

И.П.ФИЛОНОВ,
Л.П.АНЦИПОРОВИЧ, В.К.АКУЛИЧ

ТЕОРИЯ
МЕХАНИЗМОВ,
МАШИН
И МАНИПУЛЯТОРОВ

621.01(075)
Ф55

С | Ученый
Е | Инженер
Р | Студент
И | Учащийся
Я |
1995 г.

И.П.Филонов, П.П.Анципорович, В.К.Акулич

Теория механизмов, машин и манипуляторов

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
машиностроительных специальностей
высших учебных заведений*

Минск
Издательство "Дизайн ПРО"
1998

УДК 621.01(076.2)

ББК 34.41я73

Ф55

Рецензенты:

Кафедра теоретической механики и теории механизмов
и машин Белорусского аграрного технического университета
(зав. кафедрой профессор Чигарев Ю.В.).

Заведующий кафедрой технической механики
Белорусского государственного университета информатики,
профессор Сурин В.М.

Филонов И.П., Анципорович П.П., Акулич В.К.

Ф55

Теория механизмов, машин и манипуляторов. —
Мн.: Дизайн ПРО, 1998. — 656 с.: ил.

ISBN 985-6182-37-9

Излагаются методы математического моделирования тех-
нологических машин и манипуляторов промышленных роботов.

В основу оценки эффективности проектируемых схем
положены критерии качественной оценки их работоспособ-
ности: энергопотребление, материалоемкость, динамическая
нагруженность, колебания, трение и износ.

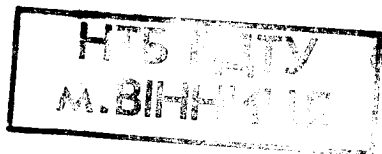
Для студентов вузов машиностроительных специальнос-
тей, молодых специалистов и преподавателей смежных курсов,
желающих ознакомиться с основными положениями и мето-
дами количественной оценки критериев работоспособности
технологического оборудования, используемого в условиях
автоматизированного производства.

Ф 2702000000 - 064

98

395509

ББК 34.41я73



ISBN 985-6182-39-9

© Филонов И.П., Анципорович П.П.,
Акулич В.К., 1998

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана по программе учебного курса "Теория механизмов, машин и манипуляторов" для студентов машиностроительных специальностей с учетом современных требований к математическому моделированию движения машин автоматического действия. Приведены математические модели и алгоритмы, позволяющие решать как отдельные задачи, так и проводить комплексные численные исследования с помощью ЭВМ энергопотребления и динамической нагруженности разнообразных схем машин и манипуляторов. Рассмотренные примеры могут быть использованы для самостоятельной работы студентов. С этой целью авторы излагают материал с учетом последовательности изучения общетехнических дисциплин и дисциплин физико-математического цикла, а также их междисциплинарной связи. Практические задачи, положенные в основу книги, связанные, например, с численным исследованием трения и износа, колебаний машин на фундаменте, динамики манипуляторов и другие могут быть использованы в дипломном проектировании. С этой целью авторы разработали программное обеспечение с интерактивной графикой. Диалоговый режим общения с ЭВМ дает возможность пользователю не только получить распечатки численных значений исследуемых параметров, но и провести анализ промежуточной информации в виде графиков, позволяющих понять физическую сущность и выявить связи входных и выходных величин.

Изложение отдельных решений выходит за рамки традиционного учебного курса теории механизмов и машин. Это обосновано как требованиями современной инженерной исследовательской практики, так и возросшим в последнее время уровнем использования аналитико-машинных методов. Однако общая постановка и аналитическая формулировка предлагаемых задач, также как и анализ результатов численных исследований основывается на общих принципах и методах теории механизмов и машин. Следует отметить, что предлагаемая методика решения задач выходит за рамки отдельных дисциплин. Наряду с механическими характеристиками предлагается исследовать электрические, гидравлические и пневматические связи. Это объясняется тем, что процессы, происходящие в современных машинах автоматического действия не представляется возможным рассматривать раздельно. Поэтому необходимо методическое обеспечение по развитию навыков комплексного подхода к решению задач современного автоматизированного производства. В настоящее время просматривается тенденция совершенствования отдельных дисциплин с научной и методической точек зрения и несколько меньше внимания в учебном процессе уделяется

использованию достижений в рамках отдельных специальностей для комплексного решения проблем автоматизации рабочих процессов машиностроения. Как показывает практика, такая взаимосвязка разрозненных знаний может быть эффективно реализована при использовании ЭВМ. Это объясняется тем, что с математической точки зрения просматривается глубокая аналогия в функциональной связи явлений, происходящих в электрических, механических и гидропневматических системах. В этом плане излагаемый материал можно рассматривать как попытку установления связи между общетехническими дисциплинами и дисциплинами физико-математического цикла и использования их для поиска рациональных компоновочных схем технологических машин и средств автоматизации.

В целом книга написана профессором И.П.Филоновым и является обобщением опыта работы отдельных преподавателей кафедры "Теория механизмов и машин" в курсовом и дипломном проектировании по различным дисциплинам, имеющим отношение к рабочим процессам машиностроения и их комплексной механизации и автоматизации. Их вклад в подготовку материалов рукописи и написание отдельных разделов книги выразился в следующем.

Кандидатами технических наук, доцентами П.П.Анциповичем и В.К.Акуличем разработаны алгоритмы и программы численного исследования с помощью ЭВМ, включенные в разделы 7 главы 2, разделы 6.2, 6.3 главы. Принимали участие в подготовке материалов разделов 4.4, 5, 6.1, 7.2 главы 4 — С.П.Быковец, разделов 9, 10 главы 1 — В.А.Николаев, раздела 13 главы 7 и раздела 4 главы 10 — Ю.Б.Герасимов.

Авторы приносят также благодарность Н.Г.Сезеню, Т.Д.Шевченко, Т.В.Смоляковой, вложившим много труда в подготовку рукописи к печати.

ВВЕДЕНИЕ

Курс "Теория механизмов, машин и манипуляторов" предусматривает освоение методов анализа и синтеза схем отдельных машин и механизмов с учетом требований автоматического управления режимами при выполнении основных и вспомогательных технологических операций. Проектирование схем машин и механизмов автоматического действия в такой постановке требует изучения неразрывного и взаимосвязанного процесса передачи, переработки, а также использования как энергии, материала, так и информации. Изучение функций машин, связанных с управлением и контролем своей работы, учетом оптимального взаимодействия человека и техники, требуют установления междисциплинарных связей и расширения традиционных разделов изучаемых в вузе, приближения их к конкретным проблемам отрасли. Это означает, что поиск оптимальных кинематических, динамических и энергетических характеристик машин должен базироваться на математическом моделировании связей параметров качества изделия с производительностью процесса. При этом не менее важной является оценка экономической целесообразности достижения требуемой долговечности и надежности машин.

Создание новых машин, то есть их проектирование и изготовление является результатом использования достижений в различных областях науки и техники. Чем более полно учитываются при проектировании машин критерии их работоспособности (производительность, надежность, точность и т.п.), тем совершеннее их конструкция.

Выбор типа конкретных механизмов и установление требований к проектированию их схем следует проводить с учетом согласования движений всех механизмов машин в целом. Раздельного изучения кинематики и динамики механизмов в этом случае недостаточно. Поэтому в курсе "Теория механизмов, машин и манипуляторов" изучаются также вопросы построения систем управления.

В связи с использованием в последнее время для преобразования движения среды под давлением (жидкой, газообразной), предметом динамики механизмов становятся особенности движения жидкостей и газов. Наряду с электромеханическими приводами, развитие пневмогидроприводов требует разработки методики оценки их наиболее выгодного сочетания применительно к конкретным машинам. В основу такой методики могут быть положены наиболее общие характеристики, связанные с динамической нагруженностью, энергопотреблением, материалоемкостью. Однако все эти характеристики могут быть оптимальными только для определенного класса машин. Расширение критериев оценки качества машин, учитывающих параметры

объекта производства, установление функциональной связи между ними является основой познавательной деятельности в области машинных технологических процессов, накопление же таких связей и их теоретическое обобщение во многом способствует развитию теоретических методов исследования и проектирования машин. В традиционном учебном курсе теории механизмов и машин долгое время уделялось больше внимания совершенствованию методики анализа и синтеза плоских механизмов. Поэтому с развитием робототехники некоторые вопросы динамики манипуляторов, как пространственных незамкнутых кинематических цепей, оказались недостаточно отраженными в учебной литературе. Здесь представляет интерес выбор наиболее удобной методики исследования их кинематических и динамических характеристик с использованием ЭВМ. Эти и другие проблемы моделирования движения машин и средств автоматизации технологических процессов отражены в настоящей книге. В предлагаемом курсе сделана попытка выделить некоторые элементы САПР схем машин и манипуляторов промышленных роботов, обратив особое внимание на математическое моделирование их работоспособности, разработку алгоритмов и программного обеспечения.

Наиболее эффективно использование ЭВМ в диалоговом режиме с выводом промежуточных и конечных результатов в виде графической информации на экране дисплея. При этом пользователь будет находиться в условиях необходимости творческого решения и осмысливания своих действий. Графическая и численная информация, получаемая с помощью ЭВМ, может быть использована как в учебных целях для освоения методов, так и в решении инженерных задач по совершенствованию схем механизмов и машин. В частности, к числу таких задач можно отнести следующие: освоение методики количественной оценки динамических характеристик и динамической нагруженности машины, методов ее снижения; установление количественной взаимосвязи динамических характеристик и динамической нагруженности с материалоемкостью и энергопотреблением машины, с износом в кинематических парах, с погрешностью позиционирования рабочего органа, с кинематическими и динамическими погрешностями; количественная и качественная оценка влияния характеристик приводного двигателя, масс звеньев и длины кинематической цепи привода на выходные параметры процесса, выполняемого машиной. Такая многовариантная проработка схем машин имеет особое значение в решении некоторых проблем комплексной механизации рабочих процессов машиностроения. В этом случае имеются свои особенности проектирования автоматизированных технологических комплексов (ТК). Эти особенности связаны с тем, что ТК объединяют в себе производственные машины и аппараты, транспортные и информационные машины, пневмо-

гидро-, электродвигатели, промышленные роботы и общие средства автоматического управления. Сложность и ответственность задач синтеза ТК требует всестороннего осмысления и анализа этапов такого проектирования, умения выделить их основные элементы на уровне проработки схем ТК, прочностных, точностных и других расчетов. Наряду с этим, используемые машины должны отличаться рациональным энергопотреблением, низкой материалоемкостью и экологической безопасностью. Все это позволяет сделать вывод о том, что поиск оптимальных вариантов машин-автоматов должен производиться с учетом технологических, механических, эргономических и экономических показателей, которые должны быть учтены на этапе схемной проработки, когда их изменение не связано с исправлением конструкторской и технологической документации. Многовариантная проработка компоновочной схемы проектируемой машины по основным критериям ее работоспособности становится обязательным условием поиска рациональных схем передаточных и исполнительных механизмов, положенных в ее основу.

ГЛАВА 1**ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
МАШИН-АВТОМАТОВ****1.1. Особенности технологических процессов изготовления
деталей и проектирования схем технологического
оборудования в условиях автоматизированного
производства**

В отличие от однооперационных машин, предназначенных для механизации одной операции, современные рабочие (производственные) машины представляют собой единый комплекс механизмов, осуществляющий заданную программу. В процессе производства изменяются физические свойства, форма, положение обрабатываемой детали, на что затрачивается полезная работа, в отличие от работы сил трения и других сил сопротивления. Различают также транспортные машины и машины-двигатели, преобразующие определенный вид энергии в механическую работу, необходимую для приведения в движение рабочей машины, а также информационные машины и особый класс машин-автоматов — промышленные роботы. Современные технологические комплексы кроме таких машин содержат также и контрольно-управляющие устройства.

Развитие машин идет по пути объединения передаточного и исполнительного механизмов с двигателем и управляющей системой.

Различают непрерывные и дискретные (прерывнооперационные) технологические процессы. Первые характерны для производства текстиля, бумаги, полимеров, химических продуктов и т.п., вторые — для металлообрабатывающей промышленности и других отраслей, выпускающих штучную продукцию.

Выполнение машиной прерывнооперационного технологического процесса характеризуется цикличностью, то есть периодическим повторением положения, скорости и ускорения рабочего органа, устанавливаемого на выходном звене исполнительного механизма. Проектирование рабочей машины начинается с анализа технологического процесса. При этом преследуется цель повышения производительности за счет создания наиболее рационального чередования или совмещения отдельных операций, выполняемых механизмами машины.

Поддержание качества рабочих поверхностей деталей машин и приборов в процессе обработки предусматривает управление (регулирование) геометрическими, кинематическими и силовыми параметрами. Например, механическая обработка сложных и высокоточных поверхностей (винтовых, сферических, асферических и др.) требует поддержания направления силы прижима инструмента по нормали к обрабатываемой поверхности

В каждой точке его траектории. Закон переносного и относительного движений инструмента, т.е. зависимость скорости от его пути (длины траектории), определяется требуемыми параметрами качества (макро- и микрогеометрией), которые зависят также и от величины силы прижима. Это говорит о том, что в основе управления качеством обрабатываемых поверхностей лежат механические характеристики, количественные значения которых выражаются параметрами траектории, скоростями, ускорениями и силами (моментами сил). Поэтому моделирование процессов формообразования предусматривает прежде всего определение зависимостей, устанавливающих количественную связь между этими параметрами. Наличие таких связей и алгоритмов управления режимами (силовыми и скоростными) позволяет моделировать процессы формообразования и выявлять пути (резервы) повышения производительности, например, методом выбора рациональных геометрических характеристик механизма или его схемы, обеспечивающих требуемую кинематику рабочего органа, установленного на выходном звене (кинематический синтез). В основе может лежать также поиск рационального распределения масс подвижных звеньев, соотношения движущих сил и сил сопротивления, обеспечивающих наименьшую неравномерность движения главного приводного вала (динамический синтез). Понятно, что вне рассматриваемого технологического процесса такая оптимизация не имеет смысла, то есть механизмы, используемые в машинах, сами по себе не могут быть хорошими или плохими. Когда речь идет об управлении, то закон изменения силы или момента может быть реализован только для конкретного сочетания передаточных и исполнительных механизмов, предназначенных для выполнения определенной операции технологического процесса. Это говорит о том, что управление электро-, гидро-, пневмоприводами с помощью различных систем предусматривает использование электронных, магнитных и других элементов для поддержания механических характеристик (силовых и скоростных) конкретной машины в определенном диапазоне, обеспечивающем требуемые параметры качества изделий и производительности процесса. Часто такое жестко программируемое технологическое оборудование оснащается элементами адаптации. Для этого используются сенсорные устройства и соответствующее математическое обеспечение. По сигналам от преобразователей деформаций в электрический сигнал возможна корректировка управляющих программ. К таким сенсорным устройствам (системам очувствления) относятся датчики контроля сил и моментов сил, тактильные датчики прикосновения и визуальные сенсорные установки (системы технологического зрения). Вышеперечисленные особенности относятся к управлению режимами какой-либо одной операции технологического процесса изготовления деталей и решают проблему автоматизации формообразования. Комплексная механизация технологического процесса включает также

автоматизацию межоперационной транспортировки, переориентации, контроля. Зачастую не для всех операций технологического процесса изготовления деталей удается реализовать управление режимами обработки. В таких технологических процессах требуемое качество изделий поддерживается благодаря постоянному участию человека (подналадка механизмов, контроль состояния инструмента и т.д.). При анализе изменения качества изделия во времени фиксируются все моменты вмешательства человека для поддержания параметров технологического процесса в требуемых пределах. Это проводится с целью предвидения влияния намечаемых мероприятий по автоматизации на качество деталей. Автоматизация процессов загрузки-выгрузки и транспортирования деталей, как правило, не снижает качества деталей, но определяет производительность технологического оборудования. Создание полуавтоматов, автоматов, автоматических линий и цехов является характерной чертой автоматизации производственных процессов, которое предусматривает использование механизмов не только для рабочих и холостых ходов, но и механизмов управления. Такие механизмы автоматизируют выполнение не только рабочих процессов, но и вспомогательных движений — загрузку заготовок, съем обработанных деталей, закрепление и освобождение их в процессе обработки, поворот, фиксацию и т.п. С этой точки зрения автоматизация действующего оборудования означает перевод его в новый, высший класс. Логическим завершением следует считать передачу машинам функций человека вплоть до управления. При этом следует делать различие между действиями, выполняемыми механизмами, и тепловыми, электрическими, ультразвуковыми, химическими процессами. Современное технологическое оборудование объединяет эти процессы. Например, при изготовлении изделий из пластмасс исходный материал подлежит разогреву, прессованию, а готовые детали подвергаются дальнейшей механической обработке. В основе разработки схемы той или иной машины, расчета отдельных ее узлов и деталей лежит конкретный технологический процесс. В некоторых же случаях приходится проектировать изделие и изменять технологический процесс для удобства автоматического изготовления этого изделия. Другими словами, технологические машины-автоматы, образующие единую систему, накладывают определенные требования и на изделие, формирование которого (изменение формы, размеров, сборка и т.п.) осуществляется в условиях комплексной механизации и автоматизации. Поэтому основные принципы построения и элементы автоматизированного технологического оборудования (машины-автомата) являются во многом общими для различных отраслей производства. Несмотря на разнообразие технологического назначения, принцип построения схем машин и механизмов, входящих в автоматизированный технологический комплекс, во многом единый. В основе общности методов проектирования схем технологических машин лежат

методы теории механизмов и машин, базирующиеся на законах механики. Они позволяют оценить материалоемкость, энергопотребление машин, их динамическую нагруженность, а также законы изменения управляющих (приводных) моментов (сил). В отличие от несколько отвлеченных методов исследования кинематических и динамических характеристик движения, используемых в теоретической механике, проектирование схем машин предусматривает определение законов изменения скоростей (угловых и линейных) подвижных звеньев машин и законов изменения их приводных моментов при заданных законах изменения сил технологического сопротивления. Это позволяет выявить на этапе схемной проработки той или иной машины законы изменения мощности приводных двигателей и провести многовариантную проработку с целью реализации той или иной системы управления по силе, скорости или мощности. Такая предварительная (схемная) проработка технологического оборудования или средства автоматизации предусматривает поиск наиболее рационального сочетания массовых и кинематических характеристик подвижных звеньев с точки зрения динамической нагруженности их соединений с учетом заданного быстродействия. Таким образом, представляется возможность положить в основу общности методов проектирования схем технологических машин показатели качества, связанные с законом движения рабочего органа: производительность машины — с быстродействием, а управление — с законом изменения силы (момента сил), скорости или мощности. Все это является основой для выбора того или иного электро-, гидро-, пневмопривода станка или средства автоматизации. Особое значение имеет выявление связей между параметрами качества изделий, например, обрабатываемых деталей и кинематикой выходного звена механизма, на котором установлен рабочий орган. В качестве таких связей может быть, например, износ сопряженных поверхностей инструмента и детали в процессах окончательной обработки, температурные явления в зоне контакта и т.п. Выявление таких связей и установление их количественных характеристик являются предметом исследования для отдельных специальностей, изучающих, например, процессы лезвийной или абразивной обработки. Моделирование таких связей, с использованием конкретных механизмов, поддерживающих в требуемом диапазоне изменения сил, скоростей, мощностей, является не менее важным этапом.

1.2. Структура машин-автоматов и их производительность

Как отмечалось ранее, проектируемая схема машины-автомата должна отвечать требованиям комплексной механизации, учитывающей механизацию не только основных технологических операций, но и вспомогательных, связанных с перемещением, ориентацией и фиксацией обрабатываемой детали,

оценкой ее качества и отбраковкой. При этом большое значение имеет механизация загрузочно-разгрузочных работ в сочетании с транспортированием. К таким работам относятся следующие: накопление неориентированных деталей, накопление ориентированных деталей, рассортировка их, отсекание (отделение), крепление и освобождение, разгрузка. Подача или загрузка ориентированных деталей в зону обработки или сборки, а также съем и выведение их из этих зон осуществляются механизмами, которые называют автооператорами.

Все движения исполнительных органов (звеньев) механизмов задаются следующими параметрами: начальным положением, направлением движения, формой траектории, путем (длиной траектории), скоростью и ускорением. В простейших случаях движение реализуется по заданным конечным положениям (без анализа закона движения). Правильно рассчитанный закон движения определяет не только точность позиционирования, но и работоспособность механизма и машины в целом. Это связано с тем, что динамические нагрузки в процессе разгона и торможения приводят к износу, деформации подвижных соединений и быстрой потере точности.

В основе повышения производительности лежит требование уменьшения времени на выполнение операций технологического процесса. Оценка же быстродействия средств автоматизации требует учета не только численного значения перемещаемых масс, но и распределения масс в подвижных звеньях и вдоль кинематической цепи привода. Увеличение скоростей и усложнение кинематики звеньев механизмов отдельных машин и технологических комплексов требуют поиска наиболее рационального закона их движения (траектории, скорости и ускорения), обеспечивающего наименьшие динамические нагрузки в подвижных соединениях (кинематических парах). Выбор таких параметров должен проводиться на уровне схемной проработки машины. На этом этапе определяется рациональная геометрия масс подвижных звеньев и законы их движения с учетом механических характеристик двигателя и выполняемого процесса. Сравнение номинальных (теоретических) значений таких кинематических и динамических характеристик в машинах-автоматах с действительными производится с помощью механизмов контроля и управления, которые контролируют также промежуточные стадии технологического процесса. Они реагируют на изменение или отклонение от нормального режима работы машины и обеспечивают автоматическое корректирование (исправление) скоростных, силовых и других параметров. Совокупность таких устройств и методов сбора информации о протекании процесса и режимах работы технологического оборудования составляет систему управления. Она обеспечивает согласованность перемещений всех исполнительных

органов в соответствии с заданной программой, которая представляет собой совокупность предписаний, обеспечивающих выполнение технологического процесса. Таким образом, система управления обеспечивает автоматическое выполнение заданной программы. С учетом всего сказанного видно, что машина-автомат (МА) представляет собой систему механизмов и устройств, в которой полностью механизированы процессы передачи, преобразования и использования энергии, материала и информации.

На рис.1.1 показана блок-схема машины-автомата. Стрелки слева направо показывают направление передачи энергии для движения механизмов и выполнения технологического процесса. Стрелки справа налево и сверху вниз — направление информации о протекании технологического процесса и режимах работы технологического оборудования. Эта информация преобразуется чаще всего в электрический сигнал и поступает для управления (изменения) режимов за счет регулирования рабочих характеристик двигателя, передаточных и исполнительных механизмов.

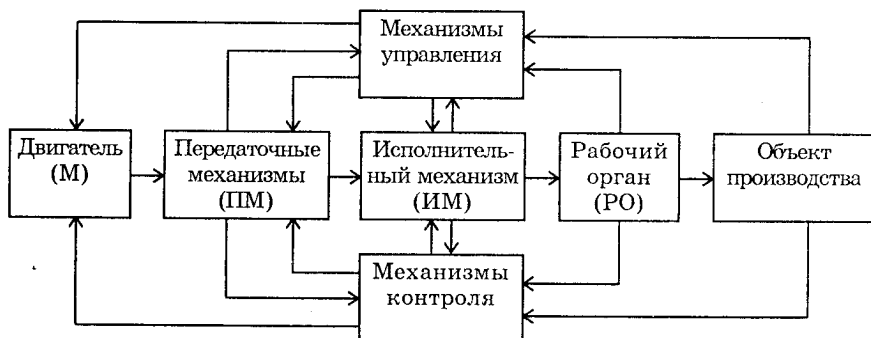


Рис.1.1. Блок-схема машины-автомата

Таким образом, осуществление функции автоматического контроля-управления происходит с помощью обратной связи. В качестве параметров, по которым судят о протекании процесса, то есть об отклонении его от заданных (запрограммированных) характеристик, выбираются следующие: деформация в направлении, наиболее существенном для сохранения точностных показателей, давление в подвижных соединениях, мощность, расход (воздуха, масла), перемещение (путь), скорость, ускорение, время, температура. В этом случае управление можно свести к поддержанию в определенных пределах одного или нескольких параметров. При выходе их за установленные пределы изменяют режимы или останавливают машину с помощью механизмов блокировки (защиты).

Машина-автомат, например, станок с ЧПУ, обеспечивает отработку заложенной программы, в которой не могут быть

записаны изменяющиеся параметры самого станка или процесса. К таким параметрам относятся изменяющиеся усилия резания (рабочие нагрузки), обусловленные состоянием поверхностного слоя заготовки или, например, нарушением условий смазки трущихся поверхностей станка. Учет таких процессов требует создания самонастраивающихся систем. Такие системы адаптивного управления позволяют приспосабливаться к непредвиденным (незапрограммированным) изменениям, например, силовых характеристик за счет изменения скоростных и т.п.

Более высокой стадией технического развития является автоматизация производства, которая возлагает функции контроля и управления на специальные устройства. За человеком сохраняются функции предварительной наладки, пуска, контроля приборов и наблюдения (общего контроля) за ходом производственного процесса.

Примером автоматической системы машин, в которой осуществлена автоматизация процесса контроля, регулирования и блокировки всех операций производственного процесса при централизованном управлении, служит автоматическая линия (АЛ). В состав ее, кроме указанных средств, входит производственная цепочка из синхронно работающих автоматов с ритмично действующими автоматическими транспортными устройствами, автоматическими устройствами загрузки, закрепления (зажима), разжима и разгрузки.

Отличительной особенностью в проектировании является то, что в основе выбора той или иной схемы механизма и машины лежит конкретный технологический процесс, в результате которого получают изделия. Во многих случаях приходится проектировать специальную конструкцию изделия, а также машинный технологический процесс для удобства автоматического изготовления этого изделия, то есть переход к автоматическим системам требует создания машин, образующих единую систему. При этом основным механическим оборудованием для автоматизации технологических процессов являются МА и АЛ.

Выделим их основные элементы и связи между ними. МА — агрегат, объединяющий двигатель с системой передаточных, исполнительных и контрольно-управляющих устройств, в котором автоматически производятся все операции, кроме контроля и наладки.

АЛ — система МА, расположенных в последовательности, определяемой технологическим процессом, и объединенных средствами транспортирования. Наладка и контроль АЛ осуществляются обслуживающим персоналом.

Этапы развития машинных технологических процессов, средств автоматизации и особенности используемых связей для преобразования энергии и информации приведены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Этапы развития	Средства автоматизации	Применяемые связи
Механизация одной технологической операции	Механизм	Жесткие, гибкие, упругие
Механизация основных технологических операций	Рабочая машина, объединяющая двигатель, передаточные механизмы	Те же и гидро-, пневмоэлектрические
Дополнительная механизация вспомогательных технологических операций	Полуавтомат	Те же
Дополнительная автоматизация контроля, управления и блокировки	Автомат	Те же
Автоматизация вспомогательных процессов и автоматическое изменение программ	Промышленный робот	Те же и искусственный интеллект
Введение и автоматизация транспортирующих устройств между автоматами с общей системой управления	Автоматическая линия	Те же и при необходимости искусственный интеллект
Дополнительная автоматизация управления всем производственным процессом с использованием ЭВМ и АСУ	Автоматизированное производство	Те же

Одним из основных требований к машинным технологическим процессам является гибкость используемого технологического комплекса, предусматривающая его переналадку при смене объекта производства. Как видно из табл.1.1, такая переналадка возможна при усложнении связей, положенных в основу развития средств автоматизации. Усложнение таких связей предусматривает наличие искусственного интеллекта.

Искусственный интеллект предусматривает использование в системе управления датчиков (преобразователей в электрический или другой сигнал) информации, воспринимаемой человеком, то есть зрительной информации, связанной с распознаванием образов, цвета, освещенности, слуховой (звуковой) и тактильной информации.

Среди таких устройств сбора информации о состоянии внешней среды особое место занимают преобразователи усилий в деформацию чувствительного элемента, регистрирующие статические и динамические нагрузки. Такие тактильные датчики могут быть контактными и бесконтактными.

Несмотря на различие технологических процессов, как отмечалось ранее, основные принципы построения МА и АЛ и их

составных элементов являются общими. Это позволяет наметить единый принцип построения схем и элементов конструкций МА и АЛ, а также методику их проектирования и расчета в различных отраслях машиностроения.

Общность методов расчета и проектирования ТК видна из классификации [1], основанной на соотношении технологического (основного, рабочего) и транспортного (вспомогательного) движения. Согласно этой классификации, различают машины, у которых обработка изделия производится в период остановки (выстоя) транспортного устройства. Период времени, за который из машины выходит готовое изделие, определяется длительностью операций, а повышение производительности связано с увеличением скоростей технологических операций и транспортирования.

К таким машинам относятся большинство станков, прессы, молоты и т.п. (рис.1.2). В этом случае при наличии скорости $v_{техн}$ технологического движения отсутствует транспортное движение, то есть скорость $v_{тр} = 0$, и наоборот.

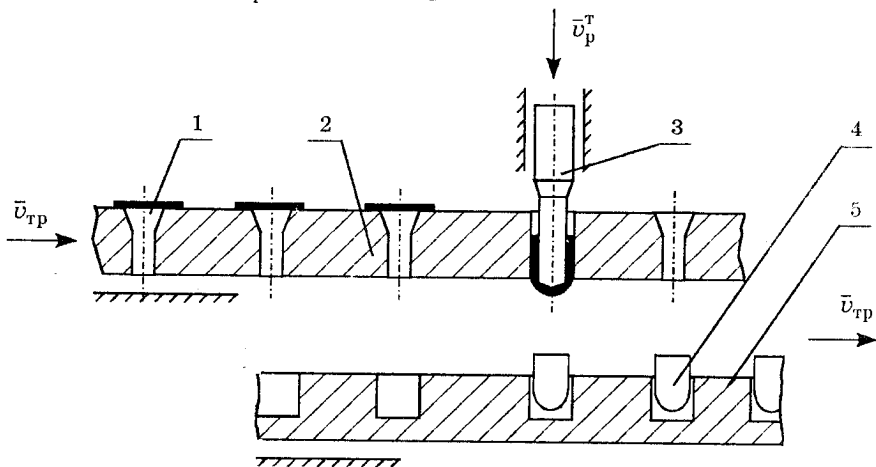


Рис.1.2. Принципиальная схема процесса с независимым временем основного и вспомогательного движений: 1 — обрабатываемая деталь; 2 — транспортное устройство подачи деталей в рабочую зону; 3 — рабочий орган; 4 — обработанная деталь; 5 — транспортное устройство подачи обработанных деталей на следующую операцию

В таких машинах, как прокатные станы, ротационные печатные станки и др., технологическое и транспортное движения совмещены, то есть $v_{техн} = v_{тр}$. Скорость транспортирования ограничена технологической скоростью обработки изделия, которая определяет темп выпуска (производительность) (см.рис.1.3).

В повышении производительности особое значение имеют машины, обеспечивающие обработку изделий или сборку в процессе непрерывного совместного транспортирования инструмента

и заготовки (деталей для сборки и т.п.). Особенностью таких роторных машин-автоматов (РМА) является независимость их производительности от длительности обработки заготовок (длительности операции сборки). Темп выпуска определяется расстоянием (шагом) между позициями обработки (сборки) и транспортной скоростью (рис.1.4).

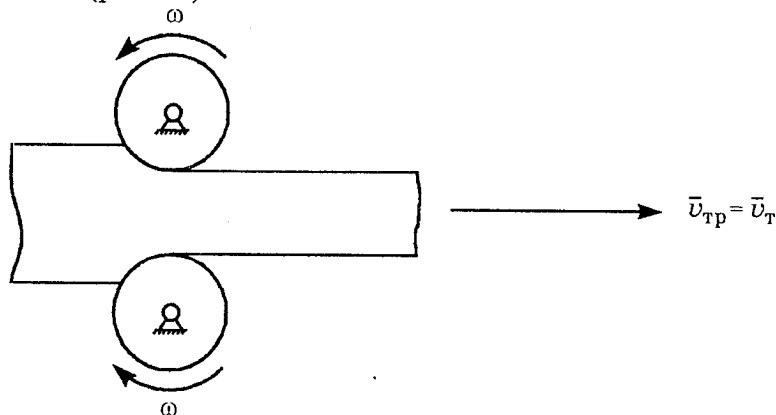


Рис.1.3. Принципиальная схема процесса с совмещением технологического и транспортного времени

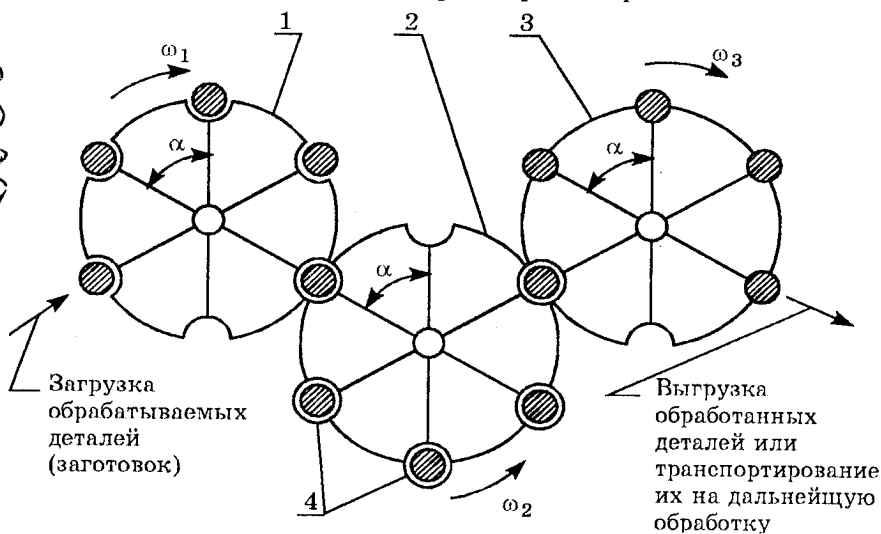


Рис.1.4. Схема РМА: 1,3 — транспортные роторы; 2 — инструментальный ротор; 4 — позиции обработки

В машинах, например, реализующих окраску, сушку, технологическое и транспортное движения не обязательны. В гальваническом и химическом оборудовании движение объекта также



необходимо только для сохранения поточности производственного процесса.

Производительность МА зависит от их компоновки и параметров: количества позиций обработки (сборки), режимов эксплуатации, быстродействия механизмов, надежности элементов системы и др. Однако для каждого варианта технологического процесса и машины время T несомещенных рабочих и холостых ходов определяется суммой времени t_x холостых ходов, связанных с загрузкой, транспортировкой, подводом (отводом) инструментов, а также управлением механизмами, и времени t_p непосредственной обработки (сборки), то есть $T = t_p + t_x$.

Рабочим циклом называют периодически повторяющуюся совокупность операций, после выполнения которых машина выдает готовое изделие. Время T рабочего цикла называется темпом выпуска продукции.

Цикловая производительность машины определяется частотой повторения рабочего цикла и показывает, сколько изделий выдается за единицу времени при бесперебойной работе

$$Q_{\text{ц}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_p + t_x}. \quad (1.1)$$

В машинах параллельного и параллельно-последовательного действия, производящих штучную продукцию, за каждый рабочий цикл выдается P изделий, и цикловая производительность определяется формулой

$$Q_{\text{ц}} = \frac{P}{T} = \frac{P}{t_p + t_x}.$$

Технологической производительностью Q_T машины называют такую производительность, когда все холостые ходы совмещены с рабочими и $t_x = 0$, то есть

$$Q_T = \frac{1}{T_p}.$$

Цикловую производительность машин, у которых $t_x \neq 0$ и $P = 1$, получим из формулы (1.1), поделив числитель и знаменатель на t_p ,

$$Q_{\text{ц}} = \frac{1}{t_p \left(1 + \frac{t_x}{t_p} \right)} = k_{\text{ц}} Q_T,$$

$$\text{где } k_{\text{ц}} = \frac{Q_{\text{ц}}}{Q_T} = \frac{t_p}{(t_p + t_x)} \leq 1.$$

Величину k_{Π} называют *коэффициентом производительности*, характеризующим степень непрерывности машинного технологического процесса.

Вследствие внецикловых потерь времени, состоящих из случайных и случайных простоев МА, действительная (фактическая) производительность всегда меньше цикловой. Частота возникновения и продолжительность простоев зависят от степени надежности элементов МА и кондиционности исходных материалов, от количества бракованных изделий, полученных на предыдущих операциях, и т.п.

Фактическая производительность Q_{Φ} определяется количеством годного (кондиционного) продукта, вырабатываемого МА в единицу времени в реальных производственных условиях:

$$Q_{\Phi} = k_{\Pi} Q_{\Pi},$$

где

$$k_{\Pi} = \frac{Q_{\Phi}}{Q_{\Pi}} < 1$$

представляет собой *коэффициент использования* оборудования. Он определяется отношением времени бесперебойной работы МА за период наблюдения ко всему времени наблюдения. Из этого следует, что

$$Q_{\Phi} = k_{\Pi} k_{\Pi} Q_{\Pi},$$

то есть фактическую производительность можно повысить, увеличивая Q_{Π} за счет интенсификации режимов обработки, k_{Π} — за счет уменьшения цикловых потерь, и k_{Π} — за счет уменьшения внецикловых потерь. Другими словами, фактическую производительность можно повысить за счет применения прогрессивной технологии и улучшения организации производства (снижения простоев оборудования в период его эксплуатации).

Разность $Q_{\Pi} - Q_{\Phi}$ определяет внецикловые потери, связанные с простоями МА по организационным причинам (при смене, установке и наладке инструмента, при ремонте и т.п.). Разность $Q_{\Pi} - Q_{\Pi}$ определяет цикловые потери, вызываемые холостыми ходами за цикл. Выявлять резервы повышения производительности удобно с использованием графика баланса производительности МА, представленного на рис.1.5. С этой целью в одном масштабе по вертикали откладывают технологическую производительность Q_{Π} , цикловую производительность Q_{Π} и фактическую Q_{Φ} с учетом всех потерь. Анализ цикловых потерь ΔQ_{Π} , внецикловых ΔQ_{Π} , а также потерь ΔQ_{Φ} , связанных с браком, позволяет выявить резервы повышения производительности МА в процессе ее эксплуатации.

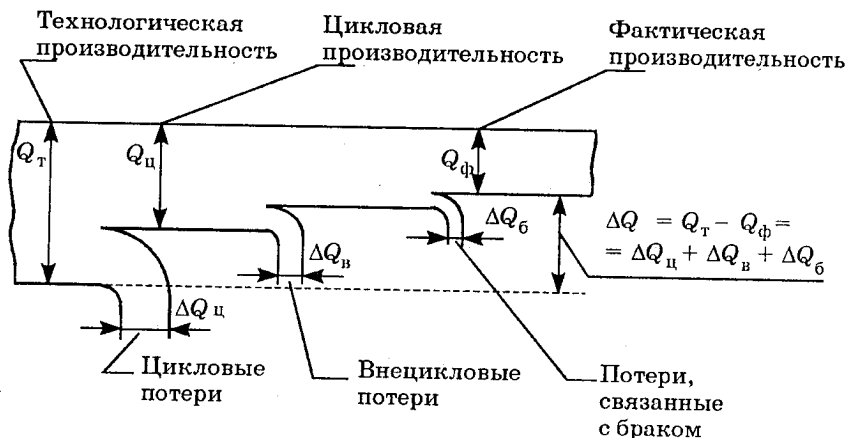


Рис.1.5. Схема баланса производительности МА

В РМА (см. рис.1.4) время полного оборота (кинематический цикл) определяется соотношением $T_k = 2\pi/\omega$, а время рабочего цикла $T = \alpha/\omega$, где угловой шаг $\alpha = 2\pi/q$, q — число позиций ротора. Тогда время рабочего цикла $T = \alpha/\omega = 2\pi/(q\omega)$, а цикловая производительность РМА равна

$$Q_ц = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{\alpha} = \left(\frac{2\pi}{T_k}\right) \left(\frac{q}{2\pi}\right) = \frac{q}{T_k}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) показывает, что РМА теоретически могут быть рассчитаны на любую заданную производительность, т.к. она определяется длительностью кинематического цикла (временем T_k полного оборота ротора) и числом позиций ротора. Однако минимальное значение угла α определяется размерами заготовки и инструментального блока, а увеличение числа позиций требует увеличения диаметра ротора.

Как видно из приведенных формул, производительность МА определяется временем холостых ходов (вспомогательных движений). Это время для поступательно перемещающейся массы m может быть определено из соотношения

$$m \frac{dv}{dt} = F_d - F_c,$$

а для звена с центральным моментом инерции J , вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр масс, — из соотношения

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c.$$

Таким образом, время, необходимое для изменения (приращения) скорости, определяется не только массовыми характеристиками m , J , но и силами F_d (моментами M_d) движущими

и F_c (M_c) сопротивления, которые могут зависеть от времени, пути, скорости, то есть

$$t_{\text{п}} = m \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{dv}{F_{\text{д}} - F_c}; \quad t_{\text{вп}} = J \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{d\omega}{M_{\text{д}} - M_c}. \quad (1.3)$$

При проектировании МА и синтезе машинных технологических процессов определение времени быстродействия машин и механизмов требует учета взаимодействия сил, затрачиваемых на выполнение процесса, с силами движущими, определяемыми типом используемого двигателя. Время, в течение которого перемещается исполнительный орган (ИО) от начального до конечного момента движения, называется временем срабатывания или быстродействием механизма.

Пример. Определить быстродействие простейшего пружинного механизма, обеспечивающего поступательное движение ползуна массой m , перемещающегося на величину s под действием силы F_y упругости в результате сжатия на величину δ (рис.1.6), при наличии постоянной силы F_c сопротивления.

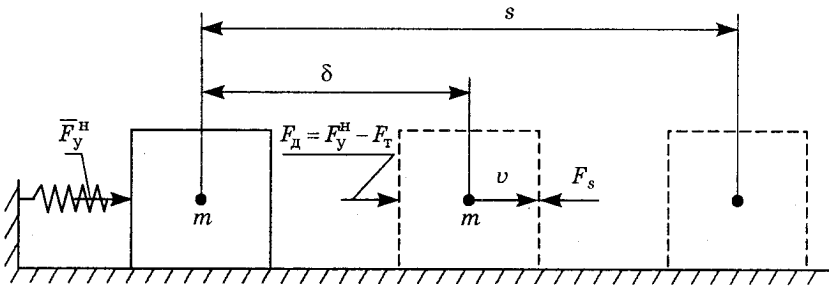


Рис.1.6. К определению быстродействия пружинного механизма

При сжатии пружины на величину $\delta_{\text{max}} = s$ необходимо приложить силу $F_y^H = cs$, которая действует на тело в начале его движения. По мере движения деформация пружины уменьшается, и движущая сила $F_{\text{д}}$ также становится меньше. Условие постоянства жесткости дает соотношение

$$c = \frac{F_y^H}{s} = \frac{F_T}{\delta} = \text{const},$$

откуда

$$F_T = F_y^H \frac{\delta}{s},$$

где F_T — сила, действующая в текущий момент времени.

Тогда в процессе движения на тело массой m действует движущая сила

$$F_{\text{д}} = F_y^H - F_T = F_y^H(1 - \delta/s).$$

На основании теоремы об изменении кинетической энергии при начальной скорости $v_{\delta}^H = 0$ имеем

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int_0^{\delta} [F_y^H (1 - \delta/s) - F_c] d\delta = (F_y^H - F_c) \delta - F_y^H \delta^2 / (2s),$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} [(F_y^H - F_c) \delta - F_y^H \delta^2 / (2s)]} = \frac{d\delta}{dt},$$

тогда

$$t = \int_0^s \frac{d\delta}{v}$$

или

$$t = \int_0^s d\delta / \sqrt{\frac{2}{m} [(F_y^H - F_c) \delta - F_y^H \delta^2 / (2s)]}.$$

Если принять $F_c = 0$, то время перемещения массы m на величину s определится как

$$t \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{F_y^H}} s.$$

На этом примере показана взаимосвязь силовых, скоростных и массовых характеристик перемещаемого объекта, которая должна быть положена в основу оценки времени его перемещения. При исследовании движения более сложных систем, входящих в МА, используют те же законы механики, однако применительно не к реальным звеньям, а к динамическим моделям механизмов и машин. Основное требование к динамической модели (адекватность ее исследуемой машине) заключается в равенстве их кинетических энергий и работ (мощностей) всех сил движущих и сил сопротивления, приложенных к динамической модели и подвижным звеньям машины. Из рассмотренного примера видно, что время срабатывания, определяющее производительность, является интегральной функцией. Поэтому оно зависит от законов изменения как этих сил (моментов), так и законов изменения скорости (угловой, линейной) (см. уравнения 1.3).

Как известно из [2], массовые характеристики динамической модели, определяющие кинетическую энергию машины, зависят не только от масс подвижных звеньев, но и от размеров. Они являются функцией обобщенной координаты, поэтому в выражениях (1.3) для машин вместо массы m и момента инерции J будут использоваться приведенная масса m_{Π} и приведенный момент инерции J_{Π} , которые не могут быть вынесены за знак

интеграла. Другими словами, вне зависимости от структуры машины-автомата в основу оценки их производительности могут быть положены известные теоремы теоретической механики, но применительно к их динамической модели, обладающей приведенной массой (приведенным моментом инерции), к которой приложены приведенные силы (моменты) движущие и сопротивления.

1.3. Системы управления автоматическим циклом

Для выполнения машинного технологического процесса требуется согласование работы всех механизмов, входящих в технологический комплекс, включая исполнительные, контролируемые, управляющие. Такое согласование во времени (синхронизация) перемещений исполнительных органов (ИО) обеспечивается системой управления автоматическим циклом (СУ).

"Жесткий" цикл обеспечивает постоянные по величине и последовательности перемещения ИО. По истечении времени цикла они повторяются. Нежесткий цикл предусматривает изменение последовательности перемещений ИО с различными скоростями в зависимости от условий обработки. В качестве устройств, ограничивающих перемещение, часто используются конечные выключатели, упоры. Так, например, в токарном станке упоры, расставленные по ходу движения, могут служить аналогом продольного и поперечного перемещений резца. Если для формообразования детали используется кулачок с профилем, соответствующим запрограммированной обработке, то аналогом перемещения ИО является профиль кулачка. Аналоговые системы управления не обеспечивают быстрой переналадки оборудования для обработки деталей других типоразмеров. Необходимость сокращения времени на переналадку привела к созданию числового программного управления (ЧПУ). Таким образом, системы управления можно подразделить на нечисловые (аналоговые) и числовые (дискретные). К нечисловым относятся: кулачковые (копирные), путевые, временные, цикловые. К числовым (дискретным) системам управления (ЧПУ) относятся системы управления с обратной связью, без обратной связи, позиционные, контурные и универсальные. Как отмечалось ранее, СУ обеспечивают автоматизацию отработки программ. Программы же работы технологического оборудования и средств автоматизации содержат: размерную информацию о величине ходов (о величине относительного перемещения, например, инструмента и детали) и команды, определяющие последовательность этих ходов во времени. Первую часть информации называют размерной (геометрической), вторую — командами. Таким образом, каждый цикл характеризуется величиной ходов и их последовательностью. Разделение СУ на нечисловые и числовые основано на способах задания размерной информации.

При управлении движением от кулачка (рис.1.7) величина хода определяется соотношением

$$S = (R - r)i,$$

где R, r — наибольший и наименьший радиусы окружностей кулачка;

i — передаточное отношение промежуточной передачи (для случая, приведенного на рис.1.7, $i = l_2/l_1$).

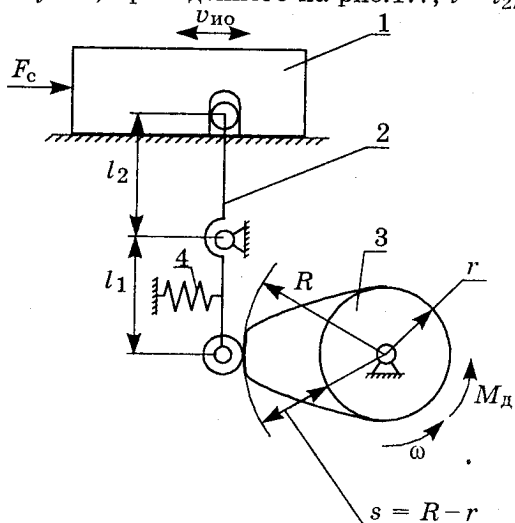


Рис.1.7. Управление перемещением от кулачка: 1 — исполнительный орган; 2 — толкатель; 3 — кулачок; 4 — пружина

Управление от кулачков обеспечивает жесткую связь между звеном, перемещающимся по его поверхности, и исполнительным органом (ИО). В этом случае ИО 1 повторяет движение толкателя 2, контактирующего с кулачком 3, за счет силового замыкания пружины 4 (рис.1.7). Обычно на одном валу располагается несколько кулачков. Использование такого кулачкового распределительного вала предусматривает перемещение нескольких исполнительных органов непосредственно от кулачков, то есть системы управления совмещены с механизмами передачи

движения к исполнительным органам. Каждый исполнительный орган 1 повторяет движение своего толкателя 2 без отставания во времени, при этом наличие жестких связей между исполнительным органом и кулачком приводит к значительному нагружению на его рабочую поверхность. Эти нагрузки способствуют ее неравномерному износу, что в конечном счете приводит к появлениям погрешностей перемещения рабочего органа, например, резца, относительно обрабатываемой детали. Кинематическая особенность управления движением от кулачков заключается в том, что при постоянной скорости вращения кулачка (задающей подаче) скорость перемещения рабочего органа (следящая подача) определяется в соответствии с выбранным законом изменения текущего радиуса рабочего профиля, изменяющегося от r до R (см. рис.1.7). Это приводит к тому, что влияние износа рабочей поверхности кулачка на законы движения рабочего органа (отклонение его от

заданного) для различных кулачков будет различным. А с учетом того, что угловая скорость распределительного вала (скорость вращения кулачка) в машинах непостоянна, влияние износа требует в каждом отдельном случае количественной оценки.

В путевых системах управления (рис.1.8) величину хода рабочего органа ограничивают конечными выключателями, установленными на определенном расстоянии a друг от друга на рабочем органе (ИО), взаимодействующими с конечными выключателями, установленными на расстоянии b друг от друга на станке. Установка всех конечных выключателей производится от одной измерительной базы (начала координат). Тогда, если a_1, a_2 — координаты размещения КВ на рабочем органе, b_1, b_2 — координаты размещения КВ на станке, то величина хода определяется соотношением

$$S = b - a = b_1 + b_2 - a_1 + a_2.$$

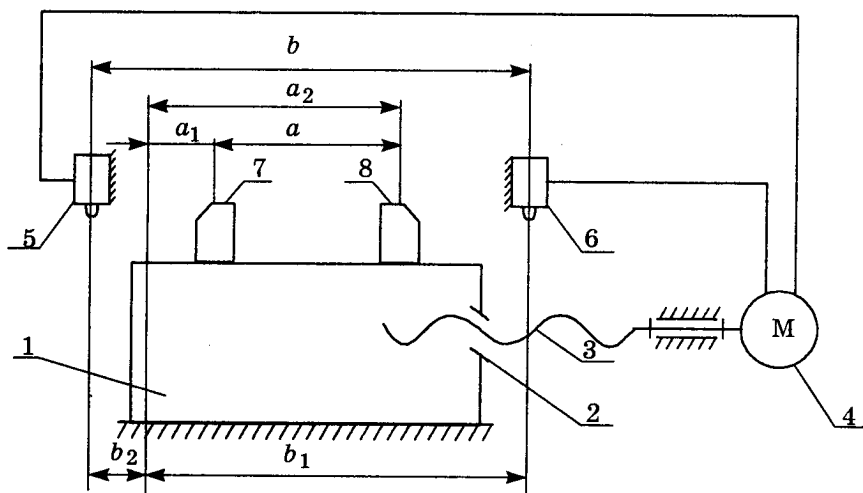


Рис.1.8. Управление движением рабочего органа с помощью конечных выключателей: 1 — исполнительный орган; 2 — гайка; 3 — винт; 4 — двигатель; 5, 6 — конечные выключатели, установленные на станке; 7, 8 — конечные выключатели, установленные на ИО

Во временных системах рабочим органом управляют с помощью командоаппарата (рис.1.9), представляющего собой барабан с установленными на его цилиндрической поверхности кулачками в поперечном и продольном направлениях. Каждым ходом цикла управляют два переключателя: КВН дает команду на начало хода, КВК — на конец хода. В этом случае программируется не путь, а время между началом и концом хода. Длительность цикла соответствует одному обороту командоаппарата.

Если его один оборот (поворот на 360°) происходит за время T , то поворот на угол $\alpha^0 = \alpha_2^0 - \alpha_1^0$ происходит за некоторое время t . Тогда

$$t = \alpha^0 T / 360^\circ.$$

С другой стороны, за это время t происходит перемещение рабочего органа с некоторой скоростью $v_{\text{ср}}$ на требуемую величину s , то есть $t = s/v_{\text{ср}}$, тогда угол α установки КВН и КВК на командоаппарате определится соотношением

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{360^\circ s}{v_{\text{ср}} T}.$$

Как видно из рис.1.9, при отсчете угла α установки кулачков важно соблюдать правило отсчета углов α_1 и α_2 : от одного начала вращения оси x в сторону, противоположную часовой стрелке.

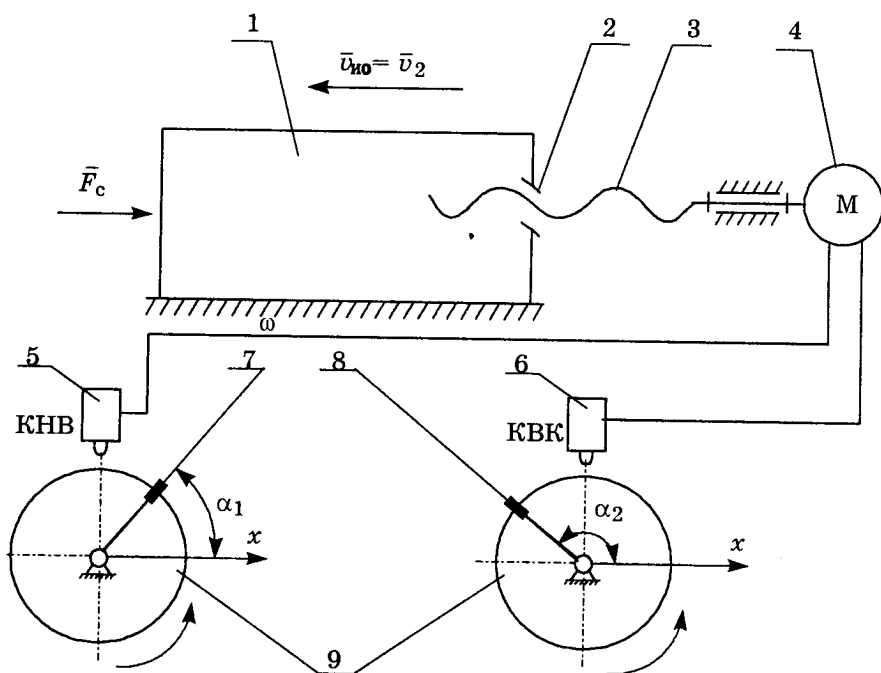


Рис.1.9. Управление перемещением с помощью командоаппарата: 1 — исполнительный орган; 2 — гайка; 3 — винт; 4 — двигатель; 5, 6 — конечные выключатели начала (КВН) и конца (КВК) хода рабочего органа; 7, 8 — кулачки (упоры) на командоаппарате; 9 — барабан с кулачками (командоаппарат)

При управлении по времени обычно цикл определяется одним оборотом барабана так, что время его одного оборота при отсутствии совмещения (перекрытия) ходов рабочих органов определится как

$$T = \sum_{i=1}^N t_i,$$

где t_i — время перемещения одного рабочего органа;

N — количество рабочих органов, которыми осуществляется управление.

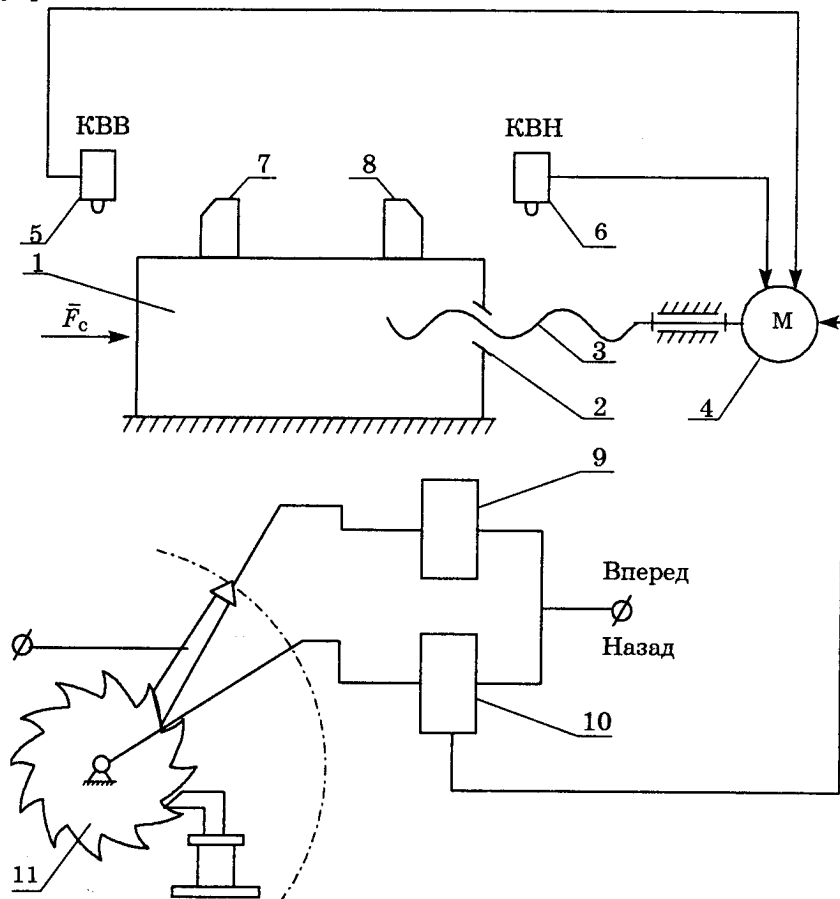


Рис.1.10. Управление и перемещение с помощью конечных выключателей и шагового искателя: 1 — рабочий орган; 2 — гайка; 3 — винт; 4 — двигатель; 5, 6 — конечные выключатели КВВ (вперед) и КВН (назад); 7, 8 — упоры; 9, 10 — реле "вперед" и "назад"; 11 — шаговый искатель

Цикловая система управления (рис.1.10) объединяет признаки путевой и временной систем. Величину хода задают конечными выключателями, а команды — командоаппаратом. Привод такого командоаппарата дискретного действия осуществляется шаговым искателем. В исходном положении он коммутирует реле "вперед". При этом ИО перемещается, например, влево, пока не сработает конечный выключатель КВВ (вперед). По сигналу от него командоаппарат сработает на один шаг, тогда реле "вперед" обесточивается и включается реле "назад", а ИО перемещается вправо, пока не сработает конечный выключатель КВН (назад). По сигналу от КВН командоаппарат срабатывает, включая следующий ход цикла.

В рассмотренных системах управления размерная часть цикла (величина ходов) задается непрерывной величиной, в отличие от систем с кулачками каждый рабочий орган в них снабжен отдельным приводом (двигателем и передаточными механизмами) и исполнительным механизмом, на выходном звене которого и установлен тот или иной рабочий орган. В отличие от машин, не включенных в общий автоматизированный технологический комплекс, рассматриваемое технологическое оборудование и средства автоматизации имеют заранее запрограммированные режимы эксплуатации. Быстродействие их определено производительностью процессов, для автоматизации которых они предназначены. В связи с этим встают две проблемы, связанные или с оценкой их динамической нагруженности при имеющихся компоновках (заданном двигателе, передаточных и исполнительных механизмах), или с поиском наилучшего их сочетания с целью обеспечения заданного быстродействия с наименьшими динамическими нагрузками, энергозатратами или наилучшей реализацией программного управления. В том и другом случае исходными данными являются геометрические (размерные) параметры, массовые и кинематические характеристики используемых механизмов, а также механические характеристики используемых электро-, гидро- или пневмодвигателей. При создании автоматизированных технологических комплексов, кроме проблем расчета на прочность, надежность, долговечность традиционных машин, основной (первоначальной) проблемой является сведение технологической задачи к кинематической. При этом задачи синтеза кинематической схемы машины и построения ее циклограммы тесно взаимосвязаны и решаются параллельно. В любом случае такой анализ или синтез включает выбор и обоснование закона движения рабочего органа в холостом (нерабочем) режиме. Это выбор включает обоснование законов изменения скорости в переходных режимах (разгоне, торможении). В связи с тем, что такой "старт-стоповый" режим не предусматривает явно выраженного установившегося движения, характерного для других машин,

традиционные методы теории механизмов и машин по снижению неравномерности вращения главного приводного вала не могут быть положены в основу их совершенствования. Основной причиной этого является то, что увеличение масс частей машины, вращающихся с постоянной скоростью, обеспечивает снижение коэффициента неравномерности в установившемся движении, в переходных же режимах это приводит к существенному увеличению динамических нагрузок. При уменьшении же времени отработки координаты (увеличении быстродействия, то есть производительности) это приводит к ударам, дополнительным динамическим погрешностям, износу в подвижных соединениях и быстрой потере точности.

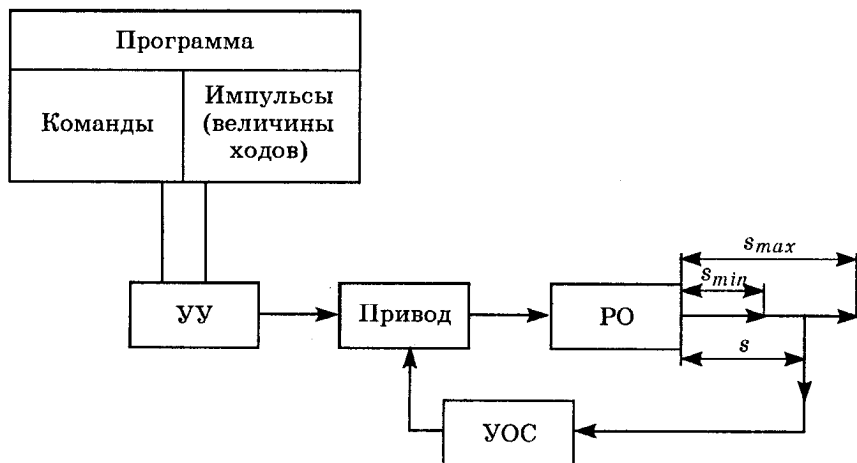


Рис.1.11. Блок-схема ЧПУ одного исполнительного органа

В связи с этим требуются многовариантные численные исследования на уровне проектирования схемы машины, предусматривающие изменение как технологического процесса, так и схемы машины по заданным условиям их скоростной работы в общей последовательности, с различными законами изменения кинематических характеристик. Такая количественная оценка закона движения рабочего органа, в связи с геометрическими, кинематическими, массовыми характеристиками механизмов станка, энергозатратами на выполнение конкретной операции технологического процесса и механической характеристикой приводного двигателя, имеет особое значение для технологического оборудования с ЧПУ. Особенность такой СУ связана с тем, что информация записывается на программноносителе (перфоленте, магнитной ленте и т.п.) и после считывания поступает на устройство управления (УУ) (рис.1.11). УУ обеспечивает посылку

требуемой частоты импульсов и их количества. Количество импульсов обеспечивает требуемую величину перемещения РО, частота — требуемую скорость. Привод включает регулируемый двигатель с механизмом преобразования вращательного движения в поступательное и усилитель крутящего момента. Наличие обратной связи в системе ЧПУ предусматривает устройство обратной связи (УОС), сравнивающее действительное перемещение с рабочим органом (РО) и, в случае отклонения его от заданных пределов s_{\min}^{\max} , посылающее сигнал для его исправления (увеличения или уменьшения).

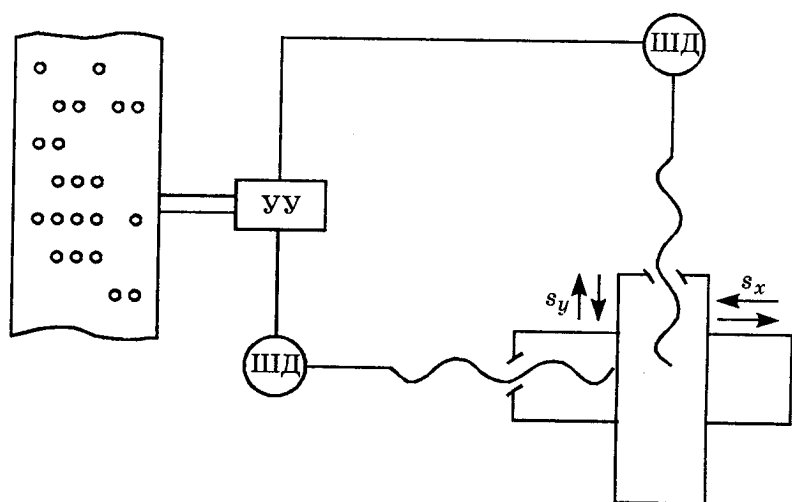


Рис.1.12. Схема контурной системы ЧПУ с шаговыми двигателями

В позиционных СУ по каждой оси координат программируется только величина перемещения, при этом траектория перемещения может быть произвольной. В контурных СУ (рис.1.12) по каждой оси координат программируются величина хода и закон перемещения. Это обеспечивает при сложении перемещений по отдельным координатам (s_x , s_y) перемещение РО по любой траектории.

Универсальные СУ объединяют контурную и позиционную системы.

Шаговый двигатель обеспечивает определенный угол α поворота ротора в соответствии с электрическими импульсами, поступающими на его вход. Зная α на входе, линейное перемещение определяют с учетом используемого механизма. Если в качестве такого ИМ применяется винт-гайка с шагом H , то

линейное перемещение РО, соответствующее одному шагу, определяется как

$$\Delta s = \frac{\alpha H}{360^\circ}.$$

Таким образом, количество импульсов, необходимое, например, для обработки поверхности кулачка (см. рис.1.7), определяется соотношением

$$N = \frac{R - r}{\Delta s} = \frac{(R - r) \cdot 360^\circ}{\alpha H}.$$

1.4. Взаимосвязь динамических характеристик машин с производительностью и погрешностью позиционирования

При разработке систем управления, например, по пути требуется точный расчет перемещений и времени отработки этих перемещений (координат). Как указано ранее, эти параметры являются интегральными функциями и зависят от соотношения сил движущих и сопротивления, а также от массовых, геометрических (размерных) и кинематических характеристик механизмов, входящих в состав машин. Силы технологического сопротивления определяются конкретной операцией технологического процесса, их будем относить к силам полезного сопротивления. Так, например, при переносе (перемещении) детали в пространстве к полезным силам относятся сила веса перемещаемой детали и ее сила инерции. Последняя определяется видом траектории и законом движения вдоль нее. Движущие силы определяются механическими характеристиками конкретных используемых электро-, гидро-, пневмодвигателей. В любом случае РО перемещается с выбранной скоростью до момента подачи сигнала остановки, после чего движение продолжается еще некоторое время. От момента подачи сигнала до выполнения команды проходит некоторый промежуток времени Δt . Если v_{po} — скорость РО, то отклонение его положения от заданного (номинального) составит

$$\Delta s_1 = v_{po} \Delta t. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) отражает погрешность позиционирования, обусловленную не только колебанием (отклонением от номинального значения) скорости v_{po} , но и изменением величины Δt от случайных факторов.

Выбирая за обобщенную координату угол φ поворота главного приводного вала или угол поворота ротора приводного двигателя, представим скорость v_{po} в виде

$$v_{po} = \frac{ds_{po}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega s'_{po}. \quad (1.5)$$

Таким образом, скорость рабочего органа зависит как от обобщенной скорости ω , так и от кинематической передаточной функции

$$s_{po} = \frac{ds_{po}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_{po}}{\omega},$$

определяемой отношением скорости v_{po} выходного звена исполнительного механизма к скорости ω его входного звена. Тогда ускорение РО ползуна получим путем дифференцирования функции (1.5):

$$a_{po} = \frac{dv_{po}}{dt} = \varepsilon s'_{po} + \omega^2 s''_{po}. \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.5), (1.6) ω и ε — обобщенные скорость и ускорение, s'_{po} и s''_{po} — аналоги скорости и ускорения рабочего органа. Уравнение (1.6) указывает на то, что ускорение рабочего органа складывается из двух ускорений, одно из которых определяется неравномерностью вращения главного приводного вала машины (наличием обобщенного ускорения ε), а другое — изменением аналога скорости выходного звена исполнительного механизма от обобщенной координаты. При этом влияние последнего ускорения резко возрастает с возрастанием скорости ω вращения приводного вала.

Взаимосвязь массовых и кинематических характеристик механизмов машины с погрешностью РО может быть выявлена при рассмотрении динамической модели машины с учетом динамических характеристик M_{Π}^c , M_{Π}^d , J_{Π} и $dJ_{\Pi}/d\varphi$ [2]. Такая задача динамического анализа предусматривает следующую последовательность действий:

— определение закона изменения обобщенной скорости из уравнения движения звена приведения, например, в форме кинетической энергии:

$$\omega_i = \sqrt{J_{\Pi}^i \left(\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^d d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi + \frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{2} \right)} \quad (1.7)$$

с учетом того, что на этапе торможения $M_{\Pi}^d = 0$;

— определение закона изменения скорости рабочего органа по формуле (1.5);

— определение абсолютной динамической погрешности по положению по формуле (1.4), которая примет вид:

$$\Delta s_1 = \omega s'_{po} \Delta t. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) представляет собой произведение трех функций: обобщенной скорости $\omega = \omega(\varphi)$, аналога скорости $s'_{po} = s'_{po}(\varphi)$ выходного звена исполнительного механизма (его кинематической передаточной функции) и Δt — некоторой вероятностной функции также от обобщенной координаты. Соотношение (1.8) удобно для оценки значения обобщенной координаты, соответствующей наибольшей абсолютной динамической погрешности Δs_1 , то есть того значения угла φ_t , начиная с которого не следует осуществлять торможение. С учетом выражения (1.7) уравнение (1.8) позволяет также определить влияние длины кинематической цепи привода и масс подвижных звеньев, коробки скоростей и промежуточных передач на погрешность позиционирования. Введение в уравнение (1.8) кинематической передаточной функции s'_{po} исполнительного механизма как параметра, зависящего только от размеров его звеньев и обобщенной координаты, позволяет расширить задачу об оценке погрешности позиционирования, которая может быть уменьшена, например, за счет оптимизации размеров звеньев или поиска схемы исполнительного механизма, удовлетворяющего требованиям наименьшего значения абсолютной динамической погрешности.

В рассматриваемом примере все параметры движения системы определяются на основе "жесткой" модели без учета податливости звеньев и их подвижных соединений. При выполнении команды на остановку или уменьшение скорости происходит торможение, сопровождаемое колебаниями масс. Поэтому для решения задачи о погрешности позиционирования с учетом податливости необходимо также определить закон изменения сил. Это необходимо также и для проведения прочностных расчетов, расчетов на износ подвижных соединений и т.п. Задача о силах требует определения ускорений. Тогда последовательность решения включает следующие действия:

— определение закона изменения обобщенного ускорения из уравнения движения звена приведения в дифференциальной форме [2]:

$$\varepsilon = \frac{M_{II}^d - M_{II}^c - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{II}}{d\varphi}}{J_{II}}$$

Функция $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ может быть определена также из зависимости (1.7) с учетом соотношения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\omega} = \omega\omega';$$

— определение a_{po} по формуле (1.6);

— определение закона изменения силы F_{po}^H инерции рабочего

органа $\bar{F}_{po}^H = -m_{po}\bar{a}_{po}$, где m_{po} — масса выходного звена исполнительного механизма с установленным на нем рабочим органом.

Следует отметить, что определение закона изменения того или иного параметра предусматривает его изменение как в функции обобщенной координаты, так и во времени. Поэтому все характеристики режимов движения машины (силовые, кинематические и энергетические) следует определять в функции обобщенной координаты.

Если, например, машина затормаживается до остановки с постоянным отрицательным ускорением (замедлением), то на основании теоремы об изменении кинетической энергии звена приведения имеем

$$\frac{J_{\Pi}\omega_H^2}{2} = M_{\Pi}^c\varphi_T.$$

Здесь ω_H — начальная угловая скорость приводного вала (звена приведения) перед торможением. Тогда угловое перемещение φ_T приводного вала за время t_T торможения определяется как

$$\varphi_T = \frac{J_{\Pi}\omega_H^2}{2M_{\Pi}^c}. \quad (1.9)$$

С другой стороны, для заданных условий торможения

$$\varphi_T = \omega_H t - \frac{\varepsilon t_T^2}{2} = \omega_H t - \frac{\omega_H}{t_T} \cdot \frac{t_T^2}{2} = \frac{\omega_H t_T}{2}. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.9), (1.10) дают возможность выразить время торможения следующей зависимостью, с учетом соотношений (1.9):

$$t_T = \frac{2\varphi_T}{\omega_H} = \frac{J_{\Pi}\omega_H}{M_{\Pi}^c}. \quad (1.11)$$

Следует еще раз отметить, что приведенные рассуждения справедливы для равнозамедленного движения, которое можно реализовать при постоянном моменте сопротивления $M_{\Pi}^c = \text{const}$ и при $I_{\Pi} = \text{const}$, когда кинетическая энергия звена приведения изменяется только за счет изменения скорости.

Перемещение РО за время t_T можно представить в виде

$$s_T = s_1\varphi_T, \quad (1.12)$$

где s_1 — перемещение РО за поворот звена приведения на угол $\varphi_T = 1$ рад.

При оценке погрешности позиционирования следует учитывать то, что путь торможения s_T отклоняется на величину Δs , а угловое перемещение приводного вала — на угол $\Delta\varphi$. Вследствие ряда случайных факторов, таких как нагрев деталей, изменение (перераспределение) давления в зонах контакта подвижных соединений, их износ и перекосы, путь торможения отклоняется на величину Δs_T . Поэтому связь между изменением времени Δt , входящим в уравнение (1.4), и Δs_T чаще всего не просматривается. Таким образом, абсолютная погрешность положения РО при остановке определяется суммой двух величин

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2. \quad (1.13)$$

Введя понятия относительной погрешности позиционирования, получим

$$\xi_s = \frac{\Delta s}{s_T} = \frac{\Delta s_1}{s_T} + \frac{\Delta s_2}{s_T} = \xi_{s_1} + \xi_{s_2}.$$

Величина относительной погрешности позиционирования может быть определена, исходя из конкретных условий эксплуатации технологического оборудования или качества изделия. Тогда

$$\Delta s_2 = \xi_{s_2} s_T. \quad (1.14)$$

Разделив на время t_T левую и правую части уравнения (1.12), получим следующее соотношение между скоростью рабочего органа и скоростью вращения приводного вала:

$$v_{po} = s_1 \omega_n. \quad (1.15)$$

Тогда выражение (1.14), с учетом (1.9), (1.12) и (1.15), после некоторых преобразований примет вид

$$\Delta s_2 = \xi_{s_2} \frac{J_{po} v_{po}^2}{2s_1 M_n^c}. \quad (1.16)$$

Наибольшая допустимая скорость рабочего органа перед торможением при заданной абсолютной погрешности Δs позиционирования определяется из уравнения (1.13), которое, с учетом (1.4) и (1.16), примет вид

$$\Delta s = v_{po} \Delta t + \xi_{s_2} \frac{J_{po} v_{po}^2}{2s_1 M_n^c}. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) дает возможность определить допустимую скорость v_{po} , обеспечивающую заданное значение Δs . Если скорость v_{po}^T рабочего органа, определяемая из технологических соображений, больше величины, полученной из формулы (1.17), то для остановки машины с заданной погрешностью

позиционирования Δs ее следует уменьшить перед началом торможения, чтобы выполнялось соотношение $v_{po} \leq v_{po}^T$.

В этом случае время t_{po} хода определяется суммой времени движения рабочего органа при изменении скорости от v_{po}^T до v_{po}^1 и времени торможения до остановки. На рис.1.13 представлен график изменения скорости рабочего органа v_{po} от его пути s_{po} .

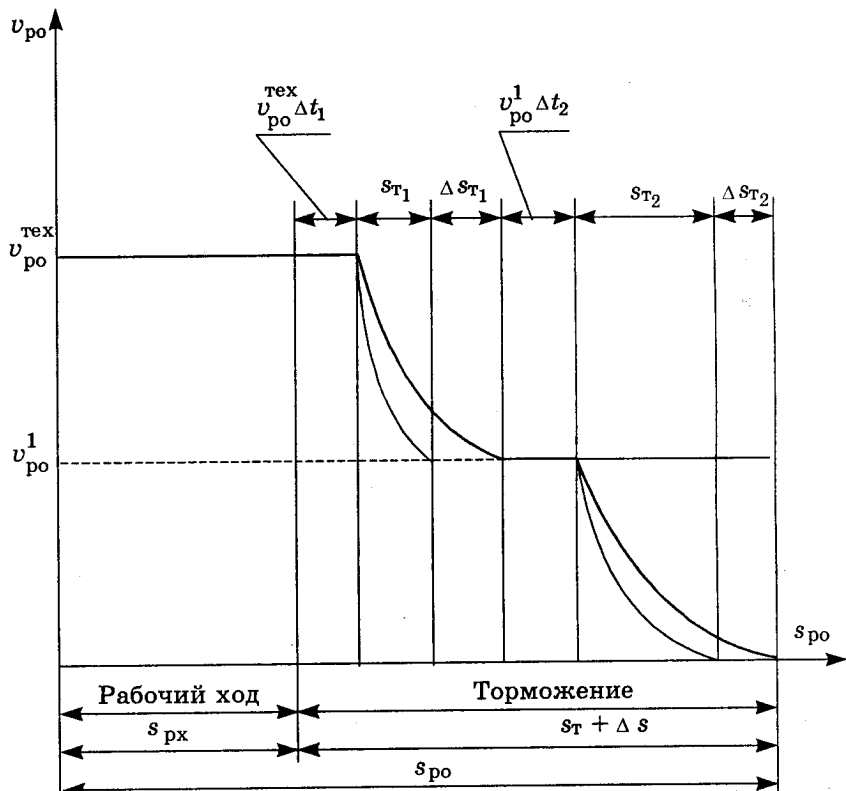


Рис.1.13. Зависимость изменения скорости рабочего органа от его пути (перемещения) в процессе торможения

Согласно графику,

$$s_{po} = s_{px} + s_T + \Delta s,$$

где $s_{px} = \int_0^{t_H} v_{po}^{tex} dt_M$ — величина рабочего хода, определяемая временем выполнения технологической операции t_M (машинным временем) и технологической скоростью v_{po}^{tex} ;

$s_T = s_{T_1} + s_{T_2}$ — путь торможения, определяемый величиной s_{T_1} торможения РО при снижении его скорости от v_{po}^{tex} до v_{po}^1 и величиной s_{T_2} , характеризующей изменение скорости v_{po}^1 до нуля;

$\Delta s = s\Delta_{T_1} + \Delta s_{T_2}$ — погрешность позиционирования, определяемая алгебраической суммой погрешностей в результате двух торможений.

На графике Δt_1 — это время от начала команды (появления сигнала) на торможение до включения тормозного устройства РО. Поэтому до начала первого торможения РО прошел путь

$$s = s_{px} + v_{po}^{tex} \Delta t_1.$$

Путь s_{T_1} первого торможения определяется соотношением

$$s_{T_1} = \int_{t_n}^{t_1} (v_{po}^T - v_{po}^1) dt,$$

где t_1 — время первого торможения. Тогда после окончания времени первого торможения путь, пройденный РО, будет $s_{T_1} + s_{T_2}$.

На графике Δt_2 — время от начала команды на второе торможение до включения тормозного устройства. Путь второго торможения определяется соотношением

$$s_{T_2} = \int_{t_1}^{t_2} v_{po}^1 dt.$$

Общее перемещение РО определяется соотношением (рис.1.13)

$$s = s_{px} + v_{po}^{tex} \Delta t_1 + s_{T_1} + \Delta s_{T_1} + v_{po}^1 \Delta t_2 + s_{T_2} + \Delta s_{T_2}. \quad (1.18)$$

Суммарное время выражает зависимость

$$T = t_m + \Delta t_1 + t_1 + \Delta t_2 + t_2. \quad (1.19)$$

О малости того или иного слагаемого уравнения (1.19) судят по выражению (1.18) из условия существенности его влияния на общую абсолютную погрешность позиционирования.

С учетом ранее принятых допущений и соотношений (1.9), (1.12), (1.15), путь первого торможения машины определяется выражением

$$s_{T_1} \approx \frac{J_{II} \left[(v_{po}^T)^2 - (v_{po}^1)^2 \right]}{2M_{II}^c s_1}. \quad (1.20)$$

Время первого торможения, по аналогии с зависимостью (1.11) и с учетом выражения (1.15), можно также определить из соотношения

$$t_{\tau_1} \approx \frac{J_{\Pi} (v_{\text{po}}^T - v_{\text{po}}^1)}{M_{\Pi}^c s_1}. \quad (1.21)$$

Путь и время второго торможения определяется по формулам

$$s_{\tau_2} \approx \frac{J_{\Pi} (v_{\text{po}}^1)^2}{2M_{\Pi}^c s_1}, \quad (1.22)$$

$$t_{\tau_2} \approx \frac{J_{\Pi} v_{\text{po}}^1}{M_{\Pi}^c s_1}. \quad (1.23)$$

Выражения (1.20) ... (1.23) справедливы и для машины с поступательно движущимися входными и выходными звеньями. В этом случае следует принять $s_1 = 1$, вместо M_{Π}^c ставить F_{Π}^c — приведенную силу, а вместо J_{Π} — m_{Π} — приведенную массу машины.

Колебания времени Δt_1 и Δt_2 срабатывания аппаратуры (реле, золотники, магнитные пускатели и т.п.), входящей в цепь преобразования сигнала в команду, выбираются из соответствующих каталогов. Таким образом, проблемы, связанные с разработкой машинных технологических процессов, требуют совместного проектирования кинематической схемы машины, оценки ее динамических свойств и приведения технологической задачи к кинематической.

Другими словами, синтез машины (разработка ее схемы с учетом геометрических и массовых характеристик) проводится параллельно с построением циклограмм технологического процесса.

1.5. Программы согласованности движений исполнительных механизмов машин-автоматов

Машинные технологические процессы характеризуются периодичностью. Движения заготовок, инструментов, а также энергетические и информационные потоки в таких процессах повторяются во времени. Такие периоды времени, по истечении которых повторяются некоторые параметры технологического процесса, называют циклами. Различают, например, рабочий, технологический и кинематический циклы.

Рабочим циклом называют время, в течение которого выполняется некоторая совокупность операций, после окончания которого их последовательность повторяется.

Технологическим циклом — время, в течение которого изделие (заготовка) подвергается сборке (обработке) до окончания операций на конкретной машине или АЛ.

Кинематическим циклом называют время, по истечении которого все исполнительные и вспомогательные механизмы МА и АЛ займут свое первоначальное (исходное) положение. Кинематические циклы отдельных механизмов могут быть равны кинематическому циклу МА или кратны ему.

Рабочие процессы машиностроения представляют собой совокупность многих операций, каждая из которых выполняется соответствующими механизмами. На выходных звеньях этих механизмов устанавливаются инструменты, схваты, упоры, обрабатываемые детали и т.п. Все рабочие органы должны иметь определенные законы движения, и последовательность их включения (выключения) должна быть увязана между собой (синхронизирована) во времени и по положению в пространстве (по относительному расположению). Такая синхронизация устанавливается за один наибольший цикл. Внутри цикла время рабочего или холостого хода выходного звена основного и исполнительного механизма, остановки или длительности хода звеньев вспомогательных механизмов может быть различным. Внутри цикла могут быть также различными число периодов и последовательность расположений выходных звеньев отдельных ИМ.

Начало отсчета кинематического цикла машины удобно производить от начального положения одного из исполнительных механизмов, выполняющего, например, основную наиболее энергоемкую операцию.

Кинематический цикл соответствует одному или нескольким оборотам приводного вала основного исполнительного механизма. Например, у четырехтактного двигателя в течение одного рабочего цикла происходит два кинематических (два оборота приводного вала).

Пример. Построить диаграмму согласованности (синхронизации) во времени движений исполнительных механизмов автоматизированного технологического комплекса, предназначенного для последовательной обработки (сборки) деталей на нескольких станках, объединенных в АЛ. Автоматизированный технологический комплекс (рис.1.14) включает станки 1 (в дальнейшем будем называть их ИМ-1) с инструментальными шпинделями 2 и шаговый транспортер АЛ (в дальнейшем будем называть ИМ-2), включающий транспортер-ленту 3 с обрабатываемыми деталями 4, перемещающуюся в направляющих станины 5 вместе со штангой 6. Штанга 6 жестко скреплена с выходным звеном основного исполнительного механизма. С помощью ползуна 7 этого механизма преобразуется возвратно-вращательное движение кулисы 8 в

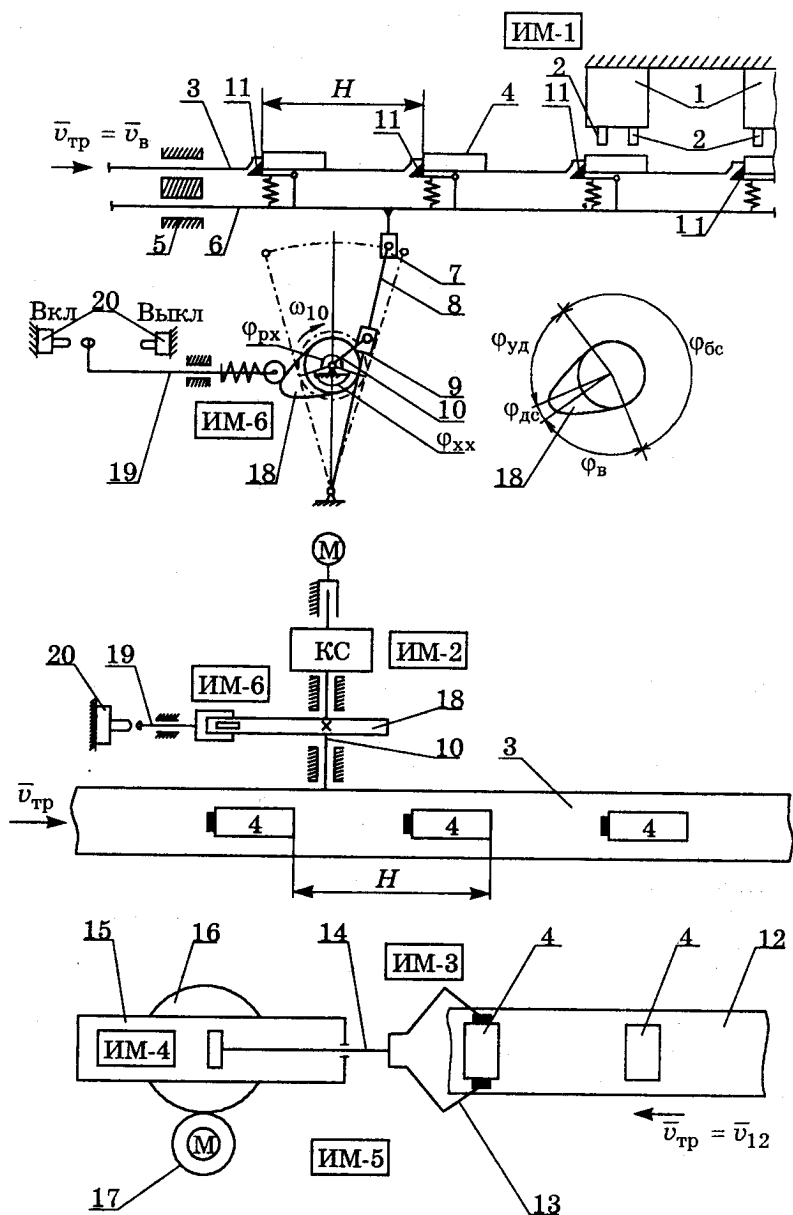


Рис.1.14. Структурная схема автоматизированного технологического комплекса

возвратно-поступательное движение выходного звена 6, а с помощью ползуна 9 — вращательное движение звена 10 (главного приводного вала) в возвратно-вращательное движение кулисы 8. Таким образом, угловая скорость ω_{10} звена 10 преобразуется в линейную скорость $v_{тр}$ звена

6. За время поворота звена 10 на угол $2\pi = \varphi_{рх} + \varphi_{хх}$ осуществляется как рабочий ход — перемещение деталей 4 слева направо, так и холостой ход — справа налево. При холостом ходе лента 3 транспортера вместе с деталями 4 остается неподвижной, а штанга 6 перемещается. При рабочем ходе транспортера лента 3 захватывается подпружиненными упорами 11, установленными на штанге 6 с возможностью вращения. Поэтому при обратном ходе упоры 11 проскальзывают относительно неподвижной ленты 3.

Расстояние между рабочими позициями деталей 4 на ленте 3 выбирается равным шагу H транспортера, определяемому расстоянием между крайними положениями ползуна 7.

Подача заготовок (деталей 4) также автоматизирована. Для этого используется манипулятор автоматического действия, обеспечивающий перестановку деталей с транспортного устройства 12 на транспортную ленту 3. Манипулятор имеет три исполнительных механизма привода: ИМ-3 — зажимы (разжимы) схвата, ИМ-4 — поступательного движения схвата, ИМ-5 — вращательного движения схвата. Схват 13 манипулятора установлен на штоке 14 приводного гидроцилиндра 15, который неподвижно закреплен на шестерне 16, входящей в зацепление с приводной шестерней 17.

Исполнительным механизмом ИМ-6 обеспечивается согласованность включения станков 1 (приводов их инструментальных шпинделей 2). Механизмы загрузки деталей на транспортную ленту 12, а также механизмы закрепления (фиксации) деталей в процессе обработки на рис.14 не показаны. Механизм ИМ-6 включает в себя кулачок 18, установленный неподвижно на главном приводном валу 10, и толкатель 19, взаимодействующий с конечными выключателями 20. Нажатие (включение) конечного выключателя 20 происходит в крайнем правом положении кулисы 7, то есть когда транспортные ленты останавливаются. С этого положения начинается обработка (сборка) деталей 4, так что сигналом на включение станков служит конечное правое положение штанги 6 (кулисы 8). За время обработки детали должно произойти перемещение кулисы 8 в крайнее левое положение, за это же время деталь 4 должна быть перенесена с транспортного устройства 12 на ленту 3, то есть должен быть отработан кинематический цикл механизмов манипулятора. Если принять за исходное (начальное) положение схвата в разжатом состоянии, то есть в положении, показанном на рис.1.14, то согласованность движений механизмов ИМ-3, ИМ-4, ИМ-5 может быть представлена тактограммой (см. рис.1.15). Под тактом понимается минимальный промежуток времени, в течение которого не происходит изменения состояния ни одного ИМ. На рис.1.15 представлена диаграмма, поясняющая сведение технологической задачи к кинематической, то есть к согласованности движений ИМ во времени и пути (углового и линейного). Линейное перемещение характеризуется шагом H , угловое — поворотом вала 10 (рис.1.14). За время T происходит перемещение вала на 2π

и звена 6 — на величину $2H$. Скорость звена 6 неравномерная, скорость приводного вала 10 также не будет равномерной. Для упрощения задачи на первом этапе сведения технологических параметров к кинематическим вводят понятие средней скорости $v_{cp} = v_6$, это постоянная скорость, двигаясь с которой, выходное звено ИМ-2 (штанга 6) прошло бы путь $2H$ за одно и то же время. При этом угловая скорость приводного вала определяется выражением

$$\omega_{10} = 2\pi/T,$$

где T — время одного оборота вала 10, тогда

$$v_{cp} = 2H/T = 2H\omega_{10}/2\pi.$$

Углы φ_{px} и φ_{xx} находятся известными способами [2] в процессе геометрического синтеза рычажных механизмов.

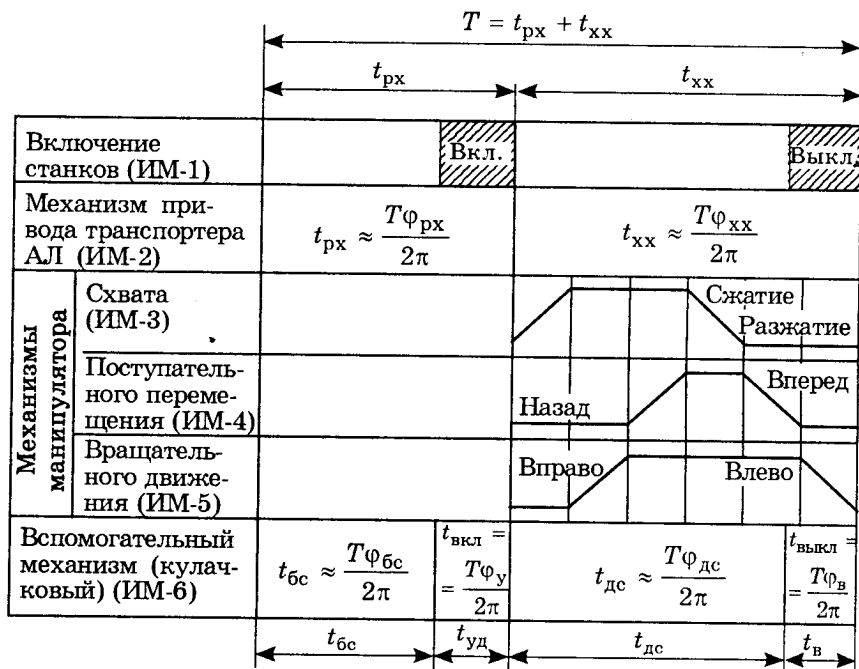


Рис.1.15. Программа согласованности движений исполнительных механизмов технологического комплекса (рис.1.14) во времени и по положению механизмов манипулятора

Из приведенной схемы видно, что включение инструментальных шпинделей 2 и выключение движений исполнительных механизмов манипулятора производится одновременно при повороте кулачка 18 на угол $\varphi_{уд}$, соответствующий удалению толкателя 19. Время же t_{xx} ИМ-2 поворота приводного вала 10 на угол φ_{xx} должно соответствовать повороту

кулачка 18 на угол $\varphi_{рх}$ и $\varphi_{хх}$. Таким образом, кулачок 18, поворачиваясь на угол $2\pi = \varphi_{уд} + \varphi_{дс} + \varphi_{в} + \varphi_{бс}$, обеспечивает выполнение операций по включению (выключению) соответствующих механизмов за время $T = t_{рх} + t_{хх} = 2\pi/\omega_{10}$ одного оборота вала 10, что соответствует времени

$$T = t_{бс} + t_{уд} + t_{дс} + t_{возв}$$

одного оборота кулачка 18.

Из рассмотренного примера видно, что заданная цикловой диаграммой последовательность работы ИМ должна быть точно согласована. Эта согласованность достигается в данном случае (см. рис. 1.14) размещением кулачка 18 на главном приводном валу и закреплением в данном угловом положении, которое исключало бы его смещение. Начальные положения входных звеньев механизмов ИМ-2 и ИМ-6 определяются фазовыми углами, методика определения которых изложена подробно в [4], [5]. Примеры построения циклограмм для разнообразных схем машин-автоматов можно найти в [3], [5], [6], а также в литературе по машинам-автоматам, используемым в конкретных технологических процессах.

1.6. Особенности поиска оптимальной структуры автоматизированного технологического комплекса

Проектирование машин-автоматов, входящих в технологический комплекс, представляет взаимосвязанный процесс синтеза структурных схем исполнительных механизмов, проработки конструкции отдельных узлов, а также анализ нескольких компоновочных вариантов с учетом технологического маршрута.

На каждом этапе встречается многовариантность решения задач. Например, токарная обработка ступенчатого вала возможна при различных маршрутах и числах позиций. При этом суммарное время обработки детали существенно меняется. Даже этот простой пример требует поиска и обоснования наиболее рационального варианта. Весьма большое число вариантов возникает на этапе схемной проработки автоматизированного технологического комплекса при выборе приводов ИМ, типов двигателей, систем транспортирования, загрузки (выгрузки), управления и т.п.

В процессе проектирования МА и АЛ новой конструкции требуется из множества возможных вариантов выбрать один, лучше других соответствующий постоянным условиям. Для этого необходимо иметь критерии их количественной оценки. Ввиду сложности поставленной задачи с точки зрения оптимизации по энергозатратам, материалоемкости технологического оборудования, точностным характеристикам, производительности

(быстродействию), долговечности и экономической целесообразности выявить функциональную их взаимосвязь часто не удается. В этом случае используют последовательное поэтапное исследование, в основе которого лежит известный принцип, заключающийся в том, что любой участок оптимального пути является оптимальным. Такое динамическое программирование предусматривает на каждом этапе свою оптимизацию в одном шаге с учетом возможных последовательностей при многошаговом исследовании. Таким образом, единое решение сложной задачи сводится к многократным решениям ряда более простых задач. В таких задачах особо важное значение имеет рассмотрение конфликтных ситуаций, выражающихся в том, что изменение одного параметра ведет одновременно как к ухудшению, так и улучшению конечных результатов. Типичным примером такой конфликтной ситуации является увеличение масс машины, вращающихся с равномерной скоростью. С одной стороны, это обеспечивает повышение равномерности движения главного приводного вала, но с другой — приводит к росту динамических моментов при пуске (остановке).

При оптимизации проектирования автоматизированных технологических комплексов важнейшим элементом является выделение функциональных групп механизмов и устройств, объединяющих исполнительные или транспортные функции и включающих в себя привод и систему управления. Такие функциональные группы могут быть использованы в различных условиях эксплуатации. К ним могут быть отнесены инструментальные блоки, устройства загрузки (выгрузки), ориентации и т.п. Все они имеют свои технико-экономические характеристики, зависящие от входящих в них механизмов. Разные варианты функциональных групп отличаются друг от друга геометрическими, массовыми, энергетическими и другими параметрами. МА и АЛ комплектуются такими функциональными группами на основе многовариантного количественного анализа их критериев работоспособности. Внутри каждой такой функциональной группы также требуется многовариантная их оценка на основе просмотра множества структур и выбора из них наилучшего сочетания входящих в них элементов.

При поиске оптимального варианта автоматической линии из металлорежущих станков, например, предусматривается сначала поиск вариантов, удовлетворяющих требованиям качества продукции, затем из этой совокупности вариантов выделяют варианты, удовлетворяющие требованиям качества отдельных изделий и производительности [7]. В данном случае качество и производительность являются примером конфликтной ситуации. Поэтому из этой группы конкурирующих вариантов выбирают тот, который отвечает наилучшим условиям

технико-экономических показателей, на основании которых судят об экономической эффективности автоматизированного ТК.

Для нахождения оптимальной структуры АЛ и ее конструктивной реализации необходимо выделение начальных условий, входных, выходных переменных и их ограничений. Начальными условиями могут быть режимы обработки, варианты технологического процесса, условия эксплуатации.

Входными переменными — технологическая (теоретическая) производительность и зависимое от нее число МА, необходимых для выполнения производственной программы, а также варианты приводов, СУ, устройств загрузки (выгрузки) и др.

Выходными параметрами (частными критериями качества) могут быть стоимость, коэффициенты готовности отдельных функциональных групп удовлетворять требованиям, например, точности позиционирования.

Ограничения на область поиска значений управляющих переменных являются, например, предельная скорость вращения главного приводного вала, габариты и др. Отбор вариантов производят путем ограничения ожидаемой производительности допустимым диапазоном $\Delta Q = Q_{\min} - Q_{\max}$. В этом случае на последнем этапе число вариантов, ограничено, поэтому выбор оптимальной структуры можно производить путем непосредственного расчета величин критериев экономической эффективности. Можно полагать, что выбранный вариант сочетает наилучшие структурные, компоновочные, технологические и эксплуатационные, включая массовые, геометрические, кинематические и энергетические, характеристики. Как видно из рассмотренных примеров, последние показатели, являющиеся предметом изучения курса теории механизмов и машин, не могут быть оптимальными для отдельных механизмов вне машины и конкретного технологического процесса. Однако моделирование взаимосвязанных энергетических, массовых, геометрических и кинематических характеристик лежит в основе синтеза всех отдельных механизмов, устройств, узлов, а также автоматизированного технологического комплекса в целом.

Таким образом, совершенствование методов оптимального синтеза МА и АЛ, обусловленное необходимостью уменьшения сроков их проектирования, базируется на методах математического моделирования процессов механической обработки и сборки в условиях автоматизированного производства. В основе такого моделирования лежат методы теории механизмов и машин.

Рассмотренные примеры отражают поиск оптимальной структуры АЛ на основе анализа установочных перемещений. Так, например, при рассмотрении АЛ, представленной на рис.1.14, нами не принимался во внимание закон движения инструментальных шпинделей 2 в процессе обработки деталей 4. Характер формообразования детали 4 не учитывался. Учитывалось

только время, в течение которого эта операция должна проводиться. Это время определяется временем поворота вала 10 на угол 2π .

1.7. Особенности управления формообразованием поверхностей деталей машин и приборов

Формообразование рабочих поверхностей деталей машин и приборов в условиях автоматизированного производства предусматривает автоматическое управление режимами обработки. При этом основное требование к технологическому оборудованию заключается в обеспечении параметров качества при заданной производительности. В связи с этим возникают проблемы поиска методов программного обеспечения и технической реализации законов движения инструмента относительно обрабатываемой поверхности во времени и пространстве. Закон движения во времени должен удовлетворять требованиям производительности, а в пространстве — требованиям качества обработанной поверхности (макрогеометрии, микрогеометрии и состояния поверхностного слоя). В этом случае методы математического моделирования рассматриваемых процессов и реализация их численного исследования с помощью ЭВМ имеют первостепенное значение. В основе такого математического моделирования также лежат взаимосвязи массовых, геометрических и кинематических характеристик передаточных и исполнительных механизмов с механическими (энергетическими) характеристиками приводных двигателей и конкретных операций технологического процесса (лезвийной, абразивной обработки, доводки и т.п.).

Здесь в основе оптимизации лежат требования процесса формообразования, главным из которых является закон изменения скорости движения инструмента относительно обрабатываемой поверхности вдоль заданной траектории, при этом должна быть задана или выбрана в каждом конкретном случае оптимальная траектория. При таком подходе удается технологическую задачу свести к кинематической и положить в основу численных исследований с помощью ЭВМ известные методы теории механизмов и машин [2].

Эти требования применимы и к процессам моделирования сборочных операций. Здесь также требуется знание (задание или поиск) траектории и закона движения вдоль этой траектории. Параметры траектории (длина, кривизна и кручение), а также средняя скорость движения вдоль нее обеспечивают требуемую производительность и выполнение закона изменения ориентации детали в пространстве. Закон же изменения скорости обеспечивает погрешность позиционирования и динамическую нагруженность средств автоматизации (манипулятора, автооператора и т.п.).

Таким образом, моделирование взаимосвязи геометрических, массовых, кинематических и энергетических характеристик машины (технологического оборудования) позволяет в каждом конкретном случае разработать алгоритм численного исследования (имитации) машинного технологического процесса с использованием ЭВМ. В этом случае многовариантная задача поиска наилучшего сочетания исполнительных механизмов, приводов или режимов может быть вынесена отдельно и решаться параллельно с технологическими и конструкторскими проработками. Разработка таких математических моделей, алгоритмов и программ численного исследования является предметом научных исследований, которые становятся достоянием технологии машиностроения. Процесс накопления такого программного обеспечения, увязка отдельных программ в общий цикл имеют особо важное значение для развития технологии машиностроения на современном этапе. Следует отметить, что организация диалогового режима, разработка методики анализа и использования промежуточной информации, выводимой на экран дисплея, требуют соответствующей технической эрудиции, математических знаний и навыков в решении задач, связанных с комплексной механизацией и автоматизацией машиностроения.

Комплексность в данном случае предусматривает сочетание механизации вспомогательных операций (последовательность их отработки) и автоматического управления режимами в процессе обработки. В основе такого управления лежат те же параметры: путь, скорость, ускорение, сила, мощность, а также и такие, как температура, деформации, износ и др. Сложность управляемых машин и требования к качеству обработанных поверхностей деталей машин и приборов часто не позволяют решить задачу об автоматическом управлении только механическими или энергетическими параметрами. Предусмотреть изменения этих параметров не представляется возможным из-за их случайных отклонений, таких как изменение поверхностной твердости заготовок, изменение температурных деформаций узлов, перераспределение давлений в результате износа трущихся поверхностей. Поэтому наряду с жесткими программами управления движением инструмента и заготовки используется коррекция (исправление) заложенного программного обеспечения. Такие самонастраивающиеся (адаптивные) СУ требуют передачи и использования дополнительной информации. Они должны "запомнить", обобщить текущую поступающую информацию о состоянии объекта и выработать программу изменения тех или иных характеристик в соответствии, например, с заданной точностью обработанной поверхности.

СУ с числовыми программами могут автоматически определять, когда и в какой последовательности применять инструмент, какие выбрать подачи (законы перемещения), чтобы обеспечить

требуемое качество обработанной поверхности при заданной производительности.

Такие СУ предусматривают наличие программносителя, считывающего устройства, механизма ввода программы, преобразования и усиливающего устройства, обеспечивающего движение выходного звена исполнительного механизма по заданной программе.

Методика использования ЧПУ для автоматического управления режимами применительно к конкретному виду обработки и технологическому оборудованию имеет свои особенности и осваивается при изучении специальных дисциплин. Однако принципы моделирования взаимосвязи динамических характеристик машины с ее выходными параметрами (точностью, быстройдействием, динамической нагруженностью, долговечностью) являются общими для различного класса машин и видов автоматизированных технологических процессов. В основу разработки таких математических моделей положены законы классической механики и традиционные разделы математики. Однако для широкого класса машин-автоматов в качестве математической основы используются законы алгебры логики. Из сказанного видно как влияние прикладных проблем способствовало развитию и аппарата математической логики. Первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач были контактные схемы. Впоследствии появились устройства, основанные на электронных или магнитных цепях, струйной технике (пневмонике и т.п.).

1.8. Моделирование согласованности движений исполнительных механизмов с использованием операций алгебры логики

Как видно из рис.1.14, при создании автоматизированных технологических комплексов не представляется возможным использовать отдельно рассмотренные в разделе 1.3 СУ: кулачковые, временные или ЧПУ. Однако с точки зрения методики важно рассмотреть их отдельно. Это связано с различными методами математического моделирования, положенными в их основу. Рассмотрим некоторые особенности синтеза путевых СУ, которые лежат в основе автоматизации установочных перемещений ИМ. Как указывалось ранее, величина хода РО, установленных на выходных звеньях ИМ, ограничивается двумя конечными выключателями (КВ) при ходе вперед и назад.

С КВ взаимодействуют упоры, установленные на ИО. Как видно из рис.1.16, перемещение деталей 12 с транспортера 9 на транспортер 10 требует определенного сочетания движений ИМ, обеспечивающего обход препятствий (неподвижного объекта 11), в отличие от схемы, представленной на рис.1.14. Последовательность отработки заданных линейных и угловых перемещений ИМ

должна учитывать исходное расположение схвата 8. После отработки всех перемещений схват займет исходное положение. Суммарное время отработки всех ИМ определит время цикла. На рис.1.14 исходное положение схвата 13 аналогичного манипулятора соответствует разжатому состоянию.

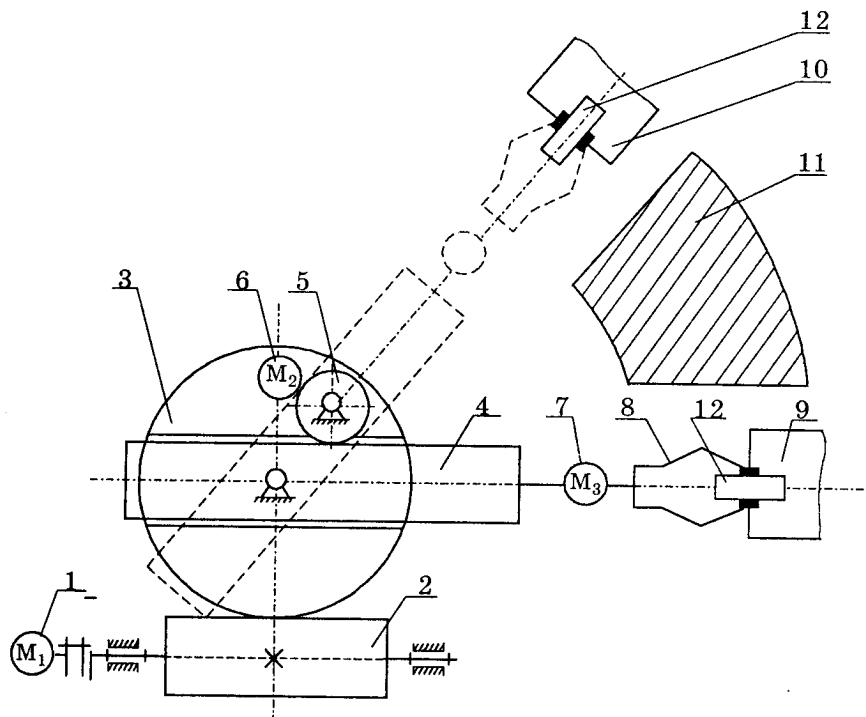


Рис.1.16. Схема простейшего манипулятора с тремя исполнительными механизмами: 1 — приводной двигатель первого исполнительного механизма (ИМ-1); 2 — червяк; 3 — червячное колесо; 4 — рейка, перемещающаяся в направляющих червячного колеса; 5 — приводная шестерня; 6 — двигатель второго исполнительного механизма (ИМ-2); 7 — двигатель привода схвата 8 третьего исполнительного механизма (ИМ-3); 8, 9, 10 — транспортеры; 11 — неподвижный объект, расположенный между транспортерами; 12 — транспортируемая деталь

Пусть исходное положение схвата 8 в рассматриваемом примере соответствует соприкосновению его пальцев с деталью 12, расположенной на транспортере 9, при этом схват 8 сжат. Это состояние соответствует положению двигателя M_3 "включено вперед" (ИМ-3 вперед). В этом положении схвата двигатель M_2 обеспечит выдвижение руки (рейки 4) также "вперед" (ИМ-2 вперед).

Двигатель М1 обеспечил поворот руки (рейки 4) вправо (ИМ-1 вправо). Последовательность переустановки детали 12 на транспортер 10 в этом случае следующая:

ИМ-2 – назад — рука 4 с деталью 12 переместилась в крайнее левое положение;

ИМ-1 – влево — рука 4 повернулась в крайнее левое положение;

ИМ-2 – вперед — рука 4 переместилась в крайнее правое положение;

ИМ-3 – назад — схват разжался, деталь соприкоснулась с транспортером 10.

Для возвращения схвата в исходное положение (для захвата следующей детали на транспортере 9) необходимо следующее сочетание движений:

ИМ-2 – назад. — рука 4 переместилась в крайнее левое положение;

ИМ-1 – вправо — рука 4 повернулась в крайнее правое положение;

ИМ-2 – вперед — схват 8 расположился под деталью, но пальцы его не соприкоснулись с деталью;

ИМ-3 – вперед — пальцы схвата соприкоснулись с деталью.

На этом цикл закончен, и далее все движения повторяются.

В данном случае необходимо 8 тактов. Последовательность работы ИМ можно отобразить следующим шифром: 21232123, обозначающим, что ИМ-2 срабатывает в тактах 1, 3, 5, 7; ИМ-3 срабатывает в тактах 4 и 8, и ИМ-1 — в тактах 2 и 6. При отсутствии объекта 11 (см. рис.1.16) последовательность работы ИМ может быть следующей: 132123; это означает, что можно реализовать поворот руки 4 в первом такте без перемещения ее назад. На рис.1.17 представлено графическое изображение последней тактограммы.

Такты М-мы	1	2	3	4	5	6
ИМ-1						
ИМ-2						
ИМ-3						

Рис.1.17. Тактограмма для трех ИМ с шестью тактами в цикле (см. рис.1.16 при отсутствии объекта 11)

Из рис.1.17 видно следующее: М1 движется, если "НЕ" движется М2 "И" М3; М1 "НЕ" движется, если движется М2 "ИЛИ" М3, то есть взаимосвязь и последовательность движений

исполнительных механизмов может быть описана операциями "НЕ", "И", "ИЛИ". Для обозначения двух возможных состояний используются цифры 0, 1.

Как известно, любую булеву функцию [8] можно реализовать схемой, состоящей из последовательно и параллельно соединенных ключей. Если отвлечься от конструктивных особенностей ключей, то ключ можно интерпретировать как отрезок проводника с контактом, который может быть разомкнут или замкнут. Разомкнутые его состояния отождествляются с нулем, замкнутые — с единицей. Допускается, что процессы переключения происходят мгновенно. В некоторых случаях (см. разд.1.4) время перехода из одного состояния в другое следует учитывать, т.к. в реальных устройствах оно довольно значительное.

Ключом в широком смысле является всякое устройство, способное принимать одно из двух возможных состояний. В электрических цепях роль ключей играют многочисленные устройства, предназначенные для коммутации (замыкания и размыкания): выключатели, электромагнитные реле, телеграфные ключи и другие контакты, обладающие двусторонней проводимостью. При использовании ключей электронных, например, управляемых диодов, проводимость их в прямом направлении настолько превышает проводимость в обратном, что практически можно считать контакты односторонними, то есть пропускающими сигналы только в прямом направлении. Схемы с односторонними контактами называют вентильными схемами. Перспективным ключевым элементом является пленочный криотрон, действие которого основано на явлении сверхпроводимости при низких температурах.

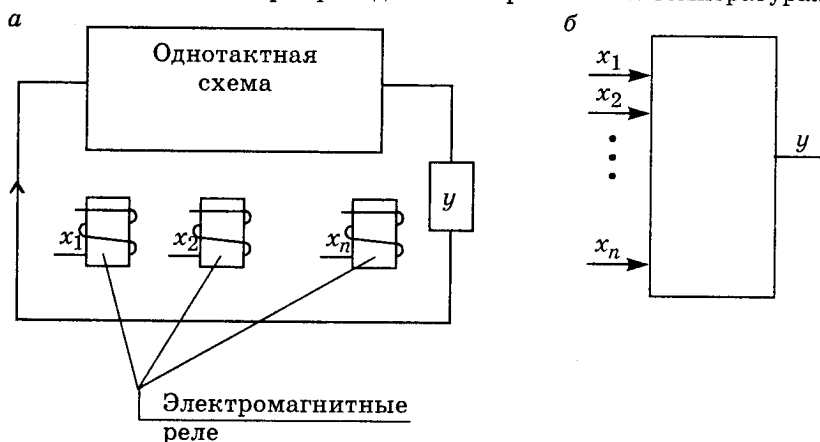


Рис.1.18. Контактная схема с n -входами (а) и ее условное представление (б)

Схемы, образованные соединением контактов, которые переключаются одновременно (за один такт), а время переключения не учитывается, называются одноктактными. Каждая из них, будучи включена в цепь с источником, в результате совместного действия контактов замыкает или размыкает эту цепь, и следовательно, сама является некоторым контактом по отношению к цепи с источником (рис.1.18). Такие контактные схемы называют двухполюсными.

Соответствие между двухполюсной контактной схемой и булевой функцией $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выражается тем, что значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n аргументов определяются наличием (то есть 1) или отсутствием (то есть 0) тока в обмотке реле, а значения функции y — состоянием двухполюсной цепи, которое так же, как и аргументы, характеризуется нулем при разомкнутой и единицей — при замкнутой цепи.

Независимо от характера ключей двухполюсная контактная схема представляется как схема с n -входами x_1, x_2, \dots, x_n и одним выходом y . Состояние входов определяют воздействия на контакты схемы. При этом вход x_i управляет всеми контактами, обозначенными как x_i или \bar{x}_i .

Таким образом, задача анализа контактной схемы состоит в построении соответствующей булевой функции. Задача синтеза — в построении схемы по заданной булевой функции. При этом исходная функция может быть задана как логической формулой, так и таблицей.

В обоих случаях прежде всего необходимо выразить функции через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Каждая операция конъюнкции соответствует последовательному соединению контактов, а операция дизъюнкции — параллельному их соединению. В результате синтез состоит в построении соответствующей последовательно-параллельной контактной схемы. Центральной проблемой является построение наиболее простой, рациональной схемы. Эта операция может быть сведена к минимизации булевых функций, то есть к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат наименьшее количество переменных. Это дает возможность упростить и схему.

Таким образом, синтез СУ по пути предусматривает наличие блока управления (БУ), построенного на элементах алгебры логики, который формировал бы выходные сигналы 0, 1 для включения того или иного ИМ. Такие же выходные сигналы: 1 на включение (на работу того или иного ИМ), 0 — на отсутствие такого включения — формируются с помощью входных сигналов 0, 1, отображающих состояние ИМ в каждом такте. При этом следует помнить о том, что как аргументом, так и функцией могут быть цифры 0, 1 или их сочетание. Это означает, что в качестве технической реализации могут быть использованы объекты, занимающие два устойчивых состояния.

1.9. Техническая реализация операций алгебры логики

В автоматических устройствах как входные, так и выходные сигналы управления принимают только два значения: "ДА" при $x = 1$ и "НЕ" при $x = 0$.

Связь двоичных сигналов между собой, их преобразования могут быть описаны логическими высказываниями. Система управления, производящая обработку двоичных сигналов по логическим высказываниям, называется *логической системой управления*. Анализ и синтез логических СУ производится на основе правил и законов алгебры логики.

Логические переменные подразделяют на входные (аргументы) x_i и выходные (функции) f_i , где i — номера соответствующих логических переменных. Логические действия над двоичными переменными описываются словами "ДА", "НЕ", "ИЛИ", "И" и называются логическими операциями. Устройства для выполнения логических операций называются логическими элементами и могут иметь только два устойчивых состояния — "0" или "1".

Как указывалось ранее, для технической реализации системы управления могут быть использованы любые элементы: механические, электрические реле; мембранные пневмореле, входящие в состав универсальной системы элементов промышленной пневматоматики (УСЭППА); набор элементов и модулей пневмоавтоматики (НЭМП); элементы системы модулей струйной техники (СМСТ); плунжерные (золотниковые) пневмо- и гидрораспределители.

На рис.1.19 представлены возможности технической реализации операции "ДА" (повторения).

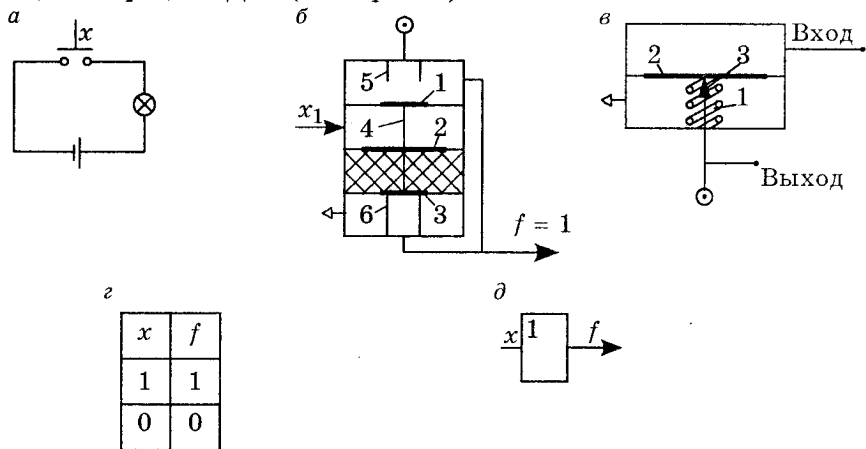


Рис.1.19. Техническая реализация операции "ДА":
 а — электроконтактная схема; б — мембранное реле УСЭППА;
 в — модуль НЭМП; г — таблица состояний операции "ДА";
 д — условное обозначение оператора "ДА"

Эта операция может быть записана в виде $f = x$, то есть если $x = 0$, то $f = 0$, и если $x = 1$, то $f = 1$. Иначе говоря, функция f повторяет аргумент x .

В электрической схеме (рис.1.19, а) она реализуется нормально разомкнутым контактом. Нажатие кнопки контакта соответствует наличию сигнала x , при этом появляется сигнал на выходе (лампочка горит).

В пневматической схеме данная операция может реализоваться мембранным реле УСЭППА (рис.1.19, б). Мембраны 1, 2, 3 соединены подвижным штоком 4, перемещение которого ограничено соплами-штуцерами 5 и 6. В каждом элементе имеются номера с постоянным давлением подпора (на рисунке — двойная штриховка). При подаче входного пневмосигнала $x = 1$ шток 4 перемещается вниз и закрывает сопло 6. В результате в выходную линию подается сжатый воздух от напорного сопла 5 и на выходе появляется сигнал, то есть $f = 1$.

Реализация операции "ДА" на модуле НЭМП представлена на рис.1.19, в. При отсутствии сигнала "Вход" давление "Питание" через нормально открытое сопло 3 элемента (пружина 1 приподнимает мембрану 2 вверх) сбрасывается в атмосферу, и на выходе сигнал равен "0". При подаче входного сигнала сопло закрывается, т.к. площадь сопла гораздо меньше площади мембраны, и на выходе появляется сигнал, равный "1".

Таблица состояния логического элемента (ЛЭ) "ДА" показана на рис.1.19, г, а его условное обозначение — на рис.1.19, д.

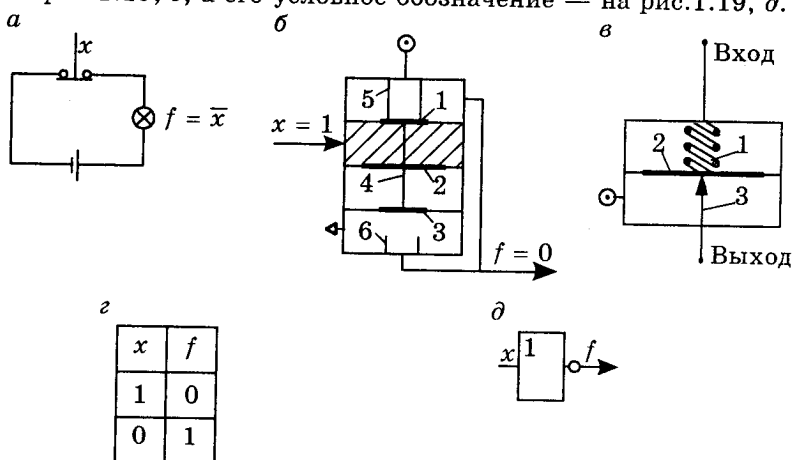


Рис.1.20. Техническая реализация операции "НЕ":

а — электроконтактная схема; б — мембранное реле УСЭППА;

в — модуль НЭМП; г — таблица состояний операции "НЕ";

д — условное обозначение оператора "НЕ"

На рис.1.20 показана реализация операции отрицания "НЕ" (инверсии). В логической форме она записывается так: $f = \bar{x}$ (читается f не x), то есть если $x = 0$, то $f = 1$, и наоборот, если $x = 1$, то $f = 0$, другими словами, функция f отрицает аргумент x .

В электрической схеме она реализуется нормально замкнутым контактом. Нажатие кнопки контакта соответствует наличию сигнала x , при этом лампочка "НЕ" горит. Отсутствие сигнала обеспечивает наличие сигнала f на выходе.

В пневматической схеме на элементах УСЭППА (рис.1.20) данная операция реализуется следующим образом. При подаче входного сигнала $x = 1$ шток 4 поднимается вверх, и мембрана 1 закрывает напорное сопло 5. В результате этого прекращается подача воздуха в выходную линию, и $f = 0$.

Элемент НЭМП, реализующий логическую функцию "НЕ" (рис.1.20, в), работает следующим образом: при отсутствии сигнала ("Вход" = 0) давление "Питание" преодолевает усилие пружины 1 (сопло нормально закрыто) и открывает сопло 3 элемента на выходе появляется сигнал "Выход" = 1. При подаче входного сигнала ($Vx = 1$) сопло элемента закрывается мембраной 2, и выходной сигнал равен "0".

Таблица состояния логического элемента "НЕ" представлена на рис.1.20, г, а его условное обозначение приведено на рис.1.20, д.

Реализация операции сложения "ИЛИ" (дизъюнкция) показана на рис.1.21. Она осуществима с двумя и более переменными и в логической форме может быть записана так: $f = x_1 + x_2$, то есть $f = 1$, если хотя бы один аргумент $x = 1$, и $f = 0$, если все аргументы $x = 0$.

В электрической схеме (рис.1.21, а) она реализуется нормально разомкнутыми контактами. Нажатие любой кнопки (или обеих одновременно) соответствует наличию сигналов $x_1 = 1$ или $x_2 = 1$ и приводит к загоранию лампочки ($f = 1$).

В пневматической схеме на элементах УСЭППА (рис.1.21, б, в) данная операция реализуется следующим образом. При подаче сигналов $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ (рис.1.21, б) шток опускается вниз, закрывая при этом сопло 6 мембраной 3; через напорное сопло 5 воздух подается в выходную линию ($f = 1$). При входных сигналах $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (рис.1.21, в) шток 4 поднимается вверх, мембрана 3 открывает сопло 6 и в выходной линии $f = 1$.

Модуль "ИЛИ" (рис.1.21, г) состоит из трех одномембранных элементов и работает следующим образом: в исходном состоянии при отсутствии входных сигналов "Вх1", "Вх2" и "Вх3"

"Вх.3" сопла 1 элементов Э1, Э2, Э3 открыты и сигнал "Питание", поступающий в проточную камеру Э1, сбрасывается в атмосферу, выходной сигнал равен "0". При подаче любого из входных сигналов $p_{вх} + p_{пр}$ закрывается сопло 1 соответствующего элемента и тем самым прерывается сброс питания в атмосферу. Выходной сигнал равен "1".

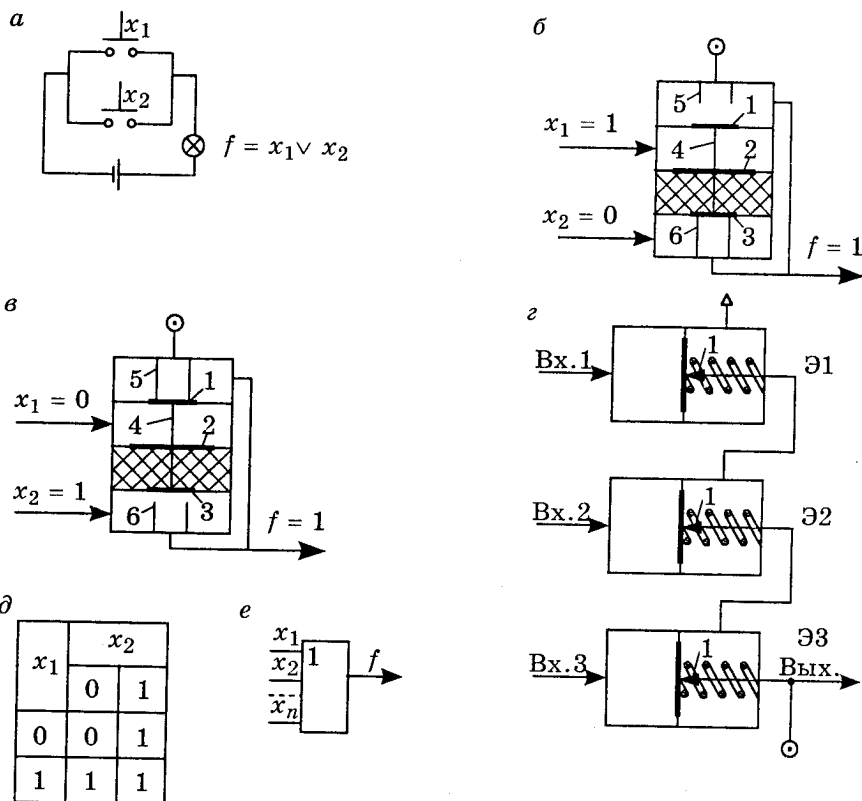


Рис.1.21. Техническая реализация операции "ИЛИ":

а — электроконтактная схема; *б* — мембранное реле УСЭППА;

в — модуль НЭМП; *г* — таблица состояний операции "ИЛИ";

д — условное обозначение операции "ИЛИ"

Таблица состояний логических элементов, реализующих операцию "ИЛИ", представлена на рис.1.21, *г*, а их условное обозначение — на рис.1.21, *д*.

Реализация операции умножения "И" (конъюнкции) приведена на рис.1.22.

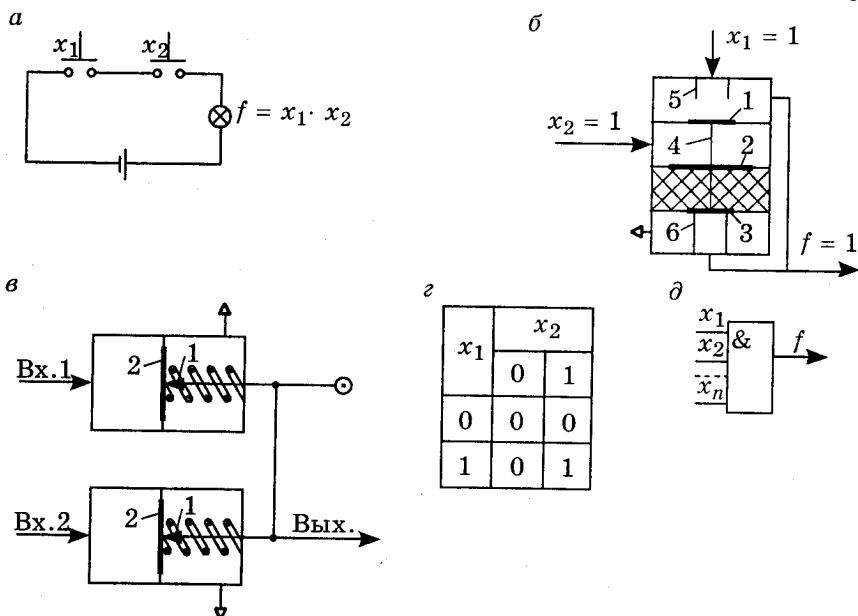


Рис.1.22. Техническая реализация операции "И":
 а — электроконтактная схема; б — мембранное реле УСЭППА;
 в — модуль НЭМП; г — таблица состояний операции "И";
 д — условное обозначение оператора "И"

Эту операцию можно записать в виде

$$f = x_1 x_2,$$

то есть $f = 1$, только когда все аргументы $x = 1$, и $f = 0$ — если хотя бы один из аргументов $x = 0$.

В электрической схеме (рис.1.22, а) она реализуется нормально разомкнутыми контактами. Нажатие обеих кнопок ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$) будет соответствовать наличию выходного сигнала (лампочка горит).

В пневматической схеме на элементах УСЭППА (рис.1.22, б) операция "И" реализуется следующим образом. При появлении сигналов $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ шток 4 опускается вниз, мембрана 3 закрывает при этом сопло 6, и в выходной линии появляется сигнал $f = 1$.

Логическая функция "И" на модулях НЭМП представлена на рис.1.22, в. При отсутствии одного из входных сигналов "Вх.1" и "Вх.2" сигнал "Питание" сбрасывается в атмосферу, то есть сопла 1 нормально открытые; выходной сигнал равен нулю. При подаче сигналов "Вх.1" и "Вх.2", больших, чем $P_{пружинны}$, мембраны 2 закрывают сопла 1 обоих элементов, и выходной сигнал равен "1".

Таблица состояний логических элементов, реализующих операцию "И", показана на рис.1.22, з, а его условное обозначение — на рис.1.22, д.

В качестве управляющих элементов исполнительных механизмов и элементов памяти широко применяются четырехлинейные двухпозиционные пневмораспределители золотникового типа с двусторонним управлением (рис.1.23). Распределительным органом служит золотник 5, расположенный в корпусе 1 с зазором равным 2 мкм. По бокам корпуса имеются проточки для управляющих сигналов f_j и \bar{f}_j . Распределитель установлен на унифицированной плите 6 и уплотняется кольцами.

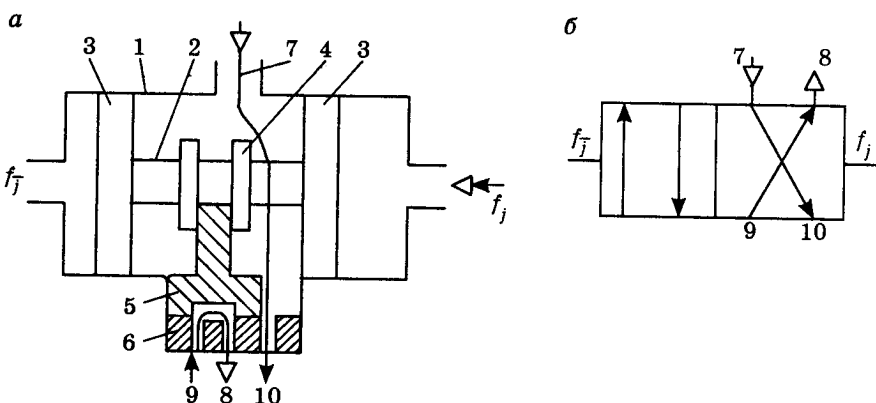


Рис.1.23. Четырехлинейный, двухпозиционный золотниковый распределитель

При подаче сигналов $f_j = 0$ и $f_j = 1$ левый поршень 3 перемещает плунжер 2 с золотником 5 вправо. Тогда выходная линия 10 соединяется с атмосферной линией 8, а в выходную линию 9 будет подаваться сжатый воздух от напорной линии 7. На рис.1.23, б нужно мысленно передвинуть левый квадрат на место правого. После прекращения подачи управляющего сигнала ($f_j = 0$) на выходе линии 9 сохраняется сигнал, равный "1". Это позволяет использовать пневмораспределитель в качестве логических элементов памяти.

Для преобразования входного механического воздействия подвижного звена машины (конечного установочного перемещения) в выходной пневматический сигнал x используют путевого (конечный) двухпозиционный трехлинейный распределитель — пневмовыключатель (рис. 1.24).

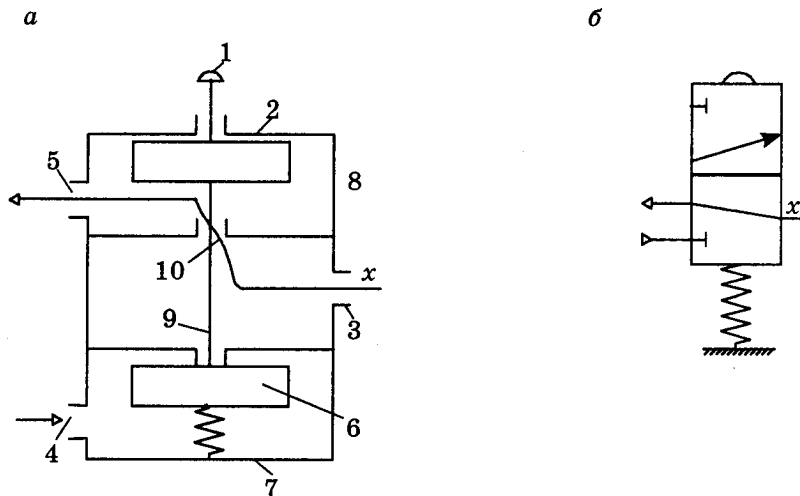


Рис.1.24. Трехлинейный, двухпозиционный золотниковый распределитель

Трехлинейным распределитель называется потому, что к корпусу 2 подведены три линии воздухопроводов: к отверстию 3 — выходная линия x , к отверстию 4 — напорная линия от источника питания сжатым воздухом, к отверстию 5 — атмосферная линия. В двухпозиционном распределителе подвижная кнопка 1 и клапан 6 могут находиться только в двух положениях: верхнем и нижнем. На рис.1.23, б показано условное обозначение пневмовыключателя с механическим входом, состоящее из двух квадратов, соответствующих двум позициям подвижной части пневмовыключателя, и трех линий воздухопроводов. Одна из них присоединена к напорной линии 4 сжатого воздуха (обозначена треугольником к пневмовыключателю), линия 5 соединена с атмосферой (обозначена треугольником от пневмовыключателя), а линия 3 является выходом пневмосигнала x . Отверстие (канал), закрытое в данной позиции, обозначено поперечной чертой. При отсутствии механического воздействия выход соединен с атмосферой ($x = 0$). При нажатии кнопки меняется соединение линий в пневмовыключателе, и на условном обозначении нужно мысленно передвинуть верхний квадрат на место нижнего, оставляя внешние линии воздухопроводов в прежнем положении. Выход соединяется с напорной линией и $x = 1$.

1.10. Синтез систем управления по пути

Синтез включает следующие этапы:

- составление тактограммы;
- оценка ее реализуемости;
- составление таблицы включения и состояний (выделение рабочих, безразличных и запрещенных состояний);
- составление формул включения;
- упрощение формул включения;
- составление структурной схемы блока управления и общей схемы системы управления;
- составление принципиальной схемы управления с использованием конкретных операторов алгебры логики (электрических, УСЭПА, НЭМП).

Рассмотрим пример синтеза путевого управления трех исполнительных механизмов машины по тактограмме, имеющей шифр 132321.

1) *Составление тактограммы.* В соответствии с заданным шифром (табл.1.2) в первом такте имеет место прямой ход ИМ-1, во втором — прямой ход ИМ-3, в третьем — прямой ход ИМ-2, в четвертом — обратный ход ИМ-3, в пятом — обратный ход ИМ-2, в шестом — обратный ход ИМ-1. Наклонные линии на тактограмме соответствуют тактам работы ИМ (слева направо: вверх — прямой ход; вниз — обратный ход), а горизонтальные — тактам выстоя.

1 3 2 3 2 1

а б в г д е

В каждом такте проставляются значения сигналов x_1, x_2, x_3 в соответствии с состоянием пневмовыключателей: $x = 1$ — выключатель нажат, $x = 0$ — выключатель не нажат.

2) *Проверка реализуемости тактограммы* предусматривает выбор веса p сигналов: $p_{x_1} = 2^0 = 1$, для $p_{x_2} = 2^1 = 2$, для $p_{x_3} = 2^2 = 4$ (табл.1.2).

Оценка реализуемости тактограммы сводится к количественному сравнению тактов, характеризующихся суммой произведений весов сигналов на их значения (0 или 1).

Сравнение весов тактов рассматриваемой тактограммы показывает совпадение их значений во 2-м и 6-м тактах ($p_2 = p_6 = 6$), что говорит о нереализуемости этой тактограммы без дополнительных элементов (элементов памяти). Это связано с тем, что во 2-м и 6-м тактах входные сигналы от конечных выключателей ($x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$) одинаковы, что должно вызвать одновременное движение двух ИМ.

Таблица 1.2

Наименование	Сигналы	Такты работы						Вес сигнала p		
		1	2	3	4	5	6			
Исполнительные механизмы	ИМ1	x_1	а						е	$2^0 = 1$
			1	0	0	0	0	0		
	ИМ2	x_2			в				д	$2^1 = 2$
			1	1	1	0	0	1		
ИМ3	x_3			б					г	$2^2 = 4$
			1	1	0	0	1	1		
Вес без памяти			7	6	2	0	4	6		
Память	z									$2^3 = 8$
			1	1	0	0	0	0		
Вес с памятью			15	14	2	0	4	6		

Таблица 1.3

Наименование	Сигналы	Логические такты									
		1а	1б	2	3а	3б	4	5	6		
Выходы от	ИМ1	x_1	1*	1	0*	0	0	0	0	0	
	ИМ2	x_2	1	1	1	1	1	0*	0	1*	
	ИМ3	x_3	1	1	1	0*	0	0	1*	1	
	ЭП	z	0	1*	1	1	0*	0	0	0	
Входы	ЭП	Вкл.	f_2	1	-	-	0	0	0	0	0
		Выкл.	f_2	0	0	0	1	-	-	-	-
	ИМ1	Вперед	f_1	0	1	-	-	-	-	-	0
		Назад	f_1	-	0	0	0	0	0	0	1
	ИМ2	Вперед	f_2	0	0	0	0	1	-	0	0
		Назад	f_2	-	-	-	-	0	0	1	-
ИМ3	Вперед	f_3	0	0	1	-	-	0	0	0	
	Назад	f_3	-	-	0	0	0	1	-	-	

* — тактирующие сигналы.

Чтобы сделать тактограмму реализуемой, вводят дополнительный сигнал z от добавочного элемента памяти ($z = 1$ при включенной памяти и $z = 0$ — при выключенной). Такты, в начале которых включается или выключается память, нужно выбирать так, чтобы веса состояний были различными. В тактограмме (табл.1.2) память включается в начале 1-го такта и выключается в начале 3-го. Вес сигнала памяти полагаем равным $2^3 = 8$, он прибавляется в тактах, где память включена ($z = 1$). В результате введения дополнительного элемента веса состояний тактов становятся различными ($p_2 = 14$, $p_6 = 6$), тактограмма реализуема при одном элементе памяти.

3) Составление таблицы включения проводится с учетом введенных логических тактов (табл.1.3). На ней представлены состояния системы управления с указанием рабочих, запрещенных и безразличных состояний. Таблица включения строится по восьми логическим тактам, т.к. два такта движения (1-й такт включения памяти и 3-й такт выключения памяти) разбиваются на два логических такта: 1а, 1б и 3а, 3б. При этом аргументами являются сигналы от конечных выключателей, включая элементы памяти (ЭП), а функциями — сигналы к движению и к выключению ЭП.

В верхней части таблицы включения повторяются входные сигналы от ИМ и ЭП, указанные ранее при составлении тактограммы (см. табл.1.2). Обратные входы \bar{x} , \bar{z} в таблице не указаны, т.к. их всегда можно определить как инверсные по отношению к соответствующим x и z . Изменение сигнала памяти должно происходить после изменения сигналов x конечных включений (такты 1а, 3а), то есть в тактах 1б, 3б.

В верхней части табл.1.3 знаком (*) отмечаются тактирующие сигналы, те, которыми данное состояние отличается от предыдущего.

Проверка: в каждом такте (столбце) должен быть только один тактирующий сигнал.

В нижней части таблицы записываются выходные сигналы f : на включение и выключение памяти, на движение рабочих органов соответствующих ИМ.

Выходной сигнал f_1 соответствует началу движения (прямой ход) ИМ-1 вперед (табл.1.3), а сигнал \bar{f}_1 — началу движения ИМ-1 назад (обратный ход).

Сигнал f_2 соответствует началу движения ИМ-2 вперед (прямой ход), а \bar{f}_2 — началу движения ИМ-2 назад (обратный ход).

Сигнал f_3 соответствует прямому ходу ИМ-3 вперед, а \bar{f}_3 — обратному ходу ИМ-3 назад.

Заполнение нижней части табл.1.3 состоит в выявлении рабочих, запрещенных и безразличных наборов двоичных аргументов.

Рабочим состоянием значений двоичных аргументов для данной функции f называется такой набор, при котором значение функции обязательно должно быть равно единице ($f = 1$). В СУ рабочее состояние есть такая комбинация входных сигналов, при которой должен появиться сигнал на данном выходе.

Запрещенным состоянием значений двоичных аргументов для данной функции f называется такой набор, при котором значение функции обязательно должно быть равно нулю ($f = 0$).

Все остальные состояния, кроме рабочих и запрещенных, называются безразличными, они не влияют на действие системы управления.

Другими словами, при рабочем состоянии необходимо иметь сигнал, а при безразличном — не имеет значения, есть этот сигнал или нет.

В рассматриваемом примере все устройства для включения и выключения памяти, а также для пуска ИМ "вперед" и "назад" не переключаются при снятии сигнала. Например, после включения (сигнал f_z) память остается включенной до тех пор, пока не поступит сигнал \bar{f}_z на выключение. При этом условии в табл.1.3 для каждой входной функции будет только одно рабочее состояние, при котором эта функция должна быть равна единице.

После простановки единиц в рабочих состояниях делаем прочерки в безразличных состояниях, следующих за рабочим, при котором может повторяться (или не повторяться) сигнал на выполнение действия, соответствующего данной функции. Все остальные состояния являются запрещенными, и для них выходные функции должны быть равны нулю.

Применительно к рассматриваемому случаю для функции f_z , выражающей сигнал на включение элемента памяти, поставим единицу в такте 1а, так как в этом такте должна включаться память. В тактах 1б, 2 делаем прочерки, в этих тактах элемент памяти уже включен и остается включенным как при повторении сигнала на включение ($f_z = 1$), так и при отсутствии его ($f_z = 0$). Во всех остальных тактах ставим нули, в этих тактах включать память нельзя (в такте 3а память включается и должна оставаться включенной в тактах 3б, 4, 5, 6).

4) Составление формул включения предусматривает получение формул, показывающих, при каких входных сигналах получается выходной сигнал к включению данного устройства. Для удобства записи и упрощения формул предварительно составляется таблица состояний (табл.1.4), значения сигналов в которую выбираем из таблицы включений (табл.1.3).

Таблица 1.4

Наименование		Состояния			Формулы включения	
		рабочие	запрещенные	исходные	упрощенные	
ЭП	Вкл.	x_1	1*	0 0 0 0	$f_z = x_1 x_2 x_3$	$f_z = x_1$
		x_2	1	1 0 0 1		
x_3		1	0 0 1 1			
Выкл.	x_1	0	1 0	$f_{\bar{z}} = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	$f_{\bar{z}} = \bar{x}_3$	
	x_2	1	1 1			
	x_3	0*	1 1			
ИМ1	Вперед	x_2	1	1	$f_1 = x_2 x_3 z$	$f_1 = z$
		x_3	1	1		
z		1*	0			
Назад	x_2	1*	1 1 1 0 0	$f_{\bar{1}} = x_2 x_3 \bar{z}$	$f_{\bar{1}} = x_2 x_3 \bar{z}$	
	x_3	1	1 0 0 0 1			
	z	0	1 1 0 0 0			
ИМ2	Вперед	x_1	0	1 1 0 0 0	$f_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{z}$	$f_2 = \bar{x}_3 \bar{z}$
		x_3	0	1 1 1 0 1		
z		0*	0 1 1 1 0			
Назад	x_1	0	0	$f_{\bar{2}} = \bar{x}_1 x_3 \bar{z}$	$f_{\bar{2}} = x_3$	
	x_3	1*	0			
	z	0	0			
ИМ3	Вперед	x_1	0*	1 1 0 0	$f_3 = \bar{x}_1 x_2 z$	$f_3 = \bar{x}_1 z$
		x_2	1	1 1 0 1		
z		1	0 1 0 0			
Назад	x_1	0	0 0	$f_{\bar{3}} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{z}$	$f_{\bar{3}} = \bar{x}_2$	
	x_2	0*	1 1			
	z	0	1 0			

Правила составления формул включения следующие:

– формулы включения составляются на основе использования операции конъюнкции;

– в формулу включения не входят сигналы от того ИМ или ЭП, для которого формула включения составляется;

– в формулу включения обязательно должен входить тактирующий сигнал;

– составленная исходная формула должна быть оценена с точки зрения ее упрощения.

Например, при составлении формул включения и выключения элемента памяти не учитывается значение сигнала z , т.к. сигнал на включение всегда подается при $z = 0$, а сигнал на выключение — при $z = 1$. Аналогично, при составлении формул включения для механизма ИМ-1 не учитываются значения сигнала x_1 , для механизма ИМ-2 — значения сигнала x_2 , для ИМ-3 — значения x_3 .

В табл.1.4 выписаны входные сигналы, которые должны учитываться при составлении каждой формулы включения, и значения этих сигналов в рабочих и запрещенных состояниях. По значениям входных сигналов в рабочих состояниях составлены формулы включения в виде логического произведения этих сигналов, причем значению "0" соответствует инверсное значение аргумента. Эти формулы названы исходными, т.к. в дальнейшем они будут упрощены.

В нашем случае сигнал для включения элемента памяти ($f_z = 1$ должен быть при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Поэтому исходная формула включения имеет вид

$$f_z = x_1 x_2 x_3.$$

Сигнал для включения ИМ-2 назад ($f_{\bar{z}} = 1$) должен быть при $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 0$. Исходная формула включения будет иметь вид

$$f_{\bar{z}} = \bar{x}_1 x_3 \bar{z}.$$

5) *Упрощение формул включения.* Формула включения, составленная по значениям всех входных сигналов в рабочем состоянии, дает достаточные условия для включения данного ИМ. Однако в некоторых случаях эти условия не являются необходимыми. Применение способов упрощения двоичных функций позволяет исключить из формулы включения те сигналы, которые не являются необходимыми. Но во всех случаях нельзя исключать тактирующие сигналы, то есть сигналы, которыми данное состояние отличается от предыдущего.

При небольшом числе переменных для упрощения формул включения можно применять способ перебора, так как рассмотрению подлежат лишь варианты, содержащие тактирующие сигналы. Кроме того, искомое упрощение находится обычно при рассмотрении только части вариантов, если начинать с простейших.

При переборе вариантов следует руководствоваться следующим правилом: упрощенная формула обладает теми же свойствами, что исходная, то есть выражаемая ею функция $f = 1$ в рабочем состоянии и $f = 0$ — в запрещенных, если набор сигналов, входящих в упрощенную формулу при рабочем состоянии, не встречается в запрещенных состояниях.

Пример. Для выключения ЭП (табл.1.4) имеются четыре варианта формул включения, содержащих тактирующий сигнал:

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= \bar{x}_3, \\ f_{\bar{z}} &= x_2 \bar{x}_3, \\ f_{\bar{z}} &= \bar{x}_1 \bar{x}_3, \\ f_{\bar{z}} &= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3. \end{aligned}$$

Простейший вариант $f_z = \bar{x}_3$ уже удовлетворяет указанному правилу, так как сигнал $x_3 = 0$ не встречается в запрещенных состояниях. Более сложные варианты поэтому не рассматриваются, и за упрощенную формулу принимается $f_z = \bar{x}_3$.

Пример. Для движения ИМ-2 "вперед" тактирующим сигналом является $z = 0$. Использовать для формулы включения только этот сигнал нельзя, так как он встречается в запрещенных состояниях. Находим далее методом перебора комбинацию: $x_1 = 0, z = 0^*$. Она встречается в запрещенном состоянии, следовательно, не удовлетворяет нашим условиям. Следующая комбинация: $x_3 = 0, z = 0^*$ в запрещенных состояниях (соответствующих столбцах) не встречается, следовательно, можно записать:

$$f_2 = \bar{x}_3 \bar{z}.$$

Аналогично выполняется упрощение всех других формул, причем можно заметить, что чем больше запрещенных состояний, тем меньше входных сигналов удастся исключить из формул. Например, формула $f_1 = x_2 x_3 \bar{z}$ не поддается упрощению, так как любые комбинации двух сигналов, содержащие тактирующий сигнал x_2 встречаются в запрещенных состояниях.

б) *Составление общей схемы управления и структурной схемы блока управления.*

Этот этап синтеза СУ по пути поясним на примере управления тремя пневматическими механизмами: ИМ-1, ИМ-2 и ИМ-3, поршни которых соединены с исполнительными органами (звеньями) и движутся в соответствии с тактограммой, показанной в табл.1.2. Каждый механизм состоит из пневмоцилиндра и четырехлинейного двухпозиционного распределителя (рис.1.25).

Для механизмов сигналы, вызывающие движение поршня, обозначены соответственно:

f_1 — ИМ-1 "вперед";

\bar{f}_1 — ИМ-1 "назад";

f_2 — ИМ-2 "вперед";

\bar{f}_2 — ИМ-2 "назад";

f_3 — ИМ-3 "вперед";

\bar{f}_3 — ИМ-3 "назад".

Эти сигналы являются выходными сигналами блока управления (БУ) (рис.1.26).

Входными сигналами для БУ служат сигналы от конечных выключателей, на которые нажимают штоки поршней в конечных положениях.

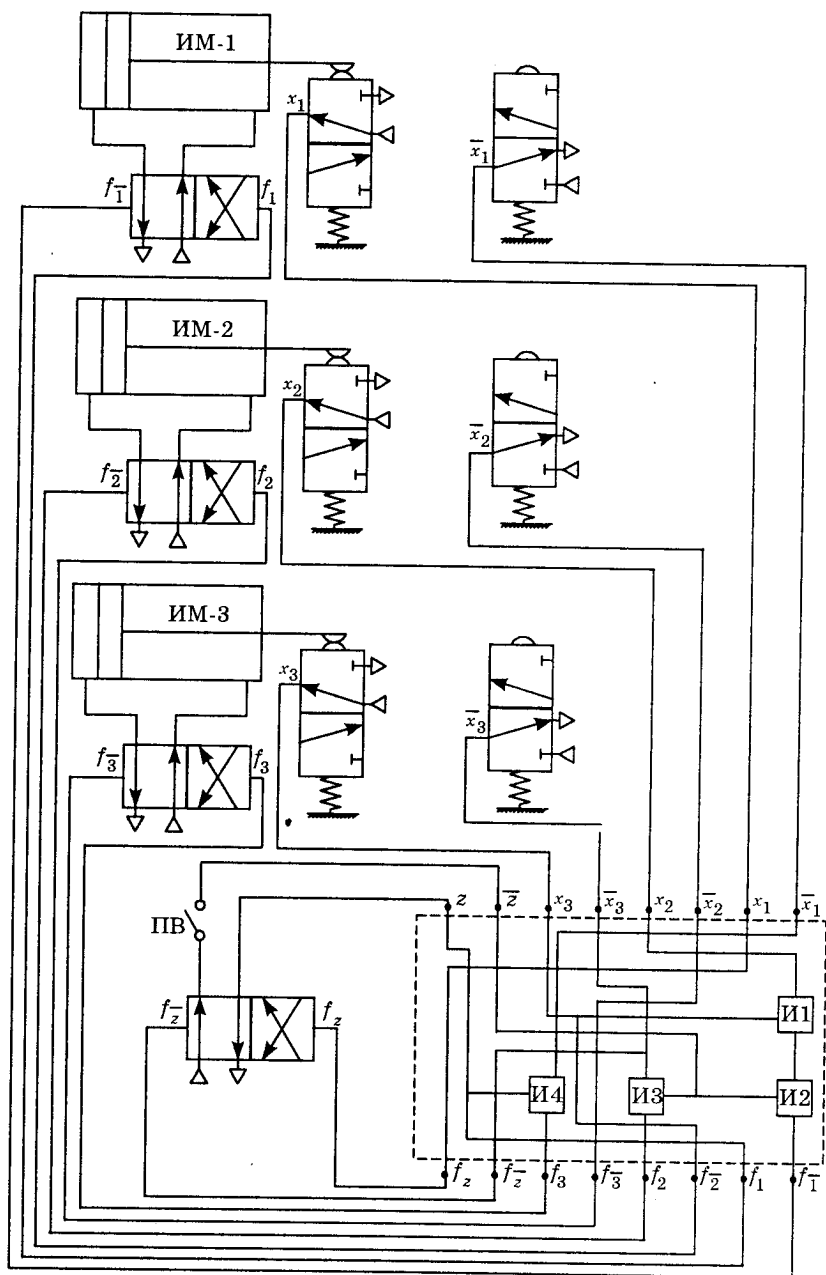


Рис.1.25. Принципиальная схема СУ по пути тремя исполнительными механизмами

Конечные выключатели в системах управления служат логическими элементами повторения (выключатель нажат — есть сигнал, не нажат — нет сигнала).

В рассматриваемой системе выключатель должен преобразовывать конечное перемещение твердого тела (колонны, поперечины, руки) в пневматический сигнал, и поэтому он выполняется как двухпозиционный трехлинейный распределитель (см. рис.1.24). В СУ с памятью, кроме входных и выходных сигналов, должны быть еще сигналы "памяти", чтобы можно было различать совпадающие наборы входных сигналов (такты 1 и 3). Для подачи этих сигналов служит элемент памяти (ЭП), выполненный в виде двухпозиционного четырехлинейного распределителя (рис.1.23). Позиция, при которой $z = 1$ и $\bar{z} = 0$, соответствует включенной памяти, позиция $z = 0$ и $\bar{z} = 1$ соответствует выключенной памяти. Сигнал на включение обозначается f_z , сигнал на выключение — $f_{\bar{z}}$.

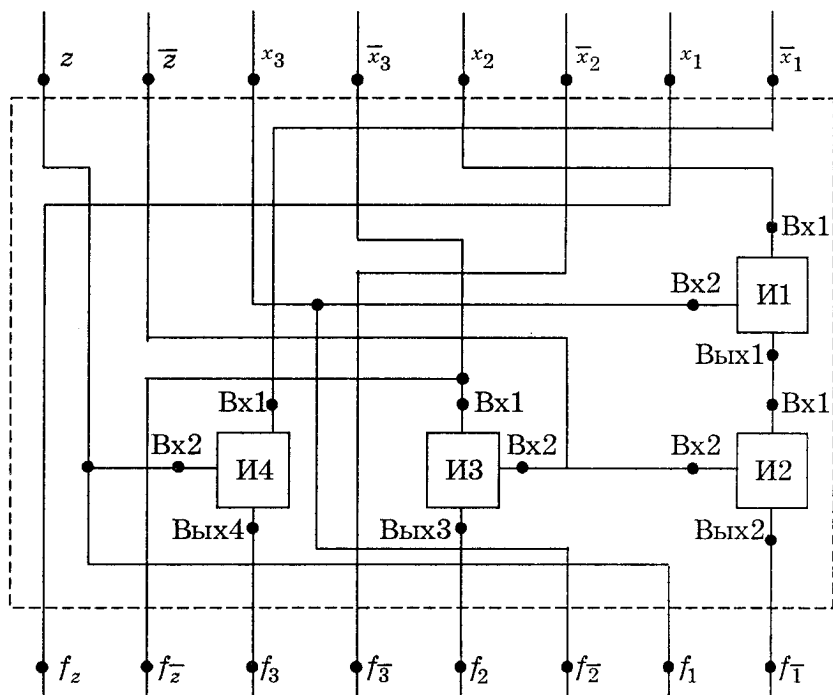


Рис.1.26. Принципиальная схема блока управления для СУ по пути тремя исполнительными механизмами

На рис.1.25 элемент памяти выключен, так как поршни механизмов показаны в крайних левых положениях, что соответствует логическому такту 1а, в котором память выключена.

Блок управления показан на рис.1.26 пунктирным прямоугольником, к верхней стороне которого подходят входы, а к нижней — подключены выходы. После изображения выходов и входов их надо соединить согласно упрощенным формулам включения (табл.1.4), используя в случае необходимости логические элементы умножения "И". Рассматривая эти формулы, видим, что каждый из выходов: f_2 , $f_{\bar{2}}$, f_1 , $f_{\bar{1}}$, f_3 — имеет прямое соединение с одним входом, а каждый из выходов: f_2 , f_3 — соединен с двумя входами через элемент умножения, выход $f_{\bar{1}}$ — с

тремя входами через два элемента умножения. Как видим, в блоке управления должно быть четыре элемента умножения "И", в качестве которых примем мембранные реле ИЭМП-30 (рис.1.22).

На рис.1.26 показаны установка логических элементов в блоке управления и соединение входов и выходов согласно формулам включения. Каждый элемент умножения показан в виде квадрата и трех линий. По верхней и боковой линиям подходят сигналы множителей (входы), сигнал произведения идет по нижней линии (выход).

После установки этих элементов остается соединить входы и выходы в соответствии с формулами включения.

ГЛАВА 2

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МАШИН

2.1. Основные положения и задачи

Основу курса "Теория механизмов, машин и манипуляторов" составляет сочетание механики машин с теорией управления машинами автоматического действия. Новые функции современных машин, связанные с управлением и контролем своей работы, учетом оптимального взаимодействия человека и техники, требуют установления новых связей, приближения их к проблемам отрасли и использования машин автоматического действия в конкретном производстве. Это означает, что предметом изучения становятся взаимосвязи параметров качества объекта производства, например, параметров качества обработанной поверхности детали, с параметрами процесса производства, например, производительностью. В основе такой взаимосвязи, в количественном ее выражении, должна быть конкретная машина (автоматизированное технологическое оборудование). В данном случае оптимальными кинематическими и динамическими параметрами машины будут те, которые обеспечивают необходимые параметры качества изделия при заданной производительности процесса с учетом экономической целесообразности и сохранения требуемой ее надежности и долговечности. Это говорит о том, что в основе изучения курса должна быть методика выявления и использования на практике общих закономерностей изменения силовых, скоростных и энергетических характеристик машин при использовании их в конкретных технологических процессах в условиях комплексной механизации. Согласно этим требованиям содержание курса может быть следующим:

- структурный анализ и синтез механизмов;
- кинематический анализ механизмов;
- динамический анализ машины в целом (машинного агрегата);
- динамический анализ передаточных и исполнительных механизмов;
- кинематический и динамический синтез передаточных и исполнительных механизмов;
- основы теории машин-автоматов.

Содержание перечисленных разделов включает в себя следующие этапы.

1. Изучение строения механизмов на основе сочетания звеньев и их соединений (кинематических пар). Разработка схем механизмов без учета размеров звеньев и кинематических пар.

2. Изучение закономерностей движения звеньев механизмов независимо от времени и сил (в функции обобщенных координат). Анализ законов изменения угловых и линейных перемещений, а также их производных по обобщенным координатам.

3. Изучение закономерности движения приводного вала машины на основе моделирования передачи энергии от двигателя к рабочему органу с учетом массово-геометрических и кинематических характеристик всех передаточных и исполнительных механизмов, входящих в машину. Здесь могут быть такие задачи: а) определение закономерности изменения ускорения, скорости и времени движения приводного вала машины в функции его угла поворота (обобщенной координаты) при заданных характеристиках привода и законах изменения сил технологического сопротивления (при заданных обобщенных силах); б) определение закономерности изменения приводного момента (обобщенной силы) на валу двигателя или другом валу машины при заданных законах изменения скорости в функции его угла поворота (обобщенной координаты) и законах изменения сил технологического сопротивления.

Решение этих задач дает возможность определить закономерность изменения мощности на приводном валу машины при заданных или выявленных колебаниях (изменениях) крутящего момента и скорости как в период разгона (торможения), так и в установившемся движении. В такой постановке поддержание полученного закона изменения механической мощности, момента или скорости в функции угла поворота приводного вала машины с помощью электрических, гидравлических, пневматических приводных устройств составляет техническую задачу управления машиной по мощности, силе или скорости.

В любой постановке задача исследования движения приводного вала машины на уровне ее идеализированной "жесткой" динамической модели необходима для динамического анализа передаточных и исполнительных механизмов. Это связано с тем, что силы, действующие в подвижных звеньях механизмов, определяются действительными ускорениями звеньев и их центров масс. Другими словами, действительные кинематические характеристики механизмов, определяющие изменения угловых и линейных перемещений во времени, могут быть получены только с учетом значений обобщенных скоростей и ускорений. Так что полнота учета всех сил (движущих, сил технологического сопротивления, сил трения, сил веса и т.п.) на этапе динамического анализа машины в целом определяет достоверность прочностных расчетов, оценку износа в подвижных соединениях и т.п.

4. Анализ закономерности изменения сил в подвижных соединениях звеньев передаточных и исполнительных механизмов. В основе этого этапа — выявление закономерности изменения

векторов реактивных сил в кинематических парах с целью решения задач, связанных с виброзащитой, виброизоляцией, а также с целью проведения прочностных расчетов, расчетов на износ подвижных соединений, оценки их надежности и долговечности.

5. Разработка схем механизмов по заданным кинематическим и динамическим условиям движения рабочего органа (выходного звена исполнительного механизма). Синтез механизмов в такой постановке требует учета основных закономерностей (силовых, скоростных, энергетических) того рабочего процесса, для выполнения которого предназначена машина. Такой оптимизационный синтез требует предварительного численного исследования с использованием ЭВМ, имитации выполнения рабочего процесса различными схемами исполнительных механизмов. Такая многовариантная проработка позволяет выявить наиболее рациональную компоновку машины по основным критериям ее работоспособности, таким как энергопотребление, материалоемкость, динамическая нагруженность. Такой предварительный численный эксперимент необходим для выбора типа и характеристик привода машины, определения управляющего момента (обобщенной силы) в функции обобщенной координаты или скорости. Таким образом, в основу оптимизационного синтеза машины должны быть положены силовые, скоростные или энергетические характеристики привода, полученные на основе изучения закономерности движения главного приводного вала машины.

6. Изучение рациональной взаимосвязи и условий работы управляющих, исполнительных и передаточных механизмов, а также способов автоматического управления машинами. Этот этап предполагает выбор и обоснование той или иной системы управления установочными (нерабочими) перемещениями или перемещением рабочего органа при выполнении конкретной операции. Проводится также оценка быстродействия (времени отработки заданных координат) с учетом массовых характеристик подвижных звеньев машины и заданных (полученных ранее) энергетических характеристик приводов. Здесь может решаться и обратная задача — определение механических (энергетических) характеристик привода для заданного быстродействия и законов изменения кинематических характеристик подвижных звеньев исполнительных механизмов машины и системы управления. В том и другом случаях решается также задача рациональной компоновки (последовательного, параллельного или другого расположения механизмов в машине), обеспечивающей наименьшее ее энергопотребление (наибольший механический КПД) или наименьшие динамические погрешности по ускорению, скорости, положению. Оценка погрешностей положения (позиционирования) рабочего органа проводится вне отрыва от погрешностей по ускорению и скорости. Их взаимосвязь при решении общей задачи динамики,

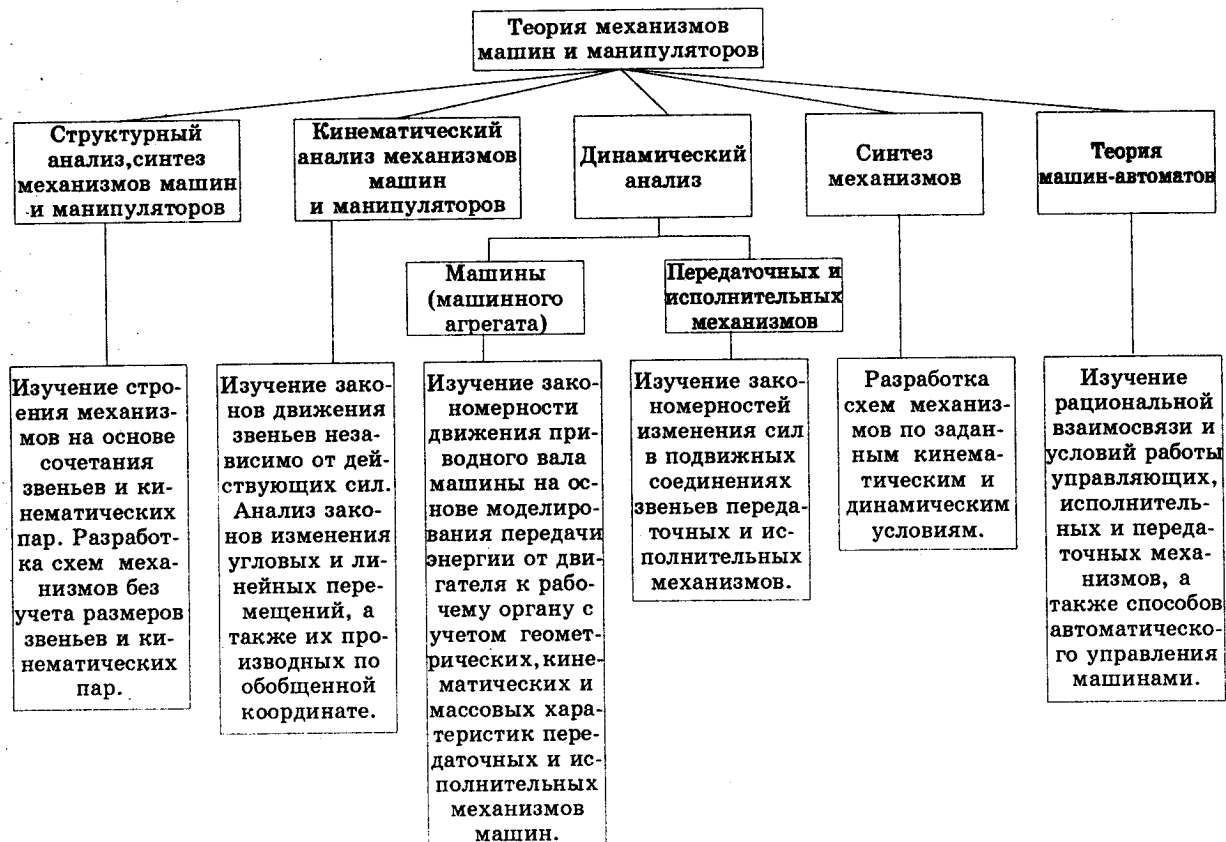


Рис.2.1. Состав и содержание разделов курса

как это показано в пункте 1.4, позволяет оценить целесообразность повышения точности позиционирования или определить изменение динамических нагрузок, обусловленных повышением этой точности. В любом случае это изучение должно начинаться с анализа "идеальной" динамической модели, то есть без учета податливости звеньев и их подвижных соединений и погрешностей изготовления и сборки.

Состав курса "Теория механизмов, машин и манипуляторов" для решения поставленных задач представлен схемой на рис.2.1.

2.2. Динамические и математические модели проектируемой схемы машины

Исследование движения машины можно проводить с использованием известных уравнений механики, если выбрать в качестве ее динамической модели некоторую точку вращающегося звена или звено, совпадающее с каким-либо реальным звеном механизма. В качестве такого звена удобно выбирать приводной вал исполнительного механизма машины. Тогда угол φ поворота такого звена, совпадающего с главным приводным валом машины, может служить обобщенной координатой, а скорость его ω и ускорение ε — обобщенными скоростью и ускорением. Это дает возможность исследовать движение машины под действием заданных сил (движущих и сопротивления) в обобщенных координатах с учетом массовых характеристик подвижных звеньев и тем самым определить их влияние на действительные скорости и ускорения.

Как отмечалось ранее, адекватность массовых характеристик машины и модели устанавливается на основе равенства их кинетических энергий, а силовых — на основе равенства мощностей. Эти массовые и силовые характеристики модели называют приведенными. Они отображают динамические характеристики машины, позволяя исследовать ее движение (определить скорость и ускорение главного приводного вала в функции его угла поворота). Конечной целью такого исследования часто является оценка погрешностей по положению рабочего органа машины (погрешности позиционирования), а также по скорости и ускорению.

Рабочий орган станка (резец, фреза, схват манипулятора и др.), выполняющий основную технологическую функцию, располагается на выходном звене исполнительного механизма. Для приведения в движение входного звена этого механизма часто используется короткозамкнутый асинхронный электродвигатель. Частота вращения его ротора превышает частоту вращения входного звена ИМ, поэтому для понижения ее используют передаточные механизмы, представляющие собой набор зубчатых передач с

подвижными (планетарные редукторы) или неподвижными осями вращения. В состав машины (станка, транспортного устройства автоматической линии и другого технологического оборудования) входят также механизмы, обеспечивающие вспомогательные функции (подачу при обработке материалов, зажим или разжим обрабатываемой детали и т.п.). Часто для выполнения вспомогательных функций используются кулачковые механизмы.

Основная цель технологического оборудования заключается в качественном выполнении технологического процесса с учетом заданной производительности и надежности оборудования. При этом кинематические характеристики рабочего органа должны строго соответствовать установленным требованиям. Например, при обработке материалов лезвийным или абразивным инструментом необходимо обеспечить не только определенное значение скорости резания, но и минимальное отклонение ее от среднего, номинального значения. Причины отклонения скорости резания от ее среднего (постоянного) значения следующие:

- несовпадение законов изменения за время кинематического цикла сил движущих (крутящего момента) на валу электродвигателя и сил технологического сопротивления (сил резания);
- непостоянство приведенного момента инерции передаточных и исполнительных механизмов;
- наличие зазоров в соединениях звеньев передаточных и исполнительных механизмов технологического оборудования;
- податливость элементов и в целом системы СПИД (станок-приспособление-инструмент-деталь) под действием рабочих нагрузок;
- наличие трения и износа подвижных соединений звеньев, рассеяния энергии и пр.

Перечисленные причины неравномерности скорости рабочего органа позволяют наметить пути автоматического управления движением отдельных звеньев машины, обеспечивающие поддержание скорости в определенном диапазоне. Такое управление можно реализовать путем регулирования M_n^D (управление по силе), изменения обобщенной скорости ω (управление по скорости) и управления по мощности за счет поддержания в определенном диапазоне функции $P = M_n^D \omega$. Особое значение для некоторого класса машин в повышении равномерности движения рабочего органа имеет управление величиной J_n .

Учесть всю сложность процессов, происходящих в зонах контакта звеньев технологического оборудования, не представляется возможным. Часто в этом нет необходимости. Поэтому в каждом отдельном случае составляют динамическую модель и, на ее основе, математическую модель, устанавливающую функциональную взаимосвязь исследуемых параметров. Таким образом,

динамическая модель представляет собой упрощенную схему машины, устанавливающую взаимосвязь между ее основными элементами, которые оказывают существенное влияние на исследуемые параметры. Те элементы, которые изменяют их несущественно, в динамическую модель не входят.

В нашем случае исследованию подлежат следующие параметры: отношение скоростей, массы, силы, мощность (работа) и кинетическая энергия. Все остальные (в данной постановке) параметры оказывают несущественное влияние на действительную скорость рабочего органа. Поэтому блок-схема машинного агрегата может быть представлена в виде, изображенном на рис. 2.2.

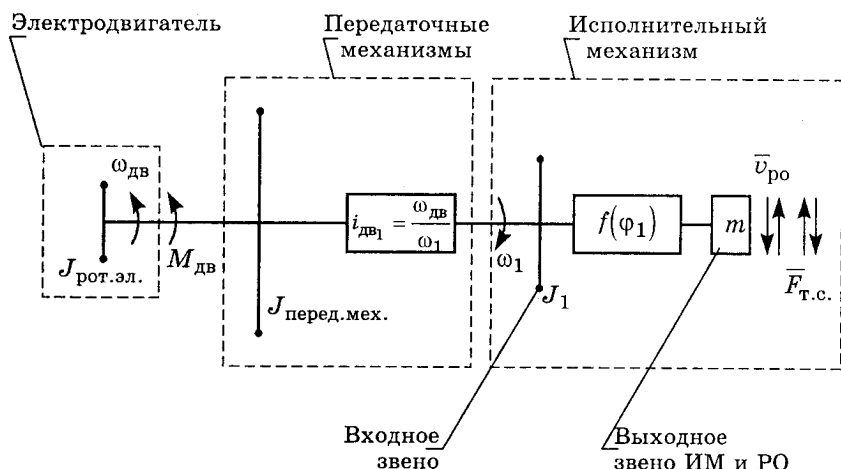


Рис.2.2. Блок-схема машинного агрегата

Основные вращающиеся звенья машинного агрегата, существенно влияющие на значение скорости выходного звена, представлены в виде дисков с осевыми моментами инерции J , а звенья, совершающие возвратно-поступательное движение — в виде точек с массой m . Рабочий орган (выходное звено исполнительного механизма) кинематически связан с входным звеном. Эта связь обозначена $f(\varphi_1)$ и означает то, что перемещение рабочего органа является функцией угла поворота входного звена. Производная угла поворота какого-либо звена или перемещения его точки по углу поворота его входного звена, а не по времени, представляет собой кинематическую передаточную функцию (аналог скорости). Как известно, эта величина не зависит от скорости и закона движения входного звена. Она зависит только от обобщенной координаты исполнительного механизма и от размеров его звеньев. Именно это обстоятельство дает возможность исследовать влияние законов изменения сил движущих и сил сопротивления, а также

особенностей изменения кинетических энергий звеньев машинного агрегата на скорости звена приведения. Для машин, включающих механизмы с постоянным передаточным отношением (зубчатых, винт-гайка, шестерня-рейка и др.), неравномерность скорости рабочего органа будет определяться только соотношением сил движущих и сил технологического сопротивления. Таким образом, рычажные механизмы вносят дополнительную неравномерность движения рабочего органа, однако они часто не могут быть заменены другими. Механизмы же промышленных роботов в большинстве своем рычажные.

Решение дифференциальных уравнений движения всех элементов динамической модели машинного агрегата представляет значительные трудности. Поэтому целесообразно ее дальнейшее упрощение. Наиболее простой динамической моделью машинного агрегата может быть модель, представленная на рис.2.3. Она представляет собой звено приведения, совпадающее с входным звеном исполнительного механизма и вращающееся с угловой скоростью ω_1 . При этом оно обладает приведенным моментом инерции J_{Π} . К звену приведения приложен приведенный момент M_{Π} , представляющий собой разность приведенных моментов M_{Π}^{Δ} сил движущих и M_{Π}^c сил сопротивления, определяемых из условия равенства работ (мощностей) движущих сил (моментов) и сил (моментов) технологического сопротивления приведенной работе (мощности). Приведенная мощность определяется соотношением $P_{\Pi} = M_{\Pi} \omega_1$, приводимая мощность движущих сил — соотношением $P^{\Delta} = M^{\Delta} \omega^{\Delta}$. Приводимая мощность сил технологического сопротивления определяется зависимостью $P^c = F^{Tc} v_{po}$ или $P^c = M^{Tc} \omega_{po}$. Таким образом, приведенный момент сил сопротивления

$$M_{\Pi}^c = \frac{F_{Tc} v_{po}}{\omega_1} \quad \text{или} \quad M_{\Pi}^c = \frac{M_{Tc} \omega_{po}}{\omega_1}$$

оказывается зависимым как от закона изменения сил F_{Tc} технологического сопротивления или момента этих сил за время кинематического цикла, так и от изменения за этот же цикл угловой скорости ω_{po} рабочего органа или скорости v_{po} точки приложения силы сопротивления. Приведенный момент M_{Π}^{Δ} движущих сил определяется соотношением

$$M_{\Pi}^{\Delta} = M_{\Delta} \frac{\omega^{\Delta}}{\omega_1}$$

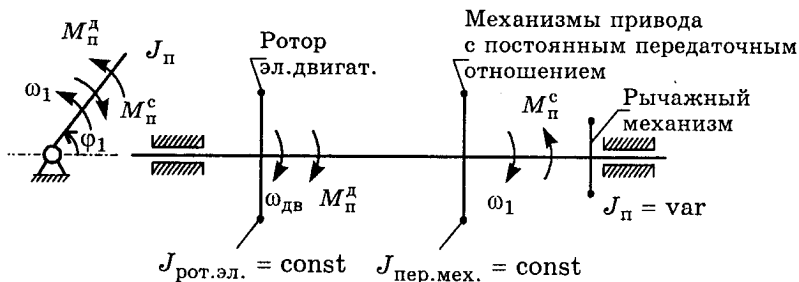


Рис.2.3. Одномассовая динамическая модель машинного агрегата

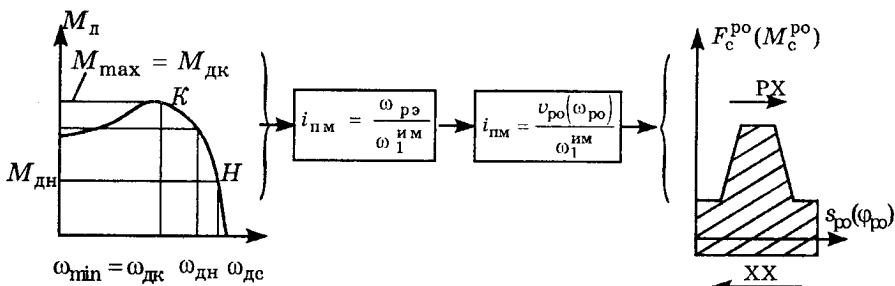


Рис.2.4. Взаимосвязь силовых и скоростных характеристик двигателя и выполняемого процесса

Таким образом, введение динамических характеристик $M_{\text{п}}^{\text{д}}$, $M_{\text{п}}^{\text{с}}$, $J_{\text{п}}$ позволяет моделировать процесс передачи мощности от двигателя к рабочему органу машины с учетом массово-геометрических и кинематических характеристик входящих в нее механизмов. На рис.2.4 изображены механические характеристики электродвигателя $M_{\text{д}} = f(\omega_{\text{д}})$ и рабочего процесса

$F^{\text{тс}} = f(s_{\text{по}})$. В некоторых случаях приведенный момент $M_{\text{п}}$ определяется также с учетом действия сил веса (в случае манипулирования с деталями большого веса) или сил трения. Раздельное определение и анализ приведенных сил движущих, сил технологического сопротивления, приведенных сил трения или веса более удобны. При этом следует помнить, что работа (мощность) может быть положительной (при совпадении скорости и силы) и отрицательной (при несовпадении направления действия силы и скорости). Приведенный момент инерции звена приведения определяется из условия равенства кинетических энергий звена приведения и всех движущихся звеньев машинного агрегата от электродвигателя до рабочего органа. Ротор электродвигателя, маховик (если он имеется), главный приводной вал, звенья зубчатого и других

механизмов с постоянным передаточным отношением дают постоянную составляющую приведенного момента инерции J_{Π}^I , величину которой в дальнейшем требуется определить из условия получения заданной неравномерности скорости. Распределение моментов инерции в одномассовой динамической модели машинного агрегата приведено на рис.2.3. Все подвижные звенья обладают способностью накапливать и отдавать кинетическую энергию. Это обстоятельство учитывается в виде приведенного к входному звену момента инерции. Во многих металлообрабатывающих станках маховика нет. Это означает, что кинематическая цепь их привода содержит необходимое число деталей, вращающихся с постоянной скоростью. Они и выполняют роль маховика как аккумулятора (накопителя) кинетической энергии в период возрастания угловой скорости. Накопленная энергия возвращается в систему в период замедления, в результате чего происходит выравнивание скорости входного звена в установившемся движении за цикл движения и, в конечном счете, рабочего органа. Если же кинематическая цепь привода короткая, металлоемкость станка незначительная (а к этому надо стремиться при конструировании любого технологического оборудования), то требуемая равномерность достигается путем установки соответствующего маховика, момент инерции которого подлежит определению. Переменную составляющую приведенного момента инерции J_{Π}^{II}

создают звенья механизмов, совершающих плоско-параллельное, сложное пространственное, возвратно-вращательное, возвратно-поступательное движения, то есть звенья, для которых передаточные кинематические функции являются переменными.

Равенство кинетических энергий звена приведения и рабочего органа, совершающего возвратно-поступательное движение, имеет вид

$$\frac{J_{\Pi} \omega_1^2}{2} = \frac{mv_{po}^2}{2}, \text{ откуда } J_{\Pi} = m \left(\frac{v_{po}}{\omega_1} \right)^2.$$

Сравнивая формулы приведенного момента инерции и приведенного момента сил технологического сопротивления, видим, что они являются функцией отношения скоростей (аналогов скоростей, передаточных функций), то есть для исследования скорости входного звена требуется определить отношения скоростей рабочего органа к скорости входного звена, например, в 12-ти его положениях. Значения же этих скоростей остаются неизвестными.

Применительно к динамической модели (рис.2.3) на основании теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме имеем $dT = dA = M_{\Pi} d\varphi$, где $M_{\Pi} = M_{\Pi}^d - M_{\Pi}^c$.

Тогда для звена приведения, движущегося поступательно, запишем:

$$dT = dA = F_{\Pi} ds,$$

где $F_{\Pi} = F_{\Pi}^D - F_{\Pi}^C$.

Здесь F_{Π}^D и F_{Π}^C — приведенные силы, движущая и сопротивляющаяся. Такое представление дает возможность выразить приведенные момент и силу в виде

$$\frac{d\left(\frac{J_{\Pi}\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} = M_{\Pi}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\left(\frac{m_{\Pi}v^2}{2}\right)}{ds} = F_{\Pi}. \quad (2.2)$$

Дифференцирование и некоторые преобразования уравнений (2.1) и (2.2) дают возможность записать дифференциальные уравнения движения применительно к рассматриваемым динамическим моделям в виде [2]:

$$J_{\Pi}\varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = M_{\Pi}^D - M_{\Pi}^C, \quad (2.3)$$

$$m_{\Pi}a + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{dm_{\Pi}}{ds} = F_{\Pi}^D - F_{\Pi}^C. \quad (2.4)$$

Используя теорему об изменении кинетической энергии, для рис. 2.3 уравнение движения звена приведения, совпадающего с главным приводным валом машины, выражаем в интегральной форме:

$$\frac{J_{\Pi}^i \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{2} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^D d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^C d\varphi = \Delta A. \quad (2.5)$$

В случае поступательно движущегося звена приведения имеем

$$\frac{m_{\Pi}^i v_i^2}{2} - \frac{m_{\Pi}^{i-1} v_{i-1}^2}{2} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{\Pi}^D ds - \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{\Pi}^C ds = \Delta A.$$

Уравнения (2.3) и (2.4) позволяют определить закон изменения обобщенной силы, то есть приведенного движущего момента (силы) машины, по формулам

$$M_{\Pi}^D = M_{\Pi}^C + J_{\Pi}\varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}, \quad (2.6)$$

$$F_{\Pi}^{\Delta} = F_{\Pi}^c + m_{\Pi} a + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{dm_{\Pi}}{ds}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6), (2.7) используют при заданном законе изменения $\omega = f(\varphi)$ или $v = f(s)$. Тогда, например, уравнение (2.6) представляет собой закон изменения крутящего момента на главном приводном валу, обеспечивающий заданный закон изменения его угловой скорости. При заданном законе $\omega = f(\varphi)$ значение обобщенного ускорения определяется как $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega' \omega'$.

С учетом того, что $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$, уравнение (2.6) можно представить в виде

$$M_{\Pi}^{\Delta} = M_{\Pi}^c + J_{\Pi}^I \omega' \omega' + J_{\Pi}^{II} \omega' \omega' + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) позволяет определить раздельное влияние каждой составляющей J_{Π} на закон изменения динамического крутящего момента на приводном валу машины. Так, например, составляющая $J_{\Pi}^I \omega' \omega'$ определяет величину крутящего момента, закон изменения которого зависит только от $\varepsilon = \omega \omega'$, то есть от закона изменения $\omega = f(\varphi)$, так как $J_{\Pi}^I = \text{const}$. Составляющая же $J_{\Pi}^{II} \omega' \omega'$ является произведением двух функций, результат которого приводит к другим максимумам (минимумам) ее амплитудных значений и своей частоте (закону изменения этих экстремальных значений) в функции обобщенной координаты. Последнее слагаемое уравнения (2.8) также является произведением двух функций. Таким образом, силовой анализ машины сводится к многовариантному исследованию уравнения (2.8), в котором $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$ и M_{Π}^c описываются неизменными функциями, характерными для конкретной машины и выполняемой технологической операции. Функция же $\omega = f(\varphi)$ принимает разнообразные значения на этапе разгона или торможения. Критериями такого количественного исследования могут быть количество максимумов (минимумов) значений M_{Π}^{Δ} и переход его через ноль (изменение знака M_{Π}^{Δ}), характеризующие динамическую нагруженность машины. Конечным результатом исследования в данном случае является отыскание наиболее рационального закона изменения $\omega = f(\varphi)$ от установившегося движения.

Например, функция $\omega = f(\varphi)$ увеличения скорости при разгоне будет считаться наилучшей, если обеспечивается минимальное количество изменений знака M_{Π}^{Δ} или наименьший перепад изменения крутящего момента, определяемого как $\left| M_{\Pi}^{\Delta} \right|_{\max}$ или $\left| M_{\Pi}^{\Delta} \right|_{\min}$. Такая функция будет единственной для конкретной машины, характеризующейся значением приведенного момента инерции $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$ и выполняющей конкретную операцию, то есть для конкретной функции $M_{\Pi}^c = f(\varphi)$. Поиск такой функции $\omega = f(\varphi)$ представляет интерес и в случае отсутствия сил технологического сопротивления при разгоне (торможении). Как следует из уравнения (2.8), вид этих функций будет различным для машины, разгоняемой вхолостую (при $M_{\Pi}^c = 0$), и в случае, если при разгоне выполняется некоторая операция технологического процесса. Уравнение (2.8) показывает, что знак M_{Π}^{Δ} определяется знаком функции $J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}/d\varphi$, причем влияние производной от приведенного момента инерции увеличивается при увеличении скорости ω . Влияние массовых характеристик передаточных и исполнительных механизмов машины описано уравнением (2.8).

Неоднозначное влияние на равномерность движения приводного вала машины изменения знаменателя $J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$ показывает следующее уравнение:

$$\varepsilon = \omega\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{\Pi}^{\Delta} - M_{\Pi}^c - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}}{J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}}. \quad (2.9)$$

Так, если ускорение ε однозначно уменьшается при увеличении J_{Π}^I , то увеличение J_{Π}^{II} приводит к увеличению составляющей $\frac{\omega^2}{2} J'_{\Pi}$ в числителе. В этом случае неравномерность усугубляется с увеличением скорости ω . Это указывает на то, что задачи силового и кинематического анализа нельзя рассматривать отдельно друг от друга. Так, например, из сравнения формул (2.8) и (2.9) видно, что увеличение равномерности вращения приводного вала машины (уменьшение ε) за счет увеличения J_{Π}^I ведет к росту динамических нагрузок (увеличению M_{Π}^{Δ}).

Часто конечной целью динамического анализа установившегося движения машины является определение истинного закона движения звена приведения. Установившееся движение характеризуется энергетическим балансом за цикл (равенством работы сил движущих работ все сил сопротивления). Это позволяет выявить ряд важных характеристик работы машинного агрегата, таких как действительная скорость главного приводного вала, неравномерность хода рабочего органа, характер изменения его скорости и момента движущих сил. Эти параметры необходимы для дальнейшего проектирования технологического оборудования и оценки показателей самого технологического процесса.

На данном этапе технологического исследования предполагается, что все звенья обладают большой жесткостью, их упругие деформации и деформации в зонах контакта подвижных звеньев незначительны; звенья отличаются минимальными погрешностями изготовления и сборки, отсутствием зазоров в их соединениях. Следует отметить, что в некоторых случаях такие допущения могут привести к большим погрешностям определения требуемых параметров, а иногда и к неверным результатам. Например, в случае исследования влияния динамики механизмов и привода манипуляторов на точность позиционирования или определения точности отсчета оптико-механических систем учет колебаний отдельных звеньев необходим. В таких случаях требуется уточнение динамической модели на втором этапе исследования, причем задача решается в той постановке, в какой она рассматривается в теории механизмов и машин с вышеперечисленными допущениями.

Интенсификация технологических процессов, автоматизация и гибкость современного производства приводят к росту динамических нагрузок и необходимости учета взаимосвязи всех механизмов в процессе выполнения конкретных операций. В настоящее время технологам и конструкторам не представляется возможным получить информацию о взаимодействии сил движущих и сил технологического сопротивления экспериментальными методами с использованием проектируемого технологического оборудования. Поэтому многовариантная проработка схем на этапе проектирования становится главной задачей совершенствования машин и технологического оборудования. При этом динамический расчет становится основным.

Как отмечалось, составление динамической модели предусматривает замену машины некоторой схемой или моделью, отображающей наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи. Упрощение исходной схемы требует выделения тех особенностей и свойств, которые оказывают наиболее существенное влияние на выходные параметры процесса и эксплуатационные характеристики машины. Таким образом, динамическая модель оказывается ограниченной и пригодной для определенных

условий и рассмотрения определенного круга вопросов. Одной и той же схеме может соответствовать целый ряд динамических моделей. В этом плане представляет интерес отбор ряда типовых моделей, свойственных некоторой группе механизмов как по целям подхода к решению задачи динамики, так и по способности отразить наиболее важные взаимосвязи характеристик машины с выходными параметрами процесса. Накопление материалов, содержащих сведения о наиболее характерных динамических моделях машин и их приводах, является важным условием совершенствования как технологического процесса в целом, так и средств автоматизации и технологического оборудования.

В основу наиболее простой динамической модели (рис. 2.2 и 2.3) машины положено допущение об отсутствии деформаций звеньев и их сочленений, а также погрешностей изготовления и сборки. Результаты, полученные на основе этой модели, называются "идеальными", а модель — кинетостатической [2].

В зависимости от поставленной задачи может быть проведено исследование влияния на законы движения звена приведения отдельно сил технологического сопротивления, сил трения, сил тяжести подвижных звеньев или же их совместного влияния. В каждом из этих случаев для определения приведенных сил (моментов) записывается равенство их мощности (работы) мощности (работе) приводимых сил технологического сопротивления, трения или сил тяжести подвижных звеньев.

Анализ кинетостатической модели дает исходное оценочное представление о влиянии соотношения скоростей и масс подвижных звеньев передаточных и исполнительных механизмов, а также соотношения сил движущих и сил технологического сопротивления на закон движения главного приводного вала машины. Таким образом, выявляется влияние "внутренней" динамики машины и динамики самого процесса на неравномерность вращения звена приведения. При учете упругости звеньев кинетостатический анализ также необходим, он дает возможность определить источник возмущающих воздействий в колебательной системе [12], [13], [14].

Учет упругости звеньев и их сочленений при построении динамической модели позволяет решать некоторые задачи, без которых невозможно создание современных высокопроизводительных автоматизированных технологических комплексов.

При составлении динамической модели с учетом упругости следует помнить, что исполнительные механизмы, с помощью которых выполняется заданное (программное) перемещение рабочего органа, с одной стороны, являются источником возмущения, а с другой — технологическим объектом, подверженным колебаниям. Поэтому технологические машины должны рассматриваться с учетом того, какой процесс они обеспечивают. Здесь важно, какие

погрешности перемещения рабочего органа больше деформаций звеньев. Например, в прецизионном технологическом оборудовании точность перемещения рабочего органа соизмерима с деформациями звеньев (металлообрабатывающие станки, промышленные роботы и т.п.). Динамические модели для этих типов машин, а также методы их аналитического исследования должны быть отличными, например, от методов исследования движения звеньев сельхозмашин.

Составление математической модели заключается в составлении системы уравнений, с помощью которых осуществляется математическое описание исследуемого объекта. На этом этапе динамического расчета также приходится прибегать к упрощениям, принимать некоторые гипотезы и допущения, компенсирующие недостатки знания или упрощающие саму процедуру математического описания динамической модели и ее дальнейший анализ. Здесь также требуется инженерная интуиция, основанная на понимании связи и соответствия математического анализа физическому явлению. Составление математической модели требует знания законов механики и некоторых экспериментальных закономерностей, учитывающих взаимодействие сил и соотношение скоростей в процессе передачи энергии от двигателя к рабочему органу машины.

Следует отметить, что одна и та же математическая модель может соответствовать различным динамическим моделям, не связанным между собой физической общностью. В этом случае научные достижения, полученные при исследовании математической модели в одной отрасли, становятся общим достижением целого ряда научных направлений.

Для составления математической модели машинного агрегата требуется установить функциональную связь между входными и выходными параметрами двигателя, а также влияние передаточных и исполнительных механизмов.

Для двигателей такая связь устанавливается из тех соображений, что скорость его выходного звена зависит от некоторой входной величины, а также от силы (момента сил), приложенной к выходному звену.

