ТЕОРИЯ механизмов и машин



учебник для вузов

ББК 34.41
Т 33
УДК 621.01

К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов, Д. М. Лукичев, Н. А. Скворцова, В. А. Никоноров, А. А. Савелова, Г. Н. Петров, Н. Е. Ремезова, В. М. Акопян

Рецензенты: *кафедра «Теория механизмов и машин»* Московского технологического института пищевой промышленности (зав. каф. проф. В. В. Гортинский); *проф. Р. В. Вирабов* (Московский автомеханический институт)

Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов/К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова.—М.: Высш. шк., 1987.— 496 с.: ил.

Т 33

Учебник состоит из двух разделов, которым предшествует гл. 1, посвященная проблемам, стоящим перед данной наукой; в I разделе (гл. 2—10) изложены общие методы определения кинематических и динамических характеристик механизмов, машин и систем машин, расчет механизмов с учетом упругости звеньев, трения и изнашивания кинематических пар, виброактивность и виброзащита; во II разделе (гл. 11—18) — методы проектирования схем основных видов механизмов, управление движением системы механизмов. Изложение дано на основе графических и графоаналитических методов определения параметров механизмов, а также аналитических с использованием ЭВМ.

Т $\frac{2702000000-039}{001(01)-87}$ 173—86

ББК 34.41
6П5.1

Учебное издание

Константин Васильевич Фролов, Сергей Александрович Попов, Александр Константинович Мусатов и др.

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Заведующий редакцией А. В. Дубровский. Редактор Л. Н. Шатунова. Младшие редакторы Т. Ф. Артюхина, Н. М. Щепина. Художник Е. Г. Прибегина. Художественный редактор Л. К. Громова. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. А. Чечеткина.

ИБ № 5856

Изд. № ОТ-487. Сдано в набор 29.03.86. Подп. в печать 17.11.86. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. офс. № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 31,0 усл. печ. л. 62,0 усл. кр.-отт. 32.21 уч.-изд. л. Тираж 80 000 экз. Зак. № 1214. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Высшая школа», 101430. Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014. Ярославль, ул. Свободы, 97.

© Издательство «Высшая школа», 1987

Предисловие

Настоящая книга предназначена в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений. Изложенный в учебнике курс теории механизмов и машин сформировался на основе опыта преподавания дисциплины в МВТУ им. Н. Э. Баумана в течение многих десятилетий; в нем учтены качественные изменения в инженерном образовании в период научно-технической революции, потребовавшие серьезной переработки традиционного курса как по содержанию, так и методике преподавания.

Учебная дисциплина «Теория механизмов и машин» базируется на математической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими курсами: «Высшая математика», «Теоретическая механика», «Алгоритмические языки и программирование».

Являясь научной основой специальных курсов по проектированию машин отраслевого назначения, она ставит следующие задачи:

научить студентов общим методам исследования и проектирования механизмов машин и приборов;

научить студентов понимать общие принципы реализации движения с помощью механизмов, взаимодействие механизмов в машине, обусловливающее кинематические и динамические свойства механической системы;

научить студентов системному подходу к проектированию машин и механизмов, нахождению оптимальных параметров механизмов по заданным условиям работы;

привить навыки разработки алгоритмов и программ расчета параметров на ЭВМ, выполнения конкретных расчетов;

привить навыки использования измерительной аппаратуры для определения кинематических и динамических параметров машин и механизмов.

Учебник написан коллективом кафедры «Теория механизмов и машин» МВТУ им. Н. Э. Баумана под руководством и общей редакцией академика К. В. Фролова. Гл. 1, 10 написаны К. В. Фроловым, гл. 3, 12, 16, 17, 18, § 2.6, 2.7, 7.1, 14.1 — С. А. Поповым, гл. 4,9, § 7.2—7.4 — А. К. Мусатовым, гл. 8, 11, § 2.1—2.5 — Д. М. Лукичевым, § 14.2 — Н. Е. Ремезовой, § 15.1—15.4 — В. А. Никоноровым, § 15.5 — Н. А. Скворцовой, гл. 5 — А. К. Мусатовым и В. М. Акопяном, гл. 6 — А. К. Мусатовым, А. А. Савеловой и Г. Н. Петровым, гл. 13 — Н. А. Скворцовой и А. К. Мусатовым, введение и заключение — К. В. Фроловым и Д. М. Лукичевым совместно.

Авторы выражают глубокую благодарность всему коллективу сотрудников кафедры «Теория механизмов и машин» МВТУ им. Н. Э. Баумана за помощь и полезные советы, а также рецензентам за труд по просмотру рукописи и критические замечания.

Замечания и пожелания по улучшению учебника просим направлять по адресу: *101430, Москва, ГСП-4. ул. Неглинная, 29/14, издательство «Высшая школа».*

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

В решениях XXVII съезда Коммунистической партии Советского Союза с особой силой подчеркнута ведущая роль машиностроения в развитии производительных сил страны. В Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года, утвержденных XXVII съездом КПСС, поставлена задача ускоренного развития машиностроения, повышения его технического уровня с целью скорейшего обновления и реконструкции производства, повышения уровня механизации и автоматизации. Создание новых машин, приборов, установок, автоматических устройств и комплексов, отвечающих современным требованиям эффективности, точности, надежности и экономичности, основано на достижениях фундаментальных и прикладных наук.

Теория механизмов и машин — наука, изучающая общие методы структурного и динамического анализа и синтеза различных механизмов, механику машин. Важно подчеркнуть, что излагаемые в теории механизмов и машин методы пригодны для проектирования любого механизма и не зависят от его технического назначения, а также физической природы рабочего процесса машины.

Курс теории механизмов и машин по существу является вводным в специальность будущего инженера и поэтому имеет инженерную направленность, в нем широко используется современный математический аппарат и изучаются практические приемы решения задач анализа и синтеза механизмов — аналитические с применением ЭВМ, графические и графоаналитические.

М а ш и н а есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. В технологических машинах (металлообрабатывающие станки и комплексы, кузнечно-прессовое оборудование, прокатные станы, литейное оборудование и т. п.) изменяется форма, размеры,

свойства, состояние исходных материалов и заготовок. С помощью транспортных машин и устройств происходит перемещение грузов, инструментов, людей и других объектов в пространстве с требуемой скоростью. В энергетических машинах происходит преобразование энергии. В информационных машинах происходит преобразование вводимой информации для контроля, регулирования и управления движением.

Машина осуществляет свой рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений. Носителем этих движений является механизм. Следовательно, м е х а н и з м есть система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным, требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. Очень многие механизмы выполняют функцию преобразования механического движения твердых тел.

Краткий исторический очерк. Простейшие механизмы (рычажные, зубчатые и др.) были известны с давних времен; постепенно шел процесс их исследования, совершенствования и внедрения в практику с целью облегчить труд человека, повысить производительность труда.

Так, известно, что выдающийся деятель культуры эпохи Возрождения и ученый Леонардо да Винчи (1452—1519) разработал проекты конструкций механизмов ткацких станков, печатных и деревообрабатывающих машин, им сделана попытка определить экспериментальным путем коэффициент трения. Итальянский врач и математик Д. Кардан (1501—1576) изучал движение механизмов часов и мельниц. Французские ученые Г. Амонтон (1663—1705) и Ш. Кулон (1736—1806) первыми предложили формулы для определения силы трения покоя и скольжения.

Выдающийся математик и механик Л. Эйлер (1707—1783), швейцарец по происхождению, тридцать лет жил и работал в России, профессор, а затем действительный член Петербургской Академии наук, автор 850 научных трудов, решил ряд задач по кинематике и динамике твердого тела, исследовал колебания и устойчивость упругих тел, занимался и вопросами практической механики, исследовал, в частности, различные профили зубьев зубчатых колес и пришел к выводу о том, что наиболее перспективный профиль — эвольвентный.

Известный русский механик и изобретатель И. И. Ползунов (1728—1766) впервые разработал проект механизма двухцилиндрового парового двигателя (осуществить который ему, к сожалению, не удалось), сконструировал автоматический регулятор питания котла водой, устройство для подачи воды и пара и другие механизмы. Выдающийся механик И. И. Кулибин (1735—1818) создал знаменитые часы в форме яйца, представляющие собой сложнейший по тем временам механизм автоматического действия.

В связи с развитием машиностроения как отрасли промышленности появилась потребность в разработке общих научных методов исследования и проектирования механизмов, входящих в состав

машин. Эти методы способствовали созданию наиболее совершенных для своего времени машин, выполняющих наилучшим образом определенные требуемые функции. Известно, что машиностроение как отрасль промышленности начала складываться еще в XVIII в., а в XIX в. она стала быстро развиваться, особенно в Англии и США.

В России первые машиностроительные заводы появились в XVIII в.; в 1861 г. их было уже свыше ста, а в 1900 г. примерно 1417. Однако до Великой Октябрьской социалистической революции наше машиностроение отставало и по уровню развития и по масштабам производства, половину машин ввозили из-за границы. Лишь в годы Советской власти в нашей стране было развито мощное машиностроение, успешно создающее различные машины и механизмы, не уступающие лучшим мировым образцам, а в ряде случаев превосходящие их.

Высокоразвитое отечественное машиностроение было одним из факторов, обеспечивших победу в Великой Отечественной войне; в настоящее время машиностроение в числе других отраслей народного хозяйства успешно решает задачи ускорения научно-технического прогресса страны.

Как наука теория механизмов и машин под названием «Прикладная механика» начала формироваться в начале XIX в., причем тогда разрабатывались в основном методы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов. И лишь с середины XIX в. в теории механизмов и машин получают развитие общие методы синтеза механизмов. Так, знаменитый русский ученый, математик и механик, академик П. Л. Чебышев (1821—1894) опубликовал 15 работ по структуре и синтезу рычажных механизмов, при этом на основе разработанных методов он изобрел и построил свыше 40 различных новых механизмов, осуществляющих заданную траекторию, останов некоторых звеньев при движении других и т. д.; структурная формула плоских механизмов называется сейчас формулой Чебышева.

Немецкий ученый Ф. Грасгоф (1826—1893) дал математическую формулировку условия проворачиваемости звена плоского рычажного механизма, которое необходимо при его синтезе. Английские математики Д. Сильвестр (1814—1897) и С. Робертс (1827—1913) разработали теорию рычажных механизмов для преобразования кривых (пантографов).

И. А. Вышнеградский (1831—1895), известный как один из основоположников теории автоматического регулирования, сконструировал ряд машин и механизмов (автоматический пресс, подъемные машины, регулятор насоса) и, будучи профессором Петербургского технологического института, создал научную школу конструирования машин.

Методы синтеза зубчатых механизмов, широко применяемых в различных машинах, отличаются определенной сложностью. Многие ученые работали в этой области. Французский геометр Т. Оливье (1793—1858) обосновал метод синтеза сопряженных поверхностей

в плоских и пространственных зацеплениях с помощью производящей поверхности. Английский ученый Р. Виллис (1800—1875) доказал основную теорему плоского зацепления и предложил аналитический метод исследования планетарных зубчатых механизмов. Немецкий машиновед Ф. Рело (1829—1905) разработал графический метод синтеза сопряженных профилей, известный в настоящее время как «метод нормалей». Рело также является автором работ по структуре (строению) и кинематике механизмов. Русский ученый Х. И. Гохман (1851—1916) одним из первых опубликовал работу по аналитической теории зацепления.

Значительный вклад в динамику машин внес своими трудами «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847—1921). Он был не только основоположником современной аэродинамики, но и автором целого ряда работ по прикладной механике и теории регулирования хода машин.

Развитию механики машин способствовали работы Н. П. Петрова (1836—1920), заложившего основы гидродинамической теории смазки, В. П. Горячкина (1868—1935), который разработал теоретические основы расчета и построения сельскохозяйственных машин, вся сложность расчета которых заключается в том, что их исполнительные механизмы должны воспроизводить движения руки человека.

Русский ученый Л. В. Ассур (1878—1920) открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, применяемую и сейчас при их анализе и синтезе. Он же разработал метод «особых точек» для кинематического анализа сложных рычажных механизмов. А. П. Малышев (1879—1962) предложил теорию структурного анализа и синтеза применительно к сложным плоским и пространственным механизмам.

Существенный вклад в становление механики машин как цельной теории машиностроения внес И. И. Артоболевский (1905—1977). Он является организатором советской школы теории механизмов и машин; им написаны многочисленные труды по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин и теории машин-автоматов, а также учебники, получившие всеобщее признание.

Ученики и последователи И. И. Артоболевского — А. П. Бессонов, Вяч. А. Зиновьев (1899—1975), Н. И. Левитский, Н. В. Умнов, С. А. Черкудинов и многие другие — своими работами в области динамики машин (в том числе акустической и неголономной), оптимизационного синтеза механизмов, теории машин-автоматов и в других областях теории механизмов и машин содействовали дальнейшему ее развитию.

В 30-е и последующие годы большой вклад в теорию механизмов и машин внесли своими исследованиями Н. Г. Бруевич, один из создателей теории точности механизмов, Г. Г. Баранов (1899—1968), автор трудов по кинематике пространственных механизмов, С., Н. Кожевников, разработавший общие методы динамического

анализа механизмов с упругими звеньями и механизмов тяжелонагруженных машин.

Следует отметить труды ученых одной из старейших кафедр нашей страны — кафедры теории механизмов и машин МВТУ им. Н. Э. Баумана, где курс прикладной механики создал и начал впервые в 1872 г. читать Ф. Е. Орлов (1843—1892). В дальнейшем курс отрабатывался и углублялся как в методическом, так и теоретическом направлении: Д. С. Зернов (1860—1922) расширил теорию передач; Н. И. Мерцалов (1866—1948) дополнил кинематическое исследование плоских механизмов теорией пространственных механизмов и разработал простой и надежный метод расчета маховика; Л. П. Смирнов (1877—1954) привел в строгую единую систему графические методы исследования кинематики механизмов и динамики машин; В. А. Гавриленко (1899—1977) разработал теорию эвольвентных зубчатых передач; Л. Н. Решетов развил теорию кулачковых механизмов и положил начало теории самоустанавливающихся механизмов.

В настоящее время коллектив кафедры работает над совершенствованием учебного курса теории механизмов и машин. Стремительное развитие новой техники поставило новые проблемы и перед высшим образованием. Поэтому в курс теории механизмов и машин введены разделы, посвященные изнашиванию, влиянию упругости звеньев на движение механизма, виброактивности и виброзащите, проектированию манипуляторов, управлению системой механизмов. Содержание этих разделов курса изложено в соответствующих главах учебника.

Глава 1 Проблемы теории механизмов и машин

Как бы ни называли наш технический век — веком космоса или автоматики, атомным веком или веком электроники — *основой технического прогресса была и остается машина. Машиностроение — ведущая отрасль народного хозяйства,* производящая машины, механизмы и оборудование для целого ряда других отраслей, это — их материально-техническая база. От уровня развития машиностроения, от степени совершенства машин в значительной степени зависит производительность общественного труда и благосостояние народа. Поэтому в планах экономического и социального развития нашей страны предусматривается опережающее развитие машиностроения; перед ним стоят такие задачи, как освоение новых конструкций машин и механизмов, средств автоматизации, позволяющих использовать высокопроизводительные энерго- и материалосберегающие технологии, обеспечение необходимой надежности и долговечности машин и механизмов для различных отраслей народного хозяйства, повышение их экономичности и производительности.

Задачи перед машиностроением стоят весьма сложные. Машина должна быть прочной, надежной в работе, высокопроизводительной, но вместе с тем и легкой, с минимальными материалоемкостью и энергозатратами, не должна загрязнять окружающую среду, должна соответствовать требованиям технической эстетики и эргономики. Чтобы успешно решать эти задачи, чтобы создавать хорошие машины, отвечающие современным требованиям, специалистам в области машиностроения *нужны знания основ целого ряда наук, в том числе теории механизмов и машин.*

Кинематическая схема механизма является «скелетом» реальной конструкции машины. Выбор и проектирование схемы механизма определяет первый и основной этап проектирования машины. Выбор размеров и материала деталей будущей машины определяет следующий этап проектирования конструкций. Проектирование

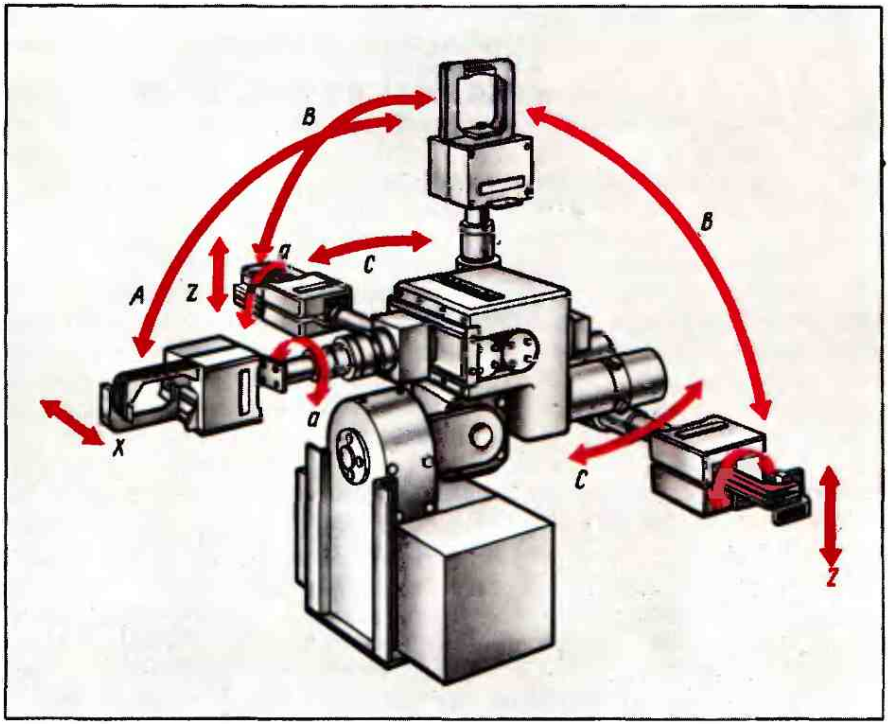


Рис. 1.1

завершается выбором методов и средств изготовления той или иной конструкции. Даже из этих простых рассуждений ясно, что два последних этапа проектирования базируются на первом, определяющем этапе. Поэтому трудно переоценить роль теории механизмов и машин как теоретической основы проектирования машин.

Теория машин и механизмов в настоящем ее виде является комплексной наукой, в которой проблемы структуры, кинематики и динамики машин, их анализа и синтеза тесно переплетаются с проблемами оптимального проектирования и управления.

Одним из основных направлений развития современной техники является *автоматизация всех видов производства.* Большой вклад в решение этой задачи внесут робототехнические системы. Родившееся на страницах научно-фантастических произведений слово «робот» стало общепринятым научным термином, означающим высокоорганизованную техническую систему, способную не только выполнять разнообразные механические операции, но и самостоятельно решать возникающие при этом определенные комплексы логических задач.

Уже сейчас в промышленности многие виды робототехнических систем выполняют операции загрузки, складирования, сборки простейших узлов (рис. 1.1.). Если робот оснащен манипуляторами

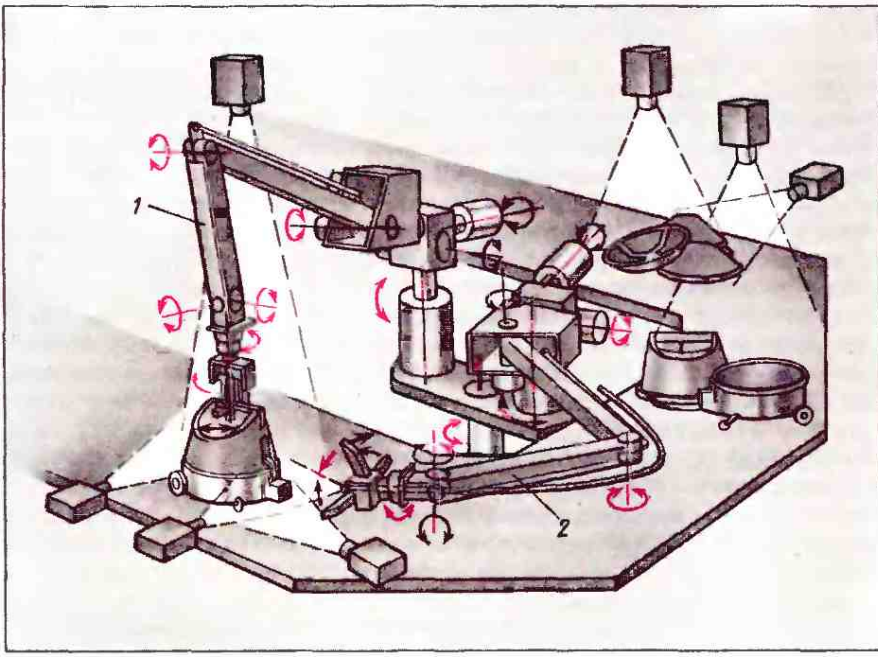


Рис. 1.2

1 и *2*, системой восприятия и обработки информации о состоянии внешней среды и свойствах объектов, с которыми он оперирует (рис. 1.2), то собранная информация используется затем в процессе реализации заданной программы.

Наличие большого объема информации о технологическом процессе, о состоянии среды, об относительном расположении в пространстве объектов манипулирования открывает широкие возможности автоматизации разнообразных операций, включая такие тонкие, как сварка элементов сложной формы, сборка узлов с компактным расположением деталей. При этом робототехническая система выбирает нужные детали из полного комплекта, поступающего на рабочую позицию, регулирует транспортные потоки. В конечном счете именно такие *робототехнические системы окажутся элементами, связывающими отдельные технологические операции в единую цепь полностью автоматизированного производства.* Здесь, говоря об автоматизации производства, мы имеем в виду не те узкоспециализированные машины-автоматы, которые создаются для выпуска определенного вида продукции. Речь идет о широком использовании универсального оборудования с числовым программным управлением, переналадка которого сводится, по сути дела, к смене программы работы.

Нормальное безотказное функционирование такого производства возможно лишь при условии организации многоуровневой системы управления, построенной на базе электронно-вычисли-

тельной техники. *Изучение совместной работы машин и управляющих ЭВМ, разработка необходимых алгоритмов и программ* — тоже одна из задач теории механизмов и машин.

С помощью автоматических манипуляторов с программным управлением можно воспроизводить большое число операций по транспортировке обрабатываемых объектов, закреплению и раскреплению их в обрабатывающих машинах, упаковке, расфасовке, контрольно-измерительные операции и пр. Подобные автоматические машины и системы уже нашли и будут далее находить применение не только при проведении научных исследований и работ в космосе, морских глубинах и на дне океанов, под землей, но и для освобождения человека от тяжелого физического труда. Замена человека роботом на всех тяжелых и утомительных операциях имеет громадное социальное значение, оставляя человеку выполнение творческих и интеллектуальных функций управления и введения в систему необходимой информации.

Рабочие органы автоматических машин и систем, как правило, представляют собой по структуре пространственные кинематические цепи со многими степенями свободы (см. рис. 1.2). В этой связи перед современной теорией машин и механизмов возникают новые задачи по структурному, кинематическому и динамическому анализу и синтезу различных схем механизмов роботов, манипуляторов, шагающих и других машин и систем. Должны быть решены *задачи устойчивости движения рабочих органов,* изучены колебательные процессы, возникающие в период их движения, рассмотрены *задачи, связанные с оптимальными законами движения рабочих органов, разработаны алгоритмы движения этих органов.*

При решении задач механики требуется учитывать основные параметры приводов, их влияние на динамику управляемых ими механизмов. *Проблема разработки приводов* и систем управления роботами, манипуляторами, шагающими и другими машинами является одной из важнейших в создании машин подобного типа. При решении этих проблем возникают вопросы создания систем с большой надежностью, оптимальными габаритами, малой инерционностью, обладающих широкими диапазонами скоростей.

