняті такими, які мають місце в класичних підходах будівельної механіки, то ці підходи не будуть відрізнятись.

13.8. Принцип Гамільтона

Нехай пружне тіло, показане на рис. 13.1, маючи те саме навантаження, знаходиться, крім того, в стані руху. Тоді ми можемо, згідно принципу Д'аламбера, додавши до діючого навантаження сили інерції $-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, розглядати тіло в кожний даний момент часу в стані рівноваги. Застосовуючи до цього тіла принцип віртуальної роботи, ми отримаємо:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV + \iint_S (P_{xv} \delta u + P_{yv} \delta v + P_{zv} \delta w) dS - \\ & - \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV - \end{aligned}$$

$$- \iiint_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right] dV = 0. \quad (13.37)$$

Тепер u, v, w, X, Y, \dots – вже функції координат x, y, z і часу t . Винесемо в усіх інтегралах окрім третього, знак варіації за знаки інтегралів і за квадратну дужку і змінимо усюди знаки на зворотні. Тоді в дужках залишиться вираз повної потенціальної енергії системи, і ми отримаємо:

$$\delta U + \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV = 0. \quad (13.38)$$

Уявімо тепер, поряд з дійсною траєкторією руху, деяку близьку до неї траєкторію, яка перетинається з дійсною в моменти часу t_0 і t_1 (рис. 13.2). Це означає, що ми варіюємо компоненти переміщень u, v, w , підпорядковуючи варіації умовам

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \text{ при } t = t_0 \text{ і } t = t_1. \quad (13.39)$$

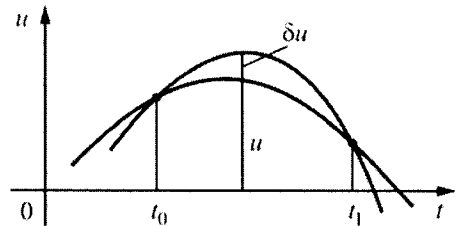


Рис. 13.2

Інтегруючи (13.38) по часу в межах від t_0 до t_1 , ми отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV \right] dt = 0. \quad (13.40)$$

Другий інтеграл, інтегруючи по частинах, можна переписати так:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV \right] dt = \\ & = \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dV \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dV \right] dt. \end{aligned}$$

Перший об'ємний інтеграл правої частини з урахуванням умови (13.39) перетворюється на нуль. Другий інтеграл є ніщо інше, як інтеграл по часу варіації кінетичної енергії. Дійсно, кінетична енергія T дорівнює:

$$T = \iiint_V \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV,$$

а її варіацією буде:

$$\delta T = \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dV.$$

Тому

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dV \right] dt.$$

13. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ТА ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ

Підставляючи цей результат в (13.40) і змінюючи всі знаки на зворотні, ми отримаємо:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0. \quad (13.41)$$

Іншими словами, на ділянці дійсного руху системи впродовж проміжку часу $t_0 - t_1$ інтеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

приймає екстремальне значення. В цьому і полягає *принцип Гамільтона*, або *принцип екстремуму дії*. Якщо розв'язується наближено задача про коливання пружного тіла, то принцип Гамільтона є чудовим критерієм для найкращого наближення шуканих функцій до їх дійсного значення.

Зазначимо, насамкінець, що коли на пружну систему діють зовнішні неконсервативні сили, то принцип Гамільтона записується в наступному вигляді

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0, \quad (13.42)$$

де через A позначена робота неконсервативних сил.

В цілому, підсумовуючи викладене, можна навести такі основні співвідношення.

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил виражається наступним чином

$$\bar{U} = A,$$

і відповідно при деформації рівність приростів повних варіацій робіт внутрішніх і зовнішніх сил записується у вигляді

$$\delta \bar{U} = \delta A.$$

Права і ліва частина, у загальному випадку, повинні являти собою повні варіації відповідних функціоналів.

У випадку одновимірного НДС (рис. 13.3) можемо записати для віднесеної до одиниці об'єму роботи внутрішніх сил на деяких переміщеннях

$$\bar{u}_0 = \sigma \varepsilon.$$

Відповідно приріст роботи внутрішніх сил на своїх переміщеннях дорівнює

$$d\bar{u}_0 = \sigma d\varepsilon + \varepsilon d\sigma = du_0 + du_0^{\text{доп}},$$

де $u_0 = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$ - питома потенціальна енергія пружної

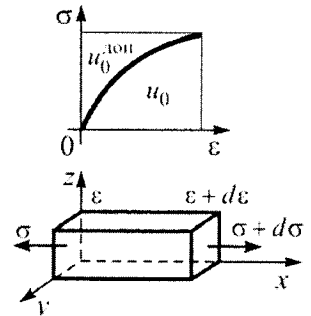


Рис. 13.3

деформації; $u_0^{\text{доп}} = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma$ – питома доповнювальна потенціальна енергія.

Тоді, інтегруючи по всьому об'єму, знаходимо роботу внутрішніх сил

$$\bar{U} = \iiint_V (u_0 + u_0^{\text{доп}}) dx dy dz = U + U^{\text{доп}},$$

де $U = \iiint_V u_0 dx dy dz$ – потенціальна енергія пружної деформації;

$U^{\text{доп}} = \iiint_V u_0^{\text{доп}} dx dy dz$ – доповнювальна потенціальна енергія.

Отже, вираз для роботи внутрішніх сил має наступний вигляд

$$\bar{U} = U + U^{\text{доп}}.$$

13.9. Приклад. Виведення тотожних співвідношень Сен-Венана з принципу Кастільяно

Як приклад розглянемо виведення тотожних співвідношень Сен-Венана з принципу Кастільяно, якому відповідає варіаційне рівняння

$$- \iiint_V (\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma})^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \delta\mathbf{P} dS = 0. \quad (13.43)$$

Для дійсно існуючого в пружному тілі стану деформації справедливими є шість тотожних співвідношень Сен-Венана. Проте ми не робили подібного припущення відносно варійованого напруженого стану, внаслідок чого варіації $\delta\boldsymbol{\sigma}$ не пов'язані жодними співвідношеннями окрім

$$\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \in V; \quad \mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \in S. \quad (13.44)$$

Тому природно очікувати, що тотожні співвідношення Сен-Венана є рівняннями Ейлера варіаційного рівняння (13.43). Покажемо це.

Якщо використати попередню умову $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ та вважати, що вектор поверхневих сил заданий на всій поверхні тіла ($S = S_1$), то варіаційне рівняння (13.43) можна переписати у вигляді:

$$\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV = 0. \quad (13.45)$$

Замість вектора дійсної деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$ введемо два нових вектори $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}^T$ та $\mathbf{F} = \{0, 0, 0, F_1, F_2, F_3\}^T$ такі, що:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{f} - \mathbf{F}. \quad (13.46)$$

Тоді (13.45) перетвориться на

$$\iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{f})^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{F}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV = 0. \quad (13.47)$$

Інтегруючи перший об'ємний інтеграл по частинах, ми отримаємо:

$$\iiint_V (\mathbf{A}^T \mathbf{f})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_S \mathbf{f}^T (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma}) dS - \iiint_V \mathbf{f}^T (\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma}) dV .$$

З огляду на (13.44) цей вираз дорівнює нулю. Отже, (13.47) можна переписати у вигляді

$$\iiint_V \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = \iiint_V (F_1 \delta \tau_{xy} + F_2 \delta \tau_{yz} + F_3 \delta \tau_{zx}) dV = 0 \quad (13.48)$$

(інтеграл береться по всьому об'єму пружного тіла).

Ведемо в області V і на границі S вектор-множник $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}^T$, три компоненти якого є функціями координат x, y, z . Помножимо скалярно друге матричне рівняння (13.44) на вектор $\boldsymbol{\lambda}$ і проінтегруємо по всій поверхні:

$$\iint_S \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma}) dS = 0 . \quad (13.49)$$

Подамо підінтегральний вираз у вигляді:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma}) = & l(\lambda_1 \delta \sigma_x + \lambda_2 \delta \tau_{xy} + \lambda_3 \delta \tau_{zx}) + m(\lambda_2 \delta \sigma_y + \lambda_1 \delta \tau_{xy} + \lambda_3 \delta \tau_{yz}) + \\ & + n(\lambda_3 \delta \sigma_z + \lambda_2 \delta \tau_{yz} + \lambda_1 \delta \tau_{zx}) . \end{aligned} \quad (13.50)$$

Оскільки за відомою інтегральною формулою Гауса-Остроградського

$$\iint_S (Pl + Qm + Rn) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV ,$$

то з використанням (13.50) рівняння (13.49) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma}) dS = & \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 \delta \sigma_x + \lambda_2 \delta \tau_{xy} + \lambda_3 \delta \tau_{zx}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_2 \delta \sigma_y + \lambda_1 \delta \tau_{xy} + \lambda_3 \delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_3 \delta \sigma_z + \lambda_2 \delta \tau_{yz} + \lambda_1 \delta \tau_{zx}) \right] dV = 0 . \end{aligned} \quad (13.51)$$

Після диференціювання матимемо:

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma}) dS = & \iiint_V \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_3 \left(\frac{\partial \delta \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_z}{\partial z} \right) \right] dV + \iiint_V \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} \delta \sigma_z + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \delta \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right) \delta \tau_{yz} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \right) \delta \tau_{zx} \right] dV = 0 . \end{aligned} \quad (13.52)$$

Підінтегральний вираз першого об'ємного інтегралу є покомпонентним записом скалярного добутку першого матричного рівняння (13.44) на вектор $\boldsymbol{\lambda}$, тому цей інтеграл дорівнює нулю. Далі, з огляду на те, що вектор $\boldsymbol{\lambda}$ є довільним, можемо підпорядкувати його таким умовам:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} = 0. \quad (13.53)$$

Тому у рівнянні (13.52) залишаться тільки

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \delta \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right) \delta \tau_{yz} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \right) \delta \tau_{zx} \right] dV = 0. \quad (13.54)$$

(інтеграл береться по всьому об'єму, зайнятому пружним тілом).

Порівнюючи рівняння (13.54) і (13.48), в яких об'ємні інтеграли поширені на одну й ту саму область, отримуємо співвідношення:

$$F_1 = k \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right), \quad F_2 = k \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right), \quad F_3 = k \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \right). \quad (13.55)$$

З (13.48) шляхом диференціювання неважко отримати

$$\frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial x \partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial y \partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial z \partial y^2} = 0. \quad (13.56)$$

Відповідно, диференціюючи (13.55), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = k \left(\frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} = k \left(\frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial z \partial y^2} + \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial y \partial z^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} = k \left(\frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x^2 \partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13.57)$$

Також внаслідок припущення (13.53) та висновку (13.55) маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = 2k \frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = 2k \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = 2k \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x \partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (13.58)$$

Але з (13.41) витікає, що

$$F_1 = -\gamma_{xy} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right), \quad F_2 = -\gamma_{yz} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right), \quad F_3 = -\gamma_{zx} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right). \quad (13.59)$$

Підставляючи (13.59) у (13.58), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^3 f_2}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^3 f_3}{\partial x \partial y \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Поряд з цим завдяки (13.46) маємо:

$$\frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^3 f_3}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Підставляючи в попередні співвідношення, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^3 \varepsilon_x}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^3 \varepsilon_y}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^3 \varepsilon_z}{\partial x \partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (13.60)$$

Це – друга трійка тотожних співвідношень Сен-Венана (13.3).

Вносячи (13.59) у (13.57), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} &= -\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Разом з цим співвідношення (13.46) дозволяють записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f_3}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f_3}{\partial z \partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

завдяки чому з (13.61) знаходимо

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}.$$

Це – перша трійка тотожних співвідношень Сен-Венана (13.3).

Таким чином, ми встановили, що шість тотожних співвідношень Сен-Венана є наслідком варіаційного рівняння Кастильяно (13.43). Це і повинно було бути оскільки статично можливий напружений стан в тілі відрізняється від того напруженого стану, який має місце при дійсній рівновазі, саме тим, що при цьому останньому задовольняються тотожні співвідношення Сен-Венана. Цим самим встановлюється геометричне значення принципу Кастильяно, яке просто є вираженням принципу нерозривності деформацій, вираженим в енергетичній формі. Тепер стає ясною та глибока відмінність, яка існує між варіаційними принципами Лагранжа і Кастильяно: перше з них є началом статички, а друге є геометричною умовою нерозривності деформації.

13.10. Приклад. Матриці других похідних від питомої потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної питомої потенціальної енергії

Розглянемо як приклад деформування лінійно-пружного тіла. Питома потенціальна енергія має наступний вигляд:

$$u_0 = 1/2 \sigma^T \varepsilon = 1/2 (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

При цьому питома потенціальна енергія пружної деформації може бути виражена через компоненти вектора деформацій:

$$u_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) = 1/2 \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 1/2 G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2),$$

а питома доповнювальна потенціальна енергія - через компоненти вектора напружень:

$$u_0^{\text{доп}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2).$$

Диференціюючи функцію u_0 по компонентам деформацій, а функцію $u_0^{\text{доп}}$ - по компонентам напружень, відповідно отримуємо

формули Дж.Гріна		формули Кастільяно	
$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$	$\frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}$
$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y$	$\frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}$
$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z$	$\frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z$	$\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}$

В свою чергу другі похідні функції питомої потенціальної енергії пружної деформації утворюють матрицю жорсткості:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x^2} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y^2} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z^2} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy}^2} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz}^2} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{zx}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

тоді як другі похідні питомої доповнювальної потенціальної енергії утворюють матрицю податливості:

13. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ТА ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x^2} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \sigma_y} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \tau_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \tau_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \tau_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y \partial \sigma_x} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y^2} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y \partial \sigma_z} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y \partial \tau_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y \partial \tau_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_y \partial \tau_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z \partial \sigma_x} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \sigma_y} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z^2} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_x \partial \tau_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z \partial \tau_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \sigma_z \partial \tau_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy} \partial \sigma_x} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy} \partial \sigma_y} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy} \partial \sigma_z} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy}^2} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy} \partial \tau_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{xy} \partial \tau_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz} \partial \sigma_x} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz} \partial \sigma_y} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz} \partial \sigma_z} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz}^2} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{zx}} \\ \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx} \partial \sigma_x} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx} \partial \sigma_y} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx} \partial \sigma_z} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx} \partial \tau_{xy}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx} \partial \tau_{yz}} & \frac{\partial^2 u_0^{\text{доп}}}{\partial \tau_{zx}^2} \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} .$$

Перемножуючи матриці \mathbf{D} і \mathbf{C} , неважко показати, що $\mathbf{DC} = \mathbf{E}$, де \mathbf{E} – одинична матриця, і отже, $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$. Наприклад, елемент першого рядка і першого стовпця матриці \mathbf{DC} дорівнює

$$e_{11} = \frac{1}{E} [2G + \lambda - \mu\lambda - \mu\lambda] = \frac{1}{E} [2G + \lambda(1 - 2\mu)] = \frac{1}{E} [2G + 2\mu G] = \frac{E}{E} = 1,$$

а елемент першого рядка і другого стовпця

$$e_{12} = \frac{1}{E} [-\mu(2G + \lambda) + \lambda - \mu\lambda] = \frac{1}{E} [-2\mu G + \lambda(1 - 2\mu)] = \frac{1}{E} [-2\mu G + 2\mu G] = 0,$$

і взагалі

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В матричному вигляді вирази для питомої потенціальної енергії пружної деформації та питомої доповнювальної потенціальної енергії тепер можуть бути записані наступним чином:

$$u_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\} \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix},$$

$$u_0^{\text{доп}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}.$$

14. Згин тонких пластини

14.1. Основні співвідношення. Функціонали Лагранжа і Кастільяно

На пластинку діє нормальне навантаження

$$z = \pm h/2; \sigma_z = \pm p/2; \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

На бокових поверхнях задані: на S_1 – напруження $g_x, g_y, g_z (\sigma_n^0, \tau_{nt}^0, \tau_{nz}^0)$, на S_2 – переміщення $u^0, v^0, w^0 (u_n^0, u_t^0, w^0)$.

В результаті застосування гіпотези прямих нормалей співвідношення пружності набувають вигляду:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E; \varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E;$$

$$\varepsilon_{xy} = \tau_{xy}/G; \varepsilon_z = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0;$$

$$\sigma_x = 2G[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]; \sigma_y = 2G[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \quad (14.1)$$

де через ν позначений коефіцієнт Пуассона, а через G – модуль зсуву.

Переміщення визначаються наступним чином $w = w_0(x, y)$; w_0 – вертикальне переміщення серединної площини

$$u = z\theta_x = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad v = z\theta_y = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (14.2)$$

Функціонал Лагранжа приймає вигляд

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}) dz d\omega - \\ & - \int_{\Omega} p w_0 d\omega - \int_{L_1} \int_{-h/2}^{h/2} (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w_0) dz dl, \end{aligned} \quad (14.3)$$

а його варіація

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 = & \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz d\omega - \\ & - \int_{\Omega} p \delta w_0 d\omega - \int_{L_1} \int_{-h/2}^{h/2} (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w_0) dz dl. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Перший з інтегралів в (14.4) (варіація потенціальної енергії деформації) з використанням (14.2) перетворюємо до вигляду

$$\delta U = \int_{\Omega} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_x z \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + \sigma_y z \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + \tau_{xy} z \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) \right] dz \right\} d\omega =$$

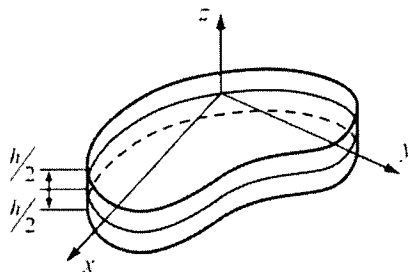


Рис. 14.1

$$= \int_{\Omega} \left[M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + M_{yx} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} \right] d\omega, \quad (14.5)$$

де

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz. \quad (14.6)$$

Перетворюємо (14.5) до вигляду

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta \theta_x M_x + \delta \theta_y M_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \theta_y M_y + \delta \theta_x M_{yx}) \right] d\omega - \\ & - \int_{\Omega} \left[\delta \theta_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) + \delta \theta_y \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Послідовно застосовуючи формулу Гріна, перетворюємо вираз

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{L_1} \left[(\delta \theta_x M_x + \delta \theta_y M_{xy}) n_x + (\delta \theta_y M_y + \delta \theta_x M_{yx}) n_y \right] dl + \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) \right] d\omega = \\ = & \int_{L_1} \left[(\delta \theta_x M_x + \delta \theta_y M_{xy}) n_x + (\delta \theta_y M_y + \delta \theta_x M_{yx}) n_y \right] dl + \\ & + \int_{L_1} \delta w_0 \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) n_y \right] dl - \\ & - \int_{\Omega} \delta w_0 \left[\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \right) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Зважаючи на відомі співвідношення

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad Q_x n_x + Q_y n_y = Q_n, \quad (14.9)$$

а також з урахуванням того, що

$$\begin{aligned} & (\delta \theta_x M_x + \delta \theta_y M_{xy}) n_x + (\delta \theta_y M_y + \delta \theta_x M_{yx}) n_y = \\ & = (M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y) (\delta \theta_x n_x + \delta \theta_y n_y) + \\ & + \left[M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + (M_y - M_x) n_x n_y \right] (\delta \theta_y n_x - \delta \theta_x n_y) = M_n \delta \theta_n + M_{nt} \delta \theta_t, \end{aligned} \quad (14.10)$$

де

$$\begin{aligned} M_n &= M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y; \\ M_{nt} &= M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + (M_y - M_x) n_x n_y; \\ \theta_n &= \theta_x n_x + \theta_y n_y; \quad \theta_t = \theta_x t_x + \theta_y t_y = -\theta_x n_y + \theta_y n_x, \end{aligned} \quad (14.11)$$

14. ЗГИН ТОНКИХ ПЛАСТИН

перетворюємо (14.8) до вигляду

$$\delta U = \int_{L_1} M_n \delta \theta_n dl + \int_{L_1} M_{nt} \delta \theta_t dl + \int_{L_1} \delta w_0 Q_n dl - \int_{\Omega} \delta w_0 \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \right) d\omega. \quad (14.12)$$

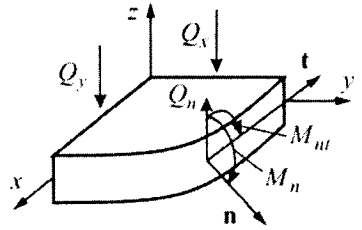


Рис. 14.2

Проінтегруємо другий інтеграл в (14.12) частинами і отримаємо остаточно

$$\delta U = \int_{L_1} M_n \delta \theta_n dl + \int_{L_1} \delta w_0 \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n \right) dl - \int_{\Omega} \delta w_0 \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \right) d\omega. \quad (14.13)$$

Розглянемо тепер останній з інтегралів в правій частині (14.3). Він являє собою роботу зовнішнього навантаження на боковій поверхні пластини. Цю роботу позначимо L , а її варіацію в (14.4) через δL . Тоді

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{L_1} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w_0) dz \right] dl = \int_{L_1} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_n^0 \delta u_n + \tau_{nt}^0 \delta u_t + \tau_{nz}^0 \delta w_0) dz \right] dl = \\ &= \int_{L_1} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_n^0 z \delta u_n + \tau_{nt}^0 z \delta u_t + \tau_{nz}^0 \delta w_0) dz \right] dl = \int_{L_1} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (M_n^0 \delta \theta_n + M_{nt}^0 \delta \theta_t + Q_n^0 \delta w_0) dz \right] dl, \quad (14.14) \end{aligned}$$

де

$$M_n^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n^0 z dz; \quad M_{nt}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt}^0 z dz; \quad Q_n^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nz}^0 dz. \quad (14.15)$$

Крім того,

$$\int_{L_1} M_{nt}^0 \delta \theta_t dl = - \int_{L_1} M_{nt}^0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} dl = - \delta w_0 M_{nt}^0 \Big|_a^b + \int_{L_1} \delta w_0 \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} dl = \int_{L_1} \delta w_0 \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} dl, \quad (14.16)$$

оскільки, або контур L_1 , замкнений, або на його кінцях δw_0 дорівнює нулю.

Тепер можемо записати

$$\delta L = \int_{L_1} \left[M_n^0 \delta \theta_n + \left(\frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} + Q_n^0 \right) \delta w_0 \right] dl. \quad (14.17)$$

Підставляємо (14.13) і (14.17) в (14.4) і одержуємо вираз для варіації функціонала Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 &= \delta U - \int_{\Omega} p \delta w_0 d\omega - \delta L = - \int_{\Omega} \delta w_0 \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + p \right) d\omega + \\ &+ \int_{L_1} \delta \theta_n (M_n - M_n^0) dl + \int_{L_1} \delta w_0 \left[\left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) - \left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) \right] dl. \quad (14.18) \end{aligned}$$

Прирівнявши $\delta\Pi_1$ нулю, на підставі довільності варіації одержимо:

– рівняння рівноваги елемента серединної площини пластини

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + p = 0; \quad (14.19)$$

– граничні умови на боковій поверхні S_1

$$M_n = M_n^0; \quad Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t}. \quad (14.20)$$

Більш звичною є форма функціонала Лагранжа, в якій за невідомі приймаються тільки переміщення. Подаючи внутрішні зусилля, що входять в (14.18), за допомогою виразів (14.1), (14.2), (14.6), (14.9), (14.11) через переміщення серединної площини w_0 , приходимо до наступних співвідношень

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}; \\ Q_n &= \left[- \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) n_x - \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) n_y \right] D; \\ M_n &= -D \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right]; \\ M_{nt} &= -D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) n_x n_y - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2) \right]; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} &= -D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right); \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Підстановка виразів (14.21) в (14.18) дозволяє визначити Π_1 як функціонал, що залежить тільки від функції w_0 .

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1 &= - \int_{\Omega} \delta w_0 \left[-D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + p \right] d\omega + \\ &+ \int_{L_1} \delta \theta_n \left\{ -D \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] - M_n^0 \right\} dl + \end{aligned}$$

$$+ \int_{L_1} \delta w_0 \left\{ -D \left[\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) n_x + \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) n_y \right] - \right. \\ \left. -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) n_x n_y - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2) \right] - \left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) \right\} dl. \quad (14.22)$$

Оскільки додатково до варіаційного рівняння Лагранжа повинна виконуватись гранична умова на частині S_2 , де задані переміщення, то можна вважати, що розв'язання рівняння (14.18) або (14.22) полягає в пошуку серед кінематично можливих переміщень таких, які б задовольняли рівнянню рівноваги і граничним умовам на S_1 .

Запишемо основні співвідношення теорії згину пластин в матричній формі. Введемо вектор-стовпець зусиль в деякій точці серединної площини пластини

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})^T. \quad (14.23)$$

Введемо також вектор-стовпець деформацій

$$\mathbf{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \kappa_{yx})^T. \quad (14.24)$$

Зусилля і деформації пов'язані між собою співвідношеннями, що називаються фізичними, які в матричній формі записуються наступним чином

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{\kappa}, \quad (14.25)$$

де матриця \mathbf{C} має вигляд

$$\mathbf{C} = D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}. \quad (14.26)$$

У свою чергу, деформації пов'язані з переміщеннями серединної площини шляхом матричного співвідношення (геометричного рівняння)

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{w}_0, \quad (14.27)$$

де \mathbf{B} – вектор-стовпець операцій диференціювання, що має вигляд

$$\mathbf{B}^T = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right). \quad (14.28)$$

Нарешті рівняння рівноваги набуває форму

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{M} + p = 0. \quad (14.29)$$

Відзначимо, що геометричне співвідношення (14.27) і рівняння рівноваги (14.29) побудовані на основі одного і того ж вектору операцій диференціювання \mathbf{B} .

Тепер варіаційне рівняння (14.18) може бути записане в матричній формі

$$-\int_{\Omega} \delta w_0 (p - \mathbf{B}^T \mathbf{M}) d\omega + \int_{L_1} \delta \theta_n (M_n - M_n^0) dl + \int_{L_1} \delta w_0 \left[\left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) - \left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) \right] dl = 0, \quad (14.30)$$

або

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}\delta w_0)^T \mathbf{M} d\omega - \int_{\Omega} p\delta w_0 d\omega - \int_{L_1} M_n^0 \delta\theta_n dl - \int_{L_1} (Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t}) \delta w_0 dl = 0, \quad (14.31)$$

де компоненти вектора зусиль \mathbf{M} повинні бути виражені через прогини w_0 за допомогою співвідношень (14.21).

Розглянемо варіаційне рівняння Кастільяно

$$\delta\Pi_2 = - \int_V (\delta\boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_2} [(\mathbf{A}_S)^T \delta\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{u}_S dS = 0. \quad (14.32)$$

Запишемо (14.32) в розгорнутому вигляді і перетворимо за допомогою інтегрування частинами подібно тому, як це робилося вище при перетворенні рівняння Лагранжа.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_2 &= - \int_V (\delta\sigma_x \varepsilon_x + \delta\sigma_y \varepsilon_y + \delta\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dV + \int_{S_2} (\delta\sigma_n u_n^0 + \delta\tau_{nt} u_t^0 + \delta\tau_{nz} w_0^0) dS = \\ &= - \int_{\Omega} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\delta\sigma_x z \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \delta\sigma_y z \frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \delta\tau_{xy} z \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \right) \right] \right\} d\omega + \\ &\quad + \int_{L_2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\delta\sigma_n z \theta_n^0 + \delta\tau_{nt} z \theta_t^0 + \delta\tau_{nz} w_0^0) dz \right] dl = \\ &= - \int_{\Omega} \left[\delta M_x \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \delta M_y \frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \delta M_{xy} \frac{\partial\theta_y}{\partial x} + \delta M_{yx} \frac{\partial\theta_x}{\partial y} \right] d\omega + \int_{L_2} (\delta M_n \theta_n^0 + \delta M_{nt} \theta_t^0 + \delta Q_n w_0^0) dl = \\ &= - \int_{\Omega} \left[\delta M_x \kappa_x + \delta M_y \kappa_y + \delta M_{xy} \kappa_{xy} + \delta M_{yx} \kappa_{yx} \right] d\omega + \\ &\quad + \int_{L_2} \left[\delta M_n \theta_n^0 + \left(\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right) w_0^0 \right] dl = 0. \end{aligned} \quad (14.33)$$

В матричній формі з урахуванням того, що

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}, \quad (14.34)$$

можемо записати

$$\delta\Pi_2 = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} d\omega + \int_{L_2} \left[\delta M_n \theta_n^0 + \left(\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right) w_0^0 \right] dl = 0. \quad (14.35)$$

Розглянемо інтеграл від виразу, що дорівнює нулю

$$I = \int_{\Omega} w_0 \left[\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_{yx}}{\partial y \partial x} \right] d\omega. \quad (14.36)$$

Будемо послідовно інтегрувати частинами

$$I = \int_{\Omega} w_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta M_{yx}}{\partial x} \right) \right] d\omega =$$

14. ЗГІН ТОНКИХ ПЛАСТИН

$$\begin{aligned}
 &= \int_{L_2} w_0 \left[\left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta M_{yx}}{\partial x} \right) n_y \right] dl - \\
 &- \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta M_{yx}}{\partial x} \right) n_x \right] d\omega = \\
 &= \int_{L_2} w_0 \delta Q_n dl - \int_{L_2} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} (\delta M_x n_x + \delta M_{xy} n_y) + \frac{\partial w_0}{\partial y} (\delta M_y n_y + \delta M_{yx} n_x) \right] dl + \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\delta M_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \delta M_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \delta M_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \delta M_{yx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) d\omega = \int_{L_2} w_0 \delta Q_n dl + \\
 &+ \int_{L_2} (\theta_n \delta M_n + \theta_{nt} \delta M_{nt}) dl + \int_{\Omega} \left(\delta M_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \delta M_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \delta M_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \delta M_{yx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) d\omega = \\
 &= \int_{L_2} \left[\delta M_n \theta_n^0 + \left(\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right) w_0^0 \right] dl + \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\delta M_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \delta M_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \delta M_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \delta M_{yx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) d\omega, \quad (14.37)
 \end{aligned}$$

або в матричній формі

$$I = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T \mathbf{B}^T w_0 d\omega + \int_{L_2} \left[\delta M_n \theta_n^0 + \left(\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right) w_0^0 \right] dl. \quad (14.38)$$

Відніmemo від (14.33) рівний нулю вираз (14.37), тоді

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_2 = &- \int_{\Omega} \left[\delta M_x \left(\kappa_x + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \delta M_y \left(\kappa_y + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \delta M_{xy} \left(\kappa_{xy} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
 &+ \left. \delta M_{yx} \left(\kappa_x + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) \right] d\omega + \int_{L_2} \delta M_n (\theta_n^0 - \theta_n) dl + \int_{L_2} \left[\frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} - \delta Q_n \right] (w_0^0 - w_0) dl. \quad (14.39)
 \end{aligned}$$

Оскільки додатково до варіаційного рівняння Кастильяно повинні виконуватись рівняння рівноваги в середині області і граничні умови на S_1 , то розв'язання рівняння (14.39) полягає в знаходженні серед статично можливих функцій зусиль таких, які б дозволили задовольнити геометричним співвідношенням і граничним умовам на S_2 .

В матричній формі варіаційне рівняння (14.39) може бути записане в наступному вигляді

$$\delta \Pi_2 = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{B}^T w_0) d\omega + \int_{L_2} \delta M_n (\theta_n^0 - \theta_n) dl + \int_{L_2} \left[\frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} - \delta Q_n \right] (w_0^0 - w_0) dl = 0. \quad (14.40)$$

З рівності $\delta\Pi_2$ нулю, на підставі довільності варіації можемо записати

$$\kappa = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{B}^T w_0, \quad (14.41)$$

$$\theta_n = \theta_n^0; \quad w_0 = w_0^0. \quad (14.42)$$

Відомо, що якщо деформації (зусилля) визначаються через переміщення за допомогою співвідношень (14.41), то це означає, що такі деформації задовольняють умовам сумісності.

Таким чином, рівняннями Ейлера і природними граничними умовами для даної варіаційної задачі є умови сумісності деформацій і граничні умови на тій частині границі, де задані переміщення.

Підсумуємо основні результати даного розділу.

Основна інтегральна формула

$$\int_{\Omega} w_0 \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} \right) d\omega = \int_L w_0 \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) dl + \int_L \theta_n M_n dl + \\ + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} M_y + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} M_{yx} \right) d\omega,$$

або в матричній формі

$$- \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{M} w_0 d\omega = \int_L \left[\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} - \delta Q_n \right] w_0 dl + \int_L M_n \theta_n - \int_{\Omega} (\mathbf{B} w_0)^T \mathbf{M} d\omega.$$

Варіаційна задача Лагранжа

$$\delta\Pi_1(w_0) = \int_{\Omega} (\mathbf{B} \delta w_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{B} w_0) d\omega - \int_{\Omega} p \delta w_0 d\omega - \\ - \int_{L_1} M_n^0 \delta \theta_n dl - \int_{L_1} \left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) \delta w_0 dl = 0,$$

або після перетворень

$$\delta\Pi_1(w_0) = - \int_{\Omega} \delta w_0 \left[-D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + p \right] d\omega - \\ - \int_{L_1} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} (M_n - M_n^0) dl + \\ + \int_{L_1} \delta w_0 \left[\left(Q_n(w) + \frac{\partial M_{nt}(w)}{\partial t} \right) - \right.$$

Варіаційна задача Кастільяно

$$\delta\Pi_2(\mathbf{M}) = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} d\omega + \\ + \int_{L_2} \left[\delta M_n \theta_n^0 + \left(\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right) w_0^0 \right] dl = 0,$$

або після перетворень

$$\delta\Pi_2 = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T (\kappa - \mathbf{B}^T w_0) d\omega + \\ + \int_{L_2} \delta M_n \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} - \frac{\partial w_0^0}{\partial n} \right) dl + \\ + \int_{L_2} \left[\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right] (w_0^0 - w_0) dl = 0.$$

14. ЗГИН ТОНКИХ ПЛАСТИН

$$-\left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}\right) dl = 0.$$

Додаткові умови

$$w_0 = w_0^0; \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0^0}{\partial n}; \in S_2,$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T w_0, \in V.$$

Рівняння Ейлера

$$-D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + p = 0$$

(рівняння рівноваги).

Природні граничні умови на S_1

$$M_n(w) = M_n^0;$$

$$\left[Q_n(w) + \frac{\partial M_{nt}(w)}{\partial t} \right] = \left[Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right].$$

Додаткові умови

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{M} + p = 0, \in V,$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t}, \in S_1,$$

$$M_n = M_n^0.$$

Рівняння Ейлера

$$\mathbf{k} - \mathbf{B}^T w_0 = 0$$

(забезпечують сумісність деформацій).

Природні граничні умови на S_2

$$w_0 = w_0^0; \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0^0}{\partial n}.$$

15. Лінійна теорія тонких оболонок

Додатні напрямки силових величин, що діють на елемент серединної поверхні, показані на рис. 15.1. Величини α_1 і α_2 визначають два взаємно ортогональних напрямки головних кривизн.

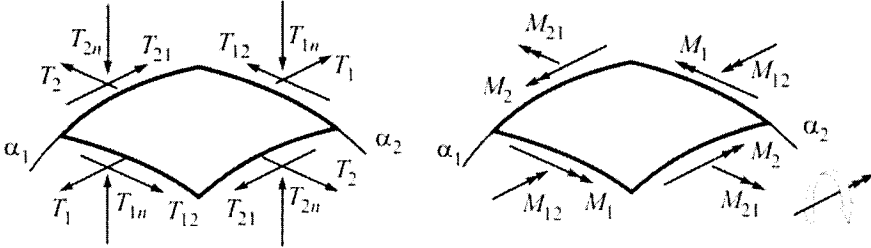


Рис. 15.1

Вводяться позначення

$$S = T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}; \quad H = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}). \quad (15.1)$$

Рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(A_2 T_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{\partial(A_1 S)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial(A_1 H)}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] = -A_1 A_2 P_1; \\ & -\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \frac{\partial(A_1 T_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 S)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S + \frac{1}{R_2} \left[-\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial(A_2 H)}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] = -A_1 A_2 P; \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 H)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 H)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] \right\} = P_n, \end{aligned}$$

де A_1, A_2 – параметри Ламе.

Введемо вектор \mathbf{m} такий, що

$$\mathbf{m}^T = \{T_1 \quad T_2 \quad S \quad M_1 \quad M_2 \quad H\}, \quad (15.3)$$

вектор \mathbf{q} такий, що

$$\mathbf{q}^T = \{P_1 \quad P_2 \quad P_n\}, \quad (15.4)$$

та матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & \dots & a_{26} \\ a_{31} & \dots & a_{36} \end{pmatrix}, \quad (15.5)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \cdot); & a_{12} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; & a_{13} &= \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^2 \cdot); \\ a_{14} &= -\frac{1}{A_1 A_2 R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \cdot); & a_{15} &= -\frac{1}{A_1 A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; & a_{16} &= \frac{2}{A_1 A_2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial (A_1 \cdot)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \right]; \\ a_{21} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \cdot; & a_{22} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \cdot); & a_{23} &= -\frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^2 \cdot); \\ a_{24} &= -\frac{1}{A_1 A_2 R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; & a_{25} &= \frac{1}{A_1 A_2 R_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \cdot); \\ a_{26} &= \frac{2}{A_1 A_2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial (A_2 \cdot)}{\partial \alpha_1} \right]; & a_{31} &= -\frac{1}{R_1}; & a_{32} &= -\frac{1}{R_2}; & a_{33} &= 0; \\ a_{34} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial (A_2 \cdot)}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] \right\}; \\ a_{35} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial (A_1 \cdot)}{\partial \alpha_2} \right] \right\}; \\ a_{36} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial (A_1 \cdot)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial (A_2 \cdot)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги в матричній формі

$$\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q} = 0. \quad (15.6)$$

Геометричні співвідношення

Відносні подовження серединної поверхні:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_2}. \quad (15.7)$$

Зсув серединної поверхні:

$$\omega = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right).$$

Параметри зміни кривизн серединної поверхні:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right); \\ \kappa_2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Параметр крутіння:

$$\tau = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right).$$

Введемо вектор деформацій ε такий, що

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \omega \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \tau\}, \quad (15.8)$$

вектор переміщень \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad w\}; \quad (15.9)$$

матрицю

$$\mathbf{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{61} & \kappa_{62} & \kappa_{63} \end{pmatrix}, \quad (15.10)$$

де

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}; \quad \kappa_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\cdot); \quad \kappa_{13} = \frac{1}{R_1} \cdot; \\ \kappa_{21} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\cdot); \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}; \quad \kappa_{23} = \frac{1}{R_2}; \\ \kappa_{31} &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1(\cdot)}{A_1} \right); \quad \kappa_{32} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \right); \quad \kappa_{33} = 0; \\ \kappa_{41} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{R_1} \cdot \right); \quad \kappa_{42} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{R_2}(\cdot); \\ \kappa_{43} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}; \\ \kappa_{51} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{1}{R_1}(\cdot); \quad \kappa_{52} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{R_2}(\cdot) \right); \\ \kappa_{53} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}; \\ \kappa_{61} &= \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \right]; \quad \kappa_{62} = \frac{1}{R_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \right]; \\ \kappa_{63} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right]. \end{aligned}$$

Геометричні співвідношення в матричній формі

$$\varepsilon = \mathbf{\kappa} \mathbf{u}. \quad (15.11)$$

Фізичні рівняння

15. ЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); & T_2 &= B(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2); & S &= B\frac{(1+\nu)}{2}\omega; \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2); & M_2 &= D(\nu\kappa_1 + \kappa_2); & H &= (1-\nu)D\tau.
 \end{aligned}
 \tag{15.12}$$

Введемо матрицю

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{61} & \cdots & g_{66} \end{pmatrix},
 \tag{15.13}$$

де

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= B; & g_{12} &= \nu B; & g_{13} &= g_{14} = g_{15} = g_{16} = 0; \\
 g_{21} &= \nu B; & g_{22} &= B; & g_{23} &= g_{24} = g_{25} = g_{26} = 0; \\
 g_{31} &= g_{32} = 0; & g_{33} &= \frac{1+\nu}{2}B; & g_{34} &= g_{35} = g_{36} = 0; \\
 g_{41} &= g_{42} = g_{43} = 0; & g_{44} &= D; & g_{45} &= \nu D; & g_{46} &= 0; \\
 g_{51} &= g_{52} = g_{53} = 0; & g_{54} &= \nu D; & g_{55} &= D; & g_{56} &= 0; \\
 g_{61} &= g_{62} = g_{63} = g_{64} = g_{65} = 0; & g_{66} &= (1-\nu)D.
 \end{aligned}$$

Матрична форма фізичних рівнянь

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}.
 \tag{15.14}$$

Рівняння нерозривності деформацій серединної поверхні

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\kappa_2) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\kappa_1 - \frac{\partial(A_1\tau)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tau + \frac{\omega}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial(A_1\omega)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial(A_2\varepsilon_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\varepsilon_1 = 0; \\
 -\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\kappa_2 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\kappa_1) - \frac{\partial(A_2\tau)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tau + \frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\varepsilon_2 - \frac{1}{R_2}\frac{\partial(A_1\varepsilon_1)}{\partial\alpha_2} + \\
 + \frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\omega + \frac{1}{R_2}\frac{\partial(A_2\omega)}{\partial\alpha_1} = 0; \\
 \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A_1}\left[A_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{1}{2}A_1\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\omega\right]\right] + \right. \\
 \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\frac{1}{A_2}\left[A_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2}A_2\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\omega\right]\right]\right\} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{15.15}$$

Третє рівняння у формі, що наведена в книзі О.О. Назарова «Основы теории и методы расчета пологих оболочек», має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left\{\frac{1}{A_1}\left[\frac{\partial(A_2\varepsilon_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\varepsilon_1 - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial(A_1\omega)}{\partial\alpha_2}\right]\right\}\frac{1}{A_1A_2} - \\
 - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left\{\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\varepsilon_2 - \frac{\partial(A_1\varepsilon_1)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial(A_2\omega)}{\partial\alpha_1} + \frac{\omega}{2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right]\right\}\frac{1}{A_1A_2} = 0.
 \end{aligned}$$

Якщо ввести вектор ε_1 такий, що

$$\varepsilon_1^T = \{\kappa_2 \quad \kappa_1 \quad -\tau \quad -\varepsilon_2 \quad -\varepsilon_1 \quad \frac{\omega}{2}\}, \quad (15.16)$$

тобто, $\varepsilon_1 = \Phi \varepsilon$, де

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

можна записати умови нерозривності деформацій в матричній формі

$$\mathbf{A} \varepsilon_1 = \mathbf{A} \Phi \varepsilon = \mathbf{0}, \quad (15.17)$$

де \mathbf{A} – матриця операцій диференціювання, яка використовується для запису рівнянь рівноваги (15.6).

Граничні умови

На частині границі L_2 , де задано вектор переміщень

$$\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s \quad \bar{u}_t \quad \bar{w} \quad \bar{\theta}\}^T, \quad (15.18)$$

граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{F} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (15.19)$$

або

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2; \quad \bar{u}_t = -\sin \gamma u_1 + \cos \gamma u_2; \quad \bar{w} = w; \\ \bar{\theta} &= \frac{\cos \gamma}{R_1} u_1 + \frac{\sin \gamma}{R_2} u_2 - \frac{\cos \gamma}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{\sin \gamma}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \end{aligned}$$

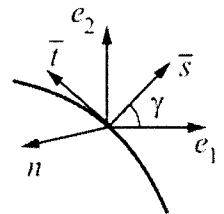
де

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{pmatrix}, \quad (15.20)$$

$$f_{11} = \cos \gamma; \quad f_{21} = -\sin \gamma; \quad f_{31} = 0; \quad f_{41} = \frac{1}{R_1} \cos \gamma;$$

$$f_{12} = \sin \gamma; \quad f_{22} = \cos \gamma; \quad f_{32} = 0; \quad f_{42} = \frac{1}{R_2} \sin \gamma;$$

$$f_{13} = 0; \quad f_{23} = 0; \quad f_{33} = 1; \quad f_{43} = -\frac{\cos \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{\sin \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$



На частині границі L_1 , де задано вектор узагальнених зусиль

$$\bar{\mathbf{m}}_s = \{\bar{N}_{ss} \quad \bar{T}_{ts} \quad \bar{Q}_{ns} \quad \bar{M}_s\}^T, \quad (15.21)$$

граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{H} \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_s, \quad (15.22)$$

де

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{16} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ h_{41} & \dots & h_{46} \end{pmatrix}, \quad (15.23)$$

$$h_{11} = \cos^2 \gamma; \quad h_{12} = \sin^2 \gamma; \quad h_{13} = 2 \sin \gamma \cos \gamma; \quad h_{14} = \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right);$$

$$h_{15} = -h_{14}; \quad h_{16} = \sin \gamma \cos \gamma \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right];$$

$$h_{21} = -\sin \gamma \cos \gamma; \quad h_{22} = -h_{21}; \quad h_{23} = \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma; \quad h_{24} = -\sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right);$$

$$h_{25} = -h_{24}; \quad h_{26} = \left(\frac{\cos^2 \gamma}{R_2} - \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} \right) + \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma);$$

$$h_{31} = 0; \quad h_{32} = 0; \quad h_{33} = 0;$$

$$h_{34} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\cos \gamma \frac{\partial(A_2 \cdot)}{\partial \alpha_1} - \sin \gamma \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial(\sin \gamma \cos \gamma \cdot)}{\partial \alpha_1} - \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial(\sin \gamma \cos \gamma \cdot)}{\partial \alpha_2};$$

$$h_{35} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\sin \gamma \frac{\partial(A_1 \cdot)}{\partial \alpha_2} - \cos \gamma \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial(\sin \gamma \cos \gamma \cdot)}{\partial \alpha_2} - \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial(\sin \gamma \cos \gamma \cdot)}{\partial \alpha_1};$$

$$h_{36} = \frac{\cos \gamma}{A_1^2 A_2} \frac{\partial(A_1^2 \cdot)}{\partial \alpha_2} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2^2} \frac{\partial(A_2^2 \cdot)}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) [(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cdot];$$

$$h_{41} = 0; \quad h_{42} = 0; \quad h_{43} = 0; \quad h_{44} = \cos^2 \gamma; \quad h_{45} = \sin^2 \gamma; \quad h_{46} = 2 \sin \gamma \cos \gamma.$$

У розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ss} &= \cos^2 \gamma T_1 + \sin^2 \gamma T_2 + 2 \sin \gamma \cos \gamma S + \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_1 - \\ &- \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_2 + \sin \gamma \cos \gamma \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] H; \\ \bar{T}_{ts} &= -\cos \gamma \sin \gamma T_1 + \sin \gamma \cos \gamma T_2 + (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) S - \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) M_1 + \\ &+ \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) M_2 + \left[\left(\frac{\cos^2 \gamma}{R_2} - \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} \right) + \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] H; \\ \bar{Q}_{ns} &= \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot M_1 + \left(\frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \times \\ &\times (\sin \gamma \cos \gamma M_1) + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) (\sin \gamma \cos \gamma M_2) + \frac{\cos \gamma}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} + \\
 & + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \left[(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) H \right];
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_s = \cos^2 \gamma M_1 + \sin^2 \gamma M_2 + 2 \sin \gamma \cos \gamma H.$$

У випадку, коли край оболонки співпадає з координатною лінією $\alpha_2 = \text{const}$, де $\gamma = \pi/2$; $\cos \gamma = 0$; $\sin \gamma = 1$, маємо

$$T_2 = \bar{N}_{ss}; S + \frac{2H}{R_1} = \bar{T}_{ts}; \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} \right) = \bar{Q}_{ns}; M_2 = \bar{M}_s.$$

Якщо ж край оболонки співпадає з координатною лінією $\alpha_1 = \text{const}$, де $\gamma = 0$; $\cos \gamma = 1$; $\sin \gamma = 0$, граничні умови на L_1 набувають вигляду

$$T_1 = \bar{N}_{ss}; S + \frac{2H}{R_1} = \bar{T}_{ts}; \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} \right) = \bar{Q}_{ns}; M_1 = \bar{M}_s.$$

Тепер можемо записати систему співвідношень теорії тонких оболонок у матричному вигляді:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} && \text{(рівняння рівноваги);} \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{K}\mathbf{u} && \text{(геометричні співвідношення);} \\
 \mathbf{m} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon} && \text{(фізичні рівняння);} \\
 \mathbf{F}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{(граничні умови на } L_2); \\
 \mathbf{H}\mathbf{m} &= \bar{\mathbf{m}}_s && \text{(граничні умови на } L_1).
 \end{aligned} \tag{15.24}$$

Варіаційне рівняння, що еквівалентне повній системі теорії тонких оболонок (повний функціонал)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{q}] d\omega + \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{K}\mathbf{u}] d\omega + \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{m} - \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}] d\omega + \\
 + \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T [\bar{\mathbf{m}}_s - \mathbf{H}\mathbf{m}] dl + \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T [\mathbf{F}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0,
 \end{aligned} \tag{15.25}$$

де $\mathbf{E}_0 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 2)$.

Формула інтегрування частинами в теорії оболонок.

Якщо \mathbf{a} – трикомпонентний вектор $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T$; \mathbf{b} – шестикомпонентний вектор $\mathbf{b} = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6\}^T$, тоді

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \mathbf{b})^T \mathbf{c} \mathbf{a} d\omega = \int_L (\mathbf{F} \mathbf{a})^T \mathbf{H} \mathbf{b} dl - \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{b} d\omega. \tag{15.26}$$

Наприклад, є справедливою наступна рівність

$$-\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{m} d\omega = -\int_L (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{H} \mathbf{m} dl + \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \mathbf{m})^T \mathbf{c} \delta \mathbf{u} d\omega \tag{15.27}$$

або з урахуванням того, що на L_2 $\delta \mathbf{u} = 0$,

$$-\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{m} d\omega = -\int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{H} \mathbf{m} dl + \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \mathbf{m})^T \kappa \delta \mathbf{u} d\omega. \quad (15.27')$$

15.1. Побудова варіаційного рівняння Лагранжа

На підставі (15.25) можна, вважаючи варіації незалежними, записати

$$-\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q}] d\omega + \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T [\mathbf{H} \mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}_s] dl = 0, \quad (15.28)$$

при додаткових умовах

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \in L_2; \\ \varepsilon &= \kappa \mathbf{u}, \quad \in \Omega. \end{aligned}$$

Перетворимо в (15.28) інтеграл $\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{m} d\omega$ за допомогою формули (15.27').

Тоді маємо

$$\int_{\Omega} (\kappa \delta \mathbf{u})^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{m}] d\omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{q} d\omega - \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{m}}_s dl = 0; \quad (15.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \in L; \\ \varepsilon &= \kappa \mathbf{u}, \quad \in \Omega. \end{aligned}$$

Відомо, що потенціальна енергія деформації оболонки дорівнює

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S\omega + M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 + 2H\tau) d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{m}] d\omega. \quad (15.30)$$

В свою чергу, варіація потенціальної енергії деформації дорівнює

$$\delta U = \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{m}] d\omega. \quad (15.31)$$

Враховуючи вираз (15.31), а також приймаючи до уваги друге з додаткових умов у (15.29), можемо записати

$$\delta U - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{q} d\omega - \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{m}}_s dl = 0; \quad (15.32)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \in L_2.$$

Цей вираз і є варіаційним рівнянням Лагранжа, що виражає рівність нулю повної віртуальної роботи.

Вносячи операцію варіювання за знак інтеграла, отримуємо принцип стаціонарності функціонала Лагранжа (принцип мінімуму повної потенціальної енергії)

$$\delta \Pi_1 = 0; \quad (15.33)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \in L_2,$$

де

$$\Pi_1 = U - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\omega - \int_{L_1} (\mathbf{F}\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{m}}_s dl.$$

Виконуючи зворотні операції, можна від варіаційного рівняння Лагранжа (15.32) за допомогою (15.31), (15.30) и (15.27') перейти до варіаційного рівняння (15.28). Звідси випливає висновок про те, що постановки задач у вигляді варіаційного рівняння (15.32) і диференціальних рівнянь (15.24) еквівалентні. Можна також розглядати рівняння (15.28) як одну з форм варіаційного рівняння Лагранжа.

15.2. Побудова варіаційного рівняння Кастільяно

Перетворимо варіаційне рівняння (15.25), залишивши в ньому другий і п'ятий інтеграл, що забезпечують виконання геометричних співвідношень і граничних умов на L_2 . Решту співвідношень теорії тонких оболонок будемо розглядати як додаткові умови.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{K}\mathbf{u}] d\omega + \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T [\mathbf{F}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0; \quad (15.34)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \in \Omega; \quad \mathbf{H}\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_s, \quad \in L_1.$$

Додаткові умови в (15.34) означають, що вектор \mathbf{m} розшукується на множині статично можливих (що задовольняють рівнянням рівноваги і граничним умовам на L_1) векторів зусиль.

Якщо у формулі інтегрування частинами (15.26) покласти $\mathbf{a} = \mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \delta \mathbf{m}$, то вона набуде вигляду

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T \mathbf{K}\mathbf{u} d\omega = \int_L (\mathbf{F}\mathbf{u})^T \mathbf{H} \delta \mathbf{m} dl - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \delta \mathbf{m} d\omega. \quad (15.35)$$

Беручи до уваги рівність нулю $\delta \mathbf{m}$ на ділянці L_1 , будемо мати

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T \mathbf{K}\mathbf{u} d\omega = \int_{L_2} (\mathbf{F}\mathbf{u})^T \mathbf{H} \delta \mathbf{m} dl - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \delta \mathbf{m} d\omega. \quad (15.35')$$

Підставимо (15.35') в (15.34) і врахуємо, що $\mathbf{F}\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ на L_2 . Тоді маємо

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T \boldsymbol{\varepsilon} d\omega = \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T \bar{\mathbf{u}} dl; \quad (15.36)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \in \Omega; \quad \mathbf{H}\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_s, \quad \in L_1.$$

З урахуванням того, що $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{m}$, можна (15.36) переписати у вигляді

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{m}) d\omega + \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T \bar{\mathbf{u}} dl = 0; \quad (15.37)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \in \Omega; \quad \mathbf{H}\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_s, \quad \in L_1.$$

Рівність (15.37) є варіаційним рівнянням Кастільяно.

Оскільки інтеграл $\int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T \boldsymbol{\varepsilon} d\omega$ є варіацією доповнювальної роботи, то з (15.37) впливає принцип доповнювальної віртуальної роботи, який полягає в стаціонарності функціонала

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \mathbf{m})^T (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{m}) d\omega + \int_{L_2} (\mathbf{Hm})^T \bar{\mathbf{u}} dl \quad (15.38)$$

при попередніх умовах у вигляді рівнянь рівноваги і граничних умов на L_1 . Виконуючи зворотні перетворення, можна з (15.38) за допомогою (15.35') отримати (15.34), а з (15.34), у свою чергу, впливають геометричні співвідношення між $\boldsymbol{\varepsilon}$ і \mathbf{u} , які забезпечують сумісність деформацій. Також звідси впливає висновок про еквівалентність варіаційних рівнянь (15.37) і (15.34).

15.3. Принципи Лагранжа і Кастільяно

Повний функціонал

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{Am} + \mathbf{q}] d\omega + \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{ku}] d\omega + \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{m} - \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}] d\omega + \int_{L_1} (\mathbf{F}\delta \mathbf{u})^T [\bar{\mathbf{m}}_s - \mathbf{Hm}] dl + \int_{L_2} (\mathbf{H}\delta \mathbf{m})^T [\mathbf{Fu} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0.$$

Варіаційна задача Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 &= \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{m}] d\omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{q} d\omega - \\ &- \int_{L_1} (\mathbf{F}\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{m}}_s dl = - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{Am} + \mathbf{q}] d\omega + \\ &+ \int_{L_1} (\mathbf{F}\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{Hm} - \bar{\mathbf{m}}_s] dl = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{ku}, \quad \in \Omega; \\ \mathbf{Fu} &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \in L_2. \end{aligned}$$

Варіаційна задача Кастільяно

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{m}) d\omega + \\ &+ \int_{L_2} (\mathbf{H}\delta \mathbf{m})^T \bar{\mathbf{u}} dl = - \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{ku}] d\omega - \\ &- \int_{L_2} (\mathbf{H}\delta \mathbf{m})^T [\mathbf{Fu} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$\begin{aligned} \mathbf{Am} + \mathbf{q} &= \mathbf{0}, \quad \in \Omega; \\ \mathbf{Hm} &= \bar{\mathbf{m}}_s, \quad \in L_1. \end{aligned}$$

16. Підсумки основних результатів

16.1. Загальні положення

Загальна варіаційна проблема формулюється як рівність нулеві повної варіації:

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2} \delta y_2 + \dots + \frac{\partial v}{\partial y_i} \delta y_i + \dots + \frac{\partial v}{\partial y_n} \delta y_n = 0, \quad v = v(y_1 y_2 \dots y_n). \quad (16.1)$$

Якщо частинні варіації відносяться до обмежень, то можуть бути сформульовані частинні варіаційні проблеми. Звичайно, кожне таке обмеження вимагає виключити відповідну функцію з числа тих, від яких залежить функціонал, а рівність нулеві відповідної варіації дає рівняння зв'язку цієї функції з іншими. В механіці ці рівняння за фізичним змістом можуть являти собою рівняння статичної, геометричної, фізичної сторони задачі, а також граничні умови.

Наприклад:

$$1. \delta v_1(y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \delta y_2 + \dots + \frac{\partial v_2}{\partial y_n} \delta y_n = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \delta y_1 = 0.$$

$$2. \delta v_2(y_3, \dots, y_n) = \frac{\partial v_2}{\partial y_3} \delta y_3 + \dots + \frac{\partial v_2}{\partial y_n} \delta y_n = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \delta y_1 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \delta y_2 = 0.$$

.....

$$n. \delta v_n(y_n) = \frac{\partial v_n}{\partial y_n} \delta y_n = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial y_1} \delta y_1 = 0; \quad \frac{\partial v_n}{\partial y_2} \delta y_2 = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial v_n}{\partial y_{n-1}} \delta y_{n-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Звичайно, мають бути і інші комбінації обмежень (всього 2^n).

Повинні також бути виконані умови, які являють собою умови наявності повної варіації, аналогічні умовам наявності повного диференціалу. Наприклад, якщо $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, то для виразу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ повинна виконуватись умова

$$\text{наявності повного диференціалу: } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рівняння (16.1) визначає наявність точки стаціонарності. Для того, щоб більш точно дослідити поведінку функціонала $v(y_1 y_2 \dots y_n)$ необхідно розглянути його приріст

$$\Delta v(y_1 y_2 \dots y_n) = \sum_{c=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_k} \delta y_i \delta y_k + \dots$$

у точці стаціонарності. Перша варіація дорівнює нулю, тому приріст функціонала визначається другим доданком

$$\Delta v(y_1 y_2 \dots y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_k} \delta y_i \delta y_k = \frac{1}{2} \delta^2 v.$$

Величина $\delta^2 v = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_k} \delta y_i \delta y_k$ є другою варіацією. Якщо $\delta^2 v > 0 \rightarrow v \rightarrow \min$

(принцип Лагранжа), $\delta^2 v < 0 \rightarrow v \rightarrow \max$ (принцип Кастільяно). Перехід від одних частинних варіаційних принципів до інших, або до загальної варіаційної проблеми здійснюється за допомогою множників Лагранжа.

Якщо вихідний, змішаний функціонал залежить від двох функцій, наприклад, u, N , або може бути представлений як сума відповідних функціоналів, кожен з яких залежить тільки від однієї функції, то побудова двоїстих задач здійснюється за наступною схемою.

Урахуємо, що загальний функціонал теореми Клапейрона $\Pi(u, N) = A_{BC} - A_{3C}$ при умові $\delta\Pi(u, N) = 0$ досягає стаціонарного значення, яке дорівнює нулю

$$\Pi(u, N) = A_{BC} - A_{3C} = 0.$$

Позначимо

$$\Pi(u, N) = \Pi_1(u, N) - \Pi_2(u, N).$$

Тоді маємо

$$\delta\Pi = \delta\Pi_1 - \delta\Pi_2 = \frac{\partial\Pi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\Pi_1}{\partial N} \delta N - \frac{\partial\Pi_2}{\partial u} \delta u - \frac{\partial\Pi_2}{\partial N} \delta N = 0,$$

причому $\Pi_1(u, N) = \Pi_2(u, N)$.

Таким чином, отримаємо пару двоїстих задач варіаційного числення, коли додаткові умови однієї задачі є природними умовами іншої.

$$\delta\Pi_1 = \frac{\partial\Pi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\Pi_1}{\partial N} \delta N = 0$$

при додатковій умові

$$\frac{\partial\Pi_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\Pi_2}{\partial N} \delta N = 0.$$

$$\delta\Pi_2 = \frac{\partial\Pi_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\Pi_2}{\partial N} \delta N = 0 \quad (16.2)$$

при додатковій умові

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\Pi_1}{\partial N} \delta N = 0.$$

А оскільки $\delta\Pi_1 = \delta\Pi_2$, рівняння обмежень співпадають з варіаційною задачею, і автоматично ураховуються.

При такому підході функціонали $\Pi_1(u, N)$ і $\Pi_2(u, N)$ будуються за схемою

$$\delta\Pi_1(u, N) = 0; \quad \delta\Pi_2(u, N) = 0,$$

$\Pi_1(u, N) = \Pi(u, N) + \Pi^K(N) = \Pi^L(u)$; $\Pi_2(u, N) = -\Pi(u, N) + \Pi^L(u) = \Pi^K(N)$ (16.3) і мають назву першої і другої форм відповідних функціоналів. Наприклад, функціоналів типу Рейснера і Ху-Васідзу.

У разі, коли $\Pi_1 = \Pi_1(u)$, а $\Pi_2 = \Pi_2(N)$ отримаємо пару двоїстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лагранжа і Кастільяно.

$$\delta\Pi_1^L(u) = \frac{\partial\Pi_1^L(u)}{\partial u} \delta u = 0$$

при додатковій умові

$$\frac{\partial\Pi_2^K(N)}{\partial N} \delta N = 0.$$

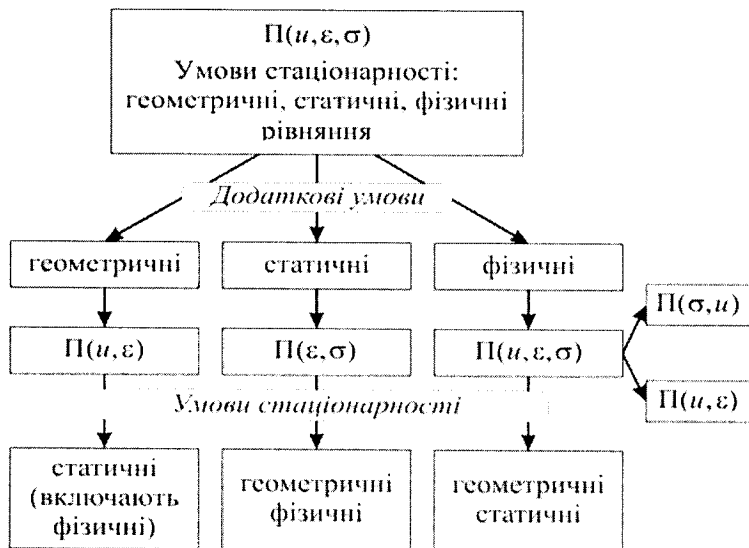
$$\delta\Pi_2^K(N) = \frac{\partial\Pi_2^K(N)}{\partial N} \delta N = 0 \quad (16.4)$$

при додатковій умові

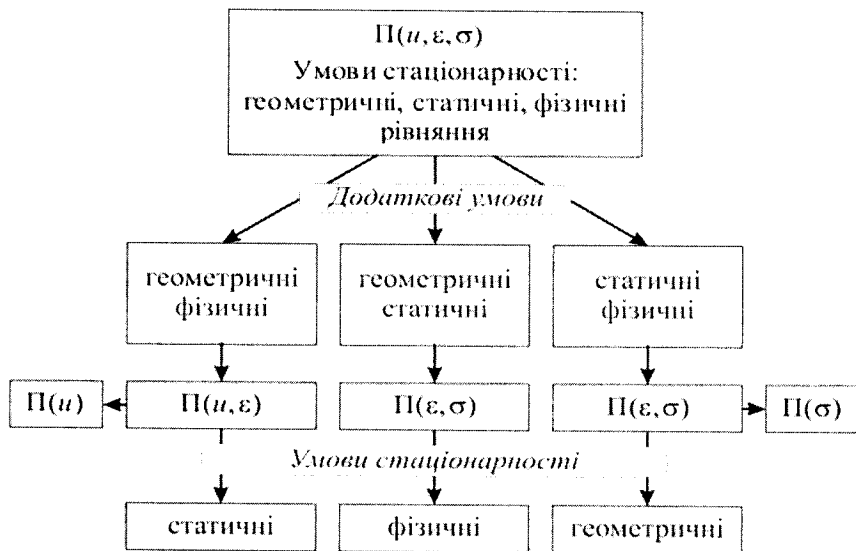
$$\frac{\partial\Pi_1^L(u)}{\partial u} \delta u = 0.$$

Надалі для функціоналів Лагранжа і Кастільяно введемо позначення $\Pi^L(u)$ і $\Pi^K(N)$. Причому $\Pi(u, N) = \Pi^L(u) - \Pi^K(N) = 0$.

Схеми отримання частинних функціоналів із повного:



Використання геометричних, або статичних, або фізичних рівнянь як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного



Використання двох груп із геометричних, статичних і фізичних рівнянь як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного

16. ПІДСУМКИ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Тоді як у функціоналі варіаційної теореми Лагранжа (Діріхле і Гріна) проводиться варіювання переміщень, у варіаційній теоремі Кастильяно (Менабреа і Кастильяно) до числа тих, що варіюються, входять внутрішні зусилля, або напруження. Іншими словами, варіаційна теорема Менабреа і Кастильяно є функціоналом внутрішніх зусиль або напружень. Відомо, що обґрунтування класичної теорії споруд супроводжувала суперечка, яка стосувалась, головним чином, загальної практичної придатності різних форм варіаційної теореми Менабреа і Кастильяно, наприклад, рівняння взаємності Максвелла-Бетті, принципу можливих змін напруженого стану або другої теореми Кастильяно. Серед інших в цій дискусії брали участь Ернст Хеллінгер (1883–1950) і Георг Пранге (1885–1941).

У своєму огляді *Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Continua* (Загальні підходи до механіки суцільного середовища), яка вийшла 1914 р. в Енциклопедії математичних наук, редактованій Клейном і К.Х.Мюллером, Хеллінгер, показав для випадку тривимірних континуумів, як принцип мінімуму потенційної енергії може спочатку бути перетворений до своєї канонічної форми за допомогою канонічного перетворення аналітичної механіки, причому переміщення і напруження стають невідомими змінними стану. Після цього Хеллінгер отримує варіаційну теорему Менабреа і Кастильяно, користуючись умовами рівноваги як додатковими.

Наступний крок зробив Пранге у своїй дисертації, завершеній в 1915 р. в Геттінгені, і в своїй кваліфікаційній роботі *Екстремум роботи деформації*, виконаній в Ганновері наступного року але, на жаль, виданій повністю тільки в 1999 р. У своїй дисертації Пранге забезпечує математичне обґрунтування теорії пружності за допомогою варіаційного числення, використовуючи канонічне перетворення Гамільтона-Якобі відоме з аналітичної механіки. Як змінні переміщення u , так і змінні сили чи напруження σ є невідомими варіюваними змінними стану (рис. 16.1) у новій канонічній варіаційній проблемі, що з'явилася після канонічного перетворення.

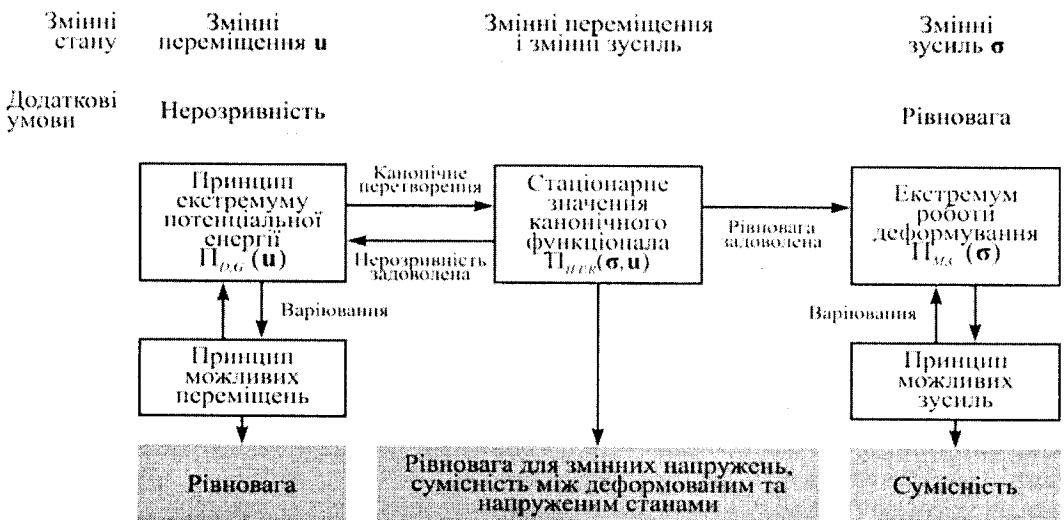


Рис. 16.1

Працюючи незалежно від Хеллінгера і Пранге, Ерік Рейснер (1913–1996) опублікував в 1950 р. свою відому роботу на шести сторінках *Про варіаційну теорему пружності*. У цій статті він розробляє – хоча і не торкаючись теорії Гамільтона-Якобі – варіаційну теорему, яка подібна до теореми Хеллінгера і Пранге. М.Е.Гуртін назвав цю варіаційну теорему ім'ям Хеллінгера, Пранге і Рейснера і позначив її символом $\Pi_{H,P,R}$. У просторовому випадку $\Pi_{H,P,R}$ – це функціонал трьох компонент вектора переміщень u і шести компонент тензора напружень σ .

Згадуючи ті часи, Рейснер писав: "Використовуючи варіаційну теорему для напружень і варіаційну теорему для переміщень, я весь час запитував себе, чи дійсно ми змушені обирати або те, або інше. Першим наслідком цих роздумів було узагальнення варіаційної теореми для напружень, спрямоване на те, щоб зробити цю теорему застосовною до лінійних проблем простого гармонійного руху. Можливість такого узагальнення залежала від одночасного введення варіацій напружень і переміщень, які повинні були бути незалежними, щоб зберегти умови динамічних обмежень. З прийняттям концепції незалежності варіацій напружень і варіацій переміщень, природно виникла думка про можливість формулювання варіаційної теореми з незалежними варіаціями напружень і переміщень". В 1953 р. Рейснер узагальнив свою варіаційну теорему на пружні континууми з великими переміщеннями.

Механіка деформівного твердого тіла описує поведінку пружних континуумів за допомогою

- тензора напружень σ ,
- вектора переміщень u ,
- тензора деформацій ϵ .

З цих трьох змінних стану тензор напружень σ і вектор переміщень u фігурують в таких варіаційних теоремах:

- Менабреа і Кастільяно $\Pi_{MC}(\sigma)$,
- Лагранжа, Діріхле і Гріна $\Pi_{D,G}(u)$,
- Хеллінгера, Пранге і Рейснера $\Pi_{H,P,R}(\sigma, u)$.

Таким був рівень знань щодо варіаційних теорем в 1950 році. У трьох вчених досить швидко виникло питання, чи можна сформулювати загальну варіаційну теорему, в функціоналі якого стан деформацій фігурував би нарівні зі станами переміщень і напружень. Відповідь була знайдена В.М.Фрайжем де Вебеке (Fraeijs de Veubeke, Бельгія), Х.Ху (Hu, Китай) і К.Васідзу (Washizu, Японія), які працювали незалежно один від одного. Рейснер згадує, як Васідзу відвідав його під час свого періоду досліджень в Массачусетському технологічному інституті між 1953 і 1955 роками і пояснив свою варіаційну теорему: "... мій друг Васідзу ... прибув одного разу в мій офіс, щоб сказати, що у нього є варіаційна теорема з незалежними варіаціями не тільки напружень і переміщень, а також і деформацій, з яких у якості рівнянь Ейлера отримуються не тільки умови рівноваги і співвідношення напруження-деформації, але також і співвідношення переміщення-напруження. Я спочатку заперечив, що оскільки тільки напруження і переміщення

16. ПІДСУМКИ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

зустрічаються в граничних умовах задачі, то природно розглядати співвідношення деформації-напруження як попередні, і ніяк інакше. Я був, проте, незабаром переконаний, що теорема "трьох полів", яку запропонували Васідзу і незалежно від нього Ху, була значним кроком вперед, який я сам, на жаль, не зробив". Тому цю загальну варіаційну теорему називають в літературі на честь Ху і Васідзу; вона буде позначатися тут перш за все $\Pi_{H, W}(\sigma, u, \epsilon)$.

Бодуен М. Фрайж де Вебеке ще в 1951 році розробив варіаційну теорему з чотирма варіюваними полями або змінними станами. Він назвав цю теорему "загальним варіаційним принципом". У його теоремі не тільки напруження переміщення і деформації варіюються незалежно одне від іншого, але також і поверхневі навантаження t (t_i в індексній нотації). На честь Фрайжа де Вебеке, Васідзу і Ху цей функціонал тут позначається як $\Pi_{F, H, W}(\sigma, u, \epsilon, t)$; $t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ ($n_j =$ вектор нормалі до поверхні, $\sigma_{ij} =$ тензор напружень).

На рис. 16.2,а показаний процес варіювання за загальною варіаційною теоремою Фрайжа де Вебеке, на рис. 16.2,б - процес варіювання по варіаційній теоремі Хеллінгера, Пранге і Рейснера, а на рис. 16.2,в ще одна варіаційна теорема, представлена Фрайжем де Вебеке, в якій варіюються напруження σ і деформації ϵ .

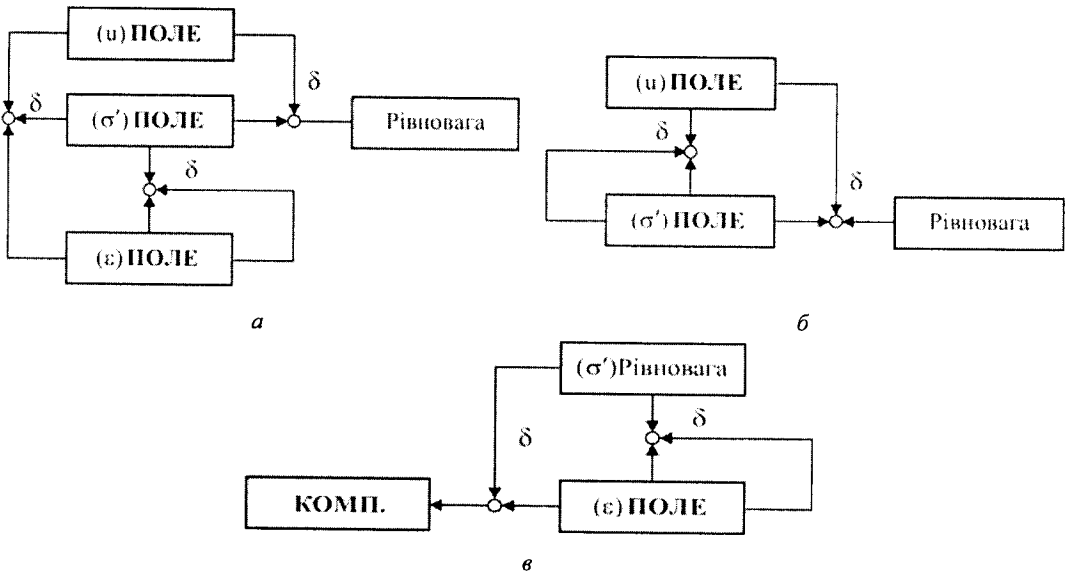


Рис. 16.2

Конспект лекції Клауса Кнотхе по методу скінченних елементів в проектних розрахунках, яку він читав у Аерокосмічному Відділі Берлінського Технічного Університету, містить систематичне і дуже привабливе викладення семи варіаційних теорем. Цей конспект також містить діаграму, в якій блискуче

ілюстровано співвідношення між сімома варіаційними теоремами - за винятком $\Pi_{F,H,W}(\sigma, u, \epsilon, t)$ (рис. 16.3).

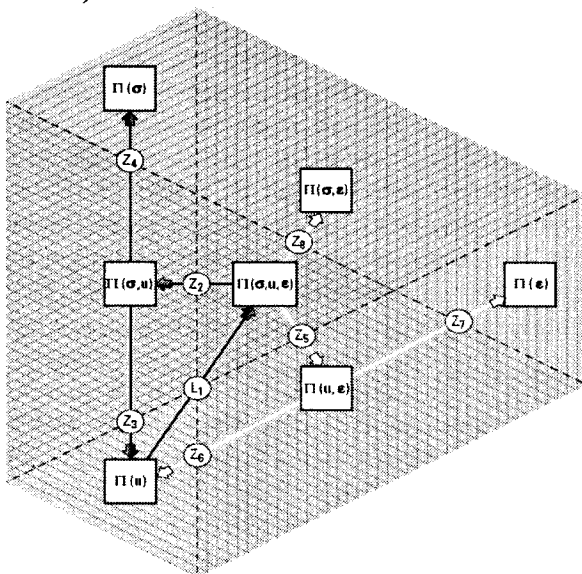


Рис. 16.3

На цій діаграмі

- Вертикальне штрихування відповідає варіації змінної поля або стану ϵ (деформації): $\Pi(\epsilon)$;
- Діагональне штрихування зверху зліва вниз направо представляє змінну поля або стану u (переміщення), тобто варіаційну теорему Лагранжа, Діріхле і Гріна: $\Pi_{D,G}(u) \equiv \Pi(u)$;
- Діагональне штрихування знизу зліва вгору направо представляє змінну поля або стану σ (напруження), тобто варіаційну теорему Менабреа і Кастільяно: $\Pi_{M,C}(\sigma) \equiv \Pi(\sigma)$;
- Гібридні варіаційні теореми лежать в областях перетину штрихувань: варіаційна теорема Хеллінгера, Пранге і Рейснера $\Pi_{H,P,R}(\sigma, u) \equiv \Pi(\sigma, u)$ – там, де перетинаються діагональні штрихування, теорема Фрайжа де Вебеке, Васідзу та Ху $\Pi_{F,H,W}(\sigma, u, \epsilon) \equiv \Pi(\sigma, u, \epsilon)$ – там, де перетинаються всі типи штрихування, додаткова варіаційна теорема Фрайжа де Вебеке $\Pi_F(\sigma, \epsilon) \equiv \Pi(\sigma, \epsilon)$ – там, де перетинаються лінії, що йдуть знизу зліва вгору.

16.2. Основні варіаційні принципи і функціонали

16.2.1. Розтяг-стиснення

Загальне варіаційне рівняння:

$$\int_a^b \left(N - \frac{du_0(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \delta\epsilon dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_a^b \left(\epsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Загальний варіаційний принцип:

$$\delta\Pi^{\text{заг}}(N, \varepsilon, u) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Принцип Лагранжа

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(u) = 0.$$

Принцип Кастільяно

$$\delta\Pi^{\text{К}}(N) = 0.$$

Варіаційні рівняння

$$-\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

$$-\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Функціонали

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

Додаткові умови

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad N = EF\varepsilon.$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b, \quad N_K \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad N = EF\varepsilon.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги.

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій.

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \in a, b, \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \in a, b, \quad u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння Рейснера

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

I форма функціонала Рейснера

II форма функціонала Рейснера

$$\Pi_1^{\text{P}}(u, N) = \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\Pi_2^{\text{P}}(u, N) = -\int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta\Pi_1^{\text{P}}(u, N) = 0.$$

$$\delta\Pi_2^{\text{P}}(u, N) = 0.$$

Додаткова умова $N = EF\varepsilon$.

Додаткова умова $N = EF\varepsilon$.

Із загального варіаційного рівняння можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\Pi_1^{\text{XB}}(N, \varepsilon, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\Pi_2^{\text{XB}}(N, \varepsilon, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b N \varepsilon dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta \Pi_1^{XB}(N, \varepsilon, u) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

$$\delta \Pi_2^{XB}(N, \varepsilon, u) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

16.2.2. Плоский згин

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(M - \frac{du_0(\kappa)}{d\kappa} \right) \delta \kappa dx + \int_a^b \left(\kappa - \frac{du_0^{\text{доп}}(\kappa)}{dM} \right) \delta \kappa dx + \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta M dx +$$

$$+ (-M' + \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (-w + \bar{w}) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Загальний варіаційний принцип:

$$\delta \Pi^{\text{зар}}(M, \kappa, w) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Принцип Лагранжа

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(w) = 0.$$

Принцип Кастільяно

$$\delta \Pi^{\text{К}}(M) = 0.$$

Варіаційні рівняння

$$-\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} -$$

$$-(M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

$$\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} +$$

$$+(w - \bar{w}) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Функціонали

$$\Pi^{\text{Л}}(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI (w'')^2 dx - \int_a^b q w dx -$$

$$-\bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\Pi^{\text{К}}(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Додаткові умови

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \in a, b; \quad w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \in a, b; \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \in a, b.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій.

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \in a, b.$$

Природні граничні умови

$$M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Природні граничні умови

$$w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння Рейснера

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + (-M' + \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+(-w + \bar{w})\delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}')\delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

I форма функціонала Рейснера

$$\begin{aligned} \Pi_1^P(w, M) = & -\int_a^b M \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \\ & - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & - (w - \bar{w}) M \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2}, \\ \delta \Pi_1^P(w, M) = & 0. \end{aligned}$$

Додаткова умова $M = EI\kappa$.

Із загального варіаційного рівняння можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} \Pi_1^{XB}(w, M, \kappa) = & \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \\ & - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2}, \\ \delta \Pi_1^{XB}(w, M, \kappa) = & 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

II форма функціонала Рейснера

$$\begin{aligned} \Pi_2^P(w, M) = & -\int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \\ & - (M - \bar{M}) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}, \\ \delta \Pi_2^P(w, M) = & 0. \end{aligned}$$

Додаткова умова $M = EI\kappa$.

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} \Pi_2^{XB}(w, M, \kappa) = & \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx - \int_a^b M \kappa dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (\bar{M} - M) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1}, \\ \delta \Pi_2^{XB}(w, M, \kappa) = & 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

16.2.3. Сумісна дія розтягу-стиснення і згину

Загальне варіаційне рівняння:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(M - \frac{\partial u_0^{3r}(\kappa)}{\partial \kappa} \right) \delta \kappa dx + \int_a^b \left(N - \frac{\partial u_0^{p-c}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - \\ - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (-M + \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \\ - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) \delta N' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Загальний варіаційний принцип:

$$\delta \Pi^{3ar}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Із загального варіаційного рівняння (16.5) можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} & \Pi_1^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = \\ & = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) N dx - \\ & - \int_a^b \left(\kappa - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) M dx - \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \\ & - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - (w - \bar{w}) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (w' - \bar{w}') \bar{M} \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} & \Pi_2^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = \\ & = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx - \int_a^b N \varepsilon dx - \\ & - \int_a^b M \kappa dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx + \\ & + (\bar{M} - M) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned}$$

Додаткові умови відсутні.

Варіаційні принципи

$$\Pi_1^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

$$\Pi_2^{XB}(M, \kappa, w, N, \varepsilon, u) = 0.$$

Варіаційне рівняння Рейснера

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - \\ & - (\bar{M}' - M') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \\ & - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови $M = EI\kappa$; $N = EF\varepsilon$.

Із варіаційного рівняння Рейснера можуть бути отримані I і II форми функціонала Рейснера, а також відповідні варіаційні рівняння.

$$\begin{aligned} \Pi_1^P(w, M, u, N) & = - \int_a^b M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \\ & + \int_a^b N \frac{du}{dx} dx - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \\ & - \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (\bar{w} - w) M' \Big|_{a_2}^{b_2} + (w' - \bar{w}') M \Big|_{a_2}^{b_2} - \\ & - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} - (u - \bar{u}) N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$M = EI\kappa; N = EF\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^P(w, M, u, N) & = - \int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \\ & - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) u dx - \\ & - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) w dx + (\bar{M} - M) w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + (M' - \bar{M}') w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \\ & + (N - \bar{N}) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$M = EI\kappa; N = EF\varepsilon.$$

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$-\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx - \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx +$$

$$+ (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

$$\Pi^{\text{Л}}(w, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EI \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \varepsilon^2 dx -$$

$$-\int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1}$$

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$-\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx + \int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx +$$

$$+ (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}') \delta M \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+ (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

$$\Pi^{\text{К}}(M, N) = -\int_a^b \frac{M^2}{2EI} dx - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx +$$

$$+ \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}$$

Принципи

Принцип Лагранжа

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(w, u) = 0$$

Додаткові умови

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \in a, b.$$

Граничні умови

$$u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_x \\ -q \end{Bmatrix} \in a, b$$

Природні граничні умови

$$N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1},$$

які разом із додатковими умовами

$$M = EI \kappa; \quad N = EF \varepsilon \in a, b$$

дають систему рівнянь крайової задачі механіки стержнів.

Принцип Кастільяно

$$\delta \Pi^{\text{К}}(M, N) = 0$$

Додаткові умови

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_x \\ -q \end{Bmatrix} \in a, b,$$

Граничні умови

$$N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \in a, b$$

Природні граничні умови

$$u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}, \quad w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2},$$

які разом із додатковими умовами

$$M = EI \kappa, \quad N = EF \varepsilon \in a, b,$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \in a, b$$

$$M, M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}$$

дають систему рівнянь крайової задачі механіки стержнів.

16.2.4. Просторова задача теорії пружності

Загальне варіаційне рівняння запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \iiint_V \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \mathbf{u}_0^{\text{доп}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \\ & + \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \delta \mathbf{P} dS = 0. \end{aligned}$$

Загальний варіаційний принцип:

$$\delta \Pi^{\text{заг}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Рівняння Ейлера дають рівняння крайової задачі теорії пружності:

У переміщеннях

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \\ \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \in V, \\ \mathbf{A}_S \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{u} &= \mathbf{P}_S \in S_1, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_S \in S_2. \end{aligned}$$

Принцип Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \delta \Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u}) &= 0. \end{aligned}$$

У переміщеннях і напруженнях

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \in V, \\ \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}_S \in S_1, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_S \in S_2,$$

Принцип Кастільяно

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^{\text{доп}} &= \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \\ \delta \Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0. \end{aligned}$$

Принципи

Варіаційні рівняння

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS &= 0. \\ - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \delta \mathbf{P} dS &= 0. \end{aligned}$$

Функціонали

$$\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS.$$

Додаткові умови

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_S \in S_2. \end{aligned}$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S,$$

які разом із додатковими умовами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, S, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \in V \end{aligned}$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

$$\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{P} dS.$$

Додаткові умови

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \\ \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}_S \in S_1. \end{aligned}$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S,$$

які разом із додатковими умовами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} &= \mathbf{0} \in V, \quad \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \in V \end{aligned}$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

Із загального варіаційного рівняння можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} \Pi_1^{XB}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \\ &+ \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \\ &- \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS. \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Варіаційне рівняння Рейснера

$$- \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \delta \mathbf{P} dS = 0.$$

Попередня умова

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial u_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Рівняння Ейлера дають разом із попередньою умовою повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

Із варіаційного рівняння Рейснера можуть бути отримані I і II форми функціонала Рейснера, а також відповідні варіаційні рівняння.

$$u_0 = 2U - u_0^{\text{доп}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= \iiint_V \left[\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right] dV - \\ &- \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS - \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS. \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_1^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$.

Функціонал граничних умов

Загальне варіаційне рівняння може бути представлено у вигляді:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dx \right) - \delta \left(\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV \right) - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \delta \mathbf{P} dS = 0.$$

Функціонал граничних умов (I форма).

$$\Pi_1^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS.$$

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\begin{aligned} \Pi_2^{XB}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \\ &- \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) dV + \\ &+ \iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

$$u_0^{\text{доп}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma},$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= -\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) dV + \\ &+ \iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_2^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$.

Додаткові умови:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V.$$

Варіаційне рівняння:

$$-\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \delta \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta \mathbf{u} dS = 0.$$

Функціонал

$$\Pi_2^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS, \delta \Pi_2^\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V.$$

Функціонал фізичних співвідношень

Із загального варіаційного рівняння

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}})^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta \mathbf{u} dV + \\ & + \iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \delta \mathbf{u} dS + \iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta \boldsymbol{\sigma} dS = 0. \end{aligned}$$

Із урахуванням залежності

$$-\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \delta \mathbf{P} dS$$

отримаємо функціонал фізичних співвідношень

$$\Pi^\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} dS.$$

Додаткові співвідношення:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V, \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1, \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$$

Варіаційне рівняння:

$$\delta \Pi^\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0.$$

16.2.5. Пластини

Принцип Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1(w_0) = & \int_{\Omega} (\mathbf{B} \delta w_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{B} w_0) d\omega - \int_{\Omega} p \delta w_0 d\omega - \\ & - \int_{L_1} M_n^0 \delta \theta_n dl - \int_{L_1} \left(Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t} \right) \delta w_0 dl = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$w_0 = w_0^0; \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0^0}{\partial n} \in S_2,$$

Принцип Кастільяно

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2 = & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} d\omega + \int_{L_2} \delta M_n \theta_n^0 dl + \\ & + \int_{L_2} \left[\delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{nt}}{\partial t} \right] w_0^0 dl = 0. \end{aligned}$$

Додаткові умови

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{M} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ (рівняння рівноваги)} \in V,$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T w_0 \in V.$$

Рівняння Ейлера

$$-D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + p = 0$$

(рівняння рівноваги).

Природні граничні умови на S_1

$$M_n(w) = M_n^0; \quad Q_n(w) + \frac{\partial M_{nt}(w)}{\partial t} = Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t}.$$

16.2.6. Оболонки

Загальне варіаційне рівняння

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q}] d\omega + \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{K} \mathbf{u}] d\omega + \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{m} - \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}] d\omega + \\ + \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T [\bar{\mathbf{m}}_s - \mathbf{H} \mathbf{m}] dl + \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T [\mathbf{F} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0.$$

Принцип Лагранжа

$$\delta \Pi_1 = \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{m}] d\omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{q} d\omega - \\ - \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{m}}_s dl = - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T [\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q}] d\omega + \\ + \int_{L_1} (\mathbf{F} \delta \mathbf{u})^T [\mathbf{H} \mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}_s] dl = 0.$$

Додаткові умови

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{K} \mathbf{u} \in \Omega; \quad \mathbf{F} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \in L_2.$$

Рівняння Ейлера

$$\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q} = 0 \in \Omega.$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = Q_n^0 + \frac{\partial M_{nt}^0}{\partial t}, \quad M_n = M_n^0 \in S_1.$$

Рівняння Ейлера

$$\mathbf{k} - \mathbf{B}^T w_0 = 0$$

(забезпечують сумісність деформацій).

Природні граничні умови на S_2

$$w_0 = w_0^0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0^0}{\partial n}.$$

Принцип Кастільяно

$$\delta \Pi_2 = - \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{m}) d\omega + \\ + \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T \bar{\mathbf{u}} dl = - \int_{\Omega} (\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{m})^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{K} \mathbf{u}] d\omega - \\ - \int_{L_2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{m})^T [\mathbf{F} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}] dl = 0.$$

Додаткові умови

$$\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{q} = 0 \in \Omega; \quad \mathbf{H} \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_s \in L_1.$$

Рівняння Ейлера

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{K} \mathbf{u} \in \Omega.$$

16.3. Висновки

Із повного функціонала як вільної варіаційної задачі можна отримати різні частинні функціонали, як невідільні варіаційні задачі з додатковими умовами. За додаткові умови приймають будь-які вирази із рівнянь Ейлера і природних граничних умов, які реалізують стаціонарне значення повного функціонала (вільна варіаційна задача). Виконуючи додаткові умови попередньо, тобто до варіювання, і виключаючи з їхньою допомогою частину функціональних аргументів із першого функціонала, отримуємо відповідний частинний функціонал.

Частинні варіаційні принципи стверджують, що з цих можливих полів напруженого і деформованого стану пружного тіла, які задовольняють додатковим умовам, дійсно мають місце лише ті, які надають відповідному частинному функціоналу стаціонарного значення.

Для варіаційного рівняння з деякими додатковими умовами, рівняннями Ейлера є ті рівняння і природні граничні умови, які разом із додатковими умовами складають повну схему рівнянь і граничних умов, тобто рівнянь Ейлера і граничних умов для повного варіаційного рівняння.

Як приклад можна навести частинні варіаційні принципи Лагранжа, Кастільяно, Рейснера, граничних умов та інші.

Принцип Лагранжа отримується, якщо за додаткові умови приймається фізичні і геометричні рівняння, а також геометричні граничні умови. Тобто можливими функціями переміщень є лише ті, які задовольняють цим додатковим умовам. А із цих можливих переміщень дійсними будуть ті, які надають функціоналу Лагранжа стаціонарного значення. При цьому рівняннями Ейлера є статичні рівняння, також знаходяться і природні (статичні) граничні умови.

Принцип Кастільяно отримується, якщо за додаткові умови прийняті фізичні і статичні рівняння, а також статичні граничні умови. Тобто можливими функціями є лише ті, які задовольняють цим додатковим умовам. А із можливих функцій напружень (зусиль) дійсними будуть ті, які надають функціоналу Кастільяно стаціонарного значення, при цьому рівняннями Ейлера є геометричні рівняння і природні (геометричні) граничні умови. Принцип Рейснера отримується, якщо за додаткові умови прийняті фізичні рівняння. Якщо за додаткові умови прийняті усі статичні, геометричні і фізичні рівняння, то отримаємо функціонал граничних умов. Із цього функціонала як умови стаціонарності витікають усі граничні умови.

Для пружних тіл, скріплених в окремих точках, лініях, площинах, тобто для багато-контактних систем, також є можливою побудова повного і частинного функціоналів.

При цьому становить інтерес функціонал граничних умов для багатоконтактної задачі. Можна показати, що класичні методи будівельної механіки (методи сил, переміщень, змішаний), система функціоналів для будівельної механіки і різні варіанти методу скінченних елементів виходять із функціонала граничних умов багатоконтактної задачі. Дійсно, розіб'ємо систему (континуальну або стержневу) на елементи, поєднання яких будемо виконувати в окремих точках. Приймаємо за додаткові умови виконання статичних, геометричних і фізичних рівнянь всередині області кожного елемента. Якщо задача є лінійною, то для цього можна побудувати матриці жорсткості або піддатливості скінченних елементів. Розв'язок задачі отримується за допомогою функціонала граничних умов, із якого витікають як природні граничні умови алгебраїчні рівняння класичної будівельної механіки. Якщо форма, розміри спільних елементів і зв'язки між ними прийняті такими, які мають місце в класичних підходах будівельної механіки, то ці підходи не будуть відрізнятися.

16. ПІДСУМКИ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

У будівельній механіці вирази для потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії є додатно визначеними квадратичними формами. Вони є двоїстими за Юнгом і пов'язані між собою перетворенням Лежандра, а їх відповідні значення співпадають [21]. Перетворення Лежандра є частинним випадком нерівності Юнга і у даному випадку за фізичним змістом являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил і відповідає теоремі Клапейрона. Постановки прямих і двоїстих у розумінні Лежандра, Юнга-Фенхеля, Лагранжа варіаційних задач реалізуються у вигляді основних варіаційних принципів – Лагранжа і Кастильяно, теорем Лагранжа і Кастильяно і приводять до систем алгебраїчних рівнянь, матриці яких (матриці Гессе^{1,2}) є другими похідними відповідно від потенціальної енергії пружної деформації (матриця жорсткості) і доповнювальної потенціальної енергії (матриця податливості). Зазначені матриці є позитивно визначеними і задовольняють критеріям Сильвестра³, усі їхні мінори додатно визначені [28]. До того ж матриці взаємно обернені. Ці міркування розповсюджуються й на функціонали.

¹ Гессе, Людвіг Отто (нім. Ludwig Otto Hesse, 1811–1874) – німецький математик, учень К.Г.Я.Якобі. Ввів поняття гессіану (1844) – функціонального визначника, елементи якого – другі частинні похідні двократно диференційованої функції n змінних.