Если нагрузка, приложенная к выходному звену, изменяется во времени интенсивно, то следует учитывать инерционность физико-химических процессов, происходящих в двигателе. Таким образом, динамические характеристики двигателей в общем виде имеют следующий вид [14]:

$$\left. \begin{aligned} k_Q \dot{Q}_{\text{дв}} + Q_{\text{дв}} &= f(s_{\text{вх}}^{\text{дв}}, s_{\text{вых}}^{\text{дв}}), \\ k_M \dot{M}_{\text{дв}} + M_{\text{дв}} &= f(\varphi_{\text{вх}}^{\text{дв}}, \varphi_{\text{вых}}^{\text{дв}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где k_Q, k_M — коэффициенты пропорциональности;

$\dot{Q}_{дв}, \dot{M}_{дв}$ — производные по времени от силы и момента, приложенных к выходному звену двигателя (штоку гидроцилиндра, валу электродвигателя);

$s_{вх}^{дв}, \varphi_{вх}^{дв}$ — значение входной координаты двигателя; например, для гидродвигателя $s_{вх}^{дв} = s_3^{дв}$ — перемещение золотника, для двигателя внутреннего сгорания $\varphi_{вх}^{дв} = \varphi_{засл}^{дв}$ — угол поворота заслонки карбюратора, для двигателя постоянного тока — напряжение на входе и т.п.;

$\dot{s}_{вых}^{дв}, \dot{\varphi}_{вых}^{дв}$ — скорости выходного звена двигателя (линейная и угловая соответственно).

Важными характеристиками для двигателей являются следующие частные зависимости, полученные из уравнений (2.10):

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_{вых}^{дв} &= f(Q_{дв}), \\ \dot{\varphi}_{вых}^{дв} &= f(Q_{дв}), \end{aligned} \right\} \text{при} \left. \begin{aligned} s_{вх}^{дв} &= \text{const}, \\ \varphi_{вх}^{дв} &= \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_{вых}^{дв} &= f(s_{вх}^{дв}), \\ \dot{\varphi}_{вых}^{дв} &= f(\varphi_{вх}^{дв}), \end{aligned} \right\} \text{при} \left. \begin{aligned} Q_{дв} &= \text{const}, \\ M_{дв} &= \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_{вых}^{дв} &= f(s_{вх}^{дв}), \\ \dot{\varphi}_{вых}^{дв} &= f(\varphi_{вх}^{дв}), \end{aligned} \right\} \text{при} \left. \begin{aligned} Q_{дв} &= 0, \\ M_{дв} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Зависимости (2.11) называют рабочими (статическими) характеристиками, (2.12) — регулировочными характеристиками, (2.13) — идеальными характеристиками, соответствующими холостому ходу. Функциональная связь между входными и выходными координатами передаточных и исполнительных механизмов устанавливается с помощью кинематических передаточных функций (аналогов скоростей). Понятие аналогов скоростей s_i' и ускорений s_i'' точки, аналогов угловых скоростей φ_i' и ускорений φ_i'' звеньев вытекают из следующих преобразований [2]:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \frac{ds_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 s_i', \\ a_i &= \frac{dv_i}{dt} = \frac{d\omega_1 s_i'}{dt} = \omega_1^2 s_i'' + \varepsilon_1 s_i'. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Таким образом, скорость v_i i -той точки звена (центра масс) и ускорение ее a_i определяются с учетом обобщенной угловой скорости ω_1 и обобщенного углового ускорения ε_1 звена приведения (главного приводного вала машины). Для угловых скоростей ω_i и угловых ускорений ε_i i -х звеньев механизма по аналогии имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \omega_1 \varphi_i', \\ \varepsilon_i &= \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d(\omega_1 \varphi_i')}{dt} = \omega_1^2 \varphi_i'' + \varepsilon_1 \varphi_i'. \end{aligned} \right\}$$

Аналоги скоростей и ускорений могут служить в некотором роде паспортом механизма, характеризующим отношения скоростей звеньев и их точек в функции обобщенной координаты.

С учетом понятий кинематических передаточных функций скорости $v_{\text{ВЫХ}}^M$, $\omega_{\text{ВЫХ}}^M$ выходных звеньев механизмов (передаточных и исполнительных) можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{ВЫХ}}^M &= \omega_1 \frac{ds_{\text{ВЫХ}}^M}{d\varphi_1}, \quad s_{\text{ВЫХ}}^M = \int_0^{\varphi_1} \left(s_{\text{ВЫХ}}^M \right)' d\varphi_1 = \Pi(\varphi_1), \\ \omega_{\text{ВЫХ}}^M &= \omega_1 \frac{d\varphi_{\text{ВЫХ}}^M}{d\varphi_1}, \quad \varphi_{\text{ВЫХ}}^M = \int_0^{\varphi_1} \left(\varphi_{\text{ВЫХ}}^M \right)' d\varphi_1 = \Pi(\varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Уравнения (2.15) показывают, что выходная координата механизма является некоторой функцией положения $\Pi(\varphi_1)$ входного звена (обобщенной координаты), эта функция определяется отношением скоростей выходного и входного звеньев, то есть аналогом скоростей (кинематической передаточной функцией). Как видно из этих уравнений, линейная зависимость между входными и выходными координатами механизмов может быть только в случае постоянного значения отношения их скоростей. К таким механизмам относятся зубчатые механизмы с круглыми колесами, винт-гайка, шестерня-рейка и некоторые другие. Все рычажные механизмы не обладают таким свойством.

С учетом вышеизложенного функциональная связь между двигателем с неизменным значением входной координаты и рабочим органом машины может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}^{\text{ДВ}} &\rightarrow \Pi^{\text{ПМ}}(\varphi_1) \rightarrow \Pi^{\text{ИМ}}(\varphi_1) \rightarrow s_{\text{ВЫХ}}^{\text{РО}}, \\ \varphi_{\text{ВЫХ}}^{\text{ДВ}} &\rightarrow \Pi^{\text{ПМ}}(\varphi_1) \rightarrow \Pi^{\text{ИМ}}(\varphi_1) \rightarrow \varphi_{\text{ВЫХ}}^{\text{РО}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Уравнения (2.16) позволяют составить математическую модель для соответствующей динамической модели машины с учетом взаимосвязи характеристик движения, передаточных и исполнительных механизмов. Из уравнений (2.16) видно, что даже в случае допущения недеформируемости звеньев и их соединений,

отсутствия погрешностей их изготовления и сборки выходная координата $s_{\text{ВЫХ}}^{\text{PO}}$ ($\varphi_{\text{ВЫХ}}^{\text{PO}}$) будет нелинейно зависеть от значения выходной координаты двигателя. Эти зависимости учитывают также особенности передаточных и исполнительных механизмов, используемых в машине. Выбор их типов, определяемых кинематическими передаточными функциями (аналогами скоростей), существенно влияет на закон изменения координаты, а следовательно, и скорости рабочего органа, устанавливаемого на выходном звене исполнительного механизма.

Решение проводится аналитическими методами с помощью ЭВМ. В этом случае представляется возможность провести качественный анализ рассматриваемых явлений и получить достоверную информацию о динамической нагруженности элементов машинного агрегата с учетом особенностей передачи энергии от двигателя к рабочему органу машины и законов изменения сил движущих и сил технологического сопротивления. Особую роль занимают численные исследования с помощью ЭВМ. Они позволяют выявить в некотором диапазоне входных параметров качественно новые явления, скрытые в процессе аналитического решения. Они дают возможность проследить влияние, например, различных законов изменения движущих сил и сил технологического сопротивления на равномерность движения главного приводного вала машины и, тем самым, решить вопросы, связанные со стабильностью технологического процесса, выполняемого на этом или другом оборудовании. Следует иметь в виду, что увеличение вычислительных процедур следует согласовывать с возможностью понимания и усвоения некоторого объема числовой информации. Здесь не должно быть нарушения соответствия между уровнем числовой информации и уровнем физического понимания исследуемых явлений. Поэтому требуется постоянное совершенствование физических представлений об объекте исследования и его взаимосвязи с силами технологического сопротивления. В этом плане создание систем динамических и математических моделей в каждом классе машин, разработка инженерных методов оценки эксплуатационных характеристик и их взаимосвязи с параметрами технологического процесса является важным условием рационального конструирования схем машин, обеспечивающего снижение материалоемкости, увеличение их долговечности и улучшение качества.

Анализ кинетостатической модели дает исходное оценочное представление о динамике машины. Как отмечалось раньше, при учете упругости звеньев кинетостатический анализ также необходим, так как полученные силы служат источником возмущений в колебательной системе.

Наличие зазоров в сочленениях звеньев механизмов, погрешностей их изготовления и сборки самих звеньев, а также зон их контакта приводит к неизбежному расхождению законов движения выходных звеньев реальных исполнительных механизмов и их идеальных схем. Расхождения между действительными и идеальными законами движения называют динамическими ошибками, которые различают по положению и скорости выходного звена.

Определение или приближенная оценка динамических ошибок является одной из основных задач динамического анализа машины.

Динамический синтез с учетом упругости звеньев также проводится с использованием математической модели. Целью его является снижение виброактивности или же выявление путей наиболее эффективного использования колебаний в технологических процессах.

2.3. Определение динамических характеристик машин (приведение сил и масс)

Общие формулы для определения M_{Π} и J_{Π} могут быть получены из равенств

$$M_{\Pi}\omega_1 = \sum P_i, \\ J_{\Pi} \frac{\omega_1^2}{2} = \sum T_i,$$

откуда

$$M_{\Pi} = \frac{\sum P_i}{\omega_1} = \sum \bar{F}_i \frac{d\bar{r}_i}{d\varphi_1} + \sum M_i \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}, \quad (2.17)$$

$$J_{\Pi} = \frac{2\sum T_i}{\omega_1^2} = \sum m_i \left(\frac{d\bar{r}_{si}}{d\varphi_1} \right)^2 + \sum J_{si} \left(\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \right)^2, \quad (2.18)$$

где $\sum P_i$ — сумма мощностей сил F_i и моментов M_i ;

$\sum T_i$ — сумма кинетических энергий всех звеньев;

ω_1 — угловая скорость звена приведения;

$\frac{d\bar{r}_i}{d\varphi_1}$ — аналог скорости точки приложения силы \bar{F}_i ;

$\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}$ — аналог угловой скорости i -го звена;

$\frac{d\bar{r}_{si}}{d\varphi_1}$ — аналог скорости центра масс s_i звена.

Скалярное произведение векторов в формулах (2.17) и (2.18) целесообразно выразить через их проекции, например:

$$\overline{F}_i \frac{d\overline{r}_i}{d\varphi_1} = F_{ix} \frac{dx_i}{d\varphi_1} + F_{iy} \frac{dy_i}{d\varphi_1}.$$

Пример. Составить выражения для определения M_{Π} и J_{Π} кривошипно-ползунного механизма (рис.2.5, а). M_1 и F_3 — внешние нагрузки, G_1, G_2 и G_3 силы тяжести звеньев.

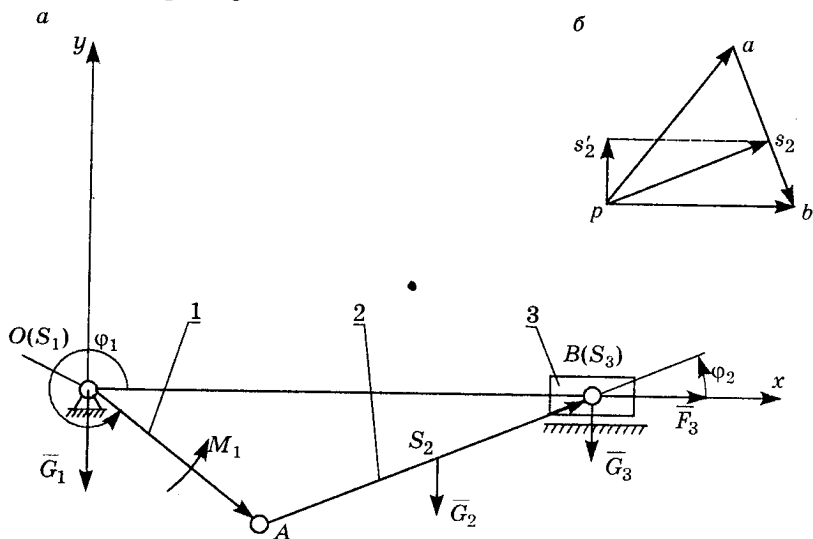


Рис.2.5. К определению динамических характеристик:

а — кривошипно-ползунный механизм,

б — графическое изображение взаимосвязи скоростей точек А, В, S2

Согласно формуле (2.17)

$$M_{\Pi} = M_1 - G_2 \frac{dy_{s_2}}{d\varphi_1} + F_3 \frac{dx_3}{d\varphi_1}. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) получено из условия равенства работы приведенного момента сумме работ сил тяжести звеньев механизма и внешних нагрузок, примененных к звеньям 1, 2, 3.

Выражение для определения M_{Π} , полученное из условия равенства мощностей, имеет вид

$$M_{\Pi} = \frac{M_1 \omega_1 - G_2 v_{s_2 y} + F_3 v_B}{\omega_1} = M_1 - \frac{l_{OA}}{pa} [G_2 (ps'_2) - F_3 (pb)]. \quad (2.20)$$

Последнее выражение (2.20) может быть вычислено с использованием графической взаимосвязи аналогов скоростей отдельных точек звеньев механизма (рис.2.5, б).

Из сравнения формул (2.19) и (2.20) видно, что если принять при графическом построении $pa = l_{OA}$, то отрезки ps'_2 и pb представляют собой соответствующие аналоги скоростей $\frac{dy_{s_2}}{d\varphi_1}$ и $\frac{dx_B}{d\varphi_1}$.

Согласно формуле (2.18)

$$J_{\Pi} = J_{s_1} + m_2 \left(\frac{d\bar{r}_{s_2}}{d\varphi_1} \right)^2 + J_{s_2} \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{dx_B}{d\varphi_1} \right)^2, \quad (2.21)$$

где $\left(\frac{d\bar{r}_{s_2}}{d\varphi_1} \right)^2 = \left(\frac{dx_{s_2}}{d\varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{dy_{s_2}}{d\varphi_1} \right)^2$.

Тогда, на основании предыдущих рассуждений, получим

$$\begin{aligned} J_{\Pi} &= \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{J_{s_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{s_2}^2}{2} + \frac{J_{s_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v_B^2}{2} \right) = \\ &= J_{s_1} + \left(\frac{l_{OA}}{pa} \right)^2 \left[m_2 (ps_2)^2 + J_{s_2} \left(\frac{ab}{l_{AB}} \right)^2 + m_3 (pb)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из сравнения формул (2.21) и (2.22) видно, что в случае $pa = l_{OA}$ отрезок ps_2 и отношение ab/AB представляют собой соответствующие аналоги скоростей $\frac{d\bar{r}_{s_2}}{d\varphi_1}$ и $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$.

2.4. Оценка силовых, кинематических и энергетических характеристик машины

В зависимости от конечных целей можно выделить две задачи, связанные с динамикой машины, хотя, как отмечалось ранее, раздельное их рассмотрение часто не имеет практической ценности.

К первой задаче отнесем оценку кинематических характеристик $\varepsilon = f(\varphi)$, $\omega = f(\varphi)$ и $t = f(\varphi)$, то есть определение закона движения звена приведения и времени срабатывания (быстродействия). При этом заданными являются механические характеристики привода $M_d = f(\omega_d)$ или $M_d = f(\varphi_d)$ и рабочего процесса (технологической операции) $F_{тс} = f(s_{po})$ или $F_{тс} = f(\omega_{po})$, заданным является также приведенный момент инерции $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$. В этом случае функция $\omega = f(\varphi)$ может быть получена с использованием уравнения (2.5) движения звена приведения в интегральной

форме. Затем, с учетом того, что $\omega = d\varphi/dt$, время срабатывания на шаге определяется из соотношения

$$(\Delta t) \approx t_i - t_{i-1} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega}, \text{ то есть } T = \sum_{i=1}^N \Delta t_i.$$

Предметом исследования в данном случае является поиск механической характеристики привода, удовлетворяющей наименьшему времени срабатывания T . Ограничением уменьшения времени T служит в данном случае значение динамического крутящего момента $M_{\Pi}^{\text{д}}$ на приводном валу, определяемое по формуле (2.6) или (2.8), и погрешность позиционирования. Если же привод выбран заранее и не подлежит изменению, то предметом исследования является подбор J_{Π}^{I} и J_{Π}^{II} , удовлетворяющих поставленным целям, то есть поиск наилучших, с точки зрения наименьшего времени срабатывания, массовых и кинематических характеристик передаточных и исполнительных механизмов.

Ко второй задаче отнесем поиск функции $M_{\Pi}^{\text{д}}(\varphi)$, удовлетворяющей, например, заданному диапазону изменения $(M_{\Pi}^{\text{д}})_{\text{max}} - (M_{\Pi}^{\text{д}})_{\text{min}}$. Эта задача поиска наилучшей программы управления машиной по силе. Как видно из уравнения (2.8), функция $M_{\Pi}^{\text{д}} = f(\varphi)$ получается в результате сложения 4-х функций, поэтому здесь важно выделить составляющую, оказывающую наибольшее влияние на отклонение искомой функции $M_{\Pi}^{\text{д}}$ от заданной. При разгоне (торможении) машины, например, вхолостую (без выполнения технологической операции), то есть при $M_{\Pi}^{\text{с}} = 0$ степень влияния массовых характеристик привода J_{Π}^{I} и $dJ_{\Pi}/d\varphi$ будет различной для тихоходных и быстроходных машин. При коротких кинематических цепях привода и высокоскоростных процессах следует особое внимание уделять последней составляющей $(J'_{\Pi} \omega^2/2)$.

При решении задач об управлении скоростью (законом движения главного приводного вала машины) или силой (крутящим моментом на этом валу) с помощью электрических, гидравлических или пневматических устройств возникает третья задача об управлении с целью поддержания потребляемой мощности в определенном диапазоне. Функция изменения мощности определится с учетом соотношения (2.8) по формуле

$$P_{\text{д}} = M_{\Pi}^{\text{д}}\omega = M_{\Pi}^{\text{с}}\omega + I_{\Pi}^{\text{I}}\omega^2\omega' + I_{\Pi}^{\text{II}}\omega^2\omega' + \frac{\omega^3}{2}J'_{\Pi}.$$

Здесь также представляет интерес рассмотрение влияния каждой составляющей в отдельности.

Во всех случаях алгоритм решения задач содержит единый подход, позволяющий выделить отдельные самостоятельные этапы по кинематическому, динамическому исследованию и совместному использованию результатов для решения тех или иных задач. Схема такого исследования представлена на рис.2.6. Из нее видна, например, последовательность решения задачи оценки погрешности рабочего органа по положению δ_s , скорости δ_v и ускорению δ_a . Эта задача сводится к оценке абсолютной или относительной погрешности действительной скорости $v_i = ds_i/dt$, ускорения $a_i = dv_i/dt$ или пути $s = f(t)$ с номинальными их значениями, полученными в функции обобщенных координат. Формально это отклонение обусловлено тем, что равномерному шагу обобщенной координаты $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ в каждом конкретном случае будет соответствовать неравномерный шаг $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, определяемый как законом изменения обобщенной скорости ω , так и аналогом скорости (кинематической передаточной функцией) s' конкретного механизма. Таким образом, действительная скорость, например, ползуна 3 (см. формулы (2.14) и рис.2.5) определится как

$$v_{po} = \frac{dx_B}{dt} = \omega_1 s'_3 = \omega_1 \frac{dx_B}{d\varphi_1}.$$

Функция же $\omega_1 = f(\varphi_1)$ определится из уравнения (2.5).

Из рис.2.6 видно, что в процессе решения задач динамики определяются и другие характеристики: например, коэффициент энергопотребления машины k_3 , коэффициент материалоемкости k_J , коэффициент динамичности k_d , годограф сил реакций $R = f(\varphi)$ в кинематических парах того или иного механизма, параметр (pv) [Вт/м²], определяющий удельную мощность, затрачиваемую на износ подвижных соединений.

Таким образом, на рис.2.6 представлена в виде блоков последовательность решения задач, связанных с количественной оценкой динамической нагруженности машин, механизмов и их технического уровня, определяемого энергопотреблением и материалоемкостью. В верхней части рисунка представлены исходные данные проектируемой схемы машины для выполнения отдельных этапов. Под каждым блоком раскрывается его содержание. Стрелки, соединяющие блоки между собой, показывают направление передачи полученной численной информации.

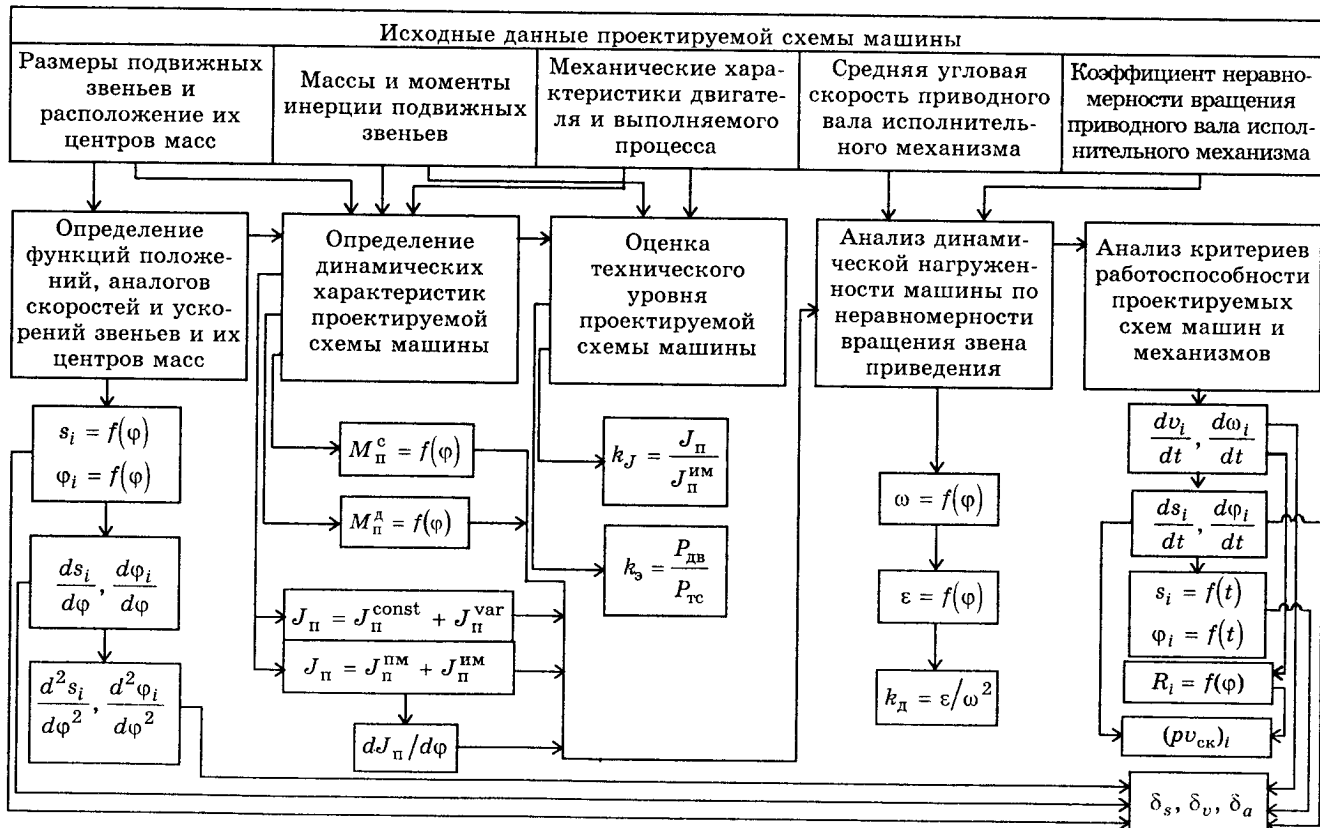


Рис.2.6. Последовательность решения задач динамики машины

Из схемы видно, что последовательность решения той или иной задачи является строго определенной и всем расчетам предшествует определение функций положений, аналогов скоростей, аналогов ускорений звеньев исполнительного механизма. Эти соотношения характеризуют математическую модель схемы того или иного механизма (паспорт его) в том понимании, что зависят только от обобщенной координаты и размеров его звеньев. С помощью их определяются номинальные (теоретические) характеристики положения s_n , скорости v_n , ускорения a_n его звеньев, что дает возможность количественно оценить динамические ошибки по положению рабочего органа (погрешность позиционирования), скорости или ускорению после анализа динамической нагруженности машины в целом.

Несмотря на то, что методика оценки технического уровня машины и ее динамической нагруженности может быть одинаковой для различных типов машин, сравнительная оценка должна учитывать параметры качества той технологической операции, для выполнения которой они предназначены. Кроме того, следует разделять машины, работающие преимущественно в установившемся режиме и в, так называемом, "старт-стоповом" режиме "пуск-остановка". В последнем случае разгон и торможение подлежат управлению по силе, скорости или мощности. Здесь традиционное понимание торможения отсутствует. Поэтому рассмотрим подробнее кинематические и динамические характеристики переходных процессов.

2.5. Выбор и обоснование закона движения вдоль заданной траектории

2.5.1. Кинематика процесса "разгон-торможение"

В технологических процессах часто требуется осуществить перемещение детали с одной позиции на другую по заданной траектории. При этом на движение детали накладываются определенные ограничения в виде времени перемещения из начальной точки в конечную, величины максимального значения ускорения, закона изменения ускорения. Величина максимального значения ускорения количественно определяет величину перегрузок, действующих на соединения звеньев механизма в процессе движения. По закону изменения ускорения можно судить о наличии динамических ударов в этих подвижных соединениях в процессе перемещения детали.

Наиболее благоприятным законом изменения ускорения является такой, при котором обеспечиваются плавное его изменение от нуля в начальном положении до нуля в конечном положении и отсутствие разрывов в функции, описывающей закон изменения

ускорения. Кроме того, скорость движения точки в начальном и конечном положениях также должна быть равна нулю. Последнее условие требует возрастания на участке разгона и затем убывания скорости, то есть наличия положительного и отрицательного ускорения при движении точки по траектории.

Рассмотрим графики некоторых зависимостей $v = f_1(t)$ и $a = f_2(t)$, представленных на рис.2.7, 2.8, 2.9.

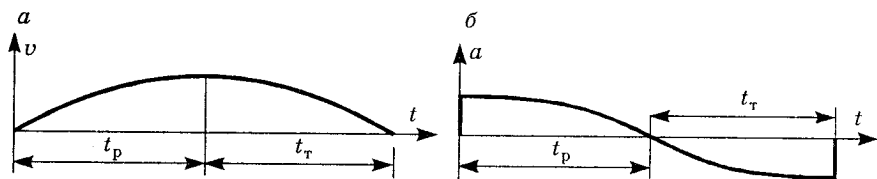


Рис.2.7. Зависимость скорости (а) и ускорения (б) от времени

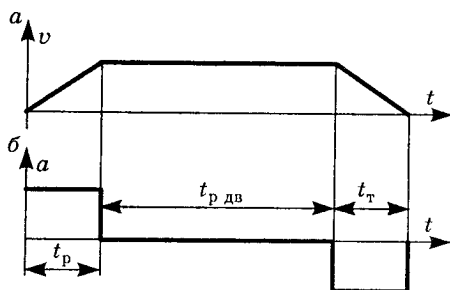


Рис.2.8. Зависимость скорости (а) и ускорения (б) от времени

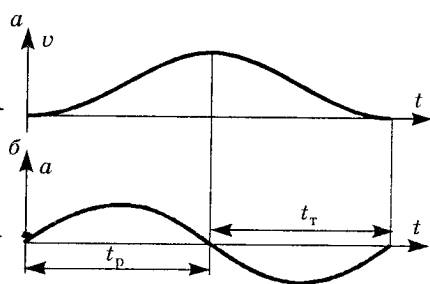


Рис.2.9. Зависимость скорости (а) и ускорения (б) от времени

На рис.2.7, а, 2.8, а, 2.9, а изображены графики законов изменения скорости, соответствующих условию равенства скорости нулю в начальном и конечном положении. Однако при рассмотрении графиков ускорения видно, что на рис.2.7, б в начальном и конечном положениях имеет место мгновенный рост ускорения от нуля до конечной величины и от конечной величины до нуля соответственно. Это приводит к появлению силы $F = ma$ (m — масса детали). При движении точки по закону, изображенному на рис.2.8, б, можно наблюдать наличие таких ударов не только в начальном и конечном положениях, но и в промежуточные моменты времени, при переходе от участка разгона (t_p) к равномерному движению ($t_{p.дв}$) и на переходе к участку торможения (t_r).

Наиболее благоприятный закон движения, с точки зрения динамических нагрузок, изображен на рис.2.9. При таком законе изменения скорости в графике ускорения не наблюдается разрывов и особых точек.

Обычно кинематические характеристики задаются в функции времени. Однако в тех случаях, когда необходимо точное позиционирование детали без ограничения времени (в любом положении детали на ее траектории), рассматривают зависимость кинематических параметров в функции от перемещения, линейного

$$v = f(s), v' = \frac{dv}{ds}$$

или углового

$$\omega = f(\varphi), \omega' = \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Производная скорости по пути v' называется аналогом ускорения. Связь между ускорением и аналогом ускорения определяется известной зависимостью [2]:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v'v, \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega'\omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

При таком задании закона движения время, за которое, например, точка попадает из начального положения в конечное, заранее неизвестно и подлежит вычислению.

Таким образом, задаваясь законом изменения аналога ускорения (по условию обеспечения возможных динамических нагрузок на перемещаемую деталь), можно определить закон изменения скорости движения центра масс детали, его ускорение и требуемое на перемещение время. Время, затраченное на перемещение детали из начального положения в конечное, называется быстроедействием.

Рассмотрим аналитические зависимости между введенными параметрами. Пусть задан закон изменения аналога ускорения точки:

$$v' = f(s) = \frac{dv}{ds}, \text{ тогда } dv = v' ds.$$

Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получим:

$$v = v_0 + \int_{s_0}^s f(s) ds,$$

где s_0 и v_0 — соответственно начальная координата и начальная скорость точки.

Ускорение точки определяется выражением (2.23).

Для определения времени, затраченного на перемещение точки из положения s_0 в положение s , можно записать

$$v = \frac{ds}{dt}, \text{ тогда } dt = \frac{ds}{v}.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получим

$$t = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}.$$

2.5.2. Анализ и синтез законов движения вдоль заданной траектории

Как отмечалось ранее, на некоторой траектории можно выделить участки, на которых скорость возрастает и убывает. Эти участки называются соответственно участком разгона и участком торможения. Кроме того, может существовать участок, на котором движение происходит с постоянной скоростью (рис.2.8).

Наибольший интерес представляет рассмотрение участка разгона. Это связано с тем, что на этом участке расходуется большая часть энергии, необходимой для перемещения детали (точки) от начального до конечного положения. Ускорение на участке разгона имеет положительные значения и определяется выбранным (заданным) законом изменения аналога ускорения v' от пути s , то есть $v' = f(s)$. Скорость точки изменяется от нуля до максимального значения.

На участке торможения ускорение имеет отрицательные значения, а скорость изменяется от максимального значения до нуля.

Задача по оценке (выявлению) закона движения точки вдоль заданной траектории распадается на две отдельные задачи. Это задача анализа и задача синтеза. При решении задачи, связанной с анализом, алгоритм ее решения определяется исходными данными, например, если задано $v' = f(s)$, задача сводится к нахождению ускорения a , скорости v и времени (быстродействия) t в функции от пути s посредством последовательного интегрирования. Если же задана $s = f(t)$, то с помощью обратного действия (дифференцирования) можно определить закон изменения соответствующих параметров в функции от t или от s . В том и в другом случае алгоритм заранее предопределен и не требует введения критериев качественной оценки.

В случае синтеза задача сводится к поиску наилучшего закона изменения кинематических характеристик (ускорения, скорости и координаты) от времени t или от пути s .

Понятие наилучшего закона требует наличия критериев, дающих возможность сравнительной оценки. В рассматриваемом случае в качестве критериев могут быть следующие: энергозатраты на разгон, динамические нагрузки, время отработки заданной координаты. Следует отметить, что при решении задач синтеза довольно часто приходится сталкиваться с тем, что требуется найти такое движение, при котором должны выполняться два противоречивых критерия. Противоречивость критериев заключается в том, что при приближении одного из них к оптимальной величине, другой удаляется от своего оптимального значения. Например, если в качестве критериев выбрать минимальное время достижения заданной координаты и минимальную величину ускорения, то можно заметить, что уменьшение времени отработки заданной координаты требует увеличения ускорения точки. В этом случае в качестве критерия выбирают один, наиболее важный для конкретного случая, а второй представляют в виде ограничения. Например, если в предыдущем примере в качестве основного критерия выбрать время отработки заданной координаты, то величина ускорения может выступать в качестве ограничения. То есть задача будет формулироваться следующим образом: необходимо перевести точку из одного положения в другое (оба положения определены заранее) за минимальное время, при этом ускорение точки не должно превышать некоторой заданной величины.

Задачи анализа и синтеза тесно взаимосвязаны. В некоторых случаях задача синтеза может вытекать из задач анализа. Например, если заранее определены возможные варианты законов движения точки вдоль заданной траектории, то задача синтеза будет состоять из анализа этих вариантов движения и выявления наиболее подходящих с точки зрения соответствия некоторым требованиям качества.

В рассматриваемой задаче часто возникает вопрос, какую работу необходимо совершить для перемещения детали из начального положения в конечное. Понятие работы связано с понятием мощности (работа, совершаемая в единицу времени), определение которой необходимо, например, для обоснования типа двигателя, выбранного в качестве приводного.

Работа по перемещению детали массой m из начального положения в конечное определяется соотношением

$$A = \int_{s_H}^{s_K} F ds = \int_{s_H}^{s_K} m a ds = m \int_{s_H}^{s_K} a ds ,$$

где F — сила, действующая на деталь массой m .

Как отмечалось ранее, основная часть энергии, необходимая для перемещения детали из начального положения в конечное,

затрачивается на участке разгона. Мгновенная мощность движущих сил, требуемая на разгоне, определяется соотношением

$$P_p = F_p v_p,$$

где F_p — сила, действующая на деталь на участке разгона,

v_p — скорость центра масс детали на участке разгона.

Так как

$$F_p = |ma_p|,$$

где a_p — ускорение на участке разгона, то

$$P_p = F_p v_p = ma_p v_p = m v_p^2 v'_p.$$

Удельная мощность (приходящаяся на единицу массы) на участке разгона

$$P_p^{уд} = \frac{P_p}{m} = v_p^2 v'_p = a_p v_p.$$

На практике иногда возникают ситуации, когда мощность источника энергии (аккумулятора, насосной станции, компрессора) ограничена. В этом случае необходимо выбирать такой закон движения центра масс детали, при котором мощность на участке разгона не превышает заданную.

Иначе дела обстоят на участке торможения. При торможении центр масс детали движется с отрицательным ускорением. А это значит, что работа и мощность на этом участке имеют отрицательные значения. Физически это означает, что необходимо отнять приобретенную на участке разгона механическую энергию. Осуществляется это путем превращения механической энергии в тепловую (торможение за счет трения), причем энергия безвозвратно рассеивается. Здесь важно использовать (преобразовать) накопленную механическую энергию, например, в электрическую, с последующей отдачей ее источнику (процесс рекуперации). Поэтому оценка энергозатрат на торможение позволит определить количественно эффективность рекуперативного торможения.

Пусть в технологическом процессе необходимо переместить деталь из начального положения в конечное. Известна длина траектории центра масс детали: $s = s_k - s_n$, где s_k и s_n — начальная и конечная координаты траектории. Скорость центра масс детали в начальном и конечном положениях равна нулю (далее центр масс детали будем называть точкой).

Для перемещения точки по заданной траектории, при условии равенства нулю в начале и конце траектории, ее нужно разогнать до некоторой скорости, а затем затормозить. На движение ее могут быть наложены ограничения. Например, время перемещения из начального положения в конечное должно быть

минимальным; ускорение точки не должно превышать некоторой величины; неточность (погрешность) позиционирования в конечном положении не должна превосходить заданной, при этом мощность источника энергии ограничена.

Будем рассматривать задачу, в которой закон изменения аналога ускорения точки на участке разгона задан. Известны длина траектории и то, что изменение аналога ускорения на участке торможения определяется некоторым законом из множества G .

Необходимо выбрать такой закон изменения аналога ускорения для участка торможения (из множества G), чтобы точка остановилась в конце траектории с допуском на точность $\pm\delta_s$. Причем, кроме заданной точности позиционирования, необходимо, чтобы обеспечивался минимум времени, затрачиваемого на перемещение точки из начального положения в конечное, и минимум модуля максимального ускорения точки. Необходимо построить график зависимости удельной мощности от пройденного пути.

Для пояснения поставленной задачи рассмотрим рис.2.10.

Зададим длину участка разгона s_p и участка торможения s_T :

$$s_p = s_T = s_{\Pi}/2.$$

На участке разгона $s_0 \dots s_{\Pi}/2$ закон изменения аналога ускорения описывается функцией

$$v'_p = A_1 s,$$

значение A_1 — задано.

Такому закону аналога ускорения соответствуют законы изменения $v_p(s)$, $a_p(s)$, $t_p(s)$ изображенные на рис.2.10.

Если допустить, что аналог ускорения на участке торможения ($s_{\Pi}/2 \dots s_{\Pi}$) может изменяться по законам 1 и 2 (рис.2.10), то есть

$$v'_{T1} = -A_2,$$

$$v'_{T2} = \frac{2A_3}{s_{\Pi}}(s - s_{\Pi}),$$

то необходимо найти такие значения A_2 и A_3 , чтобы выполнялось условие допустимой погрешности позиционирования (остановки точки при достижении s_{Π}). Затем проанализировать, при каком законе 1 или 2 выполняются условия минимального времени достижения конечной координаты и модуля ускорения точки.

Как отмечалось ранее; для остановки точки в конце траектории (при $s = s_{\Pi}$) необходимо, чтобы скорость и ускорение при достижении этой координаты были равны нулю. Из этого условия можно определить значения A_2 и A_3 .

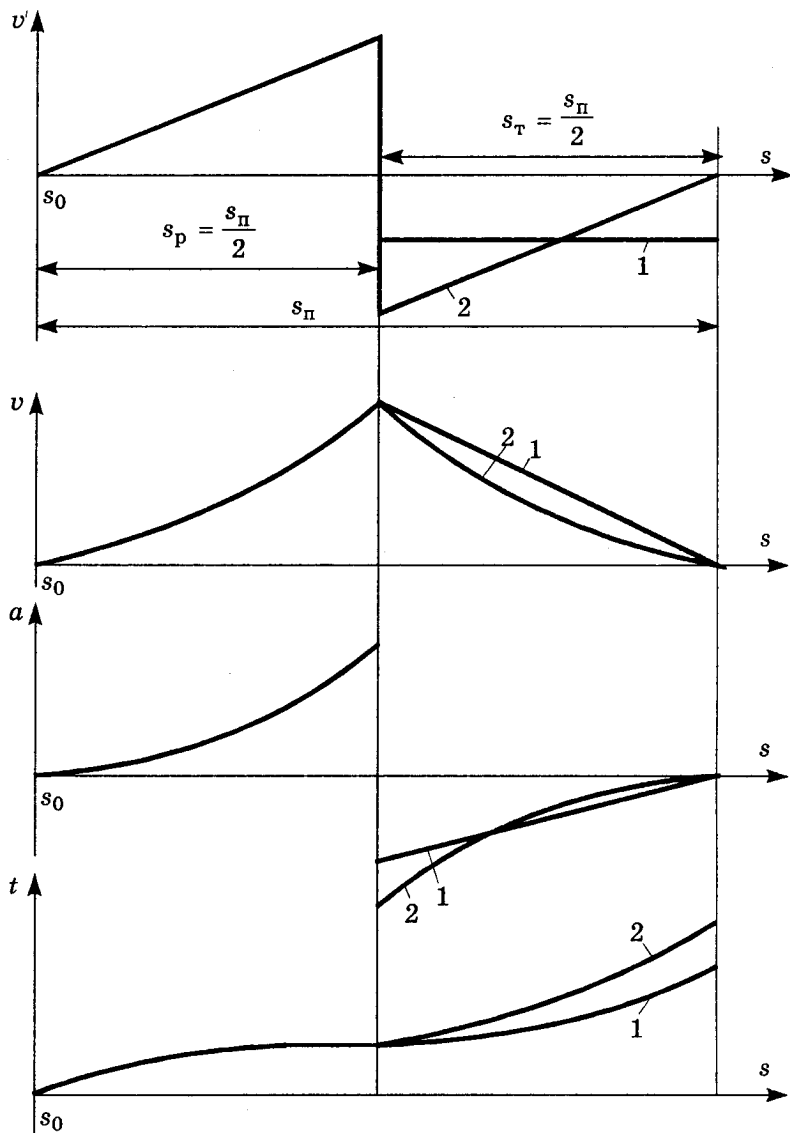


Рис.2.10. Кинематические характеристики процесса "разгон-торможение"

Скорость точки в конце участка разгона равна

$$v_p = \int_{s_0}^{s_\Pi/2} A_1 s ds = A_1 \left(\frac{1}{2} s^2 \right) \Big|_{s_0}^{s_\Pi/2} = \frac{A_1 s_\Pi^2}{8},$$

причем $s_0 = 0$, тогда для закона 1

$$v_{T1} = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} + \int_{s_{\Pi}/2}^s (-A_2) ds = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} - A_2 s \Big|_{s_{\Pi}/2}^s = \frac{A_1}{8} s_{\Pi}^2 - A_2 s + A_2 s_{\Pi}/2.$$

В конечной точке траектории (при $s = s_{\Pi}$) v_{T1} должна быть равна нулю:

$$0 = \frac{A_1}{8} s_{\Pi}^2 - A_2 s_{\Pi} + A_2 \frac{s_{\Pi}}{2},$$

откуда

$$A_2 = \frac{A_1}{4} s_{\Pi}.$$

Аналогично для закона 2

$$v_{T2} = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} + \int_{s_{\Pi}/2}^s \frac{2A_3}{s_{\Pi}} (s - s_{\Pi}) ds = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} + \frac{A_3}{s_{\Pi}} s^2 - \frac{A_3}{4} s_{\Pi} - 2A_3 s + A_3 s_{\Pi},$$

$$0 = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} + \frac{A_3}{s_{\Pi}} s_{\Pi}^2 + \frac{A_3}{4} s_{\Pi} - 2A_3 s_{\Pi} + A_3 s_{\Pi} = \frac{A_1 s_{\Pi}^2}{8} - \frac{s_{\Pi}}{4} A_3,$$

откуда

$$A_3 = \frac{4A_1 s_{\Pi}^2}{8s_{\Pi}}; \quad A_3 = \frac{A_1}{2} s_{\Pi}.$$

Таким образом, законы изменения аналога ускорения на участке торможения можно записать в следующем виде:

$$v'_{T1} = \frac{A_1}{4} s_{\Pi}; \quad v'_{T2} = \frac{A_1}{2} s_{\Pi} (s - s_{\Pi}).$$

Так как $a = vv'$, то ускорение в конце траектории, по условию $v(s_{\Pi}) = 0$, будет равно нулю для обоих законов движения.

Далее необходимо построить зависимости $v_{T1}(s)$, $v_{T2}(s)$, $a_{T1}(s)$, $a_{T2}(s)$, $t_{T1}(s)$ и $t_{T2}(s)$ проанализировать их и выбрать закон изменения аналога ускорения v'_{T1} или v'_{T2} , наиболее отвечающий требованиям технологического процесса.

Как видно из рис.2.10, закону изменения аналога ускорения 1 соответствует меньшее максимальное значение ускорения точки. Однако время, затраченное на торможение, а значит, и полное время перемещения точки из начального положения в конечное, больше, чем при торможении по закону v'_{T2} .

Исходя из того, какой параметр наиболее важен для конкретного технологического процесса, выбирают закон изменения аналога ускорения для участка торможения v'_{T1} , если необходим

минимум ускорения точки, или для участка v'_{T2} — если необходимо минимальное время перемещения. Для построения графика зависимости удельной мощности от пройденного пути воспользуемся соотношением

$$P_{уд} = av = v^2 v'.$$

2.6. Особенности решения уравнений движения приводного вала машины с учетом характеристики приводного двигателя

2.6.1. Определение закона движения приводного вала машины с электродвигателем переменного тока

Основой расчета быстродействия и погрешностей позиционирования автоматизированного технологического оборудования является получение закона изменения линейной или угловой координаты приводного устройства в функции времени. Если машина имеет одну степень подвижности, то решение такой задачи, как было показано ранее, удобно проводить с использованием динамических характеристик J_{Π} , $dJ_{\Pi}/d\varphi$ определяющих изменение масс подвижных звеньев в функции обобщенной координаты, и M_{Π}^d , M_{Π}^c , определяющих изменение силовых характеристик. Таким образом, кинематические параметры $\varepsilon = f(\varphi)$, $\omega = f(\varphi)$ и $t = f(\varphi)$ можно получить, решая уравнения движения звена приведения в дифференциальной или интегральной формах. В расчетной практике часто встречаются сочетания следующих зависимостей [3]:

- 1) $J_{\Pi} = \text{const}$, $M_{\Pi} = \text{const}$;
- 2) $J_{\Pi} = \text{const}$, $M_{\Pi} = M(\varphi)$ или $M_{\Pi} = M(\omega)$ или $M_{\Pi} = M(t)$;
- 3) $J_{\Pi} = J(\varphi)$, $M_{\Pi} = M(\varphi)$;
- 4) $J_{\Pi} = \text{const}$, $M_{\Pi} = M_{\Pi}^d(\omega) - M_{\Pi}^c(\varphi)$;
- 5) $J_{\Pi} = J(\varphi)$, $M_{\Pi} = M_{\Pi}^d(\omega) - M_{\Pi}^c(\varphi)$.

В первом случае дифференциальное уравнение движения звена приведения не отличается от уравнения $J\varepsilon = M$, рассматриваемого в теоретической механике при исследовании вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Во втором и третьем случаях решение дифференциального уравнения можно представить формулой, так как оно решается в общем виде.

Четвертый и пятый случаи требуют численного интегрирования. Последний случай представляет собой распространенную

задачу о движении машины с электродвигателем. В данном случае имеем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$J_{\Pi}(\varphi) \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{\Pi}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} = M_{\Pi}^{\Delta}(\omega) - M_{\Pi}^c(\varphi).$$

Когда приведенные моменты движущих сил, сил сопротивления и приведенный момент инерции являются функцией лишь положения (например, координаты φ), для решения удобно использовать уравнения движения в энергетической (интегральной) форме:

$$\frac{J_{\Pi}^i \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{2} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\Delta} d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi = A^{\Delta} - A^c = \Delta A. \quad (2.24)$$

Из (2.44) находится мгновенная скорость ω_i в рассматриваемом положении

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{\Pi}^i} \left(\frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{2} + \Delta A \right)}.$$

Здесь $\Delta A = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\Delta} d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi$ удобно представлять графически

или в виде таблицы значений на каждом i -ом шаге. Полученная формула дает истинный закон изменения скорости звена приведения. Затруднение представляет лишь определение начального значения скорости при линейной зависимости $\omega(\varphi)$ в первом шаге, когда $\omega_{i-1} = 0$. Как видно из формулы (2.24), значение ω_i в первом шаге зависит как от значения $J_{\Pi}(\varphi)$, так и от ΔA . Это говорит о том, что закон изменения $\omega = \omega(\varphi)$ в первом шаге, то есть ускорение $\varepsilon = \omega\omega'$, зависит от того, с какого начального положения машины она трогается с места. Это оказывается важным, так как инерционный момент на приводном валу определяется значением

$$J_{\Pi}^i \varepsilon_i = J_{\Pi}^i \omega_i \omega_i'.$$

При интегрировании уравнения движения в общем виде необходимо установить начальные условия. Однако если приведенные моменты инерции и сил зависят от разных параметров, то задача усложняется и ее решают обычно приближенно.

При установившемся режиме работы машины решение усложняется тем, что установление начальных условий требует исследования периода разгона.

Механическая характеристика $M_d = M(\omega)$ наиболее распространенного асинхронного двигателя представлена на рис.2.4. Такая кривая характеризуется четырьмя особыми точками. Две из них определяют скорости: ω_c — синхронную скорость, то есть скорость ротора при $M_d = 0$, соответствующую холостому ходу, и ω_{\min} — минимально допустимую скорость рабочего участка механической характеристики. Две другие точки определяют моменты на валу: M_H — номинальный момент, соответствующий эффективной мощности, гарантируемой заводом-изготовителем, и M_{\max} — максимальный момент, соответствующий ω_{\min} .

Решить аналитически уравнение движения звена приведения с учетом характеристики $M_d = M(\omega)$ и представлением решения в конечной форме чаще всего невозможно. Поэтому следует иметь в виду, что используемые частные случаи не позволяют делать обобщающих выводов. Рассмотрим пример решения, когда зависимость $M_d = M(\omega)$ на рабочем участке представляется линейной. В этом случае, по условию пропорциональности сторон прямоугольного треугольника для разных значений ω , имеем равенство отношений [3]:

$$\frac{M_H}{M_0} = \frac{\omega_c - \omega_H}{\omega_c}; \quad \frac{M_0}{M_d} = \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega}.$$

Совместное решение этих равенств дает функцию

$$M_d = M_0 - \frac{M_H}{\omega_c - \omega_H} \omega.$$

Здесь M_0 — некоторый условный начальный момент на валу электродвигателя при $\omega = 0$, равный

$$M_0 = M_H \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_H}.$$

Несколько точнее можно приближенно воспроизвести зависимость $M_d = M(\omega)$ на рабочем участке характеристики в виде параболы, проходящей через три точки: $(\omega_{кр}, M_{\max})$; (ω_H, M_H) ; $(\omega_c, M_d = 0)$ [3]. Уравнение этой параболы можно представить в виде

$$M_d = a + b\omega + c\omega^2.$$

Для нахождения координат a , b , c следует составить следующую систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$a + b\omega_{кр} + c\omega_{кр}^2 = M_{\max},$$

$$\begin{aligned} a + b\omega_{\text{H}} + c\omega_{\text{H}}^2 &= M_{\text{H}}, \\ a + b\omega_{\text{C}} + c\omega_{\text{C}}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Если $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega)$, $M_{\text{C}}^{\text{п}} = M(t)$ и $J_{\text{п}} = \text{const}$, то уравнение движения главного приводного вала имеет следующий вид:

$$M_{\text{д}}(\omega) - M_{\text{C}}(t) = J_{\text{п}}^{\text{I}} \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.26)$$

При подстановке в уравнение (2.26) функции (2.25) получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_0 - \frac{M_{\text{H}}\omega}{\omega_{\text{C}} - \omega_{\text{H}}} - M_{\text{C}}(t)}{J_{\text{п}}^{\text{I}}}. \quad (2.27)$$

Обозначив

$$\frac{M_0 - M_{\text{C}}(t)}{J_{\text{п}}^{\text{I}}} = g(t), \quad \frac{M_{\text{H}}}{\omega_{\text{C}} - \omega_{\text{H}}} = b, \quad \frac{b}{J_{\text{п}}^{\text{I}}} = p,$$

уравнение (2.27) представим в виде

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{b}{J_{\text{п}}^{\text{I}}}\omega = g(t). \quad (2.28)$$

Решение уравнения (2.28) имеет вид

$$e^{pt_k}\omega_k - e^{pt_i}\omega_i = \int_{t_i}^{t_k} e^{pt}g(t)dt. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.29) позволяет определить величину ω_k в момент времени t_k , если известна величина ω_i в момент времени t_i .

Уравнение (2.29) дает в ряде случаев аналитическое решение. Это возможно, если, например, $g(t)$ является алгебраическим или тригонометрическим многочленом.

Пусть, например, $M_{\text{д}} = M_0 - b\omega$, $M_{\text{C}} = a_1 + b_1 \sin t$, $J_{\text{п}} = J_{\text{п}}^{\text{I}} = \text{const}$, $t_i = 0$, $t_k = t$, $\omega_i = 0$, $\omega_k = \omega$. Для рассмотренного примера уравнение (2.29) даст

$$e^{pt}\omega = \int_0^t e^{pt}(a_2 - b_2 \sin ct)dt, \quad (2.30)$$

где

$$a_2 = \frac{M_0 - a_1}{J_{\text{п}}^{\text{I}}}, \quad b_2 = \frac{b_1}{J_{\text{п}}^{\text{I}}}.$$

Решение уравнения (2.30) дает выражение

$$e^{pt}\omega = \frac{a_2}{p}(e^{pt} - 1) - \frac{b_2}{p^2 + c^2} \left[e^{pt}(p \sin ct - \cos ct) - c \right],$$

откуда

$$\omega = \frac{a_2}{p} - \frac{a_2}{pe^{pt}} - \frac{b_2}{p^2 + c^2} \left(p \sin ct - c \cos ct - \frac{c}{e^{pt}} \right).$$

Рассмотрим численный пример [3]. Пусть $M_0 = 200$ Н·м, $b = 20$ Н·м·с, $a_1 = b_1 = 40$ Н·м, $c = 10$ 1/с, $J_{\Pi}^I = 1$ кг·м². Тогда

$$p = \frac{b}{J_{\Pi}^I} = 20 \text{ 1/с}; \quad a_2 = \frac{M_0 - a_1}{J_{\Pi}^I} = 160 \text{ 1/с}^2; \quad b_2 = \frac{b_1}{J_{\Pi}^I} = 40 \text{ 1/с}^2.$$

После подстановки численных значений

$$\omega = 98 - 97,2 \frac{1}{e^{20t}} - 0,8(2 \sin 10t - \cos 10t). \quad (2.31)$$

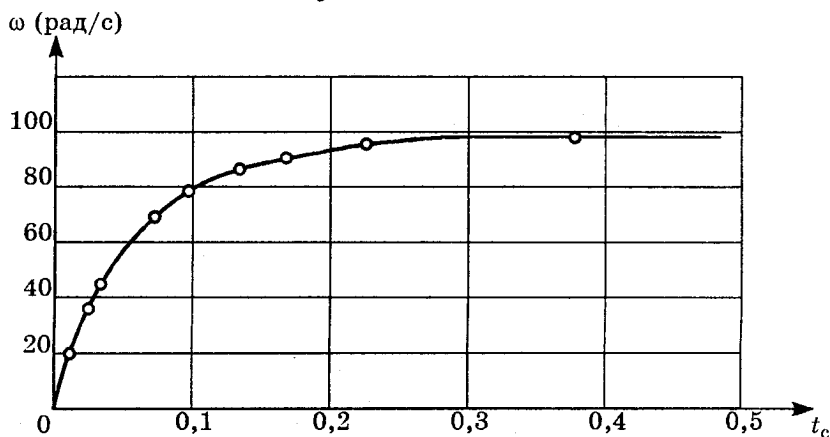


Рис.2.11. Скоростная характеристика звена приведения машины для периода пуска [3]

Уравнение (2.31) представляет скоростную характеристику приводного вала, машины для периода разгона. Численное значение уравнения (2.31) представлено на рис.2.11 [3]. Анализ уравнения (2.31) показывает, что с увеличением t второе слагаемое быстро стремится к нулю. Это слагаемое определяет разницу между текущим значением скорости ω и ее значением в установившемся движении. Скорость установившегося движения определится соотношением

$$\omega_y = 98 - 0,8(2 \sin 10t - \cos 10t). \quad (2.32)$$

Выражение в скобках указывает на периодичность изменения скорости в установившемся движении.

2.6.2. Определение закона движения приводного вала машины с электродвигателем постоянного тока

Определим зависимость $\omega = \omega(t)$ при изменении приведенного момента движущих сил по закону $M^D = a - b\omega$ (для электродвигателя постоянного тока). Пусть при этом приведенный момент сил сопротивления $M_{II}^c = \text{const}$, приведенный момент инерции $J_{II} = J_{II}^I = \text{const}$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения звена приведения (главного приводного вала машины) имеет вид

$$J_{II}^I \frac{d\omega}{dt} = M_{II}^D - M_{II}^c = a - b\omega - M_{II}^c.$$

Интегрирование его дает

$$\int_0^t dt = J_{II}^I \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{a - b\omega - M_{II}^c}, \quad t = -\frac{J_{II}^I}{b} \ln \frac{c - b\omega}{c},$$

откуда

$$\omega = \frac{c}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{J_{II}^I}} \right), \quad (2.33)$$

где $c = a - M_{II}^c$. При $t \rightarrow \infty$ угловая скорость звена приведения стремится к ее установившемуся значению

$$\omega_y = \frac{c}{b} = \frac{a - M_{II}^c}{b}. \quad (2.34)$$

Как видно из уравнений (2.31 ... 2.34), угловая скорость звена приведения зависит от характера сил, действующих в механизмах, и от инерционности звеньев, которая характеризуется величиной J_{II} . Для многих машинных агрегатов при установившемся режиме движения силы и приведенный момент инерции J_{II} периодически изменяются. Именно вследствие этих причин скорость звена приведения также изменяется периодически. Эти колебания скорости имеют место как при разгоне (торможении), так и в установившемся движении.

2.6.3. Оценка неравномерности установившегося движения приводного вала машины

Периодические колебания скорости установившегося движения приводного вала машины происходят вокруг некоторого ее среднего значения (рис.2.12). Средняя истинная скорость определяется соотношением

$$\omega_{cp}^И = \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt, \quad (2.35)$$

где T — время цикла, соответствующего угловому перемещению $\varphi_{ц}$ приводного вала. По истечении времени T функция $\omega = \omega(\varphi)$ повторяет свои значения. Скорость $\omega_{ср}$ воображаемого среднего равномерного движения, определяемая по формуле (2.35), обеспечивает отработку координаты $\varphi_{ц}$ за то же время T , что и при истинном значении $\omega = \omega(\varphi)$. Так как $\omega = d\varphi/dt$, то время T одного цикла определится из соотношения

$$T = \int_0^{\varphi_{ц}} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (2.36)$$

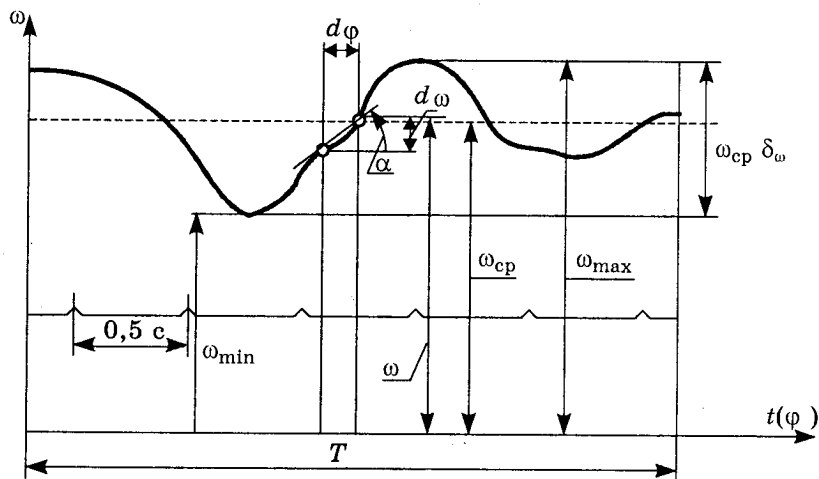


Рис.2.12. Тахограмма установившегося периодического (циклового) движения приводного вала машины

Использование формул (2.35) и (2.36) предполагает знание функций $\omega = \omega(t)$ и $\omega = \omega(\varphi)$. Практически удобнее определять среднюю скорость по формуле

$$\omega_{ср} = \frac{1}{\varphi_{ц}} \int_0^{\varphi_{ц}} \omega(\varphi) d\varphi.$$

При незначительном отклонении $\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$ от ее среднего значения используют также формулу

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$

Для оценки степени неравномерности вращения приводного вала машины за цикл установившегося движения вводят средний

коэффициент неравномерности скорости

$$\delta_{\omega} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = 2 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}.$$

С помощью коэффициента δ_{ω} устанавливается связь между изменением работы ΔA сил движущих и технологического сопротивления (приращением кинетической энергии машины, постоянной составляющей приведенного момента инерции и средней угловой скоростью звена приведения). Эта связь устанавливается исходя из следующих рассуждений: если приведенный момент инерции машины $J_{\text{п}} = J_{\text{п}}^{\text{I}} = \text{const}$, то имеет место очевидное соотношение

$$\frac{J_{\text{п}}^{\text{I}}}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \Delta A_{\max}.$$

Последнее равенство представим в виде

$$\delta_{\omega} = \frac{\Delta A_{\max}}{J_{\text{п}}^{\text{I}} \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (2.37)$$

Уравнение (2.37) указывает на то, что повышенной равномерности вращения приводного вала машины (уменьшение коэффициента δ_{ω}) можно достичь путем увеличения постоянной составляющей $J_{\text{п}}^{\text{I}}$ приведенного момента инерции.

Методика математического моделирования и исследования установившегося движения машины достаточно подробно рассмотрена в учебной литературе [2], [3]. Периоду разгона (торможения) также уделено должное внимание, например, в [15]. Однако в меньшей степени отражены некоторые особенности переходных процессов. Возникают особые затруднения в "стыковке" режимов разгона и установившегося движения. Моделирование момента входа в установившийся режим работы машины после разгона и момента входа в режим торможения имеет особо важное значение для машин автоматического действия. Сравнительная количественная оценка динамики рассматриваемого класса машин может быть проведена на основании сравнения их энергетических и силовых характеристик с использованием критериев качественной оценки энергопотребления машин и их динамической нагруженности.

2.7. Методика и алгоритм численного исследования неравномерности вращения приводного вала машины

В процессе схемной проработки автоматизированных технологических комплексов приходится проводить анализ скорости ω_1 главного приводного вала той или иной технологической машины

или средства автоматизации как некоторой функции угла φ_1 его поворота. Для этого формируется "жесткая" динамическая модель машины, представляющая собой вращающееся с угловой скоростью $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$ некоторое звено, обладающее приведенным моментом инерции $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\varphi_1)$, к которому приложены приведенные моменты движущих сил $M_{\Pi}^D = M_{\Pi}^D(\varphi_1)$ и сил сопротивления $M_{\Pi}^C = M_{\Pi}^C(\varphi_1)$. Затем для динамической модели (звена приведения) записывается уравнение движения, например, в энергетической форме:

$$\frac{J_{\Pi_i} \omega_{1i}^2}{2} - \frac{J_{\Pi_0} \omega_{10}^2}{2} = \int_0^{\varphi_i} M_{\Pi}^D d\varphi_1 + \int_0^{\varphi_i} M_{\Pi}^C d\varphi_1, \quad (2.38)$$

из которого определяется зависимость $\omega_1(\varphi_1)$.

Традиционная методика не позволяет провести отдельный анализ влияния массово-геометрических характеристик привода и исполнительного механизма машины на неравномерность вращения звена приведения. Она не позволяет также выявить отдельного влияния сил технологического сопротивления (вида выполняемой операции) и сил движущих (типа приводного двигателя). Это во многом ограничивает использование математического моделирования для реализации многовариантного численного эксперимента в процессе схемной проработки автоматизированных технологических комплексов.

Для решения задачи исследования отдельного влияния геометрических, массовых, кинематических и силовых характеристик машины и выполняемой операции технологического процесса предлагается угловую скорость определять по формуле

$$\omega_1^i = \sqrt{\frac{2(T_{\text{ср}} + \Delta T_{\text{ср}}^i)}{J_{\Pi}^i}},$$

где J_{Π}^i — приведенный момент инерции машины;

$T_{\text{ср}}$ — среднее значение кинетической энергии;

$\Delta T_{\text{ср}}$ — отклонение кинетической энергии от среднего значения.

Величина $T_{\text{ср}}$ находится как среднее интегральное значение кинетической энергии за цикл установившегося движения (рис. 2.13)

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d\varphi.$$

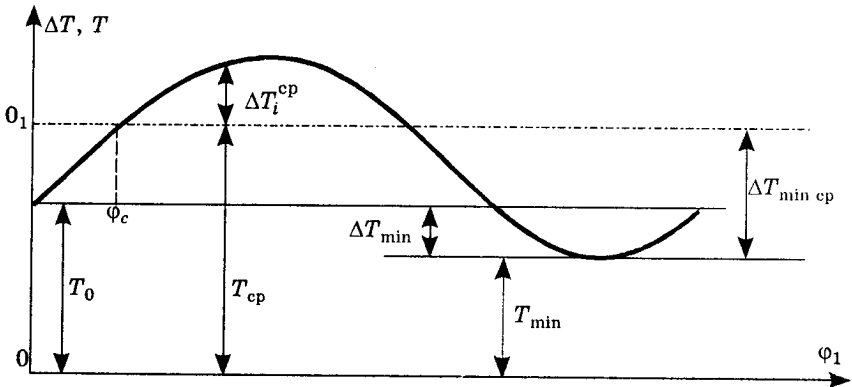


Рис.2.13. График функции $T = T(\varphi_1)$ кинетической энергии машины от угла φ_1 поворота главного приводного вала машины

Текущее значение кинетической энергии T_i может быть вычислено по формуле

$$T_i = T_0 + \Delta T_i,$$

где T_0 — кинетическая энергия в начале цикла,

$$T_0 = \frac{J_{п0} \omega_{10}^2}{2},$$

ΔT_i — изменение кинетической энергии.

На основании уравнения (2.38) имеем

$$\Delta T_i = A_{д_i} + A_{с_i} = \int_0^{\varphi_i} (M_{п}^д + M_{п}^с) d\varphi,$$

где $A_{д_i}$ — работа движущих сил;

$A_{с_i}$ — работа сил сопротивления;

$M_{п}^д$ — приведенный момент движущих сил;

$M_{п}^с$ — приведенный момент сил сопротивления.

Из рис.2.13 видно, что выражение $T_i = T_{ср} + \Delta T_i^{ср}$ можно представить следующим образом:

$$T_i = T_{\min} + \Delta T_{\min ср} + A_{с-i}^д + A_{с-i}^с,$$

где T_{\min} — минимальное значение кинетической энергии машины;

$\Delta T_{\min ср}$ — разность между средним и минимальным значениями кинетической энергии

$$\Delta T_{\min ср} = T_{ср} - T_{\min};$$

A_{c-i}^{Π} — работа движущих сил на интервале $[\varphi_c, \varphi_i]$

$$A_{c-i}^{\Pi} = \int_{\varphi_c}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\Pi} d\varphi;$$

A_{c-i}^c — работа сил сопротивления на интервале $[\varphi_c, \varphi_i]$

$$A_{c-i}^c = \int_{\varphi_c}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi.$$

Угол φ_c соответствует угловому положению приводного вала, при котором $T_i = T_{\text{ср}}$.

Тогда выражение (2.38) для определения угловой скорости звена приведения можно представить в следующем виде:

$$\omega_{1i} = \sqrt{(\Delta\omega_{1i})^2 + (\Delta\omega_{2i})^2 + (\Delta\omega_{3i})^2 + (\Delta\omega_{4i})^2}, \quad (2.39)$$

$$(\Delta\omega_{1i})^2 = \frac{2T_{\text{min}}}{J_{\Pi i}}, \quad (2.40)$$

$$(\Delta\omega_{2i})^2 = \frac{2\Delta T_{\text{min ср}}}{J_{\Pi i}}, \quad (2.41)$$

$$(\Delta\omega_{3i})^2 = \frac{\varphi_c \int_{\varphi_c}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\Pi} d\varphi}{J_{\Pi i}}, \quad (2.42)$$

$$(\Delta\omega_{4i})^2 = \frac{\varphi_c \int_{\varphi_c}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi}{J_{\Pi i}}. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.39) ... (2.43) позволяют провести анализ раздельного влияния динамических характеристик машины и выполняемой технологической операции на неравномерность вращения главного приводного вала.

Как видно из уравнения (2.40) функция $\Delta\omega = \Delta\omega_{1i}(\varphi_1)$ определяет влияние "внутренней" динамики машины. Здесь T_{min} — постоянное значение кинетической энергии всех звеньев механизмов с постоянными передаточными отношениями (винт-гайка, шестерня-рейка, ременная передача, коробки скоростей с круглыми зубчатыми колесами и т.п.), то есть эта величина учитывает массовые и кинематические характеристики привода. Величина

$J_{\Pi i}$ определяется суммой двух слагаемых $J_{\Pi i} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi i}^{\Pi}$. Здесь

$J_{\Pi}^I = \text{const}$ — приведенный момент инерции всех звеньев машины от двигателя до звена приведения. $J_{\Pi i}^{\Pi} = J_{\Pi}^{\Pi}(\varphi_1)$ является

периодической функцией с периодом 2π . Таким образом, формула (2.40) позволяет судить о влиянии значения J_{Π}^I и амплитудного значения функции $J_{\Pi}^{II} = J_{\Pi}^{II}(\varphi)$ на неравномерность движения звена приведения. Если $\left(J_{\Pi}^{II}\right)_{\max} < J_{\Pi}^I$ и T_{\min} — достаточно большое число, то колебание амплитудных значений величины $\Delta\omega_{1i}$ будет несущественным.

Из формулы (2.41) и рис. 2.13 следует, что величина характеризует превышение значения средней кинетической энергии $T_{\text{ср}}$ над ее минимальным значением T_{\min} . Поэтому числитель формулы (2.41) есть постоянное число. Знаменатель же $J_{\Pi_i} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$, это означает, что амплитудные значения функции $\Delta\omega_{2i}$ будут меньше амплитудных значений функции $\Delta\omega_{1i}$. Их значения определяются соотношением значений T_{\min} и $T_{\min \text{ ср}}$. Разница в физическом смысле величин T_{\min} и $T_{\min \text{ ср}}$ состоит в том, что приращение кинетической энергии определяется разностью работ сил движущих и сопротивления. Величина же T_{\min} определяется только массами (моментами инерции) и скоростями центров масс звеньев (угловыми скоростями звеньев).

Формулы (2.42), (2.43) дают возможность судить о раздельном влиянии сил движущих (M_{Π}^D) и сопротивления (M_{Π}^C) на неравномерность вращения главного приводного вала.

Таким образом, раздельный анализ зависимостей (2.40) — (2.43) позволяет судить о динамике машины раздельно по силовым и массовым ее характеристикам. Сравнения зависимостей (2.40) — (2.43) полезно проводить по их амплитудным значениям между собой, а также сравнением их с амплитудными значениями зависимости (2.39).

На рис. 2.14 представлена схема алгоритма для определения составляющих $\Delta\omega_{1i}^2$ в соответствии с выражениями (2.40) — (2.43).

Для использования указанной подпрограммы необходимо известными методами предварительно получить и передать в подпрограмму массивы обобщенной координаты φ_1 , переменной составляющей приведенного момента инерции машины J_{Π}^{II} , приведенного момента сил сопротивления M_{Π}^C , угловой скорости ω_1 , а также простые переменные — шаг $\Delta\varphi_1$, среднее значение угловой скорости звена приведения $\omega_{1\text{ср}}$, постоянную составляющую приведенного момента инерции J_{Π}^I , приведенный момент движущих сил M_{Π}^D и размерность массивов n (блок 2).

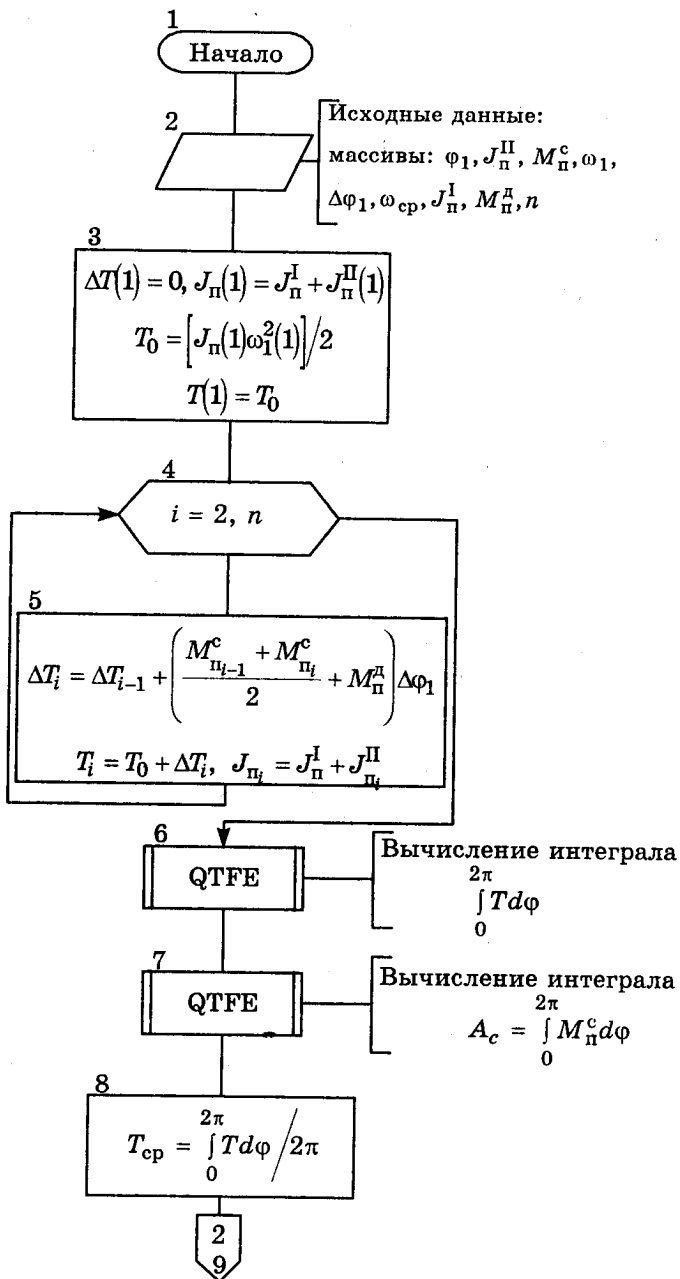
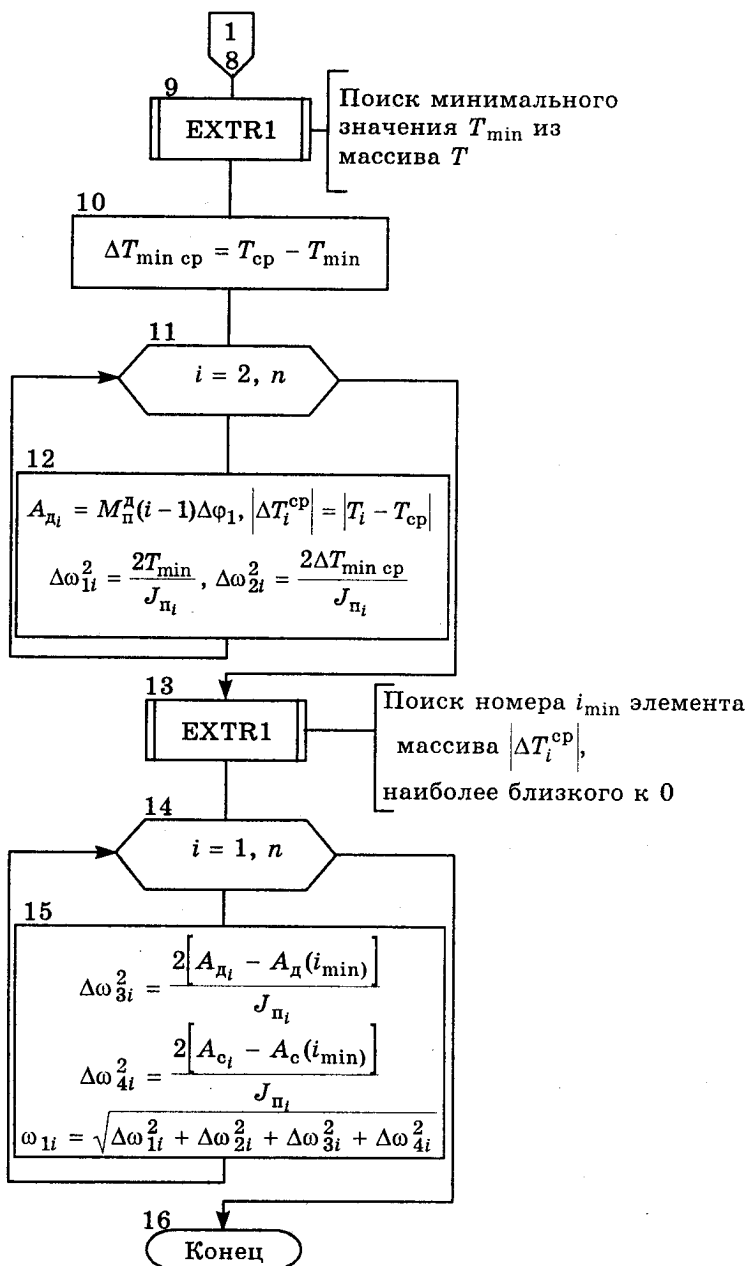


Рис.2.14. Схема алгоритма исследования закона



движения главного приводного вала машины

В результате расчетов, выполняемых в блоках 3 — 15, находятся массивы составляющих $\Delta\omega_{1i}^2$, $\Delta\omega_{2i}^2$, $\Delta\omega_{3i}^2$, $\Delta\omega_{4i}^2$.

На рис.2.15 приведены результаты вычислений по приведенной методике для кривошипно-ползунного механизма со следующими динамическими характеристиками:

– приведенный момент инерции привода $J_{\Pi}^I = 32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

– средняя угловая скорость приводного вала в установившемся движении $\omega_{\text{ср}} = 20 \text{ 1/с}$;

– массы и моменты инерции звеньев исполнительного механизма: кривошипа $J_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, шатуна $J_{s2} = 0,49 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $m_2 = 60 \text{ кг}$, ползуна $m_3 = 150 \text{ кг}$;

– крутящий момент на приводном валу двигателя $M_{\Pi}^A = 213 \text{ Н} \cdot \text{м}$;

– выполняемая операция — строгание.

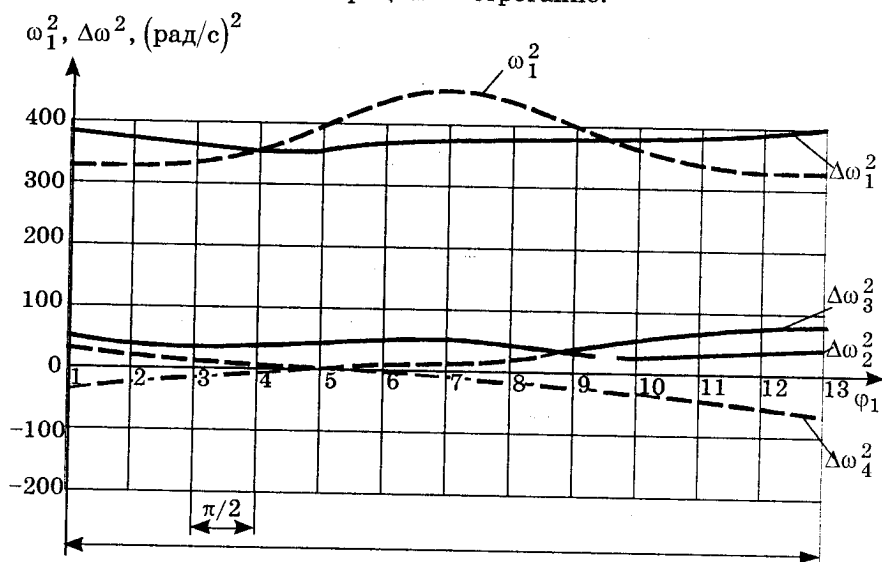


Рис.2.15. Влияние составляющих $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3$ и $\Delta\omega_4$ на значение скорости ω_1 приводного вала машины, определяемой из формулы

$$\omega_1^2 = (\Delta\omega_1)^2 + (\Delta\omega_2)^2 + (\Delta\omega_3)^2 + (\Delta\omega_4)^2$$

Из рис.2.15 видно, что для рассмотренной машины с выбранными массово-геометрическими характеристиками ее подвижных звеньев (привода и исполнительного механизма) наибольшее значение оказывает составляющая $\Delta\omega_1^2 = 2T_{\text{min}}/J_{\Pi_1}$. Это означает, что основная доля мощности приводного двигателя

расходуется на вращение привода, хотя неравномерность вращения и амплитудные значения функции $\omega_i = \omega_1(\varphi_1)$ зависят от всех составляющих. Варьируя динамические характеристики машины $J_{\Pi}^I, J_{\Pi}^{II} = J_{\Pi}^{II}(\varphi_1), M_{\Pi}^D = M_{\Pi}^D(\varphi_1)$ при выполнении одной и той же

операции, характеризующейся функцией $M_{\Pi}^c = M_{\Pi}^c(\varphi_1)$ представляется возможность подобрать наиболее выгодные значения ее геометрических, массовых и силовых характеристик. Можно также решать и другую задачу. Для неизменных значений динамических характеристик машины путем перебора функций $M_{\Pi}^c = M_{\Pi}^c(\varphi_1)$

представляется возможность найти наилучшую технологическую операцию, которая будет выполняться данной машиной с наиболее рациональной функцией $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$. Здесь наиболее рациональной функцией можно считать ту, которая имеет наименьший переход амплитудных значений и наименьшее число экстремумов.

Для более глубокого изучения динамики машинного агрегата целесообразно использовать следующую методику:

1. Исследовать влияние постоянной составляющей приведенного момента инерции машины J_{Π}^I на амплитудные значения угловой скорости приводного вала при заданных значениях функции $M_{\Pi}^D = M_{\Pi}^D(\varphi_1)$ и $M_{\Pi}^c = M_{\Pi}^c(\varphi_1)$ в установившемся движении.

2. Проанализировать отдельно влияние сил движущих и сопротивления на амплитудные значения угловой скорости приводного вала машины. Для этого построить отдельно графики функций (2.40) ... (2.43) и проанализировать их влияние на значения функций (2.39).

3. Проанализировать влияние постоянной составляющей J_{Π}^I приведенного момента инерции на значение коэффициента δ_{ω} . Для этого построить график зависимости $\delta_{\omega} = \delta_{\omega}(J_{\Pi}^I)$.

ОЦЕНКА ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЖЕННОСТИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

3.1. Критерии качественной оценки работоспособности машин, механизмов, кинематических пар

3.1.1. Коэффициенты энергопотребления (энергозатрат)

В общем случае мощность движущих сил машины $P_{дс}$ затрачивается не только на преодоление сил полезного (технологического) сопротивления $P_{пс}$, вредного сопротивления $P_{вс}$, но и на преодоление мощности сил инерции $P_{и}$, сил тяжести P_G и сил упругости P_y . Уравнение баланса мощности для этого случая имеет вид

$$P_{дс} = P_{пс} + P_{вс} \pm P_{и} \pm P_G \pm P_y. \quad (3.1)$$

Знаки (\pm) означают, что эти силы могут совпадать с направлением скоростей и их точек приложения или быть противоположными. Это говорит о том, что с точки зрения энергопотребления имеет смысл использовать возвращение энергии при торможении или же для совершения полезной работы за счет сил инерции. Это же относится к силам веса и упругости. Можно, например, использовать работу сил инерции при торможении для деформации упругого элемента, а накопленную энергию такой упругой деформации использовать для разгона рабочего органа или для преодоления сил полезного (технологического) сопротивления. Поиск вариантов технической реализации такой "перекачки" энергии является важным направлением совершенствования машин с целью снижения их энергопотребления. Большинство же машин безвозвратно теряют энергию, накопленную при разгоне рабочего органа. Для них в уравнение (3.1) последние три члена входят со знаком плюс. Разделив первую и вторую часть уравнения (3.1) на $P_{пс}$, получим уравнение

$$k_э = 1 + k_{вс}^э \pm k_{и}^э \pm k_G^э \pm k_y^э. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) позволяет дать количественную оценку энергопотреблению (энергозатратам) машины отдельно на преодоление сил вредного сопротивления $k_{вс}^э = P_{вс}/P_{пс}$, сил инерции $k_{и}^э = P_{и}/P_{пс}$, сил веса $k_G^э = P_G/P_{пс}$ и сил упругости $k_y^э = P_y/P_{пс}$. Из уравнения (3.2) видно, что превышение коэффициентом

$k_э = P_{дс} / P_{тс}$ единицы численно характеризует, насколько потребляемая машиной мощность превышает мощность $P_{тс}$, затрачиваемую на выполнение технологической операции. Причем это превышение может быть рассмотрено по отдельным составляющим, что имеет большое значение для количественной оценки однотипных машин, предназначенных для выполнения одной и той же операции.

Рассмотренные коэффициенты энергопотребления могут определяться как за цикл установившегося движения, так и за весь период, например, разгона или торможения. Они несут также полезную информацию и как мгновенные характеристики, определяющие отношение мощностей в i -ом фиксированном значении обобщенной координаты. В этом случае они являются некоторой функцией обобщенной координаты и дают возможность количественной оценки превышения мощностью сил вредного сопротивления, сил инерции и т.п. мгновенной мощности сил технологического сопротивления. При отсутствии сил технологического сопротивления (сил полезного сопротивления) коэффициенты энергопотребления теряют смысл.

Оценка энергопотребления машины в первом приближении (без учета сил вредного сопротивления, сил тяжести и упругости) может быть проведена с помощью коэффициента $k^э$ энергозатрат на преодоление сил инерции. В этом случае выражение (3.2) примет вид

$$k_э = 1 + k_{и}^э = 1 + \frac{\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} (J_{\Pi} \omega \omega') d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} (J'_{\Pi} \omega^2) d\varphi}{\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^c d\varphi}. \quad (3.3)$$

Если формула (3.3) используется для участка разгона, тогда пределы интегрирования будут от 0 до φ_p . Для установившегося движения при угле $\varphi_{\Pi} = 2\pi$, характеризующем цикл T , пределы интегрирования будут от 0 до 2π . Если во время разгона сила технологического сопротивления $F_{тс} = 0$ (операция не выполняется), выражение (3.3) теряет смысл. В этом случае оценку энергозатрат удобно проводить с помощью удельной мощности сил инерции, равной

$$P_{и} / J_{\Pi} = \varepsilon \omega.$$

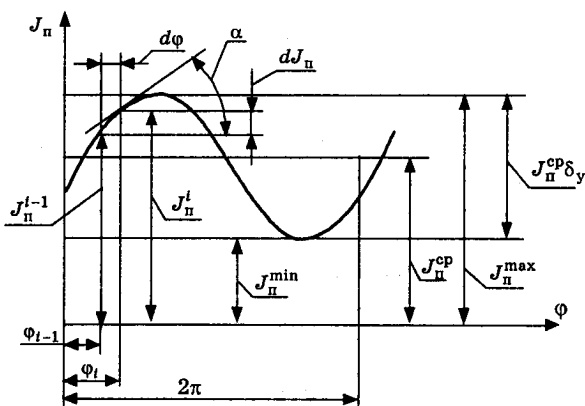


Рис.3.1. Изменение приведенного момента инерции от обобщенной координаты

Введем понятие некоторого среднего (постоянного за угол $\varphi_{\Pi} = 2\pi$, характеризующий цикл установившегося движения) значения

$$\left(M_{\Pi}^c\right)_{\text{cp}} = \frac{\int_0^{2\pi} M_{\Pi}^c d\varphi}{2\pi}$$

(см. рис.3.1). Тогда уравнение (3.3) позволит определить превышение мощности, затрачиваемой на преодоление сил инерции машины, работы сил полезного (технологического) сопротивления. В этом случае оно примет вид:

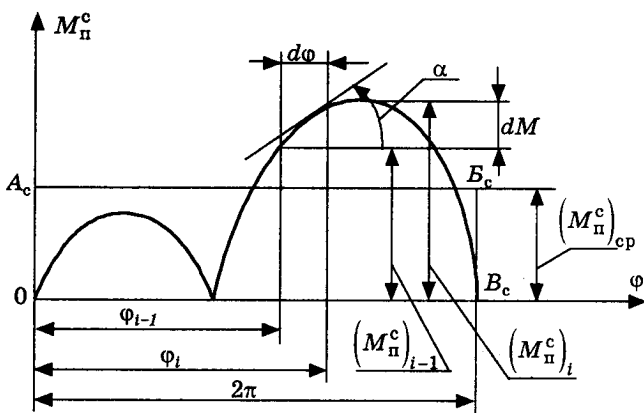


Рис.3.2. Зависимость приведенного момента сил технологического сопротивления от обобщенной координаты

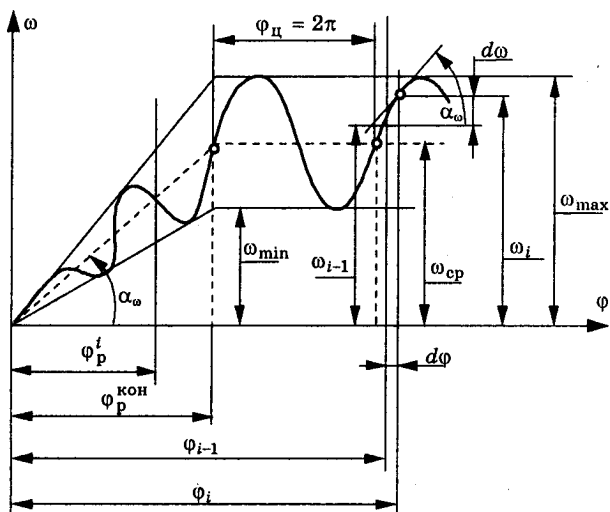


Рис.3.3. Изменение функции $\omega = \omega(\varphi)$ обобщенной скорости на участке разгона φ_p и установившегося движения машины $\varphi_y = 2\pi$

$$k_\omega = 1 + \frac{1}{\left(M_{\Pi}^c\right)_{\text{ср}}} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (J_{\Pi} \omega \omega') d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (J'_{\Pi} \omega^2) d\varphi \right]. \quad (3.4)$$

Анализ формулы (3.4) указывает на зависимость энергопотребления машины как от функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$, так и от функции $\omega = \omega(\varphi)$. На рис.3.2 представлена функция $J_{\Pi} = J(\varphi)$, на рис.3.3 — изменение функции $\omega = \omega(\varphi)$ на участке разгона ($\varphi_p^{\text{кон}}$) и на участке ($\varphi_p^{\text{кон}}$), соответствующем времени цикла (времени $T = 2\pi/\omega_{\text{ср}}$ одного оборота звена приведения). На участке разгона функция $\omega = \omega(\varphi)$ может быть представлена суммой двух функций $\omega = k_{\omega} \varphi_p + \omega(\varphi)$, где k_{ω} характеризует некоторый условный (постоянный) аналог скорости

$$k_{\omega} = \omega' = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{кон}}} = \text{const} \rightarrow \text{tg} \alpha_{\omega}.$$

Здесь α_{ω} — угол наклона прямой $\omega = k_{\omega} \varphi_p^i$. Периодичность изменения функции $\omega = \omega(\varphi)$ как на участке разгона, так и в установившемся движении определяется законом изменения

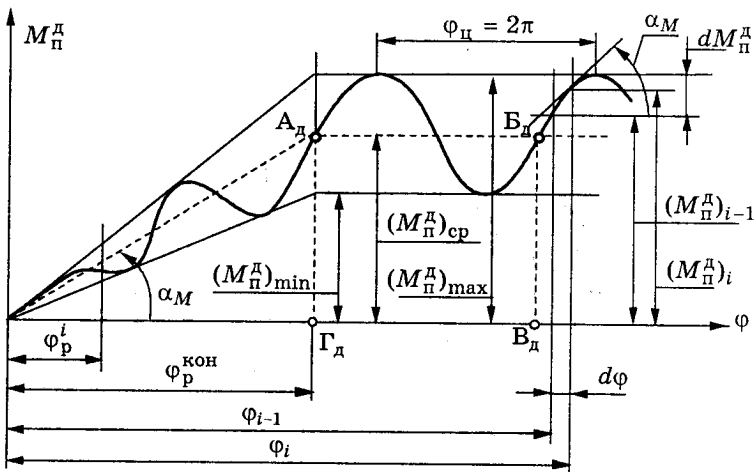


Рис.3.4. Зависимость приведенного момента движущих сил от обобщенной координаты

$J_{\Pi} = J(\varphi)$ и $M_{\Pi}^{\text{Д}} = M(\varphi)$. Если же закон изменения $\omega = \omega(\varphi)$ задан, то функция $M_{\Pi}^{\text{Д}} = M(\varphi)$ определяется уравнением (2.9) из части 2 пособия. Закон же изменения функции $M_{\Pi}^{\text{Д}} = M(\varphi)$ определяется функцией $J_{\Pi} = J(\varphi)$ (см. рис.3.2) и функцией $\omega = \omega(\varphi)$ (см. рис.5.3). На рис.3.4 представлена функция $M_{\Pi}^{\text{Д}} = M(\varphi)$ на участке разгона ($\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}$) и на участке $\varphi_{\Pi} = 2\pi$ установившегося движения.

Введем понятие некоторого условного (постоянного) среднего $(M_{\Pi}^{\text{Д}})_{\text{ср}}$ значения приведенного момента движущих сил за цикл установившегося движения:

$$(M_{\Pi}^{\text{Д}})_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\Pi}^{\text{Д}}(\varphi) d\varphi.$$

На участке разгона функция $M_{\Pi}^{\text{Д}} = M(\varphi)$ по аналогии с функцией $\omega = \omega(\varphi)$ может быть также представлена в виде суммы двух функций:

$$M_{\Pi}^{\text{Д}} = k_{\text{М}}\varphi + M_{\Pi}^{\text{Д}}(\varphi),$$

где

$$k_{\text{М}} = (M_{\Pi}^{\text{Д}})' = \frac{(M_{\Pi}^{\text{Д}})_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}} = \text{const} \rightarrow \text{tg}\alpha_{\text{М}}.$$

Здесь α_M — угол наклона прямой $M_{\Pi}^{\Pi} = k_M \cdot \varphi_0^i$. С учетом введенных средних значений $\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}$ и $\left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}$ (рис.3.1 и 3.4) коэффициент энергопотребления машины за период разгона определится соотношением

$$\left(k_{\vartheta}^{\Pi}\right)_{\text{р}} = 1 + \frac{\text{пл. } OA_{\text{д}}B_{\text{д}}V_{\text{д}}}{\text{пл. } OA_{\text{с}}B_{\text{с}}V_{\text{с}}}.$$

Если полезная работа выполняется в установившемся режиме, то сравнение может быть приведено к формуле

$$\left(k_{\vartheta}^{\Pi}\right)_{\text{у}} = 1 + \frac{\text{пл. } OA_{\text{д}}B_{\text{д}}V_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}}}{\text{пл. } OA_{\text{с}}B_{\text{с}}V_{\text{с}}}.$$

Суммарное значение коэффициента энергопотребления определится суммой $k_{\vartheta}^{\Pi} = \left(k_{\vartheta}^{\Pi}\right)_{\text{р}} + \left(k_{\vartheta}^{\Pi}\right)_{\text{у}}$.

Из рис.3.1 видно, что площадь

$$OA_{\text{с}}B_{\text{с}}V_{\text{с}} = OA_{\text{с}} \cdot A_{\text{с}}B_{\text{с}} = \left(M_{\Pi}^{\text{ср}}\right)_{\text{ср}} \frac{1}{\mu_M} \cdot 2\pi \frac{1}{\mu_{\varphi}}.$$

Из рис.3.4 видно, что площадь

$$OA_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}} = \frac{1}{2} O\Gamma_{\text{д}} \cdot A_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}} = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}}{\mu_{\varphi}} \cdot \frac{\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}}{\mu_M};$$

площадь

$$A_{\text{д}}B_{\text{д}}V_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}} = A_{\text{д}}B_{\text{д}} \cdot A_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}} = \frac{2\pi}{\mu_{\varphi}} \cdot \frac{\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}}{\mu_M}.$$

Если масштабные коэффициенты μ_M и μ_{φ} выбраны одинаковыми, то рис.3.1 и 3.4 ярко демонстрируют картину превышения мощностью (работой) сил движущих мощности (работы) сил полезного сопротивления. Она выражается превышением площади треугольника $OA_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}}$ (см. рис.3.4) и прямоугольника $A_{\text{д}}B_{\text{д}}V_{\text{д}}\Gamma_{\text{д}}$ площади прямоугольника $OA_{\text{с}}B_{\text{с}}V_{\text{с}}$ (см. рис.3.1).

Исходя из геометрического смысла определенного интеграла и введенных понятий средних значений моментов движущих сил $\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}$ и сил сопротивления $\left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}$, формулу (3.4) можно представить в виде

$$k_{\vartheta}^{\Pi} = 1 + \frac{\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}}{\left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}} \cdot \frac{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}}{4\pi} + k \frac{\left(M_{\Pi}^{\Pi}\right)_{\text{ср}}}{\left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}}. \quad (3.5)$$

В уравнении $k = 1, 2, \dots$ — количество циклов установившегося движения. Следует помнить, что приведенный момент сил сопротивления

$$M_{\Pi}^c = F_{\text{тс}} \frac{v_{\text{ро}}}{\omega} = F_{\text{тс}} i_{\text{им}}$$

определяется произведением двух функций: $F_{\text{тс}} = f(\varphi)$ и $i_{\text{им}} = f(\varphi)$. Передаточная кинематическая функция исполнительного механизма $i_{\text{им}} = ds_{\text{ро}}/d\varphi$ проходит через ноль и меняет знак. Это характеризует остановку и изменение направления скорости $v_{\text{ро}}$ рабочего органа. На рис.3.1 представлен график без учета знака, так как в прямом направлении затрачивается работа на преодоление, например, сил технологического сопротивления, а в обратном — на преодоление сил трения.

Как видно из рис.3.1...3.4 силовые характеристики машины (M_{Π}^d и M_{Π}^c), массовые (J_{Π} и J_{Π}^I) и энергетические связаны между собой. Их зависимость во многом определяется функцией $J_{\Pi} = J(\varphi)$, величина которой характеризует материалоемкость машины, то есть кинетическую энергию всех ее движущихся звеньев.

3.1.2. Коэффициент материалоемкости машины

Из рис.3.4 видно, что постоянная составляющая приведенного момента инерции $J_{\Pi}^I = J_{\Pi}^{\text{min}}$. Некоторое его среднее (постоянное) значение определяется соотношением

$$J_{\Pi}^{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{\Pi}(\varphi) d\varphi.$$

По аналогии с коэффициентом δ_{ω} введем понятие коэффициента неравномерности приведенного момента инерции δ_J :

$$\delta_J = \frac{J_{\Pi}^{\text{max}} - J_{\Pi}^{\text{min}}}{J_{\Pi}^{\text{ср}}} = \frac{J_{\Pi}^{\text{max}} - J_{\Pi}^I}{J_{\Pi}^{\text{ср}}}. \quad (3.6)$$

При J_{Π}^{max} и J_{Π}^{min} , отличающихся между собой на незначительную величину, что характерно для машин с длинной кинематической цепью привода, среднее значение $J_{\Pi}^{\text{ср}}$ можно выразить как среднеарифметическое. В этом случае имеем соотношение

$$J_{\Pi}^{\text{ср}} = \frac{J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{max}}}{2}. \quad (3.7)$$

При использовании в машине механизмов с постоянными передаточными отношениями, то есть при $J_{\Pi} = \text{const}$, $J_{\Pi}^{\text{max}} = J_{\Pi}^{\text{I}}$ уравнение (3.7) дает $J_{\Pi}^{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{I}} = \text{const}$. Обычно переменное значение определяется массовыми и кинематическими характеристиками исполнительного механизма, то есть $J_{\Pi}^{\text{II}} = J_{\Pi}^{\text{ИМ}}$.

Выражение (3.6), с учетом (3.7), примет вид

$$\delta_J = 2 \frac{J_{\Pi}^{\text{max}} - J_{\Pi}^{\text{I}}}{J_{\Pi}^{\text{max}} + J_{\Pi}^{\text{I}}}.$$

Таким образом, приведенный момент инерции машины можно представить в виде

$$J_{\Pi} = J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{ИМ}} \approx J_{\Pi}^{\text{I}} + \frac{1}{2} J_{\Pi}^{\text{ср}} \delta_J.$$

Превышение усредненного за цикл приведенного момента инерции машины над приведенным усредненным моментом инерции исполнительного механизма можно представить в виде коэффициента материалоемкости машины

$$k_J = \frac{J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{ср}} \frac{\delta_J}{2}}{J_{\Pi}^{\text{I}}} = 1 + \frac{J_{\Pi}^{\text{ср}}}{J_{\Pi}^{\text{I}}} \frac{\delta_J}{2}. \quad (3.8)$$

3.1.3. Взаимосвязь коэффициентов энергопотребления и материалоемкости

Физический смысл уравнения (3.8) виден из следующих преобразований:

$$k_J - 1 = \frac{J_{\Pi}^{\text{ср}} \delta_J \omega_{\text{ср}}^2}{2 J_{\Pi}^{\text{I}} \omega_{\text{ср}}^2}.$$

Величина $J_{\Pi}^{\text{I}} \omega_{\text{ср}}^2 = 2T_{\text{пм}}$ определяет кинетическую энергию $T_{\text{пм}}$ передаточных механизмов (механизмов с постоянным передаточным отношением скоростей их звеньев). Величина

$$\frac{1}{2} J_{\Pi}^{\text{ср}} \delta_J \omega_{\text{ср}}^2 = T_{\text{ИМ}}$$

определяет некоторую среднюю кинетическую энергию, которую имел бы исполнительный механизм, обладающий постоянным (усредненным) приведенным моментом инерции

$$\left(J_{\Pi}^{\text{ИМ}} \right)_{\text{ср}} = \frac{J_{\Pi}^{\text{ср}}}{2} \delta_J.$$

Приведенный же момент инерции звена приведения определяется суммой двух постоянных значений

$$J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + \left(J_{\Pi}^{\Pi} \right)_{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{пм}} + \left(J_{\Pi}^{\text{им}} \right)_{\text{ср}}.$$

Для многих машин $J_{\Pi}^{\text{max}} - J_{\Pi}^I \ll J_{\Pi}^{\text{ср}}$. Скорость главного приводного вала таких машин находится в таком же соотношении, то есть $\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}} \ll \omega_{\text{ср}}$. Для таких машин с достаточной степенью точности можно полагать $\delta_J = \delta_{\omega}$. Значит,

$$\delta_J J_{\Pi}^{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{max}} - J_{\Pi}^I, \quad 2J_{\Pi}^{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{max}} + J_{\Pi}^I,$$

$$\delta_{\omega} \omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}, \quad 2\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}.$$

Другими словами, величины δ_J и δ_{ω} , характеризующие относительное изменение приведенного момента инерции и угловой скорости звена приведения, одного порядка. Для машин, работающих преимущественно в режиме "пуск-остановка", такое соотношение массовых характеристик недопустимо. Такие машины с точки зрения быстродействия не удовлетворяют требованиям автоматизированного производства. Выравнивание неравномерности вращения главного приводного вала машины за счет увеличения масс имеет смысл только для машин, работающих преимущественно в установившемся режиме. Количественная связь между коэффициентами энергопотребления и материалоемкости устанавливается из следующих рассуждений. Конец участка разгона характеризуется моментом движущих сил $\left(M_{\Pi}^{\text{д}} \right)_{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{ср}} \varepsilon_{\text{р}}$, где

$\varepsilon_{\text{р}} = \omega \cdot \omega'$. Применительно к кинематике разгона машины, представленной на рис.3.3, имеем $\omega' = \omega_{\text{ср}} / \varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}$. При достижении $\omega = \omega_{\text{ср}}$ ускорение определится как $\varepsilon = \omega_{\text{ср}} / \varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}$. Тогда величина момента на приводном валу машины в конце участка разгона определится соотношением

$$\left(M_{\Pi}^{\text{д}} \right)_{\text{ср}} = J_{\Pi}^{\text{ср}} \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}}. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.5) для участка разгона получим соотношение

$$\left(M_{\Pi}^{\text{д}} \right)_{\text{ср}} = \frac{k_{\text{э}} - 1}{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}} \left(M_{\Pi}^{\text{с}} \right)_{\text{ср}} 4\pi. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.5), с учетом зависимости (3.8), можно представить в виде

$$\left(M_{\Pi}^{\text{д}}\right)_{\text{ср}} = \frac{k_J - 1}{\delta_J} \cdot 2J_{\Pi}^{\text{I}} \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\varphi_{\text{р}}^{\text{кон}}}. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) и (3.11) дают соотношение

$$\frac{k_{\text{э}} - 1}{k_J - 1} = J_{\Pi}^{\text{I}} \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2\delta_J \pi \left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}}. \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) следует

$$J_{\Pi}^{\text{I}} = \frac{k_{\text{э}} - 1}{k_J - 1} \cdot \frac{2\delta_J \pi \left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}^2}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) позволяет связать приведенный момент инерции J_{Π}^{I} передаточных механизмов с коэффициентом энергопотребления и материалоемкости. Уравнение (3.12) дает также соотношение

$$\frac{J_{\Pi}^{\text{I}} \omega_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{k_{\text{э}} - 1}{k_J - 1} \cdot \pi \delta_J \left(M_{\Pi}^{\text{с}}\right)_{\text{ср}}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) позволяет определить кинетическую энергию, затраченную на разгон машины, если цикличность приведенного момента сил сопротивления $M_{\Pi}^{\text{с}}$ определяется одним оборотом приводного вала (эвена приведения) (см. рис.3.1).

3.1.4. Коэффициент динамичности

Цикловой коэффициент динамичности [2] $k_{\text{д}}$, определяемый отношением экстремальной величины ε_{ext} углового ускорения звена приведения к квадрату среднего значения его угловой скорости $k_{\text{д}} = \varepsilon_{\text{ext}} / \omega_{\text{ср}}^2$, имеет геометрический смысл в том понимании, что он определяет также угол наклона тангенциального ускорения некоторой точки звена приведения к нормальному ускорению этой точки. Физический смысл его заключается в том, что

$$k_{\text{д}} = \frac{\varepsilon_{\text{ext}} \cdot J_{\Pi}^{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}^2 \cdot J_{\Pi}^{\text{ср}}} = \frac{\left(M_{\Pi}^{\text{д}}\right)_{\text{ср}}}{2T}.$$

Рассмотрим несколько подробнее коэффициент динамичности. Уравнение движения звена приведения машины в дифференциальной форме имеет вид

$$M_{\Pi}^{\text{д}} - M_{\Pi}^{\text{с}} = M_{\Pi} = J_{\Pi} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} J'_{\Pi},$$

откуда
$$\varepsilon = \frac{M_{\Pi}}{J_{\Pi}} - \frac{\omega^2}{2} \frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} = \varepsilon_I - \varepsilon_{II}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) указывает на то, что первое слагаемое $\varepsilon_I = M_{\Pi}/J_{\Pi}$ определяет динамические нагрузки в момент трогания с места при $\omega = 0$, а второе — как закон изменения скорости $\omega = f(\varphi)$, так и закон изменения массовых характеристик, то есть функции $J_{\Pi}^I/J_{\Pi} = f(\varphi)$. Деление уравнения (3.15) на ω^2 дает выражение

$$k_d = \frac{M_{\Pi}}{J_{\Pi}\omega^2} - \frac{J'_{\Pi}}{2J_{\Pi}} = k_d^I + k_d^{II}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) указывает на то, что $k_d^{II} = J'_{\Pi}/2J_{\Pi}$ не зависит от закона изменения скорости звена приведения и определяется только функцией $J'_{\Pi}/J_{\Pi} = f(\varphi)$.

Рассмотрим подробнее функцию, определяемую отношением производной некоторой функции к самой этой функции, на примере используемых нами характеристик $M_{\Pi}^c, J_{\Pi}, \omega$:

$$\frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} = \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} \cdot \frac{1}{J_{\Pi}} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dJ_{\Pi}}{dt} \cdot \frac{1}{J_{\Pi}\omega} = \frac{J_{\Pi}}{J_{\Pi}\omega}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{(M_{\Pi}^c)'}{M_{\Pi}^c} &= \frac{dM_{\Pi}^c}{d\varphi} \cdot \frac{1}{M_{\Pi}^c} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dM_{\Pi}^c}{dt} \cdot \frac{1}{M_{\Pi}^c\omega} = \frac{M_{\Pi}^c}{M_{\Pi}^c\omega}, \\ \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = k_d^{\omega} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из уравнения (3.18) следует, что отношение производной функции в некоторой точке к значению самой функции в этой точке есть коэффициент динамичности этой функции, указывающий, насколько приращение функции в некоторой точке больше значения самой этой функции.

На рис.3.1, 3.2, 3.3, 3.4 показан геометрический смысл соответствующих коэффициентов динамичности. Из рис.3.1 видим, что величина

$$k_d^{M_{\Pi}^c} = \frac{dM_{\Pi}^c}{d\varphi} \cdot \frac{1}{M_{\Pi}^c} \approx \frac{(M_{\Pi}^c)_i - (M_{\Pi}^c)_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \cdot \frac{1}{(M_{\Pi}^c)_{cp}^i}$$

определяет отношение приращения ΔM_{Π}^c в шаге $\Delta\varphi$ к величине $(M_{\Pi}^c)_{\text{ср}}$, усредненной в этом шаге,

$$k_{\text{д}}^{M_{\Pi}^c} \approx \frac{(M_{\Pi}^c)_i - (M_{\Pi}^c)_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \cdot \frac{2}{(M_{\Pi}^c)_i + (M_{\Pi}^c)_{i-1}}.$$

Аналогично из рис.3.2 имеем

$$k_{\text{д}}^J \approx \frac{J_{\Pi}^i - J_{\Pi}^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \cdot \frac{2}{J_{\Pi}^i + J_{\Pi}^{i-1}}.$$

Применительно к рис.3.4 имеем

$$k_{\text{д}}^{M_{\Pi}^{\text{д}}} \approx \frac{(M_{\Pi}^{\text{д}})_i - (M_{\Pi}^{\text{д}})_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \cdot \frac{1}{(M_{\Pi}^{\text{д}})_i + (M_{\Pi}^{\text{д}})_{i-1}}.$$

Уравнение (3.18) применительно к численному представлению (см. рис.3.3) дает

$$k_{\text{д}}^{\omega} \approx \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \cdot \frac{2}{\omega_i + \omega_{i-1}} \approx \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Для приведенного момента движущих сил получим соотношение

$$k_{\text{д}}^{M_{\Pi}^{\text{д}}} = \frac{(M_{\Pi}^{\text{д}})'}{M_{\Pi}^{\text{д}}} = \frac{dM_{\Pi}^{\text{д}}}{d\varphi} \cdot \frac{1}{M_{\Pi}^{\text{д}}} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\dot{M}_{\Pi}^{\text{д}}}{M_{\Pi}^{\text{д}}\omega}.$$

Если движущий момент задан функцией $M^{\text{д}} = M(\varphi)$,

$$\text{то } k_{\text{д}}^M = \frac{dM^{\text{д}}}{d\omega} \cdot \frac{1}{M^{\text{д}}\omega} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\dot{M}^{\text{д}}}{\varepsilon M^{\text{д}}(\omega)} \quad (3.19)$$

$$\text{или } k_{\text{д}}^M = \frac{dM^{\text{д}}}{d\omega} \cdot \frac{1}{M^{\text{д}}\omega} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{(M_{\text{д}})'}{\omega' M^{\text{д}}(\omega)}$$

Связь между коэффициентом $k_{\text{д}}^M$ динамичности функции $M^{\text{д}} = M(\omega)$ и $k_{\text{д}}^{\omega}$ можно видеть из следующих преобразований последнего выражения:

$$k_{\text{д}}^M = \frac{(M_{\text{д}})'}{\omega' M^{\text{д}}(\omega)} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{(M_{\text{д}})'}{k_{\text{д}}^{\omega} \omega M^{\text{д}}(\omega)}$$

Используя соотношение (3.19), получим

$$k_{\text{д}}^M = \frac{\dot{M}^{\text{д}}}{\varepsilon M^{\text{д}}(\omega)} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2} = \frac{\dot{M}^{\text{д}}}{k_{\text{д}}^{\omega} \omega^2 M^{\text{д}}(\omega)}$$

Связь коэффициентов k_D^ω и k_D^I можно установить из аналогичных преобразований. Так, из выражения (3.17) следует

$$k_D^J = \frac{J_{II}}{J_{II}\omega} \cdot \frac{\omega'}{\omega'} = \frac{J_{II}}{k_D^\omega \omega J_{II}}$$

Уравнения (3.15) и (3.16) дают возможность выразить коэффициенты динамичности через тангенсы углов α_I и α_{II} наклона векторов полных ускорений \bar{a}_I^A и \bar{a}_{II}^A некоторой точки А звена приведения ОА. Из рис.3.5 имеем

$$k_D = \frac{\varepsilon \cdot OA}{\omega^2 \cdot OA} = \frac{\varepsilon_I \cdot OA + \varepsilon_{II} \cdot OA}{\omega^2 \cdot OA} = \frac{a_I^\tau + a_{II}^\tau}{a_n},$$

тогда

$$k_D^I = \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{\varepsilon_I}{\omega^2} = \frac{M_{II}}{J_{II}} \cdot \frac{1}{\omega^2}, \quad (3.20)$$

$$k_D^{II} = \operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{\varepsilon_{II}}{\omega^2} = \frac{J_{II}^I}{2J_{II}}. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.20), (3.21) показывают, что знак углов α_I и α_{II} определяется знаком функций

$$\frac{M_{II}^A - M_{II}^C}{J_{II}} \cdot \frac{1}{\omega^2} \text{ и } \frac{J_{II}^I}{2J_{II}}.$$

В процессе работы машины M_{II}^C может принимать в некоторые промежутки времени значение, большее M_{II}^A , то есть k_D^I может

быть за цикл как положительным, так и отрицательным. Функция

$J_{II}^I = dJ(\varphi)/d\varphi$ также может иметь положительные и отрицательные значения, значит, и k_D^{II} имеет знак плюс и минус. В этом причина их раздельного и совместного влияния на неравномерность угловой скорости звена приведения. Положительное значение k_D^I и k_D^{II} означает ускоренное движение звена приведения (совпадение ε и ω по направлению). Изменение же знака k_D^I

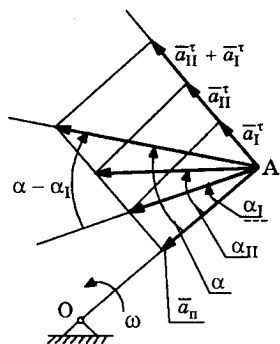


Рис.3.5. К определению геометрического смысла коэффициента динамичности

или $k_{\text{д}}^{\text{II}}$ показывает уменьшение общего $\varepsilon = \varepsilon_{\text{I}} - \varepsilon_{\text{II}}$ и снижение скорости ω .

Это означает, что для машины, выполняющей технологическую операцию, описываемую функцией M_{II}^{c} , и имеющей механическую характеристику приводного двигателя $M_{\text{II}}^{\text{д}}$, для каждого закона изменения $\omega = f(\varphi)$ можно определить однозначно функцию $k_{\text{д}} = f(\varphi)$. Зная при этом, что $k_{\text{д}}^{\text{II}} = J'_{\text{II}}/2J_{\text{II}}$ не зависит от ω , можно определить ε_{I} и ε_{II} и, тем самым, выявить раздельное влияние на неравномерность вращения главного приводного вала "внутренней" динамики машины (функции $J'_{\text{II}}/2J_{\text{II}}$ и соотношения сил движущих и сопротивления (функции $\frac{M_{\text{II}}^{\text{д}} - M_{\text{II}}^{\text{c}}}{J_{\text{II}}\omega^2} \frac{1}{\omega}$).

Геометрическая интерпретация такой динамики может быть выражена зависимостью (см.рис.3.5)

$$k_{\text{д}} = \text{tg}\left(\frac{M_{\text{II}}^{\text{д}} - M_{\text{II}}^{\text{c}}}{J_{\text{II}}\omega^2}\right) \pm \text{tg}\left(\frac{J'_{\text{II}}}{2J_{\text{II}}}\right) = \frac{\sin\left[\left(\frac{M_{\text{II}}^{\text{д}} - M_{\text{II}}^{\text{c}}}{J_{\text{II}}\omega^2}\right) \pm \left(\frac{J'_{\text{II}}}{2J_{\text{II}}}\right)\right]}{\cos\left(\frac{M_{\text{II}}^{\text{д}} - M_{\text{II}}^{\text{c}}}{J_{\text{II}}\omega^2}\right) \cos\left(\frac{J'_{\text{II}}}{2J_{\text{II}}}\right)}.$$

Коэффициент динамичности имеет следующую взаимосвязь с удельной мощностью сил инерции. Если мощность сил инерции $P_{\text{и}} = J_{\text{II}}\varepsilon \cdot \omega$, то $P_{\text{и}}/J_{\text{II}} = \varepsilon \cdot \omega$, то есть произведение ускорения на скорость определяет мощность, приходящуюся на единицу массы $P_{\text{и}}/J_{\text{II}} = \omega^2\omega'$. При коэффициенте динамичности

$$k_{\text{д}} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

получим соотношение $\frac{P_{\text{и}}}{J_{\text{II}}} = \omega' \frac{\varepsilon}{k_{\text{д}}} = \omega^3 k_{\text{д}}$.

3.1.5. Цикловой механический коэффициент полезного действия и коэффициент потерь

Коэффициенты полезного действия $\eta_{\text{ц}}$ и потерь Ψ позволяют сравнить различные варианты схем проектируемой машины по соотношению работ сил полезного сопротивления и сил вредного сопротивления за время одного цикла установившегося движения.

Как известно, установившееся движение машины характеризуется равенством работы сил движущих $A_{дс}$ и работы сил полезного сопротивления $A_{пс}$ и вредного $A_{вс}$, то есть $A_{дс} = -(A_{пс} + A_{вс})$. К силам вредного сопротивления отнесем силы трения. Если, например, цикл установившегося движения определяется временем одного оборота приводного вала исполнительного механизма (звена приведения), то из последнего равенства получим следующее соотношение:

$$1 = - \left(\frac{A_{пс}}{A_{дс}} + \frac{A_{вс}}{A_{дс}} \right) = \eta + \psi = \frac{\int_0^{2\pi} M_{п}^{тс} d\varphi}{\int_0^{2\pi} M_{п}^{дс} d\varphi} + \frac{\int_0^{2\pi} M_{п}^{тр} d\varphi}{\int_0^{2\pi} M_{п}^{дс} d\varphi} = \frac{(M_{п}^{тс})_{ср}}{(M_{п}^{дс})_{ср}} + \frac{(M_{п}^{тр})_{ср}}{(M_{п}^{дс})_{ср}}. \quad (3.22)$$

Для неустановившегося движения или мгновенного значения обобщенной координаты внутри цикла установившегося движения уравнение (3.22) не имеет смысла. Здесь $(M_{п}^{тс})_{ср}$, $(M_{п}^{дс})_{ср}$, $(M_{п}^{тр})_{ср}$ — усредненные за цикл установившегося движения приведенные моменты сил технологического (полезного) сопротивления, сил движущих и сил трения соответственно.

Из уравнения (3.22) видно, что совершенствование машины может быть достигнуто как за счет уменьшения значений сил реакций в кинематических парах, так и за счет замены трения скольжения трением качения или жидкостным трением.

Мгновенное состояние механизма можно характеризовать коэффициентом потерь, записанным в виде отношения мощности сил вредного сопротивления (сил трения) к мощности движущих сил $\psi_v = P_{вс}/P_{дс}$. Мощность, расходуемую на преодоление сил трения $P_{тр}^в$ во вращательной и поступательной $P_{тр}^п$ парах, можно выразить в виде

$$\left. \begin{aligned} P_{тр}^в &= f' \cdot p \cdot S \cdot v = M_{тр} \cdot \omega, \\ P_{тр}^п &= f' \cdot p \cdot S \cdot v = F_{тр} \cdot v, \end{aligned} \right\}$$

где f' — приведенный коэффициент трения;

p — давление;

S — площадь соприкосновения тел, входящих в кинематическую пару;

v , ω — линейная и угловая скорость относительного движения звеньев, входящих в кинематическую пару;

$F_{\text{тр}}$, $M_{\text{тр}}$ — сила и момент сил трения в кинематической паре.

Тогда связь между коэффициентом потерь и мощностью движущих сил определится из выражения

$$pv = \frac{\psi}{f'S} P_{\text{дс}}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Параметр pv позволяет оценить рациональную конструкцию как вращательной, так и поступательной пар. Как известно [16], износ u в направлении нормали к соприкасающимся поверхностям пропорционален давлению и пути трения $s_{\text{тр}}$, то есть $u = k_{\text{и}} p s_{\text{тр}}$, где $k_{\text{и}}$ — коэффициент, характеризующий износостойкость трущихся (соприкасающихся) поверхностей. Тогда интенсивность износа $du/dt = k_{\text{и}} pv$. Таким образом, параметр pv может служить для сравнительной оценки интенсивности износа в кинематических парах механизмов. Размерность этого параметра указывает на его физический смысл: это удельная мощность, то есть мощность сил трения, приходящаяся на 1 м^2 площади соприкасающихся поверхностей.

Выражение (3.23) устанавливает связь мощности сил движущих с удельной мощностью, затраченной на износ в кинематических парах. Оно позволяет наметить пути совершенствования конструкций подвижных соединений звеньев машины с точки зрения выравнивания в них износа, то есть установления одинакового времени неизбежной потери размеров. Как видно из последнего уравнения, это может быть достигнуто путем увеличения площади S контакта подвижных соединений, уменьшения коэффициента потерь или изменения (перераспределения) их износостойкости $k_{\text{и}}$ в соответствии с параметром pv . Здесь следует помнить, что величины реакций в i -х кинематических парах $R_i = (pS)_i$ и скорости скольжения v_i в них должны определяться с учетом действительных значений скоростей и ускорений звеньев, то есть с учетом обобщенных скорости ω и ускорения ϵ .

3.1.6. Угол давления и коэффициент возрастания усилия

Угол давления θ есть угол между направлением силы, действующей со стороны звена 3 на звено 2 (без учета трения) (рис.3.6, а), и скоростью точки приложения этой силы. Для рис.3.6, б — это угол между силой \bar{R} и скоростью \bar{v}_2 . При больших значениях угла давления возможно заклинивание (самоторможение), то есть отсутствие движения в заданном направлении.

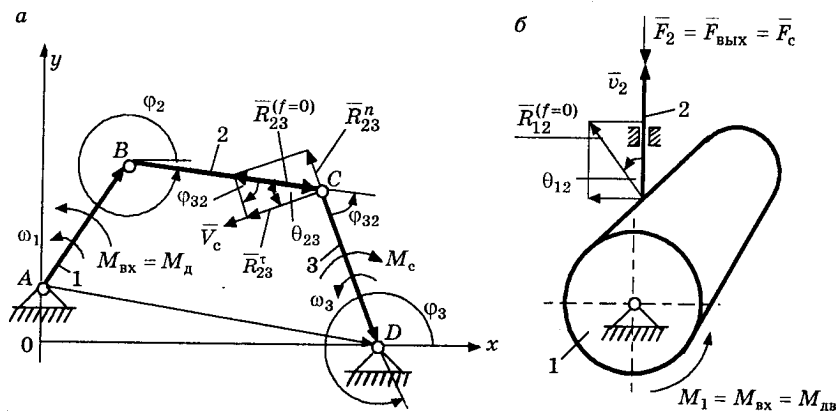


Рис.3.6. К определению угла давления и коэффициента возрастания усилия:

а — рычажный механизм (шарнирный четырехзвенник);
 б — кулачковый механизм

На рис.3.6, а представлена схема, поясняющая связь угла давления с возрастанием усилия, необходимого для движения звена 3, к которому применен момент сопротивления $M_c = M_{вых}$. При наличии движущего момента $M_d = M_{вх}$ и отсутствии трения сила, действующая на звено 3 со стороны звена 2, $\bar{R}_{23}^{(f=0)}$ направлена вдоль звена 2, а угол давления определится

соотношением $\theta_{23} = 90^\circ - \varphi_{32}$. Значение коэффициента возрастания усилия в кинематической паре C получим из соотношения

$$k_{23} = \frac{R_{23}}{R_{23}^r} = \frac{1}{\cos \theta_{23}} = \frac{1}{\sin \varphi_{32}}. \quad (3.24)$$

Из уравнения (3.24) можно видеть, что при $\varphi_{32} = 0$ $k_{23} = \infty$. В данном случае произойдет заклинивание (невозможность движения звена 3 под действием момента M_d).

Коэффициент возрастания усилия связан также с углом трения. Геометрический смысл этого параметра заключается в

том, что он характеризует угол отклонения реакции \overline{R}_{23} при наличии трения от направления реакции \overline{R}_{23} без учета трения (от направления вектора BC) (см. рис. 3.6).

Коэффициент возрастания усилия в кинематической паре выражается соотношением (рис. 3.7)

$$k_{21} = \frac{R_{23}}{R_{21}^r} = \frac{R_{21}^r}{R_{21}^r \sin \varphi_{21}} = \frac{1}{\sin \varphi_{21}}.$$

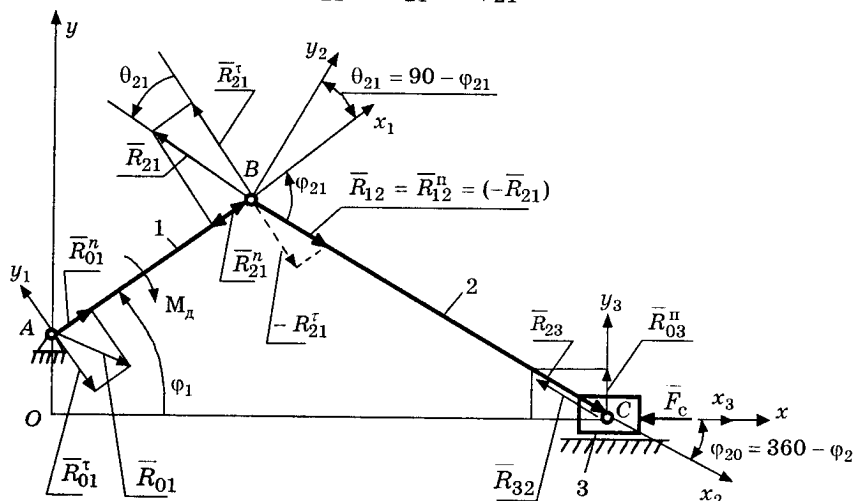


Рис. 3.7. Соотношение реактивных сил в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма без учета трения

Коэффициент возрастания усилия в кинематической паре C

равен

$$R_{23} = \frac{R_{23}}{F_c} = \frac{F_c}{F_c \cos \varphi_2} = \frac{1}{\cos \varphi_2}.$$

Таким образом, коэффициент возрастания усилия определяется углом давления. При наличии трения сила, действующая со стороны одного звена на другое (в данном случае со стороны, например, звена 2 на звено 3 в кинематической паре C), будет повернута на некоторый угол, определяемый углом трения. Это означает, что при неизменном угле давления коэффициент возрастания усилия в кинематической паре будет больше, чем в идеальном случае. При наличии сил инерции и веса силы, действующие со стороны одного звена на другое, также изменят свое направление и величину. Таким образом, введение коэффициентов возрастания усилий дает возможность количественной оценки раздельного и

суммарного влияния на соотношение сил и износа в кинематических парах как от сил трения, так и сил инерции, а также распределения масс звеньев механизмов. Для сравнительной количественной оценки различных схем механизмов целесообразно ввести понятие коэффициента возрастания усилия (момента) для механизмов в целом. Как видно из рис.3.7, равенство $R_{12}^n = R_{32}^n$ дает соотношение

$$\frac{R_{21}^r}{\sin \varphi_{21}} = \frac{F_c}{\cos \varphi_2},$$

откуда коэффициент возрастания усилия для кривошипно-ползунного механизма определится соотношением

$$k_{\text{кпм}} = \frac{R_{21}^r}{F_c} = \frac{\sin \varphi_{21}}{\cos \varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2}.$$

Связь этого коэффициента с длиной кривошипа определится из выражения

$$k_{\text{кпм}} = \frac{M_{\text{дв}}}{l_{\text{AB}} \cdot F_c}.$$

Как известно, отношение сил (моментов), приложенных на входе и выходе, определяется равенством их мощностей: $M_{\text{дв}} \omega_1 = F_c v_c$. Таким образом, наряду с понятием кинематической передаточной функции между входными и выходными звеньями механизма, являющейся как бы "паспортом" его в том понимании, что она зависит только от размеров звеньев, имеет смысл ввести понятие силовой передаточной функции. Связь между ними выражается соотношением

$$\frac{v_c}{\omega_1} = \frac{dx_c}{d\varphi_1} = -k_{\text{кпм}} r = -\frac{M_{\text{д}}}{F_c}.$$

Здесь следует помнить, что такая связь между силовой и кинематической передаточными функциями справедлива только для идеального механизма, у которого не учитываются трение в кинематических парах и силы веса и инерции. Такое представление при численном сравнительном исследовании позволяет видеть влияние степени приближения идеальной динамической модели к реальной с точки зрения полной оценки эффективности конкретной схемы механизма и сравнения ее с другими схемами. Так, например, влияние сил трения в кинематических парах, сил веса или сил инерции можно проследить отдельно путем фиксации отклонения силовой передаточной функции от кинематической при различных значениях обобщенной координаты. Для практики важно оценить раздельное влияние, например, сил веса и трения при малых скоростях или же сил трения и ускорений при боль-

ших скоростях. Здесь существует возможность представления единой методики в оценке влияния различных физических явлений. Так, влияние сил инерции (веса) и сил трения оценивается углом отклонения силы, действующей со стороны одного звена на другое, от ее направления в случае идеального механизма (для рассматриваемого случая — от шатуна 2).

Если учесть, что R_{03}^n направлена по нормали к траектории точки C , а F_c — по касательной, то, как видно из рис.3.7, коэффициент

$$k_{\text{кпм}}^{\tau} = k_{\text{кпм}} = \frac{R_{21}^{\tau}}{F_c}$$

характеризует обмен тангенциальными составляющими реакций в кинематических парах B и C . Коэффициент же обмена нормальными составляющими имеет вид

$$k_{\text{кпм}}^n = \frac{R_{21}^n}{R_{03}^n} = \frac{\cos \varphi_{21}}{\cos \varphi_{20}} = -\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_2}.$$

Коэффициенты обмена нормальными составляющими в кинематических парах для кривошипно-ползунного механизма имеют вид

$$k_{12}^n = \frac{R_{21}^n}{R_{12}^n} = \frac{F_c \cos \varphi_{20}}{\cos \varphi_{20} \sin \varphi_{21} F_c} = \frac{1}{\sin \varphi_{21}},$$

$$k_{23}^n = \frac{R_{32}^n}{R_{03}^n} = \frac{F_c}{\cos \varphi_{20} F_c \operatorname{tg} \varphi_{20}} = \frac{1}{\sin \varphi_{20}}.$$

Для шарнирного четырехзвенника (рис.3.8) в случае отсутствия трения и сил веса (сил инерции):

$$R_{01}^{\tau} = R_{21}^{\tau} = \frac{M_d}{l_{AB}}, \quad R_{21} = \frac{R_{21}^{\tau}}{\sin \varphi_{21}} = \frac{M_d}{l_{AB} \sin \varphi_{21}},$$

$$|\bar{R}_{21}| = |\bar{R}_{12}|, \quad |\bar{R}_{23}| = |\bar{R}_{32}|,$$

$$R_{23}^{\tau} = R_{03}^{\tau} = \frac{M_c}{l_{CD}},$$

$$|\bar{R}_{23}| = -|\bar{R}_{23}^{\tau}| = \frac{R_{23}^{\tau}}{\sin \varphi_{23}} = \frac{M_c}{l_{CD} \sin \varphi_{23}},$$

$$k_{\text{шч}} = \frac{M_d}{M_c} = \frac{l_{AB}}{l_{CD}} \cdot \frac{\sin \varphi_{21}}{\sin \varphi_{32}} = \frac{l_{AB}}{l_{CD}} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

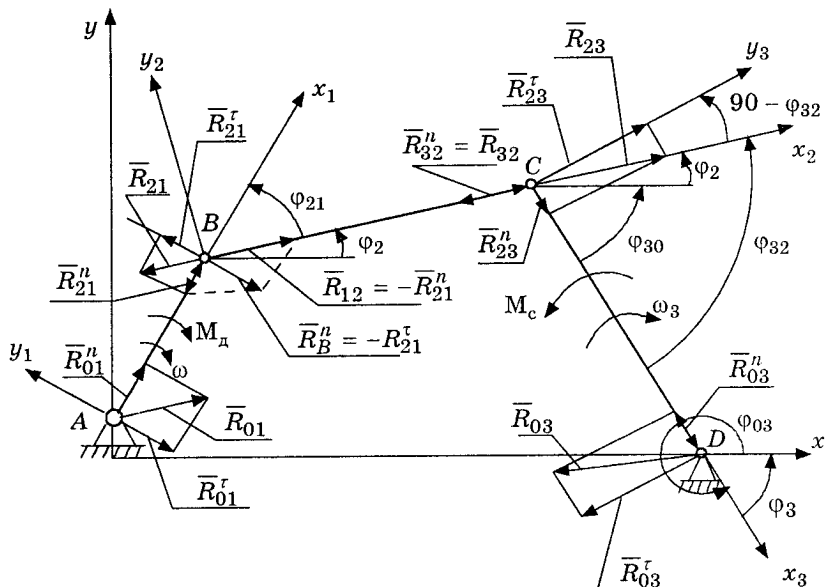


Рис.3.8. Соотношение реактивных сил в кинематических парах шарнирного четырехзвенника без учета трения

Связь между коэффициентом $k_{шч}$ возрастания моментов сил для шарнирного четырехзвенника и кинематической передаточной функцией определяется соотношением

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -k_{шч}.$$

Коэффициенты возрастания усилий в кинематических парах для этого механизма определяются из соотношений

$$k_{21} = \frac{R_{21}}{R_{21}^r} = \frac{1}{\sin \varphi_{21}},$$

$$k_{32} = \frac{R_{32}}{R_{32}^r} = \frac{1}{\sin \varphi_{32}}.$$

Для кулисного механизма с теми же допущениями (рис.3.9) имеем

$$R_{21}^r = R_{01}^r = \frac{M_d}{l_{AB}}, \quad R_{23} = R_{23}^r = \frac{M_c}{l_{BD}} = R_{03}^r,$$

$$R_{21}^n = R_{23} \sin \varphi_{31} = \frac{M_c}{l_{BD}} \sin \varphi_{31} = R_{01}^n.$$

Для данного механизма коэффициент $k_{км}$ возрастания моментов (тангенциальных сил) определяется из соотношения

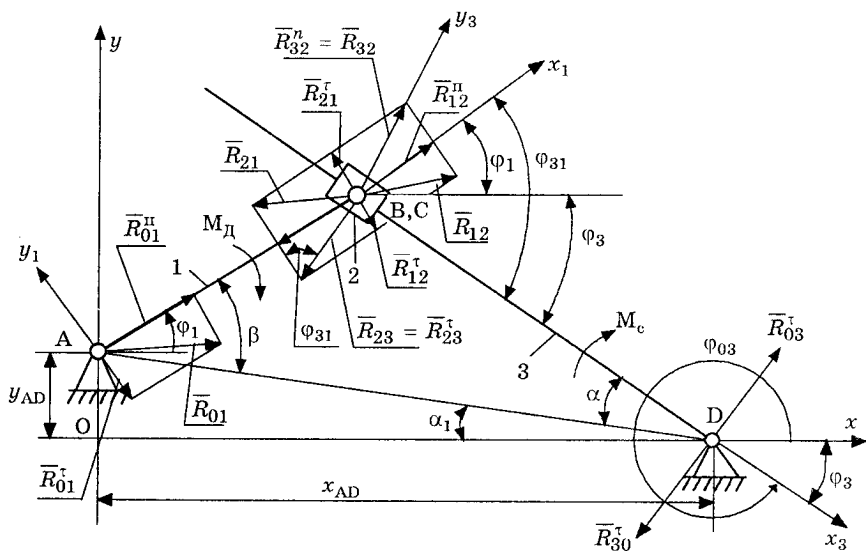


Рис.3.9. Соотношение сил в кинематических парах кулисного механизма без учета трения

$$k_{\text{КМ}} = \frac{R_{21}^i}{R_{03}^i} = -\frac{M_{\text{д}}}{M_{\text{с}}} \cdot \frac{l_{\text{BD}}}{l_{\text{AB}}} = \cos \varphi_{31} = \cos(\varphi_1 + \varphi_3).$$

Из $\triangle ABD$ (рис.3.9) имеем

$$\frac{l_{\text{AB}}}{\sin \alpha} = \frac{l_{\text{BD}}}{\sin \beta},$$

где $\alpha = \varphi_3 - \alpha_1$, $\beta = \varphi_1 + \alpha_1$;

тогда последнее уравнение примет вид

$$k_{\text{КМ}} = \frac{M_{\text{д}}}{M_{\text{с}}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = -\frac{M_{\text{д}}}{M_{\text{с}}} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha_1)}{\sin(\varphi_3 - \alpha_1)},$$

где $\alpha_1 = \arctg\left(\frac{y_{\text{AD}}}{x_{\text{AD}}}\right).$

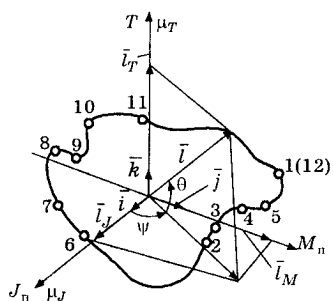


Рис.3.10. К определению взаимосвязи силовых, массовых и энергетических характеристик

3.2. Взаимосвязь силовых, массовых и энергетических характеристик машины

3.2.1. Взаимосвязь силовых и массовых характеристик

Силовые характеристики машины $M_{\Pi} = M_{\Pi}^{\text{д}} - M_{\Pi}^{\text{с}}$, массовые $J_{\Pi} = J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{II}}$ и скоростные $\omega = \omega(\varphi)$ связаны между собой теоремой об изменении кинетической энергии ΔT звена приведения:

$$\Delta T = T_i - T_{i-1} = \Delta A = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{д}} d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{с}} d\varphi.$$

При этом учитывается, что кинетическая энергия $T_i = \frac{J_{\Pi}^{\text{I}} \omega_i^2}{2}$ изменяется как за счет изменения скорости $\omega = \omega(\varphi)$, так и за счет изменения приведенного момента инерции $J_{\Pi} = J(\varphi)$.

Дифференциальное уравнение движения звена приведения дает возможность выделить силовые и скоростные характеристики:

$$M_{\Pi} = J_{\Pi} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = M_{\Pi}^{\text{I}} + M_{\Pi}^{\text{II}}, \quad (3.25)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{\Pi}}{J_{\Pi}} - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} = \varepsilon_{\text{I}} - \varepsilon_{\text{II}}.$$

Уравнение (3.25) указывает на двойную природу динамической нагруженности главного приводного вала, связанную с наличием постоянной составляющей J_{Π}^{I} , т.е. $M_{\Pi}^{\text{I}} = (J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{II}}) \varepsilon$, а также учитывающую совместное влияние изменения $J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}^{\text{II}}/d\varphi$ и $\omega = \omega(\varphi)$. При этом знак M_{Π}^{II} определяется знаком функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$. Это относится и к неравномерности вращения главного приводного вала машины. Если $\varepsilon_{\text{I}} = \frac{M_{\Pi}^{\text{д}} - M_{\Pi}^{\text{с}}}{J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{II}}}$ определяется постоянной составляющей J_{Π}^{I} , а также зависит от сил движущих $M_{\Pi}^{\text{д}}$ и сопротивления $M_{\Pi}^{\text{с}}$, то ε_{II} учитывает совместное влияние скоростных $\omega = \omega(\varphi)$ и массовых $J'_{\Pi}/J_{\Pi} = f(\varphi)$ характеристик и не зависит от соотношения сил движущих и сопротивления.

Связь между силовыми характеристиками машины $M_{\Pi} = M_{\Pi}^d - M_{\Pi}^c$, массовыми $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$ и энергетическими $T_i = J_{\Pi}^i \cdot \omega_i^2/2$ легко проследить, если представить некоторый вектор $\bar{l} = l_J \bar{i} + l_M \bar{j} + l_T \bar{k}$ (рис.3.10) в пространственной системе координат, где $l_J = J_{\Pi}/\mu_J$, $l_M = M_{\Pi}/\mu_M$, $l_T = T/\mu_T$. Здесь μ_J , кг·м²/мм, μ_M , Н·м/мм, μ_T , Н·м/мм — соответствующие масштабные коэффициенты. На рис.3.10 представлена некоторая пространственная кривая, представляющая собой геометрическое место концов вектора \bar{l} , определенного в точках 1...12, соответствующих одному обороту звена приведения с интервалом 30°. Таким образом, за один оборот вала конец вектора \bar{l} , изменяющегося по величине и направлению, опишет кривую, являющуюся его годографом.

Величина вектора \bar{l} определится соотношением

$$l = \sqrt{l_J^2 + l_M^2 + l_T^2} = \sqrt{\left(\frac{J_{\Pi}}{\mu_J}\right)^2 + \left(\frac{M_{\Pi}}{\mu_M}\right)^2 + \left(\frac{T}{\mu_T}\right)^2}.$$

Направление вектора \bar{l} определится углами

$$\theta = \arctg\left(\frac{l_T}{l_{JM}}\right) = \arctg\left|\frac{T/\mu_T}{\sqrt{\left(\frac{J_{\Pi}}{\mu_J}\right)^2 + \left(\frac{M_{\Pi}}{\mu_M}\right)^2}}\right|, \quad (3.26)$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{l_M}{l_J}\right) = \arctg\left|\frac{M_{\Pi}/\mu_M}{J_{\Pi}/\mu_J}\right|. \quad (3.27)$$

На рис.3.11 представлены проекции годографа вектора \bar{l} на соответствующие плоскости. Как видно из расположения кривых $T = f(J_{\Pi})$, $T = f(M_{\Pi})$ и $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$, удаленность их от начала координат определяется величинами $J_{\Pi}^I = J_{\Pi}^{\max}$ и $T_{\min} = J_{\Pi}^{\min} \cdot \omega_{\min}^2/2$, то есть минимальной постоянной составляющей приведенного момента инерции и минимальной угловой скоростью вала машины.

Физический смысл выражений (3.26) и (3.27) виден из следующих соотношений, полученных путем деления числителя и знаменателя на J_{Π} :

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{\mu_T}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu_J}\right)^2 + \left(\varepsilon_I \frac{1}{\mu_M}\right)^2}} \right], \quad (3.28)$$

$$\psi_{MJ} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu_J}{\mu_M} \varepsilon_I \right). \quad (3.29)$$

Уравнения (3.28) и (3.29) показывают, что тангенс угла наклона вектора \bar{l} к плоскости $M_{\Pi}J_{\Pi}$ характеризует коэффициент динамичности k_{Π}^I , обусловленный силами движущими и сопротивления. Уравнение (3.26) дает также следующее соотношение, как результат деления числителя и знаменателя на T :

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{1}{\mu_T}}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{\mu_J}\right)^2 + \left(2k_{\Pi}^I\right)^2}} \right]. \quad (3.30)$$

В уравнении (3.30)

$$k_{\Pi}^I = \frac{M_{\Pi}}{T} = \frac{2M_{\Pi}}{J_{\Pi}\omega^2} = \frac{2\varepsilon_I}{\omega^2}.$$

Влияние функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$, то есть переменной составляющей $J_{\Pi}^{\Pi} = J(\varphi)$, видно из сравнения диаграмм, представленных на рис.3.11 и 3.12. В последнем случае годограф вектора \bar{l} размещается в плоскости, параллельной плоскости TM_{Π} .

Анализ зависимостей $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$ (рис.3.13) указывает на физический смысл выражения (3.27), которое определяет ускорение ε_I трогания машины с места при $\omega = 0$ (3.29). Сравнение функций $J_{\Pi} = J(\varphi)$, представленных на рис.3.12 и 3.13, указывает на то, что при $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I = \text{const}$ $\varepsilon_I = M_{\Pi}^{\max} / J_{\Pi}^I$. При условии $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{\Pi} \neq \text{const}$, $\varepsilon_I^{\max} = M_{\Pi}^A / J_{\Pi}^A$ и $\varepsilon_I^{\max} = M_{\Pi}^B / J_{\Pi}^B$, где M_{Π}^A , J_{Π}^A и M_{Π}^B , J_{Π}^B — значения приведенных моментов сил и инерции в некоторых точках A и B функции $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$. Здесь

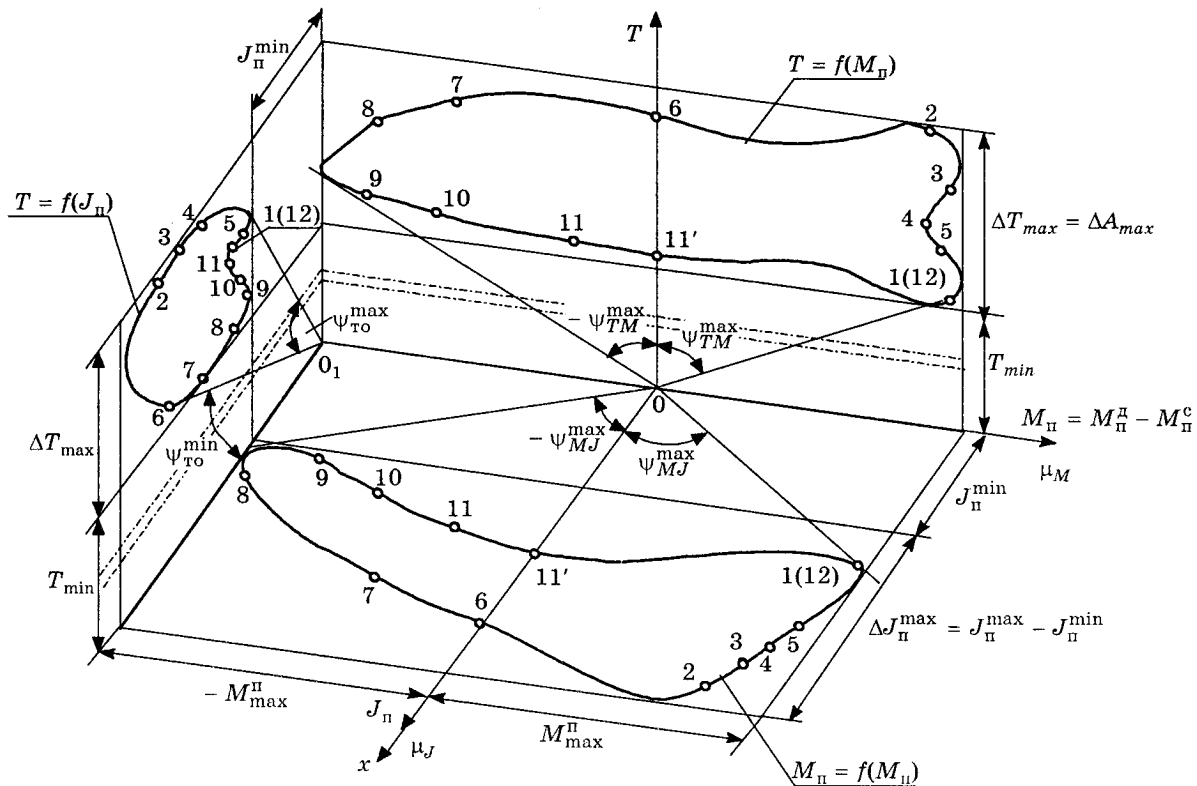


Рис.3.11. Диаграмма силовых, массовых и энергетических характеристик машины

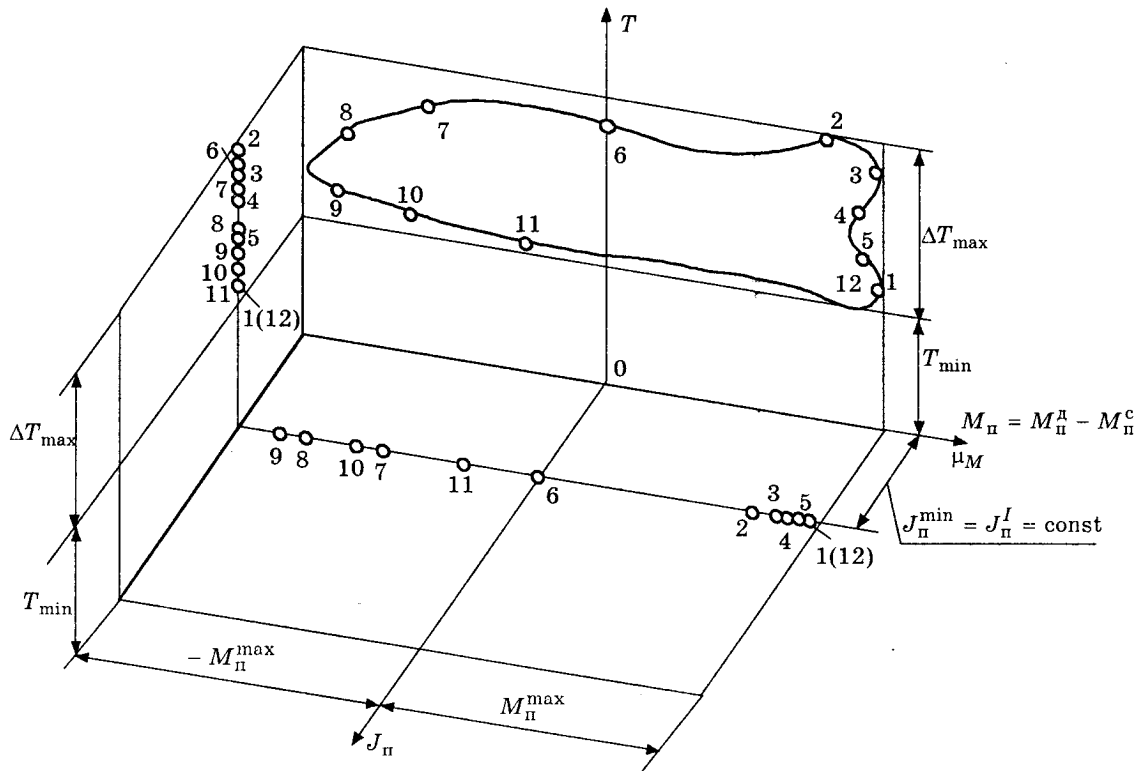


Рис.3.12. Диаграмма силовых, массовых и энергетических характеристик при $J_\Pi = \text{const}$

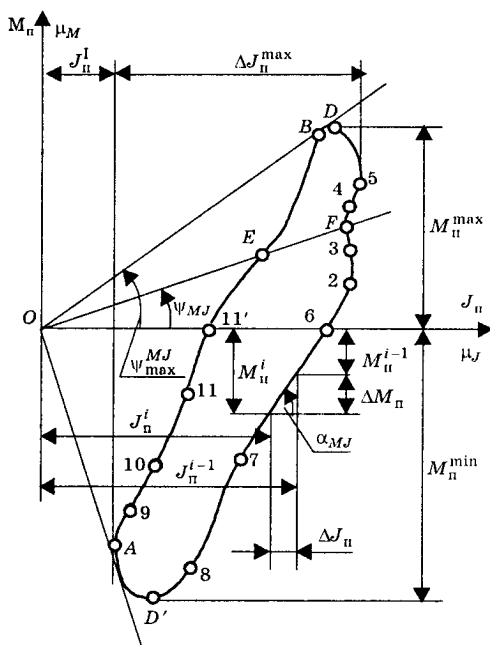


Рис.3.13. Взаимосвязь приведенного момента сил M_{II} с приведенным моментом инерции J_{II}

максимальное значение $M_{II}^{\max} = M_{II}^D$ в точке D не совпадает с моментом, определяющим максимальное значение ускорения ε_I^{\max} трогания машины с места. Таким образом, диаграмма сил-масс $M_{II} = f(J_{II})$ позволяет выявить наилучшее значение обобщенной координаты звена приведения (главного приводного вала машины), начиная с которой трогание с места будет проходить с максимальным значением ускорения. Для анализа неравномерности движения машины представляет интерес построение графика функции

$$\varepsilon_I = \frac{M_{II}}{J_{II}} = f(\varphi),$$

которая может быть получена из уравнения (3.29). Как видно из графика (рис.3.13), значения ε_I в точках E (между 11-м и 12-м положением звена приведения) и F (между 3-м и 4-м) одинаковые. Из графика $M_{II} = f(J_{II})$ видны также значения обобщенных координат, в которых ε_I меняет знак (переходит через ноль). Это положения 6 и 11. Зависимость $M_{II} = f(J_{II})$ представляет также интерес для исследования неравномерности движения приводного

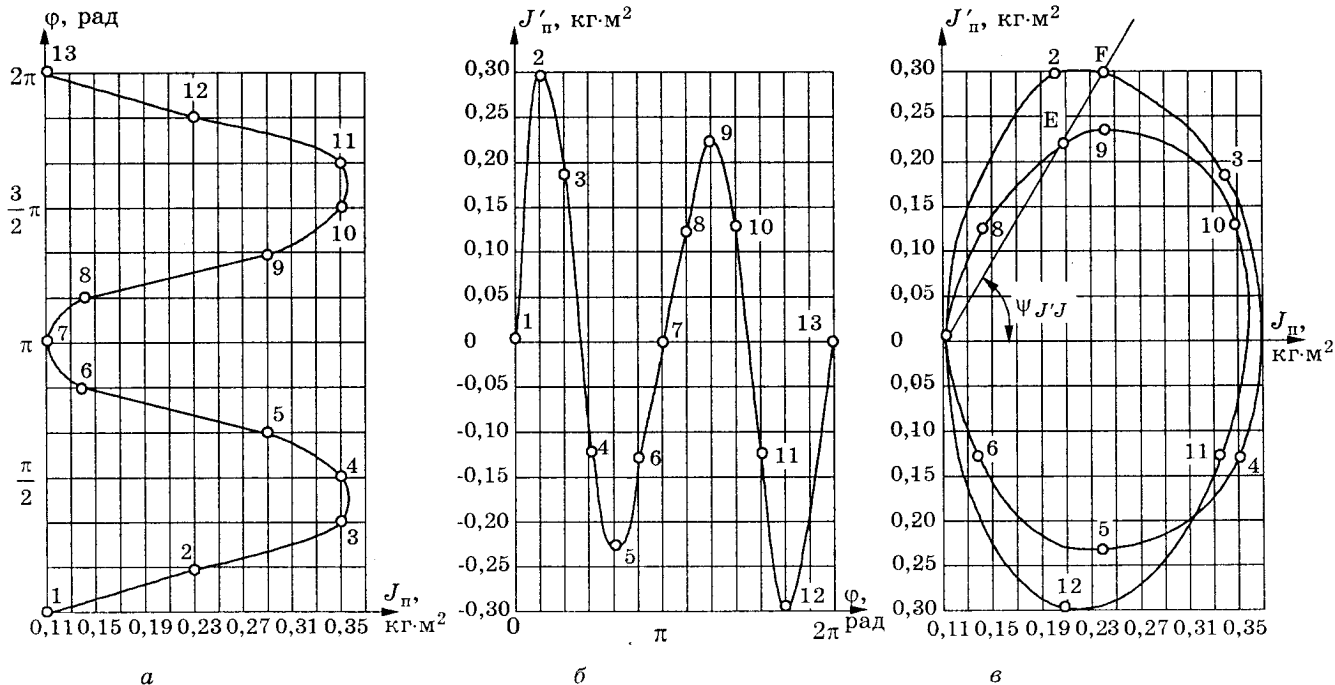


Рис.3.14. Зависимости: *а* — приведенного момента инерции $J_{II} = J_{II}(\varphi)$, *б* — производной $J'_{II} = J'_{II}(\varphi)$, *в* — зависимость $J'_{II} = f(J_{II})$ для машины с кривошипно-ползунным механизмом

вала машины в следующем графическом представлении. Если в каждой точке $i = 1, 2, \dots, 12$ графика $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$ на рис.3.13 отложить отрезки $\varepsilon_{\Pi}^i = M_{\Pi}^i / J_{\Pi}^i$, то, задавая значение функции $\omega = \omega(\varphi)$, легко представить действительное значение полного ускорения:

$$\varepsilon^i = \varepsilon_{\Pi}^i + \frac{\omega_i^2}{2} \left(\frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} \right)_i.$$

Для этого надо иметь табличное или графическое задание функции $J'_{\Pi} / J_{\Pi} = f(\varphi)$. На рис.3.14 представлены функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$ (рис.3.14, а), $J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}/d\varphi = f(\varphi)$ (рис.3.14, б) и функция $J'_{\Pi} = f(J_{\Pi})$ (рис.3.14, в), полученная из этих двух функций для машины с исполнительным кривошипно-ползунным механизмом. Из графика (рис.3.14, в) видно, что величина

$$\frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} = 2 \frac{\varepsilon_{\Pi}}{\omega^2} = 2k_{\Pi}^{\text{II}}$$

определяется тангенсом угла $\psi_{J'J}$ наклона прямой OE к оси J_{Π} .

Из рис.3.14, в видно, что в точках E и F k_{Π}^{II} имеет одинаковые значения.

Таким образом, исследование движения машины разбивается на два этапа, связанные между собой соотношением $k_{\Pi}^{\text{I}} = k_{\Pi}^{\text{I}} + k_{\Pi}^{\text{II}}$. Это позволяет выявить взаимосвязь функций $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$, $\omega = \omega(\varphi)$ и $M_{\Pi}^{\text{II}} = M(\varphi)$ для различных машин, отличающихся между собой исполнительным механизмом, то есть функцией $J'_{\Pi} = f(J_{\Pi})$. Или же для машин, имеющих один и тот же исполнительный механизм, то есть функцию $J'_{\Pi} = f(J_{\Pi})$, отыскать функцию $\omega = \omega(\varphi)$, поддержание которой с помощью момента M_{Π}^{II} или мощности $M_{\Pi}^{\text{II}}\omega$ обеспечивало бы наименьшую динамическую погрешность или наименьшие энергозатраты на период разгона.

Физический смысл k_{Π}^{II} (см. рис.3.14, в) виден также из преобразования

$$\text{tg}\psi_{J'J} = \frac{\mu_J}{\mu_{J'}} \cdot \frac{J'_{\Pi}}{J_{\Pi}} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2} = \frac{\mu_J}{\mu_{J'}} \cdot \frac{(M_{\Pi}^{\text{II}})_{\Pi}}{2T}. \quad (3.31)$$

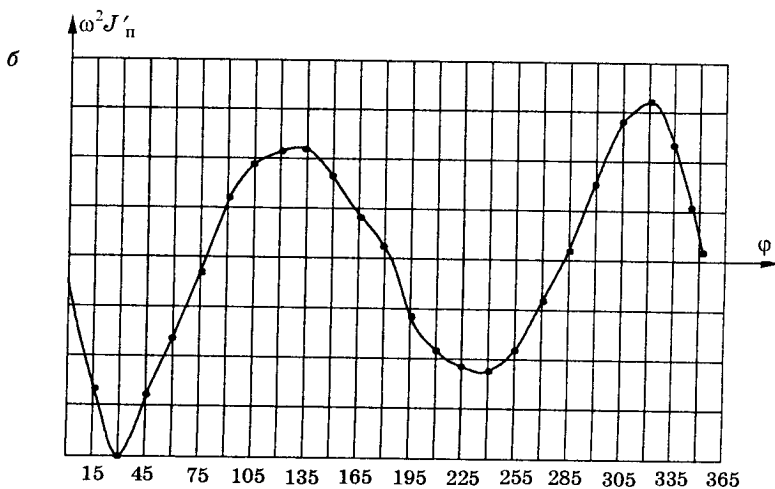
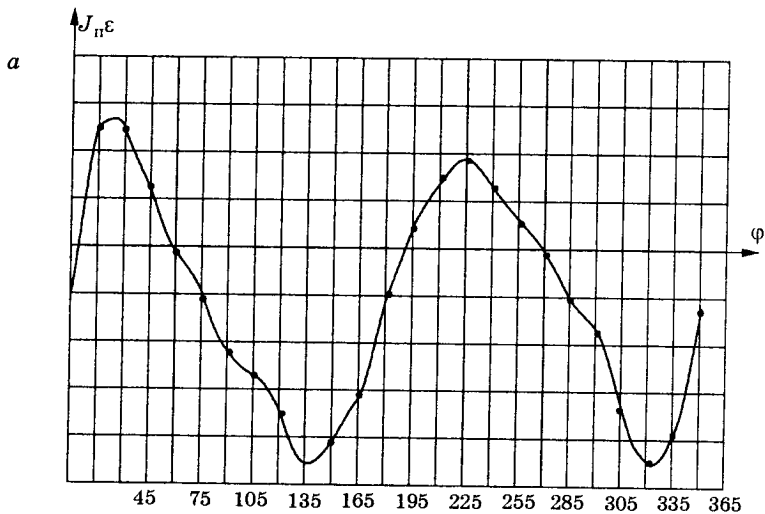


Рис.3.15. Зависимости: *a* — $(M_{II}^A)_I = J_{II}\varepsilon = M(\varphi)$ и
б — $(M_{II}^A)_{II} = (\omega^2/2)J'_{II} = M(\varphi)$ для машины
 с кривошипно-ползунным механизмом

В уравнении (3.31) $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\Pi} = (\omega^2/2) \cdot J'_{\Pi}$ — часть приведенного момента движущих сил, обусловленная колебанием (изменением) приведенного момента инерции. Построение функции $k_{\Delta}^{\Pi} = J'_{\Pi}/J_{\Pi} = f(\varphi)$ дает информацию об использовании накопленной кинетической энергии машины за счет переменности $J_{\Pi} = J(\varphi)$ для совершения, например, полезной работы (преодоления сил технологического сопротивления). Эта функция полезна также для анализа эффективности рекуперативного торможения. Она позволяет в данном случае определить наибольшую величину "высвободившейся" кинетической энергии на некотором угле пути $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ приводного вала. И в том и другом случаях полезно представить зависимости $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\text{I}} = M(\varphi)$ и $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\text{II}} = M(\varphi)$ (рис.3.15). Сравнение зависимостей $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\text{I}} = J_{\Pi}\varepsilon = M(\varphi)$ (рис.3.15, а) и $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\text{II}} = (\omega^2/2)J'_{\Pi} = M(\varphi)$ (рис.3.15, б) указывает на возможность управления динамической нагруженностью приводного вала. Легко видеть влияние на величину M_{Π}^{Δ} суммы двух функций, амплитудное значение и знаки, которых определяют общую динамическую нагруженность. Подбор таких функций и их "наложение" в определенных значениях обобщенной координаты во многом может способствовать снижению неравномерности вращения главного приводного вала машины.

3.2.2. Взаимосвязь массовых и энергетических характеристик

На рис.3.16 видна известная [2] взаимосвязь энергетических и массовых характеристик машины. В данном случае тангенс угла ψ_{TJ} определяет угловую скорость звена приведения:

$$\operatorname{tg}\psi_{TJ} = \frac{l_T}{l_J} = \frac{T}{\mu_T} \frac{\mu_J}{J_{\Pi}} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{2\operatorname{tg}\psi_{TJ} \frac{\mu_T}{\mu_J}}.$$

Здесь так же, как и ранее, значения обобщенной координаты, соответствующей максимальной и минимальной кинетической энергии (точки D и C), не совпадают со значениями обобщенных координат, соответствующих максимальной и минимальной

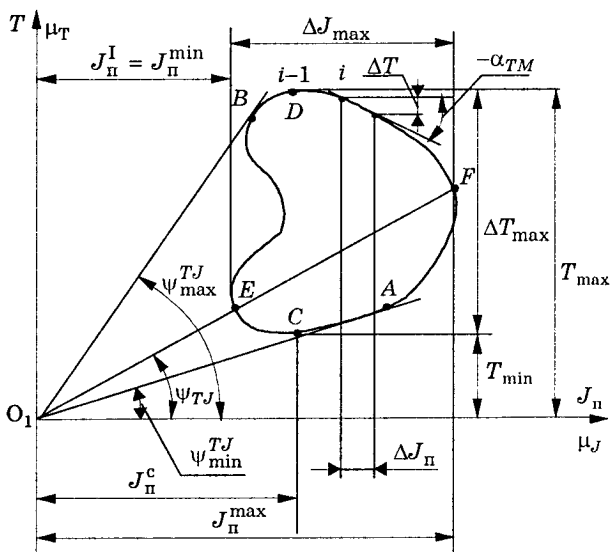


Рис.3.16. Взаимосвязь кинетической энергии T с приведенным моментом инерции J_{II} машины при $J_{II} = J_{II}^I + J_{II}^{II}$

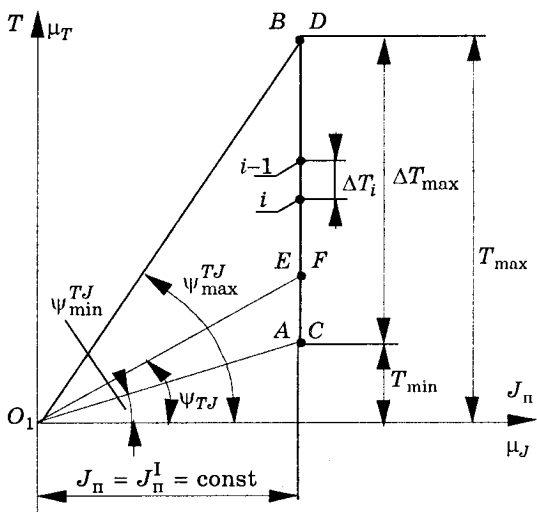


Рис.3.17. Взаимосвязь кинетической энергии T с приведенным моментом инерции J_{II} машины при $J_{II} = J_{II}^I = \text{const}$

скорости (точки A и B). При $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I = \text{const}$ (рис.3.17) значения обобщенных координат, соответствующих максимальной (минимальной) кинетической энергии и максимальной (минимальной) скорости, совпадают (точки B , D и A , C). Из графика $T = f(J_{\Pi})$ видна также связь кинетической энергии T с приведенным моментом сил $M_{\Pi} = M_{\Pi}^{\text{II}} - M_{\Pi}^{\text{I}}$ и производной приведенного момента инерции по обобщенной координате $J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}/d\varphi = f(\varphi)$. Из рис.3.16 следует

$$\text{tg}\alpha_{TJ} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{dT}{dJ_{\Pi}} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{M_{\Pi}}{J'_{\Pi}} \approx \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta J_{\Pi}} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{J_{\Pi}^i - J_{\Pi}^{i-1}}.$$

Таким образом, из диаграммы $T = f(J_{\Pi})$ при $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{\text{II}}$ легко определить значение приведенного момента сил M_{Π}^i , обеспечивающего кинетическую энергию T_i при известном значении J'_{Π} :

$$M_{\Pi} = J'_{\Pi} \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \text{tg}\alpha_{TJ}. \quad (3.32)$$

Из сравнения рис.3.16 и 3.17 видно, что выражение (3.32) не имеет смысла для случая $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I = \text{const}$, так как $J'_{\Pi} = 0$. Для рис.3.17 имеем

$$\frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{\Delta T}{J_{\Pi}^I} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{J_{\Pi}^I} = \frac{J_{\Pi}^I}{2J_{\Pi}^I} \left(\omega_i^2 - \omega_{i-1}^2 \right) \cdot \frac{\mu_J}{\mu_T} = \text{tg}\psi_{TJ}^i - \text{tg}\psi_{TJ}^{i-1}.$$

3.2.3. Взаимосвязь силовых и энергетических характеристик

Из рис.3.18 видно, что

$$\text{tg}\psi_{TM} = \frac{M_{\Pi}}{T} \cdot \frac{\mu_T}{\mu_M} = \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{2\varepsilon_I}{\omega^2} = \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot 2k_{\text{д}}^I. \quad (3.33)$$

Из (3.33) следует, что

$$M_{\Pi} = \frac{\mu_M}{\mu_T} T \text{tg}\psi_{TM} = T \cdot 2k_{\text{д}}^I. \quad (3.34)$$

Уравнения (3.32) и (3.33) дают соотношения

$$\frac{T}{J_{\Pi}^I} = \frac{\mu_M}{\mu_J} \cdot \frac{\text{tg}\alpha_{TJ}}{2k_{\text{д}}^I} = \frac{J_{\Pi}\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{J_{\Pi}^I} = \frac{\omega^2}{2k_{\text{д}}^{\text{II}}}.$$

Из последнего уравнения получим соотношение

$$\frac{k_{\text{д}}^{\text{II}}}{k_{\text{д}}^I} = \frac{\mu_J}{\mu_M} \cdot \frac{\omega^2}{\text{tg}\alpha_{TJ}}.$$

Как видно из рис.3.18, значения обобщенных координат, при которых кинетическая энергия имеет максимальное (минимальное) значение (точки D и C), не совпадают с обобщенными координатами, при которых имеет место максимальное значение приведенного момента сил (точки A', B'). Имеет место также несовпадение с ними точек A, B , соответствующих максимальному значению $(k_{\Pi}^I)_{\max}$, то есть $\operatorname{tg}\psi_{\max}^{TM}$.

Из рис.3.18 видно также следующее соотношение:

$$\frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{dM_{\Pi}}{dT} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{M'_{\Pi}}{M_{\Pi}} = \operatorname{tg}\alpha_{TM}. \quad (3.35)$$

Уравнение (3.35) указывает на связь кинетической энергии с приведенным моментом сил. Из уравнения (3.35) имеем

$$\frac{M'_{\Pi}}{M_{\Pi}} = \frac{\mu_M}{\mu_T} \operatorname{tg}\alpha_{TM}. \quad (3.36)$$

Последнее уравнение позволяет связать функцию $M_{\Pi} = M(\varphi)$ с функцией $M'_{\Pi} = M(\omega)$ путем следующих преобразований:

$$\frac{M'_{\Pi}}{M_{\Pi}} = \frac{M'_{\Pi}}{J_{\Pi}\varepsilon} = \frac{dM_{\Pi}}{d\varphi} \cdot \frac{dt}{d\omega} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{dM_{\Pi}}{d\omega} \cdot \frac{1}{\omega \cdot \varepsilon}.$$

Последнее выражение с учетом (3.36) дает соотношение

$$\frac{dM_{\Pi}}{d\omega} = \frac{\mu_M}{\mu_T} \omega \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{tg}\alpha_{TM}.$$

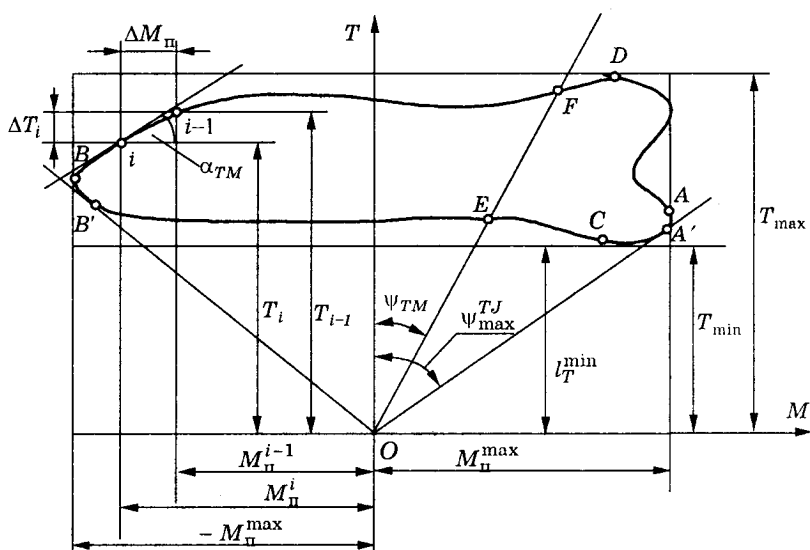


Рис.3.18. Взаимосвязь кинетической энергии T с приведенным моментом сил $M_{\Pi} = M_{\Pi}^{\Delta} + M_{\Pi}^c$

Уравнение (3.36) позволяет также получить следующую зависимость приведенного момента инерции

$$J_{\Pi} = \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{M'_{\Pi}}{\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha_{TM}}. \quad (3.37)$$

Зависимость (3.37) определяет функцию $J_{\Pi} = J(\varphi)$, удовлетворяющую уравнению

$$M_{\Pi} = J_{\Pi} \varepsilon = M'_{\Pi} \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{TM}}. \quad (3.38)$$

Из уравнения (3.33) имеем

$$T = M_{\Pi} \frac{\mu_T}{\mu_M} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_{TM}}.$$

Последнее уравнение, с учетом (3.38), дает

$$T = \frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} = \frac{M'_{\Pi} (\mu_T / \mu_M)^2}{\operatorname{tg} \alpha_{TM} \operatorname{tg} \psi_{TM}}.$$

Учитывая, что уравнение (3.33) дает также соотношение

$$T = M_{\Pi} \frac{\mu_M}{\mu_T} \cdot \frac{1}{2k_{\Pi}^I},$$

а также принимая во внимание (3.38), преобразуем последнее выражение:

$$T = J_{\Pi} \frac{\omega^2}{2} = \frac{M'_{\Pi}}{2k_{\Pi}^I \operatorname{tg} \alpha_{TM}}. \quad (3.39)$$

Выражения (3.38) и (3.39) позволяют получить зависимость динамического момента $M_{\Pi} = f(\varphi)$ и кинетической энергии $T = f(\varphi)$ на основании функции $M'_{\Pi} = f(\varphi)$. Кинетическая энергия может быть получена также из уравнения

$$T = J'_{\Pi} \frac{\mu_M}{\mu_J} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_{TM}}{2k_{\Pi}^I}. \quad (3.40)$$

Уравнения (3.39) и (3.40) дают следующее соотношение:

$$\frac{M'_{\Pi}}{J'_{\Pi}} = \frac{dM_{\Pi}}{dJ_{\Pi}} = \frac{\mu_M}{\mu_J} \operatorname{tg}^2 \alpha_{TM}.$$

Из рис. 3.13 видно, что $\frac{\mu_J}{\mu_M} \cdot \frac{dM_{\Pi}}{dJ_{\Pi}} \approx \operatorname{tg} \alpha_{MJ}$,

$$\operatorname{tg} \alpha_{MJ} \approx \frac{\mu_J}{\mu_M} \cdot \frac{M_i - M_{i-1}}{J_{\Pi}^i - J_{\Pi}^{i-1}}.$$

Это позволяет выразить связь массово-силовой диаграммы (рис.3.13) с энергосиловой (рис.3.18) соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha_{MJ} = \operatorname{tg}^2 \alpha_{TM}.$$

Заканчивая анализ взаимосвязи энергетических, силовых, массовых и кинематических характеристик машины, приведем некоторые соотношения, вытекающие из рассмотренных частных случаев зависимостей $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$ (рис. 3.13), $T = f(\varphi)$ (рис.3.16) и $T = f(M_{\Pi})$ (рис.3.18). Из этих рисунков имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}\psi_{MJ} = \frac{l_M}{l_J} = \frac{M_{\Pi}}{\mu_M} \cdot \frac{\mu_J}{J_{\Pi}} = \frac{\mu_J}{\mu_M} \varepsilon_I = k_{JM} \varepsilon_I,$$

$$\operatorname{tg}\psi_{TJ} = \frac{l_T}{l_J} = \frac{T}{\mu_T} \cdot \frac{\mu_J}{J_{\Pi}} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \frac{\omega^2}{2} = k_{TJ} \frac{\omega^2}{2},$$

$$\operatorname{tg}\psi_{TM} = \frac{l_T}{l_M} = \frac{T}{\mu_T} \cdot \frac{\mu_M}{M_{\Pi}} = \frac{\mu_M}{\mu_T} \frac{J_{\Pi} \omega^2}{2M_{\Pi}} = k_{TM} \frac{\omega^2}{2\varepsilon_I}.$$

3.3. Определение постоянной составляющей приведенного момента инерции по заданному коэффициенту неравномерности скорости звена приведения

Как известно, значения обобщенной координаты, в которой $J_{\Pi} = J_{\Pi}^{\max}$ и $\omega = \omega_{\max}$, не совпадают. Поэтому, если обозначить $(J_{\Pi}^{\Pi})_{\min}^{\max}$ как значения переменной составляющей $J_{\Pi}^{\Pi} = J(\varphi)$ при тех обобщенных координатах, где $\omega = \omega_{\min}^{\max}$ соответственно, то, с учетом того, что $\omega_{\max} \approx \omega_{\text{cp}}^2(1 \pm \delta)$, максимальное приращение кинетической энергии запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta T_{\max} &= T_{\max} - T_{\min} = \\ &= \frac{1}{2} \left[J_{\Pi}^I + (J_{\Pi}^{\Pi})_{\max} \omega_{\text{cp}}^2(1 + \delta) \right] - \frac{1}{2} \left[J_{\Pi}^I + (J_{\Pi}^{\Pi})_{\min} \omega_{\text{cp}}^2(1 - \delta) \right]. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований последнее уравнение дает выражение

$$\begin{aligned} \Delta T_{\max} &= J_{\Pi}^I \omega_{\text{cp}}^2 \delta + \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \left[(J_{\Pi}^{\Pi})_{\max} - (J_{\Pi}^{\Pi})_{\min} \right]}{2} + \\ &+ \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \delta \left[(J_{\Pi}^{\Pi})_{\max} + (J_{\Pi}^{\Pi})_{\min} \right]}{2} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\Delta T_{\max}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} = J_{\text{п}}^{\text{I}} + \frac{\left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\max} - \left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\min}}{2\delta} + \frac{\left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\max} + \left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\min}}{2}.$$

Из последнего уравнения имеем

$$J_{\text{п}}^{\text{I}} = \frac{\Delta T_{\max}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - \frac{\left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\max} - \left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\min}}{2\delta} - \frac{\left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\max} + \left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\min}}{2}.$$

Обычно постоянная составляющая приведенного момента инерции определяет кинетическую энергию привода, включая кинематическую энергию маховика (если он имеется):

$$J_{\text{п}}^{\text{I}} = J_{\text{рз}} \left(\frac{\omega_{\text{дв}}}{\omega_1}\right)^2 + J_{\text{м}} \left(\frac{\omega_{\text{м}}}{\omega_1}\right)^2 + J_1, \quad (3.41)$$

где $J_{\text{рз}}$, $J_{\text{м}}$, J_1 — моменты инерции ротора электродвигателя, маховика и приводного вала машины, принятого за звено приведения;

$(\omega_{\text{дв}}/\omega_1)$ — передаточное отношение механизмов привода двигателя;

$(\omega_{\text{м}}/\omega_1)$ — передаточное отношение механизмов, расположенных между валом, на который установлен маховик, и приводным валом, принятым за звено приведения.

Тогда момент инерции маховика определится из соотношения

$$J_{\text{м}} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{\text{м}}}\right)^2 \left[\frac{\Delta T_{\max}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - J_{\text{рз}} \left(\frac{\omega_{\text{дв}}}{\omega_1}\right)^2 - J_1 - \frac{\left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\max} (1 + \delta) - \left(J_{\text{п}}^{\text{II}}\right)_{\min} (1 - \delta)}{2\delta} \right].$$

Если маховик установлен на приводном валу машины, то $\omega_1/\omega_{\text{м}} = 1$. Чем ближе маховик установлен к двигателю, тем меньше его момент инерции $J_{\text{м}}$, требуемый для выравнивания скорости до заданного предела $\omega_{\text{ср}} \cdot \delta = \omega^{\max} - \omega^{\min}$. Посадка маховика на вал привода, вращающийся со скоростью $\omega_{\text{м}}$, большей, чем $\omega_{\text{ср}}$ звена приведения, позволяет существенно уменьшить габариты маховика, так как его размеры пропорциональны квадрату передаточного отношения $\omega_{\text{м}}/\omega_1$.

Следует помнить, что приведенная зависимость не учитывает жесткости кинематической цепи. Податливость (крутильная жесткость) приводит к упругим колебаниям. Производственные машины и автоматы выпускаются с регулируемым приводом, позволяющим установить оптимальные скоростные режимы работы. Регулируемый привод обычно устанавливают между электродви-

гателем и маховиком, где помещают предохранительную муфту и вариатор скорости. Регулирование (выравнивание) скорости приводного вала машины за счет собственной массы J_M в большинстве случаев не может считаться оптимальным, так как с ростом $J_{II} = J_{II}^I + J_{II}^{II}$ увеличивается динамический момент M_{II}^d на приводном валу, однако проверка такой необходимости с точки зрения неравномерности обобщенной скорости необходима. Если величина J_M , рассчитанная по формуле (3.41), превышает величину $\Delta T_{\max} / \omega_{\text{ср}}^2 \delta$, то это превышение и определяет необходимый добавочный момент инерции J_M маховика, установленного на валу, имеющем скорость вращения ω_M . Если получается, что $J_M \leq 0$, то маховик в машине не требуется. В этом случае требуемая равномерность вращения, определяемая коэффициентом δ , обеспечивается кинетической энергией вращающихся масс кинематической цепи привода.

3.4. Использование энергии маховика для транспортирования грузов с минимальными энергозатратами

Использование маховика с целью накопления кинетической энергии и для выравнивания скорости вращения приводного вала машины за счет "перекачки" его кинетической энергии находит все большее применение в связи с созданием экологически безвредных машин и экономией энергии. Наряду с поисками путей технической реализации рекуперативного торможения часто встает проблема использования наименьших энергозатрат на транспортные (не связанные с самим технологическим процессом) перемещения объекта производства.

Наиболее показательной является проблема вертикального транспорта. Например, требуется переместить груз весом Q (опустить и поднять его) с наименьшими энергозатратами. При этом скорость опускания (приземления) должна быть близкой к нулю. На рис.3.19 представлена схема, поясняющая перемещение груза Q (опускание его на величину H и подъем) с использованием барабана с разматывающейся лентой. На рис.3.19: 1 — перемещаемый груз Q ; 2 — тонкая лента, наматывающаяся на барабан 3; 4 — муфта; 5 — маховик.

При опускании груза 1 (например, емкости с жидкостью) требуются его приземление с минимальной скоростью, остановка на время опорожнения этой емкости и подъем с минимальными энергозатратами после заполнения емкости. Эта цель достигается тем, что энергия груза 1 при опускании затрачивается на "раскручивание" маховика 5. При достижении максимальной скорости маховик 5 отключается от вала 6 с помощью муфты 4 и

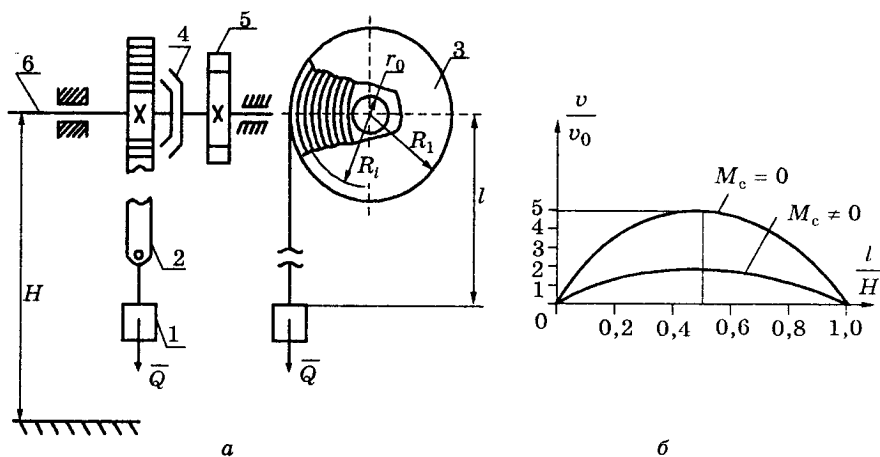


Рис.3.19. Использование маховика для рационального потребления энергии на опускание и подъем груза:

а — схема, реализующая кинематическое торможение при опускании и подъеме груза за счет энергии маховика, приобретенной при опускании; **б** — соотношение скоростей при кинематическом торможении [15]

продолжает вращаться. Груз же 2 продолжает опускаться. График зависимости скорости v опускания груза от пройденного пути показан на рис.3.19, б. При отсутствии сопротивления ($M_c = 0$) отношение v/v_0 текущей скорости v груза к скорости v_0 груза, прошедшего путь, например, $l = 0,8$ м, максимальное. При $l/h = 0,5$ $v/v_0 = 5$. При наличии сопротивления (сил трения и т.п.) это соотношение изменяется. Дальнейшее опускание груза происходит с уменьшением скорости v . Приземление происходит со скоростью $v_{\min} = \omega_3 R_i$, где ω_3 — скорость барабана 3 (вала 6), r_0 — наименьший радиус барабана 3 с размотанной лентой 2. При отсутствии сил сопротивления изменение (увеличение) скорости v при опускании (подъеме) происходит за счет изменения радиуса R_i барабана 3 в пределах $R_1 > R_i > r_0$. После заполнения емкости муфта 4 вновь включается, подъем груза 1 обеспечивается за счет накопленной энергии маховика 3. Для незаполненной емкости 1 этой энергии хватает на подъем груза 1 на полную высоту H . При заполненной емкости энергия затрачивается только на преодоление высоты $H - H_m$, где H_m — высота подъема груза до остановки маховика 5. При наличии технологического процесса, требующего, например, вертикальной транспортировки объекта производства, представляется возможность рационального использования энергии за счет рассмотренной "перекачки" энергии, накопленной при опускании маховика, в энергию, необходимую для подъема.

3.5. Программное управление приводами машин

Если машина потребляет постоянную мощность, то выбор типа и механической характеристики двигателя упрощается. Однако такие случаи на практике не встречаются. Нагрузка на главный приводной вал машины определяется величиной $M_{\Pi}^c = F_{\text{тс}}(v_{\text{po}}/\omega_1)$, определяемой не только силами технологического сопротивления $F_{\text{тс}}$, но и типом исполнительного механизма ($i_{\text{им}} = v_{\text{po}}/\omega$). При этом динамическая нагруженность машины зависит как от сил движущих и сопротивления (M_{Π}^d, M_{Π}^c), так и от функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$. Кроме того, возникают непериодические колебания скорости, характерные для переходных процессов. Переходы регулируемого объекта из одного стационарного состояния в другое возникают при сбросе нагрузки, изменении количества подводимой энергии при пуске, торможении и реверсировании. Контроль переходных процессов и управление ими — важнейшие задачи автоматического управления машинами-автоматами.

Характер и длительность переходных процессов зависят от технологического процесса и особенностей передаточных и исполнительных механизмов машины.

При автоматическом регулировании обычно требуется соблюдение устойчивости процесса. Это означает, что объект регулирования после возмущения должен вновь прийти в прежнее состояние.

Динамика таких процессов является предметом изучения теории автоматического регулирования и специальных дисциплин. Однако в основе управления машинами лежат принципы механики, увязывающие их силовые, энергетические и массовые характеристики.

Основным элементом саморегулирующихся систем является обратная связь, которая реализуется в виде устройств, передающих часть выходной информации (координаты, силы и т.п.) на вход объекта регулирования.

"Жесткое" программное управление подразумевает наличие некоторых номинальных функций: силовой $M = f(\varphi)$ или $M = f(t)$, скоростной $\omega = f(\varphi)$ или $\omega = f(t)$ или же функции изменения мощности $P = f(\varphi)$ или $P = f(t)$, которые обеспечивают выполнение технологического процесса в пределах требуемых параметров качества. Взаимосвязь этих функций, заданных в обобщенных координатах φ или времени t , определяется с помощью рассмотренных преобразований.

В любом случае управления важно иметь силовую функцию $M_d = f(\varphi)$, соответствующую заданной $\omega = f(\varphi)$, или получить закон

изменения скорости ω в пределах угла разгона $0 \leq \varphi \leq \varphi_p$ при заданных силовых функциях M_{Π}^d и M_{Π}^c . Рассмотренный пример в разд. 2.6.1 позволяет решить задачу во второй постановке с упрощением, однако он не вскрывает "внутренней динамики" машины, обусловленной переменностью функции $J_{\Pi} = J(\varphi)$.

В [15] приведен способ, позволяющий не только определить закон изменения скорости приводного вала, но и решить обратную задачу — по заданным условиям движения, например, по времени срабатывания, найти ориентировочно массы и размеры звеньев, обеспечивающие изменение сил (моментов) в определенном диапазоне. Каждый такой вариант применим к динамическим характеристикам J_{Π} , M_{Π}^d , M_{Π}^c , являющимся функциями обобщенной координаты, скорости или времени.

Интерес представляет более общий случай, когда силы и моменты, приложенные к звеньям, зависят как от положения, являясь функцией обобщенной координаты, так и от скорости, а приведенный момент инерции также переменный. Этот случай встречается в практике наиболее часто в машинах с электроприводом (металлорежущие станки, машины для обработки металлов давлением и т.п.). Этот случай характерен и для средств автоматизации с электромагнитным приводом (реле, контакторы, средства автоматической защиты). Метод решения такой задачи приведен в [15] на примере пуска поперечно-строгального станка с кулисным механизмом.

В этих и других случаях закон изменения скорости вала приводного двигателя не учитывает динамических характеристик исполнительных и передаточных механизмов, положенных в основу машины, то есть этот закон не учитывает изменения приведенного момента инерции машины в случае использования в ней механизмов с переменным передаточным отношением.

Для машин с одной степенью подвижности управляющая программа по силе (крутящему моменту) при заданном законе изменения угловой скорости, как показано ранее, может быть представлена в виде

$$M_{\Pi}^d = M_{\Pi}^c + J_{\Pi} \cdot \omega \cdot \omega' + J'_{\Pi} \frac{\omega^2}{2}, \quad (3.42)$$

где M_{Π}^d — приведенный крутящий момент на валу приводного двигателя;

$\omega' = d\omega/d\varphi$ — аналог углового ускорения;

$J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}/d\varphi$ — производная от приведенного момента инерции по φ (обобщенной координате).

Уравнение (3.42) определяет закон изменения крутящего момента на валу приводного двигателя в случае, если задан закон

изменения ω в функции обобщенной координаты φ . При этом закон изменения ω должен учитывать взаимосвязь между массово-геометрическими характеристиками передаточных исполнительных механизмов машин. Эта взаимосвязь может быть выявлена следующим образом. Предположим, что в процессе движения на всем участке установившегося движения выполняется условие $M_{\Pi}^{\Pi} = M_{\Pi}^{\text{с}}$. Это означает, что приводной момент на валу двигателя изменяется по закону, являющемуся зеркальным отражением закона $M_{\text{с}}^{\Pi}$. В этом случае изменение ω приводного двигателя или главного приводного вала машины определяется выражением

$$J_{\Pi} \cdot \omega \cdot \omega' + J_{\Pi}' \frac{\omega^2}{2} = 0. \quad (3.43)$$

Преобразование уравнения (3.43) дает возможность выразить зависимость между ω и массово-геометрическими характеристиками следующим образом:

$$\omega \cdot J_{\Pi} \cdot \omega' = -J_{\Pi}' \frac{\omega^2}{2}.$$

Из последнего уравнения имеем

$$J_{\Pi} \cdot \omega' = -J_{\Pi}' \frac{\omega}{2} \quad \text{или} \quad J_{\Pi} \frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega}{2}.$$

Предположив, что в дальнейшем каждому значению φ будут соответствовать вполне определенные значения J_{Π} и ω , и умножив левую и правую части последнего уравнения на $d\varphi$, получим

$$J_{\Pi} d\omega = -\frac{\omega}{2} dJ_{\Pi} \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{J_{\Pi}}.$$

Проинтегрируем левую и правую части последнего уравнения:

$$\ln \left| \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} \right| = \ln \left| \left(\frac{J_{\Pi}^{\varphi}}{J_{\Pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{\omega_{\varphi}} = \sqrt{\frac{J_{\Pi}^{\varphi}}{J_{\Pi}}}, \quad (3.44)$$

где ω_{φ} и J_{Π}^{φ} — некоторые значения ω и J_{Π} , соответствующие определенному углу φ .

Из уравнения (3.44) получаем

$$\omega = \omega_{\varphi} \sqrt{\frac{J_{\Pi}^{\varphi}}{J_{\Pi}}}. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) имеет физический смысл. Если умножить левую и правую части этого уравнения на $1/2$ и возвести в квадрат, получим

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{\phi}^2 \frac{J_{\Pi}^{\phi}}{J_{\Pi}} \quad \text{или} \quad \frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} = \frac{J_{\Pi}^{\phi} \omega_{\phi}^2}{2}.$$

Последнее равенство есть выражение, определяющее постоянство кинетической энергии системы при различных ϕ и соответствующих этим углам ω и J_{Π} при равенстве $M_{\Pi}^{\text{д}} = M_{\Pi}^{\text{с}}$. Другими словами, кинетическая энергия $J_{\Pi}^{\phi} \omega_{\phi}^2 / 2$ каком-то фиксированном значении ϕ остается неизменной для любых значений текущих ϕ . Это утверждение справедливо для "идеальной" машины.

При переменной величине $J_{\Pi} = J(\phi)$ уравнение (3.45) указывает на неравномерность вращения главного приводного вала, обусловленную "внутренней" динамикой машины, то есть массо-геометрическими характеристиками ее исполнительных и передаточных механизмов при отсутствии сил (моментов) движущих и сопротивления. Другими словами, уравнение (3.45) описывает закон изменения обобщенной скорости машины, присущий этой машине и неизменный при отсутствии сил движущих, сопротивления, трения и др. В этом случае "идеальная машина", однажды приведенная в движение, будет совершать вращение в соответствии с выражением (3.45).

В связи с этим управление переходными процессами (разгон, торможение) требует не только выбора (назначения) закона изменения обобщенной скорости от начального до конечного значений, но и учета вышеотмеченной закономерности, так как наличие "собственной" скорости машины, описанной выражением (3.45), в значительной степени влияет на динамическую нагрузку вала приводного двигателя. Таким образом, функция $\omega = \omega(\phi)$, входящая в уравнение (3.42), должна быть представлена с учетом уравнения (3.42) в виде

$$\omega = \omega_{\text{зад}} + \omega_{\phi} \sqrt{\frac{J_{\Pi}^{\phi}}{J_{\Pi}}}. \quad (3.46)$$

Если машина содержит регулируемый привод, включающий двигатель постоянного тока, то напряжение определяется из условия равенства мощностей, которое имеет вид

$$UI = M_{\Pi}^{\text{д}} \cdot \omega \quad \text{или} \quad \frac{U^2}{R} = M_{\Pi}^{\text{д}} \cdot \omega,$$

где U — напряжение, подаваемое на электродвигатель; I — ток, потребляемый двигателем; R — сопротивление якорной цепи двигателя.

Отсюда
$$U = \sqrt{M_{\Pi}^{\text{д}} \cdot \omega \cdot R}. \quad (3.47)$$

Таким образом, напряжение, подаваемое на приводной двигатель постоянного тока, определяется выражением (3.47) при подстановке в него $M_{\Pi}^{\text{д}}$ из (3.42) и ω из (3.46).

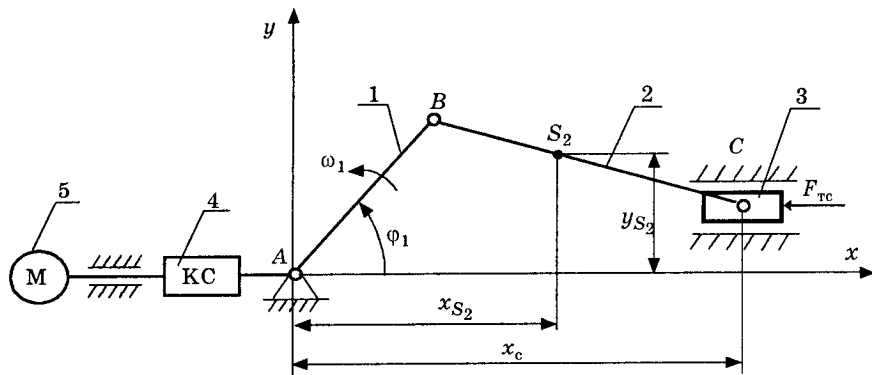


Рис.3.20. Схема машинного агрегата с кривошипно-ползунным исполнительным механизмом

Такое техническое решение отличается тем, что закон изменения напряжения, подаваемого на двигатель постоянного тока, учитывает динамические характеристики машины, в частности, изменение приведенного момента инерции при использовании в ней механизмов с переменным передаточным отношением.