Промышленные роботы и манипуляторы, управляемые человеком-оператором или программным устройством, могут быть отнесены к роботам первого поколения. В настоящее время должны получить быстрое развитие работы по созданию роботов последующего поколения, обладающих некоторыми органами чувств человека, например осязанием, слухом, зрением, обонянием, реагирующих и на неощутимую человеком информацию, например на ультразвук, вибрации, электромагнитные и тепловые поля и т. п. К роботам еще более высокого поколения будут относиться устройства, обладающие искусственным интеллектом. Сложные задачи предстоит решить по разработке способа общения человека с роботом, изучению характеристик человека-оператора в системе «человек—робот», а также исследованию распределения функций между человеком и роботами, обладающими разной степенью автономности.

Здесь открываются перспективы по созданию роботов-санитаров, роботов-хирургов и др.

Воистину *революционную роль в системах управления автоматизацией производства сыграло появление ЭВМ.* С помощью ЭВМ стал возможен анализ многозвенных, с большим числом степеней свободы механизмов, решение задач оптимального синтеза как отдельных механизмов, так и сложных машин автоматического действия, решение задач проектирования многокритериальных и многопараметрических машинных устройств, программное управление большинством современных машин, управление новыми машинами с устройствами биомеханического вида типа манипуляторов, роботов, шагающих машин и др.

Вновь создаваемые машины-автоматы должны отвечать требованиям высокой эффективности выполнения заданного технологического процесса и иметь автоматическое управление, максимально освобождающее человека от контроля за работой машины.

В целях повышения производительности труда, увеличения количества выпускаемой продукции, улучшения экономических показателей производства будут создаваться не только машины-автоматы, но и *системы машин автоматического действия* в форме различных поточных автоматических линий, переходящих в безлюдные заводы-автоматы. В этих линиях в одну общую систему будут увязаны основные технологические процессы с такими процессами, как транспортировка, контроль продукции, упаковка, счет выпускаемых изделий и др. Это могут быть поточные линии обычного линейного типа, роторные линии, кольцевые линии с использованием промышленных роботов.

Отличительной чертой машин-автоматов и систем автоматического действия ближайшего будущего будет высокий уровень управления ими по самым различным параметрам, критериям и показателям. Системы управления в зависимости от того, какие требования предъявляются к управляемому объекту, и условий, в которых он работает, могут иметь логические элементы электронного, пневматического, гидравлического и механического типов. Системы управления могут содержать блок памяти и блоки, обеспечивающие *автоматическую поднастройку и адаптацию управляемых объектов,* позволяющие качественно выполнять требуемый технологический процесс при изменившихся внешних условиях.

Так как при решении задач синтеза механизмов мы имеем дело чаще всего с многокритериальными системами, то задачи синтеза связаны обычно с поиском оптимальных вариантов. Нахождение оптимальных вариантов или областей, в которых существуют эти варианты, требует *развития теории оптимального синтеза механизмов.* Решение подобных задач, как правило, возможно только с помощью ЭВМ, а это требует разработки соответствующих алгоритмов и программ.

Большие задачи стоят в области *анализа и синтеза механизмов передач.* Здесь в первую очередь надо отметить необходимость дальнейшего развития синтеза зубчатых зацеплений, особенно

пространственных. Необходимо также дальнейшее развитие теории и методов проектирования сложных зубчатых редукторов с планетарными и дифференциальными схемами. Быстро развиваются теория и методы синтеза волновых передач. Почти все отрасли промышленности нуждаются в надежных механизмах с бесступенчатым изменением передаточных функций. Должна получить развитие теория механизмов, осуществляющих движение с остановками, типа мальтийских, храповых, рычажных и пр.

Задача синтеза системы привод—ведомый механизм, одна из основных задач теории механизмов и машин, должна ставиться и решаться по-новому на основе использования современных вычислительных алгоритмов и вычислительной техники. Это относится в первую очередь к весьма распространенным системам, в которых применяется гидравлический или пневматический привод линейного или вращательного движения. Что касается выбора оптимальной структуры системы, то на первых стадиях следует опираться на знания и опыт проектировщика, быстро возрастающие в условиях широкого использования диалога человек—ЭВМ, сопоставления различных структур с оптимизированными (а не произвольно выбранными) параметрами, накопления информации о предельных возможностях того или иного варианта.

В последние десятилетия существенно повысились рабочие скорости машин, что привело не только к увеличению динамических нагрузок на звенья механизмов и рабочие органы машины, но и к существенному увеличению уровня вибраций и порождаемого вибрациями шума. Вибрации сопутствуют работе любой машины, поэтому в последние годы *проблема виброзащиты машин и снижения уровня шума* машин также изучается в курсе теории машин и механизмов. При этом следует отметить, что *изучение динамики систем «человек—машина—среда»* также становится предметом теории машин и механизмов. Эта задача особенно актуальна для разработки эффективных средств *виброзащиты человека-оператора,* управляющего высокоскоростными современными транспортными средствами и летательными аппаратами, а также машинами вибрационного принципа действия. В этих машинах резонансные и вибрационные эффекты дают возможность построить высокоэкономичные и высокопроизводительные машины для разработки твердых горных пород, виброизмельчения, виброперемешивания, вибросепарирования, вибротранспортировки сыпучих сред, виброформовки, вибропроката железобетонных изделий и др.

Повышение энергетических, силовых и скоростных характеристик машин автоматического действия, высокие требования к их точности и надежности обусловливают развитие в ближайшие годы методов динамического исследования и расчета машин как в стационарных (установившихся), так и в переходных режимах. Особое значение изучение неустановившихся режимов имеет для транспортных машин, грузоподъемных машин, вибромашин и т. д.

Большое значение для техники имеет *развитие динамики машин с переменной массой звеньев,* например при исследовании техно-

логических машин с изменяемой массой обрабатываемого объекта: конвейеров, погрузочно-разгрузочных, печатных, намоточных машин. Но не только массы могут быть переменными, и сама структура механизмов в отдельных случаях может изменяться.

Особую роль в развитии динамики машин играют вопросы колебаний. С одной стороны, это вопросы *борьбы с вибрациями* путем создания виброустойчивых конструкций машин и механизмов, с другой стороны — это использование резонансного эффекта вибраций для выполнения различных технологических процессов и *создание новых вибрационных механизмов,* обладающих требуемыми кинематическими характеристиками.

Как уже отмечалось, вибрации сопутствуют работе всех машин и часто оказываются причиной, сдерживающей дальнейший прогресс в той или иной области техники. Так, например, дальнейшее увеличение быстроходности высокоскоростных роторных машин ограничено вибростойкостью ротора и подшипниковых опор, повышение мощности паровых и газовых турбин — вибрациями лопаток последних ступеней, создание мощных вертолетов — колебаниями рабочих лопастей, повышение точности металлорежущих станков — вибрациями режущего инструмента и станины, создание высокоточных и надежных систем автоматического управления — вибрациями ее отдельных элементов.

Вибрации вызывают большие напряжения в конструкциях, что приводит к их поломкам и разрушениям главным образом усталостного характера и, как следствие, к серьезным авариям.

Вибрации являются источником вредного шума: шум не только вредно влияет на физиологию человека, но приводит к так называемой акустической усталости материала. Вибрации искажают основное движение элементов машин, механизмов и систем управления по предписанным кинематическим законам, порождают неустойчивость заданного закона движения и часто приводят к отказу всей системы.

Вибрации машин оказывают непосредственное физиологическое влияние на человека, снижают его функциональную деятельность и работоспособность, поражают отдельные системы живого организма.

Вместе с тем вибрации ограниченной интенсивности и нормированного времени действия могут оказывать положительное влияние на живой организм. Известны методы вибростимуляции, вибромассажа, эффективного физиологического действия вибраций в лечебных целях с использованием специальных вибрационных механизмов и установок. В этом направлении открываются широкие перспективы для новых исследований.

Новый тип машин, где вибрации играют полезную роль, носит название машин вибрационного принципа действия. Они получили широкое применение в последние годы в самых различных отраслях техники благодаря экономичности, обусловленной использованием эффекта резонанса. Машины, приборы, оборудование и стенды

вибрационного принципа действия выполняют самые разнообразные технологические процессы.

Наука о вибрациях изучает методы обнаружения, измерения и возможного уменьшения их интенсивности. Наряду с этим она дает методы определения последствий вибраций, когда их полностью нельзя устранить, например расчет амплитуд вибраций для выяснения долговечности машин из условий накопления подтверждаемости сведений об усталости материала, способы изоляции шума, а также методы определения допустимых доз воздействия динамических нагрузок. Для получения информации о состоянии машин того или иного агрегата вибрации играют роль наиболее достоверного средства диагностики, позволяют избежать аварийных ситуаций.

Очень важное значение приобретает *изучение и прогноз ресурса машин,* т. е. срока их службы до прихода их в состояние, когда по тем или иным признакам дальнейшая их эксплуатация недопустима. По признаку прочности ресурс определяется просто разрушением (в машиностроении — преимущественно усталостным), по признаку шума или повышения вибраций — нормой допустимых амплитуд и т. д. Вибрация является едва ли не единственным средством, которое позволяет сделать какую-либо предварительную и достоверную оценку ресурса работы машин путем наблюдения за ее изменением во времени, не допуская аварийных ситуаций.

Другой проблемой динамики машин, решающей важную социальную задачу, является *акустическая динамика машин,* т. е. проблема изучения причин и источников шумовых эффектов в машинах и разработка задач динамики машин, связанных с полной или частичной локализацией шумов определенных уровней.

Развитие современных математических методов и электронно-вычислительной техники позволили решить ряд указанных выше проблем, однако необходимо еще очень много сделать в направлении дальнейшего совершенствования методов, дальнейшего сближения современной математики с теорией механизмов и машин.

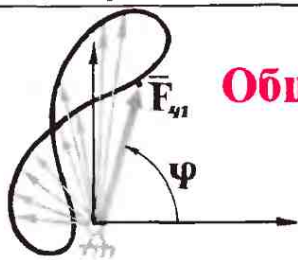
Учет упругости звеньев в машинах позволил выявить колебательные явления в сложных кинематических цепях и определить реальные нагрузки на звенья и кинематические пары, давать рекомендации по отстройке от резонансов и демпфировать возникающие колебания, решать задачи точности заданного закона движения механизма. В связи с созданием быстроходных машин дальнейшее развитие получат методы автоматической балансировки.

В последнее десятилетие возрос интерес к *теории пространственных механизмов* и в том числе к их динамике, так как эти механизмы находят все большее применение, в частности, в задачах, связанных с внедрением роботов и манипуляторов, в задачах стыковки космических объектов. В этой области разработаны методы описания движения пространственных механизмов с несколькими степенями свободы, их силовой анализ, решены некоторые задачи уравновешивания и колебаний этих систем.

Как всегда, *важнейшей задачей теории машин и механизмов будет развитие экспериментальных методов изучения характеристик*

различных машин и механизмов. При этом особое значение приобретут экспериментальные исследования систем машин автоматического действия в условиях их производственной работы с автоматической регистрацией и обработкой полученной экспериментальной информации на ЭВМ. Следует ожидать быстрый дальнейший прогресс в развитии аппаратуры для динамических исследований, определяемый задачами автоматизации и диктуемый спецификой быстро протекающих во времени динамических процессов современных машин как объектов исследования. Отличительной особенностью современных динамических исследований является их комплексный характер. Они широко проводятся как на натурных объектах (в лабораторных, производственных и эксплуатационных условиях), так и методами математического моделирования с использованием ЭВМ. Получили развитие методы планирования эксперимента, обеспечивающие необходимую точность получаемой информации.

Развитие экспериментальной динамики подготовило условия для разработки и совершенствования методов контроля и диагностики автоматического оборудования, работающего в промышленности. Разработка методов технической диагностики применительно к машинам-автоматам, промышленным роботам и манипуляторам, двигателям, летательным аппаратам основана на выделении объективных критериев качества, определяющих работоспособность и одновременно признаки дефектных состояний механизмов.



Общие методы определения кинематических и динамических характеристик механизмов, машин и систем машин



Строение механизмов

Механизм является системой твердых тел. Поэтому механизмы имеют как весьма простое, так и достаточно сложное и разнообразное строение (структуру). Строением механизма определяются такие его важнейшие характеристики, как виды осуществляемых движений, способы их преобразования, число степеней свободы. Формирование механизма, т. е. соединение отдельных его частей в единую систему, сопровождается наложением связей. Правильное их распределение в строении механизма в сильной степени предопределяет его надежную эксплуатацию. Поэтому при проектировании нужно из множества разнообразных механизмов выбрать самый подходящий и правильно подобрать его основные структурные элементы. А для этого прежде всего надо знать основные виды современных механизмов, их структурные характеристики, закономерности их строения.

§ 2.1 Основные определения

Твердые тела, из которых образуется механизм, называют з в е н ь я м и. При этом имеются в виду как абсолютно твердые, так и деформируемые и гибкие тела. Жидкости и газы в теории механизмов звеньями не считаются. Звено — либо одна деталь, либо совокупность нескольких деталей, соединенных в одну кинематически неизменяемую систему. Звенья различают по конст-

руктивным признакам (коленчатый вал, шатун, поршень, зубчатое колесо и т. д.) и по характеру их движения. Например, звено, вращающееся на полный оборот вокруг неподвижной оси, называют кривошипом, при неполном обороте — коромыслом; звено, совершающее поступательное прямолинейное движение, — ползуном и т. д. Неподвижное звено механизма для краткости называют стойкой; понятие неподвижности стойки для механизмов транспортных машин, в частности летательных аппаратов, — условное, поскольку в этом случае сама стойка движется. Так, например, на рис. 2.1, *а* изображена энергетическая машина — двигатель внутреннего сгорания (ДВС), в котором поступательное движение поршня *3* (по характеру движения — ползун) под действием силы давления газов в цилиндре *4* (неподвижное звено — стойка) преобразуется с помощью шатуна *2* во вращательное движение коленчатого вала (кривошипа) *1*, к которому приложена некоторая нагрузка (момент сил сопротивления); на рис. 2.1, *б* изображена структурная схема механизма ДВС.

Кинематической парой (сокращенно — парой) называют подвижное соединение двух соприкасающихся звеньв (рис. 2.2). Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары, называют элементом пары. Для того чтобы элементы пары находились в постоянном соприкосновении, пара должна быть замкнута геометрическим (за счет конструктивной формы звеньев) или силовым (силой тяжести, пружиной, силой давления жидкости или газа и т. п.) способом.

Кинематические пары во многом определяют работоспособность и надежность машины, поскольку через них передаются усилия от одного звена к другому; в кинематических парах, вследствие относительного движения, возникает трение, элементы пары находятся в напряженном состоянии и в процессе изнашивания. Так, например, при работе механизма ДВС, изображенного на рис. 2.1, *а*, изнашиваются гильза цилиндра и поршневые кольца, коренная *А* и шатунная *В* шейки коленчатого вала *1* и т. д. Поэтому правильный выбор вида кинематической пары, ее геометрической формы, размеров, конструкционных и смазочных материалов имеет большое значение при проектировании машин.

Систему звеньев, образующих между собой кинематические пары, называют кинематической цепью. Различают замкнутые и незамкнутые кинематические цепи. В замкнутой цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары, в незамкнутой цепи есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару. Применяя термин «кинематическая цепь», можно дать следующее определение механизма: механизм —кинематическая цепь, в состав которой входит неподвижное звено (стойка) и число степеней свободы которой равно числу обобщенных координат, характеризующих положение цепи относительно стойки. Например, на схеме кривошипно-ползунного механизма ДВС с

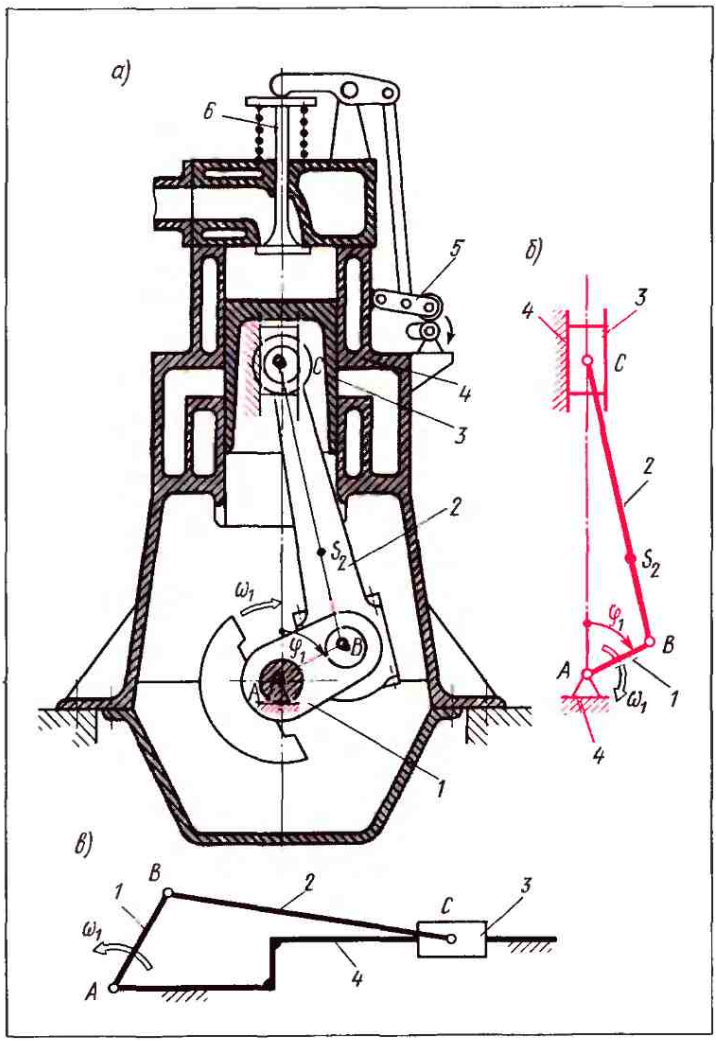

а)
б
5
C
4
3
2
S_2
ω_1
φ_1
B
A
1
б)
4
3
C
2
S_2
φ_1
B
A
ω_1
1
4
в)
1
B
2
C
3
ω_1
A
4

Рис. 2.1

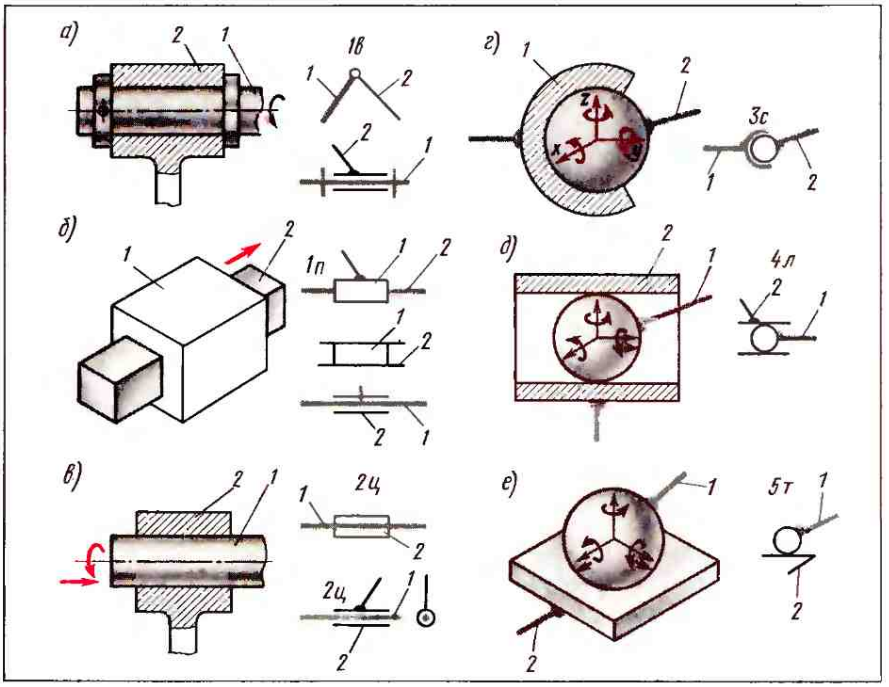


Рис. 2.2

одной степенью свободы ($W=1$) (рис. 2.1, *б*) показана одна обобщенная координата механизма в виде угловой координаты φ_1 звена *1*; производная $\varphi_1=\omega_1$ — угловая скорость звена *1*.

Неподвижность звена показывают на схемах штриховкой. Различают входные и выходные звенья механизма. Выходным называют звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм. Входным называют звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемое движение выходного звена. Число входных звеньев обычно равно числу степеней свободы механизма, т. е. числу его обобщенных координат, но возможно и несовпадение их.

При изображении механизма на чертеже различают его структурную (принципиальную) схему с применением условных обозначений звеньев и пар (без указания размеров звеньев) и кинематическую схему с размерами, необходимыми для кинематического расчета. На схемах звенья обозначают цифрами, а пары и различные точки звеньев — буквами, например на рис. 2.1, *б*: *A* — вращательная пара *1-4*, S_2 — точка (центр масс) шатуна *2*.

§ 2.2 Классификация кинематических пар

Кинематические пары различают (по Рело) по характеру соприкосновения звеньев: пару называют *низшей*, если элементы звеньев соприкасаются только по поверхности, и *высшей*, если только по линиям или в точках. При этом линейный или точечный контакт понимается как первоначальный — при соприкосновении звеньев без усилия, — а под нагрузкой звенья, образующие высшую пару, будут соприкасаться по некоторой фактической поверхности, называемой пятном контакта.

Кинематические пары классифицируют по числу H *степеней свободы* в относительном движении звеньев (подвижность пары) и по числу S *условий связи* (ограничений), накладываемых парой на движение одного звена относительно другого (по И. И. Артоболевскому) [1]. При этом предполагается, что все связи — геометрические, налагающие ограничения только на координаты точек звена, входящего в кинематическую пару, в его относительном движении.

Так как для свободного тела в пространстве число степеней свободы равно шести, то величины H и S связаны соотношением: $H = 6 - S$, где $S = 1, 2, 3, 4$ или 5. При $S = 0$ пары не существует, а имеются два тела, движущихся независимо друг от друга; при $S = 6$ кинематическая пара становится жестким соединением деталей, т. е. одним звеном. По величине S определяют класс кинематической пары: различают одноподвижные пары (V класса, $H = 1$, $S = 5$), двухподвижные (IV класса, $H = 2$, $S = 4$), трехподвижные (III класса, $H = 3$, $S = 3$), четырехподвижные (II класса, $H = 4$, $S = 2$) и пятиподвижные (I класса, $H = 5$, $S = 1$). Ниже дано несколько примеров кинематических пар, их условных изображений и обозначений на структурных схемах.

Вращательная пара (рис. 2.2, *а*) — одноподвижная (условное обозначение 1 *в*), допускает лишь относительное вращательное движение звеньев вокруг оси (показано стрелкой); звенья *1, 2* соприкасаются по цилиндрической поверхности; следовательно, это низшая пара, замкнутая геометрически. Роль такой кинематической пары выполняет и более сложная конструкция — шарикоподшипник.

Поступательная пара (рис. 2.2, *б*) — одноподвижная (условное обозначение 1 *п*), с геометрическим замыканием, низшая, допускает лишь прямолинейное поступательное относительное движение звеньев.

Цилиндрическая пара (рис. 2.2, *в*) — двухподвижная (2 *ц*), с геометрическим замыканием, низшая, допускает независимые вращательное и поступательное относительные движения звеньев.

Сферическая пара (рис. 2.2, *г*) — трехподвижная (3 *с*), допускает три независимых относительных вращения звеньев вокруг осей x, y, z; пара — низшая, с геометрическим замыка-

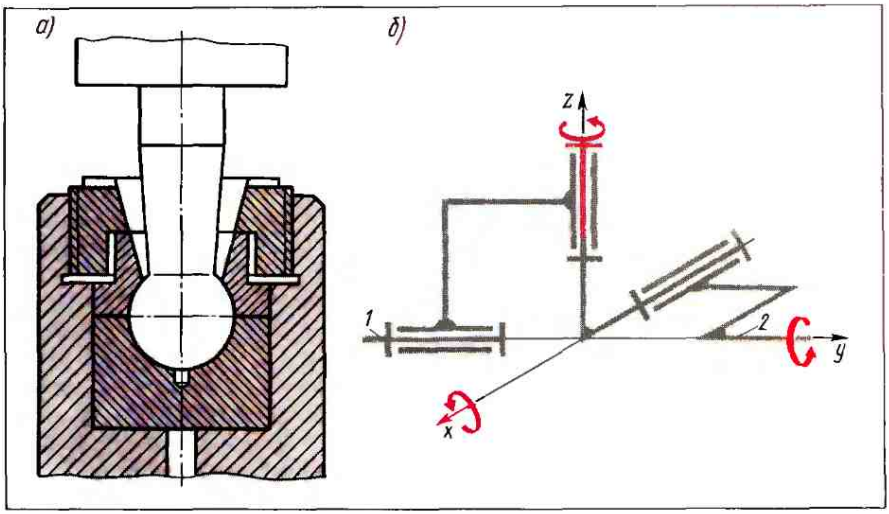


Рис. 2.3

нием. На рис. 2.3, *а* дан пример конструкции сферической пары, применяемой в прессах. В некоторых механизмах (промышленные роботы, манипуляторы) шаровой шарнир между звеньями *1* и *2* заменяют кинематическим соединением с двумя дополнительными звеньями и тремя вращательными парами (рис. 2.3, *б*).