² Якобі, Карл Густав Якоб (нім. Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) – німецький математик. Основні дослідження відносяться до теорії функцій, теорії чисел, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь і механіки. Розвинув ідеї теорії квадратичних форм (1829). Отримав канонічні рівняння механіки (1842). Дж.Дж.Сильвестр назвав яacobіаном функціональний визначник на честь праць Якобі з алгебри і теорії виключення.

³ Сильвестер, Джеймс Джозеф (англ. James Joseph Sylvester, 1814–1897) – відомий англійський математик. Основні роботи відносяться до алгебри, теорії інваріантів, теорії матриць, математичної фізики, теоретичної і прикладної кінематики. Розвинув теорію канонічних форм.

Частина ІІІ

Прямі методи розв'язання варіаційних задач

17. Основні підходи прямих методів

Як було зазначено, задача статички деформівних систем може бути сформульована як крайова задача для диференціальних рівнянь або як варіаційна задача. З погляду будівельної механіки обидва формулювання є еквівалентними. Проте при визначенні наближених розв'язків означених задач такої еквівалентності вже не існує. Обрання того або іншого формулювання призводить, як правило, до різних процедур. В останні роки при побудові наближених методів розв'язку задач будівельної механіки перевага надається варіаційним постановкам. Це зумовлено тим, що порядок похідних функцій, які фігурують у варіаційних принципах, нижче порядків похідних у відповідних диференціальних рівняннях. Тому у варіаційних підходах вимоги до гладкості апроксимуючих функцій можуть бути послаблені. Далі розглядатимуться деякі наближені методи, які базуються на означених варіаційних підходах. Усі методи ґрунтуються на єдиному принципі: розшукується деяка функція, яка надає функціоналу стаціонарного значення.

Побудову наближених методів розв'язку крайових задач будівельної механіки найприродніше виконувати за допомогою прямих методів. Сутність цих методів полягає в тому, що варіаційна задача пошуку екстремуму функціонала розглядається як гранична для задачі на екстремум функції скінченної кількості змінних. З цією метою функція, яка мінімізує функціонал, замінюється наближеним аналітичним виразом, який найкращим чином апроксимує цю функцію. Найзручнішою формою такої заміни є подання функції у вигляді ряду

$$w(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_i\varphi_i(x) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(x), \quad (17.1)$$

де $\varphi_i(x)$ – так звані базисні функції, які задаються заздалегідь, a_i – невизначені коефіцієнти, які варіюються в такий спосіб, щоб функція $w(x)$, яка задається представленням (17.1), надавала функціоналу стаціонарного значення.

За будь-якої обчислювальної схеми сімейство базисних функцій має відповідати певним умовам: функції $\varphi_i(x)$ мусять бути лінійно незалежними і мати неперервну першу похідну. Під лінійно залежними слід розуміти функції $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, для яких можна знайти такі константи C_0, C_1, \dots, C_n , які всі водночас не дорівнюють нулю, щоб виконувалась рівність

$$C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n = 0.$$

Означені функції вважають лінійно незалежним, якщо ця рівність можлива лише за умови

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = 0.$$

Успіх обчислювальної процедури, що базується на прямих методах, істотно залежить від вдалого вибору базисного сімейства.

Далі розглядатимуться два типи наближених методів. До першого відносяться методи Рітца, Гальоркіна, узагальнений метод Гальоркіна, де до вимоги лінійної незалежності базисних функції $\varphi_i(x)$ додається вимога, щоб вони задовольняли певним граничним умовам. До другого типу належить метод Треффца. Тут необхідно, щоб базисні функції задовольняли рівнянню Ейлера відповідної варіаційної задачі^{1,2,3}.

17.1. Методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Треффца

Уперше варіаційний підхід для побудови наближеного розв'язку за допомогою прямого методу був запропонований В.Рітцем у 1908 р. Викладемо метод Рітца на прикладі варіаційного принципу Лагранжа: серед кінематично можливих переміщень дійсне переміщення надає повній потенціальній енергії стаціонарного значення. Як було визначено, це стаціонарне значення є мінімумом функціонала. Кінематично можливі переміщення мусять мати неперервну першу похідну і задовольняти кінематичним граничним умовам. Отже, вибираємо систему базисних функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$, де $\varphi_0(x)$ задовольняє неоднорідним, а $\varphi_i(x)$ – однорідним кінематичним умовам, і виконуємо наступну послідовність операцій:

¹ Історично перше застосування варіаційних методів у механіці пов'язане з ім'ям англійського фізика Джона Вільяма Релея (англ. John Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842–1919) [176]. Подальший розвиток метода Релея належить австрійському фізику Вальтеру Рітцу (нім. Walter Ritz, 1878–1909) [236, 237]. Метод Рітца відразу набув широкого розвитку. В 1910 р. вийшла відома робота С.П. Тимошенка (1878–1972) «Об устойчивости упругих систем», в якій спосіб Рітца був застосований для задач стійкості стержнів і пластинок. Релей, Рітц, Тимошенко користуються екстремальними властивостями потенціальної енергії і диференціальних рівнянь не застосовують. У 1915 р. вийшла стаття Б.Г.Гальоркіна (1871–1945), присвячена проблемі наближеного розв'язку диференціальних рівнянь. Б.Г.Гальоркін застосовує запропонований метод до задач рівноваги і стійкості, але вказує і на можливість його використання для задач коливаль. Проте стаття Б.Г.Гальоркіна залишалась непоміченою майже десять років. У 1924 р. метод Гальоркіна був згаданий Корнелісом Бенджаміном Біцено (С.В.Віезено) на міжнародному конгресі з прикладної механіки у Делфті, а у 1926 р. він був викладений у статті Г.В.Пфейфера (1872–1946). Проте ще в 1913 р. І.Г.Бубнов (1872–1919) у своєму відгуку на статтю С.П. Тимошенка «Об устойчивости упругих систем» по суті виклав метод, запропонований Б.Г.Гальоркіном. Але ця вказівка І.Г.Бубнова залишилась непоміченою. Смерть І.Г.Бубнова в Петрограді в березні 1919 р. передчасно перервала його математичні і прикладні дослідження. Роботи і результати наукової діяльності корабельного інженера професора Івана Бубнова (саме так він підписав свій відзив на статтю С.П.Тимошенка в 1911 р. [66]) мали велике значення. В 1926 р. новий метод наближеного розв'язку екстремальної задачі виклав Треффц. Цей спосіб був застосований в 1933 р. Л.С. Лейбензоном (1879–1951).

² Тимошенко Степан Прокопович (1878–1972) – видатний український учений в галузі механіки твердого деформівного тіла, будівельної механіки, опору матеріалів і теорії споруд. Один з фундаторів застосування варіаційних методів розв'язання задач стійкості. Написав ряд фундаментальних підручників і монографій, перекладених на багато мов світу. Після еміграції у 1922 р. до США заснував там наукову школу у галузі механіки пружного тіла. Помер у 1972 р. у м. Вуперталь, ФРН.

³ Треффц, Еріх (нім., Trefftz ErichImmanuel, 1888–1937) – знаний німецький математик і механік. Відомий своїми дослідженнями в галузях гідродинаміки, прикладної математики, теорії пружності і теорії коливаль.

$$1) \Pi(w) = \int_a^b F(x, w, w', w'') dx \rightarrow \min \quad \delta\Pi = 0; \quad (17.2)$$

$$2) w(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (17.3)$$

де $\varphi_i(x)$ відомі так звані базисні функції, які задовольняють певним умовам, наприклад граничним; a_i – невідомі $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$;

$$3) \Pi(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = \int_a^b F(x, \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i'(x), \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(x)) dx; \quad (17.4)$$

$$4) \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (17.5)$$

5) Із системи алгебраїчних рівнянь знаходимо n невідомих $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

Таким чином, сутність прямих методів варіаційного числення полягає у тому, що за допомогою розкладу (17.3) задача про екстремум функціонала (17.2) зводиться до задачі, про екстремум функції багатьох змінних (17.4), яка розв'язується традиційним методом (17.5) і призводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, а потім здійснюється граничний перехід до вихідної задачі.

Отже, для точного розв'язку (17.1) маємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь. При виконанні практичних розрахунків нескінченний ряд (17.1) замінюють сумою скінченної кількості членів (17.3). Тоді система рівнянь має скінченний порядок, але її розв'язок стає наближеним.

Основні підходи прямих методів

Розгорнуте варіаційне рівняння $\delta\Pi = 0$ для функціонала $\Pi(w) = \int_a^b F(x, w, w', w'') dx$, який залежить від другої похідної, має наступний вигляд (див. п.1.6):

$$\overbrace{\left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} \right) \delta w \Big|_a^b + F_{w''} \delta w' \Big|_a^b}^{\delta\Pi_1} + \overbrace{\int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \delta w dx}^{\delta\Pi_2} = 0, \quad (17.6)$$

$$\delta\Pi = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 = 0,$$

де $\delta\Pi_1$ містить у собі природні граничні умови, а $\delta\Pi_2$ являє собою диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона, якому підпорядкована функція w на інтервалі $[a, b]$ (див. рис. 17.1).

Причому:

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) & w'_n &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi'_i(x) \\ \delta w_n &= \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi_i(x) & \delta w'_n &= \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi'_i(x). \end{aligned}$$

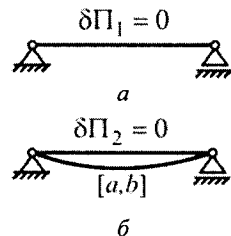


Рис. 17.1

Тоді, в залежності від вибору системи базисних функцій, можливими є наступні ситуації:

I Функції $\varphi_i(x)$ обрані так, що не усі граничні умови задовольняються, тобто $\delta\Pi_1 \neq 0$ і, відповідно, $\delta\Pi_2 \neq 0$, оскільки $\delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 = 0$.

Тоді застосовується звичайна процедура методу Рітца:

$$1.1. \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \rightarrow a_1 a_2 a_i \dots a_n.$$

При цьому можна скористатися розгорнутим виразом (17.6).

$$1.2. (F_w - \frac{d}{dx} F_w') \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi_i(x) + F_w'' \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi_i(x) + \int_a^b (F_w - \frac{d}{dx} F_w' + \frac{d^2}{dx^2} F_w'') \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi_i(x) dx = 0,$$

звідки завдяки довільності δa_i маємо

$$\left(F_w - \frac{d}{dx} F_w' \right) \varphi_i(x) \Big|_a^b + F_w'' \varphi_i(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_w' - \frac{d^2}{dx^2} F_w'' \right) \varphi_i(x) \Big|_a^b dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Таким чином, отримали вираз, який являє собою систему алгебраїчних рівнянь, після розв'язання яких знаходимо $a_1, a_2, a_i \dots a_n$. Не слід забувати, що невідомі містяться у розкладі функції w , наприклад

$$F_w'' = \frac{\partial F}{\partial w''} = EIw'' \qquad \Pi(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EIw''^2 dx - \int_a^b qwdx,$$

$$F_w' = 0 \qquad F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -q.$$

Такий підхід має назву узагальненого методу Бубнова-Гальоркіна.

II Функції $\varphi_i(x)$ обрані так, що усі граничні умови задовольняються, тоді: $\delta\Pi_1 = 0$, а рівність $\delta\Pi_2 = 0$ дає систему алгебраїчних рівнянь відносно a_i :

$$\int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_w' + \frac{d^2}{dx^2} F_w'' \right) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \qquad (17.7)$$

з якої знаходяться невідомі коефіцієнти $a_1 a_2 a_i \dots a_n$. Такий підхід має назву методу Бубнова-Гальоркіна.

Нагадаємо, що рівняння Ейлера-Пуассона при згині балки має вигляд

$$EIw'' - q(x) = 0.$$

III Метод Треффца.

Функції $\varphi_i(x)$ обрані так, що кожна з них тотожно задовольняє диференціальні рівняння Ейлера-Пуассона, тобто $\delta\Pi_2 = 0$.

$$F_w - \frac{d}{dx} F_w' + \frac{d^2}{dx^2} F_w'' = 0.$$

Тоді $\delta\Pi_1 = 0$ дає систему алгебраїчних рівнянь

$$(F_w - \frac{d}{dx} F_w') \varphi_i(x) \Big|_a^b + \frac{d^2}{dx^2} F_w'' \varphi_i(x) \Big|_a^b = 0, \quad i=1,2,3, \dots, n, \quad (17.8)$$

з якої знаходяться невідомі $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

Такий підхід має назву методу Треффца, який запропонував його у 1926 р., а у 1933 він був застосований Л.С. Лейбензоном.

Таким чином, найбільш загальними є методи Рітца і узагальнений метод Бубнова-Гальоркіна, які не потребують задоволення усім граничним умовам, що значно розширює можливості при виборі системи базисних функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Методи Бубнова-Гальоркіна і методи Треффца з цієї точки зору є частинними випадками, відповідно, при $\delta\Pi_1 = 0$ і $\delta\Pi_2 = 0$. Разом з тим слід мати на увазі, що метод Бубнова-Гальоркіна безпосередньо не пов'язаний із варіаційним численням і може розглядатись як метод розв'язування диференціальних рівнянь і відноситься до так званих проєкційних методів, або методів ортогоналізації.

17.2. Канонічні рівняння методу Рітца для функціонала Лагранжа.

Приклад

Функціонал Лагранжа або повна потенціальна енергія системи має вигляд

$$\Pi^J = U + A,$$

де $U = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx$ – робота внутрішніх сил,

$A = - \int_0^l q w dx - \sum_r P_r w(x_r) - \sum_s M_s w(x_s)$ – робота

зовнішніх сил (рис. 17.2).

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad w' = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i'(x), \quad w'' = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(x),$$

$$\frac{dw}{da_j} = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial w'}{\partial a_j} = \varphi_j'(x), \quad \frac{\partial w''}{\partial a_j} = \varphi_j''(x),$$

$$\Pi(a_j) = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 w dx - \int_0^l q w dx - \sum_r P_r w(x_r) - \sum_s M_s w(x_s).$$

Принцип Лагранжа $\delta\Pi^J = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \int_0^l EI \varphi_i''(x) \sum_j a_j \varphi_j''(x) dx - \int_0^l q \varphi_i(x) dx - \sum_r P_r \varphi_i(x_r) - \sum_s M_s \varphi_i'(x_s) = 0 \quad (17.9)$$

приводить до системи алгебраїчних рівнянь $[k_{ij}] \mathbf{a} = \mathbf{p}$ з коефіцієнтами

$$k_{ij} = \int_0^l EI \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx.$$

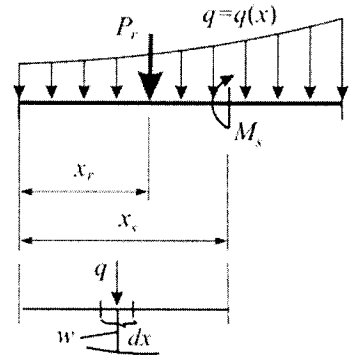


Рис. 17.2

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

Вектор навантажень $\mathbf{p}^T = \{p_1 p_2 \dots p_j \dots p_n\}$ ($j=1, 2, 3 \dots n$)

$$p_j = \int_0^l q \varphi_i(x) dx + \sum_r P_r \varphi_j(x_r) + \sum_s M_s \varphi_j'(x_s).$$

Вектор невідомих $\mathbf{a}^T = \{a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n\}$
 ($i=1, 2, 3 \dots n$).

Розглянемо випадок неоднорідних граничних умов. Нехай у попередній задачі граничні умови будуть неоднорідними (рис. 17.3):

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = 0;$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(l) = \theta_l.$$

Тоді можливе переміщення $y_n(x)$ розшукується у вигляді

$$y_n(x) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x).$$

Відповідно,

$$y_n'(x) = \varphi_0' + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i'(x), \quad y_n''(x) = \varphi_0'' + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(x).$$

У цьому випадку рівняння (17.5) набуває вигляду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \int_0^l EI \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i'' \varphi_k'' dx - \int_0^l q \varphi_k dx - \sum P \varphi_k(x_p) - \sum M \varphi_k'(x_m) = 0.$$

Отже, знову приходимо до системи рівнянь (17.9), але з іншою правою частиною:

$$p_k = - \int_0^l EI \varphi_0'' \varphi_k'' dx + \int_0^l q \varphi_k(x) dx + \sum P \varphi_k(x_p) + \sum M \varphi_k'(x_m).$$

Приклад 17.1. Визначити за методом Рітца прогини у консольній балці, навантаженій на вільному кінці зосередженою силою (рис. 17.4). У даному випадку кінематичні граничні умови однорідні, тому $\varphi_0(x) = 0$.

Шукатимемо функцію прогинів у вигляді ряду

$$y(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_n x^{n+1},$$

тобто

$$\varphi_i(x) = x^{i+1}.$$

Можна впевнитись що кожна з функцій $\varphi_i(x)$ задовольняє кінематичним граничним умовам:

при $x=0$ $\varphi_i(x) = 0$, $\varphi_i'(x) = (i+1)x^i = 0$, $i=2, 3, \dots, n$

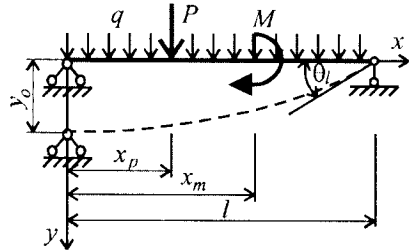


Рис. 17.3

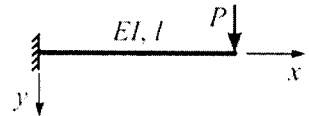


Рис. 17.4

і не задовольняє статичним. Так,

$$\text{при } x = l \quad \varphi_1''(x) = 2 \neq 0, \quad \varphi_2'''(x) = 6l \neq 0.$$

Отже, можна сказати, що вся апроксимуюча функція $y(x)$ задовольняє кінематичним і не задовольняє статичним граничним умовам.

Послідовно розглянемо випадки одного, двох і трьох членів ряду

$$w = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4.$$

	1	2	3
$\varphi_1(x)$	x^2	x^3	x^4
$\varphi_1'(x)$	$2x$	$3x^2$	$4x^3$
$\varphi_1''(x)$	2	$6x$	$12x^2$

Коефіцієнти матриці жорсткості

$$k_{11} = EI \int_0^l 2 \cdot 2 dx = 4EI, \quad k_{12} = EI \int_0^l 2 \cdot 6x dx = 6EI^2, \quad k_{13} = EI \int_0^l 2 \cdot 12x^2 dx = 8EI^3,$$

$$k_{22} = EI \int_0^l 6x \cdot 6x dx = 12EI^3, \quad k_{23} = EI \int_0^l 6x \cdot 12x^2 dx = 18EI^4,$$

$$k_{33} = EI \int_0^l 12x^2 \cdot 12x^2 dx = \frac{144EI^5}{5}.$$

Вектор навантажень

$$p_1 = Pl^2, \quad p_2 = Pl^3, \quad p_3 = Pl^4.$$

Система алгебраїчних рівнянь

$$\text{I} \quad 4EIa_1 + 6EI^2a_2 + 8EI^3a_3 = Pl^2$$

$$\text{II} \quad 6EIa_1 + 12EI^3a_2 + 18EI^4a_3 = Pl^3$$

$$\text{III} \quad 8EI^3a_1 + 18EI^4a_2 + \frac{144EI^5}{5}a_3 = Pl^4$$

Відповідно, I $4EIa_1 = Pl^2$, $a_1 = \frac{Pl}{4EI}$, $w_l = \frac{Pl}{4EI} x^2 \Big|_{x=l} = \frac{Pl^3}{4EI}$.

Нагадаємо, точний розв'язок дорівнює $w = \frac{Pl^3}{3EI}$.

$$\text{II} \quad \begin{cases} 4EIa_1 + 6EI^2a_2 = Pl^2, \\ 6EI^2a_1 + 12EI^3a_2 = Pl^3, \end{cases} \quad a_1 = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI}, \quad a_2 = -\frac{P}{6EI},$$

$$w_{\max} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \frac{Pl^3}{EI} = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}, \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

Розглянемо для цієї задачі випадок неоднорідних граничних умов. Наприклад, прогин на консолі $w = \Delta$.

Тоді

$$w = \frac{\Delta x^2}{l^2} + a_1 x^2 (x-l), \quad \varphi_1(x) = x^2(x-l), \quad \varphi_1'(x) = 3x^2 - 2xl, \quad \varphi_1''(x) = 6x - 2l.$$

$$k_{11} = 2EI \int_0^l (3x-l) dx = 2EI \left[\frac{3x^2}{2} - lx \right]_0^l = EI l^2,$$

$$\Delta_{1p} = -EI \int_0^l \frac{2\Delta}{l^2} (6x-2l) dx = -\frac{2EI\Delta}{l^2} 2 \int_0^l (3x-l) dx = -\frac{4EI\Delta}{l^2} \left[\frac{3l^2}{2} - l^2 \right] = -2EI\Delta.$$

$$k_{11} = EI \int_0^l (6x-2l)^2 dx = 4EI \int_0^l (3x-l)^2 dx = 4EI l^3.$$

$$\int_0^l (3x-l)^2 dx = \int_0^l (9x^2 - 6xl + l^2) dx = \frac{9l^3}{3} - \frac{6l^3}{2} + l^3 = l^3. \quad a_1 = -\frac{2EI\Delta}{4EI l^3} = -\frac{\Delta}{2l^3}.$$

$$w = \frac{\Delta x^2}{l^2} - \frac{\Delta}{2l^3} x^2 (x-l) = \frac{\Delta}{2l^2} x^2 \left(2 - \frac{x}{l} + 1 \right) = \frac{\Delta}{2l^2} x^2 \left(3 - \frac{x}{l} \right).$$

Приклад 17.2. Визначити за методом Рітца прогини у консольній балці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 17.5).

Прогини представляємо у вигляді ряду:

$$w = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4.$$

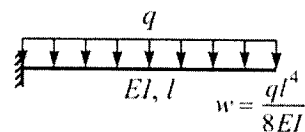


Рис. 17.5

Функції $\varphi_i(x)$ задовольняють кінематичним умовам на лівому кінці. Матриця коефіцієнтів (матриця жорсткості) залишається без змін порівняно з попереднім прикладом, а вантажні члени мають вигляд

$$P_1 = \int_0^l qx^2 dx = \frac{ql^3}{3EI}, \quad P_2 = \int_0^l qx^3 dx = \frac{ql^4}{4EI}, \quad P_3 = \int_0^l qx^4 dx = \frac{ql^5}{5EI}$$

Розв'язок системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} 4l & 6l^2 & 8l^3 \\ 6l^2 & 12l^3 & 18l^4 \\ 8l^3 & 18l^4 & \frac{144l^5}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ql^3/3EI \\ ql^4/4EI \\ ql^5/5EI \end{bmatrix}$$

дає:

$$a_1 = \frac{ql^2}{4EI}, \quad a_2 = -\frac{ql}{6EI}, \quad a_3 = \frac{q}{24EI}, \quad w_l = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) \frac{ql^4}{EI} = \frac{ql^4}{8EI},$$

що співпадає з точним розв'язком.

17.3. Канонічні рівняння методу Бубнова-Гальоркіна для функціонала Лагранжа. Приклад

Метод Гальоркіна. Метод був запропонований Б.Г.Гальоркіним у 1915 р. і увійшов до практики механіки як метод розв'язання диференціальних рівнянь, тобто спочатку цей метод не мав варіаційного формулювання.

Нехай задача зведена до розв'язання деякого диференціального рівняння

$$L(x, y, y', y'') - q = 0, \quad (17.10)$$

де $y = y(x)$ – невідома функція, граничні умови якої задані, $q = q(x)$ – відома функція, що характеризує зовнішнє навантаження.

Наближений розв'язок рівняння (17.10) розшукуємо у вигляді

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (17.11)$$

де базисна функція $\varphi_0(x)$ повинна задовольняти усім заданим граничним умовам, а базисні функції $\varphi_k(x)$ – однорідним граничним умовам, як кінематичним, так і статичним. Вважаючи ці функції за відомі, будемо розшукувати параметри a_i .

Оскільки базисні функції задовольняють усім граничним умовам, неінтегральні члени в (17.6) зникають і залишається умова

$$\int_a^b (L(x, y, y', y'') - q) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (17.12)$$

Якщо рівняння (17.10) є лінійним стосовно невідомої функції та її похідних, то рівність (17.12) становить систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_i . Означена система записана, виходячи з вимоги ортогональності нев'язки рівняння (17.10) після підстановки до нього системи базисних функцій (17.11). Якщо (17.10) є рівнянням Ейлера для деякої варіаційної задачі з однорідними граничними умовами, то система (17.12) може бути отримана з умови мінімуму функціонала. Зауважимо, що в механіці рівнянню (17.10) відповідають рівняння рівноваги. Тому умова (17.12) може трактуватись як математичний запис принципу можливих переміщень, в якому внутрішні зусилля виражені через переміщення, а ті, в свою чергу, виражаються за допомогою (17.11) через базисні функції. Отже, метод Гальоркіна в механіці виявляється безпосередньо пов'язаним із принципом можливих переміщень.

При однорідних граничних умовах замість (17.11) застосовується представлення

$$y(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x).$$

Система алгебраїчних рівнянь методу Бубнова-Гальоркіна для функціонала Лагранжа за умов $\delta\Pi^I = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2$; $\delta\Pi_1 = 0$, а $\delta\Pi_2 = 0$ має вигляд

$$\int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i=1,2,3, \dots, n,$$

невідомі: $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ($i=1,2,3, \dots, n$).

При цьому

$$\begin{aligned} \Pi^{\Pi}(w) &= \frac{1}{2} \int_a^b EI (w'')^2 dx - \int_a^b q w dx, \quad F = \frac{1}{2} EI (w'')^2 - q w, \\ F_w &= \frac{\partial F}{\partial w} = -q, \quad F_{w'} = \frac{\partial F}{\partial w'} = 0, \quad F_{w''} = EI w'', \quad \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} = EI w^{IV}, \\ &\int_a^b (EI w^{IV} - q) \varphi_j(x) dx = 0, \quad w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Система алгебраїчних рівнянь

$$[k_{ij}] \mathbf{a} = \mathbf{p}.$$

Коефіцієнти матриці жорсткості

$$k_{ij} = \int_a^b EI \varphi_i^{IV}(x) \varphi_j(x) dx.$$

Вектор навантажень

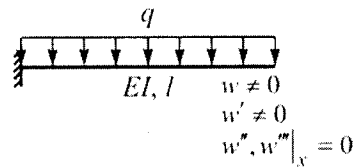
$$\mathbf{p}^T = \{p_1 p_2 \dots p_n\}, \quad p_j = \int_a^b q \varphi_j(x) dx.$$

Вектор невідомих

$$\mathbf{a}^T = \{a_1 a_2 \dots a_n\}, \quad i=1,2,3, \dots, n.$$

Приклад 17.3. Розглянемо за методом Бубнова-Гальоркіна попередній приклад.

Слід мати на увазі, що для застосування відповідної процедури і користування наведеними вище залежностями, необхідно обов'язково задовольнити усі граничні умови, тобто умови на правому кінці, а саме $w''|_{x=l} = 0$; $w'''|_{x=l} = 0$.



$$w = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4, \quad w' = 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3,$$

$$w'' = 2a_1 + 6a_2 x + 12a_3 x^2, \quad w''' = 6a_2 + 24a_3 x,$$

$$2a_1 + 6a_2 l + 12a_3 l^2 = 0, \quad 6a_2 + 24a_3 l = 0, \quad -6a_2 l - 24a_3 l^2 = 0, \quad 2a_1 - 12a_3 l^2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \frac{a_1}{l^2}, \quad a_2 = -4a_3 l = -\frac{4}{6} \frac{a_1}{l},$$

$$w = a_1 x^2 - \frac{4 a_1}{6 l} x^3 + \frac{1 a_1}{6 l^2} x^4 = a_1 \overbrace{\left(x^2 - \frac{4 x^3}{6 l} + \frac{1 x^4}{6 l^2} \right)}^{\varphi_1(x)} = a_1 \varphi_1(x),$$

$$k_{11} a_1 = P_1,$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - \frac{4 x^3}{6 l} + \frac{1 x^4}{6 l^2}, \quad \varphi_1'(x) = 2x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{2 x^3}{3 l^2}, \dots, \quad \varphi_1^{IV}(x) = \frac{4}{l^2},$$

$$a_1 = \frac{P_1}{k_{11}} = \frac{q l^2 \int_0^l \varphi_1(x) dx}{4 E I \int_0^l \varphi_1(x) dx} = \frac{q l^2}{4 E I}, \quad a_2 = -\frac{q l}{6 E I}, \quad a_3 = -\frac{q}{24 E I}.$$

17.4. Матриці систем алгебраїчних рівнянь методу Рітца і методу Бубнова-Гальоркіна

Слід зауважити, що коефіцієнти матриць жорсткості методів Рітца і Бубнова-Гальоркіна k_{ij} і k_{ji} мають вигляд:

$$\underline{k_{ij}^{\text{Гал.}}} = \int_0^l E I \varphi_i^{IV}(x) \varphi_j(x) dx, \quad \underline{k_{ji}^{\text{Гал.}}} = \int_0^l E I \varphi_j^{IV}(x) \varphi_i(x) dx.$$

За допомогою інтегрування частинами послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} k_{ij}^{\text{Гал.}} &= \int_0^l E I \varphi_i^{IV}(x) \varphi_j(x) dx = E I \varphi_i''' \varphi_j \Big|_0^l - \int_0^l E I \varphi_i''' \varphi_j' dx, \left[\begin{array}{l} u = \varphi_j(x); \quad du = \varphi_j'(x) dx \\ dv = \varphi_i^{IV}(x) dx; \quad v = \varphi_i'''(x) \end{array} \right], \\ & - \int_0^l \varphi_i''' \varphi_j' dx = \varphi_i'' \varphi_j' \Big|_0^l + \int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' dx, \left[\begin{array}{l} u = \varphi_j'; \quad du = \varphi_j'' dx \\ dv = \varphi_i''' dx; \quad v = \varphi_i'' \end{array} \right], \\ & \int_0^l E I \varphi_i^{IV} \varphi_j dx = E I \varphi_i''' \varphi_j \Big|_0^l - E I \varphi_i'' \varphi_j' \Big|_0^l + \int_0^l E I \varphi_i'' \varphi_j'' dx. \\ & \hspace{20em} \underline{k_{ij}^{\text{Рітца}}} \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} k_{ij}^{\text{Рітца}} &= k_{ij}^{\text{уз.Гал.}} = -E I \varphi_i''' \varphi_j \Big|_0^l + E I \varphi_i'' \varphi_j' \Big|_0^l + k_{ij}^{\text{Гал.}}, \\ & \int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' dx = \varphi_i' \varphi_j'' \Big|_0^l - \int_0^l \varphi_i' \varphi_j''' dx, \left[\begin{array}{l} u = \varphi_j''; \quad du = \varphi_j''' dx \\ dv = \varphi_i'' dx; \quad v = \varphi_i' dx \end{array} \right], \\ & - \int_0^l \varphi_i' \varphi_j''' dx = -\varphi_i \varphi_j''' \Big|_0^l + \int_0^l \varphi_i \varphi_j^{IV} dx, \left[\begin{array}{l} u = \varphi_j''; \quad du = \varphi_j^{IV} dx \\ dv = \varphi_i' dx; \quad v = \varphi_i \end{array} \right], \end{aligned}$$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ





$$\int_0^l EI \varphi_i^{IV} \varphi_j dx = EI \varphi_i''' \varphi_j \Big|_0^l - EI \varphi_i'' \varphi_j' \Big|_0^l + EI \varphi_i' \varphi_j'' \Big|_0^l - EI \varphi_i \varphi_j''' \Big|_0^l + \int_0^l EI \varphi_i \varphi_j^{IV} dx =$$

$$= \underbrace{EI \varphi_i'''(l) \varphi_j(l)}_1 - \underbrace{EI \varphi_i'''(0) \varphi_j(0)}_2 - \underbrace{EI \varphi_i''(l) \varphi_j'(l)}_3 + \underbrace{EI \varphi_i''(0) \varphi_j'(0)}_4 + \underbrace{EI \varphi_i'(l) \varphi_j''(l)}_5 -$$

$$- \underbrace{EI \varphi_i'(0) \varphi_j''(0)}_6 - \underbrace{EI \varphi_i(l) \varphi_j'''(l)}_7 + \underbrace{EI \varphi_i(0) \varphi_j'''(0)}_8 + \int_0^l EI \varphi_i \varphi_j^{IV} dx. \quad (17.13)$$

Розглянемо однорідні граничні умови

1. граничні умови $w(0) = 0; w'(0) = 0; w(l) = 0; w'(l) = 0$.
2. природні умови $w''(0) = 0; w'''(0) = 0; w''(l) = 0; w'''(l) = 0$.

			
$w(0) = 0$	$w(l) = 0$	$w(0) = 0$	$w(l) = 0$
$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$	$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$
$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$	$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$
$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$	$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$
$w(0) = 0$	$w(l) = 0$	$w(0) = 0$	$w(l) = 0$
$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$	$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$
$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$	$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$
$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$	$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$
$w(0) = 0$	$w(l) = 0$	$w(0) = 0$	$w(l) = 0$
$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$	$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$
$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$	$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$
$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$	$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$
$w(0) = 0$	$w(l) = 0$	$w(0) = 0$	$w(l) = 0$
$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$	$w'(0) = 0$	$w'(l) = 0$
$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$	$w''(0) = 0$	$w''(l) = 0$
$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$	$w'''(0) = 0$	$w'''(l) = 0$

В прямокутниках подана нумерація членів розкладу (17.13), які прирівнюються до нуля. Тобто для однорідних граничних умов, показаних вище, коефіцієнти матриці алгебраїчних рівнянь, отриманих за методом Бубнова-Гальоркіна, є симетричними $k_{ij}^{Gal.} = k_{ji}^{Gal.}$.

17.5. Рівняння методу Треффца. Приклад

Система рівнянь методу Треффца. При $\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = 0$ і $\delta \Pi_2 = 0, \delta \Pi_1 = 0$ дає

$$\left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} \right) \varphi_j(x) \Big|_a^b + F_{w'} \varphi_j'(x) \Big|_a^b = 0. \quad (17.14)$$

Рівняння Ейлера для балки має вигляд

$$EI w^{IV} = q(x).$$

У методі Треффца функції $\varphi_j(x)$ обираються таким чином, щоб кожна з них являла собою частинний розв'язок диференціального рівняння Ейлера варіаційної задачі.

Приклад 17.4. Розглянемо той же самий приклад.

$$w = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4, \quad w'' = 2a_1 + 6a_2 x + 12a_3 x^2, \quad w''' = 6a_2 + 24a_3 x, \quad w^{IV} = 24a_3,$$

$$a_3 = \frac{q}{24EI}, \quad F_{w''} = EI w'', \quad -\frac{d}{dx} F_{w''} = EI w''',$$

$$EIw'' = EI \left(2a_1 + 6a_2x + 12a_3x^2 + \frac{qx^2}{2EI} \right), \quad -EIw''' = -EI \left(6a_2 + \frac{qx}{2EI} \right).$$

Система алгебраїчних рівнянь методу Треффца.

$$\underline{\varphi_1 = x^2}, \quad -EI \left(6a_2 + \frac{qx}{EI} \right) x^2 \Big|_0^l + EI \left(2a_1 + 6a_2x + 12a_3x^2 + \frac{qx^2}{2EI} \right) 2x \Big|_0^l = 0,$$

$$\underline{\varphi_2 = x^3}, \quad -EI \left(6a_2 + \frac{qx}{EI} \right) x^3 \Big|_0^l + EI \left(2a_1 + 6a_2x + 12a_3x^2 + \frac{qx^2}{2EI} \right) 3x^2 \Big|_0^l = 0.$$

Звідки

$$a_1 = \frac{ql^2}{EI}, \quad a_2 = -\frac{1}{6} \frac{ql^2}{EI}.$$

Підсумкова таблиця

	Метод Ріца	Метод Бубнова-Гальоркіна	Метод Треффца
Як задається функція w -?	$w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$	$w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$	$w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$
Як обираються $\varphi_i(x)$?	Функції $\varphi_i(x)$ задовольняють частині граничних умов. Задовольняння усім граничним умовам не є обов'язковим	Функції $\varphi_i(x)$ обираються так, що вони задовольняють усім граничним умовам	Функції $\varphi_i(x)$ є частинними розв'язками диференціального рівняння Ейлера
Як знаходяться невідомі a_j	Із умови екстремуму функціонала $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$	Із умови ортогональності кожної функції $\varphi_i(x)$ лівій частині диференціального рівняння Ейлера задачі $\int_a^b \left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \varphi_i(x) dx = 0.$	Із умови ортогональності кожної функції $\varphi_i(x)$ лівій частині диференціального рівняння задачі на границі області $\left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} \right) \varphi_i(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{w''} \right) \varphi_i'(x) \Big _a^b = 0.$

17.6. Метод найменшого квадратичного відхилення

Середньою величиною Δ_s порядку s кількох чисел a_1, a_2, \dots, a_n вважатимемо величину, що визначається формулою

$$\Delta_s = \sqrt[s]{\frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n}}.$$

При $s = 1$ маємо середнє арифметичне:

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

$$\Delta_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

При $s = 2$ маємо середнє квадратичне:

$$\Delta_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

і так далі. Застосовуючи ці поняття до середніх похибок, що зумовлені заміною функції $w = w(x)$ рядом $w_n = \sum_1^n a_i \varphi_i$ в проміжку ab , дістанемо середню похибку порядку s ($b - a = l$):

$$\Delta_s = \sqrt[s]{\int_a^b \frac{|w_n - w|^s}{l} dx}. \quad (17.15)$$

Позначимо відхилення наближеного значення функції від її дійсного значення символом w_{yk} , так що $w_{yk} = w_n - w$. Тоді вираз (17.15) коротше запишеться так:

$$\Delta_s = \sqrt[s]{\int_a^b \frac{|w_{yk}|^s}{l} dx}.$$

При $s = 1$ маємо середнє арифметичне похибки:

$$\Delta_1 = \int_a^b \frac{1}{l} |w_{yk}| dx.$$

При $s = 2$ отримаємо середню квадратичну похибку

$$\Delta_2 = \sqrt{\int_a^b \frac{1}{l} |w_{yk}|^2 dx}$$

і так далі. Якщо за міру похибки прийняти величину середньої арифметичної, то найкращим наближенням функції буде таке наближення, при якому задовольняється умова

$$\Delta_1 \cdot l = \int_a^b |w_{yk}| dx = \min.$$

Ця умова має простий геометричний зміст:

площа, що знаходиться між графіками $w_n = \sum_1^n a_i \varphi_i$ і

$w = w(x)$ у проміжку ab , має бути найменшою (рис. 17.6). Проте, ця мінімальна задача має не єдиний розв'язок, що показує такий простий

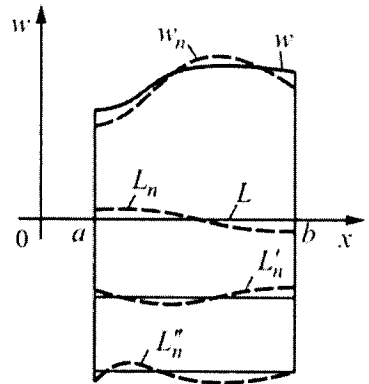


Рис. 17.6

приклад. Інтеграл $\int_{-1}^{+1} |x - cx^2| dx$ має значення 1 при $|c| \leq 1$ і має значення >1 при $|c| > 1$. Тому надалі за міру похибки прийматимемо величину середнього квадратичного відхилення функції ($s=2$) і вважатимемо найкращим таке наближення, коли величина квадратичного відхилення перетворюється у мінімум, тобто при дотриманні умови

$$\Delta_2^2 \cdot l = \int_a^b |w_{yk}|^2 dx = \min. \quad (17.16)$$

Підінтегральний вираз тут є квадратичною формою відносно параметрів a_i . Прирівнюючи нулю похідні від інтеграла (17.16) по кожному з параметрів, дістанемо систему n лінійних рівнянь відносно a_i , які дозволяють знайти всі параметри:

$$\frac{\partial(l \cdot \Delta_2^2)}{2\partial a_k} = \int_a^b w_{yk} \frac{\partial w_{yk}}{\partial a_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (17.17)$$

Якби ми прийняли $s=3,4,\dots$, то рівняння (17.17) не були б лінійними відносно параметрів і їх знаходження було б складнішим. Тому вибір величини середнього квадратичного відхилення як міри похибки є найпростішим. У практичних розрахунках звичайно доводиться мати справу із задачами, де дійсне значення функції $w = w(x)$ наперед невідоме, а відоме диференціальне рівняння

$$L(x, w, w', w'', \dots) = 0.$$

Тому рівняння (17.17) застосовуватимемо переважно не до відхилення самої функції, а до відхилення від нуля оператора L . Якщо $w = w(x)$ – точний вираз шуканої функції, то $L \equiv 0$; якщо $w_n = \sum a_i \varphi_i$ – наближений її вираз, то $L_n \neq 0$ і $L_{yk} = L_n - L = L_n$. Застосовуючи умови (17.17) до відхилення від нуля оператора L , дістанемо таку систему рівнянь:

$$\int_a^b L_n(x, w_n, w_n', w_n'', \dots) \frac{\partial L_n}{\partial a_k} dx = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (17.18)$$

На рис. 17.6 показаний геометричний зміст умов (17.18). Лінія L є нульовою лінією в проміжку ab , лінія L_n – функція-оператор, що відхиляється від нуля. Умови (17.18) виражають вимогу, щоб функція-оператор L_n мала найменше середнє квадратичне відхилення від нуля в проміжку ab . Вимогу про найменше відхилення можна поставити не до самого оператора L_n , а до будь-якої його похідної. Так, наприклад, можна написати умови

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

$$\int_a^b L'_n(x, w_n, w'_n, w''_n, \dots) \frac{\partial L'_n}{\partial a_k} dx = 0, \quad (17.19)$$

$$\int_a^b L''_n(x, w_n, w'_n, w''_n, \dots) \frac{\partial L''_n}{\partial a_k} dx = 0. \quad (17.20)$$

і так далі (рис. 17.6).

У разі функції двох змінних $u(x, y)$ умови найменшого відхилення можна записати за одним з наступних варіантів ($u_{yk} = u_n - u$).

Умова найменшого відхилення самої функції:

$$\iint u_{yk}^2 dx dy = \min. \quad (17.21)$$

Умова найменшого відхилення квадрата градієнта функції (градієнтом функції

$u(x, y)$ називається вираз $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$).

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u_{yk}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{yk}}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy = \min. \quad (17.22)$$

Умова найменшого відхилення функції-оператора:

$$\iint L_n^2 dx dy = \min. \quad (17.23)$$

Умова найменшого відхилення від нуля квадрата градієнта функції-оператора:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial L_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_n}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy = \min. \quad (17.24)$$

На рис. 17.7 дано геометричне пояснення сенсу умов (17.21) – (17.24). Вказаний вище спосіб формулювання умов для знаходження параметрів називатимемо способом *найменшого квадратичного відхилення*.

Приклад 17.5. Методом найменшого квадратичного відхилення дослідити балку, показану на рис. 17.4.

Тут можливі два варіанти цього методу.

Перший варіант: задаємося функцією $w_n = \sum a_i \varphi_i$, що задовольняє по можливості всім

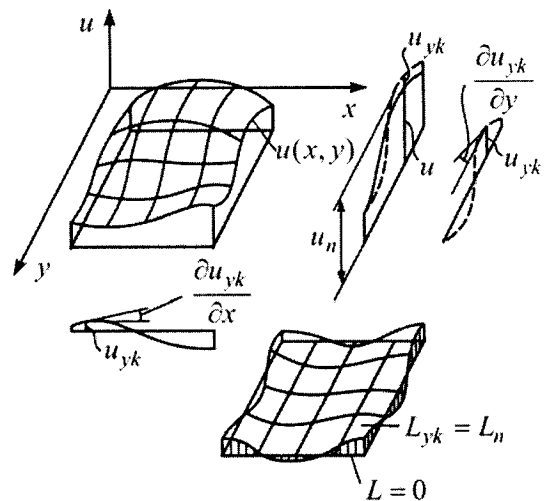


Рис. 17.7

заданим граничним умовам, і вносимо її до одного з диференціальних рівнянь нашої задачі:

$$L(x, w, w', w'', \dots) = 0.$$

Тоді L_n набуває деякого значення, не рівного нулю. Вимагатимемо, щоб сума квадратів ухилень L_n від нуля була найменшою як усередині, так і на кінцях проміжку $0 - l$:

$$J = \int_0^l [L_n]^2 dx = \min. \quad (17.25)$$

Беручи похідні від J по кожному з параметрів, отримуємо стільки рівнянь, лінійних відносно a_i , скільки невідомих параметрів:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Візьмемо для нашої задачі $w = a_1(x^2 - \frac{1}{3l}x^3)$, де $\varphi_1 = x^2 - \frac{1}{3l}x^3$, $\varphi_1'' = 2(1 - \frac{x}{l})$, і диференціальне рівняння

$$L \equiv EJw^{IV} - q = 0.$$

Вносячи це до умови (17.25) і додаючи в ліву частину квадрат ухилення поперечної сили від заданого на правому кінці значення, отримаємо:

$$J = \int_0^l (EIa_1\varphi_1^{IV} - q)^2 dx + [-EIa_1\varphi_1'''(l) - P]^2 = \min,$$

звідки

$$\frac{1}{2EI} \frac{\partial J}{\partial a_1} = \int_0^l (EIa_1\varphi_1^{IV} - q)\varphi_1^{IV} dx + [-EIa_1\varphi_1'''(l) - P][- \varphi_1'''(l)] = 0.$$

Маючи на увазі, що $\varphi_1^{IV} = 0$, $\varphi_1'''(l) = -\frac{2}{l}$, отримуємо:

$$\left[-EIa_1\left(-\frac{2}{l}\right) - P \right] \left(\frac{2}{l}\right) = 0,$$

звідки

$$a_1 = \frac{Pl}{2EI}.$$

Застосуємо проведену операцію до рівняння другого порядку

$$L \equiv EIw'' - P(l - x) = 0.$$

Вставляючи його в (17.25), маємо:

$$J = \int_0^l [EIa_1\varphi_1'' - P(l - x)]^2 dx = \min, \quad \frac{1}{2EI} \frac{\partial J}{\partial a_1} = \int_0^l [EIa_1\varphi_1'' - P(l - x)]\varphi_1'' dx = 0$$

або

$$a_1\delta_{11} = \Delta_{p1}.$$

Тут

$$\delta_{11} = \int_0^l EI a_1 (\varphi_1'')^2 dx = 4EI \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx; \quad \Delta_{p1} = \int_0^l P(l-x)\varphi'' dx = 2Pl \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx.$$

Підставляючи ці значення до рівняння відносно a_1 і скорочуючи на величину визначеного інтеграла, отримаємо:

$$a_1 4EI = 2Pl \quad \text{або} \quad a_1 = \frac{Pl}{2EI}.$$

Другий варіант (варіант Треффца). Задаємося у якості функції w інтегралом нашого диференціального рівняння, а параметри визначаємо з умови, щоб сума квадратів ухилень функції від нуля була найменшою на границях досліджуваного стрижня. У нашому випадку w вибрана так, що вона є інтегралом диференціального рівняння. Тому ми можемо застосувати цей варіант. Для визначення одного параметра a_1 досить скласти одну умову для лівого кінця:

$$J = [M_n(0) - M(0)]^2 = \min (M_n - \text{наближене значення моменту}).$$

Маємо:

$$M_n = -EIw'' = -EJa_1 \left(2 - \frac{2}{l}x\right), \quad M_n(0) = -EIa_1 2, \quad M(0) = -Pl,$$

$$J = (-EIa_1 2 + Pl)^2 = \min, \quad \frac{1}{2EI} \frac{\partial J}{\partial a_1} = -EIa_1 2 + Pl = 0,$$

звідки

$$a_1 = \frac{Pl}{2EI}.$$

До того ж результату ми прийшли б, застосувавши умову

$$[Q_n(0) - Q(0)]^2 = \min.$$

17.7. Метод ортогоналізації

Досліджуючи в попередньому параграфі зв'язок між різними способами наближення, ми виходили із способу мінімуму енергії. Було показано, що спосіб Гальоркіна і спосіб Треффца є по суті частинними прийомами способу Рітца або еквівалентного йому в задачах механіки узагальненого способу Гальоркіна. Таке трактування є цілком можливим і зручним, якщо диференціальне рівняння задачі пов'язане з деякою варіаційною проблемою.

Дамо тепер інше трактування, придатне для всякого диференціального рівняння і не пов'язаного з варіаційною проблемою. Покажемо, що як спосіб Рітца, так і спосіб Гальоркіна, а також спосіб найменшого квадратичного відхилення можна розглядати як частинні прийоми способу ортогоналізації, що розглядається як більш загальний метод наближення функцій.

Нехай в проміжку ab дано рівняння

$$L(x, w, w', \dots, w^{IV}) = 0$$

четвертого порядку при відомих граничних умовах. Якщо w – точний розв’язок рівняння, то $L \equiv 0$ задовольняється тотожно. Тому функція L має бути ортогональною до будь-якої функції в проміжку ab . Але якщо точний розв’язок знайти важко, то можна задатися наближеним розв’язком у вигляді ряду

$$w_n = \sum_1^n a_i \varphi_i \quad \text{і умови для визначення параметрів скласти одним з таких способів.}$$

а) Функції φ_i задовольняють як кінематичні, так і статичні граничні умови. Тоді L_n усередині проміжку, взагалі кажучи, не дорівнює нулю. Але вимагаючи, щоб L_n була ортогональна до n функцій φ_i апроксимуючого ряду, для визначення параметрів дістанемо таку систему рівнянь:

$$\int L(x, w_n, w_n', \dots, w_n^{IV}) \varphi_i dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.26)$$

тобто приходимо до способу Гальоркіна у формі, запропонованій самим автором. Оскільки структура рівняння $L = 0$ нічим не зв’язана, то умова (17.26) застосовна до будь-якого диференціального рівняння і не пов’язана з варіаційною проблемою.

б) Нехай функції φ_i задовольняють всі граничні умови, а рівняння $L = 0$ пов’язано з деякою варіаційною проблемою. Тоді це рівняння має представляти рівняння Ейлера для деякого функціонала E :

$$L = F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''}.$$

Підставляючи це значення L до (17.26), інтегруючи частинами другий і третій доданки і помноживши всі члени на довільну варіацію δa_i , зважаючи на те, що $\delta a_i \varphi_i = \delta w$, дістанемо:

$$-\left[\left(F_w - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) \delta w \right] \Big|_a^b - [F_{w''} \cdot \delta w'] \Big|_a^b + \int_a^b [F_w \delta w + F_{w'} \delta w' + F_{w''} \delta w''] dx = 0.$$

Перші дві квадратні дужки з урахуванням граничних умов перетворюються на нуль, а інтеграл лівої частини є не що інше, як похідна від E по a_i . Отже, ми приходимо до умов Рітца

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.27)$$

в) Нехай функції φ_i задовольняють не всі граничні умови. Тоді можна на кінцях проміжку ab в околі граничних точок виділити як завгодно малі ділянки, що замінюють граничні точки, і інтеграл рівнянь (17.26) розбити на кілька інтегралів, поширених на всі, у тому числі і граничні, ділянки. Так, наприклад, для рис. 17.8,а рівняння (17.26) запишуться у такій формі:

$$\int_a^c L_{ac} \varphi_i dx + \int_c^d L_{cd} \varphi_i dx + \int_d^e L_{de} \varphi_i dx + \int_e^f L_{ef} \varphi_i dx + \int_f^d L_{fb} \varphi_i dx = 0. \quad (17.28)$$

Це і є узагальнене рівняння Гальоркіна. У разі задачі, пов'язаної з варіаційною проблемою, воно приводиться до рівняння (17.12), а у разі, коли функції φ_i є частинними інтегралами диференціального рівняння задачі, – до рівняння (17.1).

Приклад 17.6. Двоопорна балка несе в прогоні суцільне рівномірне навантаження q т/м і навантажена на кінцях двома зосередженими силами і двома парами. Це навантаження можна привести до вигляду, наведеного на рис. 17.8,б. Маємо (ε – будь-яка мала величина):
на ділянках

від a до $a + \varepsilon$ $L = EIw^{IV} - q + \frac{Q_a}{\varepsilon} + \frac{P_a}{\varepsilon}$,

від $a + \varepsilon$ до $a + 2\varepsilon$ $L = EIw^{IV} - q - \frac{P_a}{\varepsilon}$,

від $a + 2\varepsilon$ до $b - 2\varepsilon$ $L = EIw^{IV} - q$,

від $b - 2\varepsilon$ до $b - \varepsilon$ $L = EIw^{IV} - q - \frac{P_b}{\varepsilon}$,

від $b - \varepsilon$ до b $L = EIw^{IV} - q - \frac{Q_b}{\varepsilon} + \frac{P_b}{\varepsilon}$.

Підставляючи все це у (17.28) і враховуючи знаки навантажень, дістанемо:

$$-Q_a\varphi(a) - \frac{P_a}{\varepsilon}\varepsilon\varphi(a) + \frac{P_a}{\varepsilon}\varepsilon\varphi(a + \varepsilon) + \frac{P_b}{\varepsilon}\varepsilon\varphi(b - \varepsilon) - \\ - \frac{P_b}{\varepsilon}\varepsilon\varphi(b) + Q_b\varphi(b) + \int_a^b (EIw^{IV} - q)\varphi_i dx = 0,$$

або, зважаючи на те, що

$$P_a\varepsilon = M_a, \quad P_b\varepsilon = M_b, \quad \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a + \varepsilon) - \varphi(a)] = \varphi'(a), \quad \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(b) - \varphi(b - \varepsilon)] = \varphi'(b),$$

маємо:

$$Q_b\varphi(b) - Q_a\varphi(a) + M_a\varphi'(a) - M_b\varphi'(b) + \int_a^b (EIw^{IV} - q)\varphi_i dx = 0,$$

тобто приходимо до узагальненої форми рівнянь Гальоркіна.

г) Нехай функції φ_i задовольняють всі граничні умови. Вимагатимемо, щоб ліва частина диференціального рівняння L була ортогональна до самої собі:

$$\int L^2(x, w_n, w'_n, \dots, w_n^{IV})\varphi_i dx = 0.$$

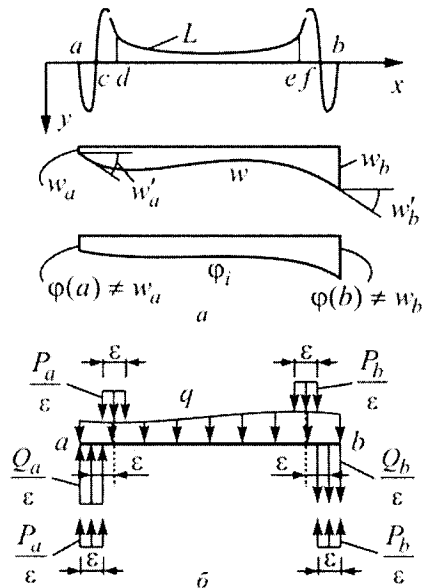


Рис. 17.8

Диференціюючи обидві частини по a_k , дістанемо:

$$\int L(x, w_n, w_n', \dots, w_n^{IV}) \frac{\partial L}{\partial a_k} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (17.29)$$

тобто ми приходимо до способу найменшого квадратичного відхилення (рівняння (17.18)).

Нехай L – функція двох незалежних змінних. Вимагатимемо, щоб частинні похідні від L по кожній незалежній змінній були ортогональні до самих себе всередині всієї області:

$$\iint \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0, \quad \iint \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0.$$

Сумуючи ці умови і диференціюючи по a_k , маємо:

$$\iint \left[\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) + \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (17.30)$$

тобто приходимо до умови мінімуму квадратичного відхилення у формі Треффца (порівняйте рівняння (17.14)).

У подальшому будемо дотримуватися даних вище вказівок і діятимемо так:

- 1) якщо функції φ_i задовольняють не всі граничні умови, застосовуватимемо спосіб Рітца;
- 2) якщо функції φ_i задовольняють всі граничні умови і відоме диференціальне рівняння задачі, застосовуватимемо спосіб Гальоркіна;
- 3) якщо можна вибрати функції φ_i так, щоб вони були частинними інтегралами диференціального рівняння, застосовуватимемо спосіб Треффца. В деяких випадках для порівняння застосовуватимемо паралельно два-три способи або комбінуватимемо різні способи в одній задачі.

17.8. Порівняння основних підходів

Наведемо схему взаємозв'язку різних варіаційних прийомів, складену на основі сказаного в цьому параграфі.

Схема взаємозв'язку різних варіаційних способів

	Метод ортогоналізації (узагальнений метод Гальоркіна)			
	Метод Рітца	Метод Гальоркіна	Метод Треффца	Метод найменшого квадратичного відхилення
1	2	3	4	5
Форма апроксимуючої функції	$w = \sum_1^n a_i \varphi_i$	$w = \sum_1^n a_i \varphi_i$	$w = \sum_1^n a_i \varphi_i$	$w = \sum_1^n a_i \varphi_i$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

1	2	3	4	5
Як вибираються функції φ_i ?	Функції φ_i задовольняють частину граничних умов. Задоволення всіх граничних умов не обов'язкове	Функції φ_i задовольняють обов'язково всі граничні умови задачі	Функції φ_i є частинними інтегралами диференціального рівняння задачі	Функції φ_i задовольняють обов'язково всі граничні умови задачі
Як визначаються параметри?	З умови мінімуму енергії у формі Лагранжа, якщо розв'язання ведеться в переміщеннях, і у формі Кастільяно, якщо розв'язання ведеться у навантаженнях	З умови, щоб ліва частина диференціального рівняння задачі була ортогональна до кожної з функцій, які складають ряд $\int_a^b (F_w - \frac{d}{dx} F_w)' + \frac{d^2}{dx^2} F_w' \varphi_i(x) dx = 0$.	З умови, щоб ліва частина диференціального рівняння була ортогональна до функцій φ_i на границях області	З умови, щоб середнє квадратичне відхилення від нуля лівої частини диференціального рівняння мало найменше значення $(F_w - \frac{d}{dx} F_w)' \varphi_i(x) + (\frac{d^2}{dx^2} F_w') \varphi_i'(x) \Big _a^b = 0$.

17.9. Скінченно-різницевий метод Ейлера

Ідея скінченно-різницевого методу заключається в тому, що значення функціонала $v[y(x)]$, наприклад,

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b,$$

розглядаються не на довільних, допустимих в даній варіаційній задачі кривих, а лише на ламаних, складених із заданої кількості n прямолінійних ланок із заданими абсцисами вершин (рис. 17.9):

$$x_0 + \Delta x, \quad x_0 + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_0 + (n-1)\Delta x,$$

$$\text{де } \Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n}.$$

На таких ламаних функціонал $v[y(x)]$ перетворюється на функцію $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ординат y_1, y_2, \dots, y_{n-1} вершин ламаної, оскільки ламана цілком визначається цими ординатами.

Обираємо ординати y_1, y_2, \dots, y_{n-1} так, щоб функція $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$

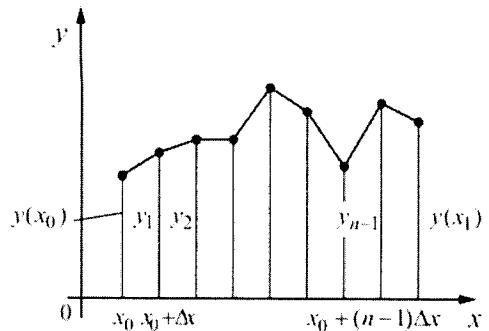


Рис. 17.9

досягала екстремуму, тобто визначаємо y_1, y_2, \dots, y_{n-1} із системи рівнянь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

а потім переходимо до границі при $n \rightarrow \infty$. В результаті граничного переходу при деяких обмеженнях, що накладаються на функцію F , отримуємо розв'язок варіаційної задачі.

Проте, зручніше значення функціонала $v[y(x)]$ на вказаних вище ламаних обчислювати наближено, наприклад, у найпростішій задачі замінити інтеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F\left(x, y, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right) dx$$

інтегральною сумою

$$\sum_{i=1}^n F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

В якості прикладу виведемо рівняння Ейлера для функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

У даному випадку на ламаних, що розглядаються,

$$v[y(x)] \approx \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Оскільки від y_i залежать лише два доданки цієї суми: i -й та $(i-1)$ -й,

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right) \Delta x \quad \text{та} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

то рівняння $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, (n-1)$) приймають вигляд

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right) \Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right) \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \Delta x + \\ + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right) \frac{1}{\Delta x} \Delta x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

або

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0,$$

або

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

якому повинна задовольняти шукана функція $y(x)$, що реалізує екстремум. Аналогічно може бути отримана основна умова екстремуму в інших варіаційних задачах.

Якщо не здійснювати граничного переходу, то із системи рівнянь $\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, (n-1)$) можна визначити шукані ординати y_1, y_2, \dots, y_{n-1} і тим самим отримати ламану, що являється наближеним розв'язком варіаційної задачі.

17.10. Застосування методу множників Лагранжа при реалізації варіаційних методів

Успішність чисельних процедур, які базуються на прямих варіаційних методах, безпосередньо пов'язана з тим, наскільки вдало обрані базисні (координатні) функції. В багатьох задачах будівельної механіки в якості базисних функцій використовуються компоненти степеневих або тригонометричних рядів.

Розглянемо балку на двох опорах постійного поперечного перерізу під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис. 17.10). Розв'язок спочатку будемо шукати у вигляді відрізка степеневого ряду

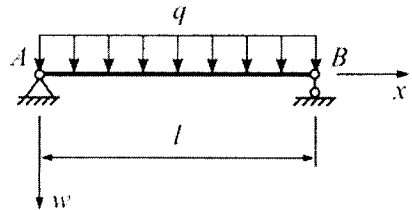


Рис. 17.10

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x), \tag{17.31}$$

де

$$n = 3, \quad \phi_1(x) = x(x-l); \quad \phi_2(x) = x(x^2-l^2); \quad \phi_3(x) = x(x^3-l^3). \tag{17.32}$$

Оскільки базисні функції задовольняють кінематичні граничні умови, то для розв'язання задачі можемо скористатись методом Рітца, система канонічних рівнянь, якого матиме вигляд

$$\begin{aligned} \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 + \Delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \tag{17.33}$$

Послідовно отримуємо:

$$\phi_1''(x) = 2; \quad \phi_2''(x) = 6x; \quad \phi_3''(x) = 12x^2, \tag{17.34}$$

$$\delta_{11} = \int_0^l EI \phi_1''(x) \phi_1''(x) dx = EI \int_0^l 2 \cdot 2 dx = 4EI;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l EI \varphi_1''(x) \varphi_2''(x) dx = EI \int_0^l 2 \cdot 6x dx = 6EI l^2;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = EI \int_0^l 2 \cdot 12x^2 dx = 8EI l^3; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = EI \int_0^l 6x \cdot 12x^2 dx = 18EI l^4;$$

$$\delta_{22} = EI \int_0^l 6x \cdot 6x dx = 12EI l^3; \quad \delta_{33} = EI \int_0^l 12x^2 \cdot 12x^2 dx = \frac{144}{5} EI l^5;$$

$$\Delta_{1p} = - \int_0^l q \varphi_1(x) dx = \frac{ql^3}{6}; \quad \Delta_{2p} = - \int_0^l q \varphi_2(x) dx = \frac{ql^4}{4}; \quad \Delta_{3p} = - \int_0^l q \varphi_3(x) dx = \frac{3ql^5}{10}.$$

Система (17.33) тепер набуває вигляду

$$4la_1 + 6l^2 a_2 + 8l^3 a_3 + \frac{ql^3}{6EI} = 0,$$

$$6l^2 a_1 + 12l^3 a_2 + 18l^4 a_3 + \frac{ql^4}{4EI} = 0,$$

$$8l^3 a_1 + 18l^4 a_2 + \frac{144l^5}{5} a_3 + \frac{3ql^5}{10EI} = 0.$$

Розв'язком цієї системи є

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{ql}{12EI} = 0, \quad a_3 = \frac{q}{24EI}.$$

Отже

$$w(x) = a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) = -\frac{ql}{12EI} x(x^2 - l^2) + \frac{q}{24EI} x(x^3 - l^3) = \frac{q}{24EI} x(x-l)(x^2 - lx - l^2). \quad (17.35)$$

Зазначимо, що розв'язок задачі про згин балки є поліномом четвертого ступеня, отже знайдений вираз (17.35) – це точний розв'язок (рівняння деформованої осі балки). Найбільше значення прогин має посередині балки:

$$w(0.5l) = \frac{q}{24EI} \frac{l}{2} \left(-\frac{l}{2} \right) \left(-\frac{5l^2}{4} \right) = \frac{5ql^4}{384EI}. \quad (17.36)$$

Закон розподілу згинальних моментів знайдемо за допомогою диференціювання виразу (17.35):

$$M(x) = -EI w''(x) = \frac{ql}{2} x(l-x). \quad (17.37)$$

Найбільше значення момент отримує посередині прогону:

$$M(0.5l) = \frac{ql^2}{8}. \quad (17.38)$$

Тепер спробуємо застосувати для розв'язання задачі за методом Рітца базисні функції у вигляді компонентів тригонометричного ряду:

$$\varphi_k(x) = \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right]. \quad (17.39)$$

Знаходимо другі похідні базисних функцій

$$\varphi_k''(x) = -\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}\right]^2 \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right] \quad (17.40)$$

та визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу Рітца:

$$\delta_{kj} = \int_0^l EI \varphi_k''(x) \varphi_j''(x) dx = \begin{cases} \frac{EI[(2k-1)\pi]^4}{2l^3}, & \text{якщо } k=j \\ 0, & \text{якщо } k \neq j \end{cases} \quad (17.41)$$

$$\Delta_{kp} = -\int_0^l q \varphi_k(x) dx = -\frac{2ql}{(2k-1)\pi}. \quad (17.42)$$

Бачимо, що матриця системи алгебраїчних рівнянь має діагональний вигляд (базисні функції є ортогональними), тому неважко знайти розв'язок такої системи:

$$a_k = -\frac{\Delta_{kp}}{\delta_{kk}} = \frac{4ql^4}{EI[(2k-1)\pi]^5}. \quad (17.43)$$

Отже,

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^5} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right], \quad (17.44)$$

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x) = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^3} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right]. \quad (17.45)$$

Максимальні значення прогину та згинального моменту посередині прогону визначаються формулами

$$w(0.5l) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^5} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right] = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}, \quad (17.46)$$

$$M(0.5l) = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^3} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right] = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}. \quad (17.47)$$

Зауважимо, що навіть якщо утримати лише перший член подання (17.46), то значення найбільшого прогину прогону становить

$$w(0.5l) \approx \frac{4ql^4}{EI\pi^5} = 0.01307 \frac{ql^4}{EI},$$

тоді як точне значення, яке дається виразом (17.36), дорівнює

$$w(0.5l) = \frac{5ql^4}{384EI} = 0.01303 \frac{ql^4}{EI},$$

тобто обчислення за формулою (17.46) при $n=1$ дає відносну похибку 0.3%.

У свою чергу, момент, обчислений за допомогою виразу (17.47) при $n=1$, дорівнює

$$M(0.5l) \approx \frac{4ql^2}{\pi^3} = 0.129ql^2,$$

а за точною формулою

$$M(0.5l) = \frac{ql^2}{8} = 0.125ql^2.$$

Бачимо, що обчислення моменту за наближеною формулою (17.47) при $n=1$ призводить до відносної похибки 3.2%.

Зазначимо також, що функціональні ряди (17.46), (17.47) є збіжними при будь-якому значенні x . Дійсно, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right] = \frac{\pi^5}{96} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right) \right];$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right] = -\frac{\pi^3}{8} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right) \right],$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^5} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right] \right\} = \frac{q}{24} [x^4 - 2x^2l^2 + xl^3] =$$

$$= \frac{q}{24EI} x(x-l)(x^2 - lx - l^2) = w(x) \text{ точно,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4ql^2}{EI\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right] \right\} = -\frac{q}{8}(x^2 - xl) = \frac{q}{8}x(l-x) = M(x) \text{ точно.}$$

Таким чином, при збільшенні n формули (17.46), (17.47) дозволяють обчислити значення параметрів напружено-деформованого стану балки з будь-якою точністю.

Розглянемо тепер балку, що спирається на три опори (рис. 17.11). Розв'язок тепер шукаємо у вигляді відрізка тригонометричного ряду

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (17.48)$$

де

$$\varphi_k(x) = \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{l} \right] + \sin \left[\frac{(2k+1)\pi x}{l} \right]. \quad (17.49)$$

Переконуємось в тому, що базисні функції (17.49) задовольняють кінематичні граничні умови

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(\pi) = 0, \quad \varphi_k \left(\frac{l}{2} \right) = \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2} \right] + \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2} + \pi \right] = 0,$$

а також умову симетрії

$$\varphi_k' \left(\frac{l}{2} \right) = \left[\frac{(2k-1)\pi}{l} \right] \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2} \right] + \left[\frac{(2k+1)\pi}{l} \right] \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2} \right] = 0.$$

Знаходимо другі похідні базисних функцій

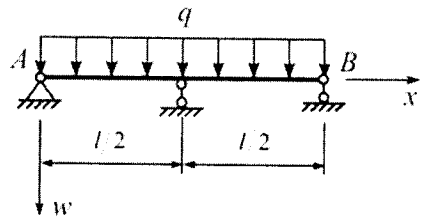


Рис. 17.11

$$\varphi_k''(x) = -\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}\right]^2 \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right] - \left[\frac{(2k+1)\pi}{l}\right]^2 \sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right] \quad (17.50)$$

та коефіцієнти канонічних рівнянь методу Рітца:

$$\delta_{kj} = \int_0^l EI \varphi_k''(x) \varphi_j''(x) dx = \begin{cases} \frac{EI\pi^4}{l^3} (16k^4 + 24k^2 + 1), & \text{якщо } k = j \\ \frac{EI\pi^4}{l^3} (2k-1)^4, & \text{якщо } k = j+1 \\ \frac{EI\pi^4}{l^3} (2k+1)^4, & \text{якщо } k = j-1 \\ 0, & \text{якщо } k < j-1 \cup k > j+1 \end{cases} \quad (17.51)$$

$$\Delta_{kp} = \int_0^l q \varphi_k(x) dx = \frac{8ql}{\pi} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)}. \quad (17.52)$$

За допомогою (17.51), (17.52) формуємо систему рівнянь типу (17.33) при різних значеннях n і, розв'язуючи її, знаходимо узагальнені координати a_1, a_2, \dots, a_n , після чого визначаємо за формулою (17.48) прогини $w(x)$. Згинальні моменти можуть бути знайдені з використанням (17.51) на основі співвідношення

$$M(x) = -EI w''(x) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x), \quad (17.53)$$

а поперечні сили за формулою

$$Q(x) = -EI w'''(x) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k'''(x). \quad (17.54)$$

Наприклад, значення моменту в перерізі над середньою опорою дорівнює

$$M(0.5l) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(0.5l) = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \sum_{k=1}^n a_k (-1)^{k+1} [(2k-1)^2 - (2k+1)^2] \quad (17.55)$$

тоді як значення поперечної сили в перерізі біля середньої опори задається виразом

$$Q(0.5l_{\pm 0}) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k'''(0.5l) = \frac{\pi^3 EI}{l^3} \sum_{k=1}^n a_k [(2k-1)^3 \cdot 0 - (2k+1)^3 \cdot 0] = 0. \quad (17.56)$$

В той же час, неважко знайти поліном четвертого ступеня, який являє собою точний розв'язок задачі:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{q}{384EI} x(2x-l)^2(4x+l), & x \leq 0.5l \\ \frac{q}{384EI} (x-l)(2x-l)^2(4x-5l), & x > 0.5l \end{cases} \quad (17.57)$$

Відповідні вирази для згинального моменту та поперечної сили мають вигляд

$$M(x) = -EIw''(x) = \begin{cases} \frac{q}{16}x(3l - 8x), & x \leq 0.5l, \\ \frac{q}{16}(x-l)(5l - 8x), & x > 0.5l, \end{cases} \quad (17.58)$$

$$Q(x) = -EIw'''(x) = \begin{cases} \frac{q}{16}(3l - 16x), & x \leq 0.5l, \\ \frac{q}{16}(13l - 16x), & x > 0.5l. \end{cases} \quad (17.59)$$

Як бачимо, точні значення поперечної сили в перерізах біля середньої опори

$$Q(0.5l_{\pm 0}) = \mp \frac{5ql}{16}$$

є ненульовими.

Порівняння результатів обчислення інших параметрів НДС (нормованих прогинів в перерізі $x = 0.2l$ та моментів посередині прогону) при різних значеннях n наведені в таблиці 17.1. При цьому враховано, що точні значення вказаних параметрів в цих перерізах відповідно дорівнюють:

$$w(0.2l)_{\text{точне}} = \frac{q}{384EI} \cdot 0.2l(0.4l - l)^2(0.8l + l) = 3.375 \cdot 10^{-4} \frac{ql^4}{EI},$$

$$M(0.5l)_{\text{точне}} = \frac{q}{16} \cdot 0.5l(3l - 4l) = -\frac{ql^2}{32} = -3.125 \cdot 10^{-2} ql^2.$$

Як свідчать дані з таблиці 17.1, при застосуванні базисних функцій (17.49) розрахункові прогини обчислюються із дуже високою точністю. Так, вже при $n=2$ відносна похибка при обчисленні $w(0.2l)$ була меншою за 1%. В той же час, точність визначення моментів на основі похідних від базисних функцій (17.49) є, нажалі, набагато меншою.

Таблиця 17.1

n	$w(0.2l) \frac{EI}{ql^4}$	Відносна похибка Δ_w , %	$M(0.5l) \frac{1}{ql^2}$	Відносна похибка Δ_M , %
2	$3.3985 \cdot 10^{-4}$	0.7	$-2.208 \cdot 10^{-2}$	39.3
4	$3.371 \cdot 10^{-4}$	0.11	$-2.566 \cdot 10^{-2}$	17.9
10	$3.3735 \cdot 10^{-4}$	0.04	$-2.858 \cdot 10^{-2}$	8.6
20	$3.3748 \cdot 10^{-4}$	0.006	$-2.981 \cdot 10^{-2}$	4.6

Точність обчислення поперечної сили ілюструється на рис.17.12, де суцільна лінія відповідає значенням поперечної сили, знайденим за допомогою подання (17.54) при $n=4$, а пунктирна лінія – точним значенням, визначеним за формулою (17.59).

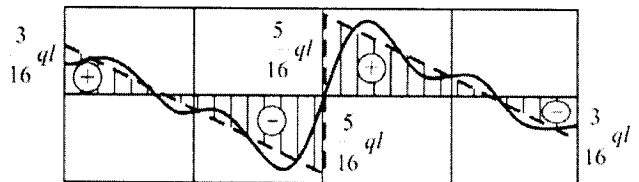


Рис. 17.12

Ми пересвідчилися в тому, що знаходження внутрішніх зусиль шляхом диференціювання функції прогину може призвести до значних похибок. Якщо місце, де ці зусилля сягають найбільших значень, відоме заздалегідь, то привабливою виглядає ідея про створення обчислювального алгоритму в такий спосіб, щоб шукане зусилля безпосередньо входило до складу основних невідомих. Один з варіантів побудови такого алгоритму базується на методі множників Лагранжа і розглядається нижче.

Зазвичай варіаційна задача Лагранжа для системи з n ступенями свободи формулюється в наступному вигляді:

$$\delta U(y_j) + \delta A(y_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.60)$$

де через y_j позначені узагальнені координати, які характеризують деформований стан системи.

Якщо на систему накладено кінематичну в'язь $f(y_j) = 0$, то у відповідності із методом множників Лагранжа варіаційне рівняння (17.60) має бути переписане таким чином:

$$\delta \bar{U}(y_j) + \delta A(y_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.61)$$

де

$$\bar{U}(y_j, \lambda) = U(y_j) - \lambda f(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17.62)$$

являє собою так звану усічену потенціальну енергію системи.

Далі, на систему може бути накладена не одна, а декілька в'язей:

$$f_1(y_j) = 0, \quad f_2(y_j) = 0, \quad \dots, \quad f_m(y_j) = 0.$$

При цьому вираз для усіченої потенціальної енергії системи набуває наступного вигляду:

$$\bar{U}(y_j, \lambda_k) = U(y_j) - \lambda_1 f_1(y_j) - \lambda_2 f_2(y_j) - \dots - \lambda_m f_m(y_j). \quad (17.63)$$

В результаті знаходження екстремуму функціонала Лагранжа зводиться до розв'язання системи $n + m$ рівнянь, з яких перші n рівнянь – це співвідношення типу

$$\frac{\partial \bar{U}(y_j, \lambda_k)}{\partial y_j} = P_j, \quad (17.64)$$

де P_j – це узагальнена сила, а останні m рівнянь – це умови рівності нулю частинних похідних по λ_k :

$$\frac{\partial \bar{U}(y_j, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} = -f_k = 0, \quad (17.65)$$

тобто – це рівняння в'язей.

Розв'язуючи систему рівнянь (17.64), (17.65), отримаємо не тільки параметри, що характеризують деформований стан системи, а ще і реакції в'язей, які виявляються пропорційними множникам Лагранжа λ_k .

Знову розглянемо задачу про згин балки на трьох опорах (рис. 17.11). Шукаємо розв'язок задачі у вигляді (17.31), причому в якості базисних функцій використовуємо компоненти тригонометричного ряду (17.39). Такі функції не задовольняють умову відсутності прогину посередині прогону. Тому на параметри системи накладається додаткове обмеження:

$$f(a_j) = \sum_{j=1}^n a_j \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2} \right] = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_j = 0. \quad (17.66)$$

Оскільки величина $f(a_j) = 0$ за фізичним змістом є прогином посередині прогону, а добуток $\lambda f(a_j)$, який входить до виразу усіченої потенціальної енергії системи (17.62) повинен бути роботою, то параметр λ має бути силою, яка прикладена замість відкинutoї в'язі, тобто в даному випадку λ дорівнює реакції середньої опори R_C .

З використанням співвідношень (17.40–17.42) неважко отримати вирази для обчислення усіченої потенціальної енергії та узагальненої сили:

$$\bar{U}(a_j, R_C) = \frac{\pi^4}{4l^3} EI \sum_{j=1}^n a_j^2 (2j-1)^4 - R_C \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_j, \quad P_j = \frac{2ql}{(2j-1)\pi}. \quad (17.67)$$

Умови екстремуму функціонала Лагранжа (17.64) та (17.65) дозволяють отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $n+1$ відносно узагальнених координат a_j та реакції середньої опори R_C :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{2l^3} EI (2j-1)^4 a_j - (-1)^{j+1} R_C &= \frac{2ql}{(2j-1)\pi}, \quad j=1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_j &= 0. \end{aligned} \quad (17.68)$$

Після знаходження з системи (17.68) параметрів a_j та реакції опори R_C знаходимо за формулою (17.44) прогини балки, а за допомогою виразу $Q(0.5l_{\pm 0}) = \mp 0.5R_C$ – поперечну силу в перерізах біля середньої опори. Результати обчислень величин $w(0.2l)$ та $Q(0.5l_0)$ при різних значеннях n наведені в таблиці 17.2. Похибки знайдених результатів визначалися виходячи з того, що відповідні точні значення дорівнюють:

$$w(0.2l)_{\text{точне}} = 3.375 \cdot 10^{-4} \frac{ql^4}{EI}, \quad Q(0.5l_0)_{\text{точне}} = \frac{5ql}{16} = 0.3125ql.$$

Вміст таблиці 17.2 переконливо свідчить про ефективність алгоритму, побудованого на основі методу множників Лагранжа.

Звернемось тепер до задачі про згин консольної балки з шарнірно опертим кінцем під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис. 17.13). Розв'язок $w(x)$ будемо шукати у вигляді суми тригонометричного ряду. Базисні функції, які

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

забезпечують відсутність прогинів на обох опорах та рівність нулю кута повороту в затисненні, можуть бути подані наступним чином:

$$\varphi_k(x) = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\right] - \cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right]. \quad (17.69)$$

Таблиця 17.2

n	$w(0,2l)\frac{EI}{ql^4}$	Відносна похибка Δ_w , %	$\frac{Q(0,5l+0)}{ql}$	Відносна похибка Δ_Q , %
2	$3.271 \cdot 10^{-4}$	3.1	0.3131	0.2
4	$3.340 \cdot 10^{-4}$	1.0	0.31261	0.03
10	$3.3735 \cdot 10^{-4}$	0.04	0.31251	0.002
20	$3.3748 \cdot 10^{-4}$	0.006	0.312501	0.0003

Дійсно,

$$\varphi_k(0) = 1 - 1 = 0;$$

$$\varphi_k(l) = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right] - \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = 0 - 0;$$

$$\varphi'_k(x) = -\frac{\pi}{2l} \left\{ (2k-1) \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\right] - (2k+1) \sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] \right\};$$

$$\varphi'_k(0) = -\frac{\pi}{2l} [(2k-1) \cdot 0 - (2k+1) \cdot 0] = 0.$$

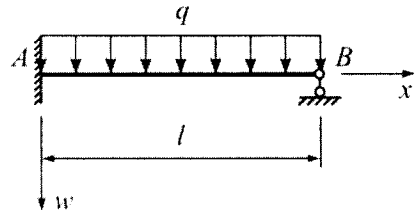


Рис. 17.13

Застосовуючи метод Рітца в канонічній формі, послідовно отримуємо:

$$\varphi_k''(x) = -\frac{\pi^2}{4l^2} \left\{ (2k-1)^2 \cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\right] - (2k+1)^2 \cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] \right\}, \quad (17.70)$$

$$\delta_{kj} = \int_0^l EI \varphi_k''(x) \varphi_j''(x) dx = \begin{cases} \frac{EI\pi^4}{16l^3} (16k^4 + 24k^2 + 1), & \text{якщо } k = j \\ -\frac{EI\pi^4}{16l^3} (2k-1)^4, & \text{якщо } k = j+1 \\ -\frac{EI\pi^4}{16l^3} (2k+1)^4, & \text{якщо } k = j-1 \\ 0, & \text{якщо } k < j-1 \cup k > j+1 \end{cases} \quad (17.71)$$

$$\Delta_{kp} = \int_0^l q \varphi_k(x) dx = \frac{8ql}{\pi} (-1)^k \frac{k}{(2k-1)(2k+1)}. \quad (17.72)$$

За допомогою (17.71), (17.72) формуємо систему рівнянь типу (17.33) при різних значеннях n і, розв'язуючи її, знаходимо узагальнені координати

a_1, a_2, \dots, a_n , після чого визначаємо за формулою (17.48) прогини $w(x)$. Згинальні моменти можуть бути знайдені на основі співвідношення

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x).$$

Наприклад, значення моменту в затисненні дорівнює

$$M(0) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(0) = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \sum_{k=1}^n a_k \left[(2k-1)^2 - (2k+1)^2 \right]. \quad (17.73)$$

В той же час, оскільки точний розв'язок задачі має відомий вигляд:

$$w(x)^{\text{точно}} = \frac{q}{48EI} x^2(x-l)(2x-3l), \quad M(x)^{\text{точно}} = \frac{q}{8}(x-l)(4x-l),$$

то завжди можна обчислити похибку проведених розрахунків.

Результати розрахунків (нормовані прогини посередині прогону та моменти в затисненні) при різних значеннях n наведені в таблиці 17.3. При визначенні похибки знайдених результатів було враховано, що відповідні точні значення дорівнюють:

$$w(0.5l)^{\text{точно}} = \frac{ql^4}{192EI} = 5.21 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}, \quad M(0)^{\text{точно}} = -\frac{ql^2}{8} = -0.125ql^2. \quad (17.74)$$

Таблиця 17.3

n	$w(0.5l) \frac{EI}{ql^4}$	Відносна похибка $\Delta_w, \%$	$M(0) \frac{1}{ql^2}$	Відносна похибка $\Delta_M, \%$
2	$5.175 \cdot 10^{-3}$	0.63	-0.0722	42.2
4	$5.173 \cdot 10^{-3}$	0.69	-0.0974	22.1
10	$5.207 \cdot 10^{-3}$	0.03	-0.113	9.6
20	$5.208 \cdot 10^{-3}$	0	-0.119	4.8

Бачимо, що за традиційно високої точності обчислення прогинів згинальні моменти збігаються досить повільно.

Застосуємо тепер для чисельного розв'язання задачі метод множників Лагранжа. В якості координатних оберемо функції

$$\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (17.75)$$

які забезпечують відсутність прогинів на обох опорах, але не забезпечують рівність нулю кута повороту в затисненні.

Таким чином, маємо

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad w'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k'(x) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n k a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$w'(0) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n k a_k, \quad w''(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^n k^2 a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (17.76)$$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

Отже, на систему необхідно накласти додаткове обмеження

$$f(a_k) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n ka_k = 0. \quad (17.77)$$

Величина $f(a_j)$ за фізичним змістом є кутом повороту перерізу $x=0$, тому множник Лагранжа λ має бути моментом, що прикладений замість відкинутої в'язі, тобто λ – це реактивний момент в затисненні M_0 .

З урахуванням того, що

$$\int_0^l \varphi_k''(x)\varphi_j''(x)dx = \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)dx = \begin{cases} 0.5l, & \text{якщо } k = j, \\ 0, & \text{якщо } k \neq j, \end{cases}$$

$$\int_0^l \varphi_k(x)dx = \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx = \left[1 - (-1)^k\right] \frac{l}{k\pi},$$

вирази для обчислення усіченої потенціальної енергії та узагальненої сили набувають вигляду:

$$\bar{U}(a_j, \lambda) = \frac{\pi^4}{4l^3} EI \sum_{j=1}^n j^4 a_j^2 - M_0 \frac{\pi}{l} \sum_{j=1}^n ja_j, \quad P_j = \left[1 - (-1)^j\right] \frac{ql}{j\pi}.$$

Умови екстремуму функціонала Лагранжа дозволяють отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $n+1$ відносно n узагальнених координат a_j та реактивного моменту в затисненні M_0 :

$$\frac{\pi^4}{2l^3} EI j^4 a_j - \frac{\pi}{l} j M_0 = \left[1 - (-1)^j\right] \frac{ql}{j\pi}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.78)$$

$$\sum_{j=1}^n ja_j = 0.$$

Після розв'язання системи прогини знаходимо за допомогою виразу (17.76).

Результати розрахунків (нормовані прогини посередині прогону та моменти в затисненні) при різних значеннях n наведені в таблиці 17.4. Точні значення розрахункових параметрів задаються виразами (17.74).

Таблиця 17.4

n	$w(0.5l) \frac{EI}{ql^4}$	Відносна похибка $\Delta_w, \%$	$M(0) \frac{1}{ql^2}$	Відносна похибка $\Delta_M, \%$
2	$2.61 \cdot 10^{-3}$	49.9	-0.162	29.6
4	$4.07 \cdot 10^{-3}$	21.9	-0.144	15.2
10	$4.73 \cdot 10^{-3}$	9.2	-0.133	6.4
20	$4.97 \cdot 10^{-3}$	4.6	-0.129	3.2

Порівнюючи вміст таблиць 17.3 і 17.4, можемо зробити висновки про те, що при виборі базисних функцій (17.69), які задовольняють всі кінематичні умови,

розрахунків прогини обчислюються із дуже високою точністю. Так, вже при $n=2$ відносна похибка при обчисленні $w(0.5l)$ була меншою за 1%, тоді як подання розв'язку у вигляді (17.76) з подальшим врахуванням обмеження (17.77) дозволяє отримати результат з похибкою, меншою за 10%, тільки при $n \geq 10$.

В той же час, визначення реактивних моментів з використанням базисних функцій (17.69) призводить до більш значних похибок, ніж у випадку застосування простішого тригонометричного ряду (17.76) і додаткової умови (17.77), коли момент в затисненні заходиться не шляхом диференціювання, а безпосередньо з розв'язку системи рівнянь. Як бачимо, при всіх наведених в таблицях значеннях n похибка обчислення моменту $M(0)$ в другому випадку (останній стовпчик таблиці 17.4) була приблизно в півтора рази меншою за похибку, до якої призводить застосування формули (17.73) (останній стовпчик таблиці 17.3).

Власне кажучи, саме ця обставина, а також простіший вигляд системи (17.78) виправдовують застосування підходу, що базується на методі множників Лагранжа.

Розглянемо, нарешті, балку, затиснену з обох боків (рис. 17.14). Базисні функції, які задовольняють всі кінематичні граничні умови (відсутність прогинів та кутів повороту на обох кінцях), можуть бути подані наступним чином:

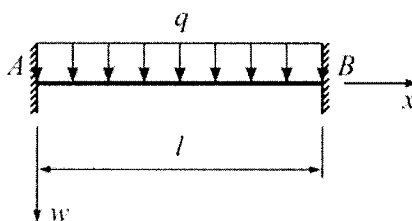


Рис. 17.14

$$\varphi_k(x) = 1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right). \quad (17.79)$$

Дійсно,

$$\varphi_k(0) = 1 - \cos(0) = 0; \quad \varphi_k(l) = 1 - \cos(2k\pi) = 0;$$

$$\varphi'_k(x) = \frac{2k\pi}{l} \sin\left(\frac{2k\pi x}{l}\right);$$

$$\varphi'_k(0) = \frac{2k\pi}{l} \sin(0) = 0; \quad \varphi'_k(l) = \frac{2k\pi}{l} \sin(2k\pi) = 0.$$

Застосовуючи метод Рітца в канонічній формі, послідовно отримуємо:

$$\varphi_k''(x) = \frac{4k^2\pi^2}{l^2} \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right),$$

$$\delta_{kj} = \int_0^l EI \varphi_k''(x) \varphi_j''(x) dx = \frac{16EI\pi^4 k^2 j^2}{l^4} \int_0^l \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} \frac{8EI\pi^4 k^4}{l^3}, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

$$\Delta_{kp} = - \int_0^l q \varphi_k(x) dx = -ql.$$

Матриця системи алгебраїчних рівнянь має діагональний вигляд (базисні функції є ортогональними). Розв'язок такої системи:

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

$$a_k = -\frac{\Delta_{kp}}{\delta_{kk}} = \frac{ql^4}{8EI k^4 \pi^4}.$$

Отже,

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x) = \frac{ql^4}{8EI \pi^4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right) \right], \quad (17.80)$$

тоді як точні значення задаються формулою

$$w(x)^{\text{точне}} = \frac{q}{24EI} x^2(l-x)^2. \quad (17.81)$$

Максимальні значення прогину посередині прогону визначається за формулою

$$w(0.5l) = \frac{ql^4}{8EI \pi^4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} [1 - \cos(k\pi)] = \frac{ql^4}{8EI \pi^4} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k^4}, \quad (17.82)$$

Зауважимо, що навіть якщо утримати лише перший член подання (17.82), то значення найбільшого прогину становитиме

$$w(0.5l) \approx \frac{ql^4}{4EI \pi^4} = 2,566 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI},$$

тоді як точне значення, яке дається виразом (17.81), дорівнює

$$w(0.5l) = \frac{ql^4}{384EI} = 2.604 \frac{ql^4}{EI},$$

тобто обчислення за формулою (17.82) при $n=1$ дає досить точний результат, відносна похибка якого становить 1.45%.

Більш того, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right) = -\frac{\pi^4}{3} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{30} \right],$$

то

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{ql^4}{8EI \pi^4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right) \right] \right\} = \\ & = \frac{q}{24EI} \left[x^4 - 2x^2 l^2 + x^2 l^2 \right] = \frac{q}{24EI} x^2(l-x)^2 = w(x)^{\text{точне}}. \end{aligned}$$

Отже функціональний ряд (17.80) є збіжним при будь-якому значенні x , а формула (17.80) дозволяє обчислити значення прогинів балки з будь-якою точністю.

Розподіл значень згинального моменту по довжині балки знаходимо шляхом диференціювання:

$$M(x) = -EI w''(x) = -EI \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x) = -\frac{ql^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right). \quad (17.83)$$

Водночас, розподіл точних значень має вигляд квадратного тричлену

$$M(x)^{\text{точне}} = \frac{q}{12}(6lx - 6x^2 - l^2). \quad (17.84)$$

Найбільшого за абсолютною величиною значення моменту набуває в затисненні:

$$M(0) = -\frac{ql^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos(0) = -\frac{ql^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad (17.85)$$

$$M(0)^{\text{точне}} = -\frac{ql^2}{12} \approx -0.0833ql^2. \quad (17.86)$$

Момент в затисненні, обчислений за допомогою виразу (17.85) при $n=1$, дорівнює

$$M(0) \approx -\frac{ql^2}{2\pi^2} = -0.0507ql^2,$$

що є дуже грубим наближенням (відносна похибка становить 39.2%). При $n=4$ значення моменту в затисненні дорівнює

$$M(0) \approx -0.0721ql^2,$$

що також не можна вважати задовільним наближенням, бо похибка становить 13.5%. Навіть при $n=4$ значення моменту $M(0) \approx -0.0721ql^2$ (похибка 5.8%).

В той же час, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right) = \pi^2 \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{6} \right],$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{ql^4}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right) \right\} = \frac{q}{12} [6lx - 6x^2 - l^2] = M(x)^{\text{точне}}.$$

Таким чином, функціональний ряд (17.83) при будь-якому значенні x збігається до точного значення, хоча, як ми пересвідчилися, відбувається це досить повільно.

Якщо нас, насамперед, цікавить екстремальне значення моменту, то до чисельного розв'язання задачі варто застосувати метод множників Лагранжа. В якості координатних оберемо функції

$$\varphi_k(x) = \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right], \quad (17.87)$$

які забезпечують відсутність прогинів на обох опорах, але не забезпечують рівність нулю кутів повороту в затисненнях.

Таким чином, маємо

$$w(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right], \quad (17.88)$$

$$w'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k'(x) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n (2k-1) a_k \cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right], \quad w'(0) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n (2k-1) a_k,$$

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

$$w'(l) = -w'(0), \quad w''(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 a_k \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right].$$

Отже, на систему необхідно накласти додаткове обмеження

$$f(a_k) = w'(0) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k = 0. \quad (17.89)$$

Зауважимо, що завдяки симетрії базисних функцій при рівності нулю кута повороту перерізу $x=0$ автоматично зникне поворот перерізу $x=l$. Крім того, оскільки $f(a_j)$ є кутом повороту перерізу $x=0$, то множник Лагранжа λ має бути реактивним моментом в затисненні M_0 .

З урахуванням того, що обидва реактивні моменти виконують однакову роботу, величина кожної з яких дорівнює

$$M_0 w'(0) = M_0 \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k,$$

а базисні функції є ортогональними:

$$\int_0^l \varphi_k''(x) \varphi_j''(x) dx = \int_0^l \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right] \sin\left[\frac{(2j-1)\pi x}{l}\right] dx = \begin{cases} 0.5l, & \text{якщо } k=j, \\ 0, & \text{якщо } k \neq j, \end{cases}$$

$$\int_0^l \varphi_k(x) dx = \int_0^l \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right] dx = \frac{2l}{(2k-1)\pi},$$

вирази для обчислення усіченої потенціальної енергії та узагальненої сили набувають вигляду:

$$\bar{U}(a_j, \lambda) = \frac{\pi^4}{4l^3} EI \sum_{j=1}^n (2j-1)^4 a_j^2 - 2M_0 \frac{\pi}{l} \sum_{j=1}^n (2j-1)a_j, \quad P_j = \frac{2ql}{(2j-1)\pi}.$$

З умов екстремуму функціонала Лагранжа отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $n+1$ відносно n узагальнених координат a_j та реактивного моменту в затисненні M_0 :

$$\frac{\pi^4}{2l^3} EI (2j-1)^4 a_j - \frac{\pi}{l} (2j-1) M_0 = \frac{2ql}{(2j-1)\pi}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n (2j-1)a_j = 0. \quad (17.90)$$

Після розв'язання системи (17.90) стає відомим момент в затисненні M_0 , а прогини при відомих узагальнених координат a_j можемо знайти за допомогою виразу (17.88).

Результати розрахунків (нормовані прогини посередині прогону та моменти в затисненні) при різних значеннях n наведені в таблиці 17.5. Точні значення розрахункових параметрів задаються виразами (17.81) та (17.86).