Сущность рассмотренного способа управления поясним примером. На рис.3.20 приведена схема машины с электромеханическим приводом, включающим исполнительный кривошипно-ползунный механизм с подвижными звеньями: 1 — кривошип, 2 — шатун, 3 — ползун, 4 — коробка скоростей, 5 — приводной двигатель.

Взаимосвязь силовых, скоростных и массово-геометрических характеристик машины может быть выражена уравнением (3.42), представленным в виде

$$M_{\Pi}^{\text{д}} = J_{\Pi}^{\text{I}} \omega \omega' + J_{\Pi}^{\text{II}} \omega \omega' + J_{\Pi}' \frac{\omega^2}{2}. \quad (3.48)$$

В уравнении (3.48) $M_{\Pi}^{\text{с}} = 0$. $J_{\Pi}^{\text{I}} = \text{const}$ определяет кинетическую энергию всех масс подвижных звеньев механизмов машины, имеющих постоянное передаточное отношение, а J_{Π}^{II}

учитывает изменение кинетической энергии подвижных звеньев механизмов машины и является функцией обобщенной координаты:

$$J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II} = J_{\Pi}.$$

Для рассматриваемого примера значение приведенного момента инерции, определяемого из равенства кинетических энергий, имеет вид

$$J_{\Pi} = J_{\text{рз}} \cdot \left(\frac{\omega_{\text{ДВ}}}{\omega_1} \right)^2 + \frac{2}{\omega_1^2} \sum_{i=1}^N T_{\text{кс}} + J_1 + J_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_3}{\omega_1} \right)^2 = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II},$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_{\Pi}^I &= J_{\text{рз}} \cdot \left(\frac{\omega_{\text{ДВ}}}{\omega_1} \right)^2 + \frac{2}{\omega_1^2} \sum_{i=1}^N T_{\text{кс}} + I_1, \\ J_{\Pi}^{II} &= J_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left[\left(x'_{S_2} \right)^2 + \left(y'_{S_2} \right)^2 \right] + m_3 \left(x'_3 \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

$J_{\text{рз}}$ — момент инерции ротора электродвигателя; $T_{\text{кс}}^i$ — кинетическая энергия i -го элемента коробки скоростей; N — количество подвижных звеньев в коробке скоростей.

Индексы в приведенных уравнениях соответствуют обозначениям звеньев на рис.3.20.

В последнем уравнении

$$\varphi'_2 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

аналогично

$$x'_3 = \frac{v_3}{\omega_1} = \frac{dx_3}{d\varphi_1}.$$

Используя подобные преобразования, получим

$$\left(\frac{v_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 = \left[\left(x'_{S_2} \right)^2 + \left(y'_{S_2} \right)^2 \right].$$

Производная J_{Π} по обобщенной координате имеет вид

$$\frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = 2 \cdot J_{S_2} \cdot \varphi'_2 \cdot \varphi''_2 + 2m_2 \left[x'_{S_2} \cdot x''_{S_2} + y'_{S_2} \cdot y''_{S_2} \right] + 2m_3 x'_3 \cdot x''_3. \quad (3.50)$$

Уравнения (3.49) и (3.50) есть функции обобщенной координаты и отображают внутреннюю динамику машины. Графики функции J_{Π}^I и $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$ представлены на рис.3.21.

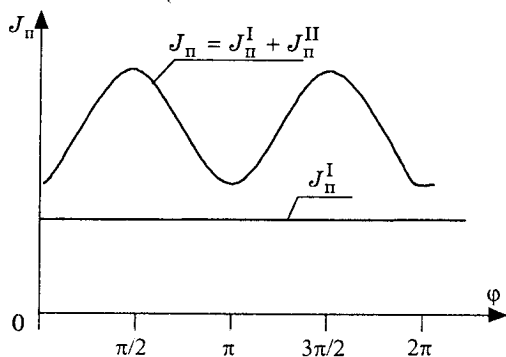


Рис.3.21. Зависимость приведенного момента инерции J_{II} от обобщенной координаты φ

На рис.3.22 изображена зависимость J'_{II} от φ . Пусть требуется разогнать машину, изменяя ее обобщенную скорость от нуля до $\omega_{\text{ср}}$ (средняя скорость установившегося движения) по линейному закону:

$$\omega = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{р}}} \varphi, \quad (3.51)$$

где $\varphi_{\text{р}}$ — угол разгона (угол, при повороте на который происходит изменение ω от нуля до $\omega_{\text{ср}}$).

График зависимости (3.51), представленный на рис.3.23, позволяет построить зависимости отдельных составляющих из формулы (3.48), которые дают возможность видеть раздельное влияние массово-геометрических и кинематических характеристик машины на динамическую нагруженность приводного вала.

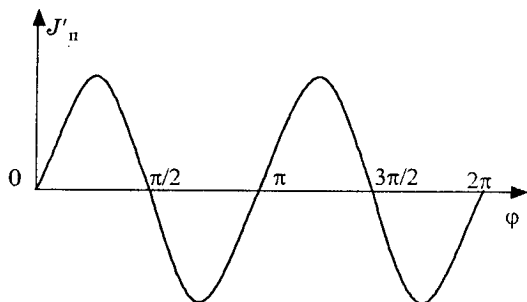


Рис.3.22. Зависимость производной $J'_{II} = \frac{dJ_{II}}{d\varphi}$ приведенного момента инерции от обобщенной координаты

На рис.3.24 показаны зависимости отдельных составляющих, входящих в уравнение (3.48). На рис.3.25 приведена зависимость суммарного M_{Π}^{Δ} от φ (сумма составляющих, изображенных на рис.3.24) за время разгона по закону, соответствующему выражению (3.51).

Из рис.3.24 видно, что наибольшее влияние на неравномерность движения оказывает функции $J_{\Pi}^{\Pi}(\varphi)$ и $J'_{\Pi}(\varphi)$. Рассматриваемый пример указывает на то, что закон изменения скорости в процессе разгона должен выбираться с учетом функций J_{Π} и J'_{Π} таким образом, чтобы значение крутящего момента на приводном валу машины не выходило за пределы некоторых значений $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\max}$ и $(M_{\Pi}^{\Delta})_{\min}$.

Выбор закона изменения ω в функции φ должен учитывать массо-геометрические характеристики исполнительных и передаточных механизмов машины, чтобы увеличение (уменьшение) значений M_{Π}^{Δ} , обусловленное изменением J_{Π} , J'_{Π} , компенсировалось уменьшением (увеличением) M_{Π}^{Δ} за счет изменения ω и ω' .

В связи с этим закон изменении скорости определяется уравнениями управления (3.42) и (3.51) и может быть представлен в виде суммы двух функций:

$$\omega = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_p} \varphi + \omega_p \sqrt{\frac{J_{\Pi}^{\varphi}}{J_{\Pi}}}. \quad (3.52)$$

Выражение (3.52) учитывает, с одной стороны, рост скорости по закону, определенному зависимостью (3.51) и, с другой стороны, изменение скорости в процессе разгона по закону, определенному уравнением (3.45).

Преимущества такого закона изменения скорости следующие. Как видно из уравнения (3.48) и графиков (рис.3.24), первая составляющая $M_{\Pi}^{\Delta}(J_{\Pi}^1 \cdot \omega \cdot \omega')$ представляет собой уравнение прямой в случае, если ω изменяют по закону, соответствующему формуле (3.51). Если же скорость изменяют по закону, описанному уравнением (3.52), первая составляющая M_{Π}^{Δ} будет переменной. Изменяются также вторая и третья составляющие M_{Π}^{Δ} . При этом суммарное значение M_{Π}^{Δ} будет представлять другую функцию, отличающуюся от показанной на рис.3.25.

Такой способ программного управления дает возможность определить значения крутящего момента на приводном валу машины по формуле (3.42) с учетом (3.52). Это дает возможность определить допустимые M_{Π}^{Δ} и выбрать величину φ_p , в пределах

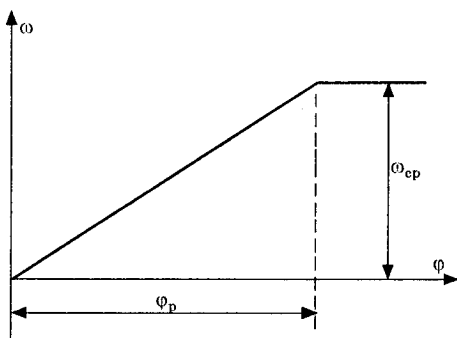


Рис.3.23. Зависимость обобщенной скорости ω от обобщенной координаты ϕ при разгоне

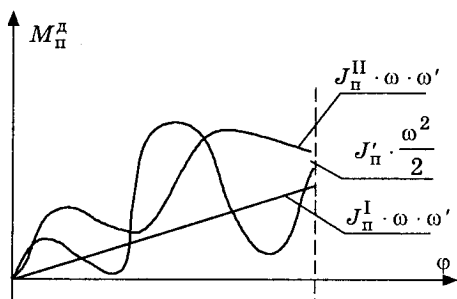


Рис.3.24. Зависимость составляющих приведенного момента движущих сил: $J_{п}^I \cdot \omega \cdot \omega'$, $J_{п}' \cdot \frac{\omega^2}{2}$, $J_{п}^{II} \cdot \omega \cdot \omega'$ (составляющих крутящего момента) от обобщенной координаты ϕ при разгоне машины

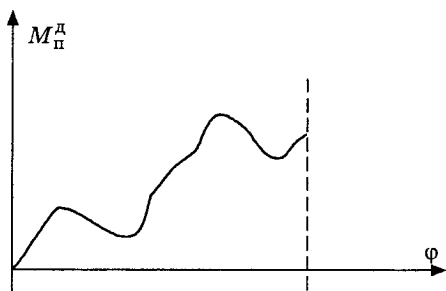


Рис.3.25. Зависимость суммарного приведенного момента движущих сил (крутящего момента) от обобщенной координаты ϕ

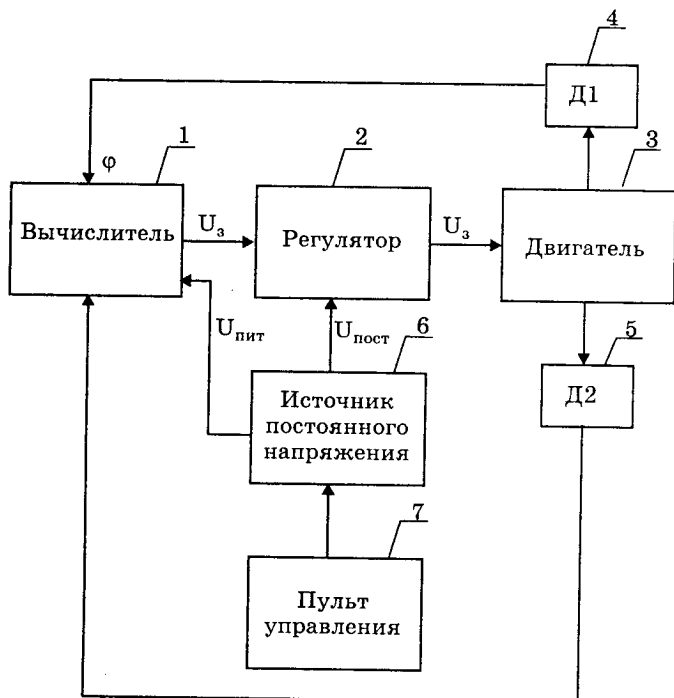


Рис.3.26. Блок-схема системы управления приводом машины которой значения M_{Π}^D остаются в требуемых диапазонах $(M_{\Pi}^D)_{\max}$ и $(M_{\Pi}^D)_{\min}$. Выбор φ_p связан с временем разгона, то есть производительностью машины. Время разгона может быть определено, как было показано ранее, выражением

$$t_p = \int_0^{\varphi_p} \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (3.53)$$

В выражении (3.53) значение ω определяется соотношением (3.52).

Описанный способ управления приводом машины может быть реализован с помощью системы управления, включающей вычислительное устройство.

На рис.3.26 представлена структурная схема системы управления, реализующей описанный способ управления приводом машины. Система управления состоит из вычислителя 1, регулятора 2, двигателя постоянного тока 3, датчика 4 угла поворота главного приводного вала Д1, датчика 5 крутящего момента на лавном приводном валу Д2, источника постоянного напряжения 6, пульта управления 7.

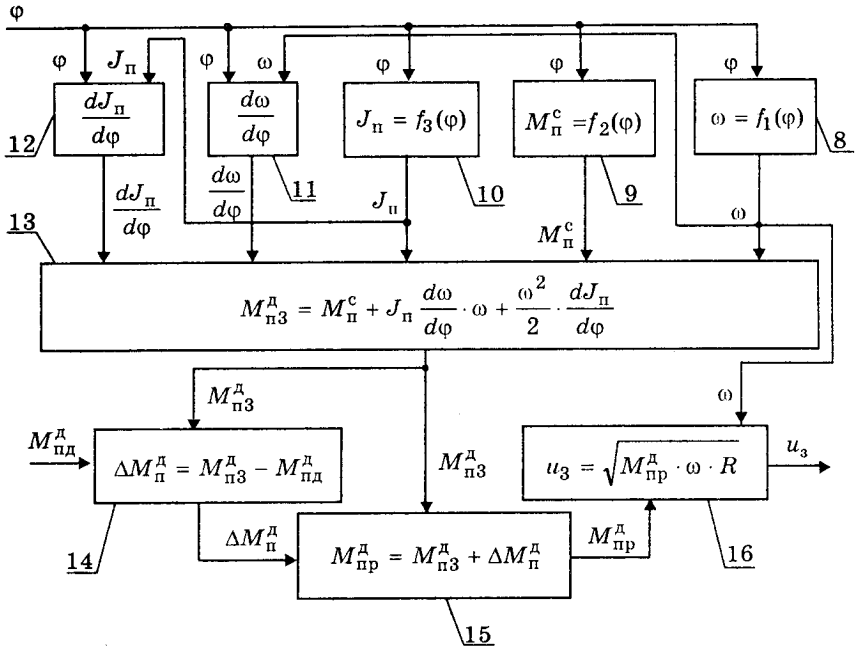


Рис.3.27. Структурная схема вычислителя, формирующего сигналы управления

Вычислитель 1 на основании сигналов с датчиков Д1 и Д2 формирует сигнал U_3 , пропорциональный величине напряжения, подаваемого от источника постоянного напряжения 6 через регулятор 2 на двигатель постоянного тока 3:

$$U_3 = k u_3,$$

где U_3 — сигнал управления, вырабатываемый вычислителем 1;

k — коэффициент пропорциональности (усиления);

u_3 — напряжение, подаваемое на приводной двигатель 3.

Датчики Д1 и Д2 механически связаны с главным приводным валом машины и вырабатывают сигналы, пропорциональные углу поворота и крутящему моменту соответственно. Пульт управления 7 предназначен для включения-отключения привода машины.

На рис.3.27 представлена структурная схема вычислителя 1. В блоке 8 вычисляется значение угловой скорости ω по формуле (3.52)

$$\omega = f_1(\varphi) = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{р}}} \varphi + \omega_{\varphi} \sqrt{\frac{J_{\Pi}^{\varphi}}{J_{\Pi}}}.$$

В блоке 9 вычисляется значение приведенного момента сопротивления M_{Π}^c , как функции угла поворота φ приводного вала машины. Эта зависимость является заданной для каждой технологической операции.

В блоке 10 вычисляется значение приведенного момента инерции $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{II}$.

В блоках 8, 9 и 10 вычисления величин производятся на основании сигнала с датчика угла поворота Д1 главного приводного вала машины.

В блоках 11 и 12 вычисляются соответственно производные от угловой скорости ω (вычисленной в блоке 8) и от приведенного момента инерции (вычисленного в блоке 10) по углу поворота главного приводного вала машины φ .

В блоке 13 вычисляется значение заданного приведенного движущего момента:

$$M_{\Pi 3}^d = M_{\Pi}^c + J_{\Pi} \frac{d\omega}{d\varphi} \omega + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}.$$

Все составляющие правой части этого уравнения есть значения, вычисленные в блоках 8, 9, 10, II, 12.

В блоке 14 вычисленная величина $M_{\Pi 3}^d$ сравнивается с сигналом, поступающим с датчика Д2 действительного момента на приводном валу машины $M_{\Pi d}^d$, и находится их разность:

$$\Delta M_{\Pi}^d = M_{\Pi 3}^d - M_{\Pi d}^d.$$

В блоке 15 вычисляется расчетное значение приведенного момента:

$$M_{\Pi \text{ пр}}^d = M_{\Pi 3}^d + \Delta M_{\Pi}^d.$$

Наконец, в блоке 16 вычисляется значение u_3 управляющего сигнала по формуле

$$u_3 = \sqrt{M_{\Pi \text{ пр}}^d \cdot \omega \cdot R}.$$

Система управления приводом машины работает следующим образом.

В начальном положении система управления обесточена, напряжения $U_{\text{пит}}$ и $U_{\text{пост}}$ равны нулю, двигатель 3 не вращается.

С пульта управления 7 включается источник постоянного напряжения 6. На вычислитель 1 приходит питающее напряжение $U_{\text{пит}}$.

Сигнал с датчика Д1 поступает в вычислитель 1. На основании этого сигнала в вычислителе 1 определяется значение $M_{пз}^д$. В случае, если $\varphi_{нач} = 0$

$$\omega = \omega_{\varphi} \sqrt{\frac{J_{п}^{\varphi}}{J_{п}}}.$$

Если же $\varphi_{нач} \neq 0$, то

$$\omega = \frac{\omega_{ср}}{\varphi_{р}} \varphi + \omega_{р} \sqrt{\frac{J_{п}^{\varphi}}{J_{п}}}.$$

Значение вычисленного $M_{пз}^д$ сравнивается с $M_{пд}^д$, поступающим в виде сигнала с датчика Д2. В начальный момент $M_{пд}^д = 0$, поэтому $\Delta M_{п}^д = M_{пз}^д$. В связи с этим на выходе вычислителя в начальный момент появится сигнал

$$u_{знач} = \sqrt{2 \cdot M_{пз}^д \cdot \omega \cdot R}.$$

Этот сигнал поступает на вход регулятора 2, который непосредственно управляет напряжением U_3 , подаваемым на приводной двигатель 3. Таким образом, в начальный момент на двигатель 3 подается напряжение

$$U_{знач} = U_{знач} \cdot k,$$

которое заставляет двигатель вращаться. Вращение двигателя приводит к изменению сигналов с датчиков Д1 и Д2. Эти сигналы поступают в вычислитель 1, который вырабатывает новое значение u_3 , соответствующее сигналам с датчиков.

Обратная связь по крутящему моменту позволяет стабилизировать действительный приведенный крутящий момент $M_{пд}^д$ на уровне заданного $M_{пз}^д$.

Использование такого способа управления приводом машины обеспечивает уменьшение динамической нагруженности на главный приводной вал машины. Кроме того, представляется возможность снизить их энергоемкость и металлоемкость.

3.6. Оценка динамической нагруженности и энергопотребления машин

Как видно из уравнения (3.52), при $J_{п} = J(\varphi)$ разгон машины с постоянной скоростью может быть реализован только с помощью управления приводом по силе (с учетом зависимости (3.48)) или мощности $P_{д}$. В последнем случае зависимость $P_{д}$ определяется произведением функций (3.48) и (3.52). Таким образом, встает задача выбора оптимальной функции $\omega = f(\varphi)$ угловой

скорости на участке разгона. Оптимизация в данном случае возможна на основании двух критериев: удельной мощности (работы), затраченной на преодоление сил инерции, и коэффициента динамичности.

Удельная работа сил инерции (работа, приходящаяся на единицу массы), затрачиваемая на разгон, определится выражением

$$A_{уд}^p = \frac{A_p}{J_{II}} = \frac{1}{J_{II}} \int_0^{\varphi_p} (M_{II}^d)_{ср} d\varphi$$

или

$$A_{уд}^p = \int_0^{\varphi_p} \frac{M_{II}^c}{J_{II}} d\varphi + \int_0^{\varphi_p} \omega \omega' d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_p} \omega^2 \frac{J'_{II}}{J_{II}} d\varphi.$$

Средняя удельная мощность при разгоне с учетом быстрогодействия (T_p) равна

$$P_{уд}^p = \frac{A_{уд}^p}{T_p}.$$

Функция $P_{уд}^p = f(\varphi)$ может быть получена при $M_{II}^c = 0$ из выражения

$$P_{уд}^p = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})\omega = \omega^2 \omega' + \frac{\omega^3}{2} \frac{J'_{II}}{J_{II}}. \quad (3.54)$$

Коэффициент динамичности определен ранее (см. 3.1.4).

Оценка этапа разгона по данным критериям сводится к анализу графика $\omega = f(\varphi)$, определяемого уравнением (3.52). Первое слагаемое этого уравнения может быть самой разнообразной функцией, например, степенной $\omega = \varphi^n$, где n — натуральное число, или $\omega = \varphi^{2n+1}$, тригонометрической $\omega = \omega_0 \sin \varphi$ и т.п. Таким образом, уравнение (3.52)

требует некоторого арифметического действия над двумя функциями: искомой (первое слагаемое уравнения (3.44))

и функции $\omega_p = \sqrt{I_{II}^\varphi / J_{II}}$ (второе слагаемое), определяемой функцией $J_{II} = J(\varphi)$. В любом случае анализу подлежит стыковка функций $\omega = \omega(\varphi)$ на разгоне и в установившемся движении.

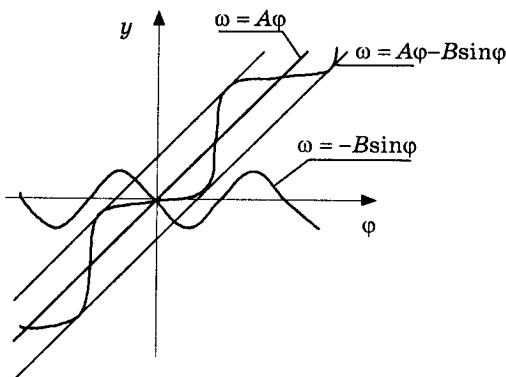


Рис.3.28. Функция $\omega = A\varphi - B\sin\varphi$, полученная в результате сложения функций $\omega = A$ и $\omega = -B\sin\varphi$

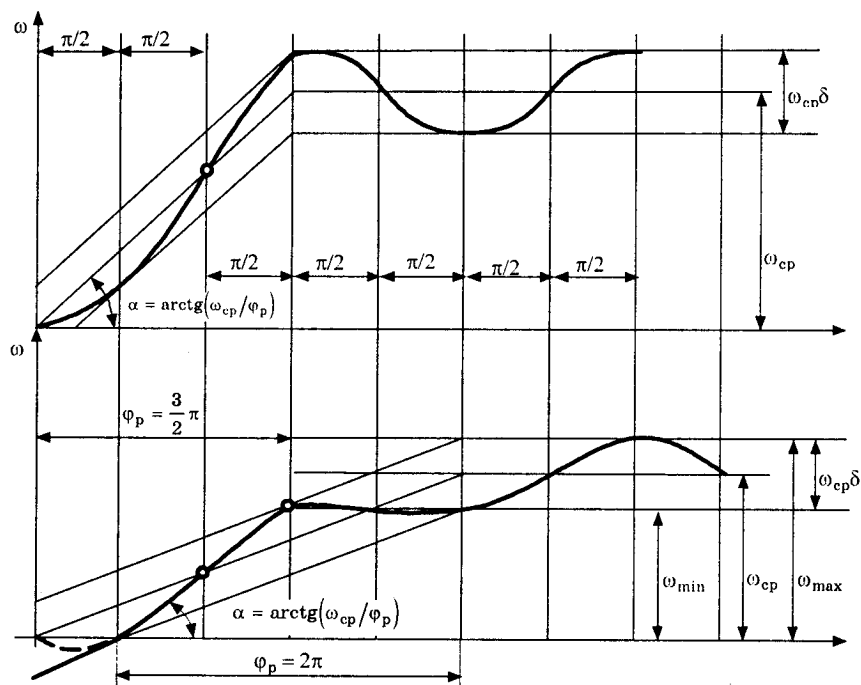


Рис.3.29. Возможные варианты вхождения в установившееся движение при разгоне

На рис.3.28 представлен пример сложения функции $\omega = f(\varphi)$, заданной в виде $\omega = A \cdot \varphi$, с функцией $\omega = -B \sin \varphi$. Пусть обобщенная скорость в установившемся движении определяется функцией $\omega = -B \sin \varphi$. Тогда "вхождение" функции $\omega = A\varphi - B \sin \varphi$ в установившееся движение (стыковку ее с функцией $\omega = -B \sin \varphi$) наиболее удобно реализовать с учетом их периодичности. На рис.3.29 показаны варианты такой стыковки.

Они отличаются углом наклона $\alpha = \arctg \frac{\omega_{ср}}{\varphi_p}$ прямой

$\omega = A\varphi$, определяемым величиной $A = \omega_{ср}/\varphi_p$, зависящей от выбранного угла разгона φ_p .

Качественным показателем оценки вариантов входа в установившееся движение может быть коэффициент динамичности функции $\omega = f(\varphi)$. Для рассматриваемого случая имеем

$$k_{д}^{\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{A - B \cos \varphi}{A\varphi - \sin \varphi},$$

где

$$A = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_p}, \quad B = \frac{\omega_{\text{ср}} \delta}{2}.$$

Рассмотрение коэффициента динамичности как отношения производной функции к самой этой функции при одном и том же аргументе позволяет установить связь между динамическим крутящим моментом на приводном валу $M_{\Pi}^{\Delta} = J_{\Pi} \varepsilon$ и кинетической энергией $2T = J_{\Pi} \omega^2$. Для этого удобно построить графики функций $k_d = f(\varphi)$, $\omega = f(\varphi)$, $\varepsilon = \omega \omega' = f(\varphi) J = f(\varphi)$. Тогда перемножение амплитудных значений соответствующих зависимостей позволит построить функцию $J_{\Pi} \omega^2 = 2T$, выражающую зависимость кинетической энергии машины от обобщенной координаты на участке $0 \leq \varphi \leq \varphi_p$. При этом произведение $J_{\Pi} \varepsilon = J_{\Pi} \omega \omega' = M_{\Pi}^{\Delta}$ определит зависимость динамического крутящего момента на приводном валу

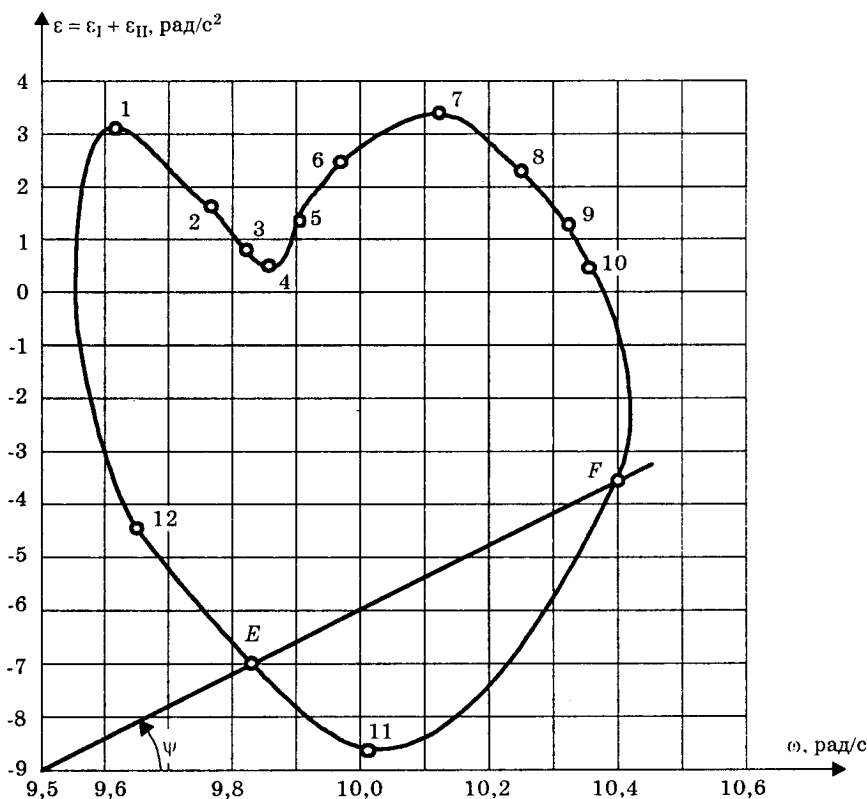


Рис.3.30. Зависимость $\varepsilon = f(\omega)$ для машины с кривошипно-ползунным исполнительным механизмом

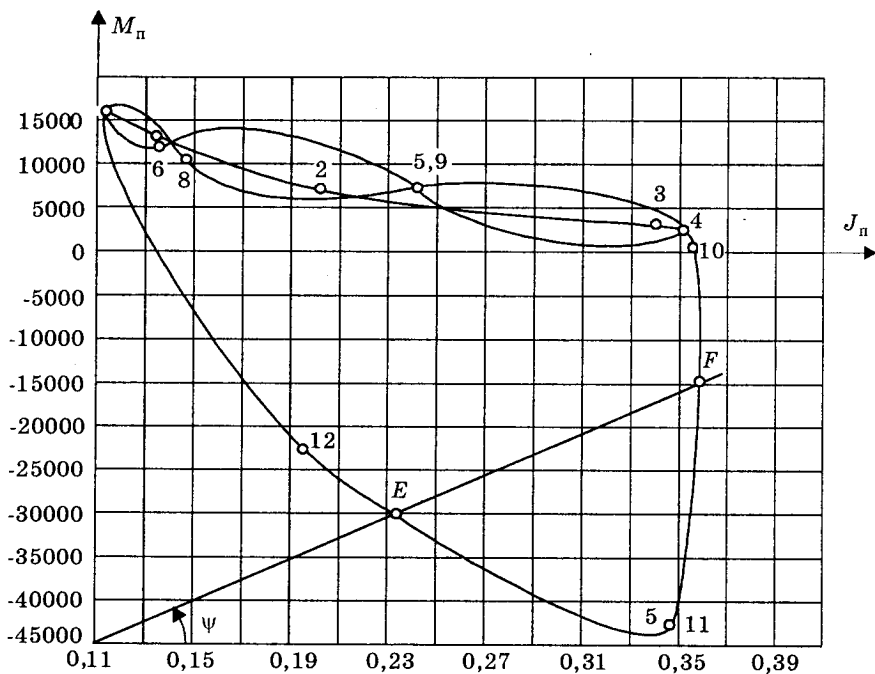


Рис.3.31. Зависимость $M_\pi = f(J_\pi)$ для машины с кривошипно-ползунным исполнительным механизмом

от φ . Связь между этими величинами определится соотношением $2T \cdot k_D^\omega = J_\pi \varepsilon$, так что достаточно знать $M_\pi^D = J_\pi \varepsilon$ или $J_\pi \varepsilon = 2T$.

Второе слагаемое найдется через k_D^ω . Как отмечалось ранее, один критерий качественной оценки не может быть положен в основу поиска оптимального варианта функции $\omega = f(\varphi)$. Наряду с коэффициентом k_D^ω следует рассматривать удельную мощность, определяемую выражением (3.54). Здесь полную информацию об энергопотреблении машины содержит график $\varepsilon = f(\omega)$. Как видно из графика (рис.3.30), $\operatorname{tg} \psi_{\varepsilon\omega} = \varepsilon/\omega = \omega'$ в точках E и F имеет одинаковое значение.

Произведение $\varepsilon_\omega = \omega^2 \omega'$ определяет удельную мощность сил инерции:

$$J_\pi^i \varepsilon_i \omega_i = \left(M_\pi^D \right)_i \omega_i = P_i.$$

Динамический момент M_{Π}^{Δ} на приводном валу может быть получен как $(M_{\Pi}^{\Delta})_i = J_{\Pi}^i \varepsilon_i$.

График зависимости $M_{\Pi} = f(J_{\Pi})$ для машины, функция $\varepsilon = f(\omega)$ которой представлена на рис.3.30, приведен на рис.3.31.

3.7. Исследование энергопотребления и динамической нагруженности машин

3.7.1. Постановка задачи

Исследование энергопотребления технологического оборудования и средств автоматизации является необходимым не только для сравнительной оценки их эффективности, но и для выявления путей автоматического (по жесткой программе или адаптивного) управления рабочим процессом. Тот или иной рабочий процесс характеризуется определенным законом изменения силы технологического сопротивления от перемещения или скорости рабочего органа. Рабочий орган (резец, шлифовальный круг, схват манипулятора или другой инструмент) устанавливается на выходном звене исполнительного механизма, закон движения которого определяется типом этого механизма. Различают механизмы с постоянным передаточным отношением (кинематической передаточной функцией) и переменным отношением скоростей выходного и входного звеньев. К механизмам с постоянным отношением скоростей относятся винт-гайка, шестерня-рейка, червячная передача, передачи с круглыми зубчатыми колесами и др. Рычажные механизмы (плоские и пространственные) не обеспечивают постоянства отношения скоростей выходного и входного звеньев. Их отношение определяется размерами звеньев и является функцией угла поворота входного звена (обобщенной координаты). Такая кинематическая передаточная функция является как бы "паспортом" механизма и служит его математической моделью при исследовании динамической нагруженности технологического оборудования. Таким образом, закон движения рабочего органа определяется типом исполнительного механизма, положенного в основу того или иного технологического оборудования, то есть сила технологического сопротивления зависит не только от режимов эксплуатации, размеров и масс подвижных звеньев, но и от типа исполнительного механизма. При назначении режимов обработки часто пользуются некоторой средней скоростью, постоянной за время одного оборота главного приводного вала технологического оборудования. Однако внутри такого кинематического цикла скорости и ускорения подвижных звеньев не остаются постоянными. Эти изменения сказываются и на зако-

не движения рабочего органа. Скорость его изменяется периодически за время кинематического цикла и непериодически внутри цикла. Закономерность такого изменения определяется не только силами технологического сопротивления, но и характеристикой используемого приводного двигателя, размерами и массами подвижных звеньев технологического оборудования, силами трения и т.п.

Из сказанного следует, что действительные скорости и ускорения подвижных звеньев машины зависят от соотношения сил движущих и сопротивления, приложенных к входному и выходному звеньям исполнительного механизма. С другой стороны, действительные значения сил технологического сопротивления определяются законом движения рабочего органа и поэтому зависят от кинематики исполнительного механизма. Такие взаимовлияние и взаимосвязь геометрических, кинематических и силовых параметров требуют изучения динамики машинного агрегата как неразрывного целого: двигателя, передаточных механизмов (привода) и исполнительного механизма, на выходном звене которого установлен рабочий орган. Основой для оценки динамической нагруженности машинного агрегата является определение закона движения главного приводного вала. Полученные зависимости скорости и ускорения от угла его поворота дают возможность оценить погрешность позиционирования рабочего органа и его погрешности по скорости или ускорению, то есть выявить закон их изменения. Поддержание этого закона в требуемом диапазоне является задачей управления технологическим оборудованием. Техническая же реализация автоматического управления требует учета типа исполнительного механизма, положенного в основу. Такое исследование предусматривает выявление особенностей передачи мощности от двигателя к рабочему органу с учетом массовых, геометрических и кинематических характеристик передаточных и исполнительных механизмов, положенных в основу той или иной машины (технологического оборудования, средства автоматизации и т.п.).

Решение задачи в такой постановке требует выбора динамической модели машинного агрегата.

Правильное воспроизведение (имитация) работы машины с использованием ее динамической модели требует равенства их кинетических энергий и мощностей всех сил (моментов сил), приложенных к подвижным звеньям машины, и рассматриваемой модели. Таким образом, исследование движения машинного агрегата проводится с помощью динамических характеристик M_{Π}^D , M_{Π}^C , J_{Π} и $dJ_{\Pi}/d\varphi = J'_{\Pi}$, определяемых из указанных условий [1].

Следует различать энергозатраты на выполнение той или иной операции технологического процесса и энергопотребление

машины, с помощью которой она выполняется. При заданной механической характеристике рабочего процесса работа, необходимая для его выполнения, определяется выражением

$$A_{\text{тс}} = \int_0^{s_{\text{max}}} F_{\text{тс}} ds = \int_0^T F_{\text{тс}} v_{\text{по}} dt.$$

Тогда выражение, определяющее энергозатраты на выполнение операции (мощность сил $F_{\text{тс}}$ технологического сопротивления), примет вид

$$P_{\text{тс}} = A_{\text{тс}}/T,$$

где T — время прохождения рабочим органом пути s_{max} . Если $T = 2\pi/\omega$ — время одного оборота входного звена исполнительного механизма (время кинематического цикла), то равенство работ сил движущих и сил технологического сопротивления за это время имеет вид

$$\int_0^{2\pi} M_{\text{п}}^{\text{д}} d\varphi = \int_0^{2\pi} M_{\text{п}}^{\text{тс}} d\varphi.$$

Это уравнение является энергетической характеристикой установившегося движения: $|A_{\text{дс}}| = |A_{\text{сс}}|$. Это равенство соблюдается только в начале и конце цикла, при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Оно не соблюдается внутри цикла. Колебание скорости вращения главного приводного вала машины при установившемся движении зависит не только от закона изменения силы технологического сопротивления. Неравномерность его вращения определяется также моментом движущих сил $M_{\text{дв}} = f(\omega_{\text{дв}})$, то есть механической характеристикой используемого двигателя, и типом исполнительного механизма, положенного в основу машины. Закон движения главного приводного вала (звена приведения) определяется известными соотношениями в дифференциальной форме

$$M_{\text{п}}^{\text{д}} - M_{\text{п}}^{\text{с}} = J_{\text{п}}\varepsilon + \frac{\omega^2}{2} J'_{\text{п}}$$

и в интегральной (в форме уравнения изменения кинетической энергии звена приведения)

$$J_{\text{п}}^i \frac{\omega_i^2}{2} - J_{\text{п}}^{i-1} \frac{\omega_{i-1}^2}{2} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\text{п}}^{\text{д}} d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\text{п}}^{\text{с}} d\varphi.$$

Эти уравнения позволяют выявить действительный закон движения рабочего органа, который определяется как типом исполнительного механизма, так и механической характеристикой используемого двигателя. Поэтому наряду с исследованием энергопотребления машины необходимо выявить ее динамическую нагруженность. Такие исследования должны быть проведены на уровне схемной проработки машины, когда поиск наилуч-

шего сочетания привода и исполнительного механизма не связан с исправлением документации или ее узлов в металле.

Следует еще раз подчеркнуть, что наилучшее сочетание двигателя, передаточных механизмов (привода) и исполнительного механизма может быть выявлено только для конкретной операции технологического процесса. Поиск рационального сочетания привода и исполнительного механизма машины без привязки к конкретной операции (без учета сил технологического сопротивления) не имеет смысла.

Часто исследование движения машинного агрегата проводится в его установившемся движении, при этом делается упор на оценке неравномерности вращения звена приведения. Однако большая часть технологического оборудования, в частности, средства автоматизации, работают в "старт-стоповом" режиме, т.е. в режиме "разгон-торможение". В этом случае определяющим является не равномерность движения (вращения) главного приводного ала, а динамические нагрузки и энергозатраты на разгон и торможение. Момент на приводном валу машины при ее разгоне может быть определен соотношением

$$M_p = J_{II} \epsilon_p,$$

где ϵ_p — ускорение, определяемое временем изменения скорости от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{cp}$. Тогда мощность, затрачиваемая на разгон, определится соотношением

$$P = M_p \omega_{cp} = J_{II} \epsilon_p \omega_{cp}.$$

Моменты

$$M_{II}^d = M_{дв} \frac{\omega_{дв}}{\omega} \text{ и } M_{II}^{тс} = F_{тс} \frac{v_{po}}{\omega}$$

определяются из равенства мощностей сил движущих и сил технологического сопротивления. Поэтому значение $M_{дв}$ определяет необходимое минимальное значение движущего момента на приводном валу для выполнения операции, то есть для преодоления силы технологического сопротивления. При этом не учитываются массы подвижных звеньев и законы изменения их скоростей. Полный баланс мощности сил движущих (двигателя) имеет вид

$$P_d = P_{вс} + P_{тс} + P_{и} + P_G + P_y,$$

где $P_{вс}$, $P_{и}$, P_G , P_y — мощности, затрачиваемые на преодоление сил вредного сопротивления (сил трения и др.), сил инерции, веса и упругости соответственно. Если при разгоне совершается полезная работа, то минимальная потребная мощность двигателя (без учета сил трения) определится выражением

$$P_d = \left(M_{II}^{тс} + M_p \right) \omega_{cp} = F_{тс} v_{po} + J_{II} \epsilon_p \omega_{cp}.$$

3.7.2. Методика определения динамической нагруженности машинного агрегата при разгоне и торможении.

На рис.3.32, *а* изображен закон изменения угловой скорости приводного вала машины или электродвигателя в функции от его угла поворота при разгоне — участок 1, в установившемся движении — участок 2, при торможении — участок 3.

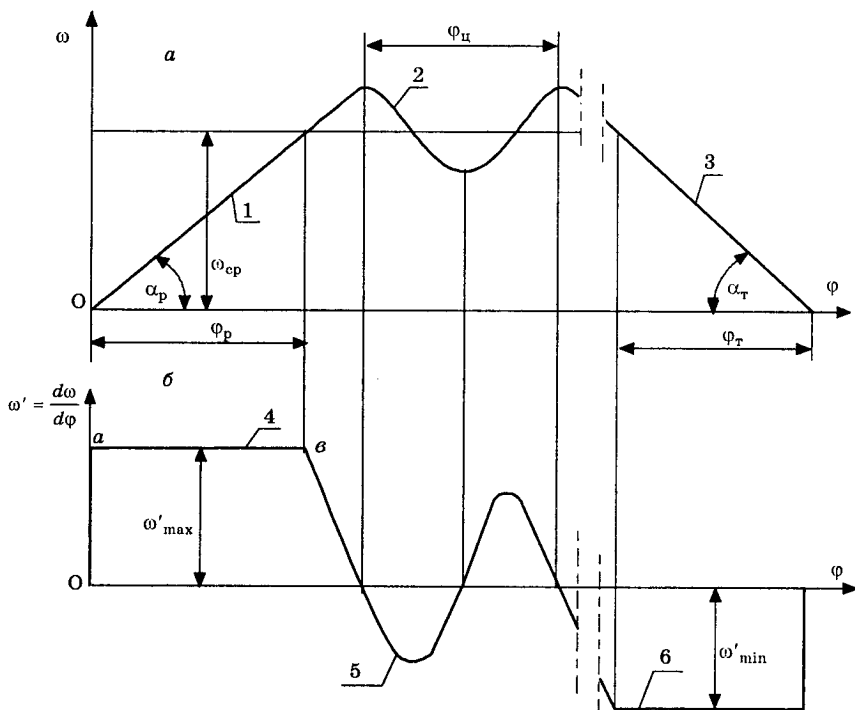


Рис.3.32. К определению динамических нагрузок при разгоне (торможении) машины: а — зависимость обобщенной скорости, б — зависимость аналога ускорения от обобщенной координаты

На рис.3.32, *б* изображен закон изменения аналога углового ускорения $\omega' = d\omega/d\varphi$ ротора приводного электродвигателя или другого приводного вала машины в функции его угла поворота, где участок 4 — закон изменения аналога углового ускорения на участке разгона, участок 5 — закон его изменения в установившемся режиме, участок 6 — закон его изменения при торможении.

Участок разгона характеризуется увеличением угловой скорости от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{cp}$, соответствующей средней скорости установившегося движения, а также углом поворота φ_p этого вала от 0

до некоторого значения $\varphi_p = 2\pi \cdot N_p$, где N_p — число (целое или дробное) оборотов главного приводного вала или ротора электродвигателя. В общем случае на участке разгона угловая скорость изменяется по закону

$$\omega_i^p = A \cdot \varphi_i^m, \quad (3.55)$$

где $0 < \varphi_i \leq \varphi_p$; $A = \omega_{\text{ср}} / \varphi_p^m$; m — целое или дробное число.

На рис. 3.32, а представлена зависимость $\omega_i = A\varphi_i$ при $m = 1$. Тогда угловое ускорение главного приводного вала машины может быть представлено в виде

$$\varepsilon_i^p = \frac{d\omega_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi_i}{d\varphi_i} = \omega_i \frac{d\omega_i}{d\varphi} = \omega_i^p \left(\omega_i^p \right)'. \quad (3.56)$$

Зависимость (3.56) с учетом (3.55) после преобразований примет вид

$$\varepsilon_i^p = A^2 \cdot m \cdot \varphi_i^{2m-1}.$$

Известно [2], что уравнение движения звена приведения (главного приводного вала) машины имеет следующий вид:

$$M_{\Pi} = J_{\Pi} \cdot \varepsilon_i^p + \frac{\left(\omega_i^p \right)^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}, \quad (3.57)$$

где J_{Π} , $J'_{\Pi} = dJ_{\Pi}/d\varphi$ — приведенный момент инерции машины и его производная по обобщенной координате; ω и ε — обобщенные скорость и ускорение; M_{Π} — приведенный момент сил движущих и сопротивлений.

Если за звено приведения принять вал приводного электродвигателя, то в уравнении (3.57) обобщенная координата φ_i , обобщенные скорость ω_i^p и ускорение ε_i^p являются его углом поворота φ_i , его скоростью ω_i^p и его ускорением ε_i^p , а J_{Π} и J'_{Π} — момент инерции машины, приведенный к валу ротора электродвигателя, и его производная по обобщенной координате (углу поворота ротора электродвигателя).

Тогда уравнение (3.57), с учетом (3.55) и (3.56), после некоторых преобразований примет вид

$$M_{\Pi} = M_{\Pi}^d = A^2 \left(J_{\Pi} \cdot m \cdot \varphi_i^{2m-1} + \frac{J'_{\Pi}}{2} \varphi_i^{2m} \right) + M_{\Pi}^c. \quad (3.58)$$

Например, при $m = 1$ уравнение (3.58) дает

$$M_{\Pi}^d = A^2 \left(J_{\Pi} \cdot \varphi_i + \frac{J'_{\Pi}}{2} \varphi_i^2 \right) + M_{\Pi}^c. \quad (3.59)$$

Уравнение (3.58) представляет собой закон изменения момента сопротивления (динамического момента) на валу приводного электродвигателя. Из него видно, что непостоянство момента, приложенного к валу электродвигателя, обусловлено не только выбранным законом изменения скорости от угла поворота на участке разгона, но и типом исполнительных и передаточных механизмов, положенных в основу данной машины (их передаточных кинематических функций, определяющих J_{Π} и J'_{Π}). Поэтому с целью достижения наименьших динамических нагрузок при разгоне требуется, чтобы управляющий момент на валу приводного двигателя изменялся в соответствии с уравнением (3.59). Другими словами, линейное возрастание скорости от угла поворота при разгоне будет обеспечено при наличии управляющего момента, определяемого из зависимости

$$M_y^{\text{разг}} = M_{\Pi}^{\text{д}} = A^2 \left(J_{\Pi} \cdot \varphi_i + \frac{J'_{\Pi}}{2} \varphi_i^2 \right) + M_{\Pi}^{\text{с}}.$$

За счет выбора показателя степени m в уравнении (3.58) представляется возможным получать разнообразные законы изменения угловой скорости ротора электродвигателя от угла поворота и тем самым изменять динамическую нагруженность и энергозатраты на процесс разгона.

Рассмотренный случай, когда $m = 1$, обеспечивает изменение углового ускорения $\varepsilon_i = \omega_i \cdot \omega_i'$, линейно возрастающего при увеличении угловой скорости от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{\text{ср}}$. При этом момент на приводном валу $M_{\text{д}} = J_{\Pi} \omega_i \omega_i'$, то есть динамический момент при $J_{\Pi} = \text{const}$ увеличивается пропорционально его угловой скорости. При этом мощность $P_{\text{р}} = M_{\text{р}} \cdot \omega_i = J_{\Pi} \omega_i^2 \omega_i'$ пропорциональна квадрату угловой скорости. При использовании, например, в качестве приводного двигателя постоянного тока равенство мощности потребляемой электроэнергии позволяет получить следующий закон изменения напряжения, обеспечивающий изменение управляющего момента по закону, описанному уравнением (3.58):

$$U_{\text{р}} = \frac{M_y^{\text{разг}} \omega_{\text{р}}}{I} = \frac{A}{I} \left[A^2 \left(J_{\Pi} \cdot m \cdot \varphi_i^{3m-1} + \frac{J'_{\Pi}}{2} \varphi_i^{3m} \right) \right] + \frac{M_{\Pi}^{\text{с}}}{I}, \quad (3.60)$$

где I — ток, потребляемый двигателем. При $m = 1$ имеем

$$U_{\text{р}} = \frac{A^3}{I} \left(J_{\Pi} \cdot \varphi_i^2 + \frac{J'_{\Pi}}{2} \varphi_i^3 \right) + \frac{M_{\Pi}^{\text{с}}}{I}.$$

Уравнение (3.60) представляет собой "жесткую" программу регулирования входного напряжения приводного электродвигателя, которая обеспечивает изменение энергозатрат на процесс разгона в соответствии с выбранным значением m . При этом учиты-

ваются массово-геометрические характеристики всей машины в целом за счет того, что $J_{\Pi} = J_{\Pi}^I + J_{\Pi}^{\Pi}$, где J_{Π}^I — постоянная составляющая приведенного момента инерции, учитывающая кинетическую энергию передаточных механизмов (привода); J_{Π}^{Π} — переменная составляющая, учитывающая кинетическую энергию исполнительного механизма, определяемую с учетом переменных (зависящих от обобщенной координаты) передаточных отношений.

Участок торможения (см. рис.3.32) характеризуется уменьшением угловой скорости ротора электродвигателя от $\omega = \omega_{\text{ср}}$ до $\omega = 0$, а также углом поворота φ_{T} этого вала от 0 до некоторого значения

$$\varphi_{\text{T}} = 2\pi \cdot N_{\text{T}},$$

где N_{T} — число (целое или дробное) оборотов главного приводного вала.

Поэтому на участке торможения угловая скорость изменяется по закону

$$\omega_i^{\text{T}} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\varphi_i^m}{\varphi_{\text{T}}^m} \right), \quad (3.61)$$

где m — целое или дробное число, $0 \leq \varphi_i \leq \varphi_{\text{T}}$.

Из уравнения (3.61) имеем

$$\begin{aligned} \left(\omega_i^{\text{T}} \right)' &= \frac{d\omega_i^{\text{T}}}{d\varphi_i} = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{T}}^m} \cdot m \cdot \varphi_i^{m-1}, \\ \varepsilon_i^{\text{T}} &= \omega_i^{\text{T}} \left(\omega_i^{\text{T}} \right)' = -\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\varphi_{\text{T}}^m} \cdot m \cdot \varphi_i^{m-1} \left(1 - \frac{\varphi_i^m}{\varphi_{\text{T}}^m} \right), \end{aligned}$$

при $m = 1$

$$\omega_i^{\text{T}} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_{\text{T}}} \right); \quad \left(\omega_i^{\text{T}} \right)' = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{T}}}; \quad \varepsilon_i^{\text{T}} = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{T}}} \left(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_{\text{T}}} \right).$$

Таким образом, рассмотренная методика моделирования управления приводом машины позволяет снизить динамические нагрузки, обусловленные неравномерностью скорости, вызываемой непостоянством приведенного момента инерции машины. Наличие колебания обобщенной скорости приводит к дополнительным инерционным нагрузкам и, в конечном счете, к вибрациям, износу в подвижных соединениях машины и другим нежелательным явлениям, снижающим эксплуатационные характеристики. Наряду с этим предлагаемая методика позволяет

реализовать законы изменения скорости при торможении и разгоне, обеспечивающие наименьшие энергозатраты. Для машин технологического оборудования, средств автоматизации, работающих в режиме "пуск-остановка", такое управление позволит во многом сохранить точностную долговечность за счет реализации "падающего" режима их эксплуатации. Повышение производительности такого оборудования требует уменьшения времени на разгон-торможение, а значит, увеличения динамических нагрузок. Поэтому при оценке требуемой производительности, определяемой частотой повторения рабочего цикла, необходимо каждый раз решать рассмотренную задачу по определению динамической нагруженности. Поиск оптимального решения в данном случае сводится к назначению быстродействия (времени отработки требуемого перемещения рабочего органа), обеспечивающего "падающие" динамические нагрузки в пределах необходимого срока эксплуатации машины. Поэтому многовариантная проработка компоновочной схемы технологического оборудования и средств автоматизации с использованием динамических и математических моделей как машины в целом, так и самого рабочего процесса является необходимым этапом проектирования технологических комплексов, машин-автоматов и машинных технологических процессов, предусматривающих изготовление изделия в условиях автоматического взаимодействия машин, образующих единую систему.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ

4.1. Моделирование движения электромеханических систем

В совокупности механической части технологического оборудования пневмосистемы, гидросистемы и электрооборудования большую роль играют функциональные связи между их узлами и механизмами. Выявление такой функциональной взаимосвязи на основе общих принципов, включающих энергетические, силовые и скоростные параметры рассматриваемых систем, является необходимым этапом моделирования. В основу такого подхода может быть положена структурная схема, отображающая основные этапы преобразования и использования энергии, передающейся от двигателя к рабочему органу машины, предназначенной для выполнения конкретной операции. Как показано в предыдущей главе, моделирование операций технологического процесса сводится к определению аналитических зависимостей, устанавливающих связь между силой технологического сопротивления и перемещением (скоростью) рабочего органа. Такой же подход распространяется и на моделирование взаимосвязи сил (моментов сил) движущих от перемещения (скорости) выходного звена двигателя.

Механические характеристики электро-, гидро-, пневмоприводов используются при исследовании динамики машин, технологического оборудования и средств автоматизации. Эти характеристики связывают силовые параметры привода (крутящий момент, усилия) с кинематическими параметрами (угловая скорость выходного вала, скорость линейного перемещения штока). При этом, если требуется регулирование выходных параметров машины (силовых, скоростных, энергетических), механические характеристики двигателей (приводов) должны содержать устройства регулирования величины напряжения, тока, давления, расхода жидкости или газа, влияющие на переходные процессы, протекающие в самих приводах. Сложность математического описания этих процессов часто приводит к необходимости линеаризации зависимостей, некоторым допущениям о внутренних свойствах приводов, к использованию их статических характеристик вместо динамических и т.п. Однако такие допущения не должны существенно влиять на регулируемые выходные параметры машины. Рассмотрим некоторые особенности моделирования движения механических систем в сочетании с электрическими характеристиками приводных двигателей.

Исследование динамики машин с электроприводом требует учета взаимовлияния изменяющихся силовых, скоростных, энергетических и электромагнитных параметров: тока, напряжения,

магнитной энергии системы. Динамика механической системы определяется изменением ее кинетической энергии T , потенциальной Π и обобщенными силами Q_i . Как отмечалось ранее, приведение сил основано на равенстве работ (или мощностей). Поэтому формально приведение силы, то есть определение обобщенной силы, сводится к перемножению физической (реальной) силы на отношение скорости v_i точки приложения реальной силы F_i к обобщенной скорости \dot{q}_i :

$$Q_i = F_i \frac{v_i}{\dot{q}_i} = F_i \frac{ds_i}{dq_i}.$$

Для приведения моментов M_i имеем

$$Q_i = M_i \frac{\omega_i}{\dot{q}_i} = M_i \frac{d\phi_i}{dq_i},$$

где $\omega_i = d\phi_i/dt$ — скорость i -го звена, к которому приложен момент M_i , ϕ_i — угол поворота этого звена, $v_i = ds_i/dt$ — скорость точки приложения силы F_i , s_i — перемещение этой точки.

Число обобщенных механических координат q_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, определяет степень подвижности механической системы, другими словами, необходимое число приводных двигателей. За обобщенные механические координаты принимаются линейная (s) и угловая (ϕ) координаты звена приведения. Следует отметить, что степень подвижности механической системы определяется числом обобщенных координат в случае, если связи, наложенные на движение звеньев, голономные [21]. Если механическая система имеет несколько степеней подвижности, то их взаимовлияние учитывается частными производными кинетической энергии как по обобщенной скорости, так и по обобщенным координатам. Для механической системы записывается столько уравнений Лагранжа второго рода, сколько она имеет подвижностей.

Уравнение Лагранжа имеет вид [21]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

При составлении функции Лагранжа $L = T - \Pi$ можно учитывать только кинетическую энергию T (без потенциальной Π), но тогда выражение обобщенной силы Q_i должно содержать соответствующий член, определяемый жесткостью (податливостью) звеньев или их соединений. В нашем случае (в первом приближении), когда рассматривается недеформируемая система, $\Pi = 0$ и функция Лагранжа $L = T$.

Состояние электрической части системы описывается электрическими обобщенными координатами κ_k , где $k = 1, 2, \dots, m$.

Число этих координат равно числу электрических степеней свободы. За обобщенные электрические координаты выбирают количества электричества. Производные по времени от обобщенных электрических координат дают обобщенные скорости $\dot{\kappa}_k$. Тогда математическая модель движения электромеханической системы может быть представлена уравнениями Лагранжа-Максвелла [22], [23]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \kappa_k} &= Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1) и (4.2) $L = L_э + L_м$ — функция Лагранжа-Максвелла, $L_м = T - \Pi$ — "механическая" функция Лагранжа, а $L_э$ — "электрическая" функция Лагранжа. Для машин с электроприводом "электрическая" функция Лагранжа совпадает с магнитной энергией системы [23]:

$$L_э = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s, \quad (4.3)$$

где r и s — индексы независимых электрических контуров (витков, обмоток), по которым протекают токи i_r и i_s ,

L_{rs} при $r \neq s$ — взаимная индуктивность (коэффициент взаимоиндукции), а при $r = s$ — индуктивность (коэффициент самоиндукции).

Обобщенная "сила" Q_k определяется по аналогии с Q_i как скалярная величина, равная коэффициенту при вариации данной "электрической" обобщенной координаты в выражении работы δA электрических сил, то есть из выражения

$$\delta A = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{r,s=1}^{\infty} (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \right] \delta \kappa_k,$$

где $E_{r,s}$ — ЭДС контура, R — электрическое сопротивление контура.

Уравнения (4.2) могут быть использованы для определения обобщенных сил Q_i и Q_k при заданных законах изменения скорости звеньев и токов i_r и i_s (см. уравнение 4.3). В этом случае реальные (физические) силы, полученные из обобщенных, представляют собой программу управления электромеханической системы по механической силе и ЭДС, которая обеспечит заданный закон изменения обобщенной скорости и токов i_r, i_s .

В случае использования уравнений (4.3) для электромеханической системы, находящейся под действием заданных реальных механических и электрических сил, представляется возможность определения законов изменения обобщенных скоростей \dot{q}_i и $\dot{\kappa}_k$.

Таким образом, законы изменения этих скоростей $\dot{q}_i = f(q_i)$ и $\dot{\kappa}_k = f(\kappa_k)$ определяются законами изменения обобщенных сил $Q_i = f(q_i)$ и $Q_k = f(\kappa_k)$, то есть уравнения (4.2) устанавливают связь между обобщенными силами Q_i , Q_k и обобщенными скоростями \dot{q}_i и $\dot{\kappa}_k$. Это дает возможность решать задачи о поиске оптимального сочетания исполнительного механизма машины (его типа, геометрических и массовых характеристик) и двигателя (его типа, количества независимых контуров, индуктивности). Как видно из приведенного анализа, существуют некоторые динамические аналогии между механическими и электрическими параметрами. Они сводятся к тому, что функция $\dot{q}_i = f(q_i)$ при заданной функции $Q_i = f(q_i)$ зависит от масс подвижных звеньев, функция же $\dot{\kappa}_k = f(\kappa_k)$ при заданной функции $Q_k = f(\kappa_k)$ зависит от индуктивности. При совместном решении уравнений (4.2) проявляется взаимовлияние массовых характеристик механизмов и показателей индуктивности электрических контуров. Подобная аналогия просматривается между скоростями v_{si} центров масс звеньев механизма и токами i_r , i_s , протекающими в независимых электрических контурах r и s , а также между силами технологического сопротивления и ЭДС контуров. Другими словами, уравнения (4.2) устанавливают функциональную связь между электрическими и механическими силовыми и скоростными характеристиками, а также позволяют моделировать их взаимовлияние.

Пример [23]. Пусть машина обладает приведенным моментом инерции $J_n = f(\varphi)$, где φ — угол поворота ротора электродвигателя. В качестве звена приведения принят ротор электродвигателя. Для привода машины используется электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением. L_B , L_A — индуктивность обмоток возбуждения и якоря. Обозначим взаимную индуктивность $L_{BA} = L_{AB} = M$, токи в обмотках возбуждения и якоря соответственно i_B , i_A . Приведенный момент M_n сил технологического сопротивления также задан функцией $M_n = f(\varphi)$ угла поворота ротора электродвигателя.

Функция Лагранжа-Максвелла с учетом принятых обозначений имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left(L_B i_B^2 + L_A i_A^2 + 2M i_A i_B + J_n \dot{\varphi}^2 \right). \quad (4.4)$$

При постоянном токе возбуждения состояние электромеханической системы определяется угловой координатой φ ротора и током $i_{я}$. Они могут быть найдены из уравнений (4.2) как функции времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= M_{п}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial i_{я}} &= U - R_{я} i_{я}, \end{aligned} \right\}$$

где U — напряжение, приложенное к обмотке якоря;

$R_{я}$ — сопротивление этой обмотки.

Дифференцирование функции Лагранжа-Максвелла (4.4) проведем с учетом того, что $L_{я} = \text{const}$ и $L_{в} = \text{const}$, при этом взаимную индукцию M будем считать функцией $M = f(\varphi)$ угла φ поворота якоря:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_{п} \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_{п} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{dJ_{п}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = J_{п} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{п}}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{dM}{d\varphi} i_{я} i_{в} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{п}}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_{я}} = L_{я} i_{я} + M i_{в}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i_{я}} \right) = L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} i_{в}.$$

С учетом результатов дифференцирования уравнения (4.2) примут вид

$$J_{п} \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{п}}{d\varphi} - \frac{dM}{d\varphi} i_{я} i_{в} = M_{п}, \quad (4.5)$$

$$L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} i_{в} = U - R_{я} i_{я}.$$

Уравнения (4.5) описывают состояние электромеханической системы. Таким образом, рассмотренное нами ранее дифференциальное уравнение движения звена приведения является частным случаем уравнения Лагранжа-Максвелла. Как видно из первого уравнения системы (4.5), оно получается при $M = \text{const}$. Уравнения (4.5) позволяют моделировать взаимосвязь обобщенной механической скорости (скорости $\dot{\varphi}$ вращения ротора приводного двигателя) с изменением тока $i_{я}$ во времени. Совместное решение уравнений (4.5) дает возможность получить зависимость обобщенных координат (механической φ и электрической $i_{я}$) от времени, то есть определить функции $\varphi = \varphi(t)$ и $i_{я} = i_{я}(t)$.

Рассмотренный пример моделирования движения машины с электродвигателем постоянного тока позволяет несколько подробнее проанализировать влияние электрической части системы как некоторой функции $M_{д} = f(\omega)$ движущего момента $M_{д}$, действующего на входное звено исполнительного механизма машины в функции обобщенной скорости. Из первого уравнения системы (4.5) имеем

$$M_{д} = \frac{dM}{d\varphi} i_{в} i_{я}. \quad (4.6)$$

Практически можно считать функцию $M = M(\varphi)$ линейной, значит, $dM/d\varphi = K = \text{const}$. Тогда уравнение (4.6) примет вид

$$M_{\text{д}} = Ki_{\text{в}}i_{\text{я}}. \quad (4.7)$$

Если считать, что магнитный поток создается обмоткой возбуждения, то величина $Ki_{\text{в}}$ равна магнитному потоку в зазоре между ротором и статором. Это означает, что движущий момент определяется произведением магнитного потока и тока $i_{\text{я}}$ в обмотке якоря. Если изменение тока $i_{\text{я}}$ не происходит, то $di_{\text{я}}/dt = 0$, в этом случае второе уравнение системы (4.5) дает

$$i_{\text{я}} = \frac{U - Ki_{\text{в}}\dot{\varphi}}{R_{\text{я}}}, \quad (4.8)$$

здесь $Ki_{\text{в}}\dot{\varphi}$ — генераторная ЭДС, возникающая в обмотке якоря.

Уравнения (4.7) и (4.8) позволяют выразить функцию $M_{\text{д}} = f(\omega)$ в виде

$$M_{\text{д}} = a - b\omega, \quad (4.9)$$

где

$$a = \frac{UKi_{\text{в}}}{R_{\text{я}}}, \quad b = \frac{(Ki_{\text{в}})^2}{R_{\text{я}}}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.9) определяет статическую характеристику двигателя постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением при постоянном токе возбуждения. Представление характеристики двигателя в виде функции (4.9) во многом упрощает задачу исследования движения электромеханической системы, однако не позволяет выявить важные особенности изменения динамических нагрузок в областях, близких к резонансным. Более полный анализ может быть проведен с использованием уравнений (4.5). Покажем более подробно, чем объясняется ограниченность анализа движения системы при использовании статической характеристики двигателя.

Пусть приведенный момент инерции машины $J_{\text{п}} = \text{const}$, тогда подстановка уравнения (4.9) в первое уравнение системы (4.5) дает

$$J_{\text{п}}\varepsilon = a - b\omega + M_{\text{п}}. \quad (4.12)$$

Применительно к рассматриваемому примеру уравнения (4.5) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_{\text{п}}\dot{\omega} - Ki_{\text{в}}i_{\text{я}} &= M_{\text{п}}, \\ L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + Ki_{\text{в}}\omega &= U - R_{\text{я}}i_{\text{я}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выразим значение $i_{\text{я}} = f(t)$ из первого уравнения системы (4.13), а производную $\frac{di_{\text{я}}}{dt}$ — из второго и получим

$$i_{\text{я}} = \frac{J_{\text{п}}\dot{\omega} - M_{\text{п}}}{Ki_{\text{в}}}, \quad (4.14)$$

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{U - R_{\text{я}}i_{\text{я}} - Ki_{\text{в}}\omega}{L_{\text{я}}}.$$

Подстановка (4.14) в (4.10) дает уравнение

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{UKi_{\text{в}} - R_{\text{я}}J_{\text{п}}\dot{\omega} - R_{\text{я}}M_{\text{п}} - (Ki_{\text{в}})^2\omega}{L_{\text{я}}Ki_{\text{в}}}.$$

Учитывая соотношения (4.10) и (4.11), последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{a - J_{\text{п}}\dot{\omega} + M_{\text{п}} - b\omega}{L_{\text{я}}Ki_{\text{в}}} R_{\text{я}}. \quad (4.15)$$

Дифференцирование первого уравнения системы (4.13) по времени дает

$$J_{\text{п}}\dot{\varepsilon} - Ki_{\text{в}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} = \dot{M}_{\text{п}}. \quad (4.16)$$

Подстановка уравнения (4.15) в уравнение (4.16) дает соотношение

$$(J_{\text{п}}\dot{\varepsilon} - \dot{M}_{\text{п}}) \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} + J_{\text{п}}\varepsilon = a - b\omega + M_{\text{п}}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17) описывает движение электромеханической системы с постоянным приведенным моментом инерции. Уравнение (4.17) отличается от уравнения (4.12) дополнительным членом

$$\frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}(J_{\text{п}}\dot{\varepsilon} - \dot{M}_{\text{п}}) = \frac{d(J_{\text{п}}\varepsilon - M_{\text{п}})}{dt} \cdot \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}. \quad (4.18)$$

Соотношение (4.18) учитывает связь изменения во времени углового ускорения

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega\varepsilon'$$

и приведенного момента сил

$$\dot{M}_{\text{п}} = \frac{dM_{\text{п}}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega M'_{\text{п}}$$

с отношением $L_{\text{я}}/R_{\text{я}}$. Учитывая, что в уравнениях (4.12), (4.17) левые части представляют собой силы инерции, соотношения (4.17) называют электромагнитной силой инерции.

Сравнение уравнений (4.12), (4.17) показывает также, что уравнение (4.12) является дифференциальным уравнением

первого порядка относительно угловой скорости ω . Оно характеризует апериодическое ее изменение. Уравнение же (4.17) в зависимости от соотношения его коэффициентов может относиться как к апериодическому, характеризующему движение с затухающими колебаниями, так и к колебательному типу. Отсюда следует вывод о том, что использование статической характеристики двигателя не в полной мере отражает изменение амплитуд колебаний и, следовательно, динамических нагрузок.

Приведенные рассуждения относятся к электродвигателям постоянного тока с независимым или параллельным возбуждением.

Для электродвигателей постоянного тока с последовательным возбуждением ток в обмотке возбуждения равен току в обмотке якоря: $i_n = i_a = i$. В этом случае уравнения Лагранжа-Максвелла принимают следующий вид [23]:

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{п}} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi} - K_1 i^2 &= M_{\text{п}}, \\ L \frac{di}{dt} + K_2 i \omega &= U - iR, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

где L — суммарная величина индуктивности обмотки якоря и возбуждения;

R — суммарное сопротивление этих обмоток;

K_1 и K_2 — постоянные величины, зависящие от параметров двигателя.

Уравнения (4.19) справедливы для определенного участка кривой намагничивания $\Phi = f(i)$, то есть функции магнитного потока Φ от тока i . В области малых токов (ненасыщенный участок кривой намагничивания) магнитный поток пропорционален току $\Phi = K_{\Phi} i$. В этом случае третий член левой части первого уравнения системы (4.19) можно представить в виде

$$K_1 i^2 = K_3 K_{\Phi} i^2 = K_3 \Phi i,$$

где $K_3 = K_1 / K_{\Phi}$ — постоянный коэффициент. Аналогично второй член левой части второго уравнения системы (4.19) представим в виде

$$K_2 i \omega = K_4 K_{\Phi} i \omega = K_4 \Phi \omega,$$

где K_4 — постоянный коэффициент.

Выявим связь уравнений (4.19), характеризующих движение системы с двигателем постоянного тока с последовательным возбуждением, и уравнений (4.5), описывающих движение машины с двигателем постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением.

При увеличении тока i величина магнитного потока приближается к постоянному значению, то есть $K_{\Phi}i = \text{const}$. Тогда коэффициенты K_{Φ} и K_1 оказываются переменными и уравнения (4.19) переходят в уравнения (4.5), если принять в них коэффициенты $K_{1,2} = dM/d\varphi$ переменными. Это означает, что все выводы, сделанные при исследовании движения механической системы с электродвигателем с параллельным (или независимым) возбуждением, остаются справедливыми и для системы с двигателем постоянного тока с последовательным возбуждением при средних значениях $K_{1,2}$.

Если использовать уравнения (4.19) для исследования движения в области малых токов функции $\Phi = f(i)$, то при постоянном K_1 имеем

$$M_{\text{д}} = K_1 i^2 = J_{\text{п}} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi} - M_{\text{п}}. \quad (4.20)$$

При отсутствии изменения тока i во времени, то есть при $i = \text{const}$, второе уравнение системы (4.19) дает

$$i = \frac{U}{K_2 \omega + R}.$$

С учетом последнего соотношения уравнение (4.20) примет вид

$$M_{\text{д}} = \frac{K_1 U^2}{(K_2 \omega + R)^2}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) позволяет получить функцию $\omega = f(M)$ зависимости скорости ω ротора двигателя от нагрузки. С учетом уравнения (4.20) при $J_{\text{п}} = \text{const}$ из уравнения (4.21) получим

$$\omega = \frac{U}{K_2} \sqrt{\frac{K_1}{J_{\text{п}} \varepsilon - M_{\text{п}}} - \frac{R}{K_2}}. \quad (4.22)$$

Если в уравнении (4.22) $M_{\text{п}} = 0$, то есть отсутствуют силы сопротивления (холостой ход), то угловая скорость стремится к бесконечности (разнос двигателя).

Из уравнений (4.5) видно, что непостоянство угловой скорости вала двигателя обусловлено как электрическими, так и механическими параметрами. При исследовании движения электромеханических систем угловая скорость ротора двигателя может быть принята постоянной при условии, что двигатель имеет неограниченный запас мощности. Только в этом случае изменения сил инерционных и сил сопротивления не оказывают влияния на его скорость. При ограниченной мощности двигателя, что имеет место на практике, исследование движения системы должно проводиться с учетом механической характеристики двигателя. Это имеет особое значение при исследовании движения с учетом

упругости звеньев и их подвижных соединений. Возможность возникновения резонансных колебаний является одним из наиболее важных проявлений упругости передаточных механизмов. Наиболее опасным является совпадение частоты вращения главного приводного вала (звена приведения) с собственной частотой. Чтобы этого избежать, стремятся реализовать либо дорезонансный режим работы, характеризующийся запасом по частоте, либо зарезонансный режим. Дорезонансный режим обеспечивается увеличением жесткости (уменьшением податливости) передаточных механизмов или уменьшением приведенного момента инерции исполнительного механизма. При использовании зарезонансного режима требуется особое изучение перехода системы через резонанс в процессе разгона. Это связано с тем, что при резонансных колебаниях резко возрастает рассеяние энергии в упругих элементах. В некоторых случаях мощность двигателя может оказаться недостаточной для того, чтобы компенсировать эти потери. Эти явления называют эффектом Зоммерфельда [24]. Таким образом, динамика разгона (торможения) машины требует исследования ее движения с учетом особенностей переходных процессов [25].

4.2. Характеристики электродвигателей переменного тока

Наиболее распространенным типом электродвигателя переменного тока является асинхронный, то есть такой, у которого скорость ротора не совпадает со скоростью вращения магнитного потока. Мерой этого отставания является величина s , называемая скольжением и равная

$$s = \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, \quad (4.23)$$

где ω — угловая скорость ротора;

ω_c — синхронная угловая скорость, то есть скорость вращения магнитного потока.

При исследовании движения электромеханических систем с асинхронным двигателем, в отличие от систем с двигателем постоянного тока, некоторыми электромагнитными явлениями можно пренебречь и пользоваться статической характеристикой (рис.4.1), представляющей собой функцию $M_d = M_d(s)$ (рис.4.1, а) или $M_d = M_d(\omega)$ (рис.4.1, б). Аналитическое выражение функции M_d от величины скольжения имеет вид [23]

$$M_d = \frac{2M_K}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}, \quad (4.24)$$

где M_K — критический (максимальный) момент двигателя;

s_K — критическое скольжение, то есть скольжение при $M_d = M_K$.

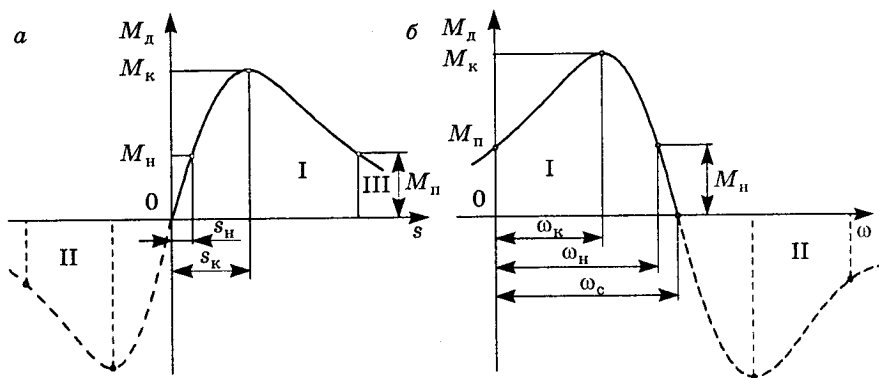


Рис.4.1. Характеристики: а — $M_d = M(s)$ и б — $M_d = M(\omega)$ асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором

Использование формулы (4.23) позволяет получить зависимость $M_d = M_d(\omega)$ на основании соотношения

$$\omega = \omega_c(1 - s).$$

Действие асинхронного электродвигателя основано на том, что трехфазная обмотка статора получает питание от трехфазной сети переменного тока и создает вращающийся магнитный поток Φ . В результате пересечения этим потоком проводников ротора (якоря) в них наводится ЭДС $E_{я}$. При замкнутой цепи якоря по его проводникам будет протекать ток $i_{я}$. Взаимодействие тока $i_{я}$ с магнитным потоком Φ создает вращающий момент, увлекающий якорь (ротор) в направлении магнитного потока. Этот момент действует, пока угловая скорость ротора не сравняется со скоростью вращения магнитного потока. Поэтому для асинхронных двигателей возможны три режима движения, отмеченные на рис.4.1 цифрами I, II, III. Область I соответствует двигательному режиму. При этом угловая скорость ω и момент на валу двигателя имеют одно направление, величина угловой скорости ω меньше синхронной ($\omega < \omega_c$) и скольжение находится в пределах $0 < s < 1$ (см. рис.4.1, а).

Область II соответствует генераторному режиму. При этом угловая скорость вала двигателя больше синхронной ($\omega > \omega_c$), а момент на валу двигателя M_d считается отрицательным. Это означает, что для вращения вала двигателя с угловой скоростью, превышающей синхронную, необходимо извне приложить к валу двигателя момент M_d . В этом режиме двигатель (генератор) отдает энергию в сеть. Скольжение находится в пределах от 0 до ∞ .

Область III называют областью противовключения. При этом угловая скорость вращения магнитного потока меняет знак

при неизменном направлении момента на валу двигателя. Скольжение изменяется от 1 до ∞ . Этот режим используется для торможения путем переключения на ходу двух фаз обмотки статора.

Участок характеристики от $\omega = \omega_k$ до $\omega = \omega_c$ (рис.4.1, б) или от $s = 0$ до $s = s_k$ (рис.4.1, а) называют устойчивым. На этом участке при увеличении момента внешних сил на валу скорость его уменьшается, вместе с тем растет движущий момент (см. рис.4.1, б) и устанавливается некоторое значение скорости.

Участок характеристики от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_k$ (рис.4.1, б) или от $s = s_k$ до $s = \infty$ (рис.4.1, а) называют неустойчивым. На этом участке при увеличении момента внешних сил и соответствующем уменьшении скорости ω движущий момент также уменьшается вплоть до остановки.

Точка характеристики $M_d = M_d(\omega)$ соответствующая номинальному режиму ($M_d = M_n$, $\omega = \omega_n$), лежит на устойчивом участке. Номинальный момент соответствует эффективной мощности двигателя, гарантируемой заводом-изготовителем.

Параметры, которые приводятся в каталогах этих двигателей, следующие: синхронная угловая скорость ω_c , рад/с, или синхронная частота вращения n_c , об/мин; номинальная угловая скорость ω_n или номинальная частота вращения n_n ; номинальная мощность двигателя P_n , кВт; коэффициент перегрузки по максимальному моменту $\lambda_{\max} = M_k/M_n$, где M_k — максимальный (критический) момент, $M_n = P_n/\omega_n$ — номинальный крутящий момент на валу двигателя; коэффициент перегрузки по пусковому моменту M_{Π} $\lambda_{\max} = M_{\Pi}/M_n$; момент инерции ротора J_p .

Синхронная скорость определяется по формуле

$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{p},$$

где p — число пар полюсов статора двигателя;

f_c — частота питающего тока.

Критическое скольжение ротора, то есть скольжение при $M_d = M_k$, определяется из соотношения

$$s_k = s_n \left(\lambda_{\max} + \sqrt{\lambda_{\max}^2 - 1} \right).$$

Рабочий участок характеристики асинхронного электродвигателя, как и участок пуска, с достаточной для практики точностью может быть представлен в виде прямой линии.

Тогда для рабочего участка

$$M_d = a_1 - b_1 \omega,$$

где $a_1 = 2M_k/s_k$, $b_1 = 2M_k/(s_k \omega_c)$;

для участка пуска

$$M_d = a_2 - b_2 \omega,$$

где $a_2 = M_{\text{п}}$, $b_2 = (M_{\text{к}} - M_{\text{п}})/\omega_{\text{к}}$, $\omega_{\text{к}} = \omega_{\text{с}} - (\omega_{\text{с}} - \omega_{\text{н}}) \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)$.

Регулирование угловой скорости ротора асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором осуществляется путем изменения частоты питающего тока, подающегося на статор [26]. При этом основную роль играют механические процессы, как более длительные по сравнению с электрическими.

Кроме рассмотренных двигателей с короткозамкнутым ротором, в качестве приводов в системах автоматического управления и регулирования применяются двухфазные электродвигатели переменного тока и многофазные с фазным ротором. Для последних при регулировании угловой скорости применяется частотно-токовое управление.

4.3. Алгоритм приближенного аналитического представления механической характеристики асинхронного электродвигателя

Средний момент электродвигателя $M_{\text{п ср}}^{\text{д}}$, приведенный к звену приведения, определяется как

$$M_{\text{п ср}}^{\text{д}} = \frac{A_{\text{с}}}{\varphi_{\text{н}}},$$

где $A_{\text{с}}$ — работа сил полезного и вредного сопротивления за один цикл установившегося движения. Если $\varphi_{\text{н}}$ соответствует одному обороту звена приведения, то

$$M_{\text{п ср}}^{\text{д}} = \frac{A_{\text{с}}}{2\pi}.$$

Тогда мощность двигателя равна

$$P_{\text{д}} = M_{\text{п ср}}^{\text{д}} \omega_{1\text{ср}} = M_{\text{п ср}}^{\text{д}} \frac{2\pi}{T},$$

где T — время одного оборота звена приведения.

По каталогу принимаем двигатель ближайшей большей мощности с учетом заданной синхронной частоты вращения $n_{\text{с}}$. Основными характеристиками двигателя являются: $n_{\text{н}}$, $P_{\text{н}}$ — номинальная частота вращения и мощность; $\lambda = M_{\text{п}}/M_{\text{н}}$ — коэффициент перегрузки по пусковому моменту; $\lambda_{\text{max}} = M_{\text{к}}/M_{\text{н}}$ — коэффициент перегрузки по максимальному моменту; $J_{\text{р}}$ — момент инерции ротора.

Затем строится механическая характеристика электродвигателя, приведенная к звену приведения, по четырем характерным точкам, координаты которых вычисляются в следующем порядке:

1) передаточное отношение коробки скоростей (подач) между электродвигателем и входным звеном исполнительного механизма

$$i_{\text{пм}} = u_p = \frac{n_{\text{н}}}{n_1},$$

где $n_{\text{н}}$, n_1 — соответственно номинальная частота вращения электродвигателя и заданная частота вращения входного звена;

2) номинальная и синхронная скорость звена приведения

$$\omega_{1\text{н}} = \frac{\pi n_{\text{н}}}{30 u_p}, \quad \omega_{1\text{с}} = \frac{\pi n_1}{30 u_p};$$

3) приведенный номинальный момент

$$M_{\text{н}}^{\text{п}} = \frac{P_{\text{н}}}{\omega_{1\text{н}}};$$

4) приведенный пусковой момент

$$M_{\text{п}}^{\text{п}} = M_{\text{н}}^{\text{п}} \lambda;$$

5) приведенный критический момент

$$M_{\text{к}}^{\text{п}} = M_{\text{н}}^{\text{п}} \lambda_{\text{max}};$$

6) номинальное скольжение

$$s_{\text{н}} = \frac{\omega_{1\text{с}} - \omega_{1\text{н}}}{\omega_{1\text{с}}};$$

7) максимальное скольжение

$$s_{\text{кр}} = s_{\text{н}} \left(\lambda_{\text{max}} + \sqrt{\lambda_{\text{max}}^2 - 1} \right);$$

8) приведенная критическая угловая скорость

$$\omega_{1\text{кр}} = \omega_{1\text{с}} (1 - s_{\text{кр}}).$$

Вычисление текущего значения $M_{\text{д}}^{\text{п}}$ можно производить по формуле (4.24), которая примет вид

$$M_{1\text{д}}^{\text{п}} = \frac{2M_{\text{к}}^{\text{п}}}{\frac{s}{s_{\text{к}}} + \frac{s_{\text{к}}}{s}}.$$

Значение s определяется по формуле (4.23).

Последовательность аналитического представления линеаризованной механической характеристики асинхронного электродвигателя следующая.

Для рабочего участка

1) $\omega_c = \frac{2\pi f_c}{p},$

2) $s_H = \frac{\omega_c - \omega_H}{\omega_c},$

3) $\lambda_{\max} = \frac{M_K}{M_H},$

4) $s_K = s_H \left(\lambda_{\max} + \sqrt{\lambda_{\max}^2 - 1} \right),$

5) $a_1 = \frac{2M_K}{s_K},$

6) $b_1 = \frac{2M_K}{s_K \omega_c},$

7) $M_d = a_1 - b_1 \omega.$

Для участка пуска

1) $M_H = \frac{P_H}{\omega_H},$

2) $\lambda = \frac{M_{II}}{M_H},$

3) $\omega_K = \omega_c - (\omega_c - \omega_H) \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right),$

4) $a_2 = M_{II},$

5) $b_2 = \frac{M_K - M_{II}}{\omega_K},$

6) $M_d = a_2 + b_2 \omega.$

4.4. Механические характеристики электродвигателей постоянного тока

В последнее время в станочном оборудовании все чаще применяются электродвигатели постоянного тока. Они позволяют обеспечить плавное регулирование скорости вращения ротора, упростить, а иногда и исключить из привода громоздкие коробки скоростей, редукторы, то есть передаточные механизмы. Диапазон регулирования 3 ... 4.

Наибольшее использование имеют двигатели с независимым возбуждением. Такие электродвигатели, управляемые путем изменения напряжения на якоре, дают возможность получить широкий диапазон регулирования скорости вращения.

Уравнения семейства механических $n_1 = f_1(M)$ и скоростных $n_2 = f_2(U_d)$ характеристик электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением имеют следующий вид [26]:

$$\begin{aligned} n &= \frac{U_d}{C_e \Phi_B} \left(1 - \frac{M}{M_{II}} \right), \\ n &= \frac{U_d}{C_e \Phi_B} - \frac{M r_{яц}}{C_e C_M \Phi_B^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где n — скорость вращения ротора, об/мин;
 U_d — напряжение на якоре двигателя, В;
 C_e, C_M — конструктивные постоянные;

Φ_B — поток возбуждения, Вб;

$r_{яц}$ — сопротивление цепи якоря, Ом;

M — момент, развиваемый двигателем (момент нагрузки), Н·м;

M_n — пусковой момент (момент короткого замыкания), Н·м.

Напряжение трогания электродвигателя $U_{тр}$ определится из второго выражения системы (4.25) при $n = 0$:

$$U_{тр} = \frac{Mr_{яц}}{C_m \Phi_B}. \quad (4.26)$$

Поток возбуждения $\Phi_{Bном}$ можно найти по кривым намагничивания [27] или вычислить по формуле

$$\Phi_{Bном} = \frac{U_{дном} - i_{яном} r_{яц}}{C_e n_{ном}},$$

где $U_{дном}$ — номинальное напряжение на якоре двигателя, В;

$i_{яном}$ — номинальный ток якоря, А;

$n_{ном}$ — номинальная скорость двигателя, об/мин.

Поток возбуждения Φ_B при ослаблении поля определяется по формуле [28]

$$\Phi_B = \Phi_{Bном} \frac{n_{ном}}{n}.$$

Постоянные C_e и C_m определяются из выражений

$$C_e = \frac{pN}{60a}, \quad C_m = \frac{pN}{2a\pi},$$

где p — число пар полюсов двигателя;

N — число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря $\omega_{я}$);

a — число пар параллельных ветвей обмотки якоря.

В расчетах можно использовать соотношение

$$C_e/C_m = 2\pi/60 = 0,105.$$

В формуле (4.25) в правой части первый член соответствует скорости вращения n_0 при идеальном холостом ходе ($M = 0$, $i_{я} = 0$, $U_d = U_{дном}$), второй — снижению скорости вращения двигателя под нагрузкой. Механическая характеристика двигателя при $\Phi_B = \text{const}$ и $U_d = \text{const}$ выражается уравнением прямой (рис. 4.2, а, прямая 1) вида

$$n = a - bM,$$

где a и b — числовые коэффициенты.

При увеличении сопротивления якорной цепи жесткость механической характеристики двигателя ухудшается (прямая 2).

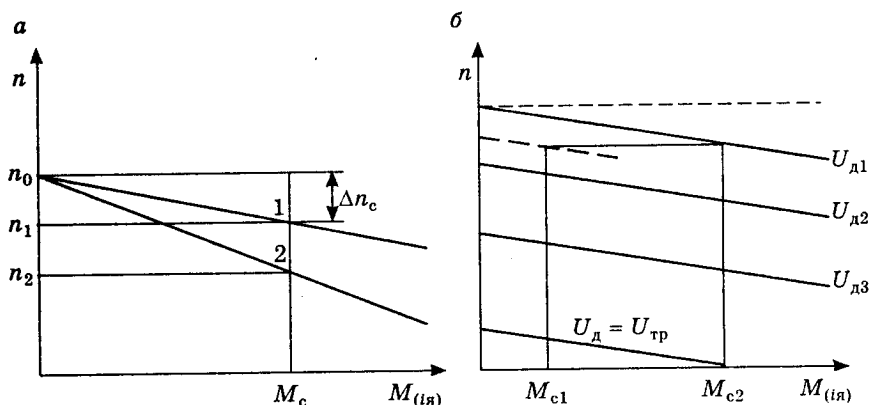


Рис.4.2. Механические характеристики двигателя с независимым возбуждением: *a* — $n = f(M)$ при $\Phi_{в} = \text{const}$ и $U_{д} = \text{const}$; *б* — $n = f(M)$ при различных значениях $U_{д}$

При известном номинальном потоке возбуждения $\Phi_{в \text{ ном}}$ конструктивные постоянные двигателя можно определить по его номинальным данным из формул:

$$C_e = \frac{U_{д \text{ ном}} - i_{я \text{ ном}} \gamma_{яц}}{\Phi_{в \text{ ном}} n_{\text{ном}}} \quad \text{или} \quad C_e = \frac{U_{д \text{ ном}}}{\Phi_{в \text{ ном}} n_{\text{ном}}},$$

$$C_m = \frac{M_{\text{ном}}}{\Phi_{в \text{ ном}} i_{я \text{ ном}}},$$

где $M_{\text{ном}} = 0,9 \frac{P_{\text{ном}}}{n_{\text{ном}}}$;

$P_{\text{ном}}$ — номинальная мощность на валу двигателя, Вт.

Эти формулы используются для приближенного вычисления постоянных C_e и C_m , так как номинальные данные для двигателей представляют собой усредненные величины.

Рассмотрим особенности регулирования скорости вращения вала двигателя за счет изменения напряжения на якоре.

Механические характеристики двигателя, построенные по уравнению (4.25) при разных напряжениях на якоре, показаны на рис.4.2, б. При уменьшении напряжения механическая характеристика смещается параллельно вниз пропорционально величине напряжения. Статические характеристики позволяют определить диапазон изменения напряжения на якоре двигателя, требуемый для поддержания заданной скорости вращения при заданных пределах изменения момента сопротивления M_c рабочей машины (статического момента при установившемся режиме $M = M_c$).

Соответствующие значения тока можно найти из соотношения

$$i_{я} = \frac{M}{C_M \Phi_B}.$$

График дает возможность определить зону нечувствительности двигателя по напряжению $U_{дном}$ трогания двигателя $U_d = U_{дтр}$. Это напряжение соответствует началу вращения ротора двигателя, зависит от момента M_c (без учета инерционности системы) и находится при $n = 0$ и $M = M_c$ по формуле (4.26).

Критерием устойчивости работы привода является соотношение [27]

$$\frac{dM}{dn} < \frac{dM_c}{dn}.$$

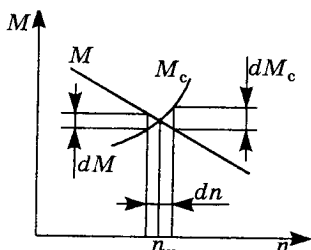


Рис.4.3. К оценке устойчивости режима работы двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

Это показано на рис.4.3. При случайном увеличении n в результате возмущения на величину Δn тормозной момент M_c станет больше движущего момента M , и двигатель будет затормаживаться, что заставит ротор вернуться к исходной скорости n_n . И, наоборот, при $M > M_c$ ротор получает ускорение, а скорость стабилизируется, т.е. $n = n_n$.

Перегрузочные характеристики двигателя приблизительно превышают номинальные в 2-3 раза в долях тока якоря [28].

4.5. Алгоритм приближенного аналитического представления механической характеристики двигателя постоянного тока

Входные параметры: номинальное число оборотов ротора двигателя $n_{ном}$, об/мин; номинальное напряжение $U_{ном}$, В; номинальная мощность $P_{ном}$, кВт; сила тока $i_{ном}$, А; число витков обмотки якоря $\omega_я$; сопротивление якоря $r_я$, Ом; сопротивление добавочных проводников $r_{дп}$, Ом; сопротивление статора $r_{ст}$, Ом; число параллельных ветвей обмотки якоря a .

Алгоритм аналитического представления следующий:

1) число активных проводников якоря

$$N = 2\omega_я;$$

2) конструктивные постоянные

$$C_e = \frac{pN}{60a}, \quad C_M = \frac{pN}{2a\pi};$$

3) сопротивление цепи якоря

$$r_{\text{яц}} = r_{\text{я}} + r_{\text{дп}} + r_{\text{ст}};$$

4) номинальный крутящий момент

$$M_{\text{ном}} = 9,55 \frac{P_{\text{ном}}}{n_{\text{ном}}};$$

5) номинальный поток возбуждения

$$\Phi_{\text{в ном}} = \frac{U_{\text{ном}} - i_{\text{ном}} r_{\text{яц}}}{C_e n_{\text{ном}}};$$

6) скорость вращения при идеальном холостом ходе

$$n_0 = \frac{U_{\text{ном}}}{\Phi_{\text{в ном}} C_e};$$

7) скорость вращения при нагружении двигателя моментом

$$n = n_0 - \frac{r_{\text{яц}} M}{C_e C_m \Phi_{\text{в ном}}^2};$$

8) зависимость нагружающего момента M от угловой скорости

$$M = \frac{9,55 C_e C_m \Phi_{\text{в ном}}^2}{r_{\text{яц}}} (\omega_0 - \omega).$$

4.6. Примеры определения массовых и энергетических характеристик приводов

4.6.1. Пример аналитического представления характеристики двигателя постоянного тока

Рассмотрим пример расчета механической характеристики двигателя постоянного тока серии П, $n_{\text{ном}} = 1500$ об/мин [29, с.22, табл.1.2]. Характеристики двигателя типа П-22: $U_{\text{ном}} = 220$ В, $P_{\text{ном}} = 1,0$ кВт; $i_{\text{ном}} = 5,9$ А; $\eta_{\text{ном}} = 77\%$; $2p = 2$; $2a = 2$; $\omega_{\text{я}} = 864$; $r_{\text{я}} + r_{\text{дп}} = 4,17$ Ом; $r_{\text{ст}} = 0,25$ Ом; $\omega_{\text{вт}} = 4800$; $r_{\text{в}} = 712$ Ом; $mD^2 = 0,055$ кг·м².

1) Число активных проводников якоря

$$N = 2\omega_{\text{я}} = 2 \cdot 864 = 1728.$$

2) Конструктивные постоянные

$$C_e = \frac{pN}{60a} = \frac{1 \cdot 1728}{1 \cdot 60} = 28,8,$$

$$C_m = \frac{pN}{2ap} = \frac{1 \cdot 1728}{1 \cdot 2 \cdot 3,14} = 275,16.$$

3) Сопротивление цепи якоря

$$r_{\text{яц}} = r_{\text{я}} + r_{\text{дп}} + r_{\text{ст}} = 4,17 + 0,25 = 4,42 \text{ Ом.}$$

4) Номинальный крутящий момент

$$M_{\text{ном}} = 9,55 \frac{P_{\text{ном}}}{n_{\text{ном}}} = 9,55 \frac{1000}{1500} = 6,37 \text{ Н·м.}$$

5) Номинальный поток возбуждения

$$\Phi_{\text{в ном}} = \frac{U_{\text{ном}} - i_{\text{ном}} r_{\text{яц}}}{C_e n_{\text{ном}}} = \frac{220 - 5,9 \cdot 4,42}{28,8 \cdot 1500} = 4,59 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

6) Скорость вращения при идеальном холостом ходе

$$n_0 = \frac{U_{\text{ном}}}{\Phi_{\text{в ном}} C_e} = \frac{220}{4,59 \cdot 10^{-3} \cdot 28,8} = 1664,2 \text{ об/мин.}$$

7) Скорость вращения при нагружении двигателя моментом

$$n = n_0 - \frac{r_{\text{яц}} M}{C_e C_m \Phi_{\text{в ном}}^2} = 1664,2 - \frac{4,42 M}{28,8 \cdot 275,16 (4,59 \cdot 10^{-3})^2} = 1664,2 - 26,467 M.$$

Проверка при $M_{\text{ном}}$ дает ошибку по $n_{\text{ном}}$ 0,2%, что связано с округлением результатов.

Полученное выражение механической характеристики двигателя можно преобразовать следующим путем:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}; \quad n = \frac{30\omega}{\pi} = 9,55\omega,$$

$$\omega = 174,26 - 2,77M \text{ или } M = 62,91 - 0,361\omega. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) представляет собой уравнение прямой (см. рис.4.2).

4.6.2. Пример определения энергомассовых характеристик привода компрессора с асинхронным электродвигателем переменного тока

В качестве исполнительного используется кривошипно-ползунный механизм.

Сила полезного сопротивления, действующая во время рабочего хода, $F_c = 2200 \text{ Н}$; коэффициент неравномерности движения приводного вала $\delta = 0,05$; массы звеньев: $m_2 = 36,5 \text{ кг}$, $m_3 = 12,4 \text{ кг}$; размеры звеньев: $l_{OA} = 0,13 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,65 \text{ м}$; центральный момент инерции шатуна $J_{S2} = 0,17 m_2 l_{AB}^2$; средняя частота вращения кривошипа $n_1 = 300 \text{ об/мин.}$

В первом приближении определим постоянную составляющую приведенного момента инерции J_{Π}^1 , принимая $M_{\Pi}^R = \text{const}$.

На основании результатов кинематического анализа для 12-ти положений механизма рассчитаны значения приведенного момента инерции J_{Π}^{II} и приведенного момента сил сопротивления $M_{\Pi}^c = F_c v_B / \omega_1$ (табл.4.1).

Таблица 4.1

N положения	0	1	2	3	4	5
M_{Π}^c , Н·м	0	0	0	0	0	0
J_{Π}^{II} , кг·м ²	0,4	0,53	0,77	0,83	0,65	0,46
N положения	6	7	8	9	10	11
M_{Π}^c , Н·м	0	118,3	222,8	285,9	27,24	167,7
J_{Π}^{II} , кг·м ²	0,4	0,46	0,65	0,83	0,77	0,53

График $J_{\Pi}^{\Pi}(\varphi)$ показан на рис.4.4, а график $M_{\Pi}^c(\varphi)$ — на рис.4.5, а. Масштабные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \mu_J &= 0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{мм}; \\ \mu_{M_1} &= 2,5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{мм}; \\ \mu_{\varphi} &= \frac{2\pi}{L} = \frac{2 \cdot 3,14}{209,3} = 0,03 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

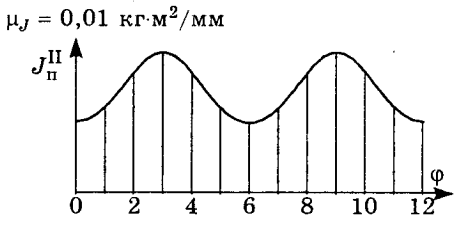


Рис.4.4. Зависимость $J_{\Pi}^{\Pi} = f(\varphi)$ для кривошипно-ползунного механизма

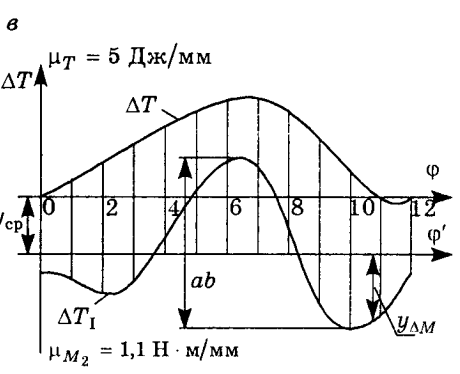
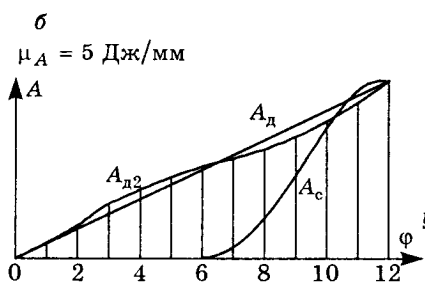
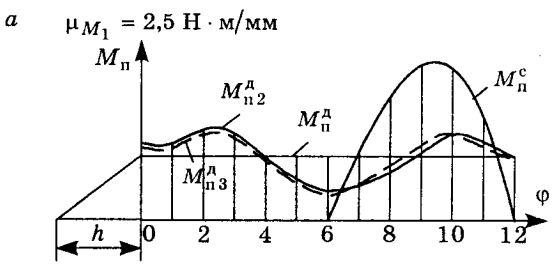


Рис.4.5. Зависимости: *a* — $M_{\Pi} = M(\varphi)$, *б* — $A = A(\varphi)$, *в* — $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ для кривошипно-ползунного механизма с постоянной силой сопротивления на рабочем ходу без учета сил трения

Графически интегрируя график $M_{\Pi}^c(\varphi)$ при полюсном расстоянии $h = 66,6$ мм, строим кривую работы сил полезного сопротивления $A_c(\varphi)$ (рис.4.5, б), при этом масштабный коэффициент графика работ

$$\mu_A = \mu_{M_1} \mu_{\varphi} h = 2,5 \cdot 0,03 \cdot 66,6 = 5 \text{ Дж/мм.}$$

Учитывая, что M_{Π}^d принят постоянным, равным $(M_{\Pi}^c)_{\text{cp}}$, и за цикл $A_d = A_c$, получаем график работы движущих сил $A_d(\varphi)$ в первом приближении в виде прямой линии, соединяющей начало координат с концом кривой $A_c(\varphi)$.

Путем графического вычитания строим график изменения кинетической энергии механизма $\Delta T(\varphi)$ (рис.4.5, в).

Из ординат графика $\Delta T(\varphi)$ вычитаем ординаты $k_1 y_J$, соответствующие кинетической энергии звеньев с переменным приведенным моментом инерции J_{Π}^{II} , и в результате получаем кривую изменения кинетической энергии звеньев $\Delta T_I(\varphi)$ с постоянным приведенным моментом инерции J_{Π}^{I} . Коэффициент k_1 вычисляем по формуле

$$k_1 = \frac{\mu_J \omega_{\text{cp}}^2}{2\mu_T} = \frac{0,01 \cdot 31,4^2}{2 \cdot 5} = 0,986.$$

Значения ординат y_J и $k_1 y_J$ приведены в табл.4.2. По наибольшему перепаду кинетической энергии $\Delta T_{I \text{max}} = (ab)\mu_T$ находим

$$J_{\Pi}^{\text{I}} = \frac{\Delta T_{\text{max}}}{\delta \omega_{\text{cp}}^2} = \frac{83,5}{0,05 \cdot 31,4^2} = 8,42 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Построенная кривая $\Delta T_I(\varphi)$ одновременно является кривой изменения угловой скорости звена приведения $\Delta \omega_{\Pi}(\varphi)$. Масштабный коэффициент определяется по формуле

$$\mu_{\omega} = \frac{\delta \omega_{\text{cp}}}{ab} = \frac{0,05 \cdot 31,4}{83} = 0,0189 \text{ рад/(с}\cdot\text{мм)}.$$

Таблица 4.2

N положения	0	1	2	3	4	5
y_J , мм	40	53	77	83	65	46
$k_1 y_J$, мм	39,4	52,3	75,9	81,8	64,1	45,4
N положения	6	7	8	9	10	11
y_J , мм	40	46	65	83	77	53
$k_1 y_J$, мм	39,4	45,4	64,1	81,8	75,9	52,3

В свою очередь график $\Delta \omega_{\Pi}(\varphi)$ представляет собой график $\Delta M_{\Pi}^d(\varphi)$ во втором приближении (в масштабе μ_{M_2}).

Находим средний уровень ординат этого графика относительно оси φ :

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{12} (-39,4 - 42 - 56 - 53 - 26 + 2 + 18 + 14 - 14 - 48 - 65 - 54) = -30,3 \text{ мм.}$$

По величине $M_{\text{п}}^{\text{д}} = \text{const.}$ (см. рис.4.5, а) и средней угловой скорости звена приведения $\omega_{\text{п ср}}$ определяем среднюю мощность движущих сил на валу звена приведения:

$$P_{\text{ср}} = M_{\text{п}}^{\text{д}} \omega_{\text{п ср}} = 36,4 \cdot 2,5 \cdot 31,4 = 2857 \text{ Вт.}$$

По каталогу выбираем трехфазный асинхронный электродвигатель А0-32-4 со следующими данными: $P_{\text{дн}} = 3$ кВт; $n_{\text{дн}} = 1425$ об/мин; $n_{\text{дс}} = 1500$ об/мин; $\lambda = M_{\text{дк}}/M_{\text{дн}} = 2,2$; $mD^2 = 0,5$ кг·м². Между электродвигателем и механизмом компрессора необходимо установить редуктор с передаточным отношением, равным

$$i_{\text{р}} = \frac{n_{\text{дн}}}{n_1} = \frac{1425}{300} = 4,75.$$

На основании данных из каталога определяем

$$\omega_{\text{дн}} = \frac{\pi n_{\text{дн}}}{30} = \frac{3,14 \cdot 1425}{30} = 149,2 \text{ рад/с;}$$

$$\omega_{\text{дс}} = \frac{\pi n_{\text{дс}}}{30} = \frac{3,14 \cdot 1500}{30} = 157 \text{ рад/с;}$$

$$M_{\text{дн}} = \frac{P_{\text{дн}}}{\omega_{\text{дн}}} = \frac{3000}{149,2} = 20,1 \text{ Н·м;}$$

$$M_{\text{дк}} = \lambda M_{\text{дн}} = 2,2 \cdot 20,1 = 44,2 \text{ Н·м.}$$

Используя упрощенную (линеаризованную) механическую характеристику электродвигателя, ее крутизну (жесткость) определим по формуле

$$k = \frac{M_{\text{дн}}}{\omega_{\text{дс}} - \omega_{\text{дн}}} = \frac{20,1}{157 - 149,2} = 2,58.$$

Условную величину пускового момента определим по формуле

$$M_{\text{дп}} = M_{\text{дн}} \frac{\omega_{\text{дс}}}{\omega_{\text{дс}} - \omega_{\text{дн}}} = \frac{20,1 \cdot 157}{157 - 149,2} = 404,6 \text{ Н·м.}$$

Минимально допустимую величину угловой скорости ротора определим из соотношения

$$\omega_{\text{д доп}} = \frac{M_{\text{дп}} - 0,8M_{\text{к}}}{k} = \frac{404,6 - 0,8 \cdot 44,2}{2,58} = 143,1 \text{ рад/с.}$$

Проверяем выполнение условий $\omega_{\text{д min}} > \omega_{\text{д доп}}$ и $\omega_{\text{д min}} < \omega_{\text{дс}}$:

$$\omega_{\text{д min}} = \omega_{\text{п}}^{\text{min}} i_{\text{р}} = 31,4 \left(1 - \frac{0,05}{2} \right) 4,75 = 145,4 \text{ рад/с;}$$

$$\omega_{\text{д max}} = \omega_{\text{п}}^{\text{max}} i_{\text{р}} = 31,4 \left(1 + \frac{0,05}{2} \right) 4,75 = 152,9 \text{ рад/с.}$$

Следовательно, указанные условия выполняются, и выбранный двигатель может быть использован для привода исследуемого механизма.

Вычисляем масштабный коэффициент μ_{M_2} графика ΔM_{Π}^A :

$$\mu_{M_2} = k i_p^2 \mu_{\omega} = 2,58 \cdot 4,75 \cdot 0,0189 = 1,1 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{мм}.$$

Ординаты Δy определяем, используя формулу $\Delta y = \frac{\mu_{M_2}}{\mu_{M_1}} y_{\Delta M}$. Определяем ординаты Δy графика $\Delta M_{\Pi}^A = f(\varphi)$ в масштабе μ_{M_1} , которые откладываются от прямой $M_{\Pi}^A = \text{const}$ (см. рис.4.5, а).

Результаты вычислений приведены в табл.4.3.

Таблица 4.3

N положения	0	1	2	3	4	5
$y_{\Delta M}$, мм	9,1	11,7	25,7	22,7	-4,3	-32,3
Δy , мм	4,0	5,1	11,3	10,0	-1,9	-14,2
N положения	6	7	8	9	10	11
$y_{\Delta M}$, мм	-48,3	-44,3	-16,3	17,7	34,7	23,7
Δy , мм	-21,3	-19,5	-7,2	7,8	15,3	10,4

Построенная кривая $M_{\Pi 2}^A = f(\varphi)$ является графиком приведенного момента движущих сил во втором приближении.

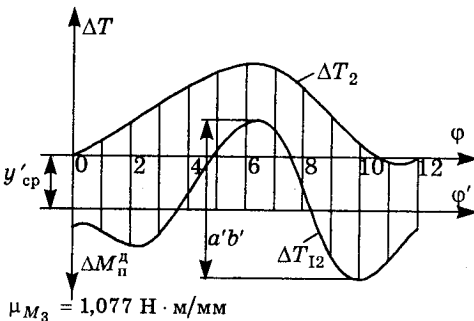


Рис.4.6. Зависимость $\Delta T_{12} = f(\omega)$ во втором приближении

Графически интегрируя эту зависимость, получаем кривую работы движущих сил $A_{д2}(\varphi)$ во втором приближении (см. рис.4.5, б). Затем, используя построенный ранее график $A_c(\varphi)$, путем графического вычитания получаем график $\Delta T_2 = A_{д2} - A_c$ во втором приближении (рис.4.6).

Вычитая из ординат графика $\Delta T_2(\varphi)$ ординаты $k_1 y_j$, вычисленные ранее (табл.4.2),

получаем зависимость $\Delta T_{12}(\varphi)$ во втором приближении. Полученная кривая одновременно показывает изменение угловой скорости звена привода $\Delta \omega_{\Pi 2}(\varphi)$ во втором приближении и изменение приведенного момента движущих сил $\Delta M_{\Pi}^A(\varphi)$ в третьем приближении. Масштабные коэффициенты:

$$\mu'_{\omega} = \frac{\delta \omega_{\Pi \text{ ср}}}{(a'b')} = \frac{0,05 \cdot 31,4}{85} = 0,0185 \text{ рад} / (\text{с} \cdot \text{м}),$$

$$\mu_{M_3} = k u_p^2 \mu'_\omega = 2,58 \cdot 4,75^2 \cdot 0,0185 = 1,077 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{мм}.$$

Уточненный приведенный момент инерции определим по формуле

$$J_{п2}^I = \frac{(a'b')\mu_T}{\delta\omega_{п\text{ср}}^2} = \frac{85 \cdot 5}{0,05 \cdot 31,4^2} = 8,61 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Часто изменения приведенного момента инерции исполнительного механизма весьма малы по сравнению с искомой величиной постоянной составляющей приведенного момента инерции и не оказывают на нее существенного влияния. Поэтому, если вместо $J_{п}^{\text{II}}$ принять некоторое среднее значение $J_{п\text{ср}}^{\text{II}}$, то

$$J_{п} = J_{п}^I + J_{п\text{ср}}^{\text{II}} = \text{const.}$$

При $J_{п} = \text{const}$ дифференциальное уравнение движения звена приведения имеет вид

$$M_{п}^d - M_{п}^c = J_{п} \frac{d\omega_{п}}{dt}.$$

Поскольку при значениях обобщенной координаты, соответствующих экстремуму угловой скорости звена приведения, его угловое ускорение $d\omega_{п}/dt = 0$, то с учетом последнего уравнения видно, что в этих положениях приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления должны быть равны $M_{п}^d = M_{п}^c$.

Отсюда вытекает следующий упрощенный способ. Определяются приведенный движущий момент $M_{п\text{min}}^d$, который соответствует максимальной угловой скорости начального звена $\omega_{п\text{max}}$, и приведенный движущий момент $M_{п\text{max}}^d$, который соответствует минимальной угловой скорости начального звена $\omega_{п\text{min}}$. Для этого предварительно с помощью аналитической зависимости $M_d = f(\omega)$, описывающей механическую характеристику асинхронного электродвигателя, следует найти значения моментов электродвигателя $M_{d\text{min}}$ и $M_{d\text{max}}$, которым соответствуют угловые скорости ротора $\omega_{d\text{max}}$ и $\omega_{d\text{min}}$.

Тогда

$$M_{п\text{min}}^d = M_{d\text{min}} i_p; \quad M_{п\text{max}}^d = M_{d\text{max}} i_p.$$

Для приближенного определения $M_{п\text{min}}^d$ и $M_{п\text{max}}^d$ можно воспользоваться также линейно-аппроксимированной механической характеристикой электродвигателя, приведенной к звену приведения. Имея в виду линейную зависимость $M_d = f(\omega)$, представленную на рис.4.7, приведенный движущий момент электродвигателя можно представить следующим образом:

$$M_{п}^d = M_d i_p = a - b\omega_{п},$$

где

$$a = M_{д0} u_p, \quad b = k u_p^2,$$

значения $M_{д0}$ и k определяются по приведенным ранее формулам.

Тогда

$$M_{п \min}^д = a - b \omega_{п \max}, \quad M_{п \max}^д = a - b \omega_{п \min}.$$

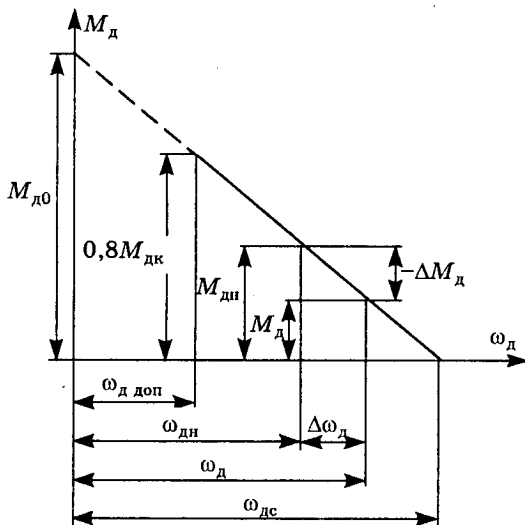


Рис.4.7. Линеаризованная зависимость $M_d = f(\omega_d)$

$M_{п \min}^д$ и $M_{п \max}^д$, проводим горизонтальные прямые I и II до пересечения с кривой $M_{п}^c(\varphi)$ в точках A, B, C, D. Тогда можно считать, что в положениях, определяемых точками a и c, угловая скорость звена приведения имеет максимум, а в положениях, определяемых точками b и d, — минимум.

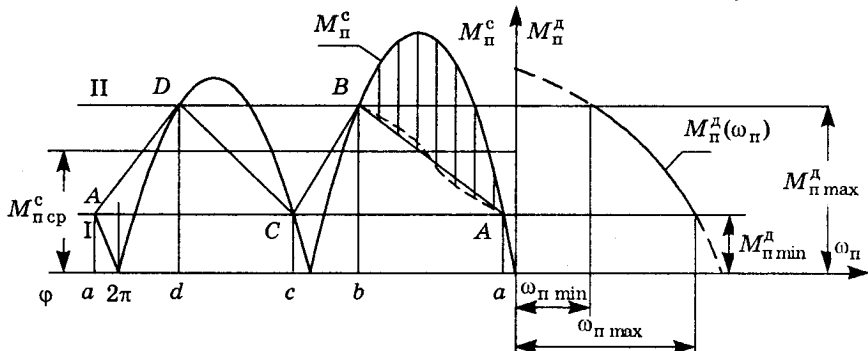


Рис.4.8. Зависимости $M_{п}^д = f(\omega)$ и $M_{п}^д = f(\varphi)$

Графики $M_{п}^д(\omega_{п})$ и

$M_{п}^c(\varphi)$ располагаются так, как показано на рис.4.8. По средней величине приведенного момента сил сопротивления $M_{п \text{ср}}^c$ определяется средняя потребляемая мощность

$$P_{\text{ср}} = M_{п \text{ср}}^c \omega_{п \text{ср}}.$$

Электродвигатель выбирается так, чтобы его номинальная мощность $N_{дн}$ была на 15–20% больше, чем расчетное значение $P_{\text{ср}}$.

График $M_{п}^д(\omega_{п})$ стро-

ится на основании данных из каталога. Через точки графика, соответствующие

Так как на участке между максимумом и минимумом кривая может иметь перегиб (как показано штриховой линией), то допустимо на таком участке кривую $M_{\Pi}^d(\varphi)$ приближенно заменить отрезком прямой.

Таким образом, график $M_{\Pi}^d(\varphi)$ приближенно можно считать изменяющимся по ломаной линии $ABCD A$.

В этом случае задача сводится к определению приведенного момента инерции J_{Π}^I по графикам $M_{\Pi}^d(\varphi)$ и $M_{\Pi}^c(\varphi)$ при $J_{\Pi} = \text{const}$, при этом величине $\Delta T = \Delta A$ соответствует площадь, заключенная между графиками $M_{\Pi}^d(\varphi)$ и $M_{\Pi}^c(\varphi)$ на интервале изменения угловой скорости звена приведения от $\omega_{\Pi \min}$ до $\omega_{\Pi \max}$ (или наоборот). На рис.4.8 такой площадью является заштрихованная площадь F_{ab} (на интервале $\varphi_a - b$), поскольку она является наибольшей из площадей F_{ab} , F_{bc} , F_{cd} , F_{da} , заключенных между графиками $M_{\Pi}^d(\varphi)$ и $M_{\Pi}^c(\varphi)$.

Следовательно,

$$\sum A^* = F_{ab} \mu_M \mu_{\varphi},$$

где μ_M и μ_{φ} — масштабные коэффициенты по осям M_{Π} и φ . Тогда постоянная составляющая приведенного момента инерции определится из соотношения

$$J_{\Pi}^I = \frac{\sum A^*}{\delta \omega_{\Pi \text{ ср}}^2} - J_0 - J_{\Pi}^c - J_{\Pi}^{\text{II}}.$$

Здесь J_0 — момент инерции звена приведения, в рассматриваемом случае это момент инерции кривошипа исполнительного механизма.

В случае линейной аппроксимации рабочей части механической характеристики асинхронного электродвигателя задача об определении необходимого момента инерции маховика может быть решена аналитически, если приведенный момент сил сопротивления M_{Π}^c и приведенный момент инерции механизма J_{Π} являются постоянными.

Рассмотрим случай, характерный для машин ударного действия, когда график M_{Π}^c имеет вид, показанный на рис.4.9.

Величина момента $M_{\Pi}^c = M_p$ на рабочем ходу значительно больше величины момента $M_{\Pi}^c = M_x$ на холостом ходу, но угол поворота звена приведения φ_p , соответствующий рабочему ходу, значительно меньше угла поворота φ_x , соответствующего холостому ходу. В общем случае значения M_p и M_x изменяются, но на графике следует изображать их средние значения. Такое приближение допустимо, поскольку время рабочего хода очень короткое, а нагрузка холостого хода мала.

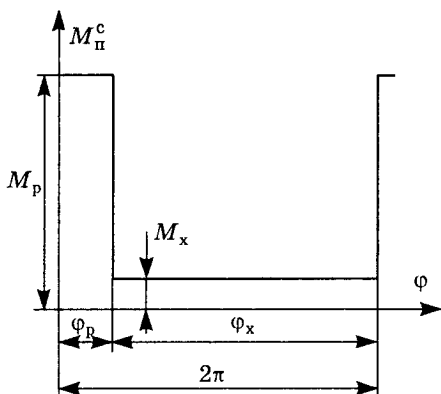


Рис. 4.9. Зависимость приведенного момента сил сопротивления M_{II}^c от обобщенной координаты φ — угла поворота главного приводного вала машины ударного действия

Учитывая, что приведенный движущий момент электродвигателя M_{II}^A приближенно можно представить в виде линейной зависимости, дифференциальное уравнение движения звена привода для рабочего хода можно записать следующим образом:

$$a - b\omega_{II} - M_p = J_{II} \frac{d\omega_{II}}{dt}.$$

Перед началом рабочего хода угловая скорость начального звена достигает максимального значения $\omega_{II \max}$, а к концу этого хода — уменьшается до минимального значения $\omega_{II \min}$. В последнем уравнении представим $d\omega_{II}/dt$ как $(d\omega_{II}/d\varphi)\omega_{II}$, проинтегрируем:

$$\int_0^{\varphi_p} d\varphi \approx J_{II} \int_{\omega_{II \max}}^{\omega_{II \min}} \omega_{II} d\omega_{II} / (c - b\omega_{II}),$$

$$\varphi_p = J_{II} \int_{\omega_{II \max}}^{\omega_{II \min}} \left[\frac{c}{b(c - b\omega_{II})} - \frac{1}{b} \right] d\omega_{II} = J_{II} \left[-\frac{c}{b^2} \ln(c - b\omega_{II}) - \frac{\omega_{II}}{b} \right]_{\omega_{II \max}}^{\omega_{II \min}} =$$

$$= J_{II} \left[\frac{\omega_{II \max} - \omega_{II \min}}{b} + \frac{c}{b^2} \ln \frac{c - b\omega_{II \max}}{c - b\omega_{II \min}} \right],$$

откуда

$$J_{II} = \frac{\varphi_p}{\frac{\omega_{II \max} - \omega_{II \min}}{b} + \frac{c}{b^2} \ln \frac{c - b\omega_{II \max}}{c - b\omega_{II \min}}}, \quad (4.28)$$

где $c = a - M_p$.

При определении постоянной составляющей приведенного момента инерции для таких машин нужно учитывать два противоположных условия. За время рабочего хода двигатель с $J_{II}^I = \text{const}$ должен успеть преодолеть значительную нагрузку, что связано с потерей скорости, причем скорость падает тем быстрее, чем меньше момент инерции J_{II}^I . Во время холостого хода, наоборот, скорость восстанавливается тем быстрее, чем меньше момент инерции J_{II}^I . Поэтому для рабочего хода желательно иметь большое значение J_{II}^I , а для холостого хода — малое.

Для холостого хода пределы интегрирования обратные — от $\omega_{\text{пр min}}$ до $\omega_{\text{пр max}}$:

$$a - b\omega_{\text{п}} - M_{\text{х}} = J_{\text{п}} \frac{d\omega_{\text{п}}}{dt} \omega_{\text{п}}, \quad \int_{\varphi_{\text{р}}}^{2\pi} d\varphi = J_{\text{п}} \int_{\omega_{\text{п min}}}^{\omega_{\text{п max}}} d\omega_{\text{п}} / (c_1 - b\omega_{\text{п}}),$$

откуда

$$J_{\text{п}} = \frac{\varphi_{\text{х}}}{\frac{\omega_{\text{п min}} - \omega_{\text{п max}}}{b} + \frac{c_1}{b^2} \ln \frac{c_1 - b\omega_{\text{п min}}}{c_1 - b\omega_{\text{п max}}}}, \quad (4.29)$$

где $c_1 = a - M_{\text{х}}$.

Уравнения (4.28) и (4.29) содержат три неизвестных — $J_{\text{п}}$, $\omega_{\text{п min}}$ и $\omega_{\text{п max}}$. Задаваясь величиной $\omega_{\text{п min}}$, можно найти $\omega_{\text{п max}}$ и $J_{\text{п}}$, а затем необходимый момент инерции маховика $J_{\text{м}} = J_{\text{п}} - J_{\text{п}}^{\text{I}}$. При этом, как было отмечено выше, необходимо, чтобы удовлетворялись условия $\omega_{\text{д min}} > \omega_{\text{д доп}}$ и $\omega_{\text{д max}} < \omega_{\text{дс}}$.

Однако такой путь является затруднительным. Поэтому удобнее определять $J_{\text{п}}$ по формуле (4.28), соответствующей рабочему ходу (при этом предварительно следует принять значения $\omega_{\text{п min}}$ и $\omega_{\text{п max}}$), а затем необходимо проверить, сможет ли на угле поворота $\varphi_{\text{х}}$, соответствующему холостому ходу, восстановиться принятая максимальная угловая скорость начального звена $\omega_{\text{п max}}$. Для такой проверки следует по формуле (4.29) найти величину приведенного момента инерции $J_{\text{пх}}$, при котором во время холостого хода будет происходить принятый перепад скорости. Если эта величина окажется больше величины $J_{\text{п}}$, вычисленной по формуле (4.28) и обеспечивающей этот перепад скорости при рабочем ходе, то решение задачи о подборе момента инерции $J_{\text{п}} = \text{const}$ по нагрузке рабочего хода можно будет считать удовлетворительным, поскольку в этом случае угловая скорость начального звена восстановится еще до окончания холостого хода. В противном случае придется выбрать двигатель большей мощности.

Как было оговорено выше, рассмотренный аналитический метод расчета для машин ударного действия применим в том случае, когда приведенный момент инерции исполнительного механизма является постоянным. При переменном приведенном моменте инерции его изменения часто оказываются весьма малыми по сравнению с искомой величиной момента инерции $J_{\text{п}}^{\text{I}} = \text{const}$ и не оказывают на нее существенного влияния. Поэтому и в этом случае допустимо считать $J_{\text{п}}$ постоянным и равным некоторому среднему значению.

4.6.3. Пример определения энергомассовых характеристик привода штамповочного пресса с асинхронным электродвигателем переменного тока

График $M_{\text{пр}}^c(\varphi)$ изображен на рис.4.10. Средняя частота вращения кривошипа $n_{\text{ср}} = 70$ об/мин, среднее значение приведенного момента инерции механизма $J'_{\text{пр ср}} = 1$ кг·м².

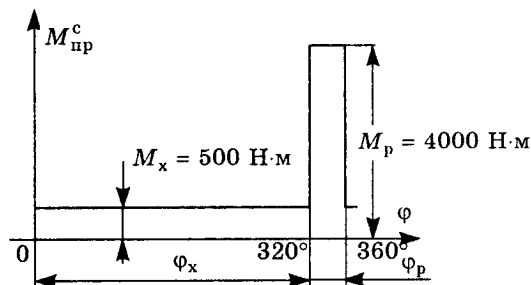


Рис.4.10. Зависимость $M_{\text{пр}} = f(\varphi)$ для штамповочного пресса

1) Работа сил технологического сопротивления пресса за цикл

$$A = 500 \frac{320\pi}{180} + 400 \frac{40\pi}{180} = 5585 \text{ Дж.}$$

Время цикла (одного оборота кривошипа)

$$t_{\text{ц}} = \frac{60}{n_{\text{ср}}} = \frac{60}{70} = 0,857 \text{ с.}$$

Средняя потребляемая мощность

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t_{\text{ц}}} = \frac{5585}{0,857} = 6517 \text{ Вт.}$$

Выбираем трехфазный асинхронный электродвигатель так, чтобы его номинальная мощность $P_{\text{дн}}$ была на 15–25% больше $P_{\text{ср}}$. По каталогу принимаем двигатель АОС2-52-6 со следующими данными: $P_{\text{дн}} = 8,3$ кВт, номинальная частота вращения $n_{\text{дн}} = 890$ об/мин, синхронная частота вращения $n_{\text{дс}} = 1000$ об/мин, $\lambda = M_{\text{д max}}/M_{\text{дн}} = 2,2$; маховой момент ротора $mD^2 = 0,44$ кг·м².

Номинальная угловая скорость ротора

$$\omega_{\text{дн}} = \frac{\pi n_{\text{дн}}}{30} = \frac{890\pi}{30} = 93,20 \text{ рад/с.}$$

Синхронная угловая скорость ротора

$$\omega_{\text{дс}} = \frac{\pi n_{\text{дс}}}{30} = \frac{1000\pi}{30} = 104,7 \text{ рад/с.}$$

Номинальный момент двигателя

$$M_{\text{дн}} = \frac{P_{\text{дн}}}{\omega_{\text{дн}}} = \frac{8300}{93,20} = 89,06 \text{ Н·м.}$$

Критический момент двигателя

$$M_{дк} = \lambda M_{дн} = 2,2 \cdot 89,06 = 195,9 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Передаточное отношение передачи между валом электродвигателя и кривошипом

$$i_p = \frac{n_{дн}}{n_{ср}} = \frac{890}{70} = 12,71.$$

Используем линейно-аппроксимированную механическую характеристику электродвигателя (рис.4.7):

$$M_{д0} = M_{дн} \frac{\omega_{дс}}{\omega_{дс} - \omega_{дн}} = 89,06 \frac{104,7}{104,7 - 93,2} = 809,6 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$k = \frac{M_{дн}}{\omega_{дс} - \omega_{дн}} = \frac{89,06}{104,7 - 93,2} = 7,731 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с},$$

$$a = M_{д0} - i_p = 809,6 \cdot 12,71 = 10290 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$b = k i_p^2 = 7,731 \cdot 12,71^2 = 1249 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

Таким образом,

$$M_{д} = M_{д0} - k \omega_{д} = 809,6 - 7,731 \omega_{д},$$

$$M_{п}^д = M_{д} i_p = a - b \omega_{пр} = 10290 - 1249 \omega_{пр}.$$

Минимально допустимая угловая скорость ротора определится по формуле

$$\omega_{д доп} = \frac{M_{д0} - M_{д доп}}{k} = \frac{809,6 - 0,8 \cdot 195,9}{7,731} = 84,45 \text{ рад/с}.$$

Величину максимальной угловой скорости кривошипа $\omega_{пр max}$ выбираем так, чтобы соответствующий ей минимальный приведенный движущий момент $M_{пр min}^д$ был больше приведенного момента сил сопротивления на холостом ходу M_x . При $M_{пр}^д = M_x = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ находим

$$\omega_{пр} = \frac{10290 - 500}{1249} = 7,838 \text{ рад/с}.$$

Принимаем меньшее значение: $\omega_{пр max} = 7,75 \text{ рад/с}$. Величину минимальной угловой скорости кривошипа $\omega_{пр min}$ выбираем так, чтобы интервалы изменения скорости по отношению к среднему значению $\omega_{пр ср}$ были одинаковы:

$$\omega_{пр ср} = \frac{\pi n_{ср}}{30} = \frac{70\pi}{30} = 7,330 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{пр min} = 7,33 - (7,75 - 7,33) = 6,91 \text{ рад/с}.$$

При принятых значениях $\omega_{пр min}$ и $\omega_{пр max}$ коэффициент неравномерности движения механизма имеет значение

$$\delta = \frac{7,75 - 6,91}{7,33} = 0,11.$$

Проверяем выполнение условий $\omega_{\text{д min}} > \omega_{\text{д доп}}$ и $\omega_{\text{д max}} < \omega_{\text{дс}}$:

$$\omega_{\text{д min}} = \omega_{\text{п}}^{\text{min}} i_{\text{р}} = 6,91 \cdot 12,71 = 87,83 \text{ рад/с,}$$

$$\omega_{\text{д max}} = \omega_{\text{п}}^{\text{max}} i_{\text{р}} = 7,75 \cdot 12,71 = 98,50 \text{ рад/с.}$$

Так как $87,83 > 84,45$ и $98,50 < 105,7$, то указанные условия выполняются.

По формуле (4.28) определяем приведенный момент инерции $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}^{\text{I}} = \text{const}$:

$$J_{\text{пр}} = \frac{\frac{40\pi}{180}}{\frac{7,75 - 691}{1249} + \frac{6290}{1249^2} \ln \frac{6290 - 1249 \cdot 7,75}{6290 - 1249 \cdot 6,91}} = 322,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

В величину $J_{\text{пр}} = 322,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ входят искомый момент инерции $J_{\text{п}}^{\text{I}}$, а также заданная величина $J'_{\text{пр ср}}$ и приведенный момент инерции ротора электродвигателя $J_{\text{р пр}}$.

Момент инерции ротора

$$J_{\text{р}} = \frac{mD^2}{4} = \frac{0,44}{4} = 0,11 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Приведенный к валу кривошипа момент инерции ротора

$$J_{\text{р пр}} = J_{\text{р}} i_{\text{р}}^2 = 0,11 \cdot 12,71^2 = 17,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Таким образом, постоянная составляющая $J_{\text{п}}^{\text{I}}$ определяется из соотношения

$$J_{\text{п}}^{\text{I}} = J_{\text{пр}} - J'_{\text{пр ср}} - J_{\text{р пр}} = 322,4 - 1 - 17,8 = 303,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

В данном случае $J_{\text{п}}^{\text{I}} = J_{\text{м}}$ представляет собой необходимый момент инерции маховика, установка которого обеспечит заданный коэффициент неравномерности движения.

Проверим, сможет ли за время, соответствующее углу поворота холостого хода $\varphi_{\text{х}}$, восстановиться максимальная угловая скорость кривошипа $\omega_{\text{пр max}}$. По формуле (4.28) находим

$$J_{\text{пр х}} = \frac{\frac{320\pi}{180}}{\frac{6,91 - 7,75}{1249} + \frac{6790}{1249^2} \ln \frac{6790 - 1249 \cdot 6,91}{6790 - 1249 \cdot 7,75}} = 396,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Поскольку $J_{\text{пр х}} > J_{\text{пр}}$, то при установке маховика, рассчитанного по нагрузке рабочего хода, угловая скорость кривошипа восстановиться еще до окончания холостого хода.

2) Используем упрощенный способ определения $J_{\text{м}}$. В соответствии с выражением (4.30) находим значения $M_{\text{пр min}}^{\text{д}}$ (при $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{пр max}}$)

и $M_{\text{пр max}}^{\text{д}}$ (при $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{пр min}}$):

$$M_{\text{пр min}}^{\text{д}} = 10290 - 1249 \cdot 7,75 = 610,2 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_{\text{пр max}}^{\text{д}} = 10290 - 1249 \cdot 6,91 = 1659 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Величине суммарной работы $\sum A^*$ соответствует площадь трапеции (рис.4.11). Следовательно,

$$\sum A^* = \frac{(4000 - 610)^2 + (4000 - 1659)}{2} \cdot \frac{40\pi}{180} = 2000 \text{ Дж},$$

а момент инерции маховика равен

$$J_{\text{м}} = J_{\text{пр}} - J'_{\text{пр}} = \frac{\sum A^*}{\delta\omega_{\text{пр ср}}^2} - J'_{\text{пр ср}} - J_{\text{р пр}} = \frac{2000}{0,11 \cdot 7,33^2} - 1 - 17,8 = 319 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

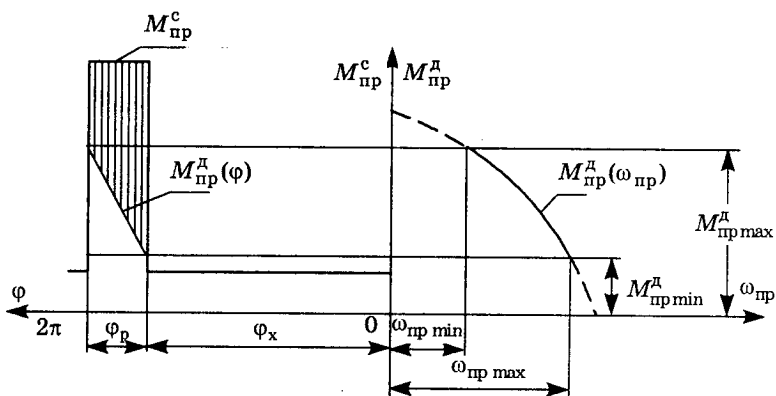


Рис.4.11. К определению величины суммарной работы $\sum A^*$ сил технологического сопротивления

Воспользуемся аналитическим выражением $M_{\text{д}} = f(\omega)$ механической характеристики асинхронного электродвигателя. Предварительно находим номинальное скольжение при $n_{\text{д}} = n_{\text{дн}}$:

$$s_{\text{н}} = \frac{n_{\text{дс}} - n_{\text{дн}}}{n_{\text{дс}}} = \frac{1000 - 890}{1000} = 0,11,$$

критическое скольжение

$$s_{\text{кр}} = s_{\text{н}} \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) = 0,11 \left(2,2 + \sqrt{2,2^2 - 1} \right) = 0,4576.$$

Скольжения при угловых скоростях ротора $\omega_{\text{д max}}$ и $\omega_{\text{д min}}$ находим из выражений

$$s_{\text{max}} = \frac{n_{\text{дс}} - n_{\text{д max}}}{n_{\text{дс}}} = \frac{104,7 - 98,5}{104,7} = 0,05922,$$

$$s_{\min} = \frac{n_{\text{дс}} - n_{\text{дкр}}}{n_{\text{дс}}} = \frac{104,7 - 87,83}{104,7} = 0,1611.$$

Определяем $M_{\text{д}}^{\min}$ и $M_{\text{д}}^{\max}$:

$$M_{\text{д}}^{\min} = \frac{2195,9}{\frac{0,05922}{0,4576} + \frac{0,4576}{0,05922}} = 49,87 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_{\text{д}}^{\max} = \frac{2195,9}{\frac{0,1611}{0,4576} + \frac{0,4576}{0,1611}} = 122,7 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Тогда приведенные моменты сил движущих определяются как

$$M_{\text{пр min}}^{\text{д}} = 49,87 \cdot 12,71 = 633,8 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_{\text{пр max}}^{\text{д}} = 122,7 \cdot 12,71 = 1560 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Таким образом,

$$\sum A^* = \frac{(4000 - 633)^2 + (4000 - 1560)^2}{2} \cdot \frac{40\pi}{180} = 2027 \text{ Дж}$$

и

$$J_{\text{м}} = \frac{2027}{0,11 \cdot 7,33^2} - 1 - 17,8 = 324,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Упрощенный способ дает завышенные результаты.

3) Определим величину момента инерции маховика без учета механической характеристики электродвигателя, то есть полагая, что в течение всего цикла установившегося движения приведенный движущий момент остается постоянным.

Так как работа за цикл $A = 5585 \text{ Дж}$ (см. выше), то

$$M_{\text{пр}}^{\text{д}} = \frac{5585}{2\pi} = 888,9 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

При $M_{\text{пр}}^{\text{д}} = \text{const}$ работе $\sum A^*$ соответствует площадь прямоугольника:

$$\sum A^* = (4000 - 888,9) \frac{40\pi}{180} = 2172 \text{ Дж}.$$

Следовательно,

$$J_{\text{м}} = \frac{2172}{0,11 \cdot 7,33^2} - 1 - 17,8 = 348,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если не учитывать изменяемости движущего момента, результат получается еще более завышенным.

4.7. Механические характеристики гидравлического привода

4.7.1. Моделирование движения звеньев гидропривода

На рис.4.12 представлена схема типового гидропривода, применяемого в машинах-автоматах, который работает следующим образом. Поршень гидродвигателя (гидроцилиндра) 1 перемещается в цилиндре под действием жидкости. Перемещение жидкости осуществляется при помощи насоса 2. Направление

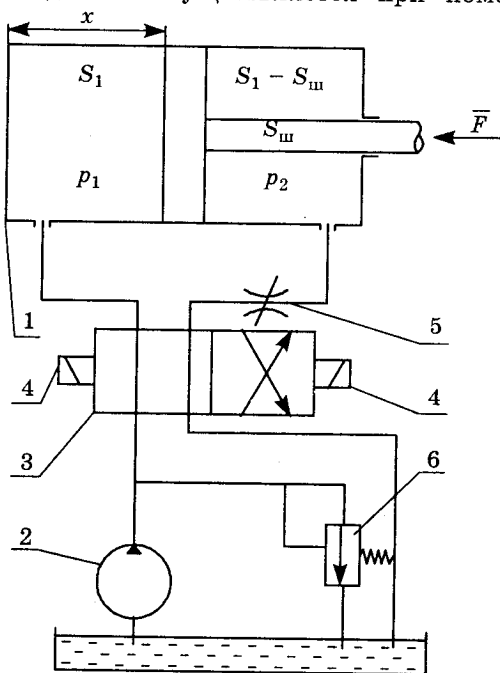


Рис.4.12. Схема гидропривода:
 1 — гидродвигатель (гидроцилиндр),
 2 — насос, 3 — двухпозиционный
 четырехканальный распределитель,
 4 — регулируемый дроссель
 (тормозное устройство), 5 — переливной
 клапан, 6 — электромагнитное реле

движения поршня изменяется с помощью двухпозиционного распределителя 3. Перемещение подвижной части распределителя (вправо, влево) осуществляется путем попеременного включения двух электромагнитов 4. Торможение осуществляется с помощью регулируемого дросселя 5, который при рабочем ходе поршня включен в сливную линию. Переливной клапан 6 служит для слива в бак части жидкости, подаваемой насосом, при уменьшении скорости поршня. Пружина клапана подобрана так, что он открывается по достижении определенного давления.

Регулируемый дроссель (рис.4.13) представляет собой цилиндр и поршень. Относительное смещение их приводит к изменению площади проходного сечения жидкости. При уменьшении площади проходного сечения увеличивается давление жидкости в сливной полости гидроцилиндра, за счет чего и обеспечивается торможение. Перемещение z подвижной части дросселя (золотника) может быть задано функцией $z = f(t)$ времени t или функцией $z = f(x)$ перемещения поршня x . В случае $z = f(t)$ золотник тормозного устройства имеет независимый привод, то есть

осуществляется торможение (уменьшение скорости). Во втором случае $z = f(x)$ изменение скорости осуществляется в функции от пути. В этом случае привод золотника осуществляется, например, с помощью кулачков, связанных со штоком гидроцилиндра.

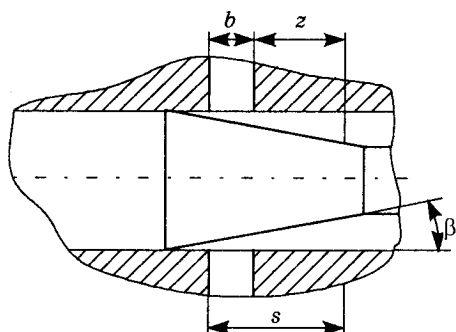


Рис.4.13. Принципиальная схема регулируемого дросселя

Гидродвигатель 1 (рис.4.12) называют объемным, так как преобразование энергии жидкости в механическую энергию поршня происходит при периодическом изменении объема его рабочих полостей. С точки зрения кинематики устройство, представленное на рис.4.12, можно назвать механизмом, который предназначен для преобразования вращательного движения насоса в прямолинейное движение поршня. Как и в механизмах, состоящих из твердых тел, преобразование движения с использованием жидкостей или газов подчиняется тем же законам механики. Уравнения движения звеньев механизмов представляют собой также дифференциальные уравнения второго порядка, из которых находится зависимость обобщенной координаты от времени. Отличие состоит в том, что в эти уравнения входят параметры, зависящие от давления жидкости в различных частях и промежуточных устройствах.

Приняв за обобщенную координату перемещение поршня x (рис.4.12), получим уравнение, описывающее ее изменение при постоянной приведенной массе m движущихся частей (звеньев) привода, в следующем виде:

$$m\ddot{x} = F_{\Pi}^A - F_{\Pi}^C, \quad (4.30)$$

где F_{Π}^A, F_{Π}^C — приведенные движущая сила и сила сопротивления.

Приведенные движущая сила и сила сопротивления определяются при движении поршня слева направо из соотношений

$$\begin{aligned} F_{\Pi}^A &= p_1 S_1, \\ F_{\Pi}^C &= F_T + p_2 (S_1 - S_{\text{шт}}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь p_1, p_2 — избыточные давления в напорной (бесштоковой) полости и сливной полости гидроцилиндра (рис.4.12);

$S_1, S_1 - S_{\text{шт}}$ — площади, воспринимающие давление жидкости в направлении движения;

$S_{\text{шт}}$ — площадь поперечного сечения штока.

Давление p_1 зависит от давления на выходе из насоса p_n и потерь давления в напорной линии Δp_1 :

$$p_1 = p_n - \Delta p.$$

Давление p_2 зависит от потерь давления в сливной линии Δp_2 и потерь давления в тормозном устройстве Δp_T :

$$p_2 = \Delta p_2 + \Delta p_T. \quad (4.33)$$

Потери давления в трубопроводах и распределителе 3 зависят от скорости течения жидкости, которые при постоянном расходе пропорциональны величине скорости поршня v . Эта зависимость имеет вид [23]

$$\Delta p_1 = A_1 v + B_1 v^2, \quad (4.34)$$

$$\Delta p_2 = A_2 v + B_2 v^2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные коэффициенты, определяемые для конкретного гидропривода по табличным значениям для типовых гидроприводов либо на основании экспериментальных данных.

Потери давления в тормозном устройстве

$$\Delta p_T = B_T \frac{v^2}{f_T^2}, \quad (4.35)$$

где B_T — экспериментальный коэффициент;

f_T — переменная площадь проходного сечения в тормозном устройстве. При золотнике с прямоугольными канавками (рис. 4.13) площадь f_T определяется в зависимости от числа канавок и их ширины b , длины s скошенной части и угла β наклона:

$$f_T = nb(s - z)\sin\beta.$$

С учетом соотношений (4.31) — (4.35) уравнение (4.30) примет вид

$$m\ddot{x} = \left(P_n - A_1 v - B_1 v^2 \right) S_1 - F_T - \left(A_2 v + B_2 v^2 + B_T \frac{v^2}{f_T^2} \right) (S_1 - S_n).$$

4.7.2. Характеристики гидравлического привода

Механическая характеристика гидропривода даёт зависимость установившейся скорости (угловой или линейной) на выходе привода от приложенной к нему нагрузки при постоянном значении входной координаты привода. Под входной координатой, например, понимается линейное смещение x золотника распределительного устройства. Наряду с абсолютным значением входной координаты используется безразмерная относительная координата, например, $x^* = x/x_{\max}$, изменяющаяся в пределах от +1 до -1. Механическая характеристика определяется свойствами силовых элементов привода.

Гидравлический привод имеет семейство механических характеристик, каждая из которых соответствует лишь одному из множества фиксированных значений входной координаты. Это семейство ограничивается двумя предельными характеристиками $x^* = 1$ и $x^* = -1$, которые обычно и рассматриваются в энергетических расчетах.

В общем виде семейство механических характеристик для гидравлического привода вращательного движения описывается следующим уравнением [26]:

$$\omega = x^* \omega_{xx} + \beta M,$$

где ω — угловая скорость выходного вала гидродвигателя;

ω_{xx} — скорость гидродвигателя при холостом ходе;

x^* — относительная входная координата;

$\beta = \partial\omega/\partial M$ — коэффициент наклона (эластичность) механической характеристики привода (обычно $\beta < 0$);

M — момент нагрузки на приводе.

Уравнение (4.31) справедливо при

$$\frac{dx^*}{dt} \equiv 0, \quad \frac{d\omega}{dt} \equiv 0, \quad M_{\Pi} \geq M \geq -M_{\Pi},$$

где M_{Π} — максимальный момент, развиваемый приводом, который называется также пусковым или тормозным моментом, имеющий место при $\omega = 0$, $x^* = \pm 1$.

Параметр β , характеризующий общее изменение скорости на выходе привода под нагрузкой, может быть записан в виде суммы

$$\beta = \beta_y + \beta_{гд},$$

где β_y — коэффициент наклона механической характеристики управляющей части привода (насоса переменной производительности или дроссельного гидроусилителя), приведенный к валу гидродвигателя и равный

$$\beta_y = \frac{dQ}{d\Delta p} \cdot \frac{1}{q^2}.$$

Здесь $\frac{dQ}{d\Delta p}$ — изменение расхода Q , подаваемого к гидродвигателю, под действием перепада давлений Δp , характеризующего нагрузку на гидродвигатель с удельной подачей q на один радиан поворота его вала;

$\beta_{гд}$ — коэффициент наклона механической характеристики гидродвигателя, равный

$$\beta_{гд} = \frac{k_y}{q^2},$$

где k_y — коэффициент утечки, характеризующий герметичность гидродвигателя.

В приводе с объемным управлением коэффициент β_y определяется герметичностью регулируемого насоса и изменением скорости приводного электродвигателя под нагрузкой.

В гидравлическом приводе с дроссельным управлением вид механических характеристик определяется в основном дроссельным гидроусилителем. Для системы с постоянным давлением питания p_0 на входе в гидроусилитель коэффициент β_y наклона механической характеристики гидроусилителя можно найти из уравнения расхода, подаваемого к гидродвигателю в установившемся режиме движения с постоянными нагрузкой и скоростью:

$$Q = x^* Q_{xx} \sqrt{1 - \frac{\Delta p_0}{p_0}} - k_{ygy} \Delta p, \quad (4.36)$$

где Q_{xx} — расход на выходе гидроусилителя, соответствующий холостому ходу гидродвигателя;

k_{ygy} — коэффициент утечек гидроусилителя.

С учетом выражения $\frac{dQ}{d\Delta p}$, полученного путем дифференцирования (4.36), формулу (4.37) представим в виде

$$\beta_y = -\frac{1}{q^2} \left(\frac{x^* Q_{xx}}{2p_0 \sqrt{1 - \Delta p_0/p_0}} + k_{ygy} \right) = -\frac{x^* \omega_{xx}}{2M_{\Pi} \sqrt{1 - M/M_{\Pi}}} - \frac{k_{ygy}}{q^2}. \quad (4.37)$$

На рис.4.14 показаны типовые механические характеристики двух гидравлических приводов (кривые 1, 2): с дроссельным управлением $p_0 = \text{const}$ и с объемным управлением. Соответственно пусковые моменты M_{Π} и скорости холостого хода ω_{xx} у обоих приводов одинаковы. На рис.4.14 приведены также зависимости выходной мощности $P_{\text{вых}}$ приводов от нагрузки M на них (кривые 3, 4).

Для привода с объемным управлением зависимость развиваемой приводом мощности $P_{\text{вых}}$, называемой также располагаемой мощностью [26], от момента определяется формулой

$$P_p = \omega M = M \left[\omega_{xx} + M(\beta_y + \beta_{гд}) \right]. \quad (4.38)$$

Максимум мощности имеет место при значении момента, соответствующего началу срабатывания предохранительных клапанов. Если учесть высокий КПД гидравлического привода с объемным управлением (участок $A - A'$ механической характеристики почти горизонтален) и большую крутизну нисходящего участка характеристики (участок $A' - A''$ почти вертикален), то при энергетическом расчете привода этого типа можно определить максимальную располагаемую мощность по формуле

$$P_{p \max} = \omega_{xx} M_{\Pi}. \quad (4.39)$$

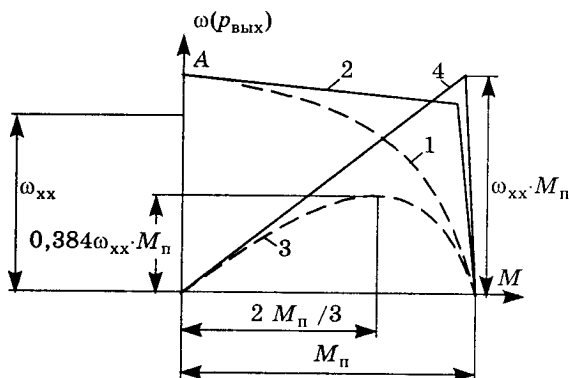


Рис.4.14. Зависимости $\omega = f(M)$ гидропривода с дроссельным управлением (кривая 1) и объемным управлением (кривая 2), а также выходной мощности $P_{\text{вых}} = f(M)$ гидропривода с дроссельным (кривая 3) и объемным управлением (кривая 4)

Номинальная мощность, развиваемая приводом без перегрева при длительных режимах работы, связана с максимальной мощностью соотношением

$$P_{\text{р ном}} \approx 2P_{\text{р max}}/3. \quad (4.40)$$

Для гидродвигателя с дроссельным управлением располагаемая мощность, соответствующая работе привода на предельной механической характеристике, определяется зависимостью

$$P_{\text{р}} = \omega_{\text{хх}} M = \sqrt{1 - \frac{M}{M_p}} + (\beta_{\text{у}} + \beta_{\text{гд}}) M^2. \quad (4.41)$$

Если пренебречь изменением скорости из-за утечек в гидродвигателе и гидроусилителе, что допустимо при максимальных открытиях золотника, то максимум мощности имеет место при $M = 2M_p/3$, то есть

$$P_{\text{р max}} = 0,384\omega_{\text{хх}} M_p. \quad (4.42)$$

Аналогичные зависимости справедливы для привода с поступательным движением, если в формулах (4.36) — (4.42) угловую скорость ω заменить линейной скоростью v , момент M — силой F и удельную подачу q — эффективной площадью поршня $S_{\text{эф}} = S_{\text{ц}} - S_{\text{ш}}$, то есть без учета площади $S_{\text{ш}}$ поперечного сечения штока (см. рис.4.12). Тогда уравнение семейства механических характеристик для гидропривода поступательного движения запишется в виде [26]

$$v = x^* v_{\text{хх}} + \beta F,$$

где $v_{\text{хх}}$ — скорость поршня (штока) привода без нагрузки;

F — усилие на штоке гидроцилиндра.

Развиваемая приводом мощность определится по формуле [26]

$$P_0 = vF = F[v_{xx} + F(\beta_y + \beta_{гд})],$$

а максимальная мощность

$$P_{p\max} = v_{xx}F_{п},$$

где $F_{п}$ — максимальное усилие на штоке (управление объемное).

4.7.3. Последовательность расчета для аналитического представления механической характеристики гидропривода

Для примера представим перечень основных технических характеристик и их размерностей для аксиально-поршневых насосов и гидромоторов постоянной и переменной производительности [26]:

- расход гидромотора и подача насоса, см³/об (10^{-6} м³/об);
- наибольшая частота вращения вала, об/мин (угловая скорость 1/9,55 рад/с);
- наибольшая производительность насоса и расход гидромоторов, л/мин ($10^{-3}/60$ м³/с);
- момент, развиваемый на валу, Н·м (10 Н·м), при перепаде давления 100 атм (10^7 Па);
- момент инерции вращающихся частей, кг·м²; минимальное время изменения производительности от нуля до максимального значения, с;
- массовые характеристики.

Опишем последовательность расчета для аналитического представления механической характеристики гидравлического привода вращательного движения с дроссельным управлением и постоянным давлением питания на входе в гидроусилитель ($p_0 = \text{const}$).

По известным максимальным значениям выходных параметров (крутящему моменту M_{\max} и угловой скорости ω_{\max}) найдем потребляемую мощность по формуле

$$P_{п} = M_{\max} \cdot \omega_{\max}, \text{ Вт.}$$

Определяем максимальный момент $M_{п}$ на валу гидромотора из выражения [26, с.634], приравняв максимальную мощность P_{\max} гидромотора и мощность $P_{п}$ внешнего потребителя:

$$M_{п} = \frac{2,61P_{п}}{\omega_{xx}},$$

где ω_{xx} — угловая скорость гидромотора без нагрузки, выбирается по справочным данным.

Момент M внешней нагрузки, приведенный к валу гидромотора, всегда должен быть $M < M_{п}$.

Из справочных данных выбираем следующие параметры [26, с.511]:

– расход гидромотора или подача насоса на один оборот вала $2\pi q$, м³/об, где $q = 2\pi q/2\pi$ — удельная подача на один радиан поворота вала,

– наибольшая угловая скорость ω_{xx} выходного вала гидромотора, рад/с;

– наибольший расход Q_{xx} гидромотора (теоретический), м³/с;

– момент M_{Π} , Н·м, развиваемый на валу гидромотора при перепаде давления 10 Па.

Рассчитываем коэффициент $\beta_{гд}$ наклона механической характеристики гидродвигателя:

$$\beta_{гд} = -\frac{k_y}{q^2},$$

где k_y — коэффициент утечек, характеризующий герметичность гидродвигателя, выбирается из справочных данных, м/(Н·рад·с).

Рассчитываем коэффициент β_y наклона механической характеристики дроссельного гидроусилителя, приведенный к валу гидродвигателя:

$$\beta_y = -\frac{x^* \omega_{xx}}{2M_{\Pi} \sqrt{1 - M/M_{\Pi}}} - \frac{k_{yгу}}{q^2},$$

где $x^* \leq 1$ (для предельной характеристики $x^* = 1$);

$k_{yгу}$ — коэффициент утечек гидроусилителя, м⁵/(Н·рад·с).

Находим коэффициент β наклона механической характеристики привода (эластичность):

$$\beta = \beta_y + \beta_{гд}.$$

Определяем механическую характеристику по уравнению

$$\omega = x^* \omega_{xx} + \beta M.$$

Аналогично ведется расчет для гидропривода поступательного движения.

Потребляемая мощность

$$P_{\Pi} = F_{\max} v_{\max},$$

где F_{\max} — максимальное усилие на штоке поршня, Н;

v_{\max} — максимальная скорость перемещения поршня, м/с.

Максимальное усилие F'_{Π} на штоке поршня гидроцилиндра от насоса равно

$$F'_{\Pi} = \frac{M_{\Pi} S_{эф}}{2\pi q},$$

где $S_{\text{эф}}$ — эффективная площадь поршня (разность площадей цилиндра и штока).

Скорость поршня без нагрузок

$$v_{\text{xx}} = \frac{2\pi q\omega_{\text{xx}}}{S_{\text{эф}}}.$$

Механическая характеристика имеет вид

$$v = x^* v_{\text{xx}} + \beta F, \quad F \leq F_{\text{п}}.$$

4.8. Параметры и количественные соотношения механических, энергетических, гидравлических и пневматических явлений, используемые при моделировании движения машин

При моделировании процессов передачи и преобразования энергии в машинах целесообразно распределить все переменные, характеризующие систему на три множества:

1) входные переменные, характеризующие внешние воздействия на входы;

2) переменные состояния (внутренние, промежуточные), совокупность которых характеризует свойства системы;

3) выходные переменные, представляющие собой реакции системы на внешние воздействия, определяемые как отклонение интересующих нас параметров от требуемых (номинальных).

При таком подходе входы, выходы и собственно система, как совокупность механических, электрических, гидравлических и пневматических устройств, подчинены внутренним и внешним связям. В зависимости от решаемой задачи заданными или подлежащими определению могут быть как входные, так и выходные величины.

Обычно для технологических машин задачи анализа и синтеза решаются одновременно, то есть выбирается наиболее рациональная компоновка на основании результатов многовариантного исследования сочетаний двигателя, передаточных и исполнительных механизмов. Синтез на основе такого анализа должен проводиться с учетом как динамических и энергетических критериев качественной оценки работоспособности машины, так и экономической целесообразности достижения точностных параметров и характеристик долговечности. В такой постановке оптимизация с точки зрения ее корректной математической постановки весьма затруднительна или вообще не может быть проведена. Поэтому более рациональным является использование имитационных моделей, позволяющих выявить количественные связи между входными и выходными параметрами системы, при различном сочетании передаточных и исполнительных механизмов. В основу таких численных исследований удобно положить энергетические

особенности передачи (преобразования) мощности двигателя в полезную работу (мощность), необходимую для выполнения конкретной технологической операции. На рис.4.15. представлена схема, поясняющая обобщенное представление преобразования (передачи) мощности $P_{вх} = P_{эл} + P_{г} + P_{пн}$ на входе в виде суммы мощностей электрической $P_{эл}$, гидравлической $P_{г}$ и пневматической $P_{пн}$. На выходе нас интересует чаще всего мощность сил, приложенных к рабочему органу, то есть $P_{вых} = P_{тс} = \bar{F}_{тс} \bar{v}_{ро}$. Так что задача сводится к поддержанию мощности сил $F_{тс}$ технологического сопротивления как некоторой функции $F_{тс} = f(s_{ро})$ перемещения $s_{ро}$ рабочего органа или $F_{тс} = f(t)$ времени t . В зависимости от требований технологического процесса эти функции могут быть ограничены, например, по амплитудным значениям $(P_{вых})_{\min}^{\max}$ или же отклонениям их значений от требуемых (номинальных) по положению или во времени.

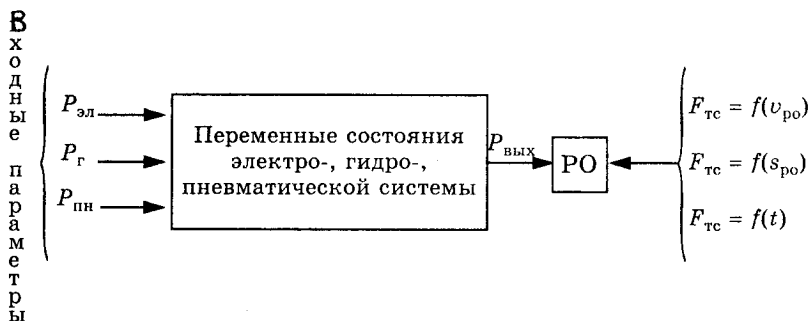


Рис.4.15. Схема обобщенного представления передачи (преобразования) входной мощности $P_{вх} = P_{эл} + P_{г} + P_{пн}$ в мощность на выход $P_{вых}$, затрачиваемую на выполнение технологической операции рабочим органом

С энергетической точки зрения колебание (изменение во времени) выходной переменной ($P_{вых}$) обусловлено двумя причинами. Первая связана с необратимым рассеиванием энергии в большинстве случаев за счет превращения энергии любого вида в тепловую. Вторая объясняется изменением (накоплением и возвращением) кинетической и потенциальной энергий механической системы, электрической и магнитной энергий электромеханической системы, а также гидравлической и пневматической упругостью и инертностью. В большинстве случаев электрическая, гидравлическая и пневматическая энергии используются

для преобразования их в механическую, поэтому все виды потерь и колебания выходной функции $P_{\text{вых}} = f(t)$ должны учитываться в соответствии со схемой, представленной на рис.4.16.

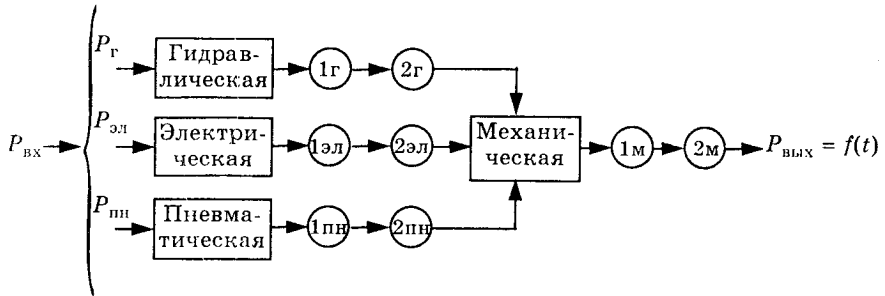


Рис.4.16. Структурные схемы преобразования (передачи) входной мощности $P_{\text{вх}} = P_{\text{эл}} + P_{\text{г}} + P_{\text{пн}}$ в мощность $P_{\text{вых}}$ для выполнения операции и технологического процесса рабочим органом машины:
1 — рассеивание энергии (преобразование в тепловую),
2 — накопление (возвращение) энергии

В общем энергетическом балансе машины обычно наибольшее значение имеет мощность, затрачиваемая на привод главного движения, то есть движения, необходимого для непосредственного выполнения операции. Это движение осуществляется с наибольшей скоростью. Привод главного движения может быть электрическим, гидравлическим или пневматическим, тогда другие источники энергии могут быть использованы для автоматического управления процессом за счет поддержания их переменных состояний в требуемом диапазоне.

Для математического описания состава и структуры той или иной физической системы (точнее, соответствующей ей схемы) обычно используются два типа соотношений:

1) количественные связи, отображающие индивидуальные свойства электрической, механической, гидравлической или пневматической систем безотносительно к возможным соединениям их с другими;

2) уравнения связей, отражающие характер соединения различных компонент в схеме безотносительно к их индивидуальным свойствам.

В качестве компонент выбирают два параметра, характеризующие энергетическое состояние физической системы, например: ток (магнитный поток) — электрическое напряжение; сила (момент) — скорость линейная (угловая); расход жидкости (газа) — перемещение, давление; тепловой поток — разность температур и т.п. Функция, описывающая такие связи, может быть задана аналитическим выражением, графиком или таблицей.

Уравнения связи определяются на основе фундаментальных физических законов, выражающих условие равновесия и непрерывности, например, законов Кирхгофа для электрических цепей, принципа Даламбера для механических систем и т.п.

Как отмечалось ранее, состояние рассматриваемых физических систем с энергетической точки зрения может быть представлено параметрами, отражающими необратимые потери и характеризующими сопротивление, и параметрами, характеризующими накопление (возвращение) потенциальной и кинетической энергий (табл.4.4).

Таблица 4.4

Физические системы		Параметры, характеризующие состояния систем		
		Рассеивание энергии	Накопление (возвращение) энергии	
			потенциальной	кинетической
М е х а н и ч е с к а я	Поступательная	Механическое сопротивление, пропорциональное линейной относительной скорости $\mu_x, \frac{\text{кг}}{\text{с}}$	Линейная упругость $c_x, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	Масса $m, \text{кг}$
	Вращательная	Механическое сопротивление, пропорциональное угловой относительной скорости $\mu_\varphi, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	Угловая (крутильная) упругость (жесткость) $c_\varphi, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$	Тензор инерции $[J_0] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$
Электрическая		Сопротивление R , Ом, или проводимость $\frac{1}{R}, \frac{1}{\text{Ом}}$	Емкость $c, \text{Ф}$	Индуктивность $L, \text{Гн}$
Гидравлическая		Гидравлическое сопротивление	Гидравлическая емкость (резервуар)	Гидравлическая индуктивность
Пневматическая		Пневматическое сопротивление	Пневматическая емкость (резервуар)	Пневматическая индуктивность (инертность)
Тепловая		Тепловая проводимость	Теплоемкость	—

Рассмотрим количественные связи, определяющие энергетические состояния рассматриваемых систем.

Рассеивание энергии. Для механических систем параметры, определяющие рассеивание энергии, в основном связаны с силами

сухого и вязкого трения. Эти параметры подробно рассматривались ранее. Однако в колебательных процессах любой физической природы с гармоническим возмущением вводится понятие полного сопротивления (импеданса). Это связано с удобством векторного представления гармонических величин в векторной форме.

Как известно, всякий вектор $\vec{r}(t) = [r \cos(kt)]\vec{i} + [r \sin(kt)]\vec{j}$ представляет собой гармоническую функцию с амплитудой r и круговой частотой k . Он также может быть представлен в виде комплексного числа в тригонометрической или показательной форме:

$$\vec{r} = r(\cos kt + i \sin kt) = re^{ikt}.$$

Переход от одной формы к другой основан на известной формуле Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Тогда проекции вектора \vec{r} на оси x и y можно представить как вещественную часть и мнимую часть:

$$r_x(t) = x(t) = \operatorname{Re} [re^{ikt}];$$

$$r_y(t) = y(t) = \operatorname{Im} [re^{ikt}].$$

Мнимая часть Im есть коэффициент при i . Это представление удобно тем, что каждому дифференцированию вектора \vec{r} соответствует умножение его длины на k и поворот на 90° против часовой стрелки. В более общем случае, когда

$$\vec{r} = re^{i(kt-\alpha)},$$

вводится понятие комплексной амплитуды с учетом соотношения

$$re^{i(kt-\alpha)} = re^{-i\alpha} e^{ikt} = \vec{r} e^{ikt}.$$

Действительная амплитуда r равна модулю комплексной амплитуды \vec{r} , то есть $r = |\vec{r}|$. Это следует из того, что

$$\vec{r} = re^{-i\alpha} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha).$$

При решении линейных дифференциальных уравнений введение комплексных показательных функции вида $re^{i(kt-\alpha)}$ вместо действительных гармонических функций вида $r \cos(kt - \alpha)$ или $r \sin(kt - \alpha)$ упрощает выкладки и оказывается удобным для сравнения колебательных процессов различной физической природы. Так, если движение рассматриваемой механической системы описывается уравнением $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = F \sin kt$, то введение

комплексной возмущающей силы $\bar{F} = Fe^{ikt}$ дает действительную возмущающую силу $F \sin kt = \text{Im } \bar{F}$. Установившееся движение системы происходит с той же частотой k , но отстает от возмущения на фазовый угол α . Поэтому комплексную координату записывают в виде

$$\bar{x} = xe^{i(kt-\alpha)},$$

а действительное перемещение найдется как

$$x(t) = \text{Im } \bar{x} = x \sin(kt - \alpha).$$

Таким образом, исследование установившегося движения системы сводится к определению комплексной амплитуды перемещения $\bar{x} = xe^{-i\alpha}$, что равносильно нахождению величин

$$x = |\bar{x}| \quad \text{и} \quad \alpha = \arg \bar{x}.$$

Для этого находят первую и вторую производные функции xe^{ikt} по времени (\bar{x} от времени не зависит), подставляют эти величины в первую часть уравнения колебаний вместо x , \dot{x} и \ddot{x} соответственно, а правую часть записывают в виде Fe^{ikt} . Тогда после сокращения на e^{ikt} получим следующее выражение для комплексной амплитуды:

$$\bar{x} = xe^{-i\alpha} = \frac{F}{c + i\mu k - mk^2}.$$

Зная комплексную амплитуду, действительную амплитуду x и фазовый угол α определяют по формулам

$$x = \left| \frac{F}{(c - mk^2) + i\mu k} \right| = \frac{F}{\sqrt{(c - mk^2)^2 + (\mu k)^2}},$$

$$\alpha = -\arg \frac{F}{(c - mk^2) + i\mu k} = \arctg \frac{\mu k}{c - mk^2}.$$

Если возмущающая сила была задана в виде $F \cos kt$, то, учитывая, что $F \cos kt = \text{Re } \bar{F}$, получим $x(t) = \text{Re } x = x \cos(kt - \alpha)$.

Трехчлен $r_M = C + i\mu k - mk^2$ называют полным импедансом колебательной системы, а величины $(-mk^2)$, $i\mu k$ и C — импедансами элементов массы, демпфирования и упругости. Таким образом, импеданс C элемента упругости равен упругой постоянной этого элемента, импеданс элемента демпфирования равен коэффициенту μ затухания, умноженному на ik , импеданс элемента массы

равен массе m , умноженной на $(-k^2)$. Полный механический импеданс (полное механическое сопротивление) системы равен сумме импедансов ее элементов. Изменение переменного тока i во времени t протекает по синусоидальному закону, то есть $i = I_{\max} \sin(\omega t + \psi)$ или напряжение $U = U_{\max} \sin(\omega t + \psi)$. Угол ψ сдвига фаз двух синусоидальных величин — угол между их радиусами-векторами для любого момента времени. Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$, где T — время полного цикла изменения синусоидальной величины. Среднее (за полпериода) значение переменного тока (или напряжения)

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_{\max} = 0,637 I_{\max}, \quad U_{\text{ср}} = 0,637 U_{\max}.$$

Для цепи такого переменного тока при последовательном соединении трех сопротивлений закон Ома имеет вид

$$I = \frac{U}{r_{\text{эл}}^{\text{посл}}} = \frac{U}{\sqrt{r_a^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}},$$

где r_a — активное сопротивление, Ом;

ωL — индуктивное сопротивление, Ом;

$1/\omega c$ — емкостное сопротивление, Ом;

L — индуктивность, Гн;

c — емкость, Ф;

ω — частота, рад/с.

Величину $r_{\text{эл}}^{\text{посл}}$ называют коэффициентом сопротивления (импедансом), а величину r_a — активным сопротивлением. При $\omega L = 1/\omega c$ кажущееся сопротивление $r_{\text{эл}}^{\text{посл}}$ имеет наименьшее значение, а ток в цепи — наибольшее. Индуктивность L в цепи переменного тока действует аналогично сопротивлению, включенному в цепь, то есть уменьшает силу тока. Переменный ток в цепи с индуктивностью отстает на 90° по фазе от приложенного направления. Емкость в цепи переменного тока пропускает ток (в отличие от постоянного). Ток в конденсаторе опережает напряжение на 90° . При последовательном соединении сопротивления r_a , ωL и $1/\omega c$ дают полное сопротивление $r_{\text{эл}}^{\text{посл}}$. Угол сдвига фаз между током и напряжением определяется из соотношений

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{r_a}, \quad \cos \psi = \frac{r_a}{r_{\text{эл}}}.$$

При параллельном включении трех сопротивлений кажущееся сопротивление равно

$$r_{\text{эл}}^{\text{пар}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_a^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega c\right)^2}}.$$

При этом сдвиг фаз определяется соотношением

$$\text{tg}\psi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega c\right).$$

При $\frac{1}{\omega L} = \omega c$ кажущееся сопротивление $r_{\text{эл}}^{\text{пар}}$ имеет максимальное значение, а $\psi = 0$.

Для количественной оценки сопротивления переменного тока вводят понятие эффективного или действующего его значения. Это такое значение постоянного тока $I_{\text{эл}}$, который за промежуток времени, равный одному периоду, выделяет в сопротивлении такое же количество тепла, как и переменный:

$$I_{\text{э}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = 0,707I_{\text{max}},$$

$$U_{\text{э}} = 0,707U_{\text{max}}.$$

При расчете цепей переменного тока удобно оперировать проводимостями. Полная проводимость цепи

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_p}\right)^2},$$

где $\frac{1}{r_a} = r \cos(\omega t)$ и $\frac{1}{r_p} = r \sin(\omega t)$ — активная и реактивная проводимости.

В случае представления векторных величин в комплексной форме следует иметь в виду, что их аналогия распространяется только на операции сложения и вычитания. Умножение комплексных чисел и умножение векторов — совершенно различные операции, а делению комплексных чисел в векторной алгебре не соответствует никакая операция.

Рассмотренные примеры полного сопротивления распространяются также на процессы механических колебаний и волн в упругих средах, в частности, и на ультразвуковые колебания, так как в этих случаях все величины измеряются в соответствующих механических единицах: период, частота, длина волны и скорость ее распространения. Импеданс акустический представляет собой

комплексное сопротивление $r_{\text{ак}} = \text{Re } r_{\text{ак}} + \text{Im } r_{\text{ак}}$. Действительная его часть $\text{Re } r_{\text{ак}}$ (активное сопротивление) связана с диссипацией энергии в самой акустической системе и потерями энергии на излучение звука. Мнимая часть $\text{Im } r_{\text{ак}}$ (реактивное акустическое сопротивление) обусловлена реакцией сил инерции (масс) или сил упругости (гибкости). В соответствии с этим реактивное сопротивление бывает инерционным или упругим.

Активное сопротивление r_a электрической цепи определяет соотношение между током $i(t)$ и напряжением

$$U(t) = r_a i_r(t) \text{ или } i_r(t) = \frac{1}{r_a} U_r(t),$$

где $\frac{1}{r_a}$ — активная проводимость.

Магнитная цепь — совокупность тел, предназначенных для сосредоточения магнитного поля в определенной части пространства. Расчет магнитной цепи заключается в определении необходимого числа ампервитков IH для получения заданного потока Φ или магнитной индукции $B_k = \Phi/S_k$. По кривой намагничивания $B = f(H)$ для заданного B_k определяется H_k . Далее подсчитывается необходимое число ампервитков:

$$(IH)_k = H_k l_k.$$

Закон Ома для магнитной цепи имеет вид

$$\Phi = \frac{(IH)_k}{l_k / (\mu_k S_k)}, \text{ Вб,}$$

где $(IH)_k$ — намагничивающая сила, А;

$l_k / (\mu_k S_k) = R_k$ — магнитное сопротивление данного k -го участка.

Потери на гистерезис при перемагничивании ферромагнитных тел определяются по эмпирической формуле [51]. Потери мощности от вихревых токов определяются также по приближенной формуле [51]. Механическое сопротивление отражает превращение механической энергии в тепло. В простейшем случае это превращение определяется величиной вязкого трения, сила которого $F_{\text{соп}}(t)$ пропорциональна линейной скорости $v_{\text{ск}}$ относительного скольжения или угловой скорости $\omega_{\text{ск}}$:

$$F_{\text{соп}}(t) = \mu_s \frac{ds_{\text{отн}}}{dt}, \quad M_{\text{соп}}(t) = \mu_\phi \frac{d\phi_{\text{отн}}}{dt}.$$

Гидравлическое сопротивление определяется потерянными напором $h_{\text{п}}$ — уменьшением удельной энергии потока (ее необратимым переходом в тепло) на участке между выбранными

сечениями, выраженным в метрах столба жидкости. Потери $h_{\text{п}}$ делятся на потери трения или потери по длине $h_{\text{птр}}$, обусловленные тормозящим действием граничных стенок на поток, и местные потери $h_{\text{пм}}$, обусловленные изменениями величины и направления скоростей частиц на коротких участках потока.

Пневматическое сопротивление учитывает рассеивание энергии за счет вязкого трения. Разность давлений $p_r(t)$ при потоке $q_r(t)$ может быть представлена зависимостями

$$p_r(t) = r_{\text{пм}} q_r(t) \text{ или } q_r(t) = \frac{1}{r_{\text{пп}}} p_r(t),$$

где $1/r_{\text{пм}}$ — пневматическое сопротивление;

$r_{\text{пп}}$ — пневматическая проводимость.

Потери энергии газообразной или жидкой среды происходят в соплах (сужающихся устройствах), щелях и различных препятствиях.

Накопление (возвращение) энергии. В электрических цепях емкость рассматривается как накопитель электрической энергии. Заряд $q(t)$ связан с напряжением $U_c(t)$ на линейной емкости соотношением $q(t) = cU_c(t)$, где c — емкость. Ток, проходящий через емкость, выражается как производная заряда по времени:

$$i_c = \frac{dq}{dt} = c \frac{dU_c(t)}{dt};$$

$$U_c(t) = \frac{1}{c} \int i_c(t) dt.$$

Емкость конденсатора определяется отношением величины заряда Q , Кл, каждого из электродов (проводников) к напряжению U , В, между ними:

$$c = \frac{Q}{U}.$$

Энергия электрического поля конденсатора равна

$$A = \frac{Q^2}{2c} = \frac{cU^2}{2}.$$

Индуктивность рассматривается как параметр, накапливающий магнитную энергию. Различают самоиндукцию и взаимную индукцию. Величина ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Здесь L — индуктивность цепи. Она выражается в Гн и представляет собой индуктивность тока цепи, в которой при равномерном изменении тока на 1 А/с возникает ЭДС самоиндукции, равная 1 В. Если два проводника расположены вблизи друг друга

и в одном из них протекает изменяющийся по величине ток, то в другом проводнике появится ЭДС взаимной индукции. Например, ЭДС e_2 взаимной индукции во втором проводнике равна

$$e_2 = -L_{12} \frac{di_1}{dt},$$

где $\frac{di_1}{dt}$ — скорость изменения тока в первом проводнике, А/с;

L_{12} — взаимная индуктивность этих цепей, Гн.

Взаимной индуктивностью в 1 Гн обладают две цепи в том случае, если в одной из них возникает ЭДС в 1 В при равномерном изменении тока в 1 А/с в другой цепи.

Электромагнитная индукция — явление, заключающееся в том, что при изменении магнитного потока Φ , пронизывающего проводящий контур, в последнем наводится (индуцируется) ЭДС.

Количественная связь между наведенной ЭДС и изменением магнитного потока определяется уравнением

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если катушка (проводящий контур) состоит из последовательно соединенных витков, то

$$e = -\frac{d(n\Phi)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Здесь $\psi = n\Phi$ называют потокоцеплением.

Магнитный поток Φ вектора B магнитной индукции сквозь поверхность S определяется выражением

$$\Phi = \int_S B dS_{\perp},$$

где dS_{\perp} — элементарная площадка, нормальная к вектору магнитной индукции. Магнитная индукция определяется выражением

$$B = \frac{F}{l \sin \alpha},$$

где F — сила, действующая на проводник длиной l , обтекаемый током I , помещенный в магнитное поле, характеризующееся интенсивностью (магнитной индукцией) B ;

α — угол между направлением поля и направлением тока в проводнике.

Энергия магнитного поля, отнесенная к 1 см³, равна

$$A_{\text{уд}} = \int_0^B H dB,$$

где $H = B/\mu$, А/с;

$\mu = \mu_r \mu_0$ — магнитная проницаемость, Гн/м;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6}$ — магнитная проницаемость пустоты, Гн/м;

μ_r — относительная магнитная проницаемость данной среды.

Для ферромагнитных тел (железо, чугун, сталь, никель) величина μ_r достигает нескольких тысяч. Если магнитная проницаемость постоянна, то

$$A_{\text{уд}} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Энергия магнитного поля через индуктивность выражается следующим образом: $A = \int_0^L L i di$.

Если индуктивность цепи постоянна и не зависит от протекающего по ней тока, то

$$A = \frac{LI^2}{2}.$$

Работа электрического постоянного тока при неизменяющихся токе и напряжении равна $A = IUt = I^2rt$.

Мощность тока в данном случае $P = UI = I^2r$.

При изменяющихся токе и напряжении $A = \int_0^t U i dt = r \int_0^t i^2 dt$.

Мощность тока в этом случае $P = dA/dt = Ui = i^2r$.

Мощность цепи переменного тока (активная)

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r_a,$$

где φ — угол сдвига фаз между током и напряжением, называемый коэффициентом мощности.

Мощность полная $S = UI$.

Мощность реактивная $\theta = UI \sin \varphi = S \sin \varphi = Ptg \varphi$.

Мощность трехфазной системы при равномерной нагрузке фаз, независимо от способа соединения (звезда или треугольник), равна $P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi$.

Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами, в зависимости от способа соединения, следующие:

соединение звездой — $U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}$, $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$;

соединение треугольником — $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$, $I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}$.

Инертность среды под давлением характеризуется противодействием изменению потока и описывается соотношениями

$$p_L(t) = L \frac{dq_L(t)}{dt} \quad \text{или} \quad q_L(t) = \frac{1}{L} \int p_L(t) dt,$$

где L — пневматическая инертность, функция $p_L(t)$ определяет разность давлений в сечениях при потоке $q_L(t)$.

Инертность среды под давлением заметно сказывается в трубопроводах при существенных изменениях потока во времени.

Упругость идеального газа, заключенного в некотором объеме (камере), определяет изменение концентрации молекул пропорционально изменению давления (предполагается, что изменение давления происходит при постоянной температуре). При таком изотермическом процессе изменение концентрации определяется потоком газа, поэтому имеют место следующие соотношения:

$$q_c(t) = c \frac{dp_c(t)}{dt}, \quad p_c(t) = \frac{1}{c} \int q_c(t) dt,$$

где c — пневматическая упругость;

$p_c(t)$ — давление газа в объеме относительно давления, которое принимается за нулевое (например, относительно атмосферного давления или вакуума).

Между гидравлическими, пневматическими и электрическими системами существует глубокая аналогия. Поток соответствует току, давление — потенциалу, разность давлений — напряжению, избыточная концентрация молекул (по сравнению с условным уровнем) — заряду. Такая же аналогия на уровне энергетических характеристик прослеживается и с механическими системами. Так, уравнение Бернулли

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g}$$

выражает закон сохранения энергии при установившемся движении жидкости. Этот трехчлен представляет собой закон удельной (отнесенной к единице весового расхода) механической энергии потока в данном сечении. Слагаемые напора H (геометрический z , пьезометрический p/γ и скоростной $\alpha v^2/2g$) представляют собой соответственно удельную потенциальную энергию положения z , возможную удельную работу сил давления p/γ и удельную кинетическую энергию потока $\alpha v^2/2g$. При установившемся движении жидкости скорость и давление в каждой точке потока не меняется со временем. Уравнение неразрывности (расхода) имеет вид

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2 = \dots = F v = \text{const},$$

где F — площадь живого сечения (нормального в каждой своей точке направлению движения частиц);

v — средняя скорость в данном сечении.

Это уравнение выражает постоянство вдоль потока расхода Q объема жидкости, проходящего в единицу времени через каждое сечение. Единицы изменения Q могут быть: м³/с, л/с, м³/ч, л/мин и др. Весовой расход

$$G = Q\gamma.$$

Для механических систем особенности накопления и возвращения кинетической энергии отражены в понятиях приведенная масса m_{Π} или приведенный момент инерции J_{Π} . Как известно, эти параметры являются функциями обобщенных координат, поэтому изменение кинетической энергии определяется как изменением обобщенной скорости $v = f(s)$ и $\omega = f(\varphi)$, так и изменением параметров $m_{\Pi} = f(s)$ и $J_{\Pi} = f(\varphi)$. Исходные энергетические и силовые характеристики для определения приведенных сил (моментов) и масс (моментов инерции) приведены в табл. 4.5.

Использование понятий приведенных сил и масс весьма удобно с той точки зрения, что в качестве математических моделей движения машины (звена приведения) могут быть использованы теоремы механики об изменении кинетической энергии, при этом понятие силы как количественной мерки механического движения остается в силе, то есть

$$F_{\Pi} = \frac{d(m_{\Pi}v)}{dt} \text{ или } F_{\Pi} = \frac{ds}{ds} \cdot \frac{d(m_{\Pi}v)}{dt} = \frac{d(m_{\Pi}v^2/2)}{ds},$$

$$M_{\Pi} = \frac{d(J_{\Pi}\omega)}{dt} \text{ или } M_{\Pi} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d(J_{\Pi}\omega)}{dt} = \frac{d(J_{\Pi}\omega^2/2)}{d\varphi}.$$

Преимущества уравнений движения звена приведения машины в дифференциальной или интегральной формах связаны с тем, что все входящие в них параметры J_{Π} , $dJ_{\Pi}/d\varphi$, M_{Π}^d и M_{Π}^c являются функциями обобщенной координаты φ . Это позволяет определить обобщенное ускорение как функцию $\varepsilon = f(\varphi)$, скорость $\omega = f(\varphi)$ и время $t = f(\varphi)$. Без этого этапа исследования движения машины на упрощенной (идеальной) модели не представляется возможным дальнейшее решение задач динамики. Учитывая, что сила \bar{F} в общем случае является функцией радиуса-вектора \bar{r} точки D приложения этой силы, скорости $\bar{v}_D = \dot{\bar{r}}$ этой точки и времени t , можно формулу для вычисления работы переписать в виде

$$A_{D_0 D_1} = \int_{D_0}^{D_1} \bar{F} d\bar{r} = \int_{D_0}^{D_1} \bar{F}(\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_1, t) d\bar{r}.$$

Таблица 4.5

Энергетические характеристики	Механические системы	
	поступательная	вращательная
Количество движения, $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$	$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$	-
Кинетический момент относительно центра O (геометрическая сумма моментов количества движения), $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	-	$\bar{L}_0 = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) = [J_0] \bar{\omega}$
Кинетическая энергия, Дж	$T_s = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$	$T_\varphi = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \bar{L}_0^i = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i [J_0^i] \bar{\omega}_i$
Работа, Дж	$\delta A = \bar{F} d\bar{r} = F ds \cos \left(\widehat{\bar{F} d\bar{r}} \right) =$ $= F_x dx + F_y dy + F_z dz$ $\delta A = \delta A^{(\text{вн})} + \delta A^{(\text{вн})} =$ $= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(\text{вн})} d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(\text{вн})} d\bar{r}_i$ $A = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \bar{F} d\bar{r} = T_{s_{i+1}} - T_{s_i}$	$\delta A = M d\varphi =$ $= \sum_{i=1}^n M_i^{(\text{вн})} d\varphi_i + \sum_{i=1}^n M_i^{(\text{вн})} d\varphi_i$ $A = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} M d\varphi = T_{\varphi_{i+1}} - T_{\varphi_i}$
Мощность, Вт	$P_i = \frac{\delta A}{dt} = \bar{F}_i \bar{v}_i =$ $= \frac{dT_{s_i}}{dt} = \frac{\delta A^{(\text{вн})}}{dt} + \frac{\delta A^{(\text{вн})}}{dt} =$ $= P_i^{(\text{вн})} + P_i^{(\text{вн})}$	$P_i = \frac{\delta A}{dt} = M_i \omega_i = \frac{dT_{\varphi_i}}{dt} =$ $= P_i^{(\text{вн})} + P_i^{(\text{вн})}$
Сила инерции, Н	$\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}, F = \frac{d(mv^2/2)}{ds}$	-
Инерционный момент, Н·м	-	$\bar{M}_0 = \frac{d\bar{L}_0}{dt} = [J_0] \bar{\varepsilon} + (\bar{\omega} \times [J_0] \bar{\omega})$ $M = \frac{d([J_0] \omega^2 / 2)}{d\varphi}$

Задача сводится к вычислению интеграла по аргументу t . Это означает, что, не зная закона движения точки приложения силы $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, то есть не решив предварительно задачу по определению действительных скоростей и ускорений точек приложения сил, действительную работу силы \vec{F} на конечном перемещении определить нельзя. Поэтому важно выделить те силы, работу которых можно вычислить непосредственно по заданным силам и по перемещениям точек их приложения, не зная закона движения точки, на которую действуют эти силы. Это могут быть только постоянные по модулю и направлению силы или силы, зависящие только от положения точки приложения этих сил, то есть от их координат. К таким силам относятся сила тяжести и сила упругости. Работа силы G тяжести равна $A_G = \pm Gh$, где $h = z_k - z_n$ — абсолютное значение разности высот конечного z_k и начального z_n положения точки приложения силы G .

Работа силы тяжести на замкнутом пути равна нулю. Она не зависит ни от длины пути, ни от формы траектории точки.

Работа силы упругости определяется выражением

$$A = -c \frac{\delta^2}{2},$$

где c — коэффициент жесткости пружины,

δ — удлинение пружины.

По отношению к силам тяжести и упругости силы инерции и силы трения занимают особое значение в том плане, что они зависят от закона изменения скоростей их точек приложения. Поэтому при исследовании движения машин следует подходить отдельно к оценке влияния тех или иных сил. Другими словами, следует сформулировать допущение, положенное в основу количественной оценки механического движения, которое и выражается понятием сила (момент). Если, например, машина тихоходная, а подвижные звенья массивные и отличаются податливостью, то можно количественную оценку их механического взаимодействия провести без учета сил инерции, то есть свести задачу к оценке влияния сил веса и сил упругости. Такая задача является наиболее простой. Если же машина быстроходная, а звенья отличаются незначительной массой, то можно не учитывать силы веса и свести задачу к оценке реакций в подвижных соединениях звеньев, находящихся под действием только сил инерции. Необходимость учета влияния сил трения на равномерность движения главного приводного вала, динамические реакции в подвижных соединениях и энергозатраты в любом случае требует особого подхода. Если решается вопрос об автоматическом управлении машины по силе или мощности, то исследование влияния сил трения имеет особое

Таблица 4.6

Физические системы	Кинематические параметры		
Поступательная	Линейная скорость, м/с $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v(s)$	Ускорение касательное, м ² /с $a^{\tau} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = vv' = \ddot{s}$	Путь (длина траектории), м $s_{i+1} - s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$ Время прохождения пути, с $t_{i+1} - t_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds/v(s)$
Вращательная	Угловая скорость, рад/с $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega(\varphi)$	Угловое ускорение, рад/с ² $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega\omega' = \ddot{\varphi}$	Угловой путь, рад $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega(t) dt$ Время отработки угла, с $t_{i+1} - t_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\varphi/\omega(\varphi)$
1-я аналогия	Ток, А $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = i(t)$	Скорость изменения тока, А/с $\dot{q} = \frac{di}{dt}$	Заряд, Кл $q_{i+1} - q_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} i(t) dt$
2-я аналогия	Скорость падения напряжения, В/с $\dot{U} = \frac{dU}{dt} = \dot{U}(t)$	Скорость изменения падения напряжения, В/с ² $\ddot{U} = \frac{d\dot{U}}{dt}$	Падение напряжения, В $U_{i+1} - U_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{U}(t) dt$
Гидравлическая	Средняя скорость в сечении, м/с $v = Q/S$ Q — объемный расход через площадь S	Изменение скорости во времени, м/с ² $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{s} \cdot \frac{dQ}{dt} = v(t)$	Количество жидкости, проходящее через сечение S в единицу времени, м ³ /с, л/с $Q_{i+1} - Q_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$

значение. Здесь прогнозирование энергозатрат на преодоление сил трения в подвижных соединениях является неперменным условием оценки нормальной (без сбоев) работы системы управления в заданном диапазоне изменения сил (мощностей). Это связано с тем, что суммарная сила сопротивления движению изменяется при изменении схем приложения нагрузки или в результате других причин, вызывающих перераспределение давлений в подвижных соединениях. Представляют также интерес скоростные аналогии при моделировании движения электро-гидро-механических систем (табл.4.6).

4.9. Силовые и энергетические характеристики электромеханического привода при разгоне машины

Большинство технологических машин и средств автоматизации работают в режиме "разгон — торможение". Долговечность таких машин, быстродействие, погрешность позиционирования рабочего органа, энергопотребление и другие характеристики во многом зависят от массовых, геометрических и кинематических параметров исполнительных и передаточных механизмов, положенных в их основу. При этом особый интерес представляет оценка влияния вышеперечисленных параметров на этапе схемного проектирования той или иной машины. Имитация процесса разгона машины в данной постановке основана на графическом воспроизведении закона изменения приводного момента $M_{\Pi}^{\Delta} = M_{\Pi}^{\Delta}(\varphi)$ на валу двигателя при заданном законе изменения его угловой скорости $\omega = \omega(\varphi)$ от обобщенной координаты φ .

Для определения функции $M_{\Pi}^{\Delta} = M_{\Pi}^{\Delta}(\varphi)$ воспользуемся дифференциальным уравнением движения звена приведения машины в виде [1]:

$$M_{\Pi}^{\Delta} = -M_{\Pi}^c + J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}, \quad (4.43)$$

где M_{Π}^c — приведенный момент силы F_{Tc} технологического сопротивления, сил веса звеньев машины и сил трения;

J_{Π} — приведенный момент инерции машины.

Выражение (4.43) определяет закон изменения динамического момента на валу приводного электродвигателя. Из этого выражения видно, что его амплитудные значения обусловлены не только самим законом изменения скорости при разгоне, но и типом исполнительных и передаточных механизмов, положенных в основу машины, т.е. массовыми и кинематическими характеристиками, определяемыми функциями $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\varphi)$ и $dJ_{\Pi}/d\varphi$.

Решение задачи в такой постановке можно рассматривать как задачу об управлении приводом машины по силе (в данном случае по моменту). Тогда уравнение (4.43) рассматривается как управляющая программа изменения момента M_{Π}^{Δ} на валу приводного двигателя в функции его угла φ поворота. Реализация этой программы для конкретной машины обеспечит заданный закон $\omega = \omega(\varphi)$ в пределах $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{ср}}$. Здесь $\omega_{\text{ср}}$ — среднее значение угловой скорости приводного вала машины в установившемся движении. Поиск оптимального закона изменения скорости является отдельной задачей. В данном случае рассмотрим влияние отдельных составляющих уравнения (4.43) на характер изменения приводного момента M_{Π}^{Δ} .

Примем, что угловая скорость главного приводного вала машины при разгоне изменяется по параболическому закону

$$\omega = A\varphi^m,$$

где m — целое или дробное число,

$$A = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\varphi_{\text{р}}^m},$$

$\varphi_{\text{р}} = 2\pi N_{\text{р}}$ — угол поворота вала, соответствующий фазе разгона,

$N_{\text{р}}$ — число оборотов вала до выхода на установившийся режим.

Для принятого закона угловое ускорение может быть представлено следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega = A^2 m \varphi^{2m-1}.$$

Тогда с учетом последних соотношений выражение (4.43) принимает вид

$$M_{\Pi}^{\Delta} = -M_{\Pi}^{\text{с}} + A^2 \left(J_{\Pi} m \varphi^{2m-1} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} \varphi^{2m} \right). \quad (4.44)$$

Например, при $m = 1$ зависимость $\omega(\varphi)$ имеет линейный характер, тогда уравнение (4.43) примет вид

$$M_{\Pi}^{\Delta} = -M_{\Pi}^{\text{с}} + A^2 \left(J_{\Pi} \varphi + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} \varphi^2 \right).$$

Представим приведенный момент инерции как сумму двух составляющих, т.е. $J_{\Pi} = J_{\Pi}^{\text{I}} + J_{\Pi}^{\text{II}}$, где J_{Π}^{I} — постоянная составляющая приведенного момента инерции машины, учитывающая инерционные характеристики привода (передаточных механизмов),

J_{Π}^{II} — переменная составляющая, учитывающая инерционные характеристики исполнительного рычажного механизма. Выражение (4.44) позволяет проанализировать влияние всех инерционных (J_{Π}^{I} , J_{Π}^{II} , $dJ_{\Pi}/d\varphi$) и силовых (M_{Π}^{C}) факторов на величину $M_{\Pi}^{\text{Д}}$ требуемого управляющего момента.