Примеры четырех- и пятиподвижной пар и их условные обозначения (4 *л* и 5 *т*) даны на рис. 2.2, *д, е*. Возможные независимые относительные движения звеньев (вращательные и поступательные) показаны стрелками. Это высшие пары, поскольку контакт элементов звеньев линейный (шар в цилиндре) и точечный (шар на плоскости). Пара 4*л* — с геометрическим замыканием, а пара 5 *т* требует силового замыкания.

Одно из преимуществ низших кинематических пар по сравнению с высшими — возможность передачи больших сил, поскольку контактная поверхность соприкасающихся звеньев низшей пары может быть весьма значительна. Применение высших пар позволяет уменьшить трение в машинах (классический пример — шарикоподшипник) и получать нужные, самые разнообразные законы движения выходного звена механизма путем придания определенной формы звеньям, образующим высшую пару.

§ 2.3 Виды механизмов и их структурные схемы

Механизмы классифицируют по различным признакам, и в первую очередь их делят *на механизмы с низшими и высшими парами;* те и другие могут быть плоскими и пространственными. Плоским называется механизм, все подвижные точки которого движутся в параллельных плоскостях. Механизм является

пространственным, если подвижные точки его звеньев описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях.

Наиболее распространенные механизмы с низшими парами — рычажные, клиновые и винтовые; с высшими парами — кулачковые, зубчатые, фрикционные, мальтийские и храповые. В названиях ряда механизмов отражены их конструктивные признаки и характер движения входного и выходного звеньев. Например, термин «кривошипно-коромысловый механизм» означает, что механизм преобразует непрерывное вращательное движение входного звена (кривошипа) в возвратно-вращательное движение выходного звена (коромысла). В названиях иногда учитывается число степеней свободы механизма. Например, различают «зубчатый редуктор» — зубчатый механизм с одной степенью свободы и «зубчатый дифференциал» — механизм с двумя (или более) степенями свободы*. Механизмы классифицируют и по их назначению: «кривошипно-ползунный механизм поршневого компрессора», «кулачковый механизм двигателя» и т. д. Ниже даны примеры механизмов, применяемых в различных машинах.

Примеры плоских механизмов с низшими парами. Кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 2.1: *а* — конструкция; *б* — схема) — один из самых распространенных, он является основным механизмом в поршневых машинах (двигатели внутреннего сгорания, компрессоры, насосы), в ковочных машинах и прессах и т. д. На рис. 2.1, *в* изображена схема внеосного (дезаксиального) кривошипно-ползунного механизма.

Шарнирный четырехзвенный механизм (рис. 2.4,*а*) служит для преобразования одного вида вращательного движения в другое и может быть в зависимости от размеров звеньев кривошипно-коромысловым, двухкривошипным и двухкоромысловым; применяется в прессах и ковочных машинах, качающихся конвейерах, прокатных станах, муфтах сцепления, приборах и т. д. На рис. 2.4,*а* звено *1* — кривошип, *2* — шатун, *3* — коромысло, *4* — стойка. Шарнирный четырехзвенник применяют и для случая, когда одна из его точек должна двигаться по заданной траектории; например, на рис. 2.4,*б* изображена структурная схема двухкоромыслового механизма портального крана со стрелой *2*, точка *F* которой на рабочей части своей траектории перемещается по прямой *FF'*; по характеру движения звенья *1*, *3* — коромысла, *2* — шатун; *4* — стойка.

Кулисный механизм служит для преобразования одного вида вращательного движения (звена *1*) в другое (звена *3* на рис. 2.4,*в*) или непрерывного вращательного движения (звена *1*) в возвратно-поступательное (звена *5* на рис. 2.4,*д*). Такие четырех- и шестизвенные кулисные механизмы применяют в строгальных и долбежных станках, поршневых насосах и компрессорах, гидро-

---

* Вместо термина «число степеней свободы механизма» применяют также термины «степень подвижности механизма» [1] и «подвижность механизма [7].

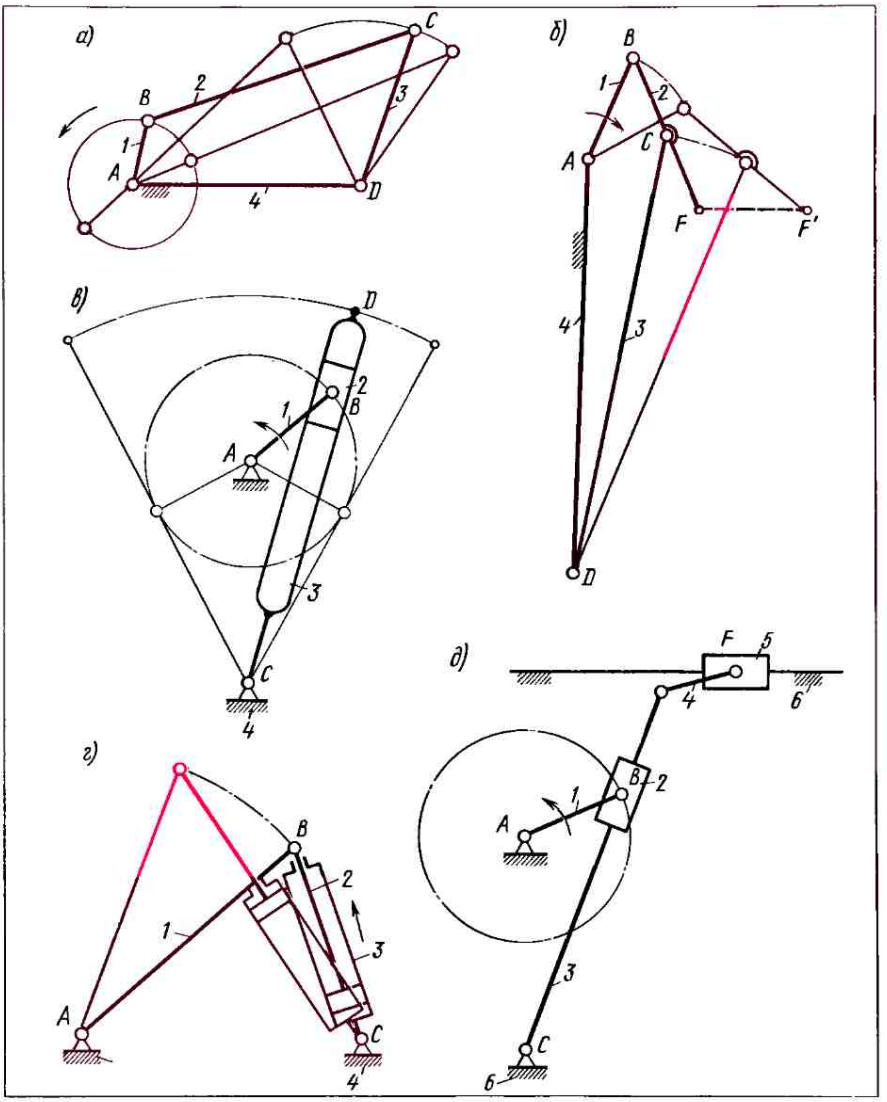


Рис. 2.4

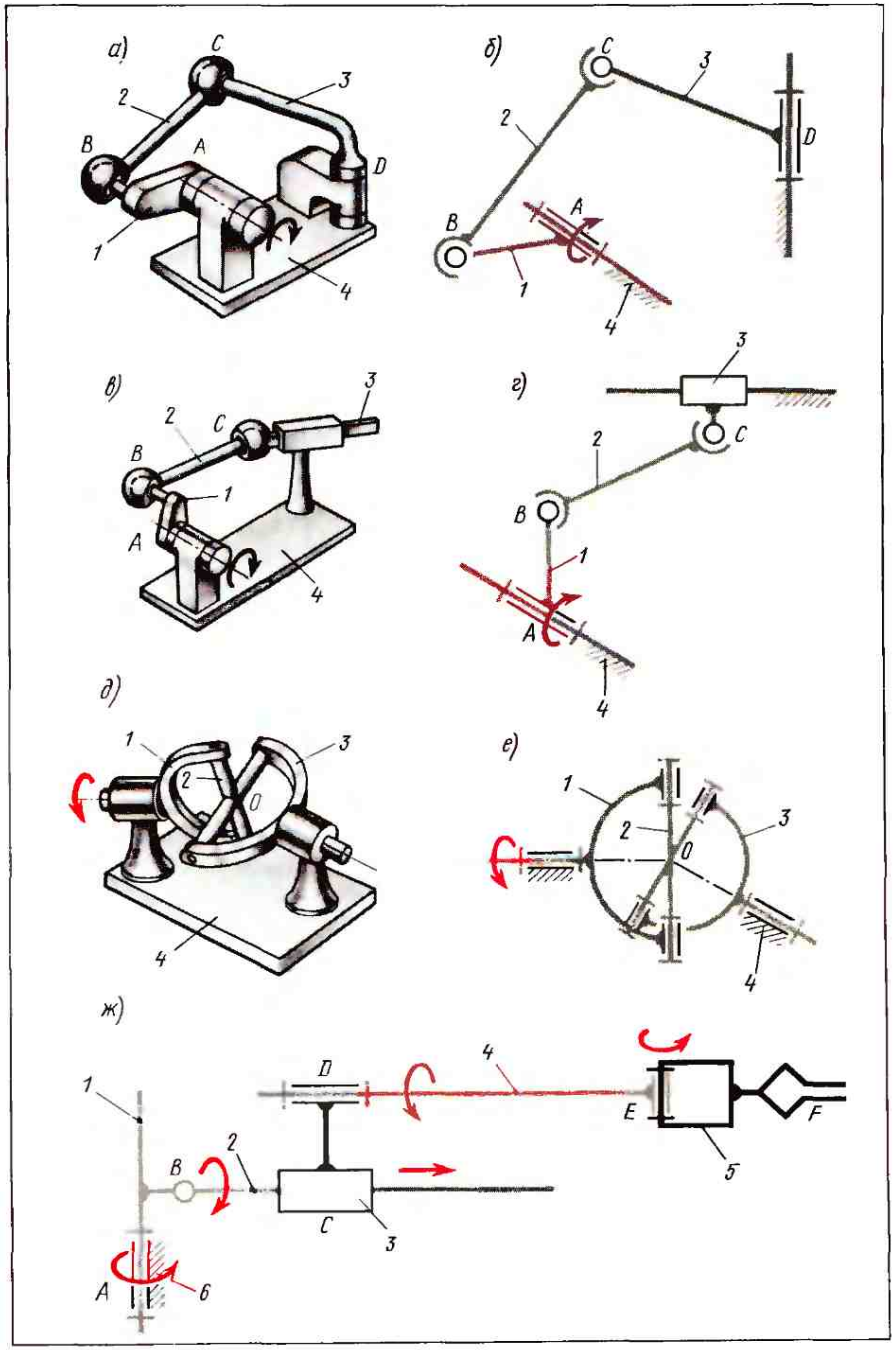

а)
C
2
3
B
A
D
1
4
б)
C
3
2
D
B
A
1
4
в)
3
2
C
B
1
A
4
г)
3
C
2
B
1
A
4
д)
1
3
2
O
4
е)
1
2
3
O
4
ж)
1
D
4
E
F
B
2
C
3
5
A
6

Рис. 2.5

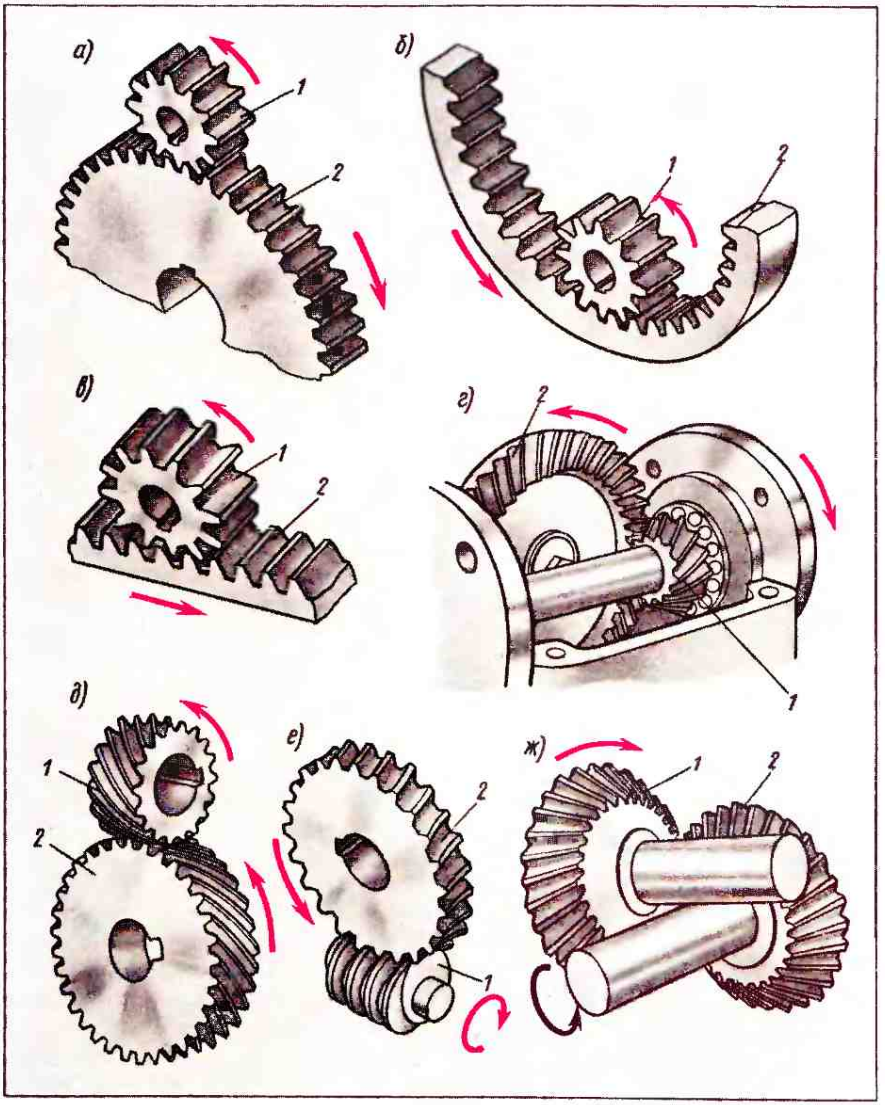


Рис. 2.6

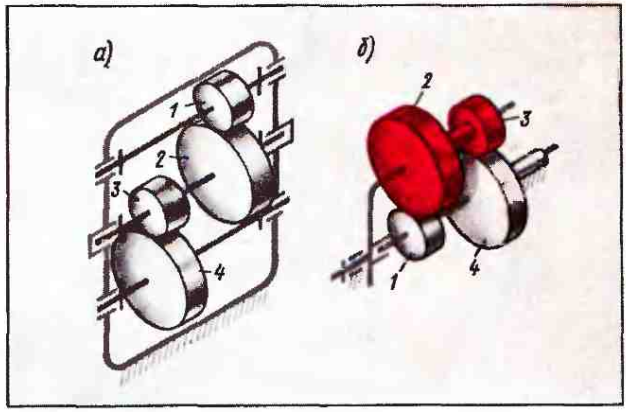


Рис. 2.7

приводах, приборах и т. д. Кулисой обычно называют звено с пазом, по которому перемещается ползун (кулисный камень) *2*. Кулиса *3* может быть качающейся, вращающейся, движущейся поступательно.

В гидроприводах широко применяется разновидность кулисного механизма, в котором кулису с камнем заменяет цилиндр *3* с поршнем *2* (рис. 2.4,*г*). На рис. 2.4,*д* дана структурная схема шестизвенного кулисного механизма поперечно-строгального станка, в котором непрерывное вращательное движение входного звена (кривошипа *1*) посредством звеньев *2, 3, 4* преобразуется в возвратно-поступательное движение выходного звена (ползуна *5* с резцовой головкой); звено *6* — неподвижная часть станка (стойка).

Примеры пространственных механизмов с низшими парами. На рис. 2.5 приведены: *а, б* — модель и схема четырехзвенного механизма *ABCD* (звено *1* — кривошип, *2* — шатун, *3* — коромысло, *4* — стойка); *в, г* — модель и схема кривошипно-ползунного механизма *ABC* (звено *1* — кривошип, *2* — шатун, *3* — ползун, *4* — стойка); *д, е* — модель и схема механизма универсального шарнира (шарнира Гука, или карданной передачи), этот механизм служит для передачи вращательного движения между валами, оси которых пересекаются, и широко применяется в автомобилях, станках, приборах (входное и выходное звенья *1, 3* выполнены в виде вилок, звено *2* — в виде крестовины, звено *4* — стойка; *О* — точка пересечения осей); *ж* — структурная схема основного рычажного механизма одного из видов промышленного робота, это механизм с незамкнутой кинематической цепью *ABCDEF* (звенья *1—5* — подвижные, *6* — стойка, *F* — схват). Промышленные роботы в настоящее время находят все более широкое применение для выполнения самых различных технологических и вспомогательных операций: сборки, сварки, окраски, загрузки и т. п.

Примеры механизмов (плоских и пространственных) с высшими парами. Среди них наибольшее распространение получили зубчатые, кулачковые, фрикционные, мальтийские и храповые механизмы. В зубчатых передачах различают внешнее (рис. 2,6, *а*), внутреннее (рис. 2,6, *б*) и реечное зацепление (рис. 2.6,*в*): звено *1* — шестерня, *2* — колесо (или частный случай колеса — рейка). В зависимости от расположения осей колес зубчатые передачи могут быть с параллельными осями (цилиндрические) (рис. 2.6, *а, б*), с пересекающимися осями (конические) (рис. 2.6, *г*) и со скрещивающимися осями или гиперболоидные передачи, вариантами которых являются винтовые (рис. 2.6, *д*), червячные (рис. 2.6, *е*) и гипоидные (рис. 2.6, *ж*) передачи [2]. В винтовой передаче звенья *1, 2* — косозубые цилиндрические колеса; в червячной передаче звено *1* — червяк, *2* — червячное колесо; в гипоидной передаче звенья *1, 2* — конические колеса.

Широко применяются многозвенные зубчатые передачи: редукторы (рис. 2.7, *а*) и планетарные зубчатые механизмы (рис. 2.7, *б*). В состав планетарного редуктора входят не только колеса *1* и *4* с неподвижными осями, но и колеса *2, 3* с движущейся по окружности осью.

В последнее время в устройствах приборов и сис-

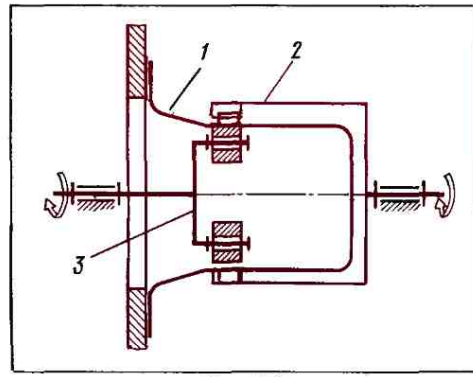


Рис. 2.8

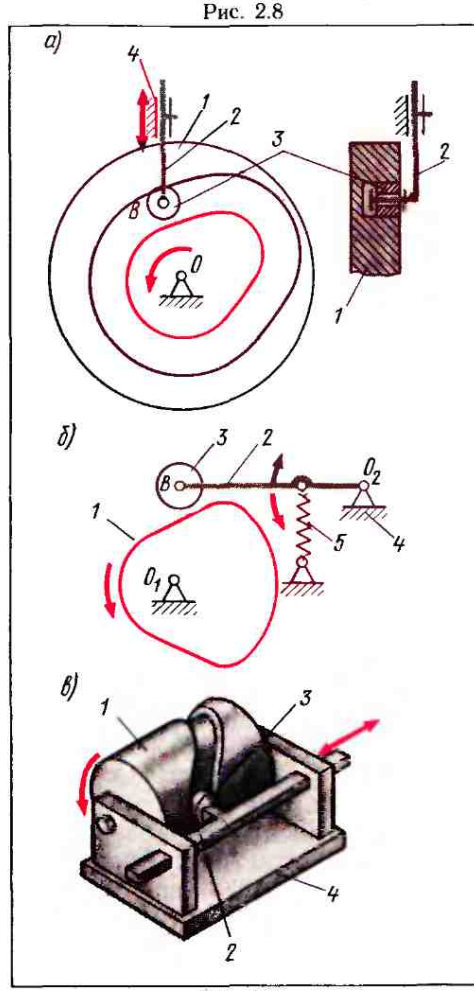


Рис. 2.9

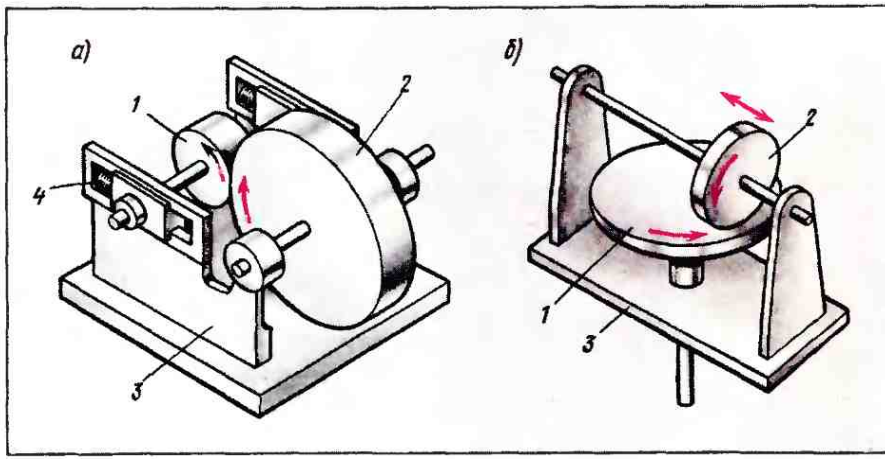


рис. 2.10

тем управления все более широкое применение находят волновые зубчатые передачи с гибкими звеньями, дающие возможность получать большие передаточные отношения, высокую кинематическую точность и передавать механическое движение через герметичную стенку; в этом случае (рис. 2.8) гибкое колесо *1* герметично закрепляется на стенке; передача движения осуществляется от генератора волн *3* через гибкое колесо *1* к жесткому колесу *2*. Такая передача весьма целесообразна для управления агрегатами в космосе, в электронной, атомной и химической промышленности (см.: *Куклин В. Б., Шувалова Л. С.* Волновые зубчатые передачи. М., 1971).

В кулачковых плоских и пространственных механизмах, широко применяемых в различных машинах, станках и приборах, высшая пара образована звеньями, называемыми — кулачок и толкатель (звенья *1* и *2* на рис. 2.9). Замыкание высшей пары может быть силовое (например, пружиной *5* на рис. 2.9,*б*) или геометрическое (ролик *3* толкателя *2* в пазу кулачка *1* на рис. 2.9,*а*). Форма входного звена — кулачка определяет закон движения выходного звена — толкателя; ролик применяют с целью уменьшить трение в механизме путем замены трения скольжения в высшей паре на трение качения. На рис. 2.9,*а* вращательное движение входного звена (кулачка *1*) преобразуется в возвратно-поступательное движение выходного звена (толкателя *2*). В механизме, изображенном на рис. 2.9, *б*, толкатель *2* — коромысловый, совершающий возвратно-вращательное движение вокруг оси O_2. На рис. 2.9,*в* изображена модель пространственного кулачкового механизма с вращающимся цилиндрическим кулачком *1* и поступательно движущимся роликовым толкателем *2*; замыкание высшей пары — геометрическое. На рис. 2.1,*а* дан пример применения кулачкового механизма с коромысловым (качающимся) роликовым толкателем *5* для привода выхлопного клапана *6*, через

который производится очистка цилиндра двигателя дизеля от продуктов сгорания.