Таблиця 17.5

n	$w(0.5l) \frac{EI}{ql^4}$	Відносна похибка $\Delta_w, \%$	$M(0) \frac{1}{ql^2}$	Відносна похибка $\Delta_M, \%$
2	$1.549 \cdot 10^{-3}$	40.5	-0.0923	10.8
4	$2.065 \cdot 10^{-3}$	20.7	-0.0877	5.3
10	$2.390 \cdot 10^{-3}$	8.2	-0.0851	2.1
20	$2.498 \cdot 10^{-3}$	4.1	-0.0842	1.0

Аналізуючи вміст таблиці 17.5, неважко помітити, що переміщення, отримані за алгоритмом, що базується на методі множників Лагранжа, суттєво програють у точності результатам, отриманим на основі базисних функцій (17.79), які задовольняють всі кінематичні умови. В той же час, визначення реактивних моментів з використанням базисних функцій (17.79) і подальшим диференціюванням призводить до значно більших похибок, ніж у випадку застосування простішого тригонометричного ряду (17.87) і додаткової умови (17.89), коли момент в затисненні заходиться безпосередньо із розв'язку системи рівнянь.

Отже, якщо метою розрахунку є саме екстремальне значення моменту, то доцільно застосовувати підхід, що базується на методі множників Лагранжа.

17.11. Метод Канторовича. Приклад

Цей метод займає проміжне положення між точним розв'язком задачі і методами Рітца та Б.Г.Гальоркіна. У методі Рітца задача про мінімум подвійного інтеграла зводилася до задачі про мінімум функції декількох змінних. Це досягалось за допомогою того, що вид розв'язку вибирався апріорі і потім лише підбиралися найкращі значення сталих, що входять до нього.

При зведенні до звичайних рівнянь розв'язок відшуковують у такій формі, що до його складу входять невизначені функції однієї змінної. Таким чином, задача про мінімум подвійного інтеграла зводиться до задачі про мінімум простого інтеграла. Перевага даного методу, окрім його більшої точності, в тому, що в ньому лише частина виразу, що дає розв'язок, вибирається апріорі, а частина функцій визначається у відповідності до характеру задачі.

При використанні методу Рітца для функціоналів $v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, що залежать від функції декількох незалежних змінних, обирається координатна система функцій

$$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n), W_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, W_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

і наближений розв'язок варіаційної задачі відшукується у вигляді

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де коефіцієнти α_k – сталі.

17. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ПРЯМИХ МЕТОДІВ

Метод Канторовича також потребує вибору координатної системи функцій

$$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n), W_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, W_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

і наближений розв'язок також відшукується у вигляді

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

але коефіцієнти $\alpha_k(x_i)$ не є сталими, а являються невідомими функціями однієї з незалежних змінних. Функціонал $v[z]$ на класі функцій виду

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

перетворюється у функціонал $\tilde{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)]$, який залежить від m функцій однієї незалежної змінної

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i).$$

Функції $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)$ вибирають так, щоб функціонал \tilde{v} досягав екстремуму.

Якщо після цього перейти до границі при $m \rightarrow \infty$, то при деяких умовах можна отримати точний розв'язок, якщо ж граничного переходу не здійснювати, то даним методом буде отримано наближений розв'язок, до того ж значно точніший, ніж при використанні методу Рітца з тими ж координатними функціями і з тим же числом членів m .

Більша точність даного методу викликана тим, що клас функцій

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
 зі змінними $\alpha_k(x_i)$ значно ширший за клас функцій

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
 при сталих α_k і, відтак, серед функцій виду

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
 можна підібрати функції, що краще апроксимують

розв'язок варіаційної задачі, ніж серед функцій виду $z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де

α_k є сталими.

Приклад 17.7. Нехай потрібно дослідити на екстремум функціонал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$
 поширений на область D , що обмежена

кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = x_0$ та $x = x_1$ (рис. 17.15). На границі області D задані значення функції $z(x, y)$. Обираємо послідовність координатних функцій:

$$W_1(x, y), W_2(x, y), \dots, W_n(x, y),$$

Обмежуючись поки m першими функціями даної послідовності, ми будемо відшукувати розв'язок варіаційної задачі у вигляді суми функцій

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) W_k(x, y) \text{ або, змінивши позначення } \alpha_k(x) \text{ на } u_k(x), \text{ отримаємо:}$$

$$z_m(x, y) = u_1(x)W_1(x, y) + u_2(x)W_2(x, y) + \dots + u_m(x)W_m(x, y),$$

де W_k – обрані нами функції, а u_k – невідомі функції, які ми визначаємо так, щоб функціонал v досягав екстремуму. Маємо

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy.$$

Оскільки підінтегральна функція є відомою функцією y , то інтегрування по y може бути виконано і функціонал $v[z_m(x, y)]$ буде функціоналом виду

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} q(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u_1', \dots, u_m') dx.$$

Функції $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ обираються так, щоб функціонал $v[z_m(x, y)]$ досягав екстремуму. Отже, $u_i(x)$ повинні задовольняти системі рівнянь Ейлера:

$$\varphi_{u_1} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_1'} = 0, \quad \varphi_{u_2} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_2'} = 0, \quad \varphi_{u_m} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_m'} = 0.$$

Довільні сталі обираються так, щоб $z_m(x, y)$ задовольняла на прямих $x = x_0$ та $x = x_1$ заданим граничним умовам.

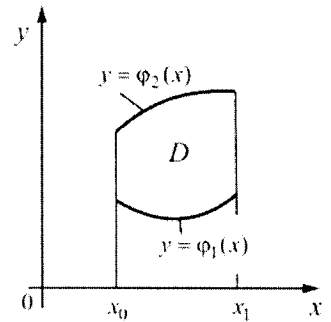


Рис. 17.15

18. Наближені методи розв'язання тривимірних варіаційних задач

18.1. Метод Рітца

Варіаційне рівняння Лагранжа

$$\begin{aligned} & \delta U - \iiint_V \mathbf{g} \delta \mathbf{u} dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_s \delta \mathbf{u}_s dS = \\ & = \delta U - \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \iint_{S_1} (\bar{P}_{xv} \delta u + \bar{P}_{yv} \delta v + \bar{P}_{zv} \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (18.1)$$

найчастіше розв'язують за допомогою методу Рітца

Досліджується деформований стан пружного тіла при заданих граничних умовах. На частині поверхні S_1 ми маємо статичні граничні умови, які немає потреби задовольняти заздалегідь. На частині поверхні S_2 задані переміщення

$$u = \bar{u}(x, y, z), \quad v = \bar{v}(x, y, z), \quad w = \bar{w}(x, y, z) \quad \in S_2. \quad (18.2)$$

Кінематичні умови на S_2 мають бути задовільнені *заздалегідь*. Тому обираємо для компонентів переміщення вирази:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{k=1}^{N_u} a_k f_k(x, y, z), \\ v &= v_0 + \sum_{k=1}^{N_v} b_k \varphi_k(x, y, z), \\ w &= w_0 + \sum_{k=1}^{N_w} c_k \psi_k(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

де величини

$$\left. \begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N_u} \\ &b_1, b_2, b_3, \dots, b_{N_v} \\ &c_1, c_2, c_3, \dots, c_{N_w} \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

є довільними постійними, а координатні (базисні) функції

$$\left. \begin{aligned} &f_1, f_2, f_3, \dots \\ &\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \\ &\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

є відомими функціями координат x, y, z , які задовольняють умови лінійної незалежності і повноти, причому на частині поверхні S_2 ці функції повинні дорівнювати нулю. Функції $u_0(x, y, z)$, $v_0(x, y, z)$, $w_0(x, y, z)$ обираємо так, щоб задовольнити граничні умови на S_2 :

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad w_0 = \bar{w}, \quad \in S_2, \\ u_0 &= 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \in S_1. \end{aligned} \quad (18.6)$$

На підставі викладеного ми маємо наступні вирази для можливих переміщень:

$$\delta u = \sum_{k=1}^{N_u} f_k \delta a_k, \delta v = \sum_{k=1}^{N_v} \varphi_k \delta b_k, \delta w = \sum_{k=1}^{N_w} \psi_k \delta c_k \quad (18.7)$$

причому варіації параметрів

$$\left. \begin{aligned} &\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \dots, \delta a_{N_u} \\ &\delta b_1, \delta b_2, \delta b_3, \dots, \delta b_{N_v} \\ &\delta c_1, \delta c_2, \delta c_3, \dots, \delta c_{N_w} \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

абсолютно довільні і нічим між собою не пов'язані. З метою визначення параметрів (18.4) вносимо (18.3) у формулу

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{DA}^T \mathbf{u})^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dV$$

і отримуємо звідси U як функцію другого ступеня відносно постійних (18.4). Тому маємо:

$$\delta U = \sum_{k_1=1}^{N_u} \frac{\partial U}{\partial a_{k_1}} \delta a_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{N_v} \frac{\partial U}{\partial b_{k_2}} \delta b_{k_2} + \sum_{k_3=1}^{N_w} \frac{\partial U}{\partial a_{k_3}} \delta c_{k_3}. \quad (18.9)$$

Підставимо (18.7) і (18.9) в (18.1), ми отримаємо:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_u} \left[\frac{\partial U}{\partial a_k} - \iiint_V f_k X dV - \iint_{S_1} f_k \bar{P}_{xv} dS \right] \delta a_k + \sum_{m=1}^{N_v} \left[\frac{\partial U}{\partial b_m} - \iiint_V \varphi_m Y dV - \iint_{S_1} \varphi_m \bar{P}_{yv} dS \right] \delta b_m + \\ &+ \sum_{l=1}^{N_w} \left[\frac{\partial U}{\partial c_l} - \iiint_V \psi_l Z dV - \iint_{S_1} \psi_l \bar{P}_{zv} dS \right] \delta c_l = 0. \end{aligned}$$

Результатом того, що варіації (18.8) абсолютно довільні і нічим між собою не пов'язані, є система рівнянь

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial a_{k_1}} - \iiint_V f_{k_1} X dV - \iint_{S_1} f_{k_1} \bar{P}_{xv} dS = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial b_{k_2}} - \iiint_V \varphi_{k_2} Y dV - \iint_{S_1} \varphi_{k_2} \bar{P}_{yv} dS = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial a_{k_3}} - \iiint_V \psi_{k_3} Z dV - \iint_{S_1} \psi_{k_3} \bar{P}_{zv} dS = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

причому $k_1=1, 2, \dots, N_u$, $k_2=1, 2, \dots, N_v$, $k_3=1, 2, \dots, N_w$.

Кількість цих рівнянь дорівнює кількості параметрів (18.4), і оскільки відносно них U є функцією другого ступеня, то (18.10) є системою алгебраїчних лінійних рівнянь, розв'язок якої дає значення шуканих параметрів. В свою чергу, маючи значення параметрів (18.4), неважко за формулами (18.3) визначити компоненти переміщення в будь-якій точці.

Зауважимо, що розв'язок задачі, отриманий у такий спосіб, є наближенням і

точність його взагалі є тим вищою, чим більше постійних (18.4) і чим майстерніше підібрані базисні функції (18.5). Також зазначимо, що статичні граничні умови до уваги не приймалися. Вони будуть задовільнені тим точніше, чим більша кількість параметрів (18.4) використана у поданнях (18.3). Оскільки вибір функцій (18.5), що задовольняють заздалегідь статичні граничні умови, часто є важким, то в цьому можна побачити значну перевагу методу Рітца. Крім того, завдяки тому, що базисні функції (18.5) є неперервними, співвідношення Сен-Венана виконуються автоматично.

18.2. Метод Бубнова-Гальоркіна

До прямих методів розв'язання варіаційної задачі належить також метод Бубнова-Гальоркіна, в якому використовуються функції u_0, v_0, w_0 , що задовольняють всі граничні умови, як кінематичні, так і статичні, та координатні функції (18.5), які задовольняють всі однорідні граничні умови. Тоді згідно із принципом можливих переміщень справедливою є рівність:

$$\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})\delta\mathbf{u}dV = 0. \quad (18.11)$$

Якщо скористатися виразами для можливих переміщень (18.7), то внаслідок довільності варіацій (18.8) ми отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X \right) f_{k_1} dV &= 0, \\ \iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \varphi_{k_2} dV &= 0, \\ \iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z \right) \psi_{k_3} dV &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

де $k_1=1, 2, \dots, N_u$, $k_2=1, 2, \dots, N_v$, $k_3=1, 2, \dots, N_w$.

Кількість цих рівнянь дорівнює кількості параметрів (18.4). Шість компонент напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, які входять в ліву частину системи (18.12)

виражаються для однорідного ізотропного тіла, згідно з формулою $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}$, як лінійні функції параметрів (18.4). Отже для визначення цих параметрів ми матимемо систему лінійних рівнянь. У тих випадках, коли можливо заздалегідь задовольнити статичні граничні умови, метод Бубнова-Гальоркіна дозволяє значно спростити обчислювальну процедуру.

18.3. Метод Треффца

Є ще одна можливість вибору функцій (18.3), а саме, їх можна вибрати так, щоб вони задовольняли диференціальні рівняння рівноваги в переміщеннях. Такий підхід відповідає методу Треффца. При цьому згідно із принципом можливих

переміщень отримаємо:

$$\iint_{S_1} [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} - \bar{P}_{xv})\delta u + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} - \bar{P}_{yv})\delta v + (l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z - \bar{P}_{zv})\delta w] dS = 0. \quad (18.13)$$

Скористаємось виразами для можливих переміщень (18.7) і отримаємо завдяки довільності варіацій (18.8) наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{S_1} (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} - \bar{P}_{xv}) \delta f_{k_1} dS &= 0, \\ \iint_{S_1} (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} - \bar{P}_{yv}) \delta \varphi_{k_2} dS &= 0, \\ \iint_{S_1} (l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z - \bar{P}_{zv}) \delta \psi_{k_3} dS &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

де $k_1=1, 2, \dots, N_u$, $k_2=1, 2, \dots, N_v$, $k_3=1, 2, \dots, N_w$.

Кількість цих рівнянь дорівнює кількості довільних параметрів (18.4). Ліві частини рівнянь (18.14) відносно цих параметрів є лінійними, функціями, тому кількість лінійних рівнянь є достатньою для їх визначення. Таким чином, ми виражаємо u, v, w по формулам (18.3) як суми координатних функцій, з довільними коефіцієнтами, які визначаються по вказаному методу. При цьому координатні функції є розв'язками рівнянь рівноваги в переміщеннях, а статичні граничні умови задовольняються автоматично, оскільки саме вони служать для визначення невідомих параметрів.

Розв'язання варіаційного рівняння Кастильяно

Якщо задача пружної рівноваги формулюється в напруженнях, тобто застосовуються диференціальні рівняння рівноваги Коші і статичні граничні умови, то головна трудність полягає в задоволенні шести тотожних співвідношень Бельтрамі-Мічелла. Але оскільки тотожні співвідношення Сен-Венана є наслідком варіаційного рівняння Кастильяно, то і співвідношення Бельтрамі-Мічелла також будуть його наслідком.

Тому застосування варіаційного рівняння Кастильяно до наближеного рішення задач пружної рівноваги в напруженнях не вимагає попереднього задоволення тотожних співвідношень Бельтрамі-Мічелла тими значеннями шести компонентів напруженого стану, якими ми задаємося. Ці тотожні співвідношення приблизно задовольняються самі собою, і тим точніше, чим більше довільних постійних взято в наближених виразах компонентів напруженого стану і чим вдаліше зроблений їх вибір.

У разі однорідного ізотропного тіла варіаційне рівняння Кастильяно має наступний вигляд:

$$-\delta U^{\text{доп}} + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \delta \mathbf{P}_S dS = -\delta U^{\text{доп}} + \iint_{S_2} (\bar{u} \delta P_{xv} + \bar{v} \delta P_{yv} + \bar{w} \delta P_{zv}) dS = 0, \quad (18.15)$$

де доповнювальна потенціальна енергія деформації дається виразом:

$$U^{\text{доп}} = \iiint_V u_0^{\text{доп}} dV = \frac{1}{2E} \iiint_V \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dV. \quad (18.16)$$

Розрізнятимемо два випадки:

1. Якщо на всій поверхні задані силові граничні умови, то варіаційне рівняння Кастільяно набуває вигляду:

$$\delta U^{\text{доп}} = \frac{1}{E} \iiint_V \left[\sigma_x \delta\sigma_x + \sigma_y \delta\sigma_y + \sigma_z \delta\sigma_z - \mu(\sigma_x \delta\sigma_y + \sigma_y \delta\sigma_x + \sigma_y \delta\sigma_z + \sigma_z \delta\sigma_y + \sigma_z \delta\sigma_x + \sigma_x \delta\sigma_z) + 2(1+\mu)(\tau_{xy} \delta\tau_{xy} + \tau_{yz} \delta\tau_{yz} + \tau_{zx} \delta\tau_{zx}) \right] dV = 0. \quad (18.17)$$

В цьому разі значення шести компонентів напруженого стану $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, які потрібно внести в (18.16), повинні задовольняти рівнянням рівноваги в напруженнях і статичним граничним умовам.

Тому в даному випадку заданих поверхневих сил П.Ф.Папкович запропонував брати наступні вирази для компонентів напруженого стану:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= X_x^0 + \sum_m A_m X_x^{(m)}, & \tau_{yz} &= Y_z^0 + \sum_m A_m Y_z^{(m)}, \\ \sigma_y &= Y_y^0 + \sum_m A_m Y_y^{(m)}, & \tau_{zx} &= X_z^0 + \sum_m A_m X_z^{(m)}, \\ \sigma_z &= Z_z^0 + \sum_m A_m Z_z^{(m)}, & \tau_{xy} &= X_y^0 + \sum_m A_m X_y^{(m)}, \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

причому функції $X_x^0, Y_y^0, Z_z^0, Y_z^0, X_z^0, X_y^0$ є частинними розв'язками рівнянь рівноваги в напруженнях, які задовольняють статичні граничні умови, але не задовольняють тотожності Бельтрамі-Мічелла.

Далі, $X_x^{(m)}, Y_y^{(m)}, Z_z^{(m)}, Y_z^{(m)}, X_z^{(m)}, X_y^{(m)}$ є частинними розв'язками однорідних рівнянь рівноваги в напруженнях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

які задовольняють однорідні статичні граничні умови

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

але не задовольняють тотожності Бельтрамі-Мічелла (хоча для окремих значень m ці тотожності можуть задовольнятись).

Нарешті,

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, \dots \quad (18.21)$$

є постійними параметрами, варіації яких

$$\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3, \dots \quad (18.22)$$

абсолютно довільні і нічим між собою не пов'язані. З (18.18) витікає, що ми отримуємо варіацію напруженого стану, якщо проваріюємо довільні постійні (18.21):

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_x &= \sum_m X_x^{(m)} \delta A_m, & \delta \tau_{yz} &= \sum_m Y_z^{(m)} \delta A_m, \\ \delta \sigma_y &= \sum_m Y_y^{(m)} \delta A_m, & \delta \tau_{zx} &= \sum_m X_z^{(m)} \delta A_m, \\ \delta \sigma_z &= \sum_m Z_z^{(m)} \delta A_m, & \delta \tau_{xy} &= \sum_m X_y^{(m)} \delta A_m, \end{aligned} \right\} \quad (18.23)$$

причому внаслідок (18.20) маємо:

$$\left. \begin{aligned} l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} + n \delta \tau_{zx} &= 0, \\ l \delta \tau_{xy} + m \delta \sigma_y + n \delta \tau_{yz} &= 0, \\ l \delta \tau_{zx} + m \delta \tau_{yz} + n \delta \sigma_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.24)$$

Після підстановки (18.18) в (18.17) $U^{\text{доп}}$ стає функцією другого ступеня відносно параметрів (18.21). Тому з рівняння (18.17) отримуємо систему

$$\frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_m} = 0, \dots \quad (18.25)$$

Кількість рівнянь цієї системи дорівнює кількості довільних постійних (18.21), і по відношенню до цих постійних рівняння є лінійними. Таким чином, з рівнянь (18.25) визначаємо усі параметри (18.21), причому тотожні співвідношення Бельтрамі-Мічелла будуть задовольнятись тим точніше, чим більше буде взято постійних (18.21), і чим вдаліше буде вибір частинних розв'язків $X_x^0, Y_y^0, Z_z^0, Y_z^0, X_x^0, X_y^0$ та $X_x^{(m)}, Y_y^{(m)}, Z_z^{(m)}, Y_z^{(m)}, X_x^{(m)}, X_y^{(m)}$.

2. Якщо на поверхні пружного тіла задані переміщення

$$\bar{u}(x, y, z), \quad \bar{v}(x, y, z), \quad \bar{w}(x, y, z),$$

то користуємось варіаційним рівнянням Кастільяно (18.15). Необхідні варіації напружень на поверхні обчислюємо за формулами

$$\left. \begin{aligned} \delta P_{xv} &= l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} + n \delta \tau_{zx}, \\ \delta P_{yv} &= l \delta \tau_{xy} + m \delta \sigma_y + n \delta \tau_{yz}, \\ \delta P_{zv} &= l \delta \tau_{zx} + m \delta \tau_{yz} + n \delta \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

Для розв'язання задачі за методом П.Ф.Папковича шість компонент напружень обираємо згідно формул (18.18). Потім за допомогою (18.23) обчислюємо величини

(18.26), які підставляємо в (18.15).

Вносячи (18.23) в (18.17), отримуємо:

$$U^{\text{доп}} = F(A_1, A_2, A_3, \dots),$$

звідки маємо

$$\delta U^{\text{доп}} = \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_1} \delta A_1 + \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_2} \delta A_2 + \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_3} \delta A_3 + \dots \quad (18.27)$$

Далі отримаємо:

$$\iint_S (\bar{u} \delta P_{xv} + \bar{v} \delta P_{yv} + \bar{w} \delta P_{zv}) dS = \sum_k D_k \delta A_k. \quad (18.28)$$

Вносячи (18.27) і (18.28) в (18.15) і зважаючи на незалежність варіацій $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3, \dots$, отримуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_1} = D_1, \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_2} = D_2, \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}}{\partial A_3} = D_3, \dots \quad (18.29)$$

Кількість цих рівнянь дорівнює кількості довільних постійних (18.21). З огляду на те, що $U^{\text{доп}}$ є функцією другого ступеня відносно постійних (18.21), рівняння (18.29) є лінійними. Чим більше взято координатних функцій, тим точніше буде задовольнятися тотожність Бельтрамі-Мічелла.

19. Метод скінченних елементів як прямий варіаційний метод. Загальні положення. Технологія реалізації. Приклади

19.1. Реалізація варіаційних розв'язків

Варіаційний метод розв'язання задач набув широкого поширення після того, як швейцарський фізик і математик Вальтер Рітц в 1908 році запропонував зручний прийом побудови наближеного розв'язку. Метод Рітца заснований на ідеї заміни шуканої функції $y(x)$, яка доставляє мінімум функціоналу, лінійною комбінацією заздалегідь заданих *координатних функцій* $\varphi_i(x)$, тобто

$$y(x) \approx a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x). \quad (19.1)$$

Число координатних функцій n залежить від необхідної точності розв'язку, а самі вони повинні задовольняти граничним умовам завдання. Невідомі параметри a_1, a_2, \dots, a_n знаходяться із умови мінімуму функціонала, в який замість шуканої функції $y(x)$ підставляється сума (19.1).

Аналітичний розв'язок варіаційної задачі зазвичай вдається отримати тільки в першому наближенні, коли шукана функція описується невеликою кількістю членів ряду. Та й такий розв'язок найчастіше відноситься до задач, де конструкція має просту геометрію і знаходиться під дією одного досить просто описуваного навантаження. Річ у тому, що точність розв'язку суттєво залежить від вдалого вибору координатних функцій і лише в небагатьох випадках застосування простого степеневого або тригонометричного ряду приводить до мети.

Реальні конструкції, як правило, складені з цілого комплексу конструктивних елементів (стержні, балки, плити і так далі), поведінка яких зв'язана різними виразами потенціальної енергії і, отже, описується різними диференціальними рівняннями. Тут практична реалізація варіаційного підходу до розв'язку задачі найчастіше ґрунтується на застосуванні *методу скінченних елементів (МСЕ)*.

МСЕ можна вважати різновидом методу Рітца, в якому використовуються специфічні координатні функції *локально* визначені тільки на частині простору, займаного конструкцією, що розраховується. Кожна з них відноситься до малої ділянки досліджуваної області, але в сукупності вони накривають всю область.

У класичному формулюванні методу Рітца вгадування форми невідомої нам функції є вельми важким завданням, особливо, якщо пригадати, що така функція повинна бути відповідною до всіх точок області, яку займає та, що розраховується.

Один з основних принципів МСЕ якраз і полягає в тому, що використовуючи дроблення області на малі ділянки (скінченні елементи), можна дозволити собі заздалегідь задати вид шуканої функції усередині цієї ділянки, не ризикуючи зробити велику помилку для розв'язання задачі в цілому.

Зазвичай при побудові скінченно-елементного розв'язку набір локальних координатних функцій, що визначають поле переміщень у межах скінченного елемента, задають з точністю до параметрів, кількість яких рівна числу ступенів свободи всіх вузлів елемента.

19. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЯК ПРЯМИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ. ПРИКЛАДИ

Особливо зручно вибирати такі координатні функції, які приймають одиничне значення в деякому вузлі і нульове значення в решті всіх вузлів елемента. У теорії МСЕ їх прийнято називати *функціями форми*. Таким чином, всі параметри, що характеризують можливі напружено-деформовані стани скінченного елемента, виявляються вираженими через його вузлові переміщення. А завдання в цілому зводиться до відшукування переміщень вузлів системи, число яких може бути і велике, але кінцеве. Ці переміщення є невідомими в системі лінійних рівнянь МСЕ і, найчастіше, розв'язання таких систем реалізують спеціальні комп'ютерні програми.

Важливо пам'ятати, що якщо скінченно-елементний розв'язок отримано за програмою, в основі побудови якої лежить варіаційний принцип мінімуму енергії, то отримувані значення переміщень визначені з певним недоліком, оскільки розрахункова модель системи реалізує деяке стиснення деформацій. Дійсно, задавши функції форми скінчених елементів у вигляді цілком певних залежностей деякого задалегідь окресленого класу, ми заборонили реалізації деформованого стану, що описується іншими функціями. А це і є стисненням деформацій. Виходячи з цих же міркувань, можна говорити, що частоти власних коливань отримуються з надлишком (система жорсткіша).

Недостатні значення переміщень і надмірні значення частот не в значній мірі відрізнятимуться від точних значень, якщо скінченно-елементна модель достатньо докладна.

При застосуванні методу скінчених елементів найбільш відповідальними етапами розрахунку є розбиття на елементи і вибір функцій, що апроксимують поле переміщень. При цьому потрібне певне узгодження полів переміщень окремих елементів, що досягається вибором відповідних функцій форми.

Простим і найбільш поширеним прийомом такого узгодження є використання так званих *сумісних елементів* (їх ще називають *конформними*). Функції форми у сумісних елементів такі, що при рівних вузлових переміщеннях елементів, що є сусідами, на їх міжелементній межі співпадають всі переміщення, а також ті похідні від переміщень по просторових координатах, які входять у вираз для потенціальної енергії.

Інтуїтивно здається очевидним, що чим густіше сітка скінчених елементів, тим точніше отримуваний розв'язок. Насправді така збіжність наближеного розв'язку до точного має місце лише при використанні скінчених елементів, що задовольняють певним вимогам, а саме:

- у апроксимуючі функції повинні бути включені переміщення елемента, як жорсткого цілого;
- в елементі повинен існувати однорідний (тобто не залежний від координат) деформований стан з довільними компонентами деформації.

Звернемося тепер до *несумісних елементів*. Збіжність розв'язку до точного має місце і в цьому випадку, якщо при згущенні сітки в апроксимуючих функціях зникають члени, що створюють несумісність.

Корисно мати на увазі також наступне міркування. Якщо елементи несумісні, то по їх межах можливі деякі переміщення, що не існують в континуальній

розрахунковій моделі (наприклад, взаємні кути повороту пластин), які відповідають відсутності деяких зв'язків.

При збільшенні числа скінченних елементів і зменшенні їх розмірів зростає загальне число ступенів свободи конструкції і, отже, зменшується вплив накладених вузлових зв'язків. Цей процес при виконанні певних умов і забезпечує збіжність методу для сумісних скінченних елементів. З іншого боку, цей же процес веде до того, що зменшуються взаємні переміщення на міжелементних межах в несумісних елементах, що можна трактувати як певне замикання раніше знятих зв'язків. Отже, збіжність несумісних елементів може мати місце лише в тих випадках, коли позитивні тенденції від подолання накладених зв'язків превалюють над цією негативною тенденцією накладення зв'язків на міжелементних межах.

Слід враховувати, що відомі теоретичні оцінки швидкості збіжності орієнтовані на з'ясування *асимптотичних властивостей розв'язку*, а практичного дослідника цікавить ступінь близькості наближеного розв'язку, отриманого на цілком певній сітці скінченних елементів.

Слід також мати на увазі, що теоретичні оцінки швидкості збіжності будуються виходячи з деяких якнайгірших припущень про вид поля переміщень. У зв'язку з цим, на практиці часто використовується аналіз послідовності розв'язків на скінченно-елементних сітках, що згущуються, і рішення про прийнятність взятої деталізації ухвалюється за наслідками такого порівняння.

Звичайно, велику задачу навряд чи варто розв'язувати цілком на сітках, що згущуються, але очевидно, що виконання такого аналізу для характерних фрагментів розрахункової схеми є раціональним. Емпірично встановлений факт стійкості результату при згущуванні сітки є досить переконливим доводом на користь правильності вибраного підходу до розв'язку.

19.2. Основи методу

Метод скінченних елементів (МСЕ) – основний метод сучасної будівельної механіки, лежить в основі переважної більшості сучасних програмних комплексів. Він призначений для виконання розрахунків будівельних конструкцій на сучасних комп'ютерах і дозволяє практично повністю автоматизувати розрахунок стержневих систем, хоча, як правило, вимагає виконання значно більшого числа обчислювальних операцій у порівнянні із класичними методами будівельної механіки. Однак, у сучасних умовах великий об'єм обчислень не є серйозною проблемою, і, у зв'язку із цим, при впровадженні комп'ютерної техніки в інженерну практику МСЕ одержав найширше розповсюдження. Він дозволяє поширити принципи розрахунку стержневих систем на випадок неперервних тіл і складних конструкцій, і це є ще однією привабливою рисою МСЕ.

Багато задач будівельної механіки чи механіки прикладної теорії пружності приводять до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних. Як правило, точний розв'язок таких задач не існує і можна говорити тільки про той чи інший варіант пошуку наближеного розв'язку. При цьому, як правило, розв'язок шукають у деякому заздалегідь заданому вигляді, що визначає

19. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЯК ПРЯМИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ. ПРИКЛАДИ

вид відповіді з точністю до порівняно невеликого числа параметрів. Наприклад, заздалегідь передбачається, що форма прогину дорівнює деякій функції (наприклад синусоїді) і розшукується параметр, що характеризує цю функцію.

Однак угадування форми невідомої нам функції є дуже важкою задачею, особливо, якщо згадати, що така функція повинна бути придатною для всіх точок області, яку займає конструкція, що розраховується, і, на доданок функція повинна задовольняти цілком визначеним умовам на границі області (приймати, наприклад, нульові значення і мати нульову похідну). Набагато легше угадати вид такої функції для малої частини області, більш того саме в силу мализни такої ділянки можна дозволити собі певну свободу вибору. Наприклад, важко угадати форму деякої кривої, по якій зігнеться дуже гнучка сталева рулетка, проте майже очевидно, що, замінивши її дійсну форму деякою ламаною лінією з малими ланками, можна сподіватися, що ми відшукаємо наближене представлення щодо форми такої кривої.

Тут ми наблизились до ідеї методу скінченних елементів, зокрема до одного з основних принципів цього методу – використовуючи дроблення області пошуку розв'язку на малі ділянки (скінченні елементи), можна дозволити собі заздалегідь задати вид шуканої функції усередині цієї ділянки, не ризикуючи зробити велику помилку для розв'язання задачі в цілому.

Отже, ідея методу скінченних елементів може бути представлена в такий спосіб. Припустимо, що деяке досліджуване тверде тіло займає область Ω (рис. 19.1). Невідома величина, яка нас цікавить (наприклад, переміщення точок тіла, чи напруження, чи що-небудь інше), міняється неперервно по всьому тілу. При розв'язанні задачі методом скінченних елементів ця величина приблизно представляється своїми значеннями в скінченному числі обраних нами точок тіла (вузлів). Саме ці невідомі нам величини і підлягають визначенню. Далі, область Ω поділяється на скінченне число частин (скінченних елементів) так, щоб границі скінченних елементів проходили через вузли і вся область була покрита скінченними елементами. Вважається, що скінченні елементи взаємодіють один з одним тільки у вузлах і обумовлена нами невідома величина є спільною для контактуючих з вузлом точок всіх елементів, що з'єднані з цим вузлом (для зірки елементів цього вузла).

Розглянемо тіло, навантажене довільним чином. За допомогою мережі січних поверхонь розіб'ємо його на окремі частини. Приклад такої розбивки для двовимірного тіла показаний на рис. 19.1. Одержувані підобласті мають хоча й

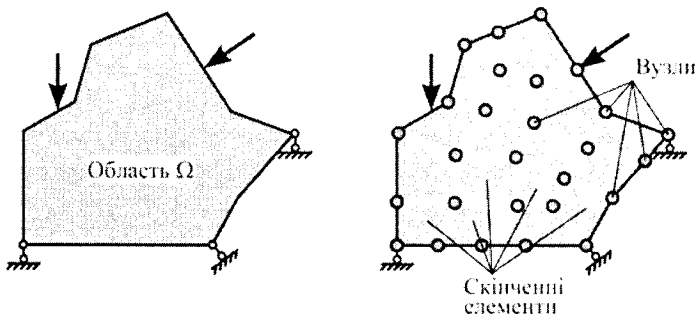


Рис. 19.1

малі, але все-таки скінченні (не нескінченно малі) розміри, звідки і відбувається їхня назва «скінченні елементи».

Таким чином, неперервне тіло представляється у вигляді сукупності скінченних елементів, властивості кожного з яких розглядаються згодом незалежно від інших. На границях між скінченними елементами вибираються деякі точки (вузли); переміщення яких приймаються в якості основних невідомих¹.

Тут можна одразу провести аналогію з методом переміщень для стержневих систем, у якому за основні невідомі також приймають вузлові переміщення. Однак у випадку неперервних тіл виникає цілий ряд ускладнень, які можна перебороти лише за допомогою введення ряду додаткових гіпотез.

а) Перш за все постає питання щодо визначення переміщень (а отже, деформацій і напружень) усередині кожного скінченного елемента, через переміщення його вузлів. Нагадаємо, що у випадку стержневих систем розрахунок базується на використанні технічної теорії розтягнення, згину і крутіння бруса, що й дозволяє виразити переміщення і напруження в будь-якому перетині бруса через вузлові переміщення. Для суцільного тіла ця задача може бути розв'язана лише наближено, наприклад, з використанням тих чи інших припущень щодо характеру поля переміщень в елементі. Точніше, необхідно вибрати деяку сукупність апроксимуючих функцій (їх називають *функціями форми*), що дозволяють наближено представити поле переміщень усередині скінченного елемента по відомих вузлових переміщеннях. Саме тут істотну допомогу надає припущення про мализну скінченного елемента, оскільки в малій області простору можна сподіватися на відносно невелику похибку від наближеного опису поля переміщень² і на те, що зі зменшенням розмірів скінченних елементів помилка апроксимації буде зменшуватися. Якщо, наприклад, плоскі скінченні елементи мають форму трикутника і вузлами є його вершини, то можна уявити собі, що функція форми є площиною, і, отже, невідомий розподіл переміщень у тілі апроксимується деяким близьким до шуканого багатогранником.

Вибір функцій форми є одним з найбільш відповідальних і важливих етапів у методі скінченних елементів. Якщо такий вибір зроблений, то деформований і напружений стан елемента буде однозначно визначатися вузловими переміщеннями. Тому під скінченним елементом варто розуміти не просто деяку малу область тіла, а область тіла в сукупності із заданими в ній апроксимуючими функціями.

б) Друга проблема виникає при формулюванні умов об'єднання скінченних елементів у єдину систему. У розрахунку стержневих систем це здійснювалось шляхом складання рівнянь рівноваги для вузлових точок, у яких елементи з'єднуються один з одним. У суцільному тілі число точок з'єднання між елементами нескінченно велике. Задаючи розподіл переміщень усередині кожного елемента, тим самим задаємо й розподіл напружень у всіх точках границі між елементами. На границях розділу суміжних елементів напруження, знайдені для кожного елемента

¹ Тут розглядається розв'язання задачі в переміщеннях. Існує різновид методу скінченних елементів, у якому за основні невідомі приймають сили взаємодії між елементами; можливе також змішане формулювання

² Ці сподівання можуть й не виправдатися

незалежно, у загальному випадку збігатися не будуть. Отже, забезпечити точне виконання умов рівноваги на всій поверхні розділу не представляється можливим. Тому в методі скінченних елементів напруження, що діють по границі кожного елемента, умовно заміняють деякими приведеними до вузлів еквівалентними силами; і рівняння рівноваги складаються для вузлів, на які діють зазначені еквівалентні сили. При цьому еквівалентні вузлові сили визначаються з умови, щоб здійснена ними на вузлових переміщеннях робота дорівнювала роботі дійсних напружень на переміщеннях точок граничної поверхні елемента.

в) Ще одна проблема виникає при врахуванні навантаження пружного тіла розподіленими поверхневими й об'ємними силами. Ці сили можуть бути враховані також заміною на еквівалентні в енергетичному сенсі зовнішні вузлові сили.

Після введення зазначених спрощень тіло можна розглядати як дискретну систему, тобто як сукупність скінченних елементів, з'єднаних між собою у вузлових точках. Розбивка конструкції на підобласті і вибір апроксимуючих функцій для кожної з них можна здійснити різними способами. При цьому повинні бути враховані особливості геометрії тіла і забезпечена гарна апроксимація переміщень, деформацій і напружень для всього тіла в цілому. У цьому випадку розв'язок, отриманий по методу скінченних елементів, буде (при зменшенні розмірів елементів) прагнути до точного. Більш докладно питання про збіжність наближеного розв'язку до точного розв'язку задачі буде розглянутий далі.

19.3. Загальні співвідношення дискретних систем

Використання МСЕ реалізує перехід від неперервної розрахункової моделі (двовимірної для пластин і оболонок, тривимірної для просторових тіл) до деякої дискретної задачі. Тому має сенс розглянути деякі загальні співвідношення, характерні для довільних дискретних систем. Це дасть можливість розглянути метод скінченних елементів ще з однієї точки зору.

Отже, ми будемо поки що припускати, що розглядається система, яка містить певну цілком визначену кількість вузлів, до яких примикають пружні елементи. Напружено-деформований стан елементів описується скінченим набором статичних і кінематичних параметрів. Розгляд «внутрішнього устрою» скінченних елементів ми поки що відкладемо.

Якщо, як було сказано, не вдаватись до подробиць, то всякий скінченний елемент може характеризуватися деяким набором *внутрішніх переміщень*, або Δ_e і відповідних їм *внутрішніх сил* (зусиль, напружень) s_e . Під внутрішнім переміщенням поки що розуміється деяка характеристика для розглянутого елемента величина, наприклад така, як подовження простого стержня, а згадана відповідність розуміється в звичайному сенсі енергетичної відповідності узагальнених сил і узагальнених переміщень, використовуваний в будівельній механіці, коли скалярний добуток векторів Δ_e і s_e дає роботу $A_e = \Delta_e^T s_e$. Вектори Δ_e і s_e у розглянутому тут випадку лінійно-пружної системи пов'язані одне з одним законом стану (фізичним законом), що виражається рівністю

$$s_e = F_e \Delta_e \quad (19.2)$$

із симетричною додатно визначеною (отже, невиродженою) матрицею \mathbf{F}_e . Останнє припускає, що будь-який, відмінний від нульового, вектор внутрішніх переміщень Δ_e викликає деформування скінченного елемента (зміна його форми і/чи розмірів), що супроводжується нагромадженням строго додатної внутрішньої енергії в елементі. Це означає, зокрема, що вектор Δ_e не містить форм переміщень скінченного елемента як твердого тіла.

Внутрішні переміщення елемента Δ_e зв'язані з зовнішніми для елемента переміщеннями вузлів примикання \mathbf{u}_e умовами сумісності деформацій

$$\Delta_e = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{u}_e + \mathbf{d}_e, \quad (19.3)$$

а зусилля \mathbf{s}_e задовольняють умовам рівноваги

$$\mathbf{Q}_e \mathbf{s}_e = \mathbf{p}_e, \quad (19.4)$$

де \mathbf{d}_e і \mathbf{p}_e — вектори дислокаційних (на елементах) і силових (приведених до вузлів) впливів відповідно¹. Те, що матриці перетворень у (19.3) і (19.4) є взаємно транспонованими, випливає зі спряженості рівнянь сумісності деформацій (19.3) і рівнянь рівноваги (19.4), що, у свою чергу, випливає з принципу можливих переміщень.

Дійсно, основна умова рівноваги у формі початку можливих переміщень, говорить про рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил

$$\mathbf{p}_e^T \mathbf{u}_e = \mathbf{s}_e^T \Delta_e. \quad (19.5)$$

Якщо внутрішні переміщення зв'язані з зовнішніми матрицею \mathbf{X}_e , тобто $\Delta_e = \mathbf{X} \mathbf{u}_e$, а внутрішні сили з зовнішніми навантаженнями – матрицею \mathbf{Y} , тобто $\mathbf{Y} \mathbf{s}_e = \mathbf{p}_e$, то неважко бачити, що рівність (19.2) набуває вигляду

$$(\mathbf{Y} \mathbf{s}_e)^T \mathbf{u}_e = \mathbf{s}_e^T \mathbf{X} \mathbf{u}_e \quad (19.6)$$

і з останньої рівності негайно випливає, що $\mathbf{X} = \mathbf{Y}^T$.

Проілюструємо сказане прикладом трикутного скінченного елемента для плоскої задачі теорії пружності. Позначимо вершини трикутника індексами 1, 2 і 3 і будемо цим індексом позначати величини, що відносяться до відповідної вершини. У цих вершинах можуть бути задані переміщення u_i, v_i ($i = 1, 2, 3$) чи зовнішні сили P_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) уздовж осей x і y відповідно (рис. 19.2).

Оберемо в якості функції форми лінійні функції координат, тоді переміщення внутрішніх точок елемента виражаються як

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1; \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Коефіцієнти $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ обираються такими, щоб у вершинах трикутника переміщення були б рівні заданим. Цій умові відповідають рівняння

¹ Нагадаємо що під дислокаціями розуміються початкові деформації, які задаються як незалежні дії на систему.

**19. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЯК ПРЯМИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ. ПРИКЛАДИ**

$$u_1 = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1; \quad v_1 = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2;$$

$$u_2 = a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1; \quad v_2 = a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2;$$

$$u_3 = a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1; \quad v_3 = a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2.$$

Розв'язками цих рівнянь, як неважко перевірити, будуть

$$a_1 = (1/\Delta)[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)],$$

$$b_1 = (1/\Delta)[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)],$$

$$a_2 = (1/\Delta)[v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2)],$$

$$b_2 = (1/\Delta)[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1)],$$

$$c_1 = c_2 = 0,$$

де $\Delta = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2$ –

подвоєна площа трикутника.

Деформації усередині трикутника будуть скрізь однаковими

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = a_1; \quad \varepsilon_y = \partial v / \partial y = b_2; \quad \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = b_1 + a_2.$$

Нехай вектор переміщень є сукупність величин

$$\mathbf{v} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3]^T,$$

а вектор деформацій

$$\Delta = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T = [a_1 \ b_2 \ b_1 + a_2]^T.$$

Нехай, крім того, вектор зовнішніх сил, що відповідають переміщенням \mathbf{v} , дорівнює

$$\mathbf{p} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ Q_1 \ Q_2 \ Q_3]^T,$$

а вектор внутрішніх сил, що відповідають деформаціям Δ ,

$$\mathbf{s} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T.$$

З рівності робіт внутрішніх і зовнішніх сил

$$\sum_{i=1}^3 (P_i u_i + Q_i v_i) = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

впливає зв'язок між переміщеннями і деформаціями

$$\varepsilon_x = a_1 = (1/\Delta)[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)],$$

$$\varepsilon_y = b_2 = (1/\Delta)[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1)],$$

$$\gamma_{xy} = b_1 + a_2 = (1/\Delta)[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1) + v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2)].$$

Звідси випливає, що матриця умов сумісності деформацій з переміщеннями має вигляд

$$\mathbf{Q}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix},$$

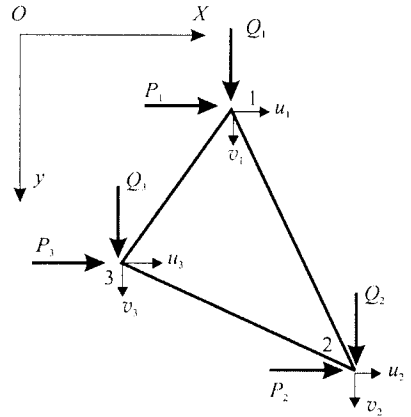


Рис. 19.2

і, транспонуючи цю матрицю, можна одержати матрицю умов рівноваги

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}.$$

Самі ж рівняння рівноваги матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (y_2 - y_3)\sigma_x + (x_3 - x_2)\tau_{xy} \\ P_2 &= (y_3 - y_1)\sigma_x + (x_1 - x_3)\tau_{xy} \\ P_3 &= (y_1 - y_2)\sigma_x + (x_2 - x_1)\tau_{xy} \\ Q_1 &= (x_3 - x_2)\sigma_y + (y_2 - y_3)\tau_{xy} \\ Q_2 &= (x_1 - x_3)\sigma_y + (y_3 - y_1)\tau_{xy} \\ Q_3 &= (x_2 - x_1)\sigma_y + (y_1 - y_2)\tau_{xy} \end{aligned} \right\}.$$

Перехід від елемента до системи реалізується стандартною операцією асемблювання, зміст якої був пояснений раніше. У результаті складається повна система рівнянь, а саме:

$$\left. \begin{aligned} \text{рівняння рівноваги} & \quad \mathbf{Qs} = \mathbf{p} \\ \text{геометричні рівняння} & \quad \Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d} \\ \text{фізичні рівняння} & \quad \mathbf{s} = \mathbf{F}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

щодо невідомих \mathbf{s} , Δ і \mathbf{u} .

Розмірності векторів \mathbf{s} , Δ , \mathbf{d} однакові і рівні сумарному числу m кількості *внутрішніх* невідомих сил. Розмірності векторів \mathbf{u} і \mathbf{p} також однакові і дорівнюють загальному числу *зовнішніх* вузлових невідомих переміщень n . Матриця рівнянь рівноваги \mathbf{Q} має розмірність $n \times m$. Квадратна симетрична матриця \mathbf{F} порядку m має блочно-діагональну структуру, число її блоків дорівнює кількості елементів, розмір кожного блоку – кількості внутрішніх невідомих відповідного елемента. Зокрема, для ферм матриця \mathbf{F} буде діагональною.

Оскільки, в силу фізичних рівнянь (19.7), \mathbf{F} є матричним коефіцієнтом при внутрішніх переміщеннях Δ у співвідношенні для внутрішніх сил \mathbf{s} , логічно називати цю матрицю матрицею *внутрішньої жорсткості*. Природно, що обернена до \mathbf{F} матриця негайно одержує ім'я матриці *внутрішньої податливості*.

19.3.1. Метод переміщень

Якщо, як це прийнято в *методі переміщень*, у якості основних невідомих визначити вузлові переміщення \mathbf{u} , то, виключивши із (19.7) вектори \mathbf{s} і Δ , легко одержати

$$\mathbf{QFQ}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{QF}\mathbf{d}. \quad (19.8)$$

Число n невідомих компонентів вектора переміщень \mathbf{u} називають *ступенем кінематичної невизначуваності системи*.

**19. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЯК ПРЯМИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ. ПРИКЛАДИ**

Матриця жорсткості системи визначається наступним добутком

$$\mathbf{K} = \mathbf{QFQ}^T. \quad (19.9)$$

Зазначену матрицю логічно називати *матрицею зовнішньої жорсткості*. Відповідно обернена матриця \mathbf{K}^{-1} буде *матрицею зовнішньої податливості*. Таке розширення назв матриць жорсткості і податливості визначеннями «зовнішні» і «внутрішні» дозволяє уникнути термінологічної плутанини, що виникає інколи в силу переваженості самих понять «жорсткість» і «податливість»

Припускаючи, що матриця жорсткості системи є не виродженою (більш того, додатно визначеною), що гарантується в тому випадку, коли ранг r матриці \mathbf{Q} дорівнює числу її рядків n (а це, як буде показано далі, відповідає випадку геометрично незмінюваної системи), одержуємо

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{QF}\mathbf{d}). \quad (19.10)$$

Зусилля в елементах обчислюються за формулою

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T\mathbf{u} + \mathbf{d}) = \mathbf{FQ}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{F}\mathbf{d}, \quad (19.11)$$

і цим завершується визначення параметрів напружено-деформованого стану системи.

Приклад 19.1. Проілюструємо все сказане на прикладі найпростішої системи, схема якої показана на рис. 19.3.

Матриця \mathbf{Q} рівнянь рівноваги для цієї конструкції має вигляд

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0,7071 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,7071 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}.$$

Якщо жорсткості всіх елементів EF_i ($i = 1, \dots, 5$) вважати однаковими, то

$$\mathbf{F} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}.$$

Матриця зовнішньої жорсткості, обчислена відповідно до (19.9) буде дорівнювати

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0,3536 & 1,3536 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1,3536 & -0,3536 \\ 0 & -1 & -0,3536 & 1,3536 \end{bmatrix}.$$

Обертаючи цю матрицю і використовуючи (19.9), одержимо вектор вузлових переміщень

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} 0,8845 & -0,5578 & -0,1155 & -0,4422 \\ -0,5578 & 2,1356 & 0,4422 & 1,6933 \\ -0,1155 & 0,4422 & 0,8845 & 0,5578 \\ -0,4422 & 1,6933 & 0,5578 & 2,1356 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

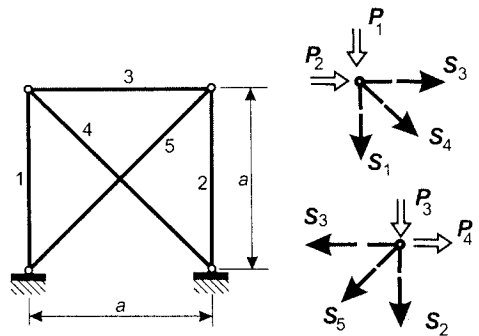


Рис. 19.3

Вектор внутрішніх сил s одержимо з (19.10) у вигляді

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} -0,8845 & 0,5578 & 0,1155 & 0,4422 \\ 0,1155 & -0,4422 & -0,8845 & -0,5578 \\ 0,1155 & -0,4422 & 0,1155 & 0,4422 \\ -0,1633 & 0,7887 & -0,1633 & -0,6253 \\ -0,1633 & 0,6253 & -0,1633 & 0,7887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Розглянемо тепер статично визначувану систему, утворену із зображеної на рис.19.2 системи вилученням верхнього горизонтального стержня. Матриця рівноваги Q для цієї системи впливає з аналогічної матриці для раніше розглянутої статично невизначуваної системи викреслюванням третього стовпця. Матриця внутрішньої жорсткості F утвориться з попередньої матриці F викреслюванням третього стовпця і третього рядка. У результаті застосування необхідних матричних операцій одержимо матрицю K

$$K = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3536 & -0,3536 \\ 0 & 0 & -0,3536 & 0,3536 \end{bmatrix},$$

обертаючи яку, знаходимо матрицю зовнішньої податливості

$$K^{-1} = \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3,828 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3,828 \end{bmatrix}.$$

19.3.2. Метод сил

Також можливим є й інший шлях розв'язання задачі – на основі *методу сил*. Тут важливу роль відіграють такі цілочисельні характеристики, як вже згадуваний ранг r матриці рівноваги Q і *ступінь статичної невизначуваності системи* k , які зв'язані наступним співвідношенням

$$r = \text{rank } Q, \quad k = m - r. \quad (19.12)$$

Відповідно до процедури методу сил загальний розв'язок рівнянь рівноваги $Qs = p$ представляється у формі

$$s = Ax + Bp, \quad (19.13)$$

де матриця A розмірами $m \times k$ — матриця зусиль в основній системі методу сил від дії одиничних значень невідомих x у кількості k .

На математичному рівні перший доданок у правій частині (19.12) являє собою загальний розв'язок відповідних однорідних рівнянь рівноваги, а другий доданок – частинний розв'язок неоднорідних рівнянь. Усі стовпці матриці A лінійно незалежні. Вони утворюють так звану *фундаментальну систему розв'язків* однорідних рівнянь з матрицею Q ; таким чином, ранг матриці A дорівнює k – ступню статичної невизначуваності системи. Матриця B розмірами $m \times n$ – це матриця зусиль в основній системі від одиничних вузлових навантажень. Ці дві матриці такі, що

$$QA = 0, \quad QB = I. \quad (19.14)$$

де 0 — прямокутна нульова матриця розмірами $n \times k$, I — одинична матриця

порядку n .

Якщо знову звернутися до прикладу один раз статично невизначуваної системи (рис. 19.3), то для неї можна прийняти

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1,4142 & & & \\ -1,4142 & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,4142 \end{bmatrix}$$

Неважно переконатися в тому, що умови (19.14) виконуються для зазначених матриць, що підтверджує правильність їх побудови.

Якщо з геометричних рівнянь групи (19.7) вилучити за допомогою фізичних рівнянь деформації Δ , одержимо зв'язок між вектором внутрішніх сил \mathbf{s} і вектором зовнішніх переміщень \mathbf{u} у формі

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d}, \quad (19.15)$$

звідки після підстановки (19.12) одержуємо

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (19.16)$$

Помноживши цю рівність зліва на \mathbf{A}^T , одержуємо

$$\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (19.17)$$

У силу першої з умов (19.13), анулюється другий член у лівій частині (19.1), і після обернення невідродженої матриці податливості \mathbf{D} (невідродженість матриці податливості \mathbf{D} саме й випливає з умови рівності рангу матриці \mathbf{A} числу її стовпців k):

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A} \quad (19.18)$$

Одержимо

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}). \quad (19.19)$$

Матрицю \mathbf{D} доречно називати *матрицею податливості основної системи методу сил*. Така назва, хоча і є досить довгою, але підкреслює залежність складу матриці \mathbf{D} від вибору основної системи методу сил, а на формально математичному рівні – від конкретного представлення матриці фундаментальних розв'язків \mathbf{A} . У тих випадках, коли це не буде приводити до неоднозначності, будемо користатися скороченим терміном *матриця податливості \mathbf{D}* . Внутрішні зусилля обчислюються після підстановки (19.19) у (19.13), що дає

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1})\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (19.20)$$

19.4. Статико-кінематичний аналіз

Статико-кінематичний аналіз дає характеристики системи, інваріантні щодо виду навантаження, і тому цей аналіз проводиться для однорідних рівнянь рівноваги і сумісності деформацій. Якщо деформації Δ і дислокаційні впливи \mathbf{d} відсутні, однорідна система рівнянь сумісності деформацій

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (19.21)$$

допускає тільки нульовий розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, лише якщо ранг r матриці \mathbf{Q} дорівнює числу зовнішніх невідомих n , і конструкція в цьому випадку не допускає вузлових переміщень без деформації елементів. Якщо ж $r < n$, то рівняння (19.20) допускає

ненульовий розв'язок, і конструкція буде змінюваною, на відміну від незмінюваної конструкції при $r = n$.

У тих випадках, коли число внутрішніх зусиль і переміщень m перевищує число зовнішніх невідомих n , система рівнянь рівноваги, яка при відсутності зовнішніх навантажень \mathbf{p} має вид

$$\mathbf{Q}\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (19.22)$$

допускає нетривіальний розв'язок

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (19.23)$$

з довільним $(m - r)$ -мірним стовпцем \mathbf{x} .

Формулою (19.23) визначається простір самозрівноважених зусиль \mathbf{s}_0 , мірність якого $k = (m - r)$ дорівнює ступню статичної невизначуваності системи. Зусилля, знайдені за (19.23), визначають самозрівноважений напружений стан при довільному векторі \mathbf{x} , у тому числі і при значеннях \mathbf{x} , обчислених через зовнішні впливи, наприклад, за формулою (19.19). Таким чином, крім напружень, викликаних зовнішнім навантаженням, у системі можуть існувати також *самонапруження*, не зв'язані з навантаженнями на систему і такі, що не зникають після видалення навантажень. Такі напруження є початковими (преднапруження) і виникають найчастіше в процесі створення конструкції.

З теорії матриць відомо, що зв'язана з матрицею повного рангу \mathbf{Q} матриця \mathbf{R} (її називають *матрицею-проектором*)

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^{-1}\mathbf{Q} \quad (19.24)$$

переводить будь-який вектор \mathbf{d}_0 у вектор $\mathbf{s}_0 = \mathbf{R}\mathbf{d}_0$, що належить ядру матриці \mathbf{Q} , тобто задовольняє однорідним рівнянням (19.22). Але це значить, що вектор зусиль преднапруження \mathbf{s}_0 отримується за допомогою \mathbf{d}_0 . Згаданий вектор може трактуватися як вектор довільних дислокаційних збурювань (для ферм, наприклад, подовжень стержнів), що викликають зусилля преднапруження \mathbf{s}_0 . Відзначимо, що крім (19.24) для обчислення проектора \mathbf{R} можна скористатися формулою

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T. \quad (19.25)$$

Для елементів конструкції, які є *безумовно необхідними*, тобто такими, видалення яких із системи веде до втрати геометричної незмінюваності, попереднє напруження неможливо при будь-якому збуренні \mathbf{d}_0 . Дійсно, по визначенню, такий елемент обов'язково входить в основну систему методу сил і, отже, зусилля в ньому не може розглядатися як компонента вектора невідомих \mathbf{x} .

Але це значить, що в матриці \mathbf{R} такому елементу повинен відповідати стовпець і рядок, усі компоненти яких складаються тільки з нулів. Помітимо, що досить перевірити на збіг з нулем лише діагональний елемент матриці \mathbf{R} .

Справедливо й зворотнє твердження – *умовно необхідному* елементу (на відміну від безумовно необхідного, умовно необхідний елемент можна видалити з системи без втрати нею геометричної незмінюваності) у матриці-проекторі \mathbf{R} відповідають рядки і стовпці, в яких обов'язково є ненульові елементи.

**19. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЯК ПРЯМІЙ ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ. ПРИКЛАДИ**

Приклад 19.2. Розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 19.4, і будемо для простоти вважати всі її жорсткісні параметри одиничними.

Для побудови проектора \mathbf{R} скористаємося формулою (19.24).
Маємо

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 5/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 5/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Обчислення дають:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

де підматриці, що складають \mathbf{R} (крім нульових), рівні

$$\mathbf{R}_{11} = \begin{bmatrix} 5/24 & 5/24 & 1/24 & 1/24 \\ 5/24 & 5/24 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & 5/24 & 5/24 \\ 1/24 & 1/24 & 5/24 & 5/24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}^T = \begin{bmatrix} 3\sqrt{12} & -3\sqrt{8} & 3\sqrt{24} & -1/24 & -5/24 \\ 3\sqrt{12} & -3\sqrt{8} & 3\sqrt{24} & -1/24 & -5/24 \\ 3\sqrt{12} & 3\sqrt{24} & -3\sqrt{8} & -5/24 & -1/24 \\ 3\sqrt{12} & 3\sqrt{24} & -3\sqrt{8} & -5/24 & -1/24 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{22} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/12 & -1/12 & -3\sqrt{12} & -3\sqrt{12} \\ -1/12 & 7/24 & -5/24 & -3\sqrt{24} & 3\sqrt{8} \\ -1/12 & -5/24 & 7/24 & 3\sqrt{8} & -3\sqrt{24} \\ -3\sqrt{12} & -3\sqrt{24} & 3\sqrt{8} & 5/24 & 1/24 \\ -3\sqrt{12} & 3\sqrt{8} & -3\sqrt{24} & 1/24 & 5/24 \end{bmatrix}.$$

Якщо розглядати проектор \mathbf{R} , то видно, що 10-й і 11-й стержні є безумовно необхідними, оскільки їм відповідають нульові рядок і стовпець. Дійсно, ці стержні не задіяні в жодному зі станів самонапруження, які показані на рис. 19.5, а видалення хоча б одного з цих стержнів із системи обертає її на миттєво змінювану.

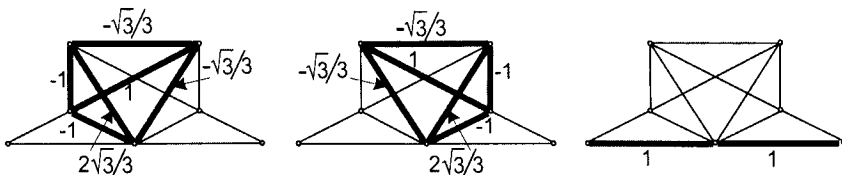


Рис. 19.5

Корисно помітити, що в матриці-проекторі \mathbf{R} фізичний сенс компонентів – це зусилля в елементах системи від одиничних значень дислокаційних впливів. Звідси випливає і простий рецепт побудови \mathbf{N} : або необхідно розрахувати конструкцію на m варіантів дислокаційних одиничних впливів (для ферм – на одиничне подовження стержня) і вектор зусиль в елементах, що відповідає j -у варіанту навантаження, утворить j -й стовпець відповідної матриці.

19.5. Варіаційне формулювання МСЕ¹

Представлені вище міркування ґрунтувалися на використанні умов рівноваги вузлів, записаних у формі принципу можливих переміщень. Такий підхід не є єдино можливим. Більш того, у багатьох відношеннях він уступає підходу, коли основні співвідношення виводяться з умови стаціонарності повної потенціальної енергії системи, а задача теорії пружності зводиться до варіаційної задачі для функціонала Лагранжа L , що представляє собою повну енергію пружного тіла.

Для розв'язання такої задачі придатним є метод Рітца, в якому наближений розв'язок для переміщень \mathbf{u} розшукується у формі ряду, складеного з відомих (координатних) векторів-функцій $\mathbf{f}_k(x, y, z)$ з невідомими коефіцієнтами a_k .

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m a_k \mathbf{f}_k(x, y, z). \quad (19.26)$$

Коефіцієнти цього ряду підбираються з умови мінімізації функціоналу L .

Використання МСЕ можна представити як специфічну форму методу Рітца, що відрізняється від класичної двома обставинами:

а) координатні функції задаються не по всій області, займаній тілом, а поелементно і носять локальний характер;

б) невідомими параметрами є вузлові переміщення, тоді як у класичному підході параметри a_k можуть не мати фізичної інтерпретації.

Отже, нехай тіло представлено у виді сукупності скінченних елементів, для яких відомі функції форми, що дозволяють виражати переміщення внутрішніх точок через вузлові переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{v}$. Потенціальна енергія деформацій, що накопичується в скінченному елементі, виражається як

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{Q}\mathbf{v})^T \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{v} dV = \frac{1}{2} (\mathbf{v})^T \left[\int_V (\mathbf{Q}\mathbf{v})^T \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{v} dV \right] \mathbf{v}. \quad (19.27)$$

Вважаючи, що

¹ Обґрунтування МСЕ за допомогою варіаційних теорем почалось у 1960 р., коли Клаф за допомогою принципу мінімуму потенціальної енергії показав, що при згущенні сітки скінченних елементів наближені скінченно-елементні розрахунки збігаються до точного математичного розв'язку [225] «на данном этапе и интуиция, отталкивающаяся от дискретного инженерного подхода, и чисто математическое обоснование совпали, и оба подхода объединились» [243]. Це ініціювало бурхливий розвиток будівельної механіки (з 1975 р. і до теперешнього часу) і створення обчислювальної механіки.

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{Q}\mathbf{v})^T \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{v} dV, \quad (19.28)$$

запишемо (19.27) у формі

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{v})^T \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad (19.29)$$

і якщо представити \mathbf{v} й \mathbf{k} у блоковій формі, то

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T & \dots & \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \dots & \mathbf{k}_{1n} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \dots & \mathbf{k}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_{n1} & \mathbf{k}_{n2} & \dots & \mathbf{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \quad (19.30)$$

Нехай тепер \mathbf{V} буде матрицею вузлових переміщень усього пружного тіла, що має N вузлів. Тоді зручно представити загальну енергію системи у вигляді

$$U = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbf{v}_r^T \mathbf{k}_{rs} \mathbf{v}_s, \quad (19.31)$$

де $\mathbf{k}_{rs} = \mathbf{0}$, якщо хоча б один з вузлів системи r чи s не належить до розглянутого елемента. Потенціальна енергія деформацій, накопичена у всім тілі виходить шляхом підсумовування внесків по всіх елементах системи. Вона визначається співвідношенням

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_2^T & \dots & \mathbf{V}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N1} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \dots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix}, \quad (19.32)$$

де $\mathbf{K}_{rs} = \sum_e \mathbf{k}_{rs}^{(e)} (r, s = 1, 2, \dots, N)$.

Потенціал зовнішніх сил (об'ємних \mathbf{p} , поверхневих \mathbf{g} і вузлових \mathbf{P}) записується як

$$\Pi = - \left(\mathbf{v}^T \mathbf{P} + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS_1 \right), \quad (19.33)$$

де інтеграли беруться по тій частині об'єму тіла V і по тій частині його поверхні S_1 , на якій задані навантаження.

Якщо в другому члені (19.33) замінити інтегрування по об'єму тіла сумою інтегралів по об'ємах окремих елементів i , крім того, виразити переміщення точок елемента через зсуви його вузлів, то одержимо

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV = \sum_e (\mathbf{v})^T \int_{V(e)} \Phi^T \mathbf{p} dV_{(e)}. \quad (19.34)$$

Аналогічно представляється і третій доданок (19.33):

$$\int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS_1 = \sum_e (\mathbf{v})^T \int_{S_{(e)1}} \Phi^T \mathbf{g} dS^e. \quad (19.35)$$

Таким чином, замість (19.33) будемо мати

$$\Pi = -\mathbf{v}^T \mathbf{P} - \sum_e (\mathbf{v}^T) \left(\int_{V_{(e)}} \Phi^T \mathbf{p} dV + \int_{S_{(e)1}} \Phi^T \mathbf{g} dS \right) = -\mathbf{v}^T \mathbf{P} - \sum_e (\mathbf{v}^T) \mathbf{G}_{(e)}. \quad (19.36)$$

Якщо ввести позначення $\mathbf{G} = \sum_e \mathbf{G}_{(e)}$, то остаточно одержимо

$$\Pi = -\mathbf{v}^T (\mathbf{P} + \mathbf{G}). \quad (19.37)$$

Повна енергія системи L дорівнює сумі U і Π , що з урахуванням (19.32) і (19.37) дає

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T (\mathbf{P} + \mathbf{G}), \quad (19.38)$$

а з урахуванням використаної раніше розбивки на підматриці

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta \end{bmatrix}. \quad (19.39)$$

при $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0}$ ми одержимо

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{k}_{\alpha\alpha} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^T (\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha). \quad (19.40)$$

Формула (19.40) визначає L як функцію невідомих вузлових переміщень \mathbf{v}_α , що визначаються з умов мінімуму функціонала L . Необхідними умовами мінімуму є обертання в нуль першої варіації L :

$$\delta L = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{k}_{\alpha\alpha} \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{k}_{\alpha\alpha} \delta \mathbf{v}_\alpha) - \delta \mathbf{v}_\alpha^T (\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha) = 0. \quad (19.41)$$

Доданки в дужках є скалярами і вони рівні між собою, оскільки виходять одне з одного шляхом транспонування. Тому (19.41) можна записати у вигляді

$$\delta \mathbf{v}_\alpha^T (\mathbf{K}_{\alpha\alpha} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha) = 0, \quad (19.42)$$

а з урахуванням того, що (19.42) повинне виконуватися при будь-яких варіаціях вузлових зсувів ми приходимо до розв'язувального рівняння

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha = 0. \quad (19.43)$$

20. Розрахунок стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу переміщень

20.1. Дискретна модель розрахункової схеми стержневої системи

Перший етап розрахунку полягає в *дискретизації*, тобто в переході від розрахункової схеми стержневої системи до її дискретної моделі. Вихідна розрахункова схема розбивається на окремі стержні (скінченні елементи) і вузли. В стержневих системах за скінченні елементи беруться, як правило, прямолінійні стержні постійної жорсткості, на яких може бути розташоване рівномірно розподілене зовнішнє навантаження. Криволінійні стержні апроксимуються кількома прямолінійними елементами. Аналогічно апроксимуються стержні, що мають змінну жорсткість, або ті, до яких прикладене нерівномірно розподілене навантаження. Така схема споруди називається її *дискретною*, або *скінченно-елементною моделлю* (СЕМ).

Вузлами дискретної моделі вважатимемо точки поєднання двох або більше окремих стержнів, ступінчастої зміни жорсткості стержнів, прикладення зосереджених зовнішніх сил або моментів, ступінчастої зміни інтенсивності розподіленого навантаження, опорні вузли.

Перехід від розрахункової схеми до скінченно-елементної моделі показано на рис. 20.1. Розрахункова схема рами (рис. 20.1,*а*) перетворена на дискретну модель (рис. 20.1,*б*).

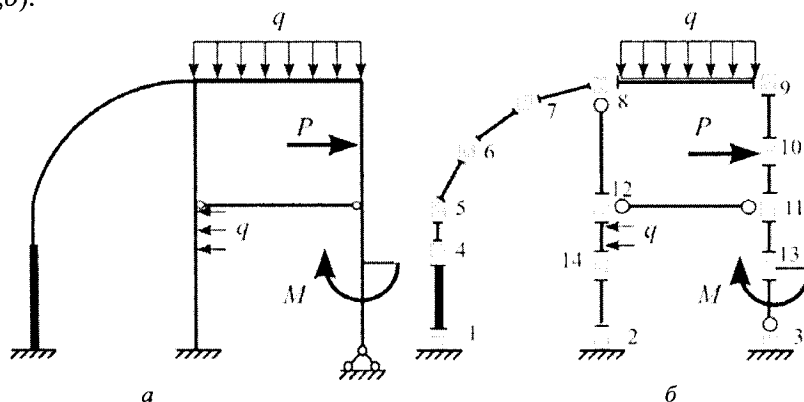


Рис. 20.1.

Вузли скінченно-елементної моделі у даному прикладі пронумеровані в довільному порядку. Далі буде показано, що спосіб нумерації впливає на структуру системи розв'язувальних рівнянь. Для ідентифікації будь-якого скінченного елемента достатньо вказати номери вузлів, які він поєднує.

Для визначення взаємного розташування вузлів, їх кінематичних і статичних характеристик вводиться загальна для всієї скінченно-елементної моделі система координат xoy , яка називається *загальною* або *глобальною*.

Безпосередньо з кожним стержнем пов'язується його власна система координат $x'y'$, якою зручно користуватися задля аналізу напружено-деформованого стану стержня. Така система координат називається *локальною*. Початок локальної системи координат пов'язується з тим вузлом, який має менший номер. Цю точку називають *початком* стержня, а точку, яка розташована на протилежному кінці стержня – його *кінцем*. Вісь x' спрямовують вздовж стержня від його початку до кінця, а вісь y' – перпендикулярно до стержня, причому прямиий кут відкладається від осі x' проти руху годинникової стрілки (рис. 20.2). На рисунку початок стержня позначено літерою i , а кінець – літерою j . Такі позначення застосовуватимуться надалі.

У плоскій дискретній моделі можливі чотири типи скінченних елементів, які розділяються між собою граничними умовами, тобто способами примикання до вузлів:

- жорсткий вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис. 20.3,а);
- жорсткий вузол на початку і шарнірний вузол на кінці стержня (рис. 20.3,б);
- шарнірний вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис. 20.3,в);
- шарнірні вузли на початку і на кінці стержня (рис. 20.3,г).

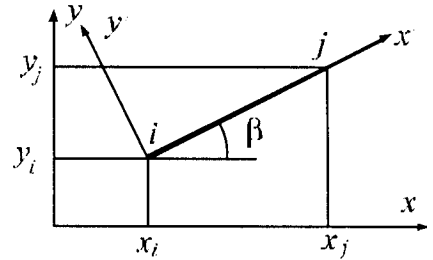


Рис. 20.2

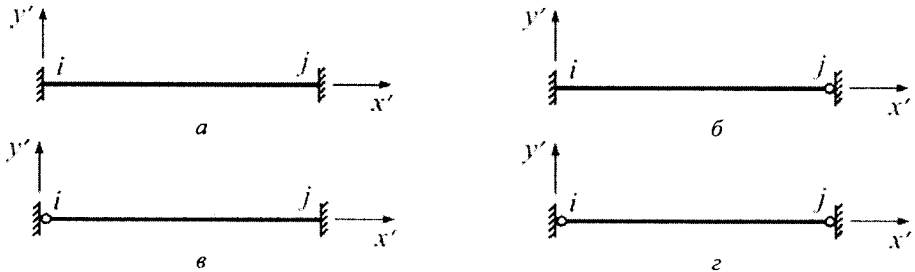


Рис. 20.3

Довжина стержня обчислюється через координати вузлів на початку і на кінці за формулою:

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (20.1)$$

де x_i, x_j, y_i, y_j – координати відповідних вузлів у глобальній системі координат.

Тригонометричні функції кута β повороту локальної системи координат стержня відносно глобальної системи координат усієї скінченно-елементної моделі обчислюються за формулами:

$$\sin\beta = \frac{y_j - y_i}{l}, \quad \cos\beta = \frac{x_j - x_i}{l}. \quad (20.2)$$

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

Слід сказати, що задача побудови розрахункової схеми з використанням зазначених вище чотирьох типів скінченних елементів не має однозначного вирішення. Це пов'язано з такою характерною рисою методу, яка відносить спосіб з'єднання стержнів у вузлі до властивостей елемента, а не вузла оскільки вважається, що *елементи системи приєднані тільки до вузлів*, а безпосередньо між собою вони не з'єднуються. Ця особливість розрахункової моделі МСЕ не завжди видна при традиційному зображенні схем.

Так, розрахункова схема, що наведена на рис. 20.4,*а* у традиційній формі, може наштовхнути на думку про безпосереднє з'єднання елементів, в той час як більш детальне зображення на рис. 20.4,*б* дає можливість уникнути такої похибки.

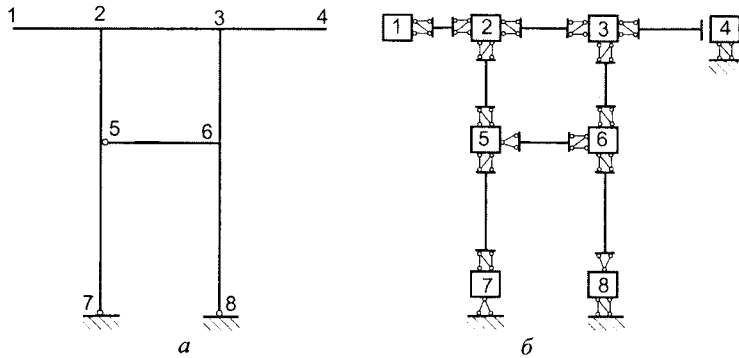


Рис. 20.4

Детальне зображення також показує деякі тонкі особливості розрахункової моделі. Це у першу чергу стосується можливості різними засобами сформулювати кінематичні умови, вибираючи різні набори в'язів. Приклад наведено на рис. 20.5, де зображено два варіанти, рівноправні з точки зору кінематичних властивостей. Але вони зовсім не однакові з точки зору запису умов навантаження. У варіанті, представленому на рис. 20.5,*б*, момент діє на вузол, який має ступень вільності у вигляді повороту, і саме за рахунок цього повороту стержень буде згинатися, в той час як у варіанті на рис. 20.5,*а*, щоб досягти ефекту згину стержня потрібно момент вважати прикладеним не до вузла, а до кінцевого перерізу стержня.

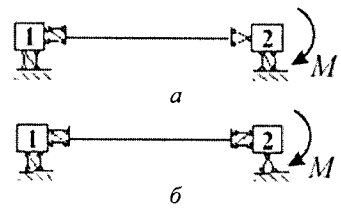


Рис. 20.5

20.2. Кінцеві характеристики стержневих скінченних елементів

У процесі деформування споруди її вузли і, отже, кінці стержнів переміщуються, внаслідок чого на кінцях виникають реакції взаємодії стержнів з вузлами скінченно-елементної моделі. Означені реакції і переміщення можуть бути визначені або в глобальній, або в локальній системі координат. На рис. 20.6,*а* зображено компоненти переміщень початку і кінця стержня, які орієнтовані за осями глобальної системи координат скінченно-елементної моделі.

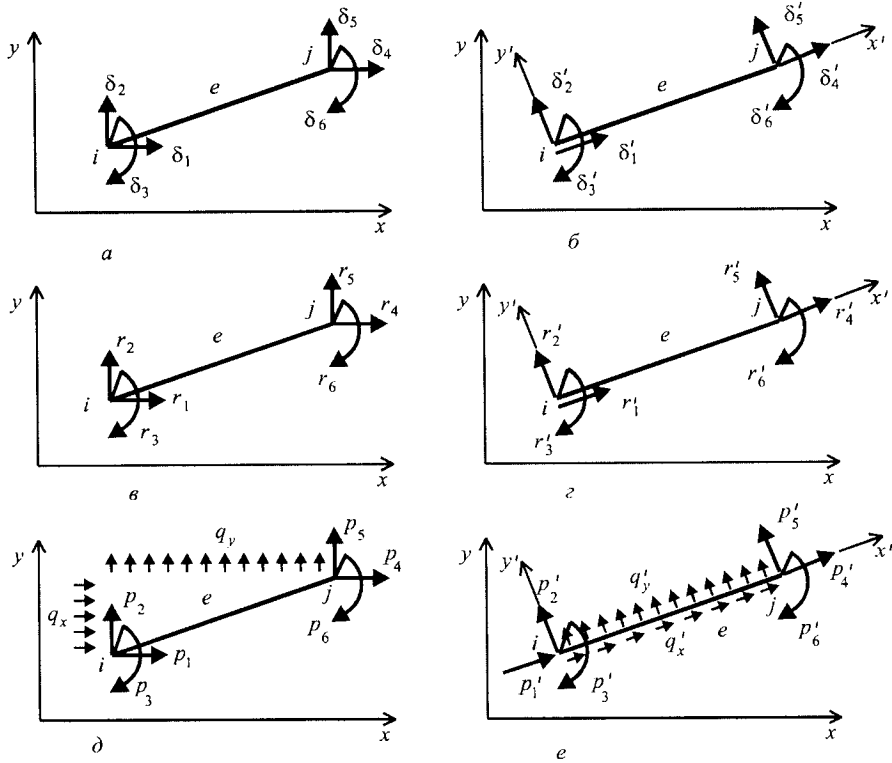


Рис. 20.6

При цьому переміщення нумеруватимемо у строго визначеному, наведеному у табл. 20.1, порядку.

Таблиця 20.1

Напрямок переміщення	Вздовж осі x	Вздовж осі y	Кут повороту
На початку i	δ_1	δ_2	δ_3
На кінці j	δ_4	δ_5	δ_6

Таким чином, переміщення початку стержня в глобальній системі координат можуть бути записані у вигляді матриці-стовпця (вектора)

$$\delta_i = \left\{ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix} \right\}_i$$

або в транспонованій формі

$$\delta_i^T = \{ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \}_i.$$

Аналогічно можна подати вектор переміщень кінця стержня:

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

$$\delta_j = \left\{ \begin{matrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{matrix} \right\}_j \quad \text{або} \quad \delta_j^T = \{ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \}_j.$$

Повний вектор кінцевих переміщень скінченного елемента в глобальній системі координат матиме вигляд

$$\delta_e^T = \{ \delta_i \ \delta_j \}_e = \{ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \mid \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \}_e.$$

На рис. 20.6,б,в зображено кінцеві реакції r , які зумовлені переміщеннями вузлів скінченно-елементної моделі, а також кінцеві вантажні реакції (кінцеві сили) p , зумовлені дією розподілених в межах стержня навантажень q_x і q_y . Нумерація компонентів кінцевих реакцій збігається з нумерацією відповідних кінцевих переміщень. Означені кінцеві реакції також подано у вигляді векторів

$$\mathbf{r}_e^T = \{ \mathbf{r}_i \ \mathbf{r}_j \}_e = \{ r_1 \ r_2 \ r_3 \mid r_4 \ r_5 \ r_6 \}_e,$$

$$\mathbf{p}_e^T = \{ \mathbf{p}_i \ \mathbf{p}_j \}_e = \{ p_1 \ p_2 \ p_3 \mid p_4 \ p_5 \ p_6 \}_e.$$

Кінцеві переміщення і реакції також можуть бути подані у вигляді компонентів, які являють собою проєкції відповідних величин на осі локальної системи координат (рис. 20.6,з,д,е). Нумерація кінцевих реакцій також строго фіксована й аналогічна нумерації кінцевих переміщень в глобальній системі координат. Так, для кінцевих переміщень у локальній системі координат використовують позначення, наведені у табл. 20.2.

Таблиця 20.2

Напрямок переміщення	Вздовж осі x'	Вздовж осі y'	Кут повороту
На початку i	δ'_1	δ'_2	δ'
На кінці j	δ'_4	δ'_5	δ'_6

Так само нумеруються й кінцеві реакції.

Кінцеві переміщення і кінцеві реакції в локальній системі координат також можуть бути представлені у вигляді векторів:

$$\delta_e'^T = \{ \delta'_i \ \delta'_j \}_e = \{ \delta'_1 \ \delta'_2 \ \delta'_3 \mid \delta'_4 \ \delta'_5 \ \delta'_6 \}_e,$$

$$\mathbf{r}_e'^T = \{ \mathbf{r}'_i \ \mathbf{r}'_j \}_e = \{ r'_1 \ r'_2 \ r'_3 \mid r'_4 \ r'_5 \ r'_6 \}_e,$$

$$\mathbf{p}_e'^T = \{ \mathbf{p}'_i \ \mathbf{p}'_j \}_e = \{ p'_1 \ p'_2 \ p'_3 \mid p'_4 \ p'_5 \ p'_6 \}_e.$$

Розподілені на стержневому скінченному елементі, навантаження, можуть бути орієнтовані за осями глобальної системи координат всієї скінченно-елементної моделі (рис. 20.7,а) або за осями локальної системи координат даного елемента (рис. 20.7,б).

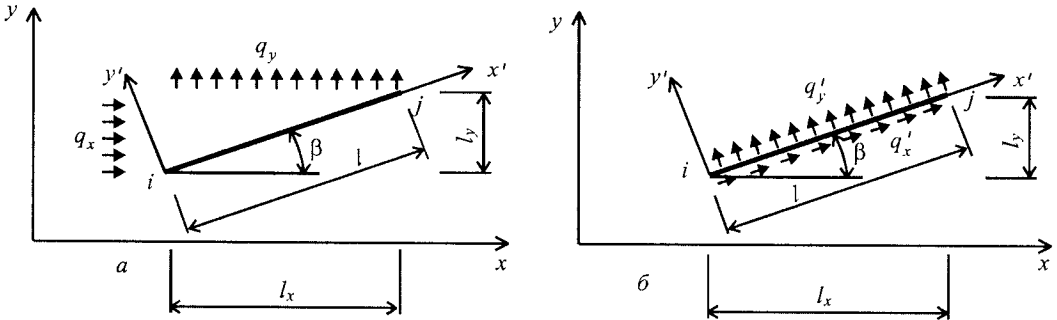


Рис. 20.7

Навантаження, відповідне глобальним осям координат, може бути перетворене у навантаження, відповідне локальній системі координат, за формулами

$$q'_x = \frac{q_x l_y}{l} \cos\beta + \frac{q_y l_x}{l} \sin\beta; \quad q'_y = -\frac{q_x l_y}{l} \sin\beta + \frac{q_y l_x}{l} \cos\beta. \quad (20.3)$$

Для зворотного переходу можна скористатися співвідношеннями

$$q_x = \frac{q'_x l}{l_y} \cos\beta - \frac{q'_y l}{l_y} \sin\beta; \quad q_y = \frac{q'_x l}{l_x} \sin\beta + \frac{q'_y l}{l_x} \cos\beta. \quad (20.4)$$

20.3. Матриця перетворення

Між кінцевими характеристиками в глобальній і локальній системах координат існує певний зв'язок. Розглянемо, наприклад, початок *i* стержня *e* (рис. 20.8).

Вектор рівнодійної **R** кінцевих реакцій розкладемо на дві складові за осями глобальної системи координат:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

З іншого боку, ту саму рівнодійну **R** можна розкласти на складові за осями локальної системи координат:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2.$$

Отже,

$$\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

Порівняємо проєкції на осі *x'* і *y'* лівої і правої частин цієї рівності:

$$\sum F_{x'} \rightarrow r'_1 = r_1 \cdot \cos\beta + r_2 \cdot \sin\beta,$$

$$\sum F_{y'} \rightarrow r'_2 = -r_1 \cdot \sin\beta + r_2 \cdot \cos\beta.$$

Очевидно, що величина кінцевого моменту від повороту координатних осей не залежить:

$$r'_3 = r_3.$$

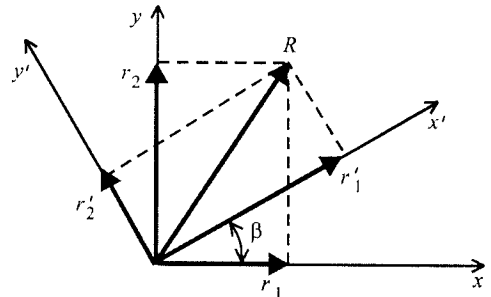


Рис. 20.8

20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Залежності, що знайдено, можуть бути подані в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}_i$$

або у вигляді:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (20.5)$$

де

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i.$$

Аналогічну залежність запишемо для кінця j стержня

$$\mathbf{r}'_j = \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{r}_j, \quad (20.6)$$

Для обох кінців стержня e маємо:

$$\mathbf{r}'_e = \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{r}_e. \quad (20.7)$$

У цьому співвідношенні $\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}_e$ – вектори кінцевих реакцій відповідно в локальній і в глобальній системах координат, \mathbf{T}_e – матриця перетворення. Вона має вигляд

$$\mathbf{T}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_e. \quad (20.8)$$

Матриця \mathbf{T}_e має такі властивості:

- 1) детермінант матриці дорівнює одиниці: $\text{Det}\mathbf{T}_e = 1$;
- 2) обернена матриця збігається з транспонованою: $\mathbf{T}_e^{-1} = \mathbf{T}_e^T$, тобто

$$\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{T}_e^T = \mathbf{T}_e^T \cdot \mathbf{T}_e = \mathbf{E}, \quad (20.9)$$

де \mathbf{E} – одинична матриця.

Матриці, які мають вказані властивості, називаються *ортогональними*.

Залежності, аналогічні (20.7), мають місце також для кінцевих переміщень і вантажних реакцій:

$$\delta'_e = \mathbf{T}_e \delta_e, \quad (20.10)$$

$$\mathbf{p}'_e = \mathbf{T}_e \mathbf{p}_e. \quad (20.11)$$

20.4. Побудова матриці жорсткості стержня в локальній системі координат

Між кінцевими реакціями в стержні і кінцевими переміщеннями, які їх викликають, існує зв'язок. Для величин, що орієнтовані за осями локальної системи координат скінченного елемента, цей зв'язок може визначитися співвідношеннями:

$$\begin{aligned} r'_1 &= k'_{11}\delta'_1 + k'_{12}\delta'_2 + k'_{13}\delta'_3 + k'_{14}\delta'_4 + k'_{15}\delta'_5 + k'_{16}\delta'_6 \\ r'_2 &= k'_{21}\delta'_1 + k'_{22}\delta'_2 + k'_{23}\delta'_3 + k'_{24}\delta'_4 + k'_{25}\delta'_5 + k'_{26}\delta'_6 \\ r'_3 &= k'_{31}\delta'_1 + k'_{32}\delta'_2 + k'_{33}\delta'_3 + k'_{34}\delta'_4 + k'_{35}\delta'_5 + k'_{36}\delta'_6 \\ r'_4 &= k'_{41}\delta'_1 + k'_{42}\delta'_2 + k'_{43}\delta'_3 + k'_{44}\delta'_4 + k'_{45}\delta'_5 + k'_{46}\delta'_6 \\ r'_5 &= k'_{51}\delta'_1 + k'_{52}\delta'_2 + k'_{53}\delta'_3 + k'_{54}\delta'_4 + k'_{55}\delta'_5 + k'_{56}\delta'_6 \\ r'_6 &= k'_{61}\delta'_1 + k'_{62}\delta'_2 + k'_{63}\delta'_3 + k'_{64}\delta'_4 + k'_{65}\delta'_5 + k'_{66}\delta'_6 \end{aligned} \quad (20.12)$$

або в матричній формі

$$\mathbf{r}'_e = \mathbf{k}'_e \cdot \delta'_e, \quad (20.13)$$

де \mathbf{r}'_e , δ'_e – вектори кінцевих реакцій і кінцевих переміщень стержня в локальній системі координат,

$$\mathbf{k}'_e = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & k'_{15} & k'_{16} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & k'_{25} & k'_{26} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix}_e \quad (20.14)$$

– матриця жорсткості стержня в локальній системі координат.

Будь-який коефіцієнт матриці жорсткості k'_{ij} являє собою кінцеву реакцію r'_i , викликану кінцевим переміщенням $\delta'_j = 1$, за умови, що інші кінцеві переміщення дорівнюють нулю.

Існує кілька методів побудови матриці жорсткості стержневих елементів. Найпростішим є підхід, при якому коефіцієнти матриці визначають із розрахунку стержня на почергове змушене переміщення його кінців. З цією метою, наприклад, може бути запропоновано метод початкових параметрів. Однак, у складніших випадках, наприклад, для стержня в тривимірному просторі, такий спосіб використати практично неможливо. Загальний метод побудови матриць жорсткості будь-яких елементів, в тому числі і для стержня на площині, ґрунтується на розгляді функціонала повної потенціальної енергії та умов його мінімуму.

Якщо знехтувати деформаціями зсуву, робота внутрішніх сил (20.2) для стержня, що деформується, визначається формулою

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (N\varepsilon + M\kappa) dx,$$

де ε – поздовжня деформація, κ – зміна кривизни стержня.

В межах стержневого елемента e розглянемо дію рівномірно розподілених навантажень інтенсивністю q_x і q_y , які орієнтовані відповідно у напрямку осей x' і y' локальної системи координат скінченного елемента. Потенціал зовнішніх сил

$$A = - \int_0^l (q_x u + q_y v) dx.$$

Повна потенціальна енергія стержня

$$\Pi = U + A = \frac{1}{2} \int_0^l (N\varepsilon + M\kappa) dx - \int_0^l (q_x u + q_y v) dx. \quad (20.15)$$

Поздовжні сили і згинальні моменти пов'язані з деформаціями співвідношеннями

$$N = EF\varepsilon, \quad M = EI\kappa \quad (20.16)$$

або в матричній формі

$$\mathbf{N} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (20.17)$$

де $\mathbf{N}^T = \{N \ M\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon \ \kappa\}$ – вектори внутрішніх зусиль і деформацій в стержні, \mathbf{D} – матриця пружних констант

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EF & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}.$$

Деформації пов'язані з переміщеннями співвідношеннями

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (20.18)$$

або у матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} \mathbf{u}. \quad (20.19)$$

Тут позначено: $\mathbf{u}^T = \{u \ v\}$ – вектор переміщень довільної точки осі стержня, \mathbf{d} – матриця диференціювання

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{N} dx = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{d}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{d}\mathbf{u} dx,$$

$$A = - \int_0^l \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx,$$

де $\mathbf{q}^T = \{q_x \ q_y\}$.

Отже, повна потенціальна енергія деформації виражається співвідношенням:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{d}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{d}\mathbf{u} dx - \int_0^l \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx. \quad (20.20)$$

Компонентами вектора \mathbf{u} є поздовжні і поперечні переміщення довільного перерізу стержня, для визначення яких досить складно побудувати аналітичні залежності. Тому використаємо поліномну апроксимацію переміщень у межах стержня, використавши властивості їх неперервності:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad v = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3. \quad (20.21)$$

Зазначимо, що поліноми (20.21) є точними розв'язками однорідних диференціальних рівнянь поздовжніх деформацій і поперечного згину. Тому обчислення повної потенціальної енергії дасть точний результат.

Ураховуючи те, що координатам кінців скінченного елемента у співвідношеннях (20.21) відповідають значення вузлових переміщень, складемо систему шістьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів поліномів. Розв'язавши цю систему, отримаємо значення коефіцієнтів, виражені через вузлові переміщення. Нарешті, підставивши одержані коефіцієнти в (20.21), матимемо переміщення u і v будь-якої точки стержня у такому вигляді:

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1 \delta_1' + \Phi_4 \delta_4'; \\ v &= \Phi_2 \delta_2' + \Phi_3 \delta_3' + \Phi_5 \delta_5' + \Phi_6 \delta_6'. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Функції Φ_i , що входять до співвідношень (20.22), називаються *функціями форми* скінченного елемента. У матричному записі залежності (20.22) матимуть такий вигляд:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \\ \delta_4' \\ \delta_5' \\ \delta_6' \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi} \delta'. \quad (20.23)$$

Повна потенціальна енергія (20.20) з урахуванням (20.23) запишеться так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{d}\mathbf{\Phi} \delta')^T \mathbf{D} \mathbf{d}\mathbf{\Phi} \delta' dx - \int_0^l \mathbf{\Phi} \delta'^T \mathbf{q} dx. \quad (20.24)$$

Якщо позначити

$$\mathbf{B} = \mathbf{d}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{d\Phi_4}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} & 0 & \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad (20.25)$$

то формула для обчислення потенціальної енергії набуде вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{B} \delta')^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta' dx - \int_0^l (\mathbf{\Phi} \delta')^T \mathbf{q} dx.$$

Виконавши операцію транспонування, остаточно знаходимо:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (\delta')^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta' dx - \int_0^l (\delta')^T \Phi^T \mathbf{q} dx. \quad (20.26)$$

Необхідною умовою рівноваги системи є наявність екстремуму функціоналу повної потенціальної енергії, тобто дорівнювання нулю її першого диференціалу, що еквівалентно дорівнюванню нулю всіх її перших похідних за кінцевими переміщеннями δ' :

$$\frac{d\Phi}{d\delta'^T} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta' dx - \int_0^l \Phi^T \mathbf{q} dx = \mathbf{0}. \quad (20.27)$$

Маючи на увазі те, що вектор δ' кінцевих переміщень не залежить від координати x , запишемо

$$\left(\int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \right) \delta' - \int_0^l \Phi^T \mathbf{q} dx = \mathbf{0}, \quad (20.28)$$

де

$$\mathbf{k}' = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx, \quad \mathbf{p}' = \int_0^l \Phi^T \mathbf{q} dx. \quad (20.29)$$

Виходячи з того, що вектор кінцевих переміщень $\delta' \neq \mathbf{0}$, маємо

$$\mathbf{k}' \delta' + \mathbf{p}' = \mathbf{0}. \quad (20.30)$$

Тут \mathbf{k}' – матриця жорсткості стержневого скінченного елемента в локальній системі координат (20.14), \mathbf{p}' – вектор кінцевих вантажних реакцій, зумовлених дією розподілених навантажень у межах стержня.

Будь-який елемент матриці жорсткості \mathbf{k}' і вектора кінцевих сил \mathbf{p}' визначаються залежностями, що впливають з (20.29) і мають такий вигляд:

$$k'_{ij} = \begin{cases} EF \int_0^l \frac{d\Phi_i}{dx'} \cdot \frac{d\Phi_j}{dx'} dx' & (\text{при } i, j = 1, 4), \\ EI \int_0^l \frac{d^2\Phi_i}{(dx')^2} \cdot \frac{d^2\Phi_j}{(dx')^2} dx' & (\text{при } i, j = 2, 3, 5, 6). \end{cases} \quad p'_i = \begin{cases} -\int_0^l q_1 \Phi_i dx & (\text{при } i = 1, 4), \\ -\int_0^l q_2 \Phi_i dx & (\text{при } i = 2, 3, 5, 6). \end{cases} \quad (20.31)$$

20.5. Матриці жорсткості стержневих елементів у локальній системі координат

Скористаємося викладеною методикою для побудови матриць жорсткості стержневих елементів за різних граничних умов.