Приведенный момент M_{Π}^{C} , входящий в уравнение (4.44), учитывает как силы технологического сопротивления (при разгоне они могут отсутствовать), так и силы веса подвижных звеньев и трения в их соединениях.

Мощность приводного двигателя $P_{\text{д}}$, затрачиваемая на разгон, определится как произведение двух функций:

$$P_{\text{д}} = M_{\Pi}^{\text{Д}}\omega,$$

где момент $M_{\Pi}^{\text{Д}}$ определяется выражением (4.44).

Время $t_{\text{р}}$ достижения средней угловой скорости $\omega_{\text{ср}}$ установившегося движения (быстродействие машины) определяется из выражения

$$t_{\text{р}} = \int_0^{\varphi_{\text{р}}} d\varphi/\omega. \quad (4.45)$$

Из последнего уравнения видно, что время разгона зависит от принятой функциональной зависимости $\omega(\varphi)$. Интеграл в выражении (4.45) может быть вычислен аналитически или численно. Выражение (4.45) определяет цикловую производительность $Q = 1/t_{\text{р}}$ машины, т.е. чем меньше время отработки заданного угла $\varphi_{\text{р}}$ машины, тем больше ее производительность. Связь между производительностью (временем $t_{\text{р}}$), массовыми, кинематическими и силовыми характеристиками машины можно установить в результате интегрирования дифференциального уравнения (4.43) или же из уравнения движения звена приведения в форме кинетической энергии

$$\frac{J_{\Pi}^i \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{2} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{Д}} d\varphi - \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{C}} d\varphi = \Delta A. \quad (4.46)$$

Из последнего уравнения и имеем

$$\omega_i = \sqrt{2 \frac{\Delta A}{J_{\Pi}^i} + \frac{J_{\Pi}^{i-1} \omega_{i-1}^2}{J_{\Pi}^i}}. \quad (4.47)$$

Таким образом, решение уравнения (4.45) проводится с учетом уравнения (4.47).

Из уравнений (4.45) — (4.47) видно, что уменьшение времени отработки заданного угла φ_p может быть достигнуто за счет увеличения работы движущих сил $A_{дс}$ и уменьшения работы сил сопротивления A_c , т.е. за счет увеличения их разности ΔA . Другими словами, увеличение производительности требует выбора двигателя большей мощности при той же мощности сил сопротивления и тех же массах подвижных звеньев передаточных и исполнительных механизмов машины.

Другим направлением повышения производительности может быть снижение масс подвижных звеньев привода, т.е. уменьшение величины $J_{п}^I$. Однако и в первом, и во втором случа-

ях целесообразно исследовать функцию $M_{п}^D = M_{п}^D(\varphi)$, так как динамическая нагруженность машины определяется как амплитудными значениями, так и характером изменения этой функции при изменении ее составляющих в соответствии с выражением (4.43).

Иначе говоря, проблема увеличения производительности машины требует анализа ее динамической нагруженности. Такой подход позволяет в каждом конкретном случае оценить целесообразность и эффективность изменения тех или иных параметров, приводящих, с одной стороны, к уменьшению времени разгона, а с другой — к увеличению динамических нагрузок.

В качестве примера рассмотрена машина с кривошипно-ползунным исполнительным механизмом для выполнения операции строгания. Основные параметры механизма: длины звеньев $l_1 = 0,065$ м, $l_2 = 0,22$ м; массы звеньев $m_2 = 60$ кг, $m_3 = 150$ кг; моменты инерции $J_{п}^I = 26,3$ кг·м², $J_{S2} = 0,49$ кг·м²; средняя угловая скорость установившегося движения $\omega_{ср} = 30$ рад/с; максимальная сила технологического сопротивления $F_{тс\max} = 36000$ Н.

Показатель степенной функции принят равным $m = 0,4$.

Для заданных параметров машины требуется определить значения функции $M_{п}^D = M_{п}^D(\varphi)$, позволяющей реализовать заданную на рис.4.17 функцию $\omega = \omega(\varphi)$. Результаты вычислений приведены на рис.4.18, 4.19, 4.20. Анализ графиков дает полное представление о динамике привода в период разгона машины. Из рис.4.18, 4.19 просматривается влияние внутренних и внешних факторов на крутильные колебания приводного вала. Из рис.4.20 нетрудно видеть возможные перегрузки приводного двигателя, обусловленные изменением приведенного момента $M_{п\Sigma}^D$ от времени. Как известно [23], в этом случае требуется учитывать взаимовлияние механических и электрических связей в машине.

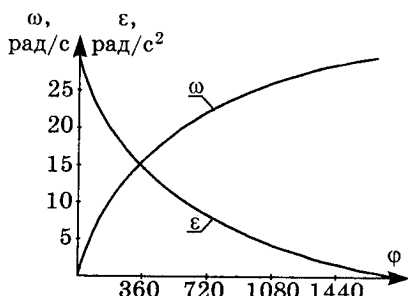


Рис.4.17. Графики изменения обобщенной скорости ω и ускорения ϵ машины за 5 оборотов приводного вала

Например, для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением эта связь устанавливается на основании уравнения Лагранжа-Максвелла. Уравнение (4.43) в этом случае принимает вид

$$J_{\Pi} \epsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\phi} - \frac{dL_{\Pi}}{d\phi} i_{\text{в}} i_{\text{я}} = M_{\Pi}. \quad (4.48)$$

Здесь $L_{\Pi} = L_{\text{вн}} = L_{\text{яв}}$ — взаимная индуктивность, $i_{\text{в}}$, $i_{\text{я}}$ — токи в обмотках возбуждения и якоря соответственно. Индуктивность обмоток возбуждения и

якоря ($L_{\text{в}}$ и $L_{\text{я}}$) считаем постоянными, а взаимную индуктивность зависящей от угла поворота ϕ . Производная по времени t от обобщенной электрической координаты дает обобщенный ток. Электрические связи в этом случае описываются уравнением

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{dL_{\Pi}}{d\phi} i_{\text{в}} \phi = U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}. \quad (4.49)$$

где U — напряжение, приложенное к обмотке якоря,

$R_{\text{я}}$ — сопротивление этой обмотки.

Таким образом, введение производной

$$M_{\Pi}^{\text{д}} = \frac{dM_{\Pi}^{\text{д}}}{dt} \cdot \frac{d\phi}{d\phi} = \omega \left(M_{\Pi}^{\text{д}} \right)'$$

требует совместного решения уравнений (4.48), (4.49), в результате которого определяются функции $\phi = \phi(t)$ и $i_{\text{я}} = i_{\text{я}}(t)$. Это означает, что полученная программа управления по силе должна быть скорректирована за счет введения некоторой электромагнитной инерционности.

Из уравнения (4.48) имеем $M_{\text{д}} = \left(\frac{dL_{\Pi}}{d\phi} \right) i_{\text{в}} i_{\text{я}}$.

Величину $dL_{\Pi}/d\phi$ практике часто принимают постоянной, обозначим ее, в соответствии с [23], $k = dL_{\Pi}/d\phi$, т.е.

$$M_{\text{д}} = k i_{\text{в}} i_{\text{я}}. \quad (4.50)$$

Величина $k i_{\text{в}}$ равна магнитному потоку в воздушном зазоре между ротором и статором, если считать, что магнитный поток создается только обмоткой возбуждения, т.е. движущий момент $M_{\text{д}}$ равен произведению магнитного потока на ток в обмотке якоря.

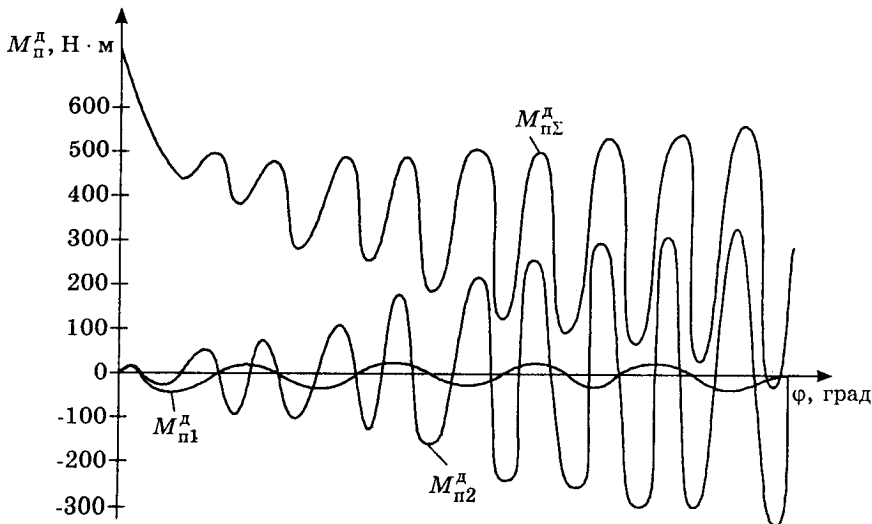


Рис.4.18. Графики функции $M_{пΣ}^Д = M_{пΣ}^Д(\varphi)$ при $F_{тс} = 0$ и ее составляющих согласно уравнению (4.43):

$M_{п1}^Д$ — от сил тяжести, $M_{п2}^Д = \frac{\omega_2}{2} \cdot \frac{dJ_{п}}{d\varphi}$. Составляющая $J_{п}\epsilon$

не изображена ввиду малости ее амплитудных значений в выбранном масштабе

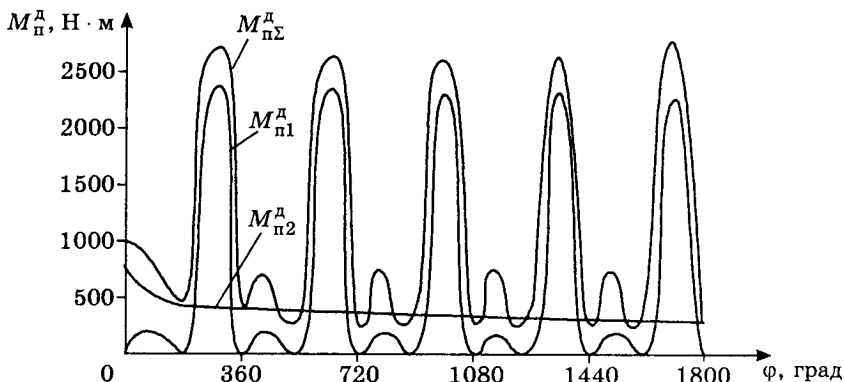


Рис.4.19. Графики функции $M_{пΣ}^Д = M_{пΣ}^Д(\varphi)$ при $F_{тс} \neq 0$

и ее составляющих: $M_{п1}^Д$ — приведенный момент сил

технологического сопротивления, $M_{п2}^Д = J_{п}\epsilon$

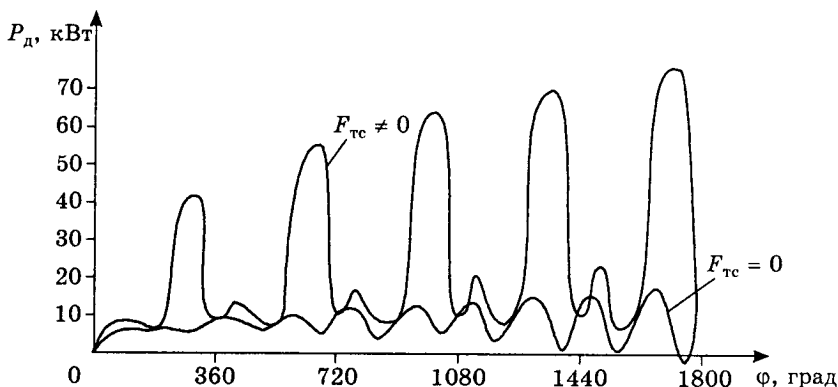


Рис.4.20. Графики функции $P_d = M_{\Pi\Sigma}^d \omega$ приводного вала машины при ее разгоне вхолостую ($F_{тс} = 0$) и при выполнении технологической операции ($F_{тс} \neq 0$)

Для того, чтобы установить более полно взаимное влияние электрических и механических связей на процесс управления приводом машины, рассмотрим уравнения (4.48) и (4.44) при $J_{\Pi} = \text{const}$ и $M_{\Pi} = -M_{\Pi}^c$. Найдем функцию $i_{я} = i_{я}(t)$ из уравнения (4.48). С учетом выражения (4.50) и принятых допущений получим

$$i_{я} = \frac{J_{\Pi}\dot{\omega} - M_{\Pi}^c}{k i_{в}}. \quad (4.51)$$

Производную $di_{я}/dt$ найдем из уравнения (4.49):

$$\frac{di_{я}}{dt} = \frac{1}{L_{я}} (U - i_{я} R_{я} - k i_{в} \omega).$$

Последнее выражение с учетом соотношения (4.51) примет вид

$$\frac{di_{я}}{dt} = \frac{U k i_{в} - R_{я} J_{\Pi} \dot{\omega} - R_{я} M_{\Pi}^c - (k i_{в})^2 \omega}{L_{я} k i_{в}}. \quad (4.52)$$

Дифференцирование уравнения (4.52) по времени с учетом того, что $J_{\Pi} = \text{const}$ и $M_{\Pi} = -M_{\Pi}^c$, дает

$$J_{\Pi} \dot{\varepsilon} - k i_{в} \frac{di_{я}}{dt} = -M_{\Pi}^c. \quad (4.53)$$

Подставляя выражение (4.52) в соотношение (4.53), получим следующее уравнение движения звена приведения машины

(вала электродвигателя) при постоянном приведенном моменте инерции машины:

$$J_{\Pi} \dot{\epsilon} - \frac{1}{L_{\text{я}}} \left[U k i_{\text{в}} - R_{\text{я}} J_{\Pi} \dot{\omega} - R_{\text{я}} M_{\Pi}^{\text{с}} - (k i_{\text{в}})^2 \omega \right] = -\dot{M}_{\Pi}^{\text{с}}.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$J_{\Pi} \dot{\epsilon} - \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} \left[\frac{U k i_{\text{в}}}{R_{\text{я}}} - J_{\Pi} \dot{\omega} - M_{\Pi}^{\text{с}} - \frac{(k i_{\text{в}})^2}{R_{\text{я}}} \omega \right] = -\dot{M}_{\Pi}^{\text{с}}.$$

При постоянном токе возбуждения статическая характеристика двигателя постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением представляется в виде линейной зависимости между движущим моментом $M_{\text{д}}$ и угловой скоростью $\dot{\phi} = \omega$, т.е. зависимость $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega)$ имеет вид $M_{\text{д}} = M_0 - b\omega$. Величины M_0 и b находятся из следующих соображений. В случае $i_{\text{я}} = \text{const}$ — $di_{\text{я}}/dt = 0$, тогда из уравнения (4.49) имеем

$$i_{\text{я}} = \frac{U - k i_{\text{в}} \omega}{R_{\text{я}}}. \quad (4.54)$$

Уравнения (4.49) и (4.54) дают возможность записать следующее соотношение

$$M_{\text{д}} = \frac{k i_{\text{в}} U}{R_{\text{я}}} - \frac{(k i_{\text{в}})^2}{R_{\text{я}}} \omega,$$

откуда

$$M_0 = \frac{k i_{\text{в}} U}{R_{\text{я}}}, \quad (4.55)$$

$$b = \frac{(k i_{\text{в}})^2}{R_{\text{я}}}. \quad (4.56)$$

С учетом выражений (4.55), (4.56) уравнение (4.57) окончательно примет вид [23]

$$\frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} (J_{\Pi} \dot{\epsilon} + \dot{M}_{\Pi}^{\text{с}}) + J_{\Pi} \dot{\omega} = M_0 - b\omega - \dot{M}_{\Pi}^{\text{с}}. \quad (4.57)$$

В случае $J_{\Pi} = \text{const}$ и $M_{\text{д}} = M_0 - b\omega$ уравнение (4.48) дает

$$J_{\Pi} \dot{\omega} = M_{\text{д}} - \dot{M}_{\Pi}^{\text{с}} = M_0 - b\omega - \dot{M}_{\Pi}^{\text{с}}. \quad (4.58)$$

Из сравнения выражений (4.57) и (4.58) видно, что они отличаются друг от друга выражением

$$\frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \cdot \frac{d(J_{\Pi} \dot{\epsilon} + \dot{M}_{\Pi}^{\text{с}})}{dt}.$$

С учетом того, что

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(\omega\omega')}{dt} = \varepsilon\omega' + \omega^2\omega'' \quad \text{и} \quad M_{\Pi}^c = \frac{dM_{\Pi}^c}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \left(M_{\Pi}^c \right)',$$

электромагнитную силу (момент) инерции можно представить в виде

$$\frac{L_{я}}{R_{я}} \omega \left\{ J_{\Pi} \left[(\omega')^2 + \omega\omega'' \right] + \left(M_{\Pi}^c \right)' \right\}. \quad (4.59)$$

Таким образом, оценка степени влияния механических и электрических связей в машине может быть сведена к приближенной оценке влияния функции (4.59) на решение уравнения (4.48) с учетом технологической операции, выполняемой при разгоне, или без ее учета (при разгоне машины вхолостую).

В первом случае $M_{\Pi}^c \neq 0$, во втором $M_{\Pi}^c = 0$. Такой подход к реализации заданной функции обобщенной скорости с учетом механических и электромагнитных инерционных составляющих имеет практическую ценность. В данном случае в результате численных исследований представляется возможность подобрать функцию $\omega = \omega(\varphi)$, обеспечивающую наименьшие колебания крутящего момента на приводном валу машины и оценить степень отклонения от нее "реальной" функции, полученной с учетом взаимовлияния электрических и механических связей в машине. Электромагнитная сила инерции (4.59) представляет сама по себе интерес в связи с тем, что для заданных массовых характеристик привода ($J_{\Pi} = \text{const}$), функции $M_{\Pi}^c = M_{\Pi}^c(\varphi)$ и электромагнитных характеристик двигателя ($L_{я}, R_{я}$) можно для любой наперед заданной функции $\omega = \omega(\varphi)$ оценить характер изменения и амплитудные значения электромагнитной силы инерции. Для этого следует получить первые производные по обобщенной координате φ функций $\omega = \omega(\varphi)$ и $M_{\Pi}^c = M_{\Pi}^c(\varphi)$, а также вторую производную $\omega'' = d\omega'/d\varphi$ и подставить их значения в выражение (4.52) для конкретного электродвигателя, обладающего индуктивностью $L_{я}$ и сопротивлением обмотки $R_{я}$.

ГЛАВА 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В МАШИНАХ

5.1. Постановка задачи моделирования механизмов

Как видно из главы 4, моделирование рабочих процессов и приводов машин сводится к аналитическому представлению сил или моментов сил в функции скорости (линейной или угловой) или же перемещения (линейного или углового). Работа (мощность) сил движущих преобразуется в работу (мощность) сил технологического сопротивления. Этот процесс передачи энергии от двигателя к рабочему органу машины осуществляется с помощью передаточных и исполнительных механизмов. Передаточные механизмы расположены между приводным двигателем и входным звеном исполнительного механизма. На выходном звене исполнительного механизма установлен рабочий орган, к которому приложены силы технологического сопротивления. Таким образом, моделирование и исследование движения технологических машин-автоматов сводится к анализу особенностей преобразования энергии приводного двигателя в работу сил технологического сопротивления. Эти особенности определяются геометрическими (размерными), массовыми и кинематическими характеристиками передаточных и исполнительных механизмов. Другими словами, поиск рационального сочетания приводного двигателя и механизмов требует моделирования геометрических, массовых и кинематических характеристик последних. Как было показано ранее, кинематическое исследование машины проводится с помощью ее идеализированной динамической модели и предусматривает решение уравнения, в котором геометрические, массовые и кинематические характеристики связаны между собой. Математические модели, устанавливающие эти связи, в дифференциальной или интегральной формах позволяют определить зависимость обобщенной скорости и обобщенной координаты от времени. Это означает, что действительные значения скоростей и ускорений звеньев механизмов и их центров масс могут быть определены только после динамических исследований машины с использованием ее динамической модели. Поэтому в основу моделирования кинематики механизмов положены методы определения скоростей и ускорений, угловых и линейных, как параметров, зависящих от времени, и их аналогов, то есть параметров, определяющих изменение линейных и угловых координат в функции обобщенной координаты. Преобразование простейших движений, создаваемых тем или другим двигателем, в более сложные движения рабочего органа машины совершается механизмами с одной или более степенями подвижности. Понятие о степенях подвижности относится

не к реальным механизмам, а к их идеализированным моделям. Такая идеализация распространяется и на соединение звеньев (кинематических пар). Считается, что в них отсутствуют зазоры, а также погрешности изготовления и сборки, то есть, что размеры звеньев и геометрическая форма их соединений (соприкасающихся поверхностей) идеальные. При отсутствии деформаций звеньев и их соединений для таких механизмов понятие "степень подвижности" равносильно понятию "степень свободы". При наличии деформации в каком-либо направлении степень свободы не равна степени подвижности. Она становится больше на величину, соответствующую количеству координат (линейных и угловых), в направлении которых допускаются деформации.

Таким образом, моделирование механизмов предусматривает прежде всего их структурный анализ, то есть анализ возможных сочетаний звеньев и их соединений (кинематических пар) без учета их размеров. Этот этап предусматривает определение степени подвижности механизмов (их идеализированных моделей). Структурный синтез позволяет выявить возможные варианты формирования схем механизмов (без учета размеров звеньев и их соединений), обеспечивающие преобразование движения входного звена в движение выходного или движение нескольких входных звеньев — в движение выходного звена. На этом этапе предусматривается выявление только количества возможных движений (вращательных, поступательных или их сочетаний) входных, промежуточных и выходных звеньев механизмов. При этом их взаимосвязь и законы не подлежат определению.

Моделирование кинематики механизмов также не ставит целью выявление законов движения звеньев, то есть изменения их угловых и линейных координат во времени. На этом этапе выявляется связь изменения угловых и линейных координат звеньев механизма в функции обобщенной координаты.

5.2. Связи, кинематические пары и степень подвижности механизмов

Движения звеньев механизмов определяются связями, наложенными на них, то есть видом их соединений. Связи в общем виде накладывают ограничения как на координаты, так и на скорости. Они не зависят от приложенных активных сил и начальных условий. В общем случае математическое моделирование связей сводится к уравнениям, содержащим координаты точек отдельных звеньев, время и их скорости. Такие уравнения отражают условия, ограничивающие свободу движения звеньев. Тело (звено) до образования кинематической пары может совершать в пространстве 6 простейших движений. Три из них — вращения вокруг осей xuz (рис.5.1), три — поступательные движения вдоль

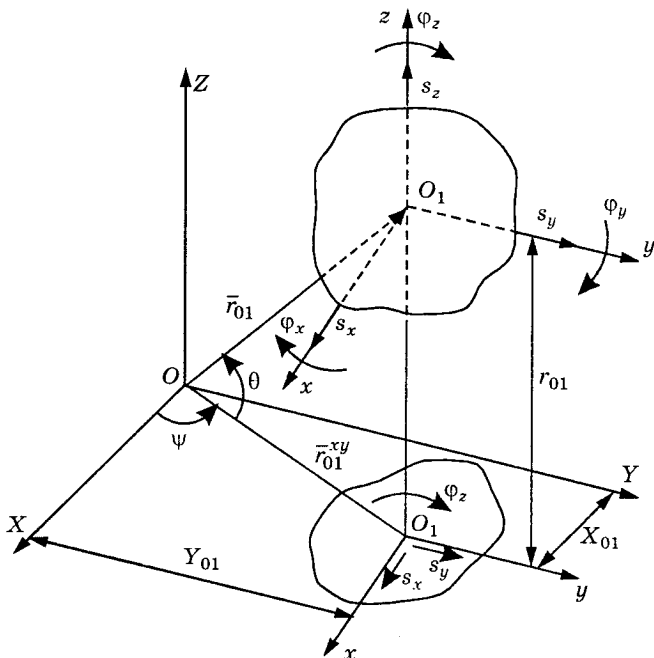


Рис.5.1. Задание положения тела в пространстве, линейного (x_{01}, y_{01}, z_{01}) и углового $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$

этих осей. Задание положения тела в пространстве требует задания трех линейных координат x_{01}, y_{01}, z_{01} , определяющих положение точки O_1 центра масс тела, и трех угловых координат $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, определяющих его угловую ориентацию относительно осей xyz , параллельных XYZ . Для определения положения тела в пространстве можно воспользоваться и другими координатами. Например, положение точки O_1 можно задать длиной вектора

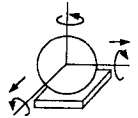

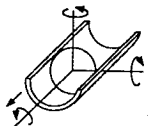

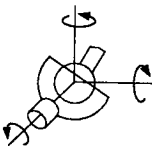

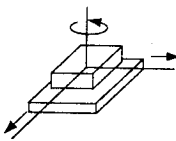
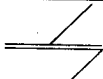
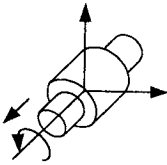

$$r_{01} = \sqrt{x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2}$$

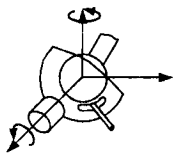

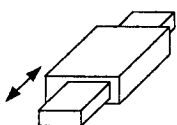
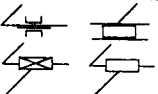
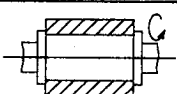
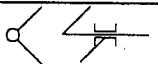
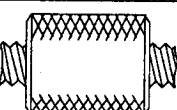
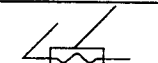
и углами $\psi = \text{arctg} \frac{y_{01}}{x_{01}}$ и $\theta = \text{arctg} \frac{z_{01}}{\sqrt{x_{01}^2 + y_{01}^2}}$, а угловое положение

его определить углами Эйлера. Однако в любом случае пространственная ориентация определяется шестью координатами. На плоскости положение тела определяется тремя координатами. Например, в плоскости XOY для ориентации тела требуется задать координаты X_{01}, Y_{01} и φ_z или $r_{01}^{xy} = \sqrt{x_{01}^2 + y_{01}^2}$, ψ и φ_z

(см. рис.5.1). Как известно из теоретической механики [21], различают связи стационарные, нестационарные, удерживающие, неудерживающие, голономные, неголономные. Нами рассматриваются голономные, удерживающие и стационарные, то есть такие связи, которые накладывают ограничения только на координаты (на относительное положение звеньев), при этом они сохраняют свое действие в процессе движения и остаются неизменными во времени. Классификация таких соединений звеньев приведена в табл.5.1. Если обозначить n — число подвижных звеньев, то их число подвижностей (возможных движений в пространстве) определится как $6n$, для плоскости — $3n$.

Таблица 5.1

Класс пары	К-во ограничений	Число степеней свободы	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
1	2	3	4	5	6
I	1	5	Шар-плоскость		
II	2	4	Шар-цилиндр		
III	3	3	Сферическая		
	3	3	Плоскостная		
IV	4	2	Цилиндрическая		

1	2	3	4	5	6
IV	4	2	Сферическая с пальцем		
	5	1	Поступательная		
V	5	1	Вращательная		
	5	1	Винтовая		

Если обозначить:

p_5 — количество кинематических пар пятого класса, то $5p_5$ — количество ограничений, накладываемых ими;

p_4 — количество кинематических пар четвертого класса, то $4p_4$ — количество ограничений, накладываемых ими;

p_3 — количество кинематических пар третьего класса, то $3p_3$ — количество ограничений, накладываемых ими, и т.д.

Тогда формула для определения степени подвижности пространственных механизмов имеет вид

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Для плоских механизмов она примет вид

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Как отмечалось, в плоском механизме положение звеньев определяется тремя координатами, следовательно, кинематические пары могут быть только одноподвижными (пятого класса) и двухподвижными (четвертого класса).

Уравнение голономных, удерживающих, стационарных связей, наложенных на n подвижных звеньев, имеет вид

$$f(x, y, z, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Для определения произвольного положения механизма не все координаты можно задавать независимо друг от друга. Так,

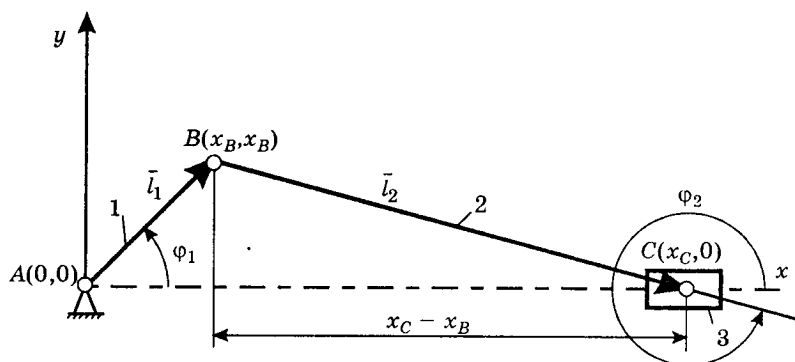


Рис.5.2. Механизм с голономными удерживающими стационарными связями

для механизма, изображенного на рис.5.2, шесть координат точек A , B и C связаны друг с другом следующими пятью уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0, \\ y_A &= 0, \\ x_B^2 + y_B^2 - l_1^2 &= 0, \\ (x_C - x_B)^2 + y_B^2 - l_2^2 &= 0, \\ y_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Данные уравнения связей, наложенных на механизм (рис.5.2), указывают на то, что точка A неподвижна (первое и второе уравнения системы), точка C движется вдоль оси x (пятое уравнение системы), и на то, что длины звеньев l_1 и l_2 неизменны (третье и четвертое уравнения системы). Таким образом, шесть координат точек A , B , и C (x_A , y_A , x_B , y_B , x_C , y_C) связаны друг с другом пятью уравнениями связей (5.3). Это означает, что для задания вполне определенного положения механизма (рис.5.2) достаточно одной переменной координаты x_B , y_B или x_C . Все остальные найдутся из уравнений связей (5.1). В качестве независимых координат, определяющих расположение звеньев механизма, не обязательно выбирать координаты точек в прямоугольной или другой системе координат. Это могут быть любые (по геометрическому смыслу и размерности) параметры. Например, в качестве такой координаты для механизма на рис.5.2 может быть угол φ_1 между положительным направлением оси x и вектором \vec{l}_1 или φ_2 — угол между осью x и вектором \vec{l}_2 .

Таким образом, для голономных удерживающих связей число независимых параметров, однозначно определяющих положение звеньев, называется числом степеней подвижности.

Независимые друг от друга параметры, число которых равно числу степеней подвижности и при помощи которых можно в любой момент времени однозначно определить положение всех звеньев механизма, то есть выразить через эти параметры декартовы координаты точек звеньев, называются обобщенными координатами.

Например, для кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис.5.2, имеющего обобщенную координату φ_1 , уравнения для координат точек B и C примут вид

$$\left. \begin{aligned} x_B &= l_1 \cos \varphi_1, \\ y_B &= l_1 \sin \varphi_1, \\ x_C &= l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}, \\ y_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Третье уравнение системы (5.2) получено с учетом того, что, как видно из рис.5.2, имеют место соотношения

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}, \quad \sin \varphi_2 = -l_1/l_2 \sin \varphi_1, \quad \text{а } x_C = x_B + l_2 \cos \varphi_2.$$

Первые производные от обобщенных координат по времени называют обобщенными скоростями, вторые — обобщенными ускорениями. В рассматриваемом случае это ω_1 и ε_1 . Звено, которому приписывается обобщенная координата, называют начальным. За начальное звено можно взять выходное или промежуточное, если при этом упрощаются расчеты.

Пример нестационарных связей представлен на рис.5.3. Уравнения связей для этого механизма имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_A &= y_A = 0, \\ y_C - a \sin kt &= 0, \\ x_B^2 + y_B^2 - l_1^2 &= 0, \\ (x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2 - l_2^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Уравнение $y_C - a \sin kt = 0$ явно зависит от времени, то есть связь нестационарная. Описание положений звеньев для такого механизма требует наличия двух обобщенных координат, например φ_1 и y_C .

В этом случае требуется два независимых источника энергии, обеспечивающих изменения $\varphi_1(t)$ и $y_C(t)$. Для рис.5.3 имеем

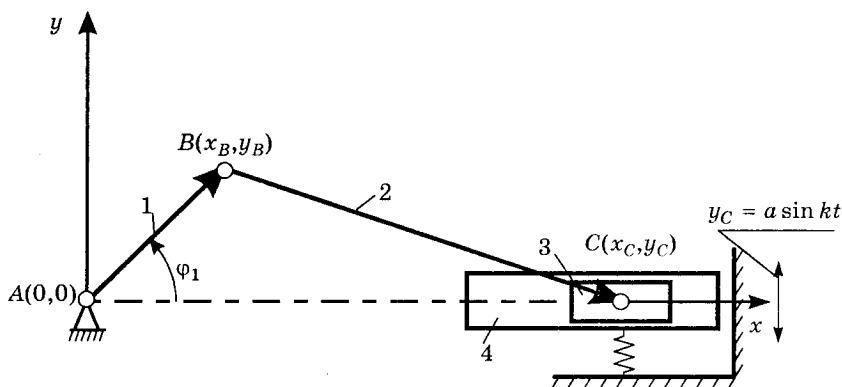


Рис.5.3. Механизм с голономными удерживающими нестационарными связями

$n = 4$, $p_5 = 5$, то есть $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$. Для рис.5.2 имеем $n = 3$, $p_5 = 4$, то есть $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Различают плоские и пространственные кинематические пары по характеру относительного движения, а также низшие и высшие — по характеру соприкосновения звеньев. Низшие характеризуются соприкосновением по поверхности, высшие — по точке или линии. Последнее разделение условно, так как реальные поверхности звеньев под нагрузкой контактируют между собой всегда по некоторой площадке. Однако с точки зрения геометрии идеальных (недеформируемых) тел такое разделение имеет смысл.

Формирование структурных и кинематических схем плоских и пространственных механизмов имеет свои особенности. Эти особенности структурного и кинематического синтеза схем плоских и пространственных механизмов связаны не только с характером движения выходного звена, но и с возможными вариантами сочетания звеньев и кинематических пар. Наиболее развитыми и доведенными до практического использования являются методы структурного анализа и синтеза схем плоских механизмов. Они основаны на выделении структурных групп с нулевой подвижностью (групп Ассура).

На рис.5.4 представлены схемы механизмов с наименьшим числом подвижных звеньев. Схемы на рис.5.4, а и 5.4, б отнести к механизмам можно весьма условно. Они служат исходными для формирования схем механизмов более сложных. На рис.5.5 показан один из методов структурного синтеза, основанный на присоединении к основному механизму с $W = 1$ структурных групп с $W = 0$. Первая схема механизма (рис.5.5, а) предназначена для преобразования вращательного движения входного звена 1

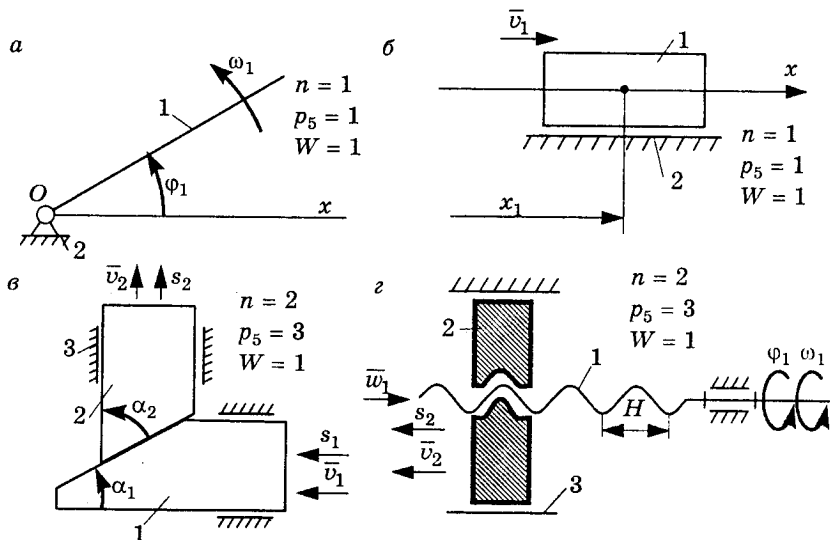


Рис.5.4. Схемы простейших механизмов с низшими парами: а, б — с одним подвижным звеном, в, г — с двумя подвижными звеньями (клиновой и винтовой)

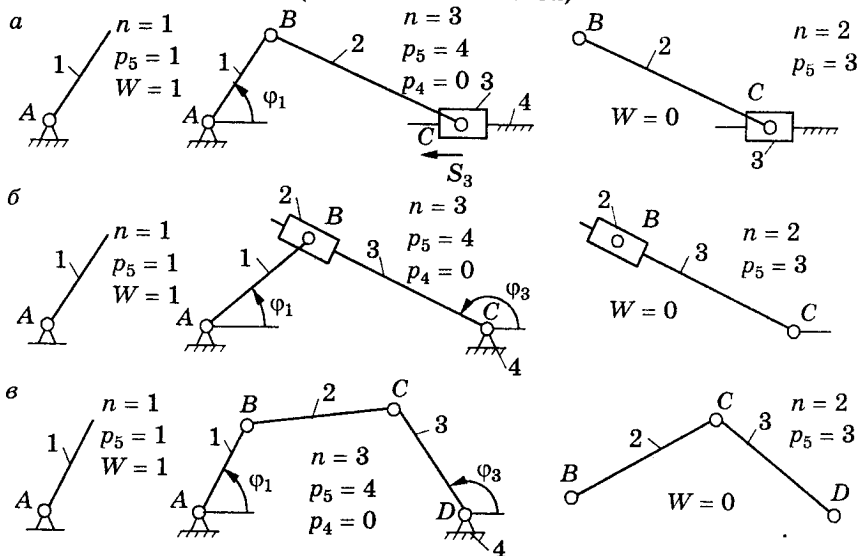


Рис.5.5. Структурный анализ и синтез четырехзвенных механизмов с одной степенью подвижности и тремя подвижными звеньями

в возвратно-поступательное выходного 3. Эта схема может быть использована и для преобразования поступательного движения звена 3 во вращательное движение звена 1, тогда понятия входного и выходного звеньев меняются. Схемы на рис.5.5, б и 5.5, в предназначены для преобразования вращательного движения входного звена 1 во вращательное движение звена 3. Как видно из рис.5.5, на этапе структурного исследования размеры звеньев не принимаются во внимание. Схемы получены только на основе сочетания звеньев и кинематических пар. Однако для определения функций положения $s_3 = f(\varphi_1)$ (рис.5.5, а) $\varphi_3 = f(\varphi_1)$ (рис.5.5, б, в) размеры (длины) звеньев необходимы. На рис.5.6 показан пример структурного анализа и синтеза более сложного механизма путем выделения и наложения на основной механизм с $W = 1$ структурных групп с нулевой подвижностью. Как видно из рассмотренных примеров, структурный анализ и синтез схем плоских механизмов основан на некоторых положениях теории кинематических пар, определяющих их подвижность, и понятиях структурных групп с нулевой подвижностью. Такая классификация структурных схем механизмов представлена в табл.5.2.

Из рис.5.5, 5.6 видно, что схемы механизмов представляют собой некоторую кинематическую цепь как систему звеньев, связанную кинематическими парами. Схемы механизмов, представленные на этих рисунках, являются замкнутыми в том понимании, что каждое звено входит в две кинематические пары. Если имеются звенья, входящие в одну кинематическую пару, кинематическую цепь называют незамкнутой (разомкнутой).

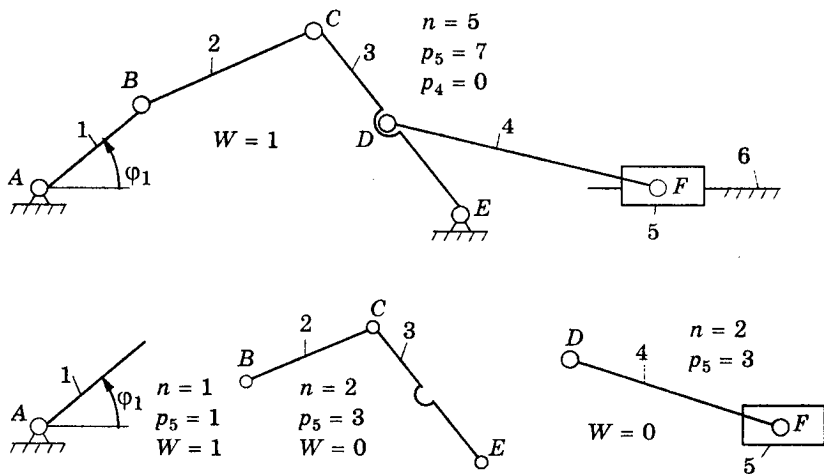
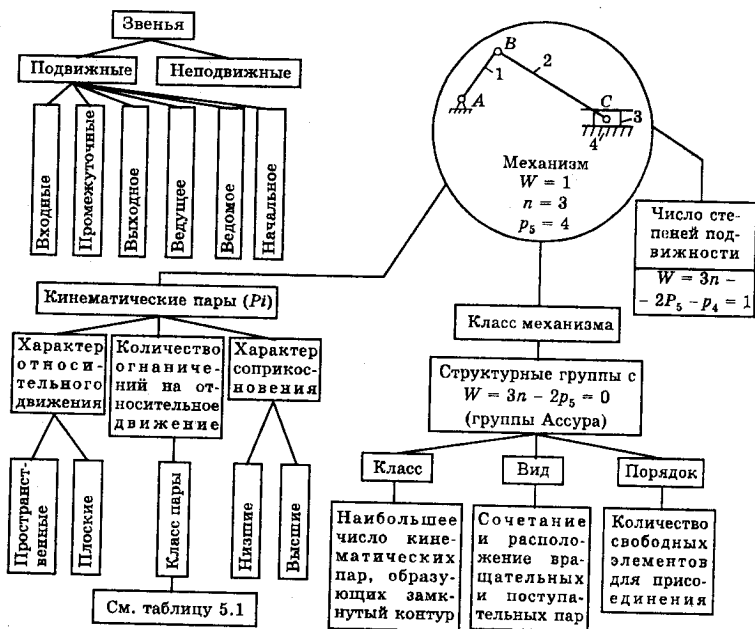


Рис.5.6. Структурный анализ и синтез шестизвенного механизма с одной степенью подвижности и пятью подвижными звеньями



1 вид	2 вид	3 вид	4 вид	5 вид
 2 кл. 2 пор.	 2 кл. 2 пор.	 2 кл. 2 пор.	 2 кл. 2 пор.	 2 кл. 2 пор.
3 кл., 3 пор.	3 кл., 4 пор.	4 кл., 2 пор.	4 кл., 3 пор.	5 кл., 3 пор.
 $n = 4, P_5 = 6$	 $n = 6, P_5 = 9$	 $n = 4, P_5 = 6$	 $n = 6, P_5 = 9$	 $n = 6, P_5 = 9$

На рис.5.7 показана возможность образования разнообразных схем механизмов из одной и той же кинематической цепи (рис.5.7, а) путем закрепления (соединения со станиной) того или иного звена. Закрепление, например, звена 4 (рис.5.7, б) дает схему механизма, преобразующую вращение звена 1 со скоростью ω_1 , в поступательное движение звена 3 со скоростью v_3 , т.е. кривошипно-ползунного механизма (см. рис.5.5, а). Закрепление зве-

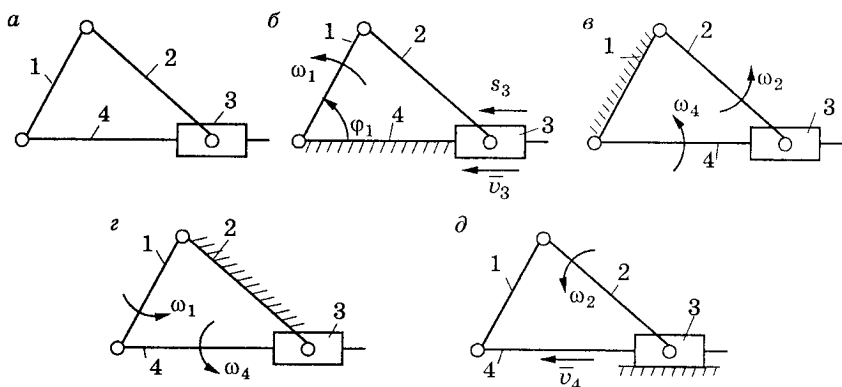


Рис.5.7. Синтез схем механизмов, основанный на выборе различных неподвижных звеньев из одной кинематической цепи

на 1 (рис.5.7, в) дает схему механизма, преобразующего вращение звена 2 со скоростью ω_2 во вращательное движение звена 4 со скоростью ω_4 , т.е. схему кривошипно-кулисного механизма (см. рис.5.6, б). Закрепление звена 2 (рис.5.6, з) дает схему механизма, реализующего преобразование вращения звена 1 со скоростью ω_1 во вращение звена 4 со скоростью ω_4 . Закрепление же звена 3 (рис.5.7, д) дает схему механизма, преобразующего вращение звена 2 со скоростью ω_2 в поступательное движение звена 4 со скоростью v_4 .

Таким образом, структурные схемы плоских механизмов могут быть образованы:

1) путем наложения на вращающееся или перемещающееся поступательное звено структурных групп с нулевой подвижностью;

2) из одной кинематической цепи при закреплении различных звеньев.

Введение понятий структурных групп с нулевой подвижностью удобно не только для структурного анализа (синтеза). Дело в том, что сочетание звеньев и кинематических пар, обеспечивающее нулевую подвижность, определяет ее статическую определенность. Это говорит о том, что для группы с $W = 0$ количество уравнений статики, отражающее условие ее равновесия, оказывается не меньшим числа неизвестных составляющих сил реакций, действующих в кинематических парах со стороны отброшенных связей. Поэтому следует иметь в виду, что вид и класс той или иной структурной группы с $W = 0$ зависит от выбора обобщенной координаты (начального звена). Так, например, на рис.5.8 и 5.9

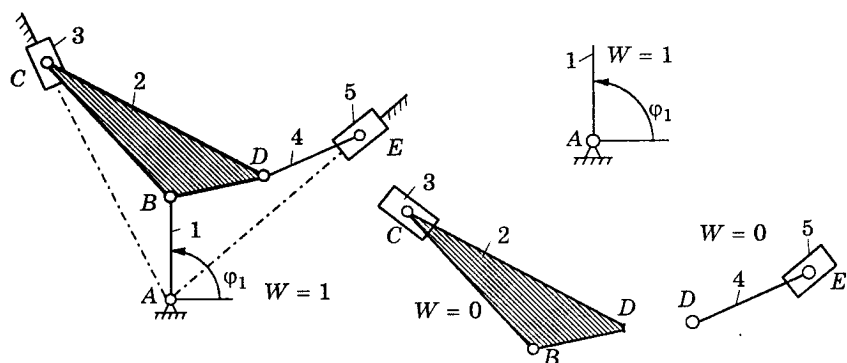


Рис.5.8. Структурный анализ схемы механизма V-образного двигателя при выборе за обобщенную координату угла φ_1 поворота звена 1

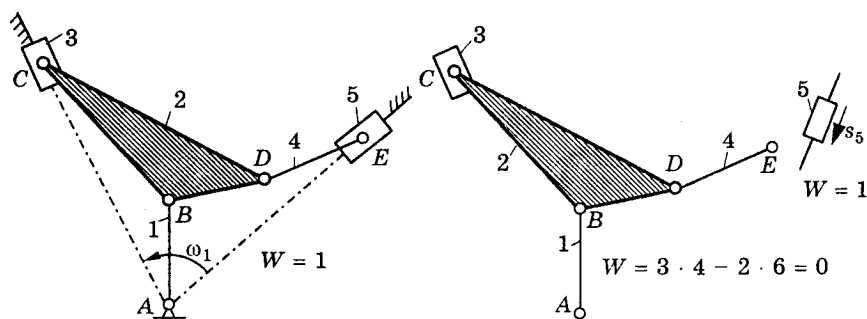


Рис.5.9. Структурный анализ схемы механизма V-образного двигателя при выборе за обобщенную координату линейного перемещения s_5

показаны одна и та же схема механизма V-образного двигателя внутреннего сгорания и различные структурные группы с $W = 0$ при обобщенной координате φ_1 (начальное звено AB) (рис.5.8) и при обобщенной координате s_5 (начальное звено 5).

Такая рациональная классификация, предложенная Л.В.Ассуром и развитая И.И.Артоболовским и другими, применима при выполнении следующих условий:

- число входных звеньев равно степени подвижности механизма;
- входные звенья входят в кинематические пары со станиной неподвижным звеном);
- все кинематические пары рассматриваемой схемы механизма относятся к одноподвижным (пятому классу).

В связи с этим часто схемы механизмов, не удовлетворяющие вышеперечисленным требованиям, заменяют эквивалентными с целью удобства их структурного и кинематического анализа.

При замене высших пар низшими должно быть соблюдено условие структурной эквивалентности. Кроме того, выходное звено заменяющего механизма должно иметь те же перемещения, скорость и ускорение, что и в механизме с высшей кинематической парой. Условие структурной эквивалентности предусматривает наличие двух кинематических пар пятого класса (одноподвижных) взамен одной пары четвертого класса (двухподвижной). Второе условие требует расположения низших пар в центрах кривизны соприкасающихся поверхностей звеньев. Таким образом, замена схемы механизма с высшими парами на схему с низшими требует наличия одного лишнего, не существующего в схеме механизма с высшими парами звена, входящего в две низшие кинематические пары, расположенные в центрах кривизны соприкасающихся поверхностей, образующих высшую пару.

На рис.5.10 показаны примеры образования схем механизмов с низшими парами из схем механизмов с высшими парами. Замена высшей кинематической пары, образованной путем соединения звеньев 1 и 2 в точке A , для трех представленных случаев требует наличия звена $1'$, входящего в две низшие кинематические пары. На рис.5.10, *a* звено $1'$ входит во вращательную одноподвижную пару O'_1 , расположенную в центре кривизны звена $1'$, и в поступательную пару со звеном 2. Центр кривизны звена 2 в точке A находится в бесконечности, поэтому равенство скоростей в точке A требует наличия поступательной пары в соединении

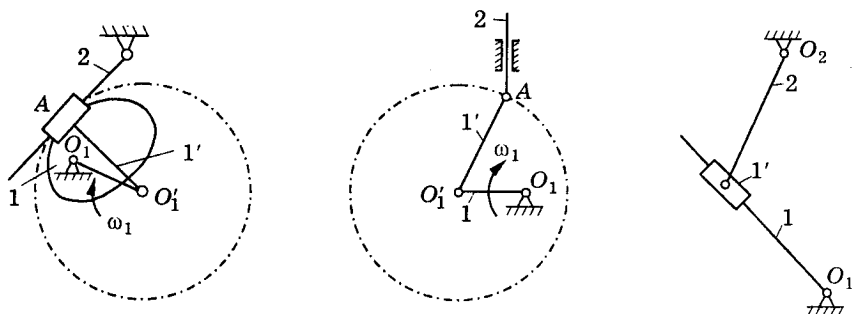


Рис.5.10. Замена высших пар низшими: *a* — звено $1'$ заменяющего механизма входит во вращательную пару со звеном 1 и поступательную со звеном 2, *б* — звено $1'$ входит в две вращательные пары, *в* — звено $1'$ входит в поступательную кинематическую пару со звеном 1 и во вращательную со звеном 2

звеньев 1 и 2. На рис.5.10, б центр кривизны звена 1 находится в точке O'_1 , а центр кривизны звена 2 — в точке A , поэтому звено 1' входит в две вращательные пары. На рис.5.10, в центр кривизны звена 1 (в точке A) находится в бесконечности, то есть звено 1' входит в поступательную пару со звеном 1 и во вращательную пару со звеном 2, так как центр кривизны точки A звена 2 совпадает с точкой A .

Недостаток такой замены связан с тем, что каждому мгновенному положению схемы механизма с высшими парами должны быть поставлены в соответствие различные схемы с низшими парами, так как центры кривизны соприкасающихся поверхностей изменяют свое положение.

5.3. Особенности моделирования кинематики механизмов машин

Как указывалось ранее, оценка динамической нагруженности машин сводится к исследованию особенностей передачи энергии от двигателя к рабочему органу, обеспечивающему выполнение технологического процесса. Эта передача обеспечивается механизмами привода (передаточными механизмами) и исполнительным механизмом машины. Условие равенства мощностей на входе и выходе кинематической цепи машины, механизма или отдельной передачи устанавливает возможность определения отношения сил (моментов сил) и скоростей. При этом отношение скоростей входного и выходного звеньев всегда известно, однако действительные их скорости могут быть определены только в результате исследования движения всей машины, включая двигатель, рабочий орган и все связывающие их механизмы. Таким образом, моделирование кинематики механизмов сводится к определению отношения скоростей их отдельных звеньев (передаточных отношений, аналогов скоростей). Это отношение может быть определено без учета величин самих скоростей, на основании того, что отношение скоростей есть отношение приращений соответствующих координат (см. разд.2.2 главы 2 настоящего пособия) и определяется дифференцированием функции положения по обобщенной координате. Внутренняя динамика машины определяется видом используемых передаточных и исполнительных механизмов. Это видно из анализа дифференциального уравнения движения звена приведения. Если в машине используются механизмы с постоянным передаточным отношением, то ее приведенный момент инерции постоянный ($J_n = \text{const}$), в этом случае неравномерность движения главного приводного вала (звена приведения) зависит только от соотношения (законов изменения) сил движущих и сопротивления. Если же отношение ско-

ростей звеньев механизмов переменное (зависит не только от размеров звеньев, но и является функцией обобщенной координаты), то неравномерность движения звена приведения (обобщенная скорость) определяется с учетом составляющей

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi},$$

которая во многом изменяет динамику машины и вносит особые сложности в определение обобщенной скорости и управление переходными процессами. В связи с тем, что динамика машин во многом определяется отношением скоростей используемых механизмов, рассмотрим особенности моделирования их кинематических характеристик отдельно для механизмов с постоянным и переменным отношением скоростей их звеньев.

5.4. Кинематика механизмов с постоянным передаточным отношением

Для зубчатых передач отсутствие проскальзывания в точке A соприкосновения начальных (делительных) окружностей зубчатых колес с внешним зацеплением дает равенство

$$r_1 d\varphi_1 = -r_2 d\varphi_2. \quad (5.3)$$

Знак $(-)$ означает противоположное направление отсчета углов φ_1 и φ_2 , совпадающее с направлением угловых скоростей звеньев 1 и 2 (рис.5.11, *a*). Уравнение (5.3) указывает на равенство дуг начальных (делительных) окружностей звеньев 1 и 2, измеряемых приращениями углов $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$. Дифференцирование уравнения (5.3) по времени дает равенство

$$r_1 \omega_1 = -r_2 \omega_2. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) указывает на равенство линейных скоростей в точке A соприкосновения начальных (делительных) окружностей звеньев 1 и 2. Дифференцирование уравнения (5.3) по φ_2 дает соотношение

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) определяет передаточное отношение передачи (рис.5.11, *a*) с числом зубьев z_1 и z_2 . Обратная пропорциональность отношения угловых скоростей и радиусов их начальных (делительных) окружностей означает равенство линейных скоростей в точке A соприкосновения последних. Как видно из рис.5.11, *б*, для внутреннего зацепления в уравнении (5.5) знак $(-)$ заменяют на $(+)$.

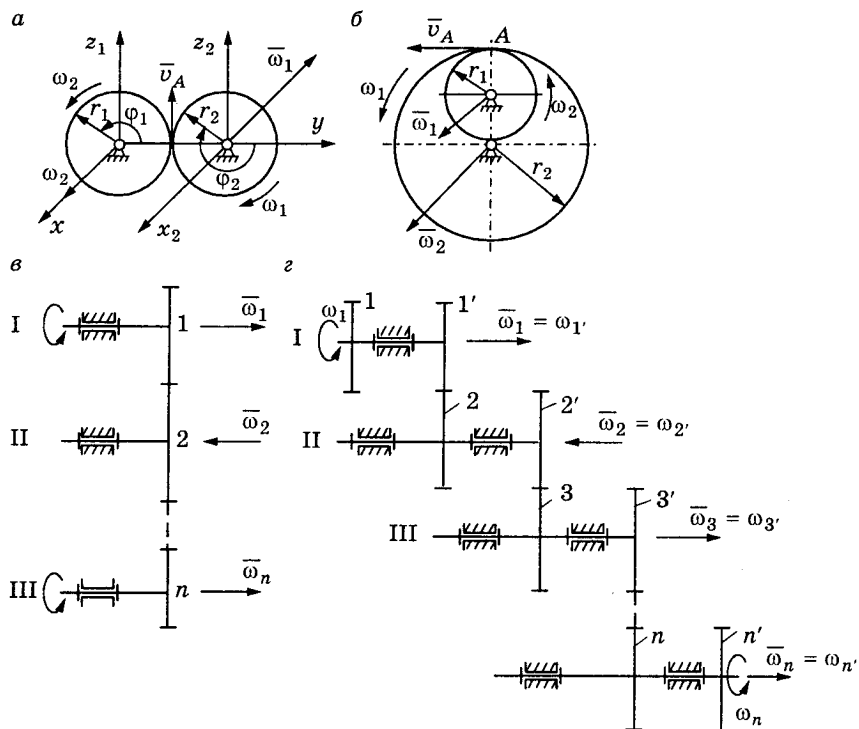


Рис.5.11. Схемы зубчатых передач с круглыми колесами:
 а, б — с внешним и внутренним зацеплением, в, г — последовательное
 соединение зубчатых колес и блоков из двух колес

Передаточное отношение ряда последовательно расположенных зубчатых колес (рис.5.11, в) определяется произведением передаточных отношений отдельных их пар:

$$i_{1n} = \omega_1 / \omega_n = (-1)^k z_n / z_1,$$

где k — число внешних зацеплений.

Нечетное число внешних зацеплений меняет направление вращения входного и выходного звеньев. Для рис.5.11, г имеем

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3};$$

$$i_{1n} = i_{14} \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^k \frac{z_2}{z_1'} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{z_4}{z_3'}.$$

Среди передач с постоянным передаточным отношением следует выделить передачу винт-гайка (см. рис.5.4, г), широко используемую в станкостроении. Винтовая линия характеризуется

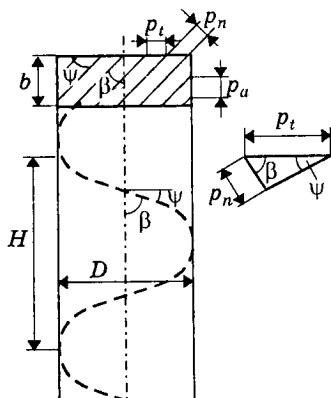


Рис.5.12. К определению параметров косозубого колеса (с зубьями, расположенными по винтовой линии)

противоположны. Шагом винтового движения H называют расстояние, пройденное проекцией движущейся точки на ось при одном обороте. Параметром винтового движения P называют отношение

скорости \bar{v}_2 поступательного движения (винта или гайки) к скорости ω_1 вращательного движения (гайки или винта):

$$P = \frac{v_2}{\omega_1} = \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{H}{2\pi} = \text{const.}$$

Возможен также случай вращения и поступательного перемещения винта или гайки. При повороте винта на 1 рад ($\varphi_1 = 1$) гайка 2 переместится на расстояние P . Если $P = v_2(t)/\omega_1(t)$ будет переменным, то такая винтовая линия будет иметь переменный шаг.

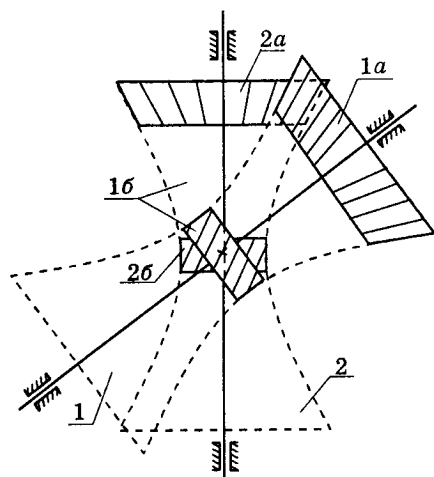


Рис.5.13. Гиперboloидные зубчатые передачи, 1, 2 — однополостные гиперboloиды со скрещивающимися осями, 1а, 2а — гипоидная передача, 1б, 2б — винтовая передача

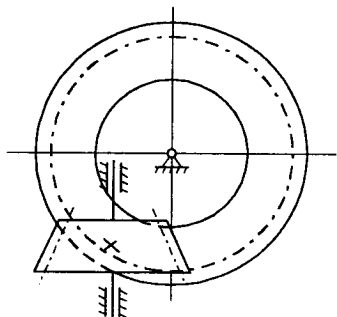


Рис.5.14. Гипоидная зубчатая передача

Кинематика пространственных зубчатых передач винтовых и гипоидных может быть представлена на примере обкатывания центральных и периферийных частей двух однополостных гиперболоидов (рис.5.13). Схемы гипоидной и винтовой зубчатых передач представлены на рис.5.14 и 5.15.

Передаточное отношение винтовых зубчатых колес зависит не только от их размеров, но и от угла относительного расположения их осей вращения. На рис.5.16. в точке P соприкосновения двух зубьев колес 1 и 2

показаны векторы их линейных скоростей

$v_1 = \omega_1 r_1$ и $v_2 = \omega_2 r_2$. Проекция этих векторов на направление линии скольжения дает

$$v_{\text{ск}} = v_1 \sin \delta_1 + v_2 \sin \delta_2,$$

где δ_1, δ_2 — углы наклона линии скольжения к осям вращения колес; r_1 и r_2 — радиусы их начальных цилиндров.

Вектор $v_{\text{ск}}$ расположен в плоскости, общей касательной к начальным цилиндрам. Для винтовых колес δ_1 может быть не равен δ_2 , их винтовые линии могут быть правыми или левыми, однако важно выполнять условие $\delta_1 + \delta_2 = \delta$.

Исходя из равенства нормальных составляющих v_n окружных скоростей в точке касания начальных цилиндров, имеем

$$v_n = \omega_1 r_1 \cos \delta_1 = \omega_2 r_2 \cos \delta_2 .$$

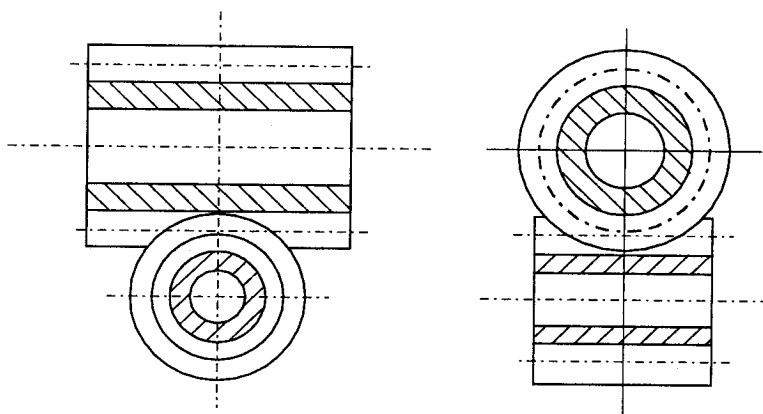


Рис.5.15. Винтовая зубчатая передача

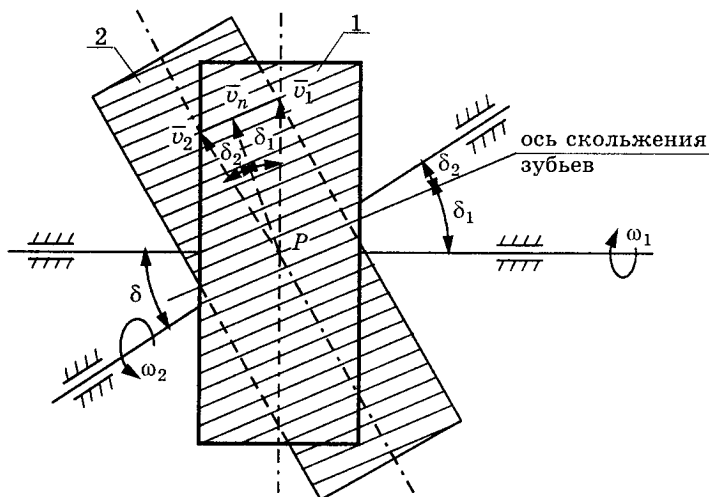


Рис.5.16. К определению передаточного отношения винтовой зубчатой передачи

Из последнего уравнения имеем

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \cos \delta_2}{r_1 \cos \delta_1} = \frac{z_2 \cos \delta_2}{z_1 \cos \delta_1}.$$

Заданное передаточное отношение можно осуществить, выбирая отношение r_2/r_1 или $\cos \delta_2/\cos \delta_1$, то есть имеет место многозначность решения.

Винтовые передачи отличаются большим скольжением при малой площадке контакта зубьев (точечным контактом), поэтому они используются в механизмах с малыми крутящими моментами при необходимости преобразования вращательного движения с большой точностью.

Для конических передач (рис.5.17) отсутствует проскальзывание по линии 1-1 касания начальных конусов с вершинами в точке O . Эта линия является мгновенной осью вращения в относительном движении. Линейные скорости двух касающихся окружностей диаметров d_{W_2} и d_{W_1} равны. Из рис.5.17 получим

$$OP = \frac{d_{W_1}}{2 \cdot \sin \delta_1} = \frac{d_{W_2}}{2 \cdot \sin \delta_2}.$$

Из треугольника скоростей (рис.5.17) имеем

$$\omega_1/\sin \delta_2 = \omega_2/\sin \delta_1.$$

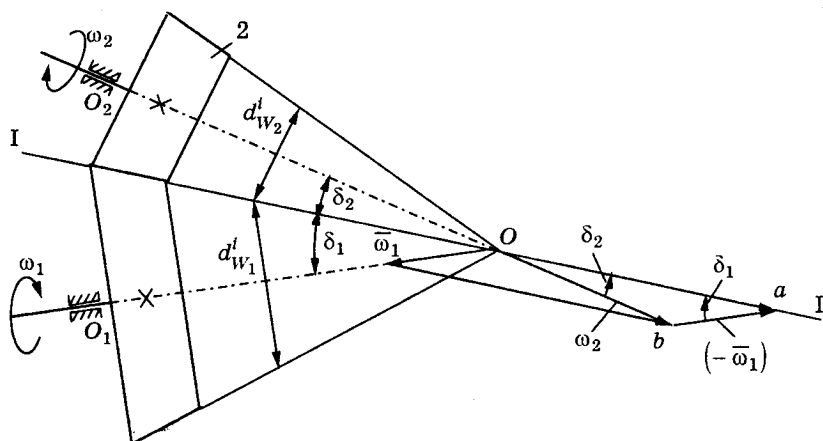


Рис.5.17. К определению передаточного отношения конической зубчатой передачи

Тогда для конических колес передаточное отношение определится из выражения

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

При $\delta_2 = 90^\circ$ (рис.5.18) имеем

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\sin \delta_1}.$$

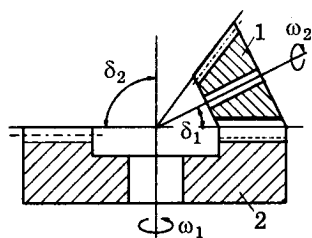


Рис.5.18. Коническая передача с $\delta_2 = \pi/2$

Передаточные отношения планетарных и дифференциальных механизмов определяются из тех же условий отсутствия проскальзывания в точках соприкосновения начальных окружностей соприкасающихся колес в их относительном движении. Однако сателлит (блок колес 2-2', рис.5.19) участвует в сложном движении: в переносном вращении $\bar{\omega}_2^e = \bar{\omega}_H$ со скоростью $\bar{\omega}_H$ водила H и в

относительном — со скоростью $\bar{\omega}_2^r$. Поэтому равенство линейных скоростей в точках соприкосновения зубьев сателлита с шестернями 1 и 3 может быть получено с использованием обращенного движения. Условная остановка водила дает возможность записать

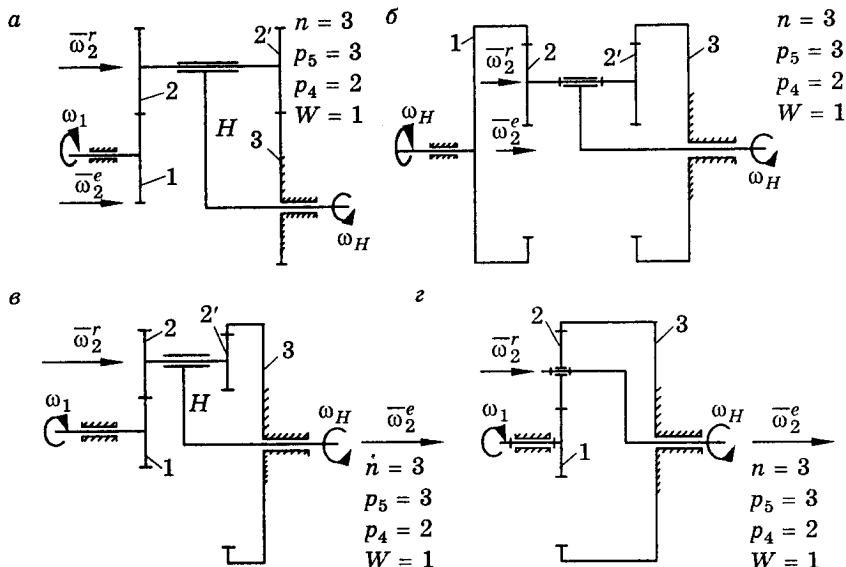


Рис.5.19. Схемы планетарных редукторов с неподвижной шестерней

передаточное отношение i_{13}^H в обращенном (относительном) движении для схемы, изображенной на рис.5.19, а, в виде

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right). \quad (5.7)$$

Для схемы на рис.5.19, б имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_2'}. \quad (5.8)$$

Для схемы на рис.5.19, в имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) \left(\frac{z_3}{z_2'} \right). \quad (5.9)$$

Для схемы на рис.5.19, г имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) \left(\frac{z_3}{z_2} \right). \quad (5.10)$$

Как видно из рис.5.19, $\omega_3 = 0$. Разделив числитель и знаменатель левой части уравнений (5.7)-(5.10) на ω_H , после некоторых преобразований получим для схемы на рис.5.19, а и 5.19, б следующее выражение для передаточного отношения $i_{H1}^{(3)}$ от водила

H к первому колесу или $i_{1H}^{(3)}$ — от первого колеса к водилу H при неподвижном колесе 3:

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}}. \quad (5.11)$$

Аналогично из уравнения (5.10) определим передаточное отношение $i_{H1}^{(3)}$ для схемы на рис.5.19, z :

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}. \quad (5.12)$$

Из уравнения (5.9) для схемы на рис.5.19 $в$ имеем

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}}. \quad (5.11)$$

Сравнение уравнений (5.11), (5.12) и (5.13) указывает на возможность реализации большого передаточного отношения при использовании схем, представленных на рис.5.19, a , 5.19, $б$ по сравнению со схемой на рис.5.19, $в$.

Пример. Определить передаточное отношение планетарного редуктора по схеме рис.5.19, a при $z_1 = 100$, $z'_3 = 101$, $z_2 = 99$, $z_3 = 101$. Используя формулу (5.6), получим

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = 10000.$$

Как видно из рис.5.19, представлены схемы механизмов, звенья которых имеют общую ось вращения. Если все колеса имеют один модуль и нарезаны без смещения инструмента, то условие соосности позволяет записать следующие выражения:

$$z_1 + z_2 = z_3 + z'_2 = \Sigma z \quad \text{— для схемы рис.5.19, } a,$$

$$z_1 - z_2 = z_3 - z'_2 = \Sigma z \quad \text{— для схемы рис.5.19, } б,$$

$$z_1 + z_2 = z_3 - z'_2 = \Sigma z \quad \text{— для схемы рис.5.19, } в,$$

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2 = \Sigma z \quad \text{— для схемы рис.5.19, } г,$$

где Σz — суммарное число зубьев — аналог делительного межосевого расстояния.

На рис.5.20, a изображена схема дифференциального механизма. Эта схема отличается от схемы, изображенной на рис.5.19, a тем, что колесо 3 подвижное, то есть в нем $n = 4$ и степень подвижности $W = 2$. Здесь требуется два входных звена

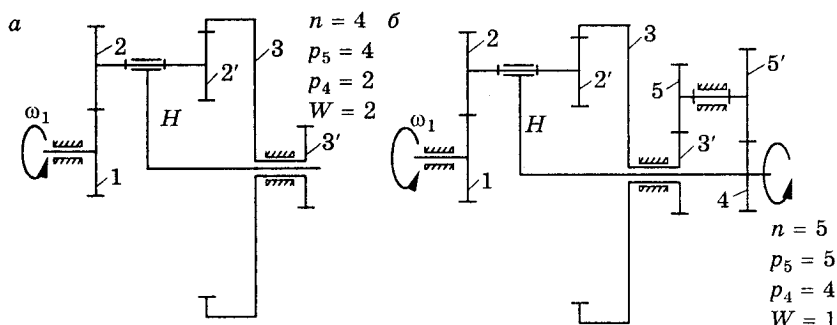


Рис.5.20. Схемы дифференциальных механизмов

(два приводных двигателя). На рис.5.20, б изображена схема замкнутого дифференциала, образованного присоединением блока колес 5-5', связывающих движение водила H (звена 4) со звеном 3 (3'). Этот блок накладывает одно ограничение на движение звеньев дифференциального механизма. Для дифференциального механизма (рис.5.20, а) имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \quad (5.14)$$

Замыкающая цепь (см. рис.5.20, б) дает второе уравнение

$$i_{34} = i_{3H} = \frac{\omega_3}{\omega_H} = \frac{z_5}{z_3'} \cdot \frac{z_4}{z_5'} \quad (5.15)$$

Если требуется определить

$$i_{1H} = i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_{H'}} \quad ,$$

то в уравнении (5.14) необходимо выразить ω_3 , используя уравнение (5.15), то есть подставить выражение

$$\omega_3 = \omega_H \frac{z_5}{z_3'} \cdot \frac{z_4}{z_5'}$$

в формулу (5.14). Тогда, разделив числитель и знаменатель полученного уравнения на ω_H , получим выражение

$$\frac{i_{1H} - 1}{i_{3'4} - \frac{z_5}{z_3'} \cdot \frac{z_4}{z_5'}} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'}$$

из которого следует

$$i_{1H} = i_{13}^H (i_{3'4} - 1) + 1,$$

где i_{13}^H определяется по формуле (6.23), а $i_{3'4}$ — по формуле (6.15).

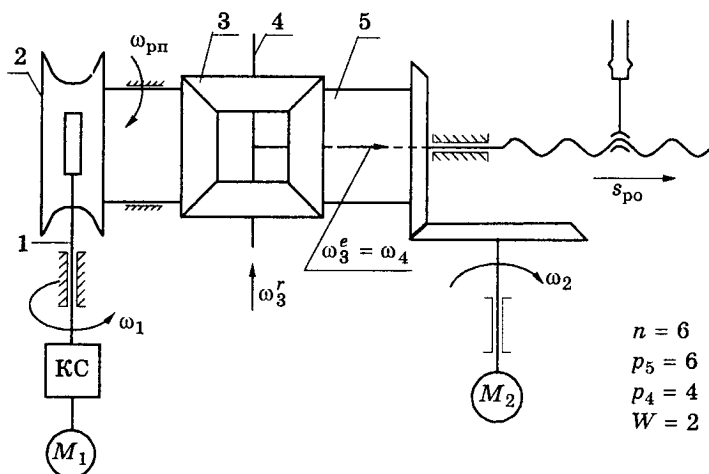


Рис.5.21. Схема дифференциального механизма, используемого для суммирования движений (медленного и быстрого) выходного вала 4 (винта, связанного жестко с Т-образным валом)

Замкнутые дифференциалы имеют более высокий КПД по сравнению с обычными зубчатыми механизмами (коробками скоростей) и простыми планетарными механизмами. Это связано с тем, что в них можно разделить передаваемую мощность на два параллельных потока. Например, ведомое (выходное) звено 5' получает вращение как от шестерни 3 через пару 3'-5, так и от шестерни 4 (води́ла H).

На рис.5.21 представлена схема дифференциального механизма, используемого в станках и средствах механизации для суммирования движений (быстрого и медленного), например, охвата (рабочего органа), установленного на гайке винта 4. Медленное вращение винта обеспечивается при вращении двигателя M_1 через коробку скоростей и червячную передачу (червяк 1, шестерня 2). Червячная шестерня 2 жестко связана с центральной конической шестерней, которая входит в зацепление с сателлитом (конической шестерней 3), свободно посаженной на Т-образный вал 4. Вал 4 жестко связан с ходовым винтом, на гайке которого установлен рабочий орган. Это может быть резец, схват манипулятора и т.п. Медленное вращение звена 2 (червячная и коническая шестерни) заставляет сателлит 3 вращаться вокруг своей оси симметрии и обкатываться по шестерне 5, совершая относительное вращение со скоростью ω_3^r и переносе, вместе с валом-винтом 4 — со скоростью $\omega_3^e = \omega_4$. При этом вращение двигателя M_2

(приводной шестерни 6) позволяет вращать шестерню 5, посаженную свободно на звено 4. В зависимости от направления вращения шестерни 5 она увеличивает или уменьшает скорость относительного вращения ω_2^r спутника 3 и тем самым увеличивает или уменьшает скорость переносного вращения $\omega_2^e = \omega_4$.

Рассмотренные механизмы отличаются возможностью большой редукции при минимальном количестве звеньев $n = 3$, поэтому они находят широкое применение в машинах, где важным является уменьшение материалоемкости привода. Перспективными в этом плане являются также волновые передачи. Сущность их сводится к тому, что вращение передается "бегущей" деформационной волной. Однако с кинематической точки зрения они не отличаются от планетарных механизмов.

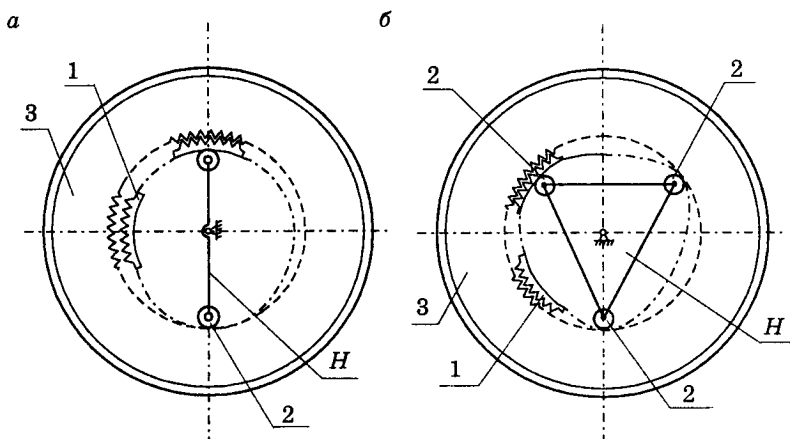


Рис.5.22. Схемы волновых передач: а — двухволновой, б — трехволновой

Волновая передача состоит из гибкого колеса 1 (рис.5.22), наружный диаметр которого меньше внутреннего диаметра зубчатого колеса 3. При насаживании гибкого колеса 1 на водило H (генератор волн) оно деформируется роликами 2, в этом месте входит в контакт с шестерней 3. При вращении генератора волн (водила H) зона контакта колес 1 и 2 перемещается, и таким образом крутящий момент передается на шестерни 1 и 3. Если колеса 1, 3 и генератор волн H подвижны, то передаточные отношения для волнового редуктора определяются, как для дифференциального механизма. Путем закрепления звеньев 1, 3 или H можно получить три передачи:

при $\omega_H = 0$ имеем обычную зубчатую передачу с внутренним зацеплением;

при $\omega_3 = 0$ или $\omega_1 = 0$ имеем планетарные передачи;

при $\omega_H = 0$, имеем передачу с неподвижными осями.

Волновые передачи используются в планетарных вариаторах. При $\omega_3 = 0$ имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_3}{z_1} \quad \text{или} \quad \frac{i_{1H}^{(3)} - 1}{-1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Из последнего уравнения получим

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - \frac{z_3}{z_1} = -\left(\frac{z_3 - z_1}{z_1}\right). \quad (5.16)$$

При $\omega_1 = 0$ имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_3}{z_1} \quad \text{или} \quad \frac{-1}{i_{3H}^{(1)} - 1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Из последнего уравнения имеем

$$i_{3H}^{(1)} = 1 - \frac{z_1}{z_3} = -\left(\frac{z_3 - z_1}{z_1}\right). \quad (5.17)$$

Разность числа зубьев третьего и первого колес $z_3 = z_1$ должна быть кратной числу волн. Чаще всего принимают $z_3 - z_1 = n$. Тогда при $n = 2$ (см. рис.5.22, а) имеем

$$i_{1H}^{(3)} = -\frac{2}{z_1},$$

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{2}{z_3}.$$

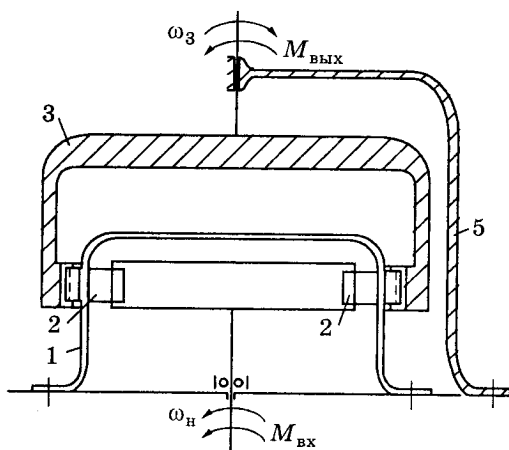


Рис.5.23. Передача вращения через герметичную стенку с использованием волнового редуктора

При наличии фрикционного контакта (колеса соотношения (5.16), (5.17) примут вид

$$i_{1H}^{(3)} = -\left(\frac{D_3 - D_1}{D_1}\right),$$

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{D_3 - D_1}{D_3},$$

где D_1, D_3 — диаметры колес 1 и 3 соответственно.

Волновая передача может использоваться для передачи вращения через герметическую стенку (рис.5.23).

5.5. Кинематические характеристики рычажных механизмов с одной степенью подвижности

5.5.1. Особенности выбора систем координат

Ввиду возможности представления большинства рычажных механизмов как развития (усложнения) схем основных трех с минимальным числом звеньев, покажем некоторые особенности определения их геометрии. На рис.5.24, 5.25, 5.26 представлены три вида механизмов с тремя подвижными звеньями и системы координат, связанные с ними. В основу кинематического исследования плоских механизмов удобней положить метод замкнутого векторного контура, рассматриваемого в проекциях на соответствующей оси. Унификация решения задач силового анализа таких механизмов требует определенного расположения осей подвижных систем координат. Начало их должно совпадать с осями вращательных кинематических пар. При этом векторы,

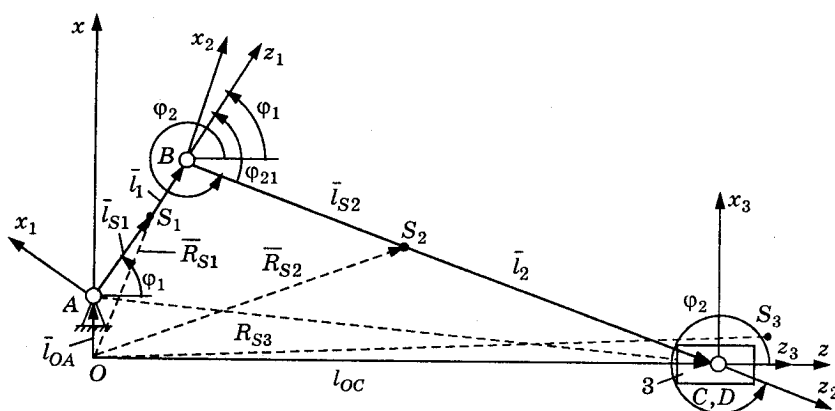


Рис.5.24. К определению кинематических характеристик кривошипно-ползунного механизма

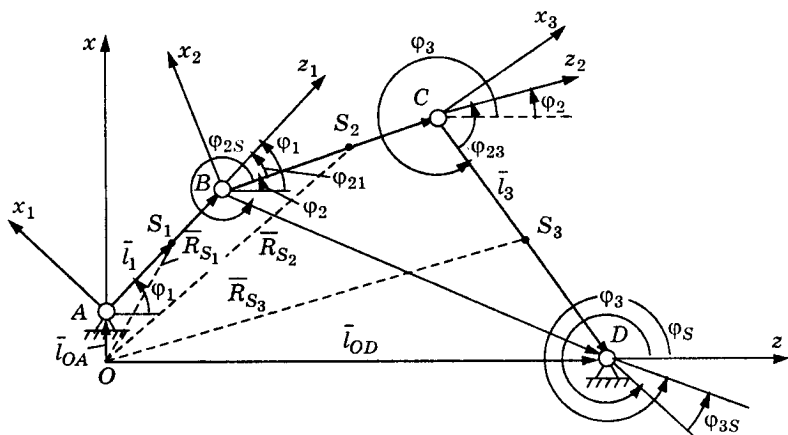


Рис.5.25. К определению кинематических характеристик шарнирного четырехзвенника

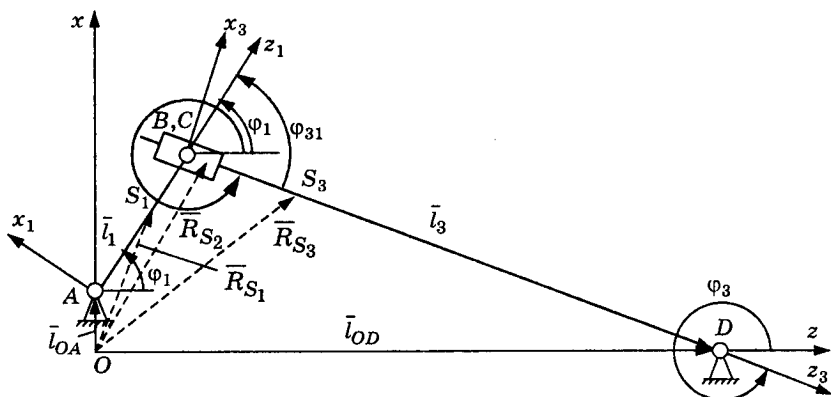


Рис.5.26. К определению кинематических характеристик кулисного механизма

определяющие длины звеньев, представляются в виде $\bar{l} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + l_k\bar{k}$. Это означает, что, например, ось z системы координат, связанной с подвижными звеньями, совмещена с отрезком, соединяющим кинематические пары, в которые входит данное звено. Начала систем координат совместим с центрами соответствующих кинематических пар так, чтобы векторный контур замыкался, начиная от первой и последней. Тогда для схем, представленных на рис.5.24, 5.25, 5.26, имеем следующее векторное уравнение:

$$l_{OD}\bar{k} = l_{OA}\bar{i} + l_{AB}\bar{k}_1 + l_{BC}\bar{k}_2 + l_{CD}\bar{k}_3. \quad (5.18)$$

Для кулисного механизма (см. рис.5.26) $l_{BC} = 0$, а l_{CD} изменяется по величине. Для кривошипно-ползунного механизма (см. рис.5.24) $l_{CD} = 0$. Проектирование уравнения (5.18) на оси неподвижной системы координат означает умножение длин соответствующих звеньев на косинусы углов между ортами подвижных и неподвижных осей координат. Эти углы будут выражаться направляющими косинусами, то есть скалярным произведением единичных ортов этих осей. Тем самым вводится не только однозначность в определении значений тригонометрических функций для различных четвертей, но и удобство использования метода преобразования координат для количественной оценки кинематических характеристик механизмов. Например, для схемы, представленной на рис.5.24, уравнение (5.18) в проекциях на неподвижные оси дает

$$\left. \begin{aligned} z_C = l_{OD} = l_{OA} \cos(\bar{k} \wedge \bar{i}) + l_{AB} \cos(\bar{k} \wedge \bar{k}_1) + l_{BC} \cos(\bar{k} \wedge \bar{k}_2), \\ 0 = l_{OA} \cos(\bar{i} \wedge \bar{i}) + l_{AB} \cos(\bar{i} \wedge \bar{k}_1) + l_{BC} \cos(\bar{i} \wedge \bar{k}_2). \end{aligned} \right\}$$

Углы относительно неподвижной системы координат, связанной со станиной, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_{01} = \bar{k} \wedge \bar{k}_1; \quad \varphi_{10} = 360^\circ - \varphi_{01} = \bar{k}_1 \wedge \bar{k}; \quad \bar{i} \wedge \bar{k}_1 = 90^\circ - \bar{k} \wedge \bar{k}_1; \\ \varphi_2 = \varphi_{02} = \bar{k} \wedge \bar{k}_2; \quad \varphi_{20} = 360^\circ - \varphi_{02} = \bar{k}_2 \wedge \bar{k}; \quad \bar{i} \wedge \bar{k}_2 = 90^\circ - \bar{k} \wedge \bar{k}_2; \\ \varphi_3 = \varphi_{03} = \bar{k} \wedge \bar{k}_3; \quad \varphi_{30} = 360^\circ - \varphi_{03} = \bar{k}_3 \wedge \bar{k}; \quad \bar{i} \wedge \bar{k}_3 = 90^\circ - \bar{k} \wedge \bar{k}_3. \end{aligned}$$

Углы между векторами (звеньями) в относительном движении:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} = \bar{k}_2 \wedge \bar{k}_1; \quad \varphi_{12} = 360^\circ - \varphi_{21} = \bar{k}_1 \wedge \bar{k}_2; \\ \varphi_{32} = \bar{k}_3 \wedge \bar{k}_2; \quad \varphi_{23} = 360^\circ - \varphi_{32} = \bar{k}_2 \wedge \bar{k}_3. \end{aligned}$$

Как видно из рис.5.24, 5.25, 5.26,

$$\begin{aligned} \varphi_{21} = 360^\circ - \varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_2; \\ \varphi_{32} = 360^\circ - \varphi_3 + \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3; \\ \varphi_{31} = 360^\circ - \varphi_3 + \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_3. \end{aligned}$$

5.5.2. Кинематические характеристики простейших рычажных механизмов

Зависимость перемещения выходного звена от обобщенной координаты, скорости его и ускорения определяются из рассмотрения проекций соответствующего векторного контура на

выбранной оси. Для кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 5.24) имеем

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_{OC} = z_C, \\ l_{OA} + l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

откуда

$$\sin \varphi_2 = -\frac{l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1}{l_2},$$

$$z_C = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1}{l_2} \right)^2}.$$

Дифференцирование по φ_1 уравнений (5.19) дает

$$\begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - i_{21} l_2 \sin \varphi_2 &= z'_C, \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} i_{21} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}, \\ z'_C &= \frac{dx_C}{d\varphi_1} = \frac{v_C}{\omega_1} = l_1 \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2}. \end{aligned}$$

Второе дифференцирование по φ_1 уравнения (5.19) дает

$$\begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 - i_{21}^2 l_2 \sin \varphi_2 - i_{21}^2 l_2 \cos \varphi_2 &= z''_C, \\ -l_1 \sin \varphi_1 + i_{21}^2 l_2 \cos \varphi_2 - i_{21}^2 l_2 \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_2'' &= i_{21}' = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + i_{21}^2 l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}, \\ z''_C &= l_1 \frac{(i_{21} - 1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_2 - i_{21} \sin \varphi_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_2}. \end{aligned}$$

Для шарнирного четырехзвенника (см. рис. 5.25) имеем

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 &= l_{OD}, \\ l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Дифференцирование уравнений (5.20) по обобщенной координате дает

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 i_{21} \sin \varphi_2 - l_3 i_{31} \sin \varphi_3 &= 0, \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2 + l_3 i_{31} \sin \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Если повернуть систему координат xOy на угол φ_2 , то из первого уравнения системы (5.21) имеем

$$l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -l_3 i_{31} \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \quad (5.22)$$

откуда

$$i_{31} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Поворот системы координат xOy на угол φ_3 из того же уравнения дает

$$i_{21} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (5.23)$$

Дифференцирование по φ_1 первого уравнения системы (5.21) дает

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i'_{21} \sin \varphi_2 + l_2 i_{21}^2 \cos \varphi_1 + l_3 i'_{31} \sin \varphi_3 + l_3 i_{31}^2 \cos \varphi_3 = 0.$$

Выполняя последовательно поворот осей координат на углы φ_2 и φ_3 , из последнего уравнения получим

$$i'_{31} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 i_{21}^2 - l_3 i_{31}^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}, \quad (5.24)$$

$$i'_{21} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_3 i_{31}^2 + l_2 i_{21}^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (5.25)$$

В шарнирном четырехзвеннике (см. рис.5.25) определению подлежат пять параметров: φ_2 , φ_3 , φ_S , φ_{2S} и φ_{3S} . Для определения углов φ_2 и φ_3 достаточно знать углы φ_S , φ_{2S} и φ_{3S} ; $\varphi_2 = \varphi_S - \varphi_{2S}$; $\varphi_3 = \varphi_S - \varphi_{3S}$.

Из проекции векторного равенства $\bar{l}_{AD} = \bar{l}_1 + \bar{l}_S$ имеем

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_S \cos \varphi_S = z_D,$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_S \sin \varphi_S = -l_{OA}.$$

Из последних уравнений получим равенство

$$\operatorname{tg} \varphi_S = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_{OA}}{l_1 \cos \varphi_1 - z_D}. \quad (5.26)$$

Из соответствующих треугольников (см. рис.5.25) имеем

$$\cos \varphi_{3S} = \frac{l_S^2 + l_3^2 - l_2^2}{2l_S l_3}, \quad (5.27)$$

$$\cos \varphi_{2S} = \frac{l_2^2 + l_S^2 + l_3^2}{2l_2 l_S}, \quad (5.28)$$

$$l_S = -\frac{l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_3}. \quad (5.29)$$

Для кулисного механизма (см. рис. 5.26) имеем

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_3 \cos \varphi_3 = l_{OD}, \quad (5.30)$$

$$l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1 + l_3 \sin \varphi_3 = 0.$$

Из второго уравнения системы (5.25) имеем

$$l_3 = -\frac{l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_3}. \quad (5.31)$$

Аналог скорости ползуна 2 вдоль кулисы 3 определится путем дифференцирования уравнения (5.31) по φ_1 . Дифференцирование дает

$$l_3' = -\frac{l_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - i_{31} \cos \varphi_3 (l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1)}{\sin^2 \varphi_3}. \quad (5.32)$$

Первое уравнение системы (5.30) запишем в виде

$$l_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} \cos \varphi_3 = l_{OD}. \quad (5.33)$$

Обозначим $l_{OD}/l_1 = x_1$, $l_{OA}/l_1 = x_2$. Тогда $\cos \varphi_1 - (x_2 + \sin \varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_3 = x_1$, откуда

$$\operatorname{ctg} \varphi_3 = \frac{\cos \varphi_1}{x_2 + \sin \varphi_1} - \frac{x_1}{\sin \varphi_2}. \quad (5.34)$$

Тогда

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \varphi_3' = (\operatorname{arctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2} = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

При $x_2 = 0$ имеем

$$u' = \frac{x_1 \cos \varphi_1 - 1}{\sin^2 \varphi_1}; \quad 1+u^2 = \frac{1 - 2x_1 \cos \varphi_1 + x_1^2}{\sin^2 \varphi_1}.$$

С учетом полученных соотношений получим

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \varphi_3' = \frac{1 - x_1 \cos \varphi_1}{1 - 2x_1 \cos \varphi_1 + x_1^2}. \quad (5.35)$$

Представление кинематической передаточной функции в виде уравнения (5.35) удобно для анализа различных вариантов кулисного механизма. Так, например, из него следует, что при $\varphi_1 = 0$

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{1}{1 - x_1}. \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) позволяет находить экстремальные значения угловой скорости кулисы при различных сочетаниях $x_1 = l_{OD}/l_1$.

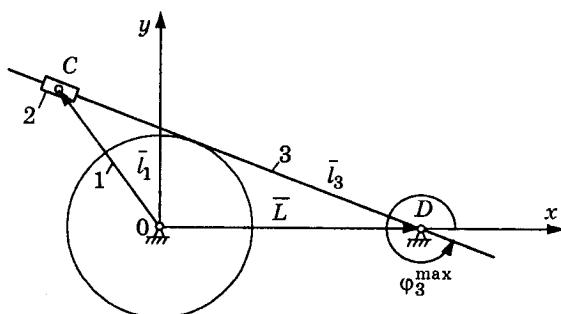


Рис.5.27, а. Схема механизма с качающейся кулисой

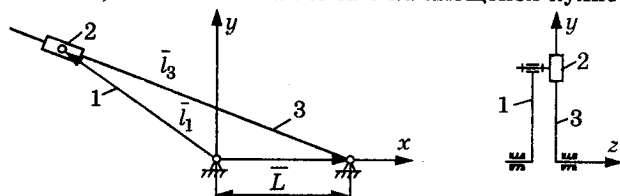


Рис.5.27, б. Схема механизма с вращающейся кулисой

Из него удобно видеть также различие между механизмами с качающейся и вращающейся кулисами. Для качающейся кулисы $x_1 > 1$ для вращающейся — $x_1 < 1$.

На рис.5.27, а представлена схема механизма с качающейся кулисой при

$$x_1 = \frac{l_{OD}}{l_1} = \frac{L}{l_1} > 1.$$

На рис.5.27, б представлена схема механизма с вращающейся кулисой в двух проекциях. На рис.5.28, а — схема механизма, представляющего собой модификацию механизма с вращающейся кулисой (см. рис.5.27, б). Как видно из рис.5.28, а, звено 2 выполнено таким, что угол $\varphi_{31} = \text{const}$ остается постоянным при передаче вращения от звена 1 к 3 или наоборот. Из рис.5.28, а имеем

$$\varphi_3 = \varphi_1 + (\pi - \varphi_{31}).$$

Дифференцирование этого уравнения по φ_1 дает

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 1.$$

Это означает, что звенья 1 и 3 (см. рис.5.28, а) в процессе передачи вращения движутся с одинаковой скоростью. Это свойство используется при передаче вращения от двигателя (рис.5.28, б) к приводному валу коробки скоростей, когда имеется погрешность установки, определяемая расстоянием между их

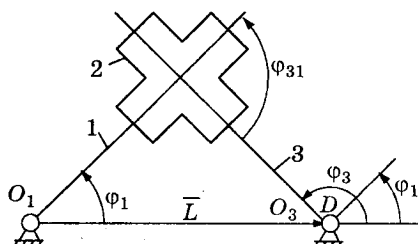


Рис.5.28, а. Схема механизма с постоянным передаточным отношением между звеньями 1 и 3

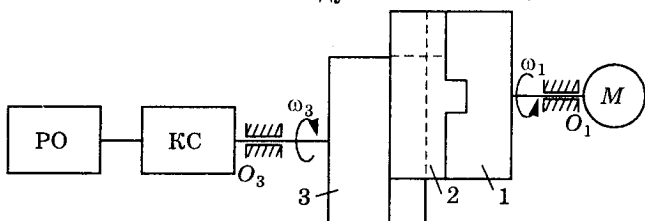


Рис.5.28, б. Схема передачи момента от двигателя к входному валу коробки скоростей, при наличии погрешности установки между их осями вращения

осями O_1O_3 . В этом случае используется уравнивательная муфта, схема которой представлена на рис.5.28, а.

Аналоги скоростей и ускорений центров масс звеньев рассмотренных механизмов находятся аналогично. Например, для схем, представленных на рис.5.24 и 5.25, имеем

$$\left. \begin{aligned} z_{S2} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_{S2} \cos \varphi_2, \\ x_{S2} &= l_{OA} + l_1 \sin \varphi_1 + l_{S2} \sin \varphi_2, \\ z'_{S2} &= -l_1 \sin \varphi_1 - l_{S2} i_{21} \sin \varphi_2, \\ x'_{S2} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_{S2} i_{21} \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Для кулисного механизма (рис.5.28) при дифференцировании (5.37) следует учитывать, что l_3 зависит от φ_1 :

$$\left. \begin{aligned} z''_{S2} &= -l_1 \cos \varphi_1 - l_{S2} i_{21}^2 \sin \varphi_2 - l_{S2} i_{21}^2 \cos \varphi_2, \\ x''_{S2} &= -l_1 \sin \varphi_1 + l_{S2} i_{21}^2 \cos \varphi_2 - l_{S2} i_{21}^2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \right.$$

Тогда действительные скорость и ускорение центра масс звена 2 определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} v_{S2} &= \omega_1 \sqrt{(x'_{S2})^2 + (z'_{S2})^2}, \\ a_{S2}^z &= \omega_1^2 z''_{S2} + \varepsilon_1 z'_{S2}, \\ a_{S2}^x &= \omega_1^2 x''_{S2} + \varepsilon_1 x'_{S2}, \\ a_{S2} &= \sqrt{(a_{S2}^z)^2 + (a_{S2}^x)^2}. \end{aligned} \right.$$

Угловая скорость звена 2 (для схем на рис.5.24, 5.25) выразится как $\omega_2 = \omega_1 i_{21}$, для звена 3 (см. рис.5.26) $\omega_3 = \omega_1 i_{31}$, а угловые ускорения определяются из соотношений

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 i'_{21} + \varepsilon_1 i_{21},$$

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 i'_{31} + \varepsilon_1 i_{31}.$$

Таким образом, все кинематические характеристики механизмов представляются в функции обобщенной координаты, а действительные значения скоростей и ускорений (линейных и угловых) находятся с учетом закона движения звена приведения, определяемого его скоростью ω_1 , и ускорением ε_1 (обобщенными скоростью и ускорением).

Зная аналоги скоростей и ускорений рассмотренных простейших механизмов, легко найти их значения и для других механизмов с большим числом звеньев.

5.5.3. Кинематические характеристики некоторых шестизвенных механизмов

Для механизма, представленного на рис.5.29, имеем $\bar{l}_4 = \bar{l}_{DE} + \bar{l}_{EF}$ или, в проекциях,

$$\left. \begin{aligned} l_4 \cos \varphi_4 &= l_{DE} \cos \varphi_3 + l_{EF}, \\ l_4 \sin \varphi_4 &= l_{DE} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Из второго уравнения системы (5.38) получим

$$\sin \varphi_4 = \frac{l_{DE}}{l_4} \sin \varphi_3. \quad (5.39)$$

Здесь угол $\varphi_3 = \varphi_S - \varphi_{3S}$ (см. также рис.5.25). Таким образом, уравнение (5.39) решается совместно с выражениями (5.26), (5.27), (5.29). После дифференцирования уравнений (5.38) по φ_1 имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_{EF}}{d\varphi_1} = z'_F &= l_{DE} i_{31} \sin \varphi_3 - l_4 i_{41} \sin \varphi_4, \\ i_{41} &= i_{31} \frac{l_{DE}}{l_4} \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Из рис.5.29 видно, что

$$z_F = z_E + l_{EF} = z_E + l_4 \cos \varphi_4 - l_{DE} \cos \varphi_3. \quad (5.41)$$

Учитывая, что механизм на рис.5.29 представляет собой шарнирный четырехзвенник (см. рис.5.25) с присоединенными к звену 3 шатуном 4 и ползуном 5, можно считать выходное звено 3 входным звеном для механизма EDF . Угловая скорость звена 3

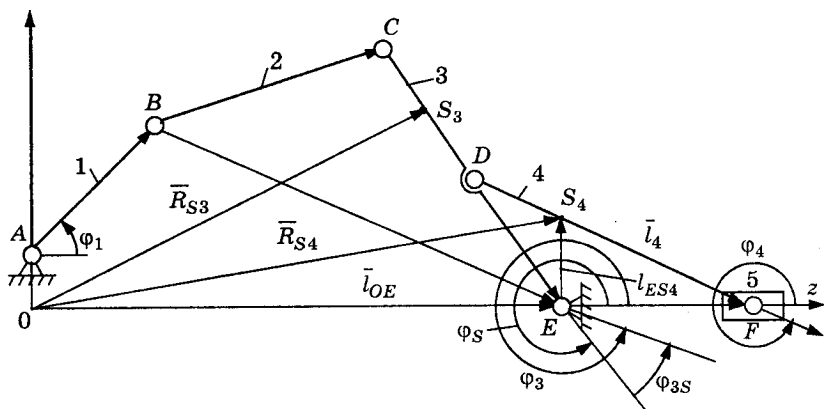


Рис.5.29. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

при этом известна и равна $\omega_3 = \omega_1 i_{31}$. Дифференцирование уравнений (5.38) по φ_3 дает ω_3 .

$$\left. \begin{aligned} -l_4 i_{43} \sin \varphi_4 &= -l_{DE} \sin \varphi_3 + \frac{dl_{EF}}{d\varphi_3}, \\ l_4 i_{43} \cos \varphi_4 &= l_{DE} \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

тогда

$$i_{43} = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{l_{DE}}{l_4} \cdot \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_4}. \quad (5.43)$$

Сравнение последнего уравнения со вторым уравнением системы (5.43) показывает, что $i_{41} = i_{31} \cdot i_{43}$. Записывая

$$\frac{dl_{EF}}{d\varphi_3} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = z'_F \frac{1}{i_{31}},$$

видим, что первое уравнение системы (5.40) получается путем умножения первого уравнения системы (5.42) на i_{31} .

Из рис.5.29 видно, что $\bar{R}_{S4} = \bar{l}_{OE} + \bar{l}_{ES4}$ и $\bar{l}_{DS4} = \bar{l}_{DE} + \bar{l}_{ES4}$. Проекция этих векторных равенств на оси дают

$$\left. \begin{aligned} x_{S4} &= l_{ES4} \sin \varphi_{ES4}, \\ z_{S4} &= z_E + l_{ES4} \cos \varphi_{ES4}, \\ l_{DS4} \cos \varphi_4 &= l_{DE} \cos \varphi_3 + l_{ES4} \cos \varphi_{ES4}, \\ l_{DS4} \sin \varphi_4 &= l_{DE} \sin \varphi_3 + l_{ES4} \sin \varphi_{ES4}. \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Уравнения (5.44) дают возможность выразить координаты центра масс шатуна 4:

$$\left. \begin{aligned} x_{S4} &= l_{OS4} \sin \varphi_4 - l_{DE} \sin \varphi_3, \\ z_{S4} &= z_E + l_{DS4} \cos \varphi_4 - l_{DE} \cos \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

или, с учетом уравнения (5.41)

$$\left. \begin{aligned} x_{S4} &= \left(\frac{l_{DS4}}{l_4} - 1 \right) l_{DE} \sin \varphi_3, \\ z_{S4} &= z_E + l_{DS4} \sqrt{1 - \left(\frac{l_{DE}}{l_4} \sin \varphi_3 \right)^2} - l_{DE} \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\}$$

Дифференцирование уравнений (5.45) по φ_1 дает

$$x'_{S4} = l_{DS4} i_{41} \cos \varphi_4 - l_{DE} i_{31} \cos \varphi_3,$$

$$z'_{S4} = -l_{DS4} i_{41} \sin \varphi_4 + l_{DE} i_{31} \sin \varphi_3,$$

$$x''_{S4} = l_{DS4} (i'_{41} \cos \varphi_4 - i_{41}^2 \sin \varphi_4) - l_{DE} (i'_{31} \cos \varphi_3 - i_{31}^2 \sin \varphi_3),$$

$$z''_{S4} = -l_{DS4} (i'_{41} \sin \varphi_4 + i_{41}^2 \cos \varphi_4) + l_{DE} (i'_{31} \sin \varphi_3 + i_{31}^2 \cos \varphi_3).$$

Аналоги проекций скоростей и ускорений центра масс звена 3 определяются из рассмотрения проекций векторного равенства

$$\bar{l}_{OE} = \bar{R}_{S3} + \bar{l}_{S3E}:$$

$$\left. \begin{aligned} x_{S3} &= -l_{S3E} \sin \varphi_3, \\ z_{S3} &= l_{OE} - l_{S3E} \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

Из уравнений (5.46) имеем

$$\left. \begin{aligned} x'_{S3} &= -l_{S3E} i_{31} \cos \varphi_3, \\ z'_{S3} &= l_{S3E} i_{31} \sin \varphi_3, \\ x''_{S3} &= -l_{S3E} (i'_{31} \cos \varphi_3 - i_{31}^2 \sin \varphi_3), \\ z''_{S3} &= l_{S3E} (i'_{31} \sin \varphi_3 + i_{31}^2 \cos \varphi_3). \end{aligned} \right\}$$

Аналогично могут быть определены кинематические характеристики и для механизмов, представленных на рис.5.30. Так, для контура $ABCD$ применимы полученные ранее формулы (5.20)-(5.29) (см. рис.5.25). Для сохранения единообразия в выборе подвижных систем координат для контура DEF (рис.5.30) требуется совместить начало координат, связанных со звеном 3, с точкой D . В отличие от системы координат, связанной с этим же звеном, при рассмотрении контура $ABCD$ (см. рис.5.25) обозначим новые системы соответствующими индексами. Связь углов поворота этих систем координат выражается соотношениями $\varphi_3^I = \bar{k} \wedge \bar{k}_1$,

$\varphi_3^{II} = \bar{k} \wedge \bar{k}_1$, причем $\varphi_3^I = 180^\circ + \varphi_3^{II}$. Такая же связь остается и при относительном вращении, то есть $\varphi_{23}^I = 180^\circ + \varphi_{23}^{II}$.

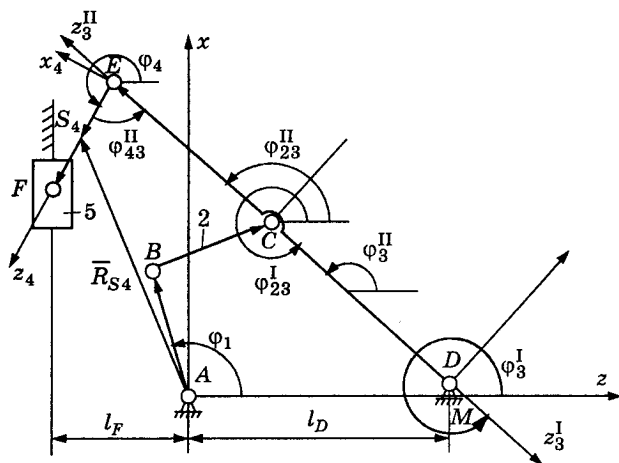


Рис.5.30. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

Записываем векторное равенство $\vec{l}_{DF} = \vec{l}_{DE} + \vec{l}_{EF}$ в проекциях на оси (см. рис.5.30):

$$\left. \begin{aligned} x_F &= l_{DE} \sin \varphi_3^{\text{II}} + l_4 \sin \varphi_4, \\ -(l_D + l_F) &= l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}} + l_4 \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Дифференцирование уравнений (5.47) по φ_1 дает

$$\left. \begin{aligned} x'_F &= i_{31} l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}} + i_{41} l_4 \cos \varphi_4, \\ 0 &= -i_{31} l_{DE} \sin \varphi_3^{\text{II}} - i_{41} l_4 \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Из второго уравнения системы (5.48) имеем

$$i_{41} = -i_{31} \frac{l_{DE}}{l_4} \cdot \frac{\sin \varphi_3^{\text{II}}}{\sin \varphi_4}. \quad (5.49)$$

Согласно доказанному ранее, видно, что в уравнении (5.49)

$$i_{43} = -\frac{l_{DE}}{l_4} \cdot \frac{\sin \varphi_3^{\text{II}}}{\sin \varphi_4}.$$

Из второго уравнения системы (5.47) имеем

$$\sin \varphi_4 = \sqrt{1 - \left(\frac{l_D + l_F + l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}}}{l_4} \right)^2}.$$

Дифференцирование уравнений (5.48) по φ_1 дает

$$\left. \begin{aligned} x_F'' &= i_{31}' l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}} - i_{31}^2 l_{DE} \sin \varphi_3^{\text{II}} + i_{41}' l_4 \cos \varphi_4 - i_{41}^2 l_4 \sin \varphi_4, \\ 0 &= -i_{31}' l_{DE} \sin \varphi_3^{\text{II}} - i_{31}^2 l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}} - i_{41}' l_4 \sin \varphi_4 - i_{41}^2 l_4 \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\}$$

Уравнение замкнутости векторного контура для получения координат центра масс звена 4 имеет вид

$$\bar{R}_{S4} = \bar{l}_{AM} + \bar{l}_{MD} + \bar{l}_{DE} + \bar{l}_{ES4}.$$

Проектируя на оси координат

$$\left. \begin{aligned} x_{S4} &= l_{MD} + l_{DE} \sin \varphi_3^{\text{II}} + l_{ES4} \sin \varphi_4, \\ -z_{S4} &= l_{AM} + l_{DE} \cos \varphi_3^{\text{II}} + l_{ES4} \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Дифференцирование уравнений (5.50) дает

$$\left. \begin{aligned} x_{S4}' &= l_{DE} i_{31}' \cos \varphi_3^{\text{II}} + l_{ES4} i_{41}' \cos \varphi_4, \\ -z_{S4}' &= -l_{DE} i_{31}' \sin \varphi_3^{\text{II}} - l_{ES4} i_{41}' \sin \varphi_4, \\ x_{S4}'' &= -l_{DE} (i_{31}'' \cos \varphi_3^{\text{II}} - i_{31}'^2 \sin \varphi_3^{\text{II}}) + l_{ES4} (i_{41}'' \cos \varphi_4 - i_{41}'^2 \sin \varphi_4), \\ z_{S4}'' &= l_{DE} (i_{31}'' \sin \varphi_3^{\text{II}} + i_{31}'^2 \cos \varphi_3^{\text{II}}) + l_{ES4} (i_{41}'' \sin \varphi_4 + i_{41}'^2 \cos \varphi_4). \end{aligned} \right\}$$

Для нахождения координат центра масс звена 4 можно было воспользоваться и уравнением замкнутости следующего векторного контура (см. рис.5.30): $\bar{R}_{S4} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} + \bar{l}_{CE} + \bar{l}_{ES4}$. В первом случае в уравнение входят векторы l_{AM} и l_{MD} , неизменные по величине и направлению, поэтому аналоги проекций скоростей и ускорений центра масс четвертого звена оказываются проще.

Из рис.5.31 видно, что векторный контур $\bar{l}_{AD} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} + \bar{l}_{CD}$ (на рис.5.31 вектор l_{AD} не показан) дает возможность использовать для описания кинематики механизма $ABCD$ формулы (5.20)-(5.29) без изменения (см. рис.5.25). После этого можно рассмотреть векторное равенство $\bar{l}_{AF} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BE} + \bar{l}_{EF}$, записав его в проекциях на оси с учетом того, что определяется по формуле (5.23), где $l_2 = l_{BD}$, а угол $\varphi_2 = \varphi_S - \varphi_{2S}$.

$$\left. \begin{aligned} x_F &= l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BE} \sin \varphi_2 + l_{EF} \sin \varphi_4, \\ z_F &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BE} \cos \varphi_2 + l_{EF} \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Здесь $\varphi_{42} = \varphi_2 - \varphi_4$, т.к. $360^\circ - \varphi_4 + \varphi_2 = \varphi_{42}$.

Из второго уравнения системы (5.51) имеем

$$\cos \varphi_4 = \frac{1}{l_{EF}} (z_F - l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BE} \cos \varphi_2).$$

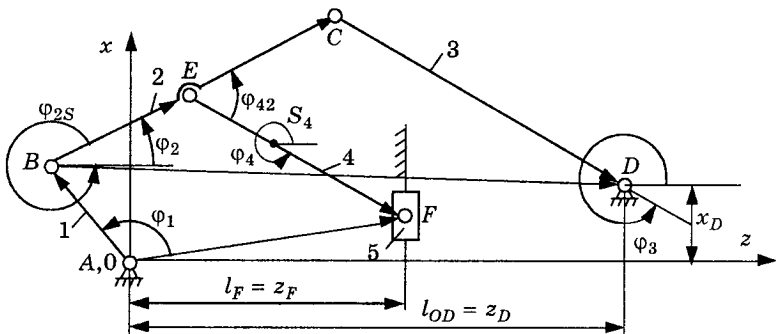


Рис.5.31. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

Дифференцирование системы (5.51) по φ_1 дает

$$\left. \begin{aligned} x_F &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BE} i_{21} \cos \varphi_2 + l_{EF} i_{41} \cos \varphi_4, \\ 0 &= -l_{AB} \sin \varphi_1 - l_{BE} i_{21} \sin \varphi_2 - l_{EF} i_{41} \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Из второго уравнения системы (5.52) имеем

$$i_{41} = -\frac{l_{AB} \sin \varphi_1 + i_{21} l_{BE} \sin \varphi_2}{l_{EF} \sin \varphi_4}.$$

Дифференцирование второго уравнения системы (5.51) по φ_2 дает

$$0 = -l_{AB} \frac{1}{i_{21}} \sin \varphi_1 - l_{BE} \sin \varphi_2 - l_{EF} i_{42} \sin \varphi_4,$$

откуда

$$i_{42} = -\frac{l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BE} i_{21} \sin \varphi_2}{i_{21} l_{EF} \sin \varphi_4}, \text{ то есть } i_{42} = \frac{i_{41}}{i_{21}}.$$

Это говорит о том, что, как и раньше, существует возможность представления кинематической передаточной функции сложного механизма как произведения передаточных функций более простых механизмов (см. рис.5.24, 5.25, 5.26). В данном случае (см. рис.5.31) имеем $l_{41} = i_{21} \cdot i_{42}$.

Для представленного на рис.5.32 механизма имеется возможность использовать формулы (5.30)-(5.35) для контура ABO без изменения (см. рис.5.26) с учетом того, что $l_{AD} = l_{OD} - l_{OA}$ (см. рис.5.32). Для оценки кинематических характеристик звеньев 4 и 5 можно рассмотреть векторное равенство $l_4 = l_{ED} + l_{DO} + l_{OF}$. Проектируя это равенство на оси, получим

$$\left. \begin{aligned} l_4 \sin \varphi_4 &= -l_{ED} \sin \varphi_3 + x_F, \\ -l_4 \cos \varphi_4 &= l_{ED} \cos \varphi_3 - l_{DO}. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

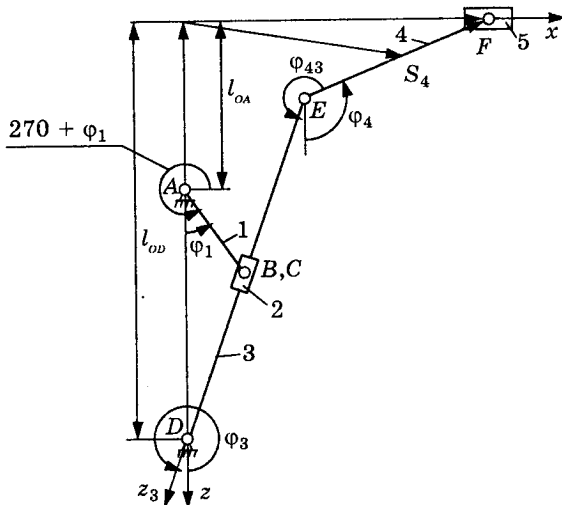


Рис.5.32. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

Из второго уравнения системы (5.53) имеем

$$\cos \varphi_4 = \frac{l_{OD} - l_{ED} \cos \varphi_3}{l_4}.$$

Дифференцирование уравнений (5.53) по φ_1 дает

$$\left. \begin{aligned} x'_F &= l_4 i_{41} \cos \varphi_4 + l_{ED} i_{31} \cos \varphi_3, \\ 0 &= -l_4 i_{41} \sin \varphi_4 - l_{ED} i_{31} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Из второго уравнения системы (5.54) имеем

$$i_{41} = -\frac{i_{31} l_{ED} \sin \varphi_3}{l_4 \sin \varphi_4}. \quad (5.55)$$

По аналогии с предыдущими шестизвенными механизмами из уравнения (5.55) следует, что

$$i_{43} = -\frac{l_{ED} \sin \varphi_3}{l_4 \sin \varphi_4}.$$

Проекция аналога скорости центра масс звена 4 найдется из рассмотрения проекций векторного равенства $\bar{x}_F = \bar{R}_{S_4} + \bar{l}_{S_4 F}$. Проектирование его на оси дает (см. рис.5.32)

$$\left. \begin{aligned} x_{S_4} &= x_F - l_{S_4 F} \sin \varphi_4, \\ z_{S_4} &= l_{S_4 F} \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Дифференцирование уравнений (5.56) дает

$$\left. \begin{aligned} x'_{S_4} &= x'_F - l_{S_4 F} i_{41} \cos \varphi_4, \\ z'_{S_4} &= -l_{S_4 F} i_{41} \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

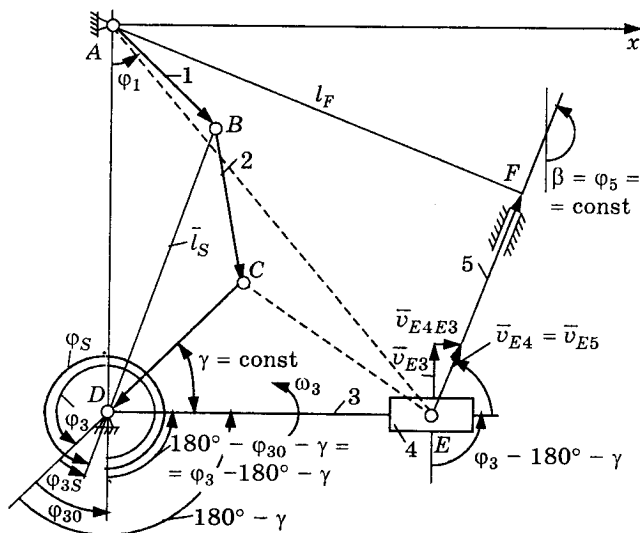


Рис.5.33. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

Дальнейшее дифференцирование по φ_1 уравнений (5.54) и (5.57) позволит найти проекции аналога ускорений центра масс звена 4 и его угловое ускорение.

Выбор осей x и z для механизма, изображенного на рис.5.33, используемого в зубострогальном станке, позволяет использовать без изменения формулы (5.20)-(5.29) для контура $ABCD$ (см. рис.5.25). Для определения кинематических характеристик остальных звеньев удобно воспользоваться равенством $\bar{l}_{AF} = \bar{l}_{AD} + \bar{l}_{DE} + \bar{l}_{EF}$. Проекция этого равенства имеют вид

$$\left. \begin{aligned} s_5 \sin \beta &= x_F = l_{DE} \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) + l_{EF} \sin \beta, \\ s_5 \cos \beta &= z_F = l_{AD} + l_{DE} \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) - l_{EF} \cos \beta. \end{aligned} \right\} (5.58)$$

Дифференцирование уравнений (5.58) по φ_1 дает

$$\left. \begin{aligned} s'_5 \sin \beta &= x'_F = l'_{DE} \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) + l_{DE} i_{31} \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma), \\ s'_5 \cos \beta &= z'_F = l'_{DE} \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) - l_{DE} i_{31} \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma). \end{aligned} \right\}$$

Аналог скорости звена 5 $s'_5 = v_5/\omega_1$ определится из уравнений (5.54). Значение l_{DE} найдем из системы (5.58), принимая $l_{EF} = 0$. После преобразований получим

$$l_{DE} = \frac{l_{AD}}{\operatorname{ctg} \beta \cdot \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) - \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma)}.$$

Аналог относительной скорости ползуна 4 вдоль кулисы 3 получим, дифференцируя по φ_1 уравнение (5.58):

$$v'_{DE} = \frac{v_{E4E3}}{\omega_1} = -l_{AD} i_{31} \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) + \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma)}{[\operatorname{ctg} \beta \cdot \sin(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma) - \cos(\varphi_3 - 180^\circ - \gamma)]^2}.$$

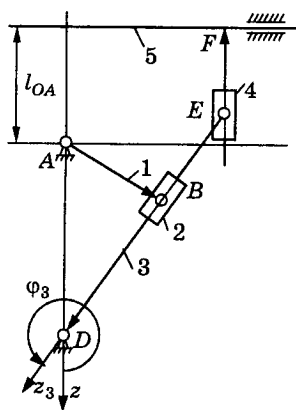


Рис.5.34. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма

уравнения (5.60) дает

$$l'_{EF} = \frac{v_{E4E5}}{\omega_1} = l_{ED} i_{31} \sin \varphi_3.$$

Дифференцирование по φ_1 первого уравнения системы (5.59) дает

$$l'_{FO} = \frac{v_5}{\omega_1} = l_{ED} i_{31} \cos \varphi_3,$$

$$l''_{FO} = l_{ED} (i'_{31} \cos \varphi_3 - i_{31}^2 \sin \varphi_3).$$

На рис.5.35 представлена схема исполнительного механизма зубодолбежного станка. В нем шатун-рейка 2 сцепляется с шестерней 4, которая приводит в движение ползун 5 с долбяком.

Для механизма, изображенного на рис.5.34, выбранное направление системы координат позволяет использовать полученные ранее формулы (5.31)-(5.36) для кулисного механизма (см. рис.5.26). Затем, рассмотрев проекции векторного равенства $\vec{l}_{ED} = \vec{l}_{EF} + \vec{l}_{FO} + \vec{l}_{OD}$, определим остальные кинематические зависимости. Проекция этого равенства имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -l_{ED} \sin \varphi_3 &= -l_{FO}, \\ l_{ED} \cos \varphi_3 &= -l_{EF} + l_{OD}. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Из второго уравнения системы (5.59) имеем

$$l_{ED} = l_{OD} - l_{ED} \cos \varphi_3. \quad (5.60)$$

Дифференцирование по φ_1

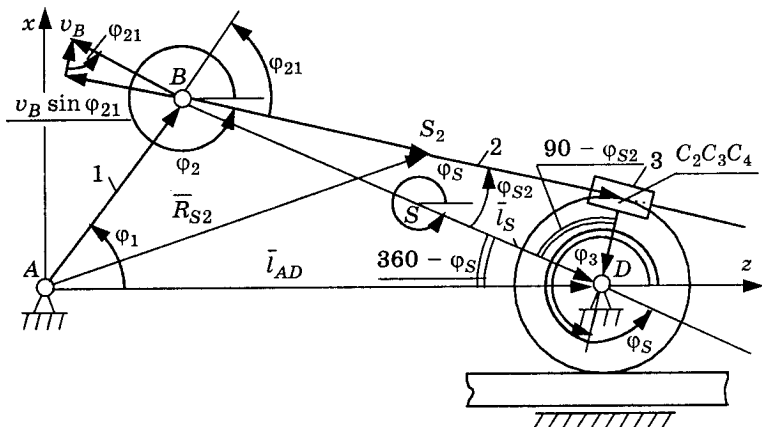


Рис.5.35. К определению кинематических характеристик исполнительного механизма зубодолбежного станка

Для этого механизма проекции векторного уравнения $\vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BD} = \vec{l}_{AD}$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} l_{AB} \cos \varphi_1 + l_S \cos \varphi_S &= l_{AD}, \\ l_{AB} \sin \varphi_1 + l_S \sin \varphi_S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Решая совместно уравнения (5.61), получим

$$\operatorname{tg} \varphi_S = - \frac{l_{AB} \sin \varphi_1}{l_{AD} - l_{AB} \cos \varphi_1}.$$

Из $\triangle ABD$ имеем

$$l_S^2 = l_{AB}^2 + l_{AD}^2 - 2l_{AB}l_{AD} \cos \varphi_1.$$

Из прямоугольного треугольника BCD имеем $l_{BC} = l_S \cos \varphi_{S2}$,

$$\sin \varphi_{S2} = \frac{l_{CD}}{l_S}, \quad (5.62)$$

$$l_{BC} = \sqrt{l_S^2 - l_{CD}^2} = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AD}^2 - 2l_{AB}l_{AD} \cos \varphi_1 - l_{CD}^2}.$$

Дифференцирование уравнения (5.62) дает

$$\dot{l}_{BC} = \frac{v_{C2}}{\omega_1} = \frac{l_{AB}l_{AD} \sin \varphi_1}{\sqrt{l_{AB}^2 + l_{AD}^2 - l_{CD}^2 - 2l_{AB}l_{AD} \cos \varphi_1}}.$$

Из рис.5.35 видно, что скорость v_{C2} точки C_2 шатуна 2 направлена вдоль шатуна 2 и перпендикулярна радиусу CD шестерни 4. Отсутствие проскальзывания в точке C контакта шатуна 2 с шестерней 4 означает, что в ней находится мгновенный центр скоростей в относительном движении. Тогда скорость точки C_2

найдется как $v_{C2} = v_B \sin \varphi_{21}$. Угловая скорость звена 2 определится из выражения

$$\omega_2 = \frac{v_B \cos \varphi_{21}}{l_{BC}}$$

или из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{C2}}{\omega_1} &= l_{AB} \sin \varphi_{21}, \\ i_{21} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{l_{AB}}{l_{BC}} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь $\varphi_{21} = \varphi_1 - \varphi_2$ (см. рис. 5.35).

Рассматривая уравнение $\bar{l}_{AD} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} + \bar{l}_{CD}$ в проекциях, имеем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \sin \varphi_2 + l_{CD} \sin \varphi_4, \\ 0 &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \varphi_2 + l_{CD} \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

Из рис. 5.35 видно, что $360^\circ - \varphi_4 = 90^\circ - \varphi_{S2} + 360^\circ - \varphi_S$, откуда $\varphi_S + \varphi_{S2} - \varphi_4 = 90^\circ$, так что, с учетом выражения (5.59) и соотношений

$$\sin \varphi_{S2} = \frac{l_{CD}}{l_S} \quad \text{и} \quad \varphi_4 = \varphi_S + \varphi_{S2} - 90^\circ,$$

получим выражение

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{CD} \sin \varphi_4}{l_{AD} - l_{AB} \cos \varphi_1 - l_{CD} \cos \varphi_4}.$$

Дифференцирование уравнений (5.63) дает

$$\left. \begin{aligned} 0 &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l'_{BC} \sin \varphi_2 + l_{BC} i_{21} \cos \varphi_2 + l_{CD} i_{41} \cos \varphi_4, \\ l_{AD} &= -l_{AB} \sin \varphi_1 + l'_{BC} \cos \varphi_2 - l_{BC} i_{21} \sin \varphi_2 - l_{CD} i_{41} \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

Из первого уравнения системы (5.64) имеем

$$i_{41} = - \frac{l_{AB} \cos \varphi_1 + l'_{BC} \sin \varphi_2 + l_{BC} i_{21} \cos \varphi_2}{l_{CD} \cos \varphi_4}.$$

Учитывая, что

$$\omega_5 = \frac{v_{C2}}{l_{CD}} = \frac{v_B \sin \varphi_{21}}{l_{CD}},$$

получим

$$i_{51} = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{l_{AB}}{l_{CD}} \sin \varphi_{21},$$

$$s'_{6} = \frac{v_6}{\omega_1} = \frac{v_{C2}}{\omega_1} = l_{AB} \sin \varphi_{21}.$$

Проекция аналога скорости центра масс шатуна найдем из рассмотрения векторного равенства $\vec{R}_{S2} = \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BS2}$ (см. рис.5.35):

$$\left. \begin{aligned} x_{S2} &= l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BS2} \sin \varphi_2, \\ z_{S2} &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BS2} \cos \varphi_2, \\ x'_{S2} &= l_{AB} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - l_{BS2} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \\ z'_{S2} &= -l_{AB} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_{BS2} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\}$$

На рис.5.36 представлена схема механизма, используемая для поворота стола многошпиндельного токарного автомата. Стол (звено 4) поворачивается на угол φ_4 при повороте кривошипа на некоторый угол φ_1 . В зависимости от числа одновременно обрабатываемых деталей (4, 5, 6 и т.д.) угол поворота стола φ_4 будет определяться как $\pi/2$, $2\pi/5$, $\pi/3$ и т.д. В пределах этих углов механизм существует, то есть звено 2 входит в кинематическую пару со звеном 5. После поворота на требуемый угол кинематическая пара "разрывается", звено 2 выходит из зацепления со звеном 5, и кривошип 1 вращается "вхолостую" до следующего совпадения звена 2 со звеном 5. Звено 5 образует вращательную кинематическую пару со столом 4. Для механизма удобно рассмотреть следующие векторные равенства: $\vec{l}_{AC} = \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BC}$, $\vec{l}_{AC} = \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BC}$, $\vec{l}_{BD} = \vec{l}_{BC} + \vec{l}_{CD}$. Из уравнений проекций первого равенства имеем

$$\left. \begin{aligned} l_C \sin \lambda &= x_C = l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \sin \varphi_2, \\ l_C \cos \lambda &= z_C = l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

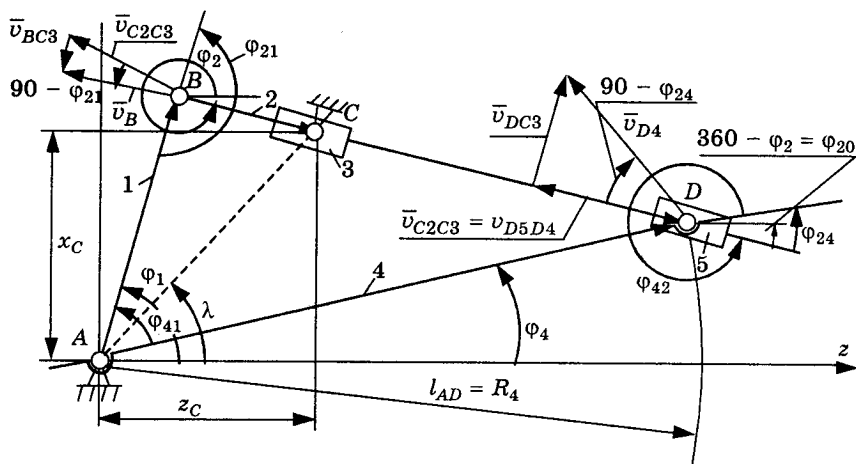


Рис.5.36. К определению кинематических характеристик шестизвенного механизма поворота стола многошпиндельного токарного автомата

Решая совместно уравнения (5.65), получим

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_C - l_{AB} \sin \varphi_1}{z_C - l_{AB} \cos \varphi_1}.$$

Дифференцирование уравнений (5.65) дает

$$\left. \begin{aligned} 0 &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l'_{BC} \sin \varphi_2 + l_{BC} i_{21} \cos \varphi_2, \\ 0 &= l_{AB} \sin \varphi_1 + l'_{BC} \cos \varphi_2 - l_{BC} i_{21} \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Из рис. 5.36 видно, что

$$\begin{aligned} l_{BC} &= \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - 2l_{AB}l_{AC} \cos(\varphi_1 - \lambda)}, \\ l_{CD} &= \sqrt{l_{AC}^2 + l_{AD}^2 - 2l_{AC}l_{AD} \cos(\lambda - \varphi_4)}, \\ l_{BD} &= \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AD}^2 - 2l_{AB}l_{AD} \cos(\varphi_1 - \varphi_4)}. \end{aligned}$$

Из рис. 5.36 следует, что

$$v_B \sin \varphi_{21} = v_{D4} \sin \varphi_{24}$$

или

$$i_{41} = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{l_{AB} \sin \varphi_{21}}{l_{AD} \sin \varphi_{24}}.$$

Равенство проекций скоростей точек B и D на прямую BD означает равенство проекций аналогов скоростей точек B_2 и D_2 на эту прямую, то есть $l'_{BC} = l'_{BD}$.

Из рис. 5.36 имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{24} &= \frac{l_{AD}^2 + l_{BD}^2 - l_{AB}^2}{2l_{AB}l_{AD}}, \\ \cos \varphi_{21} &= \frac{l_{AC}^2 + l_{AB}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AB}l_{BC}}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Из рис. 5.36 видно, что $\varphi_{21} = \varphi_1 - \varphi_2$; $\varphi_{24} = \varphi_4 - \varphi_2$; $\varphi_{41} = \varphi_1 - \varphi_4$, при этом $\varphi_{21} = \varphi_{24} + \varphi_{41}$.

Проектируя равенство $\bar{l}_{AB} = \bar{l}_{AD} + \bar{l}_{BD}$ на оси, получим

$$\left. \begin{aligned} l_{AD} \cos \varphi_4 &= l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BD} \cos \varphi_2, \\ l_{AD} \sin \varphi_4 &= l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BD} \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Из последних уравнений имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BD} \sin \varphi_2}{l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BD} \cos \varphi_2}.$$

Таким образом, после дифференцирования первого уравнения системы (5.67) из первого уравнения (5.66) находим

$$i_{21} = - \frac{l_{AB} \cos \varphi_1 + l'_{BC} \sin \varphi_2}{l_{BC} \cos \varphi_2}.$$

Поворот системы координат XZ на угол φ_4 позволяет записать первое уравнение системы (5.68) в виде

$$l_{AD} = l_{AB} \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + l_{BD} \cos(\varphi_2 - \varphi_4),$$

откуда

$$l_{BD} = \frac{l_{AD} - l_{AB} \cos \varphi_{41}}{\cos \varphi_{42}},$$

где $\varphi_{41} = \varphi_1 - \varphi_4 = 360^\circ - \varphi_{24}$.

5.5.4. Алгоритмы определения кинематических характеристик рычажных механизмов с одной степенью подвижности

Как показано ранее, образование сложных многосвязных рычажных механизмов с числом степеней свободы $W = 1$ во многих случаях можно представить как последовательное соединение

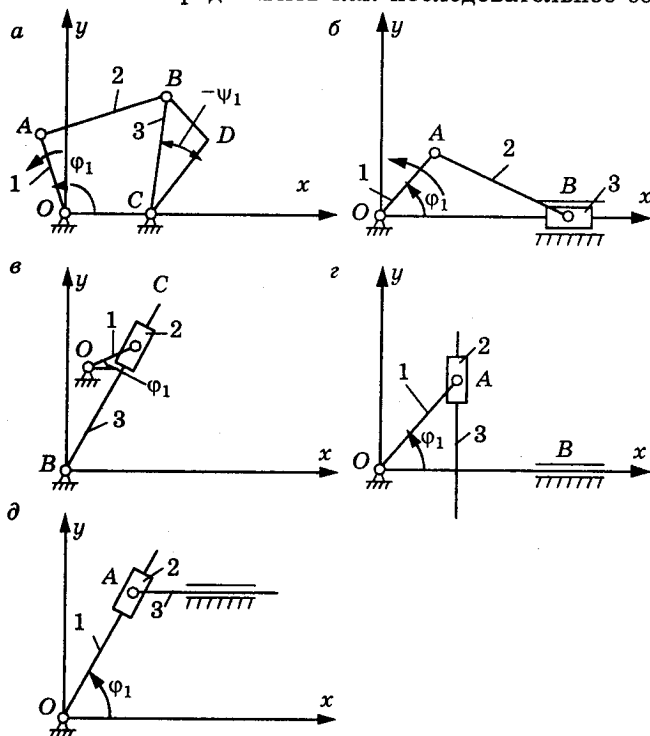


Рис.5.37. Схемы простейших рычажных механизмов, положенных в основу определения кинематических характеристик более сложных схем: а — шарнирный четырехзвенник, б — кривошипно-ползунный механизм, в — кулисный механизм, г — синусный механизм, д — тангенсный механизм

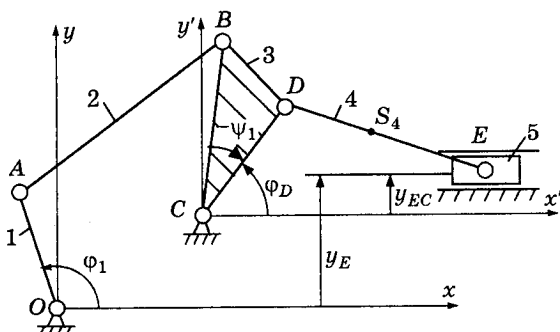


Рис.5.38. Шестизвенный механизм, образованный присоединением кривошипно-ползунного к шарнирному четырехзвеннику

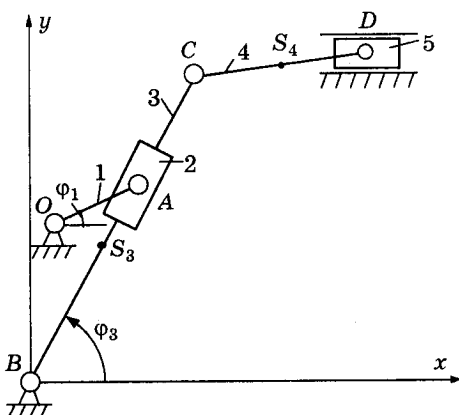


Рис.5.39. Шестизвенный механизм, представляющий объединение кулисного и кривошипно-ползунного

простейших (базовых) четырехзвенных механизмов, для каждого из которых начальным звеном является выходное звено предшествующего механизма. В качестве базовых механизмов могут быть приняты механизмы с тремя подвижными звеньями, представленные на рис.5.37. Так, например, шестизвенный механизм (рис.5.38) можно рассматривать как последовательное соединение шарнирного четырехзвенника 1, 2, 3 и кривошипно-ползунного механизма 3, 4, 5, причем начальным звеном кривошипно-ползунного механизма является выходное звено 3 шарнирного четырехзвенника. Тогда угол φ_D играет роль обобщенной координаты для присоединенного механизма.

Аналогичным образом шестизвенный механизм (рис.5.39) образован посредством последовательного соединения кулисного механизма 1, 2, 3 и кривошипно-ползунного механизма 3, 4, 5.

Здесь обобщенной координатой для присоединенного механизма служит угол φ_3 .

В основу определения кинематических характеристик рычажных механизмов положен метод замкнутого векторного контура. Этот метод состоит в том, что схема механизма рассматривается как замкнутый контур. Для этого составляется векторное уравнение, определяющее его замкнутость. Далее составляется уравнение проекций этого контура на координатные оси, из которых определяются функции положения точек (центров масс звеньев) и звеньев относительно выбранной системы координат. Затем уравнения проекций дифференцируют по обобщенной координате, в результате чего получают кинематические передаточные функции. Для определения их производных выполняют вторичное дифференцирование. Векторное уравнение замкнутости контура $OABCO$ для схемы 5.40 имеет вид

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_{OC} + \bar{l}_3.$$

Для этой схемы получен следующий алгоритм определения кинематических характеристик

- 1) $x_A = l_1 \cos \varphi_1$,
- 2) $y_A = l_1 \sin \varphi_1$,
- 3) $l = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$,
- 4) $\cos \varphi = (x_A - x_C)/l$,
- 5) $\sin \varphi = (y_A - y_C)/l$,
- 6) $\angle ABC = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l^2}{2l_2l_3}\right)$,
- 7) $\cos \beta = (l_3^2 + l^2 - l_2^2)/(2l_2l_3)$,
- 8) $\sin \beta = a\sqrt{1 - \cos^2 \beta}$,

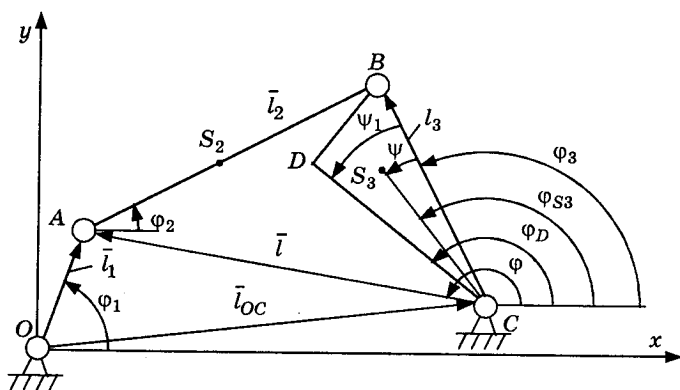


Рис.5.40. Обобщенная схема шарнирного четырехзвенника

где a — признак сборки механизма: $a = 1$, если обход контура ABC совершается по часовой стрелке; $a = -1$, если обход этого контура совершается против часовой стрелки;

- 9) $\varphi_3 = \varphi - \beta$, 16) $x_D = x_C + l_4 \cos \varphi_D$, где $l_4 = l_{CD}$,
 10) $x_B = x_C + l_3 \cos \varphi_3$, 17) $y_D = y_C + l_4 \sin \varphi_D$,
 11) $y_B = y_C + l_3 \sin \varphi_3$, 18) $x_{S2} = x_A + l_5 \cos \varphi_2$, где $l_5 = l_{AS2}$,
 12) $\cos \varphi_2 = (x_B - x_A)/l_2$, 19) $y_{S2} = y_A + l_5 \sin \varphi_2$,
 13) $\sin \varphi_2 = (y_B - y_A)/l_2$, 20) $x_{S3} = x_C + l_6 \cos \varphi_{S3}$, где $l_6 = l_{CS3}$,
 14) $\varphi_{S3} = \varphi_3 + \psi$, 21) $y_{S3} = y_C + l_6 \sin \varphi_{S3}$,
 15) $\varphi_D = \varphi_3 + \psi_1$,

передаточные функции (аналоги угловых скоростей)

$$22) i_{21} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}, \quad 23) i_{31} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)};$$

проекция аналогов скоростей центров масс звеньев

- 24) $x'_{S2} = -l_1 \sin \varphi_1 - i_{21} l_5 \sin \varphi_2$, 27) $y'_{S3} = i_{31} l_6 \cos \varphi_{S3}$,
 25) $y'_{S2} = l_1 \cos \varphi_1 + i_{21} l_5 \cos \varphi_2$, 28) $x'_D = -i_{31} l_4 \sin \varphi_D$,
 26) $x'_{S3} = -i_{31} l_6 \sin \varphi_{S3}$, 29) $y'_D = i_{31} l_4 \cos \varphi_D$;

аналоги угловых ускорений звеньев

$$30) i'_{21} = \frac{-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_2 i_{21}^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_3 i_{31}^2}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$31) i'_{31} = \frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 i_{21}^2 - l_3 i_{31}^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)};$$

проекция аналогов ускорений центров масс звеньев

- 32) $x''_{S2} = -l_1 \cos \varphi_1 - i_{21}^2 l_5 \cos \varphi_2 - i'_{21} l_5 \sin \varphi_2$,
 33) $y''_{S2} = -l_1 \sin \varphi_1 - i_{21}^2 l_5 \sin \varphi_2 + i'_{21} l_5 \cos \varphi_2$,
 34) $x''_{S3} = -l_6 i_{31}^2 \cos \varphi_{S3} - l_6 i'_{31} \sin \varphi_{S3}$,
 35) $y''_{S3} = -l_6 i_{31}^2 \sin \varphi_{S3} + l_6 i'_{31} \cos \varphi_{S3}$.

Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм с горизонтальным движением ползуна (рис.5.41, а). Векторное уравнение замкнутости контура $OABO$ имеет вид $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_{OB}$.

Определение кинематических характеристик этого механизма имеет определенную последовательность:

- 1) $x_A = l_1 \cos \varphi_1$, 3) $x_B = x_A + a \sqrt{l_2^2 - (y_B - y_A)^2}$,
 2) $y_A = l_1 \sin \varphi_1$,

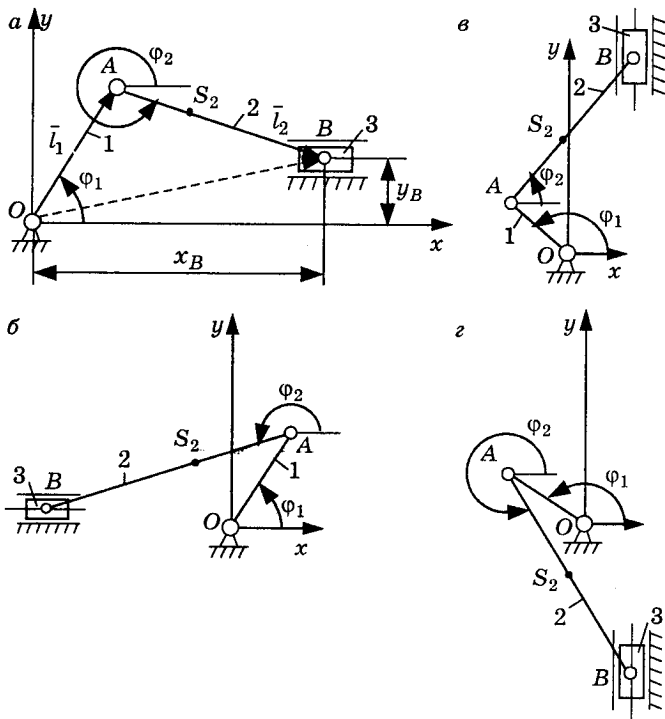


Рис.5.41. Схемы кривошипно-ползуновых механизмов:
 а, б — с горизонтальным перемещением ползуна, в, г — с вертикальным перемещением ползуна

где a — признак сборки механизма: $a = +1$, если ползун расположен справа от начала координат (рис.5.41, а); $a = -1$, если ползун расположен слева от начала координат (рис.5.41, б);

$$4) \cos \varphi_2 = (x_B - x_A)/l_2, \quad 6) x_{S_2} = x_A + l_3 \cos \varphi_2, \quad \text{где } l_3 = l_{AS_2},$$

$$5) \sin \varphi_2 = (y_B - y_A)/l_2, \quad 7) y_{S_2} = y_A + l_3 \sin \varphi_2;$$

передаточные функции (аналоги скоростей звеньев):

$$8) i_{21} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}, \quad 9) i_{31} = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 i_{21} \sin \varphi_2;$$

проекции аналога скорости точки S_2 :

$$10) x'_{S_2} = -l_1 \sin \varphi_1 - i_{21} l_3 \sin \varphi_2, \quad 11) y'_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + i_{21} l_3 \cos \varphi_2;$$

аналоги ускорений звеньев:

$$12) i'_{21} = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_2 i_{21}^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2},$$

$$13) i'_{31} = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 i'_{21} \sin \varphi_2 - l_2 i_{21}^2 \cos \varphi_2;$$

проекция аналога ускорения точки S_2 :

$$14) x''_{S_2} = -l_1 \cos \varphi_1 - l_3 i'_{21} \sin \varphi_2 - l_3 i''_{21} \cos \varphi_2,$$

$$15) y''_{S_2} = -l_1 \sin \varphi_1 - l_3 i'_{21} \sin \varphi_2 + l_3 i''_{21} \cos \varphi_2.$$

Для кривошипно-ползунного механизма с вертикальным движением ползуна (рис.5.41, в) алгоритм определения кинематических характеристик получается аналогичным образом и имеет следующий вид:

$$1) x_A = l_1 \cos \varphi_1, \quad 3) y_B = y_A + a \sqrt{l_2^2 - (x_B - x_A)^2},$$

$$2) y_A = l_1 \sin \varphi_1,$$

где a — признак сборки механизма: $a = +1$, если ползун расположен сверху от начала координат (рис.5.41, в); $a = -1$, если ползун расположен снизу от начала координат (рис.5.41, з);

$$4) \cos \varphi_2 = (x_B - x_A)/l_2,$$

$$5) \sin \varphi_2 = (y_B - y_A)/l_2,$$

$$6) i_{21} = -\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \sin \varphi_2},$$

$$7) i_{31} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2,$$

$$8) i'_{21} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2}{l_2 \sin \varphi_2},$$

$$9) i'_{31} = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 i'_{21} \sin \varphi_2 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2.$$

Выражения для определения x_{S_2} , y_{S_2} , x'_{S_2} , y'_{S_2} такие же, как и для механизма с горизонтальным движением ползуна.

Рассмотрим кривошипно-кулисный механизм (рис.5.42). Векторное уравнение замкнутости контура $BOAB$ имеет вид $\vec{l}_0 + \vec{l}_1 - \vec{l}_2 = 0$. Алгоритм определения кинематических характеристик имеет следующий вид:

$$1) x_A = x_0 + l_1 \cos \varphi_1, \quad 5) x_C = l_3 \cos \varphi_3, \text{ где } l_3 = l_{BC},$$

$$2) y_A = y_0 + l_1 \sin \varphi_1, \quad 6) y_C = l_3 \sin \varphi_3,$$

$$3) \cos \varphi_3 = x_A/l_2, \quad 7) x_{S_3} = l_6 \cos \varphi_3, \text{ где } l_6 = l_{BS_3},$$

$$4) \sin \varphi_3 = y_A/l_2, \quad 8) y_{S_3} = l_6 \sin \varphi_3;$$

передаточные функции (аналоги скоростей звеньев):

$$9) i_{31} = l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)/l_2, \quad 10) l'_2 = -l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3);$$

проекция аналогов скоростей точек S_3 и C :

$$11) x'_{S_3} = -l_6 i_{31} \sin \varphi_3, \quad 13) x'_C = -l_3 i_{31} \sin \varphi_3,$$

$$12) y'_{S_3} = l_6 i_{31} \cos \varphi_3, \quad 14) y'_C = l_3 i_{31} \cos \varphi_3;$$

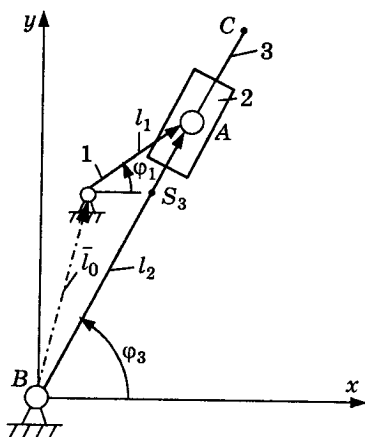


Рис.5.42. Схема кривошипно-кулисного механизма аналогии ускорений звеньев:

$$15) i'_{31} = -l_2'(2i_{31} - 1)/l_2, \quad 16) l_2'' = l_2 i_{31}^2 - l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3);$$

проекции аналогов ускорений точек:

$$17) x''_{S_3} = -l_6(i'_{31} \sin \varphi_3 + i_{31}^2 \cos \varphi_3),$$

$$18) y''_{S_3} = l_6(i'_{31} \cos \varphi_3 - i_{31}^2 \sin \varphi_3),$$

$$19) x''_C = -l_3(i'_{31} \sin \varphi_3 + i_{31}^2 \cos \varphi_3),$$

$$20) y''_C = l_3(i'_{31} \cos \varphi_3 - i_{31}^2 \sin \varphi_3).$$

Рассмотрим синусный механизм (рис.5.43). Векторное уравнение замкнутости контура $OABD$ имеет вид

$$\bar{l}_{OA} + \bar{l}_{AB} = \bar{l}_{OB}.$$

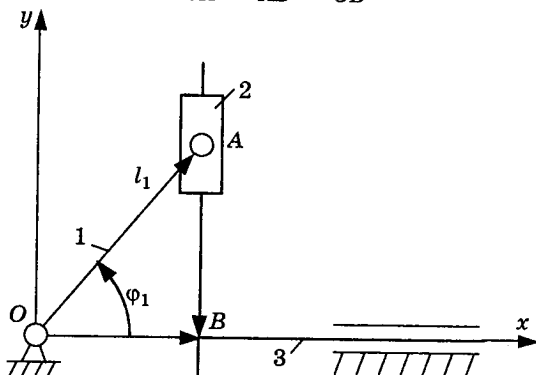


Рис.5.43. Схема синусного механизма

Алгоритм определения кинематических характеристик для этого механизма следующий:

- 1) $x_A = l_1 \cos \varphi_1$, 4) $y'_A = -l_1 \sin \varphi_1$,
- 2) $y_A = l_1 \sin \varphi_1$, 5) $i'_{31} = -l_1 \cos \varphi_1$,
- 3) $i_{31} = -l_1 \sin \varphi_1$, 6) $y''_A = -l_1 \cos \varphi_1$.

Для тангенсного механизма (рис.5.44) векторное уравнение замкнутости контура $DABO$ имеет вид

$$\bar{l}_{OA} + \bar{l}_{AB} = \bar{l}_{OB}.$$

Алгоритм определения кинематических характеристик может быть представлен следующим образом:

- 1) $l_1 = y_A / \sin \varphi_1$, 4) $i_{31} = -y_A / \sin^2 \varphi_1$,
- 2) $x_A = y_A / \operatorname{tg} \varphi_1$, 5) $l'_1 = y_A (1 + \cos^2 \varphi_1) / \sin^3 \varphi_1$,
- 3) $l_1 = -y_A \cos \varphi_1 / \sin^2 \varphi_1$, 6) $i_{31} = 2y_A \cos \varphi_1 / \sin^3 \varphi_1$.

Как было показано ранее, образование сложных многосвязных рычажных механизмов во многих случаях можно представить как последовательное соединение простейших четырехзвенных механизмов, причем для каждого последующего механизма начальным звеном является выходное звено предыдущего механизма.

Рассмотрим методику определения кинематических характеристик 6-звенного рычажного механизма, изображенного на рис.5.38. Обобщенной координатой этого механизма является угол поворота кривошипа φ_1 . Расчет кинематических характеристик начинается с рассмотрения первого базового механизма со

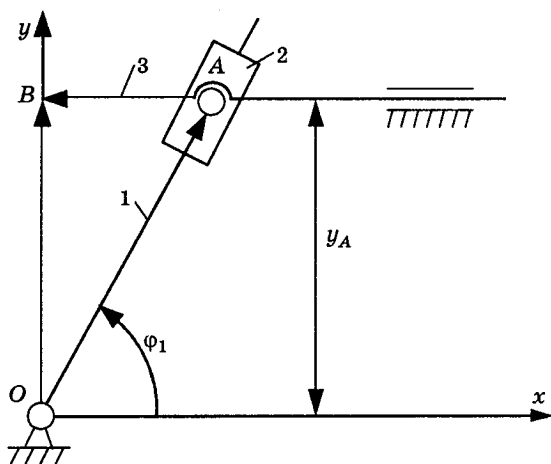


Рис.5.44. Схема тангенсного механизма

звеньями 1, 2, 3 в соответствии с алгоритмом для механизма шарнирного четырехзвенника (рис.5.40). Далее производится определение кинематических характеристик второго базового механизма со звеньями 3, 4, 5, для которого в качестве обобщенной координаты служит угол φ_D , значения которого получены при рассмотрении первого базового механизма. Для этого используется алгоритм, описанный для кривошипно-ползунного механизма (см. рис.5.41, а). Предварительно необходимо произвести подготовку недостающих исходных данных во вспомогательной системе координат $X'CY'$, начало которой расположено в центре вращения звена 3. В частности, смещение направляющей ползуна 5 относительно оси X' равно $y_{EC} = y_E - y_C$.

В результате использования этого алгоритма получаются выражения следующих кинематических параметров: относительные координаты x_{EC}, x_{S4C}, y_{S46} ; передаточные функции

$$i_{43} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_3}; \quad i_{53} = \frac{dx_E}{d\varphi_3}; \quad x'_{S43} = \frac{dx_{S4}}{d\varphi_3}; \quad y'_{S43} = \frac{dy_{S4}}{d\varphi_3};$$

их производные

$$i'_{43} = \frac{di_{43}}{d\varphi_3}; \quad i'_{53} = \frac{di_{53}}{d\varphi_3}; \quad x''_{S43} = \frac{d^2x_{S4}}{d\varphi_3^2}; \quad y''_{S43} = \frac{d^2y_{S4}}{d\varphi_3^2}.$$

Затем в соответствии с принятым подходом осуществляем переход к основной системе координат XOY :

$$x_E = x_C + x_{EC}, \quad x_{S4} = x_S + x_{S4C}, \quad y_{S4} = y_S + y_{S4C}.$$

Передаточная функция i_{41} может быть представлена как

$$i_{41} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_3} \cdot \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = i_{43} \cdot i_{31}. \quad (5.69)$$

Аналогичным образом

$$i_{51} = i_{53} \cdot i_{31}, \quad (5.70)$$

$$x'_{S4} = x'_{S43} \cdot i_{31}, \quad y'_{S4} = y'_{S43} \cdot i_{31}. \quad (5.71)$$

Производная передаточной функции i_{41} по обобщенной координате φ_1 получается следующим образом:

$$\begin{aligned} i'_{41} &= \frac{di_{41}}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1} (i_{43}i_{31}) = \frac{di_{43}}{d\varphi_3} \cdot \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} i_{31} + i_{43} \frac{di_{31}}{d\varphi_1} = \\ &= i'_{43}i_{31}^2 + i_{43}i'_{31}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

аналогично

$$i'_{51} = i'_{53}i_{31}^2 + i_{53}i'_{31}, \quad (5.73)$$

$$x''_{S4} = x''_{S43}i_{31}^2 + x'_{S43}i'_{31}, \quad (5.74)$$

$$y''_{S4} = y''_{S43}i_{31}^2 + y'_{S43}i'_{31}. \quad (5.75)$$

Рассмотрим определение кинематических характеристик для 6-звенного рычажного механизма, изображенного на рис.5.39. Особенностью данного механизма является то, что основная и вспомогательная системы координат совпадают и начало координат находится в центре вращения кулисы 3. Рассмотрение первого базового механизма 1, 2, 3 в соответствии с алгоритмом для кулисного механизма (рис.5.42) позволяет определить кинематические характеристики этого механизма в зависимости от обобщенной координаты φ_1 , в том числе и угловую координату φ_3

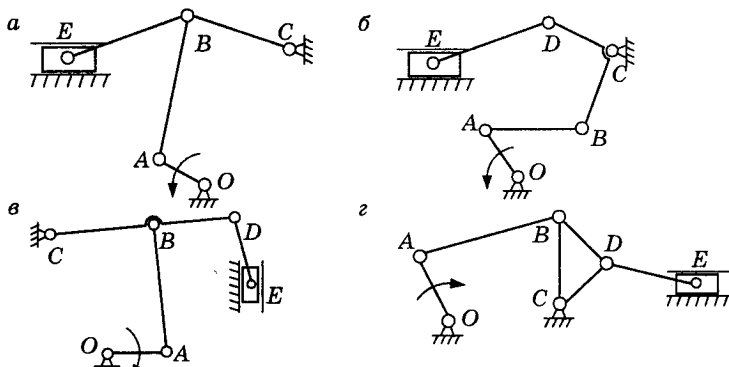


Рис.5.45. Схемы шестизвенных механизмов, используемых в технологическом оборудовании, используемом для обработки металлов давлением: а — чеканка, горячее выдавливание, б — обрезка, в — вытяжка, з — высадка

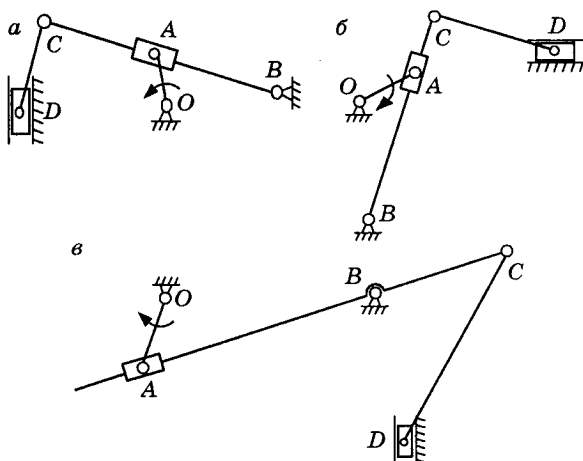


Рис.5.46. Схемы шестизвенных механизмов, используемых в технологическом оборудовании для обработки металлов давлением: а — горячая штамповка, гибка, прессование, брикетирование, б — чеканка, строгание, долбление, в — вырубка

звена 3, которая служит обобщенной координатой для второго базового механизма 3, 4, 5. Для него, как и в предыдущем примере, используется алгоритм, описанный для кривошипно-ползунного механизма (см. рис.5.41, а). В результате использования этого алгоритма получаются следующие кинематические характеристики: координаты x_D , x_{S4} , y_{S4} , передаточные функции i_{43} , i_{53} , x'_{S43} , y'_{S43} , их производные i'_{43} , i'_{53} , x''_{S43} , y''_{S43} .

Кинематические характеристики i_{41} , i_{51} , x'_{S4} , y'_{S4} , i'_{41} , i'_{51} , x''_{S4} , y''_{S4} определяются по формулам (5.69)-(5.75).

Схемы механизмов (рис.5.38 и 5.39), выбранные в качестве примеров определения кинематических характеристик, широко применяются в качестве исполнительных механизмов технологического оборудования. Так, для операций чеканки используется схема на рис.5.38, для горячего выдавливания — схема на рис.5.45, а, для обрезки — схема на рис.5.45, б, для вытяжки — схема на рис.5.45, в, для высадки — схема на рис.5.45, г. Схема на рис.5.39 используется для горячей штамповки, гибки, прессования, брикетирования, чеканки, строгания, долбления, вырубки.

6.1. Особенности моделирования силового взаимодействия

Рассмотренные в предыдущих разделах задачи моделирования и исследования движения машин основывались на законах механики, учитывающих особенности передачи мощности от двигателя к рабочему органу. При решении таких задач вводились понятия обобщенных внешних сил (моментов) или, как их называют, приведенных сил к обобщенной координате (начальному звену, то есть звену приведения). Такие внешние силы (моменты) определялись на основании равенства работ (мощностей), таким образом оценка силового взаимодействия учитывала и соотношение скоростей точек приложения сил. На этапе силового анализа механизмов (на этапе определения реакции в кинематических парах) нас будут интересовать силы (моменты сил) как количественная мерка механического взаимодействия подвижных звеньев. Как и ранее, такое взаимодействие рассматривается не на реальных объектах, а на моделях машин, механизмов, а также на основе моделирования динамических процессов в соединениях подвижных звеньев. Учесть все процессы, протекающие в соединениях подвижных звеньев, не представляется возможным. Это связано не только с разнообразием физико-химико-механических явлений, протекающих в них (трение, износ, упругость, рассеяние энергии и т.п.), но и с ограниченностью наших возможностей представления этих процессов в их взаимосвязи и взаимовлиянии, в моделировании их. Однако во многих практических задачах достаточно учитывать наиболее существенные связи, пренебрегая некоторыми другими, менее важными. Здесь следует иметь в виду, что каждое упрощение таких связей ведет к погрешности количественной оценки механического взаимодействия, то есть к погрешности определения сил (моментов сил). Следует иметь также в виду, что более сложная форма движения материи, которая проявляется в тепловых, электромагнитных, химических и других процессах, имеющих место в двигателях и подвижных соединениях звеньев исполнительных и передаточных механизмов машин, не может быть сведена к простому механическому взаимодействию, то есть не может быть описана с помощью таких понятий, как сила и момент силы. Эти понятия представляют механическую форму движения, но полностью ею не объясняются и не исчерпываются. Пользуясь понятием силы, следует помнить, что замена этим понятием понятия механического взаимодействия отражает лишь его количественную сторону, при этом нельзя рассматривать силу как нечто существующее в природе само по себе. Сила не вызывает и не

порождает движение, поэтому нельзя рассматривать ее как источник и одновременно как тело, испытывающее ее действие как результат механического воздействия на него другого объекта. Пользуясь понятием силы, следует помнить, что оно отражает наиболее простые явления, протекающие в процессе механического взаимодействия, которые осуществляются не обязательно путем непосредственного контакта. Физическая природа взаимодействия подвижных звеньев машин может быть разнообразной. Однако нас будет интересовать сила как количественная мерка не всякого взаимодействия, а такого, которое оказывает наиболее существенное влияние на основные критерии работоспособности машины: точность, прочность, износостойкость отдельных звеньев и их соединений. Поэтому в каждом отдельном случае надо отдавать себе отчет в том, что полученные значения силы отражают реальный процесс только в рамках допущений, положенных в основу динамической модели машины, механизма, того или иного процесса. Наиболее упрощенное представление механического взаимодействия звеньев в машине учитывается в рассмотренной нами ранее идеализированной динамической модели. Поэтому и силы, как количественная мерка этого взаимодействия, соответствуют этим допущениям, положенным в основу принятой динамической модели. Они определяют результат механического взаимодействия звеньев машины при отсутствии трения в подвижных соединениях, погрешностей изготовления и сборки, отсутствия податливости звеньев и их соединений. Введение, например, податливости соединений звеньев и рассеяния энергии в них, то есть приближение рассматриваемой модели к действительным условиям, требует применения математической модели, учитывающей дифференциальную связь силового взаимодействия. В этом случае закон изменения координаты (угловой, линейной) определяется интегрированием дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс. Однако в основе решения их лежат полученные ранее (на этапе использования идеализированной модели) массовые и силовые (внешние, возмущающие) воздействия, то есть используются полученные ранее функции, описывающие приведенные массы и приведенные силы, движущие и сопротивления. При решении задач, связанных с оценкой прочности и износостойкости подвижных соединений звеньев, требуется определить силы реакций как внутренние силы системы подвижных звеньев. Наиболее удобным является в данном случае метод кинестатики, позволяющий рассматривать в равновесии отдельные звенья механизмов или сочетания звеньев и кинематических пар с нулевой подвижностью. Силовой анализ также удобно провести отдельно на идеализированной модели и усложненной, приближенной в той или иной степени к действительным условиям эксплуатации. Нас будет в дальнейшем интересовать

динамическое проявление силового взаимодействия, которое, в отличие от статического, выражается в изменении характера движения.

6.2. Классификация сил

Моделирование рабочих процессов машиностроения в большинстве случаев предусматривает определение сил как некоторых векторов, то есть параметров, характеризующихся величиной и направлением. Различают векторы свободные, скользящие и приложенные. Если рассматривается система тел, то, как известно, условием ее равновесия является равенство нулю мощностей всех сил, приложенных к подвижным звеньям. В этом случае устанавливается равенство нулю суммы скалярных произведений сил и скоростей точек приложения этих сил. Сила рассматривается как приложенный вектор. В случае, если рассматривается система сил, приложенных к одному звену, то условием равновесия его является равенство нулю векторной суммы сил (главного вектора сил) и суммы моментов этих сил (главного момента). В этом случае сила рассматривается как вектор скользящий, то есть действие силы на тело (звено) не изменяется, если вектор будет перенесен в любую точку, расположенную на линии действия этого вектора силы. К свободным векторам может быть отнесен вектор момента силы относительно точки. Величина его определяется произведением силы на плечо (перпендикуляр, опущенный из этой точки на линию действия силы). Момент может быть представлен парой сил, действующей в плоскости, перпендикулярной вектору. Положительное направление такого вектора определяется направлением действия пары сил (момента) против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора. Вектор момента силы относительно некоторой точки может быть перенесен в любую точку плоскости, в которой расположена пара сил.

На рис.6.1 представлена классификация сил, отражающих количественную мерку механического взаимодействия, в результате которого происходит изменение кинематического состояния звеньев.

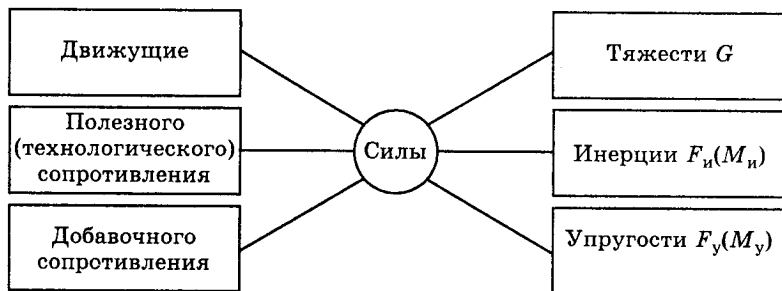


Рис.6.1. Классификация сил

Векторы движущих сил образуют острый угол с векторами скоростей точек их приложения. Они совершают положительную работу. Движущие силы отражают количественную меру, например, давления газов на поршень двигателя внутреннего сгорания, электромагнитного воздействия в электродвигателях и т.п.

Силы (моменты сил) технологического сопротивления характеризуют выполняемую технологическую операцию. Для преодоления этих сил и создаются машины. Работа сил сопротивления отрицательна.

Движущие силы и силы сопротивления обычно являются функциями перемещения или скорости точек приложения сил, реже — функциями времени.

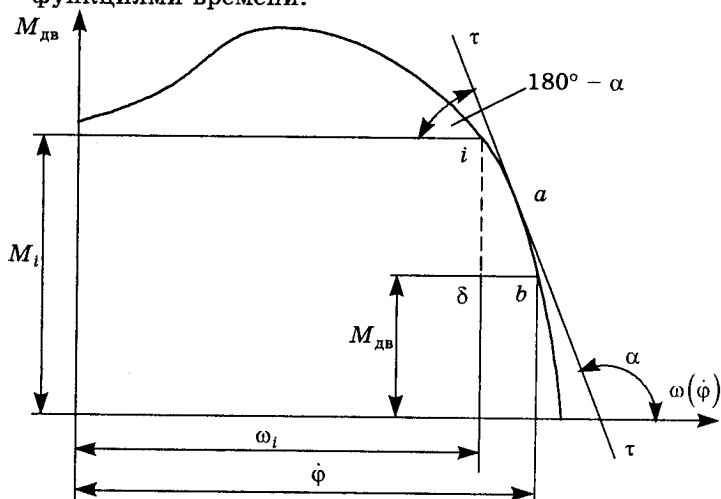


Рис.6.2. К определению крутизны статической характеристики двигателя

Как отмечалось ранее, рабочий участок механической характеристики электродвигателя характеризуется уменьшением движущего момента $M_{дв}$ при увеличении скорости $\omega(\dot{\varphi})$ его ротора. И наоборот, уменьшение угловой скорости сопровождается увеличением $M_{дв}$. Такое увеличение приращения $dM_{дв}$ движущего момента, соответствующее некоторому приращению $d\varphi$ скорости ротора, характеризуется крутизной k характеристики в некоторой точке функции $M_{дв} = M(\omega)$. Как видно из рис.6.2, касательная τ к рабочему участку характеристики в некоторой точке a может быть заменена отрезком ib , являющимся гипотенузой треугольника ibb . Тогда величина $M_{дв}$ в некоторой точке b функции $M_{дв} = M(\omega)$ может быть представлена выражением

$$M_{дв} \approx M_i + i\delta \approx M_i + \delta b \tan \alpha.$$

Из рис.6.2 видно, что $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{i\delta}{\delta b} = -(\dot{\phi} - \omega_i) \frac{dM_{дв}}{d\dot{\phi}}$.

Если $\dot{\phi}$ мало отличается от некоторого постоянного значения скорости ω_0 , то

$$M_{дв} = M_{дв}^{(\omega_0)} + \left(\frac{dM_{дв}}{d\dot{\phi}} \right)^{(\omega_0)} (\dot{\phi} - \omega_0) = M_{дв}^{(\omega_0)} + k(\dot{\phi} - \omega_0),$$

где k — крутизна статической характеристики в точке $\omega = \omega_0$.

Для современного машиностроения характерно стремление к увеличению значения k , то есть к более жестким характеристикам двигателя. Чем больше крутизна k , тем слабее влияет изменение нагрузки в машине на скорость ее приводного вала.

К силам добавочного сопротивления относятся силы трения, силы сопротивления воздушной и жидкой среды. Наличие такого сопротивления вызывает необходимость затраты дополнительной работы (мощности) сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления. Следует отметить, что силы добавочного сопротивления могут быть полезными и вредными. Например, трение в кинематических парах подвижных звеньев следует отнести к вредным, однако трение в тормозных устройствах следует считать полезным, если не учитывать износ поверхностей трущихся элементов.

Силы тяжести представляют собой равнодействующую нагрузку, распределенную по всей массе звена, приложенную в центре тяжести.

Силы и моменты сил инерции также представляют собой суммарное значение распределенных сил и их моментов. Приведение системы сил инерции к главному вектору и главному моменту ($F^И$ и $\overline{M}_2^И$) осуществляется теми же приемами, что и в статике: выбирают в этом теле центр приведения и мысленно переносят в этот центр все силы инерции параллельно самим себе, добавляя при этом каждый раз присоединенную пару. Главный вектор сил инерции $\overline{F}_И$ не меняется с изменением центра приведения, а главный момент $\overline{M}_И$ зависит от выбора центра приведения. Главный вектор сил инерции звена, совершающего любое движение, равен произведению его массы m на ускорение точки a_s , совпадающей с центром масс. Направлен этот вектор в сторону, противоположную ускорению. Приложен главный вектор сил инерции в выбранном центре приведения, которым может быть и центр масс.

В случае плоско-параллельного движения звена, имеющего плоскость материальной симметрии, параллельную неподвижной

плоскости, параллельно которой совершается движение, система сил инерции приводится к главному вектору $\bar{F}^n = -m\bar{a}_S$ и главному моменту $\bar{M}_n = -J_S\bar{\varepsilon}$. В общем случае главный момент сил инерции относительно любого центра O (относительно произвольной точки O) равен

$$\bar{M}_O^n = \bar{a}_O \times \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

или

$$\bar{M}_O^n = \bar{r}_S \times m\bar{a}_S - J_S\bar{\varepsilon},$$

где \bar{r}_S — радиус-вектор точки S , совпадающей с центром масс, относительно точки O ;

J_S — момент инерции звена относительно точки S . Если точки O и S совпадают, то $\bar{M}_S^n = -J_S\bar{\varepsilon}$, так как $r_S = 0$.

Ниже рассмотрим частные случаи.

1) Звено движется поступательно с ускорением:

$$\bar{F}^n = -m\bar{a}_S; \varepsilon = 0; M_n = 0.$$

2) Звено вращается вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$\bar{M}_n = -J_S\bar{\varepsilon}; a_S = 0; F_n = 0.$$

3) Ось вращения не проходит через центр масс (рис.6.3).

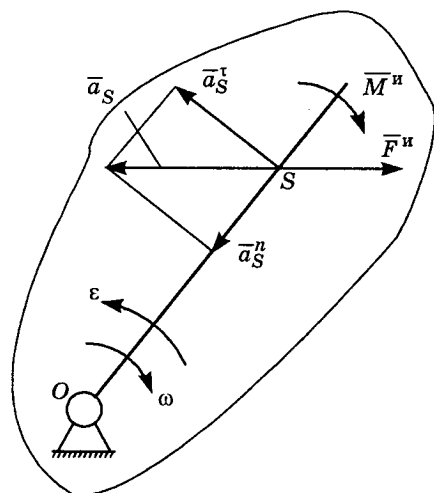


Рис.6.3. Действие инерционных сил и моментов при вращении звена с несовпадением центра масс и оси вращения

Силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе $\bar{F}^n = -m\bar{a}_S$ и к паре сил с моментом $\bar{M}_n = -J_S\bar{\varepsilon}$ (m — масса звена, J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс). Силу \bar{F}^n и момент M_n можно заменить одной силой. Для этого момент M_n силы инерции заменяют парой сил, при этом вектор каждой из сил пары выбирают равным силе инерции $|\bar{F}^n|$. Та-

ким образом, плечо пары определится соотношением $h = M^n/F^n$ (рис.6.4). Приложенные две равные и противоположно

направленные силы \vec{F}^n в центре масс взаимно уравниваются, и остается одна сила \vec{F}^n , приложенная в точке K , отстоящей от точки S на величину h , отложенную на линии, перпендикулярной направлению ускорения центра масс.

Расстояние $l_{OK} = l_{OS} + l_{SK}$ называют приведенной длиной физического маятника, а точка K есть центр качания физического маятника. Это расстояние определится из следующих преобразований. Как видно из рис.6.4, $h = l_{SK} \cos \alpha$, тогда $h = M^n / F^n$ выразим как $l_{SK} \cos \alpha = J_S / m a_S$, при этом $\cos \alpha = a_S^r / a_S$, то есть

$$l_{SK} = \frac{a_S^r}{a_S} = \frac{J_S a_S^r}{l_{OS} m a_S} \text{ или}$$

$$l_{SK} = \frac{J_S}{m l_{OS}},$$

тогда

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{J_S}{m l_{OS}}. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) может быть представлено в другом виде. Как известно из теоретической механики, момент инерции J_O относительно любой оси, проходящей через точку O и параллельной оси, проходящей через точку S , определяется суммой момента инерции J_S и произведением массы m на квадрат расстояния l_{OS}^2 между этими осями:

$$J_O = J_S + m l_{OS}^2 \text{ или } J_S = J_O - m l_{OS}^2,$$

тогда

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{J_O - m l_{OS}^2}{m l_{OS}} = \frac{J_O}{m l_{OS}}.$$

4) Звено совершает плоскопараллельное движение. В этом случае точка O определится векторным равенством

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^r.$$

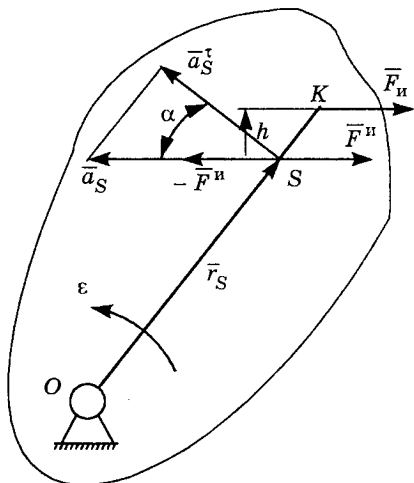


Рис.6.4. Сведение главного вектора \vec{F}_n сил инерции и главного момента \vec{M}_n к одной силе \vec{F}_n , приложенной в точке K

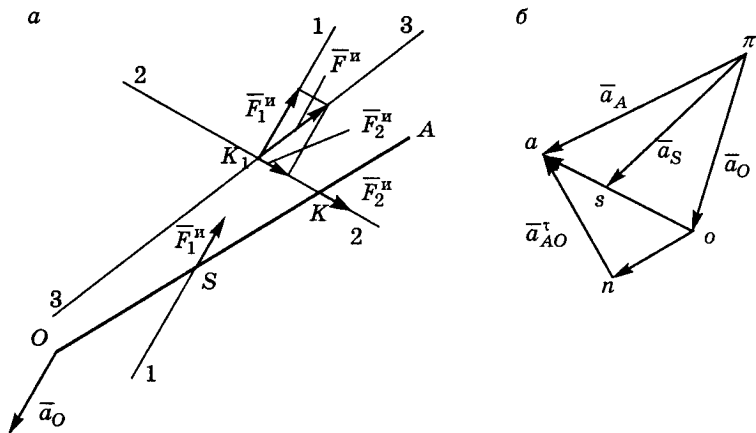


Рис.6.5. Приведение сил вектора F_1^n в поступательном движении звена AO с ускорением a_0 и силы F_2^n во вращательном вокруг точки O , приложенной в центре качания K , к одной силе \bar{F}^n , приложенной в точке K_1 , расположенной на линии 33: a — силы инерции F_1^n и F_2^n , приложенные к звену OA , b — взаимосвязь ускорений \bar{a}_O , \bar{a}_A , и \bar{a}_S звена OA , движущегося плоскопараллельно

На рис.6.5 представлено графическое решение этого уравнения. В точке S звена, совпадающей с его центром масс, приложена сила $\bar{F}_1^n = -m\bar{a}_O$, учитывающая поступательное движение звена с ускорением a_0 (линия 1-1 параллельна вектору \bar{a}_O). В центре качания K приложена вторая сила инерции \bar{F}_2^n , учитывающая вращательное движение звена вокруг полюса O , при этом

$$l_{OK} = \frac{J_O}{ml_{OS}} = l_{OS} + \frac{J_S}{ml_{OS}}.$$

Линия 2-2 параллельна вектору \bar{a} (см. рис.6.5, a , b). Тогда результирующая сила инерции \bar{F}^n лежит в точке K_1 пересечения линий 1-1 и 2-2. Линия 3-3, параллельна вектору \bar{a}_S , представляет собой геометрическое место точек приложения полной силы инерции \bar{F}^n . Для пространственных механизмов силы инерции определяются из рассмотрения проекций главного вектора и главного момента сил инерции на оси прямоугольной системы координат с учетом того, что вектор — момент силы относительно начала координат, спроектированный на координатную ось, равен

моменту силы относительно этой оси. И в том и в другом случае условие равновесия звена определяется равенствами

$$\begin{cases} \overline{F}^e + \overline{F}^и = 0, \\ \overline{M}_O^e + \overline{M}_O^и = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Следует отметить, что уравнения (6.2), отображающие метод кинестатики, не могут объяснить динамические явления, происходящие с данным звеном. Они дают только математическое решение, позволяющее определить неизвестные силы \overline{F}^e и моменты \overline{M}^e , отнесенные к разряду внешних. Другими словами, они дают возможность выявить количественно влияние геометрии (размеров), распределения масс и кинематики звена на силовое взаимодействие его с другими звеньями, позволяя тем самым установить связь сил реакций в подвижных соединениях с массово-геометрическими и кинематическими характеристиками звеньев.

Силы упругости относятся к моделированию механического взаимодействия звеньев с учетом податливости. Они отражают количественную меру такого взаимодействия тел в их колебательном движении. С учетом особенностей исследования движения тел классификация сил в колебательных процессах представлена на рис.6.6.

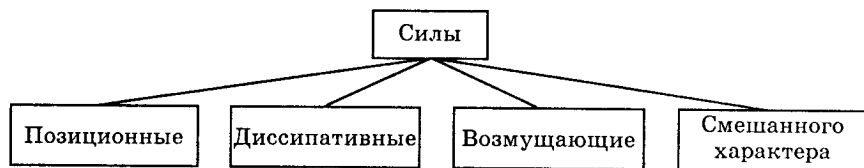


Рис.6.6. Классификация сил в колебательных процессах

Позиционные силы — силы, определяющиеся степенью отклонения звеньев от положения равновесия. Если направление позиционной силы противоположно направлению отклонения, то она называется восстанавливающей. Колебательные свойства механической системы определяются во многом наличием восстанавливающих сил. Силы упругости — восстанавливающие силы. На рис.6.7 представлены динамические модели простейших колебательных процессов и графическое изображение их силовых характеристик. Эти схемы поясняют различную природу позиционных сил и их математическое описание. На рис.6.7, а и 6.7, б представлены различные процессы, описываемые одинаковыми зависимостями восстанавливающих сил F_B от смещения x . Отношение приращения силы dF действующей на тело весом G , подвешенное на пружине с постоянной жесткостью $c = dF/dx = \text{const}$

(рис.6.7, а), определяется уравнением прямой линии, имеющей вид $F = cx$. По такой же зависимости изменяется сила и на рис.6.7, б. Сила сопротивления при погружении тела с постоянной площадью поперечного сечения в жидкость пропорциональна величине x погружения.

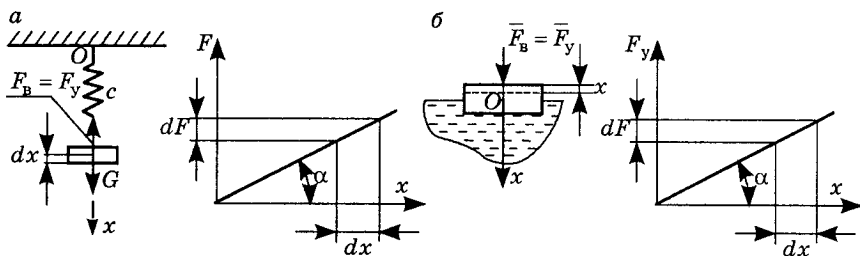


Рис.6.7. Линейная зависимость восстанавливающей силы \bar{F} от смещения x : а — груз, подвешенный на пружине постоянной жесткости, б — тело с постоянной площадью поперечного сечения, погруженное в жидкость

На рис.6.8, а представлена схема, поясняющая получение нелинейной зависимости между силой и перемещением. При сжатии такой фасонной пружины нижние (большие по диаметру) витки садятся на плоскость и почти полностью выключаются из работы. Таким образом, с ростом сжимающей силы число рабочих витков уменьшается. Пружина имеет характеристику с возрастающей жесткостью. Производная силы по перемещению dF/dx возрастает. В этом случае упругие свойства связей невозможно представить одним выражением

$$c = \frac{dF}{dx} = \frac{F}{x} = \text{const.}$$

Различают легкие и жесткие нелинейные характеристики. На рис.6.8 представлены схемы жестких нелинейных характеристик, для которых $\frac{d^2F}{dx^2} > 0$. Такой же характеристикой отличаются и схемы, представленные на рис.6.8, б и 6.8, в.

На рис.6.9, а представлена схема, позволяющая получить такую характеристику при использовании той же пружины, что и на рис. 6.8, а. В этом случае поджатие (предварительный натяг) при помощи второй пружины позволяет при нагружении такой системы увеличивать число рабочих витков фасонной пружины. Схема соединения звеньев на рис.6.9, б также обеспечивает постепенное уменьшение наклона кривой $F = F(x)$. Это связано с тем, что с уменьшением углов α реакции \bar{R}_1 и \bar{R}_2 возрастают.

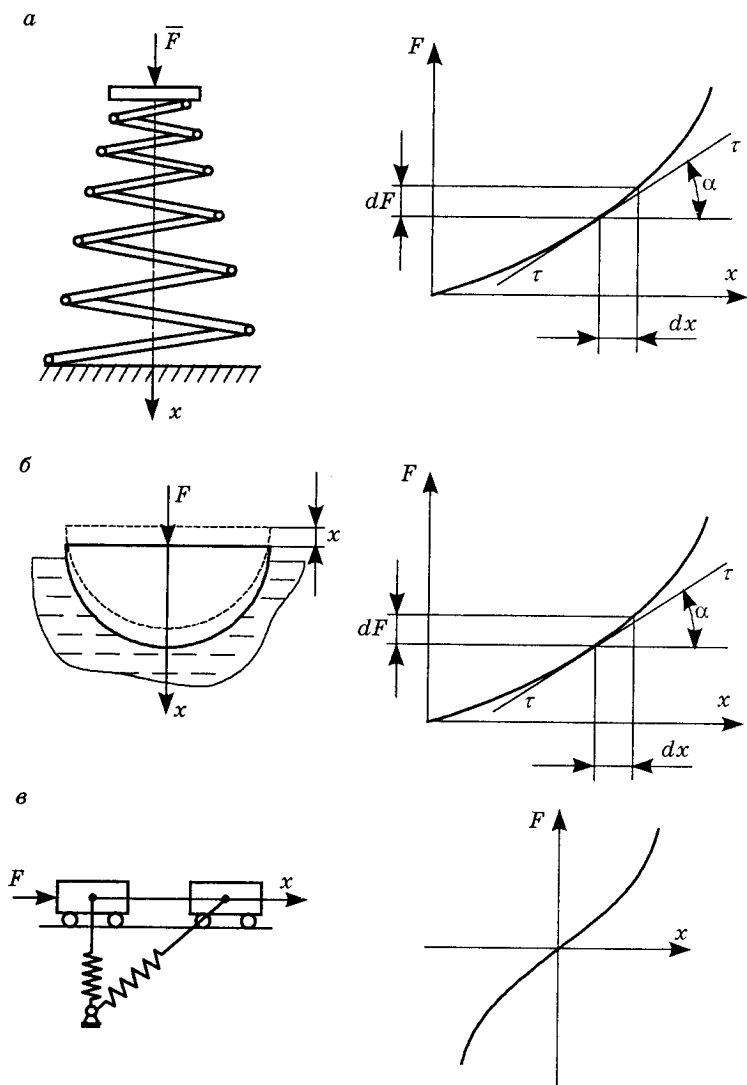
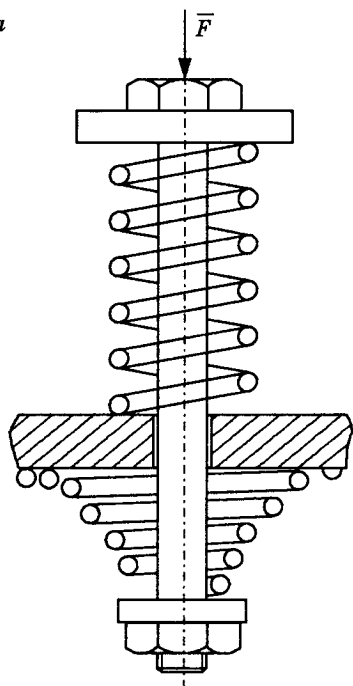


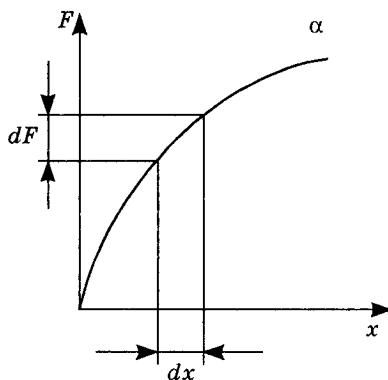
Рис.6.8. Схемы, поясняющие нелинейную жесткую зависимость силы сопротивления от смещения

В некоторых конструкциях упругие характеристики имеют переломы (кусочно-линейный вид) или разрывы. Это относится прежде всего к связям с зазором (рис.6.10, а) и предварительным натягом (рис. 6.10, б). Сила натяга левой пружины $F_{\text{л}}^{\text{H}}$ и правой пружины $F_{\text{п}}^{\text{H}}$ определяется произведением жесткости

а



$$\frac{d^2 F}{dx^2} < 0$$



б

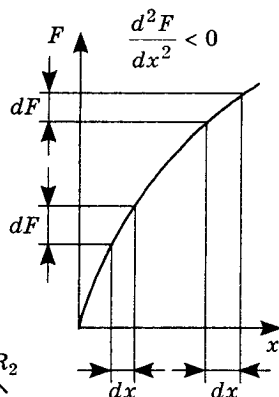
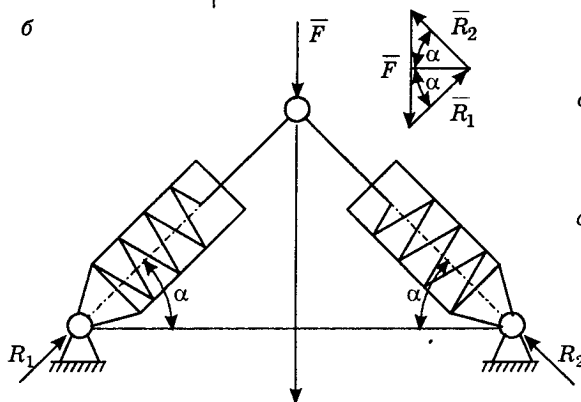


Рис.6.9. Схемы, поясняющие нелинейную мягкую зависимость силы сопротивления от смещения

соответствующей пружины $c_n(c_{п})$ величину натяга $\delta_n^H(\delta_n^H)$. Для систем, характеризующихся угловым перемещением (рис.6.10, в), упругая характеристика отражает зависимость момента M от угла поворота. В зависимости от свойств упругих элементов график $M = M(\varphi)$ на рис.6.10, в будет иметь различный вид.