В фрикционном механизме передача вращательного движения осуществляется посредством трения между звеньями, образующими высшую пару. Простой фрикционный механизм (рис. 2.10, *а*) состоит из двух вращающихся круглых цилиндров *1*, *2* и стойки *3*. Силовое замыкание высшей пары осуществляется пружинами *4*. Фрикционные механизмы используют и в бесступенчатых передачах (рис. 2.10, *б*). При постоянной угловой скорости диска *1* посредством перемещения колеса — катка *2* вдоль своей оси можно плавно изменять его угловую скорость и даже направление вращения.

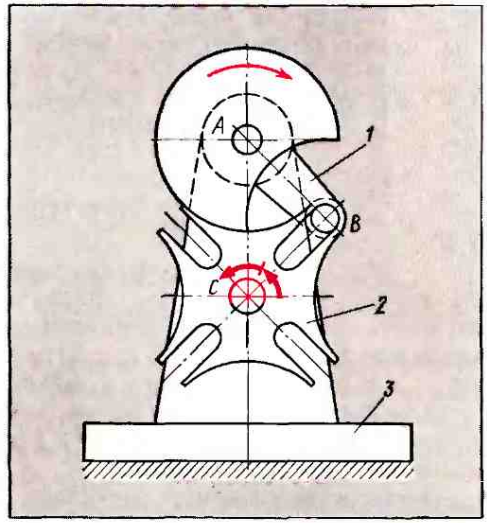


Рис. 2.11

Мальтийский механизм (рис. 2.11) преобразует непрерывное вращение входного звена — кривошипа *1* в прерывистое (с остановами) вращение выходного звена — креста *2*. Механизм имеет стойку *3* и высшую пару, образованную цевкой *B* кривошипа и пазом креста.

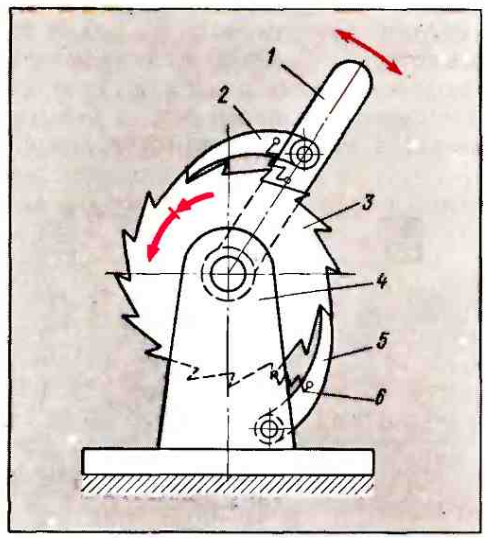


Рис. 2.12

Храповой механизм с ведущей собачкой и стойкой *4* (рис. 2.12) служит для преобразования возвратно-вращательного движения коромысла *1* с собачкой *2* в прерывистое вращательное движение (в одном направлении) храпового колеса *3*. Собачка *5* с пружиной *6* не дает колесу вращаться в обратную сторону. Высшая пара здесь образована собачкой и храповым колесом. Механизм может иметь входное звено и с возвратно-поступательным движением. Мальтийские и храповые механизмы широко применяются в станках и приборах.

Рассмотренные выше механизмы наиболее типичны. Описание значительно большего числа механизмов приводится в специальных справочных изданиях (см.: *Артоболевский И. И.* Механизмы. В 4-х т. М., 1947—1951; *Кожевников С. Н. и др.* Механизмы. Справочное пособие. М., 1976).

§ 2.4 Структурные формулы механизмов

Существуют общие закономерности в структуре (строении) самых различных механизмов, связывающие число степеней свободы W механизма с числом звеньев и числом и видом его кинематических пар. Эти закономерности носят название структурных формул механизмов.

Для пространственных механизмов в настоящее время наиболее распространена формула Малышева, вывод которой производится следующим образом.

Пусть в механизме, имеющем m звеньев (включая стойку), p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 — число одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных пар. Число подвижных звеньев обозначим $n=m-1$. Если бы все подвижные звенья были свободными телами, общее число степеней свободы было бы равно $6n$. Однако каждая одноподвижная пара V класса накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, 5 связей, каждая двухподвижная пара IV класса — 4 связи и т. д. Следовательно, общее число степеней свободы, равное шести, будет уменьшено на величину

$$\sum_{i=1}^{i=5}(6-i)p_i = 5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5,$$

где $i=H$ — подвижность кинематической пары, p_i — число пар, подвижность которых равна i. В общее число наложенных связей может войти некоторое число q избыточных (повторных) связей, которые дублируют другие связи, не уменьшая подвижности механизма, а только обращая его в статически неопределимую систему [7]. Поэтому число степеней свободы пространственного механизма, равное числу степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Малышева:

$$W = 6n-(5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5-q),$$

или в краткой записи

$$W = 6n-\left[\sum_{i=1}^{i=5}(6-i)p_i-q\right]; \qquad (2.1)$$

при $q=0$ механизм — статически определимая система, при $q>0$ — статически неопределимая система*.

* Есть вариант формулы (2.1) с применением класса кинематической пары: $S=6-H$ [3.7].

В общем случае решение уравнения (2.1) — трудная задача, поскольку неизвестны W и q; имеющиеся способы решений сложны и не рассматриваются в данном учебнике. Однако в частном случае, если W, равное числу обобщенных координат механизма, найдено из геометрических соображений, из этой формулы можно найти число избыточных связей (см.: *Решетов Л. Н.* Конструирование рациональных механизмов. М., 1972)

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^{i=5} (6-i)p_i \qquad (2.2)$$

и решить вопрос о статической определимости механизма; или же, зная, что механизм статически определимый, найти (или проверить) W.

Важно заметить, что в структурные формулы не входят размеры звеньев, поэтому при структурном анализе механизмов можно предполагать их любыми (в некоторых пределах). Если избыточных связей нет ($q = 0$), сборка механизма происходит без деформирования звеньев, последние как бы самоустанавливаются; поэтому такие механизмы называют самоустанавливающимися [7]. Если избыточные связи есть ($q > 0$), то сборка механизма и движение его звеньев становятся возможными только при деформировании последних.

Для плоских механизмов без избыточных связей структурная формула носит имя П. Л. Чебышева, впервые предложившего ее в 1869 году для рычажных механизмов с вращательными парами и одной степенью свободы. В настоящее время формула Чебышева распространяется на любые плоские механизмы и выводится с учетом избыточных связей следующим образом

Пусть в плоском механизме, имеющем m звеньев (включая стойку), $n = m - 1$ — число подвижных звеньев, $p_н$ — число низших пар и $p_в$ — число высших пар. Если бы все подвижные звенья были свободными телами, совершающими плоское движение, общее число степеней свободы было бы равно $3n$. Однако каждая низшая пара накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, две связи, оставляя одну степень свободы, а каждая высшая пара накладывает одну связь, оставляя 2 степени свободы.

В число наложенных связей может войти некоторое число $q_п$ избыточных (повторных) связей, устранение которых не увеличивает подвижности механизма. Следовательно, число степеней свободы плоского механизма, т. е. число степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Чебышева:

$$W_п = 3n - (2p_н + p_в - q_п) . \qquad (2.3)$$

Если $W_п$ известно, отсюда можно найти число избыточных связей

$$q_п = W_п - 3n + 2p_н + p_в . \qquad (2.4)$$

Индекс «п» напоминает о том, что речь идет об идеально плоском механизме, или точнее о его плоской схеме, поскольку за счет

неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере является пространственным.

По формулам (2.1)—(2.4) проводят структурный анализ имеющихся механизмов и синтез структурных схем новых механизмов.

§ 2.5 Структурный анализ и синтез механизмов. Влияние избыточных связей на работоспособность и надежность машин

Как было сказано выше, при произвольных (в некоторых пределах) размерах звеньев механизм с избыточными связями ($q > 0$) нельзя собрать без деформирования звеньев. Поэтому такие механизмы требуют повышенной точности изготовления, в противном случае в процессе сборки звенья механизма деформируются, что вызывает нагружение кинематических пар и звеньев значительными дополнительными силами (сверх тех основных внешних сил, для передачи которых механизм предназначен). При недостаточной точности изготовления механизма с избыточными связями трение в кинематических парах может сильно увеличиться и привести к заклиниванию звеньев, поэтому с этой точки зрения избыточные связи в механизмах нежелательны.

Однако в целом ряде случаев приходится сознательно проектировать и изготавливать статически неопределимые механизмы с избыточными связями для обеспечения нужной прочности и жесткости системы, особенно при передаче больших сил. Следует различать избыточные, или добавочные, связи в кинематических парах и в кинематических цепях механизма. Так, например, (рис. 2.13) коленчатый вал четырехцилиндрового двигателя образует с подшипником A одноподвижную вращательную пару, что вполне достаточно с точки зрения кинематики данного механизма с одной степенью свободы ($W = 1$). Однако, учитывая большую длину вала и значительные силы, нагружающие коленчатый вал, приходится добавлять еще два подшипника A' и A'', иначе система будет неработоспособной из-за недостаточной прочности и жесткости. Если эти вращательные пары двухподвижные цилиндрические, то помимо пяти основных связей будет наложено $4 \cdot 2 = 8$ добавочных (повторных) связей ($q = 8$); при этом потребуется высокая точность изготовления для обеспечения соосности всех трех опор, иначе вал будет сильно деформироваться, и в материале вала и подшипников могут появиться недопустимо большие напряжения.

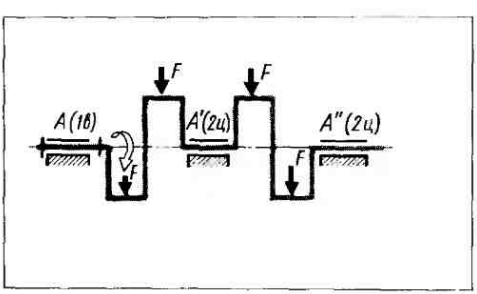


Рис. 2.13

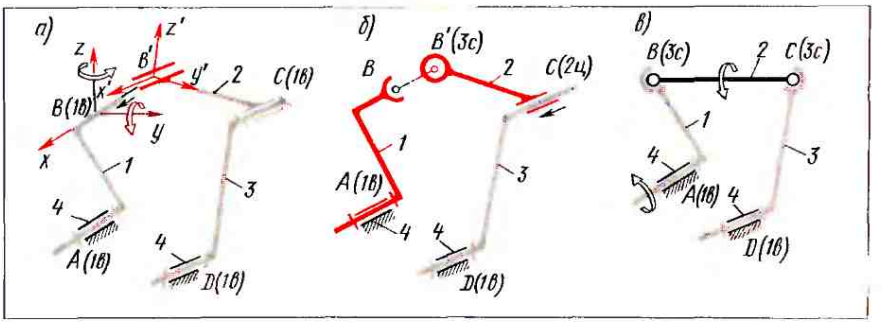


Рис. 2.14

Что касается избыточных связей в кинематических цепях механизма, то при конструировании машин их следует стремиться устранять или же оставлять минимальное количество, если полное их устранение оказывается невыгодным из-за усложнения конструкции или по каким-либо другим соображениям. В общем случае оптимальное решение следует искать, учитывая наличие необходимого технологического оборудования, стоимость изготовления, требуемые ресурс работы и надежность машины. Следовательно, это весьма сложная задача на оптимизацию для каждого конкретного случая.

Методику определения и устранения избыточных связей в кинематических цепях механизмов рассмотрим на примерах.

Пусть плоский четырехзвенный механизм с четырьмя одноподвижными вращательными парами ($W = 1, n = 3, p_1 = 4$, рис. 2.14,*а*) за счет неточностей изготовления (например, вследствие непараллельности осей A и D) оказался пространственным. Сборка кинематических цепей *4, 3, 2* и отдельно *4, 1* не вызывает трудностей, и точки B, B' можно расположить на оси x. Однако собрать вращательную пару B, образованную звеньями *1* и *2*, можно будет, лишь совместив системы координат $Bxyz$ и $B'x'y'z$, для чего потребуется линейное перемещение (деформация) точки B' звена *2* вдоль оси x и угловые деформации звена *2* вокруг осей y и z (показаны стрелками). Это означает наличие в механизме трех избыточных связей, что подтверждается и по формуле (2.2): $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$. Чтобы данный пространственный механизм был статически определимый, нужна его другая структурная схема, например изображенная на рис. 2.14,*б*, где $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$. Сборка такого механизма произойдет без натягов, поскольку совмещение точек B и B' будет возможно за счет перемещения точки C в цилиндрической паре.

Возможен вариант механизма (рис. 2.14, *в*) с двумя сферическими парами ($p_1 = 2$, $p_3 = 2$); в этом случае, помимо основной подвижности механизма $W_o = 1$ появляется местная подвижность $W_м = 1$ — возможность вращения шатуна *2* вокруг своей оси BC; эта подвижность не влияет на основной

закон движения механизма и может быть даже полезна с точки зрения выравнивания износа шарниров: при работе механизма шатун *2* может самопроизвольно поворачиваться вокруг своей оси за счет переменных динамических нагрузок и вибраций. Следовательно, $W = W_0 + W_м = 2$ и формула Малышева подтверждает, что такой механизм будет статически определимым: $q = 2-6\cdot3+ +5\cdot2+3\cdot2=0$.

Иногда приходится учитывать и так называемую групповую подвижность звеньев; например, в механизме гидропривода (см. рис. 2.4, *г*) в случае, когда пары *B* и *C* сферические, звенья *2* и *3* будут иметь дополнительную общую (групповую) подвижность в виде возможного совместного вращения вокруг оси *BC*.

Механизмы с незамкнутой кинематической цепью собираются без натягов, поэтому они статически определимые, без избыточных связей ($q=0$). Для таких механизмов по формуле (2.1) легко определить число степеней свободы *W*; например, для механизма промышленного робота (см. рис. 2.5, *ж*) $n=5$, $p_1=5$, $W=6\cdot5-$ $-5\cdot5=5$; эти подвижности (независимые друг от друга движения) показаны на схеме стрелками.

Избыточные связи, определяемые по плоской схеме, характеризуют статическую неопределимость плоского механизма (при $q_п>0$). Для иллюстрации этого рассмотрим пример пятизвенного механизма двойного параллелограмма (рис. 2.15,*а*). В этом случае $W_п=1$ (одна обобщенная координата φ), $n=4$, $p_н=6$, $p_в=0$. Следовательно, по формуле Чебышева, $q_п=1-3\cdot4+2\cdot6=1$, т. е. механизм статически неопределимый, с одной избыточной связью. Действительно, основной четырехзвенный механизм *ABCD* может быть собран без деформаций звеньев при любых (в некоторых пределах) длинах звеньев. Однако постановка дополнительного звена *4* произвольной длины невозможна, для сборки придется выполнить условие равенства длин параллельных звеньев, что практически возможно лишь при высокой точности изготовления.

Следует отметить то обстоятельство, что при структурном анализе не учитывались зазоры в кинематических парах: благодаря им подвижность кинематической пары повышается и влияние избыточных связей несколько смягчается.

Разработанная Л. В. Ассуром структурная классификация плоских рычажных механизмов облегчает исследование имеющихся и создание новых механизмов без избыточных связей в их плоской схеме ($q_п=0$). Основной принцип ее состоит в том, что механизм может быть получен путем присоединения к одному или нескольким начальным звеньям и стойке кинематических цепей (структурных групп) нулевой подвижности относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется. Таким образом, структурная группа — кинематическая цепь, присоединение которой к механизму не изменяет числа его степеней свободы. Для краткости в дальнейшем введем условный термин — первичный механизм (по И. И. Артоболевскому — механизм I класса), представляющий собой простей-

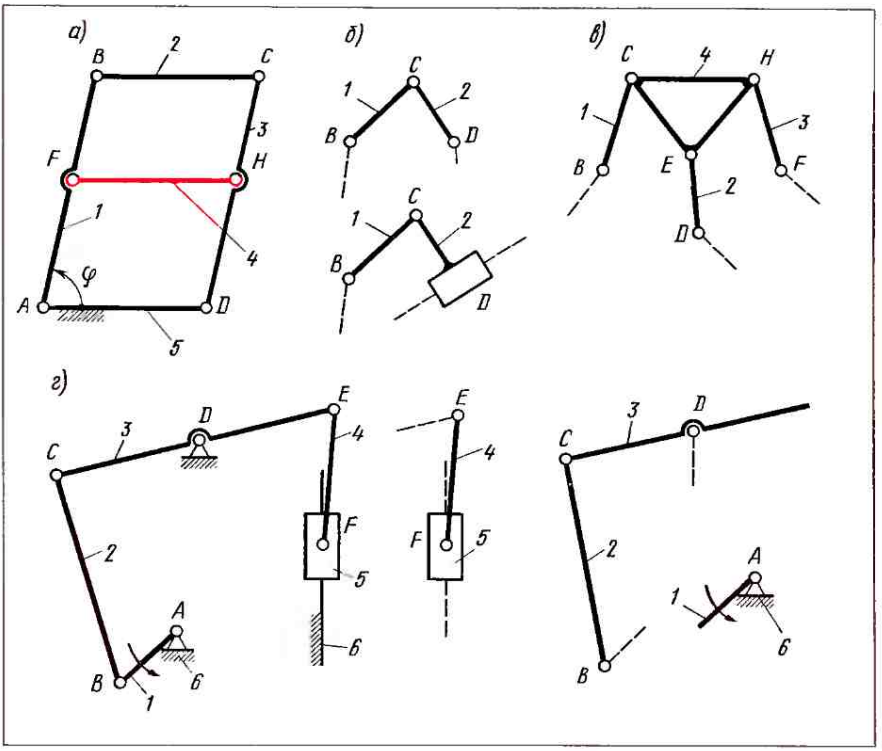


Рис. 2.15

ший двухзвенный механизм, состоящий из подвижного звена и стойки; число первичных механизмов равно числу степеней свободы механизма. Для структурных групп Ассура, согласно определению и формуле Чебышева (при $p_{в.г} = 0$, $n = n_{п.г}$ и $q_п = 0$), справедливо равенство:

$$W_{п.г} = 3n_{п.г} - 2p_{н.г} = 0\,, \qquad (2.5)$$

где $W_{п.г}$ — число степеней свободы структурной (поводковой) группы относительно тех звеньев, к которым она присоединяется; $n_{п.г}$, $p_{н.г}$ — число звеньев и низших пар структурной группы Ассура.

Поскольку $n_{п.г}$ и $p_{н.г}$ могут быть только целыми числами, из равенства (2.5) получим следующие их значения: $n_{п.г} = 2, 4, 6, \ldots$; $p_{н.г} = 3, 6, 9, \ldots$.

Порядок структурной группы определяется числом элементов звеньев, которыми она присоединяется к имеющемуся механизму; первая группа присоединяется к первичному механизму, каждая последующая — к полученному механизму, при этом нельзя присоединять группу к одному звену.

Класс структурной группы (по И. И. Артоболевскому) определяется числом кинематических пар, образующих наиболее сложный

замкнутый контур группы; так, например, на рис. 2.15,*в* такой замкнутый контур-треугольник *CEH* образован тремя вращательными парами, а на рис. 2.15,*б* — частный случай замкнутого контура — отрезок прямой линии, образованный двумя парами.

Самая простая структурная группа ($n_{п.г}=2$, $p_н=3$) состоит из двух звеньев и трех пар (двухповодковая группа или группа II класса 2-го порядка); возможны 5 видов (модификаций) такой группы в зависимости от сочетания вращательных и поступательных пар, две из них даны на рис. 2.15,*б*. Штриховой линией показаны звенья, к которым эта кинематическая цепь будет присоединена; это могут быть подвижное звено первичного механизма и стойка или же звенья других, уже присоединенных структурных групп.

Следующая, более сложная структурная группа ($n_{п.г}=4$, $p_н=6$) — группа III класса 3-го порядка или трехповодковая группа со звеном *4*, входящим в три кинематические пары; такое звено называют базисным. Наиболее простая такая группа (с одними вращательными парами) изображена на рис. 2.15,*в*. В частном случае базисное звено *4* может быть прямолинейным, а некоторые кинематические пары могут быть поступательными.

Еще более сложные группы 4-го порядка ($n_{п.г}=6$, $p_н=9$) применяются редко и здесь не рассматриваются.

Класс механизма определяется наивысшим классом входящей в него структурной группы; при структурном анализе заданного механизма класс его зависит и от выбора первичных механизмов.

В зависимости от класса механизма и вида структурных групп Ассура применяют различные методы кинематического и силового анализа.

Структурный анализ заданного механизма следует проводить путем расчленения его на структурные группы и первичные механизмы в порядке, обратном образованию механизма. На рис. 2.15,*г* приведен пример структурного анализа 6-звенного механизма II класса 2-го порядка (механизм поршневого насоса, $n=5$, $p_н=7$). Здесь последовательно отсоединены две двухповодковые группы (звенья *5, 4* и *3, 2*), в результате остался один первичный механизм (звенья *1, 6*), следовательно $W_п=1$, что подтверждается и формулой Чебышева (при $q_п=0$): $W_п=3\cdot5-2\cdot7=1$.

Структурный синтез плоских механизмов следует проводить, применяя метод Ассура, который обеспечивает статически определимую плоскую схему механизма ($q_п=0$), и формулу Малышева, поскольку вследствие неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере получается пространственным. Так, например (рис. 2.16,*а*), при проектировании кривошипно-ползунного механизма была взята структурная схема, состоящая из двухповодковой группы *2, 3* и первичного механизма *1, 4*, следовательно $W_п=1$ и $q_п=0$. Однако, если учесть неточности изготовления и считать механизм пространственным, по формуле Малышева при $W=1$ и $n=3$ для первого варианта схемы ($p_1=4$, рис. 2.16,*а*) получим три избыточные связи ($q=1-6\cdot3+5\cdot4=3$). Устранить их можно, повышая подвижность некоторых пар, т. е. снижая их класс.

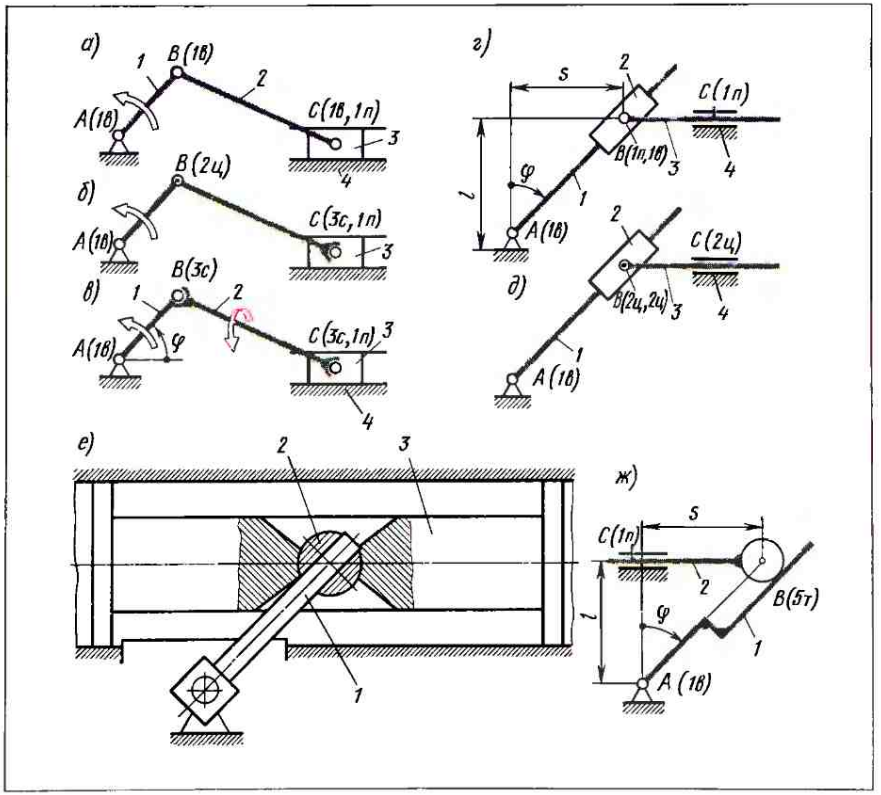


Рис. 2.16

На второй схеме ($p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, рис. 2.16,*б*) избыточных связей уже нет — механизм статически определимый ($q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$). На третьей схеме ($p_1 = 2$, $p_3 = 2$, рис. 2.16,*в*) степень подвижности $W = W_0 + W_м = 2$, поскольку кроме основной подвижности, определяемой обобщенной координатой φ, имеется местная подвижность — возможность независимого вращения шатуна *2* вокруг оси *BC*; избыточных связей здесь также нет ($q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0$).