Стержень із затисненнями на обох кінцях (рис. 20.9).

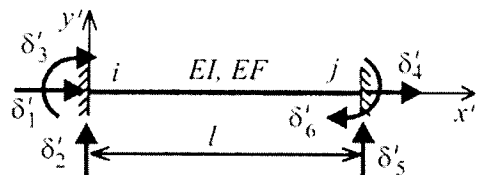


Рис. 20.9

Маємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad u(0) &= \alpha_1 = \delta'_1; \\ y(0) &= \alpha_3 = \delta'_2; \\ \varphi(0) &= \frac{dy(0)}{dx} = \alpha_4 = -\delta'_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x=l \quad u(l) &= \alpha_1 + \alpha_2 l = \delta'_4; \\ y(l) &= \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \delta'_5; \\ \varphi(l) &= \frac{dy(l)}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2 = -\delta'_6. \end{aligned}$$

Розв'язуючи одержані рівняння, знаходимо:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta'_1; \quad \alpha_2 = \frac{\delta'_4 - \delta'_1}{l}; \quad \alpha_3 = \delta'_2; \quad \alpha_4 = -\delta'_3; \\ \alpha_5 &= \frac{-3\delta'_2 + 2\delta'_3 + 3\delta'_5 + l\delta'_6}{l^2}; \quad \alpha_6 = \frac{2\delta'_2 - l\delta'_3 - 2\delta'_5 - l\delta'_6}{l^3}. \end{aligned}$$

Підставивши одержані величини у (20.21) отримаємо функції форми:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 - x/l; \quad \Phi_2 = 1 - 3x^2/l^2; \quad \Phi_3 = -x + 2x^2/l - x^3/l^2; \quad \Phi_4 = x/l; \\ \Phi_5 &= 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3; \quad \Phi_6 = x^2/l - x^3/l^2. \end{aligned} \quad (20.32)$$

Тепер, маючи значення функцій форми, за формулами (20.31), можемо знайти елементи матриці жорсткості стержня і елементи вектора вантажних реакцій. Обчислимо, наприклад, елементи k'_{23} і p'_2 . Відповідно до значень індексів ($i=2$, $j=3$) для обчислення елемента k'_{23} скористаємось другою формулою зі співвідношень (20.31). Другі похідні функцій форми Φ_2 і Φ_3 встановлюємо з рівнянь (20.32):

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}, \quad \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}.$$

Звідси маємо:

$$k'_{23} = EI \int_0^l \frac{d^2\Phi_2}{(dx')^2} \cdot \frac{d^2\Phi_3}{(dx')^2} dx = EI \int_0^l \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) dx = -\frac{12EI}{l^3} = -\frac{12i}{l^2}.$$

Для обчислення елемента p'_2 скористаємось другою формулою зі співвідношень (20.31)

$$p'_2 = - \int_0^l q_y \Phi_2 dx = - \int_0^l q_y (1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3) dx = -\frac{q_y l}{2}.$$

Аналогічно обчислюють усі інші елементи матриці жорсткості і вектора вантажних реакцій. Наводимо повну матрицю жорсткості \mathbf{k}' і вектор вантажних реакцій \mathbf{p} для стержневого елемента, що має затиснення з обох кінців:

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

$$\mathbf{k}'_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 12i/l^2 & -6i/l & 0 & -12i/l^2 & -6i/l \\ 0 & -6i/l & 4i & 0 & 6i/l & 2i \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -12i/l^2 & 6i/l & 0 & 12i/l^2 & 6i/l \\ 0 & -6i/l & 2i & 0 & 6i/l & 4i \end{array} \right]_e$$

Тут позначено: $i = EI/l$ – погонна жорсткість стержня на згин, $f = EF/l$ – погонна жорсткість стержня на поздовжні деформації.

Вектор вантажних реакцій при цьому

$$\mathbf{p}'_e{}^T = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{q_x l}{2} & -\frac{q_y l}{2} & \frac{q_y l^2}{12} & -\frac{q_x l}{2} & -\frac{q_y l}{2} & -\frac{q_y l^2}{12} \end{array} \right\}_e$$

Стержень із затисненням на початку і шарніром на кінці (рис. 20.10)

Граничні умови:

при $x=0$ $u(0) = \alpha_1 = \delta'_1$;

$y(0) = \alpha_2 = \delta'_2$;

$\varphi(0) = \frac{dy(0)}{dx} = \alpha_4 = -\delta'_3$,

при $x=l$ $u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l = \delta'_4$;

$y(l) = \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \delta'_5$;

$M(l) = EI \frac{d^2 y(l)}{dx^2} = EI \cdot (2\alpha_5 + 6\alpha_6 l) = 0$.

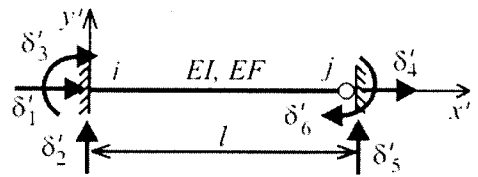


Рис. 20.10

Розв'язавши ці рівняння і підставивши одержані величини коефіцієнтів у (20.21), відшукуємо функції форми:

$$\Phi_1 = 1 - x/l; \quad \Phi_2 = 1 - 3x^2/2l^2 + x^3/2l^3; \quad \Phi_3 = -x + 3x^2/2l - x^3/2l^2;$$

$$\Phi_4 = x/l; \quad \Phi_5 = 3x^2/2l^2 - x^3/2l^3; \quad \Phi_6 = 0.$$

За формулами (20.31) знаходимо коефіцієнти матриці жорсткості і елементи вектора вантажних реакцій:

$$\mathbf{k}'_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 3i/l^2 & -3i/l & 0 & -3i/l^2 & 0 \\ 0 & -3i/l & 3i & 0 & 3i/l & 0 \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -3i/l^2 & 3i/l & 0 & 3i/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_e,$$

$$\mathbf{p}'_e{}^T = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{q_x l}{2} & -\frac{5q_y l}{8} & \frac{q_y l^2}{8} & -\frac{q_x l}{2} & -\frac{3q_y l}{8} & 0 \end{array} \right\}_e$$

Стержень із шарніром на початку і з затисненням на кінці (рис. 20.11)

Граничні умови:

при $x=0$ $u(0) = \alpha_1 = \delta'_1$;

$y(0) = \alpha_3 = \delta'_2$;

$M(0) = EI \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = EI \cdot 2\alpha_5 = 0$,

при $x=l$ $u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l = \delta'_4$;

$y(l) = \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \delta'_5$;

$\varphi(l) = -\frac{dy(l)}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2 = -\delta'_6$.

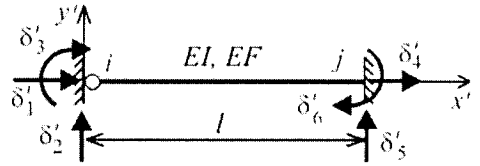


Рис. 20.11

Розв'язавши наведені рівняння, знаходимо за допомогою співвідношень (20.21) функції форми:

$\Phi_1 = 1 - x/l$; $\Phi_2 = 1 - 3x/2l + x^3/2l^3$; $\Phi_3 = 0$;

$\Phi_4 = x/l$; $\Phi_5 = 3x/2l - x^3/2l^3$; $\Phi_6 = x/l - x^3/2l^2$.

Матриця жорсткості і вектор вантажних реакцій стержня:

$$k'_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 3i/l^2 & 0 & 0 & -3i/l^2 & -3i/l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -3i/l^2 & 0 & 0 & 3i/l^2 & 3i/l \\ 0 & -3i/l & 0 & 0 & 3i/l & 3i \end{array} \right]_e$$

$$p_e^{iT} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{q_x l}{2} & -\frac{3q_y l}{8} & 0 & -\frac{q_x l}{2} & -\frac{5q_y l}{8} & -\frac{q_y l^2}{8} \end{array} \right\}_e$$

Стержень із шарнірами з обох сторін (рис.20.12)

Граничні умови:

при $x=0$ $u(0) = \alpha_1 = \delta'_1$;

$y(0) = \alpha_3 = \delta'_2$;

$M(0) = EI \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = EI \cdot 2\alpha_5 = 0$.

при $x=l$ $u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l = \delta'_4$;

$y(l) = \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \delta'_5$;

$M(l) = EI \frac{d^2 y(l)}{dx^2} = EI(2\alpha_5 + 6\alpha_6 l) = 0$.

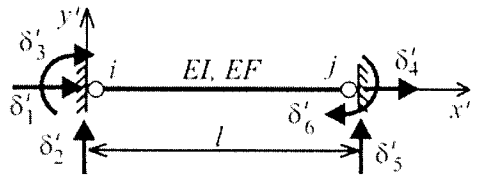


Рис. 20.12

Функції форми:

$\Phi_1 = 1 - x/l$; $\Phi_2 = 1 - x/l$; $\Phi_3 = 0$; $\Phi_4 = x/l$; $\Phi_5 = x/l$; $\Phi_6 = 0$.

Матриця жорсткості стержня і вектор вантажних реакцій:

$$\mathbf{k}'_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_e, \mathbf{p}'_e{}^T = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{q_x l}{2} & -\frac{q_y l}{2} & 0 & \frac{q_x l}{2} & \frac{q_y l}{2} & 0 \end{array} \right\}_e.$$

20.6. Матриці жорсткості стержня в глобальній системі координат

Матриці жорсткості стержня в локальних системах координат визначають величини кінцевих реакцій, які орієнтовані за осями локальних систем координат. При розгляді сумарної дії стержнів на вузли скінченно-елементної моделі виникає необхідність привести всі ці реакції, що передаються на вузли з боку стержнів, до спільних напрямів. За ці напрями доцільно обрати напрями осей глобальної системи координат всієї моделі. Отже, постає задача перетворення кінцевих реакцій стержня з локальної у глобальну систему координат, тобто задача побудови матриць жорсткості стержнів у глобальній системі координат.

Як відомо, між кінцевими реакціями і кінцевими переміщеннями стержня в локальній системі координат існує залежність (20.13):

$$\mathbf{r}'_e = \mathbf{k}'_e \delta'_e.$$

З іншого боку, кінцеві величини в локальній і глобальній системах координат пов'язані матрицею перетворення \mathbf{T}_e . Якщо виразити в (20.13) кінцеві реакції \mathbf{r}'_e і кінцеві переміщення δ'_e , які спрямовані за осями локальної системи координат, через аналогічні величини в глобальній системі згідно з (20.7) і (20.10), одержимо:

$$\mathbf{T}_e \mathbf{r}_e = \mathbf{k}'_e \mathbf{T}_e \delta_e.$$

Помноживши ліворуч обидві частини рівності на обернену матрицю перетворень, і зважаючи на те, що обернена матриця перетворень збігається з транспонованою, можемо записати

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}'_e \mathbf{T}_e \delta_e.$$

Позначивши

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}'_e \mathbf{T}_e, \tag{20.33}$$

врешті маємо:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{k}_e \delta_e. \tag{20.34}$$

Матриця \mathbf{k}_e , що перетворює вектор кінцевих переміщень δ_e у вектор кінцевих реакцій у глобальній системі координат \mathbf{r}_e , являє собою матрицю жорсткості у глобальній системі координат.

Матричний вираз (20.34) може бути представлений співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4 + k_{15}\delta_5 + k_{16}\delta_6 \\
 r_2 &= k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 + k_{25}\delta_5 + k_{26}\delta_6 \\
 r_3 &= k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 + k_{35}\delta_5 + k_{36}\delta_6 \\
 r_4 &= k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4 + k_{45}\delta_5 + k_{46}\delta_6 \\
 r_5 &= k_{51}\delta_1 + k_{52}\delta_2 + k_{53}\delta_3 + k_{54}\delta_4 + k_{55}\delta_5 + k_{56}\delta_6 \\
 r_6 &= k_{61}\delta_1 + k_{62}\delta_2 + k_{63}\delta_3 + k_{64}\delta_4 + k_{65}\delta_5 + k_{66}\delta_6
 \end{aligned}
 \tag{20.35}$$

Таким чином, матриця жорсткості стержня в глобальній (загальній) системі координат має вигляд

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}_e.
 \tag{20.36}$$

Будь-який коефіцієнт матриці k_{ij} являє собою кінцеву реакцію r_i , викликану дією одиничного кінцевого переміщення $\delta_j = 1$. При цьому необхідно чітко усвідомлювати, що як кінцеві реакції, так і кінцеві переміщення орієнтовані за осями глобальної системи координат. Позначення кінцевих реакцій від дії кожного одиничного кінцевого переміщення наведені на рис. 20.13.

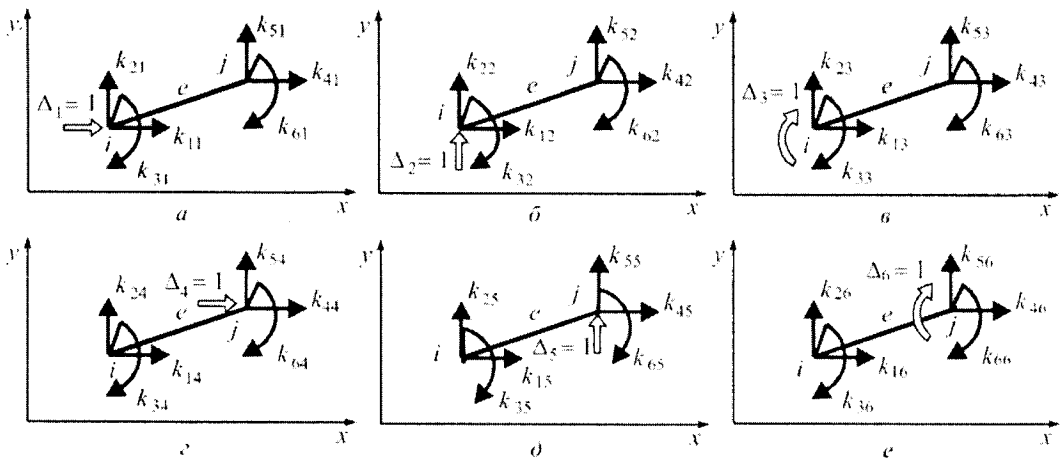


Рис. 20.13

На завершення наводяться елементи матриць жорсткості стержня в глобальній системі координат при різних граничних умовах, що одержані за допомогою формули (20.33). Саме ці матриці стануть в нагоді при побудові матриці жорсткості всієї скінченно-елементної моделі плоскої стержневої системи.

Жорсткий вузол на початку і на кінці стержня (рис. 20.14).

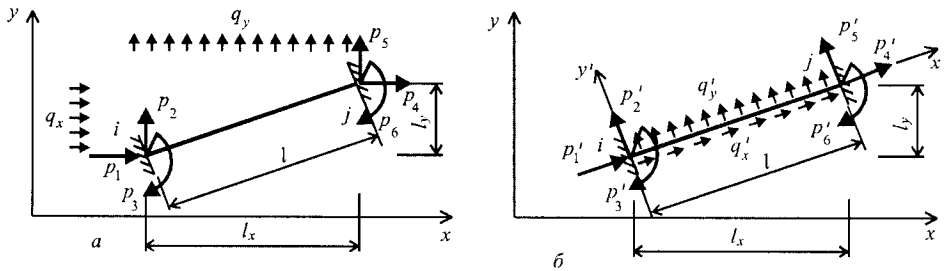


Рис. 20.14

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = f \cos^2 \beta + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \beta, \\
 k_{22} &= k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = f \sin^2 \beta + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \beta, \\
 k_{33} &= k_{66} = 4i, \\
 k_{12} &= k_{21} = k_{45} = k_{54} = -k_{15} = -k_{51} = -k_{24} = -k_{42} = \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \sin \beta \cos \beta, \\
 k_{13} &= k_{31} = k_{16} = k_{61} = -k_{46} = -k_{64} = -k_{34} = -k_{43} = \frac{6i}{l} \sin \beta, \\
 k_{35} &= k_{53} = k_{56} = k_{65} = -k_{23} = -k_{32} = -k_{26} = -k_{62} = \frac{6i}{l} \cos \beta, \\
 k_{36} &= k_{63} = 2i.
 \end{aligned} \tag{20.37}$$

Додатні напрями дії кінцевих реакцій, які виражаються за формулами (20.37), зображено на рис. 20.13.

Вектори вантажних кінцевих реакцій, орієнтованих за осями локальної і глобальної систем координат (рис. 20.14), від розподілених вздовж стержня навантажень

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -q_x l_y C / 2 - q_y l_x S / 2 \\ q_x l_y S / 2 - q_y l_x C / 2 \\ -q_x l_y^2 / 12 + q_y l_x^2 / 12 \\ -q_x l_y C / 2 - q_y l_x S / 2 \\ q_x l_y S / 2 - q_y l_x C / 2 \\ q_x l_y^2 / 12 - q_y l_x^2 / 12 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{Bmatrix} -q'_x l_y / 2 \\ -q'_y l_x / 2 \\ q'_y l^2 / 12 \\ -q_x l_y / 2 \\ -q_y l_x / 2 \\ -q'_y l^2 / 12 \end{Bmatrix}.$$

Тут і далі позначено: $S = \sin \beta$, $C = \cos \beta$.

Жорсткий вузол на початку і шарнірний вузол на кінці стержня (рис. 20.15).

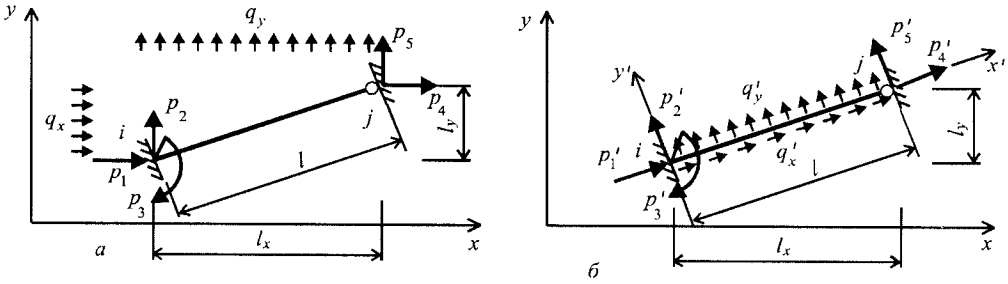


Рис. 20.15

Коефіцієнти матриці жорсткості стержня

$$k_{11} = k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = f \cos^2 \beta + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \beta,$$

$$k_{22} = k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = f \sin^2 \beta + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \beta,$$

$$k_{33} = 3i, \quad k_{66} = 0,$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{45} = k_{54} = -k_{15} = -k_{51} = -k_{24} = -k_{42} = (f - \frac{3i}{l^2}) \sin \beta \cos \beta, \quad (20.38)$$

$$k_{13} = k_{31} = -k_{34} = -k_{43} = \frac{3i}{l} \sin \beta,$$

$$k_{35} = k_{53} = -k_{23} = -k_{32} = \frac{3i}{l} \cos \beta,$$

$$k_{16} = k_{26} = k_{36} = k_{46} = k_{56} = k_{66} = k_{61} = k_{62} = k_{63} = k_{64} = k_{65} = 0.$$

Вектори вантажних реакцій, орієнтованих за осями локальної і глобальної систем координат, від розподілених вздовж стержня навантажень

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -5q_x l_y C/8 - 5q_y l_x S/8 \\ 5q_x l_y S/8 - 5q_y l_x C/8 \\ -q_x l_y^2/8 + q_y l_x^2/8 \\ -3q_x l_y C/8 - 3q_y l_x S/8 \\ 3q_x l_y S/8 - 3q_y l_x C/8 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{Bmatrix} -5q'_x l_y/8 \\ -5q'_y l_x/8 \\ q'_y l^2/8 \\ -3q'_y l_x/8 \\ -3q'_x l_y/8 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Шарнірний вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис.20.16).

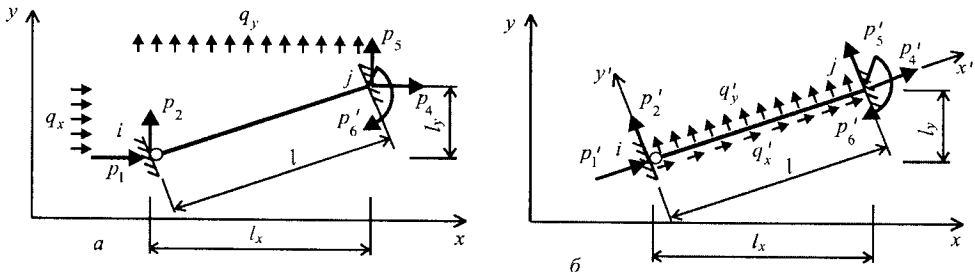


Рис. 20.16

Коефіцієнти матриці жорсткості стержня:

$$k_{11} = k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = f \cos^2 \beta + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \beta,$$

$$k_{22} = k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = f \sin^2 \beta + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \beta,$$

$$k_{33} = 0, \quad k_{66} = 3i,$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{45} = k_{54} = -k_{15} = -k_{51} = -k_{24} = -k_{42} = (f - \frac{3i}{l^2}) \sin \beta \cos \beta, \quad (20.39)$$

$$k_{16} = k_{61} = -k_{46} = -k_{64} = \frac{3i}{l} \sin \beta,$$

$$k_{56} = k_{65} = -k_{26} = -k_{62} = \frac{3i}{l} \cos \beta,$$

$$k_{13} = k_{23} = k_{33} = k_{43} = k_{53} = k_{63} = k_{31} = k_{32} = k_{34} = k_{35} = k_{36} = 0.$$

Вектори кінцевих сил, орієнтованих за осями локальної і глобальної системи координат, від розподілених вздовж стержня навантажень

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -3q_x l_y C / 8 - 3q_y l_x S / 8 \\ 3q_x l_y S / 8 - 3q_y l_x C / 8 \\ 0 \\ -5q_x l_y C / 8 - 5q_y l_x S / 8 \\ 5q_x l_y S / 8 - 5q_y l_x C / 8 \\ q_x l_y^2 / 8 - q_y l_x^2 / 8 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{Bmatrix} -3q'_x l_y / 8 \\ -3q'_y l_x / 8 \\ 0 \\ -5q'_x l_y / 8 \\ -5q'_y l_x / 8 \\ -q'_y l^2 / 8 \end{Bmatrix}.$$

Шарнірні вузли на початку і на кінці стержня (рис. 20.17).

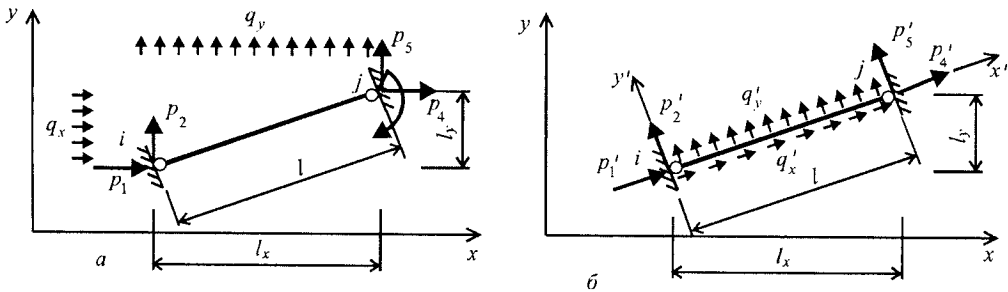


Рис. 20.17

Коефіцієнти матриці жорсткості стержня дорівнюють.

$$k_{11} = k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = f \cos^2 \beta,$$

$$k_{22} = k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = f \sin^2 \beta,$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{45} = k_{54} = -k_{15} = -k_{51} = -k_{24} = -k_{42} = f \sin \beta \cos \beta, \quad (20.40)$$

$$k_{16} = k_{61} = k_{46} = k_{64} = k_{56} = k_{65} = k_{26} = k_{62} = k_{33} = k_{66} = 0,$$

$$k_{13} = k_{23} = k_{33} = k_{43} = k_{53} = k_{63} = k_{31} = k_{32} = k_{34} = k_{35} = k_{36} = 0.$$

Вектори кінцевих сил, орієнтованих за осями локальної і глобальної систем координат, від розподілених вздовж стержня навантажень

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -q_x l_y C/2 - q_y l_x S/2 \\ q_x l_y S/2 - q_y l_x C/2 \\ 0 \\ -q_x l_y C/2 - q_y l_x S/2 \\ q_x l_y S/2 - q_y l_x C/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{Bmatrix} -q'_x l_y /2 \\ -q'_y l_x /2 \\ 0 \\ -q'_x l_y /2 \\ -q'_y l_x /2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

20.7. Вузлові характеристики скінченно-елементної моделі

Вузли скінченно-елементної моделі можуть бути охарактеризовані як зі статичного, так і з кінематичного боку. Кінематичними характеристиками є вузлові переміщення, а статичними – вузлові реакції і вузлові навантаження.

Будь-який вільний жорсткий вузол i скінченно-елементної моделі має три ступня вільності, тобто можливість двох поступальних і одного кутового переміщень $\Delta_{xi}, \Delta_{yi}, \Delta_{\phi i}$ цього вузла (рис. 20.18,а).

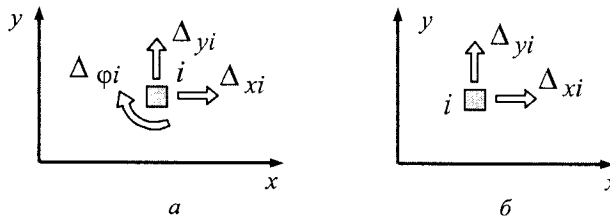


Рис. 20.18

Зазначені величини можуть бути записані у вигляді вектора

$$\Delta_i^T = \{\Delta_{xi} \quad \Delta_{yi} \quad \Delta_{\phi i}\}.$$

Шарнірний вузол має два ступня вільності (рис.20.18,б) і відповідно вектор переміщень такого вузла матиме дві компоненти:

$$\Delta_i^T = \{\Delta_{xi} \quad \Delta_{yi}\}.$$

Розглянемо розрахункову схему рами (рис. 20.19,а).

Сукупність всіх вузлових переміщень скінченно-елементної моделі (рис. 20.19,б) становить вектор вузлових переміщень

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_i \quad \dots \quad \Delta_7\},$$

або

$$\Delta^T = \{\Delta_{x1} \quad \Delta_{y1} \quad \Delta_{\phi 1} | \Delta_{x2} \quad \Delta_{y2} \quad \Delta_{\phi 2} |, \dots, | \Delta_{x7} \quad \Delta_{y7} \quad \Delta_{\phi 7}\}.$$

Для практичних розрахунків зручно використовувати наскрізну нумерацію компонентів вузлових переміщень у межах усїєї моделі (рис. 20.19,в).

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

У такому разі вектор вузлових переміщень матиме вигляд:

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 | \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6 |, \dots, | \Delta_{18} \ \Delta_{19} \ \Delta_{20}\}.$$

Вектор Δ при розрахунку стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу переміщень являє собою вектор основних невідомих. При цьому деякі переміщення вузлів можуть бути відомі з граничних умов задачі. Так, у даному прикладі

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{14} = \dots = \Delta_{20} = 0.$$

Отже, невідомими є переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{11}$. Вектор Δ після вилучення нульових елементів набере вигляду

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 | \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6 | \Delta_7 \ \Delta_8 \ \Delta_9 | \Delta_{10} \ \Delta_{11}\}.$$

Під впливом зовнішніх факторів вузли скінченно-елементної моделі переміщуються, а стержні, які їх поєднують, деформуються. Поміж вузлами і стержнями виникають реакції взаємодії – одна із статичних характеристик вузлів. Сумарні реакції всіх стержнів, які примикають до вузла i , зобразимо у вигляді двох зосереджених сил, які орієнтовані за осями глобальної системи координат всієї моделі, і зосередженого моменту. Позначимо ці реакції через R_{xi} , R_{yi} , $R_{\phi i}$.

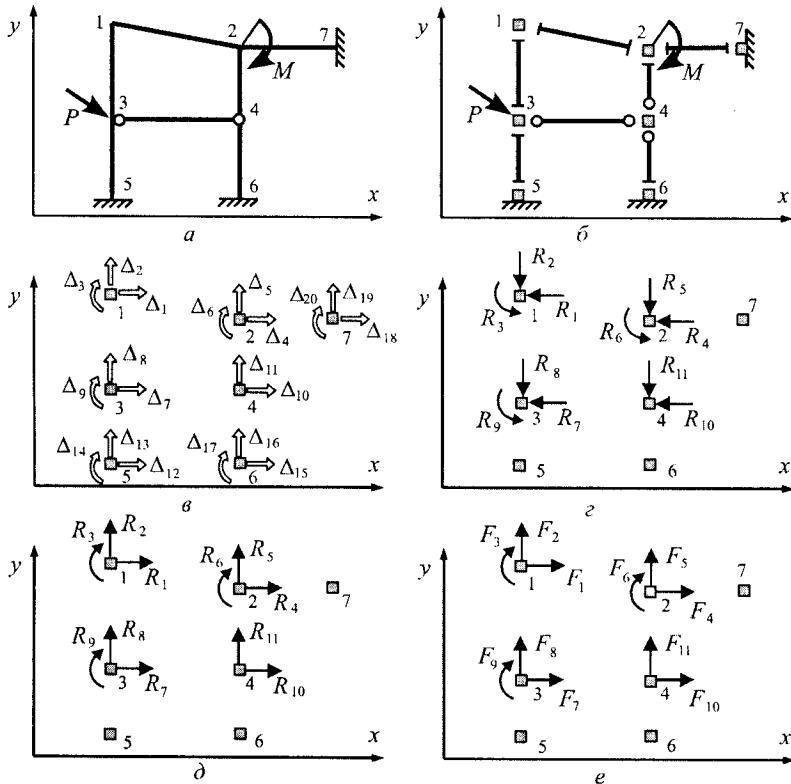


Рис. 20.19

Відповідні реактивні сили, які передаються на вузли з боку стержнів, і на стержні, що приєднуються до вузлів, однакові за величиною, але спрямовані в протилежних напрямках. Звичайно для реактивних сил, з якими вузли діють на стержні, за додатні приймають напрями, що збігаються з напрямками вузлових переміщень (рис. 20.19,δ). Отже, реакції, які передаються на вузли з боку стержнів, будуть спрямовані протилежно (рис. 20.19,ε).

Сукупність реакцій для вузла i скінченно-елементної моделі подамо у вигляді вектора:

$$\mathbf{R}^T = \{R_{xi} \ R_{yi} \ R_{\phi i}\}.$$

Вузлові реакції всієї скінченно-елементної моделі утворюють вектор вузлових реакцій:

$$\mathbf{R}^T = \{\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \dots \ \mathbf{R}_n\}.$$

При розв'язанні практичних задач використовується наскрізна нумерація реакцій, причому їх номери повинні збігатися з номерами відповідних переміщень:

$$\mathbf{R}^T = \{R_1 \ R_2 \ R_3 | R_4 \ R_5 \ R_6 | R_7 \ R_8 \ R_9 | R_{10} \ R_{11}\}.$$

Іншою статичною характеристикою вузлів скінченно-елементної моделі є вузлові навантаження. В кожному вузлі припускається можливість дії трьох компонентів зовнішніх зосереджених силових дій: F_x – сила, яка спрямована вздовж осі x глобальної системи координат; F_y – сила, яка діє вздовж осі y ; F_ϕ – зосереджений момент. Зосереджені дії у вузлі i можуть бути записані у вигляді вектора

$$\mathbf{F}_i^T = \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{\phi i}\},$$

а сукупність зведених до вузлів скінченно-елементної моделі навантажень (рис. 20.19,б) – у вигляді вектора

$$\mathbf{F}^T = \{\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \dots \ \mathbf{F}_n\} = \{F_{x1} \ F_{y1} \ F_{\phi1} | F_{x2} \ F_{y2} \ F_{\phi2} | \dots | F_{xn} \ F_{yn} \ F_{\phi n}\}.$$

Вектор \mathbf{F} подамо як суму двох векторів:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \tag{20.41}$$

де \mathbf{P} – вектор зовнішніх сил, що безпосередньо діють на вузли, його компоненти дорівнюють відповідним зовнішнім силовим діям; \mathbf{Q} – вектор зведених до вузлів розподілених у межах стержнів навантажень.

Компоненти згаданих векторів також одержують наскрізну нумерацію, яка відповідає нумерації вузлових переміщень:

$$\mathbf{P}^T = \{P_1 \ P_2 \ P_3 | P_4 \ P_5 \ P_6 | P_7 \ P_8 \ P_9 | P_{10} \ P_{11}\},$$

$$\mathbf{Q}^T = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_3 | Q_4 \ Q_5 \ Q_6 | Q_7 \ Q_8 \ Q_9 | Q_{10} \ Q_{11}\}.$$

20.8. Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі

З умов рівноваги будь-якого вузла i (рис. 20.20) маємо:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & F_{xi} - R_{xi} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, & F_{yi} - R_{yi} &= 0, \\ \sum M &= 0, & F_{\phi i} - R_{\phi i} &= 0 \end{aligned}$$

або в матричній формі:

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i = \mathbf{0}. \quad (20.42)$$

Отже, для всіх вузлів скінченно-елементної моделі можна записати

$$\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

або

$$\mathbf{R} - \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (20.43)$$

Вузлові реакції, що зумовлені переміщеннями вузлів, для лінійно деформованих систем можуть бути представлені виразами:

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + \dots + K_{1,n}\Delta_n, \\ R_2 &= K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + \dots + K_{2,n}\Delta_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_n &= K_{n,1}\Delta_1 + K_{n,2}\Delta_2 + \dots + K_{n,n}\Delta_n. \end{aligned} \quad (20.44)$$

У матричній формі лінійне перетворення (20.44) може бути записане у вигляді:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\Delta, \quad (20.45)$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості всієї скінченно-елементної моделі:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (20.46)$$

Довільний коефіцієнт $K_{i,j}$ являє собою вузлову реакцію R_i , що викликана вузловим переміщенням $\Delta_j = 1$, за умови, що всі інші переміщення вузлів дорівнюють нулю.

Головні коефіцієнти матриці жорсткості являють собою додатні числа ($K_{i,i} > 0$). Побічні коефіцієнти симетричні відносно головної діагоналі, тобто $K_{i,j} = K_{j,i}$.

Підставивши (20.45) у рівняння рівноваги (20.43), одержимо:

$$\mathbf{K}\Delta - \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (20.47)$$

Такі самі рівняння в координатній формі представлятимуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned} K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + \dots + K_{1,n}\Delta_n - F_1 &= 0, \\ K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + \dots + K_{2,n}\Delta_n - F_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ K_{n,1}\Delta_1 + K_{n,2}\Delta_2 + \dots + K_{n,n}\Delta_n - F_n &= 0. \end{aligned} \quad (20.48)$$

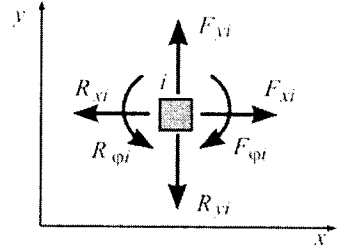


Рис. 20.20

Невідомими в рівняннях (20.48) є переміщення вузлів, коефіцієнти – величини вузлових реакцій, вільні члени – вузлові навантаження.

Як вже зазначалось, будь-який коефіцієнт матриці жорсткості скінченно-елементної моделі $K_{i,j}$ являє собою вузлову реакцію R_i , що зумовлена вузловим переміщенням $\Delta_j = 1$. На цій підставі для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно по чергову надавати одиничні переміщення вузлам скінченно-елементної моделі і знаходити сили, які передаватимуться при цьому на вузли. Величини цих сил визначаються елементами відповідних матриць жорсткості окремих скінченних елементів.

Необхідно зважити на те, що вузлові реакції в дискретній моделі виникають лише у вузлі, що переміщується, а також у вузлах, які пов'язані з ним стержнями. Тому загальний вигляд матриці жорсткості скінченно-елементної моделі істотно залежить від того, як пронумеровано її вузли.

Розглянемо, наприклад, дискретну модель стержневої системи з двома різними системами нумерації вузлів. Блочна схема матриці жорсткості, що відповідне першій системі нумерації (рис. 20.21,а), наведена на рис. 20.21,б. Клітинка схеми на перетині рядка n і стовпця m позначає блок вузлових реакцій у вузлі n від примусових переміщень вузла m . Зафарбовані клітинки характеризують наявність, а незафарбовані – відсутність реакцій. Так, від примусових переміщень вузла 4 реакції можуть виникнути у вузлах 3, 4, 8 і 9. Тому відповідні клітинки зафарбовані в четвертому стовпці.

Іншій системі нумерації вузлів (рис. 20.21,в) відповідає блочна схема матриці жорсткості, яку наведено на рис. 20.21,г. У даному випадку ненульові блоки згруповано біля головної діагоналі, тобто матриця має квазідіагональну структуру. Така матриця є більш придатною для розміщення в пам'яті комп'ютера і потребує менше часу для розв'язання системи рівнянь. Тому з двох систем нумерації вузлів перевагу слід віддати другій системі.

Взагалі під час нумерації вузлів слід ставити за мету, щоб найбільша різниця між номерами сусідніх вузлів була мінімальною. Скажімо, в першій системі нумерації (рис. 20.21,а) найбільша різниця дорівнює шести, а в другій (рис. 20.21,в) – лише двом.

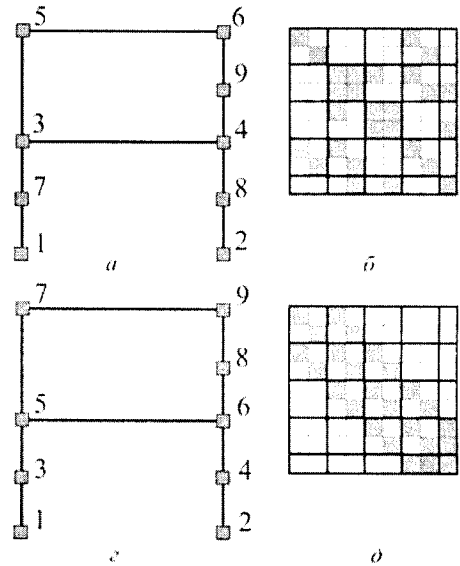


Рис. 20.21

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

Для одержання матриці жорсткості скінченно-елементної моделі можна застосувати так звану структурну матрицю (матрицю інциденцій). З цією метою всі матриці жорсткості окремих скінченних елементів поєднуються в одну квазі-діагональну матрицю:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_m \end{bmatrix}.$$

Дана матриця описує стан m скінченних елементів, які не пов'язані між собою. Оскільки ж скінченні елементи мають спільні вузли стикування, їх необхідно поєднати в загальну систему. Задля цього може бути побудовано структурну матрицю \mathbf{I} . Кожен стовпець матриці \mathbf{I} повинен відповідати одному узагальненому переміщенню скінченно-елементної моделі, кожен рядок – одному кінцевому переміщенню скінченного елемента. При цьому, якщо переміщення кінця стержня відповідає переміщенню вузла дискретної схеми, елемент структурної матриці беруть за одиницю, в іншому разі – за нуль.

Наприклад, розглянемо побудову структурної матриці для скінченно-елементної моделі, що зображена на рис. 20.22,а. Вектор вузлових переміщень матиме 6 компонентів.

На рис. 20.22,б зображено для всіх стержнів скінченно-елементної моделі кінцеві переміщення, які орієнтовані за осями глобальної системи координат. Треба звернути увагу на те, що кінцеві переміщення стержнів нумеруються залежно від того, чи належить вузол до початку або до кінця стержня. Так, горизонтальне переміщення Δ_4 вузла 3 на стержні 2-3 позначене як δ_4 , а на стержні 3-4 – як δ_1 .

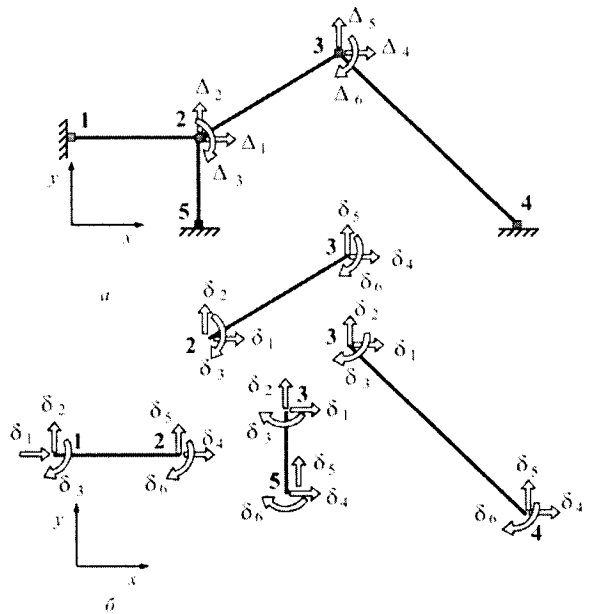


Рис.20.22

Отже, маємо структурну матрицю

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі може бути отримана з добутку:

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}^T \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{I}. \quad (20.49)$$

При цьому матриця жорсткості виявляється виродженою, оскільки всі скінченні елементи передбачалися не закріпленими від переміщень. Для виправлення матриці з неї треба вилучити всі нульові рядки.

Зміст табл. 20.3. характеризує взаємну стиковку елементів, тобто матрицю інцидентій \mathbf{I} .

Таблиця 20.3

Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	δ	Скінченний елемент
0	0	0	0	0	0	δ_1	1-2
0	0	0	0	0	0	δ_2	
0	0	0	0	0	0	δ_3	
1	0	0	0	0	0	δ_4	
0	1	0	0	0	0	δ_5	
0	0	1	0	0	0	δ_6	
1	0	0	0	0	0	δ_1	2-3
0	1	0	0	0	0	δ_2	
0	0	1	0	0	0	δ_3	
0	0	0	1	0	0	δ_4	
0	0	0	0	1	0	δ_5	
0	0	0	0	0	1	δ_6	
1	0	0	0	0	0	δ_1	2-5
0	1	0	0	0	0	δ_2	
0	0	1	0	0	0	δ_3	
0	0	0	0	0	0	δ_4	
0	0	0	0	0	0	δ_5	
0	0	0	0	0	0	δ_6	
0	0	0	1	0	0	δ_1	3-4
0	0	0	0	1	0	δ_2	
0	0	0	0	0	1	δ_3	
0	0	0	0	0	0	δ_4	
0	0	0	0	0	0	δ_5	
0	0	0	0	0	0	δ_6	

20.9. Визначення зусиль у стержнях

Із рівнянь рівноваги (20.47) визначається вектор вузлових переміщень

$$\Delta = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (20.50)$$

і таким чином стають відомими переміщення всіх вузлів. Внаслідок нерозривності деформацій скінченно-елементної моделі кінці стержнів, що примикають до вузлів,

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

які переміщуються, матимуть такі самі переміщення. Отже, для кожного стержня e скінченно-елементної моделі можна побудувати вектор кінцевих переміщень:

$$\delta_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \\ \Delta_{\phi i} \\ \Delta_{xj} \\ \Delta_{yj} \\ \Delta_{\phi j} \end{Bmatrix}. \quad (20.51)$$

Сумарні кінцеві реакції стержня (рис. 20.23,а) складаються з кінцевих реакцій r'_i , які зумовлені переміщеннями вузлів скінченно-елементної моделі (20.51) і кінцевими силами p'_i , що спричинені дією розподіленого на стержні зовнішнього навантаження:

$$s'_e = r'_e + p'_e, \quad (20.52)$$

де s'_e – вектор сумарних кінцевих реакцій елемента e :

$$s'^T = \{s'_i \ s'_j\} = \{s'_1 \ s'_2 \ s'_3 \ | \ s'_4 \ s'_5 \ s'_6\}.$$

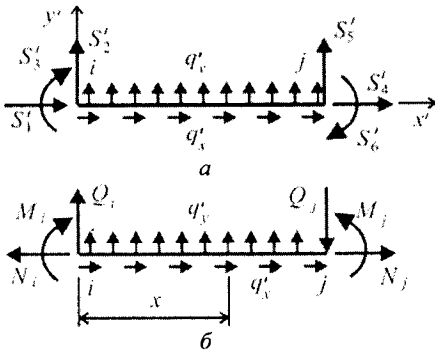


Рис. 20.23

Для сумарних кінцевих реакцій зумовлює внутрішні зусилля на кінцях стержня (рис. 20.23,б). Очевидно, що

$$\begin{aligned} s'_1 &= -N_i, & s'_4 &= N_j, \\ s'_2 &= Q_i, & s'_5 &= -Q_j, \\ s'_3 &= M_i, & s'_6 &= -M_j. \end{aligned} \quad (20.53)$$

Таким чином, вектор сумарних кінцевих реакцій пов'язаний з внутрішніми зусиллями:

$$s'^T_e = \{-N_i \ Q_i \ M_i \ | \ N_j \ -Q_j \ -M_j\}_e. \quad (20.54)$$

З іншого боку, вектор кінцевих реакцій виражається через вектор кінцевих переміщень

$$r'_e = k'_e \delta'_e = k'_e T_e \delta'_e. \quad (20.55)$$

Тоді з (20.52) маємо

$$s'_e = k'_e T_e \delta'_e + p'_e. \quad (20.56)$$

Позначивши

$$h_e = k'_e T_e, \quad (20.57)$$

насамкінець можемо записати:

$$s'_e = h_e \delta_e + p'_e. \quad (20.58)$$

Вигляд матриці h_e залежить від граничних умов на кінцях стержня. Так, для стержня, що має на обох кінцях жорсткі вузли, після перемноження матриць згідно з (20.57)

$$\mathbf{h}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} fC & fS & 0 & -fC & -fS & 0 \\ -(12i/l^2)S & (12i/l^2)C & -(6i/l) & (12i/l^2)S & -(12i/l^2)C & -(6i/l) \\ (6i/l)S & -(6i/l)C & 4i & -(6i/l)S & (6i/l)C & 2i \\ \hline -fC & -fS & 0 & fC & fS & 0 \\ (12i/l^2)S & -(12i/l^2)C & (6i/l) & -(12i/l^2)S & (12i/l^2)C & (6i/l) \\ (6i/l)S & -(6i/l)C & 2i & -(6i/l)S & (6i/l)C & 4i \end{array} \right]_{e}. \quad (20.59)$$

Тут, як і раніше, позначено: $S = \sin\beta, C = \cos\beta$.

20.10. Приклад розрахунку рами за методом скінченних елементів

Розрахуємо раму (рис. 20.24) при таких вихідних даних: $l=4\text{м}$, $h=3\text{м}$, $P_1=1,8\text{кН}$, $P_2=1,2\text{кН}$, $q_1=2,4\text{кН/м}$, $q_2=2\text{кН/м}$. Як видно з рисунку, рама має два типи скінченних елементів: стержень із затисненнями з обох сторін – перший тип, стержень із затисненням на початку і шарніром на кінці – другий тип.

Згідно з умовою щодо жорсткостей елементів рами будемо вважати, що для вертикальних стержнів 1-2, 1-6, 2-5, 2-7, 3-8 жорсткості на згин становлять $EI=1$, а на поздовжні деформації – $EF=100$. Для нахилоного та горизонтальних стержнів 4-5, 1-2, 2-3 – відповідно $EI=2$ і $EF=200$. Початок глобальної системи координат прийнято у вузлі 6.

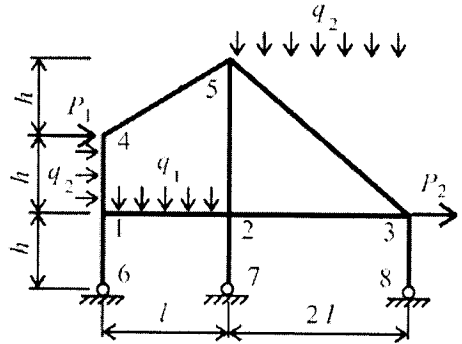


Рис. 20.24

20.10.1. Геометричні характеристики скінченних елементів

Геометричні характеристики стержнів наведені в табл. 20.4.

Таблиця 20.4

П.-к.	Тип CE	l (м)	$\sin\beta$	$\cos\beta$	EI	EF	i	f
1-2	1	4	0	1	2	200	0,50	50,000
2-3	1	8	0	1	2	200	0,25	25,000
4-5	1	5	0,6	0,8	2	200	0,40	40,000
3-5	1	10	0,6	-0,8	2	200	0,20	20,000
1-6	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
2-7	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
3-8	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
1-4	1	3	1	0	1	100	0,3333	33,333
2-5	1	6	1	0	1	100	0,3333	16,667

20.10.2. Побудова векторів вузлових характеристик

Дискретну модель рами з нумерацією напрямів можливих переміщень зображено на рис. 20.25. Зверніть увагу на те, що нумерація напрямів пов'язана з нумерацією вузлів: спершу нумеруються напрями у вузлі 1, потім у вузлі 2 тощо.

20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Оскільки переміщення опорних вузлів дорівнюють нулю, вектор невідомих вузлових переміщень матиме вигляд

$$\Delta^T = \{ \Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ | \ \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6 \ | \ \dots \ | \ \Delta_{13} \ \Delta_{14} \ \Delta_{15} \}.$$

Отже, кількість ступенів вільності (основних невідомих) дорівнює п'ятнадцяти. Так само можна записати вектори вузлових реакцій і вузлових навантажень:

$$\mathbf{R}^T = \{ R_1 \ R_2 \ R_3 \ | \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ | \ \dots \ | \ R_{13} \ R_{14} \ R_{15} \},$$

$$\mathbf{F}^T = \{ F_1 \ F_2 \ F_3 \ | \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ | \ \dots \ | \ F_{13} \ F_{14} \ F_{15} \}.$$

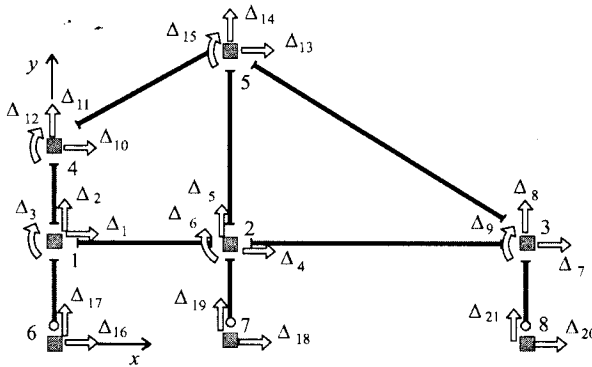


Рис. 20.25

Вектор вузлових навантажень \mathbf{F} являє собою суму вектора \mathbf{P} вузлових сил, які безпосередньо діють на вузли скінченно-елементної моделі, і вектора \mathbf{Q} , який зумовлено дією на вузли розподілених на стержнях навантажень. Компоненти вектора \mathbf{F} представлено на рис. 20.26.

Вектор \mathbf{P} може бути записано із порівняння діючих вузлових сил і моментів і схеми напрямів вільних переміщень вузлів. Зрештою, маємо:

$$\mathbf{P}^T = \{ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1,8 \ 0 \ 0 \ | \ 1,2 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \}.$$

Компоненти вектора \mathbf{Q} і схема кінцевих сил, що передаються на вузли скінченно-елементної моделі з боку завантажених стержнів, показано відповідно на рис. 20.27,а та 20.27,б.

Для визначення компонентів вектора \mathbf{Q} обчислимо кінцеві сили, що орієнтовані за осями глобальної системи координат, в стержнях, на яких розташоване розподілене навантаження.

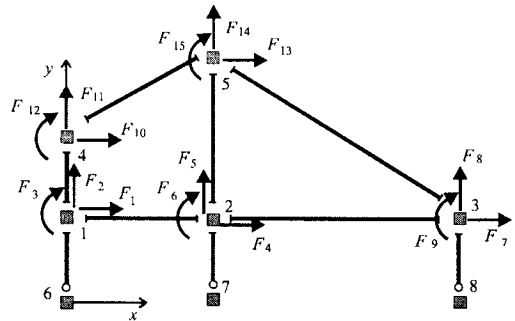


Рис. 20.26

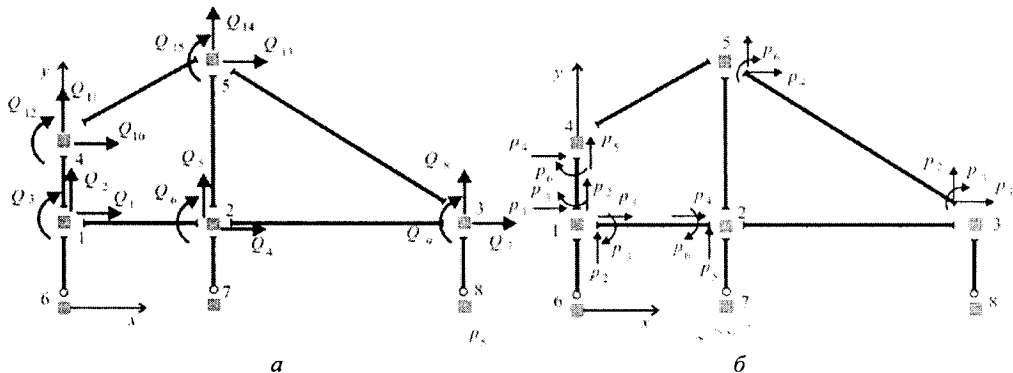


Рис. 20.27

Стержень 1-2 (рис. 20.28,а) має такі вихідні дані:

$$q_x = 0, \quad q_y = -q_1 = -2,4 \text{ кН/м}, \quad l_x = 4 \text{ м}, \quad l_y = 0.$$

Отже, маємо:

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = -\frac{(-2,4) \cdot 4}{2} = 4,8 \text{ кН},$$

$$p_3 = \frac{(-2,4) \cdot 4^2}{12} = -3,2 \text{ кНм},$$

$$p_4 = 0,$$

$$p_5 = 4,8 \text{ кН},$$

$$p_6 = 3,2 \text{ кНм}.$$

Стержень 3-5 (рис. 20.28,б)

має такі дані:

$$q_x = 0,$$

$$q_y = -q_1 = -2,4 \text{ кН/м},$$

$$l_x = 8 \text{ м}, \quad l_y = 6 \text{ м}.$$

Тоді

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{(-2,4) \cdot 8}{2} = 9,6 \text{ кН}, \quad p_3 = \frac{(-2,4) \cdot 8^2}{12} = 12,8 \text{ кНм},$$

$$p_4 = 0, \quad p_5 = 9,6 \text{ кН}, \quad p_6 = -12,8 \text{ кНм}.$$

І нарешті, для стержня 1-4 (рис. 20.28,в), який має такі характеристики:

$$q_x = q_2 = 2 \text{ кН/м}, \quad q_y = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 3 \text{ м},$$

обчислюємо:

$$p_1 = -\frac{2 \cdot 3}{2} = -3 \text{ кН}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -\frac{2 \cdot 3^2}{12} = -1,5 \text{ кНм},$$

$$p_4 = -3 \text{ кН}, \quad p_5 = 0, \quad p_6 = 1,5 \text{ кНм}.$$

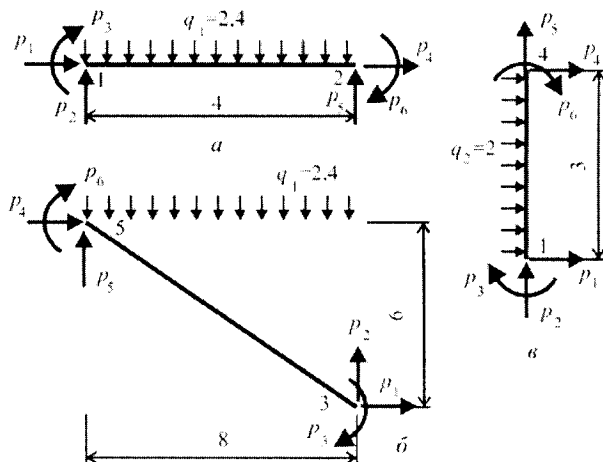


Рис. 20.28

Надалі обчислимо компоненти вектора **Q**, беручи до уваги, що кінцеві сили із стержнів передаються на вузли скінченно-елементної моделі у зворотному напрямі і тому повинні братися із зворотнім знаком. Отже, можемо записати:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -(p_1^{1-2} + p_1^{1-4}) = 3, & Q_2 &= -(p_2^{1-2} + p_2^{1-4}) = -4,8, & Q_3 &= -(p_3^{1-2} + p_3^{1-4}) = 4,7, \\ Q_4 &= -p_4^{1-2} = 0, & Q_5 &= -p_5^{1-2} = -4,8, & Q_6 &= -p_6^{1-2} = -3,2, \\ Q_7 &= -p_1^{3-5} = 0, & Q_8 &= -p_2^{3-5} = -9,6, & Q_9 &= -p_3^{3-5} = -12,8, \\ Q_{10} &= -p_4^{1-4} = 3, & Q_{11} &= -p_5^{1-4} = 0, & Q_{12} &= -p_6^{1-4} = -1,5, \\ Q_{13} &= -p_4^{3-5} = 0, & Q_{14} &= -p_5^{3-5} = -9,6, & Q_{15} &= -p_6^{3-5} = 12,8. \end{aligned}$$

Таким чином, вектор кінцевих сил, які передаються на вузли скінченно-елементної моделі з боку завантажених стержнів, запишеться у вигляді:

$$\mathbf{Q}^T = \{3 \quad -4,8 \quad 4,7 \mid 0 \quad -4,8 \quad -3,2 \mid 0 \quad -9,6 \quad -12,8 \mid 3 \quad 0 \quad -1,5 \mid 0 \quad -9,6 \quad 12,8\}.$$

Зрештою вектор вузлових навантажень

$$\mathbf{F}^T = \{3 \quad -4,8 \quad 4,7 \mid 0 \quad -4,8 \quad -3,2 \mid 1,8 \quad -9,6 \quad -12,8 \mid 4,2 \quad 0 \quad -1,5 \mid 0 \quad -9,6 \quad 12,8\}.$$

20.10.3. Побудова матриці жорсткості скінченно-елементної моделі

Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі має такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,8} & \cdots & K_{1,15} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{2,8} & \cdots & K_{2,15} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{15,1} & K_{15,2} & \cdots & K_{15,8} & \cdots & K_{15,15} \end{bmatrix}.$$

Для обчислення елементів матриці жорсткості **K** необхідно по чергову надавати вільним вузлам скінченно-елементної моделі одиничні переміщення і знаходити реакції, які передаються на вузли з боку стержнів, які деформуються внаслідок цих переміщень.

Обчислимо, наприклад, елементи 8-го стовпця. Задля цього надамо дискретній моделі переміщення $\Delta_8 = 1$, покладаючи, що всі інші вузлові переміщення дорівнюють нулю. При такій дії деформуються лише ті стержні, що підходять до вузла 3. Схему вузлових реакцій зображено на рис. 20.29.

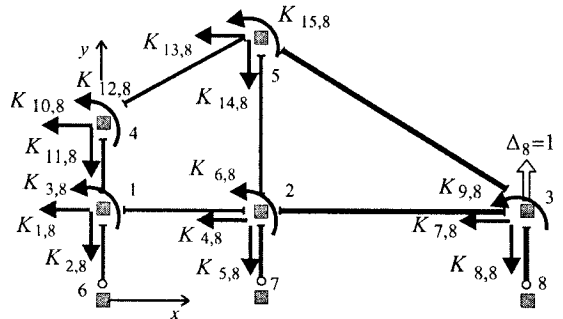


Рис. 20.29

Реакції, які передаються на вузли, до яких прикріплено тільки недеформовані стержні, дорівнюють нулю, тобто:

$$K_{1,8} = K_{2,8} = K_{3,8} = K_{10,8} = K_{11,8} = K_{12,8} = 0.$$

Для обчислення інших реакцій розглянемо схему стержнів, що деформуються (рис. 20.30).

На схемі враховано, що вертикальне переміщення Δ_8 вузла 3 скінченно-елементної моделі для стержнів 3-5 і 3-8 є вертикальним переміщенням їхніх початків δ_2 , а для стержня 2-3 – вертикальним переміщенням кінця δ_5 .

Кінцеві реакції визначаються елементами відповідних матриць жорсткості: для стержнів 2-3, 3-5 – матрицею жорсткості стержня, який має затиснення на обох кінцях (перший тип), для стержня 3-8 – матрицею жорсткості стержня із затисненням на початку і шарніром на кінці (другий тип). На підставі схеми (рис. 20.30) можемо записати

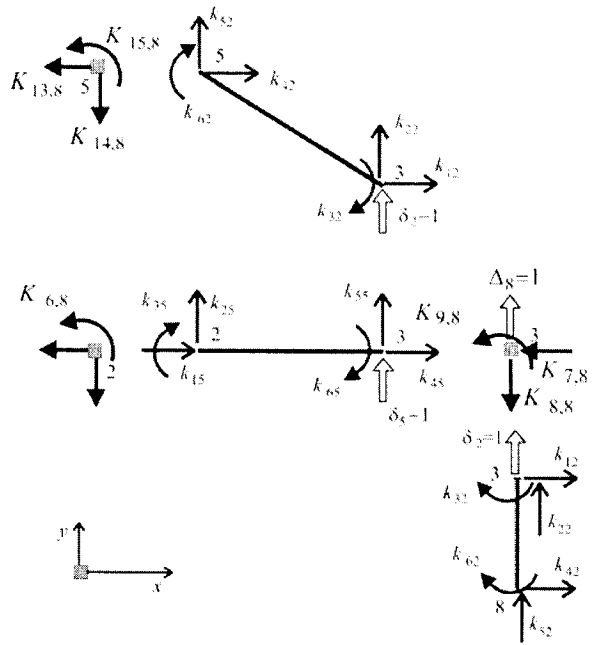


Рис. 20.30

$$K_{4,8} = k_{15}^{2-3} = -SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right)^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,8} = k_{35}^{2-3} = \left(-fS^2 - \frac{12i}{l^2}C^2\right)^{2-3} = 0 - \frac{12 \cdot 0,25}{8^2} \cdot 1^2 = -0,0469;$$

$$K_{6,8} = k_{35}^{2-3} = \frac{6i}{l}C^{2-3} = \frac{6 \cdot 0,25}{8} \cdot 1^2 = 0,1875;$$

$$K_{7,8} = k_{45}^{2-3} + k_{12}^{3-5} + k_{12}^{3-8} = SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right)^{2-3} + \left|^{3-5} SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right)^{3-5} + \right|^{3-8} SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right)^{3-8} = -9,5885;$$

$$K_{8,8} = k_{55}^{2-3} + k_{22}^{3-5} + k_{22}^{3-8} = \left(fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2\right)^{2-3} + \left(fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2\right)^{2-3} + \left(fS^2 + \frac{3i}{l^2}C^2\right)^{3-8} = 40,5956;$$

$$K_{9,8} = k_{65}^{2-3} + k_{32}^{3-5} + k_{32}^{3-8} = \left(\frac{6i}{l}C\right)^{2-3} + \left(-\frac{6i}{l}C\right)^{3-5} + \left(-\frac{6i}{l}C\right)^{3-8} = 0,2835;$$

$$K_{13,8} = k_{42}^{3-5} = \left(-SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right)\right)^{3-5} = 9,5885;$$

$$K_{14,8} = k_{32}^{3-5} = \left(-fS^2 - \frac{12i}{l^2}C^2\right)^{3-5} = -7,2154;$$

$$K_{15,8} = k_{62}^{3-5} = \left(-\frac{6i}{l}C\right)^{3-5} = 0,0096.$$

Вузлові переміщення матимуть величини наведені в табл. 20.5.

Таблиця 20.5

№	DX	DY	DF
1	6.0630880E+00	-1.4219720E-01	2.3217250E+00
2	6.0239660E+00	-3.3510400E-01	-2.7461000E-01
3	6.0933580E+00	-3.8669850E-01	-3.4268370E+00
4	6.1645700E+00	-1.8428430E-01	-2.4085670E+00
5	6.3384370E+00	-5.8774600E-01	5.3624630E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

Кожен рядок таблиці містить поступальні Δ_x і Δ_y , а також кутове переміщення Δ_ϕ відповідного вузла, тобто компоненти вектора вузлових переміщень Δ .

20.10.4. Обчислення зусиль у стержнях

Наступна задача розрахунку полягає в обчисленні внутрішніх зусиль в елементах споруди за формулою (20.23):

$$\mathbf{s}'_e = \mathbf{h}_e \delta_e + \mathbf{p}'_e.$$

Виконаємо такий розрахунок для стержня 3-5. Вектор кінцевих переміщень будуватиметься на підставі лістингу:

$$\delta_{3-5}^T = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 | \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6\}_{3-5} = \{\Delta_{x3} \ \Delta_{y3} \ \Delta_{\phi3} | \Delta_{x5} \ \Delta_{y5} \ \Delta_{\phi5}\} = \\ = \{6,093358 \ -0,386698 \ -3,426837 | 6,338437 \ -0,587746 \ 5,362463\}.$$

Матриця \mathbf{h} , яка визначає зусилля в локальній системі координат стержня по переміщенням його кінців у глобальній системі, має такий вигляд:

$$\mathbf{h}_{3-5} = \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 & 16 & -12 & 0 \\ -0,0144 & -0,0192 & -0,12 & 0,0144 & 0,0192 & -0,12 \\ 0,072 & -0,096 & 0,8 & -0,072 & 0,096 & 0,4 \\ \hline 16 & -12 & 0 & -16 & 12 & 0 \\ 0,0144 & 0,0192 & 0,12 & -0,0144 & -0,0192 & 0,12 \\ -0,072 & 0,4 & 0,4 & -0,072 & 0,096 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Перетворимо розподілене на стержень навантаження до локальних осей координат за формулами (20.3). Тут $l_x=8\text{м}$; $l_y=6\text{м}$; $l=10\text{м}$; $\sin\beta=0,6$; $\cos\beta=-0,8$; $q_x=0$ та $q_y=-2,4$.

$$q'_x = \frac{q_x l_y}{l} \cos\beta + \frac{q_y l_x}{l} \sin\beta = 0 + \frac{(-2,4) \cdot 8}{10} \cdot 0,6 = -1,152 \text{кН/м}; \\ q'_y = -\frac{q_x l_y}{l} \sin\beta + \frac{q_y l_x}{l} \cos\beta = 0 + \frac{(-2,4) \cdot 8}{10} \cdot (-0,8) = 1,536 \text{кН/м}.$$

Визначимо вектор кінцевих сил у локальній системі координат від розподілених навантажень:

$$p'_1 = -\frac{q'_x l}{2} = -\frac{(-1,152) \cdot 10}{2} = 5,76 \text{ кН}, \quad p'_2 = -\frac{q'_y l}{2} = -\frac{1,536 \cdot 10}{2} = -7,68 \text{ кН},$$

$$p'_3 = +\frac{q'_y l^2}{12} = \frac{1,536 \cdot 10^2}{12} = 12,8 \text{ кНм}, \quad p'_4 = -\frac{q'_x l}{2} = -\frac{(-1,152) \cdot 10}{2} = 5,76 \text{ кН},$$

$$p'_5 = -\frac{q'_y l}{2} = -\frac{1,536 \cdot 10}{2} = -7,68 \text{ кН}, \quad p'_6 = -\frac{q'_y l^2}{12} = -\frac{1,536 \cdot 10^2}{12} = -12,8 \text{ кНм}.$$

Вектор кінцевих реакцій, обчислений за формулою (20.23) остаточно має вигляд:

$$\mathbf{s}' = \{12,095 \quad -7,913 \quad 12,205 \mid -0,574 \quad -7,447 \quad -9,879\}^T.$$

Отже, кінцеві зусилля в стержні 3-5 становлять:

$$N_3 = -12,085 \text{ кН}; \quad N_5 = -12,085 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -7,913 \text{ кН}; \quad Q_5 = -7,447 \text{ кН};$$

$$M_3 = 12,205 \text{ кНм}; \quad M_5 = -9,879 \text{ кНм}.$$

Схему кінцевих зусиль в стержні 3-5 зображено на рис. 20.31.

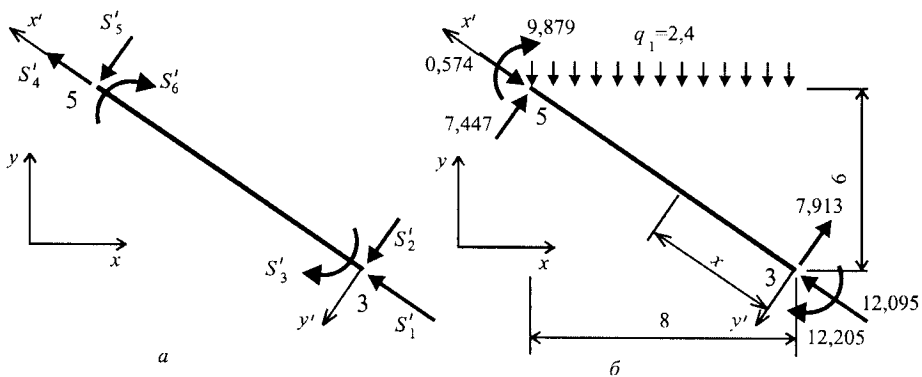


Рис. 20.31

20.11. Особливості розрахунку просторових стержневих систем

Просторові стержневі системи на теперішній час розраховуються, як правило, за методом скінченних елементів (МСЕ). Алгоритм розрахунку практично не відрізняється від алгоритму розрахунку плоских стержневих систем. Відмінності стосуються лише складу вузлових характеристик, матриці перетворення і матриць жорсткості скінченних елементів.

20.11.1. Рівняння рівноваги вузлів просторових рам

Для розрахунку за методом скінченних елементів просторову стержневу систему необхідно замінити скінченно-елементною моделлю, що складається з вузлів і стержнів, які можуть бути довільно орієнтовані у просторі. Розташування вузлів скінченно-елементної моделі визначається за допомогою глобальної системи декартових координат x, y, z . За осями цієї координатної системи орієнтуються всі статичні і кінематичні вузлові характеристики скінченно-елементної моделі.

Будь-який вільний жорсткий вузол i скінченно-елементної моделі має шість ступенів вільності, тобто можливість трьох поступальних переміщень по напрямках координатних осей Δ_{xi} , Δ_{yi} , Δ_{zi} , і трьох кутових переміщень φ_{xi} , φ_{yi} , φ_{zi} цього вузла (рис. 20.32,а).

Означені величини можуть бути записані у вигляді вектора

$$\Delta_i^T = \{ \Delta_{xi} \ \Delta_{yi} \ \Delta_{zi} \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi} \ \varphi_{zi} \}.$$

Для практичних розрахунків зручно використовувати наскрізну нумерацію компонентів вузлових переміщень у межах всієї моделі.

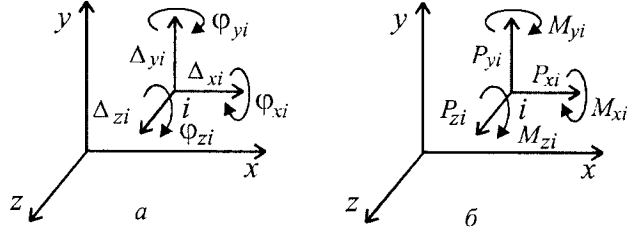


Рис. 20.32

Сукупність всіх вузлових переміщень скінченно-елементної моделі, яка має n жорстких вільних вузлів, становить вектор вузлових переміщень

$$\Delta^T = \{ \Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_i \ \dots \ \Delta_n \}.$$

Сумарні реакції всіх стержнів, які примикають до вузла i , зобразимо у вигляді трьох зосереджених сил R_{xi} , R_{yi} , R_{zi} , які орієнтовані за осями глобальної системи координат усієї моделі, і трьох зосереджених моментів \mathcal{R}_{xi} , \mathcal{R}_{yi} , \mathcal{R}_{zi} , які обертаються відносно зазначених координатних осей. Для вузла i ці величини можуть бути записані у вигляді вектора

$$\mathbf{R}_i^T = \{ R_{xi} \ R_{yi} \ R_{zi} \ \mathcal{R}_{xi} \ \mathcal{R}_{yi} \ \mathcal{R}_{zi} \}.$$

При виконанні розрахунків необхідно, щоб номери вузлових реакцій відповідали номерам аналогічних вузлових переміщень, тобто даний вектор може бути записаний як

$$\mathbf{R}_i = \{ R_{6i-5} \ R_{6i-4} \ R_{6i-3} \ R_{6i-2} \ R_{6i-1} \ R_{6i} \}^T.$$

На базі векторів для всіх вільних вузлів складається повний вектор вузлових реакцій всієї скінченно-елементної моделі:

$$\mathbf{R}^T = \{ \mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \dots \ \mathbf{R}_i \ \dots \ \mathbf{R}_n \}.$$

Зовнішнє навантаження на будь-який жорсткий вузол i може бути представлено трьома компонентами зосереджених сил P_{xi} , P_{yi} , P_{zi} , які діють у напрямках осей глобальної системи координат, і трьома зосередженими моментами M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} , що обертаються відносно відповідних осей (рис. 20.35,б). Сукупність навантажень становить вектор

$$\mathbf{F}_i = \{ P_{xi} \ P_{yi} \ P_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \}^T.$$

Якщо нумерацію компонентів цього вектора пов'язувати з нумерацією вузлів просторової системи, то вектор набирає вигляду

$$\mathbf{F}^T = \{ \mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \dots \ \mathbf{F}_i \ \dots \ \mathbf{F}_n \}.$$

Вектор вузлових реакцій \mathbf{R} пов'язується з вектором вузлових переміщень Δ за допомогою матриці жорсткості скінченно-елементної моделі

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \Delta,$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості скінченно-елементної моделі:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,i} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,i} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,i} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Будь-який коефіцієнт матриці жорсткості K_{ij} дорівнює вузловій реакції R_i , яка зумовлена дією примусового вузлового переміщення $\Delta_j = 1$, за умови, що всі інші переміщення вузлів дорівнюють нулю:

$$K_{ij} = R_i \text{ при } \Delta_j = 1, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_{j-1} = \Delta_{j+1} = \dots = \Delta_n = 0.$$

Елементи матриці жорсткості \mathbf{K} обчислюються через матриці жорсткості окремих стержнів.

Матричне рівняння рівноваги вузлів скінченно-елементної моделі нічим не відрізняється від аналогічного рівняння для плоских систем:

$$\mathbf{K} \Delta - \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

20.11.2. Матриця перетворення

Кінематичні і статичні характеристики на кінцях скінченного елемента (кінцеві переміщення або кінцеві реакції) можуть бути орієнтовані за осями локальної або глобальної системи координат. На рис. 20.33,а зображено кінцеві переміщення в локальній, а на рис. 20.33,б – у глобальній системі координат стержня. Як і раніше, за початок локальної системи координат стержня $i-j$ беруть кінець стержня, який є притичним до вузла з меншим номером. Будемо вважати, що $i < j$, тобто початок стержня знаходиться у вузлі i , а кінець – у вузлі j .

Позначення кінцевих переміщень наведено у табл. 20.6.

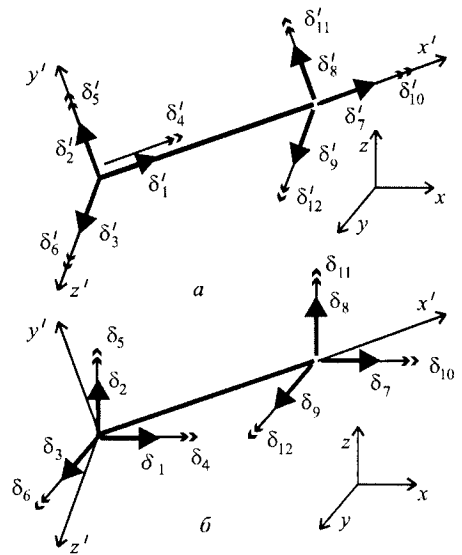


Рис.20.33

Таблиця 20.6

Переміщення	Система координат	Δ_x	Δ_y	Δ_z	Φ_x	Φ_y	Φ_z
Початок i	локальна	δ'_1	δ'_2	δ'_3	δ'_4	δ'_5	δ'_6
	глобальна	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
Кінець j	локальна	δ'_7	δ'_8	δ'_9	δ'_{10}	δ'_{11}	δ'_{12}
	глобальна	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}

20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Аналогічно нумеруються реакції на кінцях стержня в локальній системі координат (табл.20.7):

Таблиця 20.7

Кінцеві реакції	Система координат	R_x	R_y	R_z	M_x	M_y	M_z
Початок i	локальна	r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	r'_5	r'_6
	глобальна	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Кінець j	локальна	r'_7	r'_8	r'_9	r'_{10}	r'_{11}	r'_{12}
	глобальна	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}

Для кожного стержня просторової системи означені величини можуть бути записані у вигляді векторів:

- вектора кінцевих переміщень у локальній системі координат

$$\delta_e^{i'T} = \{\delta'_1 \delta'_2 \delta'_3 \mid \delta'_4 \delta'_5 \delta'_6 \mid \delta'_7 \delta'_8 \delta'_9 \mid \delta'_{10} \delta'_{11} \delta'_{12}\};$$

- вектора кінцевих переміщень у глобальній системі координат

$$\delta_e^T = \{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \mid \delta_4 \delta_5 \delta_6 \mid \delta_7 \delta_8 \delta_9 \mid \delta_{10} \delta_{11} \delta_{12}\};$$

- вектора кінцевих реакцій у локальній системі координат

$$r_e^{i'T} = \{r'_1 r'_2 r'_3 \mid r'_4 r'_5 r'_6 \mid r'_7 r'_8 r'_9 \mid r'_{10} r'_{11} r'_{12}\};$$

- вектора кінцевих реакцій у глобальній системі координат

$$r_e^T = \{r_1 r_2 r_3 \mid r_4 r_5 r_6 \mid r_7 r_8 r_9 \mid r_{10} r_{11} r_{12}\}.$$

Однотипні характеристики в локальній і глобальній системах координат пов'язані між собою за допомогою матриці перетворення T_e :

$$\delta' = T_e \delta_e, \quad r_e = T_e r_e.$$

Матриця перетворень є блочною діагональною матрицею

$$T_e = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & & & \\ & \mathbf{t} & & \\ & & \mathbf{t} & \\ & & & \mathbf{t} \end{bmatrix}_e, \quad (20.60)$$

де кожний блок має вигляд

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (20.61)$$

Компонентами матриці \mathbf{t} є напрямні косинуси осей локальної системи координат стержня відносно осей глобальної системи координат. У глобальній системі координат координати початкового і кінцевого вузлів однозначно визначають положення стержня як лінійного елемента у просторі і дозволяють обчислити напрямні косинуси за формулами:

$$c_{11} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}}, \quad c_{12} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}, \quad c_{13} = \frac{z_j - z_i}{l_{ij}}, \quad (20.62)$$

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (20.63)$$

З іншого боку, стержень як фізичне тіло має один ступінь вільності – він може обертатися відносно своєї поздовжньої осі x' . Тому для однозначної орієнтації осей $o'y'$ і $o'z'$ локальної системи координат стержня щодо осей глобальної системи координат необхідно додатково задати принаймні один параметр. Найбільш поширеним способом орієнтації локальної системи координат є завдання кута чистого обертання Ψ на площині xu , який бере відлік від сліду площини $y'z'$ до осі $o'y'$ (рис. 20.34).

Положення головних осей інерції $o'y'$ і $o'z'$ поперечного перерізу стержня визначається через напрямні косинуси поздовжньої осі стержня $o'x'$ і кут Ψ за формулами:

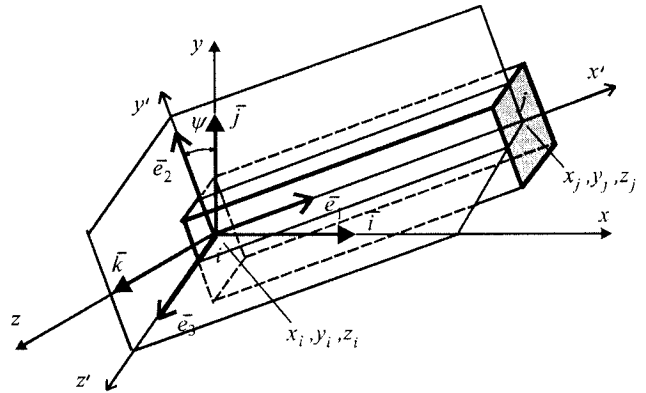


Рис. 20.34

$$c_{21} = \frac{c_{11}c_{13}\sin\Psi + c_{12}\cos\Psi}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}}, \quad c_{22} = \frac{c_{12}c_{13}\sin\Psi - c_{11}\cos\Psi}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}},$$

$$c_{23} = \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2} \sin\Psi, \quad c_{31} = -\frac{c_{11}c_{13}\cos\Psi - c_{12}\sin\Psi}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}},$$

$$c_{32} = \frac{c_{12}c_{13}\sin\Psi + c_{11}\cos\Psi}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}}, \quad c_{33} = \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2} \cos\Psi. \quad (20.64)$$

Іншим способом орієнтації осей $o'y'$, $o'z'$ стержня є завдання координат довільно обраної реперної точки, що розташована в додатній півплощині $x'y'$. У цьому випадку напрямні косинуси визначаються із векторних співвідношень:

$$\bar{e}_1 = c_{11}\bar{i} + c_{12}\bar{j} + c_{13}\bar{k}, \quad \bar{e}_r = (x_r - x_i)\bar{i} + (y_r - y_i)\bar{j} + (z_r - z_i)\bar{k},$$

$$\bar{e}_2 = c_{21}\bar{i} + c_{22}\bar{j} + c_{23}\bar{k} = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1, \quad \bar{e}_3 = c_{31}\bar{i} + c_{32}\bar{j} + c_{33}\bar{k} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_r}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_r|}. \quad (20.65)$$

20.12. Матриця жорсткості просторового стержня

Матриця жорсткості просторового стержня має розмірність 12×12 і містить 4 незалежні одна від одної групи елементів, що визначають зв'язок між кінцевими

**20. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКИНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

реакціями і переміщеннями при поздовжній деформації, крученні, згині стержня в площинах $x'y'$ і $x'z'$.

$$\mathbf{k}'_e = \begin{bmatrix} k'_{1,1} & k'_{1,2} & k'_{1,3} & k'_{1,4} & k'_{1,5} & k'_{1,6} & k'_{1,7} & k'_{1,8} & k'_{1,9} & k'_{1,10} & k'_{1,11} & k'_{1,12} \\ k'_{2,1} & k'_{2,2} & k'_{2,3} & k'_{2,4} & k'_{2,5} & k'_{2,6} & k'_{2,7} & k'_{2,8} & k'_{2,9} & k'_{2,10} & k'_{2,11} & k'_{2,12} \\ k'_{3,1} & k'_{3,2} & k'_{3,3} & k'_{3,4} & k'_{3,5} & k'_{3,6} & k'_{3,7} & k'_{3,8} & k'_{3,9} & k'_{3,10} & k'_{3,11} & k'_{3,12} \\ k'_{4,1} & k'_{4,2} & k'_{4,3} & k'_{4,4} & k'_{4,5} & k'_{4,6} & k'_{4,7} & k'_{4,8} & k'_{4,9} & k'_{4,10} & k'_{4,11} & k'_{4,12} \\ k'_{5,1} & k'_{5,2} & k'_{5,3} & k'_{5,4} & k'_{5,5} & k'_{5,6} & k'_{5,7} & k'_{5,8} & k'_{5,9} & k'_{5,10} & k'_{5,11} & k'_{5,12} \\ k'_{6,1} & k'_{6,2} & k'_{6,3} & k'_{6,4} & k'_{6,5} & k'_{6,6} & k'_{6,7} & k'_{6,8} & k'_{6,9} & k'_{6,10} & k'_{6,11} & k'_{6,12} \\ k'_{7,1} & k'_{7,2} & k'_{7,3} & k'_{7,4} & k'_{7,5} & k'_{7,6} & k'_{7,7} & k'_{7,8} & k'_{7,9} & k'_{7,10} & k'_{7,11} & k'_{7,12} \\ k'_{8,1} & k'_{8,2} & k'_{8,3} & k'_{8,4} & k'_{8,5} & k'_{8,6} & k'_{8,7} & k'_{8,8} & k'_{8,9} & k'_{8,10} & k'_{8,11} & k'_{8,12} \\ k'_{9,1} & k'_{9,2} & k'_{9,3} & k'_{9,4} & k'_{9,5} & k'_{9,6} & k'_{9,7} & k'_{9,8} & k'_{9,9} & k'_{9,10} & k'_{9,11} & k'_{9,12} \\ k'_{10,1} & k'_{10,2} & k'_{10,3} & k'_{10,4} & k'_{10,5} & k'_{10,6} & k'_{10,7} & k'_{10,8} & k'_{10,9} & k'_{10,10} & k'_{10,11} & k'_{10,12} \\ k'_{11,1} & k'_{11,2} & k'_{11,3} & k'_{11,4} & k'_{11,5} & k'_{11,6} & k'_{11,7} & k'_{11,8} & k'_{11,9} & k'_{11,10} & k'_{11,11} & k'_{11,12} \\ k'_{12,1} & k'_{12,2} & k'_{12,3} & k'_{12,4} & k'_{12,5} & k'_{12,6} & k'_{12,7} & k'_{12,8} & k'_{12,9} & k'_{12,10} & k'_{12,11} & k'_{12,12} \end{bmatrix}_e$$

Елементи першого стовпця матриці є кінцевими реакціями стержня, які зумовленими кінцевим переміщенням $\delta'_1 = 1$, другого – кінцевим переміщенням $\delta'_2 = 1$ і т.д. Елементи першого рядка – це кінцеві опорні реакції r'_1 від дій кінцевих переміщень, другого – опорні реакції r'_2 тощо. Отже, будь-який елемент матриці жорсткості k'_{ij} – це кінцева реакція r'_i , що зумовлена кінцевим переміщенням $\delta'_j = 1$.

Переважає більшість елементів матриці жорсткості дорівнює нулю. Наведемо тільки ті елементи, які відмінні від нуля:

$$k'_{1,1} = k'_{7,7} = -k'_{1,7} = -k'_{7,1} = \frac{EA}{l}, \quad k'_{2,2} = k'_{8,8} = -k'_{2,8} = -k'_{8,2} = \frac{12EI_{z'}}{l^3},$$

$$k'_{3,3} = k'_{9,9} = -k'_{3,9} = -k'_{9,3} = \frac{12EI_{y'}}{l^3}, \quad k'_{4,4} = k'_{10,10} = -k'_{4,10} = -k'_{10,4} = \frac{GI_{кр}}{l},$$

$$k'_{5,5} = k'_{11,11} = \frac{4EI_{y'}}{l}, \quad k'_{6,6} = k'_{12,12} = \frac{4EI_{z'}}{l},$$

$$k'_{2,6} = k'_{2,12} = k'_{8,12} = k'_{6,2} = k'_{12,2} = k'_{12,8} = -k'_{6,8} = -k'_{8,6} = \frac{6EI_{z'}}{l^2},$$

$$k'_{9,11} = k'_{5,9} = -k'_{3,5} = -k'_{3,11} = k'_{11,9} = k'_{9,5} = -k'_{5,3} = -k'_{11,3} = \frac{6EI_{y'}}{l^2},$$

$$k'_{5,11} = k'_{6,12} = k'_{11,5} = k'_{12,6} = \frac{2EI_{y'}}{l}. \quad (20.66)$$

Матриця жорсткості \mathbf{k}'_e просторового стержня в глобальній системі координат може бути одержана, як і для стержня на площині, за допомогою співвідношення

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}'_e \mathbf{T}_e. \quad (20.67)$$

21. Розрахунок стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу сил

21.1. Кінцеві зусилля в скінченних елементах

Розглянемо на площині стержневий скінченний елемент, що на кінцях жорстко приєднується до вузлів (рис. 21.1,а). Як і раніше, вважатимемо його елементом першого типу.

Вектор кінцевих зусиль для такого стержня має шість компонентів:

$$(\mathbf{s}_k)_e^T = \{M_i \ Q_i \ N_i \ | \ M_j \ Q_j \ N_j\}.$$

Додатні напрями для кінцевих зусиль наведено на рис.21.1,б.

Для дискретної стержневої моделі, коли навантаження на стержень відсутні, з умов рівноваги випливає:

$$N_i = N_j = N, \quad Q_i = Q_j = Q = (M_j - M_i)/l,$$

тобто всі компоненти вектори кінцевих зусиль можуть бути виражені через три параметри M_i , M_j і N :

$$(\mathbf{s}_k)_e = \mathbf{L}_e \mathbf{s}_e, \quad (21.1)$$

де

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/l & 1/l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/l & 1/l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21.2)$$

$\mathbf{s}_e^T = \{M_i \ M_j \ N\}_e$ – вектор зусиль.

Оскільки в межах скінченного елемента не діють розподілені навантаження, згинаючі моменти є лінійною функцією:

$$M(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Постійні α_1, α_2 визначаються із граничних умов:

при $x = 0$ $M(0) = \alpha_1 = M_i$;

при $x = l$ $M(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l = M_j$.

Розв'язавши ці рівняння, дістанемо:

$$\alpha_1 = M_i, \quad \alpha_2 = -\frac{M_i}{l} + \frac{M_j}{l}.$$

Отже, внутрішні зусилля в будь-якому перерізі подаються залежностями:

$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_i + \frac{x}{l} M_j, \quad N(x) = N. \quad (21.3)$$

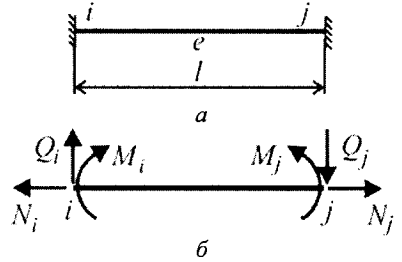


Рис. 21.1

Поперечна сила в перерізі стержня може розглядатись як похідна від функції згинаючого моменту:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{1}{l}M_i + \frac{1}{l}M_j. \quad (21.4)$$

Співвідношення (21.3) запишемо в матричній формі:

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ N(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{Bmatrix} \quad (21.5)$$

або

$$(\mathbf{s}(x))_e = \mathbf{H}(x)(\mathbf{s}_k)_e, \quad (21.6)$$

де $(\mathbf{s}(x))_e$ – вектор прогонових зусиль елемента, $\mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матриця

апроксимації прогонових зусиль.

Вигляд матриці апроксимації і вектора прогонових зусиль елемента залежить від граничних умов. Так, для скінченного елемента другого типу (див. рис. 21.2), який має жорсткий вузол на початку і шарнір на кінці:

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ N(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ N \end{Bmatrix}, \quad (21.7)$$

де

$$(\mathbf{s}_k)_e = \{M_i \ N\}^T, \quad \mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21.8)$$

Для скінченного елемента третього типу (шарнір на початку і затиснення на кінці) (див. рис. 21.3):

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ N(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_j \\ N \end{Bmatrix}, \quad (21.9)$$

де

$$(\mathbf{s}_k)_e = \{M_j \ N\}^T, \quad \mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21.10)$$

І зрештою, для скінченного елемента четвертого типу (шарніри на початку і на кінці) (рис. 21.4) матриця апроксимації вироджується у число 1, а вектор прогонових зусиль елемента містить тільки один елемент – позовжню силу:

$$(\mathbf{N}(x))_e = 1 \cdot N. \quad (21.11)$$

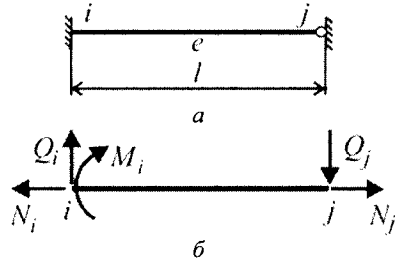


Рис. 21.2

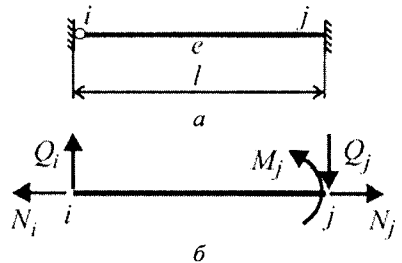


Рис. 21.3

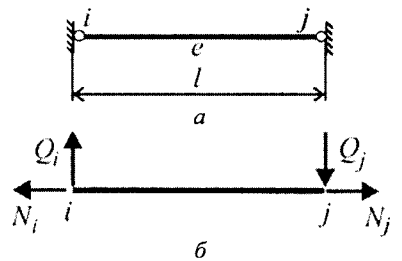


Рис. 21.4

21.2. Матриця податливості скінченного елемента

Розглянемо потенціальну енергію деформацій стержня, в якому виникають поздовжні і згинні деформації:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [M(x)\kappa(x) + N(x)\varepsilon(x)] dx. \quad (21.12)$$

Кривизна $\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}$ і поздовжні деформації $\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EF}$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \kappa(x) \\ \varepsilon(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M(x) \\ N(x) \end{Bmatrix} \quad (21.13)$$

або

$$(\varepsilon(x))_e = \mathbf{d}_e (\mathbf{s}(x))_e, \quad (21.14)$$

де $(\varepsilon(x))_e^T = \{\kappa(x) \ \varepsilon(x)\}_e$ – вектор деформацій перерізу стержня, $\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EF} \end{bmatrix}_e$ –

матриця податливості перерізу стержня,

$$(\mathbf{s}(x))_e = \{M(x) \ N(x)\}_e^T \quad (21.15)$$

– вектор прогонових зусиль елемента

Використовуючи наведені позначення, потенціальну енергію деформації (21.12) запишемо в матричній формі:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l ((\varepsilon(x))_e^T (\mathbf{s}(x))_e) dx. \quad (21.16)$$

Підставивши (21.14) і (21.15) у (21.16) і виконавши операцію транспонування, одержимо:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l ((\sigma(x))_e^T \mathbf{d}_e^T (\mathbf{s}(x))_e) dx. \quad (21.17)$$

Прогонові зусилля можуть бути виражені за допомогою (21.6) через матрицю апроксимації стержня:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l ((\mathbf{H}(x)) (\mathbf{s}_k)_e)^T \mathbf{d}_e (\mathbf{H}(x) (\mathbf{s}_k)_e) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{s}_k)_e^T (\mathbf{H}(x))^T \mathbf{d}_e (\mathbf{H}(x) (\mathbf{s}_k)_e) dx. \quad (21.18)$$

Якщо вектори кінцевих зусиль $(\mathbf{s}_k)_e$ і $(\mathbf{s}_k)_e^T$ винести за знак інтеграла, як такі, що не залежать від координати x , потенціальна енергія набере вигляду

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_k)_e^T \left(\int_0^l (\mathbf{H}(x))^T \mathbf{d}_e (\mathbf{H}(x)) dx \right) (\mathbf{s}_k)_e \quad (21.19)$$

або

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_k)_e^T \mathbf{b}_e (\mathbf{s}_k)_e, \quad (21.20)$$

де позначено:

$$\mathbf{b}_e = \int_0^l (\mathbf{H}^T(x)) \mathbf{d}_e (\mathbf{H}(x)) dx. \quad (21.21)$$

Отже, потенціальна енергія деформації стержня є квадратичною функцією кінцевих зусиль.

Величину \mathbf{b}_e для елемента першого типу (рис. 21.1) після перемноження матриць згідно з (21.21) можна записати у вигляді:

$$\mathbf{b}_e = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \frac{1}{EI} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 \\ \frac{1}{EI} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EF} \end{bmatrix} dx. \quad (21.22)$$

Таким чином, \mathbf{b}_e – це квадратна матриця. Проінтегруємо її елементи:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \int_0^l \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{l}{3EI}, & b_{33} &= \int_0^l \frac{dx}{EI} = \frac{l}{EF}, \\ b_{12} &= b_{21} = \int_0^l \frac{1}{EI} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{6EI}, \\ b_{22} &= \int_0^l \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{l}{3EI}, & b_{13} &= b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0. \end{aligned}$$

Після підстановки обчислених елементів матриця \mathbf{b}_e набуває остаточного вигляду:

$$\mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EF} \end{bmatrix}_e \quad (21.23)$$

Матриця \mathbf{b}_e – це матриця податливості стержня. Застосований спосіб одержання матриці податливості є найбільш загальним і може бути використаний при розрахунку будь-яких плоских або просторових систем.