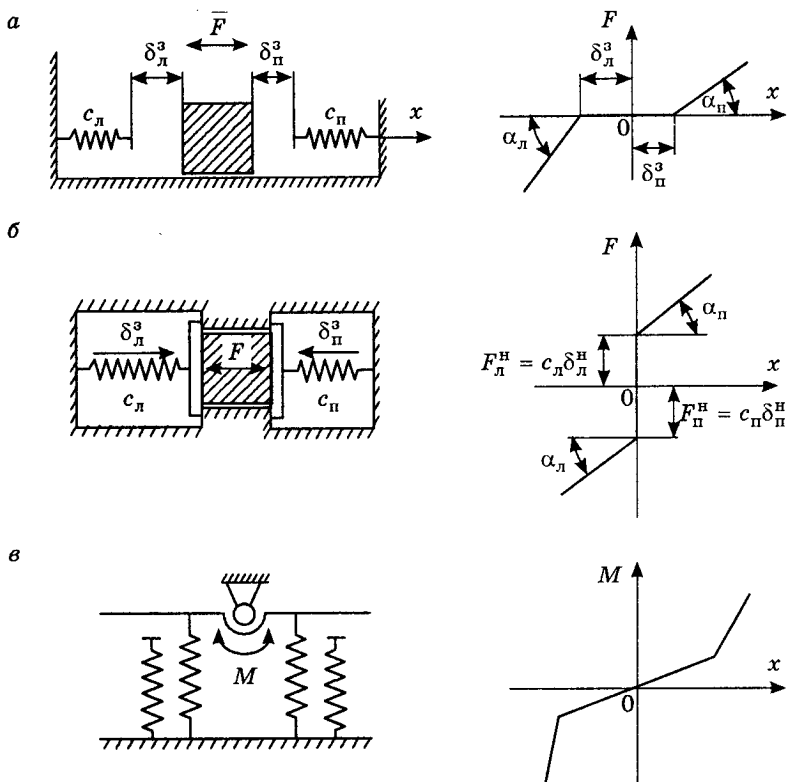


Рис.6.10. Схемы соединения звеньев с изломом упругих характеристик

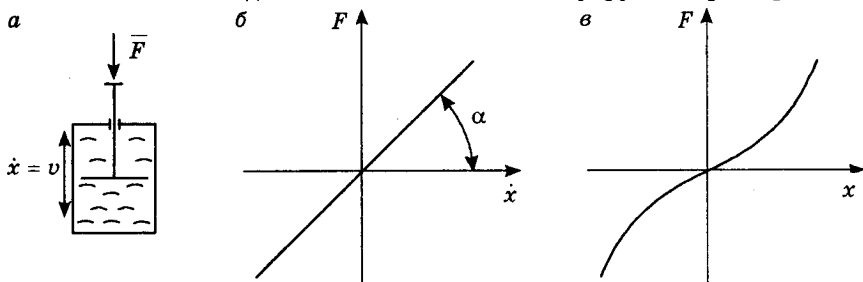


Рис.6.11. Зависимость силы трения от скорости

Восстанавливающее действие оказывает также сила тяжести.

К диссипативным силам относятся силы трения в подвижных соединениях звеньев, силы сопротивления среды (газообразной, жидкой), силы внутреннего трения в материалах. Диссипативные силы направлены в сторону, противоположную скорости относительного движения, и зависят от величины этой скорости. Они приводят к рассеянию (диссипации) механической энергии.

На рис.6.11, а показан простейший элемент трения — вязкий демпфер. Если сопротивление демпфера пропорционально скорости поршня, то характеристика трения представляет прямую (рис.6.11, б). Если сопротивление зависит от скорости более сложным образом, то характеристика трения приобретает нелинейный вид (рис.6.11, в).

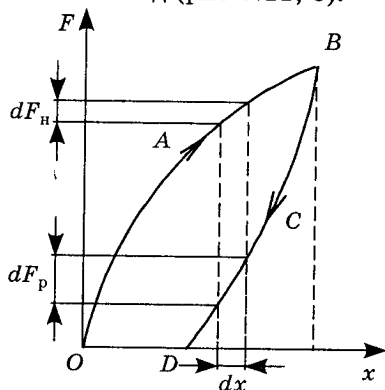


Рис.6.12. К определению коэффициента поглощения

статистическими данными о коэффициенте поглощения ψ . Такой коэффициент зависит от природы диссипативных сил. Количественно он определяется отношением разности работ A_H , затраченной на нагружение, и A_P , затраченной на разгрузку, к работе A_H :

$$\psi = \frac{A_H - A_P}{A_H}.$$

Из графика рис.6.12 видно, что работа, затраченная на нагружение, определяется площадью фигуры $OABE$, то есть

$$A_H = \mu_F \mu_x \text{ пл. } OABE,$$

где μ_F и μ_x — масштабные коэффициенты силы и деформации соответственно. Тогда работа, затраченная на разгрузку, определится как

$$A_P = \mu_F \mu_x \text{ пл. } BCDE \text{ или } \psi = 1 - \frac{A_P}{A_H} = 1 - \frac{\text{пл. } OABCD}{\text{пл. } OABE}.$$

Силы трения, возникающие в кинематических парах механизмов и неподвижных соединениях, можно рассматривать как конструкционное демпфирование, возникающее на площадках контакта при колебаниях. Увеличение диссипативных сил достигается введением специальных устройств (гидравлических, пневматических и т.п.).

В связи с несовершенством упругих свойств материала зависимости между силами и деформацией при нагружении и разгрузке различаются. В реальных конструкциях, характеризующихся большим числом стыков (соединений), это различие весьма существенно. На рис.6.12 приведены зависимости $F = F(x)$ при нагружении (участок OAB) и разгрузке (участок BCD). Рассчитать теоретически потери на такой гистерезис в реальных конструкциях, как правило, не удастся. Поэтому пользуются

Возмущающие силы задаются в виде явных функций времени, то есть они не зависят от движения, но активно влияют на его кинематические характеристики. Такие силы называют также возмущающими. В отличие от этих сил восстанавливающие и диссипативные силы определяются свойствами механической системы, так как они зависят от перемещений и скоростей. Примером возмущающих сил могут служить, например, силы, передающиеся от вращающихся неуравновешенных звеньев (рис.6.13, а). Неуравновешенность ротора определяется расстоянием l_{OS} между осью вращения и центром масс, расположенным в точке S .

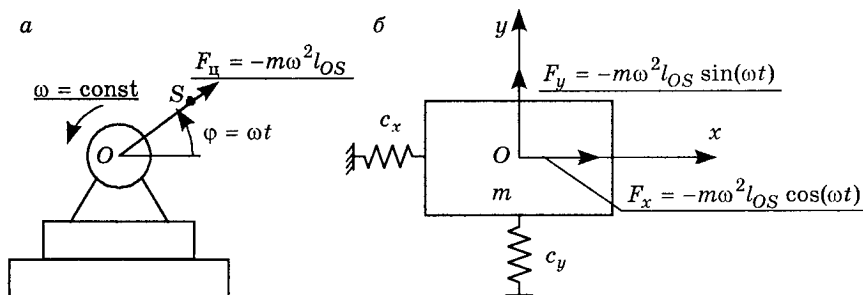


Рис.6.13. Возмущающее воздействие на фундамент неуравновешенного ротора: а — схема сил, б — возмущающие силы

При необходимости количественной оценки силового воздействия на фундамент в направлениях x и y такого неуравновешенного ротора следует учитывать значения жесткостей c_x и c_y опор в направлении осей x и y (рис.6.13, б). Пример возбуждения колебаний, представленный на рис.6.13, относится к инерционным. Физическая природа возмущающих сил может быть различной (например, периодическое изменение давления в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания, периодическое изменение сил притяжения электромагнитов и т.п.).

По характеру изменения возмущающих воздействий во времени различают следующие случаи (рис.6.14):

- гармоническое возмущающее воздействие;
- периодическое возмущающее воздействие с произвольным законом изменения сил внутри цикла;
- периодическое кратковременное воздействие, например, в ковочных, штамповочных машинах;
- непериодическое воздействие.

На практике чаще встречаются силы смешанного характера. Например, движение упруго закрепленного груза массы m по шероховатой поверхности (рис.6.15, а) требует введения силы трения, постоянной по величине и направленной против движения.

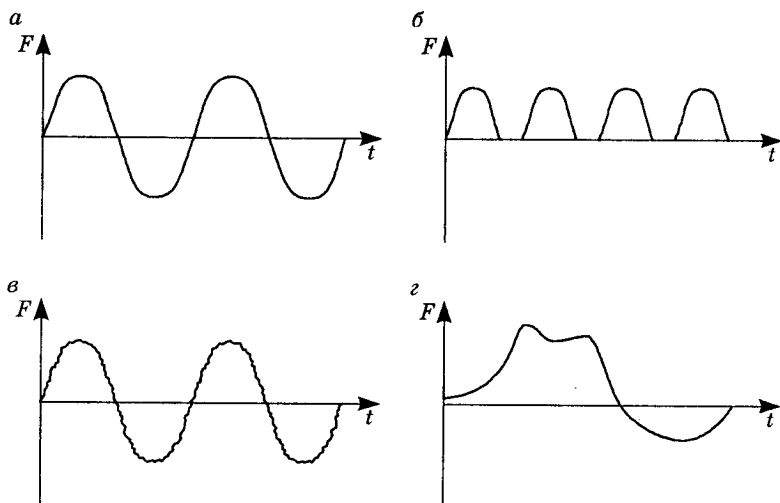


Рис.6.14. Законы изменения возмущающих сил: *а* — гармонический, *б* — периодический, *в* — периодический импульсный, *г* — непериодический

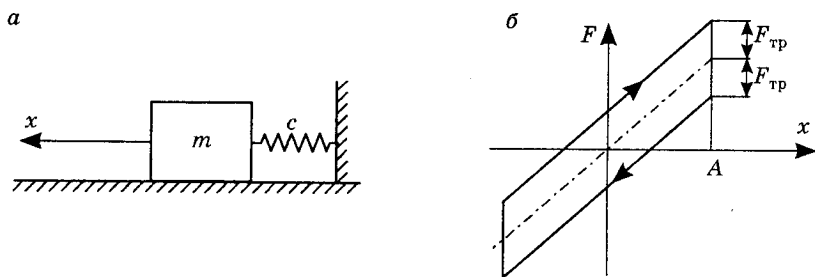


Рис.6.15. Действие сил смешанного характера: *а* — схема связей, *б* — закон изменения силы от перемещения груза

Зависимость полной силы $F = c_x \pm F_{тр}$, действующей на груз, показана на рис.6.15, б. При отклонении тела в крайнее, например, правое положение на величину, меньшую или равную A , при отсутствии начальной скорости движение начинается, так как силы упругости пружины недостаточны для преодоления сил трения. Полоса $-F_{тр}/c < x < F_{тр}/c$ называется зоной застоя. Процесс движения продолжается до тех пор, пока тело не останавливается в зоне застоя.

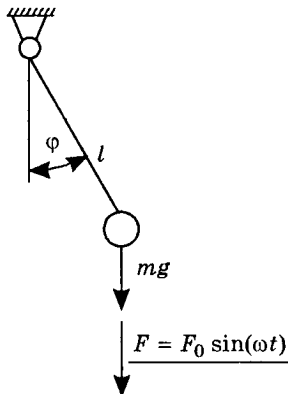


Рис.6.16. Схема силового взаимодействия, не позволяющего выделить восстанавливающую и возмущающую составляющие

невозможно выделить восстанавливающую и возмущающую составляющие.

Например, в автоколебательных процессах встречаются случаи сил $F(x, \dot{x})$, также не представляемые в виде суммы $F(x) + F(\dot{x})$.

6.3. Условие кинестатической определенности

Следует помнить, что представление силового взаимодействия тел в виде сосредоточенного вектора силы является упрощенным представлением (моделированием) действительного их взаимодействия. В зонах контакта поверхностей силы как таковой нет. Есть давление p одного тела на другое. Закон распределения этого давления зависит от конфигурации (геометрии) соприкасающихся поверхностей, их податливости (жесткости). Он не остается постоянным и во времени в результате износа (приработки) трущихся поверхностей. Давление p определяется отношением силы F к площади контакта. Точка приложения сосредоточенной силы F постоянно изменяет свое положение при изменении закона изменения p , оставаясь приложенной в центре площади фигуры, описывающей тот или иной закон изменения давления.

Таким образом, плоский механизм, с точки зрения кинематики, может считаться пространственным с точки зрения кинестатики, если внешние силы, силы инерции и реакции в кинематических парах не совпадают с какой-либо одной плоскостью, параллельной плоскости схемы механизма.

Описать математически все сложности контактного взаимодействия тел не представляется возможным. Поэтому на практике

В сложных механических системах встречаются случаи смешанного характера, не разложимые на сумму сил типа $F(x)$, $F(\dot{x})$, $F(t)$. Пример такой системы представлен на рис.6.16. Момент внешних сил mg и F относительно оси шарнира имеет вид

$$M = -(mg + F \sin \omega t) \times l \sin \varphi.$$

Этот момент является функцией времени t и угла φ : $M = M(\varphi, t)$. Эту функцию нельзя представить в виде суммы $M(\varphi) + M(t)$, то есть

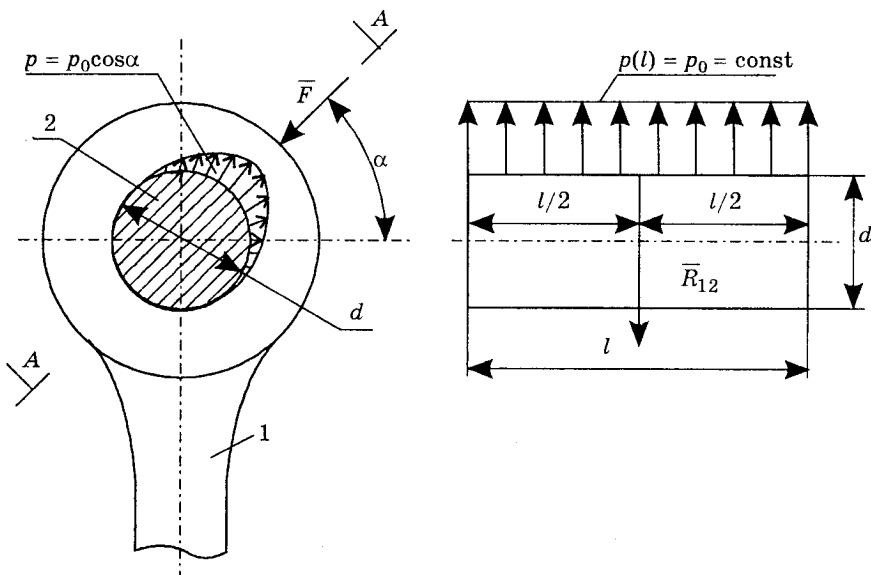


Рис.6.17. Распределение давлений $p = p_0 \cos \alpha$ в поперечном сечении и $p = p_0 = \text{const}$ по длине двух звеньев 1 и 2, входящих во вращательную кинематическую пару

используют идеализированное (упрощенное) представление силового взаимодействия. Здесь идеализация также связана с представлением контактирующих поверхностей, имеющих идеальную геометрию, то есть изготовленных и собранных без погрешностей. Часто не принимают во внимание не только явления трения, износа и перераспределения давления в зонах контакта, но и размеры площадок. Такая идеализация во многом помогает решать практические задачи, которые сводятся к определению реакций в подвижных соединениях звеньев, находящихся под действием заданных сил и моментов. Методика такого анализа основана на решении уравнений равновесия, записанных как для отдельных звеньев, так и для сочетания звеньев и кинематических пар. При этом количество уравнений равновесия должно быть не менее количества неизвестных параметров, характеризующих эти реакции. На рис.6.17, 6.18 представлены схемы, поясняющие связь распределения давлений в кинематических парах с сосредоточенными силами (реакциями). На рис.6.19 представлены упрощенные схемы, поясняющие неизвестные параметры, подлежащие определению в высшей кинематической паре (рис.6.19, а) и низших — вращательной (рис.6.19, б) и поступательной (рис.6.19, в). Реакция связи (сила воздействия одного звена на другое) определяется как результат действия активных сил, включая силы

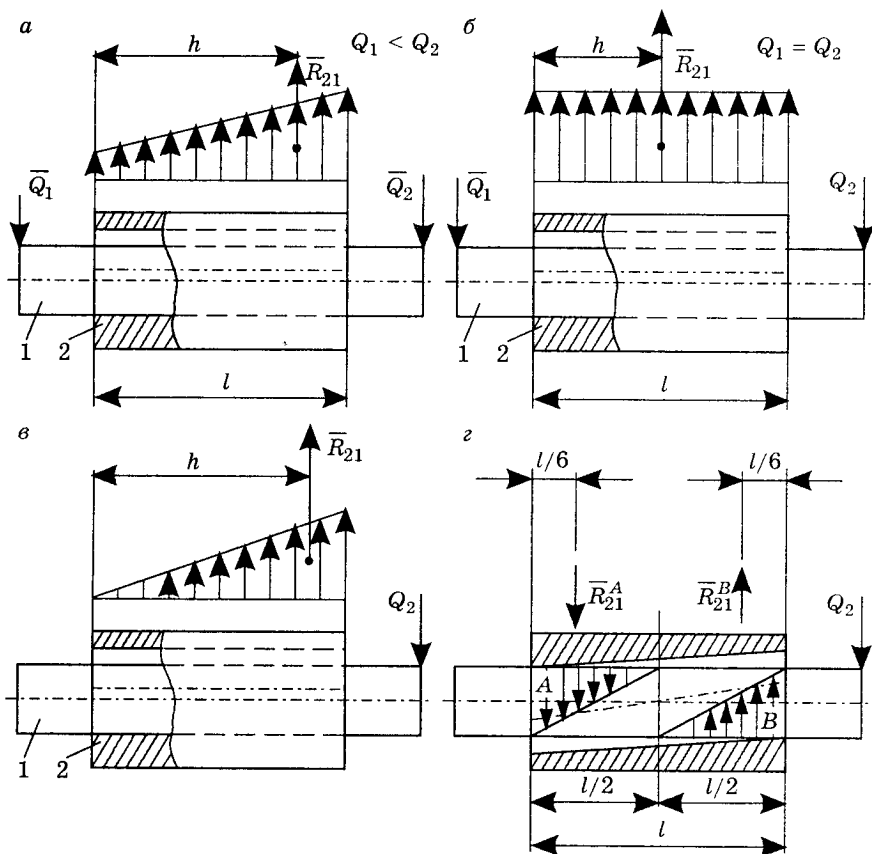


Рис.6.18. Зависимость сил реакций звеньев, образующих поступательную пару, от распределения давлений в зонах контакта

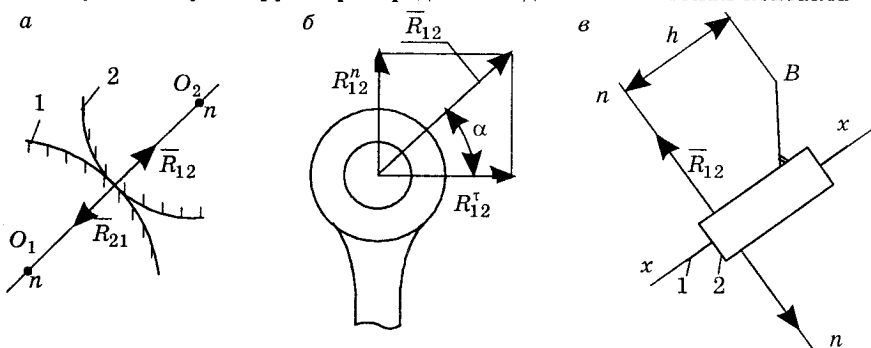


Рис.6.19. К определению неизвестных параметров реактивных сил, подлежащих определению в кинематических парах:
 а — высшей, б, в — низших

тяжести и инерции. В высших кинематических парах (рис.6.19, а) реакция направлена по общей нормали к поверхностям в точке их соприкосновения (точке приложения силы реакции). В этом случае неизвестным является один параметр — модуль \bar{R}_{12} . Во вращательных парах (рис.6.19, б) неизвестными являются величина и направление, то есть два неизвестных параметра R_{12}^n и R_{12}^t , или \bar{R}_{12} и α . В поступательной паре (рис.6.19, в) неизвестны линия действия реакции (плечо h) и ее величина \bar{R}_{12} — также два неизвестных параметра.

Если n — число подвижных звеньев, p_5 — число кинематических пар 5-го класса (одноподвижных), p_4 — число кинематических пар 4-го класса (двухподвижных), то сочетание n , p_5 , p_4 будет статически определимым, если $3n = 2p_5 - p_4$ или $3n - 2p_5 - p_4 = 0$. С учетом того, что высшие кинематические пары (двухподвижные) могут быть заменены низшими (одноподвижными), условию кинетостатической определимости будут удовлетворять структурные группы с $W = 0$ (нулевой подвижностью). Число неизвестных уравнений, подлежащих определению из уравнений (6.4), для каждого звена или группы с $W = 0$ совпадает с числом связей, так как каждая связь ограничивает движение в каком-либо направлении. Как видно из приведенных рассуждений, это совпадает с условием равенства нулю числа степеней свободы. Для плоских кинематических цепей число уравнений кинетостатики равно $3n$.

Число неизвестных параметров реакций для каждой одноподвижной пары равно 2 (рис.6.19, б, в). Таким образом, кинематическая цепь статически определима, если число одноподвижных кинематических пар находится в следующем соотношении с числом n подвижных звеньев:

$$p_5 = \frac{3}{2} n.$$

Уравнение (6.3) указывает на то, что в основу кинетостатического анализа плоских механизмов с одноподвижными кинематическими парами можно положить кинетостатический анализ структурных групп Ассур. Последовательность силового расчета определяется с учетом того, что известная сила (сила технологического сопротивления) приложена обычно к выходному звену механизма. Таким образом, силовой расчет заканчивается определением реакции в соединении начального звена со станиной. Сочетание такого одного подвижного звена, входящего в одноподвижную кинематическую пару с неподвижным, указывает на то, что его степень подвижности $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1$, то есть такое

сочетание статически неопределимо. Для определения реакций в соединении начального звена со станиной требуется приложить уравновешивающий момент (силу). Такой уравновешивающий момент, как отмечалось ранее, определяется из равенства мощностей всех сил и моментов, приложенных к звеньям, мощности уравновешивающего момента.

6.4. Определение реакций в подвижных соединениях звеньев

Конечной целью моделирования силового взаимодействия звеньев является представление силы реакции как некоторой функции угловой или линейной координаты, позволяющее определить не только ее величину, но и направление. При этом для практики часто необходимо знать направление реакции не только в системе координат, связанной со станиной, но и в системе координат, связанной с самим подвижным звеном. Например, при оценке динамической нагруженности подшипникового узла кривошип-шатун можно прогнозировать изменение ориентации силы реакции как относительно кривошипа, так и относительно шатуна за время одного полного оборота главного приводного вала.

Рассмотрение сил в системах координат, связанных с подвижными звеньями механизма, удобно также потому, что представляется возможность некоторой унификации методики расчета с учетом функционального назначения звеньев, выполняющих одну и ту же роль в различных механизмах.

Рассмотрение в равновесии структурных групп с нулевой степенью подвижности удобно тем, что количество их меньше числа механизмов, которые могут быть составлены из них. Если же рассматривать каждое звено в отдельности, то их можно классифицировать по виду движений.

В этом случае можно выделить три вида, отличающиеся вращательным, поступательным или сложным (плоскопараллельным) движением. Рассмотрение в равновесии отдельных звеньев механизмов, то есть решение уравнений равновесия сил, приложенных к отдельному звену, позволяет получить зависимость силы реакции от массово-геометрических и кинематических характеристик каждого звена в явном виде. Это можно сделать и традиционным методом, однако выражения, получаемые в результате рассмотрения равновесия структурных групп и звеньев, входящих в них, содержат размеры звеньев, выраженные в проекциях на координатные оси, не связанные с ними. Такие уравнения могут быть использованы только для силового анализа, использовать их, например, для поиска более рационального распределения масс с целью снижения динамических реакций в кинематических парах затруднительно, потому что для этого необходима аналитическая зависимость, устанавливающая явную

функциональную связь координат центров масс звеньев с их кинематикой и с реакциями в кинематических парах. Это возможно в случае записи уравнений равновесия в системе координат, связанной с каждым подвижным звеном. В случае же пространственного выражения распределения масс с помощью тензора инерции это условие становится необходимым, иначе осевые и центробежные моменты инерции становятся переменными (зависящими от обобщенной координаты).

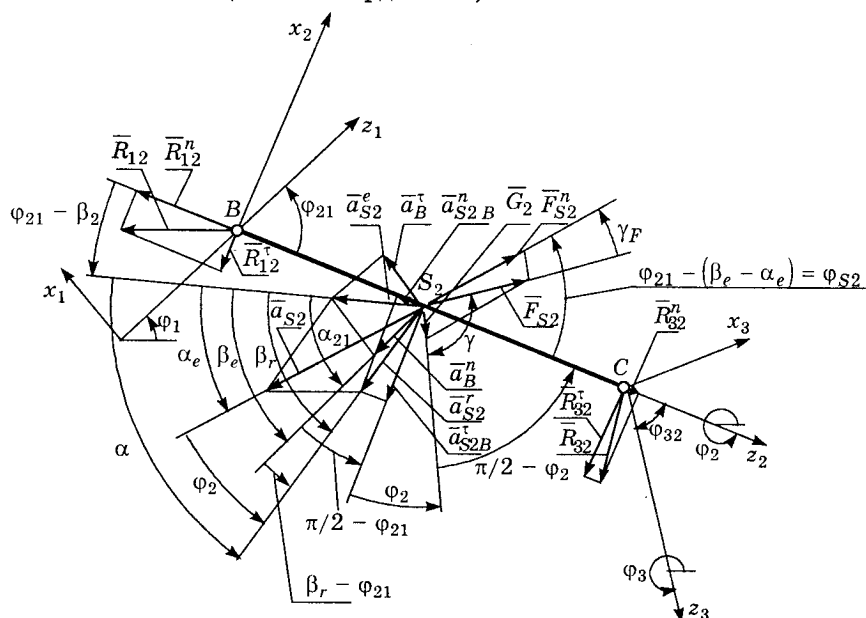


Рис.6.20. Взаимная ориентация составляющих ускорений центра масс и сил, действующих на звено, движущееся плоскопараллельно

Как видно из рис.6.20, на звено 2 (шатун) действуют три силы: \bar{R}_{12} , \bar{F}_{S2} и \bar{R}_{32} . Тогда условие равновесия звена 2 выражается равенством

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{S2} + \bar{R}_{32} = 0.$$

В этом уравнении

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{12} &= R_{12}^{x_2} \bar{i}_2 + R_{12}^{z_2} \bar{k}_2 = \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{12}^n, \\ \bar{R}_{32} &= R_{32}^{x_2} \bar{i}_2 + R_{32}^{z_2} \bar{k}_2 = \bar{R}_{32}^r + \bar{R}_{32}^n. \end{aligned} \right\}$$

В центре масс S_2 звена 2 приложены три силы, так что

$$\bar{F}_{S2} = \bar{F}_{S2}^e + \bar{F}_{S2}^r + \bar{G}_2. \quad (6.4)$$

В уравнении (6.4) $\bar{F}_{S_2}^e = -m_2 \bar{a}_{S_2}^e$, $\bar{F}_{S_2}^r = -m_2 \bar{a}_{S_2}^r$, $\bar{G}_2 = m_2 g$, так что его можно представить в виде

$$\bar{F}_{S_2} = -m_2 (\bar{a}_{S_2}^e + \bar{a}_{S_2}^r - \bar{g}),$$

где $\bar{a}_{S_2}^e = \bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^r$ — переносное ускорение центра масс S_2 шатуна, если предположить, что он движется поступательно с ускорением \bar{a}_B , $\bar{a}_{S_2}^r = \bar{a}_{S_2 B}^n + \bar{a}_{S_2 B}^r$ — относительное ускорение центра масс S_2 во вращательном движении вокруг полюса B . Уравнение равновесия сил, действующих на звено 2, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \sum z_2 &= \bar{R}_{12}^{z_2} + F_{S_2} \cos \varphi_{S_2} - R_{32}^{z_2} = 0, \\ \sum x_2 &= \bar{R}_{12}^{x_2} + F_{S_2} \sin \varphi_{S_2} - R_{32}^{x_2} = 0, \\ \sum M_2(\bar{F}) &= R_{32}^{x_2} l_{BC} - M_2^n - F_{S_2} l_{BS_2} \sin \varphi_{S_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Совместное решение второго и третьего уравнений системы (6.5) дает возможность выразить тангенциальные составляющие реакций \bar{R}_{12}^r и \bar{R}_{32}^r в виде

$$\left. \begin{aligned} R_{32}^{x_2} = R_{32}^r &= \frac{M_2^n}{l_{BC}} + \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} F_{S_2} \sin \varphi_{S_2}, \\ R_{12}^{x_2} = R_{12}^r &= \frac{M_2^n}{l_{BC}} - \left(1 - \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}}\right) F_{S_2} \sin \varphi_{S_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Здесь $M_{12}^n = -J_{S_2} \varepsilon_2$, где J_{S_2} — момент инерции звена относительно его центра масс, ε_2 — угловое ускорение звена. Уравнения (6.5) и (6.6) решаются в случае, если определить нормальные составляющие $\bar{R}_{12}^n = \bar{R}_{12}^{z_2}$ и $\bar{R}_{32}^n = \bar{R}_{32}^{z_2}$. Дополнительные уравнения для их определения легко получить, если рассмотреть условие равновесия сил, приложенных в соединениях звеньев (в их кинематических парах). На рис. 6.21 показаны два звена 2 и 3 (шатун и коромысло). Условие равенства сил реакции в шарнире C ($|R_{23}| = |R_{32}|$) дает возможность записать в системах координат, связанных со звеньями, следующее векторное равенство:

$$R_{23}^r \bar{i}_3 + R_{23}^n \bar{k}_3 = R_{32}^r \bar{i}_2 + R_{32}^n \bar{k}_2. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) в проекциях, например, на оси $z_1 z_2$, дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} -R_{23}^r \sin \varphi_{32} + R_{23}^n \cos \varphi_{32} &= R_{32}^n, \\ R_{32}^r \sin \varphi_{32} + R_{32}^n \cos \varphi_{32} &= R_{23}^n. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

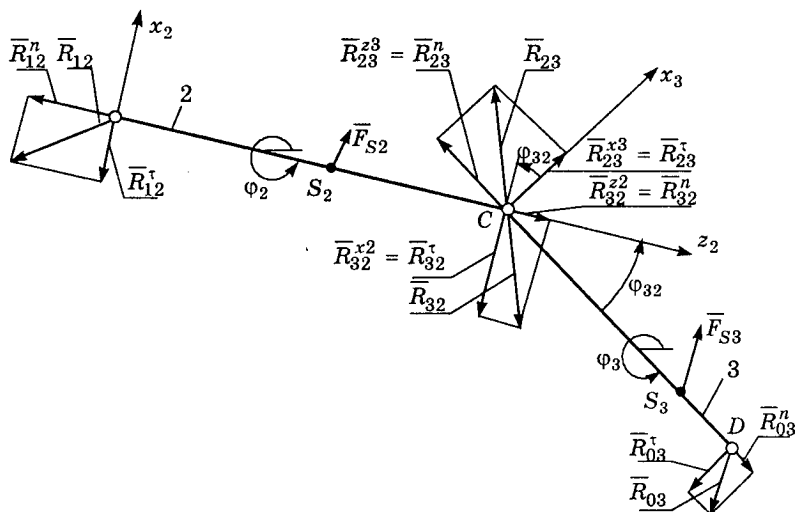


Рис.6.21. Соотношение сил, составляющих реакции $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ в системах координат, связанных со звеньями

Совместное решение уравнений (6.8) дает возможность определить нормальные составляющие из выражений

$$R_{23}^n = \frac{-R_{23}^\tau \cos \varphi_{32} + R_{32}^\tau}{\sin \varphi_{32}}, \quad (6.9)$$

$$R_{32}^n = \frac{-R_{23}^\tau + R_{32}^\tau \cos \varphi_{32}}{\sin \varphi_{32}}. \quad (6.10)$$

Выражения (6.9) и (6.10) указывают на возможность нахождения нормальных составляющих реактивной силы в подвижных системах координат, связанных со звеньями, входящими в кинематическую пару, если известны их тангенциальные составляющие в этих же системах координат, тангенциальные же составляющие могут быть получены из рассмотрения уравнений равновесия трех сил по аналогии с уравнениями (6.5). Тогда для любого звена (кривошипа, шатуна или коромысла) по аналогии с уравнениями (6.6) можно записать выражения

$$\left. \begin{aligned} R_{(i+1),i}^\tau &= \frac{M_i^H}{l_i} + k_l F_{Si} \sin(\varphi_{Si} - \gamma_F), \\ R_{(i-1),i}^\tau &= \frac{M_i^H}{l_i} - (1 - k_l) F_{Si} \sin(\varphi_{Si} - \gamma_F). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Уравнения (6.11) позволяют определить тангенциальные составляющие $\bar{R}_{(i+1),i}^\tau$ и $\bar{R}_{(i-1),i}^\tau$ сил реакций, действующих на

i -ое звено со стороны $(i + 1)$ -го и $(i - 1)$ -го звеньев. В уравнениях (6.11) $k_l = \frac{l_{BSi}}{l_i}$ — коэффициент, отражающий положение центра

масс S_i i -го звена по отношению к длине l_i звена;

F_{Si} — результирующая сила, приложенная в центре масс звена и определяемая по формуле

$$\bar{F}_{Si} = -m_i(\bar{a}_{Si}^e + \bar{a}_{Si}^r - g);$$

φ_{Si} — угол между осью, например, z_i (см. рис.6.20) и силой F_{Si}^n инерции i -го звена;

γ_F — угол между силами \bar{F}_{Si}^n и результирующей силой

$\bar{F}_{Si} = \bar{G}_i + \bar{F}_{Si}^n$, $\gamma_F = \bar{F}_{Si}^n \hat{G}_2$. Нормальные составляющие реактивного воздействия на i -ое звено со стороны $(i + 1)$ -го и $(i - 1)$ -го звеньев найдутся по аналогии с уравнениями (6.9) и (6.10):

$$R_{i,(i+1)}^n = \frac{R_{i,(i+1)}^r \cos \varphi_{(i+1),i} + R_{(i+1),i}^r}{\sin \varphi_{(i+1),i}}, \quad (6.12)$$

$$R_{(i+1),i}^n = \frac{-R_{i,(i+1)}^r - R_{(i+1),i}^r \cos \varphi_{(i+1),i}}{\sin \varphi_{(i+1),i}}. \quad (6.13)$$

Таким образом, уравнения (6.11), (6.12), (6.13) позволят унифицировать методику определения реакций в кинематических парах звеньев механизмов. Они учитывают геометрию (размеры звеньев), распределение их масс и кинематику в явном виде. Величина результирующей силы \bar{F}_{Si} , приложенной в центре масс S_i звена i , и ее направление в системе координат, связанной с этим звеном, определяются по рис.6.20.

Алгоритм определения проекций результирующей силы \bar{F}_{S2} на оси системы координат, связанной со вторым звеном, может быть следующим.

1) Определяется функция $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ зависимости углового положения i -го, в данном случае второго, звена от обобщенной координаты φ_1 .

2) Определяется угол $\varphi_{21} = \varphi_1 - \varphi_2$ поворота i -го звена относительно $(i - 1)$ -го.

3) Определяется угол β_e наклона переносного ускорения центра масс i -го звена, например, ускорения точки B (кривошипа) (см. рис.6.20):

$$\beta_e = \arctg \frac{a_B^r}{a_B^n} = \arctg \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}.$$

4) Определяется угол β_r наклона относительного ускорения центра масс звена, например, относительно полюса, совпадающего с точкой B (см. рис.6.20):

$$\beta_r = \operatorname{arctg} \frac{a_{S_2 B}^r}{a_{S_2 B}^n} = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2}.$$

5) Определяется угол $\alpha = \left(\widehat{\bar{a}_{S_2}^e \bar{a}_{S_2}^r} \right)$ между векторами пере-

носного ускорения $\bar{a}_{S_2}^e$ центра масс i -го звена и относительного $\bar{a}_{S_2}^r$. При этом для рассматриваемого случая

$$a_{S_i}^r = l_{B S_i} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4},$$

$$a_{S_i}^e = l_{A B} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4}.$$

Из рис.6.20 видно, что

$$\alpha = \beta_r + \beta_e - \varphi_{21}.$$

6) Определяется полное ускорение центра масс звена по формуле

$$a_{S_2} = \sqrt{\left(a_{S_2}^r\right)^2 + \left(a_{S_2}^e\right)^2 + 2a_{S_2}^r a_{S_2}^e \cos \alpha}.$$

7) Определяется угол $\alpha_e = \left(\widehat{\bar{a}_{S_2}^e \bar{a}_{S_2}^e} \right)$ между вектором полно-

го ускорения \bar{a}_{S_2} центра масс S_2 и вектором полного ускорения его в переносном движении $\bar{a}_{S_2}^e$. Из рис.6.20 видно, что

$$a_{S_2} = \sqrt{\left(a_{S_2}^r\right)^2 + \left(a_{S_2}^e\right)^2 + 2a_{S_2}^r a_{S_2}^e \cos \alpha}.$$

8) Определяется угол $\varphi_{S_2} = \left(\widehat{\bar{k}_2 \bar{F}_{S_2}^n} \right)$ между положительным

направлением оси z_i , совпадающим со звеном (ортом \bar{k}_2), и силой инерции $\bar{F}_{S_2}^n$ этого звена. Из рис.6.20 имеем

$$\varphi_{S_2} = \varphi_{21} - (\beta_e - \alpha_e). \quad (6.14)$$

9) Определяется угол $(\gamma' + \gamma'_F) = \left(\widehat{G_2 \overline{F}_{S2}^n} \right)$ между вектором

$\overline{G_2}$ силы тяжести i -го звена и силой \overline{F}_{S2}^n его инерции. Из рис.6.20 имеем

$$\gamma' + \gamma'_F = \frac{\pi}{2} - \varphi_2 - \varphi_{S2}. \quad (6.15)$$

10) Определяется значение результирующей силы $\overline{F}_{S2} = G_2 + \overline{F}_{S2}^n$

$$F_{S2} = m_i \sqrt{g^2 + a_{S2}^2 + 2ga_{S2} \cos(\gamma + \gamma'_F)}. \quad (6.16)$$

11) Определяется значение угла $\gamma'_F = \left(\widehat{\overline{F}_{S2} \overline{F}_{S2}^n} \right)$ между ре-

зультирующей силой \overline{F}_{S2} и его силой инерции \overline{F}_{S2}^n . Из рис.6.20 имеем

$$\sin \gamma'_F = \frac{G_2}{F_{S2}} \sin(\gamma' + \gamma'_F).$$

Из последнего уравнения с учетом соотношения (6.16) имеем

$$\gamma' = \frac{g \sin(\gamma' + \gamma'_F)}{\sqrt{g^2 + a_{S2}^2 + 2ga_{S2} \cos(\gamma' + \gamma'_F)}}. \quad (6.17)$$

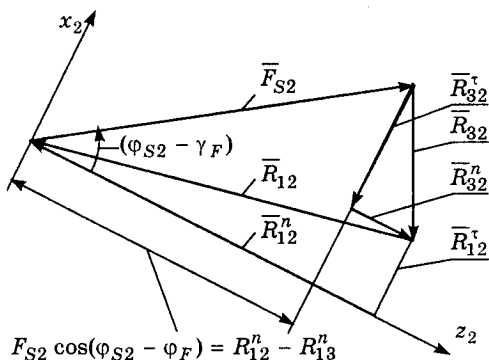


Рис.6.22. Графическое представление условия равновесия звена

$$\underbrace{\overline{R}_{12}^\tau + \overline{R}_{12}^n}_{R_{12}} + \overline{F}_{S2} + \underbrace{\overline{R}_{32}^\tau + \overline{R}_{32}^n}_{R_{32}} = 0$$

(см. рис.6.20)

Таким образом, уравнения (6.14), (6.15) и (6.17) позволяют определить тангенциальные составляющие реактивных сил, используя уравнения (6.11). Нормальные же составляющие определяются по формулам (6.12) и (6.13). Удобство рассматриваемой методики силового анализа заключается в том, что представляется единый алгоритм позвенового анализа силового взаимодействия вне зависимости от вида механизма и его структурных групп.

Рассмотрение звеньев механизмов, находящихся под действием трех сил, позволяет представить геометрический образ влияния сил тяжести и сил инерции на реакции в кинематических парах. На рис.6.22 представлено графическое решение уравнения $\bar{R}_{12} + \bar{F}_{S1} + \bar{R}_{32} = 0$, где $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{R}_{12}^n$; $\bar{R}_{32} = \bar{R}_{32}^{\tau} + \bar{R}_{32}^n$; $F_{S1} = m(\bar{g} - \bar{a}_{S2}^e - \bar{a}_{S2}^r)$. Как видно из рис.6.22, при равенстве нулю сил тяжести и сил инерции $F_{Si} = 0$ тангенциальные составляющие реактивных сил равны нулю: $\bar{R}_{32}^{\tau} = \bar{R}_{23}^{\tau} = 0$. Нормальные же составляющие в этом случае равны $\bar{R}_{12}^n = \bar{R}_{32}^n$ и направлены противоположно вдоль звена (вдоль оси z_2) (см. рис.6.20). Так что увеличение угла $(\varphi_{Si} - \gamma'_F)$, то есть отклонение сил \bar{R}_{12} и \bar{R}_{32} от оси z_2 , связано с учетом массы звена, его размеров и кинематики механизмов в целом, отражающейся величинами углов β_2 и β_r .

6.5. Примеры определения зависимости реактивных сил от обобщенной координаты

Рассмотрим некоторые особенности силового анализа в системах координат, связанных со звеньями механизма. На рис.6.23 представлены ускорения звеньев кривошипно-ползунного механизма и их центров масс.

Ускорение центра масс шатуна 2 представлено в виде

$$\bar{a}_{S2} = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_{S2B}^n + \bar{a}_{S2B}^{\tau}.$$

Как видно из рис.6.23, проекции ускорения центра масс кривошипа (тангенциальное \bar{a}_{Si}^{τ} и нормальное \bar{a}_{Si}^n), а также проекции составляющих ускорений центра масс шатуна, выражаются через углы их относительного поворота, зависящие только от размеров звеньев и обобщенной координаты. Из рис.6.23 видно также, что звенья 1 и 2 находятся в равновесии под действием трех сил — реакций в кинематических парах и суммарной силы, приложенной в центре масс.

Кривошип, как звено, совершающее вращательное движение на угол не менее 2π , находится также под действием трех сил, изображенных на рис.6.24.

Силы инерции шатуна, как звена, совершающего плоскопараллельное движение, и реакции в его кинематических парах направлены в соответствии с рис.6.25 (см. рис.6.20). Это соотношение сил остается одинаковым независимо от того, будет ли звено 2 (шатун) использовано в кривошипно-ползунном механизме,

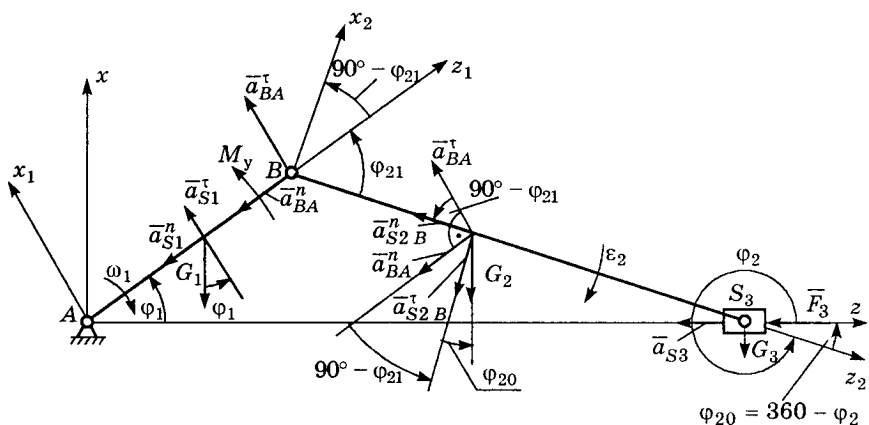


Рис.6.23. Ускорения в кривошипно-ползунном механизме

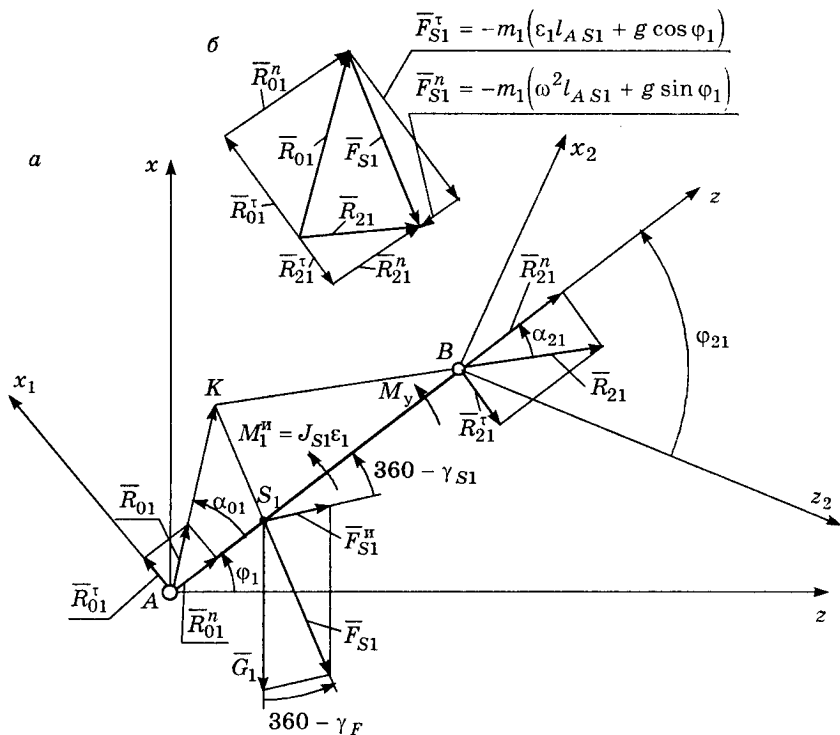


Рис.6.24. Силы, действующие на кривошип в системе координат, связанной с ним, при несовпадении центра масс с осью вращения:
 а — составляющие сил, б — замкнутый векторный треугольник (четырёхугольник)

в шарнирном четырехзвеннике или любом другом механизме. Представление ускорений центра масс шатуна в соответствии с рис.6.23 (см. также рис.6.20) позволяет выразить его абсолютное ускорение в проекциях на оси x_2Bz_2 , неизменно связанное с шатуном в зависимости от относительного расположения звеньев 1 и 2 в процессе движения. Это даст возможность в свою очередь выразить силы реакции в кинематических парах не только в функции размеров звеньев, но и в функции расположения их центров масс. Их расположение постоянно только в системах координат, связанных неизменно с самими звеньями. В других системах координат тензоры инерции переменны.

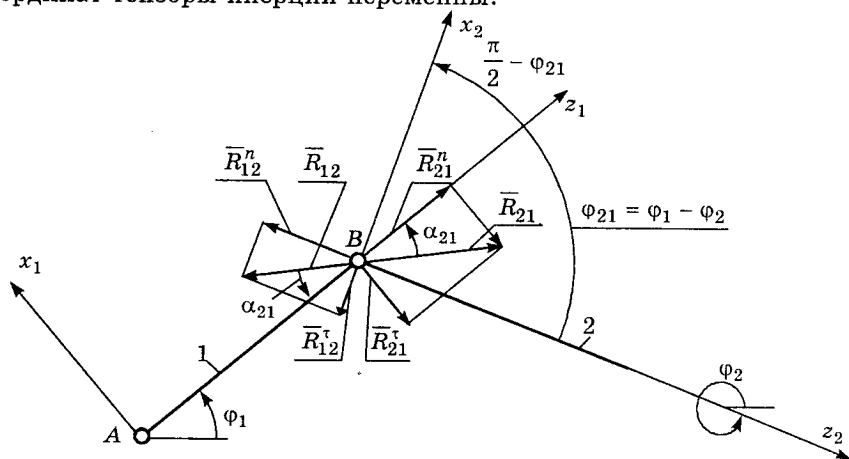


Рис.6.25. Соотношение составляющих сил реакций $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$ в системах координат, связанных со звеньями

Представляя ускорение центра масс звена 1 (см. рис.6.23) как

$$\bar{a}_{S1} = a_{S1}^{x1} \bar{i}_1 + a_{S1}^{z1} \bar{k}_1 = \bar{a}_{S1}^{\tau} + \bar{a}_{S1}^n, \quad (6.18)$$

получим следующие выражения, определяющие проекции равенства (6.18) на оси прямоугольной системы координат, связанной со звеном:

$$\begin{aligned} a_{S1}^{x1} &= a_{S1}^{\tau} - g \cos \varphi_1 = \varepsilon_1 l_{AS1} - g \cos \varphi_1, \\ a_{S1}^{z1} &= -a_{S1}^n - g \sin \varphi_1 = -\omega_1^2 l_{AS1} - g \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Тогда сила инерции, действующая на звено 1 в системе координат, связанной с этим звеном, имеет вид (см. рис.6.24)

$$\bar{F}_1^H = (F_1^H)_{x1} \bar{i}_1 + (F_1^H)_{z1} \bar{k}_1,$$

где

$$\begin{aligned} F_1^{\tau} &= (F_1^H)_{x1} = -m_1 a_{S1}^{x1}, \\ F_1^n &= (F_1^H)_{z1} = -m_1 a_{S1}^{z1}. \end{aligned}$$

Рассматриваем в равновесии звено 1 (см. рис.6.24). Уравнения суммы моментов сил относительно центра масс S и проекции сил на ось x_1 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -R_{01}^{\tau} l_{AS1} - R_{21}^{\tau} l_{BS1} + M_y - J_{S1} \varepsilon_1 &= 0, \\ R_{01}^{\tau} - m_1 g \cos \varphi_1 - m_1 l_{AS1} \varepsilon_1 - R_{21}^{\tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Здесь $\varphi_{S1} = \arctg \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}$. Совместное решение уравнений (6.19) дает

$$\left. \begin{aligned} R_{21}^{\tau} &= \frac{M_y - G_1 l_{AS1} \cos \varphi_1 - (J_{S1} + m_1 l_{AS2}^2) \varepsilon_1}{l_{AB}}, \\ R_{01}^{\tau} &= \frac{m_1 g l_{BS1} \cos \varphi_1 + M_y + (m_1 l_{AS1} l_{BS1} - J_{S1}) \varepsilon_1}{l_{AB}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Для уяснения соотношения сил, действующих на кривошип, полезно рассмотреть составляющие замкнутого векторного треугольника (см. рис.6.24):

$$\bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} + \bar{F}_{S1} = 0. \quad (6.21)$$

Из рассмотрения проекций этого векторного равенства на оси x_1 и z_1 (см. рис.6.24, б) можно видеть, что имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} R_{21}^{\tau} &= m_1 (\varepsilon_1 l_{AS1} + g \cos \varphi_1) - R_{01}^{\tau}, \\ R_{21}^n &= m_1 (\omega_1^2 l_{AS1} + g \cos \varphi_1) - R_{01}^n. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Из условия равновесия сил, приложенных в шарнире B , получаем равенство

$$R_{12}^n \bar{k} + R_{12}^{\tau} \bar{l}_2 = R_{21}^n \bar{k}_1 + R_{21}^{\tau} \bar{l}_1. \quad (6.23)$$

Проектируя равенство (6.23) на оси z_1 и z_2 , получим

$$\left. \begin{aligned} R_{12}^n \cos \varphi_{21} + R_{12}^{\tau} \sin \varphi_{21} &= R_{21}^n, \\ R_{21}^n \cos \varphi_{21} + R_{21}^{\tau} \sin \varphi_{21} &= R_{12}^n. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Из уравнений (6.24) следует, что

$$\left. \begin{aligned} R_{12}^n &= \frac{R_{12}^{\tau} \cos \varphi_{21} + R_{21}^{\tau}}{\sin \varphi_{21}}, \\ R_{21}^n &= \frac{R_{21}^{\tau} \cos \varphi_{21} + R_{12}^{\tau}}{\sin \varphi_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Из второго уравнения системы (6.22) имеем

$$R_{01}^n = (m_1 \omega_1^2 l_{AS1} + g \cos \varphi_1) - R_{21}^n.$$

Полная реакция в шарнире A выразится как

$$R_{01} = \sqrt{(R_{01}^n)^2 + (R_{01}^r)^2}.$$

Направление реакции R_{01} к оси z_1 определится углом α_{01} , равным

$$\alpha_{01} = \arctg \frac{R_{01}^r}{R_{01}^n}.$$

Таким образом, реактивные силы в подвижных соединениях входного звена кривошипа с предшествующим (станиной) и последующим (шатунном) звеньями определены. Как видно из уравнений (6.20), силовое взаимодействие в подвижных соединениях звеньев отражает все допущения, положенные при определении уравновешивающего момента M_y .

Совместное решение первого уравнения системы (6.5) и первого уравнения системы (6.25) дает возможность определить действующие на шатун нормальные составляющие реактивных сил со стороны предшествующего звена (кривошипа) \bar{R}_{12}^n и со стороны последующего (ползуна) R_{32}^n :

$$R_{32}^z = R_{32}^n = F_{S2} \cos \varphi_{S2} + R_{12}^n.$$

Определение тангенциальных составляющих реактивных сил, действующих на шатун, можно произвести также по следующей схеме.

Представляя ускорение центра масс шатуна (см. рис.6.23) как

$$\bar{a}_{S2} = a_{S2}^{x2} \bar{k}_2 + a_{S2}^{z2} \bar{k}_2,$$

получим

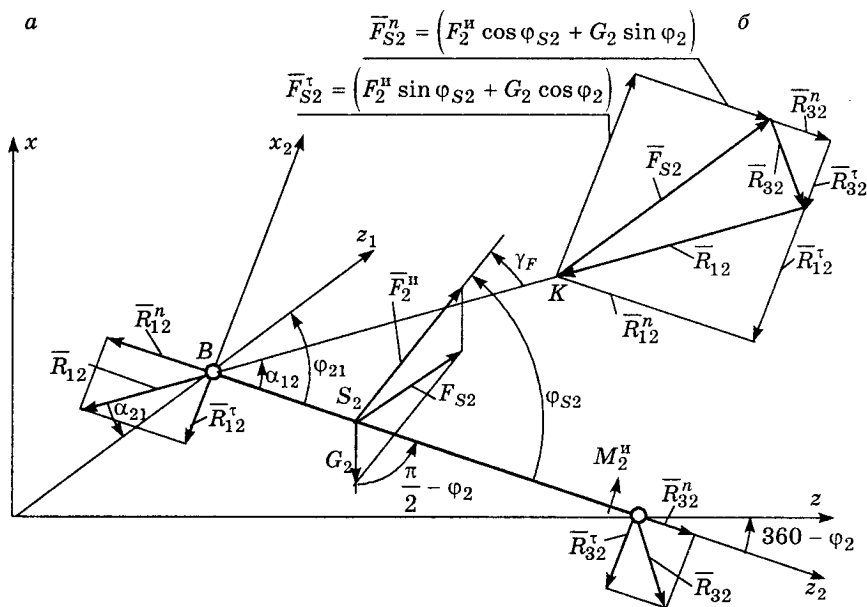
$$\left. \begin{aligned} a_{S2}^{x2} &= a_{BA}^r \cos \varphi_{21} - a_{BA}^n \sin \varphi_{21} - a_{S2B}^r - g \cos \varphi_2, \\ a_{S2}^{y2} &= -a_{BA}^r \sin \varphi_{21} - a_{BA}^n \cos \varphi_{21} - a_{S2B}^n - g \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\}$$

Последние уравнения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{S2}^{x2} &= \varepsilon_1 l_{AB} \cos \varphi_{21} - \omega_1^2 l_{AB} \sin \varphi_{21} - \varepsilon_2 l_{BS2} - g \cos \varphi_2, \\ a_{S2}^{z2} &= -\varepsilon_1 l_{AB} \sin \varphi_{21} - \omega_1^2 l_{AB} \sin \varphi_{21} - \omega_2^2 l_{BS2} + g \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\}$$

Тогда силы инерции в проекциях на оси $x_2 z_2$ примут вид

$$\left. \begin{aligned} (F_2^H)_{x2} &= -m_2 a_{S2}^{x2}, \\ (F_2^H)_{z2} &= -m_2 a_{S2}^{z2}. \end{aligned} \right\}$$



Рассматривая в равновесии звено 2 (рис.6.26), из уравнения суммы моментов сил относительно точки B имеем

$$R_{32}^\tau = \frac{J_{S2} \varepsilon_2 + (F_2^H \sin \varphi_{S2} - G_2 \cos \varphi_2) l_{BS2}}{l_{BC}}. \quad (6.26)$$

Уравнение суммы моментов сил, действующих на звено 2, относительно его центра масс дает

$$R_{12}^\tau = \frac{-R_{32}^\tau l_{CS2} + J_{S2} \varepsilon_2}{l_{BS2}}.$$

Для уяснения соотношения сил, действующих на шатун, полезно рассмотреть составляющие замкнутого векторного треугольника:

$$\bar{R}_{32} + \bar{R}_{12} + \bar{F}_{S2} = 0.$$

Из рассмотрения проекций этого равенства на оси (см. рис.6.26, б) следует, что

$$\left. \begin{aligned} R_{32}^\tau &= F_{S2}^\tau - R_{12}^\tau = F_2^H \sin \varphi_{S2} - G_2 \cos \varphi_2 - R_{12}^\tau, \\ R_{12}^n &= F_{S2}^n + R_{32}^n = F_2^H \cos \varphi_{S2} + G_2 \sin \varphi_2 + R_{32}^n. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

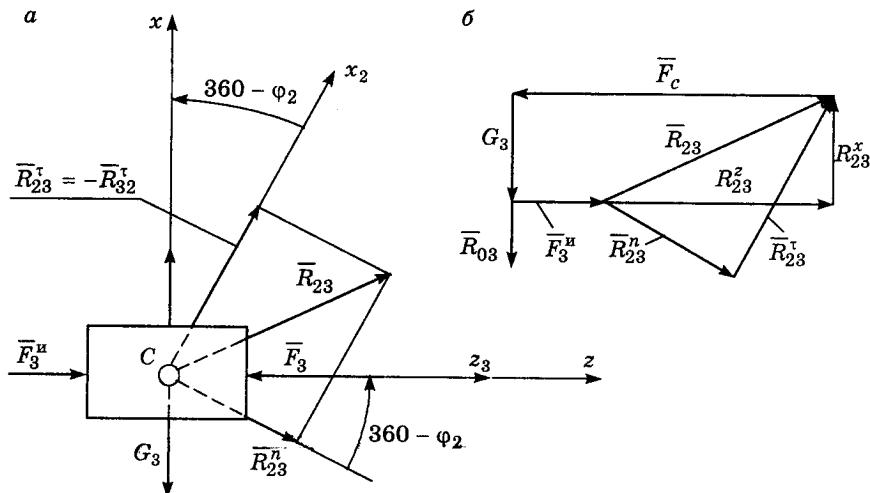


Рис.6.27. Схема сил, действующих на ползун: *а* — составляющие силы, *б* — замкнутый векторный четырехугольник сил

Совместное решение первого уравнения системы (6.25) и второго — системы (6.27) дает возможность выразить значение нормальной составляющей силы реакции на шатун со стороны ползуна:

$$R_{32}^n = \frac{R_{21}^t \cos \varphi_{21} - R_{21}^t}{\sin \varphi_{21}} - F_2^H \cos \varphi_{S2} - G_2 \sin \varphi_2.$$

Полная реакция R_{21} , действующая на кривошип со стороны шатуна, определится из соотношения

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^t)^2}.$$

Направление сил R_{21} к оси z_1 (кривошипу) определится из соотношения

$$\alpha_{21} = \arctg \frac{R_{21}^t}{R_{21}^n}.$$

Значение углов α_{01} и α_{21} , определяющих направление реакций в кинематических парах кривошипа со станиной и шатуном, позволяет определить положение точки K пересечения линии действия реакций \bar{R}_{01} и \bar{R}_{21} в системе координат $x_1 A_1 z_1$. Как видно из рис.6.25, направление реакции \bar{R}_{12} , действующей на шатун со стороны кривошипа к оси x_2 , определится из выражения

$$\alpha_{12} = \arctg \frac{R_{12}^n}{R_{12}^t}.$$

Из рис.6.26 видно, что имеет место соотношение

$$\alpha_{21} + \alpha_{12} = \varphi_{21}.$$

Для определения реактивных сил в кинематической паре С рассмотрим схему сил, действующих на звено 3 (рис.6.27).

При отсутствии трения в направляющих, пренебрегая размерами звена 3, имеем сходящуюся систему сил в точке С, совпадающей с центром масс звена.

Как видно из рис.6.27, а, для звена 3 имеем

$$\overline{F}_3 + \overline{G}_3 + \overline{R}_{03} + \overline{F}_3^H + \overline{R}_{23} = 0.$$

Запись этого векторного равенства в проекциях на оси координат, связанные с ползуном, дает выражения (см. рис.6.27, б)

$$\left. \begin{aligned} R_{23}^z &= F_c - F_3^H, \\ R_{23}^x &= R_{03} - G_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

С другой стороны, как видно из рис.6.26,

$$R_{32}^z = R_{23}^n \cos \varphi_2 + R_{23}^t \sin \varphi_2,$$

откуда

$$R_{23}^n = \frac{R_{32}^z - R_{23}^t \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2}.$$

С учетом первого уравнения (6.28) последнее выражение примет вид

$$R_{23}^n = \frac{F_c - F_3^H - R_{23}^t \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2}.$$

Значение силы R_{23}^t определяется формулой (6.26).

Как видно из рис.6.27,

$$R_{23}^x = -R_{03} - G_3 = R_{23}^n \sin \varphi_2 - R_{23}^t \cos \varphi_2,$$

откуда

$$R_{03} = -R_{23}^t \cos \varphi_2 + R_{23}^n \sin \varphi_2 + G_3.$$

Значение суммарной реакции определится, как и ранее, из выражения

$$R_{23} = \sqrt{\left(R_{23}^n\right)^2 + \left(R_{23}^t\right)^2}.$$

Таким образом, определены все составляющие реакций в кинематических парах, позволяющие выявлять величину и направление силового воздействия на каждое звено со стороны двух других звеньев. При этом влияние массовых и геометрических характеристик определяется углом между реактивной силой и осью, соединяющей две кинематические пары, в которые входит

рассматриваемое звено. Это позволяет проводить численные исследования по оценке влияния особенностей кинематики отдельного звена и распределения его массы на реакции в кинематических парах, например, шатуна, как звена, движущегося плоскопараллельно в кривошипно-ползунном механизме, кривошипном четырехзвеннике или другом механизме.

Особенность использования, например, звена 5 (шатуна) в конкретных механизмах выражается величиной ускорения \bar{a}_{S2} центра масс и направлением вектора \bar{a}_{S2} .

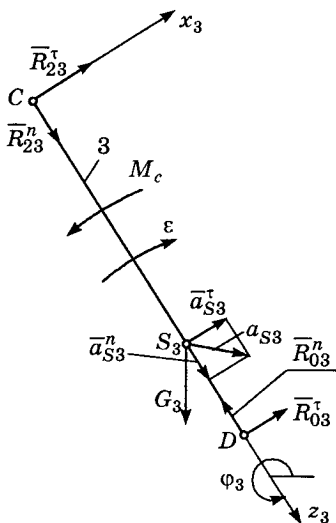


Рис.6.28. Схема ускорений и сил, действующих на звено, совершающее возвратно-вращательные движения

в силе полученные ранее уравнения (6.20), (6.21) и т.д. при условии замены обозначений скоростей, ускорений, сил и систем координат звена 3, при этом

$$\omega_3 = \omega_1 i_{31}; \quad \varepsilon_3 = \omega_1^2 i_{31}' + \varepsilon_1 i_{31}.$$

Из рис.6.28 имеем

$$a_{S3}^{x3} = a_{S3}^v - g \cos \varphi_3 = \varepsilon_3 l_{DS3} - g \cos \varphi_3,$$

$$a_{S3}^{z3} = a_{S3}^n + g \sin \varphi_3 = \omega_3^2 l_{DS3} + g \sin \varphi_3.$$

Тогда результирующая сила, приложенная в центре масс звена в системе координат, связанной с этим звеном, имеет вид

$$\bar{F}_3^n = \left(F_3^n \right)_{K3} \bar{i}_3 + \left(F_3^n \right)_{z3} \bar{k}_3 = -m_3 \left(a_{S3}^{x3} \bar{i}_3 + a_{S3}^{z3} \bar{k}_3 \right).$$

Таким образом, для определения кинематических характеристик любого плоского механизма использованы кинематические передаточные функции трех типовых (четырёхзвенных) механизмов. Для силового же анализа использованы уравнения равновесия трех (типовых) звеньев: кривошипа (звена, совершающего поворот не менее чем на 2π) (см. рис.6.24); шатуна (звена, совершающего плоскопараллельное движение) (см. рис.6.20 и 6.26); ползуна (звена, совершающего поступательное движение) (см. рис.6.27).

На рис.6.28 представлена схема распределения ускорений и сил, действующих на звено, совершающее возвратно-вращательное движение. Для этого звена остаются

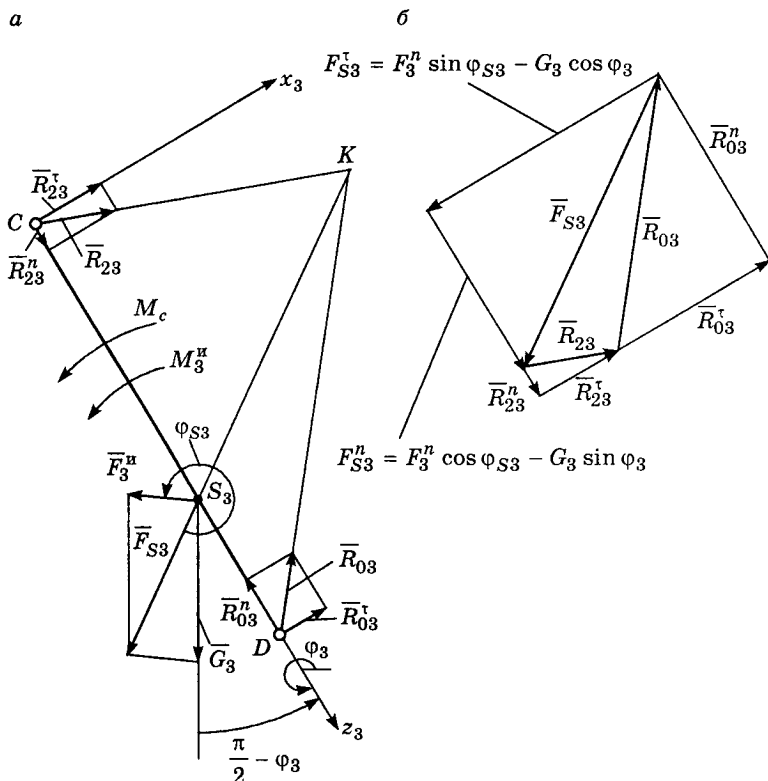


Рис.6.29. Силы, действующие на звено, совершающее возвратно-вращательное движение в системе координат, связанной с ним: *а* — составляющие сил, *б* — замкнутый векторный треугольник (четыреугольник) сил

Из рис.6.29, *б* видно, что соотношение между составляющими реактивных и активных сил, действующих на звено 3, определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} F_{03}^n &= F_{S3}^n + R_{23}^n = F_3^n \cos \varphi_{S3} - G_3 \sin \varphi_3 + R_{23}^n, \\ F_{03}^t &= F_{S3}^t - R_{23}^t = F_3^n \sin \varphi_{S3} - G_3 \cos \varphi_3 - R_{23}^t. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

В уравнениях (6.29)

$$\varphi_{S3} = \beta_3 = \arctg \frac{\varepsilon_3}{\omega_3^2}.$$

Величина силы R_{23}^n определяется соотношением (6.9) (см. рис.6.21).

Значения тангенциальных составляющих сил R_{23}^{τ} и R_{03}^{τ} определяются аналогично выражениям (6.20), полученным для кривошипа (см. рис.6.24). Уравнения равновесия сил, действующих на звено 3, из которых определяются тангенциальные составляющие реакций, имеют вид (см. рис.6.29)

$$\begin{aligned} R_{03}^{\tau} l_{DS3} - R_{23}^{\tau} l_{CS3} + J_{S3} \varepsilon_3 + M_c &= 0, \\ R_{03}^{\tau} - m_3 g \cos \varphi_3 - m_3 l_{DS3} \varepsilon_3 + R_{23}^{\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Совместное решение уравнений (6.30) дает

$$\begin{aligned} R_{23}^{\tau} &= \frac{(J_{S3} + m_3 l_{DS3}^2) \varepsilon_3 + M_c + G_3 l_{DS3} \cos \varphi_3}{l_{CD}}, \\ R_{03}^{\tau} &= \frac{G_3 l_{CS3} \cos \varphi_3 + (m_3 l_{CS3} l_{S3} - J_{S3}) \varepsilon_3 - M_c}{l_{CD}}. \end{aligned}$$

Если рассматривается шарнирный четырехзвенник, то порядок расчета, приведенный ранее для кривошипно-ползунного механизма, остается неизменным. При этом, начиная с кривошипа (см. рис.6.24), определяются тангенциальные реакции в его кинематических парах. После определения тангенциальных реакций, действующих на шатун, определяем соотношение нормальных составляющих в кинематических парах и т.д. Алгоритм силового анализа остается неизменным.

6.6. Взаимосвязь кинетической энергии механизма с распределением масс его звеньев

Как показано ранее, представление ускорений центров масс звеньев механизма в системах координат, связанных с ними, позволяет получить конечные формулы, определяющие реакции в кинематических парах отдельных звеньев. Полученные выражения тангенциальных и нормальных составляющих реакций позволяют выявить особенности передачи сил от входного к выходному звену, при этом оценку влияния сил инерции и трения, как будет показано далее, удастся свести к простому геометрическому образу. Такой подход позволяет ввести количественную оценку эффективности тех или иных механизмов, используемых в машине. Для оценки особенностей передачи энергии от входного к выходному звену механизма рассмотрим некоторые стороны использования в практике методов определения скоростей центров масс звеньев механизмов и приведенного момента инерции.

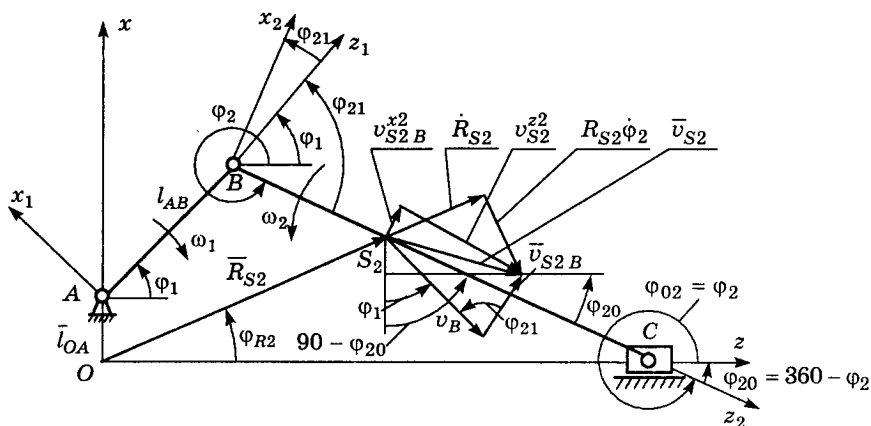


Рис.6.30. К определению скорости центра масс шатуна

Как видно из рис.6.30, скорость центра масс шатуна может быть определена различными методами.

1) Записывается уравнение замкнутости векторного контура

$$\vec{l}_{OS_2} = \vec{R}_{S_2} = \vec{l}_{OA} + \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BS_2}$$

и рассматриваются его проекции на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} z_{S_2} &= R_{S_2} \cos \varphi_{R_2} = l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BS_2} \cos \varphi_2, \\ x_{S_2} &= R_{S_2} \sin \varphi_{R_2} = l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BS_2} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Дифференцирование уравнений (6.31) по обобщенной координате позволяет определить проекции аналогов скоростей и ускорений центров масс шатуна.

2) Рассматривается движение в естественной форме. При этом, зная траекторию центра масс, имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{S_2} &= \frac{ds_{S_2}}{dt} \bar{\tau}, \\ \bar{a}_{S_2} &= \frac{dv_{S_2}}{dt} \bar{\tau} + \frac{v_{S_2}^2}{\rho_{S_2}} \bar{v}. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Уравнения (6.32) для использования неудобны, так как траектория центра масс шатуна остается неизвестной. Определение же радиуса кривизны ρ_{S_2} траектории центра масс S_2 связано с введением новых соотношений.

3) Рассматривается движение в полярной системе координат. При этом, зная, что

$$ds_{S_2} = \sqrt{(dR_{S_2})^2 + (R_{S_2}d\varphi_{S_2})^2},$$

имеем

$$v_{S_2} = \frac{ds_{S_2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dR_{S_2}}{dt}\right)^2 + \left(R_{S_2} \frac{d\varphi_{S_2}}{dt}\right)^2}. \quad (6.33)$$

Тогда ускорение центра масс определится путем дифференцирования выражения (6.33) по времени. После соответствующих преобразований получим

$$a_{S_2} = |\bar{a}_{S_2}| = \sqrt{\left[\frac{d^2 R_{S_2}}{dt^2} - R_{S_2} \left(\frac{d\varphi_{S_2}}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[R_{S_2} \frac{d^2 \varphi_{S_2}}{dt^2} + 2 \frac{dR_{S_2}}{dt} \cdot \frac{d\varphi_{S_2}}{dt}\right]^2}. \quad (6.34)$$

В данном случае рассматриваются радиальные (направление вдоль радиуса вектора \bar{R}_{S_2}) и поперечные (трансверсальные) составляющие скорости и ускорения центра масс. При этом

$$\operatorname{tg} \varphi_{S_2} = R_{S_2} \frac{d\varphi_{S_2}}{dR_{S_2}}.$$

Составляющие выражений (6.33) и (6.34) можно получить иначе, исходя из общих формул преобразования координат, при

$$z_{S_2} = R_{S_2} \cos \varphi_{S_2} \text{ и } x_{S_2} = R_{S_2} \sin \varphi_{S_2}.$$

Так что все эти методы оказываются взаимосвязанными между собой.

4) Рассмотрение скорости точки S_2 как векторной суммы скорости ее в поступательном движении со скоростью точки B и вращательном движении относительно полюса (точки B) дает удобные выражения для взаимосвязи этих составляющих с проекциями их в системе координат, связанной со звеном 2.

Из рис. 6.30 видно, что

$$\left. \begin{aligned} v_{S_2}^{z_2} &= v_B \sin \varphi_{21} = \omega_1 l_{AB} \sin \varphi_{21}, \\ v_{S_2}^{x_2} &= \omega_2 l_{BS_2} - \omega_1 l_{AB} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Из рис. 6.30 видна связь проекций скорости центра масс шатуна в неподвижной системе координат с проекциями скорости в системе координат, связанной с ним. Эта связь выражается уравнением

$$v_{S_2}^{x_2} = v_{S_2}^z \sin \varphi_2 - v_{S_2}^x \cos \varphi_2. \quad (6.36)$$

Дифференцируя уравнения (6.31) по обобщенной координате и подставляя результат в уравнение (6.36), получим

$$\begin{aligned} v_{S_2}^{x_2} &= \omega_1 (-l_{AB} \sin \varphi_1 - l_{BS_2} i_{21} \sin \varphi_2) \sin \varphi_2 - \\ &- \omega_1 (l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BS_2} i_{21} \cos \varphi_2) \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Преобразования последнего уравнения дают выражение

$$v_{S_2}^{x_2^2} = -\omega_1(l_{AB} \cos \varphi_{21} + l_{BS_2} i_{21}).$$

Последнее уравнение можно получить непосредственно из второго уравнения системы (6.35). Величина скорости центра масс определится выражением

$$v_{S_2} = \sqrt{(v_{S_2}^{x_2^2})^2 + (v_{S_2}^{z_2^2})^2} = \omega_1 \sqrt{l_{AB}^2 + 2l_{AB}l_{BS_2}i_{21} \cos \varphi_{21} + l_{BS_2}^2 i_{21}^2}. \quad (6.37)$$

Приведенный момент инерции шатуна с учетом уравнения (6.37) имеет вид

$$J_{\Pi}^{\text{ш}} = m_2 \left(l_{AB}^2 + 2l_{AB}l_{BS_2}i_{21} \cos \varphi_{21} + l_{BS_2}^2 i_{21}^2 \right) + J_{S_2} i_{21}^2. \quad (6.38)$$

В уравнении (6.38) первое слагаемое характеризует кинетическую энергию шатуна в поступательном движении, второе — во вращательном. Для шатуна

$$i_{21} = -\frac{l_{AB}}{l_{BC}} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2},$$

$$i'_{21} = -\frac{l_{AB}}{l_{BC}} \left(\frac{-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i_{21} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2} \right).$$

Уравнение (6.38) дает

$$\frac{dJ_{\Pi}^{\text{ш}}}{d\varphi_1} = m_2 \left\{ 2l_{AB}l_{BS_2} \left[i'_{21} \cos \varphi_{21} - i_{21} (1 - i_{21}) \sin \varphi_{21} \right] + 2l_{BS_2}^2 i_{21} i'_{21} \right\} + 2J_{S_2} i_{21} i'_{21}. \quad (6.39)$$

Уравнения (6.38) и (6.39) позволяют оценить влияние распределения масс шатуна, используемого в любом механизме, для которого имеются выражения i_{21} , i'_{21} . Они позволяют оценить влияние кинематики шатуна и распределения его масс отдельно в поступательном и вращательном движении на динамическую нагруженность главного приводного вала машины.

Представляет интерес также определение коэффициентов динамичности отдельных звеньев. С геометрической точки зрения, отношение

$$k_{\Pi}^i = \frac{\varepsilon_i}{\omega_1^2} = \frac{M_i^{\text{ш}}}{2T_i}$$

представляет собой тангенс угла наклона вектора полного ускорения точки i звена к его радиусу-вектору центра кривизны траектории данной точки (то есть к нормальному ускорению). Коэффициент динамичности указывает на расположение мгновенного

центра ускорений данного звена и характеризует отклонение полного ускорения от радиуса-вектора центра кривизны траектории.

Таким образом, представление скорости и ускорения центра масс звена в системе координат, связанной с ним, дает преимущества перед другими методами в том плане, что их составляющие дают возможность выявить функциональную взаимосвязь распределения масс с кинетической энергией (приведенным моментом инерции) и динамической нагруженностью главного приводного вала (звена приведения). То обстоятельство, что в основу этой взаимосвязи положены кинематическая передаточная функция, размеры звеньев и расположение их центра масс, позволяет использовать полученные выражения как целевую функцию при отыскании оптимального распределения масс с учетом соотношения скоростей звеньев при динамическом анализе. Для механизмов манипуляторов и промышленных роботов запись уравнений динамики в системах координат, связанных с подвижными звеньями, имеет и ту особенность, что в этих системах тензор инерции звеньев остается постоянным. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить нахождение динамических реакций в кинематических парах.

ГЛАВА 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ И ИЗНОСА

7.1. Общие сведения о внешнем трении твердых тел

Трение в подвижных соединениях машин определяет весьма приблизительно силовую и энергетическую стороны весьма сложных процессов контактного взаимодействия трущихся поверхностей. Этот процесс сложен своей динамикой и взаимосвязью физических, химических и механических явлений как на молекулярном уровне, так и на уровне микро- и макрорельефа реальных площадок контакта обработанных тем или иным способом поверхностей. Процесс трения сопровождается изменением структуры и физико-механических свойств поверхностных слоев контактирующих звеньев. Интенсивность таких превращений в зонах контакта зависит от давления, скорости, температуры, влажности и множества других факторов. Обычно свойства поверхностных слоев существенно отличаются от объемных свойств материала, из которого изготавливаются детали машин. На поверхности металла, как правило, имеются окисные пленки, особенно образующиеся при повышении температуры. Свойства материала в поверхностных слоях существенно зависят от характера обработки. Малые скорости относительного скольжения инструмента на окончательных операциях с использованием мелкодисперсного абразива обеспечивают наименьшую шероховатость при минимальной толщине деформированного слоя. Пластические и упругие деформации поверхностного слоя в процессе трения приводят к образованию нового микрорельефа, к перераспределению давления. При скольжении контактирующих поверхностей вначале идет процесс приработки, сопровождающийся изменением микрогеометрии, в результате которого устанавливается некоторая постоянная шероховатость, характерная для данных условий трения. Контактное взаимодействие реальных поверхностей происходит по отдельным вершинам волн и микровыступов. Их совокупность определяет контурную площадь контакта, на которой и происходит контакт самих соприкасающихся микронеровностей. Площадки таких микроконтактов по своим размерам приближаются к площади, на которой взаимодействуют атомы и молекулы вещества. Фактическая площадь контакта составляет $0,01 \div 0,1\%$ номинальной, контурная площадь контакта — $5 \div 15\%$ номинальной. Именно этим объясняется выдвинутое Кулоном положение о независимости силы трения от номинальной площади контакта трущихся тел. Нормальная нагрузка, отнесенная к единице контурной площади контакта, характеризует контурное давление, которое обычно в несколько раз больше номинального. Если

увеличивать номинальное давление, то контурное давление меняется сравнительно мало, а фактическое — остается практически постоянны. Фактическое давление весьма велико. Поэтому сближение контактирующих поверхностей сопровождается пластическим деформированием отдельных микровыступов, их упругим деформированием, а также совместным упругим деформированием микровыступов волн микрорельефа.

Таким образом, внешнее трение твердых тел — сложное явление, зависящее от многих процессов в зонах контакта и тонких поверхностных слоев при относительном тангенциальном перемещении. Под силой трения $F_{тр}$ понимают силу сопротивления относительному перемещению тел, направленную противоположно этому перемещению. Величина силы внешнего трения зависит от перемещения в тангенциальном направлении. Различают силу трения покоя и силу трения движения, не зависящую от величины перемещения. По кинематическому признаку относительного перемещения различают трение скольжения и трение качения, однако при обкатывании деформируемых тел в зоне контакта всегда имеет место скольжение. В зависимости от состояния трущихся поверхностей различают трение без смазки (сухое трение), граничное и жидкостное трение. Обычно при толщине слоя жидкости 0,1 мкм ее свойства во многом отличаются от объемных, к таким слоям обычные уравнения гидродинамики неприменимы. Из этих соображений различают граничное трение.

Учет физико-химических и механических факторов при разрушении поверхностных слоев тел при трении указывает на суммирующее действие отдельных факторов при повторном многократном нагружении до отделения продуктов износа. Этим объясняется изнашивание, например, стальной поверхности детали, находящейся в контакте с резиной или пластмассой в уплотнительном соединении. Этим же объясняется поверхностное выкрашивание при трении качения, которое называют контактной усталостью или выносливостью.

Выделим некоторые экспериментально выявленные факторы, влияющие на интенсивность изнашивания [33].

Удельные нагрузки (номинальное давление) нелинейно влияют на износ неприработанных поверхностей. Для приработанных поверхностей интенсивность изнашивания прямо пропорциональна удельной нагрузке. Волнистость поверхностей значительно уменьшает нелинейный характер зависимости интенсивности изнашивания от номинального давления.

Улучшение прочностных свойств материалов положительно влияет на износостойкость. Для более прочных материалов требуется большее количество циклов нагружений, после которых происходит отделение частиц износа.

Фрикционные свойства сопряжения, определяемые коэффициентом трения, зависят от упругих свойств материала, шероховатости, удельной нагрузки и параметров, характеризующих молекулярное взаимодействие в зоне контакта. Эта взаимосвязь затрудняет количественную оценку интенсивности изнашивания как от коэффициента трения, так и от прочностных свойств.

Шероховатость и волнистость поверхностей, определяющие их микрогеометрию, весьма существенно влияют на износ. Пренебрежение шероховатостью может привести к ошибкам в несколько порядков при определении интенсивности изнашивания. Волнистость меняет интенсивность изнашивания в меньших пределах (один, два порядка). В случае износа приработанных поверхностей исходная микрогеометрия трущихся поверхностей не влияет на интенсивность их изнашивания.

Молекулярное взаимодействие в зоне контакта выявить для трущихся поверхностей в реальных условиях не представляется возможным. На сегодняшний день не отработана методика расчета молекулярной составляющей с учетом характеристик трущихся тел. Сложность теоретического представления характера молекулярного взаимодействия в реальных условиях связана с наличием на поверхности твердых тел пленок, толщина и структура которых зависят от окружающей среды.

Температурно-скоростной фактор чаще всего нельзя рассматривать раздельно от силового. Дело в том, что от скорости скольжения зависит мощность тепловыделений и температура в зоне контакта. Скорость же скольжения определяет время существования единичной фрикционной связи и, следовательно, скорость деформирования. Нагрев поверхностных слоев трущихся тел приводит к изменению в них механических и фрикционных свойств, определяемых структурными изменениями. Поэтому следует рассматривать влияние температурных изменений на интенсивность изнашивания посредством выявления связи их со свойствами материала и другими факторами, учитываемыми при количественной оценке износа. Так, например, установлено, что модуль упругости материалов сравнительно мало уменьшается с ростом температуры, более существенно уменьшение прочностных характеристик. Коэффициент трения в зависимости от температуры может уменьшаться, возрасти или оставаться неизменным. Это объясняется различным характером изменения соотношения молекулярной и механической составляющих коэффициента трения.

7.2. Общие сведения о количественной оценке износа сопряжений

Линейный износ u характеризует потерю (изменение) размера детали в направлении, перпендикулярном ее поверхности.

Износ по поверхности трения определяется неравномерно, поэтому задачей оценки износа является определения функции $u = u(x, y)$, где x, y — координаты точек поверхности трения.

В основу количественной оценки износа положены аналитические зависимости, определяющие интенсивность или скорость изнашивания пар трения. Во многих случаях можно принимать линейную зависимость между временем изнашивания t и величиной изнашивания u , тогда скорость изнашивания $v_{и} = u / t = \text{const}$. Интенсивность изнашивания $I_{и}$ во многих случаях определяется соотношением

$$I_{и} = k_{и} \cdot p^m, \quad (7.1)$$

где $k_{и}$ — коэффициент, характеризующий износостойкость материалов и условия работы пары (смазка, степень изоляции поверхностей от загрязнения и т.п.); $1 < m < 3$, для приработанных поверхностей $m \approx 1$.

В условиях абразивного износа имеет место линейная зависимость между интенсивностью изнашивания $I_{и}$ и давлением:

$$I_{и} = kp.$$

В этом случае линейный износ u не зависит от скорости $v_{ск}$ относительного скольжения при одинаковом пути трения $s_{тр}$, то есть

$$u = k \cdot p \cdot s_{тр}. \quad (7.2)$$

Разделив обе части равенства (7.2) на t , получаем

$$v_{и} = k \cdot p \cdot v_{ск}. \quad (7.3)$$

Скорость $v_{и}$ и интенсивность изнашивания $I_{и}$ связаны зависимостью

$$v_{и} = v_{ск} \cdot I_{и}. \quad (7.4)$$

Формулы (7.1) — (7.4) применимы для количественной оценки изнашивания направляющих скольжения, дисков фрикционных муфт, винтов, гаек и кинематических пар разнообразных механизмов. В более общем случае скорость изнашивания выражается зависимостью

$$v_{и} = du / dt = k \cdot p^m \cdot v_{ск}^n. \quad (7.5)$$

Обычно для абразивного изнашивания $n = 1$.

В процессе работы изнашиваются обе сопряженные поверхности одновременно. Это приводит к изменению их взаимного положения. Показателем взаимного сближения служит износ сопряжения. Износ сопряжения связан с характером и направлением возможного сближения при износе, при этом на его величину влияют кинематические и конструктивные особенности деталей и их соприкасающихся поверхностей.

На рис.7.1, а представлены эпюры износа в плоскости zOx сопряженной поверхности сферической обрабатываемой детали 1 $u_1 = f(\alpha)$ и инструмента 2 $u_2 = f(\alpha)$. На рис.7.1, б представлена схема, поясняющая соотношение линейных износов u_1^i и u_2^i в некоторой точке i сопряженных поверхностей и износа u_{1-2} сопряжения в направлении действия силы прижима Q_1 . Угол α есть угол между осями вращения (векторами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$) детали 1 и инструмента 2.

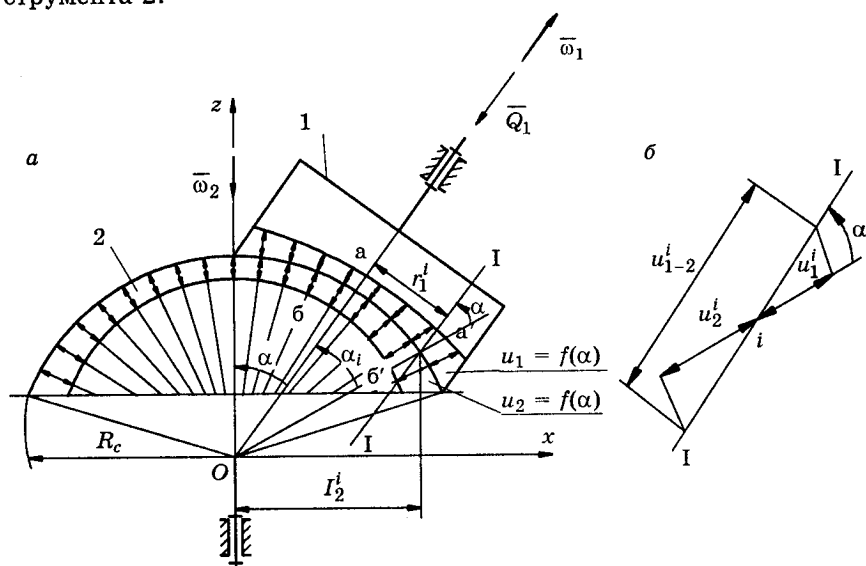


Рис.7.1. К определению взаимосвязи износа поверхностей u_1 и u_2 с износом сопряжения u_{12} в направлении действия силы Q прижима:
а — схема изнашивания, б — соотношение износов

Приведенный пример указывает на сложность функций $u_1 = f(\alpha)$, $u_2 = f(\alpha)$, $u_{1-2} = f(\alpha)$ и их взаимосвязь. Сложность функций износа сопряженных поверхностей обусловлена зависимостью скорости скольжения в каждой i -ой точке как от величины и направления скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, так и от радиусов r_1^i и r_2^i . Как видно из рис.7.1, а, здесь $v_1^i = \omega_1 R_c \sin \alpha_i$, $v_2^i = \omega_2 R_c \sin(\alpha + \alpha_i)$. Функция, определяющая износ сопряжения (как видно из рис.7.1, б), имеет следующую связь с функциями износа поверхностей:

$$u_{1-2}^i = (u_1^i + u_2^i) / \cos \alpha. \quad (7.6)$$

Такая же связь будет и между скоростями изнашивания в данной точке

$$(v_{и})_{1-2}^i = \frac{(v_{и})_1^i + (v_{и})_2^i}{\cos \alpha} \quad (7.7)$$

Соотношение (7.6) называют условием касания, так как оно характеризует важную особенность протекания износа сопряжения, заключающуюся в том, что при любой форме изношенной поверхности деталей наблюдается полный контакт сопряженных поверхностей. Поскольку поверхность контакта звеньев 1 и 2 общая для двух тел, представляется возможным построить так называемую область взаимного внедрения. Эта область характеризует объем изношенного материала каждого из сопряженных тел.

Для сопряжений, у которых направление взаимного сближения не задано заранее, новое положение одной детали относительно другой характеризуется самоустановкой, то есть изменением положения в пространстве в соответствии с формой изношенных поверхностей относительно первоначальной (исходной) формы.

Использование условия касания позволяет моделировать процесс износа по давлению (среднему или максимальному) и по величине износа (форме изношенной поверхности).

Расчеты на износ по давлению дают ориентировочную картину о размерах и форме изношенной поверхности. Они позволяют моделировать изменение давления в результате износа и сравнивать его с допусковым. Как видно из рис. 7.1, а, неравномерность износа сопряженных поверхностей приводит к уменьшению давления в местах с большим износом и к увеличению его на участках с меньшим износом при постоянной по величине и направлению силе прижима. Такое автоматическое перераспределение давления способствует в некоторой степени выравниванию удельной мощности, затрачиваемой на износ отдельных участков поверхностей, и повышению, тем самым, равномерности изнашивания. Однако степень влияния скорости скольжения и давления проявляется не в одинаковой степени, поэтому расчеты по давлению часто не удовлетворяют требуемой точности.

Наиболее удовлетворительными являются расчеты величины износа в нескольких точках и определения формы изношенных поверхностей. Такой подход позволяет указывать основные пути повышения долговечности сопряжения при конструировании и эксплуатации.

7.3. Математическое моделирование процессов формообразования точных поверхностей деталей машин и приборов

Особое значение моделирование трения и износа имеет в практике окончательной обработки точных поверхностей деталей машин и приборов. Погрешности макрогеометрии и микронеровности (шероховатость) таких деталей оцениваются долями микрометра, то есть соизмеримы с длиной световой волны. Это сферические, асферические, плоские и другие детали астрооптики, бытовой оптики, пластин из выращенных кристаллов, например, германия, и т.п.

При обработке таких деталей управление процессом требует установления функциональной связи между основными геометрическими параметрами станка, инструмента, обрабатываемой детали и их кинематикой с учетом износа сопряженных поверхностей инструмента и обрабатываемой детали. Такая взаимосвязь позволяет определить наиболее выгодные наладочные (установочные) параметры для конкретной кинематики станка или же определить рациональные соотношения скоростей инструмента и обрабатываемой детали для конкретной схемы обработки, обеспечивающие наименьшие погрешности макро- и микрогеометрии.

Математическое моделирование процесса формообразования поверхностей сводится к определению скорости их изнашивания и закономерности изменения давления в зоне контакта в результате этого износа. Если скорость изнашивания определяется исходными геометрическими и кинематическими характеристиками сопряженных поверхностей и в меньшей мере зависит от изменения их геометрии в процессе износа, то давление постоянно изменяется (перераспределяется). Давление перераспределяется так, что чем больше путь трения в какой-либо зоне контакта, тем меньше давление в ней из-за удаления (износа) некоторого объема материала. Это приводит к росту (за счет перераспределения) давления в соседних зонах контакта, где скорость проскальзывания меньше. Такая динамика процесса характерна для обработки сферических, плоских торцовых и других поверхностей, где происходит постоянное изменение макро- и микрогеометрии как обрабатываемой детали, так и рабочей поверхности инструмента. Одним из наиболее важных этапов моделирования процесса формообразования поверхностей является получение аналитических выражений для целевой функции и ее решение в требуемом диапазоне с помощью ЭВМ. Этапы такого подхода включают в себя:

– определение (выявление) основных геометрических параметров обрабатываемых деталей инструмента и рабочей зоны станка, оказывающих влияние на неравномерность износа сопряженных поверхностей;

– составление аналитических выражений для оценки линейных скоростей в отдельных точках зоны контакта, принадлежащих обрабатываемой поверхности детали и инструменту;

– составление аналитических выражений для определения скоростей проскальзывания и износа в отдельных круговых зонах обрабатываемой поверхности и рабочей поверхности инструмента;

– определение вида синтеза (основного условия синтеза) и целевой функции, определяющей выходные параметры синтеза, то есть математического выражения основного условия синтеза.

На этапе кинематического анализа (синтеза) могут быть прямая и обратные задачи. Первая состоит в определении кинематических характеристик (составляющих угловых скоростей детали и инструмента), обеспечивающих более равномерный износ обрабатываемой и рабочей поверхностей инструмента при заданных (неизменных) геометрических параметрах обрабатываемой детали и исполнительного механизма. Обратная задача заключается в определении (синтезе) основных геометрических параметров исполнительного механизма или же инструмента, включая его рабочую зону, при неизменной кинематике (неизменных составляющих угловых скоростей детали и инструмента). В зависимости от вида решаемой задачи входные и выходные параметры синтеза будут различными.

Особенности решения технологических задач в такой постановке связаны с тем, что для получения требуемых свойств исполнительного механизма станка или процесса обработки необходимо соблюдение многих, зачастую противоречивых условий. Из множества этих условий выбирают одно, а остальные относят к дополнительным. Если, например, основное условие — равномерный износ рабочей поверхности инструмента, то тип исполнительного механизма, ограничение длин его звеньев, например, относительно центра обрабатываемой сферы, и т.п. являются дополнительными условиями синтеза. К дополнительным условиям синтеза в данном случае относится и соотношение угловых скоростей детали и инструмента. Если в такой постановке целевую функцию (ее математическое выражение) получить не удается, то на первом этапе проводят кинематический анализ, используя полученные выражения скоростей проскальзывания в зонах контакта обрабатываемой поверхности инструмента. В процессе такого анализа определяют характер распределения износа в зависимости от геометрических и кинематических параметров раздельно, при фиксированных значениях других. Конечный результат имеет целью выявление реализуемых на практике диапазонов изменения входных параметров (геометрических и кинематических).

После этого устанавливаются возможные, реализуемые на практике, законы их изменения. Тогда в рассматриваемом примере

целевая функция может быть представлена в виде максимального приближения к установленному (допустимому) максимальному износу в той или иной зоне инструмента или обрабатываемой поверхности или же в виде максимально возможного (реализуемого на практике) приближения к равномерному износу. Оптимальное сочетание движений инструмента и детали (вращения и относительного сближения) обеспечивает не только качество обработанной поверхности, но и определяет показатели самого процесса (производительность, энергозатраты, износ инструмента и т.п.). Особенности автоматического управления в данном случае связаны с установлением количественной взаимосвязи управляемого параметра (его изменения) с основными характеристиками процесса. Несмотря на то, что управляемыми параметрами в процессе обработки точных поверхностей являются скорости детали и инструмента, а также закон их сближения, использовать известные алгоритмы не представляется возможным. Это связано в основном с динамикой процесса износа, которая проявляется в перераспределении давления в зонах контакта, обусловленного неравномерностью скорости их износа. По видимому, это служит одной из причин того, что, например, в оптической промышленности автоматическое (жесткое и адаптивное) управление развито недостаточно, хотя теоретические предпосылки количественной оценки и перераспределения давления достаточно хорошо доведены до уровня использования в инженерной практике.

Таким образом, программное управление процессом формообразования точных поверхностей требует моделирования (имитации) взаимосвязи кинематики и динамики технологического оборудования с динамикой процесса износа сопряженных поверхностей инструмента и обрабатываемой детали. Здесь особое значение приобретает ЭВМ. Методика позволяет провести численное исследование возможностей управления процессом обработки. С помощью ЭВМ представляется возможность, не прибегая к экспериментам на станках и станках, выяснить целесообразность и возможность реализации автоматического регулирования (управления) режимами.

7.4. Методика оценки характера износа сопряжения

На рис.7.2 представлена схема сопряжения конических поверхностей [33]. Определим характер эпюры давлений в зоне контакта соприкасающихся поверхностей при принятых допущениях об их изнашивании.

В выбранной системе координат xOy скорость относительно скольжения в i -ой точке поверхности при неподвижном звене 2 определится соотношением

$$v_{ск} = v_i = \omega_1 \cdot r_i = \omega_1 x_i \cos \alpha .$$

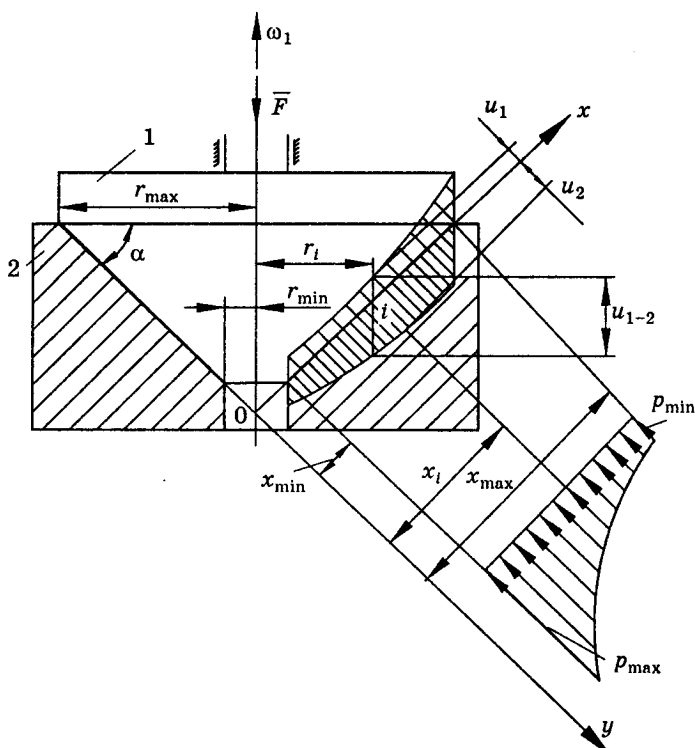


Рис.7.2. Схема износа конических поверхностей

Применительно к рассматриваемому случаю для звеньев 1 и 2 выражение (7.3) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} [v_{\text{н}}^{(1)}]_i &= k_1 p_i \omega_i x_i \cos \alpha, \\ [v_{\text{н}}^{(2)}]_i &= k_2 p_i \omega_i x_i \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где k_1, k_2 — коэффициенты износостойкости материалов звеньев 1 и 2.

Для рассматриваемого примера выражение (7.7) примет вид

$$(v_{\text{н}}^i)_{1-2} = \frac{[v_{\text{н}}^{(1)}]_i + [v_{\text{н}}^{(2)}]_i}{\cos \alpha} = (k_1 + k_2) \cdot \omega_1 x_i p_i.$$

Из последнего уравнения получим

$$p_i = \frac{(v_{\text{н}}^i)_{1-2}}{(k_1 + k_2) \cdot \omega_1 \cdot x_i}. \quad (7.9)$$

При $\omega_1 = \text{const}$ и неизменных условиях контакта (смазка, температура и т.п.) $(v_{\text{н}}^i)_{1-2} = \text{const}$, поэтому выражение (7.9) указывает на то, что давление вдоль оси x распределяется по гипер-

большому закону. Связь между силой F и давлением p_i , распределенным по поверхности контакта, определится из выражения

$$F = \int_S p_i \cos \alpha dS.$$

Выражая элементарный участок поверхности как

$$dS = 2\pi r_i dx = 2\pi x_i \cos \alpha dx,$$

получим

$$F = 2\pi \cos^2 \alpha \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p_i x dx. \quad (7.10)$$

Как видно из рис. 7.2,

$$x_{\min} = r_{\min} / \cos \alpha, \quad x_{\max} = r_{\max} / \cos \alpha.$$

Тогда, подставляя значение p_i из выражения (7.9) в формулу (7.10), получим

$$F = 2\pi \cos \alpha \frac{(v_{\text{н}}^i)_{1-2}}{(k_1 + k_2)\omega_1} \cdot (r_{\max} - r_{\min}).$$

Из последнего уравнения имеем

$$(v_{\text{н}}^i)_{1-2} = \frac{F(k_1 + k_2)\omega_1}{2\pi(r_{\max} - r_{\min}) \cdot \cos \alpha}. \quad (7.11)$$

Выражение (7.11) определяет скорость изнашивания сопряжения в зависимости от режимов: силы F прижима и скорости ω_1 вращения звеньев 2, а также от геометрии (r_{\max} , r_{\min} и α) сопряженных поверхностей и износостойкости материалов звеньев 1 и 2 (k_1 и k_2). Выражения (7.9) и (7.10) дают следующую формулу для определения эпюры давления:

$$p_i = \frac{F}{2\pi(r_{\max} - r_{\min}) \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{1}{x_i}. \quad (7.12)$$

Скорость изнашивания поверхностей звеньев 1 и 2 определится соотношением (7.8) с учетом давления, определяемого по формуле (7.12):

$$[v_{\text{н}}^{(1)}]_i = k_1 \frac{F\omega_1}{2\pi(r_{\max} - r_{\min})}, \quad [v_{\text{н}}^{(2)}]_i = k_2 \frac{F\omega_1}{2\pi(r_{\max} - r_{\min})}.$$

С учетом известной взаимосвязи износа со скоростью изнашивания $v_{\text{н}} = du / dt$ форма изношенных поверхностей звеньев 1 и 2 для рассматриваемого примера определится соотношениями:

$$u_1^i = [v_{\text{н}}^{(1)}]_i t = k_1 \frac{F\omega_1}{2\pi(r_{\max} - r_{\min})} t, \quad (7.13)$$

$$u_2^i = [v_{\text{н}}^{(2)}]_i t = k_2 \frac{F \omega_1}{2\pi(r_{\text{max}} - r_{\text{min}})} t. \quad (7.14)$$

В уравнениях (7.13), (7.14) износ пропорционален времени контакта трущихся поверхностей и не зависит от закона изменения скорости ω_1 звена 1, потому что в рассматриваемом примере $\omega_1 = \text{const}$. В общем случае, как отмечалось ранее, время определяется интегральной функцией:

$$t = \int_{\varphi_{\text{min}}}^{\varphi_{\text{max}}} d\varphi / \omega = f(\varphi).$$

Поэтому и износ зависит от закона изменения скорости звена. Как видно из выражений (7.13), (7.14), износ не зависит явно от времени, он определяется в данном случае количеством N_1 оборотов звена 1. Это следует из того, что $\varphi_1 = 2\pi N = \omega_1 t$. С учетом полученного выражения (7.13), (7.14) примут вид:

$$u_1^i = k_1 \frac{F}{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}} N_1, \quad u_2^i = k_2 \frac{F}{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}} N_2.$$

Рассмотренный пример указывает на то, что процесс изнашивания трущихся поверхностей отличается автоматическим перераспределением давления p , обусловленным неравномерностью распределения скоростей $v_{\text{ск}}$ скольжения, величина же износа (потеря формы трущихся поверхностей) определяется удельной мощностью, то есть произведением $p v_{\text{ск}}$. Принятые нами допущения об одинаковой степени влияния на износ как давления p , так и скорости скольжения $v_{\text{ск}}$ то есть $m = 1$, $n = 1$ (см. формулу 7.5), привели к тому, что форма изношенных поверхностей оказалась зависящей только от коэффициентов k_1 , k_2 силы F и габаритов соединения r_{max} , r_{min} . При этом износ тем больше, чем больше количество оборотов N сделает звено 1. Здесь управление формой изношенных поверхностей осуществляется только путем распределения износостойкости вдоль соприкасающихся поверхностей, то есть путем задания функций $k_1 = f(x)$ и $k_2 = f(x)$. Эти зависимости должны быть учтены в соотношениях (7.8), в результате чего эпюра давления изменяется и соотношения (7.13) и (7.14), описывающие форму изношенных поверхностей, будут другими. Такая динамика процесса изнашивания требует в каждом конкретном примере численных исследований и анализа положенных в основу используемых зависимостей допущений. В основе этого сравнения лежит перераспределение давления в зоне контакта, закон изменения которого подлежит выявлению в каждом конкретном случае. Таким образом, при оценке

износа следует учитывать как скорость изнашивания, так и потерю формы сопряженных поверхностей.

Основную роль в распределении износа по поверхности трения играет изменение давления, скоростей скольжения, условий контакта по отношению к каждому участку поверхности. Это имеет особое значение для кулачковых механизмов, где износ рабочей поверхности кулачка неравномерный и степень влияния его в каждом отдельном случае (закономерность изнашивания) изменяют по-своему заранее заложенный закон движения толкателя.

Следует отметить еще одну особенность изнашивания. При наличии погрешностей изготовления и сборки, а также в случае деформации сопряженных поверхностей, полного контакта по номинальным поверхностям не возникает, поэтому в начальной стадии износа происходит рост площади соприкосновения. Такой процесс приработки во многом определяется износостойкостью трущихся поверхностей. Для скорейшего протекания процесса приработки одновременно с повышением износостойкости необходимо предусмотреть самоустановку трущихся поверхностей.

Для многих механизмов, состоящих из большого числа кинематических пар, предельное состояние определяется положением выходного звена, на котором устанавливается тот или иной рабочий орган. На отклонение выходного звена от заданного (требуемого) положения оказывает влияние износ в отдельных кинематических парах. При этом, в зависимости от кинематики и конструкции механизма, влияние износа промежуточных поверхностей на положение последнего звена может быть оценено передаточным отношением i_k . Поэтому для механизма, имеющего n изнашивающихся звеньев, можно записать равенство

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k = \Delta + l, \quad (7.15)$$

где l — возможная компенсация износа. Предельный износ u_{\max} следует устанавливать для одного (наиболее изнашивающегося) или нескольких звеньев, исходя из условия $\Delta \leq \Delta_{\text{доп.}}$.

Если одно из сопряжений имеет скорость изнашивания $v_{\text{н}}^{(x)}$, то для него надо установить связь износа $u^{(x)}$ с погрешностью Δ . Для этого, умножив правую и левую часть равенства (7.15) на $v_{\text{н}}^{(x)} = u^{(x)} / t$, где

$$u^{(x)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n u_k i_k}{t} = (\Delta + l) \frac{u^{(x)}}{t},$$

получим

$$u^{(x)} \cdot \sum_{k=1}^n v_{\text{н}}^{(k)} i_k = (\Delta + l) u_{\text{н}}^{(x)},$$

откуда

$$u^{(x)} = (\Delta + l) \frac{v_{\text{н}}^{(x)}}{\sum_{k=1}^n v_{\text{н}}^{(k)} i_k} = \frac{\Delta + l}{\sum_{k=1}^n [v_{\text{н}}^{(k)} / \sum_{k=1}^n v_{\text{н}}^{(x)}] \cdot i_k}. \quad (7.16)$$

Формула (7.16) позволяет определить предельный износ любой пары, так как при $\Delta = \Delta_{\text{доп.}}$ получаем $u_{\text{max}} = u_{\text{н}}^{(x)}$.

Пример [33]. Определить возможное увеличение срока службы, то есть увеличение допустимых значений u_{max} , механизма, состоящего из четырех звеньев, путем компенсации износа, если его передаточное отношение $i = 1$ и допустимое отклонение выходного звена от заданного конечного положения $\Delta_{\text{доп.}} = 0,3$ мм.

Пусть из практики известно соотношение скоростей изнашивания отдельных звеньев: $v_{\text{н}}^{(1)} : v_{\text{н}}^{(2)} : v_{\text{н}}^{(3)} : v_{\text{н}}^{(4)} = 1:3:7:4$.

Как видно, звено 3 изнашивается наиболее интенсивно, поэтому для него определим предельно допустимый износ $u_{\text{max}}^{(3)}$. По формуле (7.16) при $l = 0$ имеем

$$u_{\text{max}}^{(3)} = \frac{0,3 \cdot 7}{1 + 3 + 7 + 4} = 0,14 \text{ мм.}$$

Здесь при определении u_{max} для одного звена учитывается износ всех звеньев. Для увеличения допустимых значений u_{max} , а значит, и срока службы всего механизма, введем устройство для компенсации износа на величину $l = 3$ мм. В этом случае использование формулы (7.16) дает

$$u_{\text{max}}^{(3)} = \frac{(0,3 + 3) \cdot 7}{1 + 3 + 7 + 4} = 1,55 \text{ мм.}$$

Введение такой компенсации представляет возможность увеличить срок службы механизма в 11 раз.

Рассмотренная методика позволяет на стадии схемного проектирования (на стадии проработки схем механизмов в машине) оценивать возможный ход процесса изменения формы соприкасающихся поверхностей в результате их изнашивания. Достоверность полученных результатов во многом определяется значениями коэффициентов износа материалов, которые устанавливаются на основе изучения физики процесса изнашивания. При отсутствии значений коэффициентов износа материалов в оценке износа сопряжений можно использовать следующие приемы:

– проводить сравнительные расчеты, устанавливающие, во сколько раз повысится износостойкость данной пары по отноше-

нию к аналогичной при сравнении нескольких вариантов конструктивной схемы;

— оценивать значение коэффициента k , прогнозируя возможное повышение износостойкости при применении новых материалов;

— проводить расчеты с целью выявления функций $k = f(S)$ распределения износостойкости по поверхности S , обеспечивающей наиболее равномерный износ одной из них или наименьшую погрешность отклонения от заданной формы (сферы, плоскости и т.д.);

— оценивать диапазоны изменения скорости или интенсивности изнашивания в пределах принятого класса износостойкости.

Класс износостойкости материалов определяется интенсивностью изнашивания $I_{и}$. Связь коэффициента износа k с интенсивностью изнашивания определяется опытным путем на основании соотношения

$$I_{и}^{(s)} = du / dS.$$

Согласно опытным данным [33], интенсивность изнашивания меняется в весьма широких пределах: от $I_{и}^{(s)} = 10^{-12}$ (износ 0,001 мкм на 1 км пути трения) до $I_{и}^{(s)} = 10^{-3}$ (износ 1 мм на 1 м пути трения). Численно $I_{и}^{(s)}$ — это износ, приходящийся на единицу пути трения S . Связь между $I_{и}^{(s)}$ и скоростью скольжения определяется из следующих преобразований:

$$v_{и} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = I_{и}^{(s)} v_{ск}.$$

Величина k может быть найдена из зависимости

$$k = I_{и}^{(s)} / p_{ср}. \quad (7.17)$$

По диапазонам изменения $I_{и}^{(s)}$ различают 10 классов [33] износостойкости материалов: 0 ... V классы ($\gamma_s = 10^{-12} \dots 10^{-7}$) — обладают высокой износостойкостью вследствие упругого деформирования материалов; VI ... VII классы ($\gamma_s = 10^{-6} \dots 10^{-5}$) — средней износостойкостью при упругопластическом деформировании; VIII ... IX классы ($\gamma_s = 10^{-5} \dots 10^{-4}$) — весьма низкая износостойкость при микрорезании.

Так, по опытным данным [33], для шатунных шеек стальных коленчатых валов двигателей автомобилей $\gamma_s = 6 \cdot 10^{-12} \dots \dots 4 \cdot 10^{-11}$

(обладающих весьма высокой износостойкостью при упругом контакте), а для зуба ковша экскаватора (сталь 45) $\gamma_s = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ (с весьма низкой износостойкостью при микрорезании).

Не имея опытных данных, можно определить ориентировочную интенсивность изнашивания по методике И.В.Крагельского и В.В.Алисина [33, с.92-96], согласно которой интенсивность изнашивания является функцией коэффициента трения, шероховатости поверхностей, давления и физико-механических характеристик материала (модуля упругости и параметров фрикционно-контактной усталости при трении). Зная режим работы (среднее значение давления p_{cp}) и соответствующую интенсивность изнашивания $I_n^{(s)}$, по формуле (7.17) можно найти коэффициент износа k .

Как отмечалось ранее, в общем случае, то есть при переменных p и $v_{ск}$, износ за время работы t определяют по формуле

$$u = k \int_0^{t_p} p v_{ск} dt.$$

Для удобства расчета в механизмах с одной степенью свободы последнюю формулу целесообразно преобразовать, введя обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\omega = d\varphi / dt$. Тогда износ за один цикл установившегося движения, для которого $\varphi = \varphi_{ц}$, определится как

$$u_{ц} = k \int_0^{\varphi_{ц}} p \frac{v_{ск}}{\omega} d\varphi, \quad (7.18)$$

где $v_{ск} / \omega = ds / d\varphi = f(\varphi)$ — аналог скорости скольжения (передаточная функция) в рассматриваемой точке элемента кинематической пары. Если число циклов работы $N_{ц}$, то износ

$$u = u_{ц} N_{ц}. \quad (7.19)$$

7.5. Определение износа звеньев, входящих во вращательную пару

Рассмотрим методику расчета износа элементов вращательной пары, в которой вал 1 равномерно вращается в неподвижном подшипнике 2 (рис.7.3), $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = 0$ и нормальное усилие $Q_{12} = \text{const}$. В этом случае $u_1 = \text{const}$ (вал 1 будет изнашиваться равномерно), а u_2 — переменная величина — подшипник будет изнашиваться неравномерно. Через некоторое число циклов работы центр вала переместился из положения O в положение O_1 ,

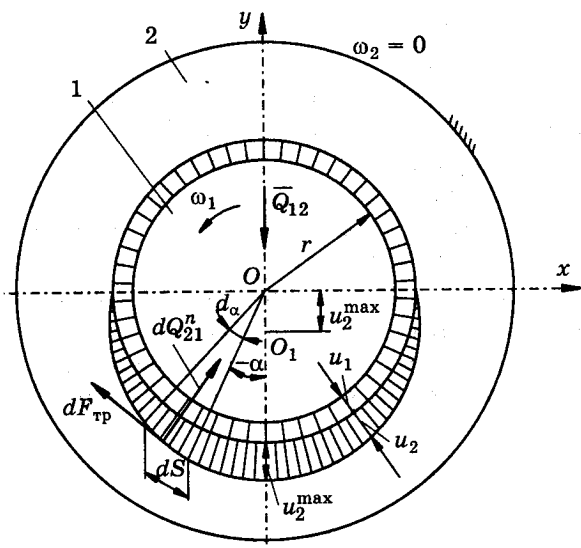


Рис.7.3. К определению износа и приведенного коэффициента трения звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

точек, т.е. $v_{ск} = \text{const}$, то и закон распределения давления, согласно формуле (7.1), будет косинусоидальным [33]

$$p = p_{\max} \cdot \cos \alpha. \quad (7.20)$$

Для определения максимального давления p_{\max} в точке, находящейся на линии действия силы \bar{Q}_{12} , рассмотрим элементарную площадку на втулке подшипника шириной $ds = r d\alpha$ и длиной b (b — размер, перпендикулярный плоскости чертежа [34]).

Элементарная сила в направлении нормали к поверхности трения, приложенная к валу (см. рис.7.3), определится как

$$dQ_{21}^n = p b ds = p_{\max} b r \cos \alpha d\alpha.$$

Сила \bar{Q}_{12} уравновешена суммой проекций сил dQ_{21}^n на ось y , поэтому

$$Q_{\Sigma} = Q_{12} = p_{\max} b r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha,$$

откуда

$$p_{\max} = \frac{2Q_{12}}{\pi b r}. \quad (7.21)$$

следовательно, износ подшипника 2 в направлении вектора силы Q_{12} будет во всех точках рабочей поверхности одинаковым и равным $u_2^{\max} = OO_1$, а в направлении нормали к поверхности трения — различным, изменяясь, согласно рис.7.3, по закону косинуса

$$u_2 = u_2^{\max} \cdot \cos \alpha,$$

где α — угловая координата рассматриваемой точки подшипника 2.

Так как скорость скольжения одинакова для всех

Тогда уравнение (7.20) примет вид

$$p = \frac{2Q_{12}}{\pi br} \cos \alpha. \quad (7.22)$$

В общем случае, для некоторой вращательной пары рычажного механизма с обобщенной координатой φ_1 (рис. 7.4) при переменной по модулю и направлению силе \bar{Q}_{12} формула (7.22) должна применяться для каждого мгновенного положения. Поэтому при определении износа одного из элементов пары (например, звена 1 в некоторой точке a_1) нужно знать угловую координату $\alpha_{21} = \alpha_{21}(\varphi_{21})$ вектора силы Q_{21} , приложенной к этому звену со стороны звена 2, а также в системе координат $x_1 O_1 y_1$, связанной со звеном 1, — угловую координату β_1 исследуемой точки a_1 .

Тогда давление p в точке a_1 определится по формулам (7.20), (7.21) как

$$p = p_{\max} \cdot \cos \alpha^{(1)}, \quad (7.23)$$

где

$$p_{\max} = \frac{2Q_{21}}{\pi br}, \quad (7.24)$$

а угловая координата $\alpha = \alpha^{(2)}$ рассматриваемой точки, например, в системе координат $x_2 O_2 y_2$, измеряемая от направления вектора силы \bar{Q}_{12} согласно рис. 7.4, определяется по формуле

$$\alpha = \alpha^{(2)} = \alpha_{21} + \varphi_{21} - \beta_2. \quad (7.25)$$

В системе координат XOY координата имеет вид

$$\alpha^{(II)} = \alpha_{21} - \beta_1. \quad (7.26)$$

Как видно из рис. 7.4, связь между углами β в неподвижной системе координат XOY , β_1 и β_2 определится выражениями

$$\beta - \beta_2 = \varphi_2, \quad (7.27)$$

$$\beta - \beta_1 = \varphi_1. \quad (7.28)$$

Таким образом, координаты $\alpha^{(1)}$ — для построения эпюры $u_1 = f(\alpha)$ износа первого звена и $\alpha^{(2)}$ — для построения эпюры второго износа $u_2 = f(\alpha)$ позволяют определить характер износа звеньев в системах, связанных со звеньями. При этом если $|\alpha| > \pi / 2$, то $p = 0$.

В этом случае имеет место разрыв контакта. Зависимости (7.25) — (7.28) позволяют также исследовать возможность появления ударных нагрузок в кинематической паре. Угол α_{21} вектора

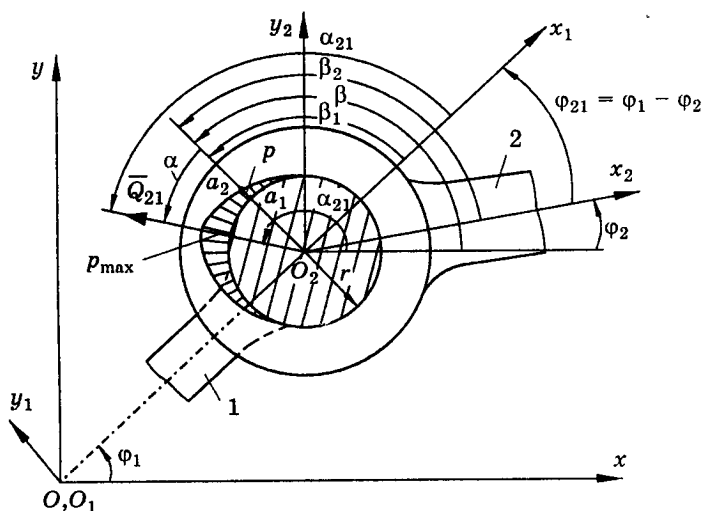


Рис.7.4. К определению износа звеньев рычажного механизма, входящих во вращательную кинематическую пару силы Q_{21} или Q_{12} в подвижных системах координат или в неподвижной определяется по методике, изложенной в разделе 4 главы 7 настоящего пособия. Если звено 2 входит во вращательную кинематическую пару со звеном 3, то методика определения соответствующих координат остается в силе, меняются только соответствующие индексы. Если же звено 2 входит во вращательную кинематическую пару со звеном, совершающим поступательное прямолинейное движение, то угловые координаты имеют вид (см. рис.7.5)

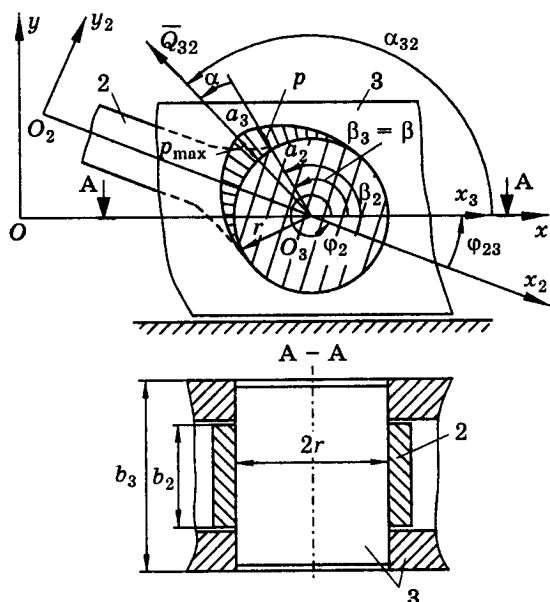


Рис.7.5. К определению износа звеньев рычажного механизма, входящих в поступательную пару

$$\alpha^{(2)} = \alpha_{32} + \varphi_{23} - \beta_2, \quad (7.29)$$

$$\alpha^{(3)} = \alpha_{32} - \beta_3. \quad (7.30)$$

При совпадении осей x неподвижной системы координат с осью x_3 системы, связанной с третьим звеном (ползуном), $\beta = \beta_3$ и скорость скольжения в точках a_1 и a_2 (см. рис.7.4) определяется соотношением

$$v_{\text{ск}}^{(12)} = \omega_{12}r = (\omega_1 - \omega_2)r.$$

Для кинематической пары "звено 2 с ползуном" (рис.7.5) имеем $v_{\text{ск}}^{(23)} = \omega_{23}r = \omega_2r$, так как $\omega_3 = 0$.

Если начальное звено механизма обозначено номером 1, то аналог скорости скольжения для вращательной пары 1-2 определится выражением

$$\frac{v_{\text{ск}}^{(12)}}{\omega_1} = (1 - i_{21})r.$$

Если звено 2 входит во вращательную пару со звеном 3, то имеем

$$\frac{v_{\text{ск}}}{\omega_1} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1} \right| \cdot r = |i_{21} - i_{31}| \cdot r. \quad (7.31)$$

Для схемы соединения звеньев на рис.7.5 имеем

$$\frac{v_{\text{ск}}^{(23)}}{\omega_1} = i_{21}r.$$

Износ в некоторой точке a_1 с координатой β_2 (см. рис.7.4) за 1 цикл (чаще всего за 2π) определится в результате совместного решения уравнений (7.23), (7.24), (7.26), (7.31) и подстановки их в уравнение (7.18):

$$[u_1^{12}]_{\text{цикл}} = \frac{2k_1}{\pi b_1} \int_0^{2\pi} Q_{21}(1 - i_{21}) \cos \alpha^{(1)} d\varphi_1.$$

Для точки a_2 звена 2 с координатой β_2 износ за 1 цикл определится аналогично

$$[u_2^{12}]_{\text{цикл}} = \frac{2k_2}{\pi b_2} \int_0^{2\pi} Q_{21}(1 - i_{21}) \cos \alpha^{(2)} d\varphi_2.$$

Здесь $\alpha^{(2)}$ определяется выражением (7.25), k_1, k_2 — коэффициенты износа материалов звеньев 1 и 2, b_1, b_2 — ширина (длина) рабочих участков подшпипника скольжения, который обеспечивает аналогичное контактирование звеньев 1 и 2 с 2, 3 (рис.7.5).

Если звено 2 входит во вращательную кинематическую пару со звеном 3, то износ точки a_2 за 1 цикл определится выражением

$$[u_2^{23}]_{\text{цикл}} = \frac{2k_2}{\pi b_2} \int_0^{2\pi} Q_{32}(i_{21} - i_{31}) \cos \alpha^{(2)} d\varphi_1. \quad (7.32)$$

Износ же точки a_3 в этом случае определится по формуле

$$[u_3^{23}] = \frac{2k_3}{\pi b_3} \int_0^{2\pi} Q_{32}(i_{21} - i_{31}) \cos \alpha^{(3)} d\varphi_1. \quad (7.33)$$

В выражениях (7.32), (7.33) углы $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ определяются выражениями (7.25), (7.26) с заменой индексов 1 на 2 и 2 на 3. Это же относится и к выражениям (7.27) и (7.28). Для вращательной кинематической пары, образованной вращающимся звеном и ползуном (рис. 7.5), имеем

$$[u_2^{23}] = \frac{2k_2}{\pi b_2} \int_0^{2\pi} Q_{32} i_{21} \cos \alpha^{(2)} d\varphi_1, \quad (7.34)$$

$$[u_3^{23}] = \frac{2k_3}{\pi b_3} \int_0^{2\pi} Q_{32} i_{21} \cos \alpha^{(3)} d\varphi_1. \quad (7.35)$$

В уравнениях (7.34), (7.35) углы $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ определяются выражениями (7.29), (7.30). Задаваясь рядом значений углов β_1 , β_2 (β_2 , β_3), определяем ряд значений износа и строим эпюру за время, соответствующее $N_{\text{ц}}$ циклам, с использованием формулы (7.19)

$$u = u_{\text{ц}} \cdot N_{\text{ц}}.$$

7.6. Определение износа звеньев, входящих в поступательную пару

Рассмотрим наиболее простой случай [34], когда ползун 3 в форме параллелепипеда с размерами l_3 в плоскости чертежа и b_3 в перпендикулярном направлении движется возвратно-поступательно в направляющих станины O (рис. 7.6). Сила Q_{03} реакции станины на ползун приложена в точке C , совпадающей с серединой его длины, постоянна по величине и направлению. Максимальное перемещение ползуна (ход) $H = 2l_1$ где l_1 — длина кривошипа. Кривошипно-ползунный механизм рассматриваем без эксцентриситета, когда линия перемещения точки C проходит через ось вращения кривошипа. В этом случае при равномерном распределении давления в зоне контакта износ u_3 ползуна будет равномерным по длине l_3 (см. рис. 7.6). Износ направляющих в

крайних точках a и m равен нулю: $u_0^{(a)} = u_0^{(m)} = 0$. Износ направляющих станины на участке cd максимальный. Для рассматриваемого случая

$$p = \frac{Q_{03}}{l_3 b_3} = \text{const}.$$

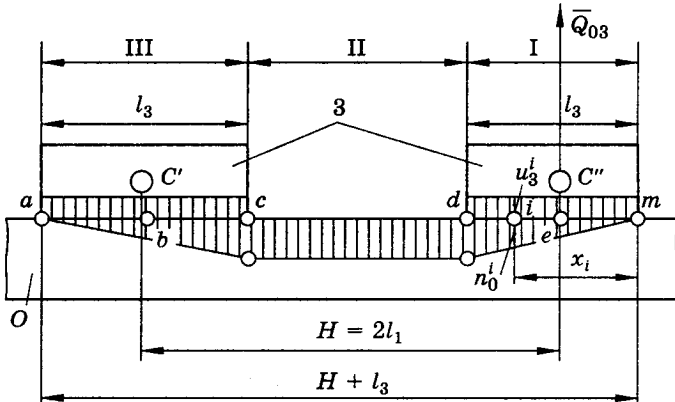


Рис.7.6. К определению износа звеньев, образующих поступательную пару

Износ элементов поступательной кинематической пары за 1 цикл (ход на величину $2H$) и за время $t_{ц}$ определится из формулы

$$u = kp \int_0^{t_{ц}} v_{ск} dt = kps_{тр}. \quad (7.36)$$

Для ползуна 3 путь трения $s_{тр} = 2H$, тогда формула (7.36) дает

$$[u^{(3)}]_{цикл} = k_3 \cdot p \cdot 2H.$$

Для станины имеем

$$[u^{(0)}]_{цикл} = k_4 \cdot p \cdot s_{тр}^i.$$

Для станины в точках a и m $s_{тр}^{(a)} = s_{тр}^{(m)} = 0$, в точках b и e

$$s_{тр}^{(b)} = s_{тр}^{(e)} = 2 \frac{l_3}{2} = b_3, \text{ в точках } c \text{ и } d \text{ } s_{тр}^{(c)} = s_{тр}^{(d)} = H.$$

Эпюры износа ползуна и станины представлены на рис.7.6. В общем случае следует учитывать неравномерность распределения давления в зоне контакта ползун — направляющие как вдоль его движения, так и в перпендикулярном направлении. Если ползун имеет форму цилиндра (соединение цилиндр — поршень), то распределение давления в поперечном направлении можно при-

нимать косинусоидальным. Тогда наибольший износ u_3^{\max} и u_0^{\max} следует определять в осевом сечении, совпадающем с линией действия вектора силы \overline{Q}_{03} . Максимальное значение давления в этом случае можно определять по формуле (7.22), которая примет вид

$$P_{\max} = \frac{2Q_{03}}{\pi b_3 d_3 / 2} = \frac{4Q_{03}}{\pi l_3 d_3},$$

здесь d_3 — диаметр поршня.

При переменных давлении p и скорости скольжения $v_{\text{ск}}$ в зоне контакта определение износов ползуна $u^{(3)}$ и направляющих $u^{(0)}$ следует проводить по формулам (7.18), (7.19). Пределы интегрирования при определении износа направляющих будут различными для трех показанных на рис.7.6 участков. Соотношение длин участков, как видно из рис.7.7, зависит от длины l_3 ползуна по отношению к длине l_1 кривошипа. При $l_3 \leq H$, то есть $l_3 \leq 2l_1$, участка II не будет. Из рис.7.7 можно рассмотреть следующие соотношения для трех выделенных участков. Первый участок характерен тем, что $0 \leq x_{a_0}^{(1)} \leq l_3$. Износ направляющих на этом участке будет происходить за время поворота кривошипа на угол от $\varphi_1^{(1)} = 0$ до $[\varphi_1^{(1)}]_{\text{кон}}$ при ходе справа налево и на угол $\varphi_1^{(1)} = 2\pi - [\varphi_1^{(1)}]_{\text{кон}}$ при ходе слева направо. Таким образом, для каждого конкретного соотношения l_1 и l_3 необходимо определить длину первого и третьего участков и соответствующие им значения углов $[\varphi_1^{(1)}]_{\text{кон}}$. В остальное время поворота кривошипа контакта на участке 1 не будет, следовательно, не будет на нем и износа.

Для точки a_0 , находящейся на втором участке, имеем $l_3 \leq x_{a_0}^{(2)} \leq (L - l_3)$ (см. рис.7.7, б). Для рассматриваемого соотношения длин l_3 и l_1 величины $L - l_3 = H = 2l_1$. Здесь износ будет происходить при изменении угла φ_1 поворота кривошипа от $[\varphi_1^{(1)}]_{\text{кон}}$ до $[\varphi_1^{(2)}]_{\text{кон}}$ при ходе справа налево и при ходе слева направо — при повороте кривошипа на угол $2\pi - [\varphi_1^{(2)}]_{\text{кон}}$.

Длина третьего участка (путь трения) имеет пределы $2l_1 \leq x_{a_0}^{(3)} \leq 2l_1 + l_3$. Как видно из рис.7.7, в, износ на третьем

исходит изменение направления реакции \overline{Q}_{03} . При этом ползун изменяет поверхность контактирования и износу подлежат верхние направляющие. В общем случае, когда сила \overline{Q}_{03} не проходит через центр ползуна (точку С), изменение направления силы приводит к переходу ползуна в направляющих. Тогда левая часть ползуна, например, контактирует с верхней частью направляющих, правая — с нижней. При изменении направления силы Q_{03} левая часть контактирует с нижней, правая — с верхней. В реальных механизмах график износа следует строить, исходя из степеней износа поршневых колец, установленных на поршне.

7.7. Особенности количественного определения износа элементов кинематических пар рычажных механизмов

Определению износа должны предшествовать определение действительных скоростей и ускорений звеньев и их центров масс, а также силовой анализ. Определение реакций в кинематических парах должно сопровождаться оценкой направления результирующей силы реакции в системе координат, связанной с данным звеном. Оценка износа может быть проведена для конкретной формы и размеров элементов кинематических пар. После установления этих необходимых параметров определяется среднее за цикл давление $p_{ср}$, затем определяются значения интенсивности изнашивания и коэффициента износа для каждого звена, входящего в кинематическую пару. Коэффициенты износа обычно отличаются малыми величинами в сравнении с расчетным числом циклом нагружения $N_{ц}$, достигающим $10^7 \dots 10^8$. Поэтому удобно объединить формулы (7.18) и (7.19) в одну и износ за время работы механизма определять по приведенным формулам в микрометрах [34].

Для точек a_2, a_3 с координатами β_2, β_3 в системах координат, связанных со звеньями 2 и 3, образующими вращательную кинематическую пару, износ определится соотношениями

$$u_2 = c_2 \int_0^{2\pi} Q_{32}(i_{21} - i_{31}) \cos \alpha^{(2)} d\varphi_1, \quad (7.37)$$

$$u_3 = c_3 \int_0^{2\pi} Q_{32}(i_{21} - i_{31}) \cos \alpha^{(3)} d\varphi_1, \quad (7.38)$$

В уравнениях (7.37), (7.38) углы $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ определяются по формулам (7.25), (7.26) с изменением соответствующих индексов.

$$c_2 = \frac{2k_2 N_{ц} \cdot 10^6}{\pi b_2}, \quad c_3 = \frac{2k_3 N_{ц} \cdot 10^6}{\pi b_3}. \quad (7.39)$$

Формула (7.37) применима для оценки износа, например, шатуна 2, входящего в кинематическую пару с коромыслом 3. Формула (7.38) — для оценки износа коромысла 3. Если же требуется определить износ элементов вращательной кинематической пары, образованной шатуном 2 и кривошипом 1, то формулы для этого случая имеют вид:

$$u_1 = c_1 \int_0^{2\pi} Q_{21}(1 - i_{21}) \cos \alpha^{(1)} d\varphi_1, \quad (7.40)$$

$$u_2 = c_2 \int_0^{2\pi} Q_{21}(1 - i_{21}) \cos \alpha^{(2)} d\varphi_1. \quad (7.41)$$

В уравнениях (7.40), (7.41) углы $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ определяются по формулам (7.25) и (7.26):

$$c_1 = \frac{2k_1 N_{\text{ц}} \cdot 10^6}{\pi b_1}, \quad c_2 = \frac{2k_2 N_{\text{ц}} \cdot 10^6}{\pi b_2}.$$

Износ элементов вращательной кинематической пары, образованной шатуном 2 и ползуном 3, можно определять по формулам (7.37) и (7.38), при условии, что $i_{31} = 0$, а углы $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ при этом следует определять по формулам (7.29) и (7.30).

Аналогичные выражения получим для поступательной кинематической пары. Так, для рабочей поверхности плоского ползуна имеем [34]

$$u_3^{\text{пл}} = c_3^{\text{пл}} \int_0^{2\pi} Q_{03} x'_c d\varphi, \quad (7.42)$$

где
$$c_3^{\text{пл}} = k_3^{\text{пл}} N_{\text{ц}} \cdot 10^6 \cdot (l_3 b_3).$$

Для оценки износа рабочей поверхности цилиндрического ползуна (поршня) в плоскости действия силы \bar{Q}_{03} при условии равномерного давления по его длине в формуле (7.42) следует заменить коэффициент $c_3^{\text{пл}}$ на $c_3^{\text{цил}}$, отличающийся тем, что в последнем случае вместо размера b_3 следует ставить d_3 — диаметр:

$$c_3^{\text{цил}} = \frac{4k_3^{\text{цил}} \cdot N_{\text{ц}} \cdot 10^6}{\pi l_3 d_3}. \quad (7.43)$$

Для оценки износа направляющих в случае контактирования с плоским ползуном следует пользоваться выражением

$$u_0 = c_0^{\text{пл}} \left[\int_{\varphi_1^i}^{\varphi_1^{i+1}} |Q_{03} x'_c| d\varphi_1 + \int_{2\pi - \varphi_1^{i+1}}^{2\pi - \varphi_1^i} |Q_{03} x'_c| d\varphi_1 \right], \quad (7.44)$$

где

$$c_0^{\text{пл}} = \frac{k_0 N_{\text{ц}} 10^6}{l_3 b_3}.$$

Для оценки износа цилиндрических направляющих можно пользоваться формулой (7.44), заменив c_0 на $c_0^{\text{цил}}$:

$$c_0^{\text{цил}} = \frac{4k_0 N_{\text{ц}} 10^6}{\pi l_3 b_3}. \quad (7.45)$$

Значения аналога скорости x'_c и обобщенной координаты φ_1^i в уравнение (7.44) подставляются с учетом рассмотренных особенностей, связанных с соотношением длин ползуна l_3 и кривошипа l_1 .

7.8. Определение износа в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма

Рассмотрим пример оценки характера износа элементов кинематических пар исполнительного механизма вертикальной поршневой машины, приведенный в [34]. Конечной целью в рассматриваемом примере является построение эпюр распределения ожидаемого износа элементов вращательной пары 2 — 3 (шатун — поршень) и поступательной пары 3 — 0 (поршень — цилиндр) (рис. 7.8).

Пример. Исходные данные: $l_1 = 0,086$ м — длина кривошипа; $\lambda_1 = l_2/l_1 = 4,85$ — относительная длина шатуна; $\lambda_{s_2} = l_{Bs_2}/l_{BC} = 0,3$ — относительная длина (координата) центра масс шатуна; $\lambda_e = e/l_1 = 0$ — относительный эксцентриситет, определяемый расстоянием между осями x и x_3 ; массы звеньев $m_1 = 14$ кг, $m_2 = 104$ кг, $m_3 = 12$ кг; приведенный к звену приведения (кривошипу) момент инерции привода машины $I_{\text{п}}^1 = 9,43$ кг · м²; момент инерции шатуна 2 относительно его центра масс $I_{s_2} = 0,32$ кг · м²; частота вращения кривошипа $n_1 = 12,16$ об/с.

Значения действительной угловой скорости, $\omega_1 = 2\pi n_1$ силы F_c технологического сопротивления $F_c = f(\varphi_1)$ приведены в табл. 7.1. Результаты кинематического и силового расчета приведены также в табл. 7.1. Знак силы Q_{03} указывает на то, что нагружению подлежит в основном правая половина поршня и цилиндра. Только при $\varphi_1 = 120^\circ$ и $\varphi_1 = 150^\circ$ поршень прижимается левой стороной.

Для построения эпюры износа элементов кинематических пар 2 — 3 и 3 — 0 необходимы следующие дополнительные исходные данные:

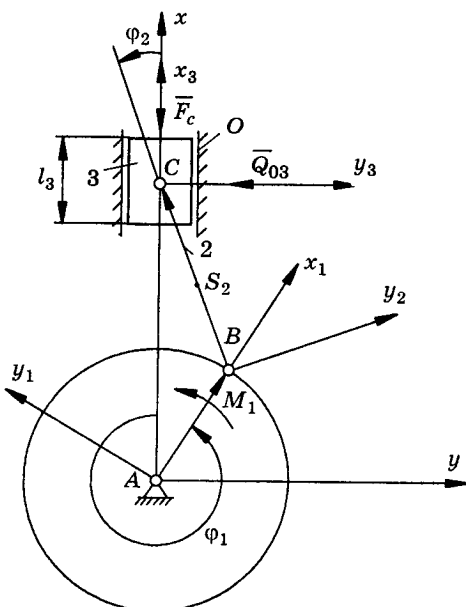


Рис.7.8. Схема исполнительного механизма вертикальной поршневой машины

считанного по N позиций из табл.7.1:

$$p_{\text{ср}}^{(23)} = \frac{2Q_{32}^{\text{ср}}}{\pi b_2 r} = \frac{2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q_{32}^i)}{\pi b_2 r} = \frac{2}{13} (17,48 + \dots + 17,48) \times 10^8 \frac{1}{3,14 \cdot 0,15 \cdot 0,02} \approx 1,85 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 1,85 \text{ МПа}.$$

Примем для пары 2 — 3 сочетание подшипниковый сплав — сталь. Для втулки подшипника имеем $I_{\text{н}}^{(s2)} = 4 \cdot 10^{-10}$, для поршневого пальца $I_{\text{н}}^{(s3)} = 1,6 \cdot 10^{-12}$ [34].

Коэффициенты износа определяются следующим образом:

$$k_2 = \frac{I_{\text{н}}^{(s2)}}{p_{\text{ср}}^{(23)}} = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{1,85 \cdot 10^6} \approx 2,2 \cdot 10^{-16}, \quad k_3 = \frac{I_{\text{н}}^{(s3)}}{p_{\text{ср}}^{(23)}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-12}}{1,85 \cdot 10^6} \approx 8,6 \cdot 10^{-7}.$$

Среднее давление для поступательной пары 3 — 0 наиболее нагруженной (правой) части цилиндра в плоскости действия силы Q_{03} определим аналогично с учетом N позиций табл.7.1. Принимаем при $\varphi_1 = 120^\circ$ и $\varphi_2 = 150^\circ$, $Q_{03} = 0$, так как контакт рассматриваемой стороны отсутствует:

$d_3 = 0,230$ м — диаметр цилиндра 3; $l_3 = 0,200$ м — длина поршня 3; $2r = 0,040$ м — диаметр поршневого пальца; $b_2 = 0,150$ м — длина рабочей части поршневого пальца; $N_{\text{ц}} = 10^8$ — расчетное число циклов.

При частоте вращения кривошипа $n_1 = 12,16$ об/с = 730 об/мин продолжительность работы механизма определится из выражения

$$T = \frac{N_{\text{ц}}}{3600 n_1} = \frac{10^8}{3600 \cdot 12,16} = 2300 \text{ с}.$$

Среднее давление для пары 2 — 3 в точках рабочей поверхности, расположенных в плоскости, совпадающей с вектором Q_{32} , определим по формуле (7.24) из среднearифметического значения $p_{\text{ср}}^{(23)}$, под-

$$p_{cp}^{(03)} = \frac{2(Q_{03}^{cp})}{\pi l_3 \frac{d_3}{2}} = \frac{2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (Q_{03}^i)}{\pi l_3 \frac{d_3}{2}} = \frac{2}{13} (0 + 0,35 + \dots +$$

$$+ 1,48 + 0,0) 10^3 \frac{1}{3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,115} = 1,43 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,143 \text{ МПа.}$$

Примем материалы для пары 0 — 3 чугун — чугун

$$I_n^{(s_3)} = 6 \cdot 10^{-11}, \quad I_n^{(s_0)} = 1 \cdot 10^{-10}.$$

Коэффициенты износа определяются следующим образом:

$$k_3 = \frac{I_n^{(s_3)}}{p_{cp}^{(03)}} = \frac{6 \cdot 10^{-11}}{1,43 \cdot 10^{-5}} \approx 4,2 \cdot 10^{-16}, \quad k_0 = \frac{I_n^{(s_0)}}{p_{cp}} = \frac{1 \cdot 10^{-10}}{1,43 \cdot 10^{-5}} \approx 7 \cdot 10^{-16}.$$

Далее оценка характера износа требует определения его величины в отдельных точках, например, a_2 и a_3 (см. рис. 7.5), определяемых координатами β_2 и β_3 соответственно. Для этого определяют углы $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ по формулам (7.29) и (7.30), используя данные, приведенные в табл. 7.1 для N позиций (по углу φ_1 начального звена). Затем определяют $\cos \alpha^{(2)}$ и $\cos \alpha^{(3)}$, при этом, если $\alpha^{(2)}$ или $\alpha^{(3)} \geq \pi/2$, контакт отсутствует и давление $p = 0$, то есть принимается $\alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = 90^\circ$.

Далее определяют значения произведений $Q_{32}|i_{21}|\cos \alpha^{(2)}$ и $Q_{32}|i_{21}|\cos \alpha^{(3)}$, используя данные табл. 7.1 для N позиций начального звена. В качестве примера на рис. 7.9 приведен график подынтегральной функции выражения (7.34). Износ $u_2^{(23)}$ и $u_3^{(23)}$ в точках a_2 и a_3 звеньев 2 и 3 за все заданное время T работы механизма определяется по формулам (7.37), (7.38). При этом, используя, например, формулу (7.39), получим

$$c_2 = \frac{2k_2 N_{\pi} 10^6}{\pi b_2} = \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 0,15} = 0,0935.$$

Следует помнить, что формулы (7.37) и (7.38) используются в рассматриваемом примере при $i_{31} = 0$. Интеграл выражения (7.37) можно определить приближенно как площадь под кривой (рис. 7.9). В этом случае имеем

$$\int_0^{2\pi} Q_{32}|i_{21}|\cos \alpha^{(2)} d\varphi_1 \approx \Delta\varphi_1 \frac{1}{2} [(3120 + 1333) + \dots + (2980 + 3120)] = 5730,$$

где $\Delta\varphi = 2\pi/12$.

Износ в точке a_2 за все время работы механизма определится как

$$[u_2^{(23)}]_{a_2} = c_2 \int_0^{2\pi} Q_{32}|i_{21}|\cos \alpha^{(2)} d\varphi_1 = 0,0935 \cdot 5730 = 537 \text{ мкм} \approx 0,54 \text{ мм.}$$

Таблица 7.1

φ_1 , град	ω , рад/с	F_c , кН	φ_{23} , град	i_{21}	x'_c , м/рад	Q_{32} , кН	α_{32} , град	Q_{03} , кН	$Q_{03} \cdot x'_c$, Нм/рад
0	75,7	-24,5	0,0	-0,206	0,0	17,48	180,0	0,00	0,0
30	75,7	-6,8	-5,9	-180	-0,0507	1,22	196,6	-0,35	17,7
60	75,9	0,0	-10,3	-0,105	-0,0823	2,49	335,4	-1,04	85,7
90	76,0	0,0	-11,6	0,0	-0,0860	1,35	188,1	-0,19	16,3
120	76,4	0,0	-10,3	0,105	-0,0667	3,37	173,6	0,42	0,0
150	76,8	0,0	-5,9	0,180	-0,0352	4,75	175,3	0,38	0,0
180	77,0	0,0	0,0	0,206	0,0	4,97	180,0	0,00	0,0
210	77,2	-0,41	5,9	0,180	0,0352	5,22	184,8	-0,44	15,5
240	77,1	-2,0	10,3	0,105	0,0667	5,86	187,8	-0,80	53,3
270	77,0	-5,7	11,6	0,0	0,0860	7,14	188,1	-1,00	86
300	76,6	-24,5	10,3	-0,105	0,0823	22,40	188,7	-3,38	278
330	76,0	-24,5	5,9	-0,180	0,0507	18,85	184,5	-1,48	75
360	75,7	-24,5	0,0	-0,206	0,0	17,48	180,0	0,00	0,0

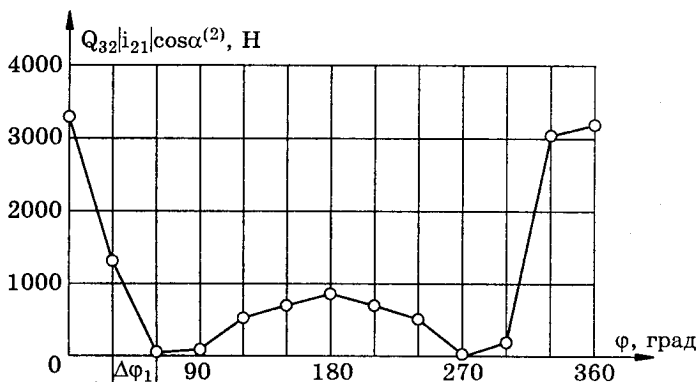


Рис.7.9. К определению износа вращательной пары, образованной шатуном и ползуном

Износ $[u_2^{(23)}]_{a_2}$ в точке a_3 звена 3 (см. рис.7.5) определится аналогично. Для рассматриваемого примера в случае $\beta_2 = \beta_3 = 150^\circ$ [34] имеем

$$[u_2^{(23)}]_{a_3} = 0,21 \text{ мм.}$$

Для цилиндра поступательной пары (цилиндр-поршень) с использованием формул (7.42), (7.43) имеем [34]

$$u_3^{\text{цил}} = c_3^{\text{цил}} \int_0^{2\pi} Q_{03} x'_c d\varphi_1 = 1,16 \cdot 328 \approx 0,38 \text{ мм.}$$

Для точки a_0 (см. рис.7.7 и рис.7.8) вычисляем координату $x_{a_0} = l_1 + l_2 - (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) = l_1(1 + \lambda_2 - \cos \varphi_1 - \lambda_2 \cos \varphi_2)$.

При $\varphi = 90^\circ$ имеем

$$(x_{a_0})_{\varphi_1 = \pi/2} = 0,086(1 + 4,85 - 0 - 4,85 \cdot 0,9797) = 0,095 \text{ м.}$$

Износ в этой точке за все время работы механизма определится по формулам (7.44), (7.45):

$$(u_0^{a_0})_{\varphi_1 = \pi/2} = c_0^{\text{цил}} \left(\int_0^{\pi/2} Q_{03} x'_c d\varphi_1 + \int_{3\pi/2}^{2\pi} Q_{03} x'_c d\varphi_1 \right) = 1,94 \cdot (59 + 207) \approx 0,52 \text{ мм.}$$

7.9. Количественная оценка сил трения

7.9.1. Определение приведенного коэффициента трения скольжения в поступательной кинематической паре

Как видно из рис.7.10, значение коэффициентов трения изменяется в широких пределах, определяемых условиями эксплуатации. Снижение трения в подвижных соединениях машин

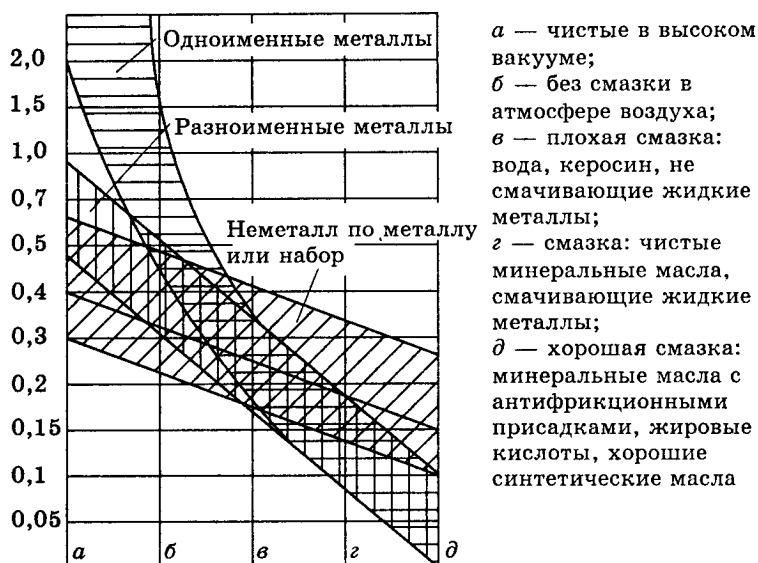


Рис.7.10. Зависимость коэффициентов трения от условий эксплуатации



Рис.7.11. Пути снижения трения

(рис.7.11) требует дополнительных решений, эффективность которых в большой степени зависит от поддержания условий эксплуатации. Изменение сил трения в широких диапазонах во многом

препятствует стабильной работе систем автоматического управления режимами машины. Управление по силе, например, предусматривает поддержание в определенном диапазоне величины силы технологического сопротивления. Для фиксации изменения силы часто используют деформацию некоторых деталей, преобразованную в электрический сигнал. В этом случае система управления реагирует на изменение сил трения. Поэтому моделирование сил трения в подвижных соединениях приобретает особый смысл для технологического оборудования и средств автоматизации в едином технологическом комплексе.

В общем случае силы трения зависят и от кинематики звеньев механизма, так как силы реакций в кинематических парах включают и силы инерции. Это обстоятельство накладывает особые трудности в связи с тем, что определение скоростей и ускорений может быть проведено при учете всех сил, включая и силы трения, а последние оказываются зависимыми от ускорений звеньев и их центров масс. Для решения таких задач используется метод последовательных приближений [2], который применим, когда имеет место процесс сходимости, т.е. каждое последующее приближение дает меньшее изменение приращения силы (момента), чем предыдущее.

Сложность моделирования и решения задач динамики механизмов с учетом сил трения заключается также в том, что значения сил трения существенно зависят от конструкции подвижных соединений звеньев, схемы приложения сил и распределения давлений в зоне контакта. Характер же эпюр давления, как показано ранее, определяется износом элементов подвижных соединений. При моделировании таких взаимосвязей удобно пользоваться не табличным коэффициентом трения, а приведенным. В этом случае сохраняется геометрическая интерпретация коэффициента трения как тангенса угла наклона тангенциальной составляющей реактивной силы к нормальной. Тогда влияние конструктивных особенностей схемы приложения силы и распределения давления отражается изменением угла наклона полной реактивной силы к ее нормальной составляющей. Приведенный коэффициент трения определяется выражением

$$f' = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} / N_{\text{сум}}.$$

На рис.7.12 представлена схема сил, действующих на ползун без учета его размеров и характера соединения с направляющими. В этом случае под действием силы Q звено 1 прижимается к звену 2 одной стороной. При отсутствии

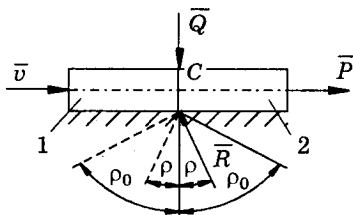


Рис.7.12. Учет сил трения скольжения при поступательном движении

единения с направляющими. В этом случае под действием силы Q звено 1 прижимается к звену 2 одной стороной. При отсутствии

трения реакция со стороны звена 2 будет перпендикулярна к направляющим. Учет сил трения приводит к смещению линии действия силы \bar{R} на угол ρ . При этом она препятствует перемещению, т.к. направлена в сторону, противоположную вектору \bar{v} относительного скольжения двух поверхностей.

В случае покоя реакция \bar{R} не выйдет за пределы двух линий, составляющих углы ρ_0 с нормалью NN и характеризующих трение сцепления (трение покоя).

В реальных конструкциях сила Q расположена так, что она прижимает звено 1 к обеим сторонам звена 2. В этом случае необходимо установить, по какому закону распределяется нормальное давление. Часто принимается линейная зависимость распределения нормального давления по обеим сторонам (см. рис.7.13, а). Тогда равнодействующие нормальных сил \bar{N}_A и \bar{N}_B приложены на расстоянии $l/6$ от краев, и силы трения можно представить в виде

$$F_A^{TP} = fN_A, F_B^{TP} = fN_B, F_{\text{сум}} = F_A^{TP} + F_B^{TP} = f(N_A + N_B).$$

Если отнести суммарную силу трения $F_{\text{сум}}$ к суммарному нормальному давлению $N_{\text{сум}} = N_A + N_B$, то получим

$$f' = F_{\text{сум}} / N_{\text{сум}} = f(N_A + N_B) / (N_B - N_A). \quad (7.46)$$

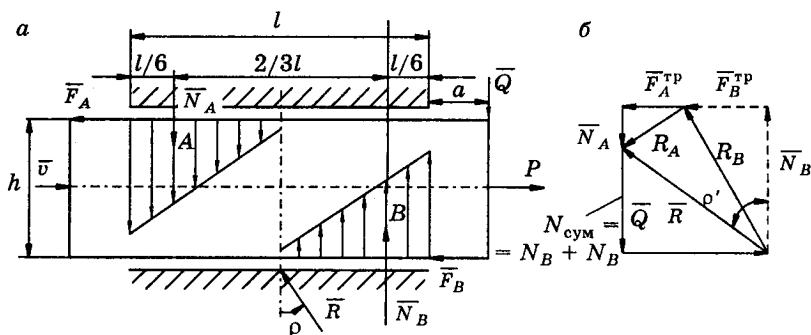


Рис.7.13. Учет сил в направляющих скольжения: а — схемы сил, действующих на ползун, б — силовой многоугольник

Как видно из выражения (7.46), приведенный коэффициент трения зависит как от действительного коэффициента трения f , характеризующего материал и условия смазки звеньев 1 и 2, так и от величин реакций N_A и N_B , которые могут быть определены из уравнений моментов относительно точек A и B . Пренебрегая моментами сил F , считая $h = 0$, имеем

$$N_B \frac{2}{3}l = Q \left(a + \frac{l}{6} + \frac{2}{3}l \right), \quad N_A \frac{2}{3}l = Q \left(a + \frac{l}{6} \right). \quad (7.47)$$

Из уравнений (7.47) находим

$$N_A + N_B = 3Q \left(\frac{2a+l}{2l} \right), \quad N_A - N_B = Q,$$

тогда

$$f' = 3f(a/l + 1/2).$$

Таким образом, приведенный коэффициент трения всегда больше действительного f и возрастает при уменьшении длины l направляющих и увеличении вылета a точки приложения силы \bar{Q} .

При конструировании поступательных пар надо стремиться к тому, чтобы давления располагались на одной стороне пары и не было перекоса.

Приведенному коэффициенту соответствует приведенный угол ρ' трения (см. рис. 7.13, б), равный

$$\operatorname{tg} \rho' = f'. \quad (7.48)$$

Зная ρ' , можно найти направление общей реакции \bar{R} .

Подставив в уравнение (7.48) вместо f' коэффициент сцеп-

ления, можно найти приведенный коэффициент сцепления и приведенный угол трения покоя ρ'_0 . Это дает возможность установить пределы, за которые не может выходить реакция \bar{R} в случае покоя.

Часто ползун движется в V-образных направляющих. При симметричном ползуне давление создает одинаковые реакции N_1 и N_2 (см. рис. 7.14, а). При перемещении ползуна 1 вдоль направляющих 2 возникают силы трения на обеих

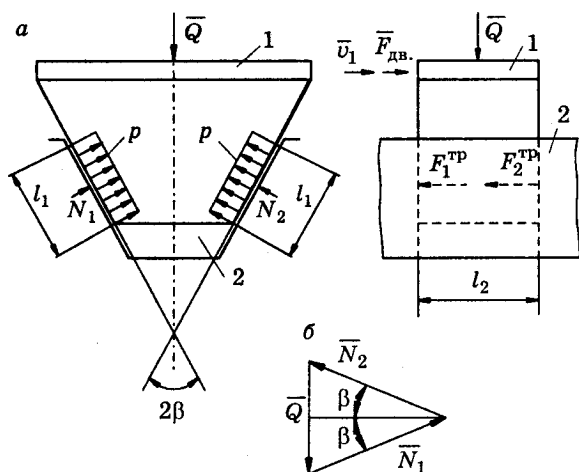


Рис. 7.14. К определению приведенного коэффициента трения скольжения в V-образной направляющей скольжения: а — схема конструктивная; б — схема сил

ползуна 1 вдоль направляющих 2 возникают силы трения на обеих

сторонах, и суммарное значение силы сопротивления движению определится как

$$F_{\text{тр}}^{\text{сум}} = F_1^{\text{тр}} + F_2^{\text{тр}} = f(N_1 + N_2).$$

Сосредоточенные силы \bar{N}_1 и \bar{N}_2 являются равнодействующими распределенного давления p по номинальной площади $S_{\text{н}} = l_1 \cdot l_2$. Клиновой ползун 2 находится в равновесии под действием трех сил. Условие равновесия имеет вид $\bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 0$. Из рис. 7.14, в имеем

$$Q_{\text{сум}} = N_{\text{сум}} = N_1 \sin \beta + N_2 \sin \beta.$$

Тогда приведенный коэффициент трения для клинового ползуна определится как

$$f' = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} / Q_{\text{сум}} = f / \sin \beta.$$

Если вместо f подставить коэффициент f_0 трения покоя, то, например, при $\beta = 30^\circ$ имеем $f' = 2f_0$, то есть при одной и той же силе прижима Q можно клиноремной передачей передать больший крутящий момент, чем плоской, когда $\beta = \pi / 2$. Используя понятие приведенного коэффициента трения оказывается удобным для многих случаев, так как позволяет провести количественный анализ влияния конструктивных параметров углов трения на сопротивление движению. В результате такого моделирования представляется возможность прогнозировать изменение энергозатрат на движение звеньев, входящих в тот или иной узел трения. На уровне его схемной проработки представляется возможность исследовать мощность (работу) сил сопротивления, обусловленную перераспределением давления в зонах контакта, схемой приложения нагрузки, возможными перекосами и т. п.

7.9.2. Определение приведенного коэффициента скольжения во вращательной паре

На рис. 7.3 представлена схема сил dQ_{21}^n и $dF_{\text{тр}}$, действующих на элементарной площадке (в данном случае дуга ds) вращающегося вала 1 и подшипника 2.

Под действием Q_{12} на нижней стороне вала возникают давления p , распределяющиеся по некоторому закону.

Будем считать, что давление симметрично распределяется относительно вертикальной оси, то есть $p = f(\alpha)$. Полагая, что во всех сечениях по длине вала распределение p не меняется, можно рассматривать одно сечение и считать, что

$$p = dQ_{21}^n / ds.$$

Тогда силы, действующие на элемент ds , определяются как

$$\left. \begin{aligned} dQ_{21}^n &= pds = prd\alpha, \\ dF_{\text{тр}} &= fdQ_{21}^n = fprd\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Если $dQ_{21}^n \cos \alpha = pr \cos \alpha d\alpha$ — проекция элементарной реакции dQ_{21}^n , совпадающая с линией действия силы Q , то суммарная реакция определится из выражения

$$Q_{\text{сум}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dN \cos \alpha d\alpha = r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos \alpha d\alpha.$$

Элементарные силы трения $dF_{\text{тр}}$ препятствуют вращению вала, поэтому полная сила трения будет равна алгебраической сумме этих сил, действующих на площади контакта. Интегрируя выражение для $dF_{\text{тр}}$ в указанных пределах, получим

$$F_{\text{тр}}^{\text{сум}} = fr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\alpha.$$

Приведенный коэффициент трения для рассматриваемого примера имеет вид

$$f' = \frac{F_{\text{тр}}^{\text{сум}}}{Q_{\text{сум}}} = f \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos \alpha d\alpha}.$$

Рассмотрим в качестве примера два случая:

а) $p = p_0 = \text{const}$,

б) $p = p_0 \cos \alpha$.

Тогда для случая а)

$$f' = f \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha} = f \frac{\pi}{2} \approx 1,57f,$$

для случая б)

$$f' = f \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha} = f \frac{\pi}{2} \approx 1,27f.$$

Рассмотренный пример указывает на изменение силы сопротивления вращению вала, обусловленное перераспределением давления, например, в результате износа; так что при неизменном

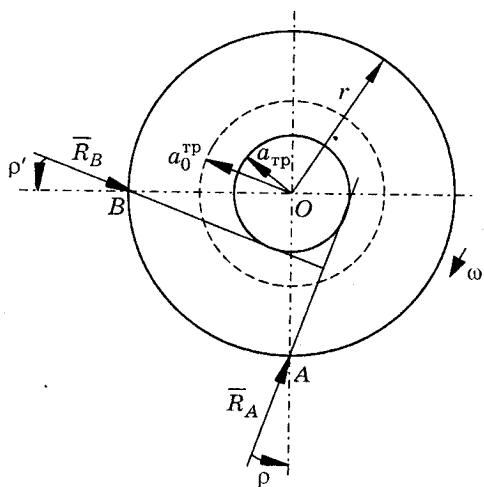


Рис.7.15. К определению радиусов круга трения покоя $a_0^{тр}$ и круга трения $a_{тр}$

Из рис.7.15 видно, что перпендикуляр, опущенный из центра O на линию действия силы \bar{R}_A или \bar{R}_B , определится как $a_{тр} = r \sin \rho'$. Обычно ρ' не более 10° , поэтому приближенно $\sin \rho' \approx \text{tg} \rho'$ и

$$a_{тр} = r \text{tg} \rho' = r f'.$$

Величина $a_{тр}$ не зависит от того, приложена ли реакция в точке A или в точке B . Значит, реакция \bar{R} всегда касательна к окружности, описанной радиусом $a_{тр}$ вокруг центра вращательной пары. Эту окружность называют кругом трения.

Таким образом, учет сил трения во вращательной паре в геометрическом представлении заключается в расположении линии действия реакции по касательной к кругу трения с учетом препятствия вращению. Радиус круга трения покоя $a_0^{тр} = f'_0 \cdot r$ больше радиуса круга $a_{тр}$, так как $f'_0 > f'$. При отсутствии трения реакция \bar{R} проходит через центр вращательной пары.

Как показано ранее, тангенциальные составляющие сил \bar{R}_{12}^t и \bar{R}_{21}^t в системах координат, связанных со звеньями 1 и 2, равны

значении силы Q_{12} прижима вала 1 (см. рис.7.3) представляется возможность оценить изменение мощности (работы), затрачиваемой на вращение вала также при его перекосах, наличии зазоров, которые моделируются перераспределением давлений в зоне контакта. Из уравнения (7.48) можно определить приведенный угол трения ρ' для рассматриваемого примера и направить полную реакцию \bar{R} во вращательной

паре в соответствии с этим углом. Из рис.7.15 видно,

что перпендикуляр, опу-

щется из центра O на линию действия силы \bar{R}_A или \bar{R}_B , опре-

делится как $a_{тр} = r \sin \rho'$. Обычно ρ' не более 10° , поэтому при-

ближенно $\sin \rho' \approx \text{tg} \rho'$ и

$a_{тр} = r \text{tg} \rho' = r f'$.

Величина $a_{тр}$ не зависит от того, приложена ли реакция в

точке A или в точке B . Значит, реакция \bar{R} всегда касательна к

окружности, описанной радиусом $a_{тр}$ вокруг центра вращательной

пары. Эту окружность называют кругом трения.

Таким образом, учет сил трения во вращательной паре в гео-

метрическом представлении заключается в расположении линии

действия реакции по касательной к кругу трения с учетом препят-

ствия вращению. Радиус круга трения покоя $a_0^{тр} = f'_0 \cdot r$ больше

радиуса круга $a_{тр}$, так как $f'_0 > f'$. При отсутствии трения реакция

\bar{R} проходит через центр вращательной пары.

Как показано ранее, тангенциальные составляющие сил \bar{R}_{12}^t

и \bar{R}_{21}^t в системах координат, связанных со звеньями 1 и 2, равны

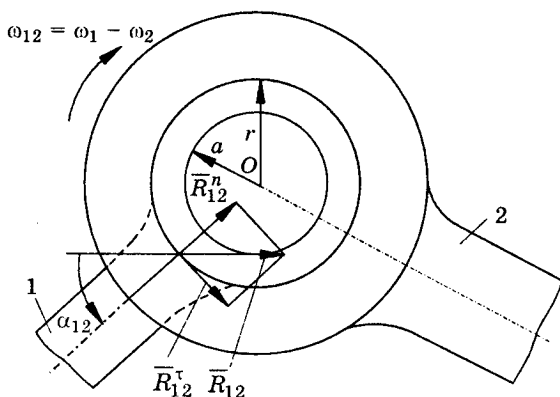


Рис.7.16. Схема сил, действующих во вращательной паре звеньев 1 и 2

машин), сил инерции (для быстроходных) с силами трения в подвижных соединениях. Это сравнение удобно проводить с помощью радиуса круга трения $a_{\text{тр}}$ и радиуса a , определяемого, например, как

$$a = r \sin \alpha_{21}.$$

Сравнение этих радиусов позволяет выявить зону нечувствительности к управлению по силе или мощности, если $a \leq a_{\text{тр}}$, а также особенности погрешности позиционирования, связанные с троганием с места, когда $a \leq a_0^{\text{ТР}}$ с учетом того, что $f'_0 > f'$.

7.10. Количественная оценка сопротивления качению

7.10.1. Гипотезы, объясняющие сопротивление качению

В настоящее время можно выделить пять гипотез, объясняющих наличие сопротивления качению одного тела по поверхности другого.

Первая основана на наличии упругого гистерезиса, когда одной и той же деформации соответствуют разные напряжения при увеличении и уменьшении нагрузки.

Вторая — на различии величины и направления деформаций в поверхностных слоях зоны контакта, приводящей к проскальзыванию.

Третья гипотеза объясняет природу сил сопротивления качению возникновением сил молекулярного притяжения (отталкивания) в зоне контакта.

нулю, если считать звенья невесомыми, то есть не учитывать силы веса и инерции. Отклонения сил \bar{R}_{21} и \bar{R}_{12} от нормальных составляющих \bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{21}^n определяется углами α_{21} и α_{12} . Такое геометрическое представление удобно для моделирования сравнительной оценки раздельного влияния сил веса (для тихоходных

Четвертая гипотеза объясняет это возникновением скольжения в связи с искривленностью контактирующих поверхностей.

Пятая — комплексным процессом трения, включающим в себя первые четыре.

Кулоном установлена зависимость между нормальной нагрузкой Q_{21}^n на тело качения, силой сопротивления перекатыванию F_c , радиусом r катящегося тела и коэффициентом трения качения, имеющим размерность длины (рис. 7.17, а). Эмпирическая формула, предложенная Кулоном, получается из условия равномерного движения тела 1 (см. рис. 7.17, а). Уравнение суммы моментов сил относительно точки O дает

$$F_c = kQ_{21}^n / r.$$

Объяснение природы трения качения несовершенством упругости контактирующих тел (наличием упругого гистерезиса) основано на закономерностях рассеяния энергии, рассмотренных в главе 6 настоящего пособия.

Неравенство сил при нагружении (зона б — в) и при разгрузке (зона а — б) приводит к смещению равнодействующей силы Q_{21}^n (см. рис. 7.17, б). Распределение давления p на площадках контакта асимметрично относительно самих площадок, и коэффициент трения качения k измеряется плечом главного вектора давления относительно точки b , лежащей на оси симметрии зоны контакта. Согласно второй гипотезе, различие в форме соприкасающихся поверхностей в результате деформации обуславливает неодинаковое расстояние поверхностных слоев в зонах контакта. Таким образом, наличие трения скольжения на контактирующих поверхностях — основная причина сопротивления качению.

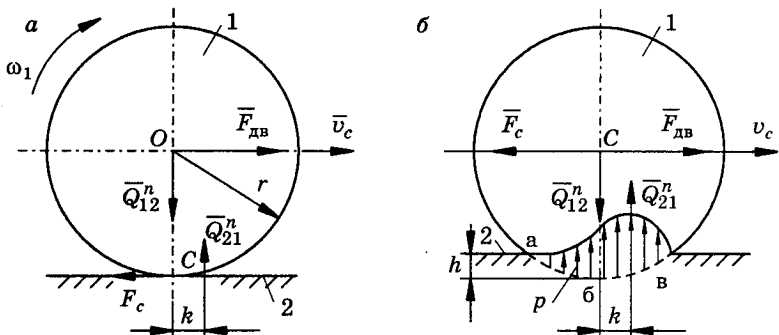


Рис. 7.17. Схемы, поясняющие сопротивление качению:

а — схема приложения сил, объясняющая равномерное движение тела качения, б — смещение нормальной реакции, обусловленное упругим гистерезисом

Третья гипотеза объясняет природу сил сопротивления качению потерей энергии при входе одной молекулы в поле действия сил отталкивания другой и выходе из него (рис.7.18). Силы отталкивания преобладают над силами притяжения и уравнивают нагрузку. Каждое сближение и расхождение молекул сопровождается потерей энергии, так что сопротивление качению объясняют возникновением и разрушением "мостиков" спайки, непрерывным свариванием и разрывом их.

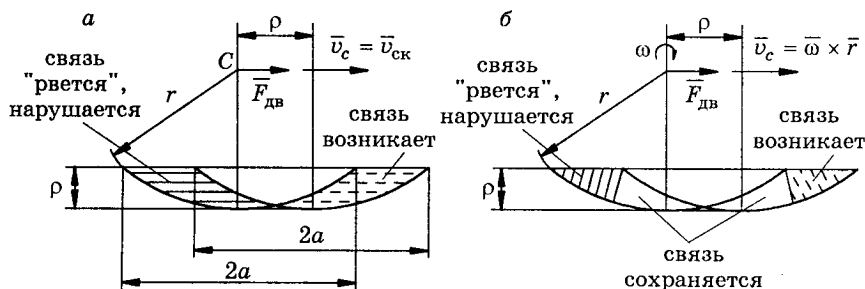


Рис.7.18. Обмен межмолекулярными связями при скольжении (а) и качении (б)

Характерные признаки качения следующие.

1. Обмен молекулярных связей происходит частично (см. рис.7.18). Коэффициент обмена равен отношению атомного радиуса ρ к длине зоны молекулярного (адгезионного) контакта $2a$. При скольжении (см. рис.7.18, а) элементарному перемещению на величину атомного радиуса соответствует полный обмен (возникновение и разрушение) связей. Расход энергии при скольжении пропорционален длине зоны контакта и рассеянию энергии при обмене связями путем среза.

2. Обмен молекулярных (адгезионных) связей происходит в направлении, перпендикулярном плоскости контакта, а не параллельном ей, как при скольжении.

Таким образом, качение — такой вид трения, при котором коэффициент обмена адгезионными связями существенно меньше единицы, а сам обмен протекает в направлении, перпендикулярном плоскости контакта трущихся тел.

Силы межмолекулярных связей проявляются при сближении контактирующих поверхностей на величину порядка атомного радиуса 10^{-8} мм.

Четвертая гипотеза указывает на то, что при обкатывании тел двойкой кривизны в зоне контакта преобладает скольжение. Скорости скольжения определяются положением мгновенной оси вращения, делящей зону контакта на три части (рис.7.19). При качении шара 1 вдоль круговой канавки неподвижного тела 2 положение мгновенной оси вращения 1 — 1 определяется так

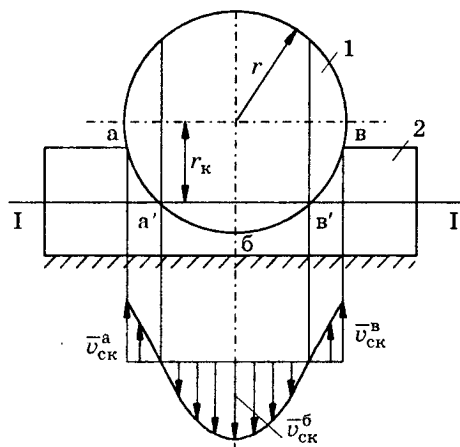


Рис.7.19. К пояснению дифференциального проскальзывания при качении

7.10.2. Приведенный коэффициент трения в прямолинейных направляющих качения

На рис.7.20 представлена схема сил, действующих на тело качения 2 (шарик, ролик), расположенное между движущимися прямолинейно друг относительно друга звеньями 1 и 3. В общем случае распределение давления по площадкам всех тел качения не одинаковое, не одинаковы также и коэффициенты: $k_{12} \neq k_{32}$.

Пренебрегая весом (шарика, ролика), считаем, что на тело качения действуют две реакции \bar{R}_{12} и \bar{R}_{32} , сдвинутые относи-

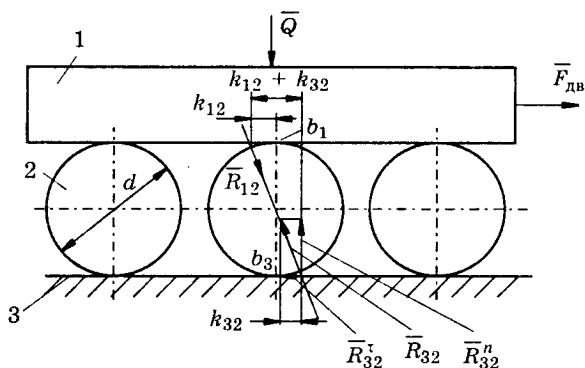


Рис.7.20. К определению приведенного коэффициента трения качения

называемым кинематическим радиусом $r_k < r$, поэтому "чистое качение" наблюдается только в точках a' и b' , в них $v_{ск}^{a'} = v_{ск}^{b'} = 0$.

В остальных точках контакта скорости скольжения переменны как по величине, так и по направлению. В точках a' и b' скорости скольжения меняют знак (переходят через ноль).

Подробнее о трении качения изложено в [35]. С моделированием формообразования сферических поверхностей в условиях обкатки можно ознакомиться в [36].

тельно точек b_1 и b_3 на расстояния k_{12} и k_{32} . При равномерном движении силы \bar{R}_{12} и \bar{R}_{32} должны быть противоположны одна другой, то есть направлены под некоторым углом α к вертикали, тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{12} + k_{32}}{b_1 b_3}.$$

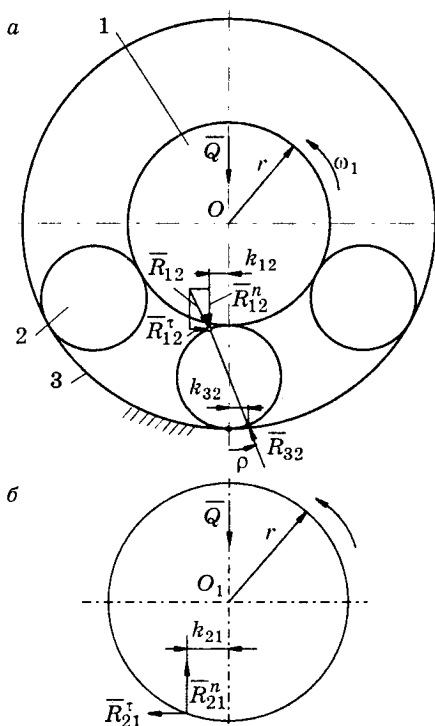
Тогда угол α должен быть меньше углов трения ρ_0 и ρ'_0 , иначе вместо качения будет скольжение.

Приведенный коэффициент трения качения определится из соотношения

$$f'_k = \frac{R_{32}^i}{R_{32}^n} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{12} + k_{32}}{b_1 b_3}. \quad (7.49)$$

Таким образом, сила сопротивления перемещению звена 1 в направляющих качения определится как $F_{\text{дв}} = Q \cdot f'_k \cdot k_z$, где k_z — коэффициент, представляющий неравномерность распределения силы Q по телам качения с учетом погрешностей изготовления и сборки.

7.10.3. Приведенный коэффициент трения качения в круговых направляющих



Пусть вся нагрузка воспринимается одним телом качения (рис.7.21, а), то есть $R_{12}^n = Q$. Вращению вала препятствуют силы R_{21}^n и R_{21}^i (см. рис.7.21, б), так как они не проходят через точку O , лежащую на оси вращения вала. Условие равновесия сил, действующих на вал (см. рис.7.21, б), дает уравнение

$$M_{\text{дв}} = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} \cdot r,$$

где $F_{\text{тр}}^{\text{сум}}$ определится из уравнения суммы моментов сил относительно точки O (см. рис.7.21, б). Имеем

$$F_{\text{тр}}^{\text{сум}} \cdot r = R_{21}^i \cdot r + R_{21}^n \cdot k_{12},$$

откуда

$$F_{\text{тр}}^{\text{сум}} = R_{21}^i + R_{21}^n \cdot k_{12} / r.$$

Учитывая, что на основании уравнения (7.49) имеем

$$R_{21}^i = R_{21}^n \cdot f'_k,$$

получим

Рис.7.21. Схема сил, действующих в круговых направляющих качения: а — на тело качения, б — на приводной вал

$$F_{\text{тр}}^{\text{сум}} = Q(f'_k + k_{12} / r).$$

Из последнего уравнения с учетом соотношения (7.49) имеем при $k_{12} = k_{32} = k$

$$f'_k = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} / Q_{\text{сум}} = Q(2/d + 1/r).$$

Таким образом, момент сопротивления вращения вала 1 в круговых направляющих качения определится как

$$M_{\text{дв}} = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} \cdot r = Q_{\text{сум}} f'_k \cdot k_2 \cdot r.$$

Здесь $Q_{\text{сум}}$ определяется с учетом шага s_{02} — длины дуги между центрами шариков на окружности радиуса $r + d/2$.

В действительности нагрузка \bar{Q} воспринимается не одним телом качения, а всеми, расположенными ниже оси подшипника, и это распределение неравномерное. Неравномерность распределения нагрузки может быть учтена поправочным коэффициентом k_2 .

7.10.4. Приведенный коэффициент трения при качении и скольжении

Пусть некоторое транспортное средство (рис.7.22) не имеет ведущих колес. Оно приводится в движение усилием $F_{\text{дв}}$, приложенным к корпусу 1.

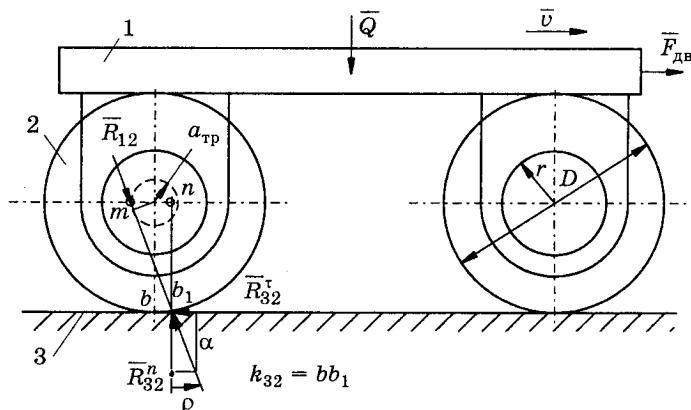


Рис.7.22. Схема сил, действующих на неприводное колесо транспортного средства

Рассмотрим условие равновесия колеса 2. На него действуют силы \bar{R}_{32} и \bar{R}_{12} . Одна из них, \bar{R}_{12} , касается круга трения радиуса a в точке m , другая приложена в точке b_1 на расстоянии k_{32} от точки b . Расстояние между точками можно с достаточной степенью точности считать равным

$$mn = a + k_{32} = f'_r + k_{32},$$

где f' — приведенный коэффициент трения подшипника колеса.

$$\text{Тогда} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{mn}{bn} = \frac{f'r + k_{32}}{D/2} = \frac{2(f'r + k_{32})}{D}.$$

Угол α должен быть меньше ρ_0 , иначе колесо будет не катиться, а скользить. Приведенный коэффициент трения для рассматриваемого примера определится соотношением

$$f' = F_{\text{тр}}^{\text{сум}} / Q_{\text{сум}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2(f'r + k_{32})}{D}.$$

Если известна нагрузка Q и приведенный коэффициент трения f' , необходимое тяговое усилие $F_{\text{дв}}$ может быть найдено по формуле

$$F_{\text{дв}} = \frac{2(f'r + k_{32})}{D} \cdot Q.$$

7.11. Определение работы (мощности), затрачиваемой на преодоление трения и износ в кинематических парах механизмов

Работу, затраченную на преодоление сил трения во вращательной кинематической паре, например, звеньев 1 и 2 (см. рис. 7.5), можно представить следующим образом:

$$A_{12}^{\text{TP}} = M_{12}^{\text{TP}} \varphi_{12} = M_{12}^{\text{TP}} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.50)$$

Дифференцируя уравнение (7.50) по обобщенной координате, получим

$$\frac{dA_{12}^{\text{TP}}}{d\varphi_1} = (1 - i_{21}) M_{12}^{\text{TP}} = \frac{P_{12}^{\text{TP}}}{\omega_1}, \quad (7.51)$$

откуда находим

$$P_{12}^{\text{TP}} = \omega_1 (1 - i_{21}) R_{12} r_{12} f'_{12}, \quad R_{12} = \sqrt{(R_{12}^i)^2 + (R_{12}^n)^2} \quad (7.52)$$

где r_{12} , f'_{12} — радиус рабочей поверхности узла трения и его приведенный коэффициент трения.

Для вращательной кинематической пары, например, 2, 3, по аналогии с выражением (7.51) имеем

$$P_{23}^{\text{TP}} = \omega_1 (i_{21} - i_{31}) R_{23} r_{23} f'_{23}.$$

Уравнения (7.51), (7.52) позволяют выразить энергозатраты на преодоление сил трения в кинематических парах не только с учетом их конструктивных параметров, но и с учетом динамики всего машинного агрегата. Выражения

$$\frac{dA_{12}^{\text{TP}}}{d\varphi_1} = \frac{P_{12}^{\text{TP}}}{\omega_1} = (1 - i_{21}) R_{12} r_{12} f', \quad \frac{dA_{23}^{\text{TP}}}{d\varphi_1} = \frac{P_{23}^{\text{TP}}}{\omega_1} = (i_{21} - i_{31}) R_{23} r_{23} f'_{23}$$

являются аналогами работ сил трения. Они позволяют провести оценку эффективности использования той или иной схемы по коэффициенту потерь и выразить тем самым зависимость износа в кинематических парах от обобщенной координаты и размеров звеньев механизма. Это дает возможность учесть влияние динамики машинного агрегата на износ в кинематических парах того или иного механизма, используемого для выполнения конкретного технологического процесса.

Коэффициент потерь, характеризующий мощность, затрачиваемую на преодоление сил трения во вращательных кинематических парах, например, механизма с четырьмя вращательными парами, определится соотношением

$$\psi_{\text{ш.ч.}} = \frac{\sum_{i=1}^4 P_{\text{тр}}^i}{P_{\text{д}}} = \frac{1}{M_{\text{д}}} [R_{01}r_{01}f'_{01} + (1 + i_{21})R_{12}r_{12}f'_{12} + (i_{21} - i_{31})R_{23}r_{23}f'_{23} + i_{31}R_{03}r_{03}f'_{03}]. \quad (7.53)$$

Уравнение (7.53) характеризует потери мощности на трение в шарнирном четырехзвеннике. Оно включает в себя размеры звеньев механизма, входящие в кинематические передаточные функции, и размеры узлов трения кинематических пар. Аналогично для кривошипно-ползунного механизма имеем

$$\psi_{\text{к.п.м.}} = \frac{\sum_{i=1}^4 P_{\text{тр}}^i}{M_{\text{д}}} = \frac{1}{M_{\text{д}}} [R_{01}r_{01}f'_{01} + (1 - i_{21})R_{12}r_{12}f'_{12} + i_{21}R_{23}r_{23}f'_{23} + R_{03}^n f'_{03} i_{31}].$$

Потери энергии на преодоление сил трения удобно оценивать отдельно для вращательных и поступательных пар.

Коэффициент потерь механизма определяется суммой коэффициентов потерь во вращательных парах $\psi_{\text{вр}}$ и поступательных $\psi_{\text{п}}$

$$\psi_{\text{м}} = \sum_{i=1}^n \psi_{\text{вр}}^i + \sum_{i=1}^m \psi_{\text{п}}^i.$$

Тогда параметры, определяющие износ во вращательных и поступательных кинематических парах, определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} (pv)_{\text{вр}}^i &= \frac{\psi_{\text{вр}}^i}{f_i' S} P_{\text{д}}, \\ (pv)_{\text{п}}^i &= \frac{\psi_{\text{п}}^i}{f_i' S} P_{\text{д}}. \end{aligned} \right\}$$

7.12. Определение реакций в кинематических парах механизмов с учетом сил трения в направляющих ползуна

Учет сил трения во вращательной и поступательной кинематических парах производится с помощью приведенных коэффициентов трения как безразмерных параметров, которые, будучи умноженными на силу суммарного нормального давления, определяют суммарную силу сопротивления относительно движению звеньев. Как отмечалось ранее, приведенный коэффициент трения учитывает не только свойства контактирующих поверхностей и их материалов через табличные коэффициенты трения, но и некоторые конструктивные параметры узлов трения, а также закон распределения давления, обусловленный износом или перекосами в результате действия сил при наличии зазоров в подвижных соединениях. Определим суммарную силу сопротивления перемещению ползуна 3, движущегося в направляющих O длиной l с возможным перекосом. В точке C (рис. 7.23, a) ползун присоединяется к шатуну, образуя вращательную кинематическую пару, так что расстояние в точке C относительно направляющих изменяется. Расстояние a точки приложения силы F_c технологического сопротивления также изменяется в соответствии с законом движения ползуна как выходного звена механизма. Приведенный коэффициент трения определится с помощью формулы (7.46):

$$f' = f \frac{N_A + N_B}{N_A - N_B} = \frac{R_{03}^t}{R_{03}^n}, \quad (7.54)$$

где $f(N_A + N_B) = R_{03}^t = R_{23}^t$ — суммарная сила сопротивления движению ползуна 3 вдоль направляющих, обусловленная трением скольжения; $N_A - N_B = R_{03}^n$ — суммарная сила, действующая в направлении, перпендикулярном движению ползуна 3. Положение точек A и B определяется законом распределения давления.

Записывая уравнение суммы моментов сил, действующих на ползун относительно точек A и B при $h = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} N_A &= \left[F_c^n \left(a + \frac{l}{6} \right) + R_{23}^n \left(b + \frac{5l}{6} \right) \right] \frac{3}{2l}, \\ N_B &= \left[F_c^n \left(a + \frac{5l}{6} \right) + R_{23}^n \left(b + \frac{l}{6} \right) \right] \frac{3}{2l}. \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

Выражение (7.54) с учетом формулы (7.55) примет вид

$$f' = 3f \frac{F_c^n \left(\frac{a}{l} + \frac{1}{2} \right) + R_{23}^n \left(\frac{b}{l} + \frac{1}{2} \right)}{R_{23}^n - F_c^n}. \quad (7.56)$$

Из рис. 7.23, б видно, что имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} N_A - N_B &= R_{23}^n - F_c^n, \\ F_A + F_B &= f(N_A + N_B) = R_{23}^r - R_c^r. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

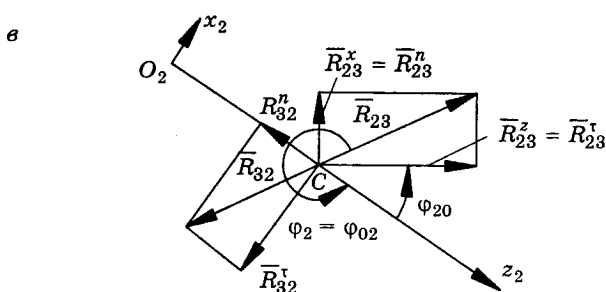
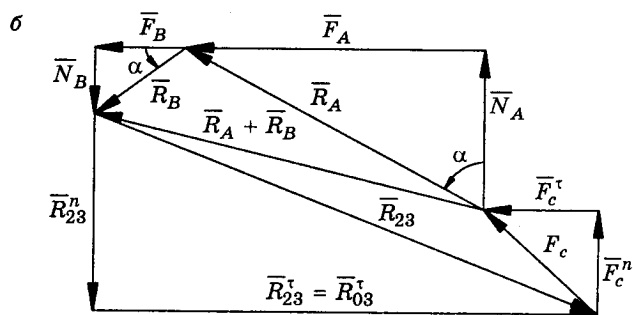
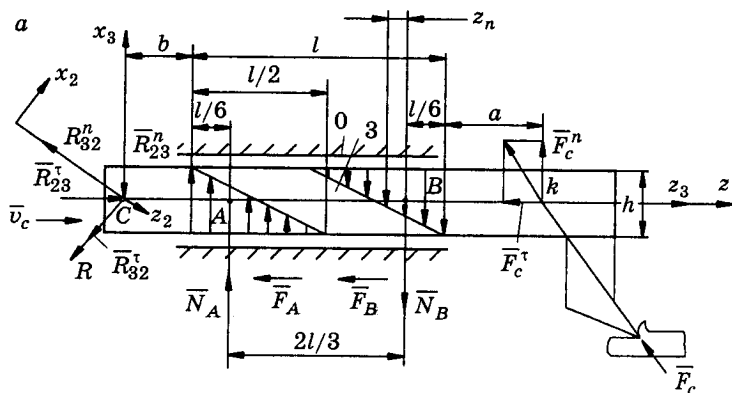


Рис. 7.23. К определению сил сопротивления при движении ползуна в направляющих: а — составляющие сил, действующих на ползун, б — замкнутый силовой многоугольник, в — составляющие реакций в кинематической паре С в системе координат, связанной со звеном 2

Из рис.7.23, в видно, что условие равновесия сил $\bar{R}_{23} + \bar{R}_{32} = 0$, приложенных в точке С, можно представить в виде

$$\bar{R}_{23}^{\tau} + \bar{R}_{23}^n = \bar{R}_{32}^{\tau} + \bar{R}_{32}^n .$$

Как и ранее, последнее уравнение дает возможность определить соотношения между нормальными и тангенциальными составляющими сил \bar{R}_{23} и \bar{R}_{32} в соответствующих системах координат. Так, например, проектирование его на оси $x_2 O_2 z_2$ дает

$$-R_{32}^n = R_{23}^{\tau} \cos \varphi_2 - R_{23}^n \sin \varphi_2, \quad R_{32}^{\tau} = R_{23}^n \cos \varphi_2 - R_{23}^{\tau} \sin \varphi_2 .$$

Силу сопротивления движению ползуна (без учета его веса и силы инерции), применяя выражения (7.56) и (7.57), можно представить в виде

$$R_{23}^{\tau} = F_c^{\tau} + 3f \left[F_c^n \left(\frac{a}{l} + \frac{1}{2} \right) + R_{23}^n \left(\frac{b}{l} + \frac{1}{2} \right) \right] = F_c^{\tau} + f'(R_{23}^n - F_c^n) .$$

Последнее уравнение дает возможность провести анализ эффективности механизма с той или иной конструкцией направляющих. Оно удобно для оценки энергозатрат на движение звеньев механизма с учетом конструктивных особенностей направляющих, их износа и других характеристик, входящих в приведенный коэффициент трения.