На рис. 2.16,*г* представлена структуриая схема плоского четырехзвенного кулисного механизма с одноподвижными парами, предназначенного для воспроизведения функции $S = l\mathrm{tg}\varphi$ (тангенсный механизм). Механизм состоит из двухповодковой группы *2, 3* и первичного механнзма *1, 4*; следовательно, $W_п = 1$ и $q_п = 0$. Если же учесть неточности изготовления и считать механизм пространственным, то по формуле Малышева механизм статически неопределимый, с тремя избыточными связями ($n = 3$, $W = 1$, $p_1 = 4$, $q = 3$). На второй схеме (рис. 2.16,*д*) за счет применения трех цилиндрических (двухподвижных) пар вместо трех одноподвижных пар избыточных связей уже нет ($n = 3$, $W = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$,

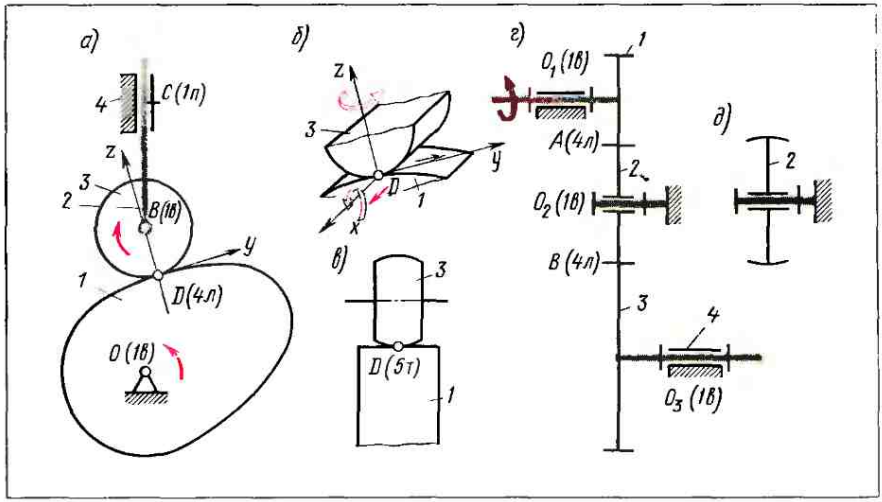


Рис. 2.17

$q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 0$). Конструктивная схема такого статически определимого механизма, применяемого в приводах реверсоров, переключателях напряжения и других устройствах, изображена на рис. 2.16,*е* [7].

Наиболее простой и эффективный способ устранения избыточных связей в механизмах приборов — применение высшей пары с точечным контактом взамен звена с двумя низшими парами; степень подвижности плоского механизма в этом случае не меняется, поскольку, по формуле Чебышева (при $q_п = 0$), $W_п = 3n - 2p_н - p_в = 3(n-1) - 2(p_н - 2) - (p_в + 1)$.

На рис. 2.16,*ж* дан тот же тангенсный механизм, но кулисный камень, входящий в две низшие пары, отсутствует, а его заменяет высшая пара *B*; это повышает точность механизма и уменьшает трение. Наиболее рационально применение высшей пары с точечным контактом (сфера — плоскость), в этом случае $n = 2$, $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_5 = 1$ и число избыточных связей по формуле Малышева $q = 1 - 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 1 = 0$ — механизм статически определимый.

На рис. 2.17,*а,б,в* дан пример устранения избыточных связей в кулачковом механизме с поступательно движущимся роликовым толкателем. Механизм (рис. 2.17,*а*) — четырехзвенный ($n = 3$); кроме основной подвижности (вращение кулачка *1*) имеется местная подвижность (независимое вращение круглого цилиндрического ролика *3* вокруг своей оси); следовательно, $W_п = W = W_о + W_м = 2$. Плоская схема избыточных связей не имеет (механизм собирается без натягов, $q_п = W_п - 3n + 2p_н + p_в = 2 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 = 0$). Если вследствие неточностей изготовления механизм считать пространственным, то при линейном контакте ролика *3* с кулачком *1* по формуле Малышева при $p_1 = 3$ получим $q = 1$, но при определен-

ном условии. Кинематическая пара цилиндр — цилиндр (рис. 2.17,*б*) при невозможности относительного поворота звеньев *1, 3* вокруг оси z была бы трехподвижной парой. Если же такой поворот вследствие неточности изготовления имеет место, но мал, и практически сохраняется линейный контакт (при нагружении пятно контакта по форме близко к прямоугольнику), то данная кинематическая пара будет четырехподвижной, следовательно, $p_4 = 1$ и $q = 2-6\cdot3+5\cdot3+2\cdot1 = 1$.

Снижая класс высшей пары путем применения бочкообразного ролика (пятиподвижная пара с точечным контактом, рис. 2.17,*в*), получим при $p_1 = 3$ и $p_5 = 1$, $q = 2-6\cdot3+5\cdot3+1 = 0$ — механизм статически определимый. Однако при этом следует помнить, что линейный контакт звеньев, хотя и требует при $q > 0$ повышенной точности изготовления, позволяет передать бóльшие нагрузки, чем точечный контакт.

На рис. 2.17,*г,д* дан другой пример устранения избыточных связей в зубчатой четырехзвенной передаче ($W = 1$, $n = 3$, $p_1 = 3$, $p_4 = 2$, контакт зубьев колес *1, 2* и *2, 3* — линейный). В этом случае, по формуле Чебышева, $q_п = 1-3\cdot3+2\cdot3+2 = 0$ — плоская схема избыточных связей не имеет; по формуле Малышева, $q = 1 - 6\cdot3 + 5\cdot3 + 2\cdot2 = 2$ — механизм статически неопределимый, следовательно, потребуется высокая точность изготовления, в частности для обеспечения параллельности геометрических осей всех трех колес.

Заменяя зубья промежуточного колеса *2* на бочкообразные (рис. 2.17,*д*), получим $q = 1-6\cdot3+5\cdot3+1\cdot2 = 0$ — статически определимый механизм.

§ 2.6 Локальные избыточные связи в кинематической паре

Элементы кинематической пары определяют условия взаимодействия звеньев между собой: их относительную подвижность и ограничения, которые не позволяют точкам звеньев занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости.

Ограничения, налагаемые на положения и скорости точек звеньев механизма (связи), должны выполняться при любых, действующих на механизм силах. Уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек звеньев механизма и их скорости, называются уравнениями связей. Геометрические связи описываются уравнениями, которые содержат только координаты точек механической системы. Эти уравнения отображают те связи, которые соответствуют виду кинематической пары и ее конструктивному исполнению.

Конструкция элементов кинематических пар в реальных механизмах самая разнообразная. Так, например, одноподвижная поступательная кинематическая пара, соединяющая звенья *1* и *2* и изо-

бражаемая на кинематических схемах условно (рис. 2.18, *а*), реализуется в конструкции металлорежущих станков в виде плоских направляющих с различным профилем поперечного сечения (рис. 2.18, *в*), а в конструкции подъемника (рис. 2.18, *г*) в виде направляющей *2* фасонного профиля (рис. 2.18, *д*), по которой перекатывается система подшипников, оси которых жестко связаны с подвижным звеном *1* подъемника.

Из приведенных примеров следует, что контактирующие поверхности, линии и точки звеньев *1* и *2*, являющиеся элементами кинематической пары, могут образовывать простые (рис. 2.18, *а*) и сложные (рис. 2.18, *б, е*) кинематические пары. В простой кинематической паре контактируют только два элемента, которые определяют соответствующее число компонент реакций связей. В сложной паре необходимые геометрические связи дублируются дополнительными связями (например, 1* и 2* на рис. 2.18, *б*).

Если помимо необходимых элементов кинематической пары, обусловленных требуемыми геометрическими связями, при конструировании используются дополнительные элементы, то в такой сложной кинематической паре могут появиться **избыточные локальные связи**. При наличии избыточных локальных связей относительное движение

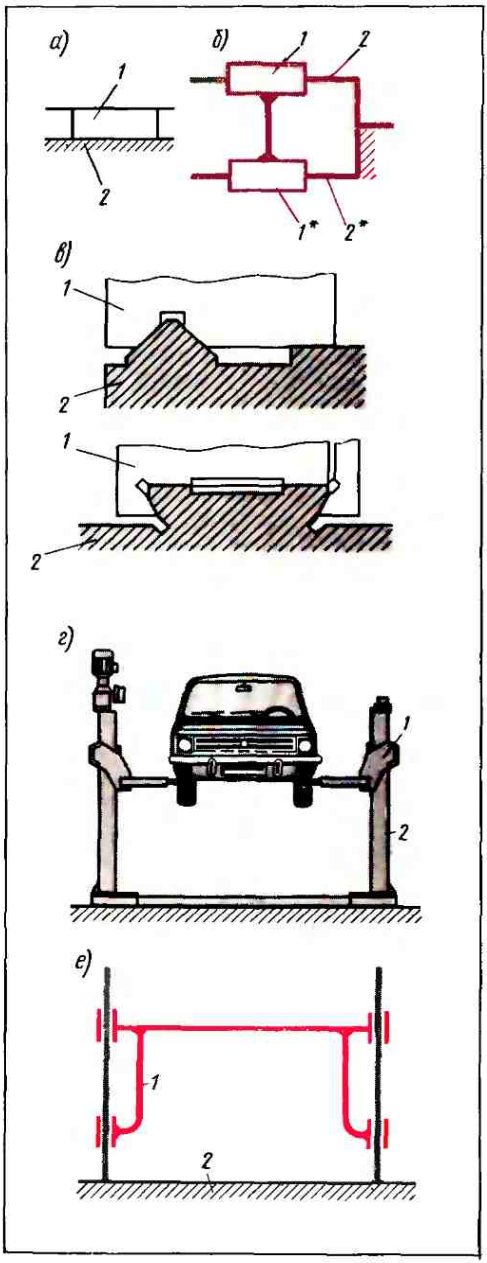


Рис. 2.18

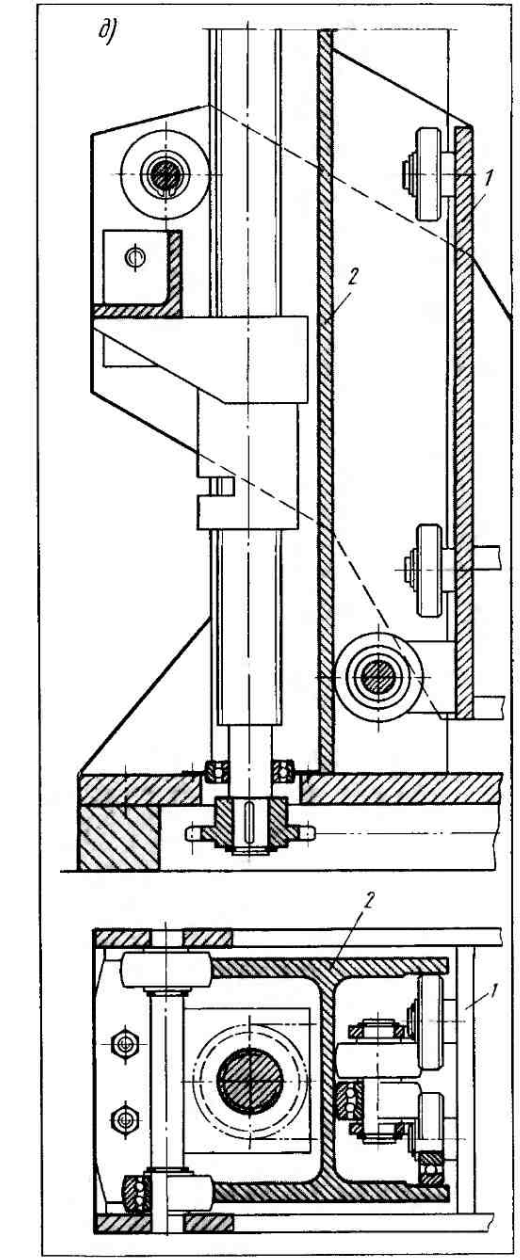


Рис. 2.18, продолжение

звеньев либо становится невозможным (заклинивание, защемление элементов), либо осуществляется за счет деформации звеньев, увеличенных зазоров между реальными поверхностями элементов или их износа.

Чтобы конструкции кинематической пары были работоспособными и надежными в эксплуатации, предъявляют определенные требования *к размерам, форме и относительному положению ее элементов*. Обычно указывают пределы отклонений от заданных или требуемых геометрических форм и расположения поверхностей, осей или точек. Например, для плоских элементов кинематической пары (рис. 2.18, *б*) нормируют отклонения от плоскостности и прямолинейности: отклонения от прямолинейности в плоскости, отклонения от прямолинейности линии в пространстве и отклонения от прямолинейности линии в заданном направлении. Частные виды отклонений от прямолинейности и плоскостности — выпуклость и вогнутость.

Реальные поверхности могут иметь отклонения от цилиндричности, отклонения от круглости (овальность, огранка), отклонения профиля продольного сечения (конусообразность, бочкообразность, седлообразность). Видами отклонений от расположения поверхностей и осей элементов кинематических пар являются: отклонения от параллельно-

сти, от перпендикулярности, от соосности и от симметричности. Для нормирования углов вводят отклонения наклона, а для смещения осей от номинального расположения — позиционное отклонение.

В ряде конструкций оценивают суммарные отклонения формы и расположения, например, в виде радиального биения и торцового биения.

В зависимости от назначения механизма и машины ограничивают величины возможных отклонений формы и расположения поверхностей допусками, предусмотренными соответствующими стандартами. Чем меньше допуск на обработку, тем сложнее технология и больше затраты на изготовление. В этих случаях применяют более точные и дорогостоящие оборудование и технологическую оснастку, средства контроля, более детально проводят технологическую подготовку производства, используют квалифицированную рабочую силу. Поэтому конструктор должен обоснованно выбирать конструкцию сложных кинематических пар, которые необходимы для обеспечения заданных показателей работоспособности механизма, машины или устройства. Конструкция сложных кинематических пар наряду с повышением жесткости и точности должна обеспечивать непринужденную сборку узлов и сборочных единиц и позволять механизму сохранять заданное число степеней свободы при возможных деформациях стойки, валов, осей и других деталей под действием внешних нагрузок.

При разработке конструкций дополнительные элементы кинематических пар вводят для того, чтобы уменьшить давление и износ контактируемых поверхностей за счет перераспределения реактивных сил и увеличения размеров элементов кинематических пар (например, рис. 2.18,*г*). Особое внимание уделяется уменьшению деформаций под действием заданных сил путем установки дополнительных подшипников.

Это можно проиллюстрировать на примере вала *1*, образующего со стойкой *2* вращательную пару (рис. 2.19). Если вместо простой вращательной пары (рис. 2.19, *а*) вал установить на двух опорах, вводя в конструкцию дополнительные элементы (рис. 2.19,*б*), то прогиб вала в точке *C* под действием силы *F* может быть уменьшен. Например, для вала по схеме, изображенной на рис. 2.19,*в*, прогиб в точке *C* (при $a = b$) уменьшается в 8 раз по сравнению с консольной установкой вала (рис. 2.19,*а*). Число избыточных локальных связей в кинематической паре, способствуя уменьшению податливости конструкции, может оказаться вредным в случае изменения температурного режима работы, при деформации стойки, при отклонениях размеров, формы и расположения поверхностей элементов кинематической пары. В статически неопределимых системах избыточные локальные связи могут вызывать дополнительные усилия и перемещения. Поэтому число избыточных локальных связей приходится уменьшать. Так, если для вала правый подшипник выполнить сферическим плавающим, то число связей будет уменьшено (рис. 2.19,*в*).

Если оба подшипника выполнить со сферическими элементами (рис. 2.19, *г*), причем левый подшипник неподвижен в осевом направлении, а правый подшипник имеет осевую подвижность (плавающий), то максимальный прогиб от нагрузки F в точке C (при $a = b$) уменьшится только в два раза по сравнению с консольной опорой вала только на левом конце (рис. 2.19, *а*), однако вал будет статически определимым.

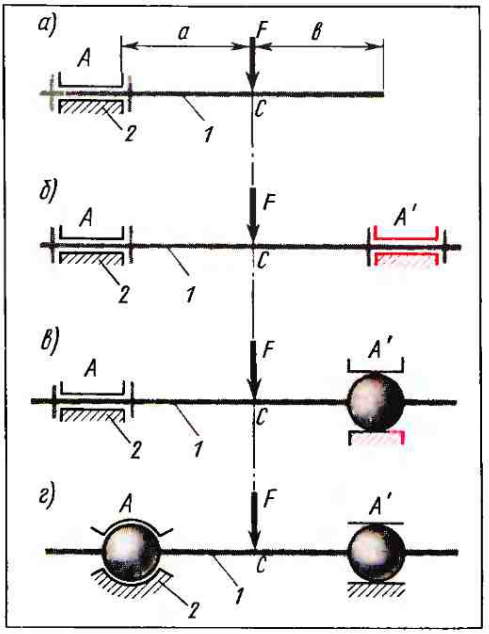


Рис. 2.19

Требования к механизму — выполнять заданные функции и сохранять заданные параметры в установленных пределах в течение всего периода эксплуатации — выдвигают задачу о проектировании механизмов оптимальной структуры.

Схему кинематической пары, отражающей только необходимое число геометрических связей, соответствующее виду пары (рис. 2.19, *а*), называют основной. Схему кинематической пары, отражающей как необходимые, так и избыточные локальные (дополнительные) связи, называют действительной (рис. 2.19, *в, г*). Избыточные локальные связи вносят статическую неопределимость, т. е. найти реакции в опорах методами статики не удается и приходится использовать методы теории упругости. Число дополнительных связей в реальной конструкции пары называют степенью статической неопределимости кинематической пары.

Для одноподвижных вращательных кинематических пар, приведенных на рис. 2.19, *б*, она равна пяти, а на рис. 2.19, *в* — двум, на рис. 2.19, *а, г* — нулю.

В случае отклонений от прямолинейности оси вала появляются избыточные локальные связи, конструкция пары становится статически неопределимой и вращение вала возможно при наличии дополнительных подвижностей между деталями подшипника.

Такие дополнительные подвижности в опорах на рис. 2.20 показаны стрелками. Они обеспечиваются сферической внешней поверхностью наружного кольца шарикоподшипника и поверхностью корпусной детали. Наличие таких поверхностей позволяет вращаться ротору при отклонении оси вала от соосности (рис. 2.20, *а*) и прямолинейности (рис. 2.20, *б, в*).

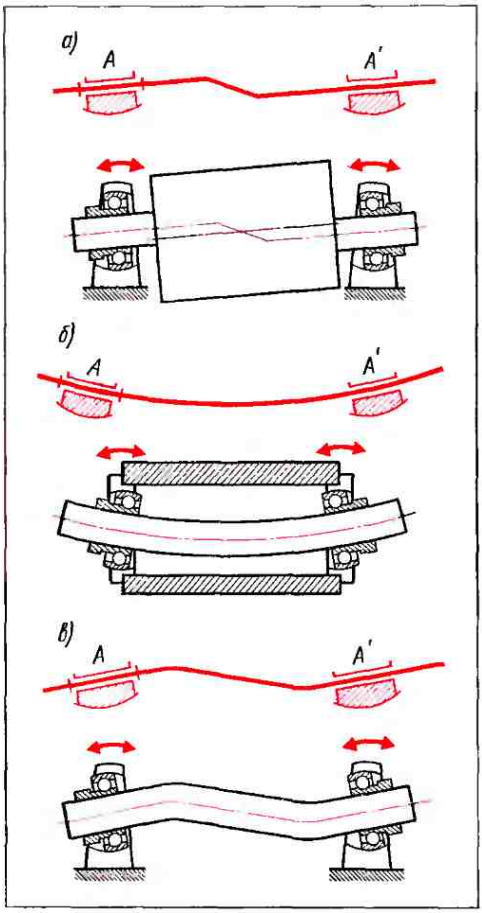


Рис. 2.20

Сферические поверхности подшипников при установке вала на двух опорах позволяют уменьшить влияние отклонений в расположении базовых поверхностей опор (рис. 2.21). Смещение базовых опор поверхностей (рис. 2.21, *а*), их наклон (рис. 2.21, *б*), неперпендикулярность торцовых поверхностей ротора (рис. 2.21, *в*) при сферической форме базовой поверхности наружного кольца шарикоподшипника обеспечивают прямолинейность оси вала и статическую определимость пары.

Если установка вала на подшипниках со сферическими поверхностями неприемлема, то соблюдают требуемый уровень точности путем назначения соответствующих допусков на форму и расположение поверхностей деталей. Например, на рис. 2.22 приведен чертеж двухопорного вала, на котором для шеек *A* и *B* указаны не только предельные отклонения ротора, но и допуски цилиндричности (поз. *1, 5*), перпендикулярности (поз. *3, 4*) и соосности (поз. *2, 6*).

Избыточные локальные связи возникают при установке валов и осей на несколько опор (рис. 2.23, *а*). Сборка и эксплуатация таких конструкций возможна, если обеспечить расположение осей подшипников *A, A′, A″* (рис. 2.23, *б*) на одной прямой. Компенсация возможных отклонений от прямолинейности происходит за счет наличия зазоров между поверхностями элементов кинематической пары; деформации звеньев или элементов кинематических пар (например, резиновых или резинометаллических деталей); изнашивания элементов кинематических пар при сборке, обкатке или эксплуатации. В реальных конструкциях пар происходят явления, обусловленные сочетанием этих факторов.

Коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания имеют пять подшипников, что приводит к появлению 16...20 дополнительных связей (см. рис. 2.13). Однако эти дополнительные связи имеют

свое функциональное назначение: они позволяют уменьшить деформации изгиба вала от приложенных сил F, повысить долговечность и надежность двигателя за счет улучшения работы подшипников и других деталей шатунно-поршневой группы. При структурном анализе подобных конструкций необходимо выявлять эти дополнительные связи, учитывать их при составлении расчетной схемы механизма и разработке технологии изготовления деталей. Технологическое обеспечение требуемой точности изготовления разобщенных поверхностей элементов кинематической пары хотя и связано с большими затратами средств, но эти затраты окупаются за счет снижения эксплуатационных расходов и увеличения ресурса работы машин.

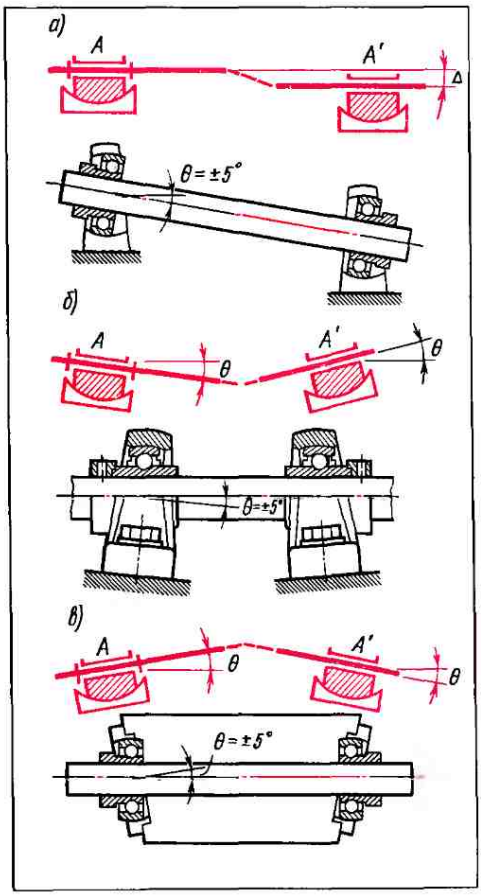


Рис. 2.21

Применение конструкций с дополнительными связями между элементами кинематической пары возможно при достаточной жесткости звеньев и особенно стойки (корпуса, станины и рамы). Деформация звеньев при воздействии нагрузок не должна приводить к заклиниванию элементов кинематических пар или их повышенному изнашиванию. Механизмы, которые удовлетворяют требованиям приспособляемости к деформации звеньев, надежности, долговечности и технологичности конструкции, обладают оптимальной структурой.