Матриця жорсткості скінченного елемента, який розглядається з позицій методу сил, може бути визначена як обернена до матриці податливості:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{b}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} & 0 \\ -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix}_e. \quad (21.24)$$

Для скінченного елемента другого типу (рис. 21.2) аналогічні матриці матимуть вигляд:

$$\mathbf{s}_e^T = \{M_i \ N\}_e, \quad (21.25)$$

$$\mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & \frac{l}{EF} \end{bmatrix}_e, \quad (21.26)$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix}_e. \quad (21.27)$$

Скінченний елемент третього типу відрізняється від попереднього лише вектором зусиль, який має вигляд:

$$\mathbf{s}_e^T = \{M_j \ N\}_e. \quad (21.28)$$

І нарешті, для елемента четвертого типу (рис.21.4) вектор зусиль, матриця податливості і матриця жорсткості мають лише по одному елементу:

$$\mathbf{s}_e = \{N\}_e, \quad \mathbf{b}_e = \left[\frac{l}{EF} \right]_e, \quad \mathbf{k}_e = \left[\frac{EF}{l} \right]_e. \quad (21.29)$$

21.3. Вузлові характеристики дискретної моделі

Головними вузловими характеристиками дискретної моделі стержневої системи при розрахунку її за методом скінченних елементів у формі методу сил є вектор зусиль, який складається з векторів зусиль окремих стержнів:

$$\mathbf{S}^T = \{s_1 \ s_2 \ \dots \ s_i \ \dots \ s_m\},$$

вектор вузлових переміщень дискретної моделі, що складається з векторів вузлових переміщень окремих вузлів:

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_k \ \dots \ \Delta_n\},$$

а також вектор вузлових навантажень

$$\mathbf{F}^T = \{F_1 \ F_2 \ \dots \ F_k \ \dots \ F_n\}.$$

Питання побудови векторів Δ і \mathbf{F} докладно розглянуто в п. 20.21.

Приклад 21.1. Побудувати вектори переміщень, вузлових навантажень і зусиль для рами (рис. 21.5,а).

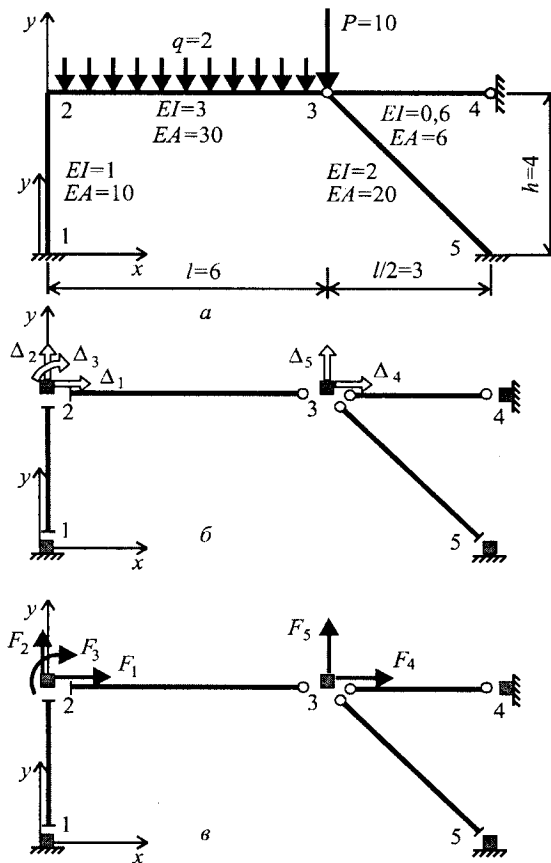


Рис.21.5

Передусім замінюємо раму дискретною моделлю (рис. 21.5,б), тобто розглядаємо раму як сукупність окремих стержнів (скінченних елементів) і вузлів. Кількість ступенів вільності дискретної моделі дорівнює п'яти. Справді, три ступні вільності має жорсткий вузол 2 (поступальні переміщення Δ_1 і Δ_2 , а також кут повороту Δ_3) і два ступня вільності має вузол 3 (поступальні переміщення Δ_4 і Δ_5). Отже, для вільних вузлів можемо записати

$$\Delta_2^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3\}^T, \quad \Delta_3^T = \{\Delta_4 \ \Delta_5\}^T,$$

а для всієї системи

$$\Delta^T = \{\Delta_2 \ \Delta_3\} = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 | \Delta_4 \ \Delta_5\}.$$

Вектор вузлових навантажень матиме також п'ять складових:

$$\mathbf{F}^T = \{\mathbf{F}_2 \ \mathbf{F}_3\} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 | F_4 \ F_5\},$$

які обчислюються в такий самий спосіб, як і при розрахунку стержневих систем за методом скінченних елементів у формі методу переміщень:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q},$$

де вектор \mathbf{P} характеризує компоненти зовнішніх навантажень, які діють на вузли стержневої системи, а вектор \mathbf{Q} містить компоненти вузлових реакцій, які передаються на вузли дискретної моделі внаслідок розподілених вздовж стержня навантажень. У прикладі, що розглядається

$$\mathbf{P}^T = \{0 \ 0 \ 0 | 0 \ -10\}.$$

Вантажні реакції на кінцях стержня 2-3 (рис. 21.6) обчислюються за формулами, що наведені у п.20.6. Отже, маємо:

$$p'_1 = 0, \quad p'_2 = -\frac{5}{8} \cdot (-2) \cdot 6 = 7,5,$$

$$p'_3 = \frac{(-2) \cdot 6^2}{8} = -9, \quad p'_4 = 0,$$

$$p'_5 = -\frac{3}{8}(-2) \cdot 6 = 4,5.$$

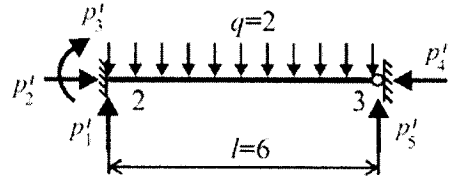


Рис. 21.6

Означені реакції передаються на вузли дискретної моделі у протилежних напрямках. Тому можемо записати:

$$\mathbf{Q}^T = \{0 \ -7,5 \ 9 | 0 \ -4,5\}.$$

Отже вектор вузлових навантажень всієї дискретної моделі:

$$\mathbf{F}^T = \{0 \ -7,5 \ 9 | 0 \ -14,5\}.$$

Склад невідомих зусиль у кожному стержні системи залежить від типу граничних умов. Так, стержень 1-2 є стержнем першого типу (жорсткі вузли з обох боків), стержень 2-3 – другого типу (жорсткий вузол на початку і шарнір на кінці), стержень 2-4, який має шарнір на початку і жорсткий вузол на кінці, може бути віднесений до третього, а стержень 2-5 (шарніри з обох боків) – до четвертого типу. Звідси вектор зусиль дискретної моделі набере вигляду:

$$\mathbf{S}^T = \{s_{1-2} \ s_{2-3} \ s_{2-5} \ s_{2-4}\} = \{M_{1-2} \ M_{2-1} \ N_{1-2} | M_{2-3} \ N_{2-3} | M_{5-3} \ N_{3-5} | N_{3-4}\}.$$

Величини зусиль, які входять до цього вектора, становлять основні невідомі задачі.

21.4. Матриця податливості і матриця жорсткості дискретної моделі

Матриця податливості і матриця жорсткості дискретної моделі є квадратними матрицями, кількість рядків і стовпців в яких дорівнює кількості основних невідомих задач, тобто кількості елементів вектора зусиль \mathbf{S} .

Матриця податливості має блочно-діагональну структуру: блоки, що розташовані на головній діагоналі, становлять матриці податливості окремих скінченних елементів, а всі інші блоки є нульовими:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix}. \quad (21.30)$$

Аналогічно може бути побудована матриця жорсткості дискретної моделі:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{k}_m \end{bmatrix}. \quad (21.31)$$

У співвідношенні (21.31) блоки k_i являють собою матриці жорсткості окремих скінченних елементів, вигляд яких залежить від їхнього типу.

Як і завжди, між матрицями податливості і жорсткості виконується залежність

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}, \quad (21.32)$$

тобто матриця жорсткості є оберненою щодо до матриці податливості.

Приклад 21.2. Скласти матриці податливості і жорсткості для стержневої схеми (див. рис. 21.5,а).

Насамперед обчислимо елементи матриць для кожного стержня залежно від типу граничних умов.

- Стержень 1-2 (перший тип):

$$\mathbf{b}_{1-2} = \begin{bmatrix} 1,3333 & 0,6667 & 0 \\ 0,6667 & 1,3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{1-2} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix};$$

- Стержень 2-3 (другий тип):

$$\mathbf{b}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0,6667 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{2-3} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix};$$

- Стержень 3-5 (третій тип):

$$\mathbf{b}_{3-5} = \begin{bmatrix} 0,8333 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{3-5} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix};$$

- Стержень 3-4 (четвертий тип):

$$\mathbf{b}_{3-4} = [0,5], \quad \mathbf{k}_{3-4} = [2,0].$$

Тоді матриця податливості всієї дискретної моделі (рис. 21.5,б) набуде вигляду:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_{2-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{3-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{3-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 & 0,6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6667 & 1,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно можна побудувати матрицю жорсткості дискретної моделі:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{2-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{3-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{3-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

21.5. Рівняння рівноваги вузлів дискретної моделі

Усі елементи дискретної моделі повинні перебувати в рівновазі. Умови рівноваги скінчених елементів були залучені, коли встановлювався зв'язок між кінцевими реакціями і кінцевими зусиллями (п.21.1). Зараз розглянемо умови рівноваги вузлів. Будь-який жорсткий вузол k дискретної моделі (рис. 21.7) перебуває під дією зовнішніх навантажень, які визначаються компонентами вектора \mathbf{F} , а також сумарними кінцевими реакціями, які передаються на вузол з боку завантажених стержнів. Використовуючи рівняння рівноваги вузла запишемо

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow R_{xk} = F_{xk}, \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow R_{yk} = F_{yk}, \\ \sum M &= 0 \Rightarrow R_{\phi k} = F_{\phi k}. \end{aligned}$$

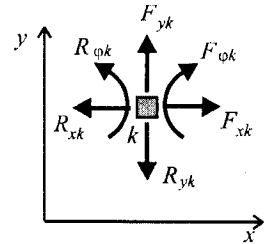


Рис. 21.7

При складанні цих рівнянь доцільно перетворити кінцеві зусилля M_i , M_j та N до кінцевих реакцій, орієнтованих за осями глобальної системи координат xu .

Кінцеві реакції в місцевій системі координат стержня визначимо через кінцеві зусилля рівнянням

$$\mathbf{r}'_e = \begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \\ r'_5 \\ r'_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}_k)_e, \quad (21.33)$$

або з урахуванням (21.1) у вигляді

$$\mathbf{r}'_e = \widehat{\mathbf{E}} \mathbf{L}_e \mathbf{s}_e. \quad (21.34)$$

Перетворимо кінцеві реакції до глобальної системи координат:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}'_e = \mathbf{T}_e^T \widehat{\mathbf{E}} \mathbf{L}_e \mathbf{s}_e. \quad (21.35)$$

У співвідношенні (21.35) \mathbf{T}_e^T – транспонована матриця перетворення:

$$\mathbf{T}_e^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e. \quad (21.36)$$

Після виконання (21.35) кінцеві реакції стержня виражатимуться через кінцеві зусилля, тобто через основні невідомі задачі.

Зазначимо, що вигляд матриці \mathbf{L}_e залежить від типу скінченного елемента. Для стержня першого типу матриця визначається залежністю (21.2). Для стержнів

інших типів з цієї матриці необхідно виключити той чи інший стовпець. Так, для елемента другого типу

$$\mathbf{L}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^T, \quad (21.37)$$

для третього

$$\mathbf{L}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \quad (21.38)$$

і, нарешті, для четвертого

$$\mathbf{L}_e = [1 \ 0 \ 0 | 1 \ 0 \ 0]^T. \quad (21.39)$$

Сумарні реакції, що передаються на вузол k дискретної моделі з боку прикріплених до цього вузла стержнів, можуть бути виражені через кінцеві реакції стержнів за такими формулами:

$$\begin{aligned} R_{xk} &= \sum_{i=k, j=1, n} r_1^{i-j} + \sum_{j=k, i=1, n} r_4^{i-j}, \\ R_{yk} &= \sum_{i=k, j=1, m} r_2^{i-j} + \sum_{j=k, i=1, m} r_5^{i-j}, \\ R_{\varphi k} &= \sum_{i=k, j=1, m} r_3^{i-j} + \sum_{j=k, i=1, m} r_6^{i-j}. \end{aligned} \quad (21.40)$$

Записавши рівняння рівноваги вузлів у напрямках можливих переміщень вузлів, дістанемо систему рівнянь рівноваги, яка може бути записана в матричній формі таким чином:

$$\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (21.41)$$

де \mathbf{A} – матриця коефіцієнтів рівнянь рівноваги вузлів. Слід зауважити, що різниця між кількістю стовпців і кількістю рядків, тобто між кількістю основних невідомих (компонентів вектора \mathbf{S} і кількістю рівнянь рівноваги, характеризує ступінь статичної невизначуваності стержневої системи. Тобто в статично невизначуваних системах матриця \mathbf{A} має вигляд прямокутника, причому кількість стовпців перевищує кількість рядків.

Приклад 21.3. Побудувати матрицю коефіцієнтів рівнянь рівноваги вузлів дискретної моделі (рис. 21.5,в).

Передусім побудуємо вектори кінцевих реакцій для всіх стержнів дискретної моделі за формулою (21.35). Величини синусів і косинусів нахилу місцевих систем координат стержнів можуть бути обчислені за формулами (20.2), довжини – за формулою (20.1).

Так, для стержня 1-2 ($l=4$, $\sin\beta=1$, $\cos\beta=0$):

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{1-2} \\ M_{2-1} \\ N_{1-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25(M_{1-2} - M_{2-1}) \\ -N_{1-2} \\ M_{1-2} \\ -0.25(M_{1-2} - M_{2-1}) \\ N_{1-2} \\ -M_{2-1} \end{Bmatrix}.$$

Аналогічні обчислення виконаємо для інших стержнів. Врешті матимемо:

- для стержня 2-3:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix}_{2-3} = \begin{Bmatrix} -N_{2-3} \\ -0.1667M_{2-3} \\ M_{2-3} \\ N_{2-3} \\ 0.1667M_{2-3} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

- для стержня 3-5:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix}_{3-5} = \begin{Bmatrix} 0.16M_{5-3} - 0.6N_{3-5} \\ 0.12M_{5-3} + 0.8N_{3-5} \\ 0 \\ -0.16M_{5-3} + 0.6N_{3-5} \\ -0.12M_{5-3} - 0.8N_{3-5} \\ -M_{5-3} \end{Bmatrix},$$

- для стержня 3-4:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix}_{3-4} = \begin{Bmatrix} -N_{3-4} \\ 0 \\ 0 \\ N_{3-4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Складаємо рівняння рівноваги за допомогою співвідношень (21.40).

Для вузла 2

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow r_4^{1-2} + r_1^{2-3} = F_1, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow r_5^{1-2} + r_2^{2-3} = F_2, \\ \sum M = 0 &\Rightarrow r_6^{1-2} + r_3^{2-3} = F_3; \end{aligned}$$

для вузла 3:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow r_4^{2-3} + r_1^{3-5} + r_1^{3-4} = F_4, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow r_5^{2-3} + r_2^{3-5} + r_2^{3-4} = F_5. \end{aligned}$$

Підставляючи у визначені рівняння компоненти відповідних векторів кінцевих реакцій і вузлових навантажень, зрештою одержимо

21. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ СИЛ

$$-0,25M_{1-2} + 0,25M_{2-1} - N_{2-3} = 0;$$

$$N_{1-2} - 0,1667M_{2-3} = -7,5;$$

$$-M_{2-1} + M_{2-3} = 9;$$

$$N_{2-3} + 0,16M_{5-3} - 0,6N_{3-5} - N_{3-4} = 0;$$

$$0,1667M_{2-3} + 0,12M_{5-3} + 0,8N_{3-5} = -14,5.$$

Коефіцієнти при невідомих можуть бути записані у табличному вигляді (табл.21.1).

Таблиця 21.1

№	M_{1-2}	M_{2-1}	N_{1-2}	M_{2-3}	N_{2-3}	M_{3-5}	N_{3-5}	N_{3-4}
1	-0,25	0,25	0	0	-1	0	0	0
2	0	0	1	-0,1667	0	0	0	0
3	0	-1	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0,16	-0,6	-1
5	0	0	0	0,1667	0	0,12	0,8	0

Отже, матриця системи рівнянь набуває вигляду:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} -0,25 & 0,25 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,16 & -0,6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1667 & 0 & 0,12 & 0,8 & 0 \end{array} \right].$$

21.6. Повна система рівнянь та її розв'язок

Для розв'язання названої задачі рівняння рівноваги (21.41) має доповнюватися геометричними та фізичними рівняннями, виконання яких забезпечує нерозривність деформацій поміж вузлами і скінченними елементами дискретної моделі. Таким чином, повна система рівнянь будівельної механіки матиме вигляд

$$\mathbf{AS} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A}^T \Delta = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{BS} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (21.42)$$

Два останніх рівняння із (21.42) можна замінити одним фізико-геометричним:

$$\mathbf{A}^T \Delta - \mathbf{BS} = \mathbf{0}. \quad (21.43)$$

Виразивши через (21.43) вектор зусиль

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \Delta, \quad (21.44)$$

і підставивши його до рівняння рівноваги можемо знайти вектор переміщень:

$$\Delta = (\mathbf{AKA}^T)^{-1} \mathbf{F}. \quad (21.45)$$

Тут враховано, що $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{K}$. Нарешті з (21.44) дістанемо вектор зусиль:

$$\mathbf{S} = \mathbf{KA}^T (\mathbf{AKA}^T)^{-1} \mathbf{F}. \quad (21.46)$$

Таким чином, для розв'язання будь-якої задачі достатньо побудувати дві матриці: умов рівноваги \mathbf{A} і жорсткості \mathbf{K} , а також вектор вузлових навантажень \mathbf{F} .

21.7.Обчислення дійсних зусиль у стержнях

Коли вектор зусиль у стержнях системи **S** обчислено, процедура знаходження дійсних зусиль в окремих елементах системи являє собою технічну процедуру, що включає перетворення незалежних зусиль в стержнях M_i, M_j і N до кінцевих і в додаванні до них вантажних реакцій, які виникають у стержнях від дії рівномірно розподілених навантажень:

$$\begin{aligned} N_i^{\text{д}} &= -N - p'_1, & N_j^{\text{д}} &= N + p'_4, \\ Q_i^{\text{д}} &= -\frac{M_i}{l} + \frac{M_j}{l} + p'_2, & Q_j^{\text{д}} &= -\frac{M_i}{l} + \frac{M_j}{l} - p'_5, \\ M_i^{\text{д}} &= M_i + p'_3, & M_j^{\text{д}} &= M_j - p'_6. \end{aligned} \quad (21.47)$$

У матричній формі наведені залежності мають вигляд

$$(\mathbf{s}_k)_e^{\text{д}} = \mathbf{L}_e \mathbf{s}_e + \hat{\mathbf{E}} \mathbf{p}'_e, \quad (21.48)$$

де $((\mathbf{s}_k)_e^{\text{д}})^T = \{N_i^{\text{д}} \ Q_i^{\text{д}} \ M_i^{\text{д}} \mid N_j^{\text{д}} \ Q_j^{\text{д}} \ M_j^{\text{д}}\}$ – вектор дійсних кінцевих зусиль елемента. Нагадаємо, що вигляд матриці \mathbf{L}_e залежно від типу скінченного елемента визначається співвідношеннями (21.2), (21.37), (21.38) або (21.39).

Приклад 21.4. Побудувати епюри внутрішніх зусиль для рами (рис. 21.5).

Виконавши матричні операції згідно з (21.46) дістанемо вектор зусиль дискретної моделі

$$\mathbf{S}^T = \{3,299 \ -5,121 \ -6,853 \mid 3,879 \ -2,104 \mid -2,145 \ -18,618 \mid 8,719\},$$

тобто $M_{1-2} = 3,299; \quad M_{2-1} = -5,121; \quad N_{1-2} = -6,853;$

$$M_{2-3} = 3,879, \quad N_{2-3} = -2,104;$$

$$M_{5-3} = -2,145; \quad N_{3-5} = -18,618;$$

$$N_{3-4} = 8,719.$$

Побудуємо епюри зусиль в стержні 2-3 (стержень другого типу). Згідно з (21.48) можемо записати, що

$$(\mathbf{s}_k)_{2-3}^{\text{д}} = \begin{Bmatrix} N_2^{\text{д}} \\ Q_2^{\text{д}} \\ M_2^{\text{д}} \\ N_3^{\text{д}} \\ Q_3^{\text{д}} \\ M_3^{\text{д}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,25 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3,879 \\ -2,104 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 7,5 \\ -9 \\ 0 \\ 4,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,104 \\ 6,853 \\ -5,121 \\ -2,104 \\ -5,147 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Схема повного завантаження стержня 2-3 і епюри M, Q і N зображені на рис. 21.8.

Для стержня 1-2 (перший тип) беручи до уваги, що розподілених навантажень немає, можна записати:

**21. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
У ФОРМІ МЕТОДУ СИЛ**

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{s}_k)_{1-2}^{\text{II}} &= \begin{Bmatrix} N_1^{\text{II}} \\ Q_1^{\text{II}} \\ N_2^{\text{II}} \\ Q_2^{\text{II}} \\ N_2^{\text{II}} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3,299 \\ -5,121 \\ -6,853 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6,853 \\ -2,105 \\ 3,299 \\ -6,853 \\ -2,105 \\ -5,121 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно можна обчислити зусилля в стержнях 3-5 і 3-4. Для побудови епюр зусиль у рамі необхідно відкласти відповідні епюри в стержнях на її загальній схемі.

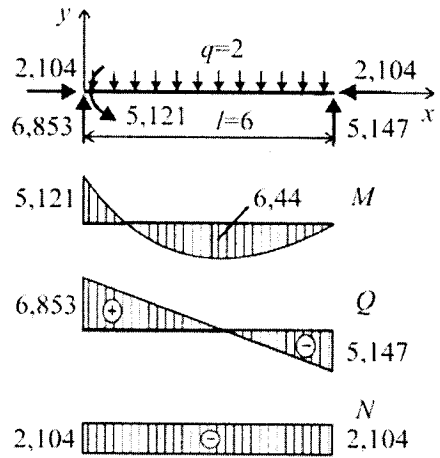


Рис. 21.8

22. Сучасні програмні комплекси, що базуються на методі скінченних елементів

22.1. Загальні схеми сучасних програмних систем, що використовують МСЕ

22.1.1. Загальна структура розрахункової програмної системи

Розрахунки несучих конструкцій, що базуються на методі скінченних елементів, мають логічну структуру і послідовність дій, яка представлена на рис. 22.1. Ця структура з тою чи іншою деталізацією реалізується і в програмних системах, тому вони мають функціональні частини, що виконують дії, позначені на рис. 22.1.

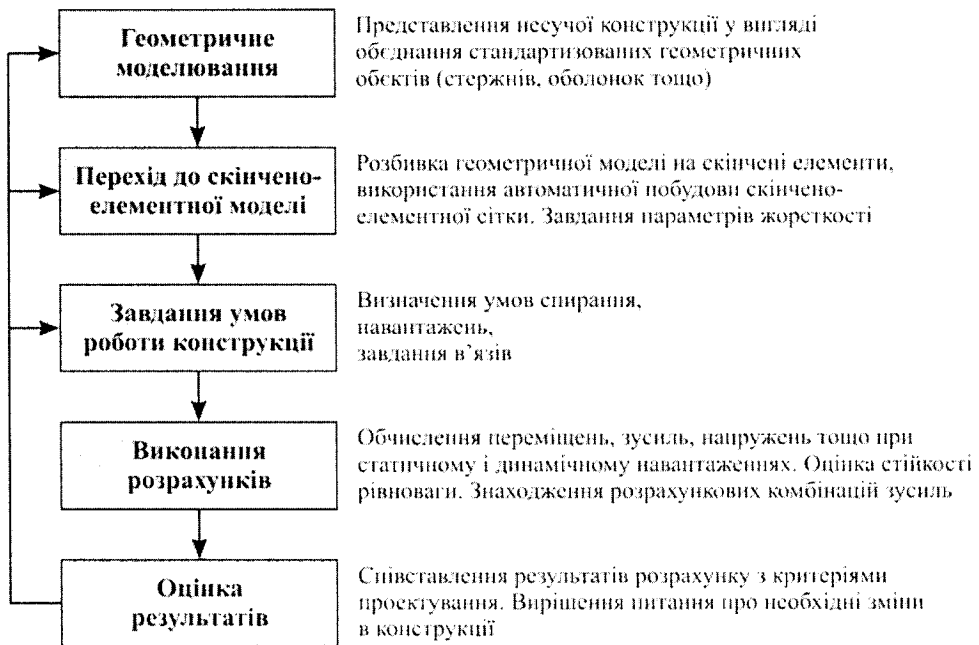


Рис. 22.1

Одним з поширених варіантів логічної схеми розрахункової програмної системи є структура, що зображена на рис. 22.2. Звичайно частини цієї схеми називають препроцесором, процесором та постпроцесором. До препроцесора належать модулі які взаємодіють з людиною під час завдання вихідних даних про розрахункову схему, та умови її роботи (Інтерпретатор розрахункових схем, Графічний редактор, Інтерпретатор навантажень), до постпроцесора – модулі які взаємодіють з людиною під час аналізу і обробки результатів розрахунку.

Пре- і постпроцесори, як правило, дають великі можливості графічного відображення і коригування вхідних даних та редагування форми представлення результатів. Майже всякий реальний розрахунок базується на аналізі декількох

варіантів розрахункової моделі, тому зручні можливості перегляду, коригування та заміни деяких деталей є важливим фактором впливу на якість програмної системи.

Процесор, що зображений на рис. 22.2, відповідає випадку, коли формування і факторизація матриці розрахункових рівнянь МСЕ відокремлені від обробки правих частин цих рівнянь, що характерно не для всіх варіантів побудови розрахункового програмного комплексу. Якщо використовується ітераційний метод розв'язання, то таке відокремлення найчастіше не передбачено.

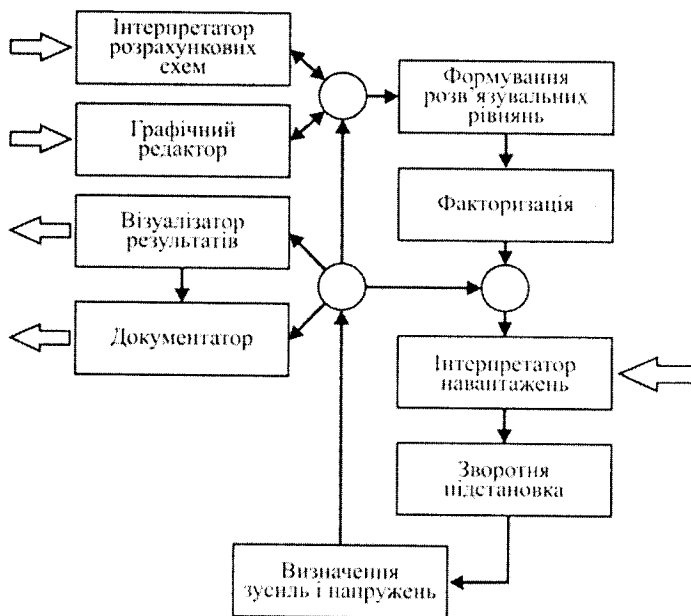


Рис. 22.2

22.2. Характеристики найбільш поширених програмних систем

У теперішній час проектувальник може скористатися досить широким списком програм, за допомогою яких виконуються розрахунки будинків і споруд на міцність і стійкість. Серед них є дуже потужні програмні системи, наприклад, такі як ANSYS, у котрих функція знаходження напруженого та деформованого стану є тільки однією з багатьох, а кількість невідомих, якими оперує програма доходить до десятків мільйонів. Є й досить скромні розробки, що орієнтовані на розрахунок невеликих систем типу трипрогонової балки.

Але найбільш поширеними програмними системами (ПС) є такі, що орієнтовані на розрахунок сучасних конструктивних просторових схем з кількістю невідомих, що вимірюється десятками чи декількома сотнями тисяч. Із вказаних програм на вітчизняному ринку найбільш поширеними є LIPA, SCAD, Micro FE, STARK_ES та Robot Millenium. Усі вони ґрунтуються на майже однакових ідейних настановах методу скінченних елементів. Вони використовують досить поширені бібліотеки

скінченних елементів, що в багатому співпадають (табл. 22.1) і всі спроможні виконувати такі основні функції, що пов'язані з проблемами будівельної механіки:

- виконувати розрахунки в лінійній та нелінійній постановці;
- знаходити напружено-деформований стан конструкції від статичних та динамічних впливів;
- знаходити найбільш не вигідні комбінації навантажень;
- підраховувати головні й еквівалентні напруження за різноманітними теоріями міцності;
- аналізувати стійкість рівноваги.

Таблиця 22.1

Скінченні елементи	Micro FE	STARK_ES	SELENA	SCAD	ЛІРА.	Robot Millennium	ANSYS / Civil FEM	STAAD Pro
В'язі для зсувів і поворотів:								
• лінійно-пружні	+	+	+	+	+	+	+	+
• нелінійно-пружні	+	+	-	-	-	+	+	-
Скінченні елементи стержнів:								
• звичайних призматичних	+	+	+	+	+	+	+	+
• змінної жорсткості	-	-	-	-	-	-	+	+
• на пружній основі	+	+	+	+	+	+	-	+
• з урахуванням зсувів (стержень Тимошенко)	+	+	+	+	+	+	+	+
Кінцеві елементи плоских оболонок:								
• теорія Кірхгофа-Лява	+	+	+	+	+	+	+	+
• теорія Міндліна-Рейснера	+	+	-	-	-	+	-	-
• з шістьма ст. вільності у вузлі, враховуючі квадрати кутів повороту у дотичній площині	+	+	-	-	-	+	+	-
• багат шарові	+	+	-	+	+	+	+	+
• анізотропні	+	+	+	+	+	+	+	+
• на пружній основі	+	+	-	+	+	+	+	+
Тривимірні скінченні елементи	+	+	+	+	+	+	+	+

Сфери застосування різних програмних систем, як правило, перетинаються, але не збігаються. Це означає, що існують моделі, які можуть бути в принципі оброблені по одним програмах і не передбачені для обробки в інших програмах. Так, наприклад, у різних розрахункових програмах можуть бути реалізовані різні варіанти теорії оболонки.

Крім того, у різних ПС є функціональні можливості що не збігаються. Це варто враховувати при виборі розрахункового інструментарію. Деяке уявлення про це дає табл. 22.2.

Таблиця 22.2

Режими розрахунку	Micro FE	STARK_ES	SELENA	SCA	ЛІРА.	Robot Millennium	ANSYS / Civil FEM	STAAD Pro
Можливість використання суперелементів	+	+	+	-	+	-	+	+
Визначення навантажень на фрагмент схеми	-	-	-	+	+	-	+	-
Нелінійний статичний розрахунок:								
• Нелінійна пружність	+	+	+	-	+	-	+	+
• Урахування пластичності (із пружним розвантаженням)	+	+	-	-	-	+	+	+
• Урахування повзучості	-	-	-	-	-	-	+	-
• Геометрична нелінійність	+	+	+	+	+	+	+	+
• Однобічні зв'язки	+	+	+	+	+	+	+	+
• Генетична нелінійність	-	-	-	+	+	-	+	+
• Розрахунок за деформованою схемою	-	-	-	-	-	+	+	+
• Граничний твердий-пластичний аналіз	+	+	-	-	-	-	-	-
Визначення розрахункових сполучень зусиль								
• Найгірших за СНиП 2.01.07-85	-	-	+	+	+	-	-	-
• Екстремальних і відповідних	+	+	-	-	-	-	-	-
Використання різних варіантів розрахункової моделі в рамках одного завдання	-	-	-	+	+	-	-	-
Перевірка стійкості								
• Пропорційне навантаження	+	+	+	+	+	+	+	+
• Складне навантаження	+	+	-	+	-	-	+	-
Енергетична оцінка ролі елементів	+	+	-	+	-	-	-	-
Загальні динамічні розрахунки:								
• Модальний аналіз	+	+	+	+	+	+	+	+
• Інтегрування рівнянь руху	+	+	+	+	+	+	+	+
Розрахунок на вітрові пульсації	+	+	+	+	+	+	-	-
Лінійно-спектральна сейсміка:								
• рівномірне поступальне порушення	+	+	+	+	+	+	-	-
• рівномірна ротація основи	+	+	-	+	-	-	-	-
• нерівномірне порушення	+	+	-	-	-	-	-	-
Розрахунок по акселерограмам:								
• рівномірне поступальне порушення	+	+	+	+	+	+	+	+
• нерівномірне порушення	+	+	-	-	-	-	-	-
Розрахунок лінеаризованої системи	-	-	-	+	-	+	+	-
Розрахунок на прогресуюче руйнування	+	-	-	+	-	-	-	-

Необхідно відзначити певну умовність таблиць 22.1 і 22.2, оскільки деякі деталі визначені не точно. Так, наприклад, "Розрахунок на прогресуюче руйнування" – ще не цілком стале поняття, тому можна ставити "плюси" або "мінуси" з деяким допуском. І незважаючи на те, що ANSYS, Robot Millenium або ЛІРА використалися при проведенні таких розрахунків, вони спеціального режиму перевірки на прогресуюче руйнування не мають, що й позначено в табл. 22.3.

Корисно вказати на значення деяких функцій. Режим «Визначення навантажень на фрагмент схеми» дозволяє після виконання розрахунку на відносно грубій скінченноелементній мережі виділити деякий фрагмент розрахункової схеми, передати на нього навантаження від відкинutoї частини схеми й отриману в такий спосіб автономну (і, що важливо, зрівноважену!) задачу піддати більше детальному аналізу. Для висотних будинків цей режим дуже зручний, оскільки з його допомогою здобувається уточнений розв'язок без деталізації всього завдання.

Досить корисні режими «Використання різних варіантів розрахункової моделі в рамках одного завдання» і «Визначення ролі підсистем». Перший дозволяє враховувати збільшення жорсткості ґрунтової основи при короточасних впливах (вітер, сейсміка й ін.), ураховувати знижені модулі деформації при температурних впливах, у зручному режимі виконувати варіантні розрахунки й багато чого іншого. Другий дає можливість виявити «утримуючі» і «дестабілізуючі» компоненти системи при втраті стійкості й тим самим оптимізувати модифікацію конструкції у випадку її недостатньої стійкості.

23. Деякі перспективні напрями розвитку програмних систем

Вже зараз зрозуміло, що складні і коштовні програмні системи, як і будь-які інші складні споруди чи машини повинні мати довгий життєвий цикл, а тому бути пристосованими до змін завдань, які вирішуються, способів функціонування чи інших ознак використання. Крім того, вони повинні сприяти економії людських зусиль, а ця якість майже завжди забезпечується здібністю до саморегулювання. Тобто необхідно, щоб програмне забезпечення було таким, що адаптується. Ця якість є характерною для будь-яких складних технічних систем і живих істот.

Слід сказати, що з точки зору пристосування до нових завдань обчислювальна техніка зараз еволюціонує швидше, ніж програмні продукти. Адаптованість «заліза» особливо помітна в останній час і її можна простежити на прикладі розвитку складних багатопроцесорних центрів обробки даних. А програмне забезпечення дещо відстає від розвитку обчислювальної техніки і часто й досі орієнтоване на ізольовані комп'ютери.

Можна очікувати три напрямки створення і розвитку програмного забезпечення, що адаптується.

- Параметрична адаптація – зміна в часі алгоритмів функціонування. Прикладом можуть бути нейронні мережі, що мають здібність до самонавчання.

- Алгоритмічна адаптація – вона заснована на можливості переключення з одного алгоритму на інший (наприклад, прямого чи ітераційного методу розв'язання систем алгебраїчних рівнянь) з автоматичним вибором, що реалізується деякою експертною системою.

- Ресурсна адаптація – вона зводиться до більш гнучкого використання ресурсів комп'ютерної мережі, наприклад до переміщення обчислень на менш завантажені сервери чи процесори.

Окрім широкого застосування методу скінченних елементів слід чекати також розвитку й інших методів розрахунку. Для деяких проблем можуть ефективно використовуватися метод граничних елементів, а також досить новий безмережний метод. А щодо вибору найбільш ефективного варіанту розв'язання тієї чи іншої конкретної задачі, то є досить цікаві пропозиції стосовно використання так званих експертних систем чи інших форм штучного інтелекту у процесі такого вибору.

Справа в тому, що сьогодні (і в перспективі) немає одного універсального методу, однаково ефективного для різних випадків. Проблема полягає в тому, що для розв'язання різних задач потрібні різні методи або ж різні модифікації того самого методу. У зв'язку із цим була висловлена ідея розробки програмного комплексу на основі експертної системи. Така експертна система, знаючи про специфіку закладених у неї методів, дозволяє користувачеві під час постановки задачі підібрати необхідний алгоритм розв'язання. Сьогодні вже є деякі піонерні розробки такого типу, їхній аналіз показав, що вони мають істотний потенціал для вдосконалювання.

У короткочасній перспективі можна прогнозувати суттєву зміну програмного забезпечення у зв'язку з використанням високопродуктивних комп'ютерів, що реалізують паралельні обчислення. Розпаралелювання обчислень досить просто виконується на етапі створення і аналізу скінченно-елементної моделі, деякі труднощі виникають під час розв'язання систем розв'язувальних рівнянь, але й тут є досить ефективні методи, що пристосовані до розподілу обчислень по мережі робочих станцій.

Одним з найперспективніших напрямів розвитку обчислюваної техніки є використання багатопроцесорних систем. Вже зараз інтенсивно розвивається їх використання в проектно-обчислюваних комплексах, орієнтованих на розрахунок механічних систем. Сам метод скінченних елементів у своїй класичній формі створює досить привабливі можливості паралельних обчислень за рахунок одночасної обробки різних скінченних елементів під час утворення матриці жорсткості та під час визначення внутрішніх зусиль у скінченних елементах.

Але ще більші можливості використання паралельних обчислень дає використання техніки підконструкцій (суперелементів), яка може бути пристосована для ефективного використання особливостей роботи розподілених обчислювальних пристроїв.

Будемо вважати, що складна конструкція може бути розділеною на декілька підконструкцій, що зв'язані між собою (рис. 23.1), і розглянемо схему розпаралелювання обчислень з конденсацією матриці жорсткості. Ідея підходу полягає у розбивці основних невідомих на внутрішні та зовнішні (внутрішні невідомі підконструкції належать тим вузлам, що не мають відношення до інших підконструкцій)

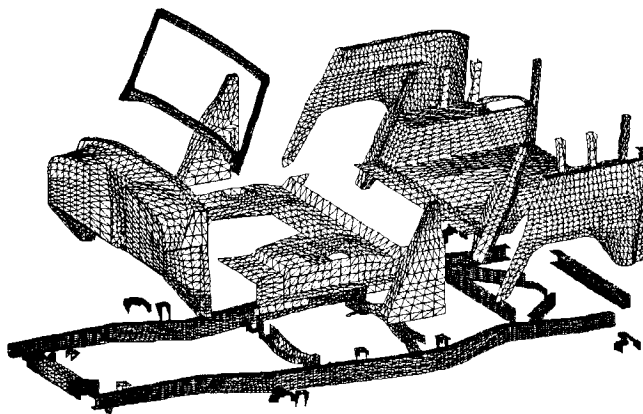


Рис. 23.1

Тоді, наприклад, для розв'язання лінійної статичної задачі з використанням МСЕ у варіанті методу переміщень потрібно знайти вектор узагальнених переміщень q як розв'язок системи рівнянь $Kq=P$, а потім визначити вторинні

невідомі (зусилля, напруження), що визначаються цим вектором. Схема алгоритму розпаралелювання обчислень надана на рис. 23.2.

Алгоритм представляє собою таку послідовність дій.

1. У відокремленому процесі для кожної підконструкції формуються матриці \mathbf{K} і \mathbf{P} (блок A_i - на схемі).

2. Для побудови коефіцієнтів конденсованих матриць підконструкції, що має n «зовнішніх» ступенів вільності, один раз розв'язується система рівнянь $[\mathbf{K} + \alpha \mathbf{E}][\mathbf{Q}^1 \mathbf{Q}^p] = \alpha \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{P}$ з $(n+1)$ правою частиною. Тут: $\mathbf{E} = \text{diag}[1 \ 0 \ 1 \dots \ 1]$ – діагональна матриця, у котрій «одиниці» стоять на місцях, що відповідають зовнішнім ступеням вільності, $\tilde{\mathbf{E}}$ – матриця \mathbf{E} з викресленими нульовими стовпцями, $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^p$ – матриці переміщень від одиничних навантажень та зовнішнього навантаження відповідно. Коефіцієнти \tilde{k}_{ij} і \tilde{p}_i конденсованих матриць підконструкції знаходяться зі співвідношень

$$\tilde{k}_{ij} = \begin{cases} -\alpha(Q_{ind(i)j}^1 - 1), & \text{якщо } i = j \\ -\alpha Q_{ind(i)j}^1, & \text{якщо } i \neq j \end{cases} \quad (23.1)$$

$$\tilde{p}_i = -\alpha Q_i^p \quad (23.2)$$

у яких \mathbf{Q}_{ind} – матриця індексів, що містить глобальні номери зовнішніх невідомих.

3. Конденсовані матриці $\tilde{\mathbf{K}}$ і $\tilde{\mathbf{P}}$ передаються ведучому процесу для формування розв'язувальних рівнянь відносно «зовнішніх» невідомих $\sum \tilde{\mathbf{K}}_i \tilde{\mathbf{q}}_s = \sum \tilde{\mathbf{P}}_i$ (блок В).

4. Далі у ведучому процесі знаходиться вектор «зовнішніх» невідомих (блок С), і його відповідні компоненти передаються процесам, що обробляють інформацію про підконструкції.

5. Для кожній підконструкції в блоці С підраховуються переміщення, а в блоці D – вторинні результати.

Слід сказати, що в цьому алгоритмі об'єм інформації, що передається між розрахунковими процесами, визначається лише кількістю зовнішніх невідомих.

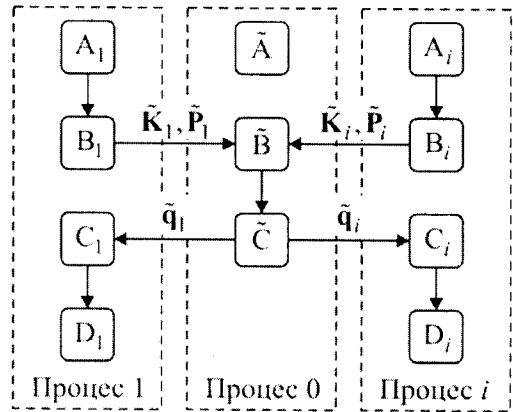


Рис. 23.2

Частина IV

Варіаційні постановки нелінійних задач

24. Рівняння геометрично нелінійної теорії пружності

24.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії пружності

В декартовій системі координат розглядається деформування суцільного тіла. Точка тіла $M(x,y,z)$ одержує при цьому переміщення

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)^T.$$

Компоненти деформації мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \end{aligned}$$

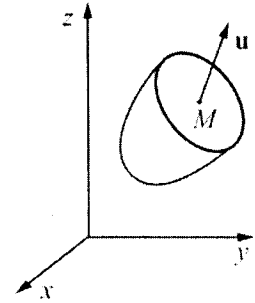


Рис. 24.1

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (24.1)$$

Введемо вектор деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}^T. \quad (24.2)$$

Введемо також матрицю операцій диференціювання \mathbf{F}_ε

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 & \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (24.3)$$

Тоді в матричному вигляді кінематичні співвідношення можуть бути записані у вигляді

$$\varepsilon = \mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} . \quad (24.4)$$

Елементарний прямокутний паралелепіпед з ребрами dx ; dy ; dz , виділений в тілі до деформування, після деформування перетвориться в косокутній паралелепіпед.

Відношення площі площадки $dxdy$ після деформації до її ж площі до деформації

$$S_z = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2} . \quad (24.5)$$

Аналогічно для площадки $dxdz$

$$S_y = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{xz}^2} , \quad (24.6)$$

а для площадки $dydz$

$$S_x = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2} . \quad (24.7)$$

Відношення об'ємів паралелепіпеда до і після деформації

$$D = ((1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - (1 + 2\varepsilon_{xx})\varepsilon_{yz}^2 - (1 + 2\varepsilon_{yy})\varepsilon_{xz}^2 - (1 + 2\varepsilon_{zz})\varepsilon_{xy}^2)^{1/2} . \quad (24.8)$$

Нехай на площадці, що до деформування була перпендикулярна осі X , діє напруження σ_x ; на площадці, що до деформування була перпендикулярна осі Y , діє вектор напруження σ_y , а на площадці, що була перпендикулярна осі Z , вектор напружень σ_z , \mathbf{p} – вектор питомої масової сили в точці, що розглядається.

Тоді рівняння рівноваги в векторній формі мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \mathbf{p}^* = 0 , \quad (24.9)$$

де

$$\sigma_x^* = S_x \sigma_x ; \quad \sigma_y^* = S_y \sigma_y ; \quad \sigma_z^* = S_z \sigma_z ; \quad \mathbf{p}^* = D \mathbf{p} . \quad (24.10)$$

Спроєкуємо векторну рівність (24.9) на осі X , Y , Z нерухомої системи координат і отримаємо в результаті систему рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{x\xi}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\xi}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\xi}^*}{\partial z} + P_\xi^* = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x\eta}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\eta}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\eta}^*}{\partial z} + P_\eta^* = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x\zeta}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\zeta}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}^*}{\partial z} + P_\zeta^* = 0, \end{cases} \quad (24.11)$$

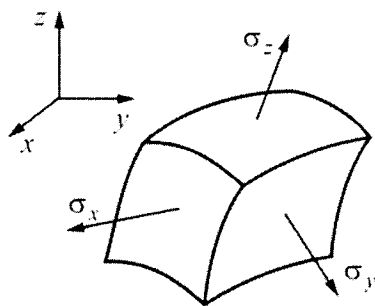


Рис. 24.2

де $P_\xi^*, P_\eta^*, P_\zeta^*$ – проєкції вектора \mathbf{p}^* на осі X , Y , Z :

$$\mathbf{p}^* = \{P_{\xi}^*, P_{\eta}^*, P_{\zeta}^*\}^T. \quad (24.12)$$

Введемо дев'ятикомпонентний вектор приведених напружень

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \{\sigma_{x\xi}^*, \sigma_{y\eta}^*, \sigma_{z\zeta}^*, \sigma_{y\xi}^*, \sigma_{z\eta}^*, \sigma_{x\zeta}^*, \sigma_{z\xi}^*, \sigma_{x\eta}^*, \sigma_{y\zeta}^*\}^T. \quad (24.13)$$

Введемо також ще одну матрицю операцій диференціювання

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (24.14)$$

Тепер систему рівнянь рівноваги можна записати в матричній формі

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{p}^* = 0. \quad (24.15)$$

Вектори $\boldsymbol{\sigma}_x^*, \boldsymbol{\sigma}_y^*, \boldsymbol{\sigma}_z^*$ можна також спроектувати на напрямки $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$, що визначають напрямки в точці дотичних до волокон, які були до деформації паралельними осям нерухомої системи координат.

Зв'язок цих компонент з компонентами приведених напружень має наступний вигляд

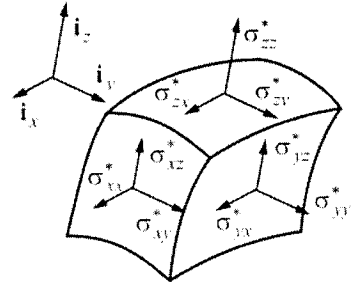


Рис. 24.3

$$\begin{aligned} \sigma_{x\xi}^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz}^*; \quad \sigma_{y\eta}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sigma_{yy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{yz}^*; \\ \sigma_{z\zeta}^* &= \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \sigma_{zz}^*; \quad \sigma_{y\xi}^* = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz}^*; \\ \sigma_{z\eta}^* &= \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sigma_{zy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{zz}^*; \quad \sigma_{x\zeta}^* = \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \sigma_{zz}^*; \\ \sigma_{z\xi}^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{zx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zz}^*; \quad \sigma_{x\eta}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sigma_{xy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{xz}^*; \\ \sigma_{y\zeta}^* &= \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \sigma_{yz}^*. \end{aligned} \quad (24.16)$$

Або в матричній формі

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{U}\mathbf{D}_u \boldsymbol{\sigma}_{\text{узг}}^*, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\text{узг}}^* = (\mathbf{U}\mathbf{D}_u)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^*, \quad (24.17)$$

де $\mathbf{U} = \text{diag}(u, v, w, u, v, w, u, v, w)$; $\boldsymbol{\sigma}_{\text{узг}}^*$ – шестикомпонентний вектор, побудований з компонент тензора узагальнених напружень, що є симетричним

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{узг}}^* = \{\sigma_{xx}^*, \sigma_{yy}^*, \sigma_{zz}^*, \sigma_{yx}^*, \sigma_{zy}^*, \sigma_{xz}^*\}^T, \quad (24.19)$$

причому $\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^*, \sigma_{yz}^* = \sigma_{zy}^*, \sigma_{zx}^* = \sigma_{xz}^*$.

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 + \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 + \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}. \quad (24.20)$$

Границя тіла, що розглядається, складається з двох частин. На частині S_1 заданий вектор поверхневих сил $\mathbf{f}_S = \{f_\xi, f_\eta, f_\zeta\}^T$, а на частині S_2 – вектор переміщень $\mathbf{u}_S = \{u_0, v_0, w_0\}^T$ з компонентами, які направлені вздовж осей X, Y, Z нерухомої системи координат. Граничні умови записуються наступним чином:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \in S_2, \quad (24.21)$$

$$\mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{f}_S^*, \in S_1, \quad (24.22)$$

де

$$\mathbf{A}_S^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & 0 & n_z & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 & 0 & n_z & 0 & 0 & n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & 0 & n_x & 0 & 0 & n_y \end{bmatrix}; \quad (24.23)$$

$$\mathbf{f}_S^* = S_n^* \mathbf{f}_S; \quad (24.24)$$

S_n^* - відношення площі елемента поверхні до деформації до його площі після деформації

$$\begin{aligned} S_n^* &= D \sqrt{g^{xx} n_x^2 + g^{yy} n_y^2 + g^{zz} n_z^2 + 2g^{xy} n_x n_y + 2g^{xz} n_x n_z + 2g^{yz} n_y n_z}; \\ D^2 g^{xx} &= (1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2; \quad D^2 g^{yy} = (1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{xz}^2; \\ D^2 g^{zz} &= (1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2; \quad D^2 g^{xy} = -\varepsilon_{xy}(1 + 2\varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz}; \\ D^2 g^{xz} &= -\varepsilon_{xz}(1 + 2\varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz}; \quad D^2 g^{yz} = -\varepsilon_{yz}(1 + 2\varepsilon_{xx}) + \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (24.25)$$

$\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}^T$ - вектор нормалі до поверхні, що обмежує тіло до деформації.

Будемо в подальшому вважати, що деформування тіла призводить до істотних кутів повороту при деформаціях зневажливо малих у порівнянні з одиницею і не переважаючих межі пропорційності. Це припущення еквівалентно тому, що з всієї

множини задач теорії пружності виділяються задачі лінійні фізично, але нелінійні геометрично.

Зв'язок між узагальненими напруженнями і деформаціями подається наступним чином (закон Гука):

$$\sigma_{узар}^* = \mathbf{D}_\varepsilon \varepsilon, \quad \varepsilon = \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \sigma_{узар}^*, \quad (24.26)$$

де

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (24.27)$$

λ і μ – пружні постійні Ламе.

Підставивши (24.17) в (24.26), можемо визначити зв'язок між приведеними напруженнями і деформаціями

$$\sigma^* = \mathbf{U} \mathbf{D}_u \mathbf{D}_\varepsilon \varepsilon, \quad \varepsilon = \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \left[(\mathbf{U} \mathbf{D}_u)^{-1} \sigma^* \right]. \quad (24.28)$$

Надалі буде використовуватись наступна інтегральна формула.

Якщо \mathbf{a} – деякий трьохкомпонентний вектор, а \mathbf{b} – дев'ятикомпонентний вектор, то справедливо

$$\int_V \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) dV = \int_V \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_S^T \mathbf{b}) dV - \int_V (\mathbf{A} \mathbf{a})^T \mathbf{b} dV. \quad (24.29)$$

Запишемо повну систему співвідношень теорії пружності

$$\varepsilon = \mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} \quad (\text{геометричні співвідношення})$$

$$\mathbf{A}^T \sigma^* + \mathbf{p}^* = 0 \quad (\text{рівняння рівноваги})$$

$$\sigma^* = \mathbf{U} \mathbf{D}_u \mathbf{D}_\varepsilon \varepsilon \quad (\text{фізичні співвідношення})$$

$$\sigma_{узар}^* = \mathbf{D}_\varepsilon \varepsilon \quad (\text{фізичні співвідношення})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \in S_2 \quad (\text{граничні умови})$$

$$\mathbf{A}_S^T \sigma^* = \mathbf{f}_S^*, \quad \in S_1 \quad (\text{граничні умови}). \quad (24.30)$$

Приріст роботи деформації елементарного паралелепіеда (приріст питомої потенціальної енергії деформації) можна виразити наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \sigma_{xx}^* \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^* \delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^* \delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}^* \delta\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}^* \delta\varepsilon_{xz} + \sigma_{yz}^* \delta\varepsilon_{yz} = \\ &= \sigma_{x\xi}^* \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_{y\xi}^* \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma_{z\xi}^* \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \sigma_{x\eta}^* \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_{y\eta}^* \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_{z\eta}^* \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \sigma_{x\zeta}^* \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \sigma_{y\zeta}^* \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sigma_{z\zeta}^* \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (24.31)$$

або в матричній формі

$$\delta\Phi = (\sigma_{узар}^*)^T \delta\varepsilon = (\sigma^*)^T \mathbf{A} \delta\mathbf{u}. \quad (24.32)$$

24.2. Варіаційні підходи

На підставі системи (24.30) запишемо загальне варіаційне рівняння

$$\int_V (\delta \mathbf{u}) \left[\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{p}^* \right] dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u}) dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^* - \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}) dV + \\ + \int_{S_2} \left[\mathbf{A}_S^T \delta \boldsymbol{\sigma}^* \right]^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS + \int_{S_1} (\delta \mathbf{u})^T \left[\mathbf{f}_S^* - \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* \right] dS = 0. \quad (24.33)$$

В силу справедливості інтегральної рівності (24.29) справедлива також і наступна рівність:

$$\int_V (\delta \mathbf{u}) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^* dV = \int_S (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* dS - \int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}^* dV. \quad (24.34)$$

Підставивши (24.34) в (24.33) і змінивши знаки, отримаємо першу форму варіаційного рівняння Ху–Васідзу

$$\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}^* dV - \int_S (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{p} dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T (\mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \left[\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^* - \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \right] dV + \\ + \int_{S_2} \left[\mathbf{A}_S^T \delta \boldsymbol{\sigma}^* \right]^T (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}) dS - \int_{S_2} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* dS - \int_{S_1} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{f}_S^* dS, \quad (24.35)$$

яке за умови (24.17) еквівалентне системі співвідношень теорії пружності (24.30).

Далі, скористаємось тим, що завдяки (24.32) має місце наступна рівність:

$$(\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}^* + (\delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T (\mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta \left[(\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T (\mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) \right] + (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (24.36)$$

Крім того, будемо вважати, що зовнішні навантаження не залежать від напружено-деформованого стану, і тому не варіюються. Це, зокрема, означає, що

$$\{ \mathbf{A}_S^T \delta \boldsymbol{\sigma}^* \}^T (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}) - (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* = \delta \{ \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}) \}. \quad (24.37)$$

Нарешті врахуємо, що

$$(\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \delta \{ \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \}$$

і отримаємо замість (24.35) умову стаціонарності першої форми функціонала Ху–Васідзу:

$$\delta \Pi_1^{\text{XB}} = 0, \quad (24.38)$$

де

$$\Pi_1^{\text{XB}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T (\mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \\ - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}^* dV - \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_S^* dS - \int_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* dS.$$

Шукані вектори $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}$ не повинні задовольняти якісь додаткові умови.

Вектор $\boldsymbol{\sigma}^*$ пов'язаний із векторами \mathbf{u} і $\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}$ за допомогою (24.17).

Для того, щоб отримати другу форму функціонала Ху–Васідзу, помітимо, що

$$(\sigma_{узаг}^*)^T F_{\epsilon} \mathbf{u} = (\sigma^*)^T \mathbf{A} \mathbf{u} - (\sigma_{узаг}^*)^T F_{\epsilon 2} \mathbf{u}, \quad (24.39)$$

де

$$F_{\epsilon 2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (24.40)$$

Використовуючи (24.39), та застосовуючи інтегральну формулу (24.29), можемо записати

$$\int_V (\sigma_{узаг}^*)^T F_{\epsilon} \mathbf{u} dV = \int_S (\mathbf{u})^T (\mathbf{A}_S^T \sigma^*) dS - \int_V (\mathbf{u})^T (\mathbf{A} \sigma^*) dV - \int_V (\sigma_{узаг}^*)^T F_{\epsilon 2} \mathbf{u} dV. \quad (24.41)$$

За допомогою (24.41) перетворимо другий з інтегралів в правій частині (24.38). Після приведення подібних отримаємо умову стаціонарності другої форми функціонала Ху–Васідзу:

$$\delta \Pi_2^{XB} = 0, \quad (24.42)$$

де

$$\begin{aligned} \Pi_2^{XB}(\mathbf{u}, \epsilon, \sigma_{узаг}^*) &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \mathbf{D}_{\epsilon} \epsilon dV - \int_V (\sigma_{узаг}^*)^T \epsilon dV - \int_V (\sigma_{узаг}^*)^T F_{\epsilon 2} \mathbf{u} dV - \\ &- \int_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \sigma^* + \mathbf{p}^*) dV + \int_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S^T \sigma^* dS + \int_{S_1} \mathbf{u}^T \{ \mathbf{A}_S^T \sigma^* - \mathbf{f}_S^* \} dS; \end{aligned}$$

приведені напруження σ^* виражаються через узагальнені напруження $\sigma_{узаг}^*$ і переміщення \mathbf{u} за допомогою (24.17).

Якщо задача формулюється на множині можливих переміщень, тобто на множині переміщень, які задовольняють геометричні співвідношення всередині області і кінематичні граничні умови на частині границі S_2 , то умова стаціонарності функціонала (24.38) перетворюється на принцип стаціонарності функціонала Лагранжа:

$$\delta \Pi^{\Pi} = 0, \quad \delta \Pi^{\Pi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \mathbf{D}_{\epsilon} \epsilon dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}^* dV - \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_S^* dS, \quad (24.43)$$

попередні умови

$$\epsilon = F_{\epsilon} \mathbf{u}, \epsilon \in V, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \epsilon \in S_2.$$

Відповідне варіаційне рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{p}^* dV - \int_{S_1} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{f}_s^* = 0, \\ \delta \mathbf{u} = 0, \in S_2, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = [F_\varepsilon] \mathbf{u}, \in V. \end{cases} \quad (24.44)$$

Якщо взяти до уваги фізичні співвідношення (24.26), то (24.44) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^* dV - \int_V (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{p}^* dV - \int_{S_1} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{f}_s^* = 0, \\ \delta \mathbf{u} = 0, \in S_2, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = [F_\varepsilon] \mathbf{u}, \in V. \end{cases} \quad (24.45)$$

Вираз (24.45) є математичним записом принципу можливих переміщень.

Звернемось тепер до умови стаціонарності (24.42). Будемо розглядати задачу на множині статично можливих напружень, тобто на множині напружень, які задовольняють рівняння рівноваги $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{p}^* = 0$ всередині розрахункової області і граничні умови $\mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{f}_S^*$ на частині границі S_1 .

Виключимо за допомогою фізичних співвідношень (24.26) деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$ і отримаємо умову стаціонарності функціонала типу Кастільяно:

$$\delta \Pi^K = 0,$$

$$\Pi^K(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*) = -\frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^* dV - \int_V (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \mathbf{F}_{\varepsilon 2} \mathbf{u} dV + \int_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* dS. \quad (24.46)$$

Попередні умови

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{p}^* = 0, \in V, \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{f}_S^*, \in S_1, \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{U} \mathbf{D}_u \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*, \in V.$$

Бачимо, що на відміну від функціонала Лагранжа, який залежав тільки від переміщень \mathbf{u} , функціонал типу Кастільяно залежить як від напружень $\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*$, так і від переміщень \mathbf{u} . Неможливість виразити цей функціонал виключно через напруження помітно ускладнює його використання в задачах з геометричною нелінійністю.

Виконуючи варіювання функціонала (24.46), отримуємо варіаційне рівняння типу Кастільяно:

$$\begin{cases} -\int_V (\delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^* dV - \int_V (\delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \mathbf{F}_{\varepsilon 2} \mathbf{u} dV - \int_V (\boldsymbol{\sigma}_{\text{узар}}^*)^T \mathbf{F}_{\varepsilon 2} \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S^T \delta \boldsymbol{\sigma}^* dS = 0, \\ \mathbf{A}^T \delta \boldsymbol{\sigma} = 0, \in V, \\ \mathbf{A}_S^T \delta \boldsymbol{\sigma} = 0, \in S_1. \end{cases} \quad (24.47)$$

Крім того можемо помітити, що з (24.32) та (24.39) витікає наступне:

$$(\delta\sigma_{узаг}^*)^T \varepsilon + (\delta\sigma_{узаг}^*)^T F_{\varepsilon 2} \mathbf{u} + (\sigma_{узаг}^*)^T F_{\varepsilon 2} \delta \mathbf{u} = (\delta\sigma^*)^T \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (24.48)$$

За допомогою (24.48) та фізичних співвідношень варіаційному рівнянню (24.47) можна надати такого вигляду:

$$\begin{cases} - \int_V (\delta\sigma^*)^T \mathbf{A} \mathbf{u} dV + \int_{S_2} (\mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S^T \delta\sigma^* dS = 0, \\ \mathbf{A}^T \delta\sigma = 0, \in V, \\ \mathbf{A}_S^T \delta\sigma = 0, \in S_1. \end{cases} \quad (24.49)$$

Рівняння (24.49) є математичним записом принципу можливих змін напруженого стану.

24.3. Нелінійні співвідношення для одновимірної задачі

Умови стаціонарності функціоналів (24.38), (24.42), (24.43), (24.46) та відповідні варіаційні рівняння дозволяють ефективно розв'язувати задачі тривимірної теорії пружності в геометрично нелінійній постановці. З іншого боку, за допомогою цих рівнянь та відповідних спрощуючих гіпотез можна отримати математичний апарат для розв'язання задач меншої вимірності.

Розглянемо детальніше перехід до співвідношень задачі про згин тонкої балки. Спрямуємо вісь x в напрямку осі балки (рис. 24.4). Зробимо наступні припущення.

1. Компонентами напружень $\sigma_{yy}^*, \sigma_{zz}^*, \sigma_{zy}^*$ можна знехтувати.

2. Справедливою є гіпотеза Бернуллі про те, що поперечні перерізи, перпендикулярні до осі балки до деформації, лишаються плоскими і перпендикулярними до зігнутої осі і не деформуються в своїй площині.

3. Хоча прогини балки не є малими порівняно з її висотою, вони малі порівняно із поздовжнім розміром балки.

Наслідком цих гіпотез є те, що всі компоненти вектора деформацій (24.2) окрім ε_{xx} стають рівними нулю. Для компонент вектора переміщень виконуються співвідношення

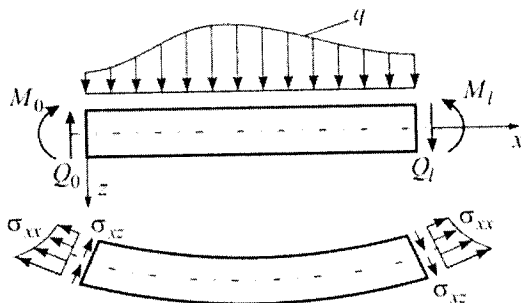


Рис. 24.4

$$u(x, y, z) = u(x, 0, 0) - z \frac{\partial w(x, 0, 0)}{\partial x}; \quad v(x, y, z) = 0; \quad w(x, y, z) = w(x, 0, 0). \quad (24.50)$$

Крім того можна стверджувати, що величини $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ є величинами одного порядку, причому обидві вони набагато менші за одиницю. Такі припущення

24. РІВНЯННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

відповідають малим деформаціям і скінченним кутам повороту. Саме за таких умов отримуються розрахункові співвідношення і на їх основі розв'язуються задачі в п. 24.4. Єдине виключення становить розглянута в п. 24.4.5 задача про деформування ферми Мізеса, де зроблено припущення про можливість скінченних переміщень. Надалі в задачі про згин балки будемо позначати

$$u(x) = u(x, 0, 0); \quad w(x) = w(x, 0, 0).$$

Тоді перша з формул, які входять до складу (24.1), набуває вигляду

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (24.51)$$

Будемо застосовувати принцип можливих переміщень (24.45). Оскільки поперечний переріз не деформується, то можемо опустити позначку “*” при σ_{xx} .

Тоді $(\delta\varepsilon)^T \sigma_{узаг}^* = \delta\varepsilon_{xx} \sigma_{xx}$. З урахуванням (24.51) та позначень, наведених на рисунку, можемо записати (24.45) у вигляді

$$\iiint_V \sigma_{xx} (\delta u' + w' \delta w' - z \delta w'') dV - \int_0^l q \delta w dx + \bar{Q}_0 \delta w(0) - \bar{Q}_l \delta w(l) - \bar{M}_0 \delta w'(0) + \bar{M}_l \delta w'(l) = 0. \quad (24.52)$$

Риска над символом означає, що ця величина є заданою.

Інтеграли по тривимірній області, які входять до складу (24.52), можуть бути перетворені наступним чином:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_{xx} (\delta u' + w' \delta w') dV &= \int_0^l [(\delta u' + w' \delta w') \iint_F \sigma_{xx} dF] dx; \\ \iiint_V \sigma_{xx} z \delta w'' dV &= \int_0^l [\delta w'' \iint_F \sigma_{xx} z dF] dx, \end{aligned}$$

де dF – елемент площі перерізу балки.

Інтегральними характеристиками нормальних напружень, які діють в перерізі балки, є поздовжня сила N і згинальний момент M :

$$N = \iint_F \sigma_{xx} dF; \quad M = \iint_F \sigma_{xx} z dF. \quad (24.53)$$

Тепер можемо записати

$$\iiint_V \sigma_{xx} (\delta u' + w' \delta w' - z \delta w'') dV = \int_0^l N \delta \varepsilon dx + \int_0^l M \delta \kappa dx,$$

де

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2} (w')^2, \quad \kappa = -w''. \quad (24.54)$$

Нарешті, принцип можливих переміщень в задачі про згин балки набуває вигляду

$$\int_0^l N \delta \varepsilon dx + \int_0^l M \delta \kappa dx - \int_0^l q \delta w dx + Q_0 \delta w(0) - Q_l \delta w(l) - M_0 \delta w'(0) + M_l \delta w'(l) = 0. \quad (24.55)$$

Як буде показано нижче, з варіаційного рівняння (24.55) можна отримати рівняння рівноваги та силові граничні умови, тобто це рівняння містить всю необхідну для розв'язання задачі інформацію.

Звернемось тепер до принципу змін напруженого стану (24.49). З урахуванням введених гіпотез можемо записати

$$(\delta\sigma^*)^T \mathbf{A} \mathbf{u} = \delta\sigma_{x\xi}^* \frac{\partial u}{\partial x} + \delta\sigma_{x\zeta}^* \frac{\partial w}{\partial x} = \delta\sigma_{xx} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \delta \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Тоді з урахуванням прийнятих позначень та співвідношень (24.53), (24.54) варіаційне рівняння (24.49) набуває вигляду

$$-\int_0^l \varepsilon \delta N dx - \int_0^l \kappa \delta M dx - \frac{1}{2} \int_0^l \delta \left[N \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \bar{w}_0 \delta Q(0) + \bar{w}_l \delta Q(l) + \bar{w}'_0 \delta M(0) - \bar{w}'_l \delta M(l) = 0. \quad (24.56)$$

Нижче буде показано, що з рівняння (24.56) випливають умови сумісності деформацій, а оскільки зусилля N і M є статично можливими, то розв'язок варіаційного рівняння (24.56) є розв'язком задачі про згин балки.

24.4. Застосування варіаційних принципів в задачах нелінійного деформування балки

Нехай до тонкої балки постійної жорсткості прикладене поперечне $q(x)$ та поздовжнє $q_x(x)$ навантаження. На рис. 24.5 показані додатні напрями осей координат та граничних умов, причому кінці балки розташовані в точках із координатами $x = a$; $x = b$.

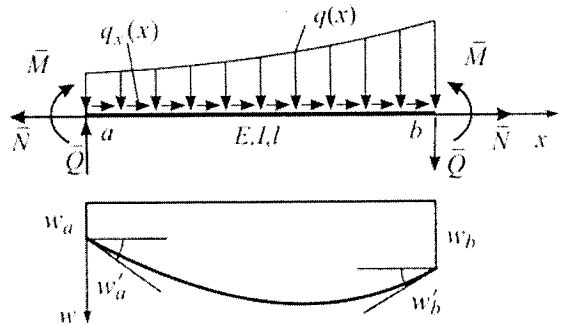


Рис. 24.5

Математично граничні умови можуть бути виражені наступним чином:

$$N, M, Nw' + M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N}, \bar{M}, \bar{Q} \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad (24.57)$$

$$u, w, w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u}, \bar{w}, \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}. \quad (24.58)$$

Тут a_1, b_1 – точки, в яких задані компоненти зусиль; a_2, b_2 – точки, в яких задані компоненти переміщень. Задані величини позначені рисками.

Робота зовнішніх сил на деяких переміщеннях дається виразом

$$A_{3C} = \int_a^b q w dx + \int_a^b q_x u dx + \bar{Q} w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (N w' + M') \bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2} - M \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1} + N \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}. \quad (24.59)$$

В свою чергу вираз для роботи внутрішніх сил має вигляд:

$$A_{BC} = \int_a^b M \kappa dx + \int_a^b N \varepsilon dx, \quad (24.60)$$

де використані позначення (24.54), тобто

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2; \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (24.61)$$

Вважається крім того, що залежність між зусиллями та деформаціями є лінійною

$$M = EI\kappa; \quad N = EF\varepsilon. \quad (24.62)$$

Згідно загальному варіаційному принципу варіації робіт зовнішніх і внутрішніх сил дорівнюють одна одній:

$$\delta A_{3C} = \delta A_{BC}. \quad (24.63)$$

Нижче показано як за умови, що варіюються переміщення u і w або зусилля M, N і прогини w , можна із загального варіаційного принципу отримати варіаційні рівняння відповідно Лагранжа або типу Кастільяно.

24.4.1. Функціонал Лагранжа

У випадку, коли варіюються u і w за попередніх умов (24.58), (24.61), (24.62), варіація роботи зовнішніх сил виражається таким чином:

$$\delta_{w,u} A_{3C} = \int_a^b q \delta w dx + \int_a^b q_x \delta u dx + \bar{Q} \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{N} \delta u \Big|_{a_1}^{b_1}, \quad (24.64)$$

а варіація роботи внутрішніх сил – наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta_{w,u} A_{BC} &= \int_a^b M \delta \kappa dx + \int_a^b N \delta \varepsilon dx = \int_a^b EI \kappa \delta \kappa dx + \int_a^b EF \varepsilon \delta \varepsilon dx = \\ &= \int_a^b EI w'' \delta w'' dx + \int_a^b EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] \delta \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (24.65)$$

Прирівнюючи (24.64) і (24.65), отримуємо варіаційне рівняння (варіаційний принцип Лагранжа):

$$\int_a^b EI \kappa \delta \kappa dx + \int_a^b EF \varepsilon \delta \varepsilon dx - \int_a^b q \delta w dx - \int_a^b q_x \delta u dx - \bar{Q} \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{N} \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0. \quad (24.66)$$

Якщо винести за дужки операцію варіювання, отримаємо умову стаціонарності функціонала Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^I &= 0, \\ \Pi^I(u, w) &= \frac{1}{2} \int_a^b EI (w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]^2 dx - \int_a^b q w dx - \int_a^b q_x u dx - \\ &\quad - \bar{Q} w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{N} u \Big|_{a_1}^{b_1}. \end{aligned} \quad (24.67)$$

Додаткові умови $u = \bar{u}; \quad w = \bar{w}, \quad w' = \bar{w}'$.

Для того, щоб з'ясувати вигляд рівнянь Ейлера та природних граничних умов, які відповідають задачі (24.67), виконаємо перетворення інтегралів, що входять до складу (24.66) за допомогою інтегрування частинами:

$$\int_a^b M \delta w'' dx = M \delta w' \Big|_a^b - M' \delta w \Big|_a^b + \int_a^b M'' \delta w dx; \quad (24.68)$$

$$\int_a^b N \delta \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] dx = N \delta u \Big|_a^b - \int_a^b N' \delta u dx + (Nw') \delta w \Big|_a^b - \int_a^b (Nw')' \delta w dx. \quad (24.69)$$

Підставимо (24.68) і (24.69) у (24.66) і отримаємо варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d}{dx} (Nw') + q \right] \delta w dx + \int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx + (\bar{Q} - M' - Nw') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} + (\bar{N} - N) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0. \quad (24.70)$$

Довільність варіацій дозволяє стверджувати, що

$$M'' + (Nw')' + q = 0; \quad N' + q_x = 0 \quad (\text{рівняння рівноваги});$$

$$(\bar{Q} - M' - Nw') \Big|_{a_1}^{b_1} = 0; \quad (M - \bar{M}) \Big|_{a_1}^{b_1} = 0; \quad (\bar{N} - N) \Big|_{a_1}^{b_1} = 0. \quad (24.71)$$

Отже, рівняннями Ейлера даної задачі є рівняння рівноваги (24.71), а природними граничними умовами є силові граничні умови:

$$M = \bar{M}; \quad M' = \bar{Q} - Nw'; \quad N = \bar{N}.$$

Попередні умови – це рівняння сумісності деформацій (24.61), фізичні співвідношення (24.62) та кінематичні граничні умови (24.58).

Зазначимо, що розглядаються виключно плоскі стержневі системи. Якщо рівновага елемента плоского стержня описується двома диференціальними рівняннями відносно згинального моменту M і поздовжньої сили N для просторового стержня кількість таких рівнянь зростає до чотирьох, (до числа невідомих додається крутний момент і ще один згинальний).

У випадку геометричної нелінійності всі внутрішні зусилля виявляються пов'язаними рівняннями рівноваги не тільки між собою, але також і з компонентами деформованого стану. По суті такі рівняння подібні до виразів (24.71), але є набагато більш громіздкими. Так само ускладнюються і геометричні співвідношення. Обидві групи формул виводяться і детально обговорюються в монографії [142].

24.4.2. Функціонал типу Кастільяно

Складнішою є ситуація, коли варіюються внутрішні зусилля M і N . Нелінійний зв'язок між компонентою деформації ϵ і переміщеннями u ; w , і, як наслідок, нелінійний зв'язок між зусиллям N та u ; w , виключає можливість виразити доповнювальну енергію деформації тільки через зусилля. Водночас, такий складний зв'язок не дозволяє варіювати тільки зусилля N і M , лишаючи їх при цьому статично можливими.

24. РІВНЯННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Як було показано вище (вираз (24.56)), принцип можливих змін напруженого стану для балки, яка має скінченні прогини, може бути записаний наступним чином:

$$\int_a^b \kappa \delta M dx + \int_a^b \varepsilon \delta N dx + \frac{1}{2} \int_a^b \delta \left[N \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \bar{w} \delta (M' + Nw') \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{u} \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \quad (24.72)$$

Якщо до попередніх умов поряд з рівняннями рівноваги (24.71) і механічними граничними умовами (24.57) віднести фізичні співвідношення (24.62), то зможемо винести оператор варіювання за дужки і отримати умову стаціонарності функціонала типу Кастільяно:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^K &= 0, \\ \Pi^K(M, N, w) &= -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx - \frac{1}{2} \int_a^b N (w')^2 dx + \\ &+ \bar{w} (M' + Nw') \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{u} N \Big|_{a_2}^{b_2}, \end{aligned} \quad (24.73)$$

Попередні умови:

$$\begin{aligned} M'' + (Nw')' + q &= 0; \quad N' + q_x = 0, \quad \in (a, b) \\ M &= \bar{M}; \quad N = \bar{N}; \quad Nw' + M' = \bar{Q}. \end{aligned}$$

З'ясуємо, що собою становлять рівняння Ейлера та природні граничні умови даної задачі. Для цього необхідно поєднати варіаційне рівняння та попередні умови. Зробимо потрібні перетворення двома способами.

Перший спосіб базується на умовному варіюванні діючого навантаження. Варіаційне рівняння (24.62), відповідно, набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa \delta M dx + \int_a^b \varepsilon \delta N dx + \frac{1}{2} \int_a^b \delta \left[N (w')^2 \right] dx - \int_a^b w \delta q dx - \int_a^b u \delta q_x dx - \\ - \bar{w} \delta (M' + Nw') \Big|_{a_2}^{b_2} + \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{u} \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \end{aligned} \quad (24.74)$$

Виходячи з (24.71), можемо записати:

$$\delta q = -\delta M'' - \delta (N'w' + Nw''); \quad \delta q_x = -\delta N',$$

або

$$\int_a^b \delta q w dx = - \int_a^b w \delta M'' dx - \int_a^b w \delta (N'w' + Nw'') dx, \quad \int_a^b \delta q_x u dx = - \int_a^b u \delta N' dx. \quad (24.75)$$

За допомогою інтегрування частинами інтегральним рівностям (24.19) можна надати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \int_a^b w \delta q dx &= -w \delta M' \Big|_a^b + w' \delta M \Big|_a^b - \int_a^b w'' \delta M dx - w w' \delta N \Big|_a^b + \int_a^b (w')^2 \delta N dx - w N \delta w' \Big|_a^b + \int_a^b w' N \delta w dx, \\ \int_a^b u \delta q_x dx &= -u \delta N \Big|_a^b + \int_a^b u' \delta N dx. \end{aligned} \quad (24.76)$$

Якщо підставити тепер (24.76) у (24.74), то отримаємо після приведення подібних наступне варіаційне рівняння:

$$\int_a^b (\kappa + w'') \delta M dx + \int_a^b \left[\varepsilon - u' - \frac{1}{2} (w')^2 \right] \delta N dx - (\bar{w} - w) \delta (M' + Nw') \Big|_{a_2}^{b_2} + (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{u} - u) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \quad (24.77)$$

За умови довільності варіацій з цього рівняння витікають наступні рівності:

$$\kappa + w'' = 0; \quad \varepsilon - u' - \frac{1}{2} (w')^2 = 0, \\ (\bar{w} - w) \Big|_{a_2}^{b_2} = 0; \quad (\bar{w}' - w') \Big|_{a_2}^{b_2} = 0; \quad (\bar{u} - u) \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Таким чином, рівняння Ейлера даної задачі – це співвідношення між переміщеннями і деформаціями, тобто рівняння сумісності деформацій, а кінематичні граничні умови є природними.

Нагадаємо, що попередніми умовами вважались рівняння рівноваги (24.71), фізичні співвідношення (24.62) та силові граничні умови (24.59).

Виконаємо тепер перетворення функціонала (24.73) іншим способом – за допомогою методу невизначених множників Лагранжа. Для спрощення будемо вважати задані кінематичні умови однорідними. Введемо на інтервалі (a, b) множники Лагранжа λ_1, λ_2 . Оскільки попередніми умовами задачі є рівняння рівноваги (24.71), то справедливими є наступні інтегральні рівності:

$$\int_a^b \lambda_1 [M'' + (Nw')' + q] dx = 0, \quad \int_a^b \lambda_2 (N' + q_x) dx = 0.$$

Додамо рівні нулю вирази до (24.73) і отримаємо за умови однорідних граничних умов функціонал

$$\Pi(M, N, w, \lambda_1, \lambda_2) = \int_a^b F(M, N, w, \lambda_1, \lambda_2) dx, \quad (24.78)$$

де

$$F(M, N, w, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - \frac{1}{2} N (w')^2 + \lambda_1 [M'' + (Nw')' + q] + \lambda_2 (N' + q_x). \quad (24.79)$$

До складу (24.79) входять друга похідна моменту та перша похідна N , тому умовами стаціонарності функціонала (24.78) є, зокрема, такі співвідношення (рівняння Ейлера):

$$F_M - \frac{dF_{M'}}{dx} + \frac{d^2 F_{M''}}{dx^2} = 0; \quad F_N - \frac{dF_{N'}}{dx} = 0. \quad (24.80)$$

Тут позначено:

$$F_M = \frac{\partial F}{\partial M}; \quad F_{M'} = \frac{\partial F}{\partial M'}; \quad F_{M''} = \frac{\partial F}{\partial M''}; \quad F_N = \frac{\partial F}{\partial N}; \quad F_{N'} = \frac{\partial F}{\partial N'}.$$

Обчислимо частинні похідні, які входять до складу (24.24):

$$F_M = -\frac{M}{EI}; \quad F_{M'} = 0; \quad F_{M''} = \lambda_1;$$

$$F_N = -\frac{N}{EF} - \frac{1}{2}(w')^2 + \lambda_1 w''; \quad F_{N'} = \lambda_1 w' + \lambda_2. \quad (24.81)$$

Підставимо (24.81) до (24.80) і отримаємо:

$$-\frac{M}{EI} + \lambda_1'' = 0; \quad -\frac{N}{EF} - \frac{1}{2}(w')^2 - \lambda_1' w' - \lambda_2' = 0. \quad (24.82)$$

Бачимо, що величина λ_1 має таку саму розмірність, як w , а оскільки вона є цілком довільною, то ніщо не заважає записати

$$\lambda_1 = -w.$$

Так само розмірність і довільність λ_2 дозволяє вважати, що

$$\lambda_2 = -u.$$

Тоді рівняння Ейлера варіаційної задачі набувають вигляду:

$$\frac{M}{EI} + w'' = 0; \quad -\frac{N}{EF} + u' + \frac{1}{2}(w')^2 = 0,$$

або, з урахуванням фізичних співвідношень (24.62):

$$\kappa = -w''; \quad \varepsilon = u' + \frac{1}{2}(w')^2.$$

Таким чином ми ще раз пересвідчилися в тому, що стаціонарність функціонала типу Кастільяно забезпечує сумісність деформацій. Зрозуміло, що при цьому статично можливі зусилля N і M стають дійсними.

Підсумовуючи наведені вище міркування, розглянемо загальне варіаційне рівняння, яке поєднує співвідношення (24.57), (24.58), (24.61), (24.62), (24.71), що в сукупності утворюють постановку крайової задачі і тому є її еквівалентом:

$$\int_a^b \left[M'' + (Nw')' + q \right] \delta w dx + \int_a^b (N' + q_x) \delta u dx + (-M' - Nw' + \bar{Q}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} +$$

$$+(M - \bar{M}) \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} + (-N + \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} + w'' \right) \delta M dx + \int_a^b \left[\frac{N}{EF} - u' - \frac{1}{2}(w')^2 \right] \delta N dx +$$

$$+(w - \bar{w}) \delta (M' + Nw') \Big|_{a_2}^{b_2} + (-w' + \bar{w}') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0. \quad (24.83)$$

Варіаційне рівняння (24.83) можна отримати, якщо скласти рівняння (24.70), яке є еквівалентом варіаційного принципу Лагранжа (24.66), та рівняння (24.77), отримане за допомогою еквівалентних перетворень з принципу можливих змін напруженого стану (24.72). При цьому попередні умови однієї варіаційної задачі є рівняннями Ейлера і природними граничними умовами іншої і навпаки.

Якщо виконати всі дії в зворотній послідовності, тобто розділити (24.83) на дві частини, за допомогою яких сформувані варіаційні рівняння (24.70) і (24.77) та відповідні попередні умови, то після зворотних перетворень отримаємо дві варіаційні задачі про умови стаціонарності функціоналів Лагранжа та типу Кастільяно.

Співставлення варіаційних задач Лагранжа та типу Кастильяно зручно виконати в табличній формі.

Умови стаціонарності	
<p style="text-align: center;">$\delta\Pi^I = 0$</p> <p>функціонала Лагранжа</p> $\Pi^I(w, u) = \frac{1}{2} \int_a^b EI (w'')^2 dx +$ $+ \frac{1}{2} \int_a^b EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]^2 dx - \int_a^b q w dx -$ $- \int_a^b q_x u dx - \bar{Q} w \Big _{a_1}^{b_1} + \bar{M} w' \Big _{a_1}^{b_1} - \bar{N} u \Big _{a_1}^{b_1}.$	<p style="text-align: center;">$\delta\Pi^K = 0$</p> <p>функціонала типу Кастильяно</p> $\Pi^K(M, N, w) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx -$ $- \frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx - \frac{1}{2} \int_a^b N (w')^2 dx +$ $+ \bar{w} (M' + Nw') \Big _{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big _{a_2}^{b_2} + \bar{u} N \Big _{a_2}^{b_2}.$

Додаткові умови

$M = EI\kappa; \quad \kappa = -w'';$ $N = EF\varepsilon; \quad \varepsilon = u' + \frac{1}{2} (w')^2;$ $u \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big _{a_2}^{b_2}; \quad w \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{w} \Big _{a_2}^{b_2}; \quad w' \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{w}' \Big _{a_2}^{b_2}.$	$M'' + (Nw')' + q = 0; \quad N' + q_x = 0;$ $M \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{M} \Big _{a_1}^{b_1}; \quad M' \Big _{a_1}^{b_1} = (\bar{Q} - Nw') \Big _{a_1}^{b_1};$ $N \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big _{a_1}^{b_1}.$
---	---

Рівняння Ейлера

$M' + (Nw')' + q = 0; \quad N' + q_x = 0.$	$\frac{M}{EI} + w' = 0; \quad \frac{N}{EF} = u' + \frac{1}{2} (w')^2.$
--	--

Природні граничні умови

$M \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{M} \Big _{a_1}^{b_1}; \quad M' \Big _{a_1}^{b_1} = (\bar{Q} - Nw') \Big _{a_1}^{b_1};$ $N \Big _{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big _{a_1}^{b_1}.$	$u \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big _{a_2}^{b_2}; \quad w \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{w} \Big _{a_2}^{b_2}; \quad w' \Big _{a_2}^{b_2} = \bar{w}' \Big _{a_2}^{b_2}.$
---	--

24.4.3. Приклади розв'язання геометрично нелінійних задач для балок за допомогою варіаційних підходів

Приклад 24.1. До балки, яка спирається на шарнірно-нерухомі опори, прикладене розподілене за синусоїдальним законом навантаження (рис. 24.6).

Запишемо для розв'язуваної системи варіаційне рівняння Лагранжа

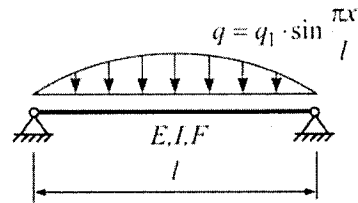


Рис. 24.6

$$\delta\Pi^I = 0, \quad \Pi^I(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]^2 dx - \int_0^l q w dx. \quad (24.84)$$

Можливі переміщення, які задовольняють кінематичні граничні умови, можуть бути обрані у вигляді:

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad u = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad (24.85)$$

Знайдемо похідні:

$$u' = \frac{2\pi}{l} a_2 \cos \frac{2\pi x}{l}; \quad w' = \frac{\pi}{l} a_1 \cos \frac{\pi x}{l}; \quad w'' = -\frac{\pi^2}{l^2} a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

і підставимо до (24.84). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{II}}(a_1, a_2) = & \frac{1}{2} \int_0^l EI \frac{\pi^4}{l^4} a_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\frac{2\pi}{l} a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} a_1^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right]^2 dx - \int_0^l q_1 a_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (24.86)$$

Обчислимо інтеграли, які входять до складу (24.86):

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{4}; \quad \int_0^l \cos^4 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{3l}{8}. \quad (24.87)$$

Тепер функціонал (24.86) набуває вигляду:

$$\Pi^{\text{II}}(a_1, a_2) = \frac{EI\pi^4}{4l^3} a_1^2 + \frac{EF\pi^2}{l} a_2^2 + \frac{EF\pi^3}{4l^2} a_2 a_1^2 + \frac{3EF\pi^4}{64l^3} a_1^4 - q_1 \frac{l}{2} a_1. \quad (24.88)$$

Умовами стаціонарності $\Pi^{\text{II}}(a_1, a_2)$ є рівності $\frac{\partial \Pi^{\text{II}}}{\partial a_1} = 0$ і $\frac{\partial \Pi^{\text{II}}}{\partial a_2} = 0$, які після диференціювання дають систему рівнянь відповідно a_1, a_2 :

$$\begin{cases} \frac{EI\pi^4}{2l^3} a_1 + \frac{EF\pi^3}{2l^2} a_1 a_2 + \frac{3EF\pi^4}{16l^3} a_1^3 - \frac{q_1 l}{2} = 0 \\ \frac{2EF\pi^2}{l} a_2 + \frac{EF\pi^3}{4l^2} a_1^2 = 0 \end{cases} \quad (24.89)$$

З другого рівняння отримаємо вираз a_2 через a_1 :

$$a_2 = -\frac{\pi}{8l} a_1^2,$$

після чого з першого рівняння маємо

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} a_1 + \frac{EF\pi^4}{8l^3} a_1^3 - \frac{q_1 l}{2} = 0,$$

або

$$a_1 + \frac{F}{4I} a_1^3 = \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI}. \quad (24.90)$$

Параметр a_1 (стріла прогину балки) повністю визначає розв'язок, оскільки

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad u = -\frac{\pi}{8l} a_1^2 \sin \frac{2\pi x}{l}; \quad M = -EIw'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} a_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (24.91)$$

Крім того значення поздовжньої сили $N = \text{const}$ не важко знайти, якщо скористатись умовою відсутності зближення опор:

$$\frac{Nl}{EF} = \int_0^l \varepsilon dx = \int_0^l u' dx + \frac{1}{2} \int_0^l ((w')^2) dx = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} a_1^2 \cdot \frac{l}{2},$$

звідки

$$N = \frac{EF\pi^2 a_1^2}{4l^2}. \quad (24.92)$$

Дослідимо детальніше залежність стріли прогину a_1 від параметра навантаження q_1 на прикладі сталевोї ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$) балки довжиною 1 м з квадратним поперечним перерізом 1х1 см. З урахуванням цих даних рівняння (24.90) перетворюється на

$$a_1 + 3a_1^3 = 6,16q_1, \quad (24.93)$$

або

$$q_1 = 0,16233a_1 + 0,48701a_1^3. \quad (24.94)$$

Обчислення за формулами (24.93), (24.94) проводились в табличній формі:

a_1	a_1^3	$3a_1^3$	$6,16q_1$	$q_1^{\text{л}}$	$q_1^{\text{н}}$
0,25	$15,625 \cdot 10^{-3}$	0,046875	0,296875	0,04819	0,04058
0,5	0,125	0,375	0,875	0,14204	0,08117
0,75	0,4118	1,2656	2,0156	0,32720	0,12175
1,0	1	3	4	0,6494	0,16233

Графік залежності між параметрами a_1 і q_1 наведений на рис. 24.7.

Як бачимо, навіть при стрілі прогину, рівній чверті висоти перерізу, розходження між значеннями параметра навантаження q_1 в лінійному і нелінійному розрахунках сягає 20%. Для досягнення прогину, що дорівнює висоті перерізу, навантаження за лінійним розрахунком має бути в чотири рази менше ніж за нелінійним, тобто неврахування нелінійного характеру деформування балки призводить до суттєво завищених значень параметрів напружено-деформованого стану.

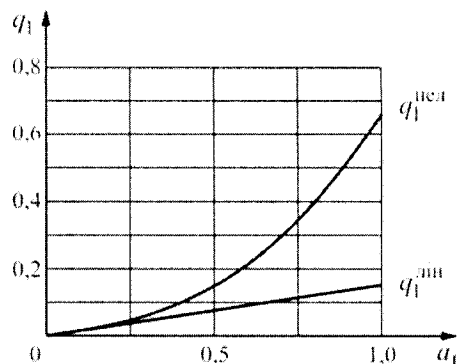


Рис. 24.7

Для перевірки умов міцності обчислимо максимальні значення напружень в середньому перерізі балки:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \cdot a_1 + \frac{E\pi^2}{4l^2} \cdot a_1^2,$$

де h – висота перерізу балки.

Підставляючи в наведену форму розрахункові дані, пересвідчуємось, що навіть при $a_1 = 1 \text{ см}$ нормальні напруження не перевищують допустимих значень:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 9,87 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)}{10^4} = 1480 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 2100 \text{ кгс/см}^2.$$

Насамкінець зазначимо, що знайдені параметри напружено-деформованого стану, які визначаються співвідношеннями (24.90)–(24.92), відповідають точному розв'язку задачі, в чому легко пересвідчитись за допомогою прямих підстановок.

Розглянемо ту саму задачу за допомогою варіаційного рівняння типу Кастильано:

$$\delta \Pi^K = 0, \quad \Pi^K(M, N, w) = - \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx - \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx - \frac{1}{2} \int_0^l N(w')^2 dx. \quad (24.95)$$

Статично можливу систему прогинів і внутрішніх зусиль отримаємо, якщо покладемо

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad M = M_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad N = \text{const} \quad (24.96)$$

і, крім того, забезпечимо виконання рівняння рівноваги

$$M'' + (Nw)' + q = 0. \quad (24.97)$$

Для цього знайдемо похідні:

$$M'' = -M_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad w' = a_1 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad w'' = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

після чого рівняння рівноваги (24.97) набуває такого вигляду

$$-M_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - Na_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} + q_1 \sin \frac{\pi x}{l} = 0,$$

звідки

$$M_1 = -Na_1 + q_1 \frac{l^2}{\pi^2}. \quad (24.98)$$

Таким чином, попередні умови

$$M'' + (Nw)' + q = 0; \quad N' = 0; \quad M|_{x=0} = M|_{x=l} = 0$$

виявляються виконаними.

Функціонал (24.95) тепер може бути записаний наступним чином:

$$\Pi^K(N, a_1) = - \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(-Na_1 + \frac{q_1 l^2}{\pi^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx - \frac{N^2 l}{2EF} - \frac{N}{2} \cdot \int_0^l \frac{a_1^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx,$$

або після інтегрування

$$\Pi^K(N, a_1) = - \frac{l}{4EI} \left(-Na_1 + \frac{q_1 l^2}{\pi^2} \right)^2 - \frac{N^2 l}{2EF} - \frac{N}{4} \frac{a_1^2 \pi^2}{l}. \quad (24.99)$$

Умовами стаціонарності функціонала є рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial \Pi^K}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi^K}{\partial N} = 0.$$

Диференціюючи (24.99), отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно a_1 і N :

$$\begin{cases} \frac{l}{2EI}(-Na_1 + \frac{q_1 l^2}{\pi^2})N - \frac{\pi^2}{2l}Na_1 = 0 \\ \frac{l}{2EI}(-Na_1 + \frac{q_1 l^2}{\pi^2})a_1 - \frac{Nl}{EF} - \frac{\pi^2}{4l}a_1^2 = 0 \end{cases} \quad (24.100)$$

Якщо помножити перше рівняння системи на $(-a_1)$, а друге – на N , і скласти їх, то отримаємо безпосередній зв'язок між стрілою прогину та поздовжньою силою:

$$\frac{\pi^2}{2l}Na_1^2 - \frac{Nl}{EF} - \frac{\pi^2}{4l}Na_1^2 = 0,$$

або

$$N = \frac{\pi^2}{4l^2}EFa_1^2.$$

Отже, маємо вираз, який повністю співпадає з формулою (24.92), отриманою вище, виходячи з кінематичних граничних умов. Підставимо цей вираз в перше з рівнянь системи і знайдемо:

$$-\frac{\pi^4 (EF)^2}{32EI^3}a_1^5 + \frac{q_1 l F}{8I}a_1^2 - \frac{\pi^4}{8l^3}EFa_1^3 = 0,$$

або

$$a_1 + \frac{Fa_1^3}{4I} = \frac{q_1 l^4}{\pi^4 EI}.$$

Як бачимо, залежність між стрілою прогину та параметром навантаження повністю збігається з рівнянням (24.90), отриманим при розрахунку, що базувався на варіаційному принципі Лагранжа.