7.13. Моделирование движения звеньев кулачкового механизма с учетом износа

7.13.1. Постановка задачи

В технологическом оборудовании и средствах автоматизации широкое распространение находят механизмы, преобразующие вращательное движение одного звена в возвратно-поступательное движение другого с остановками. К таким механизмам относятся кулачковые. Они используются, например, в токарных автоматах, двигателях внутреннего сгорания и других машинах. На рис.7.24 изображена схема кулачкового механизма с направляющими длиной L , в которых движется звено 2 (толкатель). При движении толкателя возможны его перекосы, обусловленные действием силы \bar{R}_{12} при наличии зазоров. Так как сближение кулачка с толкателем (звена 1 со звеном 2) возможно в направлении оси y , сумма их износов, измеренная в этом направлении, определяет износ сопряжения. Как отмечалось ранее, условие касания трущихся (изнашиваемых) тел отражает то, что при любой форме их износа наблюдается контакт сопряженных поверхностей. Объем изношенного материала каждого из сопряженных тел характеризует область взаимного внедрения (эпору износа), которая характеризует

собой искажение теоретического (номинального) профиля кулачка. Таким образом, действительное перемещение толкателя в результате износа профиля кулачка будет всегда отличаться от номинального (заданного). Известно, что износ будет тем больше, чем больше давление в зоне контакта трущихся деталей и скорость относительного скольжения. Эти параметры, определяющие эпюру износа для рассматриваемого профиля кулачка в любой его точке, будут переменными в связи с тем, что геометрические характеристики профиля изменяются в соответствии с заданным

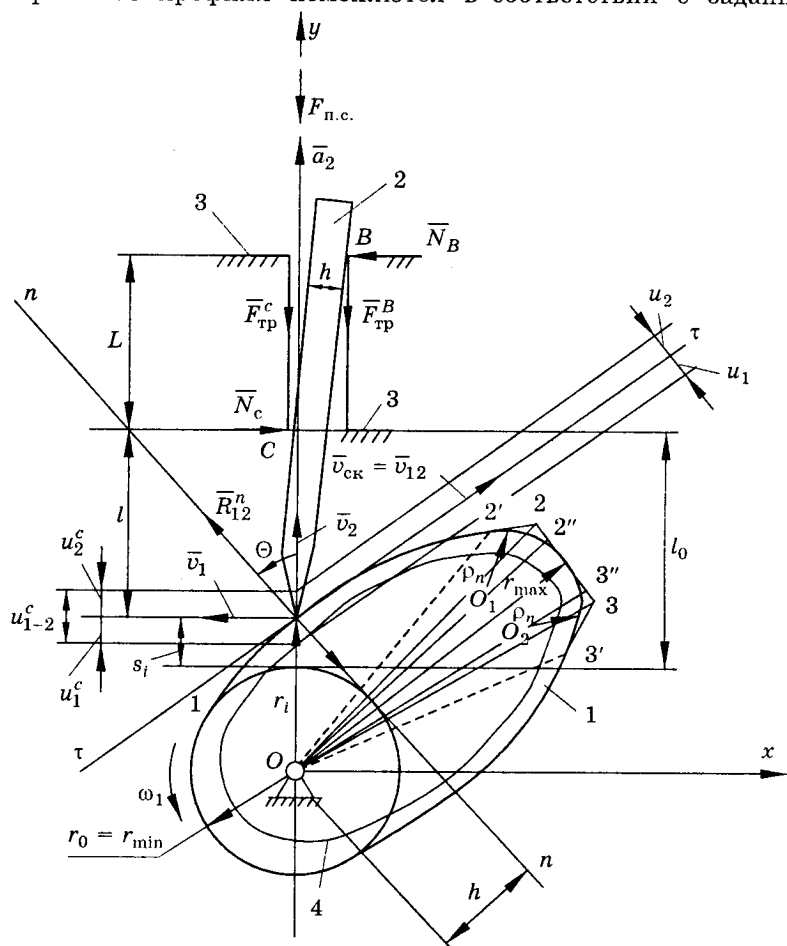


Рис.7.24. Расчетная схема кулачкового механизма для оценки влияния износа рабочей поверхности кулачка на отклонение закона движения толкателя от заданного: 1 — кулачок, 2 — толкатель, 3 — направляющие, 4 — эпюра износа

законом движения толкателя. Поэтому влияние износа на отклонение закона движения толкателя от заданного (теоретического) зависит от геометрических параметров кулачка, кинематических характеристик механизма, соотношения сил, действующих в зоне контакта и в направляющих.

Основной характеристикой количественной оценки износа поверхностей деталей машин (пар трения) является их линейный износ, определяющий изменение размера детали в направлении, перпендикулярном к поверхности трения. В общем случае износ распределяется по поверхности трения неравномерно, при этом изнашиваются обе поверхности одновременно, что приводит к изменению взаимного положения деталей. Износ сопряжения является характеристикой, которая непосредственно связана с потерей машиной или механизмом их начальных рабочих свойств. Он характеризует величину взаимного сближения деталей при их износе.

На рис. 7.24 u_1 и u_2 есть линейный износ кулачка и толкателя соответственно в точке A , измеренный в направлении нормали n — n к поверхности трения; $u_{1-2}^c = (u_1^c + u_2^c) / \cos \Theta$ — износ сопряжения, который характеризуется величиной относительного сближения кулачка и толкателя в направлении оси y .

Неравномерный износ профиля кулачка приводит к нарушению закона движения толкателя, к возникновению дополнительных динамических нагрузок и нередко является основной причиной потери работоспособности всего механизма. Износ же толкателя мало влияет на изменение закона его движения. Для расчета износа профиля кулачка используются зависимости, приведенные ранее.

Таким образом, для оценки износа поверхности кулачка необходимо определить давление p_1 и скорость скольжения $v_{ск}$.

Для построения эпюры износа кулачка скольжения необходимо выразить давление и скорость в зависимости от изменяющихся геометрических и кинематических характеристик. На рис. 7.25 представлены геометрические параметры кулачка: наименьший радиус $r_0 = r_{\min}$ кулачка, наибольший его радиус r_{\max} , а также фазовые углы: φ_y — угол удаления, $\varphi_{д.с.}$ — угол дальнего стояния, φ_b — угол возвращения, $\varphi_{б.с.}$ — угол ближнего стояния. Известно, что $\varphi_y + \varphi_{д.с.} + \varphi_b + \varphi_{б.с.} = 2\pi$ и $r_{\max} - r_0$ — максимальное перемещение выходного звена. К геометрическим характеристикам относятся также закон изменения текущего радиус-вектора в функции центрального угла α $r_i = f(\alpha_1)$ и эксцентриситет

e — расстояние от центра вращения кулачка до линии движения толкателя. В рассматриваемом примере (рис.7.24) $e = 0$.

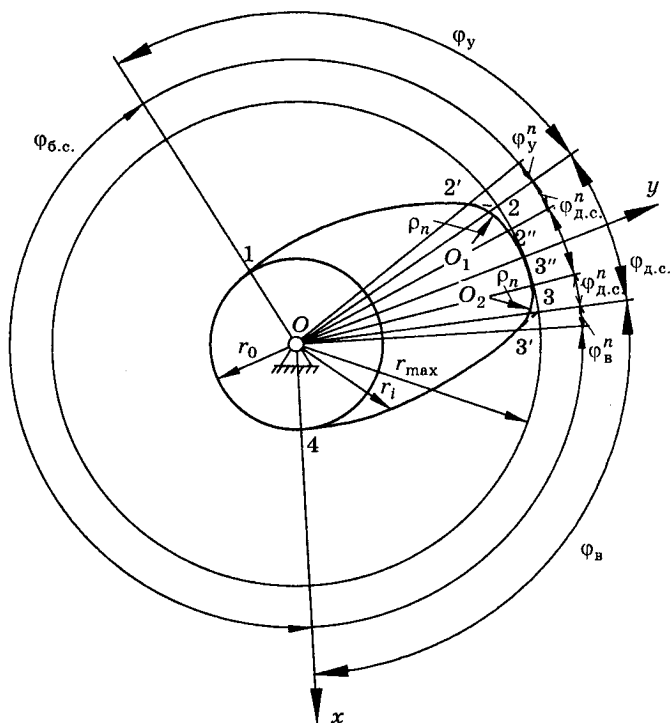


Рис.7.25. Геометрические параметры кулачка

К кинематическим характеристикам относятся скорость вращения кулачка $\omega_1 = d\varphi_1 / dt$, а также закон изменения скорости и ускорения толкателя в функции обобщенной координаты (угла φ_1 повороте кулачка) $s'_2 = ds_2 / d\varphi_1$, $s''_2 = d^2s_2 / d\varphi_1^2$.

Связь между скоростью и аналогом скорости, ускорением и аналогом ускорения выражается известными соотношениями

$$v_2 = \omega_1 s'_2; \quad a'_2 = \omega_1^2 s''_2 + \varepsilon_1 s'_2,$$

здесь $\varepsilon_1 = d\omega_1 / dt$ — угловое ускорение кулачка.

К кинематическим характеристикам также относится скорость скольжения $v_{ск}$. Величина скорости скольжения определяется с учетом угла Θ давления звена 1 на звено 2. Это угол между линией действия силы R_{12}^n (без учета сил трения) и скоростью v_2 перемещения точки приложения этой силы. Сила R_{12}^n направлена

по нормали к поверхности кулачка. Таким образом, скорость скольжения $v_{\text{ск}}$ есть скорость v_{12} относительного движения точки A_2 , принадлежащей толкателю, относительно точки A_1 , принадлежащей кулачку. Она направлена по касательной $\tau - \tau$ к поверхности кулачка. Из рис. 7.25 видно, что

$$v_{\text{ск}} = v_1 / \cos \Theta = \omega_1 r / \cos \Theta,$$

где

$$\operatorname{tg} \Theta = s'_2 / (s_2 + r_0).$$

7.13.2. Анализ силового взаимодействия кулачка и толкателя

Силу R_{12} , действующую на толкатель со стороны кулачка, найдем, рассматривая в равновесии звено 2 (рис. 7.24).

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N_C - N_B - R_{12} \cdot \sin \Theta &= 0, \\ -F_{\text{тр}}^C - F_{\text{тр}}^B - m_2 a_2 + R_{12} \cos \Theta - F_{\text{п.с.}} &= 0, \\ N_B(L + l) - N_C \cdot l &= 0, \end{aligned} \quad (7.58)$$

где N_C, N_B — нормальные реакции направляющих в точках C и B ; $F_{\text{тр}}^C, F_{\text{тр}}^B$ — силы трения в точках C и B ; l — расстояние от направляющих до точки касания A толкателя с кулачком, равное

$$l = l_i = l_0 - s_i,$$

$F_{\text{п.с.}}$ — сила полезного сопротивления.

Первое уравнение (7.58) отражает равенство нулю всех проекций сил на ось x , второе — то же на ось y , третье — равенство нулю моментов относительно точки A при $h = 0$.

Совместное решение уравнений (7.58) дает

$$R_{12} = \frac{F_{\text{п.с.}} + m_2 a_2}{\cos \Theta - f(1 + 2l / L) \sin \Theta}. \quad (7.59)$$

В выражении (7.59) $F_{\text{п.с.}} + m_2 a_2 = F_2$ — сила, действующая на толкатель, включающая силу полезного сопротивления $F_{\text{п.с.}}$ и силу инерции. Здесь рассмотрен самый неблагоприятный случай, соответствующий ускоренному движению толкателя, когда сила инерции $F_2^H = -m_2 a_2$ совпадает по направлению с силой $F_{\text{п.с.}}$.

Для кулачковых механизмов крайне неблагоприятным является случай самоторможения (заклинивания), который ведет нередко к поломкам. Заклинивание означает невозможность движения толкателя в заданном направлении, то есть невозможность движения при возрастании силы R_{12} до бесконечности.

Из уравнения (7.59) видно, что условием заклинивания является равенство нулю знаменателя. Тогда условие отсутствия такого заклинивания имеет вид

$$\operatorname{ctg} \Theta > f(1 + 2l / L).$$

Соотношение сил R_{12} и F_2 , действующих на толкатель, количественно можно охарактеризовать коэффициентом $\lambda = R_{12} / F_2$, который указывает, во сколько раз движущая сила R_{12} больше силы сопротивления F_2 .

С учетом уравнения (7.59) коэффициент возрастания усилия определится соотношением

$$\lambda = \frac{R_{12}}{F_2} = \frac{1}{\cos \Theta - f(1 + 2l / L) \sin \Theta}$$

или

$$\lambda^{-1} = \cos \Theta - f(1 + 2l / L) \sin \Theta. \quad (7.60)$$

Уравнение (7.60) позволяет выбрать угол давления, обеспечивающий выполнение предварительно заданного условия соотношения сил, определяемого коэффициентом λ . Так, например, при $\lambda_{\max} = 2$ и $f = 0$, $l = 0$ из уравнения (7.60) видно, что $\Theta_{\lambda=2}^{f=0} = 60^\circ$. При $\lambda_{\max} = 2$, $f = 0,3$, $l = 0$ уравнение (7.60) дает

$$\frac{1}{2} = \cos \Theta_{\lambda=2}^{f \neq 0} - 0,3 \sin \Theta_{\lambda=2}^{f \neq 0},$$

откуда следует, что

$$\Theta_{\lambda=2}^{f \neq 0} = 45^\circ.$$

Из проведенного анализа видно, что угол давления определяется не только геометрическими и кинематическими характеристиками, но и конструктивными параметрами (длиной направляющих, силами трения и др.).

Для практики важным является количественное сравнение совершенства той или иной конструкции механизма. Одним из критериев такой количественной оценки является механический коэффициент полезного действия. Учитывая, что основные потери в рассматриваемом механизме будут определяться силами трения, КПД можно представить в виде

$$\eta = A_{\text{п.с.}} / A_{\text{д.с.}} = (M_1^{f=0} \cdot \varphi_1) / (M_1^{f \neq 0} \cdot \varphi_1).$$

Здесь $M_1^{f=0}$, $M_1^{f \neq 0}$ — моменты, приложенные к кулачку, необходимые для преодоления сил сопротивления при отсутствии трения и при наличии трения. При $\bar{a}_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $M_1 = R_{12}h$ (рис. 7.24), на кулачок действуют M_1 и R_{21} .

Из уравнения моментов относительно точки O для кулачка получим

$$M_1^{f \neq 0} = R_{12}h = \frac{F_{\text{п.с.}} \cdot h}{\cos \Theta - f(1 + 2l/L) \sin \Theta}.$$

При $f = 0$

$$M_1^{f=0} = \frac{F_{\text{п.с.}} \cdot h}{\cos \Theta}.$$

Отсюда КПД с учетом последних соотношений определится выражением

$$\eta = M_1^{f=0} / M_1^{f \neq 0} = 1 - f(1 + 2l/L) \operatorname{tg} \Theta. \quad (7.61)$$

Используя выражение (7.61), можно определить угол давления, обеспечивающий высокий КПД механизма, например, когда $0,7 \leq \eta \leq 0,95$.

Так, при $\eta = 0,85$, $f = 0,3$, $l = 0$ выражение (7.61) дает $0,85 = 1 - 0,3 \operatorname{tg} \Theta$, откуда

$$\Theta_{\eta} = 0,85 = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,6^\circ.$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ИХ ПОДВИЖНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

8.1. Причины и виды колебаний в машинах

Все деформируемые тела обладают бесконечным числом степеней свободы, определяющих их деформированные состояния. Моделирование движения звеньев машин с учетом податливости проводится с определенной целью, например, с целью виброзащиты или виброизоляции в каком-либо направлении. Поэтому в инженерных задачах в зависимости от характера изучаемого явления и требуемой точности число степеней свободы определяется расчетной схемой, отражающей приближенно реальную конструкцию и имеющей ограниченное число степеней свободы. Наиболее удобной и простой для исследования движения является схема с одной степенью свободы. Она имеет большое значение для практики в связи с тем, что задачу о колебаниях системы с несколькими степенями свободы часто удается свести к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы. Ограничение числа степеней свободы (упрощение расчетной схемы) может быть выполнено различными методами. Например, путем выделения массивных элементов, деформацией которых можно пренебречь, или других, более податливых элементов, массу которых можно не учитывать. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных упругими связями. Следует отметить, что возможность моделирования движения механической системы с использованием расчетной схемы с одной, двумя или большим числом степеней подвижности зависит не только от вида системы, но и от характера сил, действующих на систему. Так, например, если направление возмущающей силы изменяется в плоскости и не совпадает по направлению с силой упругости одного упругого элемента, то возникновение боковых колебаний требует усложнения расчетной схемы. Таким образом, выбор расчетной схемы динамической модели может быть проведен только с учетом физической природы рассматриваемой механической системы и требований, определяемых поставленными задачами, например, такими, как исследование резонансных явлений, определение максимальных динамических реакций в каком-либо направлении, виброзащита от колебаний объектов, расположенных вблизи источника, виброизоляция объекта от колебаний других систем или же виброизоляция человека (оператора).

Быстро протекающие процессы (вибрации) отрицательно сказываются на точностных показателях технологического оборудования и средств автоматизации. Они приводят к снижению их долговечности и эксплуатационных возможностей. Поэтому по-

вышение динамического качества и, в первую очередь, виброустойчивости является весьма важной задачей совершенствования конструкций машин.

Рассмотрим некоторые причины и виды колебательных процессов.

Вынужденные колебания возникают при наличии внешней силы. Причины возникновения такой силы могут быть различными. Закон изменения возмущающей силы определяется видом технологической операции. Примеры силового взаимодействия для некоторых рабочих процессов рассмотрены в главе 4. Часто причиной возникновения периодически изменяющейся силы являются неуравновешенность вращающихся деталей (ротора электродвигателя, шпинделя с инструментом и т.п.); погрешность изготовления и сборки, особенно зубчатых передач, когда вход в зацепление зуба сопровождается ударом. Колебания могут передаваться также извне от другого оборудования.

Параметрические колебания возникают при наличии какого-либо переменного параметра, создающего эффект, аналогичный переменной силе (например, переменная жесткость детали или узла). Так, наличие шпоночной канавки на валу приводит к тому, что при его вращении и постоянной нагрузке прогибы вала изменяются.

Автоколебания в зоне контакта инструмента с обрабатываемой деталью, например, при первичной обработке характеризуются тем, что силы, поддерживающие колебательный процесс, возникают во время колебания системы. Автоколебания возникают с частотой, близкой к частоте собственных колебаний узлов и деталей.

Фрикционные автоколебания возникают часто вследствие того, что сила трения покоя больше силы трения движения. При этом силы трения покоя тем больше, чем больше продолжительность неподвижного контакта, когда снижается температура в зоне контакта и выдавливается смазка. Это явление способствует возникновению релаксационных (прерывистых) автоколебаний при медленных перемещениях узлов. По характеру воздействия внешней нагрузки и реакции системы на нее различают следующие виды возмущающих воздействий: импульсная (ударная) нагрузка; возмущающаяся сила, изменяющаяся по произвольному закону; линейно возрастающая нагрузка; гармонически и негармонически изменяющаяся нагрузка.

8.2. Моделирование внешнего возмущающего воздействия

На рис.8.1 представлены графики, поясняющие законы изменения внешних сил от времени при ударных нагрузках. Понятие ударного действия связывается с однократным воздействием

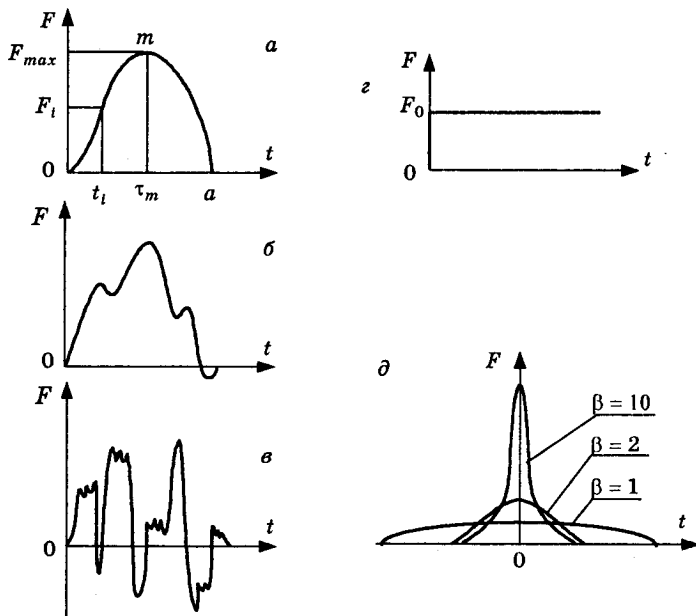


Рис.8.1. Графики ударных процессов: *a, б* — простой формы, *в* — импульсивной с наложением колебаний,

z — внезапная нагрузка, *д* — функция единичного импульса тел (среды) с некоторым объектом, приводящим к выделению значительной энергии в малом объеме. При этом полагают, что период собственных колебаний соизмерим или больше длительности ударного воздействия. Процессы ударного движения принято различать по форме кривой функциональной зависимости на процессы простой (см. рис.8.1, *a, б*) и сложной форм. В последнем случае имеют в виду процессы с наложенными колебаниями (см. рис.8.1, *в*). На рис.8.1, *z* представлен случай приложения нагрузки F_k к неподвижной (при $t = 0$) и недеформированной системе. Сила F мгновенно (за бесконечно малое приращение времени) возрастает на величину F_0 и в дальнейшем остается неизменной. Для аналитического описания ударных процессов удобно использовать симметричную динамическую импульсную функцию δ — функцию Дирака (см. рис.8.1, *д*), которая равна нулю везде, кроме точки $t = 0$, в которой она равна бесконечности, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Эти свойства δ — функции могут быть обеспечены при рассмотрении ее как предела функции

$$F(t, \beta) = \frac{\beta}{\pi(\beta^2 t^2 + 1)}$$

при $\beta \rightarrow \infty$ [37]. На рис.8.1, ∂ представлены графики импульса силы $F(t)$ при $\beta = 1, 2$ и 10 . Площадь, заключенная между осью t и функцией $F(t)$ на рис.8.1, выражается интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t, \beta) dt = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\beta^2 t^2 + 1}.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{\beta^2}} = \frac{\pi}{\beta},$$

получаем для любого значения β

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t, \beta) dt = 1.$$

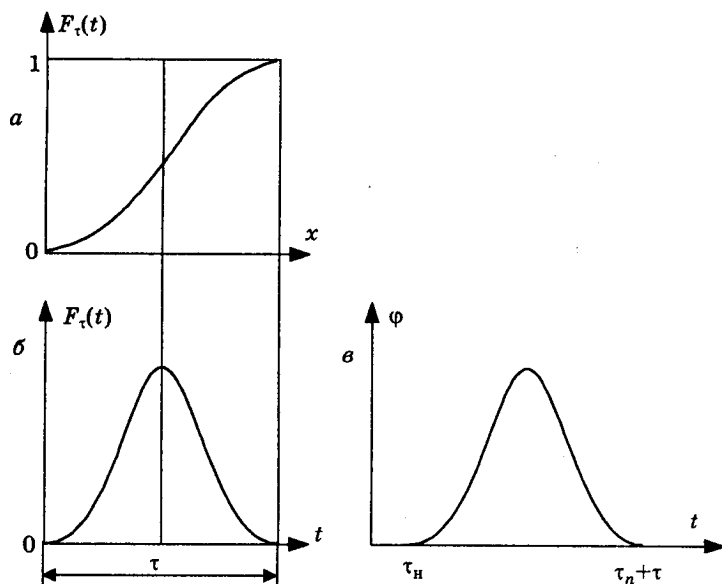


Рис.8.2. График гладкого импульса, возрастающего в интервале $0 - \tau$ от нуля до 1: *a* — график производной $F(t) = dF/dt$,
б — функция с мгновенным единичным импульсом,
в — запаздывающая δ -функция

Математические выражения, в которых применяются импульсные функции, следует рассматривать как эвристические, нуждающиеся в более строгом обосновании. В ряде случаев можно избежать применения импульсных функций [38]. Обычно принадлежность внешних сил к ударным считают при их максимальном значении, значительно большем по сравнению с максимальными значениями других сил. Промежуток времени τ действия таких сил называют длительностью удара. На рис.8.2 изображены две гладкие функции $\dot{F}_\tau(t)$ и $F_\tau(t)$, возрастающие в интервале времени 0- τ от нуля до единицы. Импульс функции $\dot{F}_\tau(t)$ определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_\tau(t) dt = \int_0^{\tau} \dot{F}_\tau(t) dt = F_\tau(\tau) - F_\tau(0) = 1.$$

Этот импульс равен единице для любой функции указанного вида (рис.8.2, а) при любом значении τ . При $\tau \rightarrow 0$ функция $\dot{F}_\tau(t)$ представляет собой δ — функцию Дирака. Таким образом, импульс функции $F_\tau(t)$ есть предел импульса функции $\dot{F}_\tau(t)$ при $\tau \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\tau(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_\tau(t) dt = 1. \quad (8.1)$$

Выражение (8.1) представляет собой удобную математическую модель многих физических быстро протекающих процессов, таких, как удар, взрыв, включение и выключение электрического напряжения и др.

Мгновенный единичный импульс получается при $\tau \rightarrow 0$ подобно тому, как, например, сосредоточенный заряд q получается из заряда, распределенного в объеме с определенной плотностью. В этом случае в выражении (8.1) под τ понимается объем, а плотность запишется как q/τ . В действительности точечного заряда в природе не существует, как не существует и сосредоточенной силы, точечной массы, мгновенной продолжительности бесконечно большого тока и других понятий, вводимых для моделирования явлений, к которым они относятся. В процессе ударной нагрузки сила, приложенная к телу, возрастает от нуля до очень большого (практически бесконечного) значения, а затем быстро падает до нуля. Такой процесс, несмотря на кратковременность (мгновенность), сопровождается весьма заметными затратами энергии, то есть, несмотря на малость периода действия, сила совершает значительную работу.

Мгновенный единичный импульс можно получить, исходя из различного вида функций $\varphi_i(t)$. Одна из них показана на

рис.8.2, а. Необходимо лишь, чтобы функция $\varphi_\tau(t)$ обладала следующими двумя свойствами:

$$\varphi_\tau(t) \geq 0;$$

для любого фиксированного числа $\alpha > 0$ должны соблюдаться соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_\tau(t) dt = 1,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{-\infty} \varphi_\tau(t) dt = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_\tau(t) dt = 0.$$

Например, можно в качестве функции $\varphi_\tau(t)$ взять прямоугольный импульс

$$\varphi_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{\pi} & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Чтобы произвести некоторые операции над δ -функцией, необходимо произвести их над какой-либо порождающей ее функцией $\varphi_\tau(t)$, а затем совершать идеализацию результата при $\tau \rightarrow 0$.

Если в функции $\varphi_\tau(t)$, порождающей δ -функцию, сдвинуть аргумент, то есть рассмотреть функцию $\varphi_\tau(t-\tau)$ (рис.8.2, в), то получим запаздывающую δ -функцию

$$\delta(t - \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi_\tau(t - \tau).$$

Взаимосвязь линейного перемещения s , скорости v и ускорения a для случая ударного взаимодействия выражается соотношениями

$$a = \begin{cases} a(t) & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \text{ и } t \geq \tau, \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} v_0 & \text{при } t \leq 0, \\ \int_t^{\tau} a dt + v_0 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 0 & \\ \tau & \\ \int_{\tau}^{\infty} a dt + v_0 & \text{при } t \geq \tau, \\ 0 & \end{cases} \quad (8.2)$$

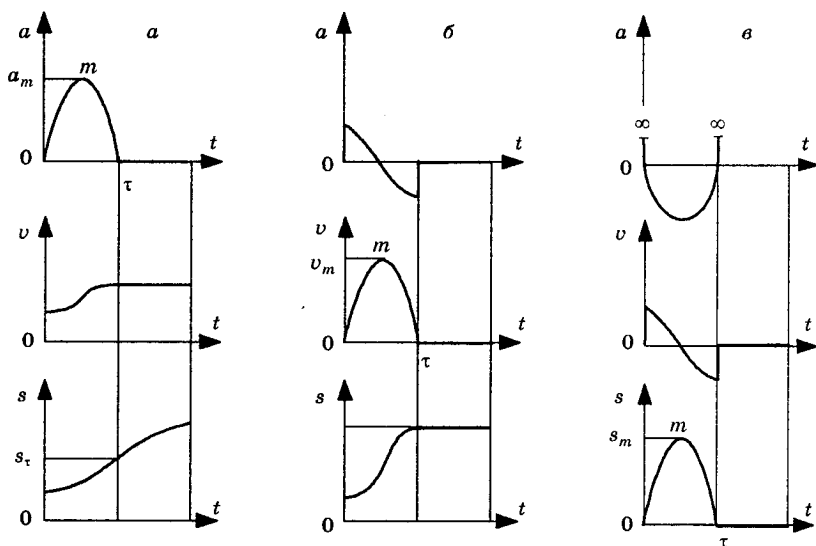


Рис.8.3. Связь между ударным ускорением, скоростью и перемещением: *а* — полусинусоидальное ускорение, *б* — полусинусоидальная скорость, *в* — полусинусоидальное перемещение

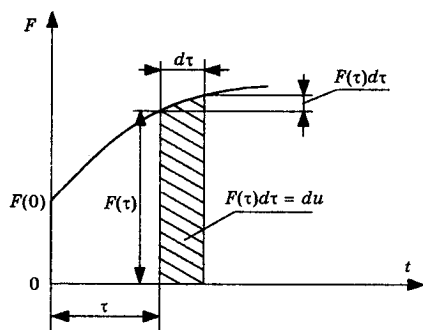


Рис.8.4. Моделирование произвольного закона $F(t)$ изменения нагрузки

поясняющие взаимосвязь кинематических характеристик ударного процесса. Эта взаимосвязь показана для случая изменения ускорения a (рис.8.3, *а*), скорости v (рис.8.3, *б*) и перемещения s (рис.8.3, *в*) по полусинусоидальному закону.

Из рис.8.3 видно, что воспроизведение импульсного воздействия по ускорению требует конечных приращений скорости и перемещения тела.

$$s = \begin{cases} s_0 & \text{при } t \leq 0, \\ \int_0^t v dt + s_0 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ \int_0^{\tau} v dt + v_0 t + s_0 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Нижний предел интегрирования в выражениях (8.2) выбран равным нулю, исходя из определения ударного процесса.

На рис.8.3 приведены графики,

На рис.8.4 представлена зависимость силы $F(t)$, изменяющейся по произвольному закону. Произвольную нагрузку можно представить в виде суммы следующих друг за другом бесконечно малых импульсов $du = F(\tau)d\tau$ или как последовательность внезапно приложенных постоянных нагрузок. В момент времени $t = 0$ прикладывается начальная нагрузка $F(0)$, а в момент τ — бесконечно малая нагрузка $dF = \dot{F}(\tau)d\tau$ (см. рис.8.4), где $\dot{F} = dF/dt$ — скорость роста нагрузки.

8.3. Параметры простейших видов колебаний

Как известно, дифференциальные уравнения движения одномассовой линейной системы, совершающей свободные линейные колебания в направлении оси x или крутильные колебания, имеют вид

$$m\ddot{x} + c_x x = 0 \quad \text{или} \quad J\ddot{\varphi} + c_\varphi \varphi = 0,$$

где m, J — масса и момент инерции движущегося тела,

c_x, c_φ — линейная и крутильная жесткости упругих связей.

Решение дифференциального уравнения свободных линейных колебаний имеет вид

$$x = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt), \quad (8.3)$$

где $k = \sqrt{\frac{c_x}{m}}$ — частота собственных колебаний системы,

c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Если при $t = 0$ смещение и скорость обозначить x_0 и \dot{x}_0 , то из уравнения (8.3) имеем

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0/k. \quad (8.4)$$

Выражение (8.3) можно представить также в виде

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (8.5)$$

где $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2},$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \arctg\left(\frac{x_0 k}{\dot{x}_0}\right).$$

График функции (8.4) представлен на рис.8.5, а. Период свободных колебаний определится соотношением

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

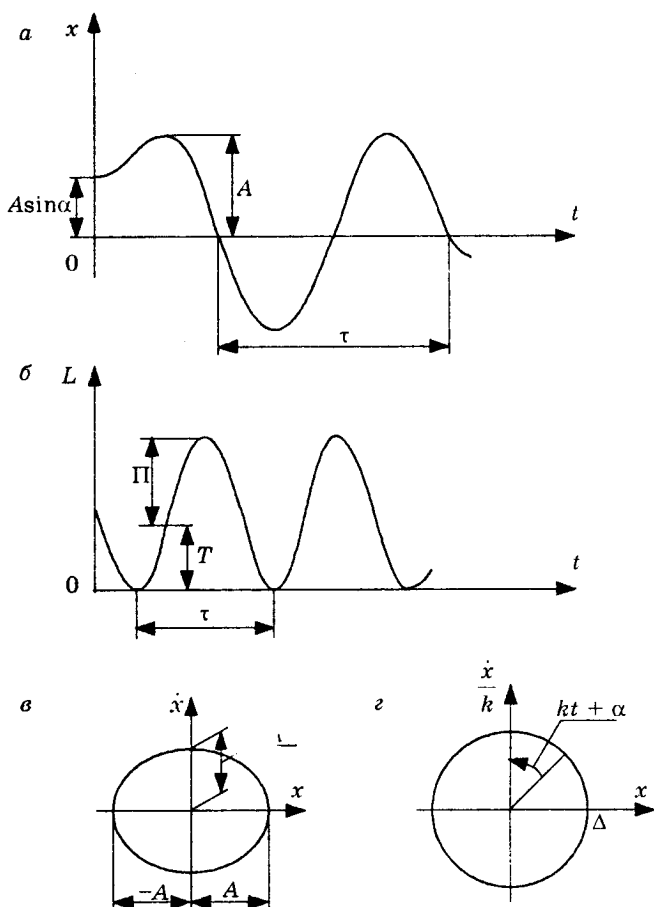


Рис.8.5. Характеристики свободных колебаний:
 а — график зависимости перемещения груза от времени;
 б — изменение кинетической и потенциальной энергии;
 в, г — фазовый портрет движения

Тогда число колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi}.$$

Частота в герцах равна числу колебаний в секунду. При сравнении частоты и периода колебаний со статической деформацией $x_{ст}$ упругой связи, вызванной силой, равной весу груза массой m , имеют место соотношения

$$k = \sqrt{\frac{g}{x_{ст}}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{ст}}}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{x_{ст}}{g}}.$$

Формулы (8.6) справедливы независимо от того, совпадает или не совпадает направление силы тяжести с направлением движения груза.

Кинетическая и потенциальная энергии деформации упругой связи определяется выражениями

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2 k^2 \cos^2(kt + \alpha),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2 = \frac{1}{2} cA^2 \sin^2(kt + \alpha).$$

Так как $k^2 = c/m$, то полная энергия системы остается постоянной (рис.8.5, б):

$$L = T + \Pi = \frac{1}{2} cA^2,$$

$$\Pi_{\max} = T_{\max}.$$

Уравнение (8.5) и его производная по времени $\dot{x} = ak \cos(kt + \alpha)$ после исключения параметра $kt + \alpha$ дают выражение

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{k^2} = a^2. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.7) является уравнением эллипса с полуосями a и ka (рис.8.5, в). Зависимость скорости \dot{x} от смещения x отображает движение на фазовой плоскости и указывает на то, что верхняя полуплоскость соответствует возрастанию смещения, а нижняя — убыванию. Размеры эллипсов, отражающих свободные колебания, зависят от амплитуды A . Чем больше a , тем больше полная энергия системы. Как видно из рис.8.5, г, изменение масштаба построения фазовой траектории приводит к тому, что изображающая точка будет равномерно двигаться по окружности с угловой скоростью k . При наличии рассеяния энергии изображающая точка перемещается по спирали, приближаясь к началу координат.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости x , имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (8.8)$$

где $2n = \frac{\mu}{m}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$,

μ — коэффициент демпфирования (успокоения) системы.

Решение уравнения (8.8) имеет вид

$$x = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}, \quad (8.9)$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования; r_1, r_2 — корни характеристического уравнения

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0, \quad (8.10)$$

а именно:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Вид колебательного движения зависит от соотношения величин n и k . В случае $n < k$ (случай малого сопротивления) корни характеристического уравнения мнимые: $r_{1,2} = n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$, то есть $r_{1,2} = -n \pm ik_1$, где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$. В этом случае общее решение уравнения (8.8) принимает вид

$$x = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t), \quad (8.11)$$

где величины $A = x_0$, $B = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}$ определяются начальными условиями: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$. Вводя обозначения $A = a \sin \alpha$, $B = a \cos \alpha$, уравнение (8.11) можно представить в виде

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

Из сравнения уравнений (8.5) и (8.11) видно, что уменьшение амплитуды колебаний определяется множителем e^{-nt} , который уменьшается с течением времени, причем при $t \rightarrow 0$ $e^{-nt} \rightarrow 0$.

Как видно из рис.8.6, а, затухающие колебания не являются периодическими. Однако принято говорить о "периоде затухающих колебаний" τ . Очевидно, что

$$\tau = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Так как $k_1 < k$, то $2\pi/k_1 > 2\pi/k$, то есть период затухающих колебаний больше периода гармонических колебаний, но при малом сопротивлении это почти не сказывается на периоде колебаний. Постоянные интегрирования определяются выражениями [21]

$$a = \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}.$$

Для затухающих колебаний характерным является то, что соотношения моментов времени, в которых точка получает максимальные отклонения от положения равновесия, образует арифметическую прогрессию с разностью, равной полупериоду π/k_1 или $\tau/2$. При этом максимальные отклонения колеблющейся точки от

положения равновесия образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$D = \frac{a_i}{a_{i+1}} = e^{\frac{n\tau}{2}},$$

называемым декрементом затухания.

Часто пользуются понятием логарифмического декремента

$$\ln D = \frac{n\tau}{2}. \quad (8.12)$$

В случае $n > k$ корни характеристического уравнения $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ являются действительными и различными. В этом случае

$$x = ae^{-nt} \operatorname{sh}(k_1 t + \alpha), \quad (8.13)$$

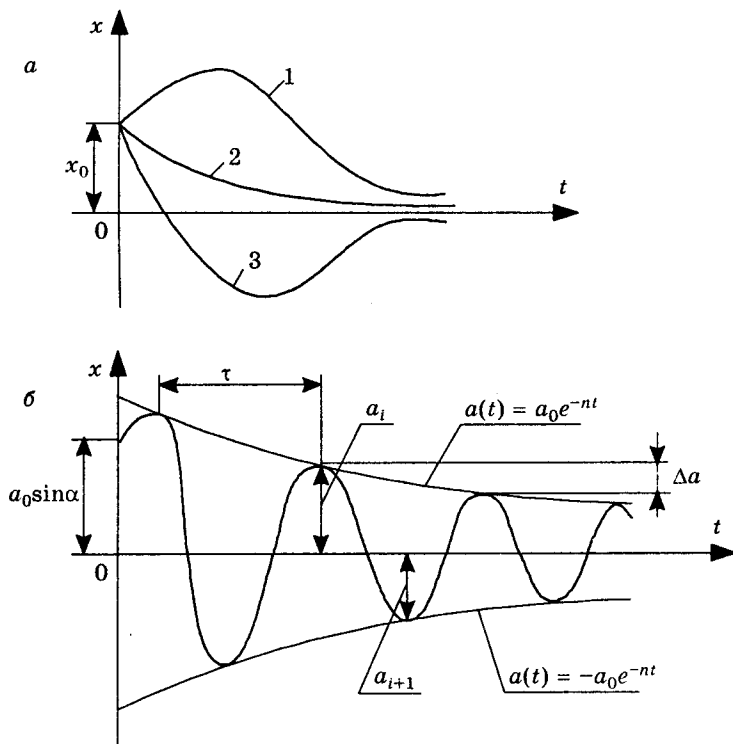


Рис.8.6. Параметры затухающих процессов:
а — аperiodическое движение,
б — периодическое затухание колебаний

где $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$, и движение отличается отсутствием колебаний, то есть является аperiодическим затухающим. Учитывая, что

$$\operatorname{sh}(k_1 t) = \frac{e^{k_1 t} - e^{-k_1 t}}{2}, \quad \operatorname{ch}(k_1 t) = \frac{e^{k_1 t} + e^{-k_1 t}}{2},$$

уравнение (8.13) можно представить в виде

$$x = e^{-nt} (c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{-k_1 t}),$$

где c_1 и c_2 — новые постоянные интегрирования. В рассматриваемом случае $k_1 < n$, поэтому при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$. Это означает, что система под действием восстанавливающей силы асимптотически приближается к положению равновесия без колебаний. Вид графика такого движения зависит от модуля и направления начальной скорости v_0 . На рис.8.6, а кривая 1 указывает на движение при "толчке вперед", когда $v_0 > 0$. Кривая 2 описывает движение при "слабом толчке назад", когда $v_0 < 0$, и кривая 3 соответствует "сильному толчку назад".

В предельном случае, когда $n = k$, корни характеристического уравнения действительные и равные: $r_{1,2} = -n$. В этом случае

$$x = e^{-nx} (c_1 + c_2 t)$$

и движение также не является колебательным.

При затухающих колебаниях в положениях максимального смещения, когда $x_i = a_i$ и $x_{i+1} = a_{i+1}$, скорость равна нулю, поэтому вся энергия деформации упругой связи равна

$$\Pi_i = \frac{1}{2} c a_i^2, \quad \Pi_{i+1} = \frac{1}{2} c a_{i+1}^2.$$

Здесь и далее значение амплитуд рассматриваются за период τ , а не за полупериод, как это указано на рис.8.6, а. Поэтому за период свободных затухающих колебаний рассеивается энергия, равная

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} c (a_i^2 - a_{i+1}^2). \quad (8.14)$$

Если значения a_i и a_{i+1} отличаются незначительно, то движение в течение одного периода мало отличается от гармонических колебаний со средней амплитудой

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (a_i + a_{i+1}),$$

при которых средняя энергия равна

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2} c a_{\text{ср}}^2.$$

Тогда, представляя в формуле (8.14)

$$(a_i^2 - a_{i+1}^2) = (a_i + a_{i+1})(a_i - a_{i-1})$$

и обозначая уменьшение амплитуды колебаний за один период $\Delta a = a_i - a_{i+1}$, получим

$$\Delta \Pi = 2\Pi_{\text{ср}} \frac{\Delta a}{a_{\text{ср}}}. \quad (8.15)$$

Уменьшение энергии $\Delta \Pi$ может быть определено из рассмотрения работы сил сопротивления за один период. Отношение энергии, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии называют коэффициентом поглощения или относительным гистерезисом ψ [39]:

$$\psi = \frac{\Delta \Pi}{\Pi}.$$

В зависимости от природы сил сопротивления коэффициент поглощения может зависеть от амплитуды или частоты колебаний. С введением коэффициента ψ выражение (8.15) примет вид

$$\frac{\Delta a}{a_{\text{ср}}} = \frac{1}{2} \psi. \quad (8.16)$$

Так как рассматриваются затухающие свободные колебания, то ψ должен подсчитываться при частоте, равной частоте k собственных колебаний. Отношение двух последовательных отклонений за период (а не за полупериод) равно $\delta = \ln D = n\tau$ (см. выражение (8.12)).

При отсутствии специальных демпфирующих элементов в металлоконструкциях величина δ обычно находится в пределах сотых-десятых долей единицы [39], так что отношение двух последовательных колебаний близко к единице. Тогда

$$\delta = \ln D = \ln \frac{a_{\text{ср}} + \frac{\Delta a}{2}}{a_{\text{ср}} - \frac{\Delta a}{2}} \approx \frac{\Delta a}{a_{\text{ср}}}. \quad (8.17)$$

При малом затухании логарифмический декремент примерно равен отношению изменения амплитуды колебаний за период τ к амплитуде a . Связь между δ , k_1 и k определится из следующих преобразований:

$$\delta = n\tau = \frac{2\pi n}{k_1} = \frac{2\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}},$$

откуда

$$n^2 = k^2 \frac{\delta^2}{\delta^2 + (2\pi)^2}$$

$$n^2 = k^2 \frac{\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}.$$

Подстановка последнего уравнения в выражение $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ дает

$$k_1 = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}}. \quad (8.18)$$

Из формулы (8.18) видно, что даже при значительном затухании частота k_1 затухающих колебаний мало отличается от частоты k свободных колебаний. Так, например, если следующий размах вдвое меньше предыдущего, то $\delta = \ln 2 = 0,693$, т.е. k_1 лишь на 0,6% меньше k . Поэтому можно считать, что наличие сопротивления (трения) не влияет на частоту колебаний, то есть $k_1 \approx k$.

При геометрическом колебании $x = a \sin kt$ сила вязкого сопротивления $R = \mu \dot{x}$ совершает за один период работу

$$A = \int_0^{2\pi} R \dot{x} dt = \mu \int_0^{2\pi} \dot{x}^2 dt = \mu a k^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(kt) dt = \pi \mu a^2 k.$$

Эта работа изображается площадью заштрихованной на рис.8.7 гистерезисной петли (см. также рис.8.8). Отношение A к

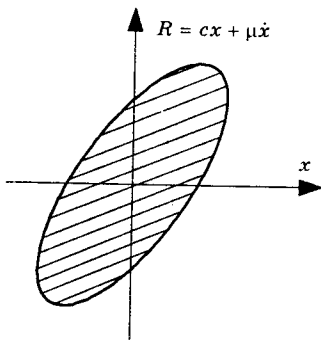


Рис.8.7. К определению работы вязкого трения

максимальной энергии $\Pi = \frac{1}{2} ca^2$ составляет

$$\psi = \frac{\pi \mu a^2 k}{\frac{1}{2} ca^2} = \frac{2\pi \mu k}{c} = \frac{4\pi n}{k^2}. \quad (8.19)$$

Как при вязком трении, так и при силе сопротивления, пропорциональной смещению, относительный гистерезис не зависит от амплитуды колебаний [39]. Поэтому в обоих случаях декремент колебания постоянны и последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. Несмотря на различную

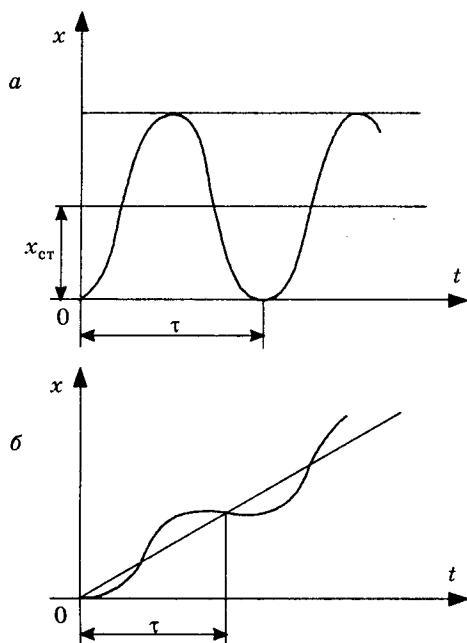


Рис.8.8. Перемещение упругой системы: а — при внезапно приложенной нагрузке, б — при линейно-возрастающей нагрузке

форму гистерезисной петли, общей характеристикой трения при колебаниях является коэффициент поглощения. Форма петли гистерезиса имеет второстепенное значение. Для металлов при напряжениях, меньших предела пропорциональности, ширина петли гистерезиса весьма мала. Поэтому расчеты внутреннего трения в материале имеют небольшое значение, оно во много раз перекрывается потерями на трение в сочленениях звеньев, то есть конструкционным демпфированием (гистерезисом). Рассчитать теоретически потери на гистерезис в реальных конструкциях, как правило, не удастся, поэтому пользуются экспериментальным их определением. Конструкционное демпфирование зависит от трения в стыке. В результате увеличения количества

стыков снижается жесткость конструкции, но увеличивается демпфирование.

Сравнение формул (8.16) и (8.17) указывает на простую зависимость между рассеиванием энергии (коэффициентом ψ) и логарифмическим декрементом δ :

$$\psi = 2\delta. \quad (8.20)$$

Соотношение (8.20) справедливо для линейных систем. В этом случае коэффициент ψ зависит от частоты и не зависит от амплитуды колебаний.

Экспериментально, например, для подшипников разных типов, установленных по одному в опоре, получены следующие зависимости [40]:

- радиальный шариковый — 0,15 - 0,30;
- конический роликовый — 0,30 - 0,40;
- радиально-упорный шариковый — 0,20 - 0,35.

При установке в опоре нескольких подшипников относительное рассеивание энергии определяется суммой коэффициентов ψ отдельных подшипников.

Количественная оценка затухания колебаний по логарифмическому декременту характеризует затухание не за абсолютную единицу времени, а за один период (полупериод). Поэтому значение δ в начале колебаний несколько больше декремента, вычисленного в конце виброграммы.

Вынужденные колебания с учетом вязкого трения описываются неоднородным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = f(t).$$

Решение его $x = x_0 + x^*$ определяется суммой двух функций, описывающих общее решение (x_0) соответствующего однородного уравнения и частного решения (x^*) уравнения с правой частью. Если функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = e^{\alpha t} F(t),$$

где

$$F(t) = at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} + \dots + l, \quad (8.21)$$

то в этом случае различают два варианта:

а) α не является корнем характеристического уравнения, тогда частное решение имеет вид

$$x^* = e^{\alpha t} Q(t),$$

где

$$Q(t) = At^m + Bt^{m-1} + Ct^{m-2} + \dots + L. \quad (8.22)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях m в выражениях (8.21), (8.22), получим систему $m+1$ уравнений относительно искомых неизвестных A, B, C, \dots, L ;

б) если α является корнем характеристического уравнения (8.10), то частное решение имеет вид

$$x^* = e^{\alpha t} t^k Q(t).$$

Если α — двукратный корень характеристического уравнения, то

$$x^* = e^{\alpha t} t^2 Q(t).$$

Таким образом, если $f(t) = e^{\alpha t} F(t)$, то $x^* = e^{\alpha t} Q(t)$, когда α не является корнем характеристического уравнения, и $x^* = e^{\alpha t} t^k Q(t)$, когда α — корень характеристического уравнения кратности k .

Для случая

$$f(t) = e^{\alpha t} (a \sin \beta t + b \cos \beta t)$$

также различают два варианта:

а) $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, тогда

$$x^* = e^{\alpha t} (A \sin \beta t + B \cos \beta t);$$

б) $\alpha + \beta \cdot i$ — корень характеристического уравнения кратности k , тогда

$$x^* = e^{\alpha t} t^k (A \sin \beta t + B \cos \beta t).$$

Если правая часть представляет собой сумму или произведение конечного числа функций рассмотренных выше типов, то частное решение x^* находится в виде суммы или произведения. Например, если

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \quad \text{то} \quad x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^*.$$

Описанный формальный вариант сравнения функции правой части, определяющей характер внешнего воздействия, с левой, определяющей упруго-вязкостные характеристики системы, позволяет провести анализ ее динамического состояния с учетом различной физической природы возмущающего воздействия. Обычно реакция системы на внешнее возмущающее воздействие определяется сравнением динамического смещения со статическим.

8.4. Реакция упругой системы на внешнее возмущающее воздействие

При оценке реакции упругой системы на внешнее импульсивное воздействие следует учитывать ту особенность, что по окончании действия импульса при $t = 0$ колеблющаяся масса имеет нулевое смещение и скорость v , определяемую соотношением

$$v = \frac{J_F}{m} = \frac{1}{m} \lim_{-\tau}^0 \int F_\tau(t) dt.$$

Далее (при $t > 0$) система совершает свободные колебания в соответствии с формулой (8.3). Начальные условия свободного движения определяются в виде $x_0 = 0$, $v_0 = \dot{x}_0 = J_F/m$, то есть закон движения опишется соотношением

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin(kt) = \frac{J_F}{mk} \sin(kt). \quad (8.23)$$

Функцию

$$x(t) = \frac{J_F}{mk} \sin(kt) \quad (8.24)$$

называют реакцией системы на единичный импульс [39].

При оценке реакции системы на внешнее воздействие, характеризующееся силой $F(t)$, меняющейся по произвольному закону (рис.8.4), можно воспользоваться принципом суперпозиции, когда перемещение, вызываемое несколькими нагрузками, равно сумме перемещений, вызываемых каждой из них в отдельности.

Полагая, что при $t = 0$ система неподвижна и не деформирована, представим произвольную нагрузку в виде суммы следующих друг за другом бесконечно малых импульсов $dJ_F = F_\tau(t)dt$ (рис.8.4). Каждый из таких импульсов в момент времени $t > \tau$ вызывает смещение, равное

$$dx^* = F(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad (8.25)$$

где x — реакция системы на единичный импульс. Полное смещение в момент времени t определится суммой смещений, вызываемых элементарными импульсами, приложенными при $\tau < t$. Тогда уравнение (8.25) дает

$$x^*(t) = \int_0^t F(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (8.26)$$

или, с учетом выражения (8.23),

$$x^*(t) = \frac{1}{mk} \int_0^t F(\tau) \sin[k(t - \tau)]d\tau. \quad (8.27)$$

При выводе уравнения (8.26) использовался принцип суперпозиции, тогда как уравнение (8.27) справедливо только для простейшей одномассовой системы. Поэтому соотношение (8.26) выражает частное решение для любой линейной системы через ее реакцию на единичный импульс. Выражение (8.26) называют интегралом Дюамеля [39].

Если при $t = 0$ к неподвижной системе прикладывается мгновенно возрастающая нагрузка, сохраняющая в дальнейшем постоянное значение (рис.8,1, z), выражение (8.26) можно представить в виде

$$x^* = F_0 \int_0^t x(\tau)d\tau = F_0 x_1(t). \quad (8.28)$$

Здесь функция

$$x_1(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

выражает собой реакцию системы на внезапно приложенную единичную нагрузку. С учетом выражения (8.23) уравнение (8.28) дает

$$x_1(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{mk} \sin(k\tau)d\tau = \frac{1 - \cos kt}{mk^2},$$

то есть перемещение системы под действием внезапно приложенной нагрузки составляет

$$x = \frac{F_0}{mk^2} (1 - \cos kt), \quad (8.29)$$

где $mk^2 = c$ есть жесткость упругой связи, а $F_0/mk = x_{ст}$ — статическая деформация упругой связи. Это означает, что максимальное динамическое перемещение при внезапном приложении нагрузки (рис.8.1, *г*) вдвое больше статического. График зависимости $x(t)$ приведен на рис.8.8, *а*. Определим реакцию системы на линейно возрастающую нагрузку, когда $F(t) = At$ при $A = \text{const}$. Если эта нагрузка прикладывается к неподвижной и недеформированной системе, то перемещение определяется с использованием выражения (8.26):

$$x = \int_0^t A(t - \tau)x(\tau)d\tau = Ax_2(t). \quad (8.30)$$

В выражении (8.30) функция

$$x_2(t) = \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (8.31)$$

определяет реакцию системы на линейно возрастающую нагрузку.

Связь между функциями $x_2(t)$ и $x_1(t)$ определяется интегрированием по частям выражения (8.31). Решение его показывает, что реакции линейной системы на единичный импульс $x(t)$ внезапно приложенной и линейно возрастающей нагрузки связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t x(\tau)d\tau, \\ x_2(t) &= \int_0^t x_1(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (8.32)$$

В частности, для линейной системы без трения, учитывая выражение (8.29), имеем

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{1 - \cos kt}{mk^2} d\tau = \frac{1}{mk^2} \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right). \quad (8.33)$$

Из выражения (8.30) следует, что

$$x(t) = Ax_2(t) = \frac{At}{mk^2} \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)$$

или

$$x(t) = \frac{F(t)}{c} \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right). \quad (8.34)$$

В уравнении (8.34) первое слагаемое соответствует статическому перемещению, пропорциональному приложенной в данный момент нагрузке, второе — отражает влияние колебаний. График зависимости $x(t)$ представлен на рис.8.8, *б*.

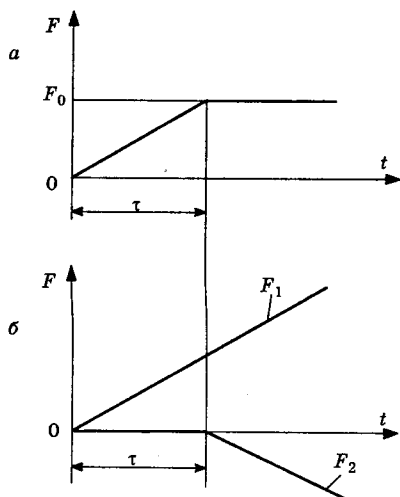


Рис.8.9. К анализу переходного процесса, связанного с изменением закона внешнего воздействия: а — закон изменения внешней силы, б — моделирование закона внешнего воздействия

а при $t > \tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{\tau} [x_2(t) - x_2(t - \tau)] = \frac{F_0}{mk^3\tau} [k\tau - \sin kt + \sin k(t - \tau)].$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$x(t) = x_{\text{ст}} \left[1 - \frac{2 \cos\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{k\tau} \right]$$

или после преобразований

$$\frac{x(t) - x_{\text{ст}}}{x_{\text{ст}}} = \frac{2 \cos\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{k\tau}.$$

Максимальное значение этого выражения будет при $t = \frac{\tau}{2}$:

$$\left| \frac{x(t) - x_{\text{ст}}}{x_{\text{ст}}} \right|_{\text{max}} = \frac{2 \sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{k\tau}.$$

Выражения (8.32) используются для анализа переходных процессов линейных систем с одной степенью свободы.

Пример. Нагрузка возрастает согласно рис.8.9, а от нуля до F_0 в течение времени τ , затем сохраняет постоянное значение. Определить реакцию системы на такое изменение нагрузки.

График функции $F(t)$ (рис.8.9, а) можно представить посредством наложения двух линейно возрастающих функций — $F_1(t)$, действующей с момента $t = 0$, и $F_2(t)$, приложенной с момента $t = \tau$ (рис.8.9, б).

При этом

$$F_1(t) = At = \frac{F_0}{\tau} t,$$

$$F_2(t) = -\frac{F_0}{\tau} (t - \tau).$$

Тогда, используя выражение (8.33), при $0 \leq t \leq \tau$ имеем

$$x(t) = \frac{F_0}{\tau} x_2(t) = \frac{F_0}{mk^3\tau} (kt - \sin kt).$$

Последнее соотношение указывает на то, что максимальная разница между динамическим $x(t)$ и статическим $x_{ст}$ перемещением по отношению к $x_{ст}$ тем меньше, чем больше время t возрастания нагрузки в сравнении с периодом собственных колебаний с частотой $k = \sqrt{c/m}$.

Реакцию на единичную импульсную нагрузку системы с трением (сопротивлением), пропорциональным скорости, определим из тех соображений, что начальная скорость \dot{x}_0 выражается соотношением $\dot{x}_0 = J_F/m$, при этом смещение изменяется по закону

$$x = \frac{J_F}{mk_1} e^{-nt} \sin k_1 t. \quad (8.35)$$

Полагая в уравнении (8.35) $J_F = 1$, реакцию системы на единичную импульсную нагрузку определим по формуле

$$x_{тp}(t) = \frac{1}{mk_1} e^{-nt} \sin k_1 t. \quad (8.36)$$

Сравнение выражений (8.24) и (8.35) указывает на наличие множителя e^{-nt} в последнем случае.

Зная реакцию системы с трением на единичный импульс, можно, используя метод наложения, записать выражение для перемещения первоначальной неподвижной системы при воздействии на нее произвольной силы $F(t)$. В этом случае имеем формулу, отличающуюся от формулы (8.27) для систем без трения только видом функции $x(t)$. Подставив значение этой функции из формулы (8.36), получим

$$x = \frac{e^{-nt}}{mk_1} \int_0^t F(\tau) e^{n\tau} \sin k_1(t - \tau) d\tau. \quad (8.37)$$

Формула (8.37) соответствует нулевым начальным условиям. Если необходимо учесть другие начальные условия, то к выражению (8.37) следует добавить уравнение свободных колебаний в соответствии с формулой (8.11).

Пример. Определить реакцию системы с вязким трением на воздействие внезапной нагрузки, равной

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Применительно к рассматриваемому случаю выражение (8.37) имеет вид

$$x = \frac{F_0}{mk_1} e^{-nt} \int_0^t e^{n\tau} \sin k_1(t - \tau) d\tau.$$

Для вычисления интеграла удобно перейти в последнем выражении к показательной форме записи тригонометрической функции:

$$x = \frac{F_0}{mk_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \frac{1}{2i} \left[e^{ik_1(t-\tau)} - e^{-ik_1(t-\tau)} \right] d\tau,$$

откуда после решения получаем [39]

$$x = \frac{F_0}{mk_1(n^2 + k_1^2)} \left[k_1 - e^{-nt} (k_1 \cos kt + n \sin k_1 t) \right].$$

В последнем выражении

$$m(n^2 + k_1^2) = mk^2 = c, \quad F_0/c = x_{ст}.$$

Поэтому

$$\frac{x}{x_{ст}} = 1 - e^{-nt} \left[\cos k_1 t + \left(\frac{n}{k_1} \right) \sin k_1 t \right].$$

На рис.8.10 представлен график последнего выражения. Анализ его указывает, что при $n/k < 0,75$ максимальное значение $x/x_{ст}$ отличается скачкообразным ростом. Большее демпфирование приводит к более замедленному росту отношения $x/x_{ст}$.

Особую важность рассматриваемый пример имеет для оценки требуемого демпфирования регистрирующих приборов с инерционными элементами. Из рис.8.10 видно, что при $n/k < 0,75$ максимальное показание прибора может значительно превышать значение измеряемой величины, изменяясь скачкообразно.

Реакция упругой жесткости при гармоническом возбуждении определится с учетом соотношения собственных частот и частоты изменения возмущающего воздействия. Дифференциальное уравнение колебательного движения системы без трения имеет вид

$$x + k^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(pt). \quad (8.38)$$

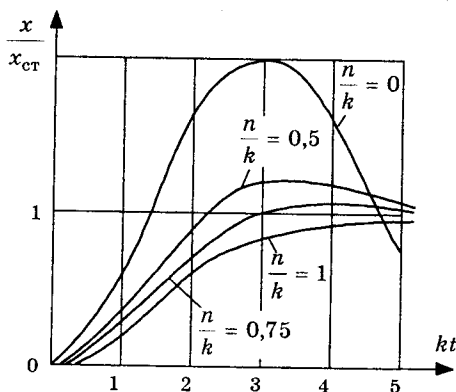


Рис.8.10. Зависимость отношения динамического смещения к статическому от отношения n/k степени затухания n к частоте k собственных колебаний системы

Решение уравнения (8.38) можно получить, вычислив интеграл в формуле (8.27) при $F(\tau) = F_0 \cos(pt)$. Полученное в результате вычислений выражение представляет собой сумму двух функций, отражающих колебания с частотами k и p . В реальных системах свободные колебания с частотой k со временем затухают и устанавливаются стационарные колебания с возмущающей частотой p , не зависящие от начальных условий. Представив решение уравнения (8.38) в виде

$x = A \cos pt$, после подстановки его и выражения \ddot{x} в уравнение (8.38) получим

$$-p^2 A \cos pt + k^2 A \cos pt = \frac{F_0}{m} \cos pt. \quad (8.39)$$

Из уравнения (8.39) видно, что амплитуда вынужденных колебаний определится выражением

$$A = \frac{F_0}{m(k^2 - p^2)} = A_{\text{ст}} \beta,$$

где $A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{mk^2} = \frac{F_0}{c}$ — статическая деформация упругой системы, определяемая амплитудным значением силы F_0 ;

$$\beta = \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^{-1} \quad \text{— коэффициент}$$

динамичности, определяющий усиление колебаний в связи с инерционностью системы.

На рис.8.11 представлен график зависимости $\beta(p/k)$ из которого видно, что при $p = k$ $\beta \rightarrow \infty$. Это означает, что силы упругости уравновешиваются силами инерции при любом значении амплитуды колебаний, внешняя же возмущающая сила оказывается неуравновешенной. В этом случае не

Рис.8.11. Зависимость коэффициента β усиления колебаний от отношения частот p/k вынужденных p и собственных k колебаний системы

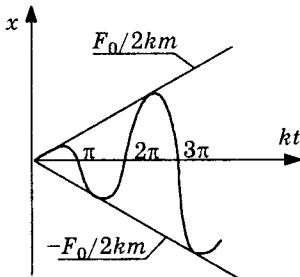


Рис.8.12. Закон изменения амплитуд при резонансе

представляется возможным в рамках традиционных методов изучить процесс развития колебаний. Здесь удобно использовать решение в форме (8.27). При резонансе $p = k$ и $F(t) = F_0 \cos kt$. Полагая начальные условия нулевыми, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{km} \int_0^t \cos k\tau \sin k(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{F_0}{km} \left[\sin kt \int_0^t \cos^2 k\tau d\tau - \cos kt \int_0^t \cos k\tau \sin k\tau d\tau \right] = \frac{F_0}{km} t \sin kt. \end{aligned}$$

Это означает, что при резонансе колебания не являются гармоническими, а амплитуды колебаний увеличиваются пропорционально времени (рис.8.12). В реальных системах наличие потерь и влияние нелинейности приводят к ограничению роста амплитуд (размахов) колебаний. Однако выявление возможности резонансного роста амплитуд имеет важное практическое значение, так как работа при режимах, близких к резонансным, в большинстве случаев недопустима.

Если внешнее воздействие определяется произвольным, но периодическим законом с периодом τ , то функцию $F(t)$ удобно представить в виде ряда

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos pt + a_2 \cos 2pt + \dots + b_1 \sin pt + b_2 \sin 2pt + \dots, \quad (8.40)$$

где $p = 2\pi/\tau$ — частота, соответствующая периоду τ возмущающей силы. Известные формулы теории рядов позволяют найти соответствующие коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) dt, \quad a_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos(ipt) dt,$$

$$b_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin(ipt) dt.$$

На основании принципа действия сил смещение колеблющейся массы от действия силы $F(t)$ определится суммой степеней, вызванных каждым из членов ряда (8.40):

$$\begin{aligned} x = & \frac{a_0}{c} + \frac{a_1}{c \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} \cos(pt) + \frac{a_2}{c \left(1 - 4 \frac{p^2}{k^2}\right)} \cos(2pt) + \dots + \\ & + \frac{b_1}{c \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} \sin(pt) + \frac{b_2}{c \left(1 - 4 \frac{p^2}{k^2}\right)} \sin(2pt). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Исследование колеблющейся системы на предмет наличия резонанса в данном случае сводится к сравнению частоты i -ой гармоники с частотой собственных колебаний системы

$$ip = k \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Амплитуда колебаний стремится к бесконечности при обращении в нуль знаменателя любого члена ряда (8.41), то есть при $p = k$, $p = k/2$, $p = 3/2k$ и т.д.

В случае необходимости исследования закона движения колеблющейся массы целесообразно использовать решение в виде (8.26). Движение в течение одного периода τ возмущающей силы опишется общим решением уравнения движения в виде (8.27), т.е.

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0}{k} \sin kt + \frac{1}{mk} \int_0^t F(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (8.42)$$

Начальное смещение x_0 и скорость \dot{x}_0 определяются из условий периодичности движения:

$$x_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (8.43)$$

Совместное решение уравнений (8.42) и (8.43) дает

$$\begin{aligned} x_0(1 - \cos k\theta) - \frac{\dot{x}_0}{k} \sin k\theta &= B_1, \\ x_0 k \sin k\theta + \dot{x}_0(1 - \cos k\theta) &= B_2, \end{aligned} \quad (8.44)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{mk} \int_0^\theta F(\tau) \sin k(\theta - \tau) d\tau, \\ B_2 &= \frac{1}{m} \int_0^\theta F(\tau) \cos k(\theta - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Решение системы (8.44) дает

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \left(B_1 + \frac{B_2}{k} \operatorname{ctg} \frac{k\theta}{2} \right), \\ \dot{x}_0 &= \frac{1}{2} \left(B_2 - B_1 k \operatorname{ctg} \frac{k\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Подстановка выражений (8.46) в уравнение (8.42) позволяет определить закон движения в интервале $0 \leq t \leq \theta$. Из уравнений (8.46) видно, что $x_0 = \infty$, $\dot{x}_0 = \infty$ при $\sin \frac{k\theta}{2} = 0$, то есть при $k\theta = 2i\pi$, что является условием резонанса.

Пример. Определить закон движения одномассовой упругой системы при действии периодических импульсов.

Начало отсчета времени выберем совпадающим с окончанием предыдущего импульса, то есть при $t = \theta - \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Используя выражение (8.45), получим

$$B_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{mk} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta F(\tau) \sin k(\theta - \tau) d\tau = 0,$$

$$B_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta F(\tau) \cos k(\theta - \tau) d\tau = \frac{1}{m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta F(\tau) d\tau = \frac{J_F}{m}.$$

Из формул (8.46) следует

$$x_0 = \frac{J_F}{2mk} \operatorname{ctg} \frac{k\theta}{2}, \quad \dot{x}_0 = \frac{J_F}{2m}.$$

На протяжении всего периода $0 \leq t \leq \theta - \varepsilon$ возмущающая сила не действует, тогда уравнение (8.42) дает

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt = \frac{J_F}{2mk} \left(\operatorname{ctg} \frac{k\theta}{2} \cos kt + \sin kt \right), \quad 0 \leq t \leq \theta.$$

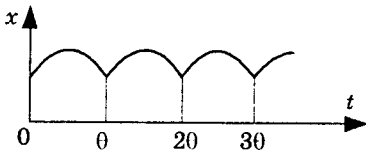


Рис.8.13. Характер движения одномассовой упругой системы при действии периодических импульсов

На рис.8.13 приведен график зависимости $x(t)$ при $0 < n/k$. Движение в другие периоды определяется условиями периодичности.

При гармоническом возмущении $F(t) = F_0 \cos pt$ упругой системы с вязким трением дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{F_0}{m} \cos pt. \quad (8.47)$$

Решение этого уравнения включает в себя общее и частное решение: $x = x_0 + x^*$. Общее решение уравнения (8.47) можно представить в виде решения его левой части:

$$x_0 = e^{-nt} \left(A \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + B \sin \sqrt{k^2 - n^2}t \right)$$

или

$$x_0 = ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha \right).$$

Частное решение с правой частью определится из выражения

$$x^* = D \cos pt + E \sin pt$$

или

$$x^* = b \sin(pt + \alpha).$$

Постоянные A , B , D и E , а также a , b и α находятся известным методом [21].

Наличие множителя e^{-nt} приводит к быстрому затуханию собственных колебаний. Поэтому при расчетах учитывают второе слагаемое. Такие вынужденные стационарные колебания происходят с угловой частотой p возмущающей силы, амплитудой b и начальной фазой α , то есть $x = x^*$. Здесь представляет интерес зависимость амплитуды и угла сдвига фазы от соотношения частот возмущающей силы p и собственных колебаний $k = \sqrt{c/m}$. Для этого рассмотрим выражение амплитуды [21]

$$b = \frac{F_0/m}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}.$$

Разделив на k^2 числитель и знаменатель последнего выражения, перейдем к амплитуде коэффициента динамичности $\beta = b/b_0$.

Здесь $b = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{c} = \frac{F_0}{c}$ — величина статического смещения под действием силы F_0 (так называемая равновесная амплитуда). Тогда динамическая амплитуда определится произведением b_0 на коэффициент динамичности β , где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + z\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}$$

В последнем выражении $2n/k$ характеризует сопротивление среды, $z = p/k$ называют коэффициентом расстройки.

Коэффициент динамичности удобно рассматривать в зависимости от энергетической характеристики силы и сопротивления, определяемой коэффициентом поглощения ψ . В этом случае представляется возможным ввести понятие коэффициента динамичности для любых законов сопротивления, а не только для вязкого трения. Для этого воспользуемся зависимостью (8.19) и получим

$$\beta = \frac{1}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}$$

Учитывая соотношение (8.20), можно выразить коэффициент динамичности через логарифмический декремент:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}$$

На рис.8.14 представлены графики функции $\beta\left(\frac{p}{k}\right)$ при различных соотношениях величины $2n/k$, характеризующей сопротивление среды. Максимальное значение амплитуды [21]

$$b_{\max} = \frac{2b_0}{2\frac{n}{k}\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} \quad (8.48)$$

остается конечным и большим, чем при $p/k = 1$. Если коэффициент затухания удовлетворяет неравенству

$$\frac{n}{k} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

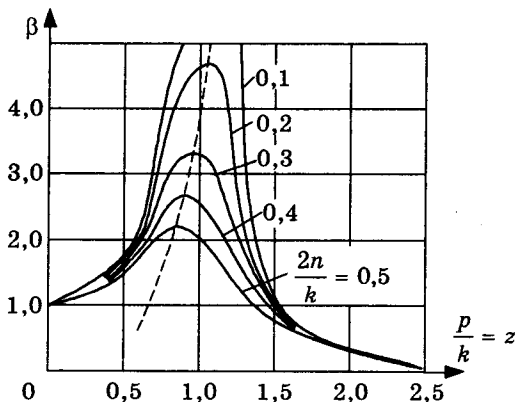


Рис.8.14. Зависимость коэффициента $\beta = b/b_0$ динамичности от коэффициента $z = p/k$ расстройки при различных значениях коэффициента сопротивления $2n/k$

то при

$$\frac{p}{k} = \left(\frac{p}{k}\right)_{\max} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{n}{k}\right)^2}$$

наступает резонанс, то есть резонанс возникает при отношении частот, несколько меньшем единицы. Если коэффициент затухания n/k достаточно мал, то в последней формуле величиной $(n/k)^2$ можно пренебречь в сравнении с единицей и принять, что

$$\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)_{\max} = 1$$

или, что то же, $p = k$. Выражение (8.48) удобно для оценки максимального значения амплитуды, при котором возникают напряжения в конструкциях, превышающие допустимые с точки зрения прочности. При максимуме амплитуды колебаний

$$\beta_{\max} = \frac{2\pi}{\psi_{k=p}} \approx \frac{\pi}{\delta}$$

По аналогии с электрическими системами эта величина называется добротностью механической системы. Чем меньше логарифмический декремент δ , тем больше добротность системы и

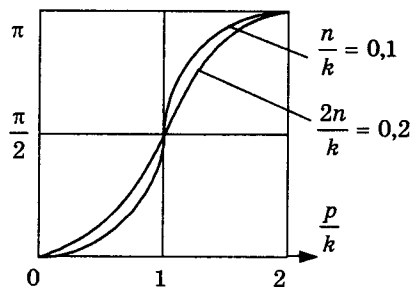


Рис.8.15. Зависимость угла α сдвига фазы от коэффициента p/k расстройки при различных значениях коэффициента сопротивления

тем больше амплитуда вынужденных колебаний в области резонанса. При режимах, далеких от резонанса ($k \ll p$ или $k \gg p$), затухание мало влияет на величину коэффициента динамичности. Это позволяет вести расчет без учета демпфирования.

Зависимость угла α сдвига фазы [21]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

от частоты колебаний и логарифмического декремента затухания представлена на рис.8.15.

В системах с небольшим трением угол α сдвига существенен только в области резонанса. При переходе через резонанс α изменяется от 0 до π тем быстрее, чем меньше трение. В положении резонанса, независимо от величины затухания, сдвиг фазы всегда равен $\pi/2$ и энергия, доставляемая системе возмущающей силой, максимальна.

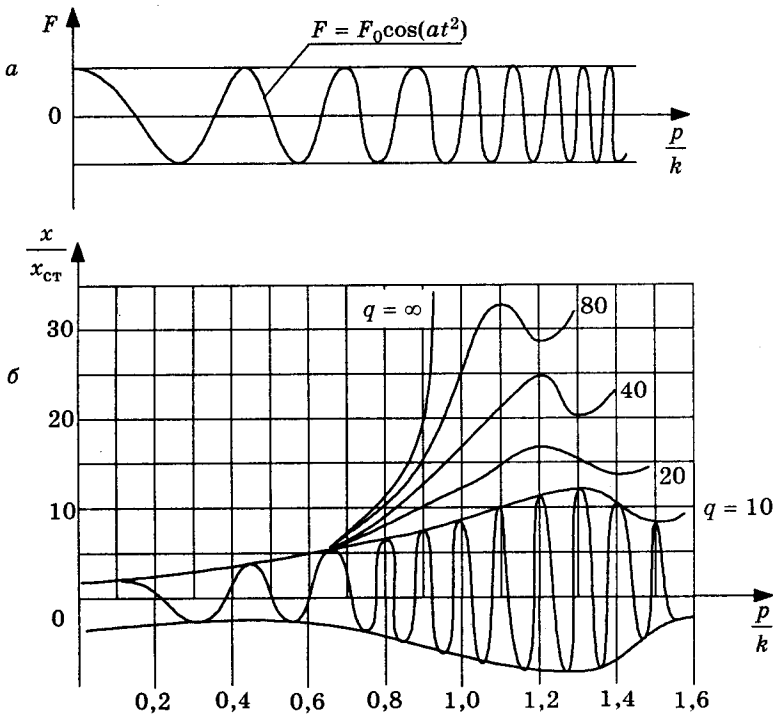


Рис.8.16. Реакция упругой системы сопротивления на возрастание частоты возмущающего воздействия: а — график изменения возмущающей силы, б — зависимость смещения упругой системы при различных q темпах роста частоты возмущения

Практический интерес представляет анализ поведения системы при переходе через резонанс во время разгона (торможения), когда частота p изменения возмущающей силы больше собственной частоты k колебаний системы. Разгон (торможение) характерен тем, что энергия для раскачивания системы доставляется в течение короткого промежутка времени, поэтому развиваются меньшие амплитуды колебаний, чем при резонансном режиме. Исследование этого явления [41] указывает на взаимосвязь смещения системы от темпа роста частоты возму-

щающего воздействия. На рис.8.16, *a* показан график изменения силы $F = F_0 \cos(at^2)$. Скорость нарастания частоты изменения амплитудного значения силы зависит от коэффициента a . При этом мгновенная частота определится из соотношения

$$p = \frac{d(at)^2}{dt} = 2at.$$

В момент резонанса t_p мгновенная частота p равна частоте собственных колебаний k системы, поэтому

$$t_p = \frac{k}{2a}.$$

Период τ собственных колебаний определится как

$$\tau = \frac{2\pi}{k},$$

тогда темп роста частоты возмущающих воздействий выразится отношением

$$q = \frac{t_p}{\tau} = \frac{k^2}{4\pi a},$$

которое определяет число периодов собственных колебаний от начала движения до резонанса. Чем больше q , тем меньше скорость нарастания частоты возмущающей силы. Из рис.8.16, *b* видно, что, чем быстрее происходит резонанс, тем меньше максимальные размахи колебаний и тем больше мгновенная частота, при которой они достигаются. При этом возрастание амплитуд колебаний происходит в небольшом диапазоне изменения частоты возмущения, когда она приближается к собственной частоте. Это означает, что рассмотренный пример линейного возрастания частоты возмущающего воздействия можно приближенно распространить и на законы, отличные от линейного. Следует отметить, что рассмотренная постановка задачи не соответствует реальным условиям. Частота, при которой размахи колебаний максимальны, а также и величина этих размахов существенно зависят от демпфирования. Кроме того, процесс разгона характерен тем, что закон изменения частоты возмущения зависит от затрат энергии на колебания, — эти затраты тем больше, чем больше амплитуда колебаний. По мере увеличения амплитуды колебаний все меньшая часть мощности двигателя тратится на разгон, при этом скорость нарастания частоты возмущения замедляется.

При резонансных колебаниях резко возрастает рассеяние энергии в упругих элементах, вызванное действием диссипативных сил, и мощность двигателя может оказаться недостаточной для того, чтобы компенсировать потери энергии при резонансе.

В этом случае мощности двигателя может быть недостаточно, чтобы выйти на установившийся резонансный режим. Такое явление называют эффектом Зоммерфельда [25].

8.5. Основные этапы динамических расчетов

Анализ движения звеньев машин с учетом податливости предусматривает следующие этапы:

- выбор и обоснование динамической модели машины, механизма или звена;
- выбор или составление математической модели, описывающей характер движения динамической модели;
- решение и анализ полученных результатов;
- динамический синтез передаточных и исполнительных механизмов и соединений их звеньев.

Наиболее ответственным этапом является выбор и обоснование динамической модели. В предыдущих разделах учитывалась жесткость (податливость) одного звена неизменной массы, связанного с неподвижным звеном невесомой линейной пружиной. При совместном движении нескольких упругих звеньев следует учитывать характер соединения упругих элементов между собой. Задача оценки реакции такой системы на внешнее возмущающее воздействие осложняется. В общем случае динамическая модель требует учета деформации звеньев и их кинематических пар, наличия зазоров в них и т.п. Одна и та же механическая система может описываться различными упругими моделями в зависимости от того, какие звенья считаются податливыми и какие — жесткими, какие массы считаются сосредоточенными, какие рассматриваются как распределенные по объему звеньев. Выбор упругой модели, адекватной исследуемым процессам, является сложной задачей и в большинстве случаев носит эвристический характер.

Часто описать все аспекты динамического поведения элементов машин и происходящих в них динамических процессов не представляется возможным, а иногда в этом и нет необходимости. Поэтому первый этап динамических расчетов связан с разумным упрощением исходного объекта, т.е. заменой его некоторой схемой или моделью, отображающей наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи. Таким образом, динамическая модель оказывается ограниченной и пригодной лишь для определенных условий. С другой стороны, одному и тому же механизму может соответствовать целый ряд динамических моделей.

Наиболее простая динамическая модель машины, основанная на допущении о недеформируемости звеньев, рассмотрена нами в предыдущих главах.

Анализ кинестатической модели дает исходное оценочное представление о динамике машины, которое оказывается достаточно достоверным при нагружении, близком к статическому. При учете упругости звеньев кинестатический анализ также необходим, так как полученные силы служат источником возмущений в колебательной системе.

Учет упругости звеньев при построении динамической модели позволяет решать новый класс задач, без рассмотрения которых невозможно создание современных высокоскоростных машинных агрегатов. Цель решения таких задач:

- устранение аварийных резонансных режимов;
- обеспечение нормальных условий работы машины и ее обслуживания; в этом случае принимается во внимание условие, обеспечивающее высококачественное и надежное осуществление заданной технологической и транспортной операции, воспроизведение с заданной точностью требуемых кинематических зависимостей, ограничение уровня колебаний, требование защиты человека-оператора от повышенного уровня шума и вибраций;
- рациональное использование колебательных явлений для технологических и транспортных операций (вибротранспорт, виброинструмент и т.п.).

При выборе динамической модели важно, чтобы идеологизация не вступила в противоречие с возможностями принципиального характера в описании колебательных явлений. При исследовании параметрических колебаний необходимо учесть переменность параметров системы, при исследовании автоколебаний — нелинейные связи в системе, то есть выбор динамической модели требует определенного уровня понимания качественной картины изучаемых явлений. В некоторых случаях для составления динамических моделей требуются предварительные расчеты, а иногда и поисковый эксперимент. Большую роль играет инженерная интуиция, базирующаяся на предварительных динамических расчетах, экспериментальных исследованиях, на практике эксплуатации машин и механизмов. Поэтому полезен отбор ряда типовых моделей, свойственных многим механизмам, как по целям динамического подхода, так и по способности отразить наиболее важные динамические свойства. Накопление материалов, содержащих сведения о наиболее характерных динамических моделях механизмов и их приводов, является существенным условием их рационального проектирования и дальнейшего совершенствования. При этом следует иметь в виду две особенности механических систем.

1) Механизмы, с помощью которых выполняется заданное (программное) перемещение рабочего органа, с одной стороны, являются источниками возмущения для привода машины, а с другой — ответственными технологическими объектами, подверженными вибрациям со стороны звеньев, входящих в саму машину, и со стороны внешних источников.

2) Обобщенные координаты, определяющие функцию положения рабочего органа, и обобщенные скорости зависят не только от режимов эксплуатации, но и от типа используемых механизмов т.е. его кинематических передаточных функций. Выбор динамической модели машины в ряде случаев оказывается процессом многоступенчатым [42]. Так, на стадии схемной проработки машины (поиск структурного варианта) используется рассмотренная ранее жесткая модель. Она позволяет выбрать двигатель, определить реакции в кинематических парах, выявить причины и характер возмущающих воздействий. Исследование, например, крутильных колебаний в передаточных механизмах, которые относятся к низкочастотным колебательным процессам, требует учитывать упругие свойства наиболее податливых элементов. Исследование высокочастотных процессов часто производится на основе локальных упругих моделей, описывающих свойства отдельных механизмов и узлов, разделенных наиболее податливыми элементами. Целесообразнее прибегать к последовательному усложнению динамических моделей на основе использования решений, полученных на предшествующих этапах при расчетах упрощенных моделей.

Каждой динамической модели соответствует своя математическая модель, представляющая собой систему дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, с помощью которых осуществляется математическое описание исследуемого объекта. При построении математической модели приходится привлекать некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упрощения самой процедуры математического описания системы и ее дальнейшего анализа, а это требует чувства меры, основанного на понимании связи между физическим явлением и его математическим образом.

Одна и та же математическая модель может соответствовать совершенно различным динамическим моделям, не связанным между собой физической общностью. В этом случае частные научные достижения при исследовании математической модели в одной отрасли становятся общим достоянием целого ряда научных направлений.

На третьем этапе динамического расчета проводят решение и анализ полученных результатов, в основе которых лежат численно-аналитические методы, дающие качественную картину

исследуемых параметров. При использовании разнообразных методов численных исследований следует помнить о допущениях, положенных в основу динамических моделей и методов их математического исследования, которые часто являются источником искажений динамической картины, имеющих место в реальной машине. Достоверность полученных результатов оценивается экспериментальной проверкой. Она позволяет обнаружить новые явления, проверить некоторые гипотезы и допущения, а иногда и всю теорию. Эксперимент, ограниченный проверкой некоторых случайных сочетаний параметров, намного беднее теории и его предсказательная возможность весьма ограничена. В эксперименте очень важна руководящая идея, составляющая теоретический стержень исследования [42]. Эксперимент, сводящийся к простому накоплению зависимостей, часто вреден. Например, если не знать ориентировочно собственные частоты системы и изменять в эксперименте угловую скорость входного звена с некоторым шагом, то легко пропустить резонансные зоны и исключить из рассмотрения наиболее опасные динамические режимы. Особую роль при экспериментальном исследовании динамики играет проверка достоверности принятой динамической модели. При этом нет необходимости максимально приближать схему экспериментальной установки к принятой динамической модели. В данном случае необходима идеализация, позволяющая вывить и углубить понимание сущности и взаимосвязи исследуемых параметров.

Целью динамических расчетов является динамический синтез механизмов. Он проводится с использованием математических методов, позволяющих найти оптимальное значение их геометрических, кинематических или динамических параметров.

Эта задача решается для снижения виброактивности механизмов или более эффективного использования колебаний в технологических процессах. Разработка методов оптимизационного динамического синтеза является одной из наиболее важных и актуальных современных проблем динамики машин.

При увеличении вычислительных процедур может возникнуть опасность, связанная с возможностью несоответствия объема числовой информации уровню физического понимания наблюдаемых явлений. Требуется постоянное совершенствование физических представлений об объекте исследования, на основании которых в каждом классе машин может быть создана определенная система динамических моделей, разработаны инженерные оценки и другие методы, способствующие исключению ошибок.

Переход от реальной системы к физической модели состоит в выделении тех особенностей и свойств, которые представляются наиболее существенными, и в отбрасывании несущественных, восторстепенных деталей.

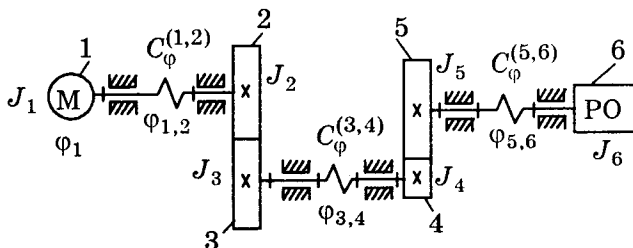


Рис.8.17. Одномерная цепная динамическая модель с жесткими вращающимися звеньями: 1 — приводной двигатель, 2, 3, 4, 5 — промежуточные зубчатые передачи, 6 — рабочий орган машины

Из-за неизбежных расхождений между реальной схемой и идеальной моделью действительные законы движения входных звеньев отличаются от идеальных. Расхождения между действительными и идеальными законами движения называются динамическими ошибками.

Определение (или приближенная оценка) динамических ошибок является одной из основных задач динамического анализа машин. Для расчетной оценки динамических ошибок используются более сложные динамические модели, учитывающие влияние нагрузки на угловую скорость двигателя, ошибки в изготовлении звеньев, податливость звеньев, наличие зазоров в кинематических парах и т.п.

8.6. Примеры типовых динамических моделей механических систем машин

Составление динамической модели требует выявления входных звеньев, связанных с приводными двигателями, и выходных звеньев, связанных с рабочим органом, при этом выделяются передаточные механизмы привода и исполнительный механизм. Такой анализ структуры машины и ее кинематической схемы использован нами ранее для составления динамической модели машин с жесткими (недеформируемыми) звеньями. В этом случае машина с одной степенью подвижности обладает одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выбирается угол φ поворота главного приводного вала или ротора электродвигателя. Определению подлежат в данном случае обобщенные скорость $\dot{\varphi}$ и ускорение $\ddot{\varphi}$ при заданных силах движущих и сопротивления, или же определяется приведенный момент сил движущих (обобщенная сила) при заданных законах изменения обобщенной скорости $\dot{\varphi}(\varphi)$ или $\dot{\varphi}(t)$.

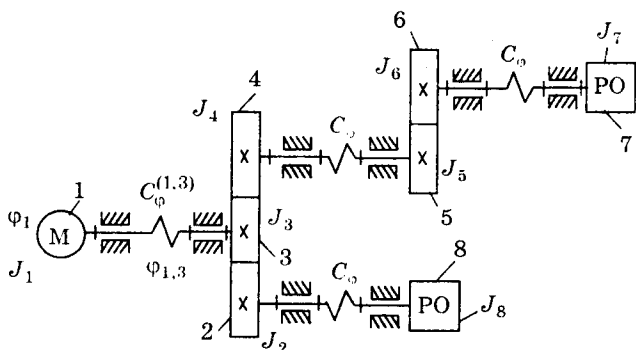


Рис.8.18. Разветвленная одномерная цепная динамическая модель машины с пятью степенями свободы и одной степенью подвижности

Решение задач динамики требует использования более сложных динамических моделей, учитывающих деформации звеньев и кинематических пар, наличие в них зазоров и т.п. В такой упругой машине число степеней свободы превышает число степеней подвижности. Дополнительные обобщенные координаты отражают деформацию звеньев.

Наиболее простой динамической моделью машины в такой постановке может быть система абсолютно твердых тел, соединенных между собой безынерционными упруго-диссипативными элементами. Если при этом каждое из твердых тел из-за наложенных связей обладает одной степенью свободы, модель называют одномерной [25]. На рис.8.17 представлена динамическая модель машины, учитывающая только крутильную податливость (жесткость) валов, при этом ротор двигателя 1, зубчатые колеса 2, 3, 4, 5 и исполнительный орган 6 рассматриваются как абсолютно жесткие тела, вращающиеся вокруг неподвижных осей. Податливость соединений звеньев 2, 3, 4, 5 (податливость зубьев передач) также не учитывается. Такая модель имеет четыре степени свободы при одной степени подвижности (φ_1). К податливости зубьев передач 2, 3 и 4,5 добавляются еще две степени свободы, учитывающие суммарные деформации зубьев в точках их контакта (высших кинематических парах). Элементами одномерной модели являются также и исполнительные механизмы с жесткими звеньями и одной степенью подвижности. В рассмотренном примере все звенья (твердые тела) машины соединены последовательно упругими элементами, расположенными между ними. Такие модели называют цепными.

На рис.8.18 представлена цепная разветвленная одномерная модель. В этом случае приводной двигатель 1 приводит в движение два рабочих органа 7 и 8. Модель описывается пятью обобщенными координатами.

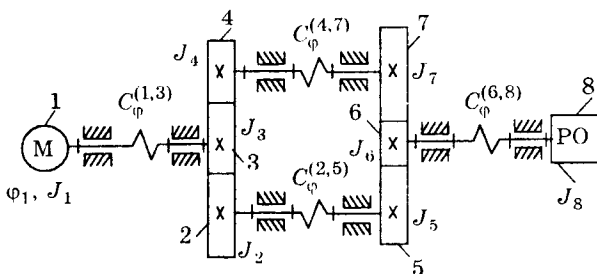


Рис.8.19. Замкнутая одномерная цепная динамическая модель машины с пятью степенями свободы и одной степенью подвижности

В станках с числовым программным управлением, прецизионном технологическом оборудовании и средствах автоматизации используются беззазорные редукторы. Выборка зазоров обеспечивается созданием предварительного натяга за счет введения дополнительных зубчатых передач с упругими звеньями, обеспечивающими гарантированное двустороннее касание зубьев при реверсе. Динамическая модель машины с таким приводом показана на рис.8.19, в отличие от модели на рис.8.18 последняя является замкнутой.

Если в динамическую модель механической системы машины введено звено, имеющее более одной степени свободы, то такую модель называют многомерной.

Одномерные модели на рис.8.17...8.19 будут многомерными, если, например, учесть податливость опор валов (подшипниковых узлов). Поскольку каждое твердое тело обладает шестью степенями подвижности в пространстве, то количество степеней свободы (количество обобщенных координат) резко возрастает с увеличением количества податливых кинематических пар.

Рассмотренные динамические модели называют дискретными в связи с тем, что они включают абсолютно твердые звенья и безынерционные упругие связи. Иногда приходится учитывать инерционность упругих связей. Динамические модели на рис.8.17...8.19 будут моделями с распределенными параметрами сил, если учесть массы (моменты инерции) валов или деформируемость звеньев 1, 2 и т.д. В системах с распределенными параметрами "деформационные" обобщенные координаты упругоинерционных элементов вводятся как непрерывные функции геометрических координат материальных точек.

8.7. Особенности программного управления движением машин

Программное управление предусматривает реализацию такого закона движения звеньев машин, который обеспечивает сохранение требуемых параметров качества выполняемого процесса при

заданной производительности. В основе рациональности той или иной системы управления лежат требования экономической целесообразности достижения и поддержания точности, долговечности, быстродействия и других критериев работоспособности. Однако в любом случае "проигрывание" того или иного варианта требует исследования движения и динамической нагруженности передаточных и исполнительных механизмов машины с использованием динамических моделей. При динамическом анализе и синтезе машин необходимо учитывать свойства систем управления, образующих с двигателем и механизмами машины единую динамическую систему. Наибольшее распространение получили системы управления с обратной связью, реализующие управление по отклонению. Задающие устройства системы программного управления, преобразующие сигналы u_n , записанные на программоносителе (перфоленте, перфокарте, магнитной ленте и т.п.), в управляющие сигналы u_y , являются автономными преобразующими устройствами (ПУ) и в динамической модели машины автомата не учитываются. На рис.8.20 приведена структурная схема СУ машинным агрегатом, включающим двигатель (Д), передаточные механизмы (ПМ), исполнительный механизм (ИМ) и рабочий орган (РО). Автоматическое управление предусматривает поддержание выходной координаты РО в заданных пределах. С этой целью на выходе производится сравнение действительного перемещения s_d РО с программным (требуемым) s_n . Преобразующее устройство (ПУ) производит сравнение этих сигналов, и преобразованный сигнал ошибки $\psi_s = s_d - s_n$ подается на вход устройства отрицательной обратной связи (УОС), далее преобразованный сигнал Δu суммируется с программным сигналом u_n и, скорректированный, подается на вход двигателя (Д). В зависимости от требуемого характера программного закона движения РО различают системы стабилизации скорости и системы стабилизации перемещения РО. Первые называются системами контурного управления, в них задается функция перемещения $s_n(t)$ от времени, вторые — системами позиционирования, в них требуется поддержание величины перемещения постоянной: $s_n = \text{const}$. Часто в таких системах обратной связью охватывается только двигатель (рис.8.21), при этом на УОС поступает сигнал $\psi_\phi = \phi_d - \phi_n$ ошибки действительного угла ϕ_d поворота ротора двигателя в сравнении с программным ϕ_n (требуемым). После преобразования сигнал Δu , пропорциональный ψ , подается на преобразующее устройство ПУ на входе двигателя.

Целью управления в данном случае является поддержание постоянства скорости в условиях меняющихся нагрузок. Технически это реализуется, например, путем обеспечения постоянства

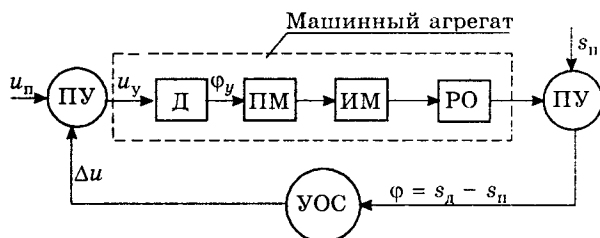


Рис.8.20. Структурная схема системы управления с обратной связью рабочего органа с выходом на двигатель

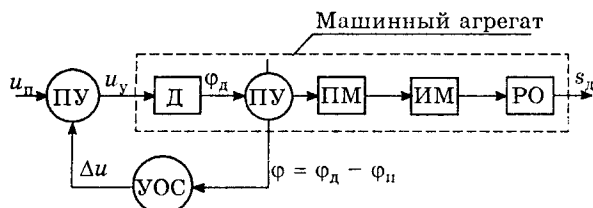


Рис.8.21. Структурная схема системы управления с обратной связью, охватывающей приводной двигатель

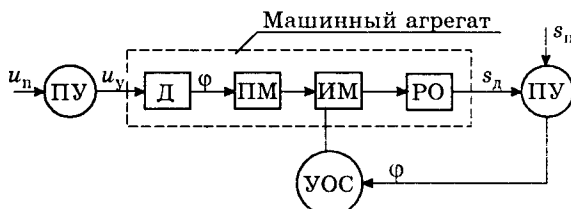


Рис.8.22. Структурная схема системы силового управления

частоты переменного тока, создаваемого вращением генератора, при изменении потребляемой мощности. В этом случае часто используется тахометрическая обратная связь. В общем случае требуется обеспечить заданную программу изменения скорости в каждой точке траектории в сочетании с минимальной погрешностью позиционирования в этих точках траектории. Выполнение этих требований приводит к необходимости управления либо в течение всего процесса перемещения, либо на участке, близком к точке позиционирования, то есть при малых значениях.

Обратная связь может быть реализована таким образом, что сигнал ошибки $\psi_s = s_d - s_{II}$ используется для формирования обобщенной силы (M_n^A) — приведенного момента сил движущих, приложенных непосредственно к главному приводному валу машины, на котором располагается входное звено исполнительного механизма. Действие этой силы (момента) приводит к уменьшению

отклонения величины $M_n^A(\varphi)$ от номинальной, определенной по методике, изложенной во второй части пособия. Силу u на выходе из УОС (рис.8.22) называют управляющим воздействием. Различают пассивные и активные системы с силовым управлением. В пассивных системах для формирования управления используются механические элементы (инерционные, упругие или диссипативные). Примером пассивной системы с силовым управлением может служить маховик, обеспечивающий выравнивание (уменьшение неравномерности вращения) скорости приводного вала машины за счет перекачки накопленной кинетической энергии. Эту же функцию выполняют передаточные механизмы машины с постоянным передаточным отношением (в основном шестерни и валы, редукторы, ременные передачи и т.п.). Другими примерами пассивных систем могут служить динамический гаситель колебаний и демпфер [43].

Активное силовое управление создается за счет дополнительного источника энергии. Формирование управляющего силового воздействия может осуществляться электромагнитными, электромеханическими, гидравлическими, пневматическими исполнительными устройствами. Например, повышение точности позиционирования (уменьшение погрешности ψ_s) может быть достигнуто путем торможения РО при подходе к требуемому участку точки траектории, то есть путем уменьшения скорости.

Уменьшение скорости при торможении может быть достигнуто и без затрат дополнительной энергии, например, за счет сжатия упругого элемента. Здесь накопленная кинетическая энергия переходит в потенциальную, измеряемую работой упругих сил, которая может быть использована для уменьшения энергозатрат при разгоне.

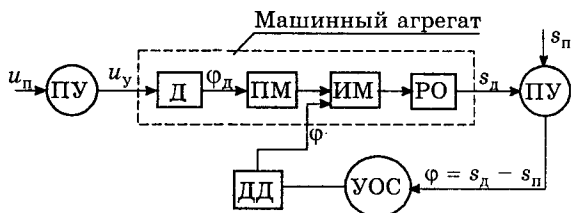


Рис.8.23. Структурная схема системы кинематического управления

В случае применения системы управления с кинематическим торможением механическая система машины должна обладать дополнительной подвижностью. Использование дополнительного двигателя (ДД) (рис.8.23) обеспечивает в данном случае требуемое изменение координаты φ (угла поворота приводного вала) машины по сигналу ошибки (рассогласования) ψ_s требуемого (программного) s_n и действительного s_d перемещений РО. Сложе-

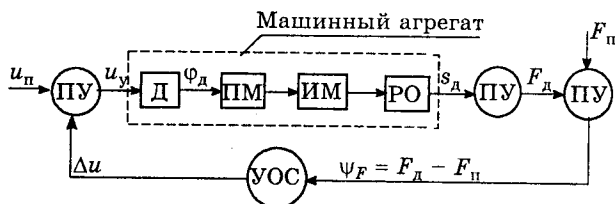


Рис.8.24. Структурная схема системы управления на входе двигателя по силовому рассогласованию

ние дополнительного и основного углов приводит к компенсации рассогласовывания. Такие системы обеспечивают довольно точное позиционирование РО машины. Сложные движения осуществляются обычно дифференциальными механизмами, которые используются в данном случае как суммирующие алгебраически два движения на входе и одно, результирующее, на выходе.

Кроме рассмотренных систем управления по отклонению истинных перемещений от требуемых, используют также и системы управления по возмущению, вызванному рассогласованием сил. В этом случае действительное перемещение s_d с помощью ПУ преобразуются в сигнал, фиксирующий действительное значение силы F_d , приложенной к РО. В другом ПУ (рис.8.24) производится сравнение этой силы с программной силой F_n , определяемой условиями технологического процесса. Сигнал рассогласовывания $\psi_F = F_d - F_n$ поступает на УОС, которое вырабатывает сигнал Δu , пропорциональный ψ и воздействующий на вход двигателя. Скорость его при этом меняется. Это вызывает изменение силы F_d (приближение ее значения к программному F_n) и уменьшение сигнала ψ_F рассогласовывания. Такая СУ используется в металлообрабатывающих станках, где сила резания определяется скоростью перемещения, например, резца.

Для повышения надежности СУ и точности технологических машин в условиях повышения рабочих скоростей и нагрузок возникает необходимость увеличения числа наблюдаемых (фиксируемых) параметров. Здесь следует иметь в виду, что элементы СУ вносят собственные динамические ошибки. В этом плане перспективным является переход от аналоговых устройств СУ к микропроцессорам. Усложнение алгоритма управления в этом случае приводит лишь к усложнению программы. В этом случае технически легче реализуют идеи оптимизации и адаптации (самоприспособления) упругой системы к изменяющимся силовым и скоростным режимами эксплуатации. Повышается надежность, уменьшается потребляемая мощность, габариты и массы звеньев СУ.

Недостатком СУ с микропроцессорами является большая длительность расчета по заданному алгоритму, а также увеличе-

ние времени, необходимого для аналого-цифрового преобразования сигналов на входе микропроцессора и цифро-аналогового преобразования выходного сигнала.

В любом случае требуется приложение механического воздействия, соизмеримого с действующими возмущениями. Поэтому для компенсации возмущающих сил необходимо прикладывать управляющее воздействие максимально близко к зонам возмущений. В противном случае участки кинематических цепей подвергаются дополнительным динамическим воздействиям, ухудшающим точностные и прочностные характеристики машины. Здесь перспективным является расчленение функций управления, когда приводной двигатель получает сигналы программного управления, а управляющее воздействие устройства обратной связи реализуется с помощью дополнительных устройств, действующих на звенья, подвергающиеся возмущениям. Таким образом, эффективность систем управления технологическим оборудованием требует учета и согласованности силового нагружения и кинематических характеристик как передаточных и исполнительных приводов между собой и выполняемым рабочим процессом. Это означает, что на первом уровне схемного проектирования машинного агрегата (проектирования его компоновочной схемы) следует предусматривать реализацию закона движения его звеньев, осуществление которого обеспечивает качественное выполнение конкретного рабочего процесса. Такое оптимальное программное управление (поддержание в требуемых диапазонах законов изменения сил, скоростей и т.п.) обеспечивается как выбором механической характеристики двигателя и привода в целом, так и свойствами функциональных частей, определяемыми характером соединений подвижных звеньев машины. Следует отметить, что задачей динамического анализа является не только определение динамических ошибок и динамических нагрузок, но и выявление способов их уменьшения и также способов поддержания в требуемых диапазонах. В этом смысле задачи динамического анализа переплетаются с задачами синтеза систем управления. Часто улучшение качества динамических процессов, происходящих в машине, достигается подбором параметров механической системы (передаточных и исполнительных механизмов) и двигателя. В других случаях эффект может быть достигнут при введении СУ с обратными связями. Во многих случаях можно допустить существенные динамические ошибки, если ввести в машину необходимые регулирующие устройства. Особую эффективность такие конструкторские решения имеют для цикловых машин, работающих в режиме установившегося движения.

Следует учитывать эффективность уменьшения динамических нагрузок за счет управления (изменения) отдельных состав-

ляющих приведенных моментов движущих сил. В каждом отдельном случае эффективность того или иного решения определяется степенью влияния массовых характеристик, в частности, приведенного момента инерции (его постоянной и переменной составляющих), закона изменения обобщенной скорости или сил технологического сопротивления, сил трения и т.п. на величину и знак приведенного момента сил движущих. В некоторых случаях эффективным является введение специальных механизмов, обеспечивающих выравнивание внутри цикла переменных сил сопротивления. Введение таких разгрузателей [42], например, в виде кулачковых механизмов, снижает внутреннюю виброактивность, то есть уменьшает колебания угловой скорости приводного вала. Однако такое решение приводит к дополнительным нагрузкам на корпус машины. Разгрузатель может рассматриваться как устройство программного силового управления без обратной связи.

8.8. Приведение упругих и диссипативных связей

В предыдущих разделах учитывалась жесткость (упругость) в виде линейной пружины. При рассмотрении нескольких упругих звеньев каждое звено вносит дополнительную степень свободы. Поэтому при исследовании движения механизмов с упругими связями часто пользуются приближенными методами, основанными на приведении жесткостей отдельных звеньев или их соединений.

Приведенным коэффициентом жесткости называют коэффициент жесткости безмассовой пружины, имеющей ту же величину потенциальной энергии, что и заменяемая система упругих связей. При этом учитывается равенство деформаций. Иногда приведенный коэффициент жесткости называют обобщенным или квазиупругим. Величину, обратную коэффициенту жесткости, называют коэффициентом податливости.

При точечном или линейном контакте рабочих поверхностей реальных деталей с ростом нагрузки контактная жесткость увеличивается (уменьшается деформация за счет снижения давления при увеличении фактической площади контакта).

При исследовании малых колебаний, происходящих около некоторого положения равновесия системы, определяемого координатой x_0 , нелинейные упругие характеристики могут быть линеаризованы. Пусть $x = x_0 + \Delta x$, где Δx — малые колебания около положения x_0 . Разлагая функцию $F(x_0 + \Delta x)$ в ряд Тейлора по степеням Δx , имеем

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + F'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}F''(x_0)\Delta x^2 + \dots$$

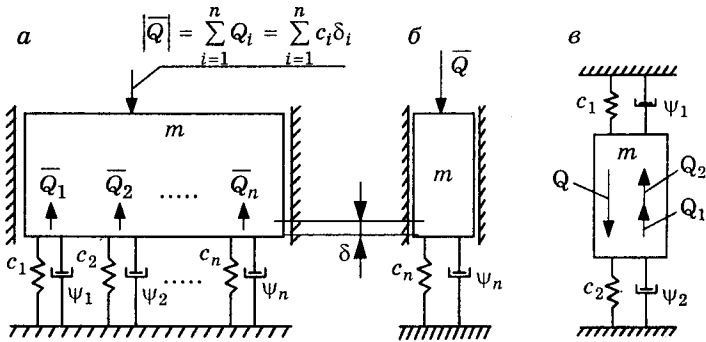


Рис.8.25. К определению приведенного коэффициента жесткости при параллельном соединении отдельных упругих элементов:
а — схема соединения отдельных упругих связей,
б — схема соединения колеблющейся массы с приведенным коэффициентом жесткости, **в** — схема соединения колеблющейся массы с двусторонней упругой связью

или

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + F'(x_0)\Delta x.$$

Здесь

$$F' = \frac{dF}{dx}(x_0) = c_{x_0}.$$

Это означает, что на нелинейной характеристике в окрестности точки мы заменяем кривую отрезком касательной в этой точке. Характеристики, не допускающие такого приема, называются существенно-линейными.

При приведении коэффициентов жесткости следует исходить из условия неизменности потенциальной энергии до и после приведения, учитывая характер соединения отдельных упругих элементов. Из рис.8.25 видно, что для параллельного соединения упругих связей имеет место равенство

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (8.49)$$

Согласно этому условию, схема, представленная на рис.8.25, в, относится к параллельному соединению. При параллельном соединении определяющую роль играют наиболее жесткие элементы. Равенство (8.49) дает соотношение

$$c_{\Pi} \delta = \delta c_1 + \delta c_2 + \delta c_3 + \dots + \delta c_{\Pi} = \delta \sum_{i=1}^n c_i.$$

Из последнего выражения имеем

$$c_{\Pi} = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Для последовательного соединения упругих связей (рис.8.26)

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = \sum_{i=1}^n \delta_i. \quad (8.50)$$

При последовательном соединении упругих элементов определяющую роль играют наиболее податливые элементы. Равенство (8.50) дает

$$\frac{Q}{c_{\Pi}} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} + \frac{Q}{c_3} + \dots + \frac{Q}{c_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}.$$

Из последнего выражения имеем

$$\frac{1}{c_{\Pi}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}, \quad c_{\Pi} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}}.$$

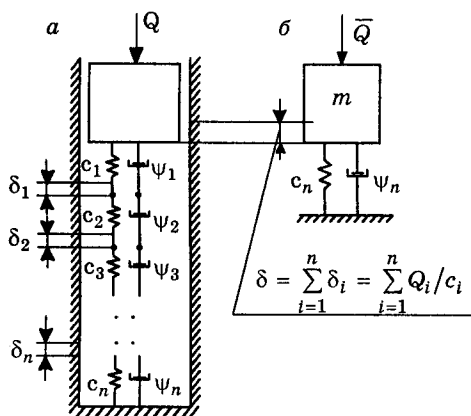


Рис.8.26. К определению приведенного коэффициента жесткости при последовательном соединении упругих элементов: *а* — схема соединения отдельных связей, *б* — схема соединения колеблющейся массы с приведенным коэффициентом жесткости

потенциальной энергии для схемы, изображенной на рис.8.27, *б*, имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{\Pi} (\Delta\varphi)^2.$$

Приравнивая последние выражения, получим $c_{\Pi} = 2c r_2^2$.

Переход размерности $c \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$ в размерность $c_{\Pi} \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2 \right] = |\text{Н} \cdot \text{м}|$ объясняется переходом от линейных деформаций к угловым.

Иногда приведенный коэффициент жесткости имеет не такую размерность, как приводимые коэффициенты жесткости. На рис.8.27 изображены схемы, поясняющие приведение упругих характеристик ременной передачи [12]. Обозначив коэффициент жесткости одной ветви передачи c , представим потенциальную энергию при деформации δ ременной выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} (c\delta^2 + c\delta^2) = c\delta^2.$$

Добавочный угол поворота второго вала вследствие деформации определится соотношением $\Delta\varphi = \delta/r_2$. Выражение по-

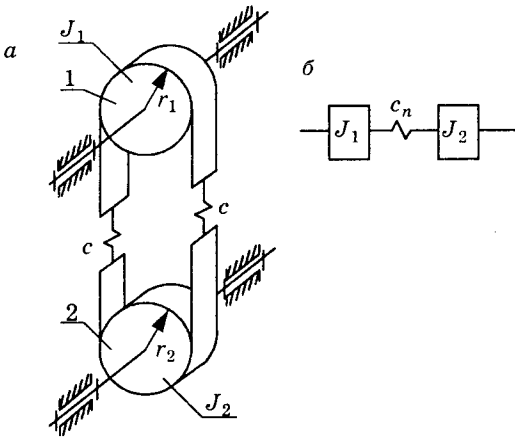


Рис.8.27. К определению приведенного коэффициента жесткости ременной передачи: а — схема упругих связей ременной передачи, б — динамическая модель ременной передачи

са. В реальных механических системах из-за нелинейности диссипативных сил форма петли отличается от эллиптической. В этом случае коэффициент μ определяется из условия равенства площадей реальной петли и петли, получающейся при линейной зависимости от скорости. При отсутствии экспериментальных данных величины μ или $2n = \frac{\mu}{\Pi}$ выбирают, исходя из следующих соображений. При деформации звена или соединений звеньев по гармоническому закону наибольшая потенциальная энергия упругой деформации

$$\Pi_{\max} = \int_0^{x_0} c_{\Pi} x dx = \frac{c_{\Pi} x_0^2}{2}$$

определяется площадью треугольника. Тогда описанный ранее коэффициент рассеяния приблизительно может быть представлен отношением площади петли гистерезиса $S = \pi \mu a^2 p$ к площади треугольника (максимальной потенциальной энергии):

$$\psi = \frac{S}{\Pi_{\max}} = \frac{2\pi\mu p}{c_{\Pi}},$$

откуда

$$\mu = \frac{\psi c_{\Pi}}{2\pi p}, \quad \Pi = \frac{\psi k^2}{4\pi r}.$$

Диссипативные силы зависят от многих случайных факторов (погрешностей изготовления и сборки, величины предварительного натяга и т.п.). Поэтому при введении диссипативных сил в динамическую модель ограничиваются некоторой суммарной оценкой их влияния, полагая, что они могут быть учтены силой сопротивления $R = \mu \dot{x}$, пропорциональной скорости деформирования \dot{x} . В этом случае, как показано ранее, петля гистерезиса принимает форму эллипса.

Для ориентировочных расчетов рекомендуется выбирать коэффициент рассеяния в пределах $0,2 < \psi < 0,6$ [25].

При динамических расчетах коэффициенты диссипации позволяют установить некоторый энергетический эквивалент, учитывающий силы сопротивления. Наиболее эффективный подход в таком случае основан на эквивалентной линеаризации, при которой нелинейная сила сопротивления заменяется линейной при сохранении той же величины рассеянной энергии за один цикл. При этом приведенные коэффициенты поглощения ψ_p определяются также с учетом вида соединения упруго-диссипативных элементов. Так, при параллельном соединении (рис.8.25) для перехода от схемы (рис.8.25, а) к схеме (рис.8.25, б) запишем условие баланса рассеянной энергии:

$$\Psi_{\Pi} = \frac{1}{2} c_{\Pi} \delta^2 = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{1}{2} c_i \delta^2. \quad (8.51)$$

При условии, что $\Pi_i = \frac{1}{2} c_i \delta_i^2$ и $\sum \Pi_i = \frac{1}{2} c_{\Pi} \delta^2$, а также, что при параллельном соединении $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$, выражение (8.51) примет вид

$$\Psi_{\Pi} = \frac{1}{2} c_{\Pi} \delta^2 = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{1}{2} c_i \delta^2,$$

откуда

$$\Psi_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{c_i}{c_{\Pi}}.$$

Для последовательного соединения (рис.8.26) при переходе от схемы (рис.8.26, а) к схеме (рис.8.26, б) на основании аналогичных рассуждений получим

$$\Psi_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{c_{\Pi}}{c_i}.$$

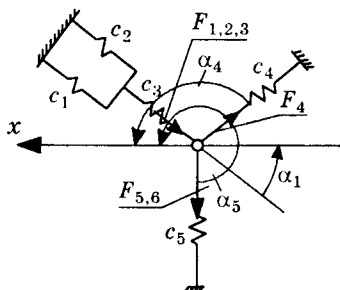


Рис.8.28. Смешанные соединения упругих связей

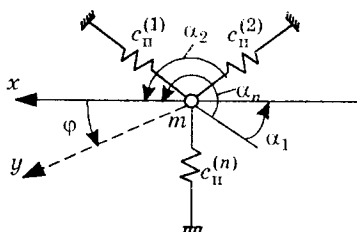


Рис.8.29. К определению единого упругого поля при малых перемещениях

При параллельном соединении величина ψ_{Π} обычно близка к значениям ψ_i , соответствующим наиболее жестким элементам, при последовательном же соединении — к значениям, соответствующим наиболее податливым элементам.

Если твердое тело находится под действием нескольких упругих сил, работающих на растяжение и сжатие (рис.8.28 и 8.29), и требуется вычислить обобщенный коэффициент жесткости в некотором произвольном направлении, то определяют сумму проекций всех упругих сил на это направление. Коэффициент при перемещении равен приведенному или обобщенному коэффициенту жесткости [44]. При малых перемещениях обобщенный коэффициент жесткости определяется по формуле

$$c'_{\Pi} = \sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos^2 \alpha_i, \quad (8.52)$$

где c_{Π}^i — приведенный коэффициент жесткости i -го ответвления, составляющего угол α_i к выбранному перемещению x ; α_i — угол между i -ой силой упругости с учетом приведенных коэффициентов c_{Π}^i и перемещением x ; n — количество ответвлений, то есть количество присоединенных пружин, обладающих приведенными коэффициентами c_{Π}^i жесткости. Формула (8.52) справедлива при малом перемещении груза m из положения равновесия, если в этом положении нет предварительного натяга пружины.

Пример. Определить приведенный коэффициент жесткости при малом перемещении груза m в направлении оси x (рис.8.28).

Для двух пружин с коэффициентом жесткости c_1 и c_2 приведенный коэффициент жесткости равен сумме коэффициентов $c_1 + c_2$. Тогда для трех пружин c_1, c_2, c_3 имеем в направлении α_1

$$\frac{1}{c_{\Pi}^{(\alpha_1)}} = \frac{1}{c_1 + c_2} + \frac{1}{c_3}.$$

Из последнего соотношения имеем

$$c_{\Pi}^{(\alpha_1)} = \frac{c_3(c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Коэффициент жесткости приведенной пружины в направлении угла α_5 получим из выражения

$$\frac{1}{c_{\Pi}^{(\alpha_5)}} = \frac{1}{c_5} + \frac{1}{c_6},$$

откуда

$$c_{\Pi}^{(\alpha_5)} = \frac{c_5 c_6}{c_5 + c_6}.$$

Пользуясь формулой (8.52), находим коэффициент жесткости приведенной пружины при малом перемещении в направлении x :

$$c_{\Pi}^{(x)} = c_{\Pi}^{(\alpha_1)} \cos^2 \alpha_1 + c_4 \cos^2 \alpha_4 + c_{\Pi}^{(\alpha_5)} \cos^2 \alpha_5.$$

Последнее равенство, с учетом полученных соотношений и того, что $\alpha_0 = 270^\circ$ и $\cos \alpha_5 = 0$, дает

$$c_{\Pi}^{(x)} = \frac{c_3(c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3} \cos^2 \alpha_1 + c_4 \cos^2 \alpha_4.$$

Рассмотренный пример указывает на широкие возможности изменения круговой частоты $k_x = \sqrt{c_{\Pi}^{(x)}/m}$ собственных колебаний тела массой m , имеющего упругие связи, показанные на рис.8.28. Это позволяет путем подбора соединений линейных упругих элементов существенно изменить реакцию системы на внешнее возмущающее воздействие в определенном направлении. Здесь возникает еще одна задача, имеющая практическое значение. Определить, при каких соотношениях между $c_{\Pi}^{(i)}$ и α_i обобщенный коэффициент жесткости в любом радиальном направлении будет одинаков при малых перемещениях груза m (рис.8.29). Выберем произвольное направление y под некоторым углом к выбранному ранее направлению x . По формуле (8.52) имеем

$$c_{\Pi}^{\varphi} = \sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos^2(\alpha_i + \varphi).$$

Последнее равенство представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{\Pi}^{\varphi} = & \sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i (\cos^2 \alpha_i \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha_i \sin^2 \varphi) - \\ & - 2 \sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos \alpha_i \sin \alpha_i \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Равенство указывает на то, что приведенный коэффициент жесткости не будет зависеть от величины угла φ , если выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \sin^2 \alpha_i,$$

$$\sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos \alpha_i \sin \alpha_i = 0.$$

Эти два условия представим в виде

$$\sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \cos 2\alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_{\Pi}^i \sin 2\alpha_i = 0.$$

Это означает, что симметричное расположение радиальных упругих связей (трех, четырех и т.д.) одинаковой жесткости образует однородное упругое поле (неизменной жесткости) при малых перемещениях в произвольном направлении.

При конечных перемещениях приведенный коэффициент жесткости зависит от направления перемещения и является функцией величины перемещения.

На рис.8.30, а представлена схема соединения пружин одинаковой жесткости c и длины l в равновесном состоянии. При этом пружины предварительно растянуты на величину Δ , длина нерастянутой пружины l_0 . На рис.8.30, б представлена схема сил упругости при конечном перемещении точки m на величину x . В этом случае первая сила по модулю равна

$$F_1 = c(\delta l + \Delta),$$

где δl — удлинение пружины вследствие перемещения точки. Из рис.8.30, б находим

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l.$$

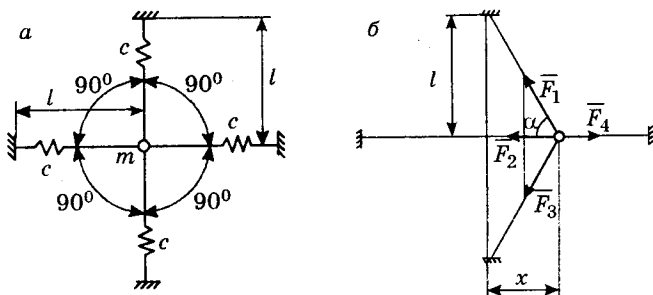


Рис.8.30. К определению приведенного коэффициента жесткости при смешанном соединении упругих связей и конечном перемещении:

а — схема соединения упругих связей,

б — схема сил упругости при конечном перемещении

Проекция силы F_1 на ось x дает

$$F_1^x = F_1 \cos \alpha = -c(\sqrt{l^2 + x^2} - l + \Delta) \cos \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

Окончательно для F_1^x и, вследствие симметрии, для F_3^x получим

$$F_1^x = F_3^x = -cx \left(1 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right).$$

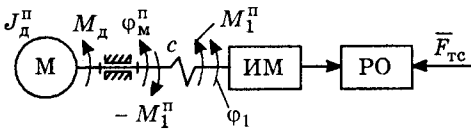


Рис.8.31. Динамическая модель машины с упругим передаточным механизмом

Проекции сил F_2 и F_4 на ось x определяются выражениями

$$F_2^x = -c(x - \Delta),$$

$$F_4^x = -c(x + \Delta).$$

В этом случае (рис.8.30, б) на точку вдоль

оси x действует сила, равная

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_k = -2cx \left(1 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right) - 2cx = -2cx \left(2 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right).$$

Дифференциальное уравнение движения точки массой m в направлении оси x имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x.$$

Как видно, в данном случае восстанавливающая сила не равна sx . Рассмотренный пример показывает, что напряженное состояние системы (рис.8.30, а) в направлении x определяется приведенным коэффициентом жесткости

$$c_x = \frac{dF_x}{dx} = -2c \left[2 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}} + \frac{(l - \Delta)x^2}{(l^2 + x^2)\sqrt{l^2 + x^2}} \right].$$

8.9. Динамические и математические модели машин с учетом упругости звеньев передаточных механизмов

Примером динамической модели машинного агрегата с упругими звеньями передаточных механизмов может быть схема, представленная на рис.8.31. Механические системы двигателя (М) и исполнительного механизма (ИМ), включая рабочий орган (РО), рассматриваются как механизмы с жесткими звеньями, имеющими одну степень подвижности. В качестве звена приведения принимаем вал двигателя. Между валом двигателя и входным валом исполнительного механизма установлена упругая безынерционная связь жесткостью c с диссипативным элементом, учитывающим наличие силы сопротивления $R = -\mu\dot{\theta}$, пропорциональной скорости $\dot{\theta}$ поворота вала двигателя относительно вала ИМ. В качестве обобщенных координат выбираются угол φ_d поворота ротора двигателя и приведенный к валу двигателя угол $\varphi_M^п$ поворота входного звена ИМ:

$$\varphi_M^п = \varphi_1 \frac{\omega_1}{\omega_d} = \varphi_1 i_{1-d}, \quad (8.53)$$

где φ_1 — угол поворота входного звена ИМ;

ω_d, ω_1 — скорости вращения ротора двигателя и входного вала ИМ (кривошипа). Относительный поворот вала двигателя (приведенная к валу двигателя деформация вала передаточного механизма) определяется соотношением

$$\theta = \varphi_d = \varphi_M^{\Pi}. \quad (8.54)$$

В соответствии с принятыми допущениями о жесткости и демпфировании передаточного механизма момент, возникающий в передаточном механизме и приложенный к ИМ, определится выражением

$$M_1^{\Pi} = c\theta - \mu\dot{\theta},$$

которое, с учетом зависимостей (8.53) и (8.54), примет вид

$$M_1^{\Pi} = c(\varphi_d - \varphi_1 i_{1-d}) + \mu(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_1 i_{1-d}).$$

Момент M_1^{Π} является движущим для ИМ, он приложен к входному звену 1 ИМ (кривошипу). Он же является моментом сопротивления для двигателя и приложен к ротору двигателя. С учетом этого уравнения для динамической модели, представленной на рис.8.31, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_d^{\Pi} \ddot{\varphi}_d + \frac{dJ_d^{\Pi}}{d\varphi_d} \cdot \frac{\dot{\varphi}_d^2}{2} &= M_d - M_1^{\Pi}, \\ J_{\text{ИМ}}^{\Pi} \ddot{\varphi}_M^{\Pi} + \frac{dJ_{\text{ИМ}}^{\Pi}}{d\varphi_M^{\Pi}} \cdot \frac{(\dot{\varphi}_M^{\Pi})^2}{2} &= M_1^{\Pi} + M_c^{\Pi}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

В уравнениях (8.55) J_d^{Π} — приведенный момент инерции передаточных механизмов к валу двигателя, равный

$$J_d^{\Pi} = J_{\text{рз}} + J_{\text{и}}^{\Pi},$$

где $J_{\text{рз}}$ — момент инерции ротора электродвигателя;

$J_{\text{и}}^{\Pi}$ — приведенный момент инерции исполнительного механизма, приведенный к входному звену (к валу кривошипа);

M_c^{Π} — приведенный к валу кривошипа момент сил полезного (технологического) сопротивления и вредных сил (трения).

Если $F_{\text{тс}}$ — сила технологического сопротивления (см. рис.8.31), то приведенный от нее момент имеет вид

$$M_c^{\Pi} = F_{\text{тс}} i_{\text{вых-вх}},$$

где $i_{\text{вых-вх}}$ — передаточное отношение (отношение скоростей) точки приложения силы $F_{\text{тс}}$ к скорости входного звена.

Уравнения (8.55) могут быть использованы для решения двух задач. Одна из них имеет целью определение закона измене-

ния крутящего момента M_d на валу приводного двигателя при заданных законах изменения обобщенных скоростей $\dot{\varphi}_d(\varphi_d)$ и $\dot{\varphi}_M^{\Pi}(\varphi_1)$. Вторая задача предусматривает определение законов изменения обобщенных ускорений $\ddot{\varphi}_d(\varphi_d)$, $\ddot{\varphi}_M^{\Pi}(\varphi_1)$ и скоростей $\dot{\varphi}_d(\varphi_d)$, $\dot{\varphi}_M^{\Pi}(\varphi_1)$ в функции обобщенных координат φ_d и φ_1 . Конечной целью второй задачи является определение законов изменения обобщенных координат в функции времени t , то есть определение функций $\varphi_d = \varphi_d(t)$ и $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ с помощью соотношений $\dot{\varphi}_d = d\varphi_d/dt$ и $\dot{\varphi}_M^{\Pi} = d\varphi_M^{\Pi}/dt$. В этом случае первое уравнение системы (8.55) требует некоторого дополнения, связанного с функцией M_d . При идеальной кинематической характеристике двигателя, наиболее грубо описывающей его свойства, скорость выходного звена (линейная или угловая) зависит только от величины входного воздействия (момента или силы), то есть $\dot{\varphi}_d = f(u)$ или $\dot{s}_d = f(u)$. Такое допущение делается на первых этапах проектирования машины, когда известен тип двигателя и необходимо ориентировочно определить его мощность. Такое допущение приемлемо также и в случае использования "жестких" характеристик двигателей, для которых влияние крутящего момента на валу можно считать несущественным. В этом случае движущий момент (сила) не зависит от скорости и определяется только величиной входного воздействия $M_d = M_d(u)$ или $F_d = F_d(u)$. Такая характеристика может быть принята для малых двигателей, в которых влиянием скорости на движущий момент (силу) можно пренебречь. В более общем случае следует учитывать зависимость скорости двигателя от обобщенной силы (приведенного момента). Такая статическая характеристика, например, для электродвигателя имеет вид $\dot{\varphi}_d = f(u, M_d)$, где M_d определяется из первого уравнения системы (8.55). Статические характеристики двигателей отражают зависимости между постоянной движущей силой (моментом) и постоянной скоростью выходного звена при постоянном значении величины входного воздействия.

Инерционность процессов в двигателях (электрических, гидравлических, пневматических) требует учета значения скорости выходного звена не только от мгновенного значения нагрузки. Здесь требуется учитывать и закон изменения нагрузки в течение некоторого предшествующего интервала времени. В некотором приближении это может быть учтено введением в характеристику двигателя производной движущей силы (момента) по времени.

Тогда в общем случае обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ или \dot{s} определяются функциями

$$v = \dot{s} = f(u, Q + \tau_0 \dot{Q}, s),$$

$$\dot{\varphi} = \omega = f(u, M + \tau_M \dot{M}, \varphi).$$

Последние выражения можно представить в виде

$$\tau_0 \dot{Q} + Q = f(u, \dot{s}, s),$$

$$\tau_M \dot{M}_д + M_д = f(u, \dot{\varphi}, \varphi). \quad (8.56)$$

В динамических характеристиках двигателей (8.56) параметр τ_M называют постоянной времени двигателя [25]. Уравнения (8.56) отражают наиболее общий случай, когда в двигателях используются механизмы с нелинейными функциями положения, например, поршневой двигатель внутреннего сгорания на основе кривошипно-ползунного механизма. В случае отсутствия зависимости выходной координаты от входной выражения (8.56) принимают более простой вид:

$$\tau_0 \dot{Q} + Q = f(u, \dot{s}),$$

$$\tau_M \dot{M}_д + M_д = f(u, \dot{\varphi}).$$

Для асинхронных электродвигателей выражения (8.57) могут быть использованы только в процессе анализа такого движения, при котором $M_д(t)$ изменяется в незначительных пределах, то есть когда $\tau_M \dot{M}_д \ll M_д$.

8.10. Моделирование внешнего возмущающего воздействия в рычажных механизмах

Кроме внешнего воздействия со стороны выходного звена исполнительного механизма и приводного момента, приложенного к входному звену механизма, существенное влияние оказывают инерционные нагрузки. Силы и моменты сил инерции отдельных звеньев во многом определяют колебания таких механизмов и оказывают влияние на работоспособность самой машины и оборудования, расположенного на одном с ней фундаменте. Проблемы виброзащиты таких механизмов и машин от колебаний другого оборудования связаны с уравновешиванием инерционных нагрузок отдельных звеньев и механизмов в целом. Как известно, внешнее воздействие на опоры определяется как силами, так и моментами сил инерции. Таким образом, и крутильные колебания, рассмотренные ранее, и линейные колебания зависят от силовой и моментной неуравновешенности. Другими словами, неуравновешенность механизмов проявляется в изменении реактивных сил и моментов в функции обобщенных координат,

в изменении этих сил и моментов по величине и по направлению. Поэтому для выявления характера изменения векторов реактивных сил и моментов необходимо рассматривать изменение их составляющих на оси некоторых систем координат. Такой подход требует анализа взаимовлияния кинематических, геометрических и массовых характеристик на величину и направление главного вектора сил инерции и главного момента. Эта взаимосвязь прослеживается при анализе траектории центра масс механизма и закона его движения вдоль траектории. Иными словами, решение задачи об исследовании характера изменения реактивных сил и моментов может быть получено при использовании некоторой динамической модели механизма, для которой в качестве математической модели были бы пригодны известные уравнения теоретической механики.

На рис.8.32 представлена схема механизма с тремя подвижными звеньями. В качестве обобщенной координаты принят угол φ_1 поворота звена 1. Вектор $m\bar{l}_{AS}$ определяет положение точки S , совпадающей с центром масс всего механизма, в системе координат xuz . Как известно [2], величина и направление этого вектора определяются для рассматриваемого случая из векторного равенства

$$m\bar{l}_{AS} = \sum_{i=1}^3 m_i \bar{l}_{AS_i} = m_1 \bar{l}_{AS_1} + m_2 \bar{l}_{AS_2} + m_3 \bar{l}_{AS_3}. \quad (8.58)$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3.$$

Из рис.8.32 видно, что векторы $m_2 \bar{l}_{AS_2} = m_2 (\bar{l}_1 + \bar{l}_{BS_2})$ и $m_3 \bar{l}_{AS_3} = m_3 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{CS_3})$, а также то, что векторы $m_1 \bar{l}_{AS_1}$ и $m_3 \bar{l}_{AS_3}$ коллинеарны векторам $l_1 S_1 l_2$ и $m_2 l_{BS_2}$. Поэтому годограф вектора $m\bar{l}_{AS}$ зависит от положения звеньев и их масс. Величины масс каждого звена механизма удобно анализировать из рассмотрения уравнения (8.58), записанного в виде

$$\bar{l}_{AS} = k_1 \bar{l}_{AS_1} + k_2 \bar{l}_{AS_2} + k_3 \bar{l}_{AS_3}, \quad (8.59)$$

где

$$k_1 = \frac{m_1}{m}, \quad k_2 = \frac{m_2}{m}, \quad k_3 = \frac{m_3}{m}.$$

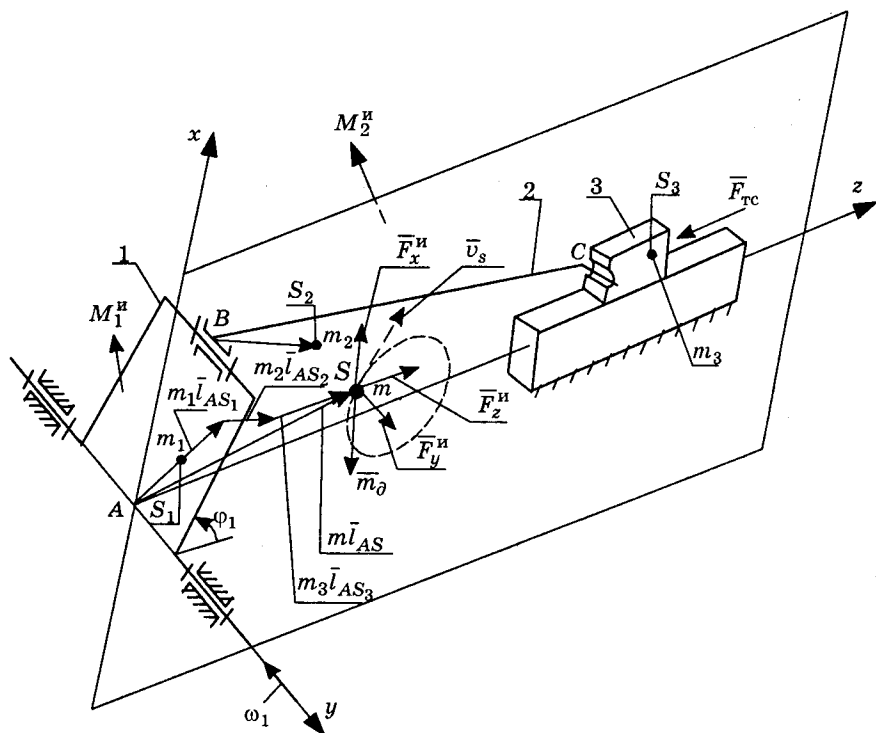


Рис.8.32. Пространственная схема динамических нагрузок механизма

Таким образом, главный вектор $\bar{F}_s^и = -m\bar{a}_s$ сил инерции механизма определяется силами инерции точки S , которая движется по траектории, описываемой уравнением (8.59). Его величина и направление определяются законом движения точки S , совпадающей с центром масс всего механизма. Такое моделирование суммарного воздействия сил инерции отдельных звеньев представляет возможность свести динамическую задачу к кинематике точки и переход к динамике осуществить путем простого перемножения суммарной массы m подвижных звеньев механизма на ускорение a_s точки S . Однако приведенная на рис.8.32 динамическая модель механизма отражает только особенности поступательного движения звеньев 1, 2, 3 как некоторых точек, в которых сосредоточены их массы m_1, m_2, m_3 .

Как известно, связь между распределением масс по объему некоторого твердого тела, вращающегося со скоростью $\bar{\omega}$, и моментом инерции определяется кинетическим моментом

$$L_1 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i),$$

то есть векторной суммой моментов количеств движения всех его точек относительно некоторой точки O . Кинетический момент может быть записан как $\bar{L}_0 = [J_0] \bar{\omega}$, где $[J_0]$ — тензор инерции тела относительно точки O , жестко связанной с этим телом [21]. Тогда динамический момент \bar{M}_0 , учитывающий особенности распределения масс и изменения скорости, в векторной форме запишется в виде

$$-\bar{M}_0 = [J_0] \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0.$$

Как отмечалось ранее, адекватность динамической модели реальной механической системе требует равенства их кинетических энергий, так что для рассматриваемого примера требуется выполнение равенства кинетических энергий в поступательном движении $T_{\text{п}}$ и во вращательном $T_{\text{вр}}$.

$$T_{\text{п}} = \frac{1}{2} m v_3^2,$$

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{L}_0^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{\omega}_i [J_0]^i \bar{\omega}_i,$$

Главный момент инерционных сил для механизма определяется векторной суммой динамических моментов отдельных его звеньев, вращающихся относительно центра масс с абсолютной скоростью $\bar{\omega}_i$. Тогда внешнее воздействие на опоры механизма определится главным вектором \bar{F}_S и главным моментом \bar{M} .

$$\bar{F}_S = -m \bar{a}_S,$$

$$\bar{M} = - \sum_{i=1}^n \left\{ [J_0^i] \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times [J_0^i] \bar{\omega}_i \right\}. \quad (8.60)$$

Запись уравнений (8.60) в координатной форме позволяет судить о том, является ли механизм, плоский с точки зрения кинематики, плоским с точки зрения его динамических реакций. Механизм, представленный на рис.8.32, будет плоским, если проекции главного вектора сил инерции $F_S^y = 0$ и проекции главного момента $M_y = 0$. Кроме того, проекция силы технологического сопротивления $F_{\text{тс}} = 0$, то есть вектор $\bar{F}_{\text{тс}}$ должен располагаться также в плоскости xz . В этом случае механизм, представленный на рис.8.32, является плоским с кинематической и силовой (динамической) точки зрения.

Таким образом, распределение масс в объеме каждого звена во многом определяет характер внешнего воздействия на опоры, в особенности для высокоскоростных механизмов. В зависимости от движения звеньев (вращательное, поступательное, составное) влияние распределения масс по объему звена будет различным.

Поступательное движение i -го звена массы m_i можно представить (смоделировать) движением точки m_i со скоростью \bar{v}_i , в которой сосредоточена вся масса звена, так как в поступательном движении скорости всех точек одинаковы. В этом случае движение общего центра масс зависит только от координат (вектора \bar{l}_{CS_3}) центра масс S_3 этого звена в системе координат, жестко связанной с этим звеном (см. рис.8.32). Динамику вращательного движения звена не удастся представить так просто. Здесь требуется учитывать распределение масс как относительно осей, жестко связанных с телом, так и относительно плоскостей, образованных этими осями, то есть требуется учитывать значения и осевых моментов инерции J_x , J_y и J_z , и центробежных $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$.

При пространственном движении звеньев приходится учитывать расположение центра масс и распределение масс по объему.

Таким образом, плоским с точки зрения кинематики будет механизм, у которого векторы угловых скоростей звеньев $\bar{\omega}_i$ всегда остаются перпендикулярными векторам скорости \bar{v}_{S_i} их центров масс. Такие механизмы могут быть отнесены к плоским с точки зрения распределения сил инерции только в случае, если центробежные моменты инерции их звеньев будут равны нулю относительно соответствующих осей. На рис.8.33 представлена схема, поясняющая положение центра масс плоского механизма в зависимости от обобщенной координаты φ . Из рис.8.33 видно, что уравнение (8.59) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{l}_{AS} &= k_1 \bar{l}_{AS_1} + k_2 (\bar{l}_1 + \bar{l}_{BS_2}) + k_3 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3) = \\ &= \left(\frac{1}{a} k_1 + k_2 + k_3 \right) \bar{l}_1 + \left(\frac{1}{b} k_2 + k_3 \right) \bar{l}_2 + k_3 \bar{l}_3. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{l_1}{l_{AS}}, \quad b = \frac{l_2}{l_{BS_2}}, \quad D = \frac{m_3}{m} = k_3,$$

$$A = \frac{\frac{m_1}{a} + m_2 + m_3}{m}, \quad B = \frac{\frac{m_2}{b} + m_3}{m}.$$

(8.61)

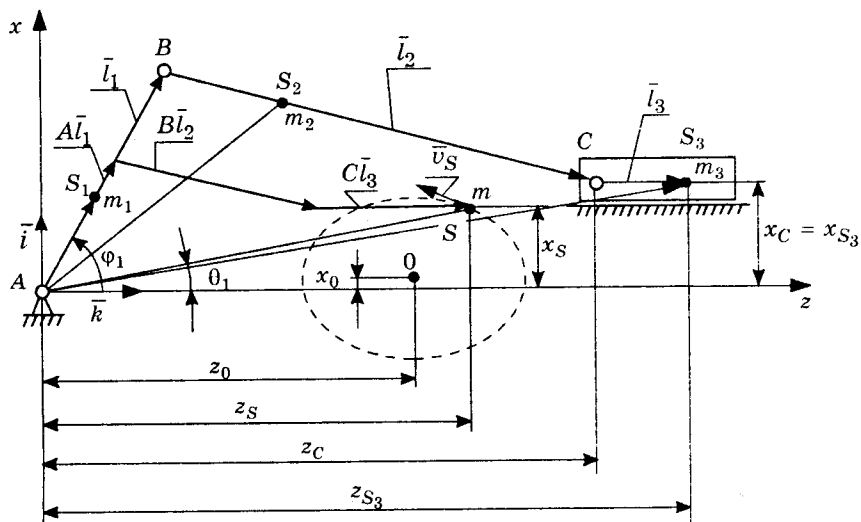


Рис.8.33. К определению траектории центра масс механизма

Тогда, с учетом соотношений (8.61), из рис.8.33 имеем

$$A\bar{l}_1 + B\bar{l}_2 + D\bar{l}_3 = z_S\bar{k} + x_S\bar{i} = -\bar{l}_{AS}. \quad (8.62)$$

Проектируя равенство (8.62) на оси координат, получим уравнения

$$Al_1 \cos \varphi_1 + Bl_2 \cos \varphi_2 + Dl_3 = z_S = l_{AS} \cos \theta_1, \quad (8.63)$$

$$Al_1 \sin \varphi_1 + Bl_2 \sin \varphi_2 = x_S = l_{AS} \sin \theta_1.$$

Решение системы (8.63) дает следующее уравнение траектории центра масс рассматриваемого механизма в функции координат:

$$[z_S - (Dl_3 + Al_1 \cos \varphi_1)]^2 + (x_S - Al_1 \sin \varphi_1)^2 = (Bl_2)^2. \quad (8.64)$$

Уравнение (8.64) позволяет исследовать влияние массово-геометрических характеристик отдельных звеньев механизма на параметры траектории общего центра масс. Такая информация о геометрии траектории точки S , совпадающей с общим центром масс механизма, имеет самостоятельное значение, так как дает возможность качественного анализа возмущающего воздействия на опоры механизма. Наиболее важными параметрами здесь являются координаты x_0 и z_0 точки O "центра" траектории, степень сжатости ее во взаимно перпендикулярных направлениях, а также значения кривизны в отдельных точках.

Выявление геометрических параметров траектории центра масс механизма позволяет довольно просто перейти к моделированию динамического (силового) воздействия на его опоры. Этот переход связан с известными методами естественного

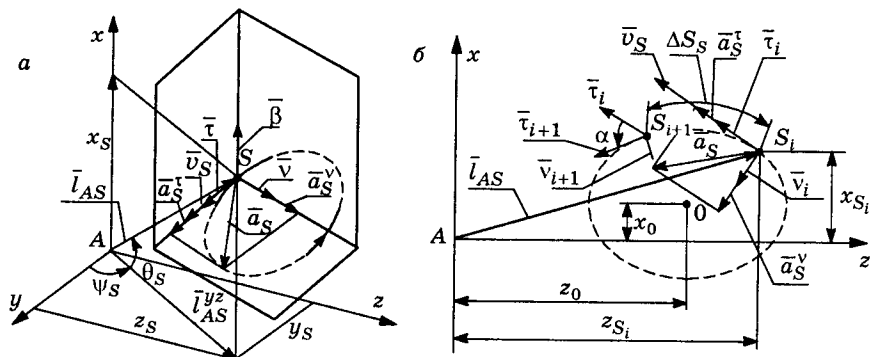


Рис.8.34. Кинематические характеристики центра масс механизма при естественном способе задания его движения:
а — в случае пространственной траектории,
б — в случае плоской

(натурального) задания движения точки, принимаемыми в теоретической механике, когда траектория ее известна. В этом случае в основу исследования положены инварианты траектории: длина дуги, кривизна и кручение [45]. Тогда связь геометрических параметров траектории со скоростью точки S определится формулами Серре-Френе:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= k_s \bar{\nu}, \\ \frac{d\bar{\nu}_s}{ds} &= -k_s \bar{\tau} + T_s \bar{\beta}, \\ \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= -T_s \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

В уравнениях (8.65) k_s и T_s — кривизна и кручение (вторая кривизна) траектории точки; $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ — единичные векторы касательной, нормали и бинормали к траектории точки S . Как видно из рис.8.34, *а* трехгранник Френе $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ перемещается вдоль траектории со скоростью $\bar{\tau} = \bar{v}_S / v_S$. Интенсивность (быстрота) изменения направления касательной по отношению к длине дуги Δs показывает, насколько отклоняется кривая по своей форме от прямой линии. Из рис.8.34, *б* видно, что $k_s = \lim(\alpha / \Delta s)$, где $\Delta s = s_{i+1} - s_i$ — путь, пройденный точкой по дуге траектории; α — угол между касательными $\bar{\tau}_i$ и $\bar{\tau}_{i+1}$. Таким образом, скорость точки S равна

$$\bar{v}_S = \frac{d\bar{l}_{AS}}{dt} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \frac{ds}{d\varphi_1} \bar{\tau}.$$

Закон движения точки S вдоль траектории центра масс можно определить только после исследования движения звеньев механизма в составе конкретной машины. Поэтому при динамическом исследовании геометрические и кинематические характеристики следует определять не в функции времени t , а в функции обобщенной координаты (в данном случае φ). Тогда действительные значения скорости \bar{v}_S определятся произведением обобщенной скорости $\bar{\omega}_1 = d\varphi_1/dt$ машины и функции $i_S = ds/d\varphi$, определяющей положение центра масс механизма. Функция i_S определится из следующих соображений. Длина дуги ds в общем случае определяется известным соотношением

$$ds = \sqrt{(dx_s)^2 + (dz_s)^2 + (dy_s)^2},$$

тогда

$$\frac{ds}{d\varphi_1} = \sqrt{\left(\frac{dx_s}{d\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_s}{d\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{d\varphi_1}\right)^2}.$$

Так, например, для рассматриваемого примера (рис.8.33) из уравнений (8.33) имеем

$$\frac{dz_s}{d\varphi_1} = z'_s = -Al_1 \sin \varphi_1 - Bl_2 i_{21} \sin \varphi_2, \quad (8.66)$$

$$\frac{dx_s}{d\varphi_1} = x'_s = Al_1 \cos \varphi_1 + Bl_2 \cos \varphi_2.$$

В уравнениях (8.66) функция $i_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ определена ранее.

Тогда для рассматриваемого механизма имеем

$$i_s = \frac{ds}{d\varphi_1} = \sqrt{(x'_s)^2 + (z'_s)^2}. \quad (8.67)$$

Ускорение точки S можно представить в виде

$$\bar{a}_S = a_S^z \bar{k} + a_S^x \bar{i},$$

тогда

$$a_S = \sqrt{(a_S^z)^2 + (a_S^x)^2}.$$

Проекции ускорений представим в виде

$$a_S^z = \frac{dv_S^z}{dt} = \frac{d(\omega_1 z'_S)}{dt} = \varepsilon_1 z'_S + \omega_1^2 z''_S, \quad (8.68)$$

$$a_S^x = \frac{dv_S^x}{dt} = \frac{d(\omega_1 x'_S)}{dt} = \varepsilon_1 x'_S + \omega_1^2 x''_S.$$

В уравнениях (8.68) проекции аналога ускорения точки S на оси z и x определяются дифференцированием по φ_1 уравнений (8.64):

$$\begin{aligned} z_S'' &= -Al_1 \cos \varphi_1 - Bl_2 i_{21}' \sin \varphi_2 - Bl_2 i_{21}' \cos \varphi_2, \\ x_S'' &= -Al_1 \cos \varphi_1 + Bl_2 i_{21}' \cos \varphi_2 - Bl_2 i_{21}' \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Уравнения (8.66)–(8.69) позволяют определить проекции главного вектора сил инерции с учетом неравномерности вращения главного приводного вала машины:

$$\begin{aligned} (F_S^H)_z &= -ma_S^z, \\ (F_S^H)_x &= -ma_S^x. \end{aligned}$$

Как отмечалось, задачи, связанные с уменьшением динамических реакций в опорах механизмов, требуют анализа траектории его центра масс и закона движения точки S , совпадающей с ним. Этот анализ удобно проводить в функции самой траектории (ее дуги s). При таком способе задания движения полное ускорение точки S определится выражением

$$\bar{a}_S = \left(\frac{dv_S}{dt} \right) \bar{\tau} + (v_S^2 k_s) \bar{\nu} = \bar{a}_S^\tau + \bar{a}_S^\nu.$$

Величины тангенциального \bar{a}_S^τ и нормального \bar{a}_S^ν ускорений представим в виде

$$\begin{aligned} a_S^\tau &= \frac{dv_S}{dt} = \frac{d(\omega_1 i_S)}{dt} = \varepsilon_1 i_S + \omega_1^2 i_S', \\ a_S^\nu &= v_S^2 k = (\omega_1 i_S)^2 k_s. \end{aligned}$$

Здесь

$$i_{S21}' = \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2 i_{S2}}{d\varphi_1^2}$$

определится путем дифференцирования выражения (8.67):

$$i_{S21}' = \frac{x_S' x_S'' + z_S' z_S''}{\sqrt{(x_S')^2 + (z_S')^2}}.$$

В этом случае проекции главного вектора силы инерции на касательную и нормаль к траектории точки S определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (F_S^H)_\tau &= -ma_S^\tau, \\ (F_S^H)_\nu &= -ma_S^\nu. \end{aligned}$$

Связь между проекциями ускорения \bar{a}_S на касательную, нормаль и оси x и z определится известными соотношениями [21]:

$$\begin{aligned}\bar{a}_S^{\tau} &= |\bar{a}_S \cdot \bar{\tau}| = \frac{|\bar{a}_S \bar{v}_S|}{v_S} = \frac{\ddot{x}_S \dot{x}_S + \ddot{z}_S \dot{z}_S}{\sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{z}_S^2}}, \\ a_S^{\nu} &= \bar{a}_S \times \bar{\tau} = \frac{|\bar{a}_S \times \bar{v}_S|}{v_S} = \frac{\ddot{z}_S \dot{x}_S - \ddot{x}_S \dot{z}_S}{\sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{z}_S^2}}.\end{aligned}\quad (8.70)$$

Кривизну траектории точки S можно определить по формуле

$$k = \frac{a_S^{\nu}}{v_S^2}.\quad (8.71)$$

Проекции скорости \bar{v}_S и ускорения \bar{a}_S на оси x и z определяются выражениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_S &= \omega_1 x'_S, & \dot{z}_S &= \omega_1 z'_S, \\ \ddot{x}_S &= \varepsilon_1 x'_S + \omega_1^2 x''_S, & \ddot{z}_S &= \varepsilon_1 z'_S + \omega_1^2 z''_S.\end{aligned}$$

При решении задачи снижения динамических реакций в опорах за счет уравнивания сил инерции (главного вектора и главного момента) удобно также рассматривать кинематику точки S в подвижной системе координат xz , начало которой совпадает с началом неподвижной системы xz (рис.8.35, а). В этом случае скорость v_S равна

$$\bar{v}_S = \bar{v}_S^r + \bar{v}_S^e = (\dot{\theta}_1 l_{AS}) \bar{i} + \frac{dl_{AS}}{dt} \bar{k}.\quad (8.72)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{d\theta_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \theta'_1, \\ v_S^r &= l_{AS} = \frac{dl_{AS}}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 l'_{AS}.\end{aligned}$$

Из рис.8.35 видно, что

$$\begin{aligned}l_{AS} &= \sqrt{z_S^2 + x_S^2}, \\ \theta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{x_S}{z_S}.\end{aligned}\quad (8.73)$$

Дифференцирование выражений по φ_1 дает

$$\begin{aligned}l'_{AS} &= \frac{z_S z'_S + x_S x'_S}{\sqrt{z_S^2 + x_S^2}}, \\ \theta'_1 &= \frac{x'_S z_S - z'_S x_S}{z_S^2 + x_S^2}.\end{aligned}\quad (8.74)$$

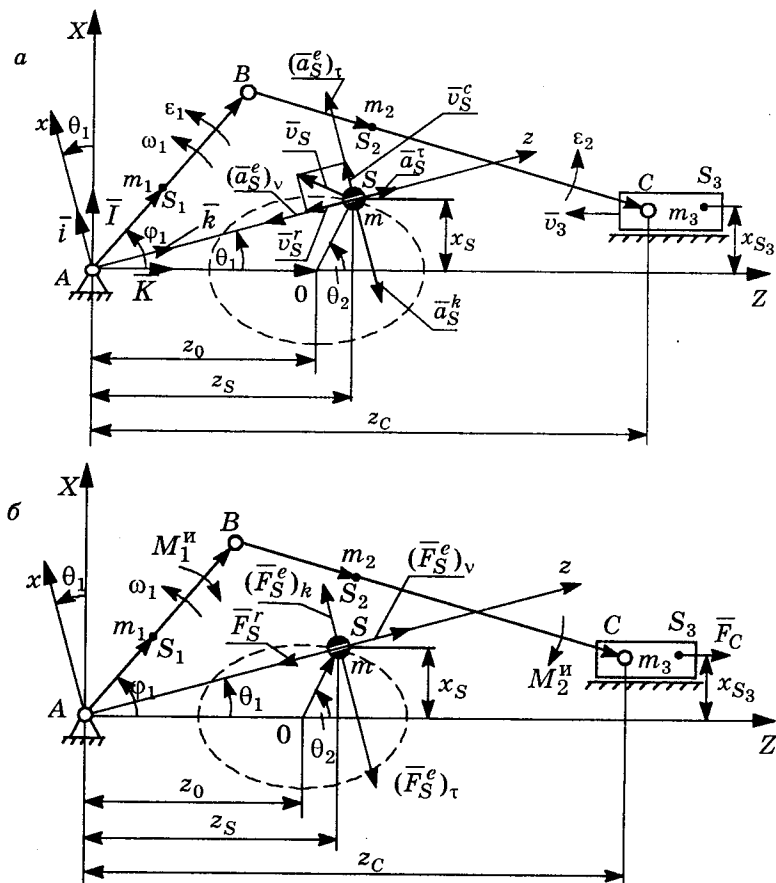


Рис.8.35. Моделирование движения центра масс рычажного механизма: *а* — схема скоростей и ускорений, *б* — схема сил

Ускорение в этом случае определится векторной суммой

$$\vec{a}_S = \vec{a}_S^r + \vec{a}_S^e + \vec{a}_S^k = \vec{a}_S^r + \left(\vec{a}_S^e\right)_\tau + \left(\vec{a}_S^e\right)_\nu + \vec{a}_S^k,$$

где \vec{a}_S^r — ускорение точки S в относительном движении (в направлении вектора \vec{l}_{AS});

\vec{a}_S^e — ускорение точки S в переносном движении (вращении вектора \vec{l}_{AS} вокруг точки A);

\vec{a}_S^k — ускорение Кориолиса.

Найдем значения проекций ускорения на подвижные оси:

$$a_S^r = \frac{dv_S^r}{dt} = \frac{d(\omega l'_{AS})}{dt} = \varepsilon_1 l'_{AS} + \omega_1^2 l''_{AS},$$

$$\left(a_S^e\right)_\tau = \frac{dv_S^e}{dt} = \frac{d(\omega \theta_1' l_{AS})}{dt} = \varepsilon_1 \theta_1' l_{AS} + \omega_1^2 (\theta_1'' l_{AS} + \theta_1' l'_{AS}),$$

$$\left(a_S^e\right)_\nu = \dot{\theta}_1^2 l_{AS} = (\omega_1 \theta_1')^2 l_{AS},$$

$$\bar{a}_S^k = 2\bar{\theta}_1 \times \bar{v}_S^r = 2\omega_1^2 \theta_1' l'_{AS}.$$

Функции $\theta_1' = f(\varphi_1)$ и $l''_{AS} = f(\varphi_1)$ определяются дифференцированием выражений (8.74).

В этом случае проекции главного вектора сил инерции механизма определяются выражениями

$$\left(F_S^n\right)_x = -m \left[a_S^r - \left(a_S^e\right)_\nu \right] = -m \left[\varepsilon_1 l'_{AS} + \omega_1^2 l''_{AS} - (\omega_1 \theta_1')^2 l_{AS} \right],$$

$$\left(F_S^n\right)_z = -m \left[\left(a_S^e\right)_\tau - a_S^k \right] = -m \left[\varepsilon_1 \theta_1' l_{AS} + \omega_1^2 \theta_1'' l_{AS} - \omega_1^2 \theta_1' l'_{AS} \right].$$

На рис.8.35, б показаны направления сил, действующих на точку S массой m в подвижной системе координат xAz . Из этого рисунка можно видеть влияние составляющих сил инерции на моментную неуравновешенность от главного вектора сил и силовую неуравновешенность, определяемую проекциями вектора \bar{F}_S^n . Как видно, момент от сил инерции тем больше, чем дальше расположена точка O траектории центра масс от точки A . Моментную неуравновешенность создают составляющие $\left(\bar{F}_S^e\right)_\tau$ и \bar{F}_S^k , силовую же — все четыре составляющие сил инерции. Размах колебаний θ определяется степенью "сжатия" траектории в направлении оси x . Угол θ определяется соотношением (8.73).

Кинематика и динамика точки S при перемещении ее вдоль траектории центра масс механизма может быть представлена также в подвижной системе координат с началом в точке O (рис.8.36). В этом случае имеем соотношения

$$l_{OS} = \sqrt{x_S^2 + (z_S - z_O)^2}, \quad (8.75)$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{x_S}{z_S - z_O}. \quad (8.76)$$

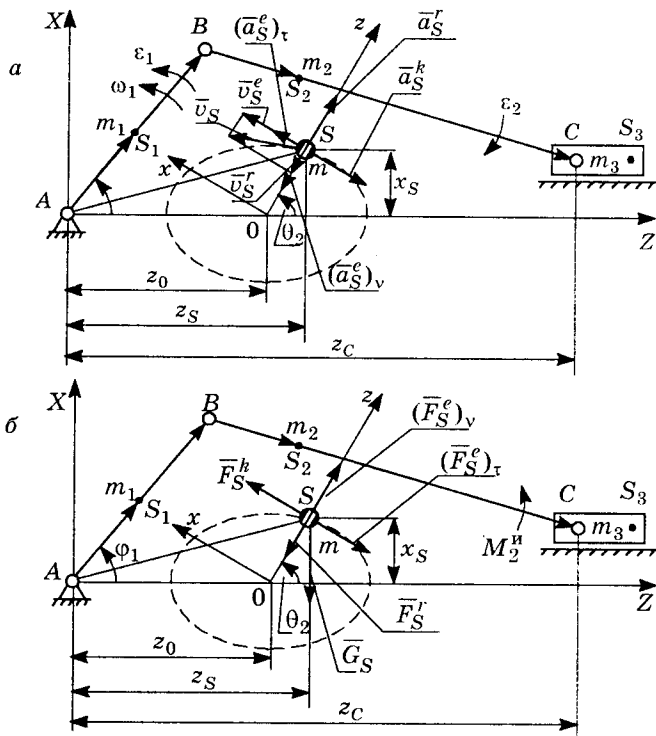


Рис.8.36. Моделирование движения центра масс рычажного механизма: а — схема скоростей и ускорений, б — схема сил

Составляющие векторов \vec{v}_S и \vec{a}_S в данном случае определяются аналогично выражениям (8.70)... (8.74) с заменой $\bar{\theta}_1$ на $\bar{\theta}_2$ и l_{AS} на l_{OS} . Такое представление кинематики точки S позволяет видеть некоторые варианты снижения динамических нагрузок за счет введения вспомогательных механизмов. Закон движения точки S (массы m) относительно центра определяется дифференцированием уравнений (8.75) и (8.76). После дифференцирования получим

$$v'_{OS} = \frac{x_S x'_S + (z_S - z_0) z'_S}{\sqrt{x_S^2 + (z_S - z_0)^2}},$$

$$\theta'_2 = \frac{x'_S (z_S - z_0) - z'_S x_S}{x_S^2 + (z_S - z_0)^2}.$$

8.11. Особенности уравнивания механизмов

Как видно из рассмотренных примеров, реакции в опорах механизмов являются функцией обобщенной координаты φ . Это относится и к статическим реакциям от сил веса, так как они изменяются в связи с изменением координат x_S и z_S общего центра масс механизма. Особенности динамической нагруженности опор того или иного исполнительного механизма, используемого в конкретной машине, могут быть исследованы после определения обобщенных скорости ω_1 и ускорения ε_1 . В этой связи требуется знать действительные скорость \bar{v}_S и ускорение \bar{a}_S общего центра масс. Приведенные соотношения позволяют выбрать наиболее рациональную схему устройства, обеспечивающего снижение динамической нагруженности опор. Способы снижения динамических реакций за счет уравнивания сил и моментов сил инерции можно разделить на следующие:

— установка дополнительных сосредоточенных масс (противовесов) на отдельных звеньях, это позволяет изменять положение их центров масс и получать различные траектории общего центра масс механизма;

— установка дополнительных механизмов, создающих свои динамические нагрузки в опорах, которые, взаимодействуя с нагрузками уравниваемого механизма, приводят в результате к снижению их амплитудного значения;

— уравнивание механических характеристик (сил, моментов сил) методом воздействия на электрические (напряжение, ток, индуктивность), гидравлические или пневматические параметры;

— использование виброгасителей (демпферов), поглощающих энергию колебательного движения в том или ином направлении.

На рис.8.37 приведена схема механизма, позволяющая снизить амплитудные значения динамических реакций в опорах рычажного механизма. Он состоит из звеньев 1 и 2. Звено 1 вращается вокруг оси, совпадающей с осью вращения входного звена уравниваемого механизма (точка A). Звено 2 вращается вокруг оси, проходящей через точку O , расположенную в "центре симметрии" траектории общего центра масс механизма. Ползуны 3 и 4, соединенные между собой с возможностью относительного поворота, совершают относительное движение вдоль звеньев 1 и 2. У такого механизма число подвижных звеньев $n = 4$. Число кинематических пар такого механизма $P_5 = 5$, то есть число степеней подвижности $W = 2$.

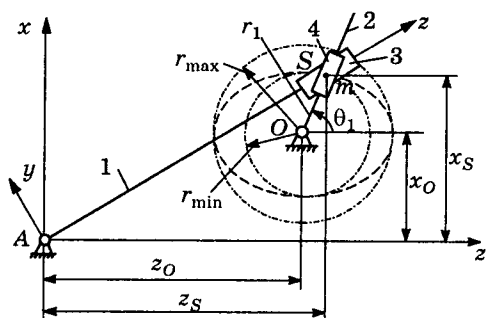


Рис.8.37. Заменяющий механизм, обеспечивающий движение уравновешенной массы по траектории центра масс уравновешенного механизма

достигается путем воспроизведения закона движения ползунов 3 и 4 в абсолютном движении, соответствующего закону движения массы m общего центра масс уравновешиваемого механизма. При этом угол между векторами \vec{r}_1 и \vec{l}_{OS} должен быть равен 180° . Это достигается в случае, если законы вращения звеньев 1 и 2 будут иметь вид

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \theta'_1 \quad \text{и} \quad \dot{\theta}_2 = \omega_1 \theta'_2.$$

При этом угловые ускорения должны определяться соотношениями

$$\ddot{\theta}_1 = \varepsilon_1 \theta'_1 + \omega_1^2 \theta''_1 \quad \text{и} \quad \ddot{\theta}_2 = \varepsilon_1 \theta'_2 + \omega_1^2 \theta''_2.$$

Если в точку O поместить копир, по поверхности которого могут перемещаться ползуны 3 и 4, а поверхность такого копира воспроизводит конфигурацию траектории общего центра масс уравновешиваемого механизма, то такой вспомогательный механизм будет иметь число степеней подвижности $W = 1$. В этом случае достаточно реализовать движение одного звена вспомогательного механизма (удобнее — звена 2) по соответствующему закону.

На рис.8.38, а показана схема частичного уравновешивания главного вектора сил инерции и его момента. Силы F_{z_1} и F_z , а также моменты сил F_x и F_{x_1} во все время движения равны и противоположно направлены. В этом случае совмещены два однотипных механизма, которые уравновешивают друг друга и совершают полезную работу. Однако, как видно из рисунка, в результате такого решения создается дополнительная неуравновешенность, так как силы F_x и F_{x_1} остаются неуравновешенными. Этот недостаток

Уравновешивание исполнительного механизма достигается путем подбора масс ползунов m_3 и m_4 вспомогательного механизма из условия равенства статических моментов (см. также рис.8.36):

$$(m_3 + m_4)\vec{r} = m\vec{l}_{OS}.$$

Годографы радиусов-векторов \vec{r} и \vec{l}_{OS} эквидистантны и отношение $r/l_{OS} > 1$. Это дает возможность достичь цели при $(m_3 + m_4) < m$. Частичное уравновешивание

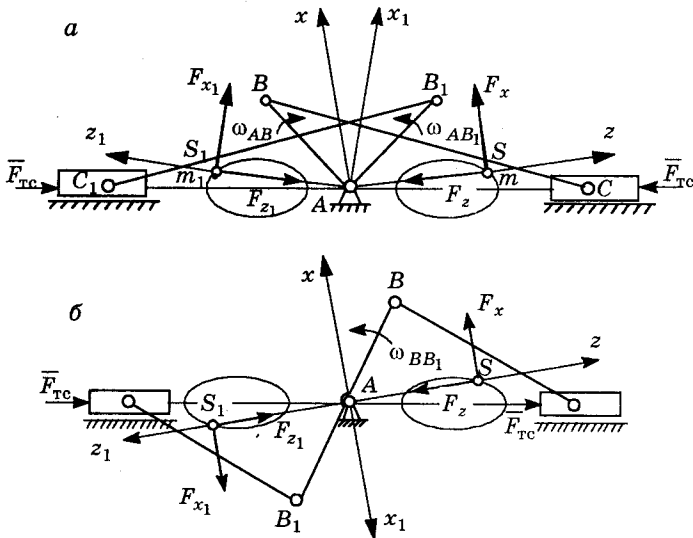


Рис.8.38. Уравновешивание механизмов одностипными механизмами:
 а — полное уравновешивание момента главного вектора сил инерции,
 б — полное уравновешивание главного вектора сил инерции

можно устранить, если использовать схему, представленную на рис.8.38, б. Здесь на одном кривошипе размещаются остальные звенья. Составляющие главного вектора сил инерции во все время движения направлены в противоположные стороны и уравновешивают друг друга, однако оказывается неуравновешенным момент от сил F_x и F_{x_1} .

На рис.8.39, а представлена другая схема, объединяющая одностипные механизмы. Подбором и размещением дополнительных масс m_A и m_D на некотором расстоянии от оси вращения кривошипов можно обеспечить уравновешивание составляющих главного вектора сил инерции. В этом случае достигается также уравновешивание момента от составляющих главного вектора сил инерции. Использование схемы на рис.8.39, б приводит к дополнительной неуравновешенности главного вектора сил инерции, так как силы F_x и F_{x_1} оказываются направленными в одну сторону.

Из рассмотренных примеров видно, что полная уравновешенность механизмов требует анализа составляющих главного вектора сил инерции и главного момента, которые в рассмотренных примерах не приводились. Устройства для осуществления полной уравновешенности на практике оказываются очень сложными. Поэтому чаще процесс уравновешивания реализуют

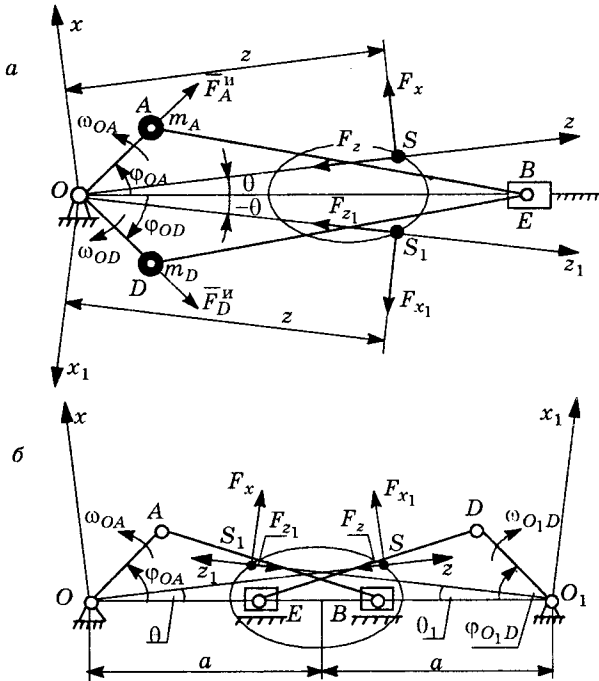


Рис.8.39. Уравновешивание механизмов одноптиными механизмами:
а — уравновешивание главного вектора сил инерции и его момента,
б — уравновешивание момента и главного вектора сил инерции

с учетом конкретных требований, которые предусматривают снижение уровня колебаний в каком-либо направлении, например, в направлении оси x или z' . Часто требуется также снижение амплитуды кругильных колебаний главного приводного вала. В каждом конкретном случае требуется определение возмущающего воздействия как некоторой функции обобщенной координаты, причем не механизма, а конкретной машины. Технические решения по снижению уровня вибраций, оптимальные для некоторого исполнительного механизма, используемого в одной машине, могут оказаться неудовлетворительными в случае использования этого механизма в другой. Это связано с тем, что закон движения главного приводного вала (обобщенная скорость машины) зависит от приведенного момента сил технологического сопротивления (обобщенной силы сопротивления).

Наряду с неуравновешенностью механизмов особое значение имеет неуравновешенность отдельных вращающихся звеньев.

8.12. Уравновешивание вращающихся звеньев

На рис.8.40 представлена схема, поясняющая возникновение динамических реакций, связанных с несимметричным распределением масс относительно оси вращения цилиндрической детали. Как известно [21], полное динамическое уравновешивание требует совпадения оси геометрической симметрии вращающегося тела с осью его материальной симметрии и совпадения этих осей с осью вращения. Условие полного динамического уравновешивания имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{F}^n &= -m\bar{a}_S = -m[\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_S + \bar{\omega} \times \bar{v}_S] = 0, \\ \bar{M}_O^n &= -\frac{dL_O}{dt} = -\left\{ [J_O] \frac{d\omega}{dt} + \bar{\omega} \times [J_O] \bar{\omega} \right\} = 0,\end{aligned}\quad (8.77)$$

где ρ_S — расстояние точки S , совпадающей с центром масс m ротора, от оси вращения (эксцентриситет);

$\omega, \varepsilon = d\omega/dt$ — скорость и ускорение ротора;

$[J_O]$ — тензор инерции, равный

$$[J_O] = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}. \quad (8.78)$$

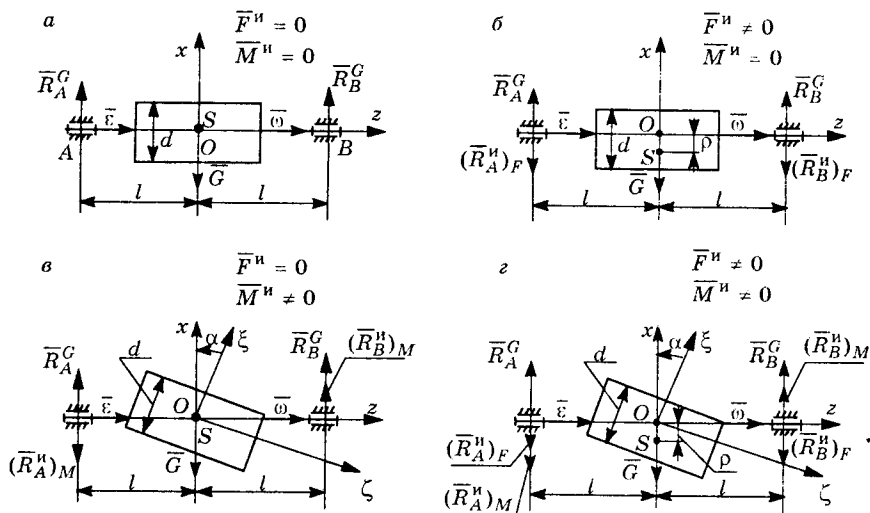


Рис.8.40. Динамические реакции в опорах вращающегося звена:

- a** — полная динамическая уравновешенность,
б — неуравновешенность главного вектора сил инерции,
в — неуравновешенность главного момента сил инерции,
з — неуравновешенность главного вектора и главного момента инерционных сил

Как видно из рис.8.40, б, в случае совпадения центра масс ротора с осью вращения (когда $\rho_S = 0$) динамические реакции от главного вектора сил инерции равны нулю: $(R_B^n)_F = (R_A^n)_F = 0$.

Для определения динамических реакций от главного момента инерционных сил и выяснения условий, при которых наблюдаются их равенство нулю, рассмотрим некоторые известные положения геометрии масс.

На рис.8.41 показано твердое тело объемом V и массой m . Пусть r_i есть радиус-вектор произвольной точки i массой m_i этого тела в системе координат xyz ; \bar{L}_o — единичный вектор, определяющий направление произвольной оси L в этой системе координат. Осевые и центробежные моменты инерции тела относительно осей координат xyz известны:

$$J_x = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} x^2 dv \approx \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$J_y = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} y^2 dv \approx \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2),$$

$$J_z = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} z^2 dv \approx \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} xy dv \approx \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i,$$

$$J_{yz} = J_{zy} = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} yz dv \approx \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i,$$

$$J_{xz} = J_{zx} = \frac{m}{v} \iiint_{(v)} xz dv \approx \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i.$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси L записывается в виде

$$J_L = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (8.79)$$

Как известно, направляющие косинусы любого вектора в прямоугольной системе координат связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Связь между направляющими косинусами и углом φ_i между векторами \bar{r}_i и \bar{L}_o устанавливается из соотношения

$$L_i = r_i \cos \varphi_i = \bar{r}_i \cdot \bar{L}_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma. \quad (8.80)$$

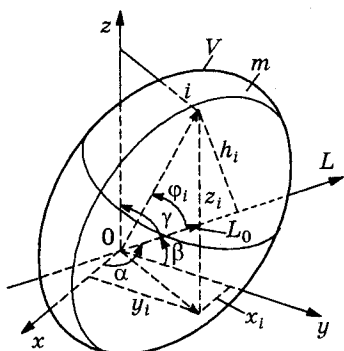


Рис.8.41. К определению момента инерции относительно произвольной оси L

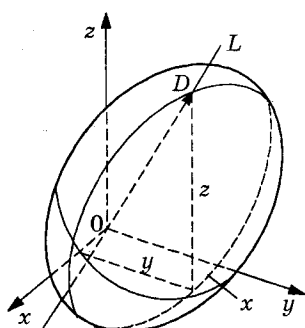


Рис.8.42. К определению эллипсоида инерции в данной точке твердого тела

Наглядное представление об изменении моментов инерции относительно осей различных направлений, проходящих через точку O , дает эллипсоид инерции (рис.8.42). Эллипсоид инерции представляет собой геометрическое место точек, отстоящих от точки O на расстоянии $OD = 1/\sqrt{J_L}$, при изменении значений $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. Координаты точки D в этом случае определяются из соотношений

$$x = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\alpha, \quad y = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\beta, \quad z = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\gamma.$$

$$\text{Тогда } \cos^2\alpha = \frac{x^2}{J_L}, \quad \cos^2\beta = \frac{y^2}{J_L}, \quad \cos^2\gamma = \frac{z^2}{J_L}. \quad (8.81)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (8.79) на J_L и подставив значения косинусов из выражения (8.81), получим уравнение эллипсоида инерции в данной точке O твердого тела:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = 1.$$

Через любую точку твердого тела можно провести пучок осей L и построить соответствующий эллипсоид инерции.

Для каждой точки тела можно построить свой эллипсоид инерции. В общем случае различные эллипсоиды будут иметь различные по величине полуоси и будут по-разному ориентированы относительно оси L .

Если ось L направить так, чтобы ее координаты совпадали с осями эллипсоида инерции, то уравнение эллипсоида принимает конкретную форму:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1.$$

В этом случае центробежные моменты инерции обращаются в нуль:

$$J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0.$$

Оси эллипсоида инерции в данной точке твердого тела называются главными осями инерции. Следовательно, в каждой точке твердого тела имеются три главные оси инерции, являющиеся осями соответствующего эллипсоида инерции. В этом случае формула момента инерции твердого тела относительно такой оси L имеет вид

$$J_L = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинуса оси L .

В общем случае осевой момент инерции тела относительно оси равен (см. рис.8.40)

$$J_L = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - L_i^2).$$

Значение L_i определяется выражением (8.80), а r_i — из соотношения $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Приведенные соотношения позволяют сделать следующие выводы.

Любая ось, не проходящая через центр тяжести твердого тела, является главной только в одной точке. Эта ось является осью только того эллипсоида инерции, центр которого совпадает с данной точкой.

Если, например, оси x и y , проходящие через точку O , не являются осями эллипсоида, то $J_{xy} \neq 0$, то есть, если только одна из осей является главной осью инерции в данной точке твердого тела, то в нуль обращаются лишь два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является главная ось инерции. Например, если z — главная ось инерции в точке O , то $J_{zx} = J_{zy} = 0$.

Главная ось инерции, проходящая через центр тяжести твердого тела, называется главной центральной осью инерции. Она является главной в любой своей точке.

Если в твердом теле имеется плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной в точке пересечения с плоскостью.

Если же в теле имеется ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции.

На рис.8.40, в координатная плоскость xz совмещена с плоскостью материальной симметрии вращающегося звена. Поэтому ось y является главной осью инерции цилиндра в точке

пересечения с этой плоскостью, то есть в точке O . Следовательно, $J_{xy} = J_{yz} = 0$. В этом случае тензор инерции принимает вид

$$[J_o] = \begin{vmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{vmatrix}.$$

Как видно из рис.8.40, z , оси геометрической и материальной симметрии цилиндра $x_1 z_1$ повернуты на угол α относительно оси вращения z по часовой стрелке. Формулы преобразования координат для случая поворота в положительном направлении имеют вид

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha, \\ x &= z_1 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Заменяя в этих выражения α на $-\alpha$, получим

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha, \\ x &= -z_1 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Тогда центробежный момент инерции цилиндра относительно осей x , z определяется соотношением

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = \sum_{i=1}^n m_i (z_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha)(-z_1 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha). \quad (8.82)$$

Как видно из рис.8.40, z , ось x_1 перпендикулярна плоскости материальной симметрии цилиндра и, следовательно, является главной осью инерции в точке O , то есть $J_{x_1 z_1} = 0$. При этом имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \sum_{i=1}^n m_i h_{ix_1}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + y_i^2), \\ J_{z_1} &= \sum_{i=1}^n m_i h_{iz_1}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \quad (8.83)$$

В уравнениях (8.83) h_{ix_1} и h_{iz_1} — расстояния от оси x_1 и z_1 соответственно до i -ой материальной точки. Преобразование выражения (8.82), с учетом соотношений (8.83) и того, что $J_{x_1 y_1} = 0$, дает выражение

$$J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (8.84)$$

Для круглого цилиндра при определении осевых моментов инерции используют следующее выражение:

$$J_{z_1} = \frac{Gr^2}{2g}, \quad J_{y_1} = J_{x_1} = \frac{G}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right).$$

С учетом последних выражений уравнение (8.84) примет вид

$$J_{xz} = \frac{G}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha.$$

Для оценки динамических реакций применительно к рассматриваемому примеру (рис.8.40) используются векторные уравнения (8.77). Учитывая, что точка S , совпадающая с центром масс цилиндра, имеет координаты $x_S = y_S = 0$, то есть $\rho_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = 0$, а также то, что векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ совпадают с осью z , ускорение центра масс вращающегося цилиндра можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{a}_S &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \epsilon \\ x_S & y_S & 0 \end{vmatrix} + \omega \bar{k} \times \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_S & y_S & 0 \end{vmatrix} = -\epsilon y_S \bar{i} + \epsilon x_S \bar{j} + \\ &+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_S & \omega x_S & 0 \end{vmatrix} = (-\epsilon y_S - \omega^2 x_S) \bar{i} + (\epsilon x_S - \omega^2 y_S) \bar{j} + 0 \bar{k}. \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства первое уравнение системы (8.77) дает

$$\bar{F}^n = m(\epsilon y_S + \omega^2 x_S) \bar{i} - m(\epsilon x_S + \omega^2 y_S) \bar{j}.$$

Модуль главного вектора сил инерции при несовпадении центра масс вращающегося звена с осью вращения (см. рис.8.40, б) определится из выражения

$$F^n = \sqrt{(F_x^n)^2 + (F_y^n)^2} = m \sqrt{(\epsilon y_S + \omega^2 x_S)^2 + (\epsilon x_S + \omega^2 y_S)^2}. \quad (8.85)$$

Для определения проекций вектора M_O^n главного момента сил инерции на подвижные оси представим вектор L кинетического момента в проекциях на эти оси.

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = [J_0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -J_{xz}\omega \\ 0 \\ J_z\omega \end{Bmatrix}.$$

Тогда векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{L}$ в координатной форме запишется в следующем виде:

$$\bar{\omega} \times \bar{L} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -J_{xz}\omega & 0 & J_z\omega \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - J_{xz}\omega^2 + 0 \bar{k}.$$

Составляющие главного момента $[J_0]\bar{\epsilon}$ в системе координат имеют вид

$$[J]\bar{\epsilon} = (-J_{xz}\epsilon)\bar{i} + 0\bar{j} + (J_z\epsilon)\bar{k}.$$

Тогда второе выражение системы (8.77) примет вид

$$\bar{M} = (J_{xz}\epsilon)\bar{i} - (J_{xz}\omega^2)\bar{j} - (J_z\epsilon)\bar{k}.$$

Динамические реакции в опорах A и B , обусловленные наличием центробежного момента инерции J_{xy} , определяются при условии, что в плоскости xy действует момент, равный

$$M_{xy} = J_{xy}\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

На рис.8.40, z динамические реакции в опорах определяются с учетом выражений (8.83) и (8.85). Если ось z вращения диска проходит через его центр масс, но не перпендикулярна к плоскости материальной симметрии, то ось y не является главной.

В этом случае $J_{xz} \neq 0$ и $J_{yz} \neq 0$. Проекции кинетического момента L определяются из следующих преобразований:

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -J_{xz}\omega \\ -J_{yz}\omega \\ J_z\omega \end{Bmatrix}.$$

Векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{L}$ запишется в виде

$$\bar{\omega} \times \bar{L} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -J_{zx}\omega & -J_{zy}\omega & J_z\omega \end{vmatrix} = (J_{yz}\omega^2)\bar{i} - (J_{xz}\omega^2)\bar{j} + 0\bar{k}.$$

Составляющие главного момента $[J_0]\bar{\epsilon}$ примут вид

$$[J_0]\bar{\epsilon} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{Bmatrix} = (J_{xz}\epsilon)\bar{i} - (J_{yz}\epsilon)\bar{j} + 0\bar{k}.$$

В этом случае второе уравнение системы (8.77) примет вид

$$\bar{M} = -(J_{xz}\epsilon + J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (J_{yz}\epsilon + J_{xz}\omega^2)\bar{j} - (J_z\epsilon)\bar{k}.$$

Динамические реакции в опорах A и B , обусловленные наличием центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} определяются из условия, что в плоскости xy действует момент, равный

$$M_{xy} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2} \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

В случае, если ось y является главной, то есть $J_{yz} = 0$, но $J_{xz} \neq 0$, центр масс расположен на оси вращения (рис.8.40, z).

Центробежный момент инерции J_{xz} , согласно теореме Штейнера, можно представить в виде

$$J_{z_1} = J_{z_1 S} + m \rho_S^2 = \frac{Gr^2}{2g} + \frac{G}{g} \rho_S^2.$$

Тогда

$$J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{G}{2g} \left(\frac{r^2}{4} + \rho_S^2 - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha.$$

Таким образом, отсутствие динамических реакций в опорах вращающегося звена (ротора) требует не только совмещения центра масс с осью вращения, т.е. $\rho_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = 0$, но и выполнения условия $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Другими словами, ось вращения должна совпадать с главной центральной осью инерции.

8.13. Основные положения виброзащиты и виброизоляции машин

Вышеприведенные примеры указывают на трудности полного устранения возмущающих воздействий, связанные с распределением масс вращающихся звеньев, и на еще большие трудности, связанные с уравниванием рычажных механизмов. Наличие колебаний (вибраций) приводит к снижению точностных характеристик технологического оборудования. Кроме того, они сопровождаются шумом и оказывают вредное влияние на организм человека.

Снизить уровень колебаний может применение устройств, увеличивающих силу сопротивления, пропорциональную скорости (демпферов). При ударных воздействиях их называют поглотителями колебаний. В тех случаях, когда не удастся снизить уровень колебаний путем оптимального выбора параметров системы или путем демпфирования, применяют дополнительные устройства для защиты от вибраций — виброзащитные системы.

Существует два способа виброзащиты: виброгашение и виброизоляция. Виброгашение основано на присоединении к колеблющимся звеньям машины дополнительных колебательных систем (динамических виброгасителей). Они создают динамические воздействия, уменьшающие интенсивность вибраций. Виброизоляция основана на разделении исходной системы на две части и соединении этих частей посредством виброизоляторов или амортизаторов. Ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, называют объектом виброзащиты. Ту же часть, в которой непосредственно происходят физические процес-

сы, вызывающие колебания, называют источником колебаний. Силы, возникающие в связях, соединяющих объект виброзащиты с источником колебаний, называют силовыми (динамическими) воздействиями [15].

Например, в двигателе источником колебаний является неуравновешенный ротор, объектом виброзащиты — корпус двигателя, динамическими же воздействиями являются реакции опор. Задача виброзащиты состоит в уменьшении колебаний корпуса. Если возмущающим фактором являются не силы, а перемещения, то имеет место кинематическое возмущение. Различают кинематические воздействия, возникающие при ускоренном движении источника колебаний. Они характеризуются величиной ускорения a_{\max} и максимальным значением скорости изменения ускорения \dot{a}_{\max} . Силовые воздействия характеризуются функцией силы (момента) от обобщенной координаты или от времени, дающей возможность определить скорость их изменения. Например, если задан момент M на приводном валу машины как функция обобщенной координаты $M = f(\varphi)$, то его производная по времени определится, с учетом рассмотренных ранее преобразований, следующим образом:

$$M = \frac{dM}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\omega} = \omega M',$$

где $\omega = d\varphi/dt$ — обобщенная скорость.

Вибрационные (колебательные) воздействия могут вызываться кинематическим или силовым возбуждением. Все вибрационные возмущения делятся на стационарные, нестационарные и случайные. Простейшим видом стационарного воздействия является гармоническое:

$$x(t) = x_{\max} \sin(pt + \alpha).$$

В рассмотренных примерах машин с цикловыми исполнительными механизмами при установившемся движении возникают периодические колебания вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

В этом случае представляет интерес исследование поведения системы, когда над остальными превалирует одна гармоника (обычно первая) или же когда одна из гармоник является резонансной для исследуемого объекта.

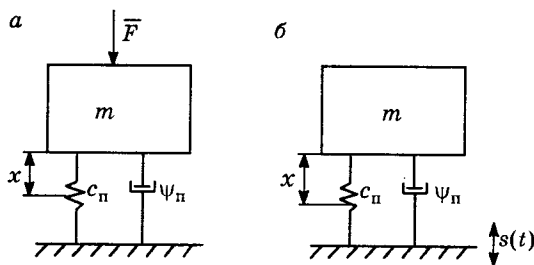


Рис.8.43. Схемы виброзащитных систем:
 а — виброизоляция машины массой m ,
 установленной на фундаменте (виброзащита фундамента),
 б — виброизоляция машины

Нестационарные вибрационные воздействия присущи переходным процессам (разгон, торможение, внезапное изменение скорости, силы и т.п.).

Возмущающие воздействия, возникающие, например, при движении жидкости в трубопроводе, вибрации, обусловленные непостоянством сил трения, не могут быть

описаны регулярными функциями, так как такие стохастические сигналы содержат элемент случайности.

На рис.8.43. приведена динамическая модель машины массой m , включающая упругие и диссипативные связи (амортизатор): пружину жесткости $c_{п}$ и демпфер с приведенным коэффициентом рассеяния $\psi_{п}$ [23]. Как было показано ранее, приведенный коэффициент жесткости $c_{п}$ определяется из условия равенства величин потенциальной энергии амортизаторов и эквивалентной пружины. Приведенный коэффициент демпфирования $\psi_{п}$ определяется из условия равенства работ, затрачиваемых на трение в амортизаторе и в эквивалентном демпфере. Внешнюю силу $F(t)$, приложенную к амортизатору, считаем известной. Уравнение движения амортизатора имеет вид

$$m\ddot{x} = F(t) + Q(x, \dot{x}),$$

где $Q(x, \dot{x})$ — обобщенная (приведенная) реакция амортизатора.

Эта сила зависит от $c_{п}$, $\psi_{п}$, а также от перемещения x и скорости \dot{x} . Амортизатор в этом случае служит для уменьшения динамической составляющей реакции Q , передаваемой на основание (фундамент) при заданном внешнем силовом воздействии $F(t)$, приложенном к амортизирующему объекту.

В случае виброзащиты объекта от колебаний, передаваемых, например, от фундамента (рис.8.43, б), известным считается кинематическое возбуждение $s(t)$ в виде перемещения фундамента. Здесь задача состоит в уменьшении динамической составляющей $Q(x, \dot{x})$, передаваемой на машину массой m .

Уравнение движения амортизируемого объекта при вибрации основания имеет вид

$$m[\ddot{x} + \ddot{s}(t)] = Q(x, \dot{x}).$$

ГЛАВА 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ, КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ И ДИНАМИКА МАНИПУЛЯТОРОВ

9.1. Постановка задачи

Совершенствование конструкций манипуляторов промышленных роботов требует поиска рационального сочетания механических характеристик привода и его подвижных звеньев с учетом взаимовлияния степеней подвижности. Механические характеристики манипулятора объясняют массово-геометрические, кинематические и динамические характеристики. К массово-геометрическим относятся:

- массы и координаты центров масс подвижных звеньев в системах координат, жестко связанных с самими звеньями;
- распределение масс по объему подвижных звеньев относительно их центров масс, количественно определяемое тензором инерции.

К геометрическим характеристикам относятся также параметры траектории схвата (центра масс груза) или центра масс звена, на котором размещен схват, а также траектории центров масс подвижных звеньев, с помощью которых реализуется (отрабатывается) траектория. К геометрическим параметрам траектории относятся путь (длина дуги траектории), кривизна дуги траектории, кручение.

Кинематические характеристики включают:

- скорости центров масс подвижных звеньев и их ускорения;
- угловые скорости звеньев и их угловые ускорения;
- закон движения схвата вдоль заданной траектории, то есть зависимость скорости и ускорения центра масс груза от пути при движении его вдоль заданной траектории;
- закон отработки координат центров масс подвижных звеньев — зависимость их скоростей и ускорений от пути при движении вдоль заданной траектории.

К динамическим силовым характеристикам относятся реакции в кинематических парах от сил движущих и сил сопротивления как функции обобщенных координат или траектории (пути) центра масс схвата. К динамическим энергетическим характеристикам относятся работа и мощность приводных двигателей как некоторые функции соответствующих обобщенных координат или траектории схвата.

В данном случае важно знать не только модуль вектора сил реакции. Динамическую нагруженность подвижного соединения манипулятора определяют изменения величины и направления силы реакции за время отработки той или иной координаты.

Поэтому необходимо определять составляющие вектора силы реакции как проекции его на оси координат, жестко связанные с подвижным звеном. Это позволит найти модуль и направление вектора силы реакции в текущий момент времени движения схвата в каждой точке его траектории. Для анализа манипуляционных систем и их синтеза большое значение имеет количественная оценка энергозатрат (энергопотребления) на перемещение объекта манипулирования в сравнении с энергозатратами на преодоление сил веса подвижных звеньев, сил трения и инерции и т.п. В основу такого сравнения положим сравнение кинетических энергий схвата с полезным грузом и отдельных подвижных звеньев.

Для манипуляторов разделение сил на движущие силы и силы сопротивления является условным. К движущим силам относятся силы, совершающие положительную работу, к силам сопротивления — отрицательную. Это относится как к силам веса, так и к силам упругости, инерции. С этой точки зрения силы трения и другие силы сопротивления движению, включая силы технологического сопротивления, приложенные, например, к рабочему органу, установленному в схвате, относятся к силам сопротивления, так как совершают отрицательную работу. Таким образом, за время отработки траектории схвата силы веса, инерции, упругости могут быть и движущими и силами сопротивления. Это обуславливает колебание (изменением момента сил движущих, например, на валу ротора электродвигателя привода, и тем самым усугубляет динамическую нагруженность подвижных соединений манипуляторов. Такая знакопеременность сил движущих и сил сопротивления вызывает параметрические колебания, обусловленные неравной жесткостью подвижных соединений в направлении осей координат, жестко связанных с подвижными звеньями. Этим в большой степени объясняется увеличение погрешности позиционирования при увеличении быстродействия (уменьшении времени отработки координат). При наличии же зазоров в подвижных соединениях изменение направления силы реакции на противоположное приводит к удару, что ведет в конечном счете к снижению точностной долговечности манипулятора. Поэтому в основу силового анализа мы положим оценку динамической нагруженности подвижных соединений по силам реакций и будем судить о такой нагруженности по закону изменения составляющих вектора силы реакции по осям систем координат, жестко связанным с подвижными звеньями, за время отработки схватом требуемой траектории. При этом введем понятие интенсивности изменения положения вектора силы реакции относительно, например, оси z и плоскости xy . Тогда каждому закону движения схвата вдоль траектории будет поставлен в соответствие закон изменения силы реакции, как некоторого вектора в системе координат, связанной жестко с подвижным звеном. Если начало

такой системы координат поместить в точку, совпадающую с осью или центром вращения этого звена (местом установки подшипникового узла), то, зная его эллипсоид жесткости в этой системе координат, можно определить и изменение перемещений (деформаций) в направлении этих осей в текущий момент времени движения схвата.