Так, например, схема (рис. 2.24,*а*) трехступенчатого зубчатого редуктора (рис. 2.24,*б*) при определенных условиях (например, при большой мощности привода) оказывается наиболее приемлемой, хотя и имеет большое число избыточных локальных связей (на рисунке: *1, 2, 3, 4* — валы с закрепленными на них зубчатыми колесами; *5* — корпус).

Оптимальная схема расположения элементов кинематической пары — понятие относительное: конструкция оптимальная для

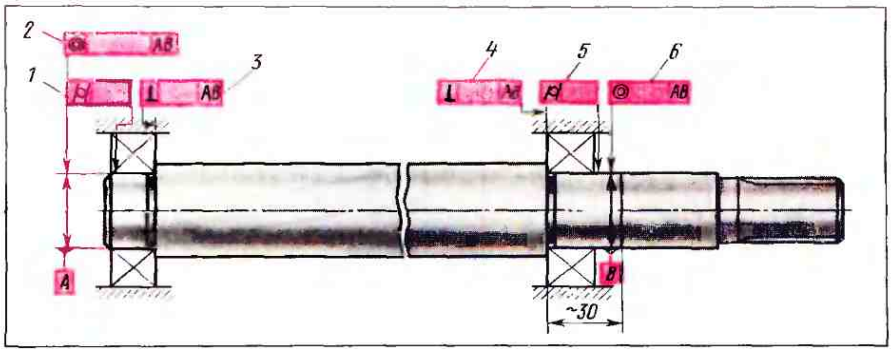


Рис. 2.22

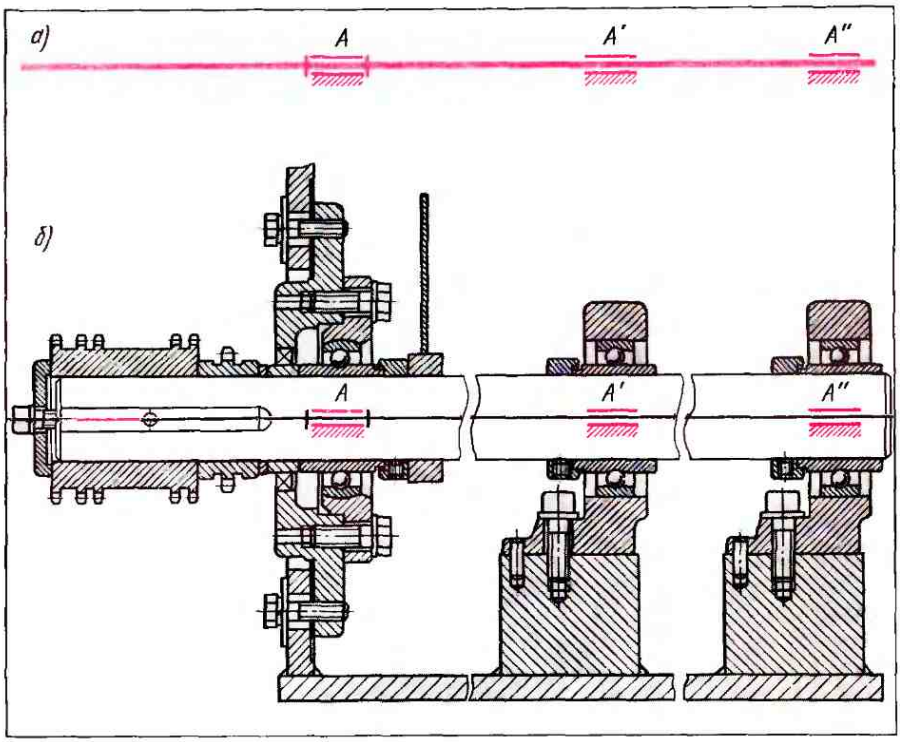


Рис. 2.23

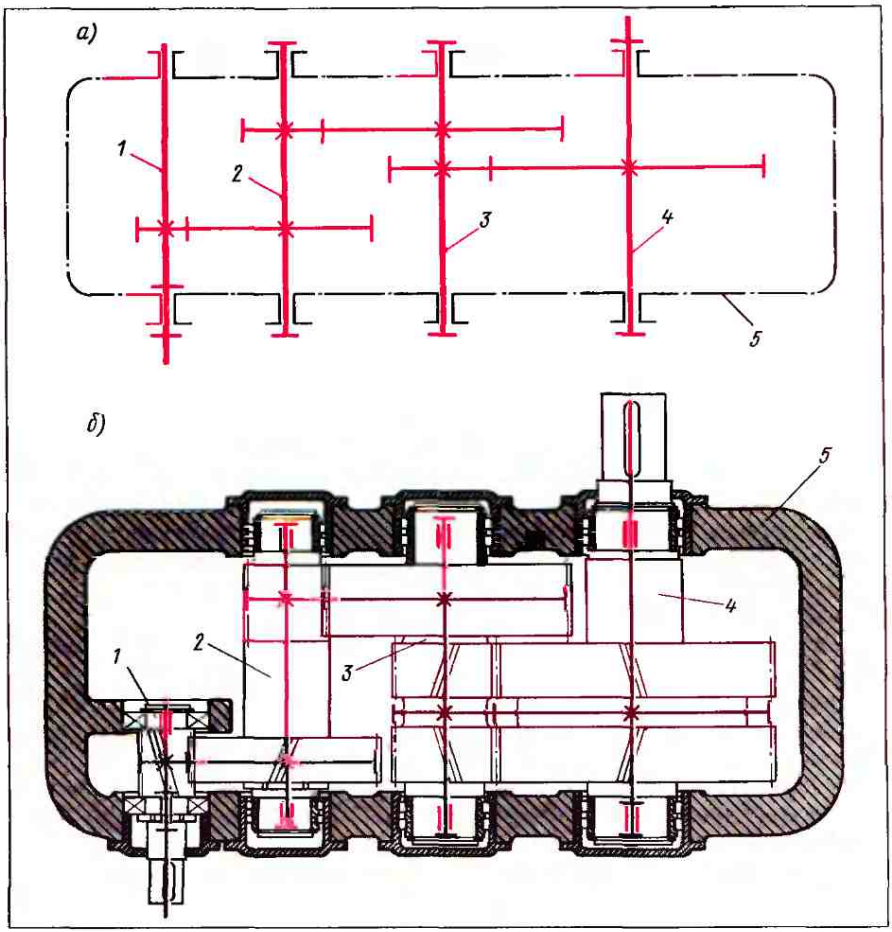


Рис. 2.24

одних условий, может быть неприемлемой для других. Часто это связано с технологичностью, как совокупностью свойств конструкции, проявляемых в оптимальных затратах труда, средств, материалов и времени при принятых условиях изготовления, эксплуатации и ремонта машины. Конструкция, достаточно технологичная в единичном производстве, часто оказывается малотехнологичной в массовом производстве и совершенно нетехнологичной в поточно-автоматизированном производстве (и наоборот).

§ 2.7 Контурные избыточные связи и синтез механизмов с оптимальной структурой

При синтезе механизма с оптимальной структурой учитывают, что стойка, которая обычно рассматривается как жесткое неподвижное звено, в реальных машинах под действием приложенных нагрузок испытывает деформации. Эти деформации могут оказывать влияние на относительное положение элементов кинематических пар не только в пределах одной кинематической пары, как это было рассмотрено в § 2.6, но и в пределах замкнутых кинематических цепей механизма. При неправильном выборе структурной схемы (например, в предположении движения звеньев по схеме плоского механизма) в процессе эксплуатации возможны заклинивание («защемление») некоторых элементов кинематических пар, появление значительных дополнительных нагрузок из-за перекоса, изгиба, растяжения звеньев, чрезмерного изнашивания элементов кинематических пар, низкая надежность и частые отказы конструкции. Подобные явления могут иметь место, например, в тяжелонагруженных механизмах технологического оборудования (прессы, прокатные станы, литейные машины и т. п.), в сельскохозяйственных и транспортных машинах.

Основное правило проектирования структурной схемы механизмов без избыточных контурных связей можно сформулировать в форме *условия сборки замкнутых кинематических цепей* (контуров) механизма: кинематическая цепь, образующая замкнутый контур (или контуры) механизма, должна собираться без натягов даже при наличии отклонений размеров звеньев и отклонений расположения поверхностей и осей элементов кинематических пар.

Для реальных механизмов стремятся разработать такую структурную схему, которая устраняла бы возможность возникновения дополнительных нагрузок в кинематических парах за счет изменения конфигурации контура звеньев независимо от точности изготовления деталей или деформируемости стойки и других звеньев. Механизмы с оптимальной структурой хорошо себя зарекомендовали в эксплуатации. Имеется много примеров, когда устранение избыточных контурных связей обеспечивало высокую надежность, снижение износа деталей, повышение коэффициента полезного действия машины, снижение эксплуатационных расходов [7].

Если звенья механизма образуют замкнутый контур, то для сборки замыкающей кинематической пары (которой может быть теоретически любая пара, а практически — та, где сборка является наиболее технологичной операцией) и получения заданного числа степеней свободы W необходимо обеспечить сближение элементов кинематических пар вдоль трех координатных осей и угловой поворот вокруг тех же трех осей. Следовательно, для замкнутого контура, не содержащего избыточных связей, условие сборки кинематических пар можно записать в виде равенства суммы подвижностей

в кинематических парах контура сумме числа степеней свободы механизма W и требуемых шести линейных и угловых перемещений, необходимых для сборки замыкающей кинематической пары пространственного контура:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = W + 6 . \qquad (2.6)$$

Если сборка осуществляется для нескольких независимых контуров, число которых равно K, то условие сборки кинематических цепей многоконтурного механизма без избыточных контурных связей записывается в следующем виде:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = W + 6K ,$$

или

$$\sum_{i=1}^{5} ip_i = W + 6K . \qquad (2.7)$$

При структурном анализе механизма с оптимальной структурой определяют число степеней свободы механизма

$$W = \sum_{i=1}^{5} ip_i - 6K . \qquad (2.8)$$

Если W не равно требуемому числу степеней свободы, то структурная схема механизма содержит избыточные контурные связи q или излишние подвижности $W_и$ сверх заданного числа степеней свободы W механизма:

$$q = W + W_и + 6K - \sum_{i=1}^{5} ip_i . \qquad (2.9)$$

Контуры звеньев в механизме должны быть независимыми, т. е. отличаться друг от друга набором звеньев и кинематических пар. Минимальное число звеньев в контуре равно трем, причем одно звено в механизме с тремя звеньями является начальным, второе звено — стойкой. Звенья контура в многоконтурном механизме могут не иметь непосредственной связи со стойкой механизма.

Число K независимых контуров определяют по формуле Гохмана (см.: *Гохман Х. И.* Основы познавания и созидания пар и механизмов. Кинетика машин. Одесса, 1890, т. I):

$$K = \sum_{i=1}^{5} p_i - n = p_\Sigma - n, \qquad (2.10)$$

где $p_\Sigma = \sum_{i=1}^{5} p_i$ — суммарное число кинематических пар в механизме; n — число подвижных звеньев.

При подстановке соотношения (2.10) в соотношение (2.9) получают

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^{5} (6 - i)p_i .$$

Для примера, структурная схема шестизвенного механизма, приведенная на рис. 2.19, *г*, имеет следующие параметры: число подвижных звеньев $n=5$, число одноподвижных пар $p_1=7$. Следовательно, число независимых контуров по соотношению (2.10):

$$K=p_\Sigma-n=7-5=2.$$

Число избыточных контурных связей по соотношению (2.9) при $W=1$ и $W_и=0$: $q=W+6K-\sum_{i=1}^{5} ip_i+W_и=1+6\cdot2-1\cdot7+0=6$. Для устранения этих связей необходимо увеличить сумму подвижностей в каждом независимом контуре не менее чем на три единицы: в контуре *ABCD* (звенья *1, 2, 3, 6*): $q_{к1}=1+6\cdot1-1\cdot4=3$; в контуре *DEF* (звенья *3, 4, 5, 6*): $q_{к2}=1+6\cdot1-1\cdot4=3$. Если шатуны *2* и *4* в контурах соединить с соседними звеньями вместо двух одноподвижных пар двухподвижной цилиндрической и трехподвижной сферической парами, то избыточные контурные связи будут устранены (рис. 2.25) в каждом контуре K_1 и K_2 $q_{к1}=q_{к2}=1+6\cdot1-(1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1)=0$; и в механизме $q=1+6\cdot2-(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot2)=0$.

В частном случае замкнутая кинематическая цепь механизма с одной степенью свободы ($W=1$) и одним контуром без избыточных связей ($q=0$) должна иметь такой набор кинематических пар, чтобы сумма их подвижностей была равна семи для пространственного механизма и четырем — для плоского механизма. Последующие присоединяемые группы звеньев, образующие после присоединения замкнутый контур, должны иметь в своем составе набор кинематических пар, сумма подвижностей которого равна шести для пространственного механизма и трем — для плоского механизма. Учитывая, что в реальных механизмах возможны деформации стойки или других звеньев, любой механизм с оптимальной структурой рассматривается как пространственный.

Схему механизма, отражающую наличие только необходимых подвижностей звеньев для обеспечения заданного числа степеней свободы $W=W_0$ при отсутствии избыточных контурных связей, называют *основной* или *схемой с оптимальной структурой механизма.*

Для основной структурной схемы $q=0$ и структурная формула (2.1) имеет частное выражение:

$$W_0=6n-\sum_{i=1}^{5}(6-i)p_i. \qquad (2.11)$$

Основная структурная схема механизма обладает определенными свойствами:

элементы кинематических пар удовлетворяют условию сборки замкнутых контуров механизма без деформации звеньев и натягов в кинематических парах;

изменяемость положения элементов кинематических пар, распо-

ложенных на стойке, при возможной деформации стойки и звеньев не оказывает существенного влияния на силы в кинематических парах;

при заданных активных нагрузках, положениях, скоростях и ускорениях входных звеньев имеется возможность найти положения, скорости и ускорения всех остальных точек и определить реакции в кинематических парах, так как число условий связи и число и характер подвижностей кинематических пар соответствуют статической определимости механизма и статической определимости каждой кинематической пары. Поэтому при основной схеме механизма все силы в кинематических парах могут быть однозначно определены по величине, направлению и точке приложения из условия движения звеньев механизма под действием заданных сил (статического и кинетостатического равновесия).

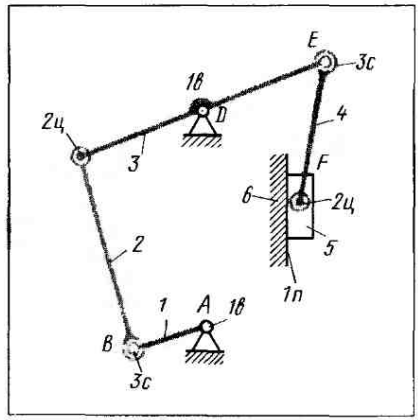


Рис. 2.25

При анализе реальных конструкций и их кинематических схем выявляются либо дополнительные подвижности $W_н$, либо избыточные структурные связи q относительно основной схемы механизма с заданным числом степеней свободы W_0. Из дополнительных подвижностей выделяют местные подвижности звена $W_м$ и местные подвижности группы звеньев $W_г$. Местную подвижность имеют плавающие оси, втулки и пальцы, кольца некоторых типов подшипников, блоки, шкивы, ролики в кулачковых механизмах и т. п. Особенность местной подвижности звена заключается в том (см. рис. 2.11, *а*), что реализация ее не вызывает перемещения остальных звеньев механизма. Местная подвижность звена имеет определенное функциональное назначение, ибо она позволяет, например, уменьшать износ элементов кинематической пары, улучшить условия смазки, повысить коэффициент полезного действия (к.п.д.), надежность, долговечность узлов машин. Общее число местных подвижностей $W_м$ звеньев в кинематической цепи следует выявлять на первоначальной стадии структурного анализа и синтеза механизма.

Вторым видом дополнительных подвижностей является групповая подвижность части звеньев кинематических цепей, не вызывающая перемещения остальных звеньев в механизме. Для некоторых механизмов групповая подвижность звеньев является недопустимой, так как приводит к неопределенности движения выходного звена. Например, если в четырехзвеннике $ABCD$ (см. рис. 2.25) концевые шарниры B и D двухповодковой группы звеньев

2 и *3* выполнить сферическими, то появляется групповая подвижность, проявляющаяся в возможности вращения звеньев *2* и *3* относительно линии BD, соединяющей центры двух сферических пар B и D. Обычно для механизмов с замкнутыми контурами такая подвижность недопустима, а для механизмов с незамкнутыми кинематическими цепями может оказаться полезной. В механизмах роботов подвижность группы звеньев может повысить маневренность исполнительного звена (например, схвата). В некоторых случаях подвижность группы звеньев одного контура может быть использована звеньями последующего контура при заданном числе свободы механизма. Для реальных механизмов общее число степеней свободы W целесообразно представлять в виде суммы подвижностей разного назначения: основной W_0, групповой $W_г$ и местной $W_м$

$$W = W_0 + W_г + W_м. \tag{2.12}$$

При синтезе структурной схемы механизма следует учитывать, что требуемое число степеней свободы W реализуется через движение начального (или начальных) звена. Следовательно, при синтезе механизмов без избыточных контурных связей необходимо присоединение к начальным звеньям и стойке таких комбинаций звеньев и кинематических пар, для которых число степеней свободы $W_г$ было бы равным нулю. Такой метод структурного синтеза называется методом присоединения статически определимых структурных групп. Идея этого метода была разработана Л. В. Ассуром применительно к плоским механизмам. В общем случае пространственных механизмов это требование записывают в виде соотношения:

$$W = W_н + \sum_{j=1}^{K} (W_{гj} \equiv 0) \tag{2.13}$$

или

$$W_г = 6n_г - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \equiv 0. \tag{2.14}$$

Здесь: $W_н$ — число степеней свободы начальных звеньев; $W_г$ — число степеней свободы присоединяемой группы звеньев.

Соотношения (2.13) и (2.14) называют *условием синтеза основной структурной схемы механизма.* Выражение $\sum_{j=1}^{K} W_{гj}$ символизирует, что суммирование должно быть проведено по всем K независимым контурам звеньев, присоединяемых к начальным звеньям или ранее присоединенным структурным группам звеньев.

Соотношение (2.14) является *условием сборки без натягов присоединяемой структурной группы звеньев* (непринужденная сборка) при отсутствии ограничений на относительное расположение элементов кинематических пар.

Минимальное число присоединяемых звеньев равно единице $(n_г)_{min} = 1$. В этом случае соотношение (2.14) имеет частное значение:

$$6 - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \equiv 0. \tag{2.15}$$

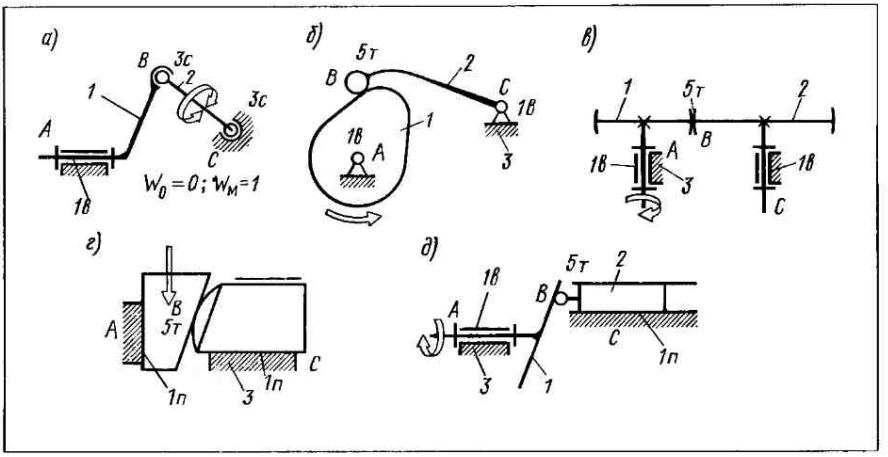


Рис. 2.26

Так как сумма чисел кинематических пар равна двум: $\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 2$ (одна кинематическая пара — со стойкой, вторая — с начальным звеном), то соотношению (2.15) удовлетворяют только следующие три комбинации:

а) $p_3 = 2$, так как $6 - 3 \cdot 2 \equiv 0$;

б) $p_2 = 1$; $p_4 = 1$, так как $6 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \equiv 0$;

в) $p_1 = 1$; $p_5 = 1$, так как $6 - 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \equiv 0$ или $6 = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1$.

В комбинации (*а*) звено *2* имеет две трехподвижные кинематические пары *B* и *C* (например, две сферические *3с*), которые обеспечивают местную подвижность звена — вращение звена *2* относительно прямой *BC*, проходящей через центры сфер (рис. 2.26, *а*). Эта комбинация не позволяет звену *1* быть начальным, так как $W_0 = 0$, $W_м = 1$.

В комбинации (*в*) присоединяемое звено имеет одну одноподвижную (*1п* — рис. 2.26, *г, д* или *1в* — рис. 2.26, *б, в*) и одну пятиподвижную (*5т*) кинематические пары. Этот вариант широко используется в кулачковых механизмах, толкатель которых имеет заостренный или сферический башмак (рис. 2.26, *б*), в зубчатых передачах, боковые поверхности зубьев которых имеют точечный контакт («бочкообразные зубья») (рис. 2.26, *в*), в механизме плунжерного гидродвигателя (рис. 2.26, *д*).

При синтезе основной структурной схемы механизма с двумя присоединенными звеньями $n_г = 2$ должны выполняться следующие частные значения соотношения (2.14):

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \equiv 3;$$
$$12 - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \equiv 0. \qquad (2.16)$$

Соотношения (2.16) выполняются для следующих комбинаций кинематических пар:

а) $p_1=1$; $p_2=1$; $p_3=1$, так как $12-3\cdot1-4\cdot1-5\cdot1\equiv0$;

б) $p_2=3$; так как $12-4\cdot3\equiv0$;

в) $p_1=2$; $p_4=1$, так как $12-2\cdot1-5\cdot2\equiv0$ или $12=3\cdot1+4\cdot1+5\cdot1=4\cdot3=2\cdot1+5\cdot2$.

Этим комбинациям отвечает достаточно большое число сочетаний расположения кинематических пар разной подвижности между начальным звеном, двумя присоединенными звеньями и стойкой.

Некоторые структурные схемы механизмов с двумя присоединяемыми звеньями приведены на рис. 2.27 на примере кривошипно-ползунного механизма.

При плоской схеме (рис. 2.27, *а*) с четырьмя одноподвижными парами *1в* и *1п* механизм имеет три избыточные контурные связи ($q=3$) при одной основной подвижности ($W_0=1$).

Структурные схемы на рис. 2.27, *б* и *в* соответствуют комбинации «а» соотношения (2.16) с одноподвижной (*1п*), двухподвижной (*2ц*) и трехподвижной (*3с*) кинематическими парами.

Если одну двухподвижную пару (*2ц*) заменить на трехподвижную (*3с*) (рис. 2.27, *г*), то шатун получает местную подвижность ($W_м=1$) — вращение относительно своей оси.

Обобщение описанного метода структурного синтеза основных схем механизмов представлено табл. 2.1, в которой приведены комбинации чисел кинематических пар разной подвижности для групп, число звеньев в которых изменяется от 1 до 5.