Зрозуміло, що збігатимуться і інші параметри напружено-деформованого стану.

Приклад 24.2. Нехай тепер до балки з шарнірно-нерухомими опорами прикладене рівномірно розподілене навантаження (рис. 24.8). Розв'язок будемо шукати за допомогою варіаційного рівняння Лагранжа (24.84), а можливим переміщенням w і u знову надамо вигляду (24.85):

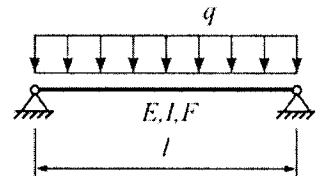


Рис. 24.8

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad u = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Якщо навантаження розподілене за синусоїдальним законом, то ці вирази відповідають точному розв'язку. При рівномірно розподіленому навантаженні

можливе переміщення w , задане виразом (24.85), є першим членом наближення $w^{\text{точне}}$ тригонометричним рядом.

Функціонал Лагранжа для розглядуваної задачі відрізняється від (24.88) тільки останнім доданком, який тепер дорівнює:

$$-\int_0^l q w dx = -q \int_0^l a_1 \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{2ql}{\pi} a_1. \quad (24.101)$$

Отже, маємо функціонал:

$$\Pi^{\text{I}}(a_1, a_2) = \frac{EI\pi^4}{4l^3} a_1^2 + \frac{EF\pi^2}{l} a_2^2 + \frac{EF\pi^3}{4l^2} a_1^2 a_2 + \frac{3EF\pi^4}{64l^3} a_1^4 - \frac{2ql}{\pi} a_1. \quad (24.102)$$

Повторюючи дії, виконані при розв'язанні попередньої задачі, знайдемо наступну залежність:

$$a_1 + \frac{F}{4I} a_1^3 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI},$$

або

$$a_1 + \frac{F}{4I} a_1^3 = 1,004 f, \quad (24.103)$$

де $f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$ – відоме значення стріли прогину шарнірно спертої балки.

Чисельні розрахунки проведемо для сталеві балки двотаврового перерізу (№10), яка має наступні характеристики: $h=10\text{ см}$, $I=198\text{ см}^4$, $l=256\text{ см}$, $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$.

З урахуванням наведених значень рівняння (24.103) набуде такого вигляду:

$$a_1 + \frac{1}{66} a_1^3 = 0,13q, \quad (24.104)$$

або

$$q = 7,69 a_1 + 0,116 a_1^3 = q^{\text{лін}} + q^{\text{нел}}. \quad (24.105)$$

Обчислення проводимо у табличній формі (табл. 24.1).

Бачимо, як зі збільшенням прогину зростає внесок, який дає доданок, пов'язаний з нелінійним характером деформування.

Таблиця 24.1

$a_1, \text{ см}$	$q^{\text{лін}}, \text{ кгс/см}$	Δq	$q^{\text{нел}}, \text{ кгс/см}$
1	7,69	0,116	7,806
2	15,38	0,928	16,308
3	23,07	3,132	26,202
4	30,76	7,424	38,184
5	38,45	14,50	52,95
6	46,14	25,056	71,196

24.4.4. Приклади. Потенціальна енергія пружної деформації і доповнювальна потенціальна енергія для нелінійних задач. Теорема Лагранжа і Кастільяно

Серед задач про великі прогини балок окремо стоять задачі про згин за відсутності поздовжніх сил. Розглянемо задачу про чистий згин консольного стержня (рис. 24.9,а).

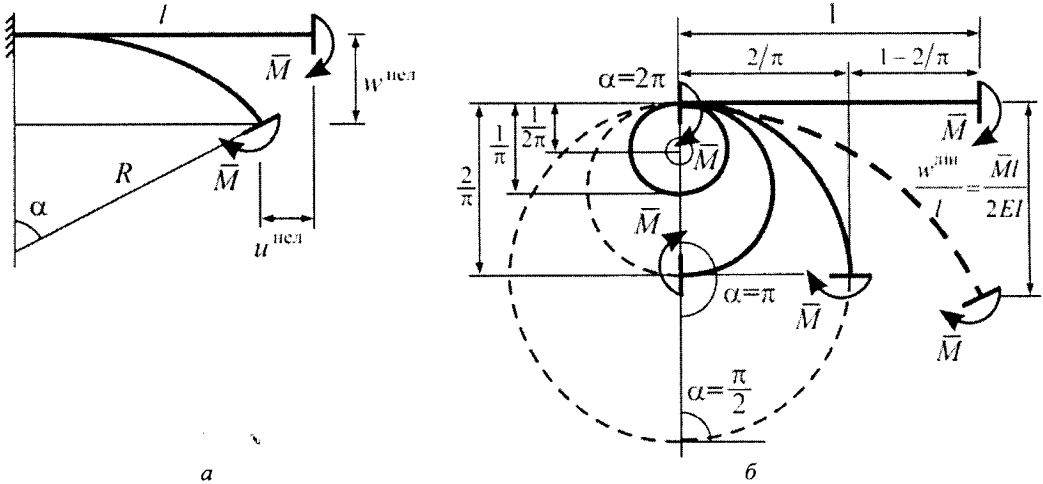


Рис. 24.9

Незалежно від величини прогинів рівняння рівноваги має вигляд $M = \bar{M}$. Будемо вважати, що матеріал поводиться лінійно (фізичне співвідношення $M = EI\kappa$). Відмінність між лінійними та нелінійними підходами містять геометричні рівняння. На рис. 24.9,б показана деформація тонкого стержня за нелінійною (суцільні лінії) та лінійною (пунктирні лінії) теоріями. У першому випадку стержень згинається по дузі кола ($\kappa = \text{const}$), у другому – по параболі ($\kappa \neq \text{const}$). Точний розв’язок для такого стержня за умови неростяжності вісі має вигляд

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{l}.$$

При цьому компоненти переміщень вільного кінця:

$$w^{\text{нел}} = R(1 - \cos \alpha) = \frac{EI}{M}(1 - \cos \alpha), \quad (24.106)$$

$$u^{\text{нел}} = l - R \sin \alpha = \frac{EI}{M}(\alpha - \sin \alpha). \quad (24.107)$$

З цих виразів при $\alpha \ll 1$ можуть бути отримані розв’язки за лінійною теорією:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow w^{\text{лін}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{2} = \frac{Ml^2}{EI}; \quad (24.108)$$

$$\sin \alpha \approx \alpha \Rightarrow u^{\text{лін}} = 0. \quad (24.109)$$

Варіаційні постановки задачі можуть бути подані наступним чином.

Функціонал Лагранжа

$$\Pi^L(\kappa) = \frac{1}{2} \int_0^l M \kappa ds - \bar{M} l \kappa$$

при додатковій умові $M = EI\kappa$.

$$\delta \Pi^L(\kappa) = 0,$$

$$\Pi^L(\kappa) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 ds - \bar{M} l \kappa,$$

$$\frac{\partial \Pi^L}{\partial \kappa} = EI \kappa l - \bar{M} l = 0.$$

Рівняння рівноваги

$$M = \bar{M}.$$

Функціонал Кастільяно

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} ds$$

при додатковій умові $M = \bar{M}$.

$$\delta \Pi^K(M) = 0,$$

$$\Pi^K(M, \lambda) = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} ds + \lambda(M - \bar{M}),$$

$$\frac{\partial \Pi^K}{\partial M} = -\frac{M}{EI} + \lambda = 0, \lambda = \frac{M}{EI} = \frac{l}{R} = \alpha.$$

Рівняння сумісності деформацій

$$\kappa = \frac{\alpha}{l} = \frac{1}{R}.$$

Зазначимо, що в розглядуваній задачі про чистий згин повздовжні сили відсутні, внаслідок чого функціонал типу Кастільяно $\Pi^K(M, N, w)$ перетворюється на звичайний функціонал Кастільяно $\Pi^K(M)$.

Обчислення компонент нормованих переміщень вільного краю стержня при деяких характерних значеннях кута α наведені в таблиці 24.2.

Таблиця 24.2

$\alpha = \frac{Ml}{EI}$	$\frac{R}{l} = \frac{EI}{Ml}$	$\cos \alpha$	$1 - \cos \alpha$	$\frac{w^{\text{нел}}}{l}$	$\sin \alpha$	$\alpha - \sin \alpha$	$\frac{u^{\text{нел}}}{l}$	$\frac{w^{\text{лін}}}{l} = \frac{Ml}{2EI}$
$\pi/2$	$2/\pi$	0	1	$2/\pi$	1	$\pi/2 - 1$	$1 - 2/\pi$	$\pi/4$
π	$1/\pi$	-1	2	$2/\pi$	0	π	1	$\pi/2$
$3\pi/2$		0	1	$2/3\pi$	-1	$3\pi/2 + 1$	$1 + 2/3\pi$	$3\pi/4$
2π	$1/2\pi$	1	0	0	0	2π	1	π

Залежність між кутом повороту та вертикальними переміщеннями вільного краю такого стержня наведена на рис. 24.10.

Як бачимо, при невеликих значеннях кута повороту ($\alpha \leq \pi/4$) відмінність між прогинами, обчисленими за точними формулами і за лінійною теорією є незначною. В таких випадках прогини можуть обчислюватись, виходячи із припущень лінійної теорії ($\kappa = w''$), а горизонтальні переміщення – з наближених геометричних співвідношень (24.107) та умови неростяжності вісі стержня:

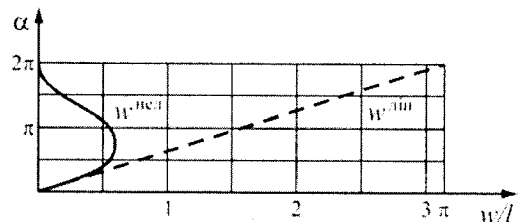


Рис. 24.10

$$\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{2}(w')^2;$$

В задачі, що розглядається, мають місце такі співвідношення:

$$w^{\text{лін}}(x) = \frac{\bar{M}x^2}{2EI}; \quad \frac{dw^{\text{лін}}}{dx} = \frac{\bar{M}x}{EI}; \quad u' = -\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{M}x}{EI}\right)^2; \quad u = -\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{M}}{EI}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{6}. \quad (24.110)$$

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($\frac{M}{EI} = \frac{\pi}{4l}$) отримуємо за формулами (24.106) і (24.107)

$$w^{\text{нел}} = \frac{4l}{\pi}(1 - \cos \frac{\pi}{4}) = 0.3729l; \quad u^{\text{нел}} = \frac{4l}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = 0.09968l,$$

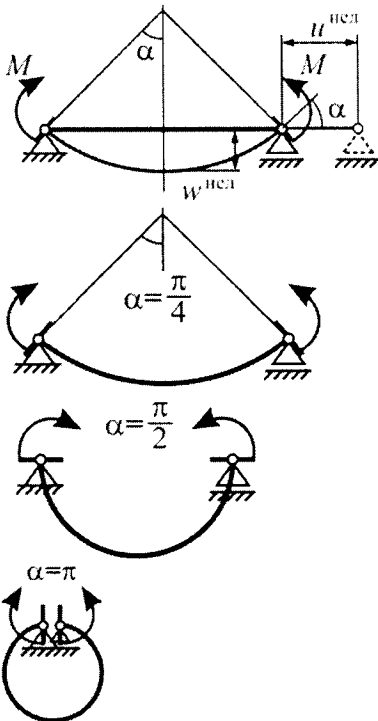
тоді як за наближеними виразами (24.108), (24.109):

$$w^{\text{лін}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4l} l^2 = 0.3927l; \quad |u| = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4l}\right)^2 l^3 = 0.1028l.$$

На рис. 24.11, який ілюструється таблицею значень характерних величин (табл. 24.3), показані схеми деформування консолі при навантаженнях, які забезпечують наявність двох ділянок постійної кривизни.

Зазначимо також, що при іншому способі закріплення кінців стержня (балка на двох опорах) вираз для максимального прогину співпадатиме з (24.106), а зближення кінців буде відрізнятися множителем 2:

$$u^{\text{нел}} = \frac{2EI}{M}(\alpha - \sin \alpha).$$



При розрахунках за лінійною теорією $u^{\text{лін}} = 0$; $w^{\text{лін}} = \frac{\bar{M}l^2}{8EI}$. Нижче наведені величини переміщень, обчислених за нелінійною теорією, при трьох характерних значеннях моменту \bar{M} .

$$\frac{Ml}{EI} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{w^{\text{нел}}}{l} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\pi} = 0.1865;$$

$$\frac{w^{\text{лін}}}{l} = \frac{\pi}{16} = 0.1963; \quad \frac{u^{\text{нел}}}{l} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.0997.$$

$$\frac{Ml}{EI} = \pi; \quad \frac{w^{\text{нел}}}{l} = \frac{1}{\pi} = 0.3183; \quad \frac{w^{\text{лін}}}{l} = \frac{\pi}{8} = 0.3927;$$

$$\frac{u^{\text{нел}}}{l} = 1 - \frac{2}{\pi} = 0.3634.$$

$$\frac{Ml}{EI} = 2\pi; \quad \frac{w^{\text{нел}}}{l} = \frac{1}{\pi} = 0.3183; \quad \frac{w^{\text{лін}}}{l} = \frac{\pi}{4} = 0.7854;$$

$$\frac{u^{\text{нел}}}{l} = 1.$$

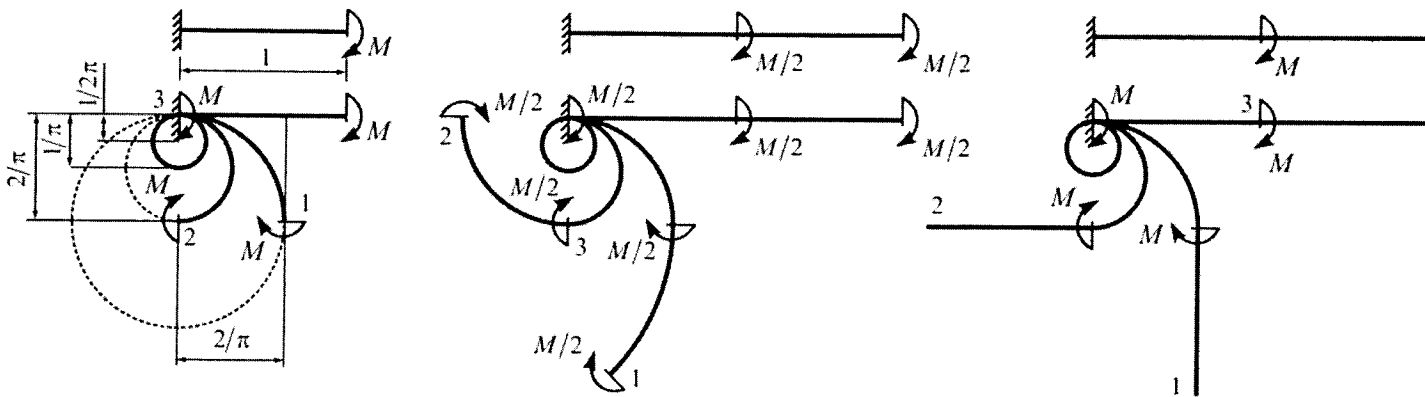
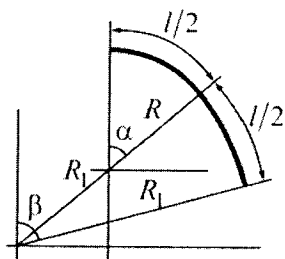


Рис. 24.11

$$\frac{l}{2} = R\alpha = R_1(\beta - \alpha), \quad \frac{1}{R_1} = \frac{M}{2EI}; \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}; \quad R_1 = 2R, \quad \beta = \frac{3}{2}\alpha$$

Таблиця 24.3

	$\alpha = \frac{Ml}{2EI}$	$\frac{R}{l} = \frac{EI}{Ml}$	$\beta = \frac{3}{2}\alpha$	$\frac{R_1}{l} = \frac{2R}{l}$
1	$\pi/2$	$2/\pi$	$3\pi/4$	$4/\pi$
2	π	$1/\pi$	$3\pi/2$	$2/\pi$
3	2π	$1/2\pi$	3π	$1/\pi$



Розглянемо задачу, наведену у [184], яка тлумачиться як «виключний випадок» у тому розумінні, що теорема Кастільяно не дає належного результату, коли переміщення не пропорційні силам. Проте автор при застосуванні теореми Кастільяно не використовує поняття доповнювальної потенціальної енергії, а помилково користується величиною потенціальної енергії пружної деформації, вираженої через сили.

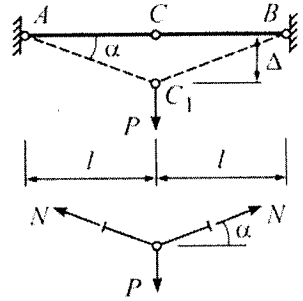


Рис. 24.12

Згідно рис. 24.12 відносна поздовжня деформація ε кожного стержня дорівнює

$$\varepsilon = \left(\frac{l}{\cos \alpha} - l \right) / l. \quad (24.111)$$

Враховуючи, що $\frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$, будемо мати при малих α

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2}. \quad (24.112)$$

Відповідно переміщення Δ точки С дорівнює

$$\Delta = l t g \alpha \approx \alpha l. \quad (24.113)$$

В свою чергу, оскільки задача є фізично лінійною, то поздовжню деформацію можна визначити наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad (24.114)$$

де поздовжня сила N знаходиться з умови рівноваги вузла С:

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha} \approx \frac{P}{2 \alpha}. \quad (24.115)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (24.112) і (24.114) з урахуванням (24.115) отримуємо

$$\alpha^2 = \frac{P}{\alpha EF},$$

звідки

$$P = EF \alpha^3, \quad (24.116)$$

та

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}. \quad (24.117)$$

Тепер можна переписати (24.113) у вигляді

$$\Delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}, \quad (24.118)$$

і навпаки

$$P = EF \frac{\Delta^3}{l^3}. \quad (24.119)$$

Крім того в подальшому знадобляться такі співвідношення:

$$N = \frac{1}{2} \sqrt[3]{P^2 EF} = \frac{EF \Delta^2}{2 l^2}, \quad (24.120)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{l^2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{P^2}{(EF)^2}}. \quad (24.121)$$

Рівність варіацій робіт внутрішніх і зовнішніх сил

$$\delta A_{BC} = \delta A_{3C}$$

дає

$$2 \left[\int_0^l N \delta \varepsilon dx + \int_0^l \varepsilon \delta N dx \right] = \delta(P\Delta). \quad (24.122)$$

З урахуванням того, що N і ε не залежать від x , а також беручи до уваги співвідношення (24.116)-(24.121), після деяких перетворень приходимо до тотожності

$$P\delta\Delta + \Delta\delta P = \delta(P\Delta), \quad (24.123)$$

яку можна записати як

$$\delta U(\Delta) + \delta U^{\text{доп}}(P) = \delta A_{3C}. \quad (24.124)$$

Користуючись залежностями (24.118) і (24.119), надамо тотожності (24.123) наступного вигляду:

$$\frac{EF\Delta^3}{l^3} \delta\Delta + \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \delta P = \delta(P\Delta),$$

або

$$\delta \left(\frac{1}{4} \frac{EF\Delta^4}{l^3} \right) + \delta \left(\frac{3}{4} Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \right) = \delta(P\Delta). \quad (24.125)$$

Порівнюючи вирази (24.124) і (24.125), визначаємо енергію деформації конструкції $U(\Delta)$ і доповнювальну енергію $U^{\text{доп}}(P)$:

$$U(\Delta) = \frac{1}{4} \frac{EF\Delta^4}{l^3}; \quad U^{\text{доп}}(P) = \frac{3}{4} Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}. \quad (24.126)$$

Отже,

$$U(\Delta) + U^{\text{доп}}(P) = P\Delta. \quad (24.127)$$

Зазначимо, що в перерізах даної системи відсутні згинальні моменти і горизонтальні переміщення. Тому вдається виразити доповнювальну енергію виключно через P і дослідити двоїстість функцій $U(\Delta)$ і $U^{\text{доп}}(P)$.

За допомогою (24.118) і (24.119) значення енергії деформації і доповнювальної енергії даної системи можна визначити наступним чином:

$$U = \frac{1}{4} P\Delta; \quad U^{\text{доп}} = \frac{3}{4} P\Delta,$$

після чого зрозумілим стає вигляд діаграми, наведеної на рисунку 24.13.

Рівність

$$\frac{1}{4} \frac{EF\Delta^4}{l^3} + \frac{3}{4} Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} = P\Delta$$

є перетворенням Лежандра, а функції $U(\Delta)$ і $U^{\text{доп}}(P)$ є двоїстими за Юнгом.

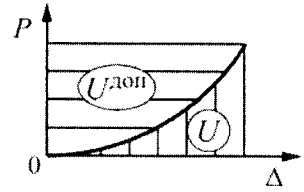


Рис. 24.13

Розглянемо, наприклад, перехід від функції $U(\Delta)$ до функції $U^{\text{доп}}(P)$ (рис. 24.14). Оскільки, згідно (24.126)

$$U(\Delta) = \frac{EF\Delta^4}{4l^3} = \frac{1}{4} P\Delta,$$

тоді

$$F(\Delta, P) = P\Delta - \frac{EF\Delta^4}{4l^3}.$$

З умови

$$\frac{\partial F(\Delta, P)}{\partial \Delta} = P - \frac{EF\Delta^3}{l^3} = 0$$

знаходимо значення

$$\Delta(P) = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}},$$

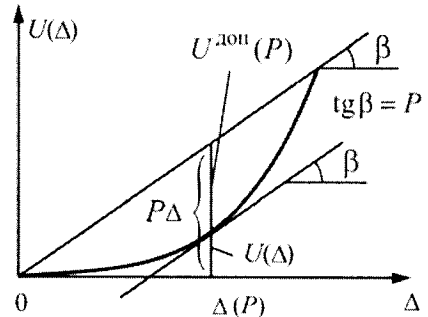


Рис. 24.14

яке забезпечує максимум функції $F(\Delta, P)$.

Тепер

$$\begin{aligned} U^{\text{доп}}(P) &= \max F(\Delta, P) = P\Delta(P) - \frac{EF}{4l^3} \Delta(P)^4 = \\ &= Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} - \frac{EF}{l^3} l^4 \sqrt[3]{\frac{P^4}{(EF)^4}} = \frac{3}{4} Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} = \frac{3}{4} P\Delta. \end{aligned}$$

Відповідно теореми Лагранжа і Кастільяно дають

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta} = \frac{EF\Delta^3}{l^3} = P; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial P} = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} = \Delta. \quad (24.128)$$

Згідно з теоремою Донкіна для двоїстих функцій $U(k, \Delta)$ і $U^{\text{доп}}(k, P)$ ($k = EF$) повинна виконуватись рівність

$$\frac{\partial U(k, \Delta)}{\partial k} = - \frac{\partial U^{\text{доп}}(k, P)}{\partial k}. \quad (24.129)$$

Дійсно, за допомогою залежностей (24.126) і (24.118) маємо:

$$\frac{\partial U(k, \Delta)}{\partial k} = \frac{1}{4} \frac{\Delta^4}{l^3}; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(k, P)}{\partial k} = - \frac{1}{3} \frac{3}{4} l \sqrt[3]{\frac{P^4}{(EF)^4}} = - \frac{1}{4} \frac{\Delta^4}{l^3}.$$

Зазначимо, що для лінійних задач (на відміну від розглянутої вище геометрично нелінійної) значення квадратичної форми $f(x)$ і її перетворення Лежандра $g(P)$ у

відповідних точках співпадають.

Для форми $f(x) = x^2$ це являє собою відому властивість дотичної до параболи.

Загалом це можна довести наступним чином. За теоремою Ейлера про однорідні функції для функції другого ступеня справедливо

$$\frac{\partial f}{\partial x} x = 2f. \quad (24.130)$$

Тому

$$g(P(x)) = Px - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} x - f = f(x).$$

Тут $Px - f(x) = F(P, x)$; $g(P) = F(P, x(P)) = \max F(P, x)$, причому $x(P)$ знаходиться з рівності $P - f'(x) = 0$.

Координата точки A (рис. 24.15) знаходиться з умови

$$\frac{\partial F(P, x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow P = f'(x_A).$$

На основі властивості (24.130) можемо тепер записати

$$x_A = \frac{2f(x_A)}{P}. \quad (24.131)$$

Координата точки B знаходиться з рівності

$$F(P, x) = 0 \Rightarrow x_B = \frac{f(x_B)}{P}. \quad (24.132)$$

Співвідношення (24.121) і (24.122) дозволяють записати:

$$\frac{x_B}{x_A} = \frac{f(x_B)}{2f(x_A)}. \quad (24.133)$$

Оскільки $f(x)$ — однорідна функція ступеня 2, то

$$f(x_B) = \left(\frac{x_B}{x_A}\right)^2 f(x_A). \quad (24.134)$$

Підставимо (24.134) в (24.133) і отримаємо

$$\frac{x_B}{x_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_B}{x_A}\right)^2 \Rightarrow x_B = 2x_A.$$

Отже, вертикальна пряма, яка проходить через точку A є віссю симетрії.

Наприклад, у випадку одноосного розтягу (рис. 24.16) відповідні перетворення Лежандра мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_0(\varepsilon) + U_0^{\text{доп}}(\sigma) &= \sigma \varepsilon, \\ \sigma &= \varepsilon E. \end{aligned} \quad (24.135)$$

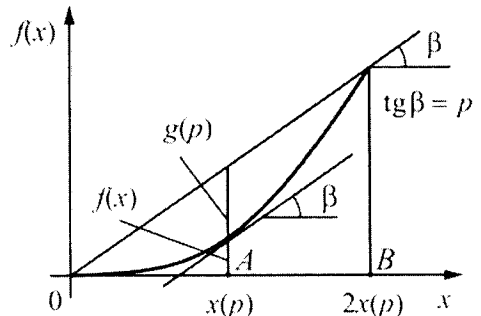


Рис. 24.15

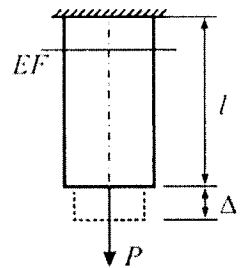


Рис. 24.16

Тут $U_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 E$ і $U_0^{\text{доп}}(\sigma) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ – двоїсті за Юнгом функції.

Вираз (24.135) тепер може бути записаний наступним чином:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 E + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \sigma\varepsilon,$$

або враховуючи, що

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l},$$

та вводячи позначення

$$\frac{EF}{l} = k,$$

отримаємо

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}\frac{P^2}{k} = P\Delta. \quad (24.136)$$

Знову

$$U(\Delta) + U^{\text{доп}}(P) = P\Delta,$$

де $U(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2$ і $U^{\text{доп}}(P) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{k}$ – двоїсті за Юнгом функції, які являють відповідно потенціальну енергію пружної деформації і доповнювальну потенціальну енергію.

Перехід за допомогою перетворення Лежандра від потенціальної енергії деформації $U(\Delta)$ до доповнювальної потенціальної енергії подамо наступним чином (рис. 24.17):

$$F(\Delta, P) = P\Delta - U\Delta = P\Delta - \frac{1}{2}k\Delta^2,$$

$$\frac{\partial F(\Delta, P)}{\partial \Delta} = P - k\Delta = 0 \Rightarrow P = k\Delta,$$

$$g(P) = U^{\text{доп}}(P) = \max F(\Delta, P) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{k}.$$

Функція $F(\Delta, P)$ являє собою функціонал (функцію) Лагранжа $\Pi^{\text{Л}}(\Delta)$ або повну потенціальну енергію

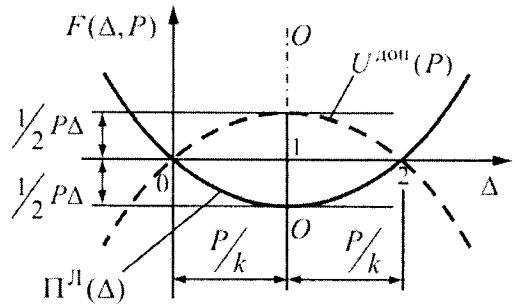


Рис. 24.17

системи (із зворотнім знаком). На графіку функція $\Pi^{\text{Л}}(\Delta)$ показана суцільною лінією і має мінімум $\min \Pi^{\text{Л}}(\Delta) = -\frac{1}{2}k\Delta^2$.

Пунктирна лінія відповідає доповнювальній потенціальній енергії або роботі внутрішніх сил.

Вісь $O-O$ описується рівнянням $\Delta = \frac{P}{k}$, яке є умовою перетворення Лежандра.

Ця вертикальна пряма є віссю симетрії графіка.

24. РІВНЯННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У загальному випадку це має місце для так званих лінійних систем, двоїсті функції яких рівні і являють собою квадратичні форми.

Якщо, наприклад, $f(x) = ax^n$ (рис. 24.18), то можна отримати

$$x(P) = n^{-1} \sqrt[n]{\frac{P}{an}} = \left(\frac{P}{an}\right)^{\frac{1}{n-1}}; \quad x_{\text{сєр}} = \left(\frac{P}{2^{n-1}a}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (24.137)$$

де $x(P)$ – координата екстремуму функції $xP - f(x)$, $x_{\text{сєр}}$ – координата середини, яка задовольняє умову $2x_{\text{сєр}}P = f(2x_{\text{сєр}})$.

Порівнюючи залежності $x(P)$ та $x_{\text{сєр}}(P)$, тобто криві $y = 2^{n-1}$ і $y = n$ (рис. 24.19), можна отримати:

1. $x(P) > x_{\text{сєр}}$, якщо $n > 2$;
2. $x(P) = x_{\text{сєр}}$, якщо $n = 2$;
3. $x(P) < x_{\text{сєр}}$, якщо $1 < n < 2$.

Враховуючи, що

$$f(x(P)) - g(P) = \frac{2-n}{n} P n^{-1} \sqrt[n]{\frac{P}{an}},$$

послідовно отримуємо:

1. $f(x(P)) - g(P) < 0 \Rightarrow g(P) > f(x(P))$, якщо $n > 2$;
2. $f(x(P)) = g(P)$, якщо $n = 2$;
3. $f(x(P)) - g(P) > 0 \Rightarrow g(P) < f(x(P))$, якщо $n < 2$.

Проілюструємо ці положення на подальших прикладах нелінійних задач.

Функціонал Лагранжа задачі, наведеної на рис. 24.16, являє собою функцію

$$\Pi^{\text{Л}}(\Delta) = \frac{1}{4} EF \frac{\Delta^4}{l^3} - P\Delta,$$

екстремум якої послідовно отримуємо наступним чином:

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}(\Delta)}{\partial \Delta} = EF \frac{\Delta^3}{l^3} - P = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}; \quad \Pi_{\text{min}}^{\text{Л}}(\Delta) = -\frac{3}{4} \frac{EF \Delta^4}{l^3}.$$

Графік залежності $\Pi^{\text{Л}}$ від Δ наведений на рис. 24.20.

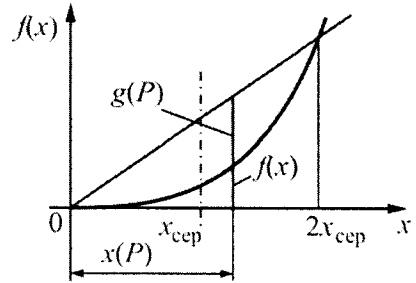


Рис. 24.18

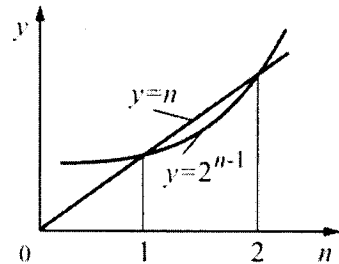


Рис. 24.19

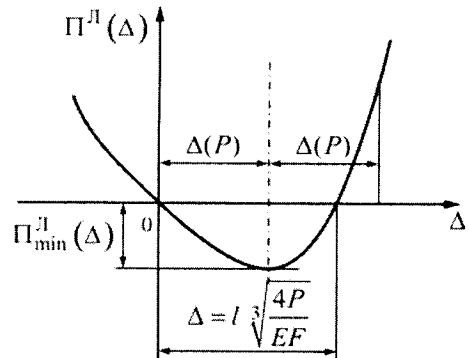


Рис. 24.20

$$n > 2 \quad x(P) = \Delta(P) = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}};$$

$$x_{\text{сер}} = \frac{1}{2} l \sqrt[3]{\frac{4P}{EF}} < x(P); \quad g(P) = \frac{3}{4} P\Delta;$$

$$f(\Delta) = \frac{1}{4} P\Delta; \quad g(P) > f(\Delta).$$

Зазначимо, що у випадку нелінійної задачі крива $\Pi^K(\Delta)$ не є симетричною відносно вісі $\Delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}$ у зв'язку з нелінійною залежністю $P - \Delta$ (рис. 24.21). Наприклад, зменшення вдвічі Δ вимагає відповідного зменшення P у 8 разів.

Як приклад розглянемо наступну нелінійну задачу (рис. 24.21), де задана залежність $\Delta = cP^2$, яка має опуклість, протилежну порівняно із розглянутою вище (рис. 24.22).

Побудуємо функції потенціальної енергії деформації і доповнювальної потенціальної енергії та перевіримо, чи є вони двоїстими за Юнгом.

$$U(\Delta) = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \int_0^{\Delta} \left(\frac{\Delta}{c}\right)^{\frac{1}{2}} d\Delta = \frac{2}{3} \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} P\Delta;$$

$$U^{\text{доп}}(P) = \int_0^P \Delta dP = \int_0^P cP^2 dP = \frac{cP^3}{3} = \frac{1}{3} P\Delta.$$

Бачимо, що $U(\Delta) + U^{\text{доп}}(P) = P\Delta$. Зробимо перетворення Лежандра функції $U(\Delta)$.

$$F(\Delta, P) = P\Delta - \frac{2}{3} c^{-\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{3}{2}}.$$

З умови

$$\frac{\partial F(\Delta, P)}{\partial \Delta} = P - \left(\frac{\Delta}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

знаходимо

$$\Delta(P) = cP^2.$$

Тепер

$$\begin{aligned} g(P) &= \max F(\Delta, P) = F(\Delta(P), P) = \\ &= \frac{1}{3} cP^3 = \frac{1}{3} P\Delta = U^{\text{доп}}(P) \end{aligned}$$

в чому і потрібно було пересвідчитись (рис. 24.23,а).

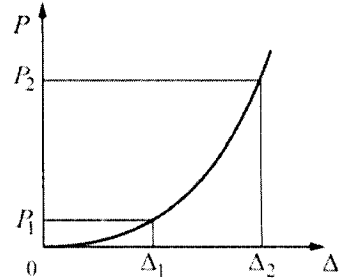


Рис. 24.21

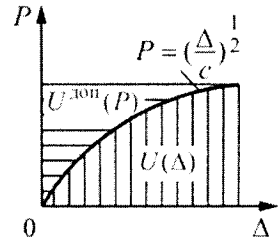


Рис. 24.22

Відповідно теореми Лагранжа і Кастільяно дають:

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta} = \left(\frac{\Delta}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = P; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial P} = cP^2 = \Delta.$$

Згідно з теоремою Донкіна

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial c} = -\frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial c} = -\frac{1}{3}P^3.$$

Функціонал Лагранжа задачі являє собою функцію (рис. 24.23,б)

$$\Pi^{\text{Л}}(\Delta) = \frac{2}{3}c^{-\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{3}{2}} - P\Delta,$$

екстремум якої знаходимо з умови

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}(\Delta)}{\partial \Delta} = \left(\frac{\Delta}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - P = 0 \Rightarrow \Delta = cP^2.$$

Тепер

$$\Pi^{\text{Л}}_{\min}(\Delta) = -\frac{1}{3}c^{-\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{3}{2}}.$$

Функціонал $\Pi^{\text{Л}}(\Delta)$ обертається на нуль, коли $\Delta = \Delta_1 = 0$ та $\Delta = \Delta_2 = \frac{9}{4}cP^2$.

Оскільки в цій задачі $n=3/2$, тобто маємо випадок $1 < n < 2$, то $\Delta(P) = cP^2 < \Delta_{\text{сер}} = \frac{9}{8}cP^2$ (рис. 24.22)

$$U^{\text{доп}}(P) = \frac{1}{3}P\Delta < U(\Delta) = \frac{2}{3}P\Delta.$$

Отже, у даному випадку нелінійної задачі крива $\Pi^{\text{Л}}(\Delta)$ теж не є симетричною відносно вісі $\Delta=cP^2$ у зв'язку з нелінійною залежністю $P-\Delta$, проте характер зміщення екстремуму протилежний, що пояснюється опуклістю кривої $P-\Delta$ (рис. 24.23).

Функціонал Кастільяно даної задачі має вигляд:

$$\Pi^{\text{К}}(P) = -\frac{1}{3}cP^3,$$

причому, оскільки розв'язок розшукується на множині статично можливих, то повинна виконуватись попередня умова $P = \bar{P}$, де \bar{P} — прикладене навантаження.

Зводячи задачу до вільної від обмежень, можемо записати

$$\Pi^{\text{К}}(P, \lambda) = -\frac{1}{3}cP^3 + \lambda(P - \bar{P}).$$

З умов екстремуму

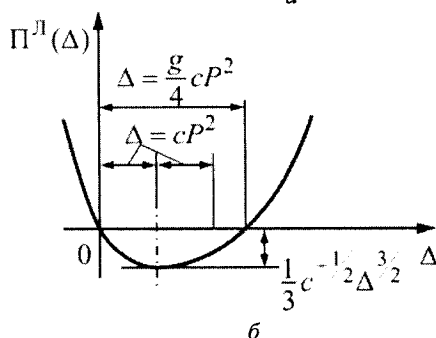
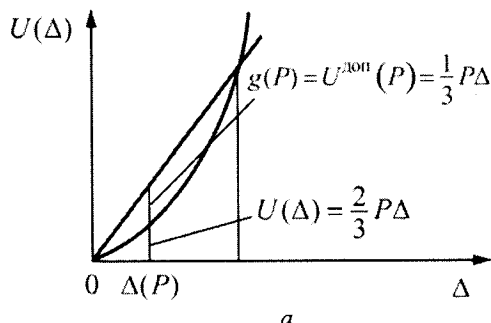


Рис. 24.23

$$\frac{\partial \Pi^K(P, \lambda)}{\partial P} = -cP^2 + \lambda = 0$$

та

$$\frac{\partial \Pi^K(P, \lambda)}{\partial \lambda} = P - \bar{P} = 0$$

маємо

$$\lambda = c\bar{P}^2.$$

Отже,

$$\Pi^K(P) = -\frac{1}{3}cP^3 + c\bar{P}^2(P - \bar{P}).$$

Графік функції $\Pi^K(P)$ наведений на рис. 24.24. Максимальне значення функція набуває при $P = \bar{P}$:

$$\max \Pi^K(P) = \Pi^K(\bar{P}) = -\frac{1}{3}c\bar{P}^3 = \min \Pi^J(\Delta).$$

При $P = 0$ значення функції

$$\Pi^K(0) = -c\bar{P}^3.$$

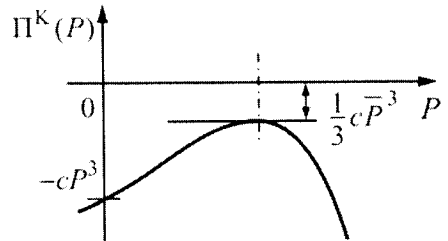


Рис. 24.24

24.4.5. Задача про великі переміщення ферми Мізеса

За припущення про можливість великих переміщень розглянемо деформування так званої ферми Мізеса (рис. 24.25).

Рівняння рівноваги вузла дає

$$N = \frac{P}{2 \cos \alpha}, \quad (24.138)$$

де N - стискаюче зусилля в стержнях. За законом Гука скорочення кожного стержня

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{P \cdot a}{EF \cdot \sin \alpha}, \quad (24.139)$$

З іншого боку, скорочення стержня дорівнює

$$\Delta l = \frac{a}{\sin \alpha_0} - \frac{a}{\sin \alpha}, \quad (24.140)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (24.139) і (24.140), знаходимо зв'язок між навантаженням P і кутом α :

$$P = 2EF \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right) \cos \alpha, \quad (24.141)$$

Можна також записати співвідношення між силою P і вертикальним лінійним переміщенням v , якщо скористатись рівністю

$$v = a [1/\text{tg} \alpha_0 - 1/\text{tg} \alpha], \quad (24.142)$$

Після деяких перетворень вираз (24.141) набуває наступного вигляду:

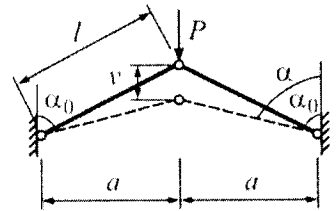


Рис. 24.25

$$P = 2EF(1 - \frac{\nu}{a} \operatorname{tg}\alpha_0) \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 + (1 - \frac{\nu}{a} \operatorname{tg}\alpha_0)^2}} - \cos\alpha_0 \right], \quad (24.143)$$

Такий самий зв'язок між навантаженням та параметром деформації системи можна отримати за допомогою варіаційного принципу Лагранжа:

$$\delta\Pi^{\text{Л}} = 0; \quad \Pi^{\text{Л}}(\alpha) = U(\alpha) + A(\alpha). \quad (24.144)$$

У виразі (24.144) енергія деформації двостержневої системи U дорівнює

$$U = 2 \frac{N \cdot \Delta l}{2} = \Delta l^2 \cdot \frac{EF}{l} = \frac{EFa}{l} [1/\sin\alpha_0 - 1/\sin\alpha]^2, \quad (24.145)$$

а роботи зовнішніх сил за допомогою виразу (24.142) записується наступним чином:

$$A = -P \cdot \nu = -P \cdot a [1/\operatorname{tg}\alpha_0 - 1/\operatorname{tg}\alpha]. \quad (24.146)$$

Отже, повна потенціальна енергія системи як функція кута α може бути подана у такому вигляді:

$$\Pi^{\text{Л}}(\alpha) = \frac{EFa}{l} [1/\sin\alpha_0 - 1/\sin\alpha]^2 - P \cdot a \cdot [1/\operatorname{tg}\alpha_0 - 1/\operatorname{tg}\alpha]. \quad (24.147)$$

Мінімум повної потенціальної енергії досягається, коли $\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}(\alpha)}{\partial \alpha}$

Диференціюємо по α вираз (24.147) і прирівнюємо результат нулю:

$$\frac{2EFa}{l} [1/\sin\alpha_0 - 1/\sin\alpha] \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{Pa}{\sin^2\alpha} = 0,$$

або беручи до уваги, $l = \frac{a}{\sin\alpha_0}$ отримуємо $2EF[l - \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}] \cdot \cos\alpha - P = 0$, що

співпадає з виразом (24.141).

На рисунку 24.26 наведено графік залежності відносного вертикального переміщення вузла від навантаження, побудований для системи, у якій $\alpha_0 = 75^\circ$. Прямая пунктирна лінія на графіку проведена за даними, отриманими за припущення про малість переміщень, тобто виходячи із рівності

$$\nu_0 = \frac{P \cdot a}{2EF} \cdot \frac{1}{\sin\alpha_0 \cdot \cos\alpha_0}. \quad (24.148)$$

В таблиці 24.4 наведені результати обчислення переміщення вузла з урахуванням та без урахування нелінійного характеру деформування.

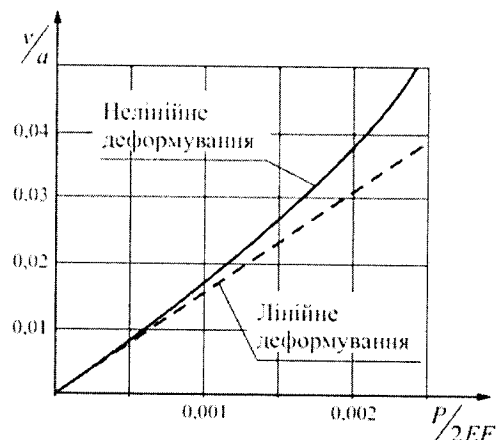


Рис. 24.26

Таблиця 24.4

$P/2EF$	$v^{лін} / a$	$v^{нел} / a$	Похибка, %
$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,86 \cdot 10^{-3}$	$3,945 \cdot 10^{-3}$	2,1
$5,0 \cdot 10^{-4}$	$7,73 \cdot 10^{-3}$	$8,05 \cdot 10^{-3}$	4,0
$7,5 \cdot 10^{-4}$	$1,159 \cdot 10^{-2}$	$1,237 \cdot 10^{-2}$	6,3
$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,545 \cdot 10^{-2}$	$1,692 \cdot 10^{-2}$	8,7
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,932 \cdot 10^{-2}$	$2,173 \cdot 10^{-2}$	11,1
$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,318 \cdot 10^{-2}$	$2,686 \cdot 10^{-2}$	13,7
$1,75 \cdot 10^{-3}$	$2,705 \cdot 10^{-2}$	$3,236 \cdot 10^{-2}$	16,4
$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,091 \cdot 10^{-2}$	$3,833 \cdot 10^{-2}$	19,4
$2,25 \cdot 10^{-3}$	$3,477 \cdot 10^{-2}$	$4,488 \cdot 10^{-2}$	22,5
$2,5 \cdot 10^{-3}$	$3,864 \cdot 10^{-2}$	$5,222 \cdot 10^{-2}$	26,0

Якщо стержнями системи є прутки з титанового сплаву $E = 1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ довжиною $l = 1 \text{ м}$ і діаметром поперечного перерізу $d = 1,5 \text{ см}$ то, наприклад, при значенні параметра навантаження $P/2EF = 0,001$ будемо мати $P = 0,001 \cdot 2EF = 35,34 \text{ кН}$; $v^{лін} = 1,545 \cdot 10^{-2} \cdot l \cdot \sin \alpha_0 = 1,49 \text{ см}$; $v^{нел} = 1,692 \cdot 10^{-2} \cdot l \cdot \sin \alpha_0 = 1,63 \text{ см}$.

Як бачимо, для цієї системи при досягненні переміщенням вузла значення, що приблизно дорівнює діаметру прутка, недооцінка величини переміщення за лінійною теорією становить 8,7%.

Напружений стан ферми будемо досліджувати за допомогою співвідношень (24.138) і (24.141). Залежність стискаючого зусилля N від навантаження проілюстрована на рис. 24.27 та в табл. 24.5.

Бачимо, що відносна розбіжність результатів при обчисленні стискаючого зусилля по лінійній та геометрично нелінійній теоріям є приблизно в півтора рази меншою за розбіжність при обчисленні переміщень. Важливо також відмітити наступне. При параметрі навантаження $P/2EF$, рівному $1,5 \cdot 10^{-3}$, напруження без урахування нелінійного деформування дорівнюють

$$\sigma = \frac{N^{лін}}{F} = 2,898 \cdot 10^{-3} \cdot 2E = 579,6 \text{ МПа,}$$

тоді як урахування нелінійності дає

$$\sigma = \frac{N^{нел}}{F} = 3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2E = 640 \text{ МПа.}$$

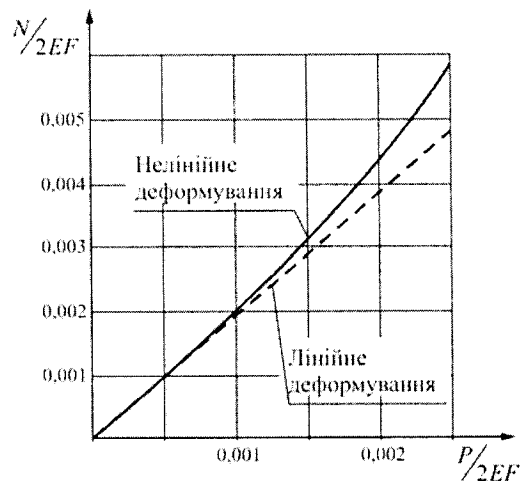


Рис. 24.27

Таблиця 24.5

$P / 2EF$	$N^{\text{лін}} / 2EF$	$N^{\text{нел}} / 2EF$	Похибка, %
$2,5 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-4}$	1,4
$5 \cdot 10^{-4}$	$9,66 \cdot 10^{-4}$	$9,94 \cdot 10^{-4}$	2,8
$7,5 \cdot 10^{-4}$	$1,449 \cdot 10^{-3}$	$1,514 \cdot 10^{-3}$	4,3
$1 \cdot 10^{-3}$	$1,982 \cdot 10^{-3}$	$2,054 \cdot 10^{-3}$	5,9
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2,415 \cdot 10^{-3}$	$2,614 \cdot 10^{-3}$	7,6
$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,898 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	9,4
$1,75 \cdot 10^{-3}$	$3,381 \cdot 10^{-3}$	$3,816 \cdot 10^{-3}$	11,4
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,864 \cdot 10^{-3}$	$4,468 \cdot 10^{-3}$	13,5
$2,25 \cdot 10^{-3}$	$4,347 \cdot 10^{-3}$	$5,167 \cdot 10^{-3}$	15,9
$2,5 \cdot 10^{-3}$	$4,83 \cdot 10^{-3}$	$5,927 \cdot 10^{-3}$	18,5

Якщо матеріалом прутка є титановий сплав ОТ4 з межею пропорційності (межею текучості для залишкової деформації) $\sigma_T = 600 \text{ МПа}$, то не враховуючи геометричну нелінійність, можна не помітити, що система працює за межами справедливості закону Гука.

24.5. Сумісна дія згину і розтягу-стиснення у геометрично нелінійній постановці

У розглянутих вище прикладах досліджувалась спільна дія розтягу і згину. Значно небезпечнішою з точки зору можливої втрати стійкості є ситуація, коли елементи конструкції поряд із згином зазнають стиску.

Зауважимо, що при невеликих деформаціях згину взаємний вплив двох різновидів напружено-деформованого стану є незначним. В такому разі стиск і згин стержневої системи розглядаються окремо, а функціонал задачі може бути поданий як сума двох функціоналів, один з яких відповідає тільки стиску, а інший – згину:

$$\Pi^{\text{л}}(u, w) = \Pi^{\text{л}}(u) + \Pi^{\text{л}}(w),$$

де

$$\Pi^{\text{л}}(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EF(u')^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N}u \Big|_{a_1}^{b_1}$$

при попередніх умовах $u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}$,

$$\Pi^{\text{л}}(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI(w'')^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}'w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}w' \Big|_{a_1}^{b_1}$$

при попередніх умовах $w \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2}$, $w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}$.

При збільшенні навантаження нехтувати впливом стиску на згин неправомірно. Оскільки задача стає геометрично нелінійною, для поздовжньої деформації необхідно використовувати вираз

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2,$$

а для розв'язання задачі застосовувати функціонал Лагранжа у вигляді (24.67).

Розглянемо деформування балки на двох опорах під дією розподіленого за синусоїдальним законом поперечного навантаження та поздовжньої стискаючої сили (рис. 24.28).

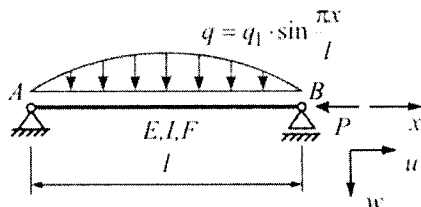


Рис. 24.28

Варіаційне рівняння Лагранжа має вигляд

$$\Pi^{\text{Л}} = 0, \quad \Pi^{\text{Л}}(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]^2 dx - \int_0^l q w dx + P u_B \quad (24.149)$$

при попередніх умовах

$$w_A = w_B = 0; \quad u_A = 0.$$

Розв'язок задачі може бути знайдений двома способами. Спочатку отримаємо і розв'яжемо диференціальне рівняння (рівняння Ейлера задачі (24.149)).

Умовами стаціонарності функціонала (24.149) є рівність нулю перших варіацій:

$$\delta_u \Pi^{\text{Л}} = 0, \quad \delta_w \Pi^{\text{Л}} = 0.$$

Для того, щоб задовільнити першу з цих умов необхідно виконання рівності

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0, \quad (24.150)$$

а друга умова вимагає, щоб виконувалась рівність

$$F_w - \frac{d}{dx} F_{w'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{w''} = 0. \quad (24.151)$$

Маємо

$$F(x, u, u', w, w', w'') = \frac{1}{2} EI (w'')^2 + \frac{1}{2} EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]^2 - q w.$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_u &= 0; \quad F_{u'} = EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]; \\ F_w &= -q; \quad F_{w'} = EF \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] w'; \quad F_{w''} = EI w''. \end{aligned} \quad (24.152)$$

Підстановка отриманих співвідношень в рівняння (24.150) з урахуванням (24.148) та закону Гука

$$N = \varepsilon EF$$

дає

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = \text{const}.$$

З природних умов дістаємо

$$N = N_B = -P. \quad (24.153)$$

Далі, підставляючи похідні (24.152) в рівняння (24.151), отримуємо:

$$-q - \frac{d}{dx}(Nw') + \frac{d^2}{dx^2}(EIw'') = 0,$$

і нарешті, враховуючи (24.153), дістаємо диференціальне рівняння осі стиснено-зігнутого стержня постійного перерізу:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} - q = 0. \quad (24.154)$$

За відсутності стискаючої сили P рівняння (24.150) перетворюється на звичайне рівняння осі стержня при згині, розв'язок якого $w^{\text{лін}}(x)$ при даному поперечному навантаженні має наступний вигляд:

$$w^{\text{лін}}(x) = \frac{q_1 l^4}{EI \pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (24.155)$$

Розв'язок рівняння (24.154) також шукаємо у вигляді

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (24.156)$$

Після знаходження похідних w^{IV} , w'' , підстановки їх у рівняння (24.154) і скорочення на $\sin \frac{\pi x}{l}$ будемо мати

$$EI \frac{\pi^4}{l^4} a_1 - P \frac{\pi^2}{l^2} a_1 - q_1 = 0,$$

звідки

$$a_1 = \frac{q_1 l^4}{EI \pi^4 \left(1 - P \frac{l^2}{EI \pi^2} \right)}. \quad (24.157)$$

З огляду на відому формулу Ейлера для визначення критичної сили

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

та беручи до уваги позначення (24.155), можемо записати

$$a_1 = \frac{w_0}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}}. \quad (24.158)$$

В свою чергу прогини балки визначаються виразом

$$w(x) = \frac{w_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{w^{лін}(x)}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (24.159)$$

Зазначимо, що прогини (24.159) є точним розв'язком рівняння (24.154) за даного навантаження та граничних умов.

Для знаходження функції горизонтальних переміщень скористаємось рівністю

$$-\frac{P}{EF} = u' + \frac{1}{2}(w')^2, \quad (24.160)$$

яка є наслідком співвідношення (24.153) та закону Гука. Далі, за допомогою (24.156) визначаємо

$$u' = -\frac{P}{EF} - \frac{1}{2}a_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right), \quad (24.161)$$

після чого

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt = -\left(\frac{P}{EF} + \frac{a_1^2 \pi^2}{4l^2} \right) x - \frac{1}{8} a_1^2 \frac{\pi}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (24.162)$$

Горизонтальне переміщення правої опори u_B дорівнює

$$u_B = -\frac{Pl}{EF} - \frac{a_1^2 \pi^2}{4l}, \quad (24.163)$$

де a_1 визначається рівностями (24.157) чи (24.158).

Отже, розв'язок задачі (24.149) знайдено.

Розв'яжемо тепер цю задачу за допомогою методу Рітца. Для апроксимації прогинів знову скористаємось поданням (24.156), а функцію горизонтальних переміщень з огляду на (24.162) будемо шукати у такому вигляді:

$$u(x) = -\left(\frac{P}{EF} + a_2 \right) x - \frac{a_2 \pi}{2l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (24.164)$$

Зсув правої опори u_B при цьому дорівнює

$$u_B = u(l) = -\left(\frac{P}{EF} + a_2 \right) l.$$

Візьмемо необхідні похідні u' , w' , w'' , підставимо їх у функціонал (24.149) і отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{Л}}(a_1, a_2) = & \frac{1}{2} \int_0^l EI a_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[-\frac{P}{EF} - 2a_2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} a_1^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right]^2 dx - q_1 a_1 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx - \frac{P^2 l}{EF} - Pl a_2. \end{aligned} \quad (24.165)$$

Після проведення інтегрування вираз (24.165) перетвориться на такий:

$$\Pi^{\text{Л}}(a_1, a_2) = \frac{1}{4} EI \frac{\pi^4}{l^3} a_1^2 - \frac{P^2 l}{2EF} + \left(2a_2 - \frac{a_1^2 \pi^2}{2l^2} \right)^2 \frac{3EF l}{16} - \frac{a_1^2 \pi^2}{4l} P - q_1 a_1 \frac{l}{2}. \quad (24.166)$$

Умови стаціонарності функціонала

$$\frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial a_1} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial a_2} = 0$$

дозволяють отримати систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів a_1 і a_2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{l^3} EI a_1 - \frac{3EF\pi^2}{8l} \left(2a_2 - \frac{a_1^2 \pi^2}{2l^2} \right) a_1 - \frac{P \pi^2}{2l} a_1 - q_1 \frac{l}{2} = 0 \\ \frac{3EFI}{4} \left(2a_2 - \frac{a_1^2 \pi^2}{2l^2} \right) = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо

$$a_2 = \frac{a_1^2 \pi^2}{4 l^2}. \quad (24.167)$$

Підставляючи (24.167) у перше рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^4}{l^3} EI a_1 - \frac{P \pi^2}{2l} a_1 - q_1 \frac{l}{2} = 0,$$

або

$$EI \frac{\pi^4}{l^4} a_1 - P \frac{\pi^2}{l^2} a_1 - q_1 = 0. \quad (24.168)$$

Таким чином, отримане те саме алгебраїчне рівняння, що і раніше при розв'язанні диференціального рівняння (24.154). Розв'язок алгебраїчного рівняння (значення параметра a_1) дається виразом (24.157). Функція прогинів визначається рівністю (24.159). Горизонтальні переміщення знайдемо, якщо підставимо вираз (24.167) у співвідношення (24.163). Цілком зрозуміло, що цей результат повністю співпадає з виразом (24.162).

Отже, розв'язки, знайдені двома способами, співпали між собою.

Зазначимо, що умова (24.167) еквівалентна вимозі щодо незмінності поздовжньої сили по довжині стержня. В цьому разі функціонал (24.166) перетворюється на функцію одного аргументу:

$$\Pi^{\text{Л}}(a_1) = \frac{1}{4} EI \frac{\pi^4}{l^3} a_1^2 - \frac{P \pi^2}{4l} a_1^2 - q \frac{l}{2} a_1 - \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (24.169)$$

Друга похідна функції $\Pi^{\text{Л}}(a_1)$ матиме наступний вигляд:

$$\frac{d^2 \Pi^{\text{Л}}(a_1)}{da_1^2} = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{l^3} - \frac{P \pi^2}{2l} = \frac{\pi^4}{l^3} EI \left(1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}} \right). \quad (24.170)$$

Бачимо, що при $P < P_{\text{кр}}$ друга варіація $\delta^2 \Pi^{\text{Л}} > 0$, і, таким чином, стаціонарна точка є точкою мінімуму функціонала. Отже, при $P < P_{\text{кр}}$ рівновага буде стійкою. Навпаки, якщо $P > P_{\text{кр}}$, то $\delta^2 \Pi^{\text{Л}} < 0$, і стаціонарна точка буде точкою максимуму

функціонала, а рівновага буде нестійкою. І нарешті, при $P = P_{кр}$ і $\delta^2 \Pi^L = 0$ рівновага могла би бути байдужою, але, згідно виразу (24.159) прогини набудуть нескінченно великих значень і станеться руйнування конструкції.

Взагалі, якщо розглядається задача про втрату стійкості центрально-стисненого стержня, то функціонал (24.149) дещо змінюється. Пояснюється це тим, що, по-перше, відсутнє поперечне навантаження q , по-друге, відлік величини повної потенціальної енергії ведеться від початкового напружено-деформованого стану, який відповідає центральному стисненню. Крім того вважається, що внеском у поздовжню деформацію ε доданку u' можна знехтувати, завдяки чому вираз (24.148) набуває наступного вигляду:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(w')^2. \quad (24.171)$$

Більш того, ε^2 теж вважається величиною вищого порядку малості.

В результаті таких спрощень функціонал Лагранжа задачі записується таким чином:

$$\Pi^L(w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx + Pu_B, \quad (24.172)$$

де

$$u_B = - \int_0^l \varepsilon dx = - \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx. \quad (24.173)$$

З урахуванням (24.173) можемо, нарешті, надати функціоналу Лагранжа задачі традиційного вигляду:

$$\Pi^L(w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l (w')^2 dx. \quad (24.174)$$

Якщо скористатись для функції прогину $w(x)$ апроксимацією (24.156) і виконати інтегрування, то функціонал (24.174) перетвориться на

$$\begin{aligned} \Pi^L(a_1) &= \frac{1}{4} \frac{\pi^4}{l^3} EI a_1^2 - \frac{P}{4} \frac{\pi^2}{l} a_1^2 = \\ &= a_1^2 \left(1 - \frac{P}{P_{кр}} \right) \frac{\pi^4}{4l^3} EI. \end{aligned} \quad (24.175)$$

На рис. 24.29 показано характер зміни функціонала Π^L в залежності від параметра a_1 при різних значеннях величини

$$m = \frac{P}{P_{кр}}.$$

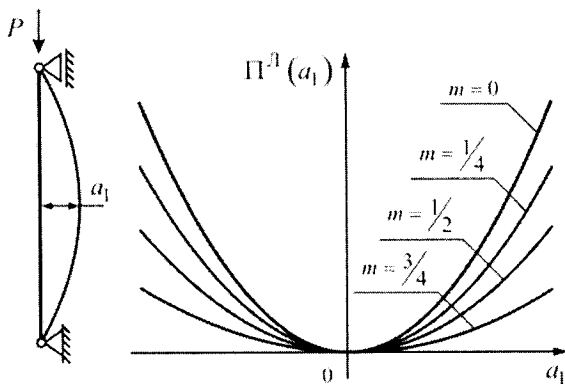


Рис. 24.29

25. Геометрично нелінійне деформування тонких пластин

25.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії тонких пластин

Перехід до співвідношень задачі про деформування тонкої пластини здійснюється шляхом спрощення співвідношень тривимірної теорії пружності за допомогою таких гіпотез:

1. Нормальне напруження на площинах, паралельних серединній поверхні пластини, є малими порівняно з іншими компонентами напружень, і ним можна знехтувати;

2. Лінійні елементи пластини, які до деформування були перпендикулярними до серединної поверхні, лишаються прямолінійними і перпендикулярними до деформованої серединної поверхні і не змінюють своєї довжини;

3. Хоча прогин пластини не є малим у порівнянні з її товщиною, він є малим порівняно з іншими лінійними розмірами пластини.

Розглянемо тонку гнучку прямокутну пластину, яка має товщину h та розміри сторін a і b . Прив'язка пластини до осей координат показана на рис. 25.1.

Наслідком застосування наведених вище гіпотез є те, що компоненти деформацій ϵ_{zz} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz} стають рівними нулю. В свою чергу компоненти вектора переміщень можуть бути записані наступним чином:

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) - z \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x},$$

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0) - z \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial y},$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0).$$

Надалі в задачі про нелінійний згин тонкої пластини будемо позначати

$$u = u(x, y, 0); \quad v = v(x, y, 0); \quad w = w(x, y, 0).$$

Тоді ненульові компоненти деформації набувають вигляду

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

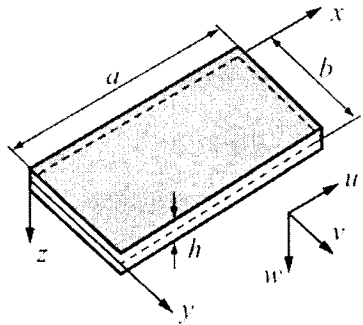


Рис. 25.1

Будемо окремо розглядати деформації серединного шару та деформації згину. Деформації видовження і зсуву серединного шару мають вигляд:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (25.1)$$

Кривизни серединної поверхні задаються виразами:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (25.2)$$

Компоненти деформації пов'язані між собою рівнянням сумісності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \chi^2 - \kappa_x \kappa_y. \quad (25.3)$$

В перерізах пластини діють напруження, інтегральними характеристиками яких є внутрішні зусилля, віднесені до одиниці довжини перерізу. Позначення і напрями зусиль показані на рис. 25.2.

В перерізі, перпендикулярному осі x , діють погонний згинальний момент M_x і погонна поздовжня сила N_x , які визначаються наступним чином:

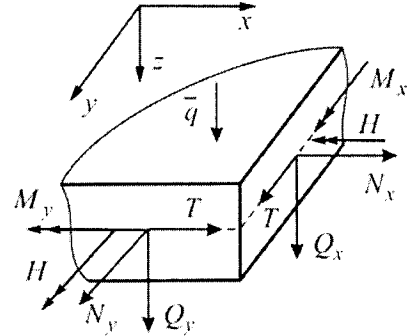


Рис. 25.2

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz. \quad (25.4)$$

Відповідно в перерізі, перпендикулярному осі y , діють M_y і N_y :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz. \quad (25.5)$$

Дотичним напруженням τ_{xy} відповідають погонні крутні моменти H та сили T

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, \quad (25.6)$$

а дотичним напруженням τ_{xz} і τ_{yz} – поперечні сили Q_x і Q_y :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (25.7)$$

Цілоком аналогічно до погонних зусиль приводяться зовнішні навантаження, які діють на бокові грані пластини. Таким чином, на частині контуру $x = \text{const}$ можуть бути заданими величини зусиль $\bar{N}_x, \bar{T}, \bar{M}_x, \bar{H}, \bar{Q}_x$, або переміщень $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$. Відповідно, на частині контуру $y = \text{const}$ можуть бути заданими $\bar{N}_y, \bar{T}, \bar{M}_y, \bar{H}, \bar{Q}_y$,

або \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$.

Варіація роботи внутрішніх сил тепер може бути записана наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta A_{BC} &= \iiint_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dV = \\ &= \iint_S [M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + 2H \delta \chi + N_x \delta \epsilon_x + N_y \delta \epsilon_y + T \delta \gamma] dS. \end{aligned} \quad (25.8)$$

Використовуючи співвідношення (25.1) та виконуючи інтегрування частинами, можемо записати:

$$\begin{aligned} \iint_S [N_x \delta \epsilon_x + N_y \delta \epsilon_y + T \delta \gamma] dS &= - \iint_S \left[\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta v \right] dS - \\ &- \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta w dS + \\ &+ \int_0^b \left[N_x \left(\delta u + \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right) + T \left(\delta v + \frac{\partial w}{\partial y} \delta w \right) \right] dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\ &+ \int_0^a \left[N_y \left(\delta v + \frac{\partial w}{\partial y} \delta w \right) + T \left(\delta u + \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right) \right] dx \Big|_{y=0}^{y=b}. \end{aligned} \quad (25.9)$$

В свою чергу, використання (25.2) та дворазове інтегрування частинами дозволяє зробити наступне перетворення:

$$\begin{aligned} \iint_S [M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + 2H \delta \chi] dS &= - \iint_S \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{2\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right) \delta w dS + \\ &+ \int_0^b \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{2\partial H}{\partial y} \right) \delta w dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{2\partial H}{\partial x} \right) \delta w dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \\ &- \int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \left[(2H \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} \right] \Big|_{y=0}^{y=b}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Урахування (25.9) і (25.10) дозволяє надати варіації роботи внутрішніх сил наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \delta A_{BC} &= - \iint_S \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta u dS - \iint_S \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta v dS - \\ &- \iint_S \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{2\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta w dS + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^b (N_x \delta u + T \delta v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a (N_y \delta v + T \delta u) dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
 & - \int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \int_0^b \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
 & + \int_0^a \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \left[(2H \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b}.
 \end{aligned}$$

Варіація роботи зовнішніх сил після нескладних перетворень може бути записана так:

$$\begin{aligned}
 \delta A_{3C} = & \int_0^b (\bar{N}_x \delta u + \bar{T} \delta v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a (\bar{N}_y \delta v + \bar{T} \delta u) dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \int_0^b \bar{M}_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a \bar{M}_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \\
 & + \int_0^b \left(\bar{Q}_x + \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right) \delta w dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \left(\bar{Q}_y + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right) \delta w dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \left[(2\bar{H} \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b} + \iint_S \bar{q} \delta w ds. \quad (25.12)
 \end{aligned}$$

Прирівнюючи (25.11) і (25.12), отримуємо інтегральну тотожність, яка є математичним записом принципу можливих переміщень для тонкої пластини:

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta u ds + \iint_S \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta v ds + \\
 & + \iint_S \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{2\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{q} \right] \delta w ds + \\
 & + \int_0^b \left[(\bar{N}_x - N_x) \delta u + (\bar{T} - T) \delta v - (\bar{M}_x - M_x) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\bar{Q}_x + \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial H}{\partial y} - N_x \frac{\partial w}{\partial x} - T \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w \right] dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
 & + \int_0^a \left[(\bar{N}_y - N_y) \delta v + (\bar{T} - T) \delta u - (\bar{M}_y - M_y) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\bar{Q}_y + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial H}{\partial x} - N_y \frac{\partial w}{\partial y} - T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right] dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \left[(2(\bar{H} - H) \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b} = 0.
 \end{aligned}$$

За умови довільності варіацій δu , δv , δw , $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ із рівності (25.13)

витікають рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{q} = 0, \quad (25.14)$$

та силові граничні умови на ділянках контуру $x = \text{const}$:

$$N_x = \bar{N}_x; \quad T = \bar{T}; \quad M_x = \bar{M}_x;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} = \bar{Q}_x + \frac{\partial \bar{H}}{\partial y}, \quad (25.15)$$

на ділянках контуру $y = \text{const}$:

$$N_y = \bar{N}_y; \quad T = \bar{T}; \quad M_y = \bar{M}_y;$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} = \bar{Q}_y + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}. \quad (25.16)$$

Крім того, в кутових точках маємо умови $H = \bar{H}$ (якщо кут є вільним від в'язі в напрямку осі Z , то $H = 0$).

До рівнянь рівноваги також відносяться співвідношення між погонними моментами та поперечними силами:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (25.17)$$

Для утворення повної системи рівнянь задачі геометричні співвідношення (25.1), (25.2), рівняння сумісності деформацій (25.3) та рівняння рівноваги (25.14), (25.16) мають бути доповнені залежностями між зусиллями та деформаціями. Якщо деформування лишається лінійно пружним, то фізичні співвідношення набувають вигляду

$$M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad H = D(1 - \nu)\chi. \quad (25.18)$$

Тут ν – коефіцієнт Пуассона, а через D позначена циліндрична жорсткість пластини:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (25.19)$$

крім того,

$$N_x = \frac{Eh}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{Eh}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad T = \mu h \gamma. \quad (25.20)$$

Можна, навпаки, виразити деформації через зусилля:

$$\kappa_x = \frac{12}{Eh^3}(M_x - \nu M_y), \quad \kappa_y = \frac{12}{Eh^3}(M_y - \nu M_x), \quad \chi = \frac{12}{Eh^3}(1 + \nu)H,$$

$$\varepsilon_x = \frac{N_x - \nu N_y}{Eh}, \quad \varepsilon_y = \frac{N_y - \nu N_x}{Eh}, \quad \gamma = \frac{T}{\mu h}. \quad (25.21)$$

Погонні зусилля, що діють в серединній поверхні, подано у вигляді других похідних функції напружень Φ :

$$N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; T = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (25.22)$$

За допомогою підстановки співвідношень (25.22) в перші два рівняння рівноваги (25.14) можна пересвідчитись в тому, що тепер ці рівняння задовольняються автоматично.

Згинальні та крутний моменти виразимо, використовуючи (25.18), (25.2), через функцію прогинів пластини:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (25.23)$$

Підставимо (25.22), (25.23) в останнє з рівнянь рівноваги (25.14) і отримаємо

$$\frac{D}{h} \Delta \Delta w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\bar{q}}{h}, \quad (25.24)$$

де $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа, а $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Ще одне співвідношення, що пов'язує між собою функції Φ і w , можна отримати з рівняння сумісності деформацій (25.3), якщо скористатись (25.2), (25.21), (25.22):

$$\Delta \Delta \Phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (25.25)$$

Рівняння (25.24) і (25.25) утворюють основну систему нелінійних диференціальних рівнянь теорії гнучких пластин.

25.2. Основні варіаційні рівняння

Варіаційну постановку задачі здійснимо на основі першої форми функціонала Ху-Васідзу, яка для задачі про згин тонкої пластини при заданих граничних умовах може бути подана наступним чином

$$\begin{aligned} \Pi_1^{XB} = & \iint_S \frac{1}{2} \left[N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + T \gamma + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H \chi \right] dS - \iint_S \bar{q} w dS - \\ & - \iint_S N_x \left[\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dS - \iint_S N_y \left[\varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dS - \\ & - \iint_S T \left[\gamma - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dS - \iint_S \left[M_x \left(\kappa_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_y \left(\kappa_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2H \left(\chi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dS + \\ & + \text{контурні інтеграли, які відповідають заданим граничним умовам.} \quad (25.26) \end{aligned}$$

Функціоналу (25.26) за допомогою елементарних перетворень можна надати наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{XB} = & -\frac{1}{2} \iint_S [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + T\gamma + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H\chi] dS - \iint_S \bar{q} w dS + \\ & + \iint_S \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dS + \frac{1}{2} \iint_S \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dS - \\ & - \iint_S \left[M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dS + \text{контурні інтеграли.} \quad (25.27) \end{aligned}$$

Третій інтеграл в (25.27) може бути перетворений за допомогою інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dS = & \int_0^b (N_x u + Tv) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a (N_y v + Tu) dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \\ & - \iint_S \left[\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) u + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) v \right] dS. \quad (25.28) \end{aligned}$$

Крім того, враховуючи (25.2) і (25.21) можна записати

$$\begin{aligned} N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + T\gamma = & \frac{1}{Eh} \left[(N_x + N_y)^2 + 2(1+\nu)(T^2 - N_x N_y) \right]; \\ M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H\chi = & D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (25.29) \end{aligned}$$

Тоді функціонал (25.27) набуває такого вигляду

$$\begin{aligned} \Pi = & -\frac{1}{2Eh} \iint_S \left[(N_x + N_y)^2 + 2(1+\nu)(T^2 - N_x N_y) \right] dS + \\ & + \frac{D}{2} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dS - \\ & - \iint_S \left[\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) u + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) v \right] dS + \frac{1}{2} \iint_S \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dS - \\ & - \iint_S \bar{q} w dS + \text{контурні інтеграли.} \end{aligned}$$

Нарешті, якщо взяти до уваги (25.22), отримаємо:

$$\Pi^* = -\frac{1}{2} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 \frac{h}{E} + 2(1+\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \frac{h}{E} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right.$$

$$-2D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + 2\bar{q}w \Big\} dS +$$

+ контурні інтеграли. (25.30)

Умовою стаціонарності функціонала (25.30) є рівність нулю частинних варіацій $\delta_w \Pi^*$ і $\delta_\Phi \Pi^*$.

Перша з цих варіацій може бути записана наступним чином:

$$\delta_w \Pi^* = \iint_S \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial y^2} \right] + \right.$$

$$+ D(1-\nu) \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] +$$

$$\left. + h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) \right] - \bar{q} \delta w \right\} dS.$$

Якщо за допомогою інтегрування частинами позбутись похідних від δw , відкинути контурні інтеграли та прирівняти варіацію $\delta_w \Pi^*$ до нуля, то отримаємо варіаційне рівняння:

$$\delta_w \Pi^* = \iint_S \left\{ D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \right.$$

$$\left. - h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{q} \right\} \delta w dS = 0. \quad (25.31)$$

Оскільки варіація δw є довільною, то першою умовою стаціонарності функціонала Π^* є задовільнення функціями Φ та w рівняння рівноваги (25.24).

Визначимо тепер частинну варіацію $\delta_\Phi \Pi^*$:

$$\delta_\Phi \Pi^* = - \iint_S \left\{ \frac{h}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial y^2} \right] + \right.$$

$$+ \frac{h(1+\nu)}{E} \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial x^2} \right] -$$

$$\left. - \frac{h}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dS.$$

Щоб позбутися похідних від $\delta \Phi$, двічі проінтегруємо наведений вираз частинами, а потім відкинемо контурні інтеграли. Якщо прирівняти результат до нуля, то будемо мати наступне варіаційне рівняння:

$$\delta_{\Phi} \Pi^* = - \iint_S \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \right\} \delta \Phi h dS = 0. \quad (25.32)$$

Оскільки варіація $\delta \Phi$ є довільною, то для стаціонарності функціонала Π^* необхідно, щоб функції Φ і w задовольняли рівнянням сумісності деформацій (25.25).

Отже, варіаційна постановка задачі, що полягає у відшукуванні функцій Φ і w , які надають стаціонарного значення функціонала (25.30), є еквівалентною постановці у вигляді системи диференціальних рівнянь (25.24), (25.25).

25.3. Чисельне розв'язання варіаційних рівнянь

Для побудови розв'язків варіаційних рівнянь в теорії гнучких пластин найчастіше застосовуються прямі методи. Функцію прогину $w(x, y)$ при цьому подають у вигляді ряду

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i(x, y), \quad (25.33)$$

де $\eta_i(x, y)$ – лінійно незалежні базисні функції, які задовольняють граничним умовам; a_i – узагальнені координати, що підлягають визначенню.

Підставимо ряд (25.33) в праву частину рівняння сумісності деформацій (25.25) і проінтегруємо, підпорядковуючи результат граничним умовам для функції Φ . Тоді ми отримаємо вирази для Φ і w , які містять невідомі параметри a_i .

Якщо базисні функції задовольняють як кінематичним, так і статичним граничним умовам, то для визначення a_i можна скористатися методом Бубнова-Гальоркіна, який полягає у підстановці виразів для Φ і w у варіаційне рівняння, що базується на принципі можливих переміщень:

$$\iint_S X \delta w dx dy = 0, \quad (25.34)$$

де через X позначений оператор рівняння рівноваги

$$X = D \Delta \Delta w - h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{q}. \quad (25.35)$$

В свою чергу, можна подати варіацію δw через варіації узагальнених координат:

$$\delta w = \sum_{i=1}^n \eta_i \delta a_i. \quad (25.36)$$

Відсутність контурних інтегралів у рівнянні (25.34) пояснюється тим, що базисні функції $\eta_i(x, y)$ задовольняють всі граничні умови.

Підстановка (25.36) в (25.34) дає

$$\sum_{i=1}^n \iint_S X \eta_i \delta a_i dx dy = 0. \quad (25.37)$$

Оскільки варіації δa_i є довільними, то рівняння (25.37) буде задовільнено, якщо будуть виконані умови

$$\iint_S X \eta_i dx dy = 0. \quad (25.38)$$

Після інтегрування отримуємо систему кубічних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів a_i , після розв'язання якої зможемо за допомогою (25.33) визначити наближено прогин $w(x, y)$, а слідом за ним й інші параметри напружено-деформованого стану пластини.

Точність результату, отриманого таким чином, залежить від того наскільки вдало підібрані базисні функції η_i . В багатьох випадках вдається підібрати функції η_i , які задовольняють тільки геометричним граничним умовам задачі. В такому разі користуються іншим прямим методом – методом Рітца.

Звернемось тепер до функціонала Π^* (25.30), отриманого на основі першої форми функціонала Ху-Васідзу. Знову скористаємось наближеним виразом для прогинів (25.33), проінтегруємо його і отримаємо вираз для функції напружень Φ . Потім підставимо w і Φ у вираз для функціонала Π^* , який після цього стає функцією параметрів a_i . Завдяки цьому варіація $\delta \Pi^*$ може бути подана у вигляді суми варіацій, які відповідають зміні різних параметрів δa_i :

$$\delta \Pi^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi^*}{\partial a_i} \delta a_i = 0. \quad (25.39)$$

З огляду на довільність варіацій δa_i будемо мати n рівнянь відносно параметрів a_i :

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25.40)$$

Після проведення інтегрування по x і y отримаємо систему алгебраїчних рівнянь з такою самою структурою, що і в методі Бубнова-Гальоркіна. Розв'язуючи цю систему, знаходимо a_i , після чого за допомогою (25.33) визначаємо прогини пластини $w(x, y)$, а слідом за цим і інші необхідні параметри, що характеризують напружено-деформований стан пластини.

26. Нелінійне деформування гнучких пологих оболонок

26.1. Основні співвідношення геометрично нелінійної теорії гнучких пологих оболонок

Будемо розглядати тонкі оболонки постійної товщини, виготовлені з однорідного ізотропного матеріалу, деформування якого підпорядковано закону Гука.

Для переходу від співвідношень тривимірної теорії пружності до двовимірної задачі скористуємось тими самими гіпотезами, що і у випадку гнучкої пластини, тобто гіпотезою недеформівних нормалей і гіпотезами щодо величин прогинів і нормальних напружень на площинах, паралельних серединній поверхні.

Зокрема, прогини точок серединної поверхні оболонки є величинами одного порядку з її товщиною, а нормальні напруження в напрямку нормалі до серединної поверхні є малими порівняно із основними напруженнями, і ними можна знехтувати. Під основним напруженням в теорії оболонок розуміють нормальні і дотичні напруження в самій серединній поверхні і на паралельних їй площинах.

Будемо користуватись ортогональними координатами x, y, z , причому лінії x, y будемо суміщати з лініями кривизни серединної поверхні. Лінія z спрямована вздовж нормалі до центру кривизни.

Наслідком прийняття вищезгаданих гіпотез і криволінійної системи координат є наступні вирази, які пов'язують між собою переміщення точок серединної поверхні та довільних точок оболонки:

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) - z \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x}; \quad v(x, y, z) = v(x, y, 0) - z \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial y};$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0).$$

Надалі так само, як і в задачі про згин тонкої пластини, будемо позначати

$$u = u(x, y, 0); \quad v = v(x, y, 0); \quad w = w(x, y, 0).$$

При вивченні тонких гнучких оболонок і пластинок зазвичай приймають, що кути повороту $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ значно перевищують значення похідних інших компонент

переміщень $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ і т.п. Також вважають, що квадрати кутів повороту $(\frac{\partial w}{\partial x})^2$ є

величинами одного порядку з похідними $\frac{\partial u}{\partial x}$ і т.п., а квадратами похідних типу $(\frac{\partial w}{\partial x})^2$

можна знехтувати. В задачах про деформування оболонок також слід приймати до уваги криволінійність координатної сітки. Результатом урахування всіх цих обставин є наступні вирази для деформацій в серединній поверхні вздовж координатних ліній

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (26.1)$$

де k_x, k_y – початкові кривизни серединної поверхні оболонки.

Деформації зсуву в серединній поверхні оболонки не відрізняються від аналогічних величин для пластини

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (26.2)$$

Зміни головних кривизн серединної поверхні оболонки задаються виразами, які співпадають із виразами для кривизн серединної поверхні пластини:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (26.3)$$

Рівняння сумісності деформацій серединної поверхні оболонки має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \chi^2 - \kappa_x \kappa_y - k_x \kappa_y - k_y \kappa_x. \quad (26.4)$$

Співвідношення (26.1) – (26.4) відповідають геометричній стороні задачі. Напружений стан оболонки характеризується внутрішніми зусиллями, визначення яких збігаються з відповідними внутрішніми зусиллями в пластині (співвідношення (25.4) – (25.7)). Позначення та напрями зусиль показані на рис. 26.1.

Співвідношення між деформаціями і погонними зусиллями (фізична сторона задачі) формально лишаються тими самими, що і для пластини:

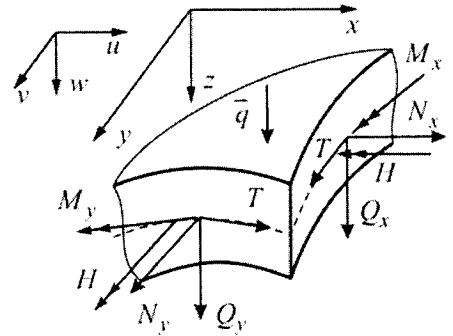


Рис. 26.1

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \quad T = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma; \quad (26.5)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y); \quad M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x); \quad H = D(1-\nu)\chi. \quad (26.6)$$

Також збігаються і вирази для варіації роботи внутрішніх сил:

$$\delta A_{BC} = \iint_S [M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + 2H \delta \chi + N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + T \delta \gamma] dS. \quad (26.7)$$

Розглянемо оболонку, серединна поверхня якої обмежена координатними лініями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Скористаємось тим, що

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} - k_x \delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x}; \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} - k_y \delta w + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial(\delta w)}{\partial y};$$

$$\delta \gamma = \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial y};$$

$$\delta \kappa_x = -\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2}; \quad \delta \kappa_y = -\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y^2}; \quad \delta \chi = -\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \partial y} \quad (26.8)$$

і надамо за допомогою інтегрування частинами варіації роботи внутрішніх сил наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 \delta A_{BC} = & - \iint_S \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta u \, dS - \iint_S \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta v \, dS - \\
 & - \iint_S \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k_x N_x + k_y N_y \right] \delta w \, dS + \int_0^b (N_x \delta u + T \delta v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
 & + \int_0^a (N_y \delta v + T \delta u) dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \\
 & + \int_0^b \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
 & + \int_0^a \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w dx \Big|_{y=0}^{y=b} - \left[(2H \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} \right] \Big|_{y=0}^{y=b}. \quad (26.9)
 \end{aligned}$$

Вираз для варіації роботи зовнішніх сил збігається з аналогічним виразом для пластинки (25.12). На основі принципу можливих переміщень можемо прирівняти варіації δA_{BC} і δA_{3C} та отримати інтегральну рівність наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta u \, dS + \iint_S \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta v \, dS + \\
 & + \iint_S \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\
 & + \left. k_x N_x + k_y N_y + \bar{q} \right] \delta w \, dS + \int_0^b \left[(\bar{N}_x - N_x) \delta u + (\bar{T} - T) \delta v - (\bar{M}_x - M_x) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\
 & + \left. \left(\bar{Q}_x + \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial H}{\partial y} - N_x \frac{\partial w}{\partial x} - T \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w \right] dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
 & + \int_0^a \left[(\bar{N}_y - N_y) \delta v + (\bar{T} - T) \delta u - (\bar{M}_y - M_y) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
 & + \left. \left(\bar{Q}_y + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial H}{\partial x} - N_y \frac{\partial w}{\partial y} - T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right] dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \left[2(\bar{H} - H) \delta w \Big|_{x=0}^{x=a} \right] \Big|_{y=0}^{y=b} = 0. \quad (26.10)
 \end{aligned}$$

Інтегральна рівність (26.10) є еквівалентом рівнянь рівноваги тонкої пологої оболонки і силових граничних умов. При цьому рівняння рівноваги, які пов'язують між собою погонні сили N_x , N_y , T , а також граничні умови, не відрізняються від відповідних співвідношень, отриманих для гнучкої пластинки, тоді як рівняння, яке виражає рівність нулю суми проєкцій всіх сил на нормаль, набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k_x N_x + k_y N_y + \bar{q} = 0. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Якщо за формулами (25.22) виразити зусилля, які діють в серединній площині, через функцію напружень Φ і підставити їх до (26.11), а також використати співвідношення (26.3), (26.6), то можна надати рівнянню (26.11) такої форми:

$$\frac{D}{h} \Delta \Delta w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \right) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\bar{q}}{h}. \quad (26.12)$$

В свою чергу, умова сумісності деформацій (26.4) перетворюється на наступну рівність:

$$\frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (26.13)$$

Співвідношення (26.12), (26.13) є основними рівняннями теорії гнучких пологих оболонок.

26.2. Реалізація варіаційних принципів. Методи Рітца і Бубнова-Гальоркіна

Варіаційне рівняння для гнучкої оболонки, яке базується на принципі можливих переміщень, може бути подане наступним виразом (за однорідних граничних умов):

$$\iint_S X \delta w ds = 0, \quad (26.14)$$

де

$$X = D \Delta \Delta w - h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \right) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \bar{q}.$$

Якщо кривизни k_x і k_y є постійними, то чисельне розв'язання рівняння (26.14) може бути виконано без ускладнень за звичайною процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Тобто для функції прогину $w(x, y)$ обирається апроксимація

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i(x, y), \quad (26.15)$$

Шляхом інтегрування умови (26.13) визначається аналогічний вираз для функції напружень Φ , після чого складаються рівняння наступного вигляду

$$\iint_S X(a_1, \dots, a_n) \eta_i dx dy = 0. \quad (26.16)$$

Інтегрування по x і y дозволяє перейти від виразу (26.16) до системи алгебраїчних рівнянь відносно параметрів a_i , визначення яких рівносильне знаходженню наближених значень прогинів за формулою (26.15) та інших характеристик напружено-деформованого стану оболонки.

Інший варіант варіаційної постановки задачі отримаємо, якщо скористуємось функціоналом Ху-Васідзу. За тією ж схемою, яка була використана в задачі про згин тонкої пластини, отримаємо функціонал

$$\begin{aligned} \Pi^* = & -\frac{1}{2} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \frac{h}{E} + 2(1+\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \frac{h}{E} + \right. \\ & + 2h \left(k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2\bar{q}w - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \\ & \left. - h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dS, \quad (26.17) \end{aligned}$$

умовами стаціонарності якого є задовільнення функціями w і Φ основних рівнянь теорії гнучких пологих оболонок (26.12), (26.13).

Для чисельного розв'язання задачі можемо тепер скористатись методом Рітца, за яким знову будується апроксимація функції прогинів у вигляді суми добутків невідомих параметрів a_i та базисних функцій η_i , що задовольняють кінематичним граничним умовам, тобто знову використовується подання (26.15). Після визначення функції напружень Φ і підстановки відповідних наближених виразів у (26.17) функціонал Π^* стає функцією параметрів a_1, a_2, \dots, a_n . Умовою стаціонарності функціонала Π^* тепер є n рівнянь відносно параметрів a_i .

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26.18)$$

Як і у випадку гнучкої пластини, з системи алгебраїчних рівнянь (26.18) знаходимо параметри a_i , після чого неважко за формулою (26.15) отримати наближений розв'язок задачі.

27. Поняття про варіаційні принципи в задачах пружнопластичності

Варіаційні принципи, що використовуються в теорії пружно-пластичних деформацій, є аналогічними принципу мінімуму потенціальної енергії та принципу Кастильяно у теорії пружності. Розглянемо особливості їх формулювання за наявності пластичних деформацій.

27.1. Основні гіпотези і рівняння теорії пластичності

Пластичні деформації виникають при досягненні напруженнями межі текучості, що визначається із експериментальних досліджень на розтяг-стиснення або зсув матеріалу. У випадку складного напруженого стану умова початку пластичності має вигляд:

$$\Phi_T(\sigma_{ij}) = \sigma^*(\sigma_T),$$

де $\sigma^*(\sigma_T)$ – константа матеріалу, пов'язана із експериментально визначеною межею текучості σ_T .

Закони і рівняння теорії пластичності, що описують деформування матеріалів за межами пружності при малих деформаціях, ґрунтуються на таких гіпотезах.

1. Матеріал є однорідним і ізотропним.
2. Матеріал після пружнопластичного деформування залишається суцільним.
3. Матеріал в процесі пружно-пластичного деформування не змінює свого об'єму, при цьому, при малих деформаціях об'ємна деформація пропорційна середньому напруженню (закон зміни об'єму):

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (27.1)$$

Малість змінення об'єму за рахунок пластичних деформацій доведена експериментально, в зв'язку з чим $\varepsilon_0^{(p)} = 0$. Зважаючи, що приращення повної середньої деформації є сумою пружної і пластичної складових

$$d\varepsilon_0 = d\varepsilon_0^{(e)} + d\varepsilon_0^{(p)} = d\varepsilon_0^{(e)}.$$

девіатор і тензор приращень пластичних деформацій є тотожними:

$$D_{d\varepsilon^{(p)}} = T_{d\varepsilon^{(p)}}.$$

4. Для кожного матеріалу при малих пружно-пластичних деформаціях між інтенсивністю напружень і інтенсивністю деформацій існує функціональна залежність $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, яка для даного матеріалу не залежить від вигляду напруженого стану і є подібною до експериментально визначеної залежності між напруженнями і деформаціями при одновісному розтягу.

5. Розглядаються лише прості процеси навантаження, при яких змінення в часі всіх прикладених до тіла навантажень здійснюється пропорційно до одного параметра. Відповідно при малих пружно-пластичних деформаціях компоненти девіатора деформації є пропорційними компонентам девіатора напружень (закон зміни форми):

$$D_\varepsilon = \frac{D_\sigma}{2G}. \quad (27.2)$$

Формулювання закону змінення форми у термінах головних напружень і деформацій дозволяє зробити висновок про подібність кругових діаграм напружень і деформацій (діаграм Мора) для всіх напружених станів.

Наведені гіпотези пластичного деформування дозволяють встановити взаємозв'язок між напруженнями і деформаціями (теорії пластичності деформаційного типу) або швидкостями деформацій (теорії пластичного плинину).

Згідно до теорії малих пружно-пластичних деформацій (теорії деформаційного типу) взаємозв'язок між компонентами деформацій ε_{ij} і величинами напружень σ_{ij} має вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}, \quad (27.3)$$

де s_{ij} – компоненти девіатора напружень.

Згідно до теорії пластичного плинину приращення пластичних деформацій пов'язані із напруженнями співвідношенням:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{(p)}}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{(p)}}{\sigma_i} s_{ij}.$$

Внаслідок пластичного деформування звичайно спостерігається підвищення межі текучості матеріалу у напрямку деформування - зміцнення. В той же час при подальшому деформуванні в зворотному напрямку (стиск після розтягу) спостерігається зменшення опору матеріалу пластичному деформуванню (ефект Баушингера). Розглядувані в даному розділі рівняння не дозволяють враховувати це явище при знакомінному навантаженні.

В якості міри зміцнення матеріалу може бути використана робота пластичних деформацій, яка є додатною для пластичної деформації, що розвивається. На цій основі умови виникнення пластичних деформацій формулюються наступним чином (постулат Друккера):

- у процесі навантаження додаткові напруження виконують додатну роботу;
- протягом усього циклу додаткового навантаження та розвантаження за наявності пластичних деформацій додаткові напруження виконують додатну роботу.

В розглядуваних в даному розділі задачах пружнопластичного деформування передбачається, що наявність найменшого зовнішнього навантаження приводить до виникнення деформацій. В той же час в теорії пластичності досить широке розповсюдження отримала модель ідеально-жорсткопластичного тіла, яке розпочинає деформуватись лише при досягненні навантаженням критичного значення, що відображає вкрай ідеалізовану поведінку досліджуваного об'єкта. Опис теорії жорстко-пластичних тіл, методів розв'язання задач на її основі, відповідні теореми, що їх обґрунтовують та приклади розв'язання задач можна знайти, наприклад в [55, 88].

27.2. Теорема Клапейрона

Згідно із теоремою Клапейрона, робота зовнішніх сил на відповідних до них переміщеннях дорівнює подвоєній потенціальній енергії деформації тіла, тобто

$$A = 2 \int_V W dV. \quad (27.4)$$

Розглянемо узагальнення теореми у випадку, коли залежність між напруженнями та деформаціями нелінійна. Нехай на тіло, що має об'єм V , обмежене поверхнею S , діють об'ємні (X_i , $i=1,2,3$) та поверхневі X_{vi} сили, причому на одній частині тіла задано поверхневі сили, а на іншій – переміщення u_i . Робота зовнішніх сил, прикладених до тіла, на відповідних переміщеннях визначається за формулою:

$$A = \iiint_V X_i u_i dV + \iint_S X_{vi} u_i dS. \quad (27.5)$$

Використовуючи формулу Гаусса–Остроградського, вираз для інтеграла по поверхні перетворимо на інтеграл по об'єму, який, з урахуванням граничних умов на поверхні, набуває вигляду:

$$\iint_S X_{vi} u_i dS = \iiint_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i + \frac{1}{2} \sigma_{kl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] dV. \quad (27.6)$$

Зважаючи, що згідно до диференціальних рівнянь рівноваги $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$, а за рівняннями Коші $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$, вираз (27.6) подамо у вигляді:

$$A = \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (27.7)$$

На підставі закону про пропорційність компонентів дівіатора деформацій та компонентів дівіатора напружень (27.2), установлюємо, що

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} = 2(W^* + \psi \tau_i^2). \quad (27.8)$$

Оскільки $\gamma_i = 2\psi \tau_i$, то $\psi \tau_i^2 = \frac{\gamma_i \tau_i}{2}$.