Оценка динамической нагруженности манипуляторов по силам реакции в подвижных соединениях не полностью характеризует динамику манипуляторов. Поэтому наряду с вектором силы реакции будем аналогичным образом рассматривать величину и направление вектора момента инерционных сил и сил веса. При определении этих векторов также будем рассматривать их положение (ориентацию) в системе координат, жестко связанной с подвижным звеном. Это дает возможность проследить изменение моментов сил относительно этих осей за время отработки заданной траектории схвата и сравнить динамическую нагруженность подвижных соединений по моментам сил, действующим в подшипниковом узле.

При таком подходе к оценке динамической нагруженности представляется возможность решить несколько задач, связанных с улучшением конструкции манипуляторов и их эксплуатационных характеристик. К таким задачам могут быть отнесены следующие:

- выявление определенного сочетания подвижностей, обеспечивающих наименьшие динамические нагрузки для конкретной траектории схвата;

- выявление наилучших законов движения звеньев и схвата, обеспечивающих, например, наименьшие динамические нагрузки в определенном направлении относительно осей, связанных с конкретным подшипниковым узлом;

- выявление путей рационального распределения масс подвижных звеньев манипуляторов с заданной программой отработки кинематических характеристик;

- определение направления действия наибольших динамических нагрузок и выявление путей рационального распределения и назначения величин предварительных натягов в подвижных соединениях звеньев.

Все это дает возможность реализовать систему управления движением звеньев, обеспечивающую "щадящий" режим эксплуатации манипулятора без снижения производительности (времени отработки требуемой траектории схвата).

Наиболее важным в рассматриваемом подходе является то, что представляется возможность проанализировать количественно и качественно динамическую нагруженность подвижных соединений звеньев манипуляторов на этапе их схемной проработки. В основу методики положено математическое моделирование связей

массово-геометрических характеристик манипуляторов и их кинематики с динамическими нагрузками.

В дальнейшем будем различать структурную схему манипулятора, кинематическую и расчетную.

9.2. Особенности структурного анализа и синтеза схем манипуляторов

В основе структурного анализа лежит оценка степени подвижности манипулятора и его маневренности. Степень подвижности определяется суммарной подвижностью кинематических пар манипулятора. Маневренность — это степень подвижности манипулятора при неподвижном схвате. Таким образом, структурная схема манипулятора предусматривает изображение определенного сочетания его кинематических пар как соединений звеньев, допускающих их относительное движение. При этом размеры звеньев и их соприкасающихся рабочих поверхностей, образующих подвижное соединение, не принимают во внимание.

Теоретические предпосылки, положенные в основу структурного анализа для замкнутых механизмов, распространяются и на манипуляторы как пространственные незамкнутые схемы, последнее (выходное) звено которых входит в одну кинематическую пару. Поэтому теория кинематических пар, изложенная в части 6 пособия, является основой для понимания данного раздела.

Рассмотрим некоторые структурные схемы манипуляторов.

На рис.9.1, а представлена структурная схема манипулятора, содержащая только поступательные одноподвижные кинематические пары. На рис.9.1, б — схема манипулятора, содержащая только вращательные одноподвижные кинематические пары. Степень подвижности этих схем манипуляторов равна трем.

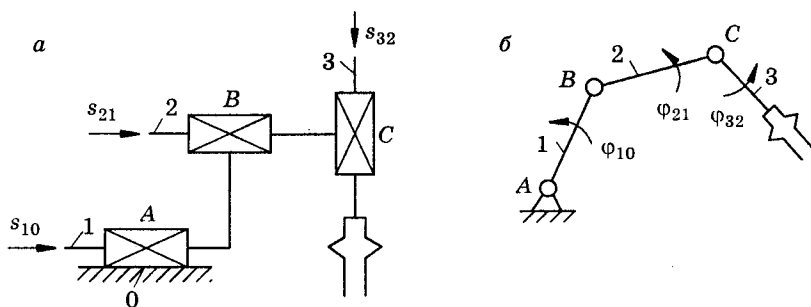


Рис.9.1. Структурные схемы плоских манипуляторов с тремя степенями подвижности

На рис.9.2, а изображена схема манипулятора с шестью степенями подвижности, на рис.9.2, б — с семью. Схемы манипу-

ляторов, представленные на рис.9.2, позволяют реализовать движение схвата в пространстве.

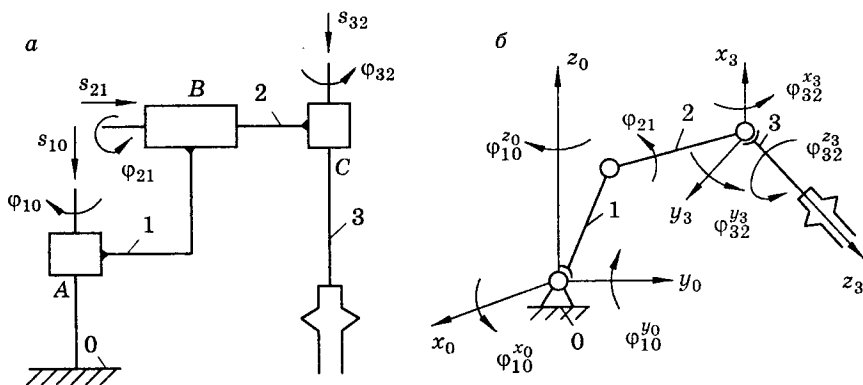


Рис.9.2. Структурные схемы пространственных манипуляторов с шестью (а) и семью (б) степенями подвижности

На рис.9.3 представлены схемы манипуляторов с пятью степенями подвижности, которые обеспечиваются различными сочетаниями звеньев и кинематических пар. Структурные схемы манипуляторов на рис.9.1, 9.2 и 9.3 не раскрывают особенности геометрии, т.е. их кинематические пары (вращательные и поступательные) не привязаны к системам координат. Дело в том, что разнообразие схем манипуляторов зависит не только от количества звеньев и кинематических пар, но и определяется также ориентацией (взаимным расположением) звеньев в пространстве при присоединении их друг к другу, не оказывая влияния на общее число степеней подвижности. Эта особенность во многом определяет законы изменения обобщенных координат при обработке схватом одной и той же траектории.

Таким образом, степень подвижности манипулятора определяется количеством обобщенных координат (поступательных и вращательных), которые однозначно определяют положение схвата, т.е. выходного (конечного) звена. Другими словами, степень подвижности указывает на количество независимых движений (перемещений) схвата вдоль траектории (пространственной или плоской), а также его угловой ориентации.

Маневренность манипулятора определяется количеством подвижностей (количеством обобщенных координат) при неподвижном схвате. Если мысленно закрепить схват, т.е. связать его неподвижно со стойкой (звеном 0) (см. рис.9.1, 9.2), то каждое звено манипулятора будет входить в две кинематические пары. В этом случае схема механизма, которая получается в результате такого закрепления выходного звена, будет замкнутой.

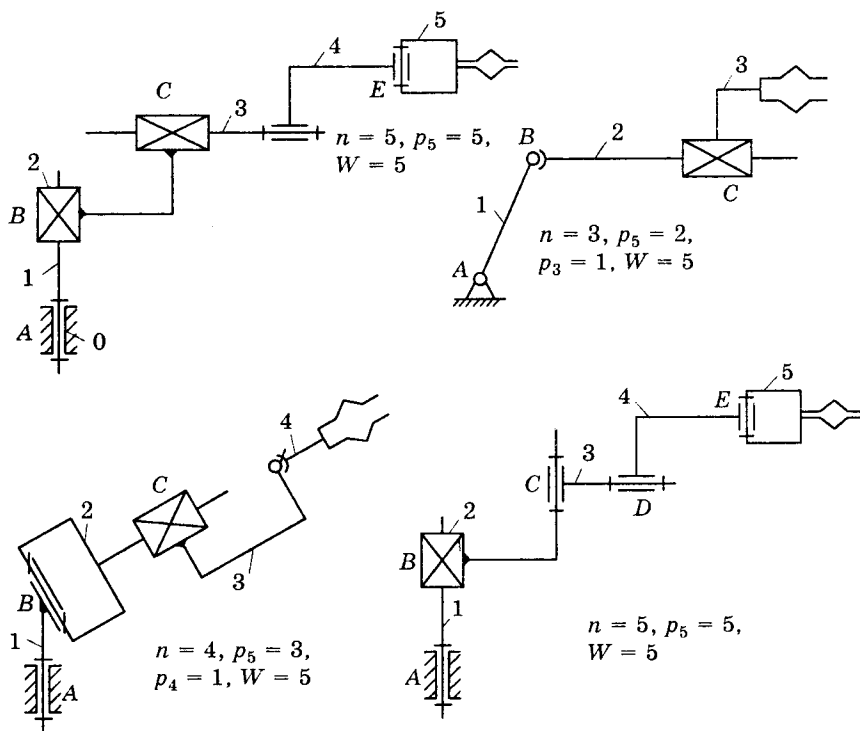


Рис.9.3. Структурные схемы манипуляторов с пятью степенями подвижности

Подвижность такого механизма определяется оставшимся количеством подвижных звеньев после закрепления схвата, а также видом и количеством кинематических пар, в которые входят эти звенья. В этом случае степень подвижности определяется по формулам, учитывающим возможное ограничение движения звеньев в плоскости или пространстве.

Так, например, для схемы на рис.9.1, если звено 3 жестко связано со стойкой, имеем $W_{пл} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$. Это означает, что при наличии трех степеней подвижности схем манипуляторов, представленных на рис.9.1, их маневренность равна нулю.

Для схемы, изображенной на рис.9.2, а, имеем $W_{пр} = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 0$, для рис.9.2, б — $W_{пр} = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1$.

Нулевая степень подвижности манипулятора при закрепленном схвате означает отсутствие возможности движения его звеньев. Маневренность манипулятора, равная единице, означает возможность выхода на одну и ту же координату при различном (неоднозначном) положении звеньев. Например, для манипулятора,

изображенного на рис.9.2, б, при неподвижном схвате звенья 1 и 2 имеют возможность вращения вокруг оси 1 — 1 (см. рис.9.4).

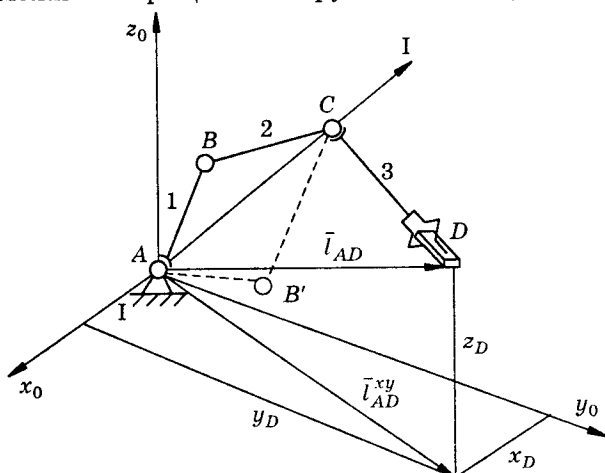


Рис.9.4. Схема манипулятора, позволяющего "отработать" координаты $x_D y_D z_D$ при различных положениях звеньев 1, 2

Наличие маневренности позволяет ввести некоторое многообразие относительного расположения звеньев манипулятора для каждого определенного положения схвата. Это означает, что одни и те же координаты $x_D y_D z_D$ детали (схвата) могут быть отработаны при различном относительном расположении звеньев. Такая маневренность важна для обхода разнообразных препятствий при обслуживании некоторого пространства. С динамической точки зрения наличие маневренности означает возможность отработки одной и той же траектории схвата при различных траекториях общего центра масс манипулятора. Это означает возможность реализации движения схвата с наиболее выгодным сочетанием относительного расположения звеньев с точки зрения динамической нагруженности их подвижных соединений.

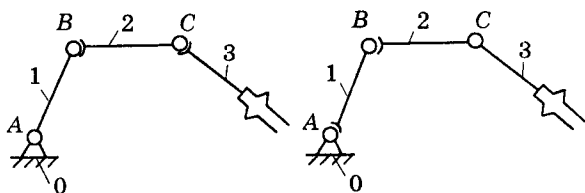


Рис.9.5. Схемы манипуляторов с семью степенями подвижности и различным сочетанием кинематических пар

Структурный анализ манипуляторов подразумевает проектирование их схем на основе сочетания различных кинематических пар. Например, схема манипулятора, представленная

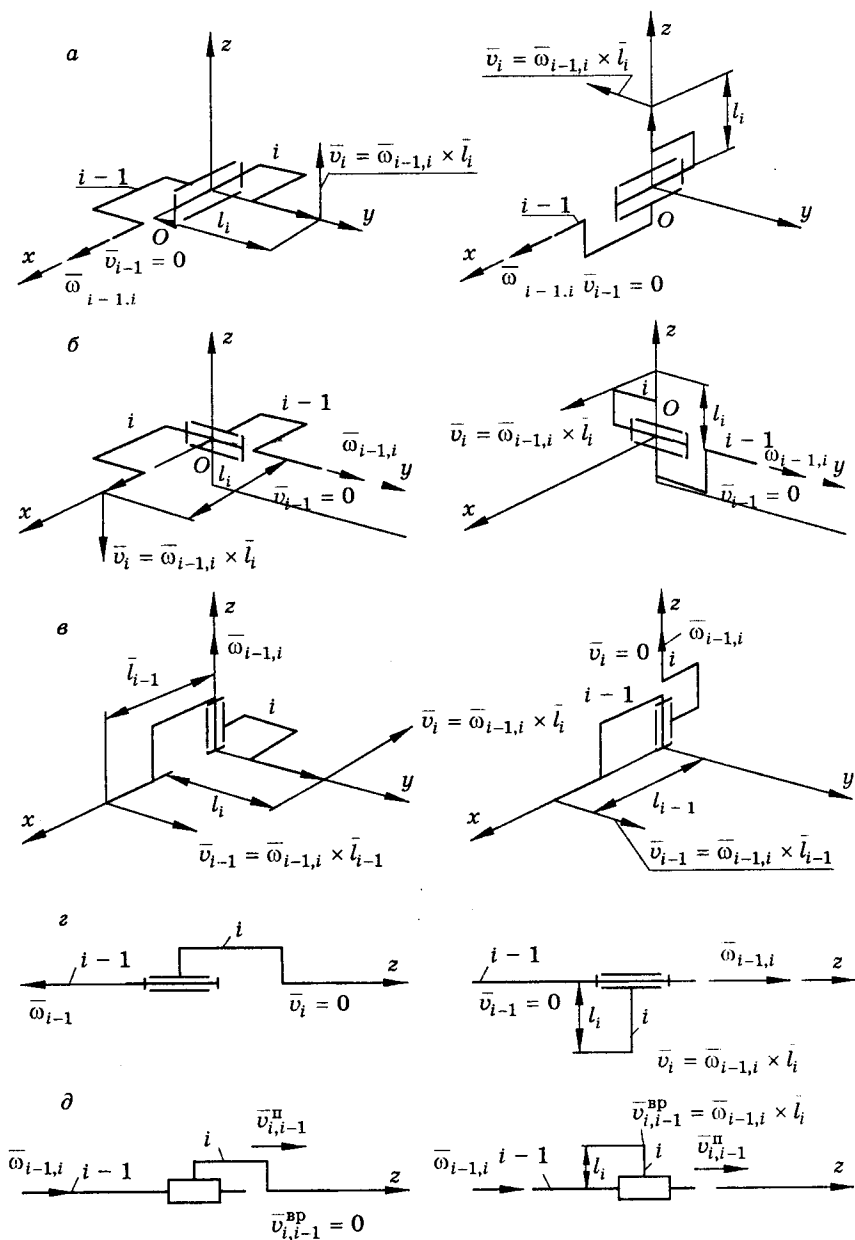


Рис.9.6. Схемы соединений звеньев манипулятора

на рис.9.2, б, с семью степенями подвижности может иметь еще два варианта (см. рис.9.5).

Наилучшее сочетание звеньев и кинематических пар на этапе структурного синтеза не может быть выявлено. Здесь требуются учет основных эксплуатационных характеристик и установление количественной связи между ними и определенным сочетанием (расположением) кинематических пар. Так, например, сравнение схем манипуляторов, представленных на рис.9.4 и 9.5, указывает на неравнозначность возможностей снижения динамической нагруженности в трех представленных вариантах манипулятора, несмотря на то, что во всех случаях степень его подвижности — семь, а маневренности — единица. Возможности изменения траектории общего центра для схемы, представленной на рис.9.4 большие в сравнении со схемами, изображенными на рис.9.5.

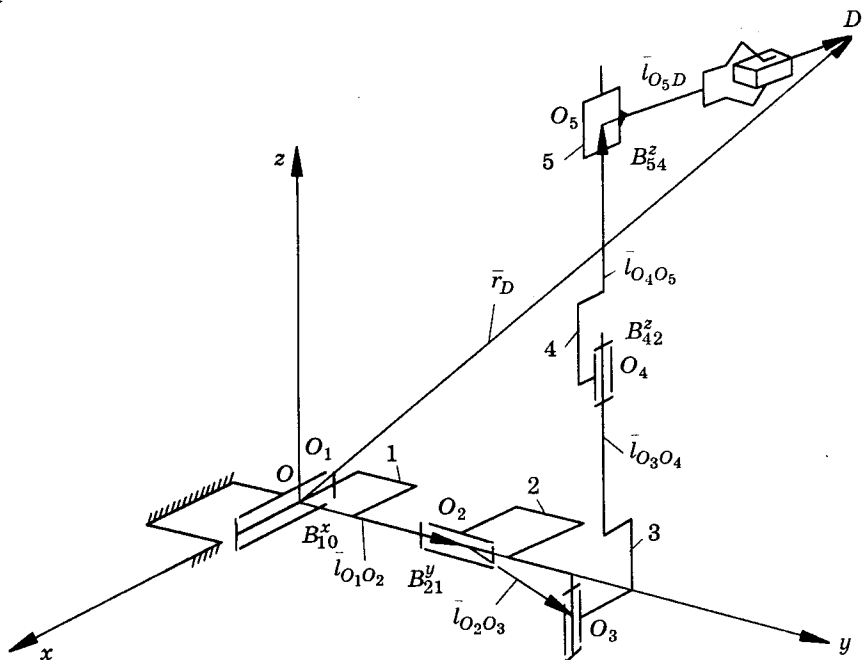


Рис.9.7. Структурная схема манипулятора с шестью степенями подвижности

Особенности структурного синтеза схем манипуляторов заключаются в их многовариантности. Компоновка той или иной схемы отличается не только видом кинематических пар, но и последовательностью их сборки с учетом ориентации в пространстве векторов угловых скоростей $\omega_{i-1,i}$ относительного вращения

звеньев $i - 1, i$, а также векторов их относительного поступательного движения $\bar{v}_{i-1,i}$. На рис.9.6, *a, б, в, г* представлены схемы соединений звеньев, поясняющие ориентацию векторов $\omega_{i-1,i}$ относительно предыдущего $i - 1$ звена и последующего i . На рис.9.6, *д* представлены схемы соединения звеньев в двухподвижную пару поступательную и вращательную. Здесь многовариантность определяется не только тем, какое звено считать предыдущим и последующим (соединять звено $i - 1$ с i или i с $i + 1$), но и тем, что линейная скорость входного или выходного звеньев в зависимости от их конструкции может быть равной нулю или же определяться ориентацией друг к другу.

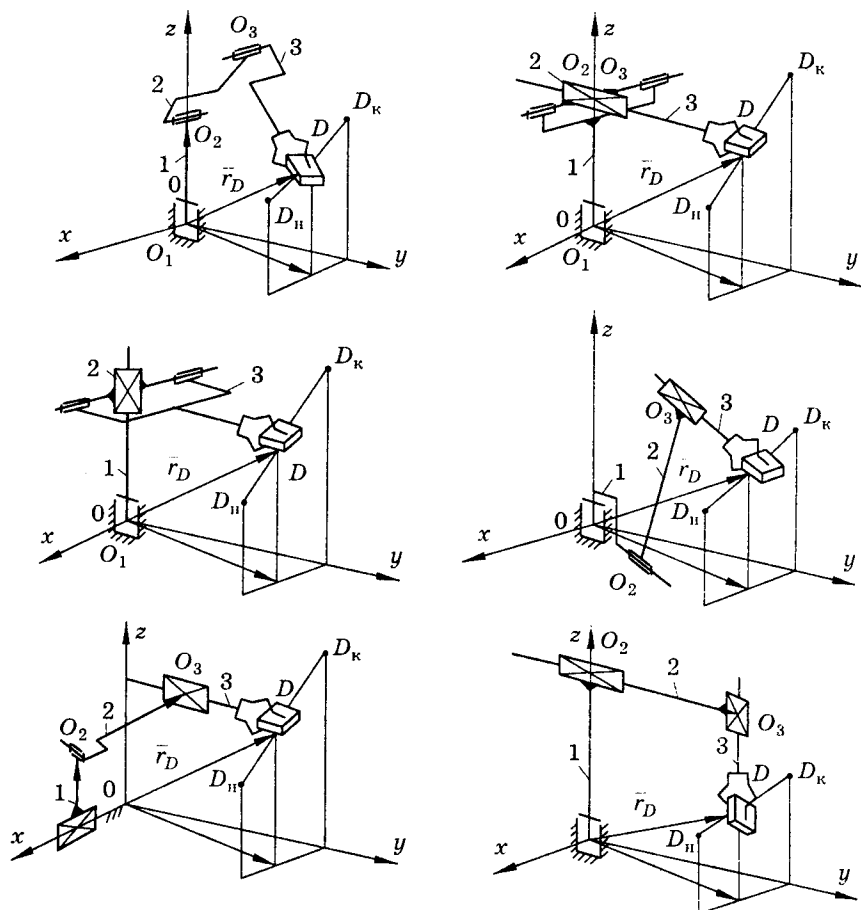


Рис.9.8. Схемы манипуляторов с тремя степенями подвижности

α_{32} , что и для перемещения. Этими координатами достигается расположение точек D_K и D_H на одной оси. Ими же может быть обеспечена "доставка" собираемой детали, то есть линейное перемещение ее для сборки. Однако без координаты α_{43} (поворота звена 4 относительно звена 3) сборка не может быть произведена. С этой точки зрения схема, представленная на рис. 9.9, нерациональна. Более рациональная компоновка требует наличия трехосного вращения звена 4 (схвата) относительно звена 3. В этом случае ориентация детали в пространстве может быть реализована в процессе ее перемещения по траектории $D_H D_K$, по окончании перемещения (в точке D_K) досылка (перемещение вдоль оси $D_1 D_2$) может быть реализована координатами α_{10} , α_{21} , α_{32} . Осевого перемещения звена 4 относительно звена 3 не потребуются. Наличие же подвижности s_{43} устраняет необходимость включения координат для сборки в конце перемещения детали. Однако в этом случае требуется семь степеней подвижности.

Проблемы структурного синтеза манипуляторов могут быть решены в некоторой степени, если операцию компоновки и многовариантного анализа с целью выявления наиболее рациональных схем реализовать с помощью ЭВМ. В основу такого подхода можно положить минимальное число подвижностей для перемещения и ориентации деталей в пространстве. Отбраковку неприемлемых сочетаний звеньев и кинематических пар в этом случае можно осуществлять проверкой возможностей отработки схватом известных траекторий центра масс детали и ориентации некоторого вектора с началом в центре масс детали, ориентированного определенным образом относительно ее эллипсоида инерции. В этом случае задача может быть сведена к анализу движения точки вдоль заданной траектории и к анализу вращательного движения тела вокруг некоторой точки с заданными координатами и законами поступательного и вращательного движения. На рис. 9.10 представлена схема манипулятора, обеспечивающая перемещение детали по некоторой траектории $D_H D_K$ ее центра масс. Взаимосвязь геометрических параметров выбранной схемы манипулятора с параметрами траектории точки D может быть установлена из векторного равенства, отражающего замкнутость векторного контура, рассматриваемого в неподвижной системе координат. Так, для рис. 9.7 имеем

$$\bar{r}_D = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 O_3} + \bar{l}_{O_3 O_4} + \bar{l}_{O_4 O_5} + \bar{l}_{O_5 D}.$$

Для схем манипулятора на рис. 9.8 и 9.9

$$\bar{r}_D = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 O_3} + \bar{l}_{O_3 D}.$$

Для схемы на рис. 9.10 получим

$$\bar{r}_D = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 O_3} + \bar{l}_{O_3 O_4} + \bar{l}_{O_4 D}.$$

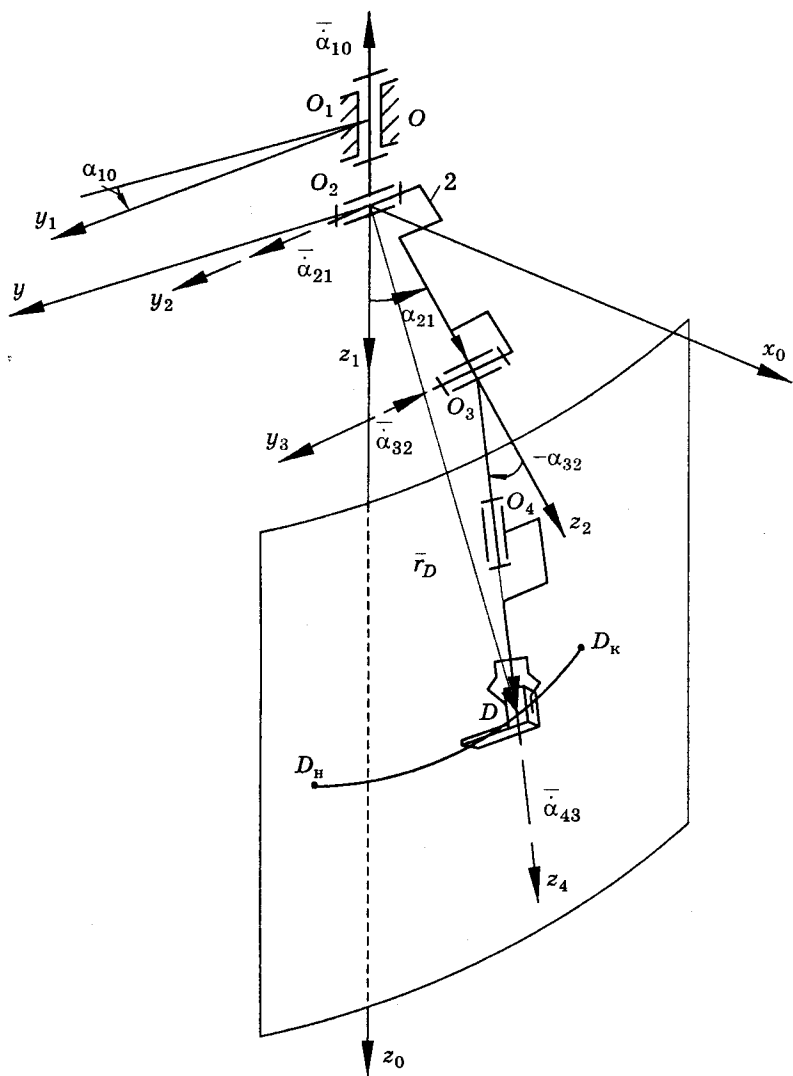


Рис.9.10. Схема манипулятора с четырьмя степенями подвижности

Приведенные параметры позволяют сформулировать следующие правила выбора подвижных систем координат, жестко связанных со звеньями манипулятора:

— векторы относительных угловых и линейных скоростей направляются по осям правой прямоугольной системы координат в положительном или отрицательном направлении, эти направления

зависят от начальных и конечных координат траектории схвата и направления движения вдоль нее;

– начало последующей подвижной системы координат располагается на соответствующем звене в точке, совпадающей с концом вектора, расположенного в предыдущей системе координат;

– одна из осей подвижной системы координат проходит через начало предшествующей системы ($(i - 1)$ -го звена манипулятора) и последующей системы (i -го звена).

Такая привязка систем координат должна быть неизменной и для определения геометрических, кинематических и динамических характеристик манипулятора. Это позволяет связать функционально скорость и ускорение движения схвата вдоль заданной траектории со скоростями и ускорениями звеньев и их центров масс дифференцированием векторных равенств (замкнутых векторных контуров).

Как отмечалось ранее, динамическая нагруженность определяется зависимостью составляющих векторов сил реакций и векторов моментов в системах координат, связанных жестко с подвижными звеньями. При этом выявляются не только значения их проекций, но и характер изменения за время отработки охватом требуемой траектории, то есть определяются положения схвата, где значения проекций реактивных сил и моментов меняют знак на противоположный. В этих значениях траектории схвата при наличии зазоров в подвижных соединениях возможны раскрытие стыка и появление удара. Избежать таких ударов или устранить их можно путем изменения закона движения схвата вдоль траектории, а также изменения закона относительного движения звеньев. Следует отметить, что последнее возможно при наличии маневренности манипулятора. Таким образом, возникает не менее важная задача создания системы управления для конкретной схемы манипулятора, обеспечивающей наименьшие динамические нагрузки при отработке схватом различных траекторий. В этом случае требуется поиск наиболее выгодного сочетания кинематических характеристик, таких, которые обеспечивали бы наиболее плавное, без переходов через нуль, изменение проекций реактивных сил и моментов на соответствующие оси координат, жестко связанные с подвижными звеньями.

Таким образом, возможны два подхода к исследованию динамической нагруженности в подвижных соединениях манипуляторов. При неизменной системе управления неизменных законах обобщенных сил) для определенных массово-геометрических характеристик его звеньев определяются скорости и ускорения звеньев и их центров масс, и затем решается задача о силах и моментах сил в подвижных соединениях. Эта информация может

быть использована для прочностных расчетов, оценки точностной долговечности и т.п.

Вторая задача преследует цель выявления законов движения звеньев и их реализацию с помощью систем управления (по силе, скорости, мощности), обеспечивающих "падающий" режим эксплуатации манипулятора по динамическим нагрузкам в подвижных соединениях.

И в том и в другом случае в основе зависимостей, определяющих динамическую нагруженность подвижных соединений манипуляторов, лежат массово-геометрические и кинематические характеристики их подвижных звеньев.

9.3. Массово-геометрические характеристики звеньев манипуляторов

Как известно [21], силы инерции и их моменты определяются не только массой подвижных звеньев и ускорением центра масс. Для манипуляторов особое значение имеет распределение масс подвижных звеньев по объему. Именно характер распределения масс подвижного звена относительно осей системы координат, жестко связанной с ним, в сочетании с величиной и направлением вектора его угловой скорости определяет особенности силового взаимодействия в подвижном соединении. Поэтому для решения динамических задач требуется введение количественных характеристик, позволяющих определить величину и направление векторов в пространстве. Это относится как к векторам сил инерции и моментов сил инерции каждого звена, так и к векторам его угловой скорости, скорости центра масс, вектору углового ускорения, вектору ускорения центров масс, а также вектору кинематического момента звена.

При решении задач механики часто выбор систем координат не оказывает влияния на сущность используемых уравнений, на принципиальную возможность решения задачи. Выбор систем координат облегчает решение или раскрывает физическую сущность рассматриваемых вопросов. Однако для решения динамических задач манипуляторов выбор систем координат имеет некоторую особенность. Это связано не только с единообразием, с некоторой унификацией аналитического представления массово-геометрических, кинематических и динамических характеристик манипуляторов. Как будет показано далее, при определении составляющих главного момента сил инерции выбор систем координат имеет принципиальное значение.

На рис.9.11 представлена прямоугольная система координат, связанная с некоторым звеном манипулятора. Начало этой системы координат расположено в кинематической паре i -го звена с предыдущим ($i - 1$). Схема, представленная на рис.9.11, поясняет

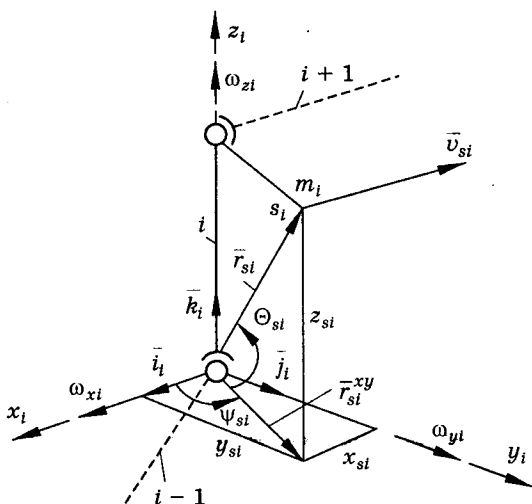


Рис.9.11. К определению массово-геометрических характеристик звеньев манипулятора

ориентацию i -го звена манипулятора, входящего в сферическую кинематическую пару с предыдущим $(i-1)$ и последующим $(i+1)$ звеном. В дальнейшем оси z_i каждого i -го звена будем располагать так, чтобы они проходили через центры (оси) кинематических пар, в которые входит данное звено. Для выходного звена манипулятора, входящего в одну кинематическую пару, ось z будем располагать вдоль этого звена. Тогда направление осей x и y выбирается так, чтобы

единичные векторы $\bar{i}_i, \bar{j}_i, \bar{k}_i$ были ориентированы в соответствии с требованиями правой системы координат:

$$\bar{i}_i \times \bar{j}_i = \bar{k}_i, \quad \bar{j}_i \times \bar{k}_i = \bar{i}_i, \quad \bar{k}_i \times \bar{i}_i = \bar{j}_i.$$

Эти векторы единичны и ортогональны, поэтому

$$\bar{i}_i^2 = \bar{j}_i^2 = \bar{k}_i^2 = 1 \quad \text{и} \quad \bar{i}_i \bar{j}_i = \bar{j}_i \bar{k}_i = \bar{k}_i \bar{i}_i = 0.$$

В общем случае центр масс S_i i -го звена определяется радиусом-вектором

$$\bar{r}_{S_i} = x_{S_i} \bar{i}_i + y_{S_i} \bar{j}_i + z_{S_i} \bar{k}_i.$$

Величина его определяется из соотношения

$$|\bar{r}_{S_i}| = \sqrt{x_{S_i}^2 + y_{S_i}^2 + z_{S_i}^2}.$$

Направление вектора \bar{r}_{S_i} в своей системе координат определяется углами, равными

$$\Theta = \arctg \frac{z_{S_i}}{\sqrt{x_{S_i}^2 + y_{S_i}^2}}, \quad \psi = \arctg \frac{y_{S_i}}{x_{S_i}}.$$

К массово-геометрическим характеристикам звеньев манипуляторов относятся также тензоры инерции относительно осей, жестко связанных с ними [46]. Геометрическим образом тензора инерции является эллипсоид инерции [4]. Каждой точке звена

манипулятора соответствует определенный эллипсоид инерции, который характеризует его моменты инерции относительно всех осей, проходящих через данную точку (см. 8.2).

Если, например, конфигурация i -го звена такова, что ось z совпадает с осью его материальной симметрии, то выражение тензора инерции этого звена примет вид

$$[I_i] = \begin{vmatrix} I_x^i & -I_{xy}^i & 0 \\ -I_{yx}^i & I_y^i & 0 \\ 0 & 0 & I_z^i \end{vmatrix}.$$

Любая ось, не проходящая через центр масс (центр звена, является главной только в одной точке. Другими словами, она является осью лишь того эллипсоида инерции, центр которого совпадает с данной точкой.

Если масса i -го звена распределена так, что обе оси xz , yx (или yz) являются осями материальной симметрии, то тензор инерции имеет вид

$$[I_i] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}.$$

В случае, когда осью материальной симметрии является ось y , имеем

$$[I_i] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{vmatrix}.$$

При наличии же оси материальной симметрии, совпадающей с осью x , тензор инерции принимает вид

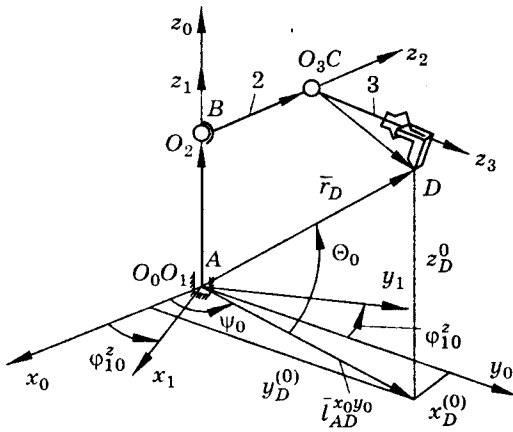
$$[I_i] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & -I_{yz} \\ 0 & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix}.$$

9.4. Определение кинематических характеристик звеньев манипуляторов с использованием матричной формы преобразования координат векторов

Для определения кинематических характеристик звеньев манипулятора необходимо знать размеры звеньев, координаты их центров масс и характер соединения друг с другом, то есть вид кинематических пар. Здесь речь идет не о действительных скоростях и ускорениях, определяемых, например, из уравнения

Лагранжа 2-го рода, а и взаимосвязи кинематических характеристик звеньев, то есть о скоростях и ускорениях, определяемых из условий геометрических связей, накладываемых кинематическими парами на их свободное движение. Другими словами, в данном разделе рассматривается задача о положениях, скоростях, ускорениях звеньев манипулятора. В основу такого анализа, как отмечалось ранее, положено условие замкнутости векторного контура, отображающее собой геометрические связи в подвижных соединенных звеньев. Например, для схемы манипулятора, представленной на рис.9.12, имеем следующее векторное уравнение:

$$\bar{l}_{AD} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} + \bar{l}_{CD}. \quad (9.1)$$



Уравнение (9.1) характеризует геометрические связи подвижных звеньев 1, 2, 3 манипулятора; оно остается справедливым для данной схемы при заданном сочетании подвижностей для любой траектории точки \$D\$ (траектории охвата).

Для решения задачи о положениях схвата в системе координат \$x_0, y_0, z_0\$ связанной со стационарной (неподвижным звеном), \$\bar{l}_{AD}, \bar{l}_{BC}, \bar{l}_{CD}\$,

Рис.9.12. К определению кинематических характеристик звеньев манипулятора

удобно использовать метод преобразования координат векторов, заданных в своих системах координат, с учетом их связи в виде уравнения (9.1). Как было установлено ранее, системы координат \$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\$ и \$x_3, y_3, z_3\$ связываем с подвижными звеньями, как указано на рис.9.12.

Тогда уравнение (9.1) примет вид

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{BC} \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) с математической точки зрения представляет собой преобразование координат векторов \$\bar{l}_{AB}, \bar{l}_{BC}, \bar{l}_{CD}\$, заданных координатами в своих системах координат, в координаты вектора \$\bar{l}_{AD}\$, заданного в неподвижной системе координат \$x_0, y_0\$,

z_0 . Здесь $[M_{10}]$, $[M_{20}]$ и $[M_{30}]$ — матрицы поворота (преобразования) векторов из подвижных систем координат 1, 2, 3 в неподвижную, связанную со станиной. С другой стороны, уравнение (9.2) указывает на то, что преобразование координат векторов \bar{l}_{AB} , \bar{l}_{BC} и \bar{l}_{CD} в соответствии с матрицами $[M_{10}]$, $[M_{20}]$ и $[M_{30}]$ обеспечит положение схвата (точки D) в соответствии с заданной траекторией. Траектория точки может быть задана в прямоугольной системе координат координатами $x_D^{(0)}$ $y_D^{(0)}$ $z_D^{(0)}$ или в сферической системе координат:

$$l_{AD} = \sqrt{[x_D^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2 + [z_D^{(0)}]^2}, \quad \Theta = \arctg \frac{z_D^{(0)}}{\sqrt{[x_D^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2}},$$

$$\psi_0 = \arctg \frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}}.$$

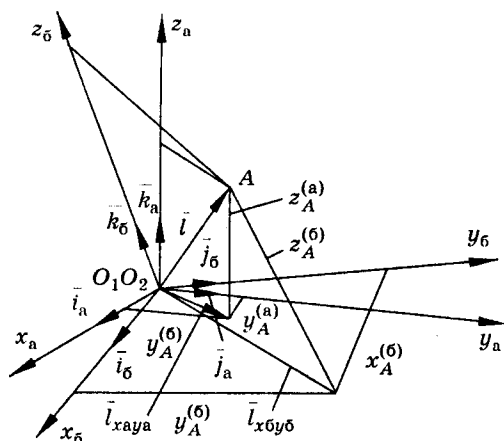


Рис.9.13. К определению проекций вектора \bar{l} в системах координат, повернутых друг относительно друга

оси не должны быть изменены при дальнейших исследованиях и преобразованиях.

Рассмотрим некоторые особенности матричной формы записи в процессе преобразования векторов, заданных координатами в различных системах координат. Пусть даны две прямоугольные системы координат с общим началом (рис.9.13).

Вектор \bar{l} в этих системах координат записывается в виде

Матрицы поворота подвижных систем координат относительно неподвижных определяются с учетом возможных движений звеньев относительно друг друга, то есть с учетом типа кинематических пар, в которые входит данное звено (с учетом подвижностей этих кинематических пар). Таким образом, выражение каждой матрицы определяется выбранной системой координат, расположением и относительной ориентацией в пространстве их осей, так что однажды выбранные

$$\begin{aligned}\bar{l}_a &= \bar{i}_a x_A^{(a)} + \bar{j}_a y_A^{(a)} + \bar{k}_a z_A^{(a)}, \\ \bar{l}_b &= \bar{i}_b x_A^{(b)} + \bar{j}_b y_A^{(b)} + \bar{k}_b z_A^{(b)}.\end{aligned}$$

Проектирование вектора $\bar{l}^{(a)}$, например, на ось x_b означает скалярное произведение единичного вектора \bar{i}_b на этот вектор:

$$x_A^{(b)} = \bar{i}_b \bar{l}^{(a)}.$$

Аналогично имеем — $y_A^{(b)} = \bar{j}_b \bar{l}^{(a)}$, $z_A^{(b)} = \bar{k}_b \bar{l}^{(a)}$. Запись скалярного произведения векторов, заданных координатами, дает следующие выражения:

$$\begin{Bmatrix} x_A^{(b)} \\ y_A^{(b)} \\ z_A^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{i}_b \bar{i}_a x_A^{(a)} + \bar{i}_b \bar{j}_a y_A^{(a)} + \bar{i}_b \bar{k}_a z_A^{(a)} \\ \bar{j}_b \bar{i}_a x_A^{(a)} + \bar{j}_b \bar{j}_a y_A^{(a)} + \bar{j}_b \bar{k}_a z_A^{(a)} \\ \bar{k}_b \bar{i}_a x_A^{(a)} + \bar{k}_b \bar{j}_a y_A^{(a)} + \bar{k}_b \bar{k}_a z_A^{(a)} \end{Bmatrix}. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.3) можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} x_A^{(b)} \\ y_A^{(b)} \\ z_A^{(b)} \end{Bmatrix} = [M_{ab}] \begin{Bmatrix} x_A^{(a)} \\ y_A^{(a)} \\ z_A^{(a)} \end{Bmatrix}, \quad (9.4)$$

где $[M_{ab}]$ — матрица поворота (перевода) координат вектора $\bar{l}^{(a)}$ заданного в системе координат "а" (см. рис.9.13), в систему координат "б". Она имеет вид

$$[M_{ab}] = \begin{Bmatrix} \bar{i}_b \bar{i}_a & \bar{i}_b \bar{j}_a & \bar{i}_b \bar{k}_a \\ \bar{j}_b \bar{i}_a & \bar{j}_b \bar{j}_a & \bar{j}_b \bar{k}_a \\ \bar{k}_b \bar{i}_a & \bar{k}_b \bar{j}_a & \bar{k}_b \bar{k}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(x_b^\wedge x_a) & \cos(x_b^\wedge y_a) & \cos(x_b^\wedge z_a) \\ \cos(y_b^\wedge x_a) & \cos(y_b^\wedge y_a) & \cos(y_b^\wedge z_a) \\ \cos(z_b^\wedge x_a) & \cos(z_b^\wedge y_a) & \cos(z_b^\wedge z_a) \end{Bmatrix}. \quad (9.5)$$

Перевод вектора $\bar{l}^{(b)}$, заданного в системе координат "б", в систему координат "а" записывается по аналогии с (9.4) следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} x_A^{(a)} \\ y_A^{(a)} \\ z_A^{(a)} \end{Bmatrix} = [M_{ba}] \begin{Bmatrix} x_A^{(b)} \\ y_A^{(b)} \\ z_A^{(b)} \end{Bmatrix}. \quad (9.6)$$

В уравнении (9.6) матрица $[M_{ba}]$ означает перевод координат вектора $\bar{l}^{(b)}$ в координаты этого вектора $\bar{l}^{(a)}$, заданного в системе координат "а". По аналогии с (9.5) она имеет вид

$$[M_{6a}] = \begin{vmatrix} \bar{i}_a \bar{i}_6 & \bar{i}_a \bar{j}_6 & \bar{i}_a \bar{k}_6 \\ \bar{j}_a \bar{i}_6 & \bar{j}_a \bar{j}_6 & \bar{j}_a \bar{k}_6 \\ \bar{k}_a \bar{i}_6 & \bar{k}_a \bar{j}_6 & \bar{k}_a \bar{k}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x_a^\wedge x_6) & \cos(x_a^\wedge y_6) & \cos(x_a^\wedge z_6) \\ \cos(y_a^\wedge x_6) & \cos(y_a^\wedge y_6) & \cos(y_a^\wedge z_6) \\ \cos(z_a^\wedge x_6) & \cos(z_a^\wedge y_6) & \cos(z_a^\wedge z_6) \end{vmatrix}. \quad (9.7)$$

Сравнение уравнений (9.5) и (9.7) показывает, что

$$[M_{6a}] = [M_{a6}]'.$$

Таким образом, перевод вектора, заданного координатами в "старой" системе координат, в "новую" систему означает умножение его "старых" координат на матрицу перевода из "старой" системы в "новую". Обратная операция означает произведение соответствующих координат на матрицу, отличающуюся от предыдущей перестановкой ее членов относительно главной диагонали.

Общее правило при этом такое — если переводим вектор $\bar{l}^{(a)}$ в $\bar{l}^{(6)}$, то на первом месте в строчках и столбцах матрицы пишутся орты осей системы "б", то есть рассматриваются направляющие косинусы между осями системы координат "б" и "а". Если же переводится вектор $\bar{l}^{(6)}$ в $\bar{l}^{(a)}$, то на первом месте пишутся орты осей системы "а", то есть рассматриваются направляющие косинусы между осями системы координат "а" и "б".

В манипуляторах часто подвижные звенья соединяются так, что их поворот обеспечивается не одновременно относительно всех трех осей. Чаще эти движения выполняются последовательно, а в некоторых конструкциях манипуляторов кинематические пары допускают один или два поворота. Поэтому практическую ценность имеют матрицы поворота относительно отдельных осей. Тогда их перемножение дает общий случай двух- или трехосного вращения. Такие матрицы, отображающие частные случаи, могут быть получены из уравнений (9.5) и (9.7) с учетом того, что $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, а $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$. На рис.9.14 представлены системы координат, имеющие возможность одноосного вращения вокруг осей x (рис.9.14, а), y (рис.9.14, б) и z (рис.9.14, в)

Матрица (9.5) для рис.9.14, а примет вид

$$[M_{a6}]_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{vmatrix}. \quad (9.8)$$

Матрица (9.5) для рис.9.14, б примет вид

$$[M_{a6}]_y = \begin{vmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{vmatrix}. \quad (9.9)$$

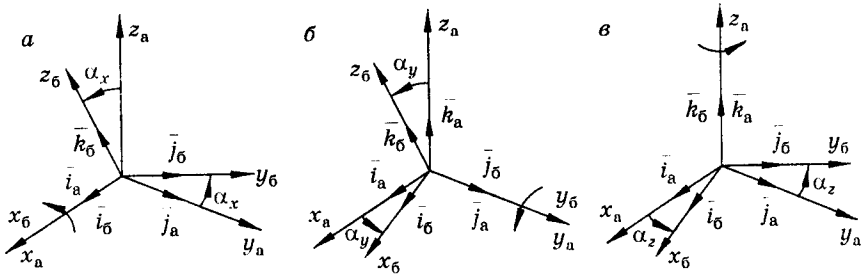


Рис.9.14. Относительное расположение систем координат при одноосных поворотах

Матрица (9.5) для рис.9.14, в примет вид

$$[M_{a6}]_z = \begin{vmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.10)$$

Матрица (9.7) для рис.9.14 запишется в виде

$$[M_{a6}]'_x = [M_{6a}]_x, [M_{a6}]'_y = [M_{6a}]_y, [M_{a6}]'_z = [M_{6a}]_z.$$

Знак "штрих" обозначает транспонирование матриц.

Возвращаясь к задаче о положениях звеньев манипуляторов (см. рис.9.12) относительно неподвижной системы координат, запишем правило перевода их из любой подвижной системы в неподвижную, отстоящую от последней ближе или дальше. Будем считать, что чем больше звеньев у манипулятора, тем дальше от неподвижной системы координат отстоит последняя подвижная система, связанная со звеном, на котором располагается схват.

Пусть некоторый манипулятор обладает числом n подвижных звеньев (на рис. 9.12 $n = 3$). Тогда перевод вектора \vec{l}_1 , расположенного в первой системе координат, в нулевую (связанную со станиной) запишется в виде $l^{(0)} = [M_{10}]\vec{l}^{(1)}$.

Перевод из второй системы в первую:

$$\vec{l}^{(1)} = [M_{21}]\vec{l}^{(2)};$$

из третьей во вторую:

$$\vec{l}^{(2)} = [M_{32}]\vec{l}^{(3)}.$$

Следует отметить, что матрицы (9.8), (9.9), (9.10) соответствует случаю, когда у систем "а" и "б" одна из соответствующих осей не только совпадает, но и параллельна.

Для перевода осей некоторой системы координат в параллельность осям другой системы приходится выполнять не один, а несколько поворотов. В этом случае общая запись этого преобразования, например, для манипулятора, имеющего шесть подвижных

ных звеньев, входящих в шесть кинематических пар, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\bar{l}^{(0)} &= [M_{10}]\bar{l}^{(1)} = [M_{10}][M_{21}][M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}]\bar{l}^{(6)}, \\ \bar{l}^{(1)} &= [M_{21}]\bar{l}^{(2)} = [M_{21}][M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}]\bar{l}^{(6)}, \\ \bar{l}^{(2)} &= [M_{32}]\bar{l}^{(3)} = [M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}]\bar{l}^{(6)}, \\ \bar{l}^{(3)} &= [M_{43}]\bar{l}^{(4)} = [M_{43}][M_{54}][M_{65}]\bar{l}^{(6)}, \\ \bar{l}^{(4)} &= [M_{54}]\bar{l}^{(5)} = [M_{54}][M_{65}]\bar{l}^{(6)}, \\ \bar{l}^{(5)} &= [M_{65}]\bar{l}^{(6)} = [M_{65}]\bar{l}^{(6)}.\end{aligned}$$

Из последних соотношений можно сделать вывод о том, что перевод вектора $\bar{l}^{(6)}$, заданного в шестой системе координат, в нулевую означает умножение его координат, заданных в шестой системе, на матрицу (M_{60}) преобразования (поворота), имеющую вид

$$[M_{60}] = [M_{10}][M_{21}][M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}]. \quad (9.11)$$

Перевод вектора $\bar{l}^{(6)}$, заданного координатами в шестой системе, в первую означает произведение этих координат на матрицу (M_{61}) имеющую вид

$$[M_{61}] = [M_{21}][M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}]. \quad (9.12)$$

Перевод вектора $\bar{l}^{(6)}$ во вторую систему означает произведение на матрицу (M_{62}), имеющую вид

$$[M_{62}] = [M_{32}][M_{43}][M_{54}][M_{65}] \text{ и т.д.} \quad (9.13)$$

Для манипулятора, изображенного на рис.9.12, имеем

$$[M_{30}] = [M_{10}][M_{21}][M_{32}], \quad [M_{20}] = [M_{10}][M_{21}]. \quad (9.14)$$

С учетом соотношений (9.14) уравнение (9.2) примет вид

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [M_{10}][M_{21}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{BC} \end{Bmatrix} + [M_{10}][M_{21}][M_{32}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (9.15)$$

Следует отметить, что в матрице-произведении множители следуют слева направо в порядке, обратном последовательности поворотов. Матрицы-произведения (9.11), (9.12), (9.13) характеризуют операцию поворота вектора из шестой системы в нулевую, первую, вторую. Они позволяют судить о последовательности разворота шестой системы координат для того, чтобы ее оси стали параллельны осям соответствующих систем. Другими словами, эти выражения определяют условия параллельности осей шестой системы координат осям нулевой (9.11), первой (9.12) и второй

(9.13) систем координат и т.д. Если есть необходимость перевода нулевой системы в параллельность шестой, первой и параллельность шестой, второй в параллельность шестой, третьей в параллельность шестой, то имеем

$$[M_{06}] = [M_{56}][M_{45}][M_{34}][M_{23}][M_{12}][M_{01}],$$

$$[M_{16}] = [M_{56}][M_{45}][M_{34}][M_{23}][M_{12}],$$

$$[M_{26}] = [M_{56}][M_{45}][M_{34}][M_{23}],$$

$$[M_{36}] = [M_{56}][M_{45}][M_{34}].$$

Причем $[M_{01}] = [M_{10}]'$; $[M_{12}] = [M_{21}]'$; $[M_{23}] = [M_{32}]'$ и т.д. Обычно в равенствах (9.11) — (9.16) множителями являются матрицы типа (9.8), (9.9), (9.10).

Если решена задача о положениях звеньев манипулятора в виде (9.2), то задача о скоростях в координатной форме может быть решена с помощью уравнения

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_D^{(0)} \\ \dot{y}_D^{(0)} \\ \dot{z}_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{BC} \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (9.17)$$

В уравнении (9.17) в левой части записаны проекции скорости точки D на оси системы координат, связанной со станиной. Модуль скорости точки D вдоль ее траектории определяется соотношением

$$v_D^{(0)} = \sqrt{[\dot{x}_D^{(0)}]^2 + [\dot{y}_D^{(0)}]^2 + [\dot{z}_D^{(0)}]^2}.$$

В правой части уравнения (9.17) $[M_{10}]$, $[M_{20}]$, $[M_{30}]$ производные по времени матриц поворота, они определяются выражениями (9.14).

Задача об ускорениях может быть решена с помощью зависимости

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_D^{(0)} \\ \ddot{y}_D^{(0)} \\ \ddot{z}_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [\ddot{M}_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [\ddot{M}_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{BC} \end{Bmatrix} + [\ddot{M}_{30}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (9.18)$$

где $[\ddot{M}_{10}]$, $[\ddot{M}_{20}]$, $[\ddot{M}_{30}]$ — вторые производные по времени матриц (9.14).

Модуль ускорения равен

$$a_D^{(0)} = \sqrt{[\ddot{x}_D^{(0)}]^2 + [\ddot{y}_D^{(0)}]^2 + [\ddot{z}_D^{(0)}]^2}.$$

Уравнения (9.2), (9.15), (9.17), (9.18) позволяют установить соответствие между заданной траекторией схвата (точки D) в неподвижной системе координат, а также законом движения вдоль этой траектории, определяемым скоростью $\bar{v}_D^{(0)}$ и ускорением $\bar{a}_D^{(0)}$, и положениями (а также скоростями и ускорениями) звеньев манипулятора. Следует отметить, что уравнения (9.13), (9.17), (9.18) определяют траектории, скорости и ускорения концов соответствующих векторов (см. рис.9.12) или, что то же, начал соответствующих подвижных систем координат. Практическая ценность уравнения (9.15) состоит в том, что оно позволяет установить количественную взаимосвязь между видом заданной траектории схвата (прямой — в пространстве, кривой — на цилиндрической или сферической поверхности и т.п.) и траекториями звеньев. В уравнении (9.11) каждая матрица определяется выражениями (9.8), (9.9), (9.10) или их сочетанием в зависимости от типа кинематической пары. Оно позволяет проанализировать возможные варианты сочетания подвижностей (обобщенных координат), которыми может быть отработана та или иная траектория схвата.

9.5. Геометрия траектории и кинематика схвата

На рис. 9.15 представлена схема манипулятора, схват которого обрабатывает траекторию $D_H D_K$ — прямую, расположенную в плоскости, параллельной оси z .

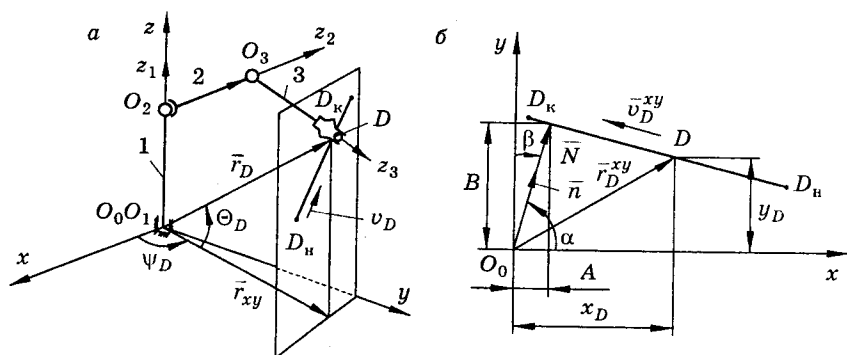


Рис.9.15. Схема перемещения схвата манипулятора (точки D) по прямой линии: a — в пространстве, b — в плоскости

Начало траектории задано координатами $D_H(x_1 y_1 z_1)$, конец — координатами $D_K(x_2 y_2 z_2)$, текущая точка D имеет координаты $D(x y z)$. Тогда траектория точки D запишется в виде

$$\overline{D_H D_K} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}. \quad (9.19)$$

Изменение радиуса вектора \bar{r}_D точки D при перемещении ее из D_H в D_K в векторной форме (векторное уравнение прямой) запишется в виде

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + v_D \bar{t}. \quad (9.20)$$

В координатной форме уравнение (9.20) примет вид

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} + (v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k})t. \quad (9.21)$$

Координаты точки D определяются из соотношений

$$x = x_1 + v_x t, \quad y = y_1 + v_y t, \quad z = z_1 + v_z t. \quad (9.22)$$

Из уравнения (9.22) имеем

$$t = (x - x_1) / v_x = (y - y_1) / v_y = (z - z_1) / v_z. \quad (9.23)$$

Уравнение (9.22) определяет координаты точки, равномерно движущейся со скоростью $|\bar{v}| \{v_x v_y v_z\}$, через t единиц времени после выхода из точки $D_H \{x_1, y_1, z_1\}$. В данном случае v_D является направляющим вектором и $\overline{D_H D_K}$ параллелен \bar{v}_D , тогда уравнение (9.23) представляет собой условие коллинеарности векторов $\overline{D_H D_K}$ и \bar{v}_D : $\overline{D_H D_K} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и $|\bar{v}| \{v_x v_y v_z\}$.

Если принять за направляющий вектор $M_1 M_2 \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, то уравнение траектории точки D примет вид прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример. Записать уравнение прямой как траектории точки, движущейся со скоростью $\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$, где $v_x = 2$ м/с, $v_y = -1$ м/с, $v_z = 3$ м/с, и находящейся при $t = 0$ в точке D_H с координатами $x_1 = 0,5$ м, $y_1 = 0,1$ м, $z_1 = 0,3$ м. Для заданных условий уравнение (9.22) запишется в виде

$$x = 0,5 + 2t, \quad y = 0,1 - t, \quad z = 0,3 + 3t$$

или

$$\frac{x - 0,5}{2} = \frac{y - 0,1}{-1} = \frac{z - 0,3}{3}.$$

Возможность отработки заданной траектории манипулятором определяется из условия того, чтобы данная траектория не выходила за пределы его рабочей зоны. С этой целью расстояния

$O_1 D_H = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ и $O_1 D_K = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ не должны превышать,

например, расстояние $l_2 + l_3$ (см. рис.9.15) второго и третьего звеньев, вытянутых в одну линию.

Расстояние от начала координат до плоскости определяется вектором $|\bar{N}| = \{A, B, C\}$. В рассматриваемом примере (см. рис.9.15, б)

$$|\bar{N}| = \{A, B, C\} \text{ и } N = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Положение плоскости будет определено, если знать расстояние N от начала координат до плоскости и единичный вектор \bar{n} , направленный от начала координат к плоскости. В общем случае направление вектора \bar{n} определяется направляющими косинусами:

$$\bar{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \},$$

где α, β, γ — углы вектора \bar{n} с осями координат. В нашем случае $\gamma = 90^\circ$ (см. рис.9.15, б). Условие, что точка D лежит на плоскости, заключается в том, что проекция вектора $\bar{r}_D \{xyz\}$ на \bar{N} определяется самой величиной $|\bar{N}|$. В векторной форме это условие имеет вид $\bar{r} \cdot \bar{n} = N$; в координатной форме имеем

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - N = 0. \quad (9.24)$$

Уравнение (9.24) является нормальным уравнением плоскости в координатной форме.

Пример. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $x - 2y - 2z + 5 = 0$. Чтобы получить в общем уравнении длину нормального вектора, равного единице, необходимо обе части общего уравнения разделить на длину нормального вектора $|\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ или умно-

жить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Для заданного уравнения плоскости имеем

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}, \quad -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0.$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаком свободного члена.

Следует отметить, что уравнения (9.20) — (9.23) не соответствует требованиям практики. Эти уравнения предусматривают мгновенный рост скорости в точке D_n от нуля до v и мгновенное уменьшение в точке D_k от v до нуля. Этот случай представлен на рис. 9.16.

Мгновенный рост скорости за бесконечно малое время от нуля до v означает рост ускорения до бесконечности. Мгновенное уменьшение скорости от v до нуля означает рост ускорения до $-\infty$. Это означает, что силы инерции $F_{ин} = -ma_D$ приложенные к схвату, также стремятся к бесконечности в начале и конце хода.

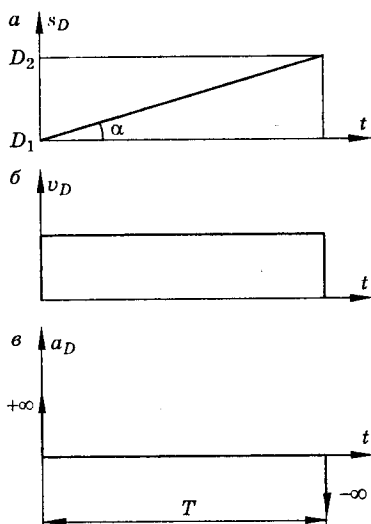


Рис.9.16. Закон равномерного движения схвата вдоль траектории

ный или трапецидальный. На рис.9.17 показаны зависимости скорости и ускорения при движении схвата за время $T = t_1 + t_2 + t_3$.

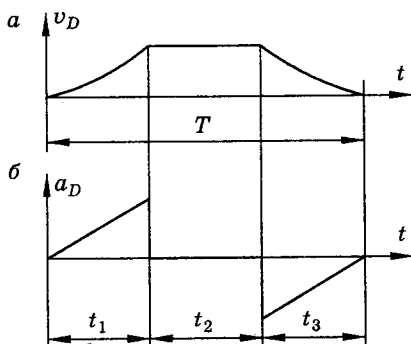


Рис.9.17. Закон движения схвата с мягким ударом

в функции обобщенной координаты. Для манипуляторов это имеет особое значение в связи с необходимостью оценки погрешности позиционирования по скорости и ускорению как схвата с деталью, так и отдельных приводов, то есть отдельных обобщенных скоростей и ускорений в функции пути, пройденного некоторой точкой схвата. В этом случае удобно пользоваться не понятием

Такое явление называют жестким ударом. Деформации звеньев и их соединений приводят к тому, что рост (уменьшение) скорости происходит за конечное время, определяемое жесткостью $c = dF_{и} / d\delta$ тогда деформация $\delta = ma_D / c$ звена, на котором расположен схват, оказывается зависимой от ускорения при отработке им соответствующей траектории. В связи с этим необходимо траекторию схвата разбивать, например, на три участка. На первом и на третьем участках необходимо обеспечить безударный закон изменения скорости, а на среднем — движение может быть с

постоянной скоростью. К безударным законам изменения ускорения относятся, например, синусоидальный закон изменения ускорения

Как видно из рис.9.17, в конце первого и начале третьего участков ускорение изменяется на конечную величину, что характеризует наличие "мягкого" удара. Так что переход от первого участка ко второму и от второго к третьему также следовало бы "смягчить". Однако закон движения схвата в соответствии с рис.9.17 следует считать лучшим по сравнению с законом отработки траектории, представленным на рис.9.16. Закон изменения скорости часто задается

обобщенной скорости \dot{q} , а аналогом скорости q' , их связь устанавливается, как и ранее, из преобразования

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = vq',$$

где $v = ds / dt$ — скорость точки.

Тогда путь (длину дуги) можно считать глобальной обобщенной координатой, а все обобщенные координаты манипулятора — локальными. Связь же времени t с глобальной обобщенной координатой s устанавливается заданным (требуемым) законом изменения скорости схвата $v = ds / dt$ в функции s .

На рис.9.18 представлен пример, поясняющий связь элементарного перемещения Δs схвата вдоль траектории с проекциями Δx , Δy , Δz . В этом случае длина траектории s разбивается на n равномерных участков так, что $s_i = s_H + n\Delta s$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

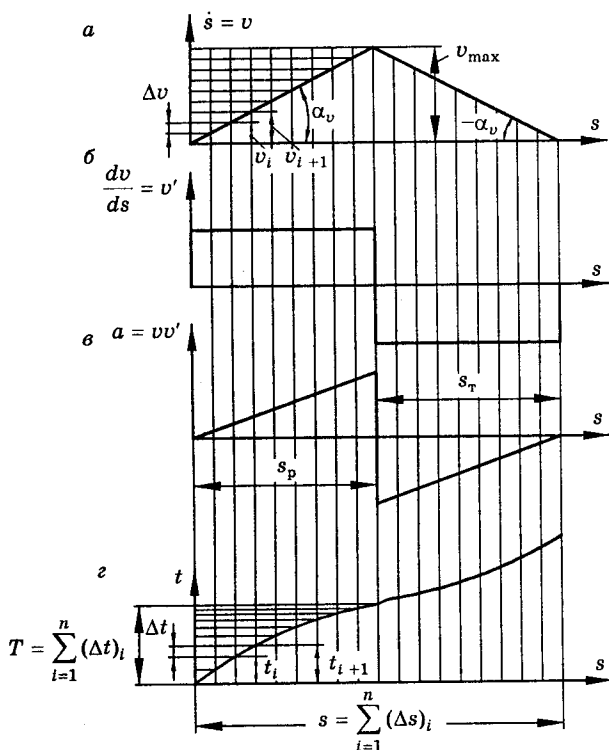


Рис.9.18. Кинематические характеристики поступательного движения:
а — скорости, **б** — аналога ускорения, **в** — ускорения,
г — времени от пройденного пути

$$N = \frac{\sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2 + (z_K - z_H)^2}}{\Delta s}$$

Тогда $\Delta x = (x_K - x_H) / N$, $\Delta y = (y_K - y_H) / N$, $\Delta z = (z_K - z_H) / N$. На рис.9.18 и 9.19 представлены графики, поясняющие взаимосвязь между функциями

$$ds / dt = v(s), \quad dv / ds = v'(s), \quad dv / dt = a(s), \quad t = t(s).$$

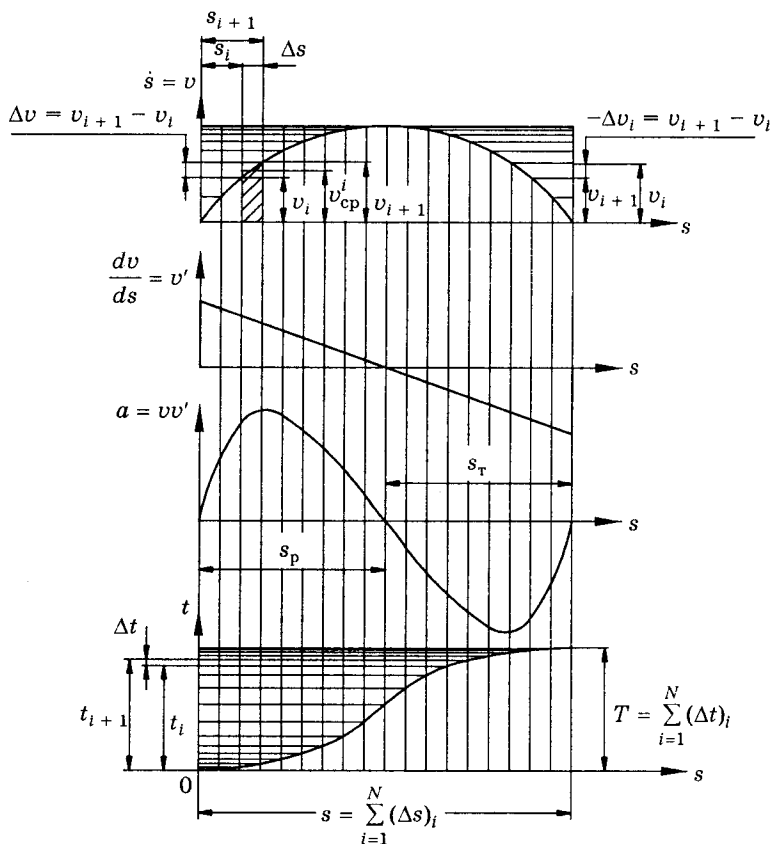


Рис.9.19. Кинематические характеристики схвата при линейно изменяющемся аналоге скорости в функции перемещения

При таком задании кинематических характеристик охвата быстродействие (время отработки схватом траектории) определяется как

$$T = \sum_{i=1}^N (\Delta t)_i,$$

при этом на каждом шаге Δs

$$(\Delta t)_{i,i+1} = \Delta s / v_{cp}^{i,i+1}.$$

При достаточно малом шаге

$$v_{cp}^{i,i+1} = (v_i + v_{i+1}) / 2.$$

Инерционные силы действующие на схват манипулятора, в большой степени зависят от вида траектории, так как ускорение точки в общем виде определяется изменением скорости \bar{v} как по модулю, так и по направлению:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{\nu},$$

где $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ — орты касательной и главной нормали траектории.

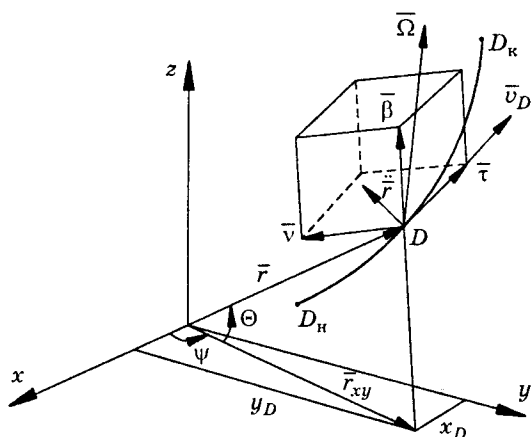


Рис.9.20. Оси естественного трехгранника при движении точки D вдоль траектории

На рис.9.20 представлены оси трехгранника Френе при движении точки D вдоль пространственной траектории, ρ — радиус кривизны траектории.

Известно [45], что при любой параметризации кривой вектор второй производной радиуса-вектора \bar{r} кривой расположен в ее соприкасающейся плоскости — в плоскости, образованной ортами $\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$ (см. рис.9.20).

В этом заключается взаимосвязь геометрических параметров траектории с кинематическими характеристиками точки, движущейся вдоль этой траектории. Таким образом, проекция ускорения на бинормаль всегда равна нулю.

Касательная $\bar{\tau}$, главная нормаль $\bar{\nu}$ и бинормаль $\bar{\beta}$ определяют в каждой точке кривой систему координат с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой D (см. рис.9.20). Три плоскости, соответственно перпендикулярные $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ (нормальная, спрямляющая и соприкасающаяся), образуют трехгранник (триэдр), называемый сопровождающим (основным, подвижным, естественным) трехгранником Френе. Система координат $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$, позволяет увязать геометрические

характеристики траектории с кинематическими (со скоростью точки и ускорением). Единичные векторы $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ ориентированы так же, как и оси координатных векторов правой системы координат: $\bar{\tau} \times \bar{\nu} = \bar{\beta}$, $\bar{\nu} \times \bar{\beta} = \bar{\tau}$, $\bar{\beta} \times \bar{\tau} = \bar{\nu}$.

Так как эти векторы единичны и ортогональны, то

$$\bar{\tau}^2 = \bar{\nu}^2 = \bar{\beta}^2 = 1; \quad \bar{\tau}\bar{\nu} = \bar{\nu}\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\tau} = 0.$$

Закон движения схвата вдоль траектории можно задать как функцию его ускорения в зависимости от пути (длины траектории). Эту функцию можно выявить только после исследования движения манипулятора при определенном сочетании его подвижностей с учетом соотношения масс, скоростей и энергий подвижных звеньев. Поэтому при динамическом исследовании геометрические и кинематические характеристики движения схвата удобно определять не зависящими от времени непосредственно, а в функции дуги (параметра s) траектории. Связь между длиной дуги и радиусом-вектором \bar{r} устанавливается с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(\dot{x}t)^2 + (\dot{y}t)^2 + (\dot{z}t)^2}, \\ \bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, значение этого параметра для какого-либо положения точки на ее траектории равно длине дуги кривой между началом (точкой D_H) и точкой D . Знак его определяется в зависимости от выбора направления движения по траектории, условно принятого за положительное.

Выбор параметра s имеет важное значение в связи с тем, что кинематические характеристики оказываются в таком случае непосредственно связанными с геометрическими параметрами траектории, являющимися инвариантами произвольной кривой. К таким инвариантам относятся дуга s , кривизна K и кручение T траектории. Они остаются неизменными в любой системе координат, и задание этих параметров вполне характеризует форму траектории. Две кривые с одинаковыми уравнениями $K = K(s)$ и $T = T(s)$ совпадают по форме и могут отличаться только положением в пространстве.

Как отмечалось ранее, взаимосвязь этих геометрических параметров с кинематическими устанавливается с помощью формул Френе-Серре:

$$d\bar{\tau} / ds = K\bar{\nu}, \quad d\bar{\nu} / ds = -K\bar{\tau} + T\bar{\beta}, \quad d\bar{\beta} / ds = -T\bar{\nu}, \quad (9.25)$$

где $K = |d\bar{\tau} / ds|$ — кривизна траектории в данной точке (скалярная величина, характеризующая отклонение кривой от прямой).

Радиус кривизны $\rho_K = 1 / K$, тогда орт главной нормали $\bar{v} = \rho \bar{\tau}'$. Производные по параметру s будем обозначать в дальнейшем штрихом:

$$d\bar{\tau} / ds = \bar{\tau}', \quad d\bar{v} / ds = \bar{v}', \quad d\bar{\beta} / ds = \bar{\beta}'.$$

$\bar{T} = \bar{\beta}' = -T\bar{v}$ — вектор кручения, может быть направлен в ту или другую сторону вдоль главной нормали. $T = |\bar{\beta}'|$ — кручение кривой в данной точке (величина скалярная), характеризует отклонение кривой от соприкасающейся плоскости. Кривые тем быстрее отходят от соприкасающейся плоскости, образованной ортами $\bar{\tau}$, \bar{v} , чем больше абсолютная величина кручения. Радиус кручения $\rho_T = 1 / T$. Кривизна в точке кривой выражается пределом отношения угла смежности двух касательных (угла между касательными) и кривой в двух точках к длине дуги между этими точками, когда она стремится к нулю. Кручение в точке кривой определяется пределом отношения угла между двумя бинормальми (или двумя соприкасающимися плоскостями) к кривой в двух точках к длине дуги между этими точками, когда она стремится к нулю.

Равенство нулю кривизны характеризует точку спрямления. Равенство нулю кручения характеризует точку уплощения. Для плоской кривой $T = 0$, а бинормаль сохраняет постоянное направление. Плоскость самой кривой совпадает с соприкасающейся плоскостью.

Таким образом, при перемещении схвата по произвольной траектории сопровождающий трехгранник (рис.9.20) перемещается вместе с точкой D с постоянной по модулю скоростью

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\bar{v}}{v},$$

равной единице (путь s численно равен t) и вращается со скоростью, определяемой вектором Дарбу:

$$\bar{\Omega} = K\bar{\beta} + T\bar{\tau}.$$

Положение вектора Дарбу в пространстве показывает положение мгновенной оси вращения трехгранника, модуль вектора — величину его скорости вращения. Модуль вектора Дарбу $|\bar{\Omega}| = \sqrt{K^2 + T^2}$ есть полная кривизна траектории в данной точке.

При этом результирующее вращение состоит из вращения касательной вокруг мгновенного положения бинормали с угловой скоростью, равной кривизне траектории в данной точке, и вращения бинормали вокруг мгновенного положения касательной с угловой

скоростью, равной кручению. Производные ортов трехгранника связаны с вектором Дарбу следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\tau} / ds &= \bar{\Omega} \times \bar{\tau} = K\bar{\beta} \times \bar{\tau}, \\ d\bar{\nu} / ds &= \bar{\Omega} \times \bar{\nu}, \\ d\bar{\beta} / ds &= \bar{\Omega} \times \bar{\beta} = T\bar{\tau} \times \bar{\beta}. \end{aligned} \right\}$$

Кривизна и кручение определяются из следующих зависимостей, полученных из формул (9.25):

$$\bar{r}' = \bar{\tau}, \quad \bar{r}'' = K\bar{\nu}, \quad \bar{r}''' = -K^2\bar{\tau} + K'\bar{\nu} + KT\bar{\beta}.$$

Используя эти формулы, получаем соотношения, дающие возможность определить кривизну и кручение через производные по параметру s :

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}' \times \bar{r}'' &= K(\bar{\tau} \times \bar{\nu})'' = K\bar{\beta}, \\ (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') &= (\bar{r}' \times \bar{r}'')\bar{r}''' = K^2T. \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

В координатной форме кривизна и кручение выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{\rho_K} = \sqrt{(x_M'')^2 + (y_M'')^2 + (z_M'')^2}, \\ T &= \frac{1}{\rho_T} = \frac{1}{K^2} \begin{vmatrix} x_M' & y_M' & z_M' \\ x_M'' & y_M'' & z_M'' \\ x_M''' & y_M''' & z_M''' \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

Используя преобразования переменных, получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{dt}{dt} = \dot{\bar{r}}t', \\ \bar{r}'' &= \left(\frac{d\dot{\bar{r}}}{ds} t' + \frac{dt'}{ds} \dot{\bar{r}} \right) \frac{dt}{dt} = \ddot{\bar{r}}(t')^2 + \dot{\bar{r}}t'', \\ \bar{r}''' &= \frac{d\ddot{\bar{r}}}{ds} \cdot \frac{dt}{dt} = \ddot{\bar{r}}(t')^3 + 3\dot{\bar{r}}t't'' + \ddot{\bar{r}}t'''. \end{aligned} \right\}$$

С учетом последних соотношений выражение (9.26) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= \dot{\bar{r}}t', \\ K\bar{\beta} &= (\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})(t')^3, \\ K^2T &= (\ddot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}})(t')^6. \end{aligned} \right\}$$

С учетом того, что $t' = 1 / |\dot{\bar{r}}|$, из последних уравнений имеем

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \\ T &= \frac{\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}}{K^2 |\dot{\vec{r}}|^6} = \frac{\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

Уравнения (9.27) в координатной форме имеют вид

$$K = \frac{(\dot{y}_M \ddot{z}_M - \dot{z}_M \ddot{y}_M)^2 + (\dot{z}_M \ddot{x}_M - \dot{x}_M \ddot{z}_M)^2 + (\dot{x}_M \ddot{y}_M - \dot{y}_M \ddot{x}_M)^2}{(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2)^{3/2}},$$

$$T = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_M & \dot{y}_M & \dot{z}_M \\ \ddot{x}_M & \ddot{y}_M & \ddot{z}_M \\ \ddot{\ddot{x}}_M & \ddot{\ddot{y}}_M & \ddot{\ddot{z}}_M \end{vmatrix}}{(\dot{y}_M \ddot{z}_M - \dot{z}_M \ddot{y}_M)^2 + (\dot{z}_M \ddot{x}_M - \dot{x}_M \ddot{z}_M)^2 + (\dot{x}_M \ddot{y}_M - \dot{y}_M \ddot{x}_M)^2}.$$

В случае плоской кривой, заданной в параметрической форме,

$$x_M = f(t), \quad y_M = f(t), \quad K = \frac{\dot{x}_M \ddot{y}_M - \dot{y}_M \ddot{x}_M}{(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2)^{3/2}}.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y_M = f(x_M)$ где x_M играет роль параметра, то $\dot{x}_M = 1$, $\dot{y}_M = dy_M / dx_M$, $\ddot{x}_M = 0$, $\ddot{y}_M = d^2 y_M / dx_M^2$, тогда

$$K = \frac{d^2 y_M / dx_M^2}{[1 + (dy_M / dx_M)^2]^{3/2}}.$$

Знак кривизны в данном случае совпадает со знаком производной $d^2 y_M / dx_M^2$ и определяет направление вогнутости кривой. Точка перегиба характеризуется обращением в ноль выражения $d^2 y_M / dx_M^2$ и вместе с тем кривизны, то есть является точкой спрямления плоской кривой.

При анализе траектории схвата полезно использовать понятие соприкасающейся окружности. Свойства ее заключаются в следующем: соприкасающаяся окружность расположена в соприкасающейся плоскости; центр ее лежит на главной нормали, по ту сторону от точки кривой, куда указывает вектор главной нормали; радиус ее равен обратной величине кривизны, вычисленной для данной точки.

Если уравнение траектории задано в виде $x_M = f(t)$, $y_M = f(t)$, $z_M = f(t)$, то касательное и нормальное ускорения определяются из выражений

$$\begin{aligned} \bar{a}_M^\tau &= \frac{dv_M}{dt} \bar{\tau} = \frac{|\bar{a}_M \bar{v}_M|}{|\bar{v}_M|} = \frac{\dot{x}_M \ddot{x}_M + \dot{y}_M \ddot{y}_M + \dot{z}_M \ddot{z}_M}{\sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2}}, \\ \bar{a}_M^v &= |\bar{a}_M \times \bar{\tau}| = \frac{|\bar{a}_M \times \bar{v}_M|}{|\bar{v}_M|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x}_M & \dot{y}_M & \dot{z}_M \\ \ddot{x}_M & \ddot{y}_M & \ddot{z}_M \end{vmatrix}}{|\bar{v}_M|} = \\ &= \sqrt{\frac{(\dot{x}_M \ddot{y}_M - \dot{y}_M \ddot{x}_M)^2 + (\dot{y}_M \ddot{z}_M - \dot{z}_M \ddot{y}_M)^2 + (\dot{z}_M \ddot{x}_M - \dot{x}_M \ddot{z}_M)^2}{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2}}. \end{aligned}$$

В последних уравнениях $|\bar{a}_M| = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^v)^2} = \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2 + (\ddot{z}_M)^2}$ — полное ускорение точки D .

Приведенные зависимости дают полную характеристику геометрии движения и кинематики схвата.

Пример. Определить параметры траектории точки D схвата, перемещающегося по винтовой линии (см. рис.9.21).

Винтовая линия может быть задана на любой цилиндрической поверхности (эллиптической, гиперболической, параболической). Эллиптическая цилиндрическая поверхность, параллельная оси z , имеет вид

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1.$$

Гиперболическая цилиндрическая поверхность, параллельная оси z , имеет вид

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1.$$

Параболическая цилиндрическая поверхность, параллельная оси z , имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Пусть схват (точка D) (см. рис.9.21) перемещается по винтовой линии, заданной уравнениями

$x_D = a \cos t$, $y_D = a \sin t$, $z_D = pt$, $\dot{x}_D = -a \sin t$, $\dot{y}_D = a \cos t$, $\dot{z}_D = p$, где $p = v_z / \omega = \dot{z}_D / \dot{\psi}_{OD} = H / 2\pi$, p — параметр винтовой линии, H — шаг винтовой линии; a — радиус начального цилиндра.

Для рассматриваемого случая имеем

$$|\bar{v}_D| = ds / dt = \sqrt{\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2 + \dot{z}_D^2} = \sqrt{a^2 + p^2}$$

или

$$dt/ds = 1/\sqrt{a^2 + p^2},$$

тогда

$$t = s/\sqrt{a^2 + p^2}.$$

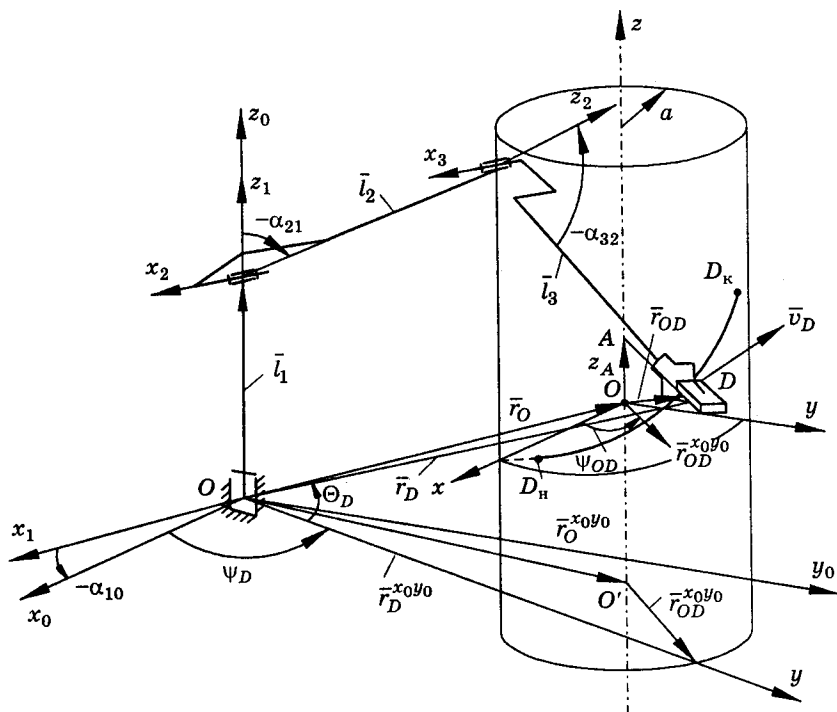


Рис.9.21. К определению параметров траектории схвата, перемещающегося по винтовой линии

Последнее выражение дает возможность представить уравнение траектории схвата в зависимости не от времени, а от длины дуги, радиуса цилиндра и параметра винтовой линии:

$$x_D = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + p^2}}, \quad y_D = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + p^2}}, \quad z_D = \frac{ps}{\sqrt{a^2 + p^2}}.$$

При этом

$$|\bar{r}_{OD}| = \sqrt{a^2 + z_D^2} = \sqrt{a^2 + \frac{p^2 s^2}{a^2 + p^2}}.$$

Из рис.9.21 видно, что в процессе перемещения схвата (точки D) вдоль траектории имеет место векторное равенство

$$\bar{r}_D = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3.$$

С другой стороны, имеем $\bar{r}_D = \bar{r}_D^{x_0y_0} + \bar{z}_D$, где $\bar{r}_D^{x_0y_0} = \bar{r}_O^{x_0y_0} + \bar{r}_{OD}^{x_0y_0}$ и $z_D = z_O + z_A$. Проекции этих векторных равенств на оси $x_0y_0z_0$, в которых ориентирован манипулятор, и заданная траектория позволяют выразить обобщенные координаты α_{10} , α_{21} и α_{32} манипулятора через параметр $s(x_D y_D z_D)$, а также обобщенные скорости

$$\dot{\alpha}_{10} = \frac{d\alpha_{10}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = v_D \alpha'_{10}, \quad \dot{\alpha}_{21} = v_D \alpha'_{21}, \quad \dot{\alpha}_{32} = v_D \alpha'_{32}$$

и обобщенные ускорения $\ddot{\alpha}_{10}$, $\ddot{\alpha}_{21}$ и $\ddot{\alpha}_{32}$, связав их изменение с длиной s пути, пройденного схватом, и законом $v_D = v_D(s)$ движения его вдоль траектории s .

Как видно из рис.9.21, точка A отрезка AD скользит по прямой, совпадающей с осью Oz . ψ_{OD} есть угол, образованный этим отрезком с осью Ox , поэтому

$$\overline{AD} = a(\bar{i} \cos \psi_{OD} + \bar{j} \sin \psi_{OD}) = a\bar{l}(\psi_{OD}),$$

где \bar{i} , \bar{j} — единичные векторы осей x и y .

Выражение в скобках представляет собой единичный вектор $\bar{l}(\psi_{OD})$, являющимся функцией угла ψ_{OD} . Годографом этого вектора является окружность единичного радиуса. Как видно из рис.9.21, расстояние точки A от начала координат пропорционально углу ψ_{OD} , $z_D = OA = p\psi_{OD}$, тогда радиус-вектор точки D винтовой линии

$$\bar{r}_{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = a\bar{l}(\psi_{OD}) + p\psi_{OD} \cdot \bar{k},$$

\bar{k} — единичный вектор оси z . Параметризованное уравнение винтовой линии имеет вид

$$\bar{r}_{OD} = a\bar{l}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + p^2}}\right) + \frac{ps}{\sqrt{a^2 + p^2}} \bar{k}, \quad s = \int_{t_0}^t |\dot{\bar{r}}_{OD}| dt = t\sqrt{a^2 + p^2}.$$

Вектор \bar{v} главной нормали определится из выражения

$$\bar{r}'' = -\frac{a}{a^2 + p^2} \bar{l}(\psi_{OD}), \quad \bar{v} = \bar{l}(\psi_{OD}).$$

9.6. Моделирование движения в пространстве

9.6.1. Постановка задачи

Автоматизация машиностроения требует не только автоматического управления режимами, например, механической обработки, прессования, термической, физико-химической обработки

и других рабочих процессов машиностроения. Для полной механизации работ требуется автоматизация транспортирования (перемещения в пространстве) и переориентации объекта производства. В качестве такого объекта манипулирования может быть обрабатываемая деталь, инструмент или другой предмет самой разнообразной конфигурации. Чаще всего требуется не только переместить в пространстве, но и сориентировать деталь определенным образом, то есть изменить не только ее местонахождение, но и развернутость (угловое положение) в пространстве определенным образом. Эти операции выполняются манипуляторами промышленных роботов. На рис.9.9 представлена схема такого сборочного манипулятора, который перемещает деталь 5 из начального положения на плоскости A , определяемого координатами точки D_n в конечное, определяемое координатами точки D_k . При этом, как видно из рисунка, для сборки деталей 5 и 6 требуется их относительная ориентация. Таким образом, в общем случае требуется шесть координат, определяющих положение какого-либо предмета в пространстве. Три из них определяют координаты некоторой его точки, а три другие — его угловые ориентации. На рис.9.22 представлена схема, поясняющая моделирование движения точки D вдоль заданной траектории $D_n D_k$ путем последовательного определения ее координат $x_D^{(0)}$, $y_D^{(0)}$, $z_D^{(0)}$ в неподвижной системе, такое моделирование может быть проведено и путем выражения пути s_D (длины траектории). В этом случае для выявления функциональной взаимосвязи пути s или координат $x_D^{(0)}$, $y_D^{(0)}$, $z_D^{(0)}$ от времени t необходимо знать скорость и ускорение точки D при перемещении ее вдоль заданной траектории, то есть закон ее движения. Наиболее простое соответствие между пройденным расстоянием (путем) и временем будет при перемещении точки вдоль траектории с равномерной скоростью. Уравнения линий на плоскости и в пространстве, рассматриваемые в аналитической и дифференциальной геометрии в параметрической форме, получены из условия движения точки вдоль этих линий с постоянной скоростью на всем протяжении.

Таким образом, моделирование движения состоит в получении некоторого массива чисел, отображающего собой координаты точки или путь, пройденный ею за некоторый промежуток времени. Здесь важно знать не только время прохождения всего пути (время отработки заданных координат), называемое быстродействием, но и время перемещения точки от одного фиксированного ее положения до другого.

Из рис.9.22 видно, что положение точки D на ее траектории $D_H D_K$ может быть задано координатами $x_D^{(0)}$, $y_D^{(0)}$, $z_D^{(0)}$, в прямоугольной системе координат, а также длиной радиуса вектора r_D и углами $\psi_D \ominus_D$.

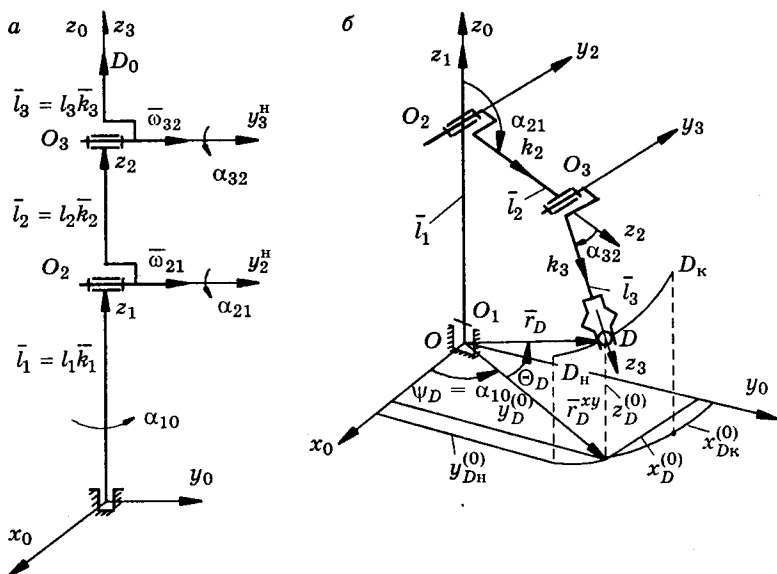


Рис.9.22. Геометрическая связь вектора \bar{r}_D , заданного в неподвижной системе координат с векторами \bar{l}_1 , \bar{l}_2 , \bar{l}_3 , заданными в подвижных системах координат, *a* — положение звеньев манипулятора до начала движения; *b* — положение звеньев манипулятора в текущем положении точки D на ее траектории

$$|\bar{r}_D| = \sqrt{(x_D^{(0)})^2 + (y_D^{(0)})^2 + (z_D^{(0)})^2}, \quad \psi_D = \arctg \frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}},$$

$$\ominus_D = \arctg \frac{z_D^{(0)}}{\sqrt{(x_D^{(0)})^2 + (y_D^{(0)})^2}}.$$

Можно сказать, что движение точки D "отслеживается" радиусом-вектором $\bar{r}_D \{r_D \psi_D \ominus_D\}$. Такое "отслеживание" точки D может быть реализовано различным сочетанием подвижных звеньев, связанных между собой возможностью относительного движения (поступательного или вращательного). Из сравнения рис.9.9 и рис.9.22 видно, что для моделирования перемещения

предмета вдоль траектории $D_H D_K$ без его разворота (без угловой переориентации) необходимо выбрать три вектора $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$, имеющих возможность изменять свое относительное угловое положение таким образом, чтобы выполнялось следующее основное условие моделирования перемещения точки вдоль заданной траектории:

$$\bar{r}_D = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3.$$

Это уравнение указывает на то, что цель достигается при соблюдении векторного равенства в любой точке D заданной траектории $D_H D_K$.

Запись векторного равенства в координатной форме требует задания векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ в своих (подвижных) системах координат. Из рис.9.22 видно, что подвижные системы координат выбраны таким образом, что их начала O_1, O_2, O_3 совпадают с центрами (осями) поворота, а векторы $\overline{O_1 O_2} = \bar{l}_1, \overline{O_2 O_3} = \bar{l}_2$ и $\overline{O_3 D} = \bar{l}_3$ совпадают с осями z подвижных систем координат. В этом случае векторы $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ в своих системах координат имеют вид

$$\bar{l}_1 = \{0, 0, l_1 \cdot \bar{k}_1\}, \quad \bar{l}_2 = \{0, 0, l_2 \cdot \bar{k}_2\}, \quad \bar{l}_3 = \{0, 0, l_3 \cdot \bar{k}_3\},$$

где $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ — орты (единичные векторы) осей z_1, z_2, z_3 .

Для упрощения оси $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ со своими ортами $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{i}_3, \bar{j}_3$ на рис.9.22 не показаны. В первоначальном положении (до начала движения) все звенья (все оси z) совмещены (см. рис.9.22, а). Начальное положение точки D требует разворота первой системы координат относительно нулевой на угол α_{10}^H , второй системы координат относительно первой — на угол α_{21}^H , третьей относительно второй — на угол α_{32}^H . Эти углы определяются длиной радиуса-вектора $|\bar{r}_{D_H}|$ и углами ψ_{D_H} и Θ_{D_H} . Дальнейшее движение моделируется записью уравнения $\bar{r}_D = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3$ в координатной форме:

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = M_{10} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} + M_{20} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} + M_{30} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{Bmatrix}.$$

M_{10}, M_{20}, M_{30} — матрицы преобразования векторов, заданных в своих подвижных системах координат, в нулевую (неподвижную) систему координат.

Таким образом, моделирование движения точек в пространстве вдоль заданной траектории сводится к операции преобразования координат векторов, удовлетворяющих основному условию замкнутости векторного контура, составленного из них и радиуса-вектора \bar{r}_D .

9.6.2. Моделирование движения точки в пространстве с использованием матричной формы записи уравнений преобразования координат векторов

Во многих задачах автоматизации и комплексной механизации машиностроения необходимы многовариантные проработки характеристик движения предметов в пространстве. Это необходимо для поиска наиболее рациональной траектории, а также наиболее выгодных скоростей и ускорений, обеспечивающих наименьшую погрешность позиционирования, наименьшее время отработки той или иной координаты, наименьшие динамические нагрузки и т.п.

При решении таких задач приходится определять координаты векторов в подвижных и неподвижных системах координат. Моделирование движения осуществляется путем последовательного определения положений, скоростей, ускорений предмета, перемещающегося по некоторой траектории. И этим случае необходимо приобретение навыков в составлении алгоритмов для такого численного исследования с помощью ЭВМ.

9.6.3. Алгоритм определения координат радиуса-вектора точки

Как видно из рис.9.23, а, б, текущее значение вектора \bar{r}_{i+1} может быть определено с учетом его значения \bar{r}_i в предыдущем положении с помощью векторного равенства

$$\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i + d\bar{r}_{i+1,i} \approx \bar{r}_i + \Delta\bar{r}.$$

Движение начинается с начального положения точки $D_H \{x_{D_H}^{(0)}, y_{D_H}^{(0)}, z_{D_H}^{(0)}\}$, так что

$$r_H = \sqrt{(x_{D_H}^{(0)})^2 + (y_{D_H}^{(0)})^2 + (z_{D_H}^{(0)})^2}.$$

Из рис.9.23, а следует, что в неподвижной системе координат x_0, y_0, z_0 величина приращения $\Delta\bar{r}_{i+1,i}$ вектора \bar{r}_D определится из соотношения $\Delta\bar{r}_{i+1,i} = \sqrt{(x_{i+1}^{(0)} - x_i^{(0)})^2 + (y_{i+1}^{(0)} - y_i^{(0)})^2 + (z_{i+1}^{(0)} - z_i^{(0)})^2}$.

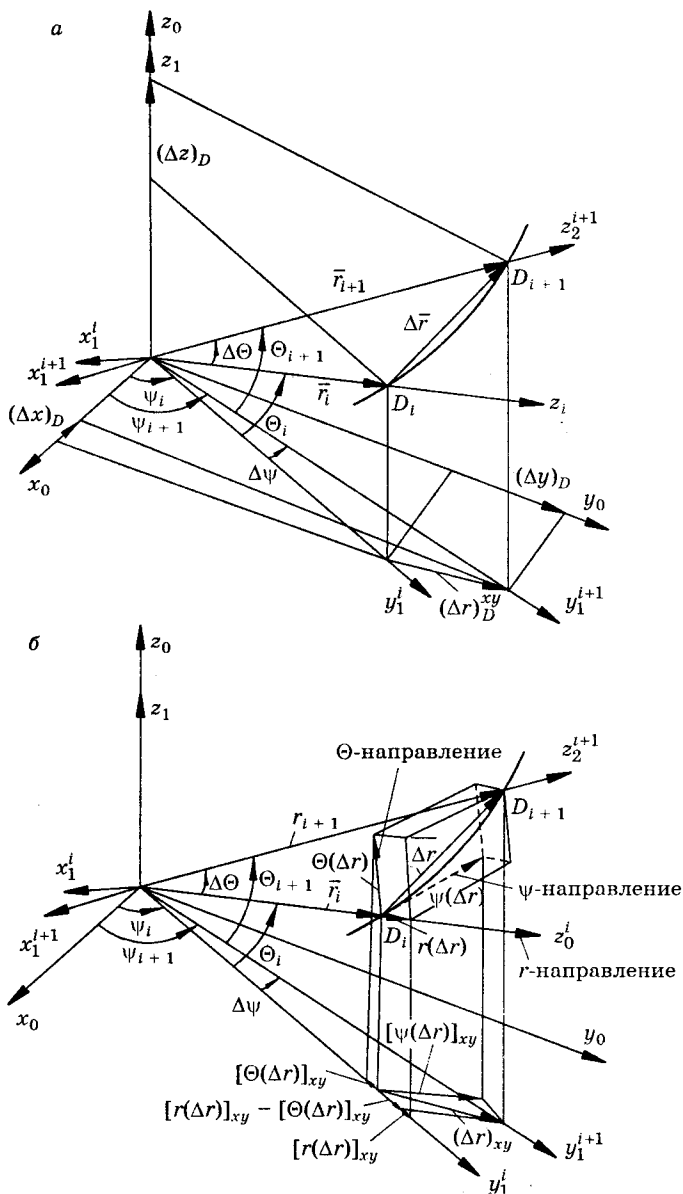


Рис.9.23. Представление приращения Δr вектора \bar{r} в неподвижной (а) и подвижной (б) системах координат xuz при перемещении точки D вдоль заданной траектории

Этот же вектор может быть представлен (см. рис.9.23, б) суммой приращений $(\Delta \bar{r})_r$ длины вектора \bar{r}_D и приращений его в Θ — направлении $(\Delta \bar{r})_\Theta$ и ψ — направлении $(\Delta \bar{r})_\psi$ в подвижной системе координат:

$$|\Delta \bar{r}_{i+1,i}| = \sqrt{(\Delta r)_r^2 + (\Delta r)_\Theta^2 + (\Delta r)_\psi^2}.$$

Координаты точки D определяются соотношением

$$\begin{Bmatrix} [x_D^{(0)}]_{i+1} \\ [y_D^{(0)}]_{i+1} \\ [x_D^{(0)}]_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [x_D^{(0)}]_i \\ [y_D^{(0)}]_i \\ [x_D^{(0)}]_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{Bmatrix}.$$

Операцию перевода вектора \bar{r}_i из системы координат x_2, y_2, z_2 , в которой он имеет вид $\bar{r}_i = 0\bar{i}_2 + 0\bar{j}_2 + r_i \cdot \bar{k}_2$, можно представить в виде

$$\bar{r}_i^{(1)} = [M_{21}^{x_1}] \cdot \bar{r}_i^{(2)} = [M_{21}^{x_1}] r_i \cdot \bar{k}_2, \quad \bar{r}_i^{(0)} = [M_{10}^{z_0}] \cdot \bar{r}_i^{(1)} = [M_{10}^{z_0}] [M_{21}^{x_1}] r_i \cdot \bar{k}_2$$

или, в координатной форме

$$\begin{Bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \end{Bmatrix} = [M_{21}^{x_1}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_i \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} x_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \\ z_i^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^{z_0}] \begin{Bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^{z_0}] [M_{21}^{x_1}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_i \end{Bmatrix}.$$

Матрицы поворота $[M_{10}^{z_0}]$, $[M_{21}^{x_1}]$ для рассматриваемого случая примут вид

$$[M_{10}^{z_0}] = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{10} & -\sin \alpha_{10} & 0 \\ \sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Из рис.9.24 видно, что $\alpha_{10} = -(\pi/2 - \psi)$, $\alpha_{21} = -(\pi/2 - \Theta)$.

С учетом последних выражений матрицы поворота $[M_{10}^{z_0}]$,

$[M_{21}^{x_1}]$ примут вид

$$[M_{10}^{z_0}] = \begin{vmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad [M_{21}^{x_1}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix}.$$

Перемножение матриц дает

$$[M_{10}^{z_0}] = \begin{vmatrix} \sin \psi & \cos \psi \sin \Theta & \cos \psi \cos \Theta \\ -\cos \psi & \sin \psi \sin \Theta & \sin \psi \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix}$$

После перемножения координаты точки D в подвижных и неподвижных системах координатах определяются из выражений

$$\begin{cases} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ r_i \cdot \cos \Theta \\ r_i \cdot \sin \Theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \\ z_i^{(0)} \end{cases} = \begin{cases} r_i \cdot \cos \Theta \cdot \cos \psi \\ r_i \cdot \cos \Theta \cdot \sin \psi \\ r_i \cdot \sin \Theta \end{cases}$$

Рассмотренный пример дает возможность проверки результатов при отладке программ в случае использования матриц преобразования координат для более сложных примеров.

По аналогии с полученными уравнениями преобразования вектора $\Delta r \cdot \bar{k}_2$, запишутся в виде

$$\begin{cases} \Delta x^{(1)} \\ \Delta y^{(1)} \\ \Delta z^{(1)} \end{cases} = \begin{cases} (\Delta r)_\psi \\ (\Delta r)_\Theta \cdot \sin \Theta + (\Delta r)_r \cdot \cos \Theta \\ -(\Delta r)_\Theta \cdot \cos \Theta + (\Delta r)_r \cdot \sin \Theta \end{cases},$$

$$\begin{cases} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \\ \Delta z^{(0)} \end{cases} = \begin{cases} (\Delta r)_\psi \cdot \sin \psi + (\Delta r)_\Theta \cdot \sin \Theta \cos \psi + (\Delta r)_r \cdot \cos \Theta \cos \psi \\ -(\Delta r)_\psi \cdot \cos \psi + (\Delta r)_\Theta \cdot \sin \Theta \sin \psi + (\Delta r)_r \cdot \cos \Theta \sin \psi \\ -(\Delta r)_\Theta \cdot \cos \Theta + (\Delta r)_r \cdot \sin \Theta \end{cases}$$

9.6.4. Алгоритм определения составляющих вектора скорости точки

Из аналитической геометрии известно, что уравнение отрезка прямой в прямоугольной системе координат в параметрической форме имеет вид

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y} = \frac{z - z_1}{v_z} = \frac{s}{v} = T.$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что она выражает условие компланарности векторов $\overline{D_H D_K}$ и $\overline{v_D}$, а также указывает на то, что время T отработки координат $x_k - x_n$, $y_k - y_n$, $z_k - z_n$ и всего пути s_D точки D одинаковое. В случае криволинейной траектории точка D (см. рис.9.24) формула будет

справедлива для бесконечно малого участка ds траектории, для которого длина хорды $\Delta s = \Delta r$ равна длине дуги ds .

Приращение радиуса-вектора $d\bar{r} \approx \Delta r$ за время dt может быть представлено в виде

$$\overline{dr} = \overline{dr}_r + r \cdot \overline{d\psi} + r \cdot \overline{d\Theta}.$$

Разделив последнее уравнение на dt , получим

$$\overline{v}_D = \frac{\overline{dr}}{dt} = \frac{dr_r}{dt} \left(\frac{\overline{v}_r}{v_r} \right) + r \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{\overline{v}_\psi}{v_\psi} \right) + r \frac{d\Theta}{dt} \left(\frac{\overline{v}_\Theta}{v_\Theta} \right).$$

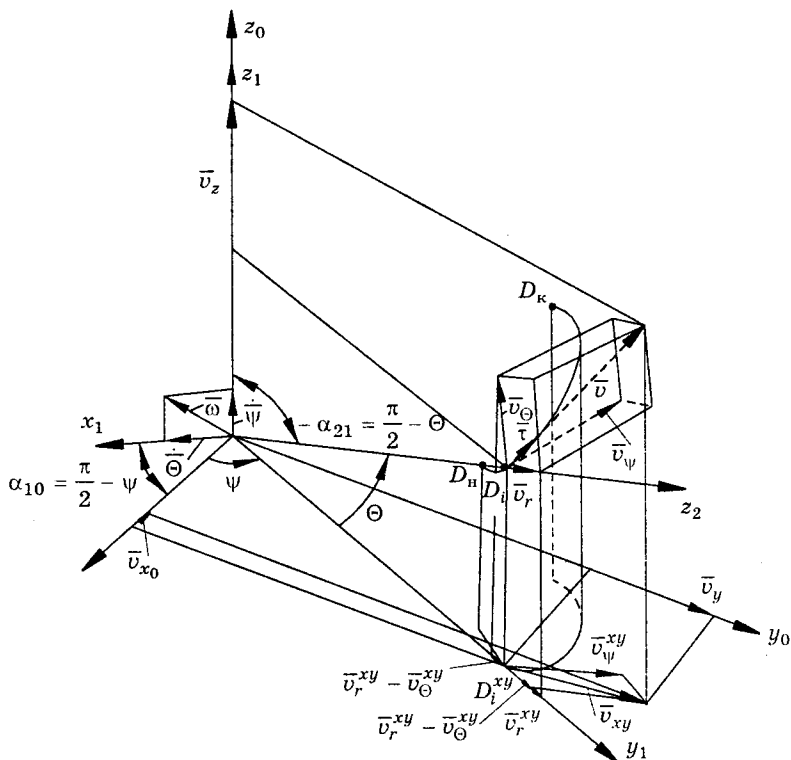


Рис.9.24. Представление вектора $\overline{v}_1 = z_2 \overline{k}_2$ точки D

в подвижной x, y, z , и неподвижной $x_0 y_0 z_0$ системах координат

В этом уравнении векторы, представленные делением векторов \overline{v}_r / v_r , $\overline{v}_\psi / v_\psi$, $\overline{v}_\Theta / v_\Theta$ на их модуль, являются единичными (направляющими) векторами r — направления, ψ — направления, Θ — направления соответственно (см. рис.9.23, б). Скорость v_D точки D может быть представлена также в виде

$$\bar{v}_D = \bar{v}_r + (\dot{\bar{\psi}} \times r\bar{k}_2) + (\dot{\bar{\Theta}} \times r\bar{k}_2) = \bar{v}_r + \bar{v}_\psi + \bar{v}_\Theta.$$

Угол между радиусом-вектором \bar{r} и ψ — направлением, как и между \bar{r} и $\bar{\Theta}$ — направлением, равен $\pi/2$. Вектор \bar{r} вращается со скоростью $\bar{\omega} = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\Theta}}$. С учетом этого

$$\bar{v}_D = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Последнее уравнение в координатной форме можно представить в виде

$$\bar{v}_D = \bar{v}_r + \begin{vmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ \dot{\bar{\Theta}} \cdot \sin \psi & \dot{\bar{\Theta}} \cdot \cos \psi & \dot{\bar{\psi}} \\ x_D^{(0)} & y_D^{(0)} & z_D^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Это уравнение в проекциях на оси неподвижной системы координат запишется в виде

$$\begin{cases} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{cases} = \begin{cases} \dot{r} \cos \Theta \cdot \cos \psi \\ \dot{r} \cdot \cos \Theta \cdot \sin \psi \\ \dot{r} \cdot \sin \Theta \end{cases} + y \begin{cases} z_D^{(0)} \cdot \dot{\bar{\Theta}} \cos \psi - y_D^{(0)} \dot{\bar{\psi}} \\ x_D^{(0)} \cdot \dot{\bar{\psi}} - z_D^{(0)} \dot{\bar{\Theta}} \sin \psi \\ y_D^{(0)} \cdot \dot{\bar{\Theta}} \sin \psi - x_D^{(0)} \dot{\bar{\Theta}} \cos \psi \end{cases}.$$

Здесь

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{(x_D^{(0)})^2 + (y_D^{(0)})^2 + (z_D^{(0)})^2} \right).$$

Дифференцирование этого выражения даст

$$\dot{r} = \frac{x_D^{(0)} \cdot \dot{x}_D^{(0)} + y_D^{(0)} \cdot \dot{y}_D^{(0)} + z_D^{(0)} \cdot \dot{z}_D^{(0)}}{\sqrt{(x_D^{(0)})^2 + (y_D^{(0)})^2 + (z_D^{(0)})^2}}.$$

Последнее уравнение определяет скорость изменения (приращения) длины вектора \bar{r} . Скорость же \bar{v} характеризует изменение как длины, так и направления вектора \bar{r} . В системе координат $x_2y_2z_2$ вектор $\bar{r}^{(2)} = r \cdot \bar{k}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= \dot{r}\bar{k}_2 + r \frac{d\bar{k}_2}{dt} = \dot{r}\bar{k}_2 + r(\omega \times \bar{k}_2) = \dot{r}\bar{k}_2 + r(\dot{\bar{\psi}} \times \bar{k}_2) + r(\dot{\bar{\Theta}} \times \bar{k}_2) = \\ &= r \cdot \bar{k}_2 + (\dot{\bar{\psi}} \times r\bar{k}_2) + (\dot{\bar{\Theta}} \times r\bar{k}_2). \end{aligned}$$

Таким образом, представляется возможность выражения скорости \bar{v}_D точки D при перемещении ее вдоль заданной траектории (моделирование движения точки D) с помощью одновременного вращения системы координат $x_2y_2z_2$ вокруг оси x со скоростью и системы координат вокруг оси z_0 со скоростью $\dot{\bar{\psi}}$.

Целесообразно воспользоваться матричной формой преобразования координат вектора \bar{v} . Применительно к рассматриваемому примеру имеем

$$\bar{v}_D^{(1)} = [M_{21}^{x1}] \cdot \bar{v}_D^{(2)}, \quad \bar{v}_D^{(0)} = [M_{10}^{z0}] \cdot \bar{v}_D^{(1)} = [M_{10}^{z0}] \cdot [M_{21}^{x1}] \cdot \bar{v}_D^{(2)}$$

или, в координатной форме,

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_D^{(1)} \\ \dot{y}_D^{(1)} \\ \dot{z}_D^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_\psi \\ v_\Theta \\ v_r \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_D^{(0)} \\ \dot{y}_D^{(0)} \\ \dot{z}_D^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \psi & \cos \psi \sin \Theta & \cos \psi \cos \Theta \\ -\cos \psi & \sin \psi \sin \Theta & \sin \psi \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_\psi \\ v_\Theta \\ v_r \end{Bmatrix}.$$

9.6.5. Алгоритм определения составляющих вектора ускорений точки

Дифференцирование уравнения $\bar{v}_D = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}_D$ дает

$$\bar{a}_D = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Изменения проекций ускорения определим по оценке изменений по величине и направлению составляющих скорости точки

D : \bar{v}_r , \bar{v}_ψ , \bar{v}_Θ

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - v_\Theta \frac{d\Theta}{dt} - v_\psi \cos \Theta \frac{d\psi}{dt}, \quad a_\psi = \frac{dv_\psi}{dt} + v_r \cos \Theta \frac{d\psi}{dt} - v_\Theta \sin \Theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$a_\Theta = \frac{dv_\Theta}{dt} + v_\psi \sin \Theta \frac{d\psi}{dt} + v_r \frac{d\Theta}{dt}.$$

Учитывая следующие соотношения:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\Theta = r \cdot \frac{d\Theta}{dt}, \quad v_\psi = r \cdot \cos \Theta \frac{d\psi}{dt},$$

получим

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 - r \cos^2 \Theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2,$$

$$a_\psi = r \cos \Theta \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2 \frac{d\psi}{dt} \cos \Theta - r \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt},$$

$$a_{\Theta} = r \frac{d^2\Theta}{dt^2} + r \cos \Theta \sin \Theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\Theta}{dt}.$$

Использование матричной формы преобразования проекций вектора \bar{a}_D на оси $x_0y_0z_0$ и оси, отображающие направления r, ψ и Θ , позволяют полученные соотношения представить в виде

$$\bar{a}_D^{(1)} = [M_{21}^{x_1}] \cdot \bar{a}_D^{(2)}, \quad \bar{a}_D^{(0)} = [M_{10}^{z_0}] \cdot \bar{a}_D^{(1)} = [M_{10}^{z_0}] [M_{21}^{x_1}] \bar{a}_D^{(2)}.$$

Последние уравнения в координатной форме имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_D^{(1)} \\ \ddot{y}_D^{(1)} \\ \ddot{z}_D^{(1)} \end{cases} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix} \begin{cases} a_{\psi} \\ a_{\Theta} \\ a_r \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_D^{(0)} \\ \ddot{y}_D^{(0)} \\ \ddot{z}_D^{(0)} \end{cases} = \begin{vmatrix} \sin \psi & \cos \psi \sin \psi & \cos \psi \sin \Theta \\ -\cos \psi & \sin \psi \sin \Theta & \sin \psi \cos \Theta \\ 0 & -\cos \Theta & \sin \Theta \end{vmatrix} \begin{cases} a_{\psi} \\ a_{\Theta} \\ a_r \end{cases}.$$

Дифференцирование выражений

$$\psi_D = \operatorname{arctg} \frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}}, \quad \Theta_D = \operatorname{arctg} \frac{z_D^{(0)}}{\sqrt{(x_D^{(0)})^2 + (y_D^{(0)})^2}}$$

по времени дает следующие соотношения:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{y}_D \cdot x_D - \dot{x}_D y_D}{x_D^2 + y_D^2}, \quad \dot{\Theta} = \frac{\dot{z}_D(x_D^2 + y_D^2) - z_D(x_D \dot{x}_D + y_D \dot{y}_D)}{(x_D^2 + y_D^2 + z_D^2) \cdot x_D^2 - y_D^2}.$$

Связь ускорения a_D с угловыми ускорениями $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\Theta}$ определится из следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \frac{d\Theta}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = v_D \Theta' = v_D \frac{d\Theta}{ds}, \\ \ddot{\Theta} &= \frac{d\dot{\Theta}}{dt} = \frac{dv_D}{dt} \Theta' + v_D \frac{d\Theta'}{dt} = a_D \frac{\dot{\Theta}}{v_D} + v_D \frac{d}{dt} \left(\frac{d\Theta}{ds} \right). \end{aligned}$$

Аналогично получим зависимости $\ddot{\psi}$ и \ddot{r} :

$$\ddot{\psi} = \frac{a_D^r}{v_D} \cdot \dot{\psi} + v_D \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi}{ds} \right), \quad \ddot{r} = \frac{a_D^r}{v_D} \cdot \dot{r} + v_D \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{ds} \right).$$

9.7. Определение скоростей, ускорений звеньев и их центров масс

Перемещение схвата вдоль пространственной траектории требует наличия трех обобщенных координат. Из рассмотренных примеров видно, что любая траектория точки D схвата может быть реализована при наличии трех обобщенных координат.

Схема манипулятора, реализующего движение схвата вдоль пространственной траектории, заданной в прямоугольной системе координат, представлена на рис.9.25.

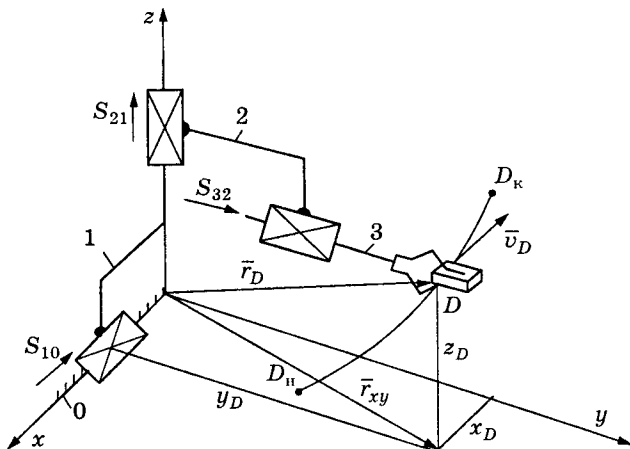


Рис.9.25. Схема манипулятора, реализующего обработку траектории схвата в прямоугольной системе координат

Такой манипулятор имеет три возможных движения схвата, определяемые поступательными кинематическими парами.

Схема манипулятора, реализующего движение схвата вдоль траектории, заданной в сферической системе координат, представлена на рис.9.26 и 9.27.

"Излишние" степени подвижности позволяют при этом реализовать дополнительные перемещения звеньев с целью обработки их законов движения, обеспечивающих наименьшие динамические нагрузки в их подвижных соединениях. Как видно из уравнения (9.18), такой "оптимальный" закон относительного движения звеньев (подвижных систем координат) будет в каждой конкретном случае. Он определяется как соответствующей траекторией схвата, так и законом движения вдоль этой траектории. При количестве степеней подвижности манипулятора более необходимого (минимального) числа, требуемого для обработки определенной траектории схвата, получается некоторая кинематическая и динамическая неопределенность. Именно эта

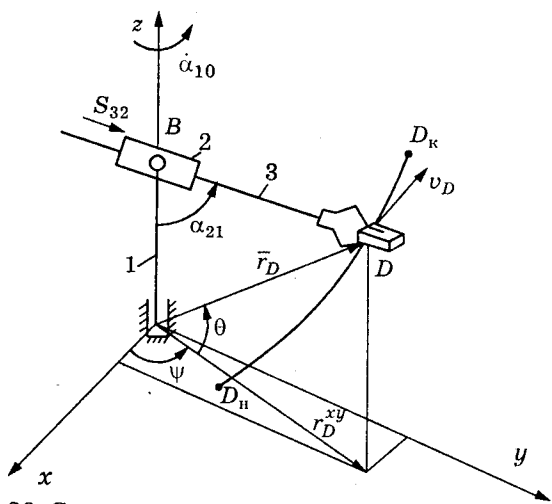


Рис.9.26. Схема манипулятора, реализующего отработку пространственной траектории схвата при наличии двух одноподвижных вращательных и одной поступательной кинематических пар

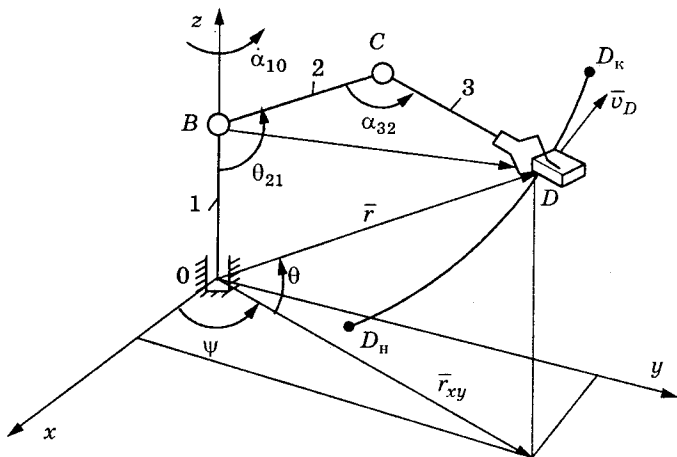


Рис.9.27. Схема манипулятора, реализующего отработку пространственной траектории схвата при наличии трех одноподвижных вращательных кинематических пар

неопределенность и позволяет выбрать некоторую функцию (закон движения какого-либо звена или звеньев) таким образом, чтобы движение было оптимальным в смысле динамической нагруженности соединений подвижных звеньев. Такое управление может быть оптимальным и в другом смысле, например, в смысле быстродействия (времени отработки соответствующей

координаты) или с точки зрения минимальных энергозатрат на перемещение схвата из одного положения в другое. Реакции в подвижных соединениях являются по существу управляющими воздействиями, необходимыми для реализации программы движения. Например, если желательны управления воздействия с предельно минимальной затратой энергии, то абсолютная минимальность достигается в случае идеальности связей, то есть при условии, что сумма элементарных работ всех сил реакции связей равна нулю. На любом возможном перемещении управление в конечном счете может быть реализовано определенным сочетанием степеней подвижности, превышающим необходимое (минимальное) число обобщенных координат, требуемое для реализации определенной траектории схвата. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи о скоростях и ускорениях звеньев манипулятора как векторных величинах при известном движении каждого звена i по отношению к предыдущему звену $i - 1$.

Вектор угловой скорости последующего звена манипулятора представим как векторную сумму вектора угловой скорости предыдущего звена (в переносном движении) и вектора его относительного вращения (в относительном движении). Тогда имеем возможность записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{10} = \bar{\omega}_{10}, \text{ т. к. } \bar{\omega}_0 = 0, \\ \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21}, \\ \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32}, \\ &\vdots \\ \bar{\omega}_i &= \bar{\omega}_{i-1} + \bar{\omega}_{i,i-1} = \sum_{i=1}^k \bar{\omega}_{i,i-1} = \sum_{i=1}^k \bar{l}_i \cdot \dot{\alpha}_{i,i-1}.\end{aligned}$$

Последние соотношения дают возможность сформулировать следующее правило. Угловая скорость любого i -го звена манипулятора определяется векторной суммой относительной угловой скорости этого звена и всех ему предшествующих. В последнем уравнении \bar{l}_i — единичный вектор, совпадающий с положительным направлением вектора $\bar{\omega}_i$. Аналогично для линейных скоростей точек O_1, O_2, O_3 и т.д., совпадающих с началами подвижных систем координат, имеем

$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_{BA}, \text{ т. к. } \bar{v}_A = 0, \\ \bar{v}_C &= \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} = \bar{v}_{BA} + \bar{v}_{CB}, \\ \bar{v}_D &= \bar{v}_C + \bar{v}_{DC} = \bar{v}_{BA} + \bar{v}_{CB} + \bar{v}_{DC}, \\ &\vdots \\ \bar{v}_D &= (\bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{AB}) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{BC}) + (\bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{CD}).\end{aligned}\tag{9.28}$$

Уравнение (9.28) указывает на взаимосвязь скорости точки, заданной, например, в неподвижной прямоугольной системе ко-

ординат, связанной со станиной, с линейными скоростями \bar{v}_{O_i} начала i -ой подвижной системы координат. Тогда скорость центра масс i -го подвижного звена определяется по формуле

$$\bar{v}_{S_i} = \frac{d\bar{r}_{S_i}}{dt} = \bar{v}_{O_i} + \bar{v}_{S_i, O_i}. \quad (9.29)$$

Скорость \bar{v}_{O_i} начала координат i -ой подвижной системы определяется по формуле

$$\bar{v}_{O_i} = (\bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{O_0 O_1}) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{O_1 O_2}) + (\bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{O_2 O_3}) + \dots + (\bar{\omega}_i \times \bar{l}_{O_{i-1} O_i}).$$

Скорость центра масс i -го звена относительно начала этой системы координат

$$\bar{v}_{S_i, O_i} = \bar{\omega}_i \times \bar{r}_{S_i}^{(i)}. \quad (9.30)$$

В уравнении (9.29) \bar{r}_{S_i} — радиус-вектор центра масс i -го звена в неподвижной системе координат. В формуле (9.30) $\bar{r}_{S_i}^{(i)}$ — радиус-вектор центра масс i -го звена в системе координат, связанной с этим звеном (в i -ой системе координат); $\bar{\omega}_{i, i-1}$ — вектор угловой скорости вращения i -ой системы координат относительно предшествующей системы координат.

Для определения ускорений точек, совпадающих с началами подвижных систем координат, имеем соотношения

$$\begin{aligned} \bar{a}_{O_1} &= \bar{a}_O + \bar{a}_{1O} = \bar{a}_{1O}, \quad \bar{a}_O = 0, \\ \bar{a}_{O_2} &= \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{O_2, O_1}, \\ \bar{a}_{O_3} &= \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{O_2, O_1} + \bar{a}_{O_3, O_2}, \\ &\vdots \\ \bar{a}_{O_i} &= \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{O_2, O_1} + \bar{a}_{O_3, O_2} + \dots + \bar{a}_{O_i, O_{i-1}}. \end{aligned}$$

Ускорение точки в пространственном ее движении определяется соотношением

$$\begin{aligned} \bar{a}_{O_i} &= \frac{d\bar{v}_{O_i}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega}_i \times \bar{l}_{O_{i-1}, O_i})}{dt} = \\ &= \left(\frac{d\bar{\omega}_i}{dt} \times \bar{l}_{O_{i-1}, O_i} \right) + \left(\bar{\omega}_i \times \frac{d\bar{l}_{O_{i-1}, O_i}}{dt} \right) = \\ &= (\bar{\varepsilon}_i \times \bar{l}_{O_{i-1}, O_i}) + (\bar{\omega}_i \times \bar{v}_{O_i, O_{i-1}}) \end{aligned} \quad (9.31)$$

или

$$|\bar{a}_i| = \varepsilon_i \cdot l_{O_{i-1}, O_i} \cdot \sin(\bar{\varepsilon}_i \wedge \bar{l}_{O_{i-1}, O_i}) + \omega_i \cdot v_{O_i, O_{i-1}} \cdot \sin(\bar{\omega}_i \wedge \bar{v}_{O_i, O_{i-1}}).$$

Запишем уравнение (9.31) в координатной форме:

$$\bar{a}_{Oi} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_i^x & \varepsilon_i^y & \varepsilon_i^z \\ l_{Oi-1,Oi}^x & l_{Oi-1,Oi}^y & l_{Oi-1,Oi}^z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_i^x & \omega_i^y & \omega_i^z \\ v_{Oi}^x & v_{Oi}^y & v_{Oi}^z \end{vmatrix}.$$

Для определения углов $(\bar{\varepsilon}_i \wedge \bar{l}_{Oi,Oi-1})$ и $(\bar{\omega}_i \wedge \bar{v}_{Oi})$ можно воспользоваться выражением их скалярного произведения в координатной форме. Если известны величины

$$\varepsilon_i = \sqrt{(\varepsilon_i^x)^2 + (\varepsilon_i^y)^2 + (\varepsilon_i^z)^2}; \quad \omega_i = \sqrt{(\omega_i^x)^2 + (\omega_i^y)^2 + (\omega_i^z)^2};$$

$$\bar{v}_{Oi} = \sqrt{(v_{Oi}^x)^2 + (v_{Oi}^y)^2 + (v_{Oi}^z)^2};$$

$$l_{Oi-1,Oi} = \sqrt{(l_{Oi-1,Oi}^x)^2 + (l_{Oi-1,Oi}^y)^2 + (l_{Oi-1,Oi}^z)^2};$$

то искомые углы определяются соотношениями

$$(\bar{\varepsilon}_i \wedge \bar{l}_{Oi-1,Oi}) = \arccos \left(\frac{\varepsilon_i^x l_{Oi-1,Oi}^x + \varepsilon_i^y l_{Oi-1,Oi}^y + \varepsilon_i^z l_{Oi-1,Oi}^z}{\varepsilon_i l_{Oi-1,Oi}} \right),$$

$$(\bar{\omega}_i \wedge \bar{v}_{Oi}) = \arccos \left(\frac{\omega_i^x v_{Oi}^x + \omega_i^y v_{Oi}^y + \omega_i^z v_{Oi}^z}{\omega_i v_{Oi}} \right).$$

По аналогии с (9.29) ускорение центра масс i -го звена найдется из соотношения

$$\bar{a}_{Si} = \frac{d\bar{v}_{Si}}{dt} = \bar{a}_{Oi} + \bar{a}_{Si,Oi},$$

где \bar{a}_{Oi} — ускорение начала i -ой системы координат, определяемое по формуле (9.31). Из уравнения (9.30) имеем следующее выражение для ускорения центра масс i -го звена в системе координат, связанной с этим звеном:

$$\bar{a}_{Si,Oi} = \frac{d\bar{v}_{Si,Oi}}{dt} = \bar{\varepsilon}_i \times \bar{r}_{Si}^{(i)} + \bar{\omega}_i \times \bar{v}_{Si,Oi}.$$

Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}_i$ i -го звена определится из следующих соображений (см. рис.9.25). Приращение вектора $d\bar{\omega}_i$ во времени определяется приращением вектора $d\bar{\omega}_{i-1}$ предшествующего звена (переносного движения i -го звена), приращением вектора $d\bar{\omega}_{i,i-1}$ звена в его относительном движении, а также вектором

$$(\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1}) dt.$$

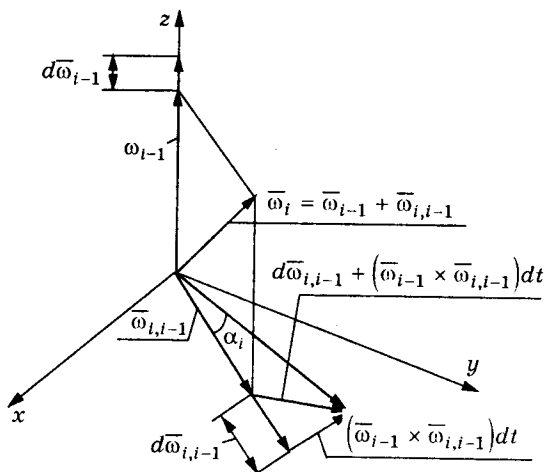


Рис.9.28. К определению вектора ε_i углового ускорения i -го звена манипулятора

Из рис.9.28 видно, что результирующий вектор $d\bar{\omega}_i$, характеризующий приращение вектора ω_i во времени, определится как

$$d\bar{\omega}_i = d\bar{\omega}_{i-1} + d\bar{\omega}_{i,i-1} + (\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1})dt.$$

Разделив последнее уравнение на dt , получим

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \bar{\varepsilon}_{i-1} + \varepsilon_{i,i-1} + (\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1}). \quad (9.32)$$

Из уравнения (9.32) и рис.9.28 следует, что за время dt изменяется не только длина вектора $\bar{\omega}_{i-1}$ и вектора $\bar{\omega}_{i,i-1}$, но и сам вектор $\bar{\omega}_{i,i-1}$ поворачивается на угол $d\alpha_i = \omega_{i-1}dt$. Тогда линейная скорость конца вектора $\bar{\omega}_{i,i-1}$ определится выражением $\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1}$, то есть вектор $(\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1})dt$ характеризует приращение вектора угловой скорости i -го звена за счет его поворота со скоростью $\bar{\omega}_{i,i-1}$.

Полученные уравнения отображают кинематику звеньев манипуляторов с вращательными кинематическими парами. Если же имеются поступательные движения i -го звена с возможностью вращения его относительно i -го звена (см.рис.9.29), то в этом случае скорость системы определится с учетом изменения длины и направления вектора

$$\bar{l}_{O_{i-1},O_i}, \text{ т.е. } \bar{v}_{O_i}^{(i-1)} = \bar{\omega}_{i-1} \times (\bar{l}_{O_{i-1},O_i} + \bar{v}_{O_i}t).$$

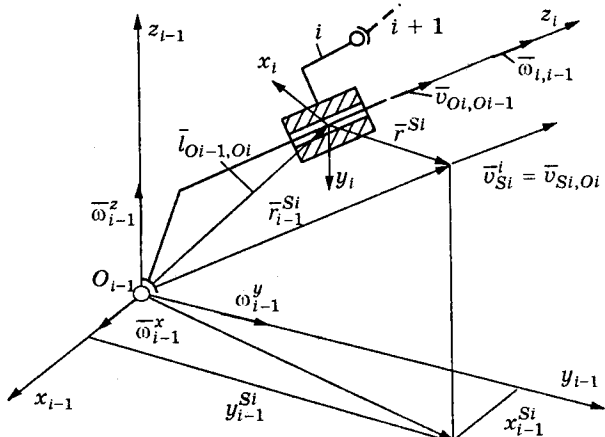


Рис.9.29. К определению кинематики i -го звена манипулятора, имеющего возможность поступательного движения относительно звена $i - 1$

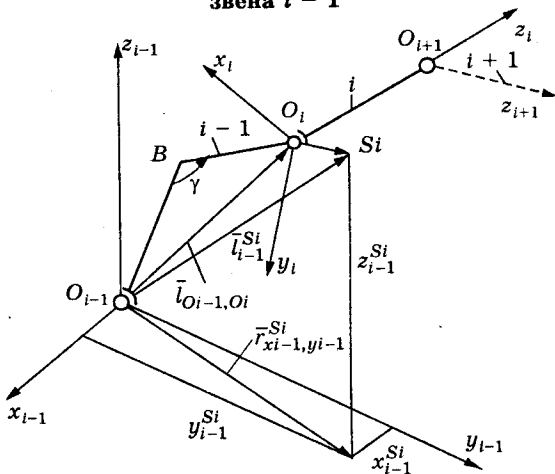


Рис.9.30. К определению кинематики i -го звена манипулятора, совершающего вращательное (сферическое) движение относительно звена $i - 1$

Тогда скорость центра масс i -го звена в системе координат $i - 1$ примет вид

$$\bar{v}_{Si}^{(i-1)} = [\bar{\omega}_{i-1} \times (\bar{l}_{O_{i-1}, O_i} + \bar{v}_{O_i t})] + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_{Si}^{(i)} = \bar{v}_{O_i} + \bar{v}_{Si, O_i}. \quad (9.33)$$

В этом случае ускорение начала координат O_i запишется в виде

$$\bar{a}_{O_i} = (\bar{\varepsilon}_{i-1} \times \bar{l}_{O_{i-1}, O_i}) + (\bar{\omega}_{i-1} \times v_{O_i, O_{i-1}}) + 2(\bar{\omega}_{i-1} \times v_{O_i, O_{i-1}}). \quad (9.34)$$

Уравнение (9.34) является наиболее общим для определения ускорения точки, совпадающей с началом i -ой подвижной систе-

мы координат. В нем последняя составляющая является ускорением Кориолиса. Если звенья $i-1$ и i входят во вращательную (сферическую) кинематическую пару (см. рис. 9.30), то $\bar{v}_{O_i, O_{i-1}} = 0$ и уравнение (9.34) дает зависимость (9.31). Таким образом, уравнение (9.33) является наиболее общей записью для скорости центра масс i -го звена.

Для пояснения вышеизложенного на рис. 9.30 представлена схема соединения i -го звена манипулятора с его $i-1$ -ым предшествующим, при отсутствии их относительного поступательного движения. В этом случае (в отличие от рис. 9.29) скорость относительного движения $\bar{v}_{O_i, O_{i-1}}$ начала координат i -й системы относительно $i-1$ -й системы равна нулю, тогда

$$\bar{v}_{O_i} = \bar{\omega}_{i-1} \times \bar{l}_{O_{i-1}, O_i},$$

причем

$$l_{O_{i-1}, O_i} = \sqrt{(O_{i-1}B)^2 + (BO_i)^2 - 2O_{i-1}B \cdot BO_i \cos \gamma} = \text{const.}$$

9.8. Взаимосвязь кинематики звеньев манипулятора с законом движения схвата вдоль заданной траектории

Пусть, например, задана траектория точки D предмета, перемещающегося вместе со схватом (см. рис. 9.31), то есть в любом положении точки D задан вектор $l_{AD} = x_D \bar{i} + y_D \bar{j} + z_D \bar{k}$ в неподвижной системе координат. Задана также скорость

$$\bar{v}_D = \bar{\omega} \times \bar{l}_{AD} = v_D^x \bar{i} + v_D^y \bar{j} + v_D^z \bar{k}.$$

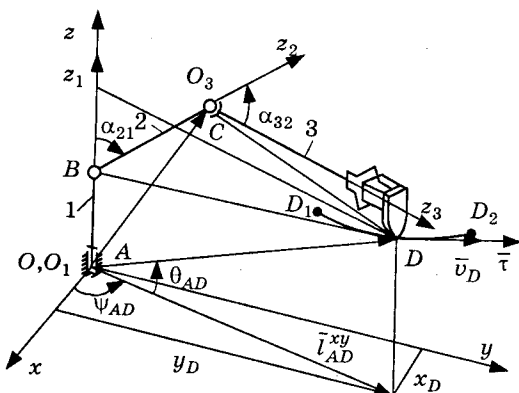


Рис. 9.31. К определению взаимосвязи кинематики звеньев манипулятора с законом движения схвата вдоль заданной траектории

Вектор $\bar{v}_D = d\bar{l}_{AD}/dt$ определяется векторной производной по времени вектора l_{AD} и направлен по касательной $\bar{\tau}$ к годографу дифференцируемого вектора \bar{l}_{AD} . Положение вектора \bar{l}_{AD} в системе координат X, Y, Z может быть задано координатами

$$\begin{aligned}\psi_{AD} &= \text{arctg}(y_D/x_D), \\ \theta_{AD} &= \text{arctg}(z_D/l_{AD}^{xy}) = \text{arctg}(z_D/\sqrt{x_D^2 + y_D^2}), \\ l_{AD} &= \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}.\end{aligned}$$

Как видно из рис.9.31, вектор \bar{l}_{AD} можно представить в виде суммы векторов:

$$\left. \begin{aligned}\bar{l}_{AD} &= \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BD}, \\ \bar{l}_{AD} &= \bar{l}_{AC} + \bar{l}_{CD},\end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

где

$$\begin{aligned}|\bar{l}_{BD}| &= \sqrt{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - 2l_{BC}l_{CD} \cos(\bar{l}_{BC} \wedge \bar{l}_{CD})}, \\ |\bar{l}_{AC}| &= \sqrt{l_{AB}^2 + l_{BC}^2 - 2l_{AB}l_{BC} \cos(\bar{l}_{AB} \wedge \bar{l}_{BC})}.\end{aligned}$$

В последующих уравнениях $(\bar{l}_{BC} \wedge \bar{l}_{CD}) = 180^\circ - \alpha_{32}$,
 $(\bar{l}_{AB} \wedge \bar{l}_{BC}) = 180^\circ - \alpha_{21}$ (см.рис.9.31).

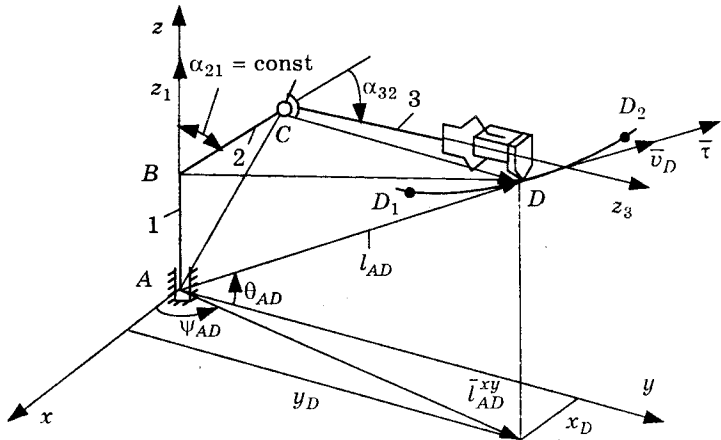


Рис.9.32. Схема реализации движения точки D при одной подвижности в кинематической паре A и двух вращательных движениях в паре C с "замороженной" обобщенной координатой α_{21}

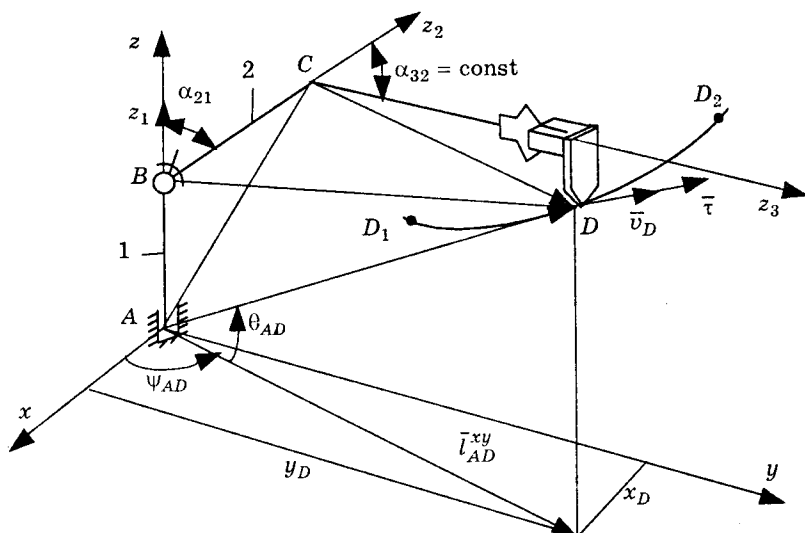


Рис.9.33. Схема реализации движения точки D при одном вращательном движении в кинематической паре A и двух вращениях в паре B с "замороженной" обобщенной координатой α_{32}

Уравнения (9.35) указывают на возможность многовариантной реализации (отработки) закона движения точки D вдоль заданной траектории с минимальным сочетанием подвижностей. На рис.9.32 и 9.33 представлены схемы одного и того же манипулятора (см.рис.9.31), позволяющие реализовать отработку закона движения некоторого предмета, перемещающегося со схватом при различном сочетании подвижностей.

Из рис.9.32 и 9.33 видно, что и в том и в другом случае отработка требуемого закона движения точки D может быть осуществлена тремя подвижностями. Какое сочетание подвижностей лучше, на этапе кинематического анализа определено быть не может. Математическое моделирование кинематической связи звеньев манипулятора и схвата заключается в соблюдении их геометрической связи, определяемой уравнением (9.35) в любом положении точки D на траектории D_1D_2 , и в соблюдении равенства их первой и второй производных.

Дифференцирование этих равенств должно проводиться с учетом переменности соответствующих векторов по длине и по направлению. Как видно из рис.9.32, вектор \vec{l}_{AC} остается неизменным по длине и меняется только по направлению со скоростью $\dot{\alpha}_{10}$, определяемой скоростью вращения звена 1 относительно станины (неподвижной системы координат xyz). В данном случае $\alpha_{21} = \text{const}$ определяет значение "замороженной"

обобщенной координаты, характеризующей угол между звеньями 1 и 2 манипулятора. В случае, представленном на рис.9.33, вектор \bar{l}_{AC} изменяется и по величине, и по направлению. Скорость изменения его длины определяется скоростью $\dot{\alpha}_{21}$ обработки координаты α_{21} в плоскости, образованной отрезками AB и BC звеньев 1 и 2.

Из рис.9.23 видно также, что вектор \bar{l}_{BD} остается постоянным по модулю и меняется только по направлению. Тогда уравнение (9.35) в координатной форме можно записать для схемы на рис.9.32 в виде

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} x_D^{(1)} \\ y_D^{(1)} \\ z_D^{(1)} \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (9.36)$$

а для схемы рис.9.33 в виде

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} x_D^{(2)} \\ y_D^{(2)} \\ z_D^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.37)$$

Возвращаясь к рис.9.31, видим, что в общем случае

$$\bar{l}_{AD} = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} + \bar{l}_{CD}$$

или в координатной форме, как было записано ранее,

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{AB} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{BC} \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{Bmatrix}. \quad (9.38)$$

Из рис.9.31, 9.32, 9.33 и уравнений (9.36)-(9.38) видно, что одна и та же траектория в неподвижной системе координат может быть отработана различным сочетанием степеней подвижности. При этом в каждом конкретном случае, определяемом уравнениями (9.36) или (9.37), необходимо задаться значением соответствующей "замороженной" обобщенной координаты $\alpha_{21} = \text{const}$ (см. рис.9.32) или $\alpha_{32} = \text{const}$ (9.19), остающейся неизменной в процессе всего движения схвата. Такая кинематическая многовариантность, как отмечалось ранее, вызывает неопределенность. Для кинематического же анализа требуется вполне определенная геометрическая связь между звеньями и их положением в пространстве. Поэтому на этапе кинематического анализа выбор наиболее выгодного сочетания степеней подвижности произведен быть не может, так как критерии оценки такого сочетания связа-

ны с эксплуатационными характеристиками, такими, как, например, износ в кинематических парах или минимальные силы реакции в каком-либо подвижном соединении и др. Однако для решения динамической задачи в такой постановке эта неопределенность необходима. На этапе кинематического анализа необходимо иметь аналитические выражения, определяющие все возможные сочетания подвижностей, с помощью которых может быть отработана заданная траектория схвата. На этапе же динамического анализа в зависимости от поставленной задачи может быть выбрано одно или несколько уравнений, наилучшим образом отображающих относительное движение звеньев и обеспечивающих тем самым движение схвата с наименьшей динамической нагруженностью подвижных соединений или с наименьшим их износом, энергозатратами и т.п. Как видно из рассмотренных примеров, математическое моделирование кинематики манипуляторов сводится к аналитическому представлению векторов скоростей и ускорений в проекциях на оси систем координат, повернутых друг относительно друга. В таком представлении оказываются удобными кинематические уравнения Эйлера [21]. Покажем возможность их использования для нашего случая. Пусть, например, i -ое звено совершает относительно предшествующего $i - 1$ -го звена сферическое движение (см. рис.9.34). Пусть трехосное вращение i -ой системы координат задано скоростями прецессии $\dot{\psi}$, нутации $\dot{\theta}$ и собственного вращения $\dot{\phi}$.

Из рис 9.34 видно, что проекции векторов $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$ и $\bar{\phi}$ на оси рассматриваемых систем координат запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned}
 \left(\bar{\psi}\right)_{xi} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, & \left(\bar{\psi}\right)_{xi-1} &= 0, \\
 \left(\bar{\psi}\right)_{yi} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, & \left(\bar{\psi}\right)_{yi-1} &= 0, \\
 \left(\bar{\psi}\right)_{zi} &= \dot{\psi} \cos \theta, & \left(\bar{\psi}\right)_{zi-1} &= \dot{\psi}, \\
 \left(\bar{\theta}\right)_{xi} &= \dot{\theta} \cos \varphi, & \left(\bar{\theta}\right)_{xi-1} &= \dot{\theta} \cos \psi, \\
 \left(\bar{\theta}\right)_{yi} &= -\dot{\theta} \sin \varphi, & \left(\bar{\theta}\right)_{yi-1} &= \dot{\theta} \sin \psi, \\
 \left(\bar{\theta}\right)_{zi} &= 0, & \left(\bar{\theta}\right)_{zi-1} &= 0. \\
 \left(\bar{\phi}\right)_{xi} &= 0, & \left(\bar{\phi}\right)_{xi-1} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\
 \left(\bar{\phi}\right)_{yi} &= 0, & \left(\bar{\phi}\right)_{yi-1} &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\
 \left(\bar{\phi}\right)_{zi} &= \dot{\phi}, & \left(\bar{\phi}\right)_{zi-1} &= \dot{\phi} \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Вектор угловой скорости в проекциях на оси рассматриваемых систем координат запишется в виде

$$\begin{aligned}\omega_{xi} &= (\dot{\bar{\psi}})_{xi} + (\dot{\bar{\theta}})_{xi} + (\dot{\bar{\phi}})_{xi}, & \omega_{xi-1} &= (\dot{\bar{\psi}})_{xi-1} + (\dot{\bar{\theta}})_{xi-1} + (\dot{\bar{\phi}})_{xi-1}, \\ \omega_{yi} &= (\dot{\bar{\psi}})_{yi} + (\dot{\bar{\theta}})_{yi} + (\dot{\bar{\phi}})_{yi}, & \omega_{yi-1} &= (\dot{\bar{\psi}})_{yi-1} + (\dot{\bar{\theta}})_{yi-1} + (\dot{\bar{\phi}})_{yi-1}, \\ \omega_{zi} &= (\dot{\bar{\psi}})_{zi} + (\dot{\bar{\theta}})_{zi} + (\dot{\bar{\phi}})_{zi}, & \omega_{zi-1} &= (\dot{\bar{\psi}})_{zi-1} + (\dot{\bar{\theta}})_{zi-1} + (\dot{\bar{\phi}})_{zi-1}.\end{aligned}$$

Последние уравнения с учетом предыдущих окончательно примут вид

$$\begin{aligned}\omega_{xi} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_{yi} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_{zi} &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \\ \left. \begin{aligned}\omega_{xi-1} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{yi-1} &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{zi-1} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\right\} \quad (9.39)\end{aligned}$$

Как известно, наилучшими манипуляционными свойствами обладает схема, реализующая семь степеней подвижности руки человека с пальцами, зажатыми в кулак. Однако на практике такая схема не находит применения из-за большого веса звеньев привода. Создание простой и компактной конструкции привода звена манипулятора, обеспечивающей его трехосное вращение с минимальным весом (минимальным количеством звеньев), является одной из технических проблем на сегодняшний день. Однако имеются технические решения, например, [48, 49], позволяющие реализовать вращение звена манипулятора с минимальным количеством звеньев привода. Для такого модульного электромеханического шарнира манипулятора при $\phi = 0$ последние уравнения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}\omega_{xi} &= \dot{\theta} \\ \omega_{yi} &= \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_{zi} &= \dot{\psi} \cos \theta \\ \omega_{xi-1} &= \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{yi-1} &= \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{zi-1} &= \dot{\psi}\end{aligned}\right\} \quad (9.40)$$

Модуль вектора $\bar{\omega}$ определится из соотношения

$$\omega = \sqrt{\omega_{xi}^2 + \omega_{yi}^2 + \omega_{zi}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}.$$

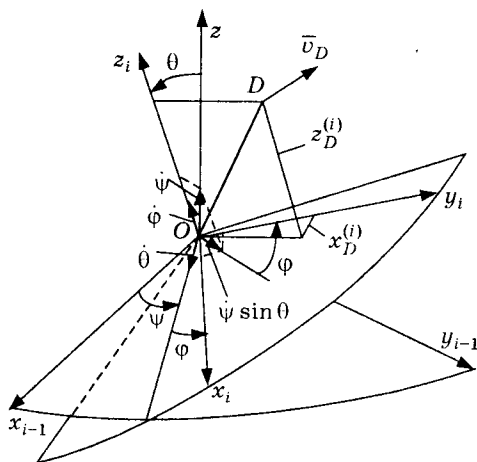


Рис.9.34. Взаимосвязь проекций векторов угловых скоростей, заданных в прямоугольных системах координат, совершающих сферическое движение друг относительно друга

Для шарнира [48] при $\varphi = \text{const}$ последнее уравнение примет вид

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2}.$$

Ориентация вектора $\bar{\omega}$ в пространстве определится углом ψ_ω , характеризующим отклонение его в плоскости $x_i y_i$ от x_i :

$$\psi_\omega^{(i)} = \text{arctg} \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega_{x_i}} \right) = \text{arctg} \frac{\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi}{\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi},$$

и углом θ_ω характеризующим отклонение вектора $\bar{\omega}$ от плоскости $x_i y_i$. С учетом некоторых преобразований уравнений (9.39) получим

$$\theta_\omega^{(i)} = \text{arctg} \frac{\omega_{z_i}}{\sqrt{\omega_{x_i}^2 + \omega_{y_i}^2}} = \text{arctg} \frac{\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \theta}{\sqrt{(\dot{\theta})^2 + (\dot{\psi} \sin \theta)^2}}.$$

Таким образом, полученные уравнения позволяют определить проекции вектора угловой скорости некоторого i -го звена манипулятора как на оси, жестко связанные с самим звеном, так и на оси, жестко связанные с предшествующим $(i - 1)$ -м звеном. Пусть, например, на 3-ем звене установлен схват и расстояние до некоторой точки предмета, зажатого в схвате, определяется

вектором $\bar{l}_{CD} = x_D \bar{i}^{(i)} + y_D \bar{j}^{(i)} + z_D \bar{k}^{(i)}$ (см. рис.9.31 и 9.35). Тогда скорость \bar{v}_D точки D определится из соотношения

$$\bar{v}_D = (\bar{\omega} \times \bar{l}_{CD}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix}.$$

Последнее уравнение позволяет выразить скорость точки D в i -ой или $(i - 1)$ -ой системе координат в зависимости от того, какие проекции векторов $\bar{\omega}$ и \bar{l}_{CD} подставлены в его правую часть.

Пример. Записать уравнения, связывающие кинематические характеристики звеньев манипулятора, изображенного на рис.9.35, с законом движения его схвата вдоль заданной траектории. Задание траектории $D_1 D_2$ означает задание длины (пути, пройденного точкой D), кривизны и кручения или же задание вектора

$$\bar{l}_{OD}^{(0)} = x_D^{(0)} \bar{i} + y_D^{(0)} \bar{j} + z_D^{(0)} \bar{k}$$

по величине

$$|\bar{l}_{OD}^{(0)}| = \sqrt{[x_D^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2 + [z_D^{(0)}]^2}$$

и направлению, определяемому углами

$$\psi_{OD} = \arctg \frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}}, \theta_{OD} = \frac{z_D^{(0)}}{\sqrt{[x_D^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2}}.$$

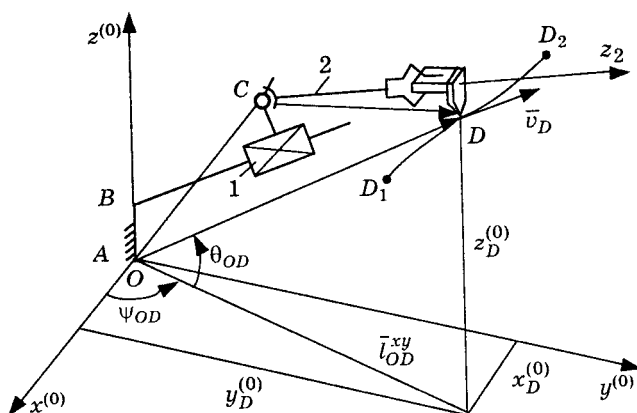


Рис.9.35. Схема манипулятора с двумя кинематическими парами — поступательной и двухосной вращательной

Тогда

$$\bar{v}_D = \frac{d\bar{l}_{OD}}{dt} = \dot{x}_D^{(0)}\bar{i} + \dot{y}_D^{(0)}\bar{j} + \dot{z}_D^{(0)}\bar{k}.$$

Скорость \bar{v}_C точки C задана проекциями вектора в неподвижной системе координат:

$$\bar{v}_C = \dot{x}_C^{(0)}\bar{i} + \dot{y}_C^{(0)}\bar{j} + \dot{z}_C^{(0)}\bar{k}.$$

Скорость \bar{v}_D точки D можно выразить как векторную сумму скорости \bar{v}_C в переносном (поступательном) движении и скорости \bar{v}_{DC} в относительном (двухосном вращательном) движении, при этом $\bar{v}_{DC} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{l}_{CD}$.

С учетом соотношений (9.40) получим

$$\begin{aligned} \bar{v}_D &= \bar{v}_C^{(0)} + \bar{v}_{DC}^{(0)} = \dot{x}_C^{(0)}\bar{i} + \dot{y}_C^{(0)}\bar{j} + \dot{z}_C^{(0)}\bar{k} + \\ &+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{\theta} \cos \psi & \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\psi} \\ (x_D - x_C) & (y_D - y_C) & (z_D - z_C) \end{vmatrix} = \\ &= \left[\dot{x}_C^{(0)} + \dot{\theta}(z_D - z_C) \sin \psi - \dot{\psi}(y_D - y_C) \right] \bar{i} + \\ &+ \left[\dot{y}_C^{(0)} + \dot{\psi}(x_D - x_C) - \dot{\theta}(z_D - z_C) \cos \psi \right] \bar{j} + \\ &+ \left[\dot{z}_C^{(0)} + \dot{\theta}(y_D - y_C) \cos \psi - \dot{\theta}(x_D - x_C) \sin \psi \right] \bar{k}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_D^{(0)} \\ \dot{y}_D^{(0)} \\ \dot{z}_D^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_C^{(0)} + \dot{\theta}(z_D - z_C) \sin \psi - \dot{\psi}(y_D - y_C) \\ \dot{y}_C^{(0)} + \dot{\psi}(x_D - x_C) - \dot{\theta}(z_D - z_C) \cos \psi \\ \dot{z}_C^{(0)} + \dot{\theta}(y_D - y_C) \cos \psi - \dot{\theta}(x_D - x_C) \sin \psi \end{Bmatrix}.$$

Левая часть полученных уравнений отображает заданный закон движения точки D вдоль траектории. Правая — закон изменения обобщенных координат S_C , ψ_{21} и θ_{21} . В последнем уравнении удобно все параметры задавать в функции длины траектории, определяемой приращением соответствующих координат. Тогда, решив его относительно искомых $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$ при равномерном, например, движении звена 1, то есть

при $|\bar{v}_C| = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2} = \text{const}$, определим закон изменения обобщенных координат θ_{21} и ψ_{21} , удовлетворяющий заданному закону движения схвата вдоль своей траектории. Следует иметь в виду, что время отработки координат точки C одинаковые, поэтому если движение начинается

с точки D_1 , то $t = \frac{x_C - x_{C1}}{\dot{x}_C} = \frac{y_C - y_{C1}}{\dot{y}_C} = \frac{z_C - z_{C1}}{\dot{z}_C}$. Это означает, что для каждой ориентации направляющей звена 1 в системе координат $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ скорость отработки координат точки C будет различная. Это важно для того случая, например, когда звено 1 имеет возможность вращения относительно оси $z^{(0)}$. Представленная же на рис.9.35 схема манипулятора отображает "замороженное" значение этой обобщенной координаты.

Полученная взаимосвязь закона движения схвата вдоль заданной траектории с законом изменения обобщенных координат манипулятора может быть положена в основу системы управления от ЭВМ. В этом случае функции θ и ψ будут являться математическим алгоритмом управления двигателями, осуществляющими поворот звена 2 относительно 1 (см. рис.9.35). Такой алгоритм может быть записан в общем случае, обеспечивающем ввод данных, отображающих необходимую конечную цель, связанную со снижением динамической нагруженности подвижных звеньев манипулятора с его быстродействием или с точностью позиционирования. Коррекция действительного закона движения схвата (организация обратной связи) в данном подходе должна технически осуществляться с учетом конкретной конечной цели. Для этого в каждом фиксированном значении положения схвата на его траектории необходимо иметь аналитические зависимости, определяющие величину и направление реактивных сил и моментов в подвижных соединениях манипулятора. Тогда обратная связь может быть реализована на основе преобразования деформации в электрический сигнал. Тем самым представляется возможность адаптивного (самоприспосабливающегося) управления движением звеньев манипулятора, реализующего требуемый закон движения схвата вдоль заданной траектории. В основу такого управления может быть положено и целенаправленное изменение параметров самой траектории, обеспечивающих наименьшие динамические нагрузки в подвижных соединениях манипулятора при заданном быстродействии, точности позиционирования или наименьших энергозатратах на отработку координат. Во всех случаях требуется умение составить алгоритм количественной оценки нагруженности в подвижных соединениях звеньев, другими словами, необходимо дать количественную оценку взаимосвязи массово-геометрических и кинематических характеристик манипулятора. Такая взаимосвязь определяется динамическими характеристиками: количеством движения, кинетической энергией, силами инерции, моментами сил веса и инерции.

9.9. Определение динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипуляторов от инерционных сил

В основе количественной оценки динамической нагруженности подвижных соединений манипуляторов от инерционных сил лежит известное из теоретической механики соотношение

$$\bar{F}_i^n = - \frac{d(m_i \bar{v}_{Si})}{dt}, \quad (9.41)$$

где m_i — масса i -го звена; \bar{v}_{Si} — скорость его центра масс.

Как известно, в поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы. Это означает, что его количество движения может быть представлено количеством движения точки массой, равной массе всего звена. Такую точку для удобства дальнейших вычислений располагают в центре масс звена, массу ее выбирают равной массе всего звена. Тогда уравнение (9.41) в координатной форме можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^n \\ F_{yi}^n \\ F_{zi}^n \end{Bmatrix} = -m_i \begin{Bmatrix} a_{Si}^{xi} \\ a_{Si}^{yi} \\ a_{Si}^{zi} \end{Bmatrix}. \quad (9.42)$$

Уравнение (9.42) позволяет определить составляющие сил инерции в подвижных соединениях i -го звена. Составляющие ускорения центра масс определены ранее. Таким образом, вектор силы реакции, определяемой от силы инерции i -го звена в системе координат, связанной с этим звеном, имеет вид

$$F_i^n = F_{xi}^n \bar{i} + F_{yi}^n \bar{j} + F_{zi}^n \bar{k}. \quad (9.43)$$

Ориентация этого вектора в пространстве определится углами

$$\psi_{Fi}^n = \arctg \frac{F_{yi}^n}{F_{xi}^n}, \quad (9.44)$$

$$\theta_{Fi}^n = \arctg \frac{F_{zi}^n}{\sqrt{(F_{xi}^n)^2 + (F_{yi}^n)^2}}. \quad (9.45)$$

Уравнения (9.43)-(9.45) позволяют определить в каждый момент времени движения схвата вдоль заданной траектории величину и направление вектора силы реакции от инерционных грузов при поступательном движении звена с ускорением его центра масс, равным $\bar{a}_{Si} = a_{xi} \bar{i} + a_{yi} \bar{j} + a_{zi} \bar{k}$. Уравнения (9.44) и (9.45)

позволяют судить об отклонении вектора \bar{F}_i^n , например, от плоскости, в которой расположен подшипниковый узел. Эта информация весьма полезна, так как она позволяет определить участки траектории схвата и относительное расположение звеньев друг относительно друга, наиболее неблагоприятные для данного типа подшипникового узла. Например, для радиального подшипника качения отклонение силы реакции от плоскости качения шариков приводит к неблагоприятному смещению его внутреннего кольца относительно наружного. При этом условия качения шариков нарушаются и долговечность такого подвижного соединения резко снижается. Здесь наиболее важно, с точки зрения сохранения нормальных условий работы, наименьшее изменение во времени ориентации этого вектора. Как видно из уравнений (9.43)-(9.45), работоспособность подшипникового узла определяется в большой степени изменением ускорения \bar{a}_{S_i} по направлению, то есть углами $\psi_{F_i^n}$, $\theta_{F_i^n}$. Таким образом, оценка динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипулятора по инерционным силам предусматривает анализ графической информации, отображающей изменение модуля вектора \bar{F}_i^n и его направления, то есть углов $\psi_{F_i^n}$, $\theta_{F_i^n}$, в функции траектории схвата. Выявление участков траектории, на которых проявляется наиболее неблагоприятное сочетание этих трех характеристик, и является конечной целью анализа динамической нагруженности того или иного подвижного соединения звена манипулятора. Наиболее неблагоприятным во всех случаях является изменение знака углов $\psi_{F_i^n}$, $\theta_{F_i^n}$, то есть изменение направления \bar{F}_i^n на противоположное. Таким переход через нуль характеризует наличие удара в пределах зазора подвижного соединения. Если не удастся избежать этого явления, маневрируя степенями подвижности, то точностная долговечность манипулятора должна определяться с учетом возможного снижения удара после выборки зазоров и создания предварительного натяга в подвижном соединении.

9.10. Определение динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипулятора от моментов инерционных сил

Простота оценки динамической нагруженности от сил инерции основана на том, что скорости и ускорения точек тела, дви-

жущегося поступательно, одинаковы. При вращательном (сферическом) движении математический алгоритм оценки динамической нагруженности от сил инерции несколько сложнее. Это связано с тем, что сумма моментов количеств движения $m_i \bar{v}_i$ точек твердого тела зависит от распределения этих точек (от их плотности). Если обозначить расстояние элементарной точки i массой m_i , имеющей скорость \bar{v}_i , от начала O_i некоторой системы координат радиусом-вектором \bar{r}_i , то вектор \bar{L}_{O_i} момента этого количества движения относительно начала координат запишется в виде

$$\bar{L}_{O_i} = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i.$$

Для оценки количества движения звена манипулятора как твердого тела необходимо введение понятия геометрической суммы количеств движения его отдельных точек, отображающей его конфигурацию и распределение плотности материала по объему. В теоретической механике доказывается, что геометрическая сумма количеств движения точек твердого тела может быть представлена в виде

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^N \bar{L}_{O_i} = [J_i] \bar{\omega}_i.$$

Эту величину называют кинетическим моментом системы материальных точек.

Кинетический момент системы в координатной форме записывается следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x - J_{yz} \omega_z \\ J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y \end{vmatrix}. \quad (9.46)$$

В уравнении (9.46) для упрощения записи индексы i , определяющие принадлежность к i -му звену, опущены. Уравнения (9.46) позволяют установить связь между распределением масс по объему звена манипулятора и его угловой скоростью. Так, например, если оси x, y, z являются главными осями инерции, то кинетический момент системы такого звена имеет вид

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{Bmatrix}. \quad (9.47)$$

Если же, например, только ось z является главной, то кинетический момент системы такого звена определяется выражением

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y \\ J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x \\ J_z \omega_z \end{Bmatrix}. \quad (9.48)$$

В основе количественной оценки динамической нагруженности подвижных соединений манипуляторов от моментов инерционных сил лежит известное из теоретической механики соотношение

$$-\overline{M}_{0i}^n = \frac{d\overline{L}_{0i}}{dt} = \frac{d([J]\overline{\omega})}{dt} = \frac{d([J])}{dt}\overline{\omega} + [J]\frac{d\overline{\omega}}{dt}. \quad (9.49)$$

Здесь следует еще раз напомнить об особенностях выбора систем координат манипулятора. В данной случае это связано с тем, что использование уравнения (9.49) имеет свои особенности. Эти особенности связаны с тем, что тензор инерции может быть вынесен за знак производной только при рассмотрении уравнения (9.49) в системе координат, жестко связанной с самим звеном. В противном случае решение уравнения (9.49) в нашей постановке в общем виде невозможно. Во избежание таких математических трудностей уравнение (9.49) будем записывать в виде

$$\overline{M}_{0i}^n = -\left(\frac{d\overline{L}_i}{dt} + \overline{\omega}_i \times \overline{L}_i\right) = -\left([J_i]\frac{d\overline{\omega}_i}{dt} + \overline{\omega}_i \times [J_i]\overline{\omega}_i\right). \quad (9.50)$$

Прежде чем анализировать уравнение (9.50), необходимо дать представление о природе вектора \overline{L}_O и операции $[J_i]\overline{\omega}_i$ умножения тензора инерции на вектор $\overline{\omega}_i$ угловой скорости звена. Как видно из уравнения (9.46), координаты L_x, L_y, L_z определяются формально умножением матрицы $[J_i]$ на координаты вектора $\overline{\omega}_i\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$. Такая операция формально схожа с рассмотренной ранее. Однако, с физической точки зрения, здесь имеются существенные отличия. Если в первом случае умножение на матрицу поворота означало перевод одного и того же вектора, заданного координатами в одной системе, в другую систему координат, то умножение вектора $\overline{\omega}_i$ на тензор $[J_i]$ означает получение вектора \overline{L} другой размерности, другой физической природы. В отличие от матрицы поворота (безразмерных параметров), тензор инерции имеет размерность $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. Таким образом, операция умножения тензора инерции на вектор угловой скорости i -го звена означает, что новый вектор \overline{L} (другой размерности) не только

увеличится по модулю в сравнении с $\bar{\omega}_i$, но и повернется относительно него на некоторый угол. Величина этого угла зависит от распределения масс звена и определяется матрицей $[J_i]$. Можно подобрать такое распределение масс звена манипулятора относительно осей x, y, z , жестко связанных с ним, что его тензор $[J_i]$ инерции не "повернет" вектор $\bar{\omega}_i$ в результате умножения, а только увеличит его модуль. При этом направление вектора $\bar{\omega}_i$ не изменяется. Это означает, что векторы $\bar{\omega}_i$ и $[J_i]$ коллинеарны и их векторное произведение равно нулю. В этом случае формула (9.50) примет вид

$$\bar{M}_i = -[J_i] \frac{d\bar{\omega}_i}{dt} = -[J_i] \bar{\epsilon}_i. \quad (9.51)$$

Сравнение формул (9.50) и (9.51) показывает, что моменты от сил инерции в подвижных соединениях звеньев при их равномерном движении будут равны нулю только в случае коллинеарности векторов $\bar{\omega}_i$ и $[J_i]$. В противном случае динамические нагрузки, обусловленные силами инерции, не будут равны нулю даже при равномерном движении звеньев манипулятора. Следует еще раз обратить внимание на то, что динамические нагрузки в данном случае порождаются не кинематикой (наличием ускорений), а распределением масс подвижных звеньев. Это важный вывод для практики. К сожалению поиску рациональной конфигурации подвижных звеньев манипуляторов и наивыгоднейшему распределению их масс уделяется в настоящее время недостаточно внимания. На этом пути имеются большие резервы улучшения эксплуатационных характеристик манипуляторов. Следует отметить еще одну особенность манипуляторов, связанную с тем, что при равномерном движении его звеньев угловые ускорения их могут быть не равными нулю. Этот случай подробно рассмотрен в разделе 9.6. Таким образом, не может быть рациональным распределение масс подвижных звеньев для любой их кинематики. Для конкретных сочетаний подвижностей и законов движения звеньев может быть свое наивыгоднейшее распределение масс.

Такое наилучшее сочетание определяется наименьшими динамическими нагрузками от моментов инерционных сил. Поэтому нас, как и ранее, будут интересовать не только модули рассматриваемых векторов, но и их относительная ориентация в пространстве. На рис.9.36 представлены векторы $\bar{\omega}_i$ и \bar{L}_i в системе координат, связанной жестко с i -м звеном манипулятора. Из рисунка

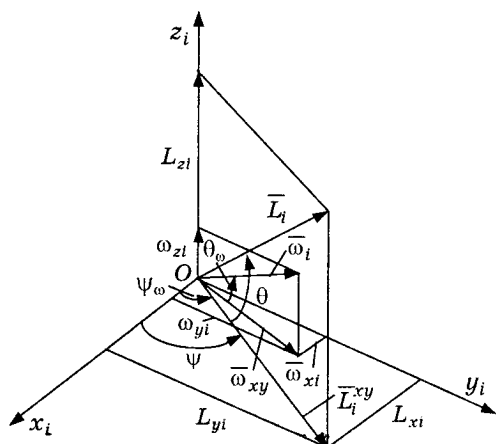


Рис.9.36. Ориентация в пространстве вектора \bar{L}_i кинетического момента i -го звена манипулятора и вектора $\bar{\omega}_i$ его угловой скорости видно, что ориентация вектора \bar{L}_i определяется, как и раньше, соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_L &= \frac{L_y}{L_x}, \\ \operatorname{tg} \theta_L &= \frac{L_z}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

Формулы для определения ориентации вектора $\bar{\omega}_i$ приведены ранее.

Соотношения (9.52) в случае равенства нулю всех центробежных моментов инерции (см. формулы 9.52) примут вид

$$\operatorname{tg} \psi_L = \frac{J_y \omega_y}{J_x \omega_x},$$

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{J_z \omega_z}{\sqrt{(J_x \omega_x)^2 + (J_y \omega_y)^2}}.$$

Если же, например, только ось z является главной (см. уравнение 9.48), то соотношения (9.52) запишутся в виде

$$\operatorname{tg} \psi_L = \frac{J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x}{J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y},$$

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{J_z \omega_z}{\sqrt{(J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y)^2 + (J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x)^2}}.$$

Угол между векторами $\bar{\omega}_i$ и \bar{L}_i определится из соотношения

$$\cos(\bar{\omega}_i \wedge \bar{L}_i) = \frac{\bar{\omega}_i \bar{L}_i}{\omega L} = \frac{\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}}. \quad (9.53)$$

Соотношение $\bar{\omega}_i \bar{L}_i = \bar{\omega}_i [J_i] \bar{\omega}_i = 2T_i$ определяет полную кинетическую энергию вращательного движения i -го звена, имеющую в координатной форме вид

$$2T_i = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (9.54)$$

После преобразования кинетическая энергия вращательного движения i -го звена манипулятора запишется в виде

$$T_i = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{xz} \omega_x \omega_z - J_{yz} \omega_y \omega_z.$$

Таким образом, угол $\bar{\omega}_i \wedge \bar{L}_i$ зависит от кинетической энергии звена. С физической точки зрения кинетическая энергия определяет динамическую нагруженность подвижного соединения звена как параметр, связывающий распределение его масс и кинематику (см. уравнения 9.53, 9.54). Величина вектора \bar{M}_{0i}^n может быть получена из уравнения

$$|\bar{M}_{0i}^n| = [J_i] \varepsilon_i + |\bar{\omega}_i| |\bar{L}_i| (\sin(\bar{\omega}_i \wedge \bar{L}_i)),$$

где

$$|\bar{\varepsilon}_i| = \sqrt{\varepsilon_{xi}^2 + \varepsilon_{yi}^2 + \varepsilon_{zi}^2}, \quad |\bar{\omega}_i| = \sqrt{\omega_{xi}^2 + \omega_{yi}^2 + \omega_{zi}^2},$$

$$\sin(\bar{\omega}_i \wedge \bar{L}_i) = \sqrt{1 - \cos^2(\bar{\omega}_i \wedge \bar{L}_i)}, \quad |\bar{L}_i| = \sqrt{L_{xi}^2 + L_{yi}^2 + L_{zi}^2}.$$

Величина вектора \bar{M}_{0i}^n может быть получена также из соотношения

$$|\bar{M}_{0i}^n| = \sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2 + M_{zi}^2}.$$

Как указывалось ранее, для оценки динамической нагруженности от моментов инерционных сил важно знать как величину, так и составляющие вектора \bar{M}_{0i}^n . Поэтому запишем уравнение (9.50) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} -M_{xi} \\ -M_{yi} \\ -M_{zi} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_y L_z - L_y \omega_z \\ \omega_z L_x - L_z \omega_x \\ \omega_x L_y - L_x \omega_y \end{vmatrix}. \quad (9.55)$$

После преобразования уравнение (9.55) с учетом выражения (9.46), запишем в виде

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x J_x & -\varepsilon_y J_{xy} & -\varepsilon_z J_{xz} \\ \varepsilon_y J_y & -\varepsilon_x J_{yx} & -\varepsilon_z J_{yz} \\ \varepsilon_z J_z & -\varepsilon_x J_{zx} & -\varepsilon_y J_{zy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} J_{xy} \omega_x \omega_z - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z - J_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) - J_{xz} \omega_x \omega_y \\ J_{yz} \omega_x \omega_y - (J_z - J_x) \omega_x \omega_z - J_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2) - J_{xy} \omega_y \omega_z \\ J_{xz} \omega_y \omega_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y - J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{yz} \omega_x \omega_z \end{Bmatrix}.$$

Следует отметить, что рассматривая количественную оценку динамической нагруженности от моментов инерционных сил, мы не учитывали силы веса, силы упругости и др.

9.11. Оценка динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипулятора от сил веса

На рис.9.37 представлена схема ориентации i -го звена с расстоянием \bar{r}_{Si} от начала i -ой системы координат до его центра масс. Пусть первоначальное положение осей совпадало с прямоугольной системой координат $x_i^{(0)} y_i^{(0)} z_i^{(0)}$, у которой ось $z_i^{(0)}$ коллинеарна вектору \bar{G}_i . После трехосного вращения (поворота звена i на углы прецессии ψ , нутации θ и собственного вращения φ) звено i (система координат x_i, y_i, z_i) заняло положение, указанное на рисунке. Проекция вектора \bar{G}_i на оси координат запишутся в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} G_{xi} \\ G_{yi} \\ G_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -G_i \sin \theta_{i,0} \sin \varphi_{i,0} \\ -G_i \sin \theta_{i,0} \cos \varphi_{i,0} \\ -G_i \cos \theta_{i,0} \end{Bmatrix}$$

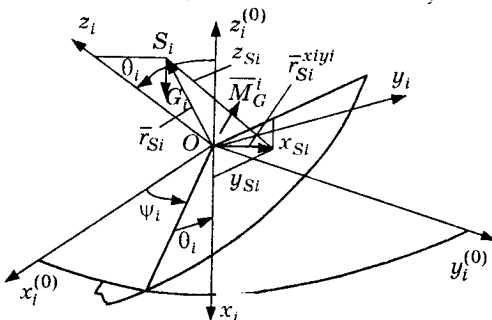


Рис.9.37. К определению реакций в кинематических парах от сил веса

Ориентация вектора \bar{G}_i в системе координат, связанной с i -ым звеном, определится из соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{G_i} &= \frac{G_{yi}}{G_{xi}} = -\operatorname{ctg} \varphi_{i,0}, \\ \operatorname{tg} \theta_{G_i} &= \frac{G_{zi}}{\sqrt{G_{xi}^2 + G_{yi}^2}} = -\operatorname{ctg} \theta_{i,0}. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Зная координаты вектора \bar{G}_i в своей i -ой системе координат, нетрудно определить его координаты в любой k -ой системе координат, повернутой относительно i -ой. Такая операция перевода вектора, заданного координатами в одной системе, в другую систему рассмотрена ранее. Применительно к данному случаю рассуждаем следующим образом. Координаты вектора \bar{G}_i веса любого звена манипулятора в системе координат, связанной со станиной, имеют вид

$$G_i \{0, 0, -G_i\},$$

то есть сила веса любого звена направлена в сторону, противоположную оси $z^{(0)}$, и параллельна ей. Тогда координаты этого вектора в любой системе координат определяются из выражения

$$\begin{Bmatrix} G_{xi} \\ G_{yi} \\ G_{zi} \end{Bmatrix} = [M_{0i}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_i \end{Bmatrix},$$

где $[M_{0i}]$ — матрица перевода (поворота) осей нулевой системы координат (связанной со станиной) в такое положение, при котором ее оси параллельны осям i -ой системы. Как показано в разделе 9.3, $[M_{0i}] = [M_{i0}]'$. По известным проекциям в случае необходимости нетрудно определить углы разворота i -ой системы координат относительно осей неподвижной системы $x^0 y^0 z^0$ (см. рис. 9.37). Из уравнений (9.56) имеем

$$\cos \theta_{i,0} = -\frac{G_{zi}}{G_i}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{i,0} = \frac{G_{xi}}{G_{yi}}.$$

При этом следует помнить, что в любой системе координат (при любом повороте осей) модуль вектора \bar{G}_i остается неизменным:

$$|\bar{G}_i| = \sqrt{G_{xi}^2 + G_{yi}^2 + G_{zi}^2}.$$

Такая ориентация осей подвижных систем координат по силе веса, определяемая полученными уравнениями, полезна тем, что она позволяет определить работу (мощность), затрачиваемую на преодоление сил веса звеньев манипуляторов. Моменты в подвижном соединении i -го и $(i - 1)$ -го звеньев от сил веса определяются из соотношения

$$\overline{M}_G^i = \overline{r}_{Si} \times \overline{G}_{Si}.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\overline{M}_{G_i} = \begin{Bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{Si} & y_{Si} & z_{Si} \\ G_{xi} & G_{yi} & G_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (G_{zi}y_{Si} - G_{yi}z_{Si})\bar{i} \\ (G_{xi}z_{Si} - G_{zi}x_{Si})\bar{j} \\ (G_{yi}x_{Si} - G_{xi}y_{Si})\bar{k} \end{Bmatrix}.$$

Имея проекции вектора \overline{M}_{G_i} момента от сил веса i -го звена на оси i -ой системы, жестко связанной с этим звеном, переводим их в неподвижную систему путем умножения на соответствующую матрицу поворота. Например, проекции вектора момента от силы веса i -го звена на оси неподвижной системы координат, связанной со станиной, определяются из выражения

$$\begin{Bmatrix} M_{Gi}^{(x0)} \\ M_{Gi}^{(y0)} \\ M_{Gi}^{(z0)} \end{Bmatrix} = [M_{i,0}] \begin{Bmatrix} M_{Gi}^{(xi)} \\ M_{Gi}^{(yi)} \\ M_{Gi}^{(zi)} \end{Bmatrix},$$

где $[M_{i,0}]$ — матрица поворота i -ой системы координат в положение, при котором ее оси параллельны осям нулевой (неподвижной) системы координат. В нашем случае ось $z^{(0)}$ неподвижной системы координат, связанной со станиной, вертикальна и направлена вверх.

В разделах 9.8, 9.9, 9.10 получены зависимости, определяющие реакции в кинематических парах манипуляторов от сил, моментов сил инерции и сил веса. Здесь следует напомнить, что силы (моменты сил) — это количественная оценка механического взаимодействия звеньев. Поэтому в зависимости от того, какое взаимодействие нас интересует, мы получим его количественную характеристику. Механическое движение звена характеризуется изменением его кинетической энергии. Количественной характеристикой изменения кинетической энергии служит работа сил. Изменение кинетической энергии системы определяет закон движения, то есть обобщенные скорости и обобщенные ускорения звеньев и их центров масс. В связи с этим нас будут интересовать не только силы, но и работа этих сил. Более удобной количественной оценкой изменения кинетической энергии во времени

служит мощность сил. Для манипуляторов особый интерес представляет анализ энергозатрат на преодоление различных сил в каждой конкретной случае. Рассмотрим их роль в общем балансе мощности манипулятора.

9.12. Анализ энергозатрат на движение звеньев манипулятора

Баланс мощности сил и моментов сил, приложенных к звеньям манипулятора, можно выразить в виде равенства

$$P_{дс} - P_{тс} - P_{вс} \pm P_G \pm P_y \pm P_{и} = 0, \quad (9.58)$$

где $P_{дс}$ — мощность сил и моментов сил движущих; $P_{тс}$ — мощность сил (моментов сил) технологического сопротивления, приложенных к выходному (последнему) звену манипулятора, если его рабочим органом, установленным в схвате, выполняется некоторая работа на преодоление сил трения, упругости и других, предусмотренных технологическим процессом; $P_{вс}$ — мощность сил вредного (не технологического) сопротивления (сил трения и др.); $P_G, P_y, P_{и}$ — мощности сил веса подвижных звеньев манипулятора, сил (моментов сил) упругости и инерции соответственно.

Последние три слагаемые в уравнении (9.58) могут быть положительными и отрицательными, то есть векторы сил и скоростей точек приложения этих сил (веса, упругости и инерции) могут совпадать или быть направлены в разные стороны. Это говорит о том, что наиболее существенные резервы по снижению энергопотребления на манипулирование могут быть выявлены в каждом конкретном случае. Например, за счет реализации рекуперативного торможения, когда силы инерции создают необходимый момент на валу электродвигателя, имеющего возможность работать в определенных моменты времени в генераторном режиме. Или же за счет использования кинетической энергии звеньев на участках торможения для деформации упругих элементов, которые накопленную энергию отдали бы в период их разгона. Периодичность (цикличность) работы (мощности) сил веса, упругости и инерции дает возможность искать наиболее эффективные в каждом конкретном случае технические решения, обеспечивающие совершенствование эксплуатационных характеристик манипуляторов. При анализе возможности или оценке эффективности такой "перекачки" энергии необходима количественная оценка мощности этих сил и их моментов. В общем случае мощность сил и моментов сил движущих определяется выражением

$$P_{дс} = \sum_{i=1}^{k_n} (\overline{F}_{дс}^i \overline{v}_F^i) + \sum_{i=1}^{k_n} (\overline{M}_{дс}^i \overline{\omega}_i). \quad (9.59)$$

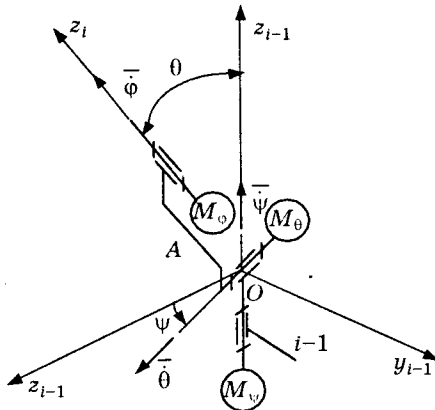


Рис.9.38. Схема шарнира манипулятора, реализующего трехосное (сферическое) вращение с помощью трех независимых двигателей M_ϕ, M_θ, M_ψ

В уравнении (9.59) $(\bar{F}_{дс}^i \bar{v}_F^i)$ — скалярное произведение вектора $\bar{F}_{дс}^i$ движущей силы на скорость \bar{v}_F^i точки приложения этой силы; k_n — количество звеньев, движущихся поступательно одновременно; $(\bar{M}_{дс}^i \bar{\omega}_i)$ — скалярное произведение вектора $\bar{M}_{дс}^i$ момента сил движущих, приложенных к i -му звену, на вектор $\bar{\omega}_i$ угловой скорости этого звена; k_B — количество одновременно вращающихся друг относительно друга звеньев.

При поступательном движении звена скорости всех его точек одинаковы по величине и направлению и определяются скоростью центра масс. Вращательное движение i -ой системы координат относительно $(i-1)$ -го звена в общем случае (при трехосном вращении) определяется тремя моментами: M_ψ, M_θ, M_ϕ . Взаимосвязь между ними обусловлена конструкцией шарнира манипулятора. Пусть, например, шарнир манипулятора (см. рис.9.38) выполнен таким образом, что статор одного из двигателей M_ψ установлен на $(i-1)$ -ом звене (по рис.9.34), а ось z_{i-1} совпадает с осью вращения его ротора. Таким образом, вектор $\bar{\psi}$ скорости ротора двигателя M_ψ совпадает с осью z_{i-1} . На роторе двигателя M_ϕ установлено промежуточное звено A с возможностью вращения со скоростью $\dot{\theta}$ от двигателя M_θ . Вектор $\dot{\theta}$ скоро-

сти вращения ротора двигателя M_0 пересекается с вектором $\dot{\psi}$ в точке O , а на промежуточном звене A установлено $(i-1)$ -ое звено манипулятора с возможностью вращения со скоростью $\dot{\varphi}$ от двигателя M_φ . Вектор $\bar{\varphi}$ скорости вращения ротора двигателя M_φ (скорость вращения звена i относительно оси z_i) пересекается в точке O пересечения векторов $\bar{\psi}$ и $\bar{\theta}$. Таким образом, вектор $\dot{\theta}$, оставаясь в плоскости x_{i-1}, y_{i-1} , вращается со скоростью $\dot{\psi}$ прецессии, а вектор $\bar{\varphi}$ вращается как вокруг оси z_{i-1} со скоростью $\dot{\psi}$, так и вокруг оси, совпадающей с вектором $\bar{\theta}$.

В случае использования шарнира, представленного на рис.9.38, по аналогии с кинематическими уравнениями Эйлера вектор-момент \bar{M}_d^i в координатной форме можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} M_d^{xi} &= M_\psi \sin \theta \sin \varphi + M_\theta \cos \varphi, \\ M_d^{yi} &= M_\psi \sin \theta \cos \varphi - M_\theta \sin \varphi, \\ M_d^{zi} &= M_\varphi + M_\psi \cos \theta. \end{aligned} \right\}$$

Тогда уравнение (9.58) в координатной форме примет вид

$$\begin{aligned} P_{дс} &= \sum_{i=1}^{k_{\Pi}} \left(F_{дс}^{xi} \dot{x}_{Si} + F_{дс}^{yi} \dot{y}_{Si} + F_{дс}^{zi} \dot{z}_{Si} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_{\text{в}}} \left[\left(M_\psi \sin \theta \sin \varphi + M_\theta \cos \varphi \right) \left(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \right) + \right. \\ &+ \left. \left(M_\psi \sin \theta \cos \varphi - M_\theta \sin \varphi \right) \left(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \right) + \right. \\ &+ \left. \left(M_\varphi + M_\psi \cos \theta \right) \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

Пример. Написать выражение для определения мощности движущих сил для манипулятора, изображенного на рис.9.35, при использовании шарнира [48], обеспечивающего двухосное вращение, например, при "замороженной" координате φ , то есть при $\dot{\varphi} = 0$.

При движении звена 1 по прямой, ориентированной произвольным образом в неподвижной системе координат $x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$, движущая сила задана вектором $\bar{F}_d = F_d^x \bar{i} + F_d^y \bar{j} + F_d^z \bar{k}$. Вектор скорости точки приложения этой силы равен по величине и направлению вектору $\bar{v}_c = v_c^x \bar{i} + v_c^y \bar{j} + v_c^z \bar{k}$. Момент сил движущих определяется равенством

$$\bar{M}_d = M_d^x \bar{i} + M_d^y \bar{j} + M_d^z \bar{k},$$

где

$$M_{\text{д}}^x = (M_{\psi})_x + (M_{\theta})_x, M_{\text{д}}^y = (M_{\psi})_y + (M_{\theta})_y, M_{\text{д}}^z = (M_{\psi})_z + (M_{\theta})_z.$$

Вектор угловой скорости звена 3 определяется выражением

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi}_x + \dot{\theta}_x)\vec{i} + (\dot{\psi}_y + \dot{\theta}_y)\vec{j} + (\dot{\psi}_z + \dot{\theta}_z)\vec{k}.$$

Проекции вектора $\vec{M}_{\text{д}}$ на оси координат примут вид

$$M_{\text{д}}^x = M_{\psi} \sin \theta \sin \varphi + M_{\theta} \cos \varphi,$$

$$M_{\text{д}}^y = M_{\psi} \sin \theta \cos \varphi - M_{\theta} \sin \varphi,$$

$$M_{\text{д}}^z = M_{\psi} \cos \theta.$$

В последних уравнениях угол φ — "замороженное" (неизменное) значение этой обобщенной координаты. При $\varphi = 0$ имеем окончательно

$$\vec{M}_{\text{д}} = F_{\text{д}}^x v_c^x + F_{\text{д}}^y v_c^y + F_{\text{д}}^z v_c^z + M_{\theta} \dot{\theta} + M_{\psi} \dot{\psi} \sin \theta + M_{\psi} \dot{\psi} \cos \theta.$$

Мощность сил $P_{\text{тс}}$ технологического сопротивления в большинстве случаев равна нулю или же ею можно пренебречь ввиду малости сил, например, если используется манипулятор для окраски или для вычерчивания графиков. Силы технологического сопротивления приложены к рабочему органу, установленному в схвате. Например, если манипулятор обеспечивает сверление отверстия с помощью инструментального шпинделя, установленного в схвате, то мощность сил технологического сопротивления определится соотношением

$$P_{\text{тс}} = F_0 v_0 + M_{\text{кр}} \omega,$$

где F_0 — осевая сила резания; v_0 — скорость перемещения сверла (подача его); $M_{\text{кр}}$, ω — крутящий момент на сверле и его угловая скорость.

К силам вредного сопротивления чаще всего относятся силы трения в кинематических парах. Мощность сил трения выражается с помощью соотношений, аналогичных (9.60). Если звенья i и $(i-1)$ входят в поступательную кинематическую пару, то мощность, затрачиваемая на преодоление сил трения при их относительном движении, определяется соотношением

$$P_{\text{тр}}^{\text{II}} = \vec{F}_{\text{тр}} \vec{v}_{i,i-1} = F_{\text{тр}} v_{i,i-1} \cos(\vec{F}_{\text{тр}} \wedge \vec{v}_{i,i-1}) = F_{\text{тр}}^x \dot{x}_{i,i-1} + F_{\text{тр}}^y \dot{y}_{i,i-1} + F_{\text{тр}}^z \dot{z}_{i,i-1},$$

где $F_{\text{тр}} = F_v f'$ — сила трения, определяемая произведением нормальной реакции F_v к поверхности трения на приведенный коэффициент f' трения скольжения [2]; f' учитывает как табличный коэффициент трения f , так и распределение давления в зоне контакта, а также размеры и конфигурацию соприкасающихся поверхностей; $\vec{v}_{i,i-1}$ — скорость относительного движения звеньев i и $i-1$.

$$v_{i,i-1} = \sqrt{\dot{x}_{i,i-1}^2 + \dot{y}_{i,i-1}^2 + \dot{z}_{i,i-1}^2}, F_{\text{тр}} = \sqrt{(F_{\text{тр}}^x)^2 + (F_{\text{тр}}^y)^2 + (F_{\text{тр}}^z)^2}.$$

Если звенья i и $i - 1$ входят в сферическую кинематическую пару скольжения, то мощность, затрачиваемая на преодоление сил трения при их относительном движении, равна

$$P_{\text{тр}}^{\text{в}} = \overline{M}_{\text{тр}} \overline{\omega}_{i,i-1} = M_{\text{тр}} \omega_{i,i-1} \cos(\overline{M}_{\text{тр}} \wedge \overline{\omega}_{i,i-1}) = \\ = M_{\text{тр}}^x \omega_{i,i-1}^x + M_{\text{тр}}^y \omega_{i,i-1}^y + M_{\text{тр}}^z \omega_{i,i-1}^z,$$

где $M_{\text{тр}} = \sqrt{(M_{\text{тр}}^x)^2 + (M_{\text{тр}}^y)^2 + (M_{\text{тр}}^z)^2}$. Как видно из рис.9.38 в каждом подвижном соединении двигателей M_{ψ} , M_{θ} и M_{φ} будут свои моменты от сил трения, определяемые конструкцией привода по каждой обобщенной координате ψ , θ и φ .