Если при синтезе механизма с оптимальной структурой необходимо применить только одноподвижные кинематические пары, то минимальное число звеньев в присоединяемой группе равно пяти ($n_i=5$), а число кинематических пар равно шести ($p_\Sigma=p_1=6$). В этом случае соотношение (2.14) имеет следующее частное выра-

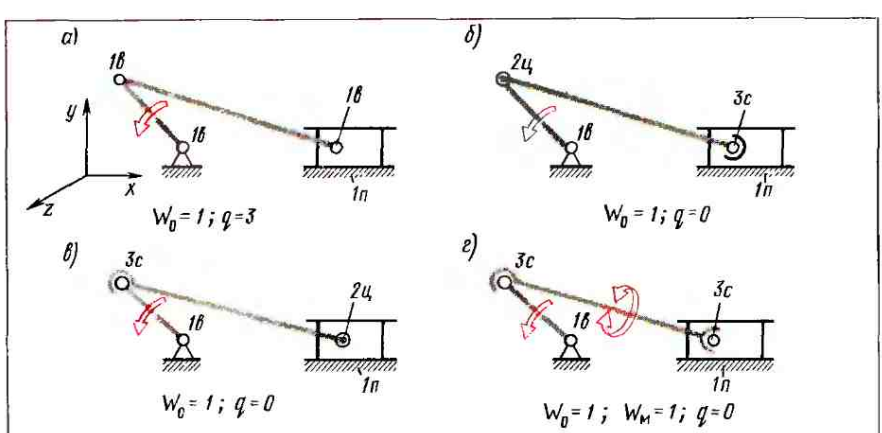


Рис. 2.27

Таблица 2.1

Число звеньев $n_г$	Число кинематических пар в группе $p_2=\Sigma p_i$	Число возможных подвижностей звеньев $6n_г$	Число кинематических пар разной подвижности в присоединяемой группе звеньев				
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	2	6	1 — —	— 1 —	— — 2	— 1 —	1 — —
2	3	12	2 1	— 1	— 1	1 —	— —
3	4	18	3 2	— 2	1 —	— —	— —
4	5 6	24	4 3 3 3 2	1 — 1 2 3	— 3 1 — —	— — 1 — 1	— — — 1 —
5	6	30	6	—	—	—	—

жение: $W_г=6\cdot5-5\cdot6\equiv0$. Такой механизм называется шарнирным семизвенником и состоит из стойки, начального звена и пяти звеньев присоединяемой группы.

На рис. 2.28, *а—в* приведены структурные схемы некоторых механизмов, у которых присоединяемая группа содержит 4 звена и шесть (три вращательных и три сферических) кинематических пар. Механизмы не содержат избыточных контурных связей ($n=5$; $p_1=4$; $p_3=3$; $W=1$); $q=6n+W-\sum_{i=1}^{n}(6-i)p_i=6\cdot5+1-(5\cdot4+3\cdot3)=$ $=0$.

Условие (2.14) синтеза основной структурной схемы механизма является необходимым условием, но оно может оказаться недостаточным для осуществления сборки контура звеньев без натягов.

Сочетание кинематических пар в структурной схеме может оказаться таким, что появляются местные или групповые подвижности, наряду с которыми схема механизма содержит одну или несколько избыточных связей, которые не позволяют выполнить сборку замыкающей кинематической пары, например, из-за отсутствия перемещения в направлении оси, перпендикулярной плоскости вращения начального звена.

Наличие избыточных связей и их характер целесообразно выявлять по методике, суть которой заключается в анализе подвижностей в каждой кинематической паре замкнутого контура и оценке возможностей сборки замыкающей пары контура звеньев за счет необходимого числа линейных и угловых перемещений. При этом

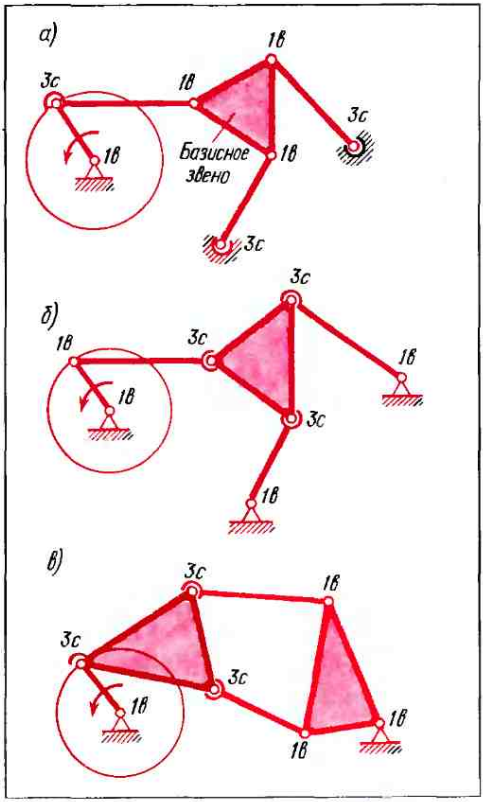


Рис. 2.28

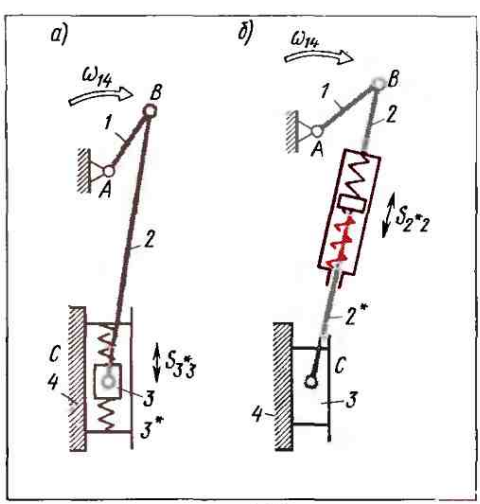


Рис. 2.29

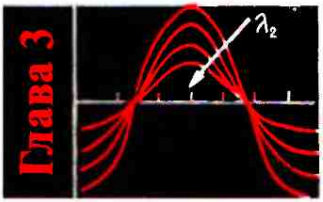
следует иметь в виду, что линейное сближение элементов пары иногда может быть достигнуто за счет угловых поворотов звеньев.

В механизмах различают помимо относительных перемещений звеньев, допускаемых геометрическими связями, также и перемещения, допускаемые податливостью (упругостью) звеньев. В первом случае говорят о *структурных степенях свободы,* характеризующих основное движение звеньев. Во втором случае говорят о *параметрических степенях свободы,* зависящих от конструктивных (масса, жесткость) параметров механизма и режима движения (в частности, частоты возбуждения). Относительное движение звена, обусловленное параметрическими степенями свободы, суммируется с основным движением звена иногда в виде фона, характеризуемого малыми перемещениями по сравнению с абсолютными перемещениями и значительными скоростями и ускорениями. Введение параметрических степеней свободы необходимо при анализе и проектировании механизмов и машин вибрационного и ударного действия, при проектировании виброзащитных устройств в случае возможности возникновения опасных колебаний, при проектировании оборудования для интенсификации и повышения эффективности технологических и транспортных операций.

На рис. 2.29, *а, б* приведены две схемы кривошипно-ползунного механизма, используемые в машинах виброударного действия (вибромолот, вибропресс и т. п.) и позволяющие регулировать (накапливать и отдавать) энергию на определенных этапах движения за счет энергии пружины.

На рис. 2.29, *а* упругим звеном является звено *3,* состоящее из бойка *3** и ползуна *3* и имеющее параметрическую степень свободы S_{3*3}.

На рис. 2.29, *б* упругим звеном является шатун *2,* имеющий параметрическую степень свободы в виде возможного перемещения S_{2*2} деталей *2** и *2* шатуна. Число структурных степеней свободы в обоих механизмах равно 1 и реализуется в виде вращения входного звена *1* с угловой скоростью ω_{14}.



Кинематические характеристики механизмов

Основным назначением механизма является выполнение необходимых движений, которые описываются посредством его кинематических характеристик. К ним относятся траектории точек, координаты точек и звеньев механизма и прежде всего его обобщенные координаты, перемещения точек и звеньев, их скорости и ускорения. К числу кинематических характеристик относятся также и такие, которые не зависят от закона движения начальных звеньев, а определяются только строением механизма, размерами его звеньев и в общем случае зависят от обобщенных координат. Это функции положения, аналоги скоростей, или передаточные функции, и аналоги ускорений точек и звеньев механизма. Знание кинематических характеристик важно также и для динамических расчетов.

По кинематическим характеристикам конструктор делает вывод о том, насколько успешно выполнена одна из основных задач проектирования механизма — выбор структурной схемы и определение размеров звеньев. Следовательно, для создания механизма, наилучшим образом отвечающего поставленным требованиям, надо знать методы определения кинематических характеристик механизма.

§ 3.1 Кинематика входных и выходных звеньев и передаточные функции механизма

Число независимых друг от друга кинематических параметров механизма с заданными структурной схемой и размерами его звеньев равно числу степеней свободы механизма или числу обобщенных координат механизма.

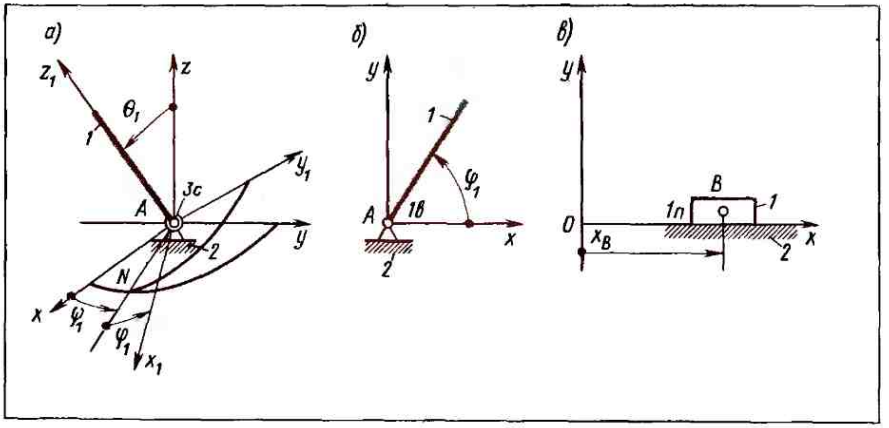


Рис. 3.1

Звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат, называют начальным звеном. Например, звено *1*, вращающееся вокруг неподвижной точки, т. е. образующее со стойкой *2* сферическую кинематическую пару (рис. 3.1, *а*), имеет три степени свободы и его положение определяется тремя параметрами — тремя углами Эйлера: φ_1, ψ_1, θ_1. Звено *1*, вращающееся вокруг неподвижной оси, т. е. образующее со стойкой *2* вращательную кинематическую пару (рис. 3.1, *б*), имеет одну степень свободы и его положение определяется одним параметром, например угловой координатой φ_1. Звено, перемещающееся поступательно относительно стойки (рис. 3.1, *в*), имеет также одну степень свободы и его положение определяется одним параметром — координатой x_B.

Любой механизм предназначен для преобразования движения входного звена *1* (рис. 3.2, *а, б*) или входных звеньев (рис. 3.2, *в*) в требуемые движения звеньев, для выполнения которых предназначен механизм. Входному звену механизма с одной степенью свободы обычно присваивают номер *1*, а выходному звену — но-

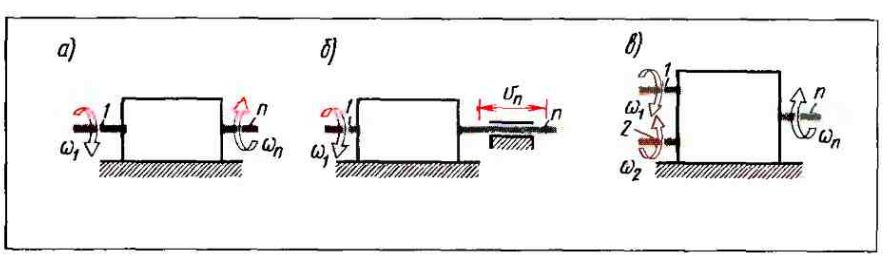


Рис. 3.2

мер n, промежуточным звеньям — порядковые номера: 2, 3,..., i,... $n-1$.

Во многих случаях при проектировании машин и механизмов закон изменения обобщенных координат в функции времени удается определить только на последующих стадиях проектирования, обычно после динамического исследования движения агрегата с учетом характеристик сил, приложенных к звеньям механизма, масс и моментов инерции звеньев. В таких случаях движение выходных и промежуточных звеньев определяется в два этапа: на первом устанавливаются зависимости кинематических параметров звеньев и точек от обобщенной координаты, т. е. определяются относительные функции (функции положения и передаточные функции механизма), а на втором — определяются закон изменения обобщенной координаты от времени и зависимости кинематических параметров выходных и промежуточных звеньев от времени.

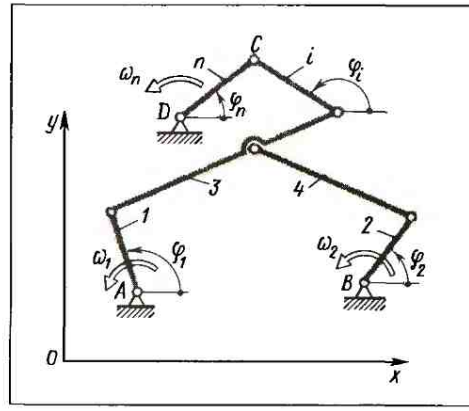


Рис. 3.3

Для примера рассмотрим плоский механизм с двумя степенями свободы (рис. 3.3), n-е выходное звено (на рис. 3.3 $n=6$) которого совершает вращательное движение с угловой скоростью ω_n. Положение этого звена относительно положительного направления оси Ox выбранной системы координат определяют углом φ_n, являющимся функцией обобщенных координат φ_1 и φ_2, зависящих от времени движения t, $\varphi_n=\varphi_n(\varphi_1, \varphi_2)$. Для определения угловой скорости n-го звена необходимо найти производную по времени сложной функции φ_n:

$$\omega_n=\frac{d\varphi_n}{dt}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_1}\dot{\varphi}_1+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_2}\dot{\varphi}_2,$$

или

$$\omega_n=\frac{d\varphi_n}{dt}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_1}\omega_1+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_2}\omega_2=u_{n1}^{(2)}\omega_1+u_{n2}^{(1)}\omega_2, \qquad (3.1)$$

где ω_1, ω_2, ω_n — угловые скорости соответствующих звеньев *1*, *2* и n; $u_{n1}^{(2)}$, $u_{n2}^{(1)}$ — частные передаточные отношения.

Для механизма с одной степенью свободы имеет место частный случай в форме

$$\omega_n=\frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}=u_{n1}\omega_1, \qquad (3.2)$$

где $u_{n1}=d\varphi_n/d\varphi_1=\omega_n/\omega_1$ — отношение угловых скоростей звеньев, называемое передаточным отношением.

Передаточное отношение u_{n1} является величиной безразмерной. Физический смысл частных передаточных отношений $u_{n1}^{(2)}$ и $u_{n2}^{(1)}$ в формуле (3.1) следующий: $u_{n1}^{(2)}$ — представляет собой отношение угловых скоростей $\omega_n^{(2)}$ и $\omega_1^{(2)}$ звеньев *n* и *1* при условии, что звено *2*, которому приписывается вторая обобщенная координата φ_2, является неподвижным ($\omega_2=0$). Аналогично, $u_{n2}^{(1)}$ — это отношение угловых скоростей $\omega_n^{(1)}$ и $\omega_2^{(1)}$ звеньев *n* и *2* при условии, что звено *1*, которому приписывается первая обобщенная координата φ_1, является неподвижным ($\omega_1=0$).

Каждое из частных передаточных отношений $u_{n1}^{(2)}$ и $u_{n2}^{(1)}$ является функцией обобщенных координат φ_1 и φ_2, приписываемых обоим начальным звеньям *1* и *2*:

$$u_{n1}^{(2)}=u_{n1}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2);\quad u_{n2}^{(1)}=u_{n2}^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Частные передаточные отношения $u_{n1}^{(2)}$ и $u_{n2}^{(1)}$ называют также аналогами угловых скоростей звена *n*. Смысл этого термина вытекает из следующего представления: если $\omega_2=0$, а $\omega_1=1$ рад/с, то $u_{n1}^{(2)}$ можно рассматривать как угловую скорость звена *n* при неподвижном звене *2*:

Аналогично, если $\omega_1=0$, $\omega_2=1$ рад/с, то $u_{n2}^{(1)}$ можно рассматривать как угловую скорость звена *n* при неподвижном звене *1*, т. е. в механизме с одной степенью свободы.

Аналогичные рассуждения проводят относительно скорости точки *C*, положение которой определяется радиусом-вектором $\bar{r}_C=\bar{r}_C(\varphi_1, \varphi_2)$.

Скорость точки *C* находят по соотношению

$$\bar{v}_C=\frac{d\bar{r}_C}{dt}=\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_1}\dot{\varphi}_1+\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_2}\dot{\varphi}_2, \tag{3.3}$$

или

$$\bar{v}_C=\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_1}\omega_1+\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_2}\omega_2=\bar{\rho}_{q1C}\omega_1+\bar{\rho}_{q2C}\omega_2,$$

где $\bar{\rho}_{q1C}=\partial\bar{r}_C/\partial\varphi_1$ и $\bar{\rho}_{q2C}=\partial\bar{r}_C/\partial\varphi_2$ — радиусы приведения скорости точки *C* к начальным звеньям *1* и *2*, которым приписываются обобщенные координаты.

Иногда величины $\bar{\rho}_{q1C}$ и $\bar{\rho}_{q2C}$ называют аналогами скорости точки *C* и обозначают $\bar{v}_{q1C}$, $\bar{v}_{q2C}$, имея в виду следующие соотношения:

$$\bar{v}_{q1C}=\bar{\rho}_{q1C}=\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_1}=\frac{\bar{v}_C^{(2)}}{\omega_1};$$
$$\bar{v}_{q2C}=\bar{\rho}_{q2C}=\frac{\partial\bar{r}_C}{\partial\varphi_2}=\frac{\bar{v}_C^{(1)}}{\omega_2}. \tag{3.4}$$

Физический смысл этих передаточных функций скорости следующий: v_{q1C} представляет собой скорость точки *C* при условии, что $\omega_2=0$ (начальное звено *2* неподвижно, механизм с одной степенью свободы), а $\omega_1=1$ рад/с. Аналогично, v_{q2C} — скорость точки *C* при условии, что $\omega_1=0$, а $\omega_2=1$ рад/с.

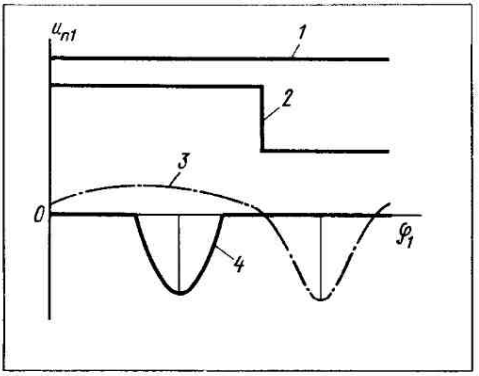


Рис. 3.4

Называя эти передаточные функции радиусами приведения ρ_{q1C} и ρ_{q2C} скорости точки C к начальным звеньям *1* и *2*, имеют в виду следующий геометрический смысл: $|\bar{\rho}_{q1C}|$ равен радиусу кривизны траектории такой точки C^* на начальном звене *1*, которая имеет такую же скорость v_C^2, какую имеет точка C при условии, что $\omega_2 = 0$ (начальное звено *2* неподвижно); $|\bar{\rho}_{q2C}|$ равен радиусу кривизны траектории аналогичной точки C^{**} на начальном звене *2* при условии, что $\omega_1 = 0$. Для механизмов с одной степенью свободы применяют следующие обозначения и соотношения:

$$\bar{v}_{qC} = \frac{d\bar{r}_C}{d\varphi_1} = \frac{\bar{v}_C}{\omega_1}. \qquad (3.5)$$

Единица СИ передаточной функции скорости точки при угловой обобщенной координате φ_1 соответствует единице радиуса кривизны: $[v_{qC}] = $ м/рад*.

Кинематические передаточные функции не зависят от времени, а определяются только кинематической схемой механизма и положением его звеньев, т. е. характеризуют кинематические параметры механизма, независимо от закона изменения обобщенных координат.

На рис. 3.4 приведены графики изменения передаточных отношений в функции обобщенной координаты φ_1 для некоторых механизмов: *1* — цилиндрической зубчатой передачи; *2* — коробки скоростей с цилиндрическими зубчатыми колесами; *3* — рычажного кулисного механизма; *4* — мальтийского механизма.

При проектировании некоторых механизмов приходится использовать графики передаточных функций, построенные в функции, например, положения выходного звена; на рис. 3.5 показан график передаточной функции скорости точки D на выходном звене — $v_{qD} = v_D/\omega_1$ в функции перемещения S_D той же точки при поступательном перемещении, например, ползуна; на рис. 3.6 — в функ-

* Здесь и далее квадратными скобками обозначается единица СИ физической величины.

ции угла φ_n поворота звена при вращательном движении, например, толкателя в кулачковом механизме.

С помощью второй производной функции положения звена определяют угловые ускорения соответствующих звеньев механизма. Для звена с индексом i ($i = 1, \ldots, n$) механизма с $W = 1$ записывают

$$\varepsilon_i = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}\dot{\varphi}_1\right) =$$

$$= \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}\frac{d\varphi_1}{dt}\dot{\varphi}_1 + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}\frac{d\dot{\varphi}_1}{dt} = \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}(\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}\ddot{\varphi}_1.$$

При угловой обобщенной координате φ_1 производные выражаются в следующем виде: $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ и $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$. Единицы СИ: $[\omega_1]$ = рад/с; $[\varepsilon_1]$ = рад/с^2. В этом случае угловое ускорение звена i может быть найдено по соотношению

$$\varepsilon_i = \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}\omega_1^2 + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}\varepsilon_1 = \varepsilon_{qi}\omega_1^2 + \omega_{qi}\varepsilon_1. \qquad (3.6)$$

С помощью второй производной функции положения S_C точки C определяют касательное ускорение точки C механизма:

$$a_C^\tau = \frac{dS_C}{d\varphi_1}\varepsilon_1 + \frac{d^2S_C}{d\varphi_1^2}\omega_1^2 = a_{qC}\omega_1^2 + v_{qC}\varepsilon_1, \qquad (3.7)$$

или

$$\frac{a_C^\tau}{\omega_1^2} = a_{qC} + v_{qC}(\varepsilon_1/\omega_1^2). \qquad (3.7^*)$$

Вторая производная перемещения точки C по обобщенной координате $d^2S_C/d\varphi_1^2 = a_{qC}$ называется передаточной функцией ускорения точки C или аналогом ускорения точки C.

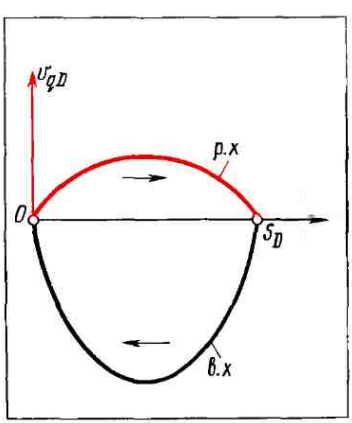


Рис. 3.5

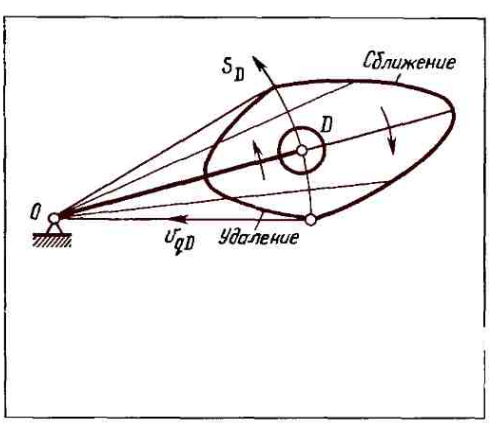


Рис. 3.6

Если при проектировании или исследовании механизма задана или определена функция положения или одна из передаточных функций механизма, то другие зависимости могут быть найдены методами дифференцирования и интегрирования, в том числе численного или графического.