Тоді

$$A = 2 \iiint_V \left(W^* + \frac{\gamma_i \tau_i}{2} \right) dV, \quad (27.9)$$

де W^* – пружна енергія об'ємного стиснення; τ_i – інтенсивність дотичних напружень; γ_i – інтенсивність деформацій зсуву.

27.3. Принцип мінімуму повної енергії

Дійсні переміщення, на відміну від можливих, надають повній енергії тіла мінімальних значень, тобто

$$\int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - A = \min, \quad (27.10)$$

де $\Pi(\varepsilon_{ij})$ — потенціал деформацій.

Припустимо, що тіло перебуває в рівновазі і займає об'єм V , обмежений поверхнею S . На одній частині поверхні задано поверхневі сили X_{vi} , а на іншій — переміщення u_i . Якщо надати точкам тіла нескінченно малих переміщень δu_i , то робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях визначатиметься за формулою:

$$\delta A = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_S X_{vi} \delta u_i dS. \quad (27.11)$$

Перетворивши за формулою Гауса–Остроградського інтеграл по поверхні в об'ємний і використавши умови на поверхні, диференціальні рівняння рівноваги та умови Коші, вираз (27.11) запишемо у вигляді:

$$\delta A = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{(i)(j)} dV. \quad (27.12)$$

Перетворимо підінтегральний вираз, використовуючи розклад тензорів напружень і деформацій на кульовий тензор і девіатор:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{(i)(j)} &= (s_{ij} + \delta_{ij} \sigma_0) (\delta e_{ij} + \delta_{ij} \delta \varepsilon_0) = \\ &= s_{ij} \delta e_{ij} + \delta_{ij} \sigma_0 \delta e_{ij} + s_{ij} \delta_{ij} \delta \varepsilon_0 + \delta_{ij} \sigma_0 \delta_{ij} \delta \varepsilon_0 = s_{ij} \delta e_{ij} + \sigma_0 \delta e_{ii} + s_{ii} \delta \varepsilon_0 + 3\sigma_0 \delta \varepsilon_0, \end{aligned}$$

оскільки $\delta_{ij} \delta e_{ij} = \delta e_{ii}$, $\delta_{ij} s_{ij} = s_{ii}$, $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$, e_{ij} — компоненти девіатора деформацій.

Другий і третій складники в отриманому виразі дорівнюють нулю, що обумовлено введеною гіпотезою про сталість об'єму тіла в процесі пружно-пластичного деформування. Враховуючи співвідношення (27.1), (27.3) і подання

інтенсивності деформацій пластичності у вигляді $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}$, отримаємо:

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{(i)(j)} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} e_{ij} \delta e_{ij} + 3\sigma_0 \delta \varepsilon_0 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \frac{1}{2} \delta \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right) + 9K\varepsilon_0 \delta \varepsilon_0 = \sigma_i \delta \varepsilon_i + \frac{9}{2} K \delta \varepsilon_0^2 = \delta \Pi,$$

де $\Pi = \frac{9}{2} K \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i = \Pi_0 + \Pi_\Phi$ — потенціал деформацій,

Π_0 — питома потенціальна енергія змінення об'єму, а Π_Φ — питома енергія змінення форми, яка в певному масштабі дорівнює площі, що обмежена діаграмою деформування матеріалу і віссю ε_i (рис. 27.1).

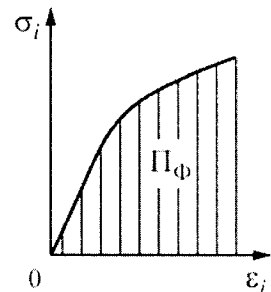


Рис. 27.1

За допомогою формул $\frac{\partial \Pi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$, вираз (27.12) набуває вигляду

$$\delta A = \int_V \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

або

$$\delta \left[\int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - A \right] = 0. \quad (27.13)$$

Тут $\int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - A$ — повна енергія системи.

Отже, дійсна форма рівноваги тіла відрізняється від усіх можливих форм рівноваги тіла тим, що для неї повна енергія є мінімальною:

$$\exists = \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - A = \min. \quad (27.14)$$

У виразі (27.14) перша складова — це питома потенціальна енергія зміни об'єму, а друга — питома потенціальна енергія зміни форми.

27.4. Принцип можливих змін напруженого стану і принцип мінімуму доповнювальної роботи

Припустимо, що тіло перебуває в рівновазі і займає об'єм V , обмежений поверхнею S , причому на одній частині поверхні задано поверхневі сили X_v, Y_v, Z_v , а на іншій — переміщення u, v, w . Порівняємо дійсний напружений стан у різних точках тіла, який характеризується напруженнями $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, з усіма іншими, проте близькими напруженими станами (статично можливими), які характеризуються напруженнями

$$\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx}; \quad \sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy}; \quad \sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz}; \quad \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}; \quad \tau_{yz} + \delta\tau_{yz}; \quad \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}.$$

Оскільки статично можливі напруження задовольняють диференціальні рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) + X + \delta X = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx} + \delta\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz}) + Y + \delta Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{zy} + \delta\tau_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz}) + Z + \delta Z = 0, \end{cases} \quad (27.15)$$

а також умови на поверхні

$$\begin{cases} X_v + \delta X_v = (\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx})l + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})m + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})n \\ Y_v + \delta Y_v = (\tau_{yx} + \delta\tau_{yx})l + (\sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy})m + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})n \\ Z_v + \delta Z_v = (\tau_{zx} + \delta\tau_{zx})l + (\tau_{zy} + \delta\tau_{zy})m + (\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz})n, \end{cases} \quad (27.16)$$

і дійсні напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ задовольняють диференціальні рівняння рівноваги і умови на поверхні, то варіації напружень $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \delta\sigma_{zz}, \delta\tau_{xy}, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}$ також мають задовольняти рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \delta\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\tau_{xz} + \delta X = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\tau_{yz} + \delta Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta\tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\sigma_{zz} + \delta Z = 0 \end{cases} \quad (27.17)$$

і умови на поверхні:

$$\begin{cases} \delta X_v = \delta\sigma_{xx}l + \delta\tau_{xy}m + \delta\tau_{xz}n \\ \delta Y_v = \delta\tau_{yx}l + \delta\sigma_{yy}m + \delta\tau_{yz}n \\ \delta Z_v = \delta\tau_{zx}l + \delta\tau_{zy}m + \delta\sigma_{zz}n. \end{cases} \quad (27.18)$$

Тоді робота варіацій зовнішніх сил на можливих переміщеннях (якщо брати можливі переміщення за дійсні u, v, w) визначатиметься за формулою

$$\int_V [u\delta X + v\delta Y + w\delta Z] dV + \int_S [u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v] dS. \quad (27.19)$$

Перетворивши інтеграл по поверхні в інтеграл по об'єму за допомогою формули Гаусса–Остроградського і використавши граничні умови на поверхні, умови Коші, а також задовольнивши рівняння рівноваги, можна записати вираз роботи варіацій зовнішніх сил на можливих переміщеннях:

$$\begin{aligned} & \int_V [u\delta X + v\delta Y + w\delta Z] dV + \int_S [u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v] dS = \\ & = \int_V [\varepsilon_{xx}\delta\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\delta\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}\delta\sigma_{zz} + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx}] dV = \int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{(i)(j)} dV. \end{aligned} \quad (27.20)$$

Аналогічно до попереднього випадку перетворимо останній підінтегральний вираз, подаючи тензори напружень і деформацій через відповідні кульову і девіаторну складові:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{(i)(j)} &= (e_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_0)(\delta s_{ij} + \delta_{ij}\delta\sigma_0) = e_{ij}\delta s_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_0\delta s_{ij} + e_{ij}\delta_{ij}\delta\sigma_0 + \delta_{ij}\varepsilon_0\delta_{ij}\delta\sigma_0 = \\ &= e_{ij}\delta s_{ij} + \varepsilon_0\delta s_{ii} + e_{ii}\delta\sigma_0 + 3\varepsilon_0\delta\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}\delta s_{ij} + \frac{\sigma_0}{K}\delta\sigma_0 = \varepsilon_i\delta\sigma_i + \frac{1}{2K}\delta\sigma_0^2 = \delta R, \end{aligned}$$

де $R = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i d\sigma_i = R_0 + R_\Phi$ – доповнювальна робота, R_0

– питома доповнювальна робота змінення об'єму, а R_Φ – питома доповнювальна робота змінення форми, яка в певному масштабі дорівнює площі, що обмежена діаграмою деформування матеріалу і віссю σ_i (рис. 27.2).

Якщо використати формули

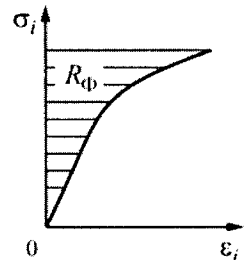


Рис. 27.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_{xx}; \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma_{yy}} = \varepsilon_{yy}; \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma_{zz}} = \varepsilon_{zz}; \\ \frac{\partial R}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial R}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial R}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}, \end{array} \right. \quad (27.21)$$

то вираз (27.20) можна переписати:

$$\begin{aligned} & \int_V [u\delta X + v\delta Y + w\delta Z] dV + \int_S [u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v] dS = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial R}{\partial \sigma_{xx}} \delta \sigma_{xx} + \frac{\partial R}{\partial \sigma_{yy}} \delta \sigma_{yy} + \frac{\partial R}{\partial \sigma_{zz}} \delta \sigma_{zz} + \frac{\partial R}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial R}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial R}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx} \right] dV = \delta \bar{R}. \end{aligned} \quad (27.22)$$

Вираз (27.22) є математичним формулюванням так званого принципу можливих змін напруженого стану тіла, відповідно до якого сума приростів всіх зовнішніх сил на переміщеннях точок прикладання цих сил дорівнює приросту доповнювальної роботи всього тіла. Для окремого випадку, коли об'ємні сили дорівнюють нулю $X = Y = Z = 0$, задані поверхневі сили на частині поверхні стали і, отже, їхні варіації дорівнюють нулю $\delta X_v = 0; \delta Y_v = 0; \delta Z_v = 0$, або переміщення на іншій частині також дорівнюють нулю ($u = 0; v = 0; w = 0$), з формули (27.22) випливає, що $\delta R = 0$. Оскільки друга варіація додатна, то

$$\bar{R} = \int_V R dV = \min. \quad (27.24)$$

Отже, дійсний напружений стан відрізняється від усіх статично можливих станів тим, що він надає тілу мінімум доповнювальної роботи, тобто з усіх статично можливих напружених станів лише для дійсного напруженого стану доповнювальна робота для всього тіла буде мінімальною. Звідси дістаємо рівняння, які називаються *варіаційними*:

$$\delta \left[\int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - A \right] = 0; \quad \delta \int_V R(\sigma_{ij}) dV = 0. \quad (27.25)$$

Рівняння (27.25) використовують для наближеного розв'язування задач теорії пластичності.

27.5. Апроксимація діаграм деформування фізично нелінійного пружного тіла. Приклади

Для дослідження фізично нелінійного пружного процесу для заданого матеріалу в якості першого наближення для закону деформацій можна прийняти степеневу залежність

$$\sigma = A\varepsilon^k.$$

Використовуючи дослідну діаграму розтягу-стиску заданого матеріалу (рис. 27.3),

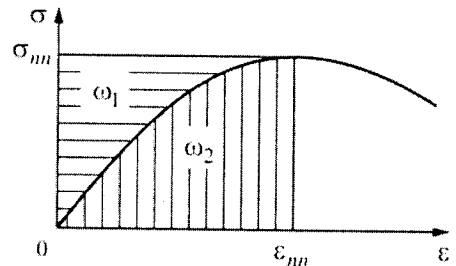


Рис. 27.3

можна визначити значення апроксимуючих її параметрів A і k з умови рівності межі міцності експериментальної діаграми і апроксимуючої її залежності, а також умови рівності питомих робіт по експериментальній діаграмі і по прийнятій залежності.

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad A = \frac{\sigma_{mn}}{\varepsilon_{mn}^k},$$

де ω_2 – експериментальне значення питомої роботи, що дорівнює вертикально заштрихованій площі на рис. 27.3, ω_1 – доповнювальна робота, що дорівнює горизонтально заштрихованій площі.

Зазначимо, що для залежності $\sigma = A\varepsilon^k$ $\varepsilon = A^{-1/k}\sigma^{1/k}$. Отримаємо

$$\omega_2 = u(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \frac{A\varepsilon^{k+1}}{k+1}; \quad \omega_1 = u^{\text{доп}}(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \frac{k}{k+1} A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}}; \quad \sigma\varepsilon = A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}} \varepsilon^k.$$

Відповідно перетворення Лежандра

$$u(\varepsilon) + u^{\text{доп}}(\sigma) = \sigma\varepsilon; \quad \frac{A\varepsilon^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{k+1} A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}} = A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}} \varepsilon^k = \sigma\varepsilon.$$

Теорема Лагранжа і Кастільяно мають вигляд:

$$\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{(k+1)A\varepsilon^k}{k+1} = \sigma; \quad \frac{\partial u(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k} A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{1}{k}} = \varepsilon.$$

Теорема Донкіна

$$\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial A} = \frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1}; \quad \frac{\partial u^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial A} = -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1}.$$

Побудова кожної із двоїстих функцій здійснюється за звичайною процедурою, наприклад:

$$F(\varepsilon, \sigma) = \sigma\varepsilon - \frac{A\varepsilon^{k+1}}{k+1}; \quad \frac{\partial F(\varepsilon, \sigma)}{\partial \varepsilon} = \sigma - A\varepsilon^k = 0; \quad \sigma = A\varepsilon^k.$$

$$\varepsilon^k = \frac{\sigma}{A}; \quad \varepsilon = A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{1}{k}}; \quad \varepsilon^{k+1} = A^{-\frac{k+1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}}.$$

$$g(\sigma) = A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}} - \frac{A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}}}{k+1} = \frac{k}{k+1} A^{-\frac{1}{k}} \sigma^{\frac{k+1}{k}}.$$

В окремому випадку «гуківського» матеріалу ($k=1$; $A=E$) отримаємо:

$$u(\varepsilon) = \frac{E\varepsilon^2}{2}; \quad u^{\text{доп}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2E},$$

перетворення Лежандра

$$\frac{E\varepsilon^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2E} = \sigma\varepsilon.$$

Теорема Лагранжа і Кастільяно:

$$\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \sigma; \quad \frac{\partial u(\sigma)}{\partial \sigma} = \varepsilon.$$

Теорема Донкіна

$$\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial E} = \frac{\varepsilon^2}{2}; \quad \frac{\partial u^{\text{доп}}(\sigma)}{\partial E} = -\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Для більшої відповідності результатам експериментального дослідження, для закону деформації фізично нелінійного пружного тіла, можна прийняти степеневий закон з трьома константами у вигляді:

$$\sigma = C\varepsilon^m(1 - \beta\varepsilon).$$

При наявності експериментальної умовної діаграми розтягу-стиску постійні C , m , β визначаються, підпорядковуючи апроксимуючу залежність трьом умовам:

- рівність межі міцності експериментальної діаграми і апроксимуючої залежності;
- рівність питомих робіт експериментальної діаграми і апроксимуючої її залежності;
- рівність модулів пружності при $\varepsilon = \varepsilon_{nn}$ експериментальної діаграми і апроксимуючої її залежності (умови рівності перших похідних при кінцевому значенні аргументу).

$$m = 2\frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \beta = \frac{m}{(m+1)\varepsilon_{nn}}, \quad C = \frac{\sigma_{nn}(m+1)}{\varepsilon_{nn}^m}.$$

У низці задач нелінійної теорії пружності для закону пружності виявляється зручною і близько відповідною дійсності апроксимуюча залежність вигляду:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) = \frac{\sigma_{nn}}{k_3 - k_1} \left[k_3 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nn}} \right)^{k_1} - k_1 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nn}} \right)^{k_3} \right].$$

Значення параметрів k_1 і k_3 визначаються із умов:

- робота ω_2 , обчислена по експериментальній діаграмі в відносних координатах (рис. 27.4), повинна дорівнювати роботі, обчисленій по апроксимуючій діаграмі;

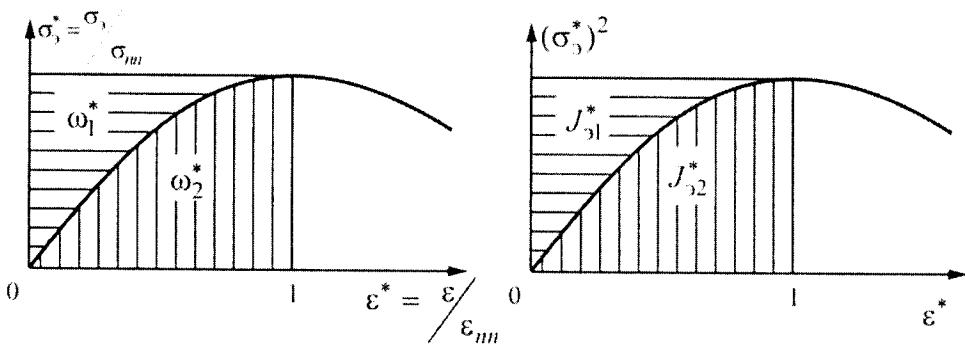


Рис. 27.4

- середнє квадратичне відхилення між експериментальною і апроксимуючою діаграмами повинне бути рівним нулю, тобто

$$\int_0^1 (\sigma^* - \sigma_3^*)^2 d\varepsilon^* = 0,$$

що рівносильне тотожності

$$\int_0^1 (\sigma^*)^2 d\varepsilon^* = \int_0^1 (\sigma_3^*)^2 d\varepsilon^*.$$

$$k_1 = \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\beta_1^2/4 - n(\beta_1 + 1)}, \quad k_3 = \frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\beta_1^2/4 - n(\beta_1 + 1)},$$

де $\beta_1 = \frac{nm}{2n-m} - \frac{1}{2}$, $m = \frac{I_{\partial 1}}{I_{\partial 2}}$, $n = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Приклад 27.1. Двостержнева симетрична система, виконана із фізично нелінійного матеріалу (рис. 27.5), знаходиться під дією сили P . Скласти вихідні рівняння для знаходження зв'язку між навантаженням P і вертикальним переміщенням f точки A для випадку кінцевих переміщень, тобто $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ вважати заданим.

Система рівнянь для розв'язання поставленої фізично і геометрично нелінійної задачі складається із заданого нелінійного закону пружності, із нелінійно геометричного співвідношення

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2} - 1$$

і статичних рівнянь:

$$P = 2N \cos \alpha, \quad N = \sigma F,$$

де α – кут в деформованому стані;

$$\xi = \frac{f}{l_0};$$

$$\cos \alpha = \frac{f_0 + f}{l} = \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{2 \cos \alpha_0 + 2\xi}{2\sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2} - 1}.$$

Використання приведених виразів приводить до рівняння:

$$P = 2F\sigma(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{d\xi}.$$

Приклад 27.2. Продовжити розв'язок попередньої задачі, вважаючи чинним наступний конкретний фізичний закон зв'язку напруження з деформацією:

$$\sigma = \frac{\sigma_{nn}}{K_3 - K_1} \left[K_3 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nn}} \right)^{K_1} - K_1 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nn}} \right)^{K_3} \right].$$

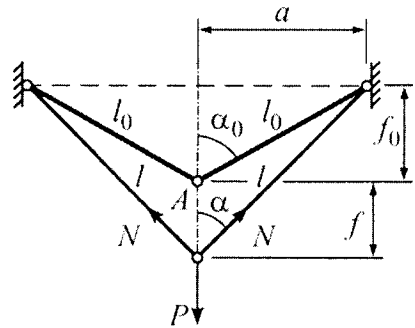


Рис. 27.5

Числові значення параметрів: $K_1 = 1.42$; $K_3 = 0.23$; $\varepsilon_{nn} = 0.23$. Початковий (до деформування) кут $\alpha_0 = 60^\circ$.

На рис. 27.6 шукана функція представлена у відносних координатах

$$p = \frac{P}{2F\sigma_{nn}}, \quad \xi = \frac{f}{l_0}$$

Пунктиром показана пряма, що відповідає лінійному (геометрично і фізично) розв'язку, тобто якщо очікувані деформації були б дуже малими, а матеріал підпорядковувався закону Гука.

Приклад 27.3. У попередній задачі провести наближене розв'язання, ігноруючи геометричну нелінійність. Оцінити похибку такого штучного розв'язку.

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \alpha_0} - 1 \approx \varepsilon \cos \alpha_0.$$

Проводячи чисельні підрахунки, отримаємо криву, показану довгими штрихами на рис. 27.6 (крива «наближений розв'язок»).

Приклад 27.4. Простежити, як зміняться результати, якщо в двостержневій системі (рис.27.5). Кути початкового нахилу стержнів до вертикалі $\alpha_0 = 30^\circ$.

На рис. 27.7 суцільною лінією показано зв'язок навантаження з прогином в дійсності, тобто у фізично та геометрично нелінійній задачі; пунктиром - для лінійної у фізичному сенсі задачі, тобто для «гуківського» матеріалу, але з урахуванням геометричної нелінійності.

Приклад 27.5. На вузол миттєво змінюваної системи (рис. 27.8) починає діяти статично наростаюча за величиною сила P (починаючи «з нуля»). Простежити характер розвитку деформації такої системи, вважаючи матеріал системи таким же фізично нелінійним, як і в прикладі 27.2. Провести співставлення з випадком «гуківського» матеріалу.

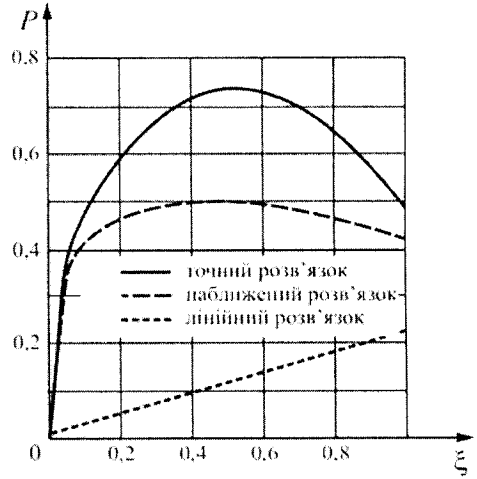


Рис. 27.6

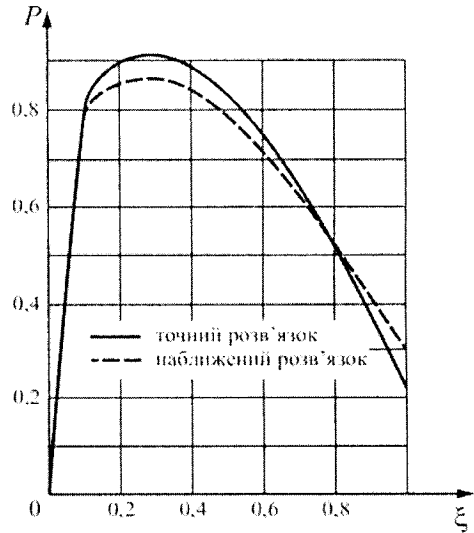


Рис. 27.7

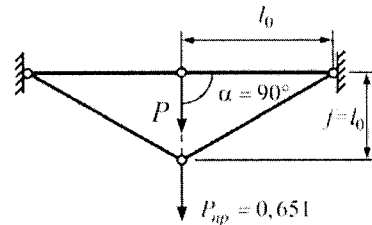


Рис. 27.8

На рис. 27.9 показано точний розв'язок (суцільна крива), а також наближений – у припущенні лінійної залежності між напруженням і деформацією (пунктирна крива).

Приклад 27.6. Розглянемо попередню задачу при фізичній нелінійності, заданій за законом

$$\sigma = A\varepsilon^k.$$

Тоді

$$T = \sigma F = A\varepsilon^k F = AF \frac{\alpha^{2k}}{2^k}.$$

$$P = 2\alpha T = AF \frac{\alpha^{2k+1}}{2^{k-1}}; \alpha = \left(\frac{P 2^{1-k}}{AF} \right)^{\frac{1}{2k+1}};$$

$$\Delta = \alpha l = \left(\frac{P 2^{1-k}}{AF} \right)^{\frac{1}{2k+1}} l; P = \frac{AF}{2^{1-k}} \left(\frac{\Delta}{l} \right)^{2k+1};$$

$$u(\Delta) = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{AF}{2^{1-k} l^{2k+1}} \int_0^{\Delta} \Delta^{2k+1} d\Delta = \frac{AF}{2^{1-k} l^{2k+1} (2k+2)} \Delta^{2k+2};$$

$$u^{\text{доп}}(P) = \int_0^P \Delta dP = \frac{2^{\frac{1-k}{2k+1}}}{(AF)^{\frac{1}{2k+1}}} l \int_0^P \frac{1}{P^{2k+1}} dP = \frac{2^{\frac{1-k}{2k+1}} l (2k+1)}{(AF)^{\frac{1}{2k+1}} (2k+2)} P^{\frac{2k+2}{2k+1}}.$$

Перетворення Лежандра:

$$u(\Delta) + u^{\text{доп}}(P) = P\Delta;$$

$$\frac{AF}{2^{1-k} l^{2k+1} (2k+2)} \Delta^{2k+2} + \frac{2^{\frac{1-k}{2k+1}} l (2k+1)}{(AF)^{\frac{1}{2k+1}} (2k+2)} P^{\frac{2k+2}{2k+1}} = P\Delta.$$

Теорема Лагранжа і Кастільяно дають:

$$\frac{\partial u(\Delta)}{\partial \Delta} = \frac{AF}{2^{1-k} l^{2k+1}} \Delta^{2k+1} = P; \frac{\partial u^{\text{доп}}(P)}{\partial P} = \frac{2^{\frac{1-k}{2k+1}} l}{(AF)^{\frac{1}{2k+1}}} P^{\frac{1}{2k+1}} = \Delta.$$

В окремому випадку для «гуківського» матеріалу $k=1$; $A=E$; $\sigma = E\varepsilon$, перетворення Лежандра має вигляд

$$\frac{EF}{4l^3} \Delta^4 + \frac{3}{4} Pl \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} = P\Delta,$$

що співпадає із розв'язком відповідної суто геометрично нелінійної задачі, наведеної у прикладі 27.5.

Приклад 27.7. Двостержнева симетрична система, виконана з фізично нелінійного матеріалу, піддається дії сили P (рис. 27.10,а). Простежити розвиток

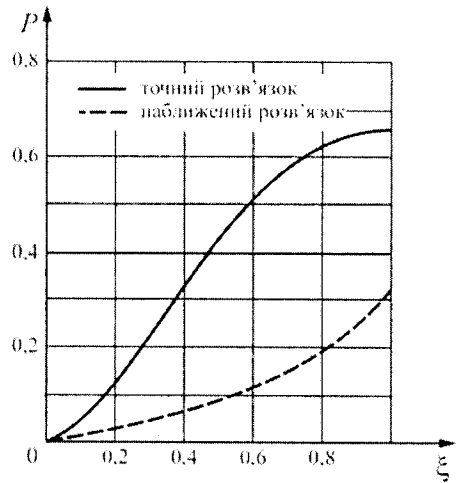


Рис. 27.9

деформації такої стиснутої системи; випадки втрати стійкості виключити. Задачу розв'язати з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності.

Фізичний закон деформації матеріалу заданий у вигляді:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{nn}}{k_3 - k_1} \times \left[k_3 (\varepsilon/\varepsilon_{nn})^{k_1} - k_1 (\varepsilon/\varepsilon_{nn})^{k_3} \right],$$

де $k_1 = 1.42$, $k_3 = 0.23$, $\varepsilon_{33} = 0.23$, $\alpha_0 = 30^\circ$.

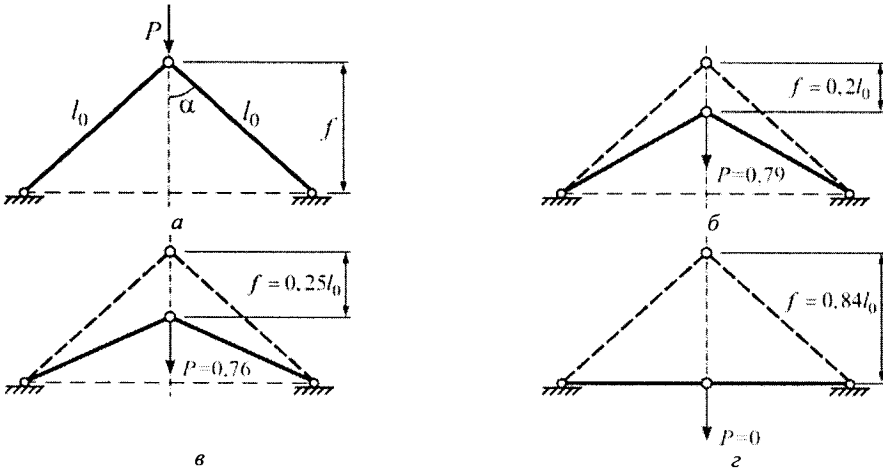


Рис. 27.10

На рис. 27.10,б,в,з для кількох конкретних величин зміщення середнього вузла вказані відповідні цим деформаціям значення навантажень (виписані відносні значення $p = \frac{P}{2F\sigma_{nn}}$), а на рис. 27.11 показаний графік залежності $p - \varepsilon$.

Пунктиром показаний розв'язок, отриманий, якщо знехтувати геометричною нелінійністю.

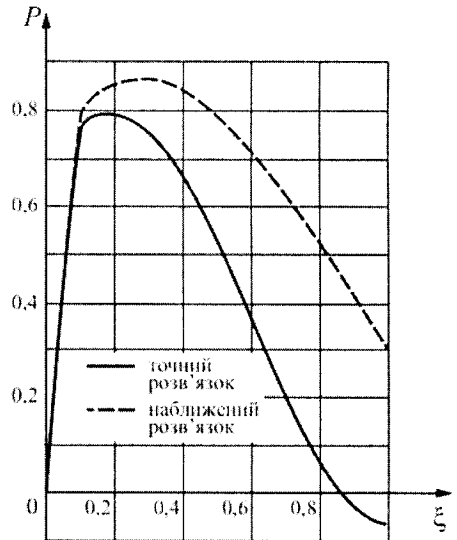


Рис. 27.11

28. Конструктивно-нелінійні системи

28.1. Методи дослідження нелінійного деформування механічних систем з однобічними в'язями

28.1.1. Постановка задачі

Двобічні в'язі, що звичайно зустрічаються в будівельній механіці, характеризуються тим, що умови, які накладаються ними на переміщення і зусилля у системі, як і умови рівноваги самої системи, описуються рівняннями. Реакції в'язей, що визначаються з цих рівнянь при різних впливах, можуть приймати додатні, від'ємні або нульові значення, тобто двобічні в'язі перешкоджають як додатнім, так і від'ємним переміщенням за їх напрямками.

Відмінними від цих в'язей є так звані змінні в'язі. Умови, що накладаються ними, виражаються нерівностями або сукупністю рівнянь і нерівностей. Ті в'язі, яким відповідають нерівності, називаються однобічними. Реакції цих в'язей не можуть змінити свого знака на протилежний, вони зберігають свій знак або перетворюються на нуль, тобто однобічні в'язі перешкоджають переміщенню вздовж свого напрямку тільки в один бік і не перешкоджають переміщенню в протилежний бік. До класу змінних в'язей відносяться також в'язі із зазорами, натягами і в'язі тертя.

Прикладами систем з однобічними в'язями можуть бути: стержневі системи з закріпленнями на опорах або у вузлах, що перешкоджають переміщенням тільки в одному напрямку; вантові системи; конструкції, які спираються на односторонньо пружну основу, що чинить опір вдавлюванню конструкції, але не чинить опору її відриву; конструкції з контактними взаємодіями. До цього ж класу належать різні пружнопластичні системи і середовища, що містять тріщини.

Деякі приклади систем з однобічними в'язями наведені на рис. 28.1.

У перерізах A, B стержневої системи (рис. 28.1,а) однобічними в'язями є опори, які перешкоджають переміщенню перерізів вниз, але не перешкоджають переміщенню вгору. Цю умову можна записати у вигляді $\delta_A \geq 0, \delta_B \geq 0$, де δ_A, δ_B – прогини балки в перерізах A і B .

За однобічну в'язь у вантовій системі (рис. 28.1,б) приймається прямолінійний нерозтяжний трос, кінці якого можуть зближуватися, але не можуть віддалятися один від одного. Якщо вважати подовження троса додатним, то для його можливих значень матимемо нерівність $\Delta l \leq 0$.

Приклад системи із зазорами зображений на рис. 28.1,в, де двосторонній зазор обмежує прогин балки вгору і вниз величинами u_1, u_2 . Умови в'язі: $\delta \leq u_1; \delta \leq u_2$, де δ – прогин балки над опорами. Інший приклад такої в'язі наведено на рис. 28.1,г, де показана одномасова віброударна система з жорстким обмежувачем. Нерівність, що робить цю систему змінною структурою, має вигляд $x \leq u$.

Характерна особливість механічних систем із сухим тертям (рис. 28.1,д) полягає в наявності зон застою, що виникають у разі, коли сила тертя перевищує результуючу сил інерції, пружності і зовнішнього впливу.

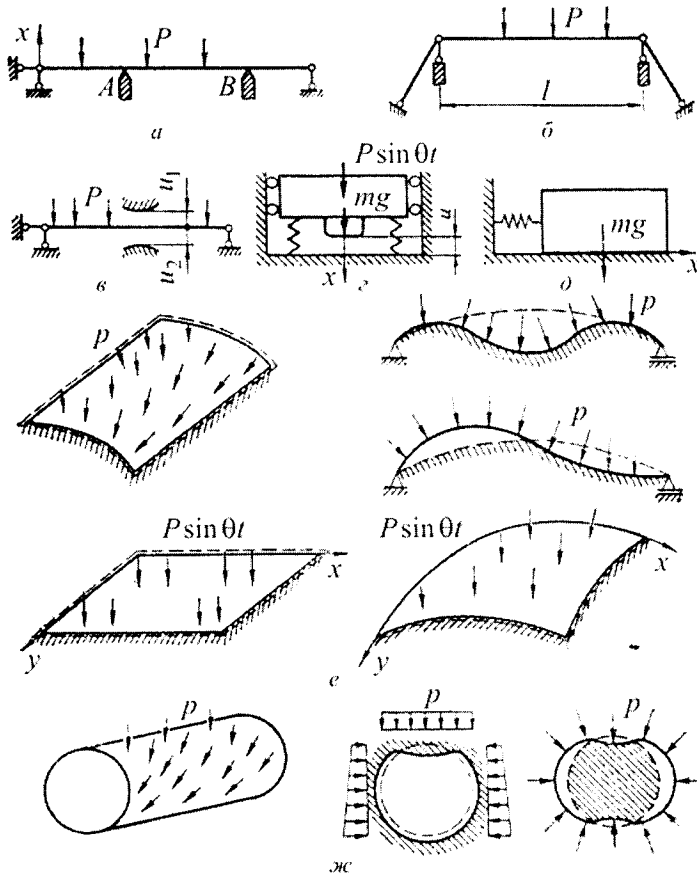


Рис. 28.1

Прикладами систем із неперервно розподіленими вздовж лінії або по поверхні однобічними в'язями можуть бути балки, пластинки і оболонки (рис. 28.1,е), що часто зустрічаються в практиці проектування конструкцій на ґрунтовій основі, оболонки ємностей, трубопроводів (рис. 28.1,ж), підземних споруд і т.ін. при статичному і динамічному впливах. При їх розрахунку є невідомими напружено-деформований стан, а також розташування ділянок контакту і відриву.

Характеристиками працюючої і такої, що виключилась з роботи, однобічної в'язі, будуть співвідношення

$$\varphi_i(R) = \begin{cases} k_i & \text{при } R > 0, \\ 0 & \text{при } R \leq 0, \end{cases}$$

де $\varphi_i(R)$ – функція, що характеризує включення або виключення в'язі, в залежності від знака реакції пружної основи, k_i – жорсткість основи.

Математично, у загальному вигляді, задача розрахунку систем з однобічними в'язями являє собою крайову задачу з граничними умовами, які залежать від навантаження або інших параметрів системи, і тому є нелінійною навіть у тому разі, коли основні розв'язувальні рівняння і обмеження виражаються лінійними співвідношеннями. При варіаційному підході задачі теорії пружності з односторонніми крайовими умовами зводяться до еліптичних варіаційних нерівностей, що дозволяє при переході до чисельної дискретизації при певних умовах довести теореми існування і єдиності розв'язків. В результаті варіаційної постановки задачі вона зводиться до знаходження екстремуму деякого функціонала, що не має властивості гладкості, необхідною для застосування класичних методів варіаційного числення.

Характерним при реалізації варіаційних принципів для систем з однобічними в'язями є те, що потенціальна енергія таких систем є функцією, яка визначена не на усіх уявних значеннях узагальнених координат, як це має місце у класичній механіці систем із «звичайними» пружними в'язями, де вираз для потенціальної енергії записується у вигляді функції узагальнених координат, які можуть мати довільні значення. При двобічних в'язях обмеження-рівності визначають для області визначення функції потенціальної енергії множину значень аргументів без будь-яких обмежень. Для умов-нерівностей, які мають місце при урахуванні однобічних в'язей, це положення не витримується і потенціальна енергія у загальному випадку є функцією, визначеною на певній множині значень узагальнених координат.

Метод варіаційних нерівностей виявився ефективним при розв'язанні задач теорії пружності з односторонніми крайовими умовами (Синьоріні [239], Фікера [227]) і задач теорії пластичності (Койтер [231], Прагер [158], Дюво і Ліонс [226]), при дослідженні стаціонарних процесів гідродинаміки пористих середовищ і спеціальних ньютонівських рідин [226], при розв'язанні задач теорії імпульсних систем управління і задач управління системами з розподіленими параметрами.

Сутність цього методу покажемо на простому прикладі, наведеному в роботі [226]. У відкритій обмеженій області Ω із R^n ($n = 2, 3$) з границею Γ шукається деяка дійсна функція $x \rightarrow u(x)$, що задовольняє в Ω класичне рівняння

$$-\Delta u + u = f, \tag{28.1}$$

де f задана в Ω , $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Граничні умови задаються у вигляді нерівностей:

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{28.2}$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ означає похідну вздовж напрямку зовнішньої нормалі на Γ .

Задача (28.1), (28.2) є екстремальною з обмеженнями. Якщо ввести функціонал

$$I(v) = \frac{1}{2} a(u, v) - (f, v), \quad (28.3)$$

де

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u v dx, \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

і замкнену опуклу множину

$$K = \left\{ \frac{u}{v} \geq 0 \text{ на } \Gamma, \right. \quad (28.4)$$

то розв'язання рівняння (28.1) з умовами (28.2) зводиться до задачі знаходження такого $u \in K$, що

$$I(u) = \inf I(v), \quad v \in K. \quad (28.5)$$

Задача (28.5) має єдиний розв'язок, який характеризується умовою

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall u \in K, v \in K, \quad (28.6)$$

що називається еліптичною варіаційною нерівністю.

Наявність нерівностей у постановці цієї задачі робить її нелінійною, незважаючи на те що розв'язувальне рівняння і обмежуючі нерівності описуються лінійними співвідношеннями. Така нелінійність, що виключає можливість стандартної лінеаризації, має назву конструктивної, а самі системи називаються системами змінної структури.

Та обставина, що K є замкненою опуклою множиною, свідчить про єдиність розв'язку поставленої задачі. Для його знаходження можна використати методи опуклого програмування. Такий підхід представляється найбільш загальним і дозволяє розглядати як одновимірні [65], так і двовимірні задачі для дискретних і дискретно-континуальних систем, тобто систем з дискретним розташуванням в'язей та з в'язями, неперервно розподіленими по поверхні [102]. Ефективність застосування методів опуклого програмування полягає в тому, що можна використовувати розроблені алгоритми і немає необхідності в проведенні великої кількості спроб при пошуку робочої системи, а також в зручності комп'ютерної реалізації.

Фізичний зміст функціонала (28.3) для механічної системи пов'язаний з її повною потенціальною енергією. Тому наведену вище постановку задачі можна легко поширити на випадок з однобічними в'язями.

У реальних системах конструктивна нелінійність часто супроводжується геометричною і фізичною нелінійностями, наявність яких призводить до різкого ускладнення поставленої задачі, тому що в цих випадках доводиться мати справу з більш загальним класом задач. На основі енергетичних принципів вони також зводяться до екстремальних, але на ширшій множині функцій, ніж традиційні, причому необхідні функціонали можуть не бути гладкими і мати особливі точки типу сідлових і локальних екстремумів, пов'язаних з критичними і інваріантними станами механічної системи.

Для розв'язання таких задач мають використовуватися методи нелінійного програмування, які дозволяють вивчати глобальні властивості досліджуваних функціоналів. Мабуть найефективнішим є підхід, що базується на синтезі методу

продовження розв'язку за параметром і методу проекції градієнта на лінеаризовані обмеження, оскільки його можна поставити у відповідність до реального процесу деформування механічної системи, контролювати включення і виключення в'язей. Зіставленням властивостей градієнта потенціальної енергії та аналізу його напрямку по відношенню до гіперплощин лінеаризованих обмежень можна ідентифікувати критичні та інваріантні стани механічної системи. При цьому для перевірки рівноваги системи буває корисно застосовувати принцип можливих переміщень [112], який дозволяє встановити момент включення або виключення в'язі. Згідно з цим принципом у випадку рівноваги системи на тих можливих нескінченно малих переміщеннях, при яких навантажена система відокремлюється від однієї або декількох із її однобічних в'язей, сумарна віртуальна робота зовнішніх сил від'ємна або, в частинному випадку, дорівнює нулю.

Необхідно також зазначити, що під методами нелінійного програмування в теперішній час розуміють сукупність методів, що дозволяють мінімізувати деякі функціонали за певних обмежень або безпосередньо знаходити розв'язок систем нелінійних рівнянь і нерівностей. Часто ці задачі і методи їх розв'язання виявляються еквівалентними.

28.1.2. Варіаційні задачі з рухомими границями

При дослідженні на екстремум функціоналів, які залежать від першої похідної (п. 1.3)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

а також від другої похідної (п. 1.6)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx,$$

передбачалось, що в граничних точках задані значення функції $y(x)$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

і відповідно – функції і її перші похідні

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y(x_1) = y_1; \quad y'(x_1) = y'_1.$$

Якщо значення хоча б деяких із цих величин не фіксовані, то відповідна задача має назву варіаційної задачі з рухомими границями [218].

Якщо в задачі з рухомими границями на кривій C реалізується екстремум, то на цій кривій досягається екстремум і по відношенню до більш вузького класу кривих, які мають спільні граничні точки і спільні напрямки дотичних в граничних точках до кривої C і, як наслідок, криві C повинні бути інтегральними кривими Ейлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$
$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0.$$

Загальні розв'язки цих диференціальних рівнянь відповідно другого $y = y(x, C_1, C_2)$ і четвертого $y = y(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$ містять дві або чотири константи, для визначення яких необхідно мати відповідно два або чотири рівняння, які можуть бути отримані із основної необхідної умови екстремуму функціонала $\delta v[y(x)] = 0$.

Для функціонала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ варіаційне рівняння $\delta v = 0$ може бути представлено у вигляді ((1.18) п. 1.8)

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx = 0,$$

а для функціонала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$ рівняння $\delta v = 0$ має вигляд ((1.23) п. 1.10)

$$(F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y' \frac{d}{dx} F_{y''}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + (F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}) \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + F_{y''} \delta y' \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}) \delta y dx = 0.$$

Зазначимо, що якщо гранична точка $x = x_1$, не може переміщуватись по горизонталі, то ці вирази співпадають з наведеними вище (п. 1.6)

$$F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx = 0,$$

$$(F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}) \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + F_{y''} \delta y' \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}) \delta y dx = 0,$$

реалізація яких дозволяє для контактних задач (функціоналів Лагранжа і Кастільяно) отримати як природні граничні умови ті граничні умови, які не були визначені.

Для функціоналів, які залежать від першої похідної (розтяг-стиснення)

Пряма задача – функціонал Лагранжа

$$\Pi^L(u) = \frac{1}{2} \int_a^b EFu'^2 dx - \int_a^b q_x u dx - \bar{N}u \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Додаткові умови

$$N = EF\varepsilon; \varepsilon = \frac{du}{dx}; u \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{u} \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння

$$\delta \Pi^L(u) = 0,$$

Двоїста задача – функціонал Кастільяно

$$\Pi^K(N) = - \int_a^b \frac{N^2}{2EF} dx + \bar{u}N \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Додаткові умови

$$N = EF\varepsilon; \frac{dN}{dx} + q_x = 0; N \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{N} \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Варіаційне рівняння

$$\delta \Pi^K(N) = 0,$$

$$\int_a^b \left(\frac{dN}{dx} + q_x \right) \delta u dx - (N - \bar{N}) \delta u \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Для функціоналів, які залежать від другої похідної

Пряма задача – функціонал Лагранжа

$$\Pi^{\text{Л}}(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Додаткові умови

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad w \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w} \Big|_{a_2}^{b_2}; \quad w' \Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}' \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Варіаційне рівняння

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(w) = 0,$$

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(w) = - \int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx +$$

$$+ (M' - \bar{M}') \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M}) \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0.$$

$$\int_a^b \left(\varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \delta N dx + (u - \bar{u}) \delta N \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Двоїста задача – функціонал Кастільяно

$$\Pi^{\text{К}}(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Додаткові умови

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = 0; \quad M \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M} \Big|_{a_1}^{b_1}; \quad M' \Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}' \Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Варіаційне рівняння

$$\delta \Pi^{\text{К}}(M) = 0,$$

$$\delta \Pi^{\text{К}}(M) = - \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx +$$

$$+ (\bar{w} - w) \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w') \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0.$$

Визначення природних граничних умов для найбільш розповсюджених типів стержневих елементів при розтягу-стисненні, а також згині, показано відповідно у таблицях 4.1 і 5.1.

Значимо, що за прийнятою у класичному варіаційному численні класифікацією задач з рухомими границями, тільки кінематично і статично визначувані задачі відносяться до задач з нерухомими границями, оскільки вони мають зафіксовані значення функцій в граничних точках.

Далі розглянемо клас варіаційних задач, для яких можливе горизонтальне переміщення точки $x = x_1$, що дає додаткову умову, яка для функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \text{ має вигляд:}$$

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 = 0.$$

Для прямої задачі –
функціонал Лагранжа

$$\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{1}{2} \int_0^l EF u'^2 dx - \int_0^l q_x u dx.$$

$$F = \frac{1}{2} EF u' - q_x u,$$

$$F_{u'} = EF u',$$

$$F - u'F_{u'} = -EF u' - q_x u = 0.$$

Для двоїстої задачі –
функціонал Кастільяно

$$\Pi^{\text{К}}(N) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{N^2}{EF} dx - \int_a^b \frac{dN}{dx} u dx.$$

$$F = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} - \frac{dN}{dx} u,$$

$$F_{N'} = -u,$$

$$F - u'F_{u'} = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF}.$$

Якщо $u|_{x=x_1} = 0$, то маємо умову на правому кінці

$$u'|_{x=x_1} = 0.$$

$$N|_{x=x_1} = 0.$$

Умова для функціонала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$ має вигляд:

$$(F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y' \frac{d}{dx} F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 = 0.$$

Для прямої задачі –
функціонал Лагранжа

$$\Pi^L(w) = \frac{1}{2} \int_a^b EI w''^2 dx - \int_a^b q w dx - \bar{M}' w|_{a_1}^{b_1} + \bar{M} w'|_{a_1}^{b_1}.$$

$$F = \frac{1}{2} EI w''^2 - q w,$$

$$F_w = 0,$$

$$F_w' = EI w'',$$

$$F - w'' F_w' = -\frac{1}{2} EI w''^2 - q N.$$

При $N|_{x=x_1} = 0$ маємо умову

$$w''|_{x=x_1} = 0.$$

Для двоїстої задачі –
функціонал Кастільяно

$$\Pi^K(M) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dx + \int_a^b \frac{d^2 M}{dx^2} w dx + \bar{w} M'|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M|_{a_2}^{b_2}.$$

$$F = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} - \frac{d^2 M}{dx^2} w,$$

$$F_M = 0,$$

$$F_M' = -w,$$

$$F - M'' F_M' = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI}.$$

$$M|_{x=x_1} = 0.$$

28.1.3. Приклади реалізації деяких варіаційних задач

Розглянемо задачу розтягу стержня під дією змушеного переміщення Δ на лівому кінці стержня (рис. 28.2).

Функціонал Лагранжа цієї задачі має вигляд:

$$\Pi^L(u) = \int_0^l (\frac{1}{2} E F u'^2 - q_x u) dx.$$

Рівняння Ейлера:

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0,$$

$$-q_x - E F u'' = 0; \quad E F u'' = -q_x.$$

$$E F u' = -q_x x + C_1,$$

$$E F u = -\frac{q_x x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

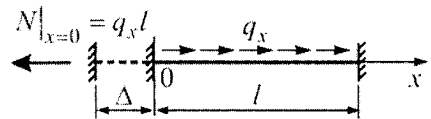


Рис. 28.2

$$u|_{x=0} = -\Delta; \quad C_2 = -EF\Delta,$$

$$u|_{x=l} = 0; \quad C_1 = \frac{q_x l}{2} + \frac{EF\Delta}{l}.$$

Розв'язок:

$$EFu = -\frac{q_x x^2}{2} + \left(\frac{q_x l}{2} + \frac{EF\Delta}{l}\right)x - EF\Delta.$$

Для визначення l , якщо воно не задане і границя є рухома, маємо умову $u'(l) = 0$.

$$EFu' = -q_x x + \frac{q_x l}{2} + \frac{EF\Delta}{l},$$

$$0 = -q_x l + \frac{q_x l}{2} + \frac{EF\Delta}{l},$$

$$\frac{q_x l^2}{2} = EF\Delta, \quad l = \sqrt{\frac{2EF\Delta}{q_x}}.$$

Зусилля на лівому кінці:

$$N|_{x=0} = EFu' = q_x l.$$

Розглянемо задачу [203], яка показана на рис. 28.3.

Після прикладення сили P_1 ліва частина балки піднімається на деякому відрізку a . Права частина балки залишається прямолінійною, кривизна (згинальний момент) на цій ділянці дорівнює нулю. Зокрема і в точці $x = a$. Із цієї умови і визначається a , тобто

$$P_1 a = \frac{P}{l} \cdot \frac{a^2}{2}; \quad a = \frac{2P_1}{P} l.$$

При $P_1 = \frac{P}{3}$; отримаємо $a = \frac{2}{3}l$.

Найбільш цікавим у подібних задачах є виникнення зосередженої сили P_1 на межі ділянок, що пояснюється застосуванням елементарної теорії згину балок.

Постановка варіаційної задачі з рухомими границями дозволяє отримати у якості природних граничних умов крім традиційних додаткову умову у точці $x = 0$.

Зазначимо, що розгляд варіаційної задачі з нерухомими границями для функціонала Лагранжа дає можливість при заданих зовні граничних умовах на правому кінці $x = a$, $w = 0$, $w' = 0$ отримати як природні граничні умови на лівому кінці $M = 0$ і $Q = P_1$ із умов $F_{w'} \delta w'|_{x=0} = 0$ і $(-\frac{d}{dx} F_{w''} + P_1) \delta w|_{x=0} = 0$, оскільки

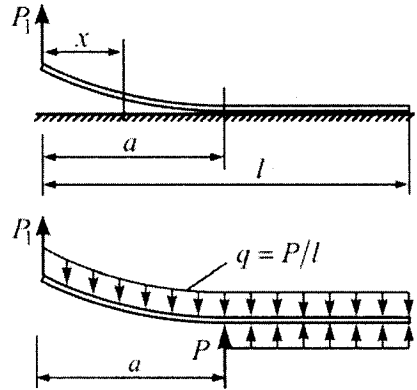


Рис. 28.3

$\delta w \neq 0$; $\delta w' \neq 0$. Умова, якої не вистачає $w''|_{x=x_1} = 0$ теж може бути отримана автоматично, якщо розглядати варіаційну задачу з рухомими границями.

Саме ця додаткова умова дає можливість розв'язати задачу.

Для функціонала Кастільяно відповідно $M|_{x=a} = 0$

$$F(M) = -\frac{M^2}{2EI} - \frac{d^2 M}{dx^2} y,$$

$$F_{M''} = -y,$$

$$F - M'' F_{M''} = -\frac{M^2}{2EI} - \frac{d^2 M}{dx^2} y + \frac{d^2 M}{dx^2} y = 0.$$

Розглянемо застосування процедури методу Рітца до цієї варіаційної задачі з рухомими границями (рис. 28.4).

Функцію прогину w задамо у вигляді

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Граничні умови:

при $x = 0$; $w = 0$, $w' = 0$, $w'' = 0$.

Реалізуючи їх, отримаємо

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0.$$

$$w = a_3 x^3 + a_4 x^4, \quad w' = 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3, \quad w'' = 6a_3 x + 12a_4 x^2,$$

$$w''' = 6a_3 + 24a_4 x, \quad w^{IV} = 24a_4.$$

Відповідно функціонал Лагранжа задачі має вигляд:

$$\Pi^I(a_3, a_4, a) = \frac{1}{2} EI \int_0^a (6a_3 x + 12a_4 x^2)^2 dx - \int_0^a q(a_3 x^3 + a_4 x^4) dx + P(a_3 a^3 + a_4 a^4).$$

$$1. \frac{\partial \Pi^I}{\partial a_3} = 0 \quad 12a_3 + 18a_4 a = -\frac{P}{2EI};$$

$$2. \frac{\partial \Pi^I}{\partial a_4} = 0 \quad 18a_3 + \frac{144}{5} a_4 a = -\frac{3}{5} \frac{P}{EI};$$

$$\text{Отримуємо розв'язок: } a_3 = -\frac{P}{6EI}; \quad a_4 = \frac{P}{12EIa};$$

$$3. \frac{\partial \Pi^I}{\partial a} = 0 \quad \frac{a}{6\alpha l} - 1 + \frac{2}{3} = 0; \quad \frac{a}{l} = 2\alpha.$$

Тут застосована загальна процедура методу Рітца. Звичайно, що в даному прикладі $a_4 = \frac{q}{24EI}$. Для спрощення прийняті такі позначення:

$$ql = P_1; \quad qa = 2P; \quad \frac{a}{l} = 2\frac{P}{P_1} = 2\alpha; \quad \alpha = \frac{P}{P_1}; \quad P = \alpha ql.$$

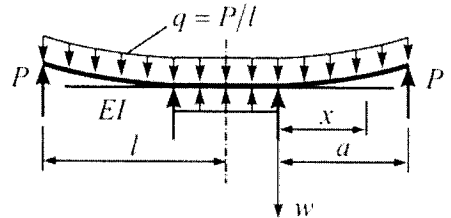


Рис. 28.4

Тоді послідовно отримаємо

$$w_a = a_3 x^3 + a_4 x^4 = -\frac{Pa^3}{6EI} + \frac{Pa^3}{12EI} = -\frac{2}{3} \frac{P\alpha^3 l^3}{EI} = -\frac{2}{3} \alpha^4 \frac{ql^4}{EI}.$$

Чисельні результати наведені в таблиці і показані на рис. 28.5.

№ п/п	$\alpha = \frac{P}{P_1}$	$\frac{a}{l}$	α^4	$w_a / \frac{ql^4}{EI}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36 \cdot 36}$	$\frac{1}{36 \cdot 54}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{243}$
3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$

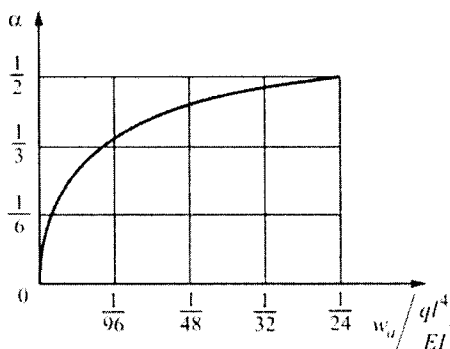


Рис. 28.5

Побудуємо перетворення Лежандра для даної задачі.

$$w_a = -\frac{2}{3} P^4 \frac{ql^4}{P_1^4 EI} = -\frac{2}{3} P^4 \beta,$$

де $\beta = \frac{ql^4}{P_1^4 EI}$; $P^4 = \frac{3w_a}{2\beta} \cdot P = \left(\frac{3}{2} \frac{w_a}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}$.

$$U(w_a) = \int_0^{w_a} P dw_a; \quad U^{\text{доп}}(P) = \int_0^P w_a dP;$$

$$U(w_a) = \int_0^{w_a} \left(\frac{3}{2} \frac{w_a}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} dw_a = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} w_a^{\frac{5}{4}};$$

$$U^{\text{доп}}(P) = \int_0^P \frac{2}{3} \beta P^4 dP = \frac{2}{15} \beta P^5.$$

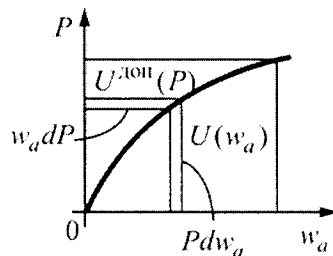


Рис. 28.6

Таким чином перетворення Лежандра має вигляд:

$$\frac{4}{5} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} w_a^{\frac{5}{4}} + \frac{2}{15} \beta P^5 = Pw_a \quad \text{або} \quad \frac{4}{5} Pw_a + \frac{1}{5} Pw_a = Pw_a.$$

Теорема Лагранжа і Кастільяно:

$$\frac{\partial U(w_a)}{\partial w_a} = P.$$

$$\frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial P} = w_a.$$

Функції $U(w_a)$, $U^{\text{доп}}(P)$ є двоїстими за Юнгом і будуються за звичайною процедурою:

$$F(Pw_a) = Pw_a - \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{4}} w_a^{\frac{5}{4}}; \quad \frac{\partial F(P, w_a)}{\partial w_a} = P - \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{4}} w_a^{\frac{1}{4}} = 0; \quad w_a = \frac{2}{3} P^4 \beta.$$

$$g(P) = \max F(P, w_a) = \frac{2}{15} P^5 \beta.$$

$$F(P, w_a) = Pw_a - \frac{2}{15} P^5 \beta;$$

$$\frac{\partial F(P, w_a)}{\partial P} = w_a - \frac{2}{15} P^4 \beta = 0; \quad P = \left(\frac{2}{15} \beta \right)^{-\frac{1}{4}} w_a^{\frac{1}{4}}.$$

$$F(w_a) = \max F(P, w_a) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{4}} w_a^{\frac{5}{4}}.$$

Застосування принципу Кастильано у даній задачі не потребує пошуку екстремуму, оскільки, при наявності умови $M_a = 0$ задача є статично визначуваною. Відповідні епюри силових і кінематичних характеристик задачі показані на рис. 28.7.

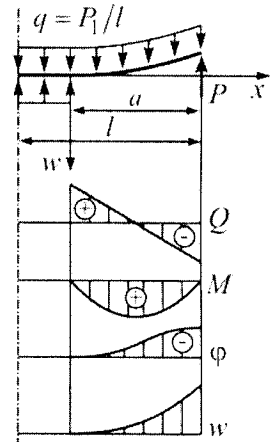


Рис. 28.7

Розглянемо задачу, показану на рис. 28.8.

Застосуємо процедуру методу Рітца для функціонала Лагранжа:

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Граничні умови:

$$x = 0; \quad w = 0; \quad a_0 = 0;$$

$$x = a; \quad w = w' = 0.$$

$$a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_4 a^4 = 0;$$

$$a_1 + 2a_2 a + 3a_3 a^2 + 4a_4 a^3 = 0.$$

Звідси послідовно отримаємо

$$a_1 = a_3 a^2 + 2a_4 a^3; \quad a_2 = -2a_3 a - 3a_4 a^2;$$

$$w = a_3 (a^2 x - 2ax^2 + x^3) + a_4 (2a^3 x - 3a^2 x^2 + x^4).$$

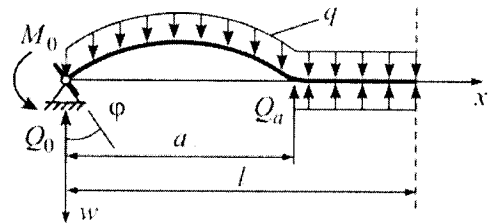


Рис. 28.8

$\varphi(x)$	$a^2 x - 2ax^2 + x^3$	$2a^3 x - 3a^2 x^2 + x^4$
$\varphi'(x)$	$a^2 - 4ax + 3x^2$	$-6a^2 x + 4x^3$
$\varphi''(x)$	$-4a + 6x$	$-6a^2 + 12x^2$

$$k_{ij} = \int_0^a EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx; \quad k_{11} = 4EIa^3; \quad k_{12} = 8EIa^4; \quad k_{22} = \frac{84}{5} EIa^5;$$

$$P_j = \int_0^a q \varphi_j(x) dx - M_s \varphi_s'(x_s); \quad P_1 = \frac{1}{12} qa^4 - M_0 a^2; \quad P_2 = \frac{1}{5} qa^5 - 2M_0 a^3.$$

Система канонічних рівнянь методу Рітца:

$$4a^3 a_3 + 8a^4 a_4 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} qa^4 - M_0 a^2 \right);$$

$$8a^4 a_3 + \frac{84}{5} a^5 a_4 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{5} qa^5 - 2M_0 a^3 \right).$$

Невідомі:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{a^2}{EI} \left(\frac{1}{48} qa - \frac{1}{4} \frac{M_0}{a} \right); \quad a_2 = \frac{1}{2} \frac{M_0}{EI}; \quad a_3 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{16} qa - \frac{M_0}{4a} \right); \quad a_4 = \frac{q}{24EI}$$

$$Q = -EIw'''; \quad Q|_{x=0} = \frac{3}{8} qa + \frac{3}{2} \frac{M_0}{a}; \quad Q|_{x=a} = -\frac{5}{8} qa + \frac{3}{2} \frac{M_0}{a}.$$

Додаткові граничні умови для варіаційної задачі з рухомими границями:

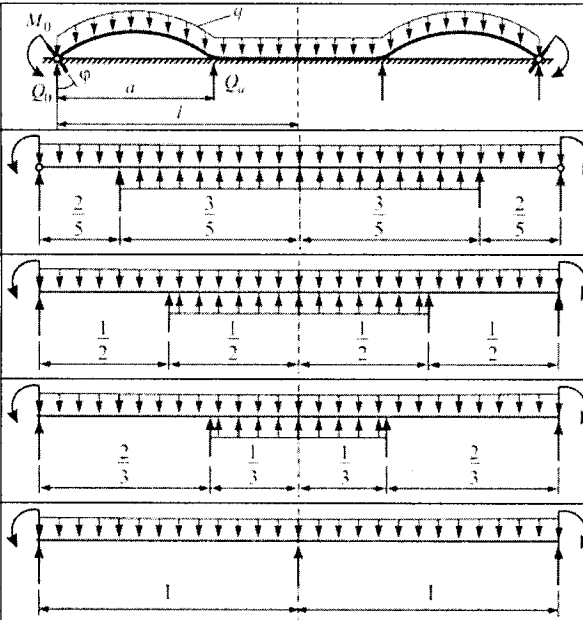
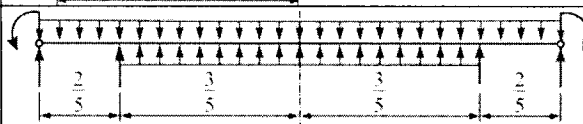
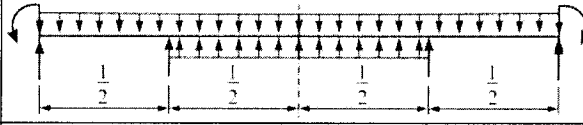
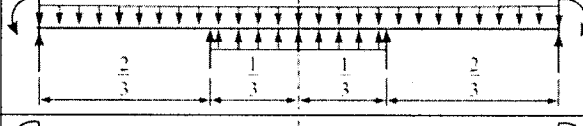
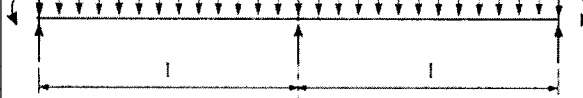
$$w''|_{x=a} = 2a_2 + 6a_3 a + 12a_4 a^2 = 0;$$

$$Q|_{x=0} = \frac{3}{4} qa; \quad Q|_{x=a} = -\frac{1}{4} qa;$$

$$\varphi_0 = w'_0 = a_1 = -\frac{1}{6} \frac{M_0 a}{EI}.$$

Результати показані в таблиці 28.1, а також на рис. 28.9.

Таблиця 28.1

№ п/п	$\frac{M_0}{ql^2}$	$\frac{a}{l}$	$-\frac{EI\varphi}{ql^3}$	$\frac{Q_0}{ql}$	$-\frac{Q_a}{ql}$	
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{375}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
4	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Побудуємо перетворення Лежандра для даної задачі:

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \frac{M_0 a}{EI}; \quad a = 2\sqrt{\frac{M}{q}}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3EI} \frac{M\sqrt{M}}{q} = \frac{1}{3EI} q^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}$$

$$M_0 = (3EI)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \varphi_0^{\frac{2}{3}}$$

$$U(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} M_0 a d\varphi =$$

$$= (3EI)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \int_0^{\varphi_0} \varphi_0^{\frac{2}{3}} d\varphi_0 = \frac{1}{40} \frac{M_0 q a^3}{EI}$$

$$U^{\text{доп}}(M_0) = \int_0^M \varphi_0 dM_0 = \frac{1}{3EI} q^{-\frac{1}{2}} \int_0^{M_0} M^{\frac{3}{2}} dM = \frac{1}{60} \frac{M_0 q a^3}{EI}$$

$$M_0 \varphi_0 = \frac{1}{6} \frac{M_0^2 a}{EI} = \frac{1}{24} \frac{M_0 q a^3}{EI}$$

$$\int_0^{\varphi_0} M_0 d\varphi_0 + \int_0^{M_0} \varphi_0 dM_0 = M_0 \varphi_0;$$

$$\frac{1}{40} \frac{M q a^3}{EI} + \frac{1}{60} \frac{M q a^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{M q a^3}{EI};$$

$$\frac{3}{5} M_0 \varphi_0 + \frac{2}{5} M_0 \varphi_0 = M_0 \varphi_0;$$

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{40} \frac{M q a^3}{EI} = \frac{3}{5} (3EI)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \varphi_0^{\frac{5}{3}}; \quad U(M_0) = \frac{2}{15EI} q^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{5}{2}}$$

Перетворення Лежандра

$$\frac{3}{5} (3EI)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \varphi_0^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{15EI} q^{-\frac{1}{3}} M_0^{\frac{5}{2}} = M_0 \varphi_0.$$

Теорема Лагранжа і Кастільяно

$$\frac{\partial U(\varphi_0)}{\partial \varphi_0} = (3EI)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \varphi_0^{\frac{2}{3}} = M_0.$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial M_0} = \frac{1}{3EI} q^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} = \varphi_0.$$

Функції $U(\varphi_0)$ і $U(M_0)$ є двоїстими за Юнгом і будуються за звичайною процедурою.

Якщо застосувати метод Рітца до функціонала Кастільяно цієї задачі, отримаємо:

граничні умови $x = 0; \quad M = -M_0;$

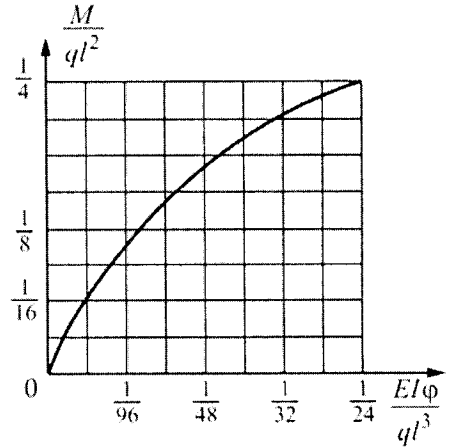


Рис. 28.9

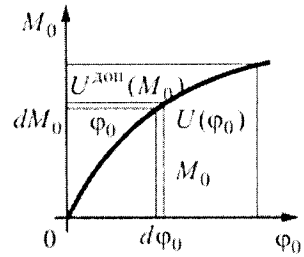


Рис. 28.10

$$x = a; \quad M_a = -M_0 + Xa - \frac{qa^2}{2} = 0.$$

$$M(x) = -M_0 + Xx - \frac{qx^2}{2}; \quad \Pi^K(M) = -\frac{1}{2} EI \int_0^a M^2(x) dx.$$

$$\frac{\partial \Pi^K(M, a)}{\partial a} = 0; \quad -M_0 + Xa - \frac{qa^2}{2} = 0.$$

Отримали, по суті, додаткову граничну умову для задачі з рухомими границями.

$$\frac{\partial \Pi^K(M)}{\partial X} = 0 \quad \text{дає} \quad -\frac{M_0}{2} + X \frac{a}{3} - \frac{qa^2}{8} = 0.$$

Звідси

$$X = \frac{3}{4} qa; \quad a = 2 \sqrt{\frac{M}{q}}.$$

28.2. Дослідження контактних зусиль між шарами складової балки при наявності тертя

Розглянемо складову ступінчасту двошарову балку при дії симетричної відносно до її середини системи взаємно зрівноважених сил (рис. 28.11). Висоти і жорсткості шарів балки стали по довжині. Розподілене навантаження, прикладене знизу і змінюване по довжині за довільним законом $p_2(x)$, зрівноважується зосередженою силою P , прикладеною зверху.

Будемо вважати, що при згині балки по контакту між шарами можуть виникати тільки стискуючі нормальні зусилля і сили зчеплення. При цьому сили зчеплення між шарами переборюються по всій довжині контакту, що підтверджується розрахунками і експериментами, а сили тертя $t_1(x)$ зв'язані з нормальними зусиллями $p_1(x)$ залежністю

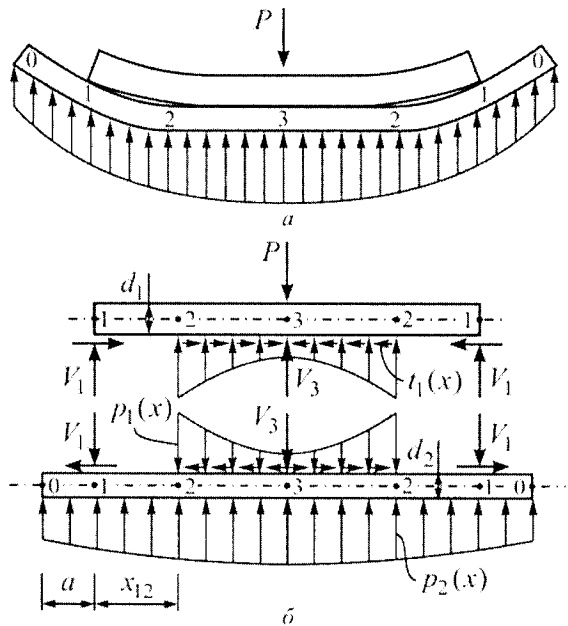


Рис. 28.11

$$t_1(x) = f_1 p_1(x),$$

де f_1 – коефіцієнт тертя між шарами. Як видно з рис. 28.11, консольні виступи нижнього шару при однобічних зв'язках стиснення між шарами ведуть до порушення контакту на відрізку між точками 1 і 2. Метою розрахунку є виявлення довжини відрізка x_{12} і зусиль V_1 і $p_1(x)$.

Розв'язання задачі ускладнюється тим, що системи з однобічними зв'язками не є лінійно-деформованими.

При укладанні рівнянь сумісності деформацій будемо виходити з того, що у будь-якій точці на відрізку суцільного контакту вертикальні переміщення v і кривизни шарів $1/\rho$ однакові.

Зауважимо, що в дійсності кривизна шарів різниться за величиною, але ця різниця мізерно мала, тому що при розглядуваних малих деформаціях радіуси кривизни шарів великі, а товщини шарів відносно малі. При точковому контакті, наприклад, у точці 1 однакові лише вертикальні переміщення шарів. Таким чином, маємо:

$$\text{для точки 1 –} \quad w_1^B = w_1^H; \quad (28.7)$$

$$\text{для точки 2 (початок відрізка суцільного контакту) –} \quad w_2^B = w_2^H; \quad (28.8)$$

$$\frac{1}{\rho_2^B} = \frac{1}{\rho_2^H}. \quad (28.9)$$

Зазначимо, що необхідність рівності не тільки переміщень, а і кривизни для обох шарів, витікає із варіаційних рівнянь Лагранжа і Кастільяно.

$$(M' - \bar{M}')\delta w|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M})\delta w'|_{a_1}^{b_1} + \int_a^b (EIw'''' - q)\delta w dx = 0,$$

$$(w - \bar{w})\delta M'|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}')\delta M|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b \left(\frac{M}{EI} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta M dx = 0.$$

На основі елементарної теорії розрахунку балок можна відповідно з умовами (28.7) – (28.9) записати для точки 2:

$$\frac{V_1 x_{12}^3}{3} - \frac{f_1 V_1 d_1 x_{12}^2}{2} = n \int_0^{x_{12}} \frac{p_2(x) [2x_{12}^3 - 3x_{12}^2 + x^3]}{6} dx - \frac{nV_1 x_{12}^3}{3} - \frac{nf_1 V_1 d_2 x_{12}^2}{2} + \frac{nQ_1 x_{12}^2}{3} + \frac{nM_1 x_{12}^2}{2}; \quad (28.10)$$

$$V_1 x_{12} - f_1 V_1 d_1 = n \int_0^{x_{12}} p_2(x)(x_{12} - x) dx + nM_1 + nQ_1 x_{12} - nV_1 x_{12} - nf_1 V_1 d_2, \quad (28.11)$$

$$\text{де } n = \frac{EI_B}{EI_H}; \quad Q_1 = \int_0^a p(x) dx; \quad M_1 = \int_0^a p_2(x)x dx.$$

Зі спільного розв'язання рівнянь (28.9) і (28.10) визначаємо x_{12} і V_1 .

Для найбільш вживаного в практичних розрахунках лінійно-змінного навантаження $p_2(x) = p_{21} \pm \beta x$ рівняння (28.10) і (28.11) матимуть такий вигляд:

$$\frac{1}{3}(1+n)V_1x_{12} + \frac{1}{2}V_1f_1(nd_2 - d_1) = \frac{1}{8}np_{21}x_{12}^2 + \frac{1}{30}n\beta x_{12}^3 + \frac{1}{3}nQ_1x_{12} + \frac{1}{2}nM_1; \quad (28.10')$$

$$(1+n)V_1x_{12} + f_1(nd_2 - d_1)V_1 = \frac{1}{2}np_{21}x_{12}^2 + \frac{1}{6}n\beta x_{12}^3 + nM_1 + nQ_1x_{12}. \quad (28.11')$$

Після ряду перетворень одержимо:

$$V_1 = \frac{\frac{1}{6}n\beta x_{12}^3 + \frac{1}{2}np_{21}x_{12}^2 + nQ_1x_{12} + nM_1}{(1+n)x_{12} + f_1(nd_2 - d_1)}; \quad (28.12)$$

$$\frac{\beta}{15}x_{12}^3 + \left(\frac{p_{21}}{8} + \frac{3}{20}\frac{\beta}{\alpha}\right)x_{12}^2 + \frac{3}{8}\frac{p_{12}}{\alpha}x_{12} + \frac{Q_1}{2\alpha} - \frac{M_1}{2} = 0, \quad (28.13)$$

де

$$\alpha = \frac{1+n}{f_1(nd_2 - d_1)}. \quad (28.14)$$

Нормальні контактні зусилля $p_1(x)$ між шарами на відрізку суцільного контакту 2-3 знайдемо з умови, що кривизна шарів на цьому відрізку однакова:

$$M_x^B = nM_x^H. \quad (28.15)$$

Запишемо рівняння (28.15) у розгорнутому вигляді:

$$\int_0^x p_1(z)(x-z)dz - \int_0^x p_1(z)f_1d_1dz + M_2^B + Q_2^H x = n \int_0^x p_2(z)(x-z)dz - n \int_0^x p_1(z)(x-z)dz - n \int_0^x p_1(z)f_1d_2dz + nM_2^H + nQ_2^H x, \quad (28.16)$$

де $Q_2^B = V_1$; $M_2^B = V_1(x_{12} - f_1d_1)$; $Q_2^H = \int_0^{a=x_{12}} p_2(x)dx - V_1$; $M_2^H = \int_0^{a=x_{12}} p_2(x)x dx - V_1(x_{12} + f_1d_2)$.

Інші позначення показані на рис. 28.12.

Після перетворень одержимо:

$$\int_0^x p_1(z)[(1+n)(x-z) + f_1(nd_2 - d_1)]dz = f(x), \quad (28.17)$$

$$f(x) = n \int_0^x p_2(z)(x-z)dz + nQ_2^H x - Q_2^B x. \quad (28.18)$$

Позначимо для спрощення

$$\gamma = 1+n; \quad \delta = nf_1d_2 - f_1d_1.$$

Тоді (28.17) матиме вигляд:

$$\int_0^x p_1(z)[\gamma(x-z) + \delta]dz = f(x). \quad (28.19)$$

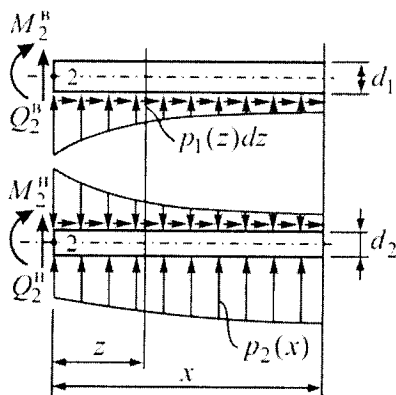


Рис. 28.12

Рівняння (28.19) являє собою рівняння Вольтера 1-го роду.

Розв'язуємо його операційним методом [119]. Позначимо $\gamma(x-z) + \delta = f_1(x-z)$.

Тоді (28.19) набуває вигляду

$$\int_0^x p_1(z) f_1(x-z) dz = f(x). \quad (28.20)$$

Якщо ми введемо однобічне перетворення Лапласа для шуканої функції $p_1(x)$ та заданих $f_1(x)$ і $f(x)$,

$$F_1(x) \div \rightarrow p_1(x); \quad F_2(x) \div \rightarrow f_1(x); \quad F_3(x) \div \rightarrow f(x).$$

На підставі теореми про згортання

$$\int_0^x p_1(z) f_1(x-z) dz \leftarrow \div F_1(p) F_2(p)$$

одержимо

$$F_1(p) F_2(p) = F_3(p), \quad (28.21)$$

при цьому

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

За заданою функцією $f_1(x)$ знаходимо її відображення:

$$F_2(p) = \frac{\gamma}{p^2} + \frac{\delta}{p}.$$

Із (28.21) одержуємо

$$F_1(p) = \frac{p^2 F_3(p)}{\gamma + \delta p}. \quad (28.22)$$

За допомогою (28.22) можна одержати розв'язання задачі для всіх зустрінutih у розрахунках випадках навантаження. Дійсно, за заданою $p_2(x)$ з (28.18) знаходимо $f(x)$, потім її відображення $F_3(p) \div \rightarrow f(x)$. Далі з (28.22) знаходимо $F_1(p)$, а по відображенню визначаємо шукану функцію $p_1(x) \leftarrow \div F_1(p)$.

Зусилля V_3 визначається з умови рівноваги верхнього шару

$$V_3 = P - 2 \left[V_1 + \int_0^{x_{23}} p_1(x) dx \right]. \quad (28.23)$$

Зауважимо, що наведено розв'язання при наявності відрізка суцільного контакту в середній частині безпосередньо може бути застосоване для розрахунку несиметричної двошарової ступінчастої складової балки. У цьому випадку ліва та права частини балки відносно точки 3 розглядаються окремо.

Наведемо визначення функції $p_1(x)$ для лінійно-змінного навантаження

$$p_2(x) = p_{22} + \beta x.$$

За формулою (28.18)

$$f(x) = \frac{n}{6}\beta x^3 + \frac{np_{22}}{2}x^2 + (nQ_2^H - Q_2^B)x.$$

Позначимо для спрощення

$$\lambda = \frac{n}{6}\beta; \quad \lambda = \frac{np_{22}}{2}; \quad v = nQ_2^H - Q_2^B.$$

Тоді

$$f(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 + vx; \quad F_3(p) = \frac{6\lambda}{p^4} + \frac{2\mu}{p^3} + \frac{v}{p^2}.$$

За формулою (28.21)

$$F_1(p) = \frac{6\lambda + 2\mu p + vp^2}{\gamma p^2 + \delta p^3} = \frac{2\mu}{\gamma p} - \frac{6\lambda\delta}{\gamma^2 p} + \frac{6\lambda}{\gamma p^2} + \left[\frac{6\lambda\delta}{\gamma^2} - \frac{2\mu}{\gamma} + \frac{v}{\delta} \right] \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\delta} + p \right)}.$$

За відображенням $F_1(p)$ знаходимо шукану функцію $p_1(x) \leftarrow \div F_1(p)$

$$p_1(x) = \frac{2\mu}{\gamma} - \frac{6\lambda\delta}{\gamma^2} + \frac{6\lambda x}{\gamma} + \left[\frac{6\lambda\delta}{\gamma^2} - \frac{2\mu}{\gamma} + \frac{v}{\delta} \right] e^{-\frac{\gamma}{\delta}x}.$$

Повертаючись до вихідних позначень, одержимо:

$$p_1(x) = \frac{n}{1+n} \left(p_{22} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta x \right) + \left[\frac{n}{1+n} \left(\frac{\beta}{\alpha} - p_{22} \right) + \frac{(nQ_2^H - Q_2^B)}{1+n} \right] e^{-\alpha x}. \quad (28.24)$$

У випадку рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю p_2 одержимо

$$p_1(x) = \frac{np_2}{1+n} + \left[\frac{(nQ_2^H - Q_2^B)\alpha}{1+n} - \frac{np_2}{1+n} \right] e^{-\alpha x}. \quad (28.25)$$

Щоб проілюструвати вплив сил тертя на напружений стан складової балки, на рис. 28.13 наведені результати розрахунку двошарового ступінчастого елемента при дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю p_2 знизу і зосередженої сили P зверху. Розрахунок проведено при таких даних: довжина верхнього шару – 3,0 м, нижнього – 4,0 м; $a = 0,5$ м; $d_1 = 0,3$ м; $d_2 = 0,15$ м; $n = 8$; $f_1 = 0,5$; $f_1 = 0$. Епюри при $f_1 = 0,5$ показані суцільними лініями, при $f_1 = 0$ – пунктирними.

Зроблене припущення про те, що при згині складової балки відбувається взаємний зсув шарів, підтверджується розрахунком: зсувні зусилля в усіх точках по довжині контакту значно перевищують сили тертя.

Відмітимо, що при $f_1 = 0$ на відрізу суцільного контакту, як це видно з (28.25), діє розподілене зусилля

$$p_1 = \frac{n}{1+n} p_2,$$

а в точці 2 – зосереджене зусилля V_2 , величина якого визначається з умови рівності кривизни у будь-якій точці відрізка 2-3.

У розглянутому прикладі врахування сил тертя привело до зменшення найбільших нормальних розтягуючи напружень у верхньому шарі більш як на 20%, що підтверджує можливість одержання істотної економії у витратах матеріалів при проектуванні складових елементів.

Зазначимо, що наведені приклади про напружений стан складової балки є відносно простими внаслідок симетрії. Більш складні задачі розглянуті в [46].

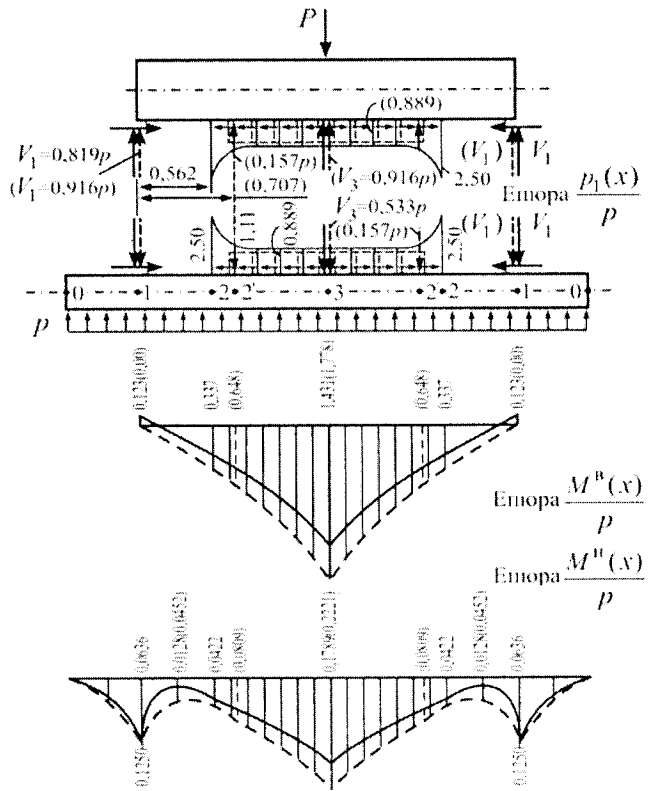


Рис. 28.13

28.3. Нерівність Фур'є. Нерівність Юнга. Приклади

Як показав Фур'є, звичайне для принципу можливих переміщень вираження через потенціальну енергію (роботу сил)

$$\delta U = 0 \tag{28.26}$$

дійсне для, так званих, зворотних переміщень, тобто переміщень, в'язі за напрямками яких можуть змінювати знак. У випадку незворотних переміщень рівність (28.26) слід замінити нерівністю

$$\delta U \geq 0, \tag{28.27}$$

а в звичайному формулюванні принципу віртуальних переміщень – «сума усіх віртуальних робіт дорівнює нулю» замінити «дорівнює нулю» на «менше або дорівнює нулю»¹.

¹ Фур'є, Жан Батист Жозеф (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830) – французький математик і фізик. Єдиною роботою Фур'є з механіки була «Мемуар о статике, содержащий доказательство принципа виртуальных скоростей и теории моментов» (Мемуар про статику, що містить доказ принципу віртуальних швидкостей і теорію моментів). Одним із положень цієї роботи був розгляд випадків рівноваги сил, які прикладені до точок механічної системи з так званими нестримуючими в'язями (такого терміну у самого

Вперше на такі в'язі системно звернув увагу Лагранж, який в книзі «Аналітична механіка» зазначив «основна властивість рівноваги полягає у тому, що будь-яка система сил, які знаходяться у рівновазі, продовжує залишатися у цьому стані, коли кожна із цих сил змінює напрям своєї дії на протилежний – якщо тільки структура цієї системи не підлягає будь-яким змінам внаслідок зміни напрямів усіх сил».

П.Аппелем¹ дане таке визначення цьому поняттю: «якщо можливі переміщення, сумісні із в'язями, задані нерівностями, тоді в'язі називаються нестримними» (однобічними, unilaterales). Розглядається загальний випадок, коли в'язі між точками виражаються за допомогою h залежностей, з яких g рівностей і $h-g$ нерівностей. Ті з можливих переміщень системи, при яких ліві частини не тільки усіх рівнянь, а і нерівностей дорівнюють нулю, П.Аппель називає переміщеннями рівностей, інші – переміщеннями нерівностей. Доведена наступна теорема. Для рівноваги системи, яка знаходиться у стані, коли усі в'язі включені, необхідна і достатньо, щоб при усіх переміщеннях, сумісних із в'язями, сума робіт діючих сил дорівнювала нулю, або була негативною; нулем для переміщень рівностей, негативною для переміщень нерівностей. При цьому система навіть при включенні усіх в'язей є геометрично змінюваною. Надалі будемо вважати, що ті в'язі, яким відповідають нерівності називаються однобічними.

З аналітичної механіки відомо [242], якщо на систему накладено r стаціонарних голономних двобічних в'язей і s однобічних

$$\Phi_j(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\Psi_k(q_1, \dots, q_n) \geq 0, \quad k = 1, \dots, s,$$

Фур'є не має). Як приклад Фур'є розглядав рівновагу двох твердих тіл, поверхні яких притискаються у точці їх дотику двома рівними і протилежно напрямленими силами, нормальними до обох поверхонь у точці їх дотику, рівновагу гнучкої нерозтяжної нитки під дією двох сил, прикладених до її кінців. Фур'є стверджував (без доказів), що необхідною умовою рівноваги нитки під дією таких сил – є невід'ємність «повного моменту сил» на віртуальних переміщеннях точок їх прикладення. За термінологією того часу «повним моментом сил» називалася сума елементарних робіт усіх активних сил на віртуальних переміщеннях точок їх прикладення, взята зі знаком мінус. Таким чином, умова рівноваги системи сил при нестримуючих в'язях записувалася у вигляді вимоги недодатності суми елементарних робіт усіх сил на віртуальних переміщеннях. М.В. Остроградський при розробці загальної теорії принципу можливих переміщень (1834 р.) виходив із запису цього принципу у мемуарі Фур'є.

Слід зазначити, що Лагранж у своїй книзі «Аналітична механіка» (1788) вказав, що «Основное свойство равновесия, заключающееся в том, что любая система сил, находящаяся в равновесии, продолжает оставаться в этом состоянии, когда каждая из этих сил изменяет направление своего действия на противоположное, – если только структура этой системы не претерпевает какого-либо изменения вследствие изменения направления действия всех сил (Основна властивість рівноваги, що полягає в тому, що будь-яка система сил, що знаходиться в рівновазі, продовжує залишатися в цьому стані, коли кожна з цих сил змінює напрям своєї дії на протилежний, – якщо тільки структура цієї системи не зазнає якої-небудь зміни внаслідок зміни напрямку дії всіх сил)». Остання примітка доводить, що Лагранж припускав наявність таких в'язей і необхідність їх урахування.

¹ Аппель, Поль Еміль (фр. Paul Émile Appell, 1855–1930) – французський математик і механік. Вивів звичайні диференціальні рівняння, що описують рух голономних і неголономних систем (найбільш загальні рівняння руху механічних систем), які мають назву рівнянь Аппеля. У 1833–1896 рр. виданий його «Трактат раціональної механіки» (т. 1-Б).

таких, що функції Φ_j і Ψ_k є диференційованими і, якщо розглядається конфігурація, яка характеризується координатами q_1^0, \dots, q_n^0 , то нескінченно малі можливі переміщення $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ із конфігурації q_1^0, \dots, q_n^0 задовольняють наступним r рівностям і s нерівностям

$$A_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} \Big|_{q=q^0} \delta q_i = 0, \quad j=1, \dots, r,$$

$$B_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} \Big|_{q=q^0} \delta q_i \geq 0, \quad k=1, \dots, s.$$

Згідно із наведеним вище формулюванням начала можливих переміщень при наявності гладких однобічних в'язей без тертя і незалежних від часу

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta q_i \leq 0,$$

де P_i – узагальнені сили, які відповідають узагальненим переміщенням q_i .

Можна отримати значення компонент зовнішніх зусиль P_i у вигляді

$$P_i = - \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} N_j - \sum_{k=1}^s \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} S_k, \quad i=1, \dots, n,$$

де N_j – довільні за знаком, а S_k – позитивні величини, які за фізичним змістом являють собою реакції у відповідних двобічних і однобічних в'язях.

Крім того, оскільки реакції однобічних в'язей дорівнюють нулеві, якщо в'язь виключена із роботи (розімкнена), то для будь-якої такої в'язі:

- 1) $\Psi_k > 0$; $S_k = 0$ (в'язь розімкнена);
- 2) $\Psi_k = 0$; $S_k \geq 0$ (в'язь замкнена).

Звідси витікають так звані умови доповнювальної нежорсткості

$$\Psi_k S_k = 0,$$

тобто,

- або $S_k = 0$, або $\Psi_k = 0$;
- або $S_k = 0$ і $\Psi_k = 0$.

Приклад 28.1. Розглянемо приклад абсолютно жорсткої балки з однобічною в'яззю на опорі b , навантажену посередині (точка C) силою P (рис. 28.14). Можливі переміщення показані пунктирами. Тоді сума робіт цих сил повинна бути меншою, або дорівнювати нулеві (при неоднобічних в'язях).

$$-Pw_c + R2w_c \leq 0; \quad R \leq \frac{P}{2}.$$

Зазначимо, що якщо в'язі не є односторонніми,

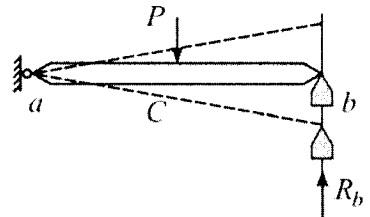


Рис. 28.14

то можливими є і переміщення протилежного знаку.

Наведені положення витікають із перетворення Лежандра і, зокрема, нерівності Юнга

$$U(\Delta) + U^{\text{доп}}(p) \geq P\Delta. \quad (28.28)$$

Якщо

$$\mathbf{P}^T = \{P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n\}, \quad \Delta^T = \{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n\}, \\ \mathbf{P} = \mathbf{K}\Delta; \quad \Delta = \mathbf{D}\mathbf{P}.$$

Згідно з нерівністю

$$\delta U(\Delta) \geq P, \quad \delta U(P) \geq \Delta, \quad (28.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} &= k_{i1}\Delta_1 + k_{i2}\Delta_2 + \dots + k_{in}\Delta_n = P_i, \\ \frac{\partial U}{\partial \Delta_j} &= k_{j1}\Delta_1 + k_{j2}\Delta_2 + \dots + k_{jn}\Delta_n > P_j \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_i} &= \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \dots + \delta_{in}P_n = \Delta_i, \\ \frac{\partial U}{\partial P_j} &= \delta_{j1}P_1 + \delta_{j2}P_2 + \dots + \delta_{jn}P_n > \Delta_j \end{aligned} \right.$$

при n в'язях маємо i рівностей та j нерівностей
 $i + j = n$.

Зазначимо, що при звичайних в'язях (28.29) вирази дають відповідно теореми Лагранжа і Кастільяно.

При цьому у випадку нерівності Юнга за рахунок двоїстості функції $U(\Delta)$ і $U^{\text{доп}}(\Delta)$ теорема Донкіна справедлива.

Вище було показано, що із рівності робіт внутрішніх і зовнішніх сил

$$A_{BC} = A_{3C}$$

можна отримати усі варіаційні принципи $\delta A_{BC} = \delta A_{3C}$. Загальний, якщо йдеться про повну варіацію, і частинні, якщо якісь із варіацій дорівнюють нулю. Зокрема, так отримуються двоїсті принципи Лагранжа і Кастільяно

Якщо записати рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил у вигляді

$$\int_a^b M \chi dx = \int_a^b q w dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

то згідно з нерівностями Юнга і Фур'є у випадку наявності однобічних в'язей будемо мати:

$$A_{BC} \geq A_{3C} \quad \text{або} \quad \delta A_{BC} \geq \delta A_{3C},$$

$$U(w) + U^{\text{доп}}(M) \geq \int_a^b q w dx + \bar{M}' w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} w' \Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{w} M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' M \Big|_{a_2}^{b_2},$$

або

$$\delta U(w) \geq 0, \quad \int_a^b q \delta w dx + \bar{M}' \delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - \bar{M} \delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} \leq 0,$$

$$\delta U(M) \geq 0, \quad \bar{w} \delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}' \delta M \Big|_{a_2}^{b_2} \leq 0.$$

Нехай за можливе переміщення прийняте таке, при якому система зберігає контакт з усіма своїми двосторонніми опорами і відокремлюється від однієї або декількох односторонніх опор. Оскільки реалізації цих останніх завжди направлені у бік можливого переміщення, то їх віртуальна робота на цих переміщеннях є завжди позитивна. Позначимо її A_R , тоді $A_R \geq 0$. Віртуальну роботу усіх інших зовнішніх сил позначимо A_P . Тоді умова рівноваги системи (принцип можливих переміщень) дає

$$A_R + A_P = 0.$$

Звідси

$$A_P = -A_R \leq 0.$$

Таким чином у випадках рівноваги системи, на тих можливих переміщеннях, при яких навантажена система відокремлюється від однієї, або декількох її односторонніх опор (за яких односторонні в'язі виключаються із роботи) сумарна віртуальна робота зовнішніх сил є від'ємною, або дорівнює нулеві.

$$A_P \leq 0.$$

З урахування роботи внутрішніх сил, яка ототожнюється із потенціальною енергією системи, маємо такий вираз принципу можливих переміщень

$$U + A_P = 0,$$

але у випадку наявності однобічних в'язей, як було доведено вище $A_P \leq 0$, Тоді $U \geq 0$. Якщо перейти до варіацій робіт, тобто робіт на нескінченно малих переміщеннях δw , отримаємо

$$\delta U \geq 0$$

і відповідно

$$\delta A_P \leq 0.$$

Зазначимо, що наведене має місце і для принципу можливих зусиль, якщо потенціальна енергія системи виражається через відповідні зусилля і здійснюється їх варіювання.