В общем случае по аналогии с уравнениями (9.57) можно записать следующие соотношения, определяющие проекции момента от сил трения:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{тр}}^{xi} &= M_{\psi}^{\text{тр}} \sin \theta \sin \varphi + M_{\theta}^{\text{тр}} \cos \varphi, \\ M_{\text{тр}}^{yi} &= M_{\psi}^{\text{тр}} \sin \theta \cos \varphi - M_{\theta}^{\text{тр}} \sin \varphi, \\ M_{\text{тр}}^{zi} &= M_{\varphi}^{\text{тр}} + M_{\psi}^{\text{тр}} \cos \theta. \end{aligned} \right\}$$

В уравнениях (9.61)

$$M_{\psi}^{\text{тр}} = R^{\psi} r_{\text{тр}}^{\psi} = R^{\psi} r_{\psi} f'_{\psi}, \quad M_{\theta}^{\text{тр}} = R^{\theta} r_{\text{тр}}^{\theta} = R^{\theta} r_{\theta} f'_{\theta}, \quad M_{\varphi}^{\text{тр}} = R^{\varphi} r_{\text{тр}}^{\varphi} = R^{\varphi} r_{\varphi} f'_{\varphi},$$

где R^{ψ} , R^{θ} , R^{φ} — реактивные составляющие сил, действующих в подвижных соединениях двигателей M_{ψ} , M_{θ} , M_{φ} соответственно; r_{ψ} , r_{θ} , r_{φ} — радиусы соприкасающихся поверхностей вращательных кинематических пар; f'_{ψ} , f'_{θ} , f'_{φ} — приведенные коэффициенты трения скольжения в кинематических парах двигателей M_{ψ} , M_{θ} , M_{φ} соответственно.

Если в подвижных соединениях шарнира (см. рис.9.38) используются подшипники качения, то определяется соответствующий приведенный коэффициент трения качения [2].

Следует отметить, что определение сил трения может быть весьма приближенным. Это связано не только с изменением в процессе эксплуатации состояния трущихся поверхностей, с перераспределением давления в результате их износа и т.п. Дело в том, что нормальная реакция в подвижном соединении определяется из условия равновесия звена под действием сил, включающих и силу инерции. Силы же инерции и моменты от сил инерции в каждом положении звеньев разные. Поэтому даже при постоянных условиях в зоне контакта поверхностей величина и направление силы трения не остаются постоянными. Таким образом, сложность аналитического определения сил трения связана с тем, что они зависят от закона движения звеньев, но при этом

и сами оказывают влияние на изменение закона их движения. Для качественной характеристики мощности, затрачиваемой на преодоление сил трения в подвижных соединениях манипуляторов, удобно пользоваться параметром pv , где p — давление в зоне контакта, v — скорость относительного движения соприкасающихся поверхностей. Размерность $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$ указывает на

физический смысл этого параметра, определяемого удельной мощностью, то есть мощностью, приходящейся на единицу поверхности. Известно, что износ $u = k_n pvt$ пропорционален давлению p и скорости v трущихся поверхностей и зависит от их износостойкости, определяемой коэффициентом k_n . Поэтому параметр pv определяет возможную неравномерность износа подвижных соединений манипулятора при одинаковой их износостойкости. Особенность этого параметра для поступательной и вращательной пары рассмотрена в разделе 1 части 3 настоящего пособия.

Для оценки мощности сил веса можно воспользоваться их скалярным произведением на скорость центра масс:

$$P_{Gi} = \bar{G}_i \bar{v}_{Si} = G_{xi} \dot{x}_{Si} + G_{yi} \dot{y}_{Si} + G_{zi} \dot{z}_{Si}.$$

Более удобным выражением мощности сил веса является выражение ее через произведение модулей векторов \bar{G}_i и \bar{v}_{Si} на косинус угла между ними. В этом случае можно воспользоваться тем, что вектор силы веса \bar{G}_i любого i -го звена манипулятора параллелен оси $z^{(0)}$ неподвижной системы координат, связанной со станиной, то есть направлен по вертикали вниз. Это означает, что суммарная мощность сил веса манипулятора, имеющего " k " подвижных звеньев определится из соотношения

$$P_G = \sum_{i=1}^k P_{Gi} = - \sum_{i=1}^k G_i v_{Si}^{z_0} = - \sum_{i=1}^k G_i \dot{z}_{Si}^{(0)}. \quad (9.62)$$

Последнее уравнение удобно для поиска и анализа определенного сочетания степеней подвижности манипулятора, обеспечивающего наименьшие энергозатраты на преодоление сил веса. Такая минимизация может быть основана на выявлении траекторий центров масс звеньев и законов их движения вдоль этих траекторий, обеспечивающих минимальные проекции $\dot{z}_{Si}^{(0)}$ скоростей

$\bar{v}_{Si}^{(i)}$ центров масс звеньев на ось $z^{(0)}$. Таким образом, количественная оценка энергозатрат на преодоление сил веса звеньев манипулятора может быть проведена на основе анализа зависимости (9.62) в функции от перемещения схвата, то есть длины S дуги

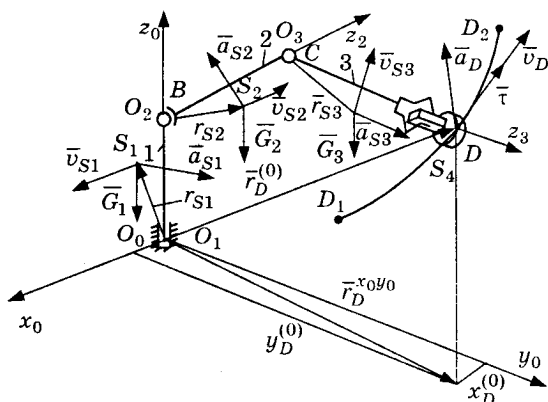


Рис.9.39. К определению энергозатрат на преодоление сил тяжести звеньев манипулятора

траектории его центра масс совместно с перемещаемым грузом. Конечной целью такой задачи является поиск траекторий центров масс звеньев манипулятора, реализующих определенную траекторию центра масс последнего (выходного) звена, на которой размещен схват, и обеспечивающих минимальную сумму мощностей сил веса всех звеньев манипулятора.

На рис.9.39 приведена схема манипулятора с пятью степенями подвижности, обеспечивающими перемещение детали весом G_D вдоль пространственной траектории D_1D_2 .

Мощность, необходимая на перемещение детали весом \bar{G}_D со скоростью \bar{v}_D , определится из соотношения $P_G = \bar{G}_D \bar{v}_D = G_D v_D \cos(G_D v_D)$, откуда, выражая скалярное произведение векторов \bar{G}_D, \bar{v}_D в неподвижной системе координат, получим выражение

$$P_G = 0\dot{x}_D^{(0)} + 0\dot{y}_D^{(0)} - G_D \dot{z}_D^{(0)}.$$

Сравнение полученных соотношений дает возможность записать выражение, определяющее угол между вектором \bar{G}_D силы веса груза (перемещаемой детали) и его скоростью \bar{v}_D , в виде

$$\cos(\bar{G}_D \bar{v}_D) = -\frac{\dot{z}_D^{(0)}}{v_D} = -\frac{\dot{z}_D^{(0)}}{\sqrt{[\dot{x}_D^{(0)}]^2 + [\dot{y}_D^{(0)}]^2 + [\dot{z}_D^{(0)}]^2}}. \quad (9.63)$$

Как видно из уравнения (9.63), знак косинуса угла, то есть и знак мощности сил веса, определяется знаком проекции $\dot{z}_D^{(0)}$ скорости \bar{v}_D детали на ось $z^{(0)}$. Рассуждая аналогично, запишем выражение для определения мощности P_i на преодоление силы G_i веса i -го звена, перемещающегося со скоростью \bar{v}_{Si} , заданной в неподвижной системе координат:

$$P_{Gi} = -G_i v_{Si}^{(0)} \cos(\bar{G}_i \wedge \bar{v}_{Si}^{(0)}) = -G_{Si} \dot{z}_{Si}^{(0)},$$

где

$$\cos(\bar{G}_i \wedge \bar{v}_{Si}^{(0)}) = - \frac{\dot{z}_{Si}^{(0)}}{\sqrt{[\dot{x}_{Si}^{(0)}]^2 + [\dot{y}_{Si}^{(0)}]^2 + [\dot{z}_{Si}^{(0)}]^2}}.$$

Выражения для определения координат скоростей центров масс звеньев манипулятора приведены в разделе 9.6.

Пример. Записать уравнение, определяющее суммарную мощность P_G , затрачиваемую на преодоление сил веса звеньев манипулятора при перемещении его схвата вдоль траектории $D_1 D_2$ (см. рис.9.39) с грузом $G_D = G_4$.

$$P_G = P_{G_1} + P_{G_2} + P_{G_3} + P_{G_4} = \bar{G}_1 \bar{v}_{S_1}^{(0)} + \bar{G}_2 \bar{v}_{S_2}^{(0)} + \bar{G}_3 \bar{v}_{S_3}^{(0)} + \bar{G}_4 \bar{v}_{S_4}^{(0)}.$$

Последнее выражение в координатной форме можно представить в виде

$$-P_G = G_1 \dot{z}_{S_1}^{(0)} + G_2 \dot{z}_{S_2}^{(0)} + G_3 \dot{z}_{S_3}^{(0)} + G_4 \dot{z}_{S_4}^{(0)}.$$

Из схемы, представленной на рис.9.39, видно, что

$$|\bar{v}_{Si}| = \{\dot{x}_{Si}, \dot{y}_{Si}, 0\}.$$

Отсюда получим

$$P_G = \pm G_2 \dot{z}_{S_2}^{(0)} \pm G_3 \dot{z}_{S_3}^{(0)} \pm G_4 \dot{z}_{S_4}^{(0)}.$$

Знак последнего слагаемого в этом уравнении определяется видом траекторий $D_1 D_2$, то есть косинусом угла $(\bar{G}_4 \wedge \bar{v}_D)$.

Минимизация энергопотребления манипулятора на преодоление сил веса в таком случае сводится к тому, чтобы при заданной алгебраической величине $P_4 = \bar{G}_4 \bar{v}_D$ за все время движения схвата вдоль траектории $D_1 D_2$ алгебраическая сумма $G_2 \bar{v}_{S_2}^{(0)}$, $\bar{G}_3 \bar{v}_{S_3}^{(0)}$ и $\bar{G}_4 \bar{v}_{S_4}^{(0)}$ была наименьшей. Как было показано раньше, минимальное (необходимое с точки зрения геометрии) количество

степеней подвижности для отработки траектории D_1D_2 — три. Задача минимизации энергозатрат на преодоление сил веса для схемы манипулятора, изображенного на рис.9.39, может быть решена за счет включения (выключения) дополнительных степеней подвижности, обеспечивающих изменение знака $\dot{z}_{S2}^{(0)}$ при изменяемом специально направлении \bar{v}_{S3} , или же за счет изменения знака $\dot{z}_{S3}^{(0)}$ при изменении по некоторой программе направления вектора \bar{v}_{S2} . Это может быть достигнуто и при одновременном целенаправленном изменении знаков $\dot{z}_{S2}^{(0)}$ и $\dot{z}_{S3}^{(0)}$ за все время движения схвата. Как видно, решение такой задачи возможно только при наличии некоторой маневренности схемы манипулятора. В данном случае именно кинематическая неопределенность, как отмечалось ранее, позволяет минимизировать энергозатраты на преодоление сил веса. Таким образом, количество избыточных кинематических уравнений, превышающее их необходимое число для реализации движения схвата вдоль заданной траектории, определяет возможную динамическую маневренность манипулятора. Понятие динамической маневренности исходит из динамических ограничений, накладываемых на возможные кинематические уравнения (связи), определяющие движение (отработку координат) звеньев манипулятора при заданной геометрии и кинематике схвата. Динамические ограничения в данном случае следует рассматривать как некоторую функцию, реализующую выполнение поставленной цели. Здесь следует отметить, что оптимизацию, то есть выявление максимума или минимума целевой функции (локального или глобального), необходимо проводить при наличии не менее двух ограничений (двух критериев оптимизации). Это связано с тем, что одни и те же аргументы, входящие в различные целевые функции, имеют неоднозначное, а часто противоположное влияние на их значения. Так, например, нельзя решать рассмотренную задачу об оптимизации движения звеньев манипулятора на основе минимизации только энергозатрат на преодоление сил веса за счет включения (выключения) дополнительных подвижностей без анализа динамических нагрузок и оценки их влияния на сохранение точностной долговечности, так как без проведения исследований ясно, что увеличение количества реверсов (включений-выключений) приведет к нежелательным ударам и износу подвижных соединений за счет увеличения их динамической нагруженности по силам и моментам сил инерции. Это говорит о том, что конечные результаты проведенных исследований по оценке динамической нагруженности должны анализироваться с учетом допущений

и ограничений, положенных в их основу, а постановка задачи требует предварительного обоснования таких допущений и ограничений, положенных в свою очередь в основу расчетных схем и их математических моделей. В каждом отдельной случае требуется также обоснование необходимости анализа энергозатрат на преодоление сил веса, сил технологического сопротивления и т.п. Из рис.9.39 видно, что проведенный анализ энергозатрат на преодоление сил веса во многом не удовлетворяет требованиям практики, что связано со следующими причинами. Динамическая модель (расчетная схема), представленная на рис.9.39, отображает только энергозатраты на преодоление поступательного движения звеньев. Здесь не учтены влияния сил инерции и моментов от сил инерции. Более полная расчетная схема (динамическая модель) манипулятора для решения данной задачи представлена на рис.9.40. Мощность, необходимая на преодоление силы инерции, возникающей при перемещении детали массой m_D вдоль заданной траектории D_1D_2 , определится из соотношения

$$P_D^H = \bar{F}_D^H \bar{v}_D = -m_D \bar{a}_D \bar{v}_D = -m_D a_D v_D \cos(\bar{a}_D \wedge \bar{v}_D)$$

или

$$P_D^H = -m_D \left(\ddot{x}_D^{(0)} \dot{x}_D^{(0)} + \ddot{y}_D^{(0)} \dot{y}_D^{(0)} + \ddot{z}_D^{(0)} \dot{z}_D^{(0)} \right),$$

где

$$\cos(\bar{a}_D \wedge \bar{v}_D) = \frac{\ddot{x}_D^{(0)} \dot{x}_D^{(0)} + \ddot{y}_D^{(0)} \dot{y}_D^{(0)} + \ddot{z}_D^{(0)} \dot{z}_D^{(0)}}{a_D v_D},$$

$$a_D = \sqrt{[\ddot{x}_D^{(0)}]^2 + [\ddot{y}_D^{(0)}]^2 + [\ddot{z}_D^{(0)}]^2} = \sqrt{[a_D^x]^2 + [a_D^y]^2},$$

$$v_D = \sqrt{[\dot{x}_D^{(0)}]^2 + [\dot{y}_D^{(0)}]^2 + [\dot{z}_D^{(0)}]^2} = \frac{ds_D}{dt}.$$

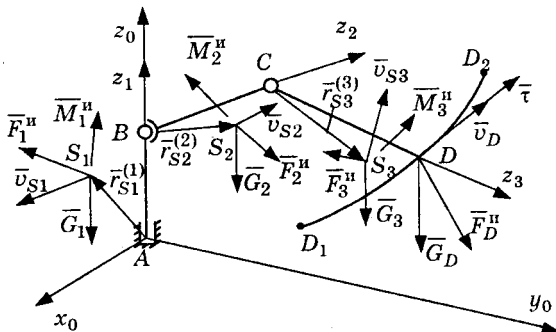


Рис.9.40. К определению энергозатрат на преодоление сил инерции и сил тяжести звеньев манипулятора

Как было показано ранее,

$$a_D^{\tau} = \frac{a_D v_D}{|\bar{v}_D|}.$$

Тогда угол между векторами \bar{a}_D и \bar{v}_D можно получить из выражения

$$\cos(\bar{a}_D \wedge \bar{v}_D) = a_D^{\tau} / a_D.$$

С учетом последнего выражения мощность силы F_D^H инерции детали массой m_D , перемещающейся вдоль заданной траектории, можно представить в виде

$$P_D^H = -m_D a_D^{\tau} v_D = -m_D \frac{dv_D}{dt} v_D \frac{ds_D}{ds_D} = -m_D \frac{dv_D}{ds_D} v_D^2.$$

Если считать полезной работу манипулятора на перемещение детали массой m_D по заданной траектории с заданным законом изменения скорости v_D вдоль этой траектории в функции времени или пути (длины траектории), то мощность $P_{\text{пс}}$ сил полезного сопротивления определится суммой мощности P_G , затраченной на перемещение детали весом G_D со скоростью v_D , и мощности P_D , затраченной на преодоление силы инерции, возникающей в результате перемещения этой детали вдоль заданной траектории:

$$P_{\text{пс}} = \bar{G}_D \bar{v}_D + \bar{F}_D^H \bar{v}_D = m_D (\bar{g} \bar{v}_D - \bar{a}_D \bar{v}_D),$$

где $|\bar{g}| = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести.

С учетом соотношений, полученных ранее, последнее выражение представим в виде

$$P_{\text{пс}} = -m_D (gz_D^{(0)} + a_D^{\tau} v_D). \quad (9.64)$$

Выражение в скобках представляют собой удельную мощность силы веса и силы инерции детали, то есть полезную мощность, приходящуюся на единицу перемещаемой массы. Она представляет собой мощность ускорений. Выражая баланс мощности манипулятора в виде

$$P_{\text{дс}} = P_{\text{пс}} + P_{\text{вс}} \pm \sum_{i=1}^k P_G^i \pm \sum_{i=1}^k P_y^i \pm \sum_{i=1}^k P_{\text{и}}^i,$$

получим коэффициент энергопотребления манипулятора (энергозатрат на перемещение детали массой m_D)

$$k_{\text{э}} = \frac{P_{\text{дс}}}{P_{\text{пс}}} = 1 + \frac{P_{\text{вс}} \pm \sum_{i=1}^k P_G^i \pm \sum_{i=1}^k P_y^i \pm \sum_{i=1}^k P_{\text{и}}^i}{m_D (gz_D^{(0)} + a_D^{\tau} v_D)} =$$

$$= 1 + \frac{P_{\text{вс}}}{P_{\text{пс}}} \pm \frac{\sum_{i=1}^k P_G^i}{P_{\text{пс}}} \pm \frac{\sum_{i=1}^k P_y^i}{P_{\text{пс}}} \pm \frac{\sum_{i=1}^k P_{\text{и}}^i}{P_{\text{пс}}} = 1 + k_{\text{э}}^{\text{вс}} + k_{\text{э}}^G + k_{\text{э}}^y + k_{\text{э}}^{\text{и}}.$$

Введенный коэффициент показывает превышение суммарной мощности сил движущих над полезной мощностью (номинальной), определяемой выражением (9.64). Представление этого коэффициента в виде суммы отдельных коэффициентов энергопотребления позволяет дать количественную характеристику энергозатрат манипулятора по его отдельным составляющим и выявить таким образом более существенные резервы совершенствования конструкции в каждом отдельном случае. Такое представление позволяет также судить количественно о возможности снижения энергозатрат за счет реализации рекуперативного торможения по коэффициенту

$$k_{\text{э}}^{\text{н}} = \sum_{i=1}^k P_{\text{н}}^i / P_{\text{пс}}$$

или же о возможности использования "перекачки" энергии деформации упругих звеньев по коэффициенту

$$k_{\text{э}}^{\text{у}} = \sum_{i=1}^k P_{\text{у}}^i / P_{\text{пс}}$$

или же об использовании так называемого маятникового эффекта по коэффициенту

$$k_{\text{э}}^{\text{Г}} = \sum_{i=1}^k P_{\text{Г}}^i / P_{\text{пс}}$$

Коэффициент $k_{\text{э}}^{\text{BC}} = P_{\text{вс}} / P_{\text{пс}}$ позволяет судить о превышении мощности сил вредного (нетехнологического) сопротивления над номинальной мощностью, определяемой из выражения (9.64). Такой количественный анализ энергозатрат (энергопотребления) манипуляторов полезен как при создании новых конструкций, так и при сравнении эксплуатационных характеристик конструкций манипуляторов, предназначенных для выполнения одной и той же технологической операции. Ранжирование энергозатрат по коэффициентам, определяющим влияние отдельных составляющих, позволяет легко оценить степень совершенства той или иной конструкции манипулятора по отклонению (превышению) того или иного коэффициента от номинального, принятого равным единице.

Как видно из рис.9.40, расчетная схема, положенная в основу принятой динамической модели, учитывает силы инерции

$$\bar{F}_i^{\text{н}} = -m_i \bar{a}_{Si}$$

в поступательном движении звеньев и моменты сил инерции

$$\bar{M}_i^{\text{н}} = \frac{d\bar{L}_i}{dt} + \bar{\omega}_i \times \bar{L}_i$$

во вращательном движении. С учетом этого коэффициент k_3^H энергозатрат на преодоление инерционных сил i -го звена манипулятора определяется из соотношения

$$\left(k_3^H\right)_i = -\frac{m_i \bar{a}_{Si} \bar{v}_{Si} + \left(M_i^H\right)^{(0)} \bar{\omega}_i}{P_{nc}}. \quad (9.65)$$

Как указано ранее, вектор \bar{M}_i^H задан (определен) координатами M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} в i -ой системе координат, связанной жестко с этим звеном. Вектор же $\bar{\omega}_i$ угловой скорости i -го звена определен как геометрическая сумма векторов относительных угловых скоростей этого звена и всех ему предшествующих в неподвижной системе координат. Поэтому скалярное произведение этих векторов должно быть записано как сумма произведений их одноименных координат, представленных в какой-либо одной системе. Так как векторы \bar{v}_{Si} и \bar{a}_{Si} заданы (получены) в неподвижной системе координат, то удобнее перевести вектор $\left(\bar{M}_i^H\right)^{(i)}$ из i -ой системы координат в неподвижную. Вектор $\left(\bar{M}_i^H\right)^{(0)}$ запишется в виде

$$\left(\bar{M}_i^H\right)^{(0)} = \left(M_i^H\right)_{x_0} \bar{i}_0 + \left(M_i^H\right)_{y_0} \bar{j}_0 + \left(M_i^H\right)_{z_0} \bar{k}_0,$$

где

$$\begin{Bmatrix} \left(M_i^H\right)_{x_0} \\ \left(M_i^H\right)_{y_0} \\ \left(M_i^H\right)_{z_0} \end{Bmatrix} = \left[M_{i,0}\right] \begin{Bmatrix} M_{xi}^H \\ M_{yi}^H \\ M_{zi}^H \end{Bmatrix}. \quad (9.66)$$

В уравнении (9.66) $\left[M_{i,0}\right]$ матрица преобразования вектора из i -ой в нулевую (неподвижную) систему координат. Уравнение (9.65), с учетом соотношения (9.64), в координатной форме запишется в виде

$$\begin{aligned} \left(k_3^H\right)_i &= \frac{m_i}{m_D} \cdot \frac{\ddot{x}_{Si} \dot{x}_{Si} + \ddot{y}_{Si} \dot{y}_{Si} + \ddot{z}_{Si} \dot{z}_{Si}}{g \dot{z}_D^{(0)} + \ddot{x}_D \dot{x}_D + \ddot{y}_D \dot{y}_D + \ddot{z}_D \dot{z}_D} + \\ &+ \frac{M_{x_0}^H \omega_x + M_{y_0}^H \omega_y + M_{z_0}^H \omega_z}{m_D \left(g \dot{z}_D^{(0)} + \ddot{x}_D \dot{x}_D + \ddot{y}_D \dot{y}_D + \ddot{z}_D \dot{z}_D\right)}. \end{aligned} \quad (9.67)$$

В уравнении (9.67) все проекции векторов представлены в неподвижной системе координат, связанной со станиной манипулятора. Уравнение (9.65) иногда полезно использовать записанным в следующем виде:

$$\left(k_{\vartheta}^n\right)_i = \frac{m_i}{m_D} \cdot \frac{a_{Si}^T v_{Si}}{g\dot{z}_D^{(0)} + a_D^T v_D} + \frac{M_i^n \omega_i \cos\left(\overline{M_i^n} \wedge \overline{\omega_i}\right)}{m_D \left(g\dot{z}_D^{(0)} + a_D^T v_D\right)},$$

где

$$\cos\left(\overline{M_i^n} \wedge \overline{\omega_i}\right) = \frac{M_{x_0}^n \omega_{x_0} + M_{y_0}^n \omega_{y_0} + M_{z_0}^n \omega_{z_0}}{M_i^n \omega_i},$$

$$M_i^n = \sqrt{\left(M_{x_i}^n\right)^2 + \left(M_{y_i}^n\right)^2 + \left(M_{z_i}^n\right)^2}; \quad \omega_i = \sqrt{\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2}.$$

Значения величин, необходимых для определения составляющих, входящих в уравнения (9.67) и (9.68), получены в предыдущих разделах. Разложение коэффициента $\left(k_{\vartheta}^n\right)_i$, характеризующего энергозатраты на преодоление инерционных нагрузок, на две составляющие позволяет учесть раздельное влияние масс m_i i -го подвижного звена в сравнении с массой m_D перемещаемой детали, их ускорений, а также распределения масс по объему подвижных звеньев манипулятора. Суммарная затрата энергии на преодоление сил инерции k подвижных звеньев манипулятора определится суммой $\sum_{i=1}^k \left(k_{\vartheta}^n\right)_i$.

Оценка затрат энергии на преодоление сил \overline{G}_i веса звеньев манипулятора определится коэффициентом

$$\left(k_{\vartheta}^n\right)_i = \frac{\overline{G}_i v_{Si}}{P_{nc}} = \frac{m_i g v_{Si}^{(0)} \cos\left(\overline{G}_i^{(0)} \wedge \overline{v_{Si}}\right)}{m_D \left(g\dot{z}_D^{(0)} + a_D^T v_D\right)}. \quad (9.69)$$

Уравнение (9.69) можно представить в координатной форме следующим образом

$$\left(k_{\vartheta}^G\right)_i = \frac{m_i g \dot{z}_{Si}^{(0)}}{m_D \left(g\dot{z}_D^{(0)} + \ddot{x}_D \dot{x}_D + \ddot{y}_D \dot{y}_D + \ddot{z}_D \dot{z}_D\right)}.$$

При отсутствии в схеме манипулятора специальных упругих элементов, накапливающих энергию деформации за счет работы (мощности) сил веса, инерции или сил движущих и отдающих ее в требуемый момент времени, мощность сил упругости самих звеньев и их подвижных соединений на первом этапе исследования можно не учитывать ввиду малости деформаций. Этот анализ

обязателен при исследовании влияния колебаний на погрешность позиционирования. Как видно из формул, коэффициенты энергозатрат на преодоление сил веса, инерции и др. изменяются на протяжении всего времени движения схвата вдоль заданной траектории. Поэтому, наряду с определением их максимального и минимального значений, представляет интерес анализ их зависимости от времени или от перемещения схвата.

Прежде чем перейти к следующему разделу следует еще раз отметить, что силы реакций в подвижных соединениях звеньев манипулятора являются количественной меркой их механического взаимодействия. Это означает, что нормальные реакции (не зависящие от трения в кинематических парах) определяются с учетом инерционных сил, отражающих закон (характер движения) как схвата, так и всех остальных звеньев манипулятора. С другой стороны, силы трения в кинематических парах или другие силы сопротивления относительно движению звеньев накладывают свои ограничения на закон движения звеньев (изменение скорости центров масс и их угловых скоростей во времени). В этом смысле силы сопротивления относительно движению звеньев являются управляющими, позволяющими реализовывать ту или иную программу (цель), формализованную динамическими уравнениями (ограничениями). С этой точки зрения кинематические уравнения отражают естественное (возможное) движение звеньев при обработке некоторой траектории схвата. В общем случае они не решают поставленной задачи, так как выходные (требуемые) параметры (силовые, энергетические и т.п.) не входят в формализованном виде в эти уравнения. Законы механики дают общие методы составления уравнений движения, которые используются для получения зависимости обобщенных координат от времени, то есть законов движения, определяющих изменение во времени координат центров масс и векторов угловой скорости относительно центров масс. Кинематические уравнения, отображающие естественное (неуправляемое) движение звеньев, являются наиболее общими, им подчиняются и кинематические уравнения целенаправленного движения. Динамические же уравнения естественного движения не описывают целенаправленного движения и не обладают такой универсальностью, как кинематические. Исследование целенаправленного движения основывается на зависимостях, полученных из уравнений естественного движения путем наложения дополнительных связей, записанных в виде выражений, совместное решение которых определяет сочетание требуемых движений центров масс звеньев и их угловых скоростей. Такой подход должен быть положен в основу математического моделирования движения звеньев манипулятора. Это позволит не только дать количественную оценку конструкции манипулятора по энергозатратам, но и поможет выявить

эффективность дополнительных связей на основе математического моделирования с помощью ЭВМ, не прибегая к эксперименту, и тем самым совершенствовать систему управления, приспособить ее к изменяющимся условиям, то есть заложить основу адаптивного (самоприспосабливающегося) управления движениями звеньев. В такой постановке определение сил при заданном (известном) законе движения звеньев, реализуемом некоторой системой управления, и исследование движения звеньев под действием сил движущих и сопротивления являются единой задачей синтеза (создания) наиболее рационального сочетания механики с системой управления. Во всех случаях требуется умение написать математический алгоритм по определению сил реакций в подвижных соединениях звеньев манипуляторов.

9.13. Методика оценки динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипуляторов

В основу определения реакций в кинематических парах механизмов положен метод кинетостатики, позволяющий решать уравнения равновесия сил и их моментов с учетом того, что в их состав включены силы и моменты сил инерции.

Метод кинетостатики не следует путать с принципом Даламбера. Применительно к рассматриваемой задаче принцип Даламбера выражается в том, что система, состоящая из сил, непосредственно приложенных к каждому звену манипулятора, а также сил инерции, удовлетворяет условиям равновесия, то есть представляет собой систему сил, главный вектор и главный момент которой относительно любого центра равны нулю. Метод кинетостатики — формальный прием, дающий возможность записать уравнения движения в виде уравнений равновесия. В формулировке метода кинетостатики силу инерции называют фиктивной, подразумевая тем самым то, что она к данному звену, рассматриваемому в равновесии, не приложена. Эта сила, а также и момент инерционных сил приложены к "ускоряющему" звену, они воспринимаются конкретной шестерней, рейкой, гайкой и др. деталью привода и их опорами (связями). Добавление к силам и моментам, приложенным непосредственно к звену манипулятора и действующим на него в процессе движения, силы \bar{F}_{Si}^n инерции и момента \bar{M}_i^n , не приложенных на самом деле к данному звену, приводит, естественно, к тому, что уравнения движения принимают вид уравнений равновесия. Метод кинетостатики в приложении к манипуляторам приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_i^a + \bar{F}_i^R + \bar{F}_{Si}^n &= 0 \\ \bar{M}_i^a + \bar{M}_i^R + \bar{M}_{Si}^n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

где \bar{F}_i^a , \bar{M}_i^a — геометрическая сумма активных сил и моментов, приложенных к i -му звену; \bar{F}_i^R , \bar{M}_i^R — геометрическая сумма реактивных сил и моментов, приложенных к i -му звену со стороны звеньев, предшествующего ($i - 1$)-го и последующего ($i + 1$)-го; $\bar{F}_{Si}^i = -m_i \bar{a}_{Si}^{(0)}$ — главный вектор сил инерции i -го звена массой m_i , приложенный в центре приведения (центре масс i -го звена); $-\bar{M}_{Si}^i = -d\bar{L}_{Si}/dt = [J_{Si}] \bar{\varepsilon}_i + (\bar{\omega}_i \times [J_{Si}] \bar{\omega}_i)$ — главный момент сил инерции i -го звена относительно центра масс.

Выбор центра масс за центр приведения сил обоснован не только методически. Моделирование движения звеньев манипулятора движением точек, совпадающих с центрами масс, и сферическим движением вокруг этих точек некоторых материальных тел (звеньев), массово-геометрические характеристики которых описываются тензором инерции $[J_{Si}]$ относительно их центров масс, во многом раскрывает понимание роли массовых, геометрических и кинематических характеристик в динамических задачах, которые могут быть реализованы системами управления. Как отмечалось ранее, задачи об исследовании движения звеньев под действием заданных сил и оценка динамической нагруженности их соединений при заданной программе их движения не могут быть рассмотрены раздельно друг от друга.

Их совместный анализ и служит основанием создания рациональной системы управления для конкретной механики манипулятора, то есть такой системы управления, которая позволяла бы реализовать движение схвата вдоль заданной траектории с наименьшими энергозатратами, наименьшими динамическими нагрузками в шарнирах или другими динамическими ограничениями. При выборе за центр приведения, например, точки O_i , совпадающей с началом i -ой системы координат, по-прежнему $\bar{F}_{O_i}^i = -m_i \bar{a}_{S_i}^{(0)}$, а выражение для определения главного момента запишется в виде

$$-\bar{M}_{O_i}^i = -d\bar{L}_{O_i}/dt = [J_{O_i}] \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times [J_{O_i}] \bar{\omega}_i.$$

Связь тензоров инерции $[J_{Si}]$ и $[J_{O_i}]$ состоит в том, что входящие в них осевые моменты связаны между собой известным соотношением о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера).

Отмечая независимость главного вектора сил инерции от центра приведения, его называют первым инвариантом системы сил, как величину не изменяющуюся при переходе от одного

центра приведения к другому, то есть $\bar{F}_{O_i}^n = \bar{F}_{S_i}^n$. Их проекции на любые оси координат тоже будут равны между собой.

Как известно, вторым инвариантом системы сил является скалярное произведение этих векторов, которое остается постоянным для любого центра приведения. Другими словами, проекция главного момента на направление главного вектора для любого центра приведения есть одна и та же величина. Это видно из того, что

$$\bar{F}_{S_i} \bar{M}_{S_i} = F_{S_i} M_{S_i} \cos(\bar{F}_{S_i} \wedge \bar{M}_{S_i}^{(0)}) \quad \text{и} \quad \bar{F}_{O_i} \bar{M}_{O_i} = F_{O_i} M_{O_i} \cos(\bar{F}_{O_i} \wedge \bar{M}_{O_i}^{(0)}).$$

Но так как $|\bar{F}_{S_i}| = |\bar{F}_{O_i}|$, то

$$M_{S_i} \cos(\bar{F}_{S_i}^{(0)} \wedge \bar{M}_{S_i}^{(0)}) = M_{O_i} \cos(\bar{F}_{O_i}^{(0)} \wedge \bar{M}_{O_i}^{(0)}).$$

Касаясь величины главного момента, еще раз напомним о том, что операция умножения тензора на вектор означает в данном случае перевод (преобразование) вектора $\bar{\omega}_i$ размерностью рад/с в вектор \bar{L}_{O_i} размерностью $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$. Можно сказать, что в результате этой операции вектор $\bar{\omega}_i$ не только увеличивается по модулю, но и поворачивается на некоторый угол, зависящий от распределения масс звена относительно некоторого центра. Математически это распределение выражается видом матрицы $[J_{O_i}]$ или $[J_{S_i}]$. Вектор же $\bar{M}_{O_i} = d\bar{L}_{O_i}/dt$ или $\bar{M}_{S_i} = d\bar{L}_{S_i}/dt$ направлен по касательной к годографу дифференцируемого вектора \bar{L}_{O_i} или \bar{L}_{S_i} . При этом центр приведения должен быть обязательно связанным с самим i -ым звеном, то есть вектор $\bar{M}_{O_i}^i$ или $\bar{M}_{S_i}^i$ задан координатами $M_{O_i}^{x_i}, M_{O_i}^{y_i}, M_{O_i}^{z_i}$ или $M_{S_i}^{x_i}, M_{S_i}^{y_i}, M_{S_i}^{z_i}$ в i -ой системе координат, вектор же \bar{a}_{S_i} , определяющий абсолютное ускорение центра масс i -го звена, задан проекциями $\ddot{x}_{S_i}^{(0)}, \ddot{y}_{S_i}^{(0)}, \ddot{z}_{S_i}^{(0)}$ в неподвижной системе координат, связанной сд станиной. Поэтому сила инерции $\bar{F}_{S_i} = \bar{F}_{O_i} = -m_i \bar{a}_{S_i}^{(0)}$ задана координатами $(F_{x0}^n)_i = -m \ddot{x}_{S_i}^{(0)}, (F_{y0}^n)_i = -m \ddot{y}_{S_i}^{(0)}, (F_{z0}^n)_i = -m \ddot{z}_{S_i}^{(0)}$ в неподвижной

системе. Это обстоятельство надо иметь в виду при определении углов между главным вектором и главным моментом сил инерции

$$\left(\overline{F}_{Si}^{(0)} \wedge \overline{M}_{Si}^{(0)} \right) = \arccos \frac{-\left(\ddot{x}_{Si}^{(0)} M_{Si}^{x0} + \ddot{y}_{Si}^{(0)} M_{Si}^{y0} + \ddot{z}_{Si}^{(0)} M_{Si}^{z0} \right)}{\overline{a}_{Si} \left| \overline{M}_{Si} \right|},$$

$$\left(\overline{F}_{Oi}^{(0)} \wedge \overline{M}_{Oi}^{(0)} \right) = \arccos \frac{-\left(\ddot{x}_{Si}^{(0)} M_{Oi}^{x0} + \ddot{y}_{Si}^{(0)} M_{Oi}^{y0} + \ddot{z}_{Si}^{(0)} M_{Oi}^{z0} \right)}{\overline{a}_{Si} \left| \overline{M}_{Oi} \right|}.$$

Координаты вектора главного момента сил инерции \overline{M}_{Si}^n или \overline{M}_{Oi}^n i -го звена в неподвижной системе координат получим с помощью матрицы $[M_{i0}]$ перевода его координат из i -ой системы в 0-ую, то есть

$$\begin{Bmatrix} M_{Si}^{x0} \\ M_{Si}^{y0} \\ M_{Si}^{z0} \end{Bmatrix} = [M_{i0}] \begin{Bmatrix} M_{Si}^{xi} \\ M_{Si}^{yi} \\ M_{Si}^{zi} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_{Oi}^{x0} \\ M_{Oi}^{y0} \\ M_{Oi}^{z0} \end{Bmatrix} = [M_{i0}] \begin{Bmatrix} M_{Oi}^{xi} \\ M_{Oi}^{yi} \\ M_{Oi}^{zi} \end{Bmatrix}.$$

Модули векторов главных моментов сил инерции определяются соотношениями

$$\sqrt{\left(M_{Si}^{xi} \right)^2 + \left(M_{Si}^{yi} \right)^2 + \left(M_{Si}^{zi} \right)^2} = \left| \overline{M}_{Si} \right| = \sqrt{\left(M_{Si}^{x0} \right)^2 + \left(M_{Si}^{y0} \right)^2 + \left(M_{Si}^{z0} \right)^2},$$

$$\sqrt{\left(M_{Oi}^{xi} \right)^2 + \left(M_{Oi}^{yi} \right)^2 + \left(M_{Oi}^{zi} \right)^2} = \left| \overline{M}_{Oi} \right| = \sqrt{\left(M_{Oi}^{x0} \right)^2 + \left(M_{Oi}^{y0} \right)^2 + \left(M_{Oi}^{z0} \right)^2},$$

то есть модули векторов \overline{M}_{Si} , \overline{M}_{Oi} в различных системах координат остаются неизменными. Это правило может служить проверкой при отладке программ по численному исследованию движения звеньев манипулятора с помощью ЭВМ.

При необходимости определения углов между главными векторами сил и моментов сил инерции i -го звена в системе координат, связанной с этим звеном, следует пользоваться выражениями

$$\left(\overline{F}_{Si}^i \wedge \overline{M}_{Si}^i \right) = \arccos \frac{-\left(\ddot{x}_{Si}^i M_{Si}^{xi} + \ddot{y}_{Si}^i M_{Si}^{yi} + \ddot{z}_{Si}^i M_{Si}^{zi} \right)}{\overline{a}_{Si} \left| \overline{M}_{Si} \right|},$$

$$\left(\overline{F}_{Oi}^i \wedge \overline{M}_{Oi}^i \right) = \arccos \frac{-\left(\ddot{x}_{Si}^i M_{Oi}^{xi} + \ddot{y}_{Si}^i M_{Oi}^{yi} + \ddot{z}_{Si}^i M_{Oi}^{zi} \right)}{\overline{a}_{Si} \left| \overline{M}_{Si} \right|}.$$

В этом случае координаты ускорения центра масс i -го звена в системе координат, связанной с ним, определяются из соотношения

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{Si}^i \\ \ddot{y}_{Si}^i \\ \ddot{z}_{Si}^i \end{Bmatrix} = [M_{Oi}] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{y}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{z}_{Si}^{(0)} \end{Bmatrix},$$

где $[M_{Oi}] = [M_{iO}]'$.

В качестве проверки здесь также можно использовать равенство

$$\sqrt{(\ddot{x}_{Si}^i)^2 + (\ddot{y}_{Si}^i)^2 + (\ddot{z}_{Si}^i)^2} = |\bar{a}_{Si}| = \sqrt{[\ddot{x}_{Si}^{(0)}]^2 + [\ddot{y}_{Si}^{(0)}]^2 + [\ddot{z}_{Si}^{(0)}]^2}.$$

При этом, как отмечалось ранее

$$\bar{a}_{Si}^{(0)} = \bar{a}_{Oi} + \bar{a}_{Si,Oi} = \bar{a}_{Si}^e + \bar{a}_{Si}^r.$$

Ускорение $\bar{a}_{Si,Oi}$ центра масс i -го звена в системе координат, связанной с этим звеном, представляет собой ускорение \bar{a}_{Si}^r в его относительном движении. Оно задано координатами в подвижной системе координат. Поэтому координаты его в неподвижной системе координат определяются из соотношений

$$\begin{Bmatrix} (a_{Si}^r)_{x0} \\ (a_{Si}^r)_{y0} \\ (a_{Si}^r)_{z0} \end{Bmatrix} = [M_{i0}] \begin{Bmatrix} (a_{Si}^r)_{xi} \\ (a_{Si}^r)_{yi} \\ (a_{Si}^r)_{zi} \end{Bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{y}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{z}_{Si}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{y}_{Si}^{(0)} \\ \ddot{z}_{Si}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (a_{Si}^r)_{x0} \\ (a_{Si}^r)_{y0} \\ (a_{Si}^r)_{z0} \end{Bmatrix}.$$

Координаты $(a_{Si}^r)_{xi} = \ddot{x}_{Si}^{(i)}$, $(a_{Si}^r)_{yi} = \ddot{y}_{Si}^{(i)}$, $(a_{Si}^r)_{zi} = \ddot{z}_{Si}^{(i)}$ определяются из уравнения $(\bar{a}_{Si}^r)_i = (\bar{\varepsilon}_i \times \bar{r}_{Si}^{(i)}) + (\bar{\omega}_i \times \bar{v}_{Si}^{(i)})$, записанного в координатной форме.

Взаимосвязь кинематики относительного движения звеньев с динамикой требует также некоторого пояснения. Рассматривая скорости и ускорения i -го звена в его абсолютном движении, мы условились считать переносным движением его поступательное движение со скоростью \bar{v}_{O_i} и ускорением \bar{a}_{O_i} начала координат O_i . В поступательном (переносном) движении скорости и ускорения всех точек звена i равны, поэтому $\bar{v}_{S_i}^e = \bar{v}_{O_i}^e$, $\bar{a}_{S_i}^e = \bar{a}_{O_i}^e$. Тогда оценку относительного движения следует производить с учетом абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}_i$ i -го звена и возможности поступательного движения его центра масс, то есть ускорение центра масс i -го звена в таком случае определится с учетом ускорения Кориолиса.

9.14. Определение реакций в кинематических парах звеньев манипуляторов

Методом кинетостатики можно пользоваться при решении задач, в которых по заданному закону определяются неизвестные силы и моменты. Кроме того, в число известных величин должны входить массы звеньев, их моменты инерции, активные силы и моменты. Решение задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в следующей последовательности [50].

1. Изобразить последнее звено манипулятора вместе со схватом и весом перемещаемой детали. В системе координат, жестко связанной с этим звеном, должны быть известны координаты центра масс звена со схватом и координаты точки приложения силы веса перемещаемой детали.

2. Изобразить задаваемые силы веса, инерции и др., приложенные к соответствующим точкам с известными координатами, изобразить векторы моментов сил движущих, сопротивления, инерции.

3. Заменить действие отброшенного звена манипулятора на рассматриваемое силами реакций и реактивными моментами, подлежащими определению.

4. Составить два уравнения равновесия сил и моментов в векторной форме. Записать уравнения равновесия в координатной форме, выразить их векторы в проекциях на оси неподвижной системы координат или на оси, жестко связанные с рассматриваемым звеном. При этом следует иметь в виду, что сила инерции перемещаемой детали задана в неподвижной системе координат, связанной со станиной, сила веса и сила инерции рассматриваемого звена также заданы в неподвижной системе координат, а движущий момент \bar{M}_i^D и инерционный момент $\bar{M}_i^И$ заданы

координатами в своей (подвижной) системе координат. Поэтому при необходимости определения проекций реактивных сил и моментов в неподвижной системе координат векторы \bar{M}_i^H и \bar{M}_i^D следует перевести в неподвижную систему. При определении же проекций реактивных сил и моментов на оси системы координат, связанной с самим звеном, необходимо координаты векторов сил инерции и веса (детали и самого звена) преобразовать в проекции на оси подвижной системы, связанной с самим звеном. Однако более рационально получить проекции реактивных сил и моментов в неподвижной системе координат, а затем их перевести в проекции на оси подвижной системы, связанной с самим звеном манипулятора.

5. Решить полученную систему из шести уравнений и определить проекции реактивных сил и моментов на соответствующие оси координат.

6. Определить величину реактивных сил и моментов, а также их ориентацию в пространстве относительно осей, связанных с подшипниковыми узлами звена, выделив при этом движущие составляющие и собственно реактивные.

Пример. Записать уравнения в координатной форме для определения реакций в кинематических парах манипулятора, изображенного на рис.9.39.

На рис.9.41 представлена расчетная схема для определения реактивных сил и моментов в подвижном соединении третьего (последнего) звена со вторым звеном манипулятора. Заданными (известными) силами и моментами являются следующие силы: силы веса \bar{G}_D и \bar{G}_3 перемещаемой детали и последнего звена соответственно; силы инерции \bar{F}_D и \bar{F}_3^H перемещаемой детали и последнего звена манипулятора в его поступательном движении; $(\bar{M}_3^H)^{(3)}$ — инерционный момент, учитывающий распределение масс звена 3 и закон его движения. В отличие от сил веса и инерционных сил, заданных координатами в неподвижной системе координат, вектор $(\bar{M}_3^H)^{(3)}$ задан координатами в своей (3-ей) системе координат. Уравнения равновесия сил и моментов в векторной форме для схемы, представленной на рис.9.41, имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{F}_D^H + \bar{G}_D + \bar{G}_3 + \bar{F}_3^H + \bar{R}_{23} &= 0, \\ (\bar{l}_{CD} \times F_D^H) + (\bar{l}_{CD} \times \bar{G}_D) + (M_3^H)^{(0)} + (\bar{r}_{CS3}^{(0)} \times \bar{G}_3^{(0)}) + \\ + (\bar{r}_{CS3}^{(0)} \times \bar{F}_3^H) + \bar{M}_{23} + \bar{M}_3^H &= 0. \end{aligned} \quad (9.70)$$

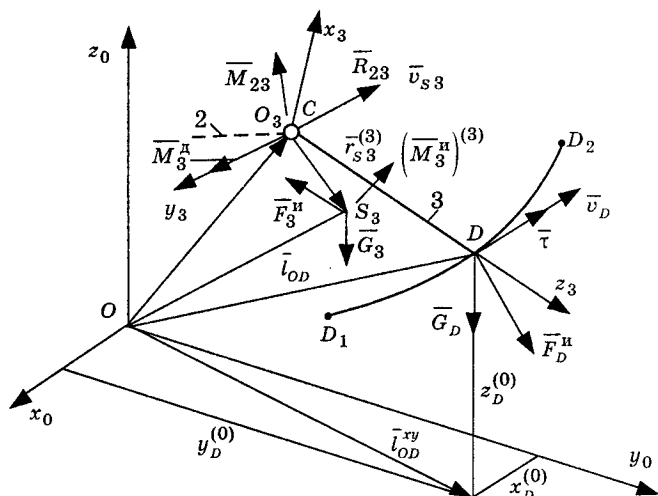


Рис.9.41. Расчетная схема для определения реактивных сил и моментов в подвижном соединении последнего звена манипулятора

Уравнения (9.70) в проекциях на оси $x_0y_0z_0$ запишутся в виде

$$-m_D \begin{Bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{y}_D \\ \ddot{z}_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_3 \end{Bmatrix} - m_3 \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{S3}^{(0)} \\ \ddot{y}_{S3}^{(0)} \\ \ddot{z}_{S3}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{23}^{x0} \\ R_{23}^{y0} \\ R_{23}^{z0} \end{Bmatrix} = 0, \quad (9.71)$$

$$-m_D \begin{Bmatrix} (y_D^{(0)} - y_C^{(0)})\ddot{z}_D - (z_D^{(0)} - z_C^{(0)})\ddot{y}_D \\ (z_D^{(0)} - z_C^{(0)})\ddot{x}_D - (x_D^{(0)} - x_C^{(0)})\ddot{z}_D \\ (x_D^{(0)} - x_C^{(0)})\ddot{y}_D - (y_D^{(0)} - y_C^{(0)})\ddot{x}_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -(y_D^{(0)} - y_C^{(0)})G_D \\ (x_D^{(0)} - x_C^{(0)})G_D \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} M_{x3}^n \\ M_{y3}^n \\ M_{z3}^n \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -(y_{S3}^{(0)} - y_C^{(0)})G_3 \\ (x_{S3}^{(0)} - x_C^{(0)})G_3 \\ 0 \end{Bmatrix} - m_3 \begin{Bmatrix} (y_{S3}^{(0)} - y_C^{(0)})\ddot{z}_{S3}^{(0)} - (z_{S3}^{(0)} - z_C^{(0)})\ddot{y}_{S3}^{(0)} \\ (z_{S3}^{(0)} - z_C^{(0)})\ddot{x}_{S3}^{(0)} - (x_{S3}^{(0)} - x_C^{(0)})\ddot{z}_{S3}^{(0)} \\ (x_{S3}^{(0)} - x_C^{(0)})\ddot{y}_{S3}^{(0)} - (y_{S3}^{(0)} - y_C^{(0)})\ddot{x}_{S3}^{(0)} \end{Bmatrix} +$$

$$+ [M_{30}] \begin{Bmatrix} M_{23}^{x3} \\ 0 \\ M_{23}^{z3} \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} 0 \\ M_{3y3}^n \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9.72)$$

В уравнениях (9.71) и (9.72) индекс (0), указывающий на принадлежность к нулевой (неподвижной) системе координат для координат точки D (центра масс детали) и проекций ускорения точки D опущен.

Координаты центра масс звена 3 (проекция вектора \bar{r}_{S3}) на оси неподвижной системы определяются из выражения

$$\begin{Bmatrix} x_{S3}^{(0)} \\ y_{S3}^{(0)} \\ z_{S3}^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_{S3}^{(3)} \\ y_{S3}^{(3)} \\ z_{S3}^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (9.73)$$

Проекция ускорения \bar{a}_{S3} центра масс звена 3 на оси неподвижной системы координат определены ранее. Таким образом, уравнения (9.71) и (9.72) позволяют определить три проекции реакции \bar{R}_{23} , действующей на звено 3 со стороны звена 2, а также три проекции вектора \bar{M}_{23} на оси неподвижной системы координат. Проекция реактивных сил и моментов, действующих в подвижном соединении звеньев 3 и 2 манипулятора, на оси, связанные с третьим звеном, определяются из выражений

$$\begin{Bmatrix} R_{23}^{x_3} \\ R_{23}^{y_3} \\ R_{23}^{z_3} \end{Bmatrix} = [M_{03}] \begin{Bmatrix} R_{23}^{x_0} \\ R_{23}^{y_0} \\ R_{23}^{z_0} \end{Bmatrix}, \quad (9.74)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{23}^{x_3} \\ M_{23}^{y_3} \\ M_{23}^{z_3} \end{Bmatrix} = [M_{03}] \begin{Bmatrix} M_{23}^{x_0} \\ M_{23}^{y_0} \\ M_{23}^{z_0} \end{Bmatrix}. \quad (9.75)$$

Уравнения (9.71)-(9.75) указывают на то, что в кинематической паре C в процессе движения схвата по траектории D_1D_2 реактивные силы и моменты изменяются как по величине, так и по направлению. Это означает, что в соединении звеньев 2 и 3 (см. рис.9.39-9.41) (в подшипниковом узле) должны быть выбраны зазоры и обеспечен предварительный натяг за счет смещения под нагрузкой внутреннего кольца подшипника качения в осевом направлении относительно наружного. Другими словами, в кинематической паре C манипулятора (см. рис.9.39) нельзя устанавливать радиальный подшипник качения, т.е. в процессе эксплуатации возможно возникновение не только знакопеременных сил, смещающих внутреннее кольцо подшипника относительно наружного вдоль осей x_3, y_3, z_3 , но и, что наиболее опасно, знакопеременное "выворачивание" внутреннего кольца относительно наружного под действием момента $\bar{M}_{23}^{(3)} = M_{23}^{x_3} i_3 + M_{23}^{y_3} j_3 + M_{23}^{z_3} k_3$. Качественная оценка такого "выворачивания" в процессе обработки траектории схвата может быть выполнена с помощью формулы, определяющей угол отклонения вектора $\bar{M}_{23}^{(3)}$

от плоскости x_3y_3 . Кинематическая пара C (см. рис.9.39) допускает одно вращательное движение вокруг оси y_3 так, что наилучшая работоспособность такого шарнира будет в случае, если вектор $\overline{M}_{23}^{(3)}$ будет совпадать с осью y_3 , то есть $\overline{M}_{23}^{(3)} \{0, M_{23}, 0\}$.

В этом случае $\theta_{M_{23}}^{(3)} = 0$, т.к.

$$\operatorname{tg} \theta_{M_{23}}^{(3)} = \frac{M_{23}^{z_3}}{\sqrt{(M_{23}^{x_3})^2 + (M_{23}^{y_3})^2}} = 0,$$

$$\psi_{M_{23}}^{(3)} = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к.}$$

$$\operatorname{tg} \psi_{M_{23}}^{(3)} = \frac{M_{23}^{y_3}}{M_{23}^{z_3}} = \frac{M_{23}}{0} = \infty \text{ или } \operatorname{ctg} \psi_{M_{23}}^{(3)} = 0.$$

Таким образом, анализируя отклонение угла $\theta_{M_{23}}^{(3)}$ от нуля по его тангенсу нетрудно выявить наиболее неблагоприятное сочетание кинематики схвата вместе со звеном 3 и распределения его масс, которое, в свою очередь, приводит к наихудшим условиям силового взаимодействия в подвижном соединении третьего (последнего) звена манипулятора со вторым. После определения составляющих реактивных сил и моментов в последней кинематической паре манипулятора можно переходить к определению составляющих реактивных сил и моментов в последующей кинематической паре, расположенной ближе к станине. Для этого рассматривается условие равновесия звена 2, считая при этом, что

$$R_{32}^x = -R_{23}^x, R_{32}^y = -R_{23}^y, R_{32}^z = -R_{23}^z,$$

$$M_{32}^x = -M_{23}^x, M_{32}^y = -M_{23}^y, M_{32}^z = -M_{23}^z.$$

Эти равенства справедливы как для проекций их на оси 2-го звена, так и на оси x_0, y_0, z_0 .

На рис.9.42 представлена расчетная схема для определения реактивных сил $\overline{R}_{12}, \overline{M}_{12}$ в подвижном соединении первого и второго звена манипулятора, изображенного на рис.9.39.

Известными величинами в данном случае являются $\overline{R}_{32}^{(0)}$ и $\overline{M}_{32}^{(0)}$ — реактивные сила и момент, характеризующие воздействие третьего звена на второе. Их проекции определены ранее.

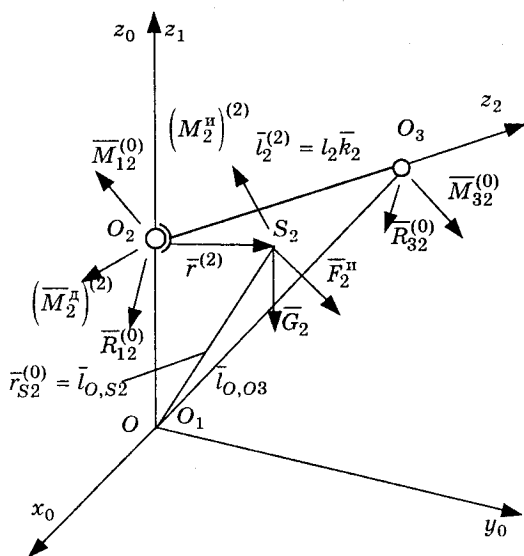


Рис.9.42. Расчетная схема для определения реактивных сил и моментов в подвижном соединении второго (предпоследнего) звена манипулятора

Как отмечалось ранее, более рационально на промежуточном этапе пользоваться векторами сил и моментов, заданными в неподвижной системе координат.

$$(M_2^n)^{(2)} = \left\{ (M_{2x}^n)^{(2)}, (M_{2y}^n)^{(2)}, (M_{2z}^n)^{(2)} \right\} \text{ — инерционный момент второго звена, заданный проекциями на оси системы координат, связанной со вторым звеном. Как и ранее, для определения его проекций в неподвижной системе координат необходимо осуществить операцию перевода этих координат в нулевую систему путем перемножения их на матрицу } [M_{20}]. \text{ Это перемножение даст}$$

$(M_2^n)^{(0)} = \left\{ (M_{2x}^n)^{(0)}, (M_{2y}^n)^{(0)}, (M_{2z}^n)^{(0)} \right\}$. Сила инерции $\bar{F}_2^n = -m_2 \bar{a}_{S_2}^{(0)}$ и вес $|\bar{G}_2| = \{0, 0, -G_2\}$ заданы координатами в неподвижной (нулевой) системе. Проекции $\ddot{x}_{S_2}^{(0)}, \ddot{y}_{S_2}^{(0)}, \ddot{z}_{S_2}^{(0)}$ определены ранее. $|\bar{M}_2^d| = \left\{ M_{2x_2}^d, M_{2y_2}^d, M_{2z_2}^d \right\}$ — момент движущих сил, приложенных ко второму звену, задан проекциями в своей системе

координат. Для перевода вектора \overline{M}_2^{Δ} в неподвижную систему координат следует осуществить операцию умножения его на матрицу $[M_{20}]$.

Для определения векторов \overline{R}_{12} , \overline{M}_{12} имеем два векторных уравнения (см. рис.9.42)

$$\left. \begin{aligned} & \overline{R}_{32} + \overline{G}_2 + \overline{F}_2^{\Delta} + \overline{R}_{12} = 0, \\ & \overline{M}_{32}^{(0)} + (\overline{l}_{O2,O3} \times \overline{R}_{32}^{(0)}) + (\overline{M}_2^{\Delta})^{(0)} + (\overline{l}_{O2,S2} \times \overline{G}_2) + (\overline{l}_{O2,S2} \times \overline{F}_2^{\Delta}) + \\ & \quad + \overline{M}_{12}^{(0)} + (\overline{M}_2^{\Delta})^{(0)} = 0. \end{aligned} \right\} (9.76)$$

Уравнение (9.76) в проекциях на оси неподвижной системы координат запишется в виде

$$\begin{Bmatrix} R_{32}^{x_0} \\ R_{32}^{y_0} \\ R_{32}^{z_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_D \end{Bmatrix} - m_2 \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{S2}^{(0)} \\ \ddot{y}_{S2}^{(0)} \\ \ddot{z}_{S2}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{12}^{x_0} \\ R_{12}^{y_0} \\ R_{12}^{z_0} \end{Bmatrix} = 0, \quad (9.77)$$

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} M_{32}^{x_0} \\ M_{32}^{y_0} \\ M_{32}^{z_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (y_{O3}^{(0)} - y_{O2}^{(0)})R_{32}^{z_0} - (z_{O3}^{(0)} - z_{O2}^{(0)})R_{32}^{y_0} \\ (z_{O3}^{(0)} - z_{O2}^{(0)})R_{32}^{x_0} - (x_{O3}^{(0)} - x_{O2}^{(0)})R_{32}^{z_0} \\ (x_{O3}^{(0)} - x_{O2}^{(0)})R_{32}^{y_0} - (y_{O3}^{(0)} - y_{O2}^{(0)})R_{32}^{x_0} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} (M_2^{\Delta})^{x_2} \\ (M_2^{\Delta})^{y_2} \\ (M_2^{\Delta})^{z_2} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} -(y_{S2}^{(0)} - y_{O2}^{(0)})G_2 \\ (x_{S2}^{(0)} - x_{O2}^{(0)})G_2 \\ 0 \end{Bmatrix} - m_2 \begin{Bmatrix} (y_{S2}^{(0)} - y_{O2}^{(0)})\ddot{z}_{S2}^{(0)} - (z_{S2}^{(0)} - z_{O2}^{(0)})\ddot{y}_{S2}^{(0)} \\ (z_{S2}^{(0)} - z_{O2}^{(0)})\ddot{x}_{S2}^{(0)} - (x_{S2}^{(0)} - x_{O2}^{(0)})\ddot{z}_{S2}^{(0)} \\ (x_{S2}^{(0)} - x_{O2}^{(0)})\ddot{y}_{S2}^{(0)} - (y_{S2}^{(0)} - y_{O2}^{(0)})\ddot{x}_{S2}^{(0)} \end{Bmatrix} + \\ & + [M_{20}] \begin{Bmatrix} M_{2x_2}^{\Delta} \\ M_{2y_2}^{\Delta} \\ M_{2z_2}^{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{12}^{x_0} \\ M_{12}^{y_0} \\ M_{12}^{z_0} \end{Bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Для схемы по рис.9.42 $M_{12}^{x_0} = M_{12}^{y_0} = M_{12}^{z_0} = 0$.

Уравнения (9.77), (9.78) позволяют определить неизвестные реактивные силу $\overline{R}_{12}^{(0)}$ и момент $\overline{M}_{12}^{(0)}$, заданные в неподвижной системе координат. Координаты точки приложения силы \overline{R}_{32}

определятся преобразованием координат $\{0, 0, l_2\}$ этой точки в системе координат $x_2 y_2 z_2$, связанной со вторым звеном, в координаты $\{x_{O3}^{(0)}, y_{O3}^{(0)}, z_{O3}^{(0)}\}$ путем умножения на матрицу $[M_{20}]$, то есть

$$\begin{Bmatrix} x_{O3}^{(0)} \\ y_{O3}^{(0)} \\ z_{O3}^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix}.$$

Аналогично получим координаты центра масс второго звена в системе координат $x_0 y_0 z_0$, как преобразование вектора $\bar{r}_{S2}^{(2)} \{x_{S2}^{(2)}, y_{S2}^{(2)}, z_{S2}^{(2)}\}$ в вектор $\bar{r}_{S2}^{(0)} \{x_{S2}^{(0)}, y_{S2}^{(0)}, z_{S2}^{(0)}\}$ умножением его на матрицу $[M_{20}]$, то есть

$$\begin{Bmatrix} x_{S2}^{(0)} \\ y_{S2}^{(0)} \\ z_{S2}^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{20}] \begin{Bmatrix} x_{S2}^{(2)} \\ y_{S2}^{(2)} \\ z_{S2}^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Матрица $[M_{20}]$ получена ранее.

Таким образом, уравнения (9.77) и (9.78) позволяют определить величину реактивных сил R_{12} и момента M_{12} , действующих в соединении второго звена с первым по формулам

$$R_{12} = \sqrt{\left(R_{12}^{x_0}\right)^2 + \left(R_{12}^{y_0}\right)^2 + \left(R_{12}^{z_0}\right)^2},$$

$$M_{12} = \sqrt{\left(M_{12}^{x_0}\right)^2 + \left(M_{12}^{y_0}\right)^2 + \left(M_{12}^{z_0}\right)^2}.$$

Проекции реактивных сил и моментов на оси x_2, y_2, z_2 определяются из соотношений

$$\begin{Bmatrix} R_{12}^{x_2} \\ R_{12}^{y_2} \\ R_{12}^{z_2} \end{Bmatrix} = [M_{02}] \begin{Bmatrix} R_{12}^{x_0} \\ R_{12}^{y_0} \\ R_{12}^{z_0} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_{12}^{x_2} \\ M_{12}^{y_2} \\ M_{12}^{z_2} \end{Bmatrix} = [M_{02}] \begin{Bmatrix} M_{12}^{x_0} \\ M_{12}^{y_0} \\ M_{12}^{z_0} \end{Bmatrix}.$$

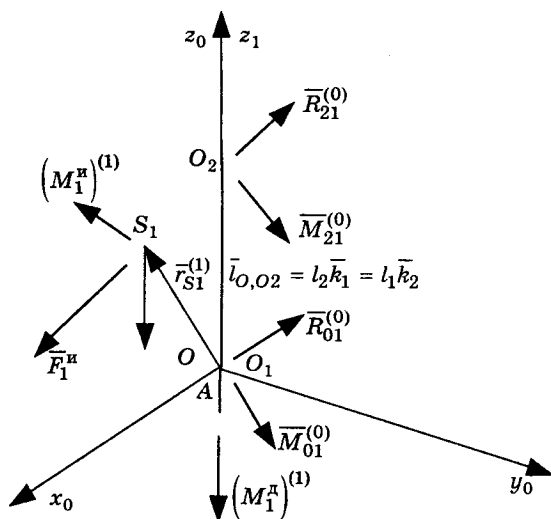


Рис.9.43. Расчетная схема для определения реактивных сил и моментов в подвижном соединении первого звена манипулятора со станией

Особенности динамической нагруженности подвижного соединения звеньев 1 и 2 (кинематической пары B) (см. рис.9.39 и 9.42) могут быть проанализированы сравнением величин проекций векторов $\overline{M}_2^{\text{д}} \{M_{2x_2}^{\text{д}}, M_{2y_2}^{\text{д}}, M_{2z_2}^{\text{д}}\}$ и $\overline{M}_1^{\text{д}} \{M_{12}^{x_2}, M_{12}^{y_2}, M_{12}^{z_2}\}$ и их относительной ориентации в системе координат, связанной со звеном 2.

После определения реактивных сил \overline{R}_{12} и момента \overline{M}_{12} можно приступить к определению опорных динамических реакций в соединении. Расчетная схема для определения векторов \overline{R}_{01} и \overline{M}_{01} представлена на рис.9.43. Уравнения равновесия звена 1 в векторной форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \overline{R}_{21} + \overline{G}_1 + \overline{F}_1^n + \overline{R}_{01} &= 0, \\ \overline{M}_{21}^{(0)} + (\overline{l}_{01,02} \times \overline{R}_{21}^{(0)}) + (\overline{M}_1^n)^{(0)} + (\overline{r}_{S1}^{(0)} \times \overline{G}_1) + (\overline{r}_{S1}^{(0)} \times \overline{F}_1^n) + \\ &+ (\overline{M}_1^n)^{(0)} + (\overline{M}_{01}^{(0)})^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} (9.79)$$

Уравнение (9.79) в проекциях на оси неподвижной системы координат запишется в виде

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} R_{21}^{x_0} \\ R_{21}^{y_0} \\ R_{21}^{z_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_1 \end{Bmatrix} - m_1 \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{S1}^{(0)} \\ \ddot{y}_{S1}^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{01}^{x_0} \\ R_{01}^{y_0} \\ R_{01}^{z_0} \end{Bmatrix} = 0, \\ & \begin{Bmatrix} M_{21}^{x_0} \\ M_{21}^{y_0} \\ M_{21}^{z_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -l_1 R_{21}^{y_0} \\ l_1 R_{21}^{x_0} \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{10}] \begin{Bmatrix} (M_1^H)^{(x_1)} \\ (M_1^H)^{(y_1)} \\ (M_1^H)^{(z_1)} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} -y_{S1}^{(0)} G_1 \\ x_{S1}^{(0)} G_1 \\ 0 \end{Bmatrix} - m_1 \begin{Bmatrix} -z_{S1}^{(0)} \ddot{y}_{S1}^{(0)} \\ -z_{S1}^{(0)} \ddot{x}_{S1}^{(0)} \\ x_{S1}^{(0)} \ddot{y}_{S1}^{(0)} - y_{S1}^{(0)} \ddot{x}_{S1}^{(0)} \end{Bmatrix} + [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1^H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{01}^{x_0} \\ M_{01}^{y_0} \\ M_{01}^{z_0} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Проекции векторов $|\overline{R}_{01}| \{R_{01}^{x_0} R_{01}^{y_0} R_{01}^{z_0}\}$ и $|\overline{M}_{01}| \{M_{01}^{x_0} M_{01}^{y_0} M_{01}^{z_0}\}$ будут наибольшими в сравнении с реакциями в других кинематических парах, поэтому оценка динамической нагруженности манипулятора при движении его схвата вдоль заданной траектории может быть проведена на основе анализа его динамических опорных реакций первого звена со станиной. С этой целью необходимо получить функции

$$\begin{aligned} |\overline{R}_{01}| &= f(s), |\overline{M}_{01}| = f(s), \theta_{R_{01}} = f(s), \\ \psi_{R_{01}} &= f(s), \theta_{M_{01}} = f(s), \psi_{M_{01}} = f(s). \end{aligned}$$

Для получения этих функций траектория схвата разбивается минимум на четыре участка (пять точек). В этих точках, координаты которых заданы в неподвижной системе, определяются скорости и ускорения, которые задаются проекциями в этой же неподвижной системе координат. далее определяется количество обобщенных координат, с помощью которых будет обрабатываться заданная траектория схвата в пределах каждого выбранного участка. Диапазоны изменения каждой обобщенной координаты в пределах каждого выбранного участка траектории схвата также разбиваются минимум на четыре участка, тем самым определяется шаг счета, т.е. в этих пяти фиксированных значениях обобщенных координат записываются соответствующие матрицы с конкретными углами, а также определяются скорости, ускорения звеньев и их центров, а также инерционные моменты. После этого

для каждого звена манипулятора (начиная с последнего) записываются уравнения равновесия, которые решаются в соответствии с выбранным шагом счета. Для удобства анализа динамической нагруженности строятся зависимости реактивных сил и моментов, а также ориентации этих векторов (углов их наклона) в пространстве в функции длины траектории (пути) схвата.

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАНИПУЛЯТОРОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

10.1. Особенности структурно-кинематического синтеза схем манипуляторов

Проблемы структурного синтеза схем манипуляторов, как пространственных открытых кинематических цепей, во многом отличаются от аналогичных проблем для замкнутых схем пространственных механизмов и, тем более, плоских механизмов. Это связано прежде всего с многовариантностью компоновок схем, обусловленных характером присоединения структурных групп, то есть многовариантностью их соединения. Однако на первом этапе САПР манипуляторов, как средств автоматизации технологических процессов, требуется многовариантная проработка разнообразных схем и компоновок. В связи с этим встает проблема формализации оценки структурно-кинематических особенностей той или другой схемы с помощью ЭВМ. Покажем эти особенности на примере манипуляторов с тремя степенями подвижности. Как известно, три степени подвижности схвата с использованием одноподвижных кинематических пар поступательных (П) и вращательных (В) могут быть реализованы с помощью следующих вариантов их компоновок: ВВВ, ВВП, ВПВ, ПВВ, ППВ, ПВП, ППП. Здесь при записи слева направо подразумевается соединение первого звена со станиной (ориентация его в неподвижной системе координат), второго звена с первым (ориентация его в первой системе координат) и, наконец, последнего, третьего, со вторым, то есть ориентация третьего звена в системе координат, связанной со вторым. В каждом из перечисленных вариантов могут быть различные схемные компоновки. Это различие обусловлено ориентацией скоростей относительных движений, то есть векторов обобщенных скоростей последующих звеньев в системах координат, связанных с предыдущими звеньями. Так, на рис.10.1 и 10.2 показаны схемы манипуляторов с тремя вращательными парами ВВВ. В первом случае вектор угловой скорости $\vec{\alpha}_{10}$ первого звена совпадает с осью x_1 и направлен по оси x_0 неподвижной системы $x_0y_0z_0$. Вектор $\vec{\alpha}_{21}$ скорости вращения второго звена относительно первого совпадает с осью x_2 , а вектор $\vec{\alpha}_{21}$ — с осью x_2 подвижных систем координат $x_2y_2z_2$ и $x_3y_3z_3$. Для упрощения оси $y_1y_2y_3$ на рис.10.1 не показаны. Такая схема

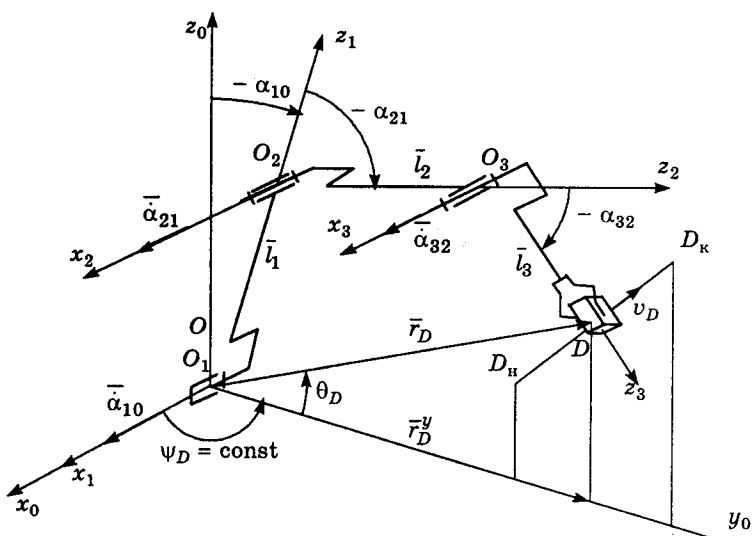


Рис.10.1. Схема манипулятора $V_{x_1} V_{x_2} V_{x_3}$ со следующей ориентацией векторов обобщенных скоростей: $\dot{\bar{\alpha}}_{10}\bar{i}_0; \dot{\bar{\alpha}}_{21}\bar{i}_2; \dot{\bar{\alpha}}_{32}\bar{i}_3$

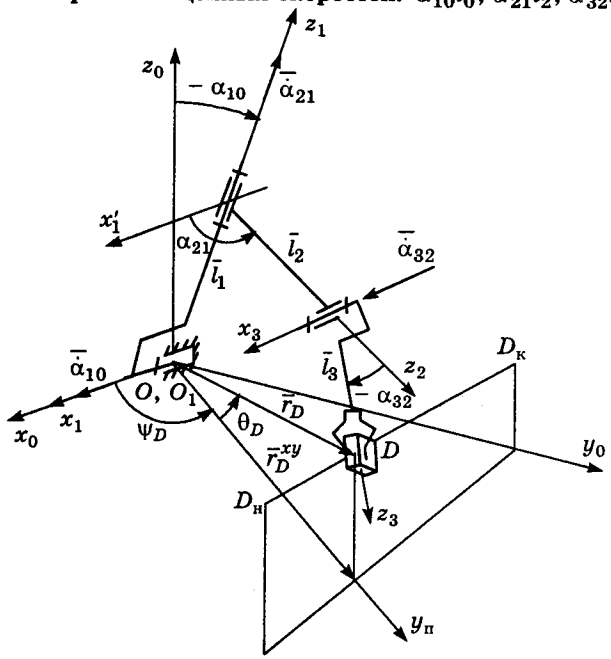


Рис.10.2. Схема манипулятора $V_{x_1} V_{z_1} V_{x_3}$ со следующей ориентацией векторов обобщенных скоростей: $\dot{\bar{\alpha}}_{10}\bar{i}_0; \dot{\bar{\alpha}}_{21}\bar{k}_1; \dot{\bar{\alpha}}_{32}\bar{i}_3$

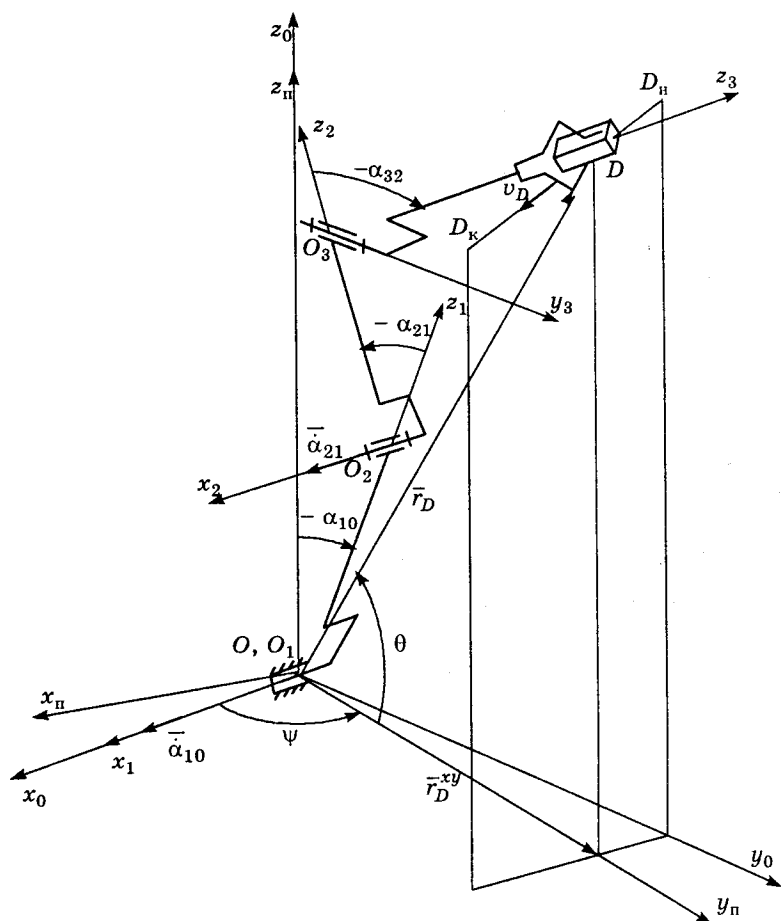


Рис.10.3. Схема манипулятора $V_{x_1} V_{x_2} V_{y_3}$ со следующей ориентацией векторов обобщенных скоростей: $\dot{\alpha}_{10}\bar{i}_0; \dot{\alpha}_{21}\bar{i}_2; \dot{\alpha}_{32}\bar{i}_3$

не позволяет обработать пространственную траекторию, так как векторы $\dot{\alpha}_{12}\bar{i}_1$, $\dot{\alpha}_{21}\bar{i}_2$ и $\dot{\alpha}_{32}\bar{i}_3$ коллинеарны. Схемы же, представленные на рис.10.2 и 10.3, позволяют получить пространственную траекторию. Таким образом, схема ВВВ имеет свои варианты, отличающиеся взаимной ориентацией векторов относительных угловых скоростей. Такая многовариантность требует определенности не только расположения осей подвижных систем координат, вокруг которых реализуется относительный поворот

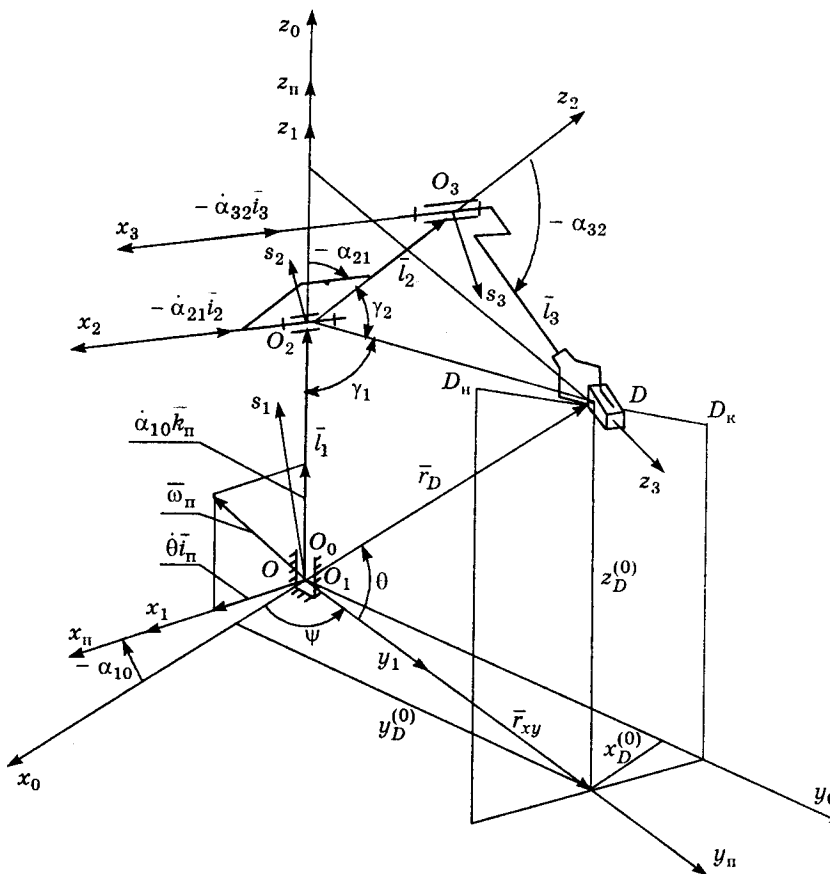


Рис.10.4. Схема манипулятора $V_{z_0} V_{x_2} V_{x_3}$ со следующей ориентацией векторов обобщенных скоростей: $\dot{\alpha}_{10}\bar{k}_{II}$; $\dot{\alpha}_{21}\bar{l}_2$; $\dot{\alpha}_{32}\bar{l}_3$

звеньев, но и указания способа ориентации векторов обобщенных скоростей. Поэтому для условного изображения каждой схемы требуется не только определенность сочетания кинематических пар, но и сочетания соответствующих индексов, указывающих на взаимную ориентацию подвижных систем координат. При этом для однозначности требуется указание о выборе правых и левых систем координат. После этого их переориентация не допустима.

Рассмотрим другой пример. На рис.10.4 представлена схема манипулятора $V_{z_1} V_{x_2} V_{x_3}$, а на рис.10.5 — схема $V_{z_1} V_{y_2} V_{x_3}$

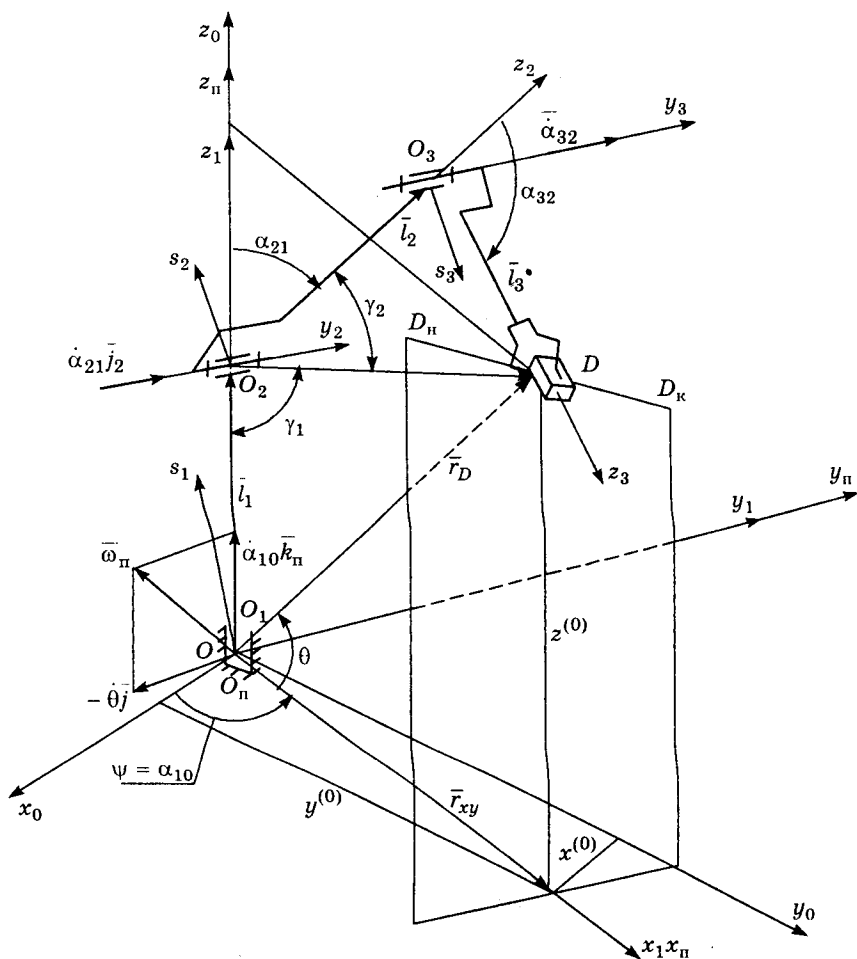


Рис.10.5. Схема манипулятора $V_{z_0} V_{y_2} V_{y_3}$ со следующей ориентацией векторов обобщенных скоростей: $\dot{\alpha}_{10}\bar{k}_0; \dot{\alpha}_{21}\bar{j}_2; \dot{\alpha}_{32}\bar{j}_3$

В отличие от рассмотренных ранее, эти схемы, как первая, так и вторая, позволяет обслуживать пространство и в принципе не отличаются друг от друга.

Рассмотренные примеры указывают на необходимость разработки критериев оценки структурно-кинематических схем манипуляторов с целью автоматизации их многократного сравнения, причем такие критерии должны отражать некоторую

рациональность сочетания звеньев и их кинематических пар с точки зрения динамической нагруженности подвижных соединений. Другими словами, выполнение отдельного структурного синтеза по примеру плоских замкнутых схем механизмов невозможно. Сравнение схем на рис.10.1 ... 10.3 указывает на принципиальную разницу их кинематических и динамических характеристик. Это означает, что одна и та же траектория и закон движения схвата вдоль этой траектории будут отработаны обобщенными координатами с различными законами их изменения во времени, то есть различными обобщенными силами. Такую ориентировочную оценку динамических свойств манипуляторов на этапе проработки их структурно-кинематических схем удобно проводить при перемещении схвата с деталью единичной массы по заданной траектории с заданным законом движения без учета сил тяжести звеньев и трения в их подвижных соединениях. Тогда сравнение может быть проведено по составляющим реактивных сил и моментов в подвижных соединениях, совпадающих с выбранной ориентацией обобщенных скоростей. Эти составляющие подразделяются на приведенные движущие силы (моменты) и собственно реактивные. Знание таких идеализированных функций обобщенных скоростей и обобщенных сил позволяет получить идеальную (номинальную) программу по силе, скорости или мощности, обеспечивающую перемещение схвата с заданными параметрами его движения. Учет сил трения в подвижных соединениях и сил веса звеньев позволяет учесть их отдельное и суммарное влияние на отклонение от номинальных управляющих программ и провести полный анализ динамической нагруженности подвижных соединений звеньев той или иной схемы манипулятора.

Для проведения таких исследований обобщенные координаты должны быть выражены как некоторые функции траектории схвата, а обобщенные скорости должны учитывать закон его движения вдоль заданной траектории.

Рассмотрим решение таких задач на простейших схемах манипуляторов.

10.2. Кинематика и динамика манипуляторов

типа $B_{z_0} B_{x_2} B_{x_3} (B_{z_0} B_{y_2} B_{y_3})$

10.2.1. Определение обобщенных координат

Как видно из рисунков 10.4 и 10.5, положение точки D (центра масс перемещаемой детали) характеризуется радиусом-вектором \vec{r}_D . Движение последнего моделируется вращением

подвижной системы координат $x_{\Pi}y_{\Pi}z_{\Pi}$ со скоростью $\bar{\omega}_{\Pi} = \psi\bar{k}_{\Pi} + \dot{\theta}\bar{i}_{\Pi}$, при этом длина вектора \bar{r}_D также изменяется. Такая связь параметров траектории, заданной в неподвижной прямоугольной системе координат $x_0y_0z_0$, с подвижной сферической системой рассмотрена подробно в гл.9.5 настоящего пособия. Полученные ранее соотношения в дальнейшем будут положены в основу определения функциональной связи обобщенных координат и скоростей с параметрами траектории и законом движения схвата.

Для схемы $B_{z_0}B_{x_2}B_{x_3}$ (см. рис.10.4) обобщенные координаты определяются из следующих выражений:

$$\alpha_{10} = \psi_D - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}} - \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.1)$$

$$\alpha_{21} = (\gamma_1 + \gamma_2) - \pi = \left[\operatorname{arccos}\left(\frac{l_1^2 + l_{O_2D}^2 - r_D^2}{2l_1l_{O_2D}}\right) + \operatorname{arccos}\left(\frac{l_2^2 + l_{O_2D}^2 - l_3^2}{2l_2l_{O_2D}}\right) \right] - \pi, \quad (10.2)$$

$$\alpha_{32} = \operatorname{arccos}\left(\frac{l_{O_2D}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right). \quad (10.3)$$

В уравнениях (10.1) — (10.3) (см. рис.10.3)

$$l_{O_2D} = \sqrt{l_1^2 + r_D^2 - 2l_1r_D \sin \theta}, \quad (10.4)$$

$$r_D = \sqrt{[x^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2 + [z_D^{(0)}]^2}, \quad (10.5)$$

$$\theta_D = \operatorname{arctg} \frac{z_D^{(0)}}{\sqrt{[x_D^{(0)}]^2 + [y_D^{(0)}]^2}}. \quad (10.6)$$

Как видно из рис.10.5, для схемы $B_{z_1}B_{y_2}B_{y_3}$ имеем

$$\alpha_{10} = \psi_D = \operatorname{arctg} \frac{y_D^{(0)}}{x_D^{(0)}}. \text{ Остальные выражения для обобщенных}$$

координат остаются справедливыми для обеих схем с учетом принятого направления отсчета углов.

Перемещение точки D (схвата) вдоль заданной траектории реализуется (моделируется) из условия сохранения замкнутости векторного контура. Так, для схем, представленных на рис.10.4 и рис.10.5, имеем

$$l_1 \bar{k}_1 + l_2 \bar{k}_2 + l_3 \bar{k}_3 = \bar{r}_D. \quad (10.7)$$

Запишем уравнение (10.7) в координатной форме (см. рис.10.3):

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (10.8)$$

Из рис.10.4 видно, что для рассматриваемого положения детали в схвате $x_D^{(3)} = y_D^{(3)} = 0$ и $z_D^{(3)} = l_3$.

В уравнении (10.8)

$$M_{20} = [M_{10}^z][M_{21}^x]; [M_{30}] = [M_{10}^z][M_{21}^x][M_{32}^x].$$

Выражения для определения частных матриц имеют следующий вид:

$$[M_{10}^z] = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{10} & -\sin \alpha_{10} & 0 \\ \sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (10.9)$$

$$[M_{21}^x] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{21} & -\sin \alpha_{21} \\ 0 & \sin \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} \end{vmatrix}, \quad (10.10)$$

$$[M_{32}^x] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{32} & -\sin \alpha_{32} \\ 0 & \sin \alpha_{32} & \cos \alpha_{32} \end{vmatrix}. \quad (10.11)$$

Запишем уравнение (10.7) в координатной форме для схемы $B_{z_1} B_{y_2} B_{y_3}$ (см. рис.10.5):

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{Bmatrix},$$

где

$$[M_{20}] = [M_{10}^z][M_{21}^y]; \quad [M_{30}] = [M_{10}^z][M_{21}^y][M_{32}^y],$$

$$[M_{21}^y] = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{21} & 0 & \sin \alpha_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_{21} & 0 & \cos \alpha_{21} \end{vmatrix},$$

$$[M_{32}^y] = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{32} & 0 & \sin \alpha_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_{32} & 0 & \cos \alpha_{32} \end{vmatrix}.$$

Значения углов α_{10} , α_{21} , α_{32} (обобщенных координат) в соответствующих матрицах определяются выражениями (10.1) — (10.6). Система уравнений (10.8) позволяет провести исследование погрешности позиционирования (погрешности по положению) схвата вдоль траектории, заданной в неподвижной системе координат. Погрешности, определяемые по данной системе уравнений, включают в себя погрешности изготовления звеньев l_1 , l_2 , l_3 , зазоры в их подвижных соединениях, погрешности ориентации детали в схвате $\{x_D y_D z_D\}$ и погрешности отработки обобщенных координат $\dot{\alpha}_{10}$, $\dot{\alpha}_{21}$, $\dot{\alpha}_{32}$.

10.2.2. Определение обобщенных скоростей и ускорений

Обобщенные скорости определяются из выражений, полученных в результате дифференцирования по времени зависимостей (10.1) — (10.6):

$$\dot{\alpha}_{10} = \dot{\psi} = \frac{\dot{y}_D x_D - \dot{x}_D y_D}{x_D^2 + y_D^2}, \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{21} = & \frac{2(l_{O_2D}\dot{i}_{O_2D} - r_D\dot{r}_D) - (i_{O_2D}/l_{O_2D})(l_1^2 + l_{O_2D}^2 - r_D^2)}{\sqrt{4l_1^2l_{O_2D}^2 - (l_1^2 + l_{O_2D}^2 - r_D^2)^2}} + \\ & + \frac{2l_{O_2D}\dot{i}_{O_2D} - (i_{O_2D}/l_{O_2D})(l_1^2 + l_{O_2D}^2 - r_D^2)}{\sqrt{4l_2^2l_{O_2D}^2 - (l_2^2 + l_{O_2D}^2 - l_3^2)^2}}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\dot{\alpha}_{32} = \frac{-2l_{O_2D}\dot{i}_{O_2D}}{\sqrt{4l_2^2l_3^2 - (l_{O_2D}^2 - l_2^2 - l_3^2)^2}}, \quad (10.14)$$

$$\dot{i}_{O_2D} = \frac{r_D\dot{r}_D - l_1(\dot{r}_D \sin \theta + r_D\dot{\theta} \cos \theta)}{\sqrt{l_1^2 + r_D^2 - 2l_1r_D \sin \theta}}, \quad (10.15)$$

$$\dot{r}_D = \frac{x_D\dot{x}_D + y_D\dot{y}_D + z_D\dot{z}_D}{\sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}}, \quad (10.16)$$

$$\dot{\theta}_D = \frac{\dot{z}_D(x_D^2 + y_D^2) - z_D(x_D\dot{x}_D + y_D\dot{y}_D)}{(x_D^2 + y_D^2 + z_D^2)\sqrt{x_D^2 + y_D^2}}. \quad (10.17)$$

Связь между производными по времени и производными по дуге (пути, пройденном точкой D) определится из преобразований, например: $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = v_D\psi'$. Тогда выражения (10.12) — (10.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{10} &= v_D\alpha'_{10}; \quad \dot{\alpha}_{21} = v_D\alpha'_{21}; \quad \dot{\alpha}_{32} = v_D\alpha'_{32}, \\ l_{O_2D} &= v_Dl'_{O_2D}; \quad \dot{r}_D = v_Dr'_D; \quad \dot{\theta} = v_D\theta'_D. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Выражения (10.18) указывают на то, что, например, обобщенная скорость $\dot{\alpha}_{10}$, как некоторая функция от пути s , пройденного точкой D , выражается произведением двух функций $v_D = v_D(s)$ и $\alpha'_{10} = \frac{d\alpha_{10}}{ds} = \alpha'_{10}(s)$. Поэтому обобщенные ускорения

после дифференцирования выражений (10.18) определяются из выражений

$$\ddot{\alpha}_{10} = a_D \alpha'_{10} + v_D \frac{d\alpha'_{10}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = a_D \alpha'_{10} + v_D^2 \alpha''_{10}, \quad (10.19)$$

$$\ddot{\alpha}_{21} = a_D \alpha'_{21} + v_D \frac{d\alpha'_{21}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = a_D \alpha'_{21} + v_D^2 \alpha''_{21}, \quad (10.20)$$

$$\ddot{\alpha}_{32} = a_D \alpha'_{32} + v_D \frac{d\alpha'_{32}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = a_D \alpha'_{32} + v_D^2 \alpha''_{32}. \quad (10.21)$$

Очевидно, что $a_D \alpha'_{10} = \frac{dv_D}{dt} \cdot \frac{d\alpha_{10}}{ds} = v'_D \dot{\alpha}_{10}$.

Аналогичные выражения можно составить и для слагаемых $a_D \alpha'_{21}$ и $a_D \alpha'_{32}$, входящих в формулы (10.20) и (10.21). Это дает возможность представить выражения (1.19) — (10.21) в следующем виде:

$$\ddot{\alpha}_{10} = v'_D \dot{\alpha}_{10} + v_D^2 \alpha''_{10}, \quad (10.22)$$

$$\ddot{\alpha}_{21} = v'_D \dot{\alpha}_{21} + v_D^2 \alpha''_{21}, \quad (10.23)$$

$$\ddot{\alpha}_{32} = v'_D \dot{\alpha}_{32} + v_D^2 \alpha''_{32}, \quad (10.24)$$

Полученные уравнения для определения обобщенных ускорений позволяют связать функционально динамические нагрузки в подвижных соединениях звеньев с законом движения схвата. Они позволяют также проанализировать погрешности по ускорению при обработке одного и того же закона движения схвата различными схемами манипуляторов.

10.2.3. Определение скоростей, ускорений звеньев и их центров масс

Угловые скорости и ускорения звеньев манипулятора, представленного на рис.10.4, определяются векторными уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \dot{\alpha}_{21} \bar{i}_2 + \dot{\alpha}_{32} \bar{i}_3, \\ \bar{\omega}_2 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \dot{\alpha}_{21} \bar{i}_2, \\ \bar{\omega}_1 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1; \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_3 &= \ddot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \ddot{\alpha}_{21} \bar{i}_2 + \ddot{\alpha}_{32} \bar{i}_3, \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \ddot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \ddot{\alpha}_{21} \bar{i}_2, \\ \bar{\varepsilon}_1 &= \ddot{\alpha}_{10} \bar{k}_1. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Например, первое уравнение выражений (10.25) в координатной форме имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \omega_3^{(x_0)} \\ \omega_3^{(y_0)} \\ \omega_3^{(z_0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_{10} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{32} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.27)$$

Первое уравнение выражений (10.26) в координатной форме имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3^{(x_0)} \\ \varepsilon_3^{(y_0)} \\ \varepsilon_3^{(z_0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha}_{10} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{32} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.28)$$

В последних уравнениях матрица преобразования координат векторов угловых скоростей и ускорений определяется соотношениями

$$[M_{20}] = [M_{10}^z] [M_{21}^x]; \quad [M_{30}] = [M_{10}^z] [M_{21}^x] [M_{32}^x].$$

Выражения для определения частных матриц приведены ранее, см. (10.9) — (10.11).

Для схемы манипулятора, приведенного на рис.10.5, векторы угловых скоростей и ускорений определяются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \dot{\alpha}_{21} \bar{j}_2 + \dot{\alpha}_{32} \bar{j}_3, \\ \bar{\omega}_2 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \dot{\alpha}_{21} \bar{j}_2, \end{aligned} \quad (10.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \dot{\alpha}_{10} \bar{k}_1; \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \ddot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \ddot{\alpha}_{21} \bar{j}_2 + \ddot{\alpha}_{32} \bar{k}_3, \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \ddot{\alpha}_{10} \bar{k}_1 + \ddot{\alpha}_{21} \bar{j}_2, \end{aligned} \quad (10.30)$$

Запишем первые уравнения выражений (10.29) и (10.30) в координатной форме:

$$\begin{Bmatrix} \omega_3^{(x_0)} \\ \omega_3^{(y_0)} \\ \omega_3^{(z_0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_{10} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{32} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (10.31)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3^{(x_0)} \\ \varepsilon_3^{(y_0)} \\ \varepsilon_3^{(z_0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha}_{10} \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{32} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.32)$$

Выражения для определения частных матриц применительно к уравнениям (10.31) и (10.32) имеют другой вид, т.к.

$$[M_{20}] = [M_{10}^z][M_{21}^y] \text{ и } [M_{30}] = [M_{10}^z][M_{21}^y][M_{32}^y] \text{ (см. рис.10.5).}$$

Сравнение выражений (10.25) — (10.28) и (10.29) — (10.32) указывает на то, что выбор подвижных систем координат определен и их ориентация, как по отношению друг к другу, так и по отношению к неподвижной системе, не может быть произвольной и, выбранная однажды, не может быть изменена,

Векторное уравнение, определяющее скорость точки D , для рассматриваемых схем манипуляторов имеет вид

$$\bar{v}_D = \bar{v}_{DO_3} + \bar{v}_{O_3O_2} + \bar{v}_{O_2O_1}.$$

Как видно из рис.10.4 и 10.5, $\bar{v}_{O_2O_1} = 0$.

$$\bar{v}_{DO_3} = \bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{O_3D} = \begin{bmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ \omega_3^{(x_0)} & \omega_3^{(y_0)} & \omega_3^{(z_0)} \\ x_D^{(0)} - x_{O_3}^{(0)} & y_D^{(0)} - y_{O_3}^{(0)} & z_D^{(0)} - z_{O_3}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{v}_{O_3O_2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{O_2O_3} = \begin{bmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ \omega_2^{(x_0)} & \omega_2^{(y_0)} & \omega_2^{(z_0)} \\ x_{O_3}^{(0)} - x_{O_2}^{(0)} & y_{O_3}^{(0)} - y_{O_2}^{(0)} & z_{O_3}^{(0)} - z_{O_2}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Скорости \bar{v}_{S_3} , \bar{v}_{S_2} , \bar{v}_{S_1} точек S_3 , S_2 , S_1 , совпадающих с центрами масс звеньев рассматриваемых манипуляторов, в векторной форме определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{v}_{S_3} &= \bar{v}_{S_3O_3} + \bar{v}_{O_3O_2} + \bar{v}_{O_2O_1}, \\ \bar{v}_{S_2} &= \bar{v}_{S_2O_2} + \bar{v}_{O_2O_1}, \\ \bar{v}_{S_1} &= \bar{v}_{S_1O_1}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{v}_{S_3O_3} = \bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{O_3S_3}, \quad \bar{v}_{S_2O_2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{O_2S_2}, \quad \bar{v}_{S_1O_1} = \bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{O_1S_1}.$$

Векторное уравнение, определяющее ускорение точки D для рассматриваемых схем манипуляторов, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_D &= \bar{a}_{DO_3} + \bar{a}_{O_3O_2} + \bar{a}_{O_2O_1} = (\bar{\varepsilon}_3 \times \bar{l}_{O_3D}) + (\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{DO_3}) + \\ &+ (\bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{O_2O_3}) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{O_3O_2}). \end{aligned}$$

Ускорения \bar{a}_{S_3} , \bar{a}_{S_2} , \bar{a}_{S_1} точек S_3 , S_2 , S_1 в векторной форме запишутся в следующем виде:

$$\bar{a}_{S_3} = \bar{a}_{S_3O_3} + \bar{a}_{O_3O_2} + \bar{a}_{O_2O_1},$$

$$\bar{a}_{S_2} = \bar{a}_{S_2 O_2} + \bar{a}_{O_2 O_1},$$

$$\bar{a}_{S_1} = \bar{a}_{S_1 O_1},$$

где

$$\bar{a}_{S_3 O_3} = \left(\bar{\varepsilon}_3 \times \bar{l}_{O_3 S_3} \right) + \left(\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{S_3 O_3} \right),$$

$$\bar{a}_{S_2 O_2} = \left(\bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{O_2 S_2} \right) + \left(\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{S_2 O_2} \right),$$

$$\bar{a}_{S_1 O_1} = \left(\bar{\varepsilon}_1 \times \bar{l}_{O_1 S_1} \right) + \left(\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{S_1 O_1} \right).$$

При определении скоростей и ускорений в проекциях на соответствующие оси следует проводить преобразования координат радиусов-векторов центров масс звеньев, заданных координатами в соответствующих подвижных системах координат.

Так, например, для определения координат центра масс S_3 третьего звена в неподвижной системе координат имеем векторное равенство

$$\bar{l}_{O S_3} = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 O_3} + \bar{l}_{O_3 S_3}. \quad (10.33)$$

Представляя последнее векторное равенство в координатной форме, следует помнить, что складывать можно координаты векторов, заданных в одной и той же системе координат. Пусть заданы следующие координаты центра масс S_3 в третьей системе координат:

координат: $l_{O_3 S_3}^{(3)} \left\{ 0, 0, \frac{1}{2} l_3 \right\}$. Тогда после преобразования

$[M_{32}] l_{O_3 S_3}$ (перевода этих координат из третьей системы во вторую)

можно складывать их с координатами $l_{O_2 O_3}^{(2)} \left\{ 0, 0, l_2 \right\}$ отрезка $l_{O_2 O_3}^{(2)}$ во второй системе координат и т.д. С учетом этого уравнение (10.33) в координатной форме, например, для схемы $B_{z_1} B_{y_2} B_{y_3}$ (см. рис.10.5) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x_{S_3}^{(0)} \\ y_{S_3}^{(0)} \\ z_{S_3}^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \left[[M_{21}^y] \left[[M_{32}^y] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} \right].$$

Для второго звена имеем векторное равенство

$$\bar{l}_{O S_2} = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 S_2}.$$

Последнее уравнение в координатной форме для той же схемы при $l_{O_2S_2}^{(2)} \left\{ 0, 0, \frac{1}{2} l_2 \right\}$ имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x_{S_2}^{(0)} \\ y_{S_2}^{(0)} \\ z_{S_2}^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \left\{ [M_{21}^y] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} \right\}.$$

10.2.4. Определение реактивных сил и движущих моментов

На рис.10.6 представлена схема сил и моментов, примененных к последнему звену манипулятора со схватом. В точке O_3 , совпадающей с началом координат $x_3y_3z_3$, приложены реактивные силы

$$R_{23} \left\{ R_{23}^{x_3}, R_{23}^{y_3}, R_{23}^{z_3} \right\}$$

и момент

$$M_{23} \left\{ M_{23}^{x_3}, M_{23}^{y_3}, M_{23}^{z_3} \right\},$$

отражающие собой действие отброшенной связи (звено 2) (см. рис.10.4). Кроме того, на звено 3 действуют также силы инерции $\bar{F}_3^H = -m_3 \bar{a}_{S_3}$ и тяжести $\bar{G}_3 = m_3 \bar{g}$, приложенные в его центре масс, а также силы $\bar{F}_D^H = -m_D \bar{a}_D$ и $\bar{G}_D = m_D \bar{g}$ и момент $(\bar{M}_3^H)^{(3)}$ от сил инерции.

Уравнения равновесия звена в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{F}_D^H + \bar{G}_D + \bar{F}_3^H + \bar{G}_3 + \bar{R}_{23} &= 0, \\ [l_3 \times (\bar{F}_D^H + \bar{G}_D)] + [l_{O_3S_3} \times (\bar{F}_3^H + \bar{G}_3)] + (\bar{M}_3^H)^{(3)} + \bar{M}_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Особенности решения уравнений (10.34) связаны со следующими обстоятельствами. Векторы сил, действующих на звено 3,

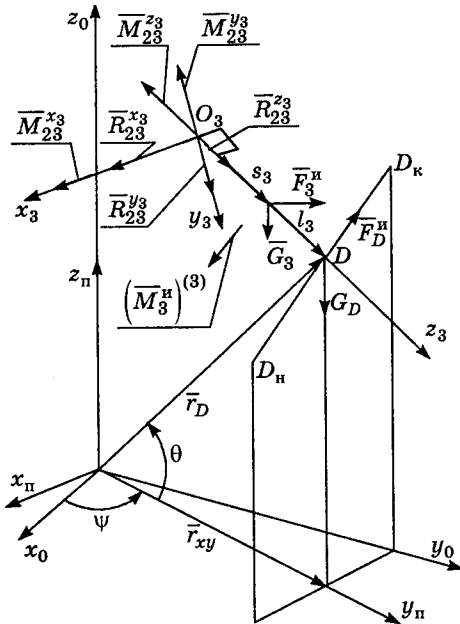


Рис.10.6. Схема сил и моментов, примененных к последнему звену манипулятора

удобно рассматривать заданными в неподвижной системе координат. Инерционный же момент $(M_3^и)^{(3)}$ определяется в системе координат, жестко связанной со звеном 3:

$$-\left(\overline{M}_3^и\right) = [J_{03}] \overline{\varepsilon}_3^{(3)} + \left(\overline{\omega}_3^{(3)} \times [J_{03}] \overline{\omega}_3^{(3)}\right).$$

Это объясняется тем, что тензор инерции имеет постоянное значение осевых и центробежных моментов инерции только относительно осей системы координат, жестко связанных со звеном. Поэтому векторы угловой скорости $\overline{\omega}_3^{(3)}$ и ускорения $\overline{\varepsilon}_3^{(3)}$ должны быть заданы координатами в третьей системе координат.

Конечной целью динамического исследования является определение составляющих реактивных сил $R_{23}^{(x_3)} = f(s_D)$, $R_{23}^{(y_3)} = f(s_D)$, $R_{23}^{(z_3)} = f(s_D)$, как некоторых функций от пути s_D , пройденного схватом, а также моментов $M_{23}^{(x_3)} = f(s_D)$, $M_{23}^{(y_3)} = f(s_D)$, $M_{23}^{(z_3)} = f(s_D)$. При этом, как видно из рис.10.4, $M_{23}^{(x_3)} = M^{(3)}$. Это означает, что реактивная составляющая момента $M_{23}^{(x_3)} = M_{дв}^{(3)} = f^{дв}(s_D)$ представляет собой программу управления звеном 3 "по силе", обеспечивающую перемещение схвата вдоль заданной траектории с заданным законом движения. Это обстоятельство связано с тем, что если определены составляющие реактивных сил и моментов от второго звена из третьей в неподвижной системе координат, то для практического использования требуется их перевод в третью систему. Это связано также и с тем, что прочностные расчеты и конструктивное оформление подшипникового узла звеньев 2 — 3 требует знания реактивных сил и моментов в третьей системе координат.

Выражения (10.34) дают следующие уравнения для определения реактивных составляющих сил и моментов в неподвижной системе координат:

$$\begin{Bmatrix} R_{23}^{(x_0)} \\ R_{23}^{(y_0)} \\ R_{23}^{(z_0)} \end{Bmatrix} = m_D \begin{Bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{y}_D \\ \ddot{z}_D - g \end{Bmatrix} + m_3 \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{S_3}^{(0)} \\ \ddot{y}_{S_3}^{(0)} \\ \ddot{z}_{S_3}^{(0)} - g \end{Bmatrix}. \quad (10.35)$$

Уравнение (10.35) позволяет выразить реакцию второго звена на третья $R_{23} \left\{ R_{23}^{(x_0)}, R_{23}^{(y_0)}, R_{23}^{(z_0)} \right\}$, заданную проекциями на оси неподвижной системы координат. Для получения реакции $R_{23} \left\{ R_{23}^{(x_3)}, R_{23}^{(y_3)}, R_{23}^{(z_3)} \right\}$, заданной координатами в третьей системе координат, требуется соответствующее преобразование, которое в матричной форме имеет вид

$$\begin{Bmatrix} R_{23}^{(x_3)} \\ R_{23}^{(y_3)} \\ R_{23}^{(z_3)} \end{Bmatrix} = [M_{03}] \begin{Bmatrix} R_{23}^{(x_0)} \\ R_{23}^{(y_0)} \\ R_{23}^{(z_0)} \end{Bmatrix}.$$

Здесь

$$[M_{03}] = [M_{23}][M_{12}][M_{01}] = [M_{32}]'[M_{21}]'[M_{10}]'.$$

Второе уравнение (10.34) дает следующие выражения для определения проекций вектора \bar{M}_{23} на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{23}^{(x_0)} \\ M_{23}^{(y_0)} \\ M_{23}^{(z_0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ (x_D - x_{03}) & (y_D - y_{03}) & (z_D - z_{03}) \\ \ddot{x}_D & \ddot{y}_D & \ddot{z}_D - g \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{Bmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ (x_{S_3} - x_{03}) & (y_{S_3} - y_{03}) & (z_{S_3} - z_{03}) \\ \ddot{x}_{S_3} & \ddot{y}_{S_3} & \ddot{z}_{S_3} - g \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} J_{03} \\ \epsilon_3^{y_3} \bar{j}_3 \\ \epsilon_3^{z_3} \bar{k}_3 \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{Bmatrix} \bar{i}_3 & \bar{j}_3 & \bar{k}_3 \\ \omega_3^{(x_3)} & \omega_3^{(y_3)} & \omega_3^{(z_3)} \\ L_{03}^{(x_3)} & L_{03}^{(y_3)} & L_{03}^{(z_3)} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

В уравнении (10.36) проекции вектора \bar{L}_{03} кинетического момента на оси третьей системы координат определяются из уравнений

$$\begin{Bmatrix} L_{03}^{x_3} \\ L_{03}^{y_3} \\ L_{03}^{z_3} \end{Bmatrix} = [J_{03}] \begin{Bmatrix} \omega_3^{(x_3)} \\ \omega_3^{(y_3)} \\ \omega_3^{(z_3)} \end{Bmatrix}.$$

Для получения проекций $M_{23}^{(x_3)} = M_{дв}^3$, $M_{23}^{(y_3)}$ и $M_{23}^{(z_3)}$ вектора \overline{M}_{23} на оси системы координат $x_3 y_3 z_3$ требуется аналогичное преобразование:

$$\begin{Bmatrix} M_{дв}^{(3)} \\ M_{дв}^{(y_3)} \\ M_{дв}^{(z_3)} \end{Bmatrix} = [M_{03}] \begin{Bmatrix} M_{23}^{(x_0)} \\ M_{23}^{(y_0)} \\ M_{23}^{(z_0)} \end{Bmatrix}.$$

Для определения динамической нагруженности подвижных соединений звеньев (подшипниковых узлов) требуется знать изменение положения векторов $\overline{R}_{23}^{(x_3)}$ и $\overline{M}_{23}^{(3)}$ в системе координат, жестко связанной со звеном 3. Как видно из рис.10.7, характер нагрузки подшипникового узла во многом определяется соотношением проекций составляющих в осевом направлении (в направлении оси x_3) и в радиальном (в плоскости $y_3 O_3 z_3$). Применительно к рис.10.7 векторы $\overline{R}_{23}^{(x_3)}$ и $\overline{M}_{23}^{(3)}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \overline{R}_{23} &= R_{23}^{(x_3)} \overline{i}_3 + R_{23}^{(y_3)} \overline{j}_3 + R_{23}^{(z_3)} \overline{k}_3, \\ \overline{M}_{23}^{(3)} &= M_{дв}^{(x_3)} \overline{i}_3 + M_{дв}^{(y_3)} \overline{j}_3 + M_{дв}^{(z_3)} \overline{k}_3. \end{aligned}$$

Вектор $\overline{R}_{23}^{y_3 z_3} = R_{23}^{(y_3)} \overline{j}_3 + R_{23}^{(z_3)} \overline{k}_3$ характеризует радиальную нагруженность подшипника. Величина его определяется выражением

$$R_{23}^{(y_3 z_3)} = R_{23}^{рад} = \sqrt{\left(R_{23}^{y_3}\right)^2 + \left(R_{23}^{z_3}\right)^2}.$$

Осевую нагруженность подшипникового узла создает вектор $\overline{R}_{23}^{x_3} \overline{i}_3 = \overline{R}_{23}^{ос}$. Если подшипники установлены на расстоянии $l_{AB}/2$ от начала координат O_3 , то в точках A и B (см. рис.10.7)

возникают радиальные реакции $\left(R_{yz}^R\right)_A = R_A^R = \frac{1}{2} R_{23}^{y_3 z_3} = R_B^R$.

Кроме того, вектор момента сил $\overline{M}_{23}^{y_3 z_3} = M_{дв}^{(y_3)} \overline{j}_3 + M_{дв}^{(z_3)} \overline{k}_3$ также создает радиальные нагрузки в подшипниках A и B . Величина его определяется выражением

$$M_{23}^{(y_3 z_3)} = \sqrt{\left(M_{дв}^{y_3}\right)^2 + \left(M_{дв}^{z_3}\right)^2}.$$

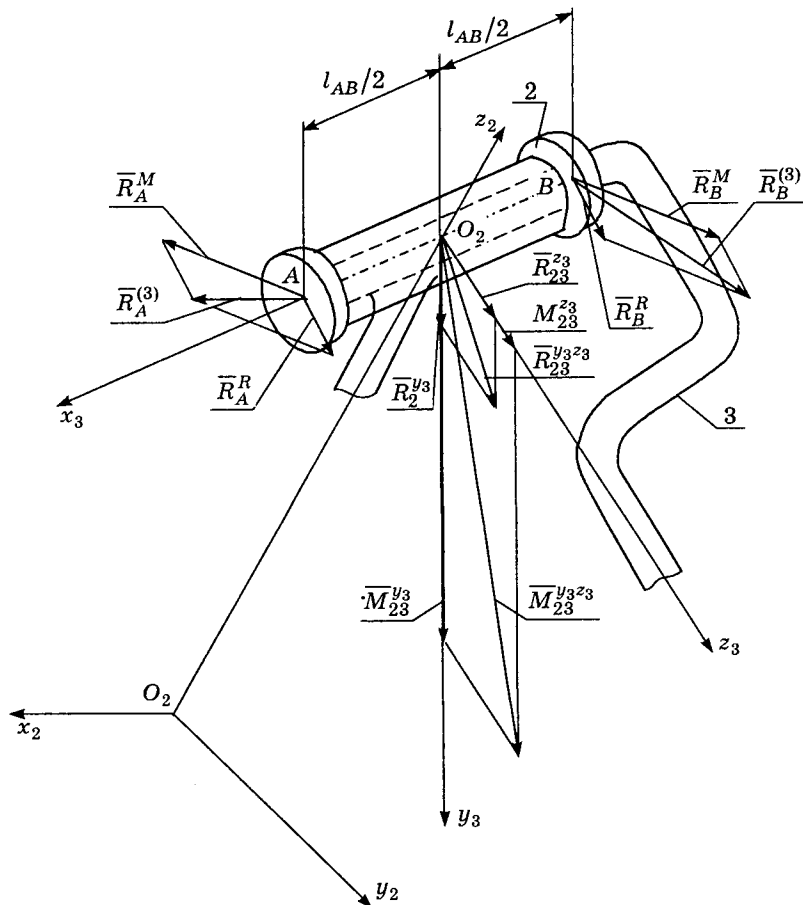


Рис.10.7. К определению динамической нагруженности подшипникового узла манипулятора

Реакции в опорах A и B от моментных нагрузок равны по модулю и направлены в противоположные стороны, причем

$$\left(R_{yz}^M \right)_A = R_A^M = \frac{M_{23}^{y_3 z_3}}{l_{AB}} = R_B^M.$$

Поэтому в опорах A и B действуют результирующие реактивные силы (см.рис.10.7), равные

$$\bar{R}_A = \left(\bar{R}_{y_3 z_3}^R \right)_A + \left(\bar{R}_{y_3 z_3}^M \right)_A,$$

$$\bar{R}_B = \left(\bar{R}_{y_3 z_3}^R \right)_B + \left(\bar{R}_{y_3 z_3}^M \right)_B.$$

После определения реактивных сил, действующих на последнее, третье, звено манипулятора, рассматриваются уравнения, аналогичные (10.34), с учетом того, что $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ и $\bar{M}_{23} = -\bar{M}_{32}$.

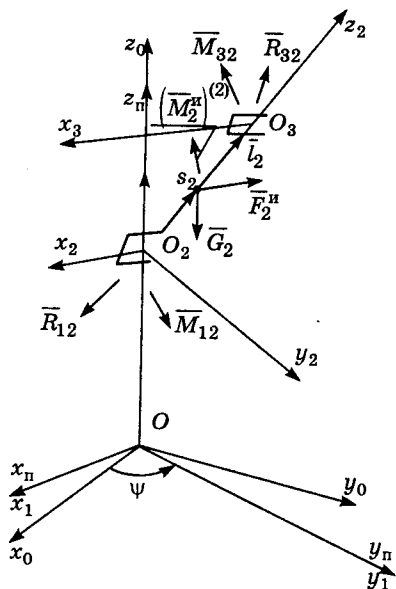


Рис.10.8. Схема сил и моментов, приложенных ко второму звену манипулятора $B_{z_1} B_{x_2} B_{x_3}$

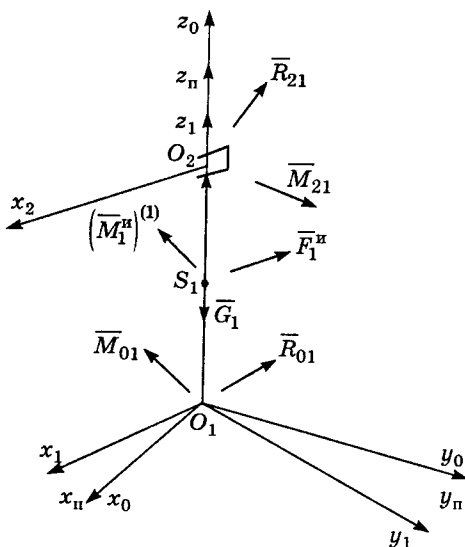


Рис.10.9. Схема сил и моментов, приложенных к первому звену манипулятора $B_{z_1} B_{x_2} B_{x_3}$

Имеется в виду, что например, статор приводного двигателя третьего звена установлен на втором. Для звена 2 (см.рис.10.8) уравнения равновесия имеют вид

$$\bar{R}_{32} + \bar{F}_2^n + \bar{G}_2 + \bar{R}_{12} = 0,$$

$$(\bar{l}_2 \times \bar{R}_{32}) + \bar{M}_{32} + \left[\bar{l}_{O_2 S_2} \times (\bar{F}_2^n + \bar{G}_2) \right] + (\bar{M}_2^n)^2 + \bar{M}_{12} = 0. \quad (10.37)$$

После решения уравнений (10.37), учитывая, что $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$ и $\bar{M}_{12} = -\bar{M}_{21}$, переходим к решению уравнений равновесия первого звена (см. рис.10.9):

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_1^n + \bar{G}_1 + \bar{R}_{01} = 0,$$

$$(\bar{l}_1 \times \bar{R}_{21}) + \bar{M}_{21} + \left[\bar{l}_{O_1 S_1} \times (\bar{F}_1^n + \bar{G}_1) \right] + \bar{M}_1^n + \bar{M}_{01} = 0. \quad (10.38)$$

При решении задачи об отыскании управляющих (движущих) моментов $M_{23}^{(x_3)} = M_{д}^{(3)}$, $M_{12}^{(x_2)} = M_{д}^{(2)}$ и $M_{01}^{(x_1)} = M_{д}^{(1)}$ (см. рис.10.4), рассматривая последнее звено, следует учесть силы трения в опорах A и B (см. рис.10.7). Необходимо обратить внимание на то, что осевое усилие $R_{32}^{(x_3)}$ воспринимается упорным подшипником, а $R_{32}^{y_3 z_3}$ — радиальным. Момент, затрачиваемый на преодоление сил трения в опорах, определяется из соотношения

$$\left(M_{23}^{x_1}\right)_{\text{тр}} = f'_{x_3} R_{23}^{(x_3)} + R_A^{(3)} f'_A r_A + R_B^{(3)} f'_B r_B, \quad (10.39)$$

где f'_{x_3} — приведенный коэффициент трения вращения упорного подшипника, воспринимающего осевое усилие $R_{23}^{(x_3)}$;

f'_A, f'_B — приведенные коэффициенты трения скольжения в опорах A и B ;

r_A, r_B — радиусы соприкасающихся опорных поверхностей звеньев 2 и 3. Если используются опоры качения, то для определения дополнительного момента сил движущих на преодоление сопротивления качению используются соответствующие приведенные коэффициенты трения, рассмотренные ранее.

Таким образом, при определении момента сил движущих, приложенных к последнему звену, необходимо учитывать конструкцию подшипникового узла и дальнейший расчет движущих моментов остальных звеньев вести из соображений, что движущий момент последнего звена преодолевает момент от сил трения, то есть

$$\left(M_{дв}^{(3)}\right) = M_{23}^{(x_3)} + \left(M_{23}^{(x_3)}\right)_{\text{тр}}. \quad (10.40)$$

Поэтому для рассмотрения в равновесии второго звена следует прикладывать к нему момент $M_{32}^{x_3} = -\left(M_{дв}^{(3)}\right)_{\text{тр}}$ с учетом трения, а при рассмотрении в равновесии первого звена принимается, что $M_{21}^{x_3} = -\left(M_{дв}^{(2)}\right)_{\text{тр}}$ также с учетом трения, где $\left(M_{дв}^{(2)}\right)_{\text{тр}}$ определяется из соотношений, аналогичных (10.40):

$$\left(M_{дв}^{(2)}\right)_{\text{тр}} = M_{12}^{(x_3)} + \left(M_{12}^{(x_3)}\right)_{\text{тр}}, \quad (10.41)$$

где $\left(M_{12}^{x_2}\right)_{\text{тр}} = f'_{x_2} R_{23}^{x_2} + R_A^{(2)} f'_A r_A + R_B^{(2)} f'_B r_B$. Тогда для первого звена (см. рис.10.9)

$$\left(M_{\text{дв}}^{(1)}\right)_{\text{тр}} = M_{01}^{z_1} + \left(M_{01}^{z_1}\right)_{\text{тр}}, \quad (10.42)$$

где $\left(M_{01}^{z_1}\right)_{\text{тр}} = f'_{x_1} R_{01}^{(z_1)} + R_A^{(1)} f'_A r_A + R_B^{(1)} f'_B r_B$.

10.3. Кинематика и динамика манипуляторов ВВП

Рассмотрим особенности определения обобщенных координат, скоростей, ускорений, а также реакций в кинематических парах манипуляторов на примере некоторых модификаций схем $B_{z_1} B_{x_2} \Pi_{z_3}$, $B_{z_1} B_{y_2} \Pi_{z_3}$. Так, для схемы, представленной на рис.10.10, имеем следующие выражения для определения обобщенных координат:

$$\alpha_{10} = \psi_0 - \frac{\pi}{2}, \quad (10.43)$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{31} = \gamma - \pi, \quad (10.44)$$

$$l_{O_2 D} = s_{32} = \sqrt{l_1^2 + r_D^2 - 2l_1 r_D \sin \theta_D}, \quad (10.45)$$

где $\gamma = \arccos \left(\frac{l_1^2 + l_{O_2 D}^2 - r_D^2}{2l_1 l_{O_2 D}} \right)$.

Значения величин α_{10} , $l_{O_2 D}$, r_D , θ_D определяются, как и ранее, по формулам (10.1), (10.4), (10.5), (10.6). Из сравнения соответствующих формул и схем манипуляторов на рис.10.4, 10.5, 10.10 видно, что некоторые формулы идентичны. Появление такой общности аналитического представления обобщенных координат может быть положено в основу разработки некоторой унифицированной методики САПР манипуляторов и численного исследования их динамической нагруженности с помощью ЭВМ. Обобщенные скорости определяются, как и ранее, путем дифференцирования по времени выражений (10.38) — (10.45). Скорость же $\dot{\alpha}_{10}$ определяется выражением (10.12), а скорость \dot{s}_{32} — выражением (10.15). Дифференцирование выражения (10.44) дает

$$\dot{\alpha}_{21} = \dot{\alpha}_{31} = \frac{2 \left(l_{O_2 D} \dot{l}_{O_2 D} - r_D \dot{r}_D - \frac{l_{O_2 D}}{l_{O_2 D}} \left(l_1^2 + l_{O_2 D}^2 - r_D^2 \right) \right)}{\sqrt{4l_1^2 l_{O_2 D} - \left(l_1^2 + l_{O_2 D}^2 - r_D^2 \right)^2}}. \quad (10.46)$$

Величины r_D и θ_D определяются по формулам (10.10) и (10.11).

$$s_{32} = l_{O_2D} - l_{O_2D}^H = \sqrt{y_D^2 + z_D^2} - l_{O_2D}^H, \quad (10.48)$$

где $l_{O_2D}^H$ — начальное значение длины звена 3.

Обобщенные скорости манипулятора, представленного на рис.10.11, определяются путем дифференцирования выражений (10.47), (10.48):

$$\dot{\alpha}_{21} = \frac{\dot{y}_D z_D - \dot{z}_D y_D}{\sqrt{y_D^2 + z_D^2}},$$

$$\dot{s}_{32} = \dot{l}_{O_2D} = \frac{\dot{y}_D y_D + \dot{z}_D z_D}{\sqrt{y_D^2 + z_D^2}}.$$

Рассмотрим другую модификацию схемы ВВП манипулятора — $B_{z_1} B_{x_2} B_{y_3}$ (рис.10.12). Здесь, как и ранее, $\alpha_{10} = \frac{\pi}{2} - \psi_0$.

Для этой схемы угол $\alpha_{23} = \text{const}$, поэтому из векторного равенства $\bar{l}_2 + \bar{l}_{O_3D} = \bar{l}_{2D}$ получим $l_{O_2D}^2 = l_2^2 + l_{O_3D}^2 - 2l_2 l_{O_3D} \cos \alpha_{23}$.

Последнее выражение дает следующее квадратное уравнение:

$$l_{O_3D}^2 - 2l_2 l_{O_3D} \cos \alpha_{23} - (l_{O_2D}^2 - l_2^2) = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$l_{O_3D} = l_{O_3D}^H + s_{32} = l_2 \cos \alpha_{23} + \sqrt{(l_2 \cos \alpha_{23})^2 + (l_{O_2D}^2 - l_2^2)}.$$

Из последнего уравнения получим следующее выражение для определения обобщенной координаты s_{32} :

$$s_{32} = \sqrt{(l_2 \cos \alpha_{23})^2 + (l_{O_2D}^2 - l_2^2)} - l_{O_3D}^H. \quad (10.49)$$

Здесь начальное значение $l_{O_3D}^H$ определяется значением

$l_{O_2D}^H$, соответствующим начальным координатам точки $D_H \{x_D^H, y_D^H, z_D^H\}$.

Как видно из рис.10.12, обобщенная координата α_{21} определится из соотношения

$$\alpha_{21} = \pi - (\gamma_1 + \gamma_2),$$

где γ_1 определяется так же, как и для схемы манипулятора ВВВ (рис.10.4). Из рис.10.12 следует, что

$$\gamma_2 = \arccos \left(\frac{l_{O_2D}^2 + l_2^2 - l_{O_3D}^2}{2l_{O_2D} l_2} \right).$$

Здесь, как и ранее,

$$\dot{\alpha}_{10} = \alpha'_{10}v_D, \dot{\alpha}_{21} = \alpha'_{21}v_D, \dot{s}_{32} = s'_{32}v_D.$$

Обобщенные ускорения $\ddot{\alpha}_{10}$, $\ddot{\alpha}_{21}$ и \ddot{s}_{32} определяются так же, как и ранее.

Рассмотрим для примера схему манипулятора $B_{z_1}B_{x_2}P_{y_3}$, представленную на рис.10.13. Для выбранных систем координат

$$\vec{r}_D = l_1\vec{k}_1 + s_{32}\vec{j}_2 + l_3\vec{j}_3. \quad (10.50)$$

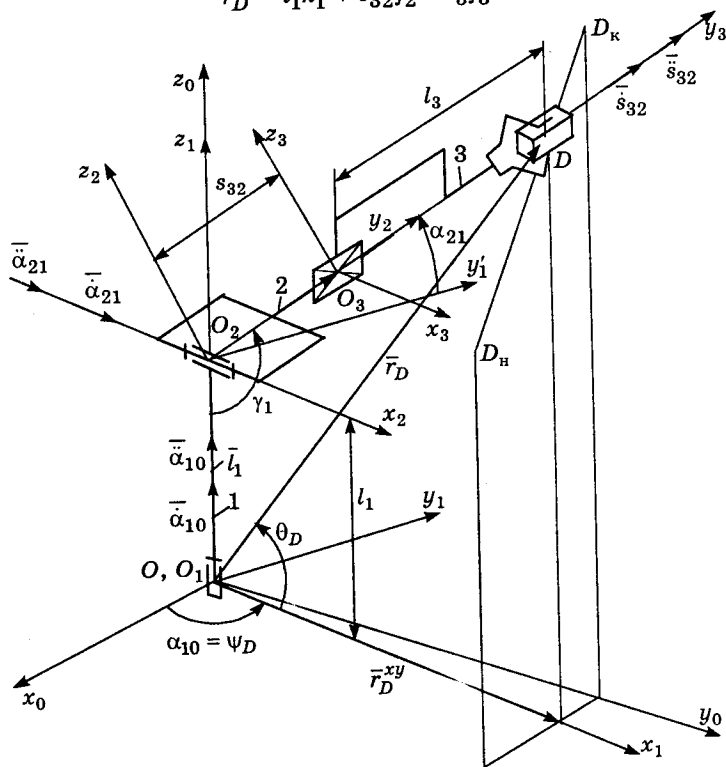


Рис.10.13. Схема манипулятора $B_{z_1}B_{x_2}B_{y_3}$

В координатной форме это векторное уравнение примет вид

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}^z] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} + [M_{20}] \begin{Bmatrix} 0 \\ s_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Покажем возможность несколько другого представления записи уравнения (10.50) в координатной форме. В этом

уравнении суммирование векторов предусматривает использование матриц 3×3 , не учитывающих относительный параллельный перенос начал координат. Использование матриц 4×4 позволяет векторное уравнение (10.50) представить в следующем виде:

$$\bar{r}_D^{(0)} = [M_{30}]r_D^{(3)} = [M_{10}][M_{21}][M_{32}]r_D^{(3)},$$

а в координатной форме:

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \\ 1 \end{Bmatrix} = [M_{10}][M_{21}][M_{32}] \begin{Bmatrix} x_D^{(3)} \\ y_D^{(3)} \\ z_D^{(3)} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (10.51)$$

$$[M_{10}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{10} & -\sin \alpha_{10} & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.52)$$

$$[M_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{21} & -\sin \alpha_{21} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.53)$$

$$[M_{32}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_{32} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.54)$$

$$[M_{20}] = [M_{10}][M_{21}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{10} & -\sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & 0 \\ \sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & -\cos \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.55)$$

$$[M_{30}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{10} & -\sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & -s_{32} \sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21} \\ \sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & -\cos \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & s_{32} \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21} \\ 0 & \sin \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} & s_{32} \sin \alpha_{21} + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.56)$$

Выражение (10.51), с учетом матрицы (10.56), дает следующие соотношения для координат точки D в неподвижной системе:

$$\begin{aligned}x_D^{(0)} &= -l_3 \sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21} - s_{32} \sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21}, \\y_D^{(0)} &= l_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21} + s_{32} \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21}, \\z_D^{(0)} &= l_3 \sin \alpha_{21} + s_{32} \sin \alpha_{21} + l_1.\end{aligned}\quad (10.57)$$

На этапе исследования кинематики манипуляторов более удобным является использование матриц 4×4 , однако они не могут быть использованы в динамике, поэтому для унификации подпрограмм матричных преобразований с использованием ЭВМ более предпочтительным является использование ранее рассмотренных частных матриц $[M^x]$, $[M^y]$, $[M^z]$.

Проекции скоростей точки D могут быть определены путем дифференцирования по времени выражений (10.57).

Из рис.10.13 видно что, как и ранее,

$$\alpha_{10} = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_D}{x_D} \right).\quad (10.58)$$

По аналогии с рис.10.13 имеем $\pi/2 - \alpha_{21} = \pi - \gamma_1$, откуда

$$\alpha_{21} = \gamma_1 - \frac{\pi}{2},\quad (10.59)$$

где γ_1 определится, как и ранее (рис.10.13), из соотношения

$$r_D^2 = l_1^2 + (s_{32} + l_3)^2 - 2l_1(s_{32} + l_3) \cos \gamma_1.$$

Из последнего выражения имеем

$$\gamma_1 = \arccos \left[\frac{l_1^2 + (s_{32} + l_3)^2 - r_D^2}{2l_1(s_{32} + l_3)} \right].\quad (10.60)$$

Схема на рис.10.13 отличается от схемы на рис.10.12 тем что $l_2 = 0$, поэтому выражение (10.49) применимо к рис.10.13 при $l_2 = 0$ и

$$s_{32} = l_{O_2D} - l_3.\quad (10.61)$$

Таким образом, для оценки погрешности позиционирования схвата можно воспользоваться выражениями (10.57), если в них подставить значения α_{10} , α_{21} и s_{32} из выражений (10.59), (10.60) и (10.61).

Рассмотрим возможность различного представления выражений для определения, например, углового ускорения звена 3 (рис.10.13). Как показано ранее, угловая скорость ω_3 звена 3 в векторной форме определяется соотношением $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10}$. Это уравнение в координатной форме можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \omega_3^{(x_0)} \\ \omega_3^{(y_0)} \\ \omega_3^{(z_0)} \end{Bmatrix} = [M_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_{10} \end{Bmatrix} + [M_{10}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [M_{30}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Последнее выражение, с учетом матриц (10.52) — (10.60), после преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \omega_3^{(x_0)} &= \dot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10}, \\ \omega_3^{(y_0)} &= \dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10}, \\ \omega_3^{(z_0)} &= \dot{\alpha}_{10}. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Дифференцирование по времени выражений (10.62) дает проекции ускорения ε_3 звена 3 на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^{(x_0)} &= \ddot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10} - \dot{\alpha}_{21} \dot{\alpha}_{10} \sin \alpha_{10}, \\ \varepsilon_3^{(y_0)} &= \ddot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10} + \dot{\alpha}_{21} \dot{\alpha}_{10} \cos \alpha_{10}, \\ \varepsilon_3^{(z_0)} &= \ddot{\alpha}_{10}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Рассмотрим другой способ представления вектора ε_3 углового ускорения звена 3, с учетом его изменения по величине и направлению:

$$\bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21}. \quad (10.64)$$

Как видно из рис.10.13, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \ddot{\alpha}_{21} \bar{k}_0, \\ \bar{\varepsilon}_{21} &= (\ddot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10}) \bar{i}_0 + (\ddot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10}) \bar{j}_0, \\ \bar{\omega}_1 &= \dot{\alpha}_{21} \bar{k}_0, \\ \bar{\omega}_{21} &= (\dot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10}) \bar{i}_0 + (\dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10}) \bar{j}_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_{21} = (-\dot{\alpha}_{10}\dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10})\vec{i}_0 + (\dot{\alpha}_{10}\dot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10})\vec{j}_0.$$

С учетом последних соотношений уравнение (10.64) примет вид

$$\vec{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3^{(x_0)}\vec{i}_0 + \varepsilon_3^{(y_0)}\vec{j}_0 + \varepsilon_3^{(z_0)}\vec{k}_0 = (\ddot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10} - \dot{\alpha}_{10}\dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10})\vec{i}_0 + (\ddot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}\dot{\alpha}_{21} \cos \alpha_{10})\vec{j}_0 + \ddot{\alpha}_{10}\vec{k}_0.$$

Представление проекций вектора $\vec{\varepsilon}_3$ на оси неподвижной системы координат в виде уравнений (10.62) и (10.63) имеет более простой вид. Однако из уравнения (10.64) видно раздельное влияние ускорений $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_{21}$ и скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_{21}$. Например, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 0$ $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_{21}$, то есть представляется возможным определить ускорение звена 3 при равномерном движении звеньев 1 и 2. При этом векторное произведение можно представить в виде

$$[\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_{21}] = \omega_1 \omega_{21} \sin \left(\widehat{\vec{\omega}_1 \vec{\omega}_{21}} \right).$$

Для нашего случая $\left(\widehat{\vec{\omega}_1 \vec{\omega}_{21}} \right) = \widehat{k_1 i_2} = 90^\circ$ (рис.10.13), то есть

$[\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_{21}] = \dot{\alpha}_{10}\dot{\alpha}_{21}$. Здесь представляется возможность определить влияние конструкции кинематической пары (соединения звеньев 1 и 2) на динамические нагрузки за счет изменения угла между осями относительного вращения звеньев.

Для уяснения некоторых особенностей аналитического представления кинематических и динамических характеристик, обусловленных выбором систем координат, рассмотрим пример по определению динамической нагруженности подвижных соединений манипулятора ВВП с системой координат, ориентированных иначе, чем на рис.10.13.

В качестве примера рассмотрим манипулятор $B_{z_1} B_{y_2} \Pi_{z_3}$ (рис.10.14). Силы инерции звеньев и транспортируемой детали в проекциях на оси $x_0 y_0 z_0$ неподвижной системы координат имеют вид

$$F_{и_2} \left\{ F_{и_2}^{x_0}, F_{и_2}^{y_0}, F_{и_2}^{z_0} \right\}, F_{и_3} \left\{ F_{и_3}^{x_0}, F_{и_3}^{y_0}, F_{и_3}^{z_0} \right\}, \\ F_{и_д} \left\{ F_{и_д}^{x_0}, F_{и_д}^{y_0}, F_{и_д}^{z_0} \right\}, F_{и_1} = 0.$$

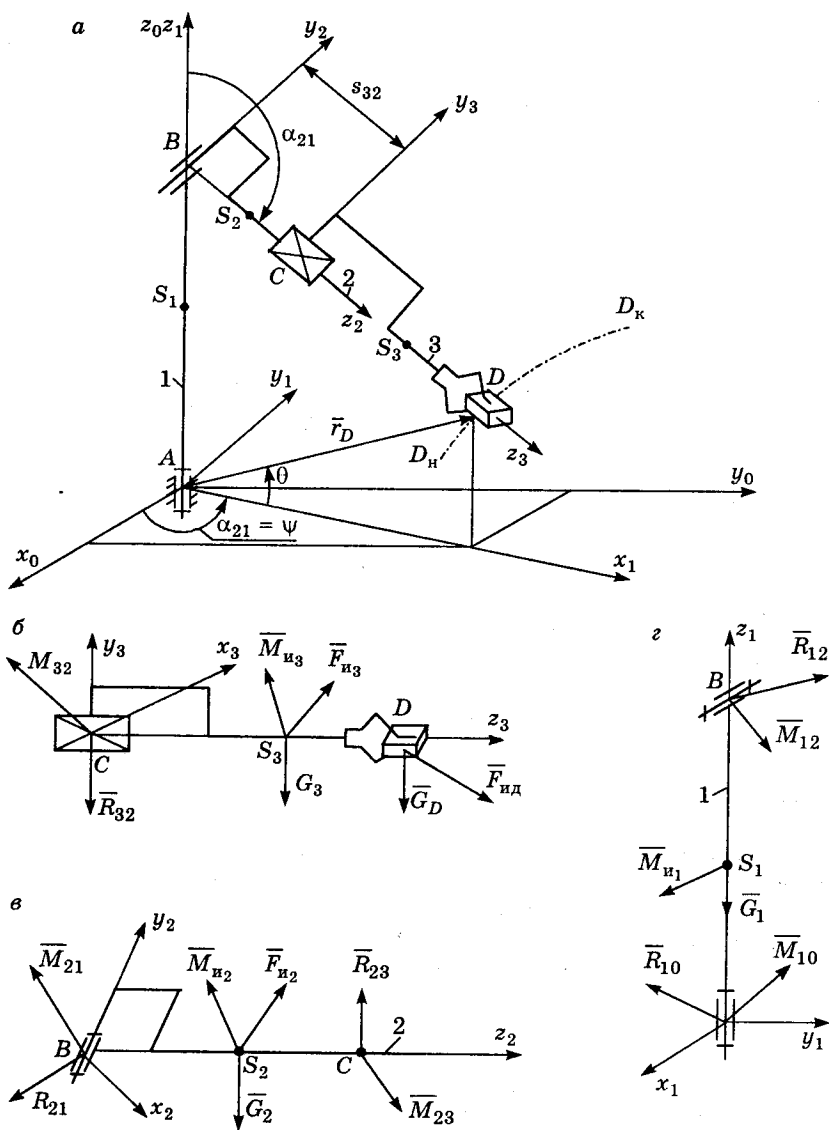


Рис.10.14. К определению реактивных и движущих составляющих реакций в кинематических парах манипулятора,
 а — схема манипулятора $B_{z_1} V_{y_2} \Pi_{z_3}$; б, в, z — схемы сил,
 приложенных к третьему, второму и первому звеньям

Моменты сил инерции звеньев в проекциях на оси подвижных систем координат определим из условия, что звенья имеют симметричную форму и, следовательно, $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$. Тогда

$$\begin{bmatrix} M_{и_1}^{x_1} \\ M_{и_1}^{y_1} \\ M_{и_1}^{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{x_1} \varepsilon_i^{x_1} - \omega_i^{y_1} \omega_i^{z_1} (J_{z_1} - J_{y_1}) \\ -J_{y_1} \varepsilon_i^{y_1} - \omega_i^{x_1} \omega_i^{z_1} (J_{x_1} - J_{z_1}) \\ -J_{z_1} \varepsilon_i^{z_1} - \omega_i^{x_1} \omega_i^{y_1} (J_{y_1} - J_{x_1}) \end{bmatrix}. \quad (10.65)$$

Применив формулу (10.65), получим

$$\begin{aligned} \overline{M}_{и_1} \{ M_{и_1}^{x_1}, M_{и_1}^{y_1}, M_{и_1}^{z_1} \}, \overline{M}_{и_2} \{ M_{и_2}^{x_2}, M_{и_2}^{y_2}, M_{и_2}^{z_2} \}, \\ \overline{M}_{и_3} \{ M_{и_3}^{x_3}, M_{и_3}^{y_3}, M_{и_3}^{z_3} \}. \end{aligned}$$

В выражениях $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$ — осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции звена (с началом координат в центре масс), параллельных осям подвижной системы координат $x_i y_i z_i$, жестко связанной с данным звеном.

В случае цилиндрической формы звеньев и при расположении центров масс посередине длин звеньев

$$J_{x_i} = J_{y_i} = \frac{m}{12} (l^2 + 3r^2), \quad J_{z_i} = \frac{mr^2}{2},$$

где l — длина цилиндра, r — радиус цилиндра (ось z_i направлена по оси цилиндра).

Методика определения кинематических характеристик манипулятора (угловых скоростей и ускорении звеньев, линейных скоростей и ускорений центров масс, а также координат отдельных точек) рассмотрена ранее.

Рассматриваем последнее звено 3 со охватом (рис.10.14, а).

Составляем уравнение равновесия сил:

$$\overline{G}_3 + \overline{G}_д + \overline{F}_{и_д} + \overline{F}_{и_3} + \overline{R}_{32} = 0, \quad (10.66)$$

где $G_3 = m_3 g$ и $G_д = m_д g$ — силы тяжести звена 3 и перемещаемой детали, R_{32} — реакция на звено 3 со стороны звена 2. В проекциях на оси неподвижной системы координат уравнение (10.66) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_д \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{и_д}^{x_0} \\ F_{и_д}^{y_0} \\ F_{и_д}^{z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{и_3}^{x_0} \\ F_{и_3}^{y_0} \\ F_{и_3}^{z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{32}^{x_0} \\ R_{32}^{y_0} \\ R_{32}^{z_0} \end{bmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$R_{32}^{x_0} = -F_{ид}^{x_0} - F_{из}^{x_0}, \quad R_{32}^{y_0} = -F_{ид}^{y_0} - F_{из}^{y_0},$$

$$R_{32}^{z_0} = G_3 + G_d - F_{ид}^{z_0} - F_{из}^{z_0},$$

$$R_{32} = \sqrt{\left(R_{32}^{x_0}\right)^2 + \left(R_{32}^{y_0}\right)^2 + \left(R_{32}^{z_0}\right)^2}.$$

Для оценки динамической нагруженности подвижного соединения звеньев 2 и 3 необходимо получить проекции реакции R_{32} на оси $x_3y_3z_3$, жестко связанные со звеном 3. Для этого следует воспользоваться матричным выражением

$$\begin{bmatrix} R_{32}^{x_3} \\ R_{32}^{y_3} \\ R_{32}^{z_3} \end{bmatrix} = [M_{03}] \begin{bmatrix} R_{32}^{x_0} \\ R_{32}^{y_0} \\ R_{32}^{z_0} \end{bmatrix}. \quad (10.67)$$

Матрица преобразования $[M_{03}]$ координат вектора из неподвижной системы координат $x_0y_0z_0$ в подвижную систему $x_3y_3z_3$ имеет вид

$$[M_{03}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & \sin \alpha_{10} \cos \alpha_{21} & -\sin \alpha_{21} \\ -\sin \alpha_{10} & \cos \alpha_{10} & 0 \\ \cos \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} \end{bmatrix},$$

где α_{10} , α_{21} — обобщенные координаты манипулятора (углы относительного поворота соседних звеньев).

Составляющая $R_{32}^{z_3}$, определяемая на основании выражения (10.67), направлена вдоль оси поступательной пары и представляет собой движущую силу (приводное усилие) в этой паре.

Тогда сила

$$R_{32}^{x_3-y_3} = \sqrt{\left(R_{32}^{x_3}\right)^2 + \left(R_{32}^{y_3}\right)^2}$$

представляет собой реактивное воздействие. Эта сила определяет силу трения в подвижном соединении.

Уравнение равновесия моментов, приложенных к звену 3, имеет вид

$$\left(\bar{l}_{CD} \times \bar{G}_d\right) + \left(\bar{l}_{CD} \times \bar{F}_{ид}\right) + \left(\bar{l}_{CS_3} \times \bar{G}_3\right) + \left(\bar{l}_{CS_3} \times \bar{F}_{из}\right) + \bar{M}_{из}^{(0)} + \bar{M}_{32}^{(0)} = 0, \quad (10.68)$$

где $\overline{M}_{32}^{(0)}$ — реактивный момент, действующий на звено 3 со стороны звена 2 и представленный, как и все векторы, входящие в уравнение (10.69), в проекциях на оси неподвижной системы координат;

$\overline{l}_{CD}, \overline{l}_{CS_3}$ — радиусы-векторы точек D и S_3 относительно точки C (начала координатной системы $x_3y_3z_3$).

$$\overline{l}_{CD} \left\{ x_D^{(0)} - x_C^{(0)}, y_D^{(0)} - y_C^{(0)}, z_D^{(0)} - z_C^{(0)} \right\},$$

$$\overline{l}_{CS_3} \left\{ x_{S_3}^{(0)} - x_C^{(0)}, y_{S_3}^{(0)} - y_C^{(0)}, z_{S_3}^{(0)} - z_C^{(0)} \right\}.$$

Следует иметь в виду, что при составлении уравнения равновесия (10.68) мы пренебрегаем размерами перемещаемой детали и поэтому не учитываем момент сил инерции детали $\overline{M}_{и_д}$.

Поскольку момент сил инерции $\overline{M}_{и_3}$ получен в подвижной системе координат, связанной со звеном 3, для получения проекций этого момента в неподвижной системе координат используем матрицу поворота $[M_{30}]$:

$$\begin{bmatrix} M_{и_3}^{x_0} \\ M_{и_3}^{y_0} \\ M_{и_3}^{z_0} \end{bmatrix} = [M_{30}] \begin{bmatrix} M_{и_3}^{x_3} \\ M_{и_3}^{y_3} \\ M_{и_3}^{z_3} \end{bmatrix}.$$

Векторные произведения в уравнении (10.68) раскрываются известным способом, например:

$$\overline{l}_{CD} \times \overline{F}_{и_д} = \begin{bmatrix} \overline{i}_0 & \overline{j}_0 & \overline{k}_0 \\ x_D^{(0)} - x_C^{(0)} & y_D^{(0)} - y_C^{(0)} & z_D^{(0)} - z_C^{(0)} \\ F_{и_д}^{x_0} & F_{и_д}^{y_0} & F_{и_д}^{z_0} \end{bmatrix} =$$

$$= \overline{i}_0 \left[(y_D^{(0)} - y_C^{(0)}) F_{и_д}^{z_0} - (z_D^{(0)} - z_C^{(0)}) F_{и_д}^{y_0} \right] + \overline{j}_0 \left[(z_D^{(0)} - z_C^{(0)}) F_{и_д}^{x_0} - \right.$$

$$\left. - (x_D^{(0)} - x_C^{(0)}) F_{и_д}^{z_0} \right] + \overline{k}_0 \left[(x_D^{(0)} - x_C^{(0)}) F_{и_д}^{y_0} - (y_D^{(0)} - y_C^{(0)}) F_{и_д}^{x_0} \right].$$

Кроме того, можно использовать матричное представление векторного произведения. Для этого первому вектору ставится в

соответствие кососимметричная матрица 3×3 , имеющая вид

$$L_{CD} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{CD}^{z_0} & l_{CD}^{y_0} \\ l_{CD}^{z_0} & 0 & -l_{CD}^{x_0} \\ -l_{CD}^{y_0} & l_{CD}^{x_0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(z_D^{(0)} - z_C^{(0)}) & y_D^{(0)} - y_C^{(0)} \\ z_D^{(0)} - z_C^{(0)} & 0 & -(x_D^{(0)} - x_C^{(0)}) \\ -(y_D^{(0)} - y_C^{(0)}) & x_D^{(0)} - x_C^{(0)} & 0 \end{bmatrix},$$

а второму вектору — матрица-столбец $F_{и_d}$. После перемножения матрицы L_{CD} на матрицу-столбец $F_{и_d}$ получается матрица-столбец, элементами которой являются проекции $(\bar{l}_{CD} \times \bar{F}_{и_d})_{x_0}$, $(\bar{l}_{CD} \times \bar{F}_{и_d})_{y_0}$, $(\bar{l}_{CD} \times \bar{F}_{и_d})_{z_0}$.

В результате векторное уравнение (10.68) приводится к трем скалярным, из которых находятся $M_{32}^{(x_0)}$, $M_{32}^{(y_0)}$, $M_{32}^{(z_0)}$ и

$$M_{32} = \sqrt{\left(M_{32}^{(x_0)}\right)^2 + \left(M_{32}^{(y_0)}\right)^2 + \left(M_{32}^{(z_0)}\right)^2}.$$

На основании матричного выражения

$$\begin{bmatrix} M_{32}^{x_3} \\ M_{32}^{y_3} \\ M_{32}^{z_3} \end{bmatrix} = [M_{03}] \begin{bmatrix} M_{32}^{x_0} \\ M_{32}^{y_0} \\ M_{32}^{z_0} \end{bmatrix}$$

находим проекции момента \bar{M}_{32} на оси x_3, y_3, z_3 .

Ориентация вектора $\bar{M}_{32} \{M_{32}^{x_3}, M_{32}^{y_3}, M_{32}^{z_3}\}$ в пространстве может быть определена углами

$$\psi_{M_{32}} = \text{arctg} \frac{M_{32}^{y_3}}{M_{32}^{x_3}}, \theta_{M_{32}} = \text{arctg} \frac{M_{32}^{z_3}}{\sqrt{\left(M_{32}^{x_3}\right)^2 + \left(M_{32}^{y_3}\right)^2}}. \quad (10.69)$$

Составляющие $M_{32}^{x_3}$ и $M_{32}^{y_3}$ вызывают перекося и изгиб звена 3. Составляющая $M_{32}^{z_3}$ вызывает кручение звена 3 вокруг оси z_3 .

На основании анализа информации, отображающей характер изменения модулей векторов \bar{R}_{32} и \bar{M}_{32} и их направлений по отношению к координатным осям, связанным с самим звеном, можно судить о динамической нагруженности подвижного соединения звеньев 2 и 3 и о перераспределении сил трения в связи с изменением величины и направления реакции.

Рассматривая звено 2 (рис.10.14, б), составляем уравнение равновесия сил:

$$\bar{G}_2 + \bar{F}_{и2} + \bar{R}_{23} + \bar{R}_{21} = 0, \quad (10.70)$$

где $G_2 = m_2g$ — сила тяжести звена 2;

R_{21} — реакция на звено 2 со стороны звена 1;

R_{23} — реакция на звено 2 со стороны звена 3.

Очевидно, что $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$. Поэтому неизвестными в уравнении (10.70) являются компоненты вектора \bar{R}_{21} . В проекциях на оси неподвижной системы координат уравнение (10.70) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{и2}^{x_0} \\ F_{и2}^{y_0} \\ F_{и2}^{z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{23}^{x_0} \\ R_{23}^{y_0} \\ R_{23}^{z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{21}^{x_0} \\ R_{21}^{y_0} \\ R_{21}^{z_0} \end{bmatrix} = 0,$$

откуда находятся $R_{21}^{x_0}$, $R_{21}^{y_0}$, $R_{21}^{z_0}$ и

$$R_{21} = \sqrt{\left(R_{21}^{x_0}\right)^2 + \left(R_{21}^{y_0}\right)^2 + \left(R_{21}^{z_0}\right)^2}.$$

Проекции $R_{21}^{x_2}$, $R_{21}^{y_2}$, $R_{21}^{z_2}$ вектора \bar{R}_{21} на координатные оси x_2 , y_2 , z_2 , связанные со звеном 2, получаются на основании матричного выражения $R_{21}^{(2)} = M_{02}R_{21}^{(0)}$. Ориентация вектора

$\bar{R}_{21} \{R_{21}^{x_2}, R_{21}^{y_2}, R_{21}^{z_2}\}$ в пространстве определяется углами

$\psi_{R_{21}}$ и $\theta_{R_{21}}$, которые находятся по формулам, аналогичным

(10.69). Как видно из рис.10.14, составляющая $R_{21}^{y_2}$ "прижимает" звено 2 к торцу кинематической пары, смещая звено 2 вдоль оси y_2 его вращения. Составляющая же

$$R_{21}^{x_2-z_2} = \sqrt{\left(R_{21}^{x_2}\right)^2 + \left(R_{21}^{z_2}\right)^2}$$

смещает звено 2 в направлении, перпендикулярном оси y_2 , прижимая его к внутренней поверхности вращательной пары. Таким образом, силы трения в кинематической паре определяются как величиной составляющих, так и направлением вектора \bar{R}_{21} в системе координат, связанной со звеном 2.

Составляем уравнение равновесия моментов:

$$(\bar{l}_{BC} \times \bar{R}_{23}) + (\bar{l}_{BS_2} \times \bar{G}_2) + (\bar{l}_{BS_2} \times \bar{F}_{и_2}) + \bar{M}_{и_2}^{(0)} + \bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} = 0, \quad (10.71)$$

где $\bar{M}_{21}^{(0)}$ — реактивный момент, действующий на звено 2 со стороны звена 1;

$\bar{M}_{23}^{(0)}$ — реактивный момент, действующий на звено 2 со стороны звена 3.

Очевидно, что $\bar{M}_{23}^{(0)} = -\bar{M}_{32}^{(0)}$. Радиусы-векторы \bar{l}_{BC} и \bar{l}_{BS_2} в проекциях имеют вид

$$\bar{l}_{BC} \left\{ x_C^{(0)} - x_B^{(0)}, y_C^{(0)} - y_B^{(0)}, z_C^{(0)} - z_B^{(0)} \right\},$$

$$\bar{l}_{BS_2} \left\{ x_{S_2}^{(0)} - x_B^{(0)}, y_{S_2}^{(0)} - y_B^{(0)}, z_{S_2}^{(0)} - z_B^{(0)} \right\}.$$

Для получения $M_{и_2}^{x_0}$ используем соотношение

$$\begin{bmatrix} M_{и_2}^{x_0} \\ M_{и_2}^{y_0} \\ M_{и_2}^{z_0} \end{bmatrix} = [M_{20}] \begin{bmatrix} M_{и_2}^{x_2} \\ M_{и_2}^{y_2} \\ M_{и_2}^{z_2} \end{bmatrix}.$$

Векторное уравнение (10.71) приводится к трем скалярным, из которых определяется

$$M_{21} = \sqrt{\left(M_{21}^{(x_0)}\right)^2 + \left(M_{21}^{(y_0)}\right)^2 + \left(M_{21}^{(z_0)}\right)^2}.$$

На основании матричного выражения $M_{21}^{(2)} = [M_{02}]M_{21}^{(0)}$ находим $M_{21}^{x_2}$, $M_{21}^{y_2}$, $M_{21}^{z_2}$. Составляющая $M_{21}^{y_2}$, направленная вдоль оси вращательной пары B , представляет собой движущий (приводной) момент в этой паре. Тогда момент

$$M_{21}^{x_2 - z_2} = \sqrt{\left(M_{21}^{x_2}\right)^2 + \left(M_{21}^{z_2}\right)^2}$$

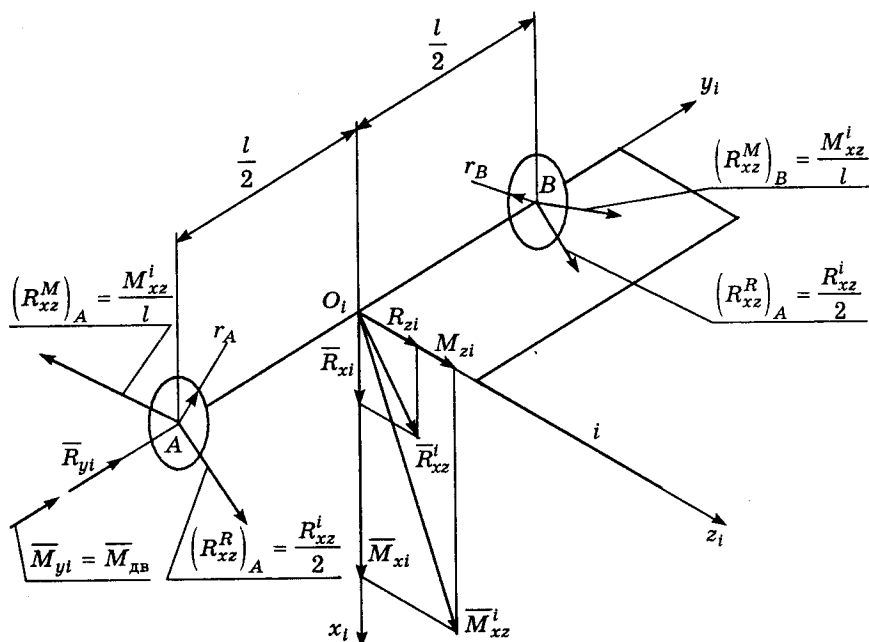


Рис.10.15. К определению динамической нагруженности подшипникового узла манипулятора $B_{z_1} B_{y_2} \Pi_{z_3}$

представляет собой реактивное воздействие в результате поворота и "перекоса" звена 2 при вращении его вокруг оси, перпендикулярной y_2 (рис.10.15).

Изменение величины или знака момента $M_{21}^{x_2-z_2}$ приводит к перераспределению суммарных реакций $\frac{R_{21}^{x_2-z_2}}{2}$ и

$R_{21}^{M_{21}} = \frac{M_{21}^{x_2-z_2}}{l_{21}}$, приложенных на расстоянии l_{21} друг от друга

между подшипниками кинематической пары 1 — 2. Это указывает на сложный характер сил трения в кинематических парах манипулятора, которые не могут быть определены без предварительной оценки динамической нагруженности "идеальных" подвижных соединений, то есть без учета на первом этапе трения, зазоров и конструкции подшипниковых узлов манипулятора.

Рассматривая звено 1 (рис.10.14, з), составляем уравнение равновесия сил:

$$\bar{G}_1 + \bar{R}_{12} + \bar{R}_{10} = 0, \quad (10.72)$$

где $G_1 = mg$ — сила тяжести звена 1;

R_{10} — реакция на звено 1 со стороны звена 0 (стойки);

R_{12} — реакция на звено 1 со стороны звена 2.

Очевидно, что $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$. Поэтому неизвестными в уравнении (10.72) являются компоненты вектора \bar{R}_{10} . В проекциях на оси неподвижной системы координат последнее уравнение записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{12}^{x_0} \\ R_{12}^{y_0} \\ R_{12}^{z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{10}^{x_0} \\ R_{10}^{y_0} \\ R_{10}^{z_0} \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда находятся $R_{10}^{x_0}$, $R_{10}^{y_0}$, $R_{10}^{z_0}$ и

$$R_{10} = \sqrt{\left(R_{10}^{x_0}\right)^2 + \left(R_{10}^{y_0}\right)^2 + \left(R_{10}^{z_0}\right)^2}.$$

Проекции $R_{10}^{x_1}$, $R_{10}^{y_1}$, $R_{10}^{z_1}$ вектора \bar{R}_{10} на координатные оси x_1 , y_1 , z_1 , связанные со звеном 1, получаются на основании матричного выражения $R_{10}^{(1)} = M_{01}R_{10}^{(0)}$. Ориентация вектора $\bar{R}_{10} \{R_{10}^{x_1}, R_{10}^{y_1}, R_{10}^{z_1}\}$ в пространстве может быть определена углами $\psi_{R_{10}}$ и $\theta_{R_{10}}$.

Составляем уравнение равновесия моментов:

$$\left(\bar{l}_{AB} \times \bar{R}_{12}\right) + \left(\bar{l}_{AS_1} \times \bar{G}_1\right) + \bar{M}_{12}^{(0)} + \bar{M}_{и_1}^{(0)} + \bar{M}_{10}^{(0)} = 0, \quad (10.73)$$

где $\bar{M}_{10}^{(0)}$ — реактивный момент, действующий на звено 1 со стороны звена 0;

$\bar{M}_{12}^{(0)}$ — реактивный момент, действующий на звено 1 со стороны звена 2.

Очевидно, что $\bar{M}_{12}^{(0)} = -\bar{M}_{21}^{(0)}$. Радиусы-векторы \bar{l}_{AB} и \bar{l}_{AS_2} в проекциях имеют вид

$$\bar{l}_{AB} \left\{ x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, z_B^{(0)} \right\}, \quad \bar{l}_{AS_1} \left\{ x_{S_1}^{(0)}, y_{S_1}^{(0)}, z_{S_1}^{(0)} \right\}.$$

Для получения $M_{и_1}^{x_0}$ используем соотношение

$$\begin{bmatrix} M_{и_1}^{x_0} \\ M_{и_1}^{y_0} \\ M_{и_1}^{z_0} \end{bmatrix} = [M_{10}] \begin{bmatrix} M_{и_1}^{x_1} \\ M_{и_1}^{y_1} \\ M_{и_1}^{z_1} \end{bmatrix}.$$

Векторное уравнение (10.73) приводится к трем скалярным, из которых определяются $M_{10}^{x_0}$, $M_{10}^{y_0}$, $M_{10}^{z_0}$ и

$$M_{10} = \sqrt{\left(M_{10}^{(x_0)}\right)^2 + \left(M_{10}^{(y_0)}\right)^2 + \left(M_{10}^{(z_0)}\right)^2}.$$

На основании матричного выражения $M_{10}^{(1)} = [M_{01}]M_{10}^{(0)}$ находим $M_{10}^{x_1}$, $M_{10}^{y_1}$, $M_{10}^{z_1}$. Составляющая $M_{10}^{z_1}$, направленная вдоль оси вращательной пары А, представляет собой движущий (приводной) момент в этой паре. Тогда момент

$$M_{10}^{x_1 y_1} = \sqrt{\left(M_{10}^{(x_1)}\right)^2 + \left(M_{10}^{(y_1)}\right)^2}$$

характеризует собой реактивное воздействие. Здесь, как и ранее (рис.10.14), следует различать особенности силового взаимодействия, определяемого проекциями векторов сил и моментов. В данном случае движущим моментом является $M_{10}^{z_1}$, момент же $M_{10}^{x_1-y_1}$ стремится развернуть звено 1 вокруг оси, перпендикулярной z_1 . При этом реакции

$$\frac{R_{10}^{x_1-y_1}}{2} = \frac{\sqrt{\left(R_{10}^{x_1}\right)^2 + \left(R_{10}^{y_1}\right)^2}}{2}$$

стремятся прижать звено 1 к внутренней поверхности кинематической пары звена 1 со станиной 0, пара сил

$$R_{10}^{M_{10}} = \frac{M_{10}^{x_1-y_1}}{l_{10}}$$

перераспределяет эти реакции, так как они

направлены в одну сторону, совпадающую с направлением вектора $R_{10}^{x_1-y_1}$, а силы $R_{10}^{M_{10}}$ направлены в разные стороны и

отражают направление вектора $M_{10}^{x_1-y_1}$. Здесь l_{10} — расстояние между подшипниками в кинематической паре 1 — 0.

Реакция $R_{10}^{z_1}$ создает силу трения, определяемую конструкцией упорного (или радиально-упорного) подшипника, так как она, действуя вдоль оси z_1 , прижимает его к станине или отрывает от нее в зависимости от знака.

Как видно из рис.10.15, сила трения в одноподвижной вращательной паре складывается из двух составляющих. Одна из них, $F_{\text{тр}}^{y_i} = R_{y_i} f_{y_i}'$, определяется конструкцией упорного подшипника. Количественная оценка влияния его типа и размера на сопротивление вращению (на увеличение движущего момента $M_{\text{дв}} = M_{y_i}$) учитывается приведенным коэффициентом трения f_{y_i}' . Момент от этой силы определится как

$$M_{\text{тр}}^{y_i} = f_{y_i}' R_{y_i} r',$$

где f_{y_i}' и r' — коэффициент трения и приведенный радиус трения. Вторая составляющая определяется не только типом, но и расстоянием l между радиальными подшипниками. Как видно из рис.10.15, в направлении, перпендикулярном оси y_i , в плоскости $x_i z_i$ действует сила $R_{xz}^{(i)} = \sqrt{R_{x_i}^2 + R_{z_i}^2}$, которая может быть заменена двумя силами $R_{xz}/2$, приложенными на расстоянии l друг от друга. Момент $M_{xz}^{(i)} = \sqrt{M_{x_i}^2 + M_{z_i}^2}$, может быть представлен парой сил $R_{xz}^{M_{xz}} = M_{xz}/l$, приложенных на том же расстоянии. Тогда результирующий момент от сил трения

$$M_{\text{тр}}^i = f' R_{y_i} r + f'_A R_A r_A + f'_B R_B r_B, \quad (10.74)$$

где $\bar{R}_A = \frac{\bar{R}_{xz}}{2} + \bar{R}_{xzA}^{M_{xz}}$; $\bar{R}_B = \frac{\bar{R}_{xz}}{2} + \bar{R}_{xzB}^{M_{xz}}$.

В уравнении (10.74) r_A, r_B — радиусы валов; f'_A, f'_B — приведенные коэффициенты трения.

Следует отметить, что момент от сил трения определяет не только величину движущего момента, но и существенно меняет характер его изменения во времени или в функции пути, пройденного схватом. Задача об управлении по силе (моменту), мощности или скорости требует учета влияния сил трения. Другими словами, "жесткая программа" управления как зависимость $M_{y_i} = M_{\text{дв}} = f(s, v_D, a_D)$ должна

включать влияние на закон ее изменения геометрических параметров подшипникового узла и условий трения в нем. Это связано с тем, что управляющий (движущий) момент i -го звена входит в уравнение управляющего (движущего) момента $(i - 1)$ -го звена и т.д. Сложность аналитического определения влияния сил трения на изменение мощности приводных двигателей манипуляторов связана с тем, что силы трения не только зависят от законов движения звеньев, но и оказывают влияние на изменение этих законов, а в конечном счете — на перемещение схвата с транспортируемой деталью. В этом случае реализация управления по силе (моменту) требует обязательного учета характера изменения скорости, то есть наибольшую информацию несет величина, определяемая скалярным произведением силы (момента) на скорость.

10.4. Особенности определения обобщенных координат некоторых схем манипуляторов

Обобщенная координата α_{10} и скорость $\dot{\alpha}_{10}$ определяются, как и ранее, углами ψ и $\dot{\psi}$. Обобщенная координата s_{21} определяется из тех соображений, что $z_{02} = z_{02}^H + s_{21}$. Из рис.10.16 видно, что $l_{OE} = z_D$. Тогда начальное положение звена 2 на оси z определится равенством $z_{02}^H = z_D^H + l_{EO_2}^H$. Величина $l_{EO_2}^H$ определится соотношением $l_{EO_2} = l_3 \sin \beta$. Из рис.10.16 имеем $l_3 \cos \beta = l_{ED} = r_D^{xy} = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}$. Из последнего выражения следует, что

$$\beta = \arccos \left(\frac{\sqrt{x_D^2 + y_D^2}}{l_3} \right). \quad (10.75)$$

Обобщенная координата s_{21} определится из векторного контура $\bar{r}_D = z_{02} \bar{k}_1 + l_3 \bar{k}_3$,

$$s_{21} = z_{02} - z_{02}^H = \sqrt{r_D^2 + l_3^2 - 2r_D l_3 \cos(\theta + \beta)} - z_{02}^H, \quad (10.76)$$

где $\theta = \arctg \left(\frac{z_D}{\sqrt{x_D^2 + y_D^2}} \right)$, $z_{02}^H = z_D^H + l_3 \sin \beta_H$,

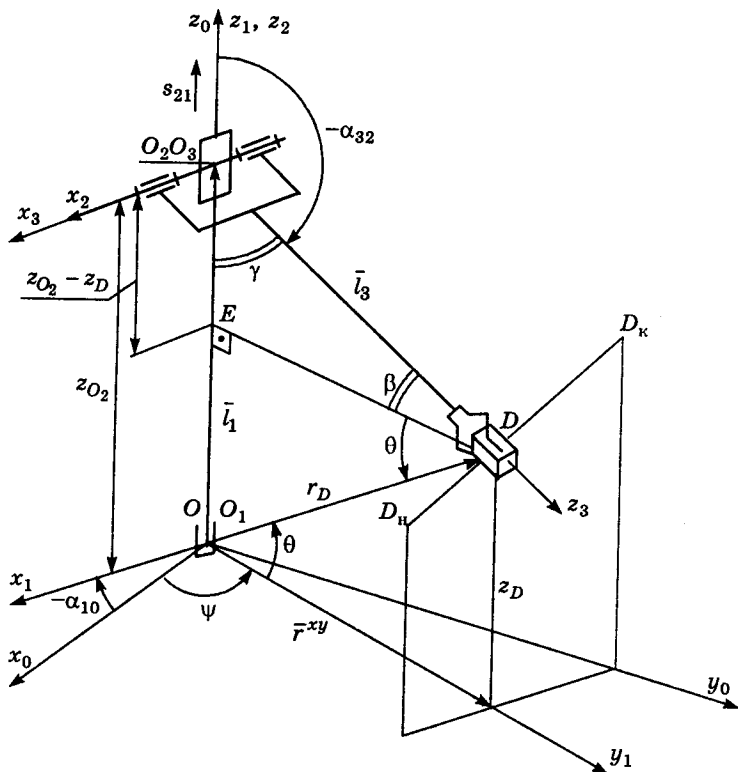


Рис.10.16. Схема манипулятора $B_{z_0} \Pi_{x_1} B_{x_3}$

β_H — значение угла β , соответствующее положению схвата в точке D_H . Величина этого угла определяется соотношением (10.75).

Обобщенная координата α_{32} определится из следующих соображений (рис.10.16):

$$\alpha_{32} = \pi - \gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Тогда

$$\alpha_{32} = \frac{\pi}{2} \pm \beta. \quad (10.77)$$

Знак (+) соответствует случаю, когда $z_{O_2} > z_D$, а знак (-) — когда $z_{O_2} < z_D$. При $z_{O_2} = z_D$, $\beta = 0$.

Обобщенные скорости \dot{s}_{21} и $\dot{\alpha}_{32}$ определяются, как и ранее, путем дифференцирования по времени выражений обобщенных координат.

После дифференцирования выражений (10.76) и (10.77) получим

$$\dot{s}_{21} = \frac{r_D \dot{r}_D - l_3 [\dot{r}_D \cos(\theta + \beta) - r_D (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \sin(\theta + \beta)]}{\sqrt{r_D^2 + l_3^2 - 2r_D l_3 \cos(\theta + \beta)}},$$

$$\dot{\alpha}_{32} = \pm \dot{\beta} = \frac{\dot{x}_D x_D + \dot{y}_D y_D}{\sqrt{l_3^2 - (x_D^2 + y_D^2)}},$$

где

$$\dot{r}_D = \frac{x_D \dot{x}_D + y_D \dot{y}_D + z_D \dot{z}_D}{r_D}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{z}_D r_D^{xy} - z_D (x_D \dot{x}_D + y_D \dot{y}_D)}{r_D r_D^{xy}},$$

$$r_D = \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}, \quad r_D^{xy} = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}.$$

Здесь, как и ранее, $\dot{\alpha}_{10} = v_D \dot{\alpha}'_{10}$, $\dot{s}_{21} = v_D \dot{s}'_{21}$ и $\dot{\alpha}_{32} = v_D \dot{\alpha}'_{32}$. Обобщенные ускорения также определяются соотношениями, аналогичными полученным ранее.

Для рассматриваемой схемы манипулятора (рис.10.17) имеем следующие векторные равенства:

$$\bar{r}_D = \bar{l}_{O_0 O_1} + \bar{l}_{O_1 D} = (\bar{s}_{10} + \bar{l}_{O_1 D}^H) + \bar{l}_{O_1 D},$$

$$\bar{l}_{O_1 D} = \bar{l}_{O_1 O_2} + \bar{l}_{O_2 D},$$

$$\bar{l}_{O_2 D} = \bar{l}_{O_2 O_3} + \bar{l}_{O_3 D} = \bar{l}_2 + \bar{l}_3.$$

Величины рассматриваемых векторов определяются соотношениями

$$l_{O_1 D} = \sqrt{y_D^2 + z_D^2},$$

$$l_{O_2 D} = \sqrt{l_1^2 + l_{O_1 D}^2 - 2l_1 l_{O_1 D} \cos \gamma_1},$$

где $\cos \gamma_1 = z_D / l_{O_1 D}$.

Значение угла γ_3 находим из выражения

$$l_3^2 = l_2^2 + l_{O_2 D}^2 - 2l_3 l_{O_2 D} \cos \gamma_3,$$

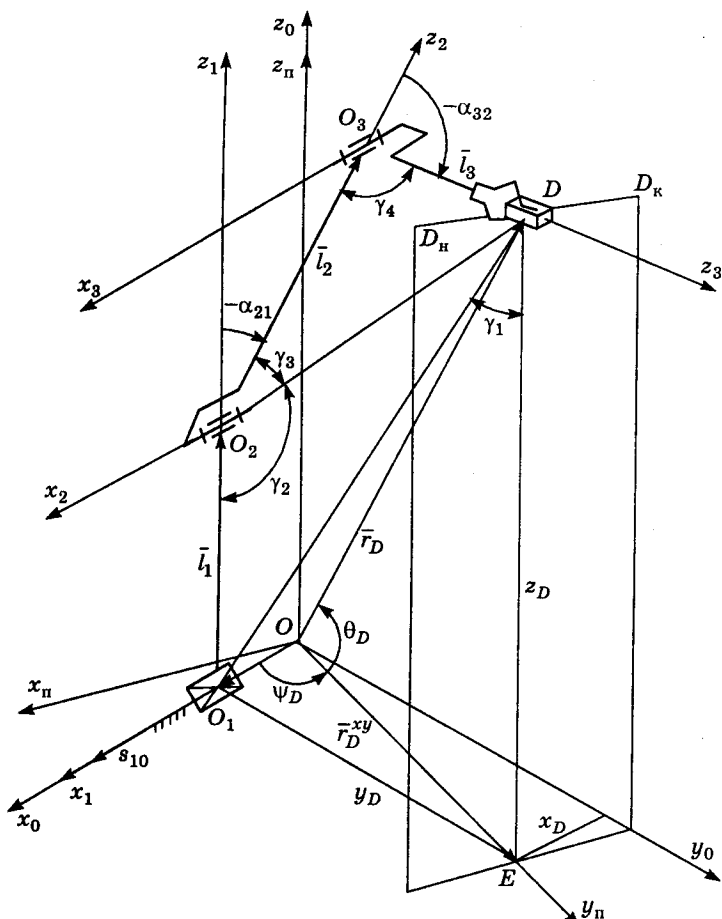


Рис.10.17. Схема манипулятора $\Pi_{x_1} B_{x_2} B_{x_3}$

откуда

$$\gamma_3 = \arccos \left(\frac{l_2^2 + l_{O_2 D}^2 - l_3^2}{2l_3 l_{O_2 D}} \right).$$

Аналогично

$$\gamma_2 = \arccos \left(\frac{l_1^2 + l_{O_2 D}^2 - l_{O_1 D}^2}{2l_1 l_{O_2 D}} \right) \text{ и } \gamma_4 = \arccos \left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_{O_2 D}^2}{2l_2 l_3} \right).$$

Обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} s_{10} &= x_D - x_D^H, \\ \alpha_{21} &= (\gamma_2 + \gamma_3) - \pi, \\ \alpha_{32} &= \pi - \gamma_4. \end{aligned} \tag{10.78}$$

Обобщенные скорости \dot{s}_{10} , $\dot{\alpha}_{21}$, $\dot{\alpha}_{32}$ определяются путем дифференцирования выражений (10.78).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошкин Л.Н. Комплексная автоматизация производства на базе роторных линий. — М.: Машиностроение, 1972.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. — И. Наука, 1975.
3. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. — М.: Высш. школа, 1977.
4. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. С.И.Артоболевского. — И.: Советская наука, 1955.
5. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. /Под ред. А.С.Коренько. — Киев: Вища школа, 1970.
6. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. /Под ред. Г.Н.Девойно. — Мн.: Вышэйшая школа, 1986.
7. Волчкевич Л.И., Кузнецов М.М. и др. Автоматы и автоматические линии. — Мн.: Вышэйшая школа, 1975.
8. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. — Киев: Техника, 1977.
9. Левитская О.И., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. — М.: Высш. школа, 1985.
10. Михеев Ю.Е., Сосонкин В.Л. Системы автоматического управления станками. — И.; Машиностроение, 1978.
11. Рабинович А.Н. Системы управления автоматических машин. — Киев: Техника, 1973.
12. Вульфсон И.И. Методы решения задач динамики механизмов с учетом упругости звеньев: Учебное пособие. — Л.: ЛПИ, 1982.
13. Коловский М.З. Динамика машин: Учебное пособие. — Л.: ЛПИ, 1980.
14. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. — М.: Наука, 1984.
15. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов /К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К.Мусатов и др.; Под ред. К.В.Фролова. — М.: Высш. школа, 1987.

16. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. — М.: Машиностроение, 1977.
17. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. — М.: Гостехиздат, 1948.
18. Чебышев П.Л., Полн. собр. соч. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1951. — Т. 5.
19. Ящерицын П.И., Еременко М.Л., Жигалко Н.И. Основы резания материалов и режущий инструмент. — Мн.: Вышэйшая школа, 1981.
20. Ланской Е.Н., Банкетов А.Н. Элементы расчета деталей и узлов кривошипных прессов. — М.: Машиностроение, 1986.
21. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. — М.: Высш. школа, 1964.
22. Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: Гостехиздат, 1952.
23. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. литературы, 1979.
24. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. — М.: Машиностроение, 1978-1981. — Т. 1-6.
25. Динамика машин и управление машинами: Справочник /Под ред. Г.В.Крейнина. — М.: Машиностроение, 1988.
26. Устройства и элементы системы автоматического регулирования и управления /Под ред. В.В.Солодовникова. — М.: Машиностроение. Кн. 3.
27. Вольдек А.М. Электрические машины. — Л.: Энергия, 1974.
28. Справочные данные по электрооборудованию /ВНИИМЕТМАШ. — Л.: Энергия, 1965. — Т. 2, 3.
29. Расчет автоматических систем /Под ред. А.В.Фатеева. — М.: Высш. школа, 1973.
30. Герц Е.В., Крейнин Г. В. Расчет пневмоприводов. — М.: Машиностроение, 1975.
31. Попов А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. — М.: Высш. школа, 1986.
32. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. — М.: Наука, 1973.

33. Трение, изнашивание и смазка: Справочник /Под ред. И.В.Крагельского и В.В.Алисына. — М.: Машиностроение, 1978. — Т. 1
34. Лукичев Д.М., Тимофеев Т.А. Расчет износа элементов кинематических пар с использованием ЭЦВМ: Учебное пособие для курсового проектирования /Под ред. К.В.Фролова. — М.: МВТУ им. Н.Э.Баумана, 1984.
35. Пинегин С.В. Трение качения в машинах и приборах. — М.: Машиностроение, 1976.
36. Филонов И.П. Механика процессов обкатки. — Мн.: Наука и техника, 1985.
37. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. — М.: Наука, 1988.
38. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1873.
39. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. — М.: Высш. школа, 1880.
40. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. — М.: Машиностроение, 1971.
41. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970.
42. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. — Л.: Машиностроение, 1976.
43. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1973. — Т. 3.
44. Нарден А.П. Дифференциальная геометрия. — М.: Минпрос. РСФСР. — 1948.
45. Борисенко А.И., Таранов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высш. школа, 1963.
46. Гернет М.М., Ратобильский В.Ф. Определение моментов инерции. — М.: Машиностроение, 1969.
47. А.с. (СССР) Электромеханический модульный шарнир манипулятора /И.П.Филонов, П.Ю. Шумилов. — Оpubл. в Бюл. №5, 1988.
48. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Изд-во физ.-мет. литературы, 1961. — Т. 2.

49. Справочник машиностроителя /Под ред. Н.С.Ачерка-на. — М.: Машгиз, 1961.

50. Казыханов Х.Р. Автоматизация математического описа-ния и исследование динамического состояния механизмов машин на ЭВМ: Учебное пособие. — Алма-Ата: КазПТИ, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН-АВТОМАТОВ	8
1.1. Особенности технологических процессов изготовления деталей и проектирования схем технологического оборудования в условиях автоматизированного производства	8
1.2. Структура машин-автоматов и их производительность	11
1.3. Системы управления автоматическим циклом	23
1.4. Взаимосвязь динамических характеристик машин с производительностью и погрешностью позиционирования	31
1.5. Программы согласованности движений исполнительных механизмов машин-автоматов.....	38
1.6. Особенности поиска оптимальной структуры автоматизированного технологического комплекса	43
1.7. Особенности управления формообразованием поверхностей деталей машин и приборов	46
1.8. Моделирование согласованности движений исполнительных механизмов с использованием операций алгебры логики	48
1.9. Техническая реализация операций алгебры логики.....	53
1.10. Синтез систем управления по пути	60

Глава 2. МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МАШИН		70
2.1. Основные положения и задачи.....		70
2.2. Динамические и математические модели проектируемой схемы машины		74
2.3. Определение динамических характеристик машины (приведение сил и масс)		89
2.4. Оценка силовых кинематических и энергетических характеристик машины		91
2.5. Выбор и обоснование закона движения вдоль заданной траектории		95
2.5.1. Кинематика процесса "разгон-торможение"		95
2.5.2. Анализ и синтез законов движения вдоль заданной траектории		98
2.6. Особенности решения уравнений движения приводного вала машины с учетом характеристики приводного двигателя		104
2.6.1. Определение закона движения приводного вала машины с электродвигателем переменного тока		104
2.6.2. Определение закона движения приводного вала машины с электродвигателем постоянного тока.....		109
2.6.3. Оценка неравномерности установившегося движения приводного вала камины.....		109
2.7. Методика и алгоритм численного исследования неравномерности вращения приводного вала машины		111
Глава 3. ОЦЕНКА ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЖЕННОСТИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ		120
3.1. Критерии качественной оценки работоспособности машин, механизмов, кинематических пар.....		120
3.1.1. Коэффициенты энергопотребления (энергозатрат)		120
3.1.2. Коэффициент материалоемкости машины		126
3.1.3. Взаимосвязь коэффициентов энергопотребления и материалоемкости		127
3.1.4. Коэффициент динамичности.....		129
3.1.5. Цикловой механический коэффициент полезного действия и коэффициента потерь		133
3.1.6. Угол давления и коэффициент возрастания усилия		136
3.2. Взаимосвязь силовых, массовых и энергетических характеристик машины		142
3.2.1. Взаимосвязь силовых и массовых характеристик.....		142
3.2.2. Взаимосвязь массовых и энергетических характеристик		151

3.2.3. Взаимосвязь силовых и энергетических характеристик	153
3.3. Определение постоянной составляющей приведенного момента инерции по заданному коэффициенту неравномерности скорости звена приведения.....	156
3.4. Использование энергии маховика для транспортирования грузов с минимальными энергозатратами.....	158
3.5. Программное управление приводами машин	160
3.6. Оценка динамической нагруженности и энергопотребления машин.....	172
3.7. Исследование энергопотребления и динамической нагруженности машин.....	177
3.7.1. Постановка задачи	177
3.7.2. Методика определения динамической нагруженности машинного агрегата при разгоне и торможении.....	181
Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ	186
4.1. Моделирование движения электромеханических систем	186
4.2. Характеристики электродвигателей переменного тока.....	195
4.3. Алгоритм приближенного аналитического представления механической характеристики асинхронного электродвигателя.....	198
4.4. Механические характеристики электродвигателей постоянного тока	200
4.5. Алгоритм приближенного аналитического представления механической характеристики двигателя постоянного тока	203
4.6. Примеры определения массовых и энергетических характеристик приводов	204
4.6.1. Пример аналитического представления характеристики двигателя постоянного тока.....	204
4.6.2. Пример определения энергомассовых характеристик привода компрессора с асинхронным электродвигателем переменного тока.....	205
4.6.3. Пример определения энергомассовых характеристик привода штамповочного пресса с асинхронным электродвигателем переменного тока.....	215
4.7. Механические характеристики гидравлического привода	220
4.7.1. Моделирование движения звеньев гидропривода.....	220
4.7.2. Характеристики гидравлического привода	222
4.7.3. Последовательность расчета для аналитического представления механической характеристики гидропривода.....	226

- 4.8. Параметры и количественные соотношения механических, энергетических, гидравлических и пневматических явлений используемые при моделировании движения машин 228
- 4.9. Силовые и энергетические характеристики электромеханического привода при разгоне машины 245

Глава 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В МАШИНАХ 254

- 5.1. Постановка задачи моделирования механизмов 254
- 5.2. Связи, кинематические пары и степень подвижности механизмов 255
- 5.3. Особенности моделирования кинематики механизмов машин 268
- 5.4. Кинематика механизмов с постоянным передаточным отношением 269
- 5.5. Кинематические характеристики рычажных механизмов с одной степенью подвижности 281
- 5.5.1. Особенности выбора систем координат 281
- 5.5.2. Кинематические характеристики простейших рычажных механизмов 283
- 5.5.3. Кинематические характеристики некоторых шестизвенных механизмов 289
- 5.5.4. Алгоритм определения кинематических характеристик рычажных механизмов с одной степенью подвижности 302

Глава 6. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ 313

- 6.1. Особенности моделирования силового взаимодействия 313
- 6.2. Классификация сил 315
- 6.3. Условие кинетостатической определенности 329
- 6.4. Определение реакций в подвижных соединениях звеньев 333
- 6.5. Примеры определения зависимости реактивных сил от обобщенной координаты 340
- 6.6. Взаимосвязь кинетической энергии механизма с распределением масс его звеньев 350

Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ И ИЗНОСА 355

- 7.1. Общие сведения о внешнем трении твердых тел 355
- 7.2. Общие сведения о количественной оценке износа сопряжений 357
- 7.3. Математическое моделирование процессов формообразования точных поверхностей деталей машин и приборов 361
- 7.4. Методика оценки характера износа сопряжения 363

7.5. Определение износа звеньев, входящих во вращательную пару	370
7.6. Определение износа звеньев, входящих в поступательную пару	375
7.7. Особенности количественного определения износа элементов кинематических пар рычажных механизмов	379
7.8. Определение износа в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма	381
7.9. Количественная оценка сил трения	385
7.9.1. Определение приведенного коэффициента трения скольжения в поступательной кинематической паре	385
7.9.2. Определение приведенного коэффициента скольжения во вращательной паре	390
7.10. Количественная оценка сопротивления качению	393
7.10.1. Гипотезы, объясняющие сопротивление качению	393
7.10.2. Приведенный коэффициент трения в прямолинейных направляющих качения	396
7.10.3. Приведенный коэффициент трения качения в круговых направляющих	397
7.10.4. Приведенный коэффициент трения при качении и скольжении	398
7.11. Определение работы (мощности), затрачиваемой на преодоление трения и износ в кинематических парах механизмов	399
7.12. Определение реакций в кинематических парах механизмов с учетом сил трения в направляющих ползуна	401
7.13. Моделирование движения звеньев кулачкового механизма с учетом износа	403
7.13.1. Постановка задачи	403
7.13.2. Анализ силового взаимодействия кулачка и толкателя	407
Глава 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ИХ ПОДВИЖНЫХ СОЕДИНЕНИЙ	410
8.1. Причины и виды колебаний в машинах	410
8.2. Моделирование внешнего возмущающего воздействия	411
8.3. Параметры простейших видов колебаний	417
8.4. Реакция упругой системы на внешнее возмущающее воздействие	427
8.5. Основные этапы динамических расчетов	441
8.6. Примеры типовых динамических моделей механических систем машин	445
8.7. Особенности программного управления движением машин	447

8.8. Приведение упругих и диссипативных связей	453
8.9. Динамические и математические модели машин с учетом упругости звеньев передаточных механизмов	461
8.10. Моделирование внешнего возмущающего воздействия в рычажных механизмах	464
8.11. Особенности уравнивания механизмов	477
8.12. Уравнивание вращающихся звеньев	481
8.13. Основные положения виброзащиты и виброизоляции машин	488

Глава 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ И ДИНАМИКА МАНИПУЛЯТОРОВ

9.1. Постановка задачи	491
9.2. Особенность структурного анализа и синтеза схем манипуляторов	494
9.3. Массово-геометрические характеристики звеньев манипуляторов	505
9.4. Определение кинематических характеристик звеньев манипуляторов с использованием матричной формы преобразование координат векторов	507
9.5. Геометрия траектории и кинематика схвата	515
9.6. Моделирование движения в пространстве	528
9.6.1. Постановка задачи	528
9.6.2. Моделирование движения точки в пространстве с использованием матричной формы записи уравнений преобразования координат векторов	532
9.6.3. Алгоритм определения координат радиуса-вектора точки	532
9.6.4. Алгоритм определения составляющих вектора скорости точки	535
9.6.5. Алгоритм определения составляющих вектора ускорения точки	538
9.7. Определение скоростей, ускорений звеньев и их центров масс	540
9.8. Взаимосвязь кинематики звеньев манипулятора с законом движения схвата вдоль заданной траектории	547
9.9. Определение динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипуляторов от инерционных сил	557
9.10. Определение динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипулятора от моментов инерционных сил	558
9.11. Оценка динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипулятора от сил веса	564

	655
9.12. Анализ энергозатрат на движение звеньев манипулятора.....	567
9.13. Методика оценки динамической нагруженности подвижных соединений звеньев манипуляторов.....	582
9.14. Определение реакций в кинематических парах звеньев манипуляторов.....	587
Глава 10. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА	
МАНИПУЛЯТОРОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ.....	
10.1. Особенности структурно-кинематического синтеза схем манипуляторов.....	598
10.2. Кинематика и динамика манипуляторов $V_{z_0} V_{x_2} V_{x_3} (V_{z_0} V_{y_2} V_{y_3})$	603
10.2.1. Определение обобщенных координат.....	603
10.2.2. Определение обобщенных скоростей и ускорений.....	605
10.2.3. Определение скоростей, ускорений звеньев и их центров масс.....	608
10.2.4. Определение реактивных сил и движущих моментов.....	612
10.3. Кинематика и динамика манипуляторов ВВП.....	619
10.4. Особенности определения обобщенных координат некоторых схем манипуляторов.....	640
ЛИТЕРАТУРА.....	645

Учебное издание

*Игорь Павлович Филонов
Петр Петрович Анципорович
Валерий Константинович Акулич*

Теория механизмов, машин и манипуляторов

Редактор *Н.В.Овчинникова*

Зав. технической редакцией *Е.В.Радченко*

Технические редакторы *Е.А.Валевич, О.А.Неверко,
Е.В.Еремина, Т.А.Веко*

Подписано в печать с оригинал-макета 28.10.97. Формат 60×90 1/16.

Бум. офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 41. Уч. изд. л. 41. Тираж 1000 экз. Зак. 5520

Лицензия ЛВ № 819

Издательство "Дизайн ПРО", 220027, Минск, пр. Ф.Скорины, 65
Отпечатано в типографии "Победа", 222310, г. Молодечно, ул. Тавлая, 11