Сума робіт зовнішніх зусиль (рис. 28.15)

$$-\underbrace{\frac{Py_b}{2} + \frac{M_b y_b}{l}}_{A_P} + \underbrace{R_b y_b}_{A_R} = 0, \quad A_R \geq 0$$

або

$$A_P = -A_R \leq 0,$$

де

$$A_P = -A_R = -\frac{Py_b}{2} + \frac{M_b y_b}{l} \leq 0,$$

звідси

$$\frac{P}{2} \geq \frac{M_b}{l}.$$

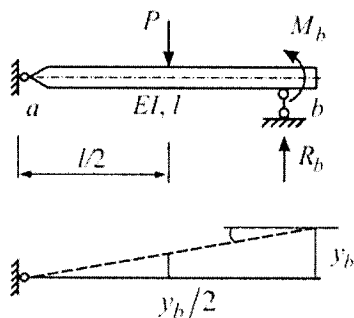


Рис. 28.15

Приклад 28.2. Розглянемо приклад для балки на рис. 28.16, де ліва опора a є однобічною і сприймає тільки позитивні переміщення Δ (донизу) і скористуємося залежністю

$$\delta U(M) \geq 0, \quad M = Xx + M - \frac{qx^2}{2}.$$

Граничні умови

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=0} = X, \quad M|_{x=0} = M,$$

$$U(M) = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(Xx + M - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx,$$

$$\delta U(M) \geq 0$$

дає

$$\frac{dU(M)}{dx} \geq 0, \quad \frac{1}{EI} \int_0^l \left(Xx + M - \frac{qx^2}{2} \right) x dx \geq 0,$$

$$\frac{Xl^3}{3} + \frac{Ml^2}{2} - \frac{ql^4}{8} \geq 0, \quad X \geq \frac{3}{8}ql - \frac{3}{2} \frac{M}{l} \geq 0.$$

Для задачі, наведеній у розділі 5.7.3 без урахування однобічності в'язей, маємо (рис. 28.17):

нерівність Юнга

$$U(\Delta, \varphi) + U(X_1 X_2) \geq X_1 \Delta + X_2 \Delta.$$

нерівності Фур'є

$$\delta U(\Delta, \varphi) \geq 0; \quad \delta U(X_1 X_2) \geq 0.$$

Скористаємось другою нерівністю. Якщо

$$\delta U(X_1 X_2) \geq 0,$$

отримаємо систему нерівностей

$$Bx + D \geq 0; \quad x = \{X_1 X_2\}^T; \quad D = \{-\Delta - \varphi\}^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ -\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}.$$

Позначимо $a = \frac{l^3}{3EI}$; $b = \frac{l^2}{2EI}$; $c = \frac{l}{EI}$.

Тоді отримаємо у загальному випадку

$$aX_1 - bX_2 \geq \Delta, \quad -bX_1 + cX_2 \geq \varphi.$$

Оскільки кожна із рівностей являє собою рівняння прямої у відрізках на осях, розглянемо три варіанти: 1) $\Delta > 0$; $\varphi > 0$; 2) $\Delta = 0$; $\varphi > 0$; 3) $\Delta > 0$; $\varphi = 0$. Зони можливих значень X_1 і X_2 для цих випадків показані на рис. 28.18, а, б, в відповідно.

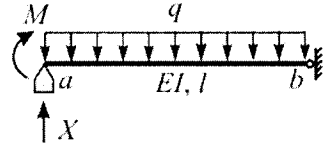


Рис. 28.16

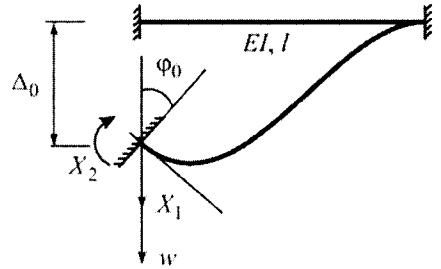


Рис. 28.17

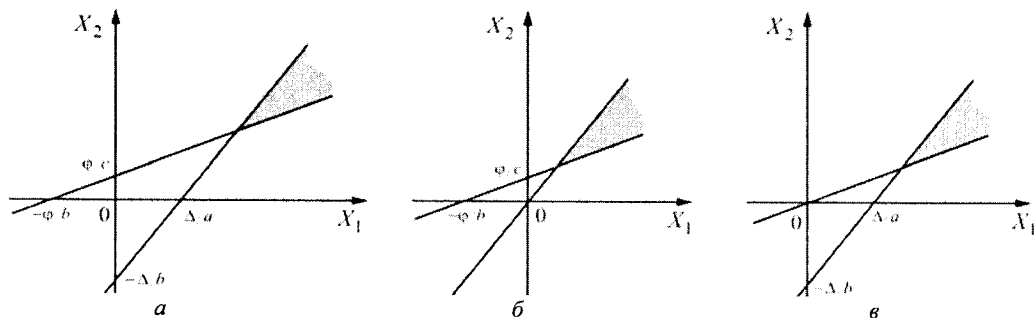


Рис. 28.18

У загальному випадку для розв'язку таких задач використовуються методи нелінійного програмування [211]. Зокрема, такі підходи розглядалися у роботах [11, 16, 17]. Тобто, необхідно знайти мінімум функціоналу потенціальної енергії системи (функціонала Лагранжа)

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{F}^T \mathbf{u}$$

при обмеженнях

$$g_i(\mathbf{u}) \leq 0; \quad g_j(\mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = m+1, \dots, k, \quad i+j=k,$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості; \mathbf{F} – вектор-рядок зовнішніх сил.

При цьому необхідними і достатніми умовами існування і єдиності розв'язку є опуклість функціоналу і замкненість області його визначення [154, 162].

28.4. Нелінійні задачі згину круглї пластинки

Відомо, якщо умови спирання або завантаження конструкції залежать від її деформації, то ця деформація уже не буде пропорційною навантаженню, і такі задачі є нелінійними.

Приклад 28.3. Як приклад, розглянемо показану на рис. 28.19 круглї пластинку радіуса a , яка притиснута рівномірно розподіленим навантаженням q до абсолютно жорсткої горизонтальної основи [196]. Якщо по контуру пластинки діють моменти M_a , то може статися, що кільцева частина пластинки буде зігнута, а середня радіусом b залишиться плоскою (рис. 28.19).

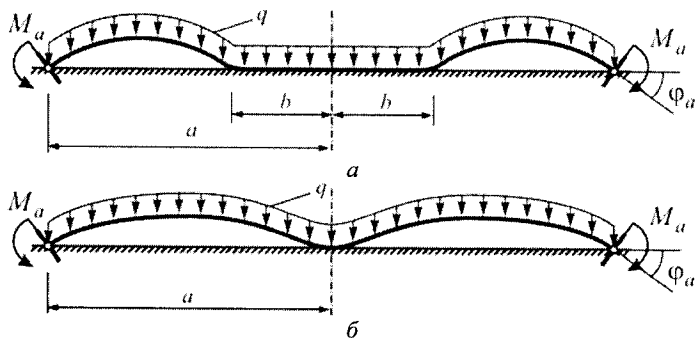


Рис. 28.19

Подібні умови, наприклад, мають місце при згині днищ круглих циліндричних резервуарів,

наповнених рідиною. Моменти M_a являють у цьому випадку дію циліндричної стінки резервуара, на яку впливає згин днища. Прогин круглої вісесиметричної пластинки обчислюється за відомою формулою:

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}. \quad (28.30)$$

Константи $C_1 - C_4$ визначаються із граничних умов на зовнішньому контурі

$$w|_{r=a} = 0; \quad M_r|_{r=a} = -M_a. \quad (28.31)$$

На внутрішньому колі радіуса b

$$w|_{r=b} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=b} = 0. \quad (28.32)$$

Крім того, як витікає із розгляду варіаційної задачі з рухомими границями, наведеної в прикладі 28.30 на цьому контурі

$$M_r|_{r=b} = 0. \quad (28.33)$$

З урахуванням граничних умов отримаємо рівняння відносно констант $C_1 - C_4$:

$$C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a = -\frac{qa^4}{64D}; \quad C_1 + C_2 \ln b + C_3 b^2 + C_4 b^2 \ln b = -\frac{qb^4}{64D};$$

$$C_2 \frac{\mu-1}{a^2} + C_3 2(\mu+1) + C_4 (3 + 2 \ln a + 2\mu \ln a + \mu) = -\frac{qa^2}{16D} (3 + \mu) + \frac{M_a}{D};$$

$$C_2 \frac{\mu-1}{b^2} + C_3 2(\mu+1) + C_4 (3 + 2 \ln b + 2\mu \ln b + \mu) = -\frac{qb^2}{16D} (3 + \mu);$$

$$C_2 \frac{1}{b} + C_3 2b + C_4 b(2 \ln b + 1) = -\frac{qb^2}{16D}.$$

Виключаючи із цих рівнянь константи $C_1 - C_4$, отримаємо рівняння, яке пов'язує M_a і співвідношення b/a , з якого для будь-якого значення M_a можна обчислити радіус b плоскої частини пластинки. При цьому значенні b визначаються константи інтегрування і рівняння (28.30) дасть вираз прогину пластинки. Представивши M_a і відповідний кут повороту φ_a рівняннями

$$M_a = \alpha \frac{qa^2}{32} \quad \text{і} \quad \varphi_a = \beta \frac{qa^2}{32D} \quad (28.34)$$

і, виконавши обчислення за описаним алгоритмом, для ряду значень M_a ми зможемо (для окремого випадку, коли $\mu=1$) представити співвідношення між коефіцієнтами α і β графічно (рис. 28.20). На цьому графіку видно, що β змінюється не пропорційно α , і що із зменшенням b/a опір краю пластинки повороту теж зменшується. Ця закономірність має місце до $\alpha=5$, при якому $\beta=1$ і $b/a=0$. При цьому пластинка торкається основи лише у центрі (рис. 28.19,б). При

більших значеннях, тобто при $M_a > 5 \frac{qa^2}{32}$ пластинка зовсім не торкається основи, і залежність між α і β є пряма AB . При $M_a = 5 \frac{qa^2}{32}$ прогин у центрі пластинки є рівним прогину рівномірно навантаженої вільно опертої по краю пластинки.

Інший приклад такого ж типу показаний на рис. 28.21. Рівномірно навантажена кругла пластинка, вільно оперта по краю, лежить у центрі на абсолютно жорсткій основі. Кільцевидну частину пластинки із зовнішнім радіусом a і внутрішнім b тут також можна розглядати як рівномірно навантажену пластинку. Співвідношення b/a залежить від прогину Δ і навантаження q .

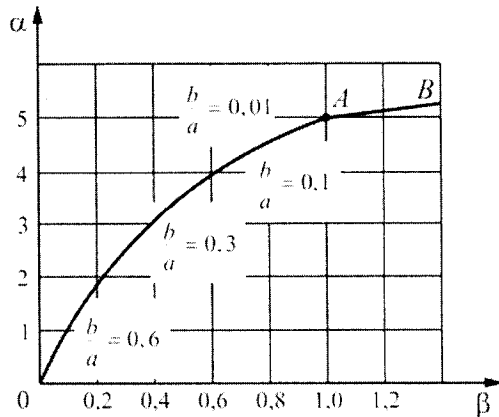


Рис. 28.20

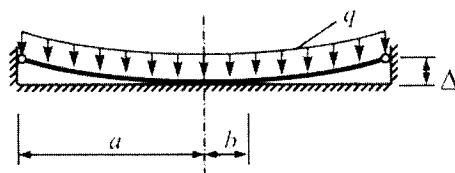


Рис. 28.21

28.5. Пошук рівноважних станів механічних систем з обмеженнями проективним методом нелінійного програмування

Нелінійне програмування, охоплюючи досить широке коло задач, є одним з основних розділів в теорії оптимальних розв'язків. Воно зводиться до проблеми руху із точки, яка не є розв'язком, у точку, що являє собою екстремум деякої цільової функції при деяких обмеженнях, що формулюються у вигляді рівностей або нерівностей. Разом з тим нелінійне програмування містить також ефективну схему для формалізованої постановки задач розв'язання систем нелінійних рівнянь в математиці, механіці, фізиці та в інших областях природознавства. Наприклад, у задачах механіки цільовою функцією може бути потенціальна енергія, що має властивості екстремальності, а обмеженнями – різні співвідношення (рівності або нерівності) в'язей або сумісності переміщень і деформацій. Тоді точки екстремальних значень потенціальної енергії за умов задоволення додаткових обмежень визначатимуть стан рівноваги механічної системи.

Після того як задача, що підлягає оптимізації, сформульована таким чином, для її розв'язання можна використовувати аналітичні або чисельні методи. Перші базуються на класичних методах диференціального і варіаційного числення. Вони полягають у визначенні екстремуму функції $f(x)$ шляхом знаходження тих значень компонент x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора x , які перетворюють у нуль похідні $f(x)$ по x . У разі пошуку екстремуму $f(x)$ при наявності обмежень

$g_j(x) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, l$) застосовують такі методи, як метод множників Лагранжа та метод обмежених варіацій. У зв'язку з великою громіздкістю для розв'язання істотно нелінійних задач аналітичні методи в більшості випадків виявляються непридатними.

Чисельні методи оптимального пошуку, як правило, засновані на використанні попередньої інформації для побудови поліпшених розв'язків задач за допомогою ітераційних або крокових процедур. Одним з найефективніших чисельних методів розв'язання задач оптимізації є метод проекції градієнта цільової функції на лінеаризовані обмеження (рис. 28.22).

Проективні методи, що випливають з такого підходу, складають ціле сімейство. Їх сутність полягає в наступному [211]: лінійні або лінеаризовані обмеження утворюють лінійну багатостатність (обумовлену перерізом обмежень), на яке можна спроектувати обраний напрям пошуку S у просторі розв'язків. Для реалізації цієї процедури використовується багатовимірне узагальнення операції проектування вектора на площину в тривимірному просторі.

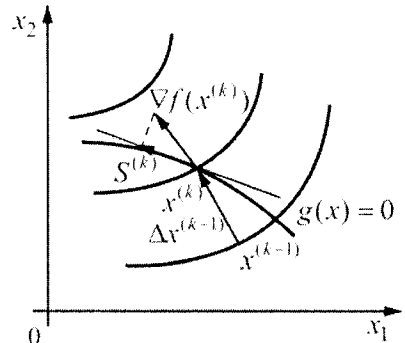


Рис. 28.22

Усі проективні методи передбачають реалізацію на кожному k -му етапі такої послідовності кроків:

- 1) алгоритм починає роботу в допустимій точці $x^{(k)}$;
- 2) визначається допустимий напрям $S^{(k)}$;
- 3) у допустимому напрямі обирається крок довжиною $\lambda^{(k)}$, що мінімізує $f(x)$,

але в той же час зберігає вектор $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)}S^{(k)}$ допустимим.

Алгоритми розглядуваного сімейства відрізняються один від одного способом визначення напрямку $S^{(k)}$, проте всі вони характеризуються тим, що пошук починається з допустимого розв'язку і розвивається (при лінеаризованих обмеженнях) в напрямі, що забезпечує зменшення цільової функції при збереженні поточної точки x всередині допустимої області. При цьому проективні методи на кожному кроці обчислювального процесу залучають якомога мінімальну кількість обмежень у вигляді нерівностей з числа активних обмежень. Для пояснення основних положень проективних методів розглянемо докладніше поняття проекції [211], що асоціюється з поняттям проекції вектора, який описує локальний приріст функції при переміщенні в заданому напрямі.

Нехай $A^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ – квадратна матриця з лінійно незалежними вектор-стовпцями, що визначають деякий простір R^n . Прийmemo, що A допускає поділ на дві матриці: $A_l^T = [a_1, \dots, a_l]$ і $A_{n-l}^T = [a_{l+1}, \dots, a_n]$.

Будь-який вектор в R^n можна однозначно представити у вигляді лінійної комбінації векторів \mathbf{a}_j , тобто

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \tau_j \mathbf{a}_j, \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau}, \quad (28.35)$$

де коефіцієнти τ_j представляють собою координати вектора \mathbf{x} відносно базису \mathbf{A} . Водночас вектори, що утворюють матрицю \mathbf{A}_l^T , задають простір l -ї розмірності, тому співвідношення

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \tau_i \mathbf{a}_i, \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{A}_l^T \boldsymbol{\tau} \quad (28.36)$$

є справедливим тільки для деякої підмножини векторів у R^n .

Рівняння $\mathbf{a}_j^T \mathbf{x} = 0$ визначає в R^n гіперплощину, що проходить через початок координат. Позначимо через M переріз множини всіх гіперплощин з $j=1, 2, \dots, l$, що формують лінійну багатостатність розмірності $(n-l)$ (тобто систему рівнянь $\mathbf{A}_l \mathbf{x} = 0$). Ортогональна проекція \mathbf{x} на M (яку позначимо через \mathbf{x}_M) має ту проєктивну властивість, що \mathbf{x}_M і $\mathbf{x} - \mathbf{x}_M$ є ортогональними, тобто

$$\mathbf{x}_M^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) = 0. \quad (28.37)$$

Тоді n -вимірна квадратна проєктуюча матриця \mathbf{P}_l визначиться умовою

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{P}_l \mathbf{x}. \quad (28.38)$$

Вона обчислюється за формулою

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{I} - \mathbf{A}_l^T (\mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^T)^{-1} \mathbf{A}_l, \quad (28.39)$$

де \mathbf{I} – одинична діагональна матриця. За допомогою \mathbf{P}_l можна знаходити проєкцію на обмеження градієнта функції $f(x)$, яка мінімізується. Для цього l нелінійні обмеження $g_i(x)$, що мають вигляд рівностей (активні обмеження), у допустимій точці $x^{(k)}$ лінеаризуються і замінюються l дотичними до поверхні обмежень гіперплощинами.

Позначимо через \mathbf{A}_l матрицю коефіцієнтів при компонентах вектора \mathbf{x} у лінеаризованих рівняннях активних обмежень:

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_l(x^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_l(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Вона визначає систему лінеаризованих обмежень:

Таким чином, для визначення положення рівноваги системи при деякому значенні параметра λ необхідно розв'язати систему (28.52).

Припустимо, що рівняння (28.52) для кожного $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ має розв'язок $x = x(\lambda)$. Іншими словами, припустимо, що існує таке відображення $x: \Lambda \rightarrow U$, що

$$f'_x(x(\lambda), \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (28.53)$$

Точка $x(\lambda)$ описує криву Γ в області U , яка називається траєкторією навантаження. У точках $x \in \Gamma$ функціонал набуває стаціонарних значень.

Ознака стійкої рівноваги механічної системи встановлюється принципом Лежен-Діріхле: якщо система знаходиться у стані стійкої рівноваги, то її повна потенціальна енергія має мінімум у порівнянні з усіма сусідніми положеннями системи, що відрізняються від вихідного нескінченно малими переміщеннями, якщо в нестійкій рівновазі, – то максимумом, а якщо у байдужій, – то потенціальна енергія не змінюється. Отже, в стані стійкої рівноваги другий диференціал від потенціальної енергії f є строго додатним, тобто

$$f''_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\lambda})[h, h] \geq \alpha \|h\|^2, \quad \forall h \in X, \quad (28.54)$$

при деякому $\alpha > 0$.

У стані нестійкої рівноваги

$$f''_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\lambda})[h, h] \leq -\alpha \|h\|^2, \quad \forall h \in X,$$

при деякому $\alpha > 0$.

Деформування системи при зміні параметра λ можна представити як рух уздовж кривої Γ . Таке представлення процесу навантаження пов'язане з можливістю застосування методів теорії нелінійного програмування для розв'язування нелінійних задач теорії пружності. Вважаючи потенціальну енергію $f(x, \lambda)$ цільовою функцією, умову її «екстремального» приросту під час руху з точки $x(\lambda_{(n)})$ в точку $x(\lambda_{(n+1)})$ кривої Γ представимо у формі

$$\begin{aligned} f'_x(x(\lambda_{(n+1)}), \lambda_{(n+1)}) &= f'_x(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \\ &+ f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)})\Delta x_{(n)} + f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)})\Delta \lambda = 0. \end{aligned} \quad (28.55)$$

Використовуючи це співвідношення, можна отримати лінійне рівняння відносно приросту $\Delta x_{(n)}$ вектора $x_{(n)}$

$$f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)})\Delta x_{(n)} = -\left(r(\lambda_{(n)}) + f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)})\Delta \lambda\right), \quad (28.56)$$

де $r(\lambda)$ – нев'язка рівняння (28.53) у точці λ .

Приймаючи деякий відомий напружено-деформований стан системи (x_0, λ_0) за вихідний, можна за допомогою співвідношення (28.56) побудувати траєкторію навантаження Γ для всього інтервалу Λ . Як правило вихідною точкою вважають $(x(0), 0) \in \Gamma$, що відповідає напружено-деформованому стану при відсутності зовнішнього впливу.

Необхідно мати на увазі, що відображення $x: \Lambda \rightarrow U$, що визначається співвідношенням (28.53), не буде, взагалі кажучи, однозначним, тобто деяким значенням λ будуть відповідати кілька образів $x(\lambda)$. Внаслідок цього на траєкторії навантаження можуть мати місце точки розгалуження, з яких відходять гілки додаткових розв'язків. У цих точках порушуються умови теореми про обернений оператор, оскільки оператор $f'_x(x(\lambda), \lambda)$ не має оберненого, і метод продовження розв'язку за параметром стає непридатним.

Особливі точки траєкторії навантаження (вершина пагорба, сідло і т.ін.) визначають критичні стани системи, оскільки в них малим приростам параметра λ можуть відповідати великі прирости розв'язків.

Наведена задача нелінійного програмування відноситься до так званої безумовної оптимізації, коли змінні, які описують процес деформування, не пов'язані додатковими обмеженнями, що включають задані граничні діапазони зміни параметрів і забезпечують фізичну реалізованість процесу.

Задача значно ускладнюється, якщо шуканий розв'язок має підпорядковуватися додатковим вимогам, сформульованим у вигляді нерівностей. Розглянемо випадок, коли обмеження мають вигляд рівностей.

Нехай Y – банахів простір і $F: X \rightarrow Y$ – диференційовне за Фреше відображення X в Y . Нехай, далі, для кожного $\tilde{x} \in U$ образ простору X при відображенні $x \rightarrow F'(x)$ збігається з Y .

Обмеження у вигляді рівностей визначимо рівнянням

$$F(x) = 0. \tag{28.57}$$

Складемо функцію Лагранжа задачі мінімізації функції за обмежень (28.57):

$$L(x, \lambda, y^*) = f(x, \lambda) + \langle y^*, F(x) \rangle,$$

де y^* – елемент спряженого простору Y^* .

Якщо при деякому фіксованому $\tilde{\lambda}$ функціонал $f(x, \lambda)$ набуває екстремального значення в точці \tilde{x} і при цьому виконуються обмеження (28.57), то

$$L'_x(x, \lambda, y^*) = 0, \quad L'_{y^*}(x, \lambda, y^*) = 0. \tag{28.58}$$

У тому випадку, коли $Y = R^l$, $F(x)$ є вектор-функцією $F_i(x): X \rightarrow R$ ($i=1, \dots, l$), а елемент y^* спряженого простору Y^* являє собою вектор $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}$, система (28.58) запишеться у вигляді

$$L'_x(x, \lambda, \mu) = 0, \quad F_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, l. \tag{28.59}$$

Нехай для кожного $\lambda \in \Lambda$ система (28.59) має розв'язок $x = x(\lambda)$, $\mu = \mu(\lambda)$, тобто існує таке відображення $(x, \mu): \Lambda \rightarrow U \times R^n$, що

$$f'_x(x(\lambda), \lambda) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda) F'_i(x(\lambda)) = 0, \quad F'_i(x(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad i=1, \dots, l. \tag{28.60}$$

Точка $(x(\lambda), \mu(\lambda))$ описує криву Γ в області $U \times R^l$.

Аналогічно (28.56) рух вздовж кривої $(x(\lambda), \mu(\lambda))$ з точки $(x(\lambda_{(n)}), \mu(\lambda_{(n)}))$ в точку $(x(\lambda_{(n+1)}), \mu(\lambda_{(n+1)}))$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} & f'_x(x(\lambda_{(n+1)}), \lambda_{(n+1)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n+1)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n+1)})) = \\ & = f'_x(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) + f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta x_{(n)} + \\ & + \sum_{i=1}^l \Delta \mu_i(\lambda_{(n)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n)}) F''_{ix}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} + f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda = 0, \\ & F'_i(x(\lambda_{(n+1)})) = F'_i(x(\lambda_{(n)})) + F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (28.61)$$

Співвідношення (28.61) являють собою систему лінійних рівнянь у просторі $X \times R^l$ відносно змінних Δx , $\Delta \mu$:

$$\begin{aligned} & [f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n)}))] \Delta x_{(n)} + \sum_{i=1}^l F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) \Delta \mu_{i(n)} = \\ & = -r_0(\lambda_{(n)}) - f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda, \\ & F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) = -r_i(\lambda_{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (28.62)$$

де вектор $\mathbf{r}(\lambda_{(n)}) = \{r_0(\lambda_{(n)}), r_1(\lambda_{(n)}), \dots, r_l(\lambda_{(n)})\} \in R^{l+1}$ – нев'язка системи (28.60) в точці $\lambda = \lambda_{(n)}$.

Використовуючи вираз (28.62), можна побудувати траєкторію навантаження механічної системи при наявності в'язей. Особливі точки на кривій Γ відповідають точкам виродження системи (28.62).

Розглянемо тепер випадок, коли шуканий розв'язок підпорядковується обмеженням як у вигляді рівностей, так і у вигляді нерівностей.

Нехай на X задані l гладких функцій $F_i(x): X \rightarrow R$ ($i = 1, 2, \dots, l$), що визначають обмеження у вигляді рівностей, тобто

$$F_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (28.63)$$

і m гладких функцій $G_i(x): X \rightarrow R$ ($i = 1, 2, \dots, m$), що визначають обмеження у вигляді нерівностей, тобто

$$G_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (28.64)$$

Нерівності (28.64) задають певну область G у просторі X . Точка $x \in V$ називається допустимою.

Нехай для деякого значення параметра $\lambda = \lambda_0$ відомо \tilde{x} , в якому досягається мінімум функції $f(x, \lambda_0)$, при цьому задовольняються умови (28.63) і (28.64) і точка x є внутрішньою точкою області V . Тоді в деякому околі точки x виконуються строгі нерівності (28.64). Тому при знаходженні мінімуму функцій

$f(x, \lambda)$ ($x > X$), де $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, умови (28.64) можна виключити із розгляду, і задача розв'язується за допомогою рівняння (28.62).

У процесі продовження розв'язку за параметром точка x може вийти за межі допустимої області V , тобто деякі з нерівностей (28.64) можуть змінити знаки на протилежні

$$G_k(x) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, m_1; \quad m_1 \leq m. \quad (28.65)$$

Ці нерівності замінюються рівностями і приєднуються до рівнянь (28.63), проте при побудові розв'язку враховуються їх відповідні нев'язки. Функція Лагранжа в цьому разі записується у вигляді

$$L(x, \lambda, \mu, \nu) = f(x, \lambda) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda) F_i(x) - \sum_{k=1}^m \nu_k(\lambda) G_k(x). \quad (28.66)$$

Нехай при значенні параметра $\lambda = \lambda_{(n-1)}$ точка $x(\lambda_{(n-1)}) \in V$, а при $\lambda = \lambda_{(n)}$ точка $x(\lambda_{(n)})$ вийшла за межі області V . Тоді рух вздовж кривої $(x(\lambda), \mu(\lambda), \nu(\lambda))$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & f'_x(x(\lambda_{(n+1)}), \lambda_{(n+1)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n+1)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n+1)})) - \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k(\lambda_{(n+1)}) G'_{kx}(x(\lambda_{(n+1)})) = \\ & = f'_x(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n)}) F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) - \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k(\lambda_{(n)}) G'_{kx}(x(\lambda_{(n)})) + \\ & + \left[f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{i=1}^l \mu_i(\lambda_{(n)}) F''_{ixx}(x(\lambda_{(n)})) - \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k(\lambda_{(n)}) G''_{kxx}(x(\lambda_{(n)})) \right] \Delta x_{(n)} + \\ & + \sum_{i=1}^l \Delta \mu_{i(n)} F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) - \sum_{k=1}^{m_1} \Delta \nu_{k(n)} G'_{kx}(x(\lambda_{(n)})) + f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda = 0, \\ & F_i(x(\lambda_{(n+1)})) = F_i(x(\lambda_{(n)})) + F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & G_k(x(\lambda_{(n+1)})) = G_k(x(\lambda_{(n)})) + G'_{kx}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m_1. \end{aligned} \quad (28.67)$$

Співвідношення (28.67) являють собою систему лінійних рівнянь у просторі $X \times R^n \times R^{m_1}$ відносно змінних $(\Delta x, \Delta \mu, \Delta \nu)$:

$$\begin{aligned} & \left[f''_{xx}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{i=1}^n \mu_i(\lambda_{(n)}) F''_{ixx}(x(\lambda_{(n)})) - \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k(\lambda_{(n)}) G''_{kxx}(x(\lambda_{(n)})) \right] \Delta x_{(n)} + \\ & + \sum_{i=1}^n F'_{ix}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \mu_{i(n)} - \sum_{k=1}^{m_1} G'_{kx}(x(\lambda_{(n)})) \Delta \nu_{k(n)} = -r_0(\lambda_{(n)}) - f''_{x\lambda}(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda, \\ & F'_{ix}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = -\tilde{r}_i(\lambda_{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & G'_{kx}(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = -\tilde{r}_k(\lambda_{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, m_1, \end{aligned} \quad (28.68)$$

де $\tilde{r}_k(\lambda_{(n)}) = G_k(x(\lambda_{(n)}))$.

За допомогою цієї системи здійснюється рух вздовж кривої $(x(\lambda), \mu(\lambda), \nu(\lambda)) \in X \times R^l \times R^m$. У початковій точці $(x(\lambda_{(n)}), \mu(\lambda_{(n)}), \nu(\lambda_{(n)}))$ координати $\nu_{ik}(\lambda_{(n)})=0$ ($k=1, \dots, m$). Враховуючи це, зручно вважати, що з самого початку крива навантаження з обмеженнями (28.63), (28.64) належить простору $X \times R^l \times R^m$. Поки $x(\lambda) \in V$, останні m координат дорівнюють нулю. У той момент, коли $x(\lambda)$ виходить на границю області V , дістають ненульовий приріст координати ν_k для тих k , у яких співвідношення (28.64) перейшли у строгі рівності. З іншого боку, якщо будь-яка з координат ν_k набуває від'ємного значення, то згідно з теорією Куна–Таккера [211] відповідну в'язь G_k необхідно відключити.

Таким чином, крива навантаження $(x(\lambda), \mu(\lambda), \nu(\lambda))$ належить простору $X \times R^l \times (R^+)^m$, де R^+ – область додатних чисел числової прямої.

28.7. Критичні та інваріантні стани механічних систем із скінченним числом ступенів свободи

Перехід до скінченновимірних просторів дозволяє розвинути побудови попереднього підрозділу у напрямі конкретних обчислювальних алгоритмів. Нехай стан деякої механічної системи визначається l параметрами, а інтенсивність зовнішнього впливу характеризується параметром λ . Потенціальна енергія системи задається функцією $f(x, \lambda): U \times \Lambda \times R$, де U – область простору R^l , Λ – інтервал числової осі R .

Геометрична інтерпретація основних законів механіки дозволяє розглядати траєкторію станів рівноваги довільної механічної системи як траєкторію руху вільної частинки у відповідному багатовимірному просторі з певною рімановою структурою, яка визначається потенціальною енергією системи $f(x, \lambda)$ [112].

Локальні властивості траєкторії руху на поверхні потенціальної енергії пов'язані з варіаційними принципами механіки.

Необхідна умова рівноваги (28.52) у скінченновимірному випадку запишеться у вигляді

$$\nabla f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial x_l} \end{bmatrix} = 0. \quad (28.69)$$

Ця умова являє собою систему l в загальному випадку нелінійних рівнянь. Нехай система (28.69) для кожного $\lambda \in \Lambda$ має розв'язок, тоді існує таке відображення $x(\lambda) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_l(\lambda)): \Lambda \rightarrow R$ ($i=1, 2, \dots, l$), що

$$\frac{\partial f(x(\lambda), \lambda)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (28.70)$$

Точка $x(\lambda)$ рухається по траєкторії станів Γ області $U \in R^l$.

Для лінеаризації задачі використовуємо варіаційний принцип, який формулюється наступним чином: справжній напружений стан деформівного середовища, який задовольняє умови сумісності, відрізняється тим, що для нього додаткова енергія має мінімальне значення у порівнянні з сусідніми напруженими станами, які задовольняють умови сумісності. Це означає, що явищу деформування тіла можна співставити рух точки $x(\lambda)$ вздовж деякої геодезичної лінії Γ на поверхні повної потенціальної енергії, і ці геодезичні лінії проходять по «ярах» і «хребтах» поверхні. Рух з точки $x(\lambda_{(n)})$ в точку $x(\lambda_{(n+1)})$ можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \nabla f(x(\lambda_{(n+1)}), \lambda_{(n+1)}) &= \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \\ &+ \nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta x_{(n)} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda = 0, \end{aligned} \quad (28.71)$$

де $\nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)})$ – нев’язка системи (28.70) в точці $x(\lambda_{(n)})$.

Вектор $S_{(n)}$, який характеризує напрям оптимального пошуку, задається співвідношенням

$$\nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta x_{(n)} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda = 0. \quad (28.72)$$

Зі співвідношення (28.71) дістанемо вираз для визначення приросту $\Delta x_{(n)}$ вектора $x_{(n)}$:

$$\Delta x_{(n)} = - \left[\nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \right]^{-1} \times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda + \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \right], \quad (28.73)$$

де $\left[\nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \right]^{-1}$ – матриця, обернена матриці Гессе $\mathbf{H}(x(\lambda_{(n)}))$, яка визначається виразом

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_l} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_l^2} \end{bmatrix}. \quad (28.74)$$

Якщо матриця $\mathbf{H}(x(\lambda_{(n)}))$ є додатно визначеною, то в точці $x(\lambda_{(n)})$ повна потенціальна енергія має мінімум у порівнянні з усіма сусідніми положеннями. Отже, система знаходиться в положенні стійкої рівноваги.

Якщо матриця $\mathbf{H}(x(\lambda_{(n)}))$ є від'ємно визначеною, то в точці $x(\lambda_{(n)})$ повна потенціальна енергія досягає максимуму, тобто положення рівноваги є нестійким.

Особливі точки траєкторії навантаження (вершина пагорба, сідло і т.ін.) визначають критичні стани системи, оскільки в них малим приростам параметра λ можуть відповідати великі прирости розв'язків. У термінах теорії нелінійного програмування це означає, що $\det \mathbf{H} = 0$. Задача оптимізації при обмеженнях у вигляді рівностей може бути розв'язана за допомогою принципу Лагранжа, як це було зроблено у попередньому підрозділі.

Нехай, як і вище, стан механічної системи характеризується l параметрами. Нехай, далі, при всіх змінах на змінні накладено в'язи

$$h_s(x) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k; \quad k < l. \quad (28.75)$$

Будуємо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \sum_{s=1}^k \mu_s h_s(x). \quad (28.76)$$

Система рівнянь (28.59) в цьому разі набирає вигляду

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad h_s(x) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (28.77)$$

Вважатимемо, що система (28.77) для кожного λ має розв'язок $x = x(\lambda)$, $\mu = \mu(\lambda)$, тобто

$$\nabla f(x(\lambda), \lambda) + \sum_{j=1}^k \mu_j(\lambda) \nabla h_j(x(\lambda)) = 0, \quad h_s(x(\lambda)) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (28.78)$$

Точка $(x(\lambda), \mu(\lambda))$ описує криву Γ у просторі $R^l \times R^k$.

Рух вздовж кривої Γ з точки $(x(\lambda_{(n)}), \mu(\lambda_{(n)}))$ у точку $(x(\lambda_{(n+1)}), \mu(\lambda_{(n+1)}))$ представляється у вигляді наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} \nabla f(x(\lambda_{(n+1)}), \lambda_{(n+1)}) + \sum_{j=1}^k \mu_j(\lambda_{(n+1)}) \nabla h_j(x(\lambda_{(n+1)})) &= \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \\ + \sum_{j=1}^k \mu_j(\lambda_{(n)}) \nabla h_j(x(\lambda_{(n)})) + \nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta x_{(n)} + \sum_{j=1}^k \Delta \mu_j(\lambda_{(n)}) \nabla h_j(x(\lambda_{(n)})) + \\ + \sum_{j=1}^k \mu_j(\lambda_{(n)}) \nabla^2 h_j(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda &= 0, \\ h_j(x(\lambda_{(n+1)})) &= h_j(x(\lambda_{(n)})) + \nabla^T h_j(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (28.79)$$

Звідси дістанемо систему лінійних рівнянь

$$\left[\nabla^2 f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) + \sum_{j=1}^k \mu_j(\lambda_{(n)}) \nabla^2 h_j(x(\lambda_{(n)})) \right] \Delta x_{(n)} + \sum_{j=1}^k \nabla h_j(x(\lambda_{(n)})) \Delta \mu_j(\lambda_{(n)}) =$$

$$= -r_0(\lambda_{(n)}) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f(x(\lambda_{(n)}), \lambda_{(n)}) \Delta \lambda ,$$

$$\nabla^T h_j(x(\lambda_{(n)})) \Delta x_{(n)} = -r_j(\lambda_{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (28.80)$$

де $r(\lambda) = \{r_{01}(\lambda), \dots, r_{0l}(\lambda); r_1(\lambda), \dots, r_k(\lambda)\}$ – нев’язка системи (28.78) в точці λ_0 .

Система (28.80) є аналогічною системі (28.62) і дозволяє побудувати криву навантаження Γ . Проте у скінченновимірному випадку існує ефективніший алгоритм її побудови, не пов’язаний з використанням множників Лагранжа [211].

При обмеженнях типу (28.75) допустима точка x має лежати на перетині гіперповерхонь (28.75) з гіперповерхнею $f(x, \lambda)$. Кожне з обмежень (28.75) зменшує на одиницю число ступенів свободи в моделі процесу і призводить до появи ще однієї залежної змінної. Для виключення цих змінних зручно скористатися методом проекції градієнта цільової функції на обмеження [211]. Вважатимемо, що допустима точка $x_{(n)}$ лежить на поверхні $f(x, \lambda)$ і задовольняє обмеженням (28.75). Продовжуючи розв’язання задачі по параметру λ , лінеаризуємо систему рівностей (28.75) та в околиці точки $x_{(n)}, \lambda_{(n)}$ замінимо її відповідними дотичними гіперплощинами

$$\nabla^T h_j(x(\lambda_{(n)})) \Delta x = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (28.81)$$

Якщо гіперплощини (28.80) є лінійно незалежними, то нормалі до них $\nabla^T h_j(x(\lambda_{(n)}))$ також лінійно незалежні. Використовуючи їх, складемо проектуючу матрицю, яка проектує напрям оптимізаційного пошуку S , який визначається за формулою (28.72), на перетин дотичних гіперплощин (28.81). Її особливістю є те, що вона перетворює напрям S так, що його складові лежать в $(l - k)$ -вимірній багатостатності, що визначає допустиму область, в якій задовольняються k обмежень у вигляді рівностей (28.81).

Позначимо через A_k матрицю розміру $l \times k$ частинних похідних:

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x(\lambda_{(n)}))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x(\lambda_{(n)}))}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_k(x(\lambda_{(n)}))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k(x(\lambda_{(n)}))}{\partial x_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{bmatrix}.$$

Тоді проектуюча матриця P_k обчислюється за формулою

$$P_k = I - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k, \quad (28.82)$$

де I – одинична діагональна матриця.

Використовуючи це співвідношення, знайдемо новий напрям оптимального пошуку, що представляє собою проекцію вектора на активні обмеження:

$$S_{(n)}^* = P_k S_{(n)} = S_{(n)} - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k S_{(n)}. \quad (28.83)$$

За наявності односторонніх в'язей обмеження, що їх характеризують, мають вигляд нерівностей

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (28.84)$$

Якщо точка x задовольняє нерівності (28.84), вона є допустимою, і нерівності на цьому етапі виключаються з розгляду. Перетворення деяких m_i ($m_i \leq m$) нерівностей (28.84) в рівності виводить точку x на границю допустимої області. У цьому разі додаткові m_i рівностей приєднуються до групи рівнянь (28.75) і кількість дотичних гіперплощин (28.81) зростає до $k + m_i$.

У процесі продовження розв'язку за параметром точка x може вийти за межі допустимої області, а деякі з нерівностей (28.84) можуть змінити знак на протилежний. Такі нерівності також замінюються рівностями типу (28.48) і при побудові напряму $S_{(n)}^*$ враховуються їх відповідні нев'язки r_i .

При розв'язанні поставленої таким чином задачі можуть зустрітися наступні труднощі, що є типовими для оптимізаційного пошуку та пов'язані з якісною зміною стану механічної системи.

1. Деякі з обмежень або визначальних параметрів можуть набувати в області оптимізаційного пошуку необмежених значень. У цих станах механічна система втрачає стійкість рівноваги.

2. Критерій, що оптимізується (потенціальна енергія), може бути нечутливим (інваріантним) до змін незалежних змінних. У цих станах механічна система стає абсолютно жорсткою.

Розглянемо особливі точки на траєкторії навантаження і простежимо їх зв'язок з нестійкістю рівноваги механічної системи або з її інваріантністю.

1. Нехай у деякому стані $x_{(0)}, \lambda_{(0)}$ системи визначник матриці Гессе \mathbf{H} перетворився у нуль. У цьому випадку виродження матриці \mathbf{H} свідчить про досягнення потенціальною енергією максимального значення або сідлової точки. Для аналізу стійкості рівноваги механічної системи з обмеженнями у вигляді нерівностей необхідно в цьому стані на основі вихідних нелінійних рівнянь (28.69) побудувати рівняння розгалуження розв'язків, визначити їх кількість, знайти напрями, що відгалужуються, і встановити їх стійкість [39]. Потім необхідно перевірити, чи перешкоджає яка-небудь з односторонніх в'язей відходу системи по одному з нестійких напрямів.

Якщо через наявність односторонніх в'язей усі нестійкі гілки опиняються поза межами області допустимих розв'язків, то стан рівноваги є стійким. Якщо яка-небудь з нестійких гілок сумісна з обмежуючими нерівностями, то досліджуваний стан є нестійким.

2. Може виявитися, що стійкість деформівної системи реалізується тільки завдяки наявності включених односторонніх в'язей, і в деякому стані градієнт потенціальної енергії виявляється паралельним до гіперплощин лінеаризованих обмежень. У цьому разі система може втратити стійкість, ковзаючи по межі

допустимої області. Необхідною умовою такої втрати стійкості є виродження матриці, що є добутком матриць \mathbf{P}_k і \mathbf{H} :

$$\det(\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{H}) = 0. \quad (28.85)$$

3. Втрата стійкості рівноваги деформівної системи може наступити у тих станах, в яких дві або більше гіперплощин обмежень (28.81) збігаються, що рівнозначно втраті в'язей. Тоді рядки матриці \mathbf{A}_k виявляються лінійно залежними, а матриця $\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T$ – необоротною.

4. Найзагальніший випадок втрати стійкості рівноваги системи з обмеженнями у формі нерівностей пов'язаний з виродженням матриці лівої частини системи лінеаризованих рівнянь, що випливають із співвідношень (28.83).

Виділимо ще один клас особливих станів механічних систем з односторонніми в'язями, що мають місце, коли вектор градієнта потенціальної енергії виявляється ортогональним до перетину гіперплощин лінеаризованих обмежень і проектується в точку. У цих випадках праві частини лінеаризованих рівнянь рівноваги, що випливають з низки рівностей (28.83), перетворюються в нуль, і деформівна система виявляється нечутливою (інваріантною) до збільшення вектора навантаження, пропорційного деякому скалярному множнику. Необхідною умовою інваріантності системи є рівність

$$\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}_k^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T)^{-1} \mathbf{A}_k \right] \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla f = 0. \quad (28.86)$$

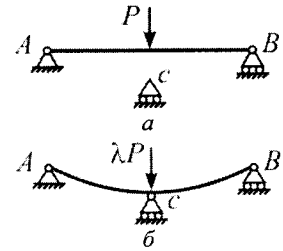


Рис. 28.24

На рис. 28.24 показана схема деформування балки з односторонньою опорою, що просіла, розташованою під вертикальною силою. Після контакту балки з опорою виникає інваріантний стан балки по відношенню до сили P , оскільки остання може набувати яких завгодно великих значень.

Як і звичайний стан рівноваги, інваріантний стан може бути нестійким, байдужим і стійким (в малому і у великому). У нестійкому інваріантному стані потенціальна енергія системи завдяки накладеним одностороннім в'язям має строгий максимум (рис. 28.25,а), у стані байдужої рівноваги вона не змінюється при малому відхиленні деформівної системи від розглянутого положення (рис. 28.25,б). Може трапитися, що потенціальна енергія

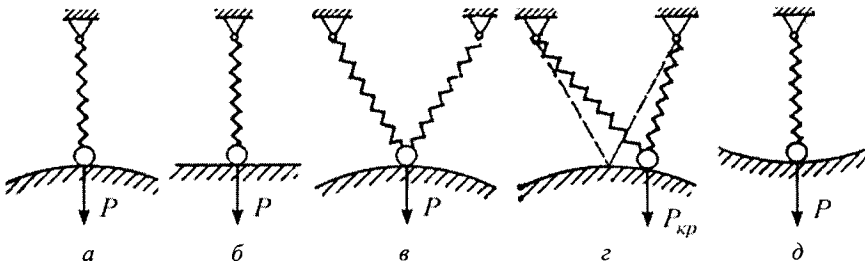


Рис. 28.25

системи в момент переходу в інваріантний стан має мінімум (рис. 28.25,е), але потім зі збільшенням модуля вектора навантаження до деякої критичної величини $P_{кр}$ набуває максимального значення, і система втрачає стійкість рівноваги (рис. 28.25,з). Такі інваріантні стани є стійкими в малому, поки $P < P_{кр}$. І, нарешті, система є стійкою у великому, коли її потенціальна енергія в інваріантному стані має мінімум при будь-якому значенні модуля вектора навантаження (рис. 28.25,д).

Для аналізу стійкості інваріантного стану необхідно дослідити повну нелінійну систему рівностей і нерівностей. Ідентифікація стійких станів може бути здійснена на основі необхідних умов Куна-Таккера [211]. Згідно з методикою аналізу оптимальних точок задачі нелінійного програмування, сформулюємо спочатку необхідні умови локального мінімуму цільової функції $f(x)$ (потенціальної енергії

в точці x^*) за відсутності обмежень:

1. Функція $f(x)$ диференційовна в точці x^* ;
2. $\nabla f(x^*) = 0$, тобто існує стаціонарна точка в x^* .

Достатні умови, крім наведених умов 1 і 2, включають умову 3.

3. Матриця Гессе \mathbf{H} (28.74) є додатно визначеною.

Нехай, на відміну від попереднього випадку, допустимі точки x визначаються системами рівностей і нерівностей:

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (28.87)$$

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = m+1, \dots, p. \quad (28.88)$$

Необхідні умови того, що x^* є точкою локального мінімуму, можуть бути першого або другого порядку в залежності від порядку диференціювання функцій, що входять до них [210]. Візьмемо до уваги наступне: якщо x^* – точка локального мінімуму, то значення $f(x)$ не може зменшуватися під час руху уздовж будь-якої гладкої дуги, спрямованої із x^* всередину допустимої області.

Нехай вектор \mathbf{v} є дотичним до дуги, що йде з точки x^* . Виділимо клас \mathbf{V} векторів \mathbf{v} , що задовольняють умови

$$\mathbf{v}^T \nabla g_j(x^*) < 0 \quad (28.89)$$

хоча б для одного активного обмеження (28.60) або умови

$$\mathbf{v}^T \nabla g_j(x^*) \neq 0 \quad (28.90)$$

хоча б для одного обмеження (28.87).

Необхідною умовою першого порядку мінімуму функції $f(x)$ в точці x^* є вимога, щоб множина \mathbf{V} була порожньою. Звідси випливає теорема Куна-Таккера: якщо функції $f(x)$, $h_1(x), \dots, h_m(x)$, $g_{m+1}(x), \dots, g_p(x)$ диференційовні в точці x^* , і, якщо в точці x^* обмеження є обмеженнями першого порядку, то необхідна умова

наявності в цій точці локального мінімуму при обмеженнях (28.87), (28.88) полягає в тому, що існують такі множники Лагранжа u^* і w^* , що сукупності векторів x^* , u^* , w^* задовольняють співвідношення

$$h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (28.91)$$

$$g_j(x^*) \geq 0, \quad j = m + 1, \dots, p; \quad (28.92)$$

$$u_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = m + 1, \dots, p; \quad (28.93)$$

$$u_j^* \geq 0, \quad j = m + 1, \dots, p; \quad (28.94)$$

$$\nabla L(x^*, u^*, w^*) = 0, \quad (28.95)$$

де $L(x, u, w) \equiv f(x) + \sum_{j=1}^m w_j h_j(x) - \sum_{j=m+1}^p u_j g_j(x)$.

Тут до обмежень першого порядку віднесені такі, коли для кожної граничної точки множини обмежень, що складається з обмежень у вигляді рівностей та активних обмежень у вигляді нерівностей, повинна існувати гладка крива, що цілком лежить всередині області, заданої обмежуючими поверхнями.

Щоб урахувати нелінійний характер функцій у задачі знаходження мінімуму, Мак-Кормік сформулював необхідні умови другого порядку наявності в точці x^* локального мінімуму. Нехай функції $f(x)$, $h_1(x)$, ..., $h_m(x)$, $g_{m+1}(x)$, ..., $g_p(x)$ двічі диференційовні в точці x^* , а v – будь-який ненульовий вектор, такий, що

$$v^T \nabla g_j(x^{(k)}) = 0 \quad (28.96)$$

для всіх активних обмежень у вигляді нерівностей (28.88), а

$$v^T \nabla h_j(x^{(k)}) = 0 \quad (28.97)$$

для всіх обмежень у вигляді рівностей (28.87). Тоді, якщо вектор v є дотичним до деякої двічі диференційовної кривої $\psi(\Theta)$, $\Theta \geq 0$, уздовж якої $g_j(\psi(\Theta)) = 0$, $h_j(\psi(\Theta)) = 0$, то в $x^{(k)}$ обмеження є обмеженнями другого порядку.

Необхідні умови другого порядку мінімуму цільової функції з обмеженнями формуються наступним чином.

Якщо а) функції $f(x)$, $h_1(x)$, ..., $h_m(x)$, $g_{m+1}(x)$, ..., $g_p(x)$ двічі диференційовні в точці x^* і б) у x^* виконуються класифікаційні умови обмежень першого і другого порядків, то необхідною умовою наявності в точці x^* локального мінімуму є існування векторів u^* , w^* , для яких

$$h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (28.98)$$

$$g_j(x^*) \geq 0, \quad j = m + 1, \dots, p; \quad (28.99)$$

$$u_j^* \geq 0, \quad j = m+1, \dots, p; \quad (28.100)$$

$$u_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = m+1, \dots, p; \quad (28.101)$$

$$\nabla L(x^*, u^*, w^*) = 0, \quad (28.102)$$

і для будь-якого ненульового вектора v , такого, що $v^T \nabla g_j(x^*) = 0$ для всіх активних обмежень у вигляді нерівностей та $v^T \nabla h_j(x^*) = 0$ для всіх обмежень у вигляді рівностей, справедливе співвідношення

$$v^T \nabla^2 L(x^*, u^*, w^*) v \geq 0. \quad (28.103)$$

Сформулюємо також достатні умови локального мінімуму: якщо функції $f(x^*)$, $h_1(x^*)$, ..., $h_m(x^*)$, $g_{m+1}(x^*)$, ..., $g_p(x^*)$ двічі диференційовні по x , виконуються умови (28.98) – (28.102) і детермінант матриці Якобі для функцій $h_j(x^*)$, $u_j^* g_j(x^*)$, $\nabla L(x^*, u^*, w^*)$ не перетворюється в нуль у (x^*, u^*, w^*) , тоді в точці x^* задовольняються достатні умови того, що в x^* має місце локальний мінімум.

Якщо цільову функцію f ототожити з потенціальною енергією деформівної системи, то сформульовані необхідні і достатні умови мінімуму будуть необхідними і достатніми умовами стійкості інваріантного стану системи.

28.8. Аналіз стійкості конструкцій, що односторонньо контактують з жорсткими тілами

Для ілюстрації ефективності алгоритму, викладеного в п. 28.6.2, дослідимо нелінійну стійкість найпростіших стержневих конструкцій, що односторонньо контактують з жорсткими тілами.

Приклад 28.4. Розглянемо тристержневу ферму (рис. 28.26,а), навантажену у вузлі O вертикальною силою λP (λ – параметр навантаження). Стержні вважаються лінійно деформівними, матеріал – необмежено міцний. Можна припустити, наприклад, що кожен зі стержнів являє собою виту пружину.

Представимо потенціальну енергію конструкції у вигляді

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{2} c \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} c \Delta l_2^2 + \frac{1}{2} c \Delta l_3^2 - \lambda P w, \quad (28.104)$$

де Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 – абсолютні значення величин, що характеризують зміни довжин пружин; c – жорсткість пружин.

Виразимо величини Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 через переміщення u, w, v вузла O , початкову довжину стержнів l та висоту ферми H :

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= l - l_1 = l - \sqrt{(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 + v)^2 + (b/2 - u)^2}, \\ \Delta l_2 &= l - l_2 = l - \sqrt{(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 - v)^2 + (b/2 - u)^2}, \\ \Delta l_3 &= l - l_3 = l - \sqrt{(H - w)^2 + (b + u)^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (28.105)$$

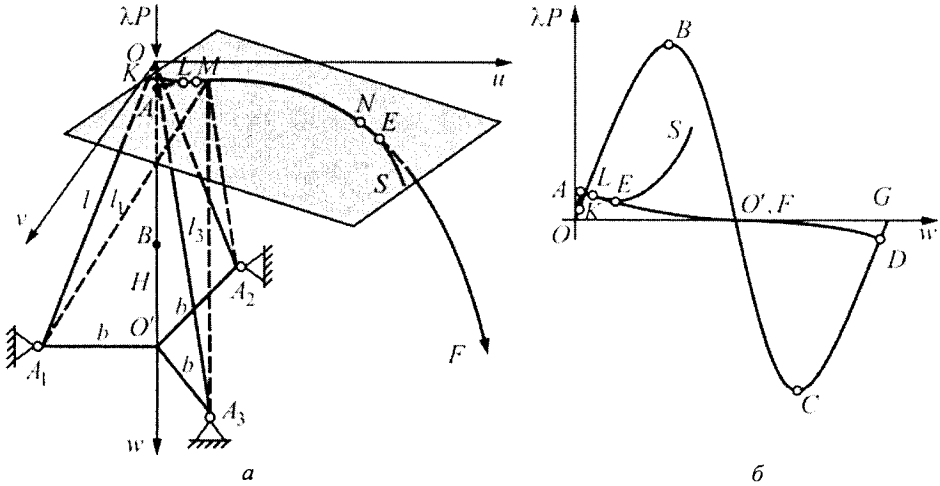


Рис. 28.26

З урахуванням цих залежностей рівняння загальної енергії ферми можна подати у вигляді

$$f(x, \lambda) = -\lambda P w + \frac{1}{2} c \left[l - \sqrt{(H-w)^2 + (b\sqrt{3}/2+v)^2 + (b/2-u)^2} \right]^2 + \frac{1}{2} c \left[l - \sqrt{(H-w)^2 + (b\sqrt{3}/2-v)^2 + (b/2-u)^2} \right]^2 + \frac{1}{2} c \left[l - \sqrt{(H-w)^2 + (b+u)^2 + v^2} \right]^2. \quad (28.106)$$

На відміну від квадратичного функціонала (28.31) вираз (28.106) є істотно нелінійним. Тому для його дослідження методи опуклого програмування виявляються непридатними.

У стані рівноваги розглядуваної деформованої системи, коли на переміщення вузла O не накладені додаткові обмеження, умова екстремальності (28.69) потенціальної енергії (28.104) набирає вигляду

$$\nabla f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial v} \\ \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial w} \\ \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial u} \end{bmatrix} = 0,$$

звідки випливають три нелінійних рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial v} &= -(b\sqrt{3}/2+v) \left[(H-w)^2 + (b\sqrt{3}/2+v)^2 + (b/2-v)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ (b\sqrt{3}/2-v) \left[(H-w)^2 + (b\sqrt{3}/2-v)^2 + (b/2-u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \\ &- v \left[(H-w)^2 + (b+u)^2 + v^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + 3v/l = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial w} &= (H - w) \left[(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 + v)^2 + (b/2 - u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\
 &+ (H - w) \left[(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 - v)^2 + (b/2 - u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\
 &+ (H - w) \left[(H - w)^2 + (b + u)^2 + v^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{3(H - w)}{l} - \frac{\lambda P}{cl} = 0, \\
 \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial u} &= (b/2 - u) \left[(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 + v)^2 + (b/2 - u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\
 &+ (b/2 - u) \left[(H - w)^2 + (b\sqrt{3}/2 - v)^2 + (b/2 - u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \\
 &- (b + u) \left[(H - w)^2 + (b + u)^2 + v^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + 3u/l = 0.
 \end{aligned} \tag{28.107}$$

Умову приросту градієнта потенціальної енергії $\nabla f(x, \lambda)$ представимо згідно з (28.72) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
 a_{11}\Delta v + a_{12}\Delta w + a_{13}\Delta u &= 0, \\
 a_{21}\Delta v + a_{22}\Delta w + a_{23}\Delta u + a_{24}\Delta \lambda &= 0, \\
 a_{31}\Delta v + a_{32}\Delta w + a_{33}\Delta u &= 0.
 \end{aligned} \tag{28.108}$$

Коефіцієнти системи (28.108) обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \Delta v = \left[-(H - w)^2 - \left(\frac{b}{2} - u\right)^2 \right] / l_1^3 + \left[-(H - w)^2 - \left(\frac{b}{2} - u\right)^2 \right] / l_2^3 + \\
 &+ \left[-(H - w)^2 - (b + u)^2 \right] / l_3^3 + 3/l, \\
 a_{12} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \Delta w = (H - w) \left[-(b\sqrt{3}/2 + v) / l_1^3 + (b\sqrt{3}/2 - v) / l_2^3 \right] - v / l_3^3, \\
 a_{13} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \Delta u = - \left[(b\sqrt{3}/2 + v)(b/2 - u) \right] / l_1^3 + \left[(b\sqrt{3}/2 - v)(b/2 - u) \right] / l_2^3 + v(b - u) / l_3^3, \\
 a_{21} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) \Delta v = a_{12}, \\
 a_{22} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) \Delta w = \left[-(b\sqrt{3}/2 + v)^2 - (b/2 - u)^2 \right] / l_1^3 + \\
 &+ \left[-(b\sqrt{3}/2 - v)^2 - (b/2 - u)^2 \right] / l_2^3 + \left[-(b + u)^2 - v^2 \right] / l_3^3 + 3/l, \\
 a_{23} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) \Delta u = (H - w) \left[(b/2 - u) / l_1^3 + (b/2 - u) / l_2^3 - (b + u) / l_3^3 \right], \\
 a_{24} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) \Delta \lambda = -P / cl,
 \end{aligned}$$

$$a_{31} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \Delta v = a_{13}, \quad a_{32} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \Delta w = a_{23},$$

$$a_{33} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \Delta u = \left[-(H-w)^2 - (b\sqrt{3}/2+v)^2 \right] / l_1^3 +$$

$$+ \left[-(H-w)^2 - (b\sqrt{3}/2-v)^2 \right] / l_2^3 + \left[-(H-w)^2 - v^2 \right] / l_3^3 + 3/l. \quad (28.109)$$

Отриману систему рівнянь доповнимо умовами, що пов'язують шуканий розв'язок з обмеженнями, заданими у вигляді нерівностей. У розглядуваній задачі можна ввести одну

$$h_1(x) \geq 0, \quad (28.110)$$

або дві в'язі

$$h_1(x) \geq 0, \quad h_2(x) \geq 0. \quad (28.111)$$

Якщо обмеження мають вигляд (28.110), то допустимий вектор оптимального пошуку $S_{(n)}$ після включення односторонньої в'язі має лежати на гіперплощині, що визначається рівнянням (28.81):

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial h_1}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial h_1}{\partial w} \Delta w = 0.$$

У разі обмежень (28.111) вектор локального пошуку проектується на пряму, яка задається перетином двох площин:

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial h_1}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial h_1}{\partial w} \Delta w = 0; \quad \frac{\partial h_2}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial h_2}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial h_2}{\partial w} \Delta w = 0.$$

Проектуюча матриця P_k і новий напрям оптимального пошуку $S^*_{(n)}$ визначаються відповідно за формулами (28.82) і (28.83).

Приклад 28.5. Розглянемо тристержневу конструкцію з такими параметрами: жорсткість $c=1$, кут нахилу стержнів до горизонтальної площини $\alpha = 7\pi/36$ рад, висота $H=1$. У процесі деформування вузол ферми опускається на обмежену гладку похилу площину, вздовж якої потім ковзає.

Один з побудованих розв'язків за відсутності обмежень являє собою вертикальне переміщення ($v=0, u=0$) вузла 0 (крива $OBCG$, рис. 28.26,б) з верхнім (точка B) і нижнім (точка C) критичними станами. У точках A, B, C, D кривої визначник лівої частини системи виявився рівним нулю, тому їх досліджували додатково. Система рівнянь (28.108), складена для точок траєкторії B, C , має вигляд

$$-a_{11}\Delta v + 0\Delta w + 0\Delta u = 0, \quad 0\Delta v + 0\Delta w + 0\Delta u = \Delta\lambda P, \quad 0\Delta v + 0\Delta w - a_{33}\Delta u = 0. \quad (28.112)$$

Оскільки в цьому разі права частина системи не сумісна з лівою, розв'язок в околі цих станів можна продовжити при $\Delta\lambda = 0$ і розгалуження розв'язку не буде.

У станах, що відповідають точкам A і D , система рівнянь (28.108) також виявляється виродженою:

$$0\Delta v + 0\Delta w + 0\Delta u = 0, \quad 0\Delta v + a_{22}\Delta w + 0\Delta u = \Delta\lambda P, \quad 0\Delta v + 0\Delta w + 0\Delta u = 0. \quad (28.113)$$

Оскільки стовпець правої частини сумісний з лівою частиною даної системи, в цих точках можливо розгалуження розв'язку нелінійних рівнянь (28.107). Продовження розв'язання за напрямом, що відгалужується, дозволило побудувати гілку *AFD*.

Розв'язок, що відповідає кривій *OKMNS* (рис. 28.26,а), отримано при наявності обмеження, заданого нерівністю

$$0,4v - w + 0,316523 \geq 0. \quad (28.114)$$

Точка *K* є точкою включення в роботу в'язі. Починаючи з цієї точки, обраний в просторі розв'язків напрям оптимального пошуку проектується на обмеження

$$0,4\Delta v - \Delta w + 0,316523\Delta u = 0.$$

У станах *L, E* вектор $S_{(n)}$ виявився нормальним до обмеження. Такий випадок є особливим, оскільки він пов'язаний із перетворенням у нуль вектора $S^*_{(n)}$. Фізично це приводить до ефекту незалежності статичного стану системи від правої частини (системи такого виду називаються інваріантними). Для аналізу стійкості стану інваріантності необхідно дослідити рівновагу системи у великому, тобто при невеликих збурженнях.

Окремо досліджено точки *M, N* перетину кривої *AFD* з обмеженням. У цих точках розв'язок можна продовжити по траєкторії відгалуженого розв'язку або по обмеженню. У даному випадку розв'язок продовжують по обмеженню, оскільки траєкторія відповідає мінімуму приросту потенціальної енергії системи.

На рис. 28.27 у вигляді кривої *OKA* показана траєкторія навантаження тристержневої ферми при наявності обмежень, заданих у формі перетину двох циліндричних поверхонь:

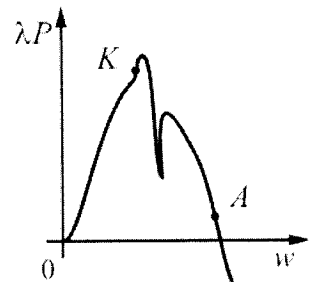


Рис. 28.27

$$v^2 + (0,93969w - 0,34202u - 0,6)^2 \geq 0,04, \quad v^2 + (u - 0,4)^2 \geq 0,04, \quad (28.115)$$

На кожному кроці обчислювального процесу після включення односторонніх в'язей (28.89) градієнт функції потенціальної енергії проектується на лінеаризовані обмеження

$$2v\Delta v + 2(0,93969w - 0,34202u - 0,6)(0,93969\Delta w - 0,34202\Delta u) = -r_1,$$

$$2v\Delta v + 2(u - 0,4)\Delta u = -r_2,$$

де r_1 і r_2 – нев'язки рівнянь (28.115).

Якщо після завершення чергового кроку розв'язок виявляється всередині допустимої області (28.115), односторонні в'язі відключаються і розв'язання продовжується без їх урахування. При виході розв'язку за межі допустимої області

урахування нев'язок r_1 і r_2 на основі співвідношень (28.51) дозволяє повернутися на її границю.

Як показали обчислення, точка A на побудованій траєкторії OKA виявилася особливою. У ній вектор оптимізаційного пошуку $S^*_{(n)}$ перетворюється у нескінченність і відбувається втрата стійкості рівноваги механічної системи, що відповідає розглянутому в п. 28.6.4 випадку 3, коли система лінеаризованих обмежень вироджується.

Отримані також точки, в яких вектор $S_{(n)}$ є ортогональним до обмеження, і нескінченно великому приросту навантаження відповідає нульовий приріст розв'язку. Такі точки є інваріантними.

Приклад 28.6. Розглянемо простішу конструкцію – двостержневу ферму (рис. 28.28,а), навантажену вертикальною силою λP . Як і в попередньому прикладі, припустимо, що кожен із стержнів являє собою виту пружину з необмежено міцного матеріалу. Дослідимо траєкторію навантаження такої ферми, що односторонньо контактує у вузлі O з жорсткими тілами.

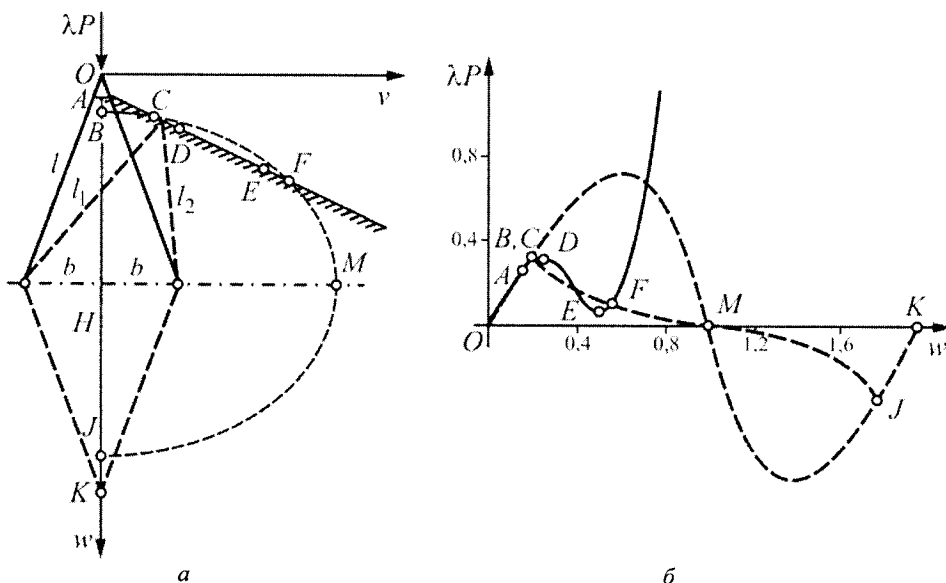


Рис. 28.28

Повна потенціальна енергія конструкції

$$f(x, \lambda) = -\lambda P w + \frac{1}{2} c \left[l - \sqrt{(b+v)^2 + (H-w)^2} \right]^2 + \frac{1}{2} c \left[l - \sqrt{(b-v)^2 + (H-w)^2} \right]^2, \quad (28.116)$$

де v, w – переміщення вузла O ; c – жорсткість пружин; l – початкова довжина стержнів ферми; H – висота ферми.

Умову рівноваги системи представимо згідно з (28.69):

$$\nabla f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -c\Delta l_1 \frac{b+v}{l_1} + c\Delta l_2 \frac{b-v}{l_2} \\ -P\lambda + c\Delta l_1 \frac{H-w}{l_1} + c\Delta l_2 \frac{H-w}{l_2} \end{pmatrix} = 0. \quad (28.117)$$

Приріст градієнта потенціальної енергії $\nabla f(x, \lambda)$ запишемо у вигляді

$$a_{11}\Delta v + a_{12}\Delta w = 0, \quad a_{21}\Delta v + a_{22}\Delta w + a_{23}\Delta\lambda = 0. \quad (28.118)$$

Коефіцієнти цих рівнянь отримані за допомогою двократного диференціювання виразу (28.118):

$$a_{11} = \frac{(b-v)^2 - l_2^2}{l_2^3} - \frac{(b+v)^2 - l_1^2}{l_1^3} + \frac{2}{l}, \quad a_{12} = a_{21} = (H-w) \left(\frac{b-v}{l_2^3} - \frac{b+v}{l_1^3} \right),$$

$$a_{22} = \frac{(H-w)^2 - l_1^2}{l_1^3} - \frac{(H-w)^2 - l_2^2}{l_2^3} + \frac{2}{l}, \quad a_{23} = -P/(cl). \quad (28.119)$$

Величини a_{ij} характеризують напрям вектора $\mathbf{S}_{(n)}$ оптимального пошуку цільової функції (28.116), яка визначає енергію конструкції без додаткових в'язей.

Наявність обмеження (рис. 28.28,а)

$$mv + nw + t = 0 \quad (28.120)$$

вимагає побудови проектуючої матриці (28.80), яка в даному разі має вигляд

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{m^2 + n^2} \begin{bmatrix} n^2 & -mn \\ -mn & m^2 \end{bmatrix}. \quad (28.121)$$

Застосовуючи операцію проектування

$$\mathbf{S}_{(n)}^* = \mathbf{P}_k \mathbf{S}_{(n)}, \quad (28.122)$$

знаходимо новий напрям вектора оптимального пошуку в площині обмеження (28.120):

$$(n^2 a_{11} - mna_{21})\Delta v + (n^2 a_{12} - mna_{22})\Delta w - mna_{23}\Delta\lambda = 0,$$

$$(-mna_{11} + m^2 a_{21})\Delta v + (-mna_{12} + m^2 a_{22})\Delta w + m^2 a_{23}\Delta\lambda = 0,$$

У зв'язку з тим, що рух за обмеженням приводить до зменшення числа ступенів свободи конструкції на одиницю, рівняння системи є лінійно залежними. Замінімо одне з них на рівність (28.120), в результаті чого матимемо систему

$$m\Delta v + n\Delta w = 0, \quad (28.123)$$

$$(-mna_{11} + m^2 a_{21})\Delta v + (-mna_{12} + m^2 a_{22})\Delta w + m^2 a_{23}\Delta\lambda = 0. \quad (28.124)$$

Рівняння (28.124) дозволяють визначити приріст вектора переміщення $(\Delta v, \Delta w)$ при заданому прирості параметра навантаження і таким чином побудувати траєкторію навантаження конструкції на прямій (28.94).

Для дослідження обрано ферму з параметрами $c=1$, $H=1$, $\alpha=7\pi/36$ рад, при обмеженнях (28.120) із заданими значеннями коефіцієнтів $m=0,103$, $n=0,208$,

$t = 0,021$. У результаті розрахунку побудована траєкторія навантаження (рис. 28.28,б), знайдені особливі точки на ній і виконано їх аналіз.

Починаючи з точки O процес навантаження моделюється на основі лінеаризованих рівнянь (28.118). У точці A в роботу конструкції включається обмеження, і продовження траєкторії навантаження уздовж прямої (28.118) будується за допомогою рівнянь (28.124). У точках C і F відбувається відрив вузла ферми від лінії обмеження, тобто відбувається втрата стійкості, що відповідає випадку 1 п. 28.6.4. Криву рівноважних станів у цих точках можна продовжити як за обмеженням, так і по траєкторії, що вільна від обмеження. У точках D і E , які належать обмеженню, система рівнянь (28.124) стає виродженою, що свідчить про критичний стан конструкції в цих точках.

На рис. 28.29 показана траєкторія навантаження аналогічної конструкції з обмеженням у формі кола

$$(v - 0,3)^2 + (w + 0,6)^2 - 0,74^2 = 0. \quad (28.125)$$

У цьому разі особливою точкою на траєкторії навантаження є точка B . У ній вектор $S_{(n)}$ є ортогональним до обмеження (28.125), і нескінченно великому приросту параметра навантаження $\Delta\lambda$ відповідає нульовий приріст розв'язку. У цьому стані механічна система виявляється інваріантною відносно зовнішнього збурення. Аналіз умов, що витікають з теорем Куна-Таккера і Мак-Корміка (див. п. 28.6.4), показав, що цей інваріантний стан є стійким у великому.

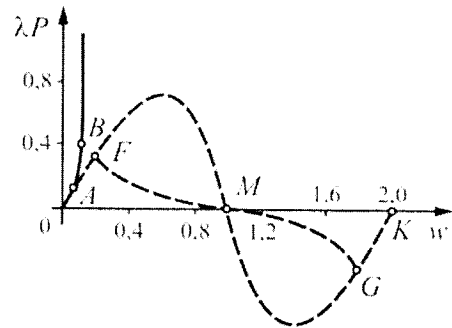


Рис. 28.29

ЛІТЕРАТУРА

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – Красноярск, 1973. – 190 с.
2. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М., 1978. – 287 с.
3. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. – М., 1990.
4. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М., 1979.
6. *Аппель П.* Руководство теоретической (рациональной) механики, том 1. – М., 1911.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. I. Перевод с 5-го французского издания И.Г. Малкина. – М.: Физматгиз, 1960.
8. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.
9. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. – 248 с.
10. *Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О.* Теорія пружності. Частина I. – К.: «Основа», 2009. – 244 с.
11. *Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И.* Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – К.: Выща шк., 1989. – 399 с.
12. *Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – К.: ВІПОЛ, 1999. – 584 с.
13. *Баженов В.А., Дехтярюк Е.С.* Будівельна механіка. Динаміка споруд. – К., 1998. – 207 с.
14. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Імовірнісні методи розрахунку конструкцій. Випадкові коливання пружних систем. – К.: ВІПОЛ, 2005. – 419 с.
15. *Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. – К.: Каравела, 2007. – 368 с.
16. *Баженов В.А., Богоуцький О.А., Гоцуляк Е.А.* Расчет тонких пластин, односторонне опертых по контуру. В сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 59. – К.: Будівельник, 1991. – С. 3-10.

ЛІТЕРАТУРА

17. *Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Богуцкий О.А.* Численная реализация метода квадратичного программирования для расчета стержневых конструкций, односторонне взаимодействующих с упругим основанием. Сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 58. – К.: Будівельник, 1991. – С. 3-8.
18. *Баженов В.А., Криксунов Е.З., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Информатика. Інформаційні технології в будівництві. Системи автоматизованого проектування. – К.: Каравела, 2004. – 360 с.
19. *Баженов В.А., Криксунов Е.З., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Информатика. Інформаційні технології в будівництві. Системи автоматизованого проектування (друге видання). – К.: Каравела, 2011. – 488 с.
20. *Баженов В.А., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Строительная информатика. Автоматизированное проектирование несущих конструкций зданий и сооружений. – М.: ИАСВ, 2006. – 488 с.
21. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. – К.: Каравела, 2009. – 695 с.
22. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Мельниченко Г.И., Чорный С.М.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики. Учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей вузов.– К.: КДТУБА, 1994. – 368 с.
23. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы – М.: Мир, 1982. – 584 с.
24. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 298с.
25. *Безухов Н.И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Госстройиздат, 1965. – 320 с.
26. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
27. *Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В.* Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 263 с.
28. *Беленький И.М.* Введение в аналитическую механику. – М., 1964. – 324 с.
29. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
30. *Бердичевский В.Л., Мисюра В.А.* О двойственном вариационном принципе в геометрически нелинейной теории упругости. – ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
31. *Бермант А.Ф.* Курс математического анализа. Ч. 2, изд. 7-е. – Гостехиздат, 1956. – 358 с.

32. *Бернштейн С.А.* Очерки по истории строительной механики. – М.: ГИЛСА, 1957.
33. *Бернштейн М.С.* Расчет конструкций с односторонними связями. – М.: Стройиздат 1947. – 448 с.
34. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. Пер. с англ. Солнцевой Ю.К. под редакцией Эльсгольца Л.Э. М.: ИЛ, 1950. – 347 с.
35. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
36. *Боголюбов А.Н.* Математики. Механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. – 639 с.
37. *Босаков С.В.* Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. Учебное пособие. – Минск, 2000. – 142 с.
38. *Бутенко Ю.И. и др.* Строительная механика. – К.: Выща школа, 1989. – 367 с.
39. *Вайнберг М.М., Треногий В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
40. *Варвак П.М. и др.* Метод конечных элементов. – К., 1981. – 438 с.
41. *Варвак П.М.* Новые методы решения задач сопротивления материалов. – К., 1977. – 160 с.
42. *Варвак П.М., Варвак Л.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М., 1977. – 154 с.
43. Вариационные принципы механики: Сб. статей / Под ред. Л.С.Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
44. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
45. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
46. *Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. – М.: Энергия, 1981. – 136 с.
47. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
48. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
49. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. 8-е изд. – М.: Наука, 1966. – 872 с.
50. *Галёркин Б.Г.* Упругие тонкие плиты. – М.: Госстройиздат, 1933г. – 371 с.
51. *Галилео Галилей.* Сочинения, т. I (перевод с итальянского). – М.: Гостехиздат, 1934. – 698 с.

ЛИТЕРАТУРА

52. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: КГУ, 1975. – 325 с.
53. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М., 1966. – 300 с.
54. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
55. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
56. *Геккелер И.В.* Статика упругого тела. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – 287 с.
57. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
58. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: АН СССР, 1959. – 386 с.
59. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
60. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
61. *Гольденблат И.И.* Экстремальные и вариационные принципы в теории сооружений "Строительная механика в СССР" (1917-1957). – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
62. *Гольдштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 350 с.
63. *Гольдштейн Ю.Б., Соломец М.А.* Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 208 с.
64. *Гордеев В.Н., Лантух-Лященко А.И., Пашинский В.А., Перельмутер А.В., Пичугин С.Ф.* Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / Под общей редакцией А.В.Перельмутера – 2-е изд. исправленное и дополненное. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2006. – 476 с.
65. *Гордеев В.Н., Перельмутер А.В.* Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования//Исследования по теории сооружений. – М., 1967 – Вып. 15. – С. 208-212.
66. *Григолюк Э.И.* Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. – М., 1996. – 58 с.
67. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высшая школа, 1989. – 378 с.
68. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.

69. *Дорофеева А.В.* Развитие вариационного исчисления, как исчисления вариаций. – «Историко-матем. иссл.», вып. XIV, М. – Физматгиз, 1961. – С. 101-181.
70. *Дорошук Г.П., Трач В.М.* Будівельна механіка з елементами інформаційних технологій/Підручник. – Рівне: НУВГП, 2005. – 566 с.
71. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1981. – 383 с.
72. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 336 с.
73. *Жозеф Луи Лагранж.* Сборник статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: изд. АН СССР, 1937. – 140 с.
74. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
75. *Зилев В.Б.* Теоремы о взаимности в динамике конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – №5, 2006. – С. 10-15.
76. *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. — ПММ, 1971, т. 35.
77. *Зубов Л.М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости. – ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
78. *Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М.* Численные методы решения задач строительной механики. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с.
79. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: изд. АН СССР, 1963. – 271 с.
80. *Иоффе А.Л., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
81. *Исаханов Г.В., Гранат С.Я., Мельниченко Г.И., Шишов О.В.* Строительная механика. Расчет стержневых систем на ЭВМ.- К.: Вища школа, 1990. – 230 с.
82. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребыцкого. – М.: Наука, 1971. – 298 с.
83. История механики с конца XVIII века до середины XX века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребыцкого. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
84. *Канторович Л.В. и Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматлит, 1962. – 708 с.
85. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD.– М.: Издательство АСВ, 2004.– 592 с. [2-е изд., исправленное и дополненное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007.– 600 с., 3-е изд., стереотипное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2008, 600 с., 4-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, Изд-во АСВ, 2009 – 656 с.].

ЛИТЕРАТУРА

86. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1967. – 778 с.
87. *Качанов Л.М.* Вариационные принципы для упругопластических сред. – ПММ, т. 6, в. 2–3, 1942.
88. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 421 с.
89. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. – 2-е, посмертное. – М.: Гостехтеориздат, 1933. – 270 с.
90. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. ГИТТЛ, М, Л., 1951, 360 с.
91. *Кирхгоф Г.* Механика. – М.: АН СССР, 1962. – 402 с.
92. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
93. *Киселев В.А.* Строительная механика: Специальный курс. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
94. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Мир, 1965.
95. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
96. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.
97. *Коваленко О.Ф.* Вариационные принципы механики для систем с односторонними связями // Исследования по строит, конструкциям. – Томск, 1972. – С. 132–143.
98. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 349 с.
99. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1979.
100. *Коробко В.И., Коробко А.В.* Строительная механика стержневых систем. – М.: ИАСВ, 2007.
101. *Космодемьянский А.А.* Очерки по истории механики. – М.: Наука, 1982. – 295 с.
102. *Кравчук А.С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика.– 1978.– Т. 42, вып. 3.– С. 466–474.
103. *Крылов А.Н.* Ньютон и его значение в мировой науке (1643 – 1943). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 40 с.
104. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. – М., 1951.– 476 с.
105. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2 – ОГИЗ, Гостехиздат, 1945. – 619 с.

106. *Лаврентьев М. и Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.
107. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. – 296 с.
108. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, т. I, II. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
109. *Лазарян В.А.* Энергия деформации и перемещения линейных систем. – К.: Наукова думка, 1972. – 139 с.
110. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 795 с.
111. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
112. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф.Гантмахера. Под ред. Л.С.Полака. – М.: Мир. 1965. – 408 с.
113. *Лейбензон Л.С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 287 с.
114. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 464 с.
115. *Лейбензон Л.С.* Элементы математической теории пластичности. – М.-Л.: Гостехиздат, 1943. – 112 с.
116. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
117. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
118. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
119. *Лурье А.И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. – М.-Л., 1950. – 432 с.
120. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
121. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
122. Математическая энциклопедия. Т.1, М., 1977. Т.2, М., 1979. Т.3, М., 1982. Т.4, М., 1984. Т.5, М., 1985.
123. *Мах Э.* Механика. – С.-Петербург, 1909. – 448 с.
124. Метод конечных элементов в механике твердых тел // А.С. Сахаров, В.Н. Кислооккий, В.В. Киричевский и др.— К.: Вища шк. Головное изд-во; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982.— 480 с.
125. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
126. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 250 с.

ЛІТЕРАТУРА

127. *Михлин С.Г.* Прямые методы математической физики. – М.-Л.: ГТТИ, 1950. – 428 с.
128. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.– 432 с.
129. *Можаровський М.С.* Теорія пружності, пластичності і повзучості. – К.: Вища школа, 2002. – 310 с.
130. *Моисеев Н.Д.* Очерки по истории механики. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
131. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
132. *Муштары Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957.– 432 с.
133. *Мышкис А.А.* Математика для вузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
134. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
135. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
136. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 365 с.
137. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
138. *Остроградский М.В.* Избранные труды. – М.: АН СССР, 1968. – 583 с.
139. *Панагиоготулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
140. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
141. *Перельмутер А.В.* Исследование метода квадратного программирования для расчета схем с односторонними связями // В кн. «Исследования по теории сооружений», вып. XIX. – М.: Стройиздат, 1972.
142. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1. Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010.– 704 с.
143. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 2. Устойчивость упруго деформируемых механических систем.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010.–672 с.
144. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 3.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2011.– 388 с.
145. *Перельмутер А.В.* К вопросу о кинематическом анализе систем, содержащих

- односторонние связи. Сб. «Строительная механика и расчет сооружений» №1. – К., 1970.
146. *Перельмутер А.В.* Статические и кинематические свойства систем с односторонними связями – «Строительная механика и расчет сооружений» №2. – К., 1968.
147. *Перельмутер А.В.* Управление поведением несущих конструкций. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2011. – 325 с.
148. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – К.: ВВП «Компас», 2001. – 446 с. [Изд. 2-е, переработанное и дополненное.– Киев: Изд-во «Сталь», 2002.– 615 с.; 3-е изд., исправленное и дополненное – М.: ДМК Пресс, 2007.– 600 с. (Серия «Проектирование»)].
149. *Піскунов В.Г.* та інші. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. – К.: Вища школа, кн. 1, 1994. – 201 с., кн. 2, 1994. – 335 с., кн. 3, 1995. – 271 с., кн. 4, 1995. – 303 с., кн. 5, 1995. – 207 с.
150. *Погревысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну.– М.: Наука, 1966.– 326 с.
151. *Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И.* Основы и методы прикладной теории упругости. – Киев: Вища школа, 1981. – 328 с.
152. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1960. – 600 с.
153. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
154. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
155. *Попов Е.П.* Теория и расчёт гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
156. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
157. *Потапов В.Д., Александров А.В., Косицын С.Б., Долотказин Д.Б.* Строительная механика: в 2 кн. Кн.1. Статика упругих систем. – М.: ФГУП “Издательство “Высшая школа”, 2007.
158. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: изд. иностр. лит., 1963.– 340 с.
159. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 400 с.
160. *Прудников А.П., Бричко Ю.И., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981.
161. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– 584 с.
162. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.

ЛИТЕРАТУРА

163. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями.– М.: Стройиздат, 1975.– 144 с.
164. Рабинович И.М. Курс строительной механики. Т.1. Статически определимые системы. – М.: Стройиздат, 1950; Курс строительной механики. Т.2. Статически неопределимые системы.– М.: Стройиздат, 1954.
165. Работнов Ю.Н. Основы механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979.– 744 с.
166. Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости.– В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н.И.Мусхелишвили). – М.: АН СССР, 1961.– С. 326-377.
167. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
168. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
169. Ривкин С.А., Коршунов Д.А., Френкель Л. М. Сборные железобетонные фундаменты каркасных зданий. – К.: Госстройиздат, 1962. – 135 с.
170. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 223 с.
171. Розин Л.А. Вариационные постановки задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задачи Синьорини // Метод конечных элементов и строит. механика: Тр. ЛПИ.–№ 363 – Л., 1979.– С. 3–15.
172. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С.-Петербург: изд. СПбГТУ, 1998. – 530 с.
173. Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 276 с. .
174. Російсько-український та українсько-російський словник термінів будівництва й архітектури / Уклад. С. Жуковський, Р. Кінаш, Л. Полюга, В. Базилевич. – Львів: Ліга–Прес, 2004.
175. Рыбаков Л.С., Наринский В.И. Вариационные принципы и методы строительной механики. – М.: МАИ, 1987. – 92 с.
176. Рэлей Дж. Теория звука, т. I, II.– М.-Л.: Гостехиздат, 1955. – 504 с; 476 с.
177. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М., 2005. – 708 с.
178. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Стержневые системы.– М.: Стройиздат, 1981; Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984.

179. Справочник по теории упругости // Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – К.: «Будивельник», 1971. – 418 с.
180. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е. – М.: Гостехиздат, 1953. – 468 с.
181. Страракова Н.Е. Принцип Гамильтона–Остроградского для системы с односторонними связями // Прикл. математика и механика. Т. 29, вып. 4. – 1965. – С. 738–739.
182. Тимошенко С. Воспоминания. – К.: Наукова думка, 1993. – 454 с.
183. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 536 с.
184. Тимошенко С.П. Курс статики сооружений. – Л.: ГНТИ, 1931. – 391 с.
185. Тимошенко С.П. Курс теории упругости, ч. II. – 1916.
186. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1948.
187. Тимошенко С.П. Сборник задач по сопротивлению материалов.– М.-Л., 1928.
188. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, т. I. (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1945.
189. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, т. II. – М.: Гостехиздат, 1946.
190. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. В 2 ч. Ч.2. Теория и задачи. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1932.
191. Тимошенко С.П. Статические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 561 с.
192. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле (перевод с английского). – М.: Госс.научно-техническое издательство, 1931г. – 344 с..
193. Тимошенко С.П. Теория упругости (перевод с английского). – М.: ОНТИ, 1937. – 452 с.
194. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
195. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем (перевод с английского). – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
196. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
197. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. – 560 с.
198. Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М., 1974. – 482 с.
199. Тонти Э. Вариационные принципы в теории упругости. – Сб. перев. "Механика", 1969, вып. 5. – С. 124–138.

ЛИТЕРАТУРА

200. *Треффц Е.* Математическая теория упругости (перевод с немецкого), 1934. – 172 с.
201. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
202. *Тюлина И.А.* Жозеф Луи Лагранж. – М.: Наука, 1977. – 221 с.
203. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
204. *Фепль А. и Фепль Л.* Сила и деформация, т. I и т. II (перевод с немецкого), 1933 и 1936.
205. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 159 с.
206. *Филин А.П.* Матрицы в статике стержневых систем. – Л.-М., 1966.– С. 107–116.
207. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. т.2. – М.-Л., 1978. – т.1. – 1975. – т. 3. – 1981г.
208. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.– М., 1970.
209. *Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: «Наука», 1979. – 429 с.
210. *Хедли Дж.* Нелинейное динамическое программирование.– М.: Мир, 1967.– 506 с.
211. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир, 1975.– 408 с.
212. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. – М.: Мир, 1983. – 478 с.
213. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1970. – 184 с.
214. *Черноусько Ф.Л., Банничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления.– М.: Наука, 1973. – 238 с.
215. *Чирас А.А.* Строительная механика: теория и алгоритмы. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
216. *Шехтер Р.* Вариационный метод в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
217. *Эйлер Л.* Диссертация о принципе наименьшего действия с разбором возражений славнейшего проф. Кенига, выдвинутых против этого принципа.– В. сб. переводов [152].
218. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.

219. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
220. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.
221. Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and structural analysis, 1960, Butterworths, London. – 86 p.
222. Appell P. Traité de Mécanique, т. III. – 1900.
223. Castigliano A. Nuova teoria intorno all equilibrio dei sistemi elasticiti. – Trans. Acad. Sci. Turin, 1975, vol. X. – P. 380–423.
224. Castigliano A. Theorem de l'équilibre des systemes elastiques et ses applications, 1879 (переклад з англ. в кн: Andrews E.S. Elastic stresses in structures, 1919).
225. Clough R.W. Early history of the finite element method from the viewpoint of a pioneer. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, vol.60, pp. 283–287.
226. Duvaut G., Lions J.-J. Les inequations en mecanique et en physique. – P: Dunod, 1972. – 411 p.
227. Fichera G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: in problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lei Lincei. – 1964. – N 8. – P. 91–140.
228. Friedrichs K. Ein Verfahren der Variationsrechnung (Об одном приеме вариационного исчисления). Известия Научного Геттингенского общества (Nachrichten der Ges. d. Wiss zy Göttingen). 1929. – С. 13–20.
229. Goldstine H. A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.
230. Karl-Eugen Kurrer. The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.
231. Kolter W.T. General theorems for elastic plastic solids // Progress in solid Mechanics. 2. North-Holland, P. C.– 1960.– P. 165–221.
232. Lagrange. Mecanique analitike. – Paris. – 1788.
233. Mayer A. Geschichte dcs Principis der Kieinsten Aktion. – Leipzig, 1877. – 180 S.
234. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls. – Bejlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003. – 600 p.
235. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics, 1996. Subdury: Jones & Burlett Publishers.

ЛИТЕРАТУРА

236. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.– Annalen der Physik, 28. – 1909. – P. 737–786.
237. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." J. reine angew. Math. 135, 1-61, 1908.
238. *Signorini A.* Sopra alcune questioni di Elastostatica. – Atti della Societa Italiana per il Progresso della Scienza, 1933.
239. *Signorini A.* Questioni di elasticità non linearizzata o semilinearizzata//Rend, di Matem. e. delle sue appl. – 1959. – P. 17–31.
240. *Tulio Levi-Civita e Ugo Amaldi.* Lezioni di meccanica razionale. Vol. 1-2.– Bologna, 1930. [Є переклад російською: *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – Т. 1, ч. 2. – М., 1962].
241. *Winkler E.* Alberto Castigliano, Deutsche Bauzeitung, 1884, vol. 15, pp. 570-573.
242. ZAMM-Z. Angew. Math.u.Mech. (Журнал прикладной математики и механики) т.65.–1985 вып. 2. – С. 121-125.
243. *Zienkiewicz O.C.* The birth of the finite element method and computational mechanics. – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60. – 2004, p. 3-10.

Навчальне видання

БАЖЕНОВ Віктор Андрійович

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Здано на складання 01.08.2012 р. Підписано до друку 08.08.2012 р.
Формат 70x108/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Тип Times.
Ум. друк. арк. 41,5. Обл.-вид. арк 42,85.

Видавництво «Каравела»,
просп. Рокосовського, 8а, м. Київ, 04201, Україна.
Тел. (044) 592-39-36, (050) 355-77-75, (068)345-09-51.

E-mail: caravela@ukr.net

WWW.CARAVELA.KIEV.UA

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції: ДК №2035 від 16.12.2004 р.

Віддруковано з готових діапозитивів
в друкарні ТОВ "Друкарня "Рута"
(свід. Серія ДК №4060 від 29.04.2011 р.)
м. Кам'янець-Подільський, вул. Пархоменка, 1
тел. 0 38 494 22 50, drukruta@ukr.net
Замовлення № 325.

В.А. БАЖЕНОВ

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Підручник призначений для вивчення спеціальних курсів будівельної механіки, пов'язаних із викладенням загальних варіаційних принципів і методів будівельної механіки дискретних і континуальних систем з побудовою сучасних чисельних процедур і технологій реалізації.

Застосовується єдина методологія, заснована на ідеї двоїстості з використанням перетворення Юнга-Фенхеля, перетворення Лежандра, нерівності Юнга, двоїстих за Юнгом функцій, двоїстих за Лагранжем постановок варіаційних задач. Для зручності ці матеріали вміщені до книги і виділені в окремі розділи, присвячені елементам варіаційного числення, двоїстим постановкам варіаційних задач.

Наведені основні варіаційні принципи Лагранжа і Кастільяно, Гамільтона-Остроградського і Гамільтона-Пуанкаре, а також змішані принципи.

Викладені основні підходи прямих методів варіаційного числення: Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Треффца, найменшого квадратичного відхилення, ортогоналізації, Канторовича, метод скінченних елементів як прямий варіаційний метод тощо, технології реалізації.

Розглянуто широке коло лінійних статичних і динамічних задач будівельної механіки, а також геометрично і фізично нелінійні задачі, конструктивно-нелінійні системи.

Підручник призначений для студентів вищих навчальних закладів, які спеціалізуються і, відповідно, виконують дипломні і магістерські роботи з будівельної механіки. Він буде корисним для викладачів будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності та інших суміжних технічних дисциплін.