§ 3.2 Планы положений, скоростей и ускорений плоских рычажных механизмов

Графические методы кинематического исследования механизмов, позволяющие определить положения звеньев, скорости и ускорения точек и звеньев, получили широкое распространение. Это обусловлено быстротой, удобством и наглядностью решения прикладных вопросов проектирования. Графические методы расчетов обладают наглядностью и отличаются удобством контроля. В ряде случаев графическое вычисление основано на геометрических построениях, с некоторым приближением заменяющих аналогичные аналитические и численные операции. Имеется много примеров, когда графические приемы являются единственно приемлемыми, так как дают наиболее простое решение.

Точность графических методов 0,3...0,5% достаточна для решения многих практических задач.

Графические методы становятся затруднительными, если требуется провести большой объем однообразных построений и не могут быть использованы непосредственно, если расчеты требуется провести с высокой точностью.

Планы механизма. Изображение кинематической схемы механизма в выбранном масштабе, соответствующее определенному положению начального звена (или начальных звеньев для механизмов с несколькими степенями свободы), называется п л а н о м м е х а н и з м а. Масштаб плана механизма определяет размеры отрезков, изображающих длину звеньев и координаты точек звеньев. Масштаб плана механизма обозначают через μ_l с единицей — [мм/м], т. е. под масштабом длины понимают отношение отрезка на плане в мм к числовому значению длины изображаемого звена в единицах СИ, т. е. в м. Например, $\mu_l = AB/l_{AB}$, $\mu_l = BC/l_{BC}$, где $[AB] = [BC]$ = мм; $[l_{AB}] = [l_{BC}]$ = м; $[\mu_l]$ = мм/м.

Для определения числового значения отрезков размеры соответствующих звеньев в м необходимо умножить на выбранный масштаб плана механизма μ_l; например, $BC = \mu_l l_{BC}$.

Рассмотрим графический метод на примере шестизвенного рычажного механизма (рис. 3.7), используемого, например, в устройстве автоматической прерывистой подачи деталей из накопителя (магазина) на ленточный транспортер. Звено *1* вращается неравномерно с остановами после поворота на угол 2л. Тем не менее, при построении плана механизма можно угол поворота звена *1*, являющийся обобщенной координатой, разделить на ряд последовательных угловых шагов, равных между собой (например, на

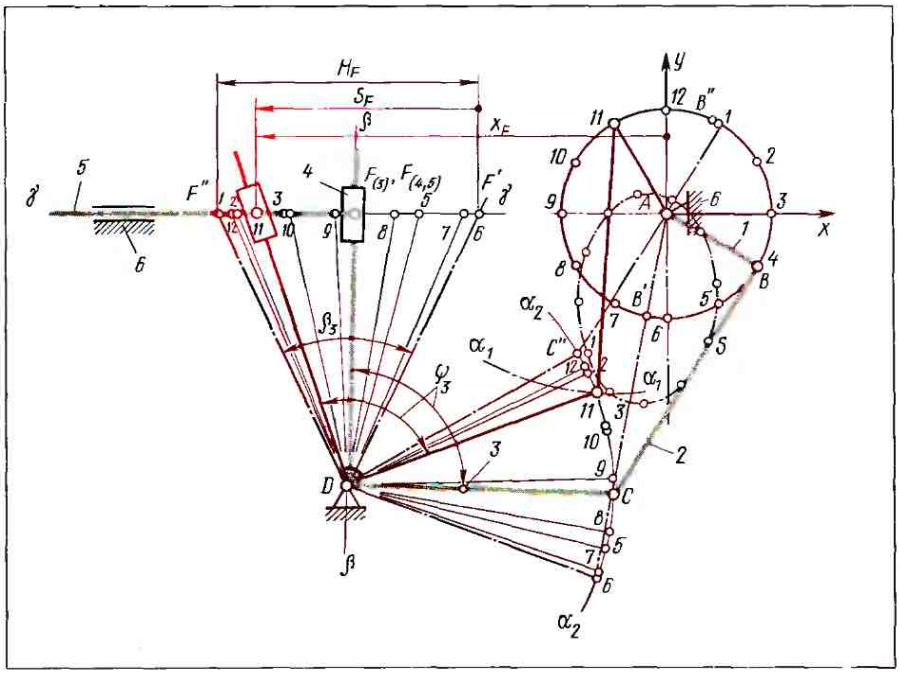


Рис. 3.7

12 угловых шагов, каждый из которых равен 30°). Любая точка входного звена *1* описывает окружность и последовательно занимает положения, равномерно расположенные на окружности радиуса l_{BA}. На рис. 3.7 показана окружность, описываемая точкой *B*, последовательные положения которой отмечены арабскими цифрами *1, 2, 3, ..., 12*. Для определения положений звеньев *2* и *3* достаточно найти положения кинематической пары *C*, шарнирно соединяющей эти звенья между собой.

Точка *C* описывает дуговую траекторию $\alpha_2 - \alpha_2$ радиуса l_{CD} в ее относительном движении вокруг точки *D* и дуговую траекторию $\alpha_1 - \alpha_1$ радиуса l_{CB} в ее движении относительно точки *B*. Точка пересечения этих двух дуговых траекторий $\alpha_1 - \alpha_1$ и $\alpha_2 - \alpha_2$ относительного движения точки *C* (на рис. 3.7 они показаны для позиции *11*) находится с помощью циркуля. Подобное построение иногда называют способом засечек. Для остальных положений входного звена *1* выполняют аналогичные построения и находят последовательные положения точки *C* на окружности радиуса l_{CD}, которые расположены неравномерно. Положения точки *C* отмечают также арабскими цифрами соответственно разметке положений начального звена *1*. Для нахождения положения звеньев *2* и *3* достаточно соединить соответствующие точки (на рисунке показано красными линиями в позиции *11*).

Для определения положений звеньев *4* и *5* достаточно найти положения точки *F*. Траекторией точки *F* относительно стойки *6* является прямая $\gamma - \gamma$, а траекторией этой же точки относительно звена *3* является прямая $\beta - \beta$, совпадающая с *FD*. Угол $FDC = \psi_3$ звена *3* является неизменным, и положения прямой $\beta - \beta$ (или *FD*) можно найти обычными геометрическими построениями, сохраняя конструктивный угол ψ_3 неизменным.

Пересечение траекторий относительного движения точки *F* — прямых $\gamma - \gamma$ и $\beta - \beta$ определяет ее соответствующие положения. Эти положения точки *F* также отмечают арабскими цифрами соответственно разметке положений начального звена *1*.

На плане механизма в случае необходимости можно построить траектории, описываемые любой точкой того или иного звена, положение которого уже найдено. На рис. 3.7, например, показаны последовательные положения точки *S* на шатуне *2*. Проводя через размеченные положения плавную кривую, получают траекторию точки *S*. Подобные траектории точек, расположенные на звеньях, совершающих плоскопараллельные движения, называют шатунными кривыми. Эти кривые могут быть также описаны аналитическими соотношениями. Например, для шарнирного четырехзвенника *ABCD* траектория точки *S* (рис. 3.7) описывается алгебраической кривой шестого порядка. Предельные положения точек на своих траекториях обозначены буквами *C'*, *C''*, *F'*, *F''*. Они соответствуют крайним «мертвым» положениям, которые также можно найти построениями: положение *C'* — пересечение траектории $\alpha_2 - \alpha_2$ дугой радиуса $l_{AC'} = l_1 + l_2$ с центром в точке *A*; положение *C''* — пересечение той же траектории $\alpha_2 - \alpha_2$ дугой радиуса $l_{AC''} = l_2 - l_1$ с центром в точке *A*; положения *F'* и *F''* соответствуют точкам *C'* и *C''*, *B'* и *B''*.

Расстояние *F'F''* определяет в масштабе чертежа ход H_F выходного звена *5* относительно стойки *6*. Угол $\beta_3 = \angle F'DF''$ называют угловым ходом или углом поворота кулисы *3*.

При построении планов механизмов, имеющих трехповодковые группы, также используется метод пересечения двух траекторий относительного движения (способ засечек), причем одна из траекторий может быть шатунной кривой по отношению к системе, связанной с ведущим звеном. Иногда этот способ называют *способом ложных положений*. Особенности этого способа показаны на примере построения плана восьмизвенного кулисного механизма, приведенного на рис. 3.8.

В этом механизме с одной степенью свободы начальным является звено *1*, к которому в точках *B* и *C* присоединены звенья *2* и *3*. Эти звенья являются поводками трехповодковой группы с базисным звеном *4*. Звено *5* является третьим поводком в этой группе. Звенья *6* и *7* образуют двухповодковую группу.

Для нахождения положения звеньев трехповодковой группы используют методику, заключающуюся в следующем.

Начальное звено *1* поворачивают на некоторый угол φ_1 и находят положения точек B_i и C_i на дуговых траекториях, описываемых

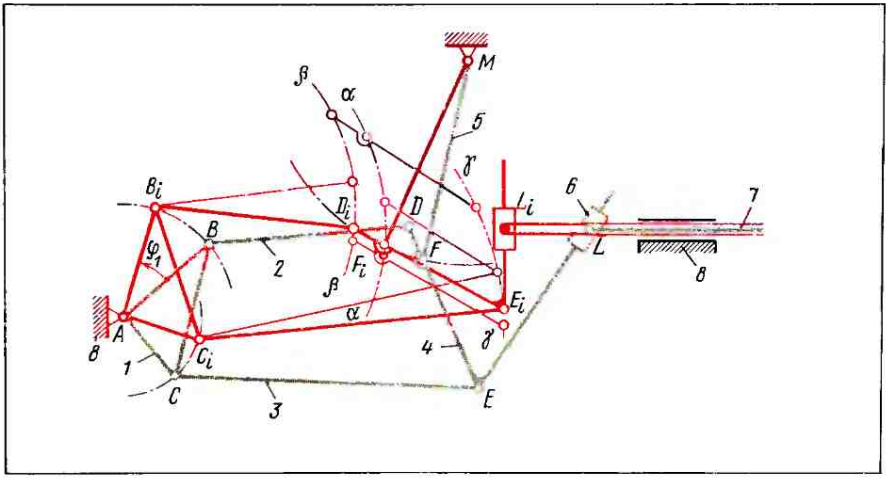


Рис. 3.8

этими точками относительно точки A. Точка F, соединяющая поводок *5* и базисное звено *4*, описывает относительно точки M дуговую траекторию радиуса l_{FM}. Однако найти положение точки F на этой дуговой траектории непосредственно способом засечек не удается. Поэтому необходимо провести дополнительное построение, связанное с нахождением траектории точки F относительно начального звена *1* в фиксированной позиции («замороженное» состояние). В этом относительном движении точка D описывает дуговую траекторию $\beta - \beta$ радиуса l_{DiBi}, а точка E — дуговую траекторию $\gamma - \gamma$ радиуса l_{EiCi}.

Задавшись рядом положений точки D_i на траектории $\beta - \beta$, на траектории $\gamma - \gamma$ способом засечек радиусом l_{DE} находят соответствующие положения точки E_i и строят траекторию $\alpha - \alpha$, описываемую точкой F при этом относительном движении звена *4* по отношению к начальному звену *1* в фиксированной позиции. Пересечение траектории $\alpha - \alpha$ точки F в относительном движении («ложной траектории») с возможной траекторией точки F по дуге окружности радиуса l_{FM} определяет искомое положение точки F_i и звена *4* — при данном положении входного звена. Положение звеньев *2*, *3* и *4* на рисунке показано красными линиями. Положение звеньев *6* и *7* присоединенной двухпроводковой группы определяется способом, описанным ранее. Для построения остальных планов механизма необходимо провести аналогичные действия для требуемого числа положений начального звена *1*.

При определении кинематических характеристик механизмов с высшими парами (например, кулачковых) приходится учитывать, что профили или один из профилей имеют сложные очертания (рис. 3.9). Координаты точек профиля обычно задаются графически или в табличной форме. Вычерчивание ряда положений подобного

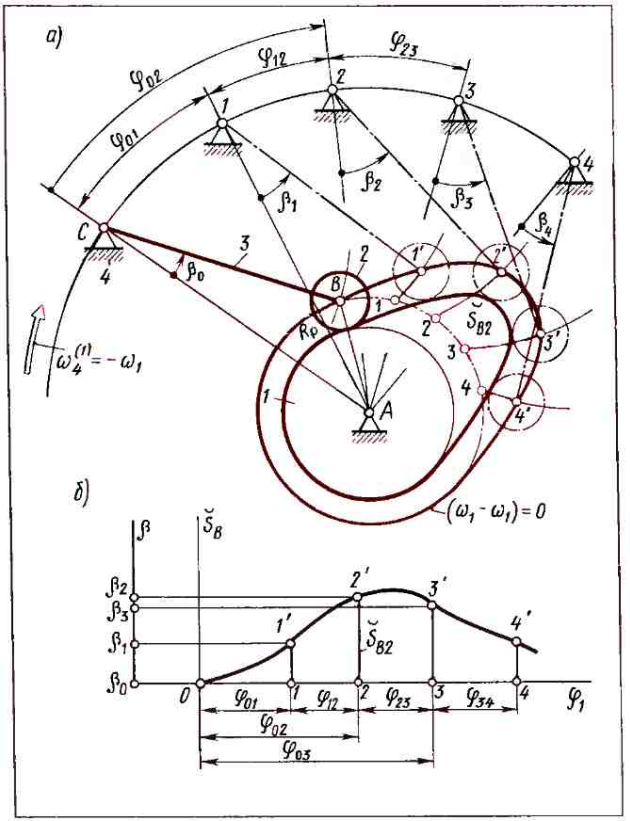


Рис. 3.9

профиля затруднено. Наиболее целесообразным оказывается применение *метода обращения движения.* Суть этого метода заключается в том, что всему механизму в целом придают вращение с угловой скоростью, равной по величине, но противоположной по направлению, того звена, которое необходимо сделать неподвижным. Следовательно, подвижное начальное звено *1*, имеющее сложный профиль, условно считают неподвижным, а стойку *4* вращают в противоположном направлении с угловой скоростью $\omega_4^{(1)} = -\omega_1$ (рис. 3.9). Такое движение механизма называют о б р а щ е н н ы м д в и ж е н и е м звеньев по отношению к начальному звену *1*.

Относительное положение всех звеньев, в том числе входного и выходных звеньев, при обращении движения не изменяется. Пример использования метода обращения движения для построения планов положения показан для кулачкового механизма с дисковым кулачком и вращающимся роликовым толкателем (рис. 3.9, *а*). Стойке *AC* (звено *4*) сообщают относительное движение с угловой скоростью $(-\omega_1)$ и на окружности радиуса *AC* размечают ряд по-

ложений точки *C*: *0, 1, 2, 3, ...* — оси вращения толкателя, характеризуемых углами поворота φ_{01}, φ_{12}, φ_{23}, ... между смежными положениями или углами φ_{01}, φ_{02}, φ_{03}, ..., отсчитываемыми от начального положения стойки *AC*.

Ролик *2* радиуса $R_р$ при относительном движении обкатывается по *конструктивному профилю* кулачка, а его ось *B* (центр окружности) описывает кривую, называемую *центровым профилем*, показанную на рисунке красной линией. Положения осей ролика для размеченных положений механизма находят с помощью засечек на центровом профиле дугами радиуса, равного длине толкателя l_{BC}, и обозначают их цифрами с верхним индексом *1′*, *2′*, *3′*, *4′*, ...

Точки пересечения этих дуг с окружностью радиуса $R_0 + R_р$ обозначают цифрами *1, 2, 3, ...* . Длина дуг *11′*, *22′*, *33′*, ... равна перемещению S_B оси *B* ролика относительно начального положения механизма и пропорциональна углам относительного поворота толкателя, равным $\beta_1 - \beta_0$, $\beta_2 - \beta_0$, $\beta_3 - \beta_0$, ... Измерение углов поворота толкателя *2* или соответствующих длин дуг, описываемых осью *B* ролика, позволяет построить графики, характеризующие изменение функций положения $S_B(\varphi_1)$ или $\beta(\varphi_1)$ в зависимости от угловой координаты φ_1 начального звена (рис. 3.9, *б*).

Планы скоростей и ускорений. Планом скоростей механизма называют чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и по направлению скоростям различных точек звеньев механизма в данный момент. План скоростей для механизма является совокупностью нескольких планов скоростей для отдельных звеньев, у которых полюса планов *p* являются общей точкой — полюсом плана скоростей механизма.

Чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизма в данный момент, называют планом ускорений механизма.

Планы скоростей и ускорений начального звена. Если начальное звено механизма совершает вращательное движение, то его угловая координата φ_1 является обобщенной координатой (рис. 3.10, *а*). Скорость точки, например, *B* этого звена v_B перпендикулярна прямой *AB*, проведенной через ось *A* вращения звена, и может быть изображена вектором $\overline{BB'} = \mu_v \bar{v}_B$ на плане механизма (рис. 3.10, *б*) или вектором $\overline{pb} = \mu_v \bar{v}_B$ на плане скоростей (рис. 3.10, *в*). Аналогичные рассуждения проводят относительно скорости v_C точки *C*: $\overline{pc} = \mu_v \bar{v}_C$ или точки *D*: $\overline{pd} = \mu_v \bar{v}_D$ (рис. 3.10, *б* и *в*).

Если соединить прямыми между собой точки *c*, *b*, *d* и *a* на плане скоростей и точки *C*, *B*, *D* и *A* на начальном звене *1*, то соответствующие треугольники подобны: $\Delta bcp \infty \Delta BCA$; $\Delta bcd \infty \Delta BCD$; $\Delta cdp \infty \Delta CDA$. Они повернуты относительно друг друга на прямой угол в направлении ω_1. Отношение подобия определяется масштабами μ_v и μ_l и угловой скоростью ω_1:

$$\frac{pb}{BA} = \frac{\mu_v v_B}{\mu_l l_{BA}} = \frac{\mu_v}{\mu_l}\omega_1; \quad \frac{pc}{AC} = \frac{\mu_v}{\mu_l}\omega_1 \text{ и т. д.}$$

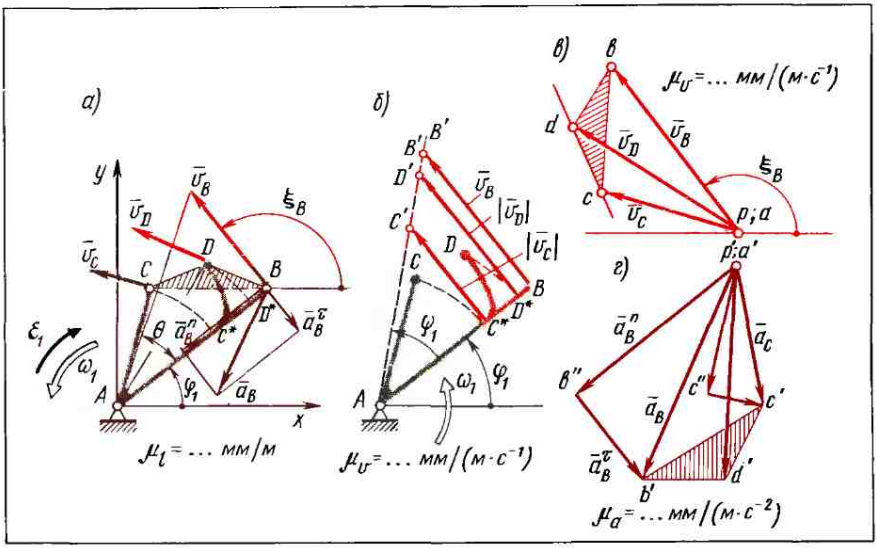


Рис. 3.10

При кинематическом исследовании зубчатых механизмов более удобными являются не планы скоростей, построенные с общим полюсом плана, а так называемые *треугольники скоростей*, изображающие картину изменения векторов скоростей, выставленных в точках B, D^*, C^* к прямой BA рассматриваемого звена *1* (рис. 3.10, *б*).

При таком изображении имеют место соотношения:

$$\overline{BB'} = \mu_v \bar{v}_B; \quad D^*D' = \mu_v v_{D^*}; \quad C^*C' = \mu_v \bar{v}_{C^*}.$$

Прямую, соединяющую концы векторов линейных скоростей B', D', C', называют *графиком распределения скоростей* точек линии BA. Угол, образуемый прямой этого распределения и линией на звене, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{BB'}{\overline{BA}} = \frac{\mu_v v_B}{\mu_l l_{BA}} = \frac{\mu_v}{\mu_l}\omega_1. \qquad (3.8)$$

Скорость любой точки, например C, не лежащей на линии BA (рис. 3.10, *б*), легко определяется графическим построением; для этого точку C циркулем переносят в точку C^* на линии BA и восставляют к ней перпендикуляр до пересечения с прямой распределения скоростей в точке C'. Отрезок $\overline{C^*C'}$ пропорционален числовому значению скорости точки $C^*|C^*C'| = \mu_v|v_{C^*}|$. Вектор $\bar{v}_c$ скорости точки C на схеме звена *1* перпендикулярен линии CA. Отрезки равны: $|CC'| = |C^*C'|$, так как $|\bar{v}_C| = |\bar{v}_{C^*}|$.

План ускорений на рис. 3.10, *г* построен для начального звена. Изображены векторы ускорений точек B, C и D — $\bar{a}_B$, $\bar{a}_C$, $\bar{a}_D$ и их составляющие: нормальные $\bar{a}_B^n$, $\bar{a}_C^n$, $\bar{a}_D^n$ и касательные $\bar{a}_B^\tau$, $\bar{a}_C^\tau$, $\bar{a}_D^\tau$

ускорения. Соответствующие векторы на плане ускорений построены по следующим соотношениям:

нормальное ускорение $\bar{a}_B^n$ точки B:

$$\bar{a}_B^n = \omega_1^2 l_{BA};\ \overline{p'b''} = \mu_a \bar{a}_B^n;$$

касательное ускорение $\bar{a}_B^\tau$ точки B:

$$a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{BA};\ \overline{b''b'} = \mu_a \bar{a}_B^\tau;$$

ускорение $\bar{a}_B$ точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau;\ \overline{p'b'} = \overline{p'b''} + \overline{b''b'} = \mu_a \bar{a}_B.$$

Аналогичные соотношения справедливы для ускорений точек D и C: (рис. 3.10, *б*, *г*)

$$a_C^n = \omega_1^2 l_{CA};\ \overline{p'c''} = \mu_a \bar{a}_C^n;$$

$$a_C^\tau = \varepsilon_1 l_{CA};\ \overline{c''c'} = \mu_a \bar{a}_C^\tau;$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau;\ \overline{p'c'} = \overline{p'c''} + \overline{c''c'} = \mu_a \bar{a}_C.$$

Векторы нормальных ускорений направлены по радиусу вращения точек B, C к центру кривизны A траекторий и характеризуют изменение скорости по направлению: $p'b'' \parallel BA$; $p'c'' \parallel CA$.

Векторы касательных ускорений характеризуют изменение скорости по модулю и направлены по касательной к траектории движения: $\overline{b''b'} \perp BA$; $\overline{c''c'} \perp CA$.

Для определения ускорения точки D учитывают, что многоугольник на плане ускорений подобен соответствующему многоугольнику на движущемся звене. Например, $\triangle c'd'b' \infty \triangle CDB$; $\triangle b'c'p' \infty \triangle BCA$.

Отрезки $p'd'$, $p'b'$ пропорциональны соответствующим отрезкам AD и BA на звене:

$$p'd'/DA = p'b'/BA = p'c'/CA.$$

Соблюдается также подобие и других фигур: например, $\triangle b'd'c' \infty \triangle BDC$.

Треугольники скоростей для зубчатых механизмов. Для исследования зубчатых механизмов, особенно многорядных планетарных редукторов и дифференциалов, Л. П. Смирнов предложил использовать графический метод.

На рис. 3.11, *а* показана схема планетарного редуктора, с помощью которого вращательное движение центрального колеса *1* преобразуется во вращательное движение двух валов *6* и *H*, вращающихся в противоположных направлениях. Представление о распределении скоростей точек получают с помощью треугольников скоростей (рис. 3.11, *б*).

Вектор скорости точки A изображается в виде отрезка $AA' = \mu_v v_A$, а распределение скоростей точек радиальной прямой колеса *1* — наклонным лучом OA', проходящим через точки A' и O под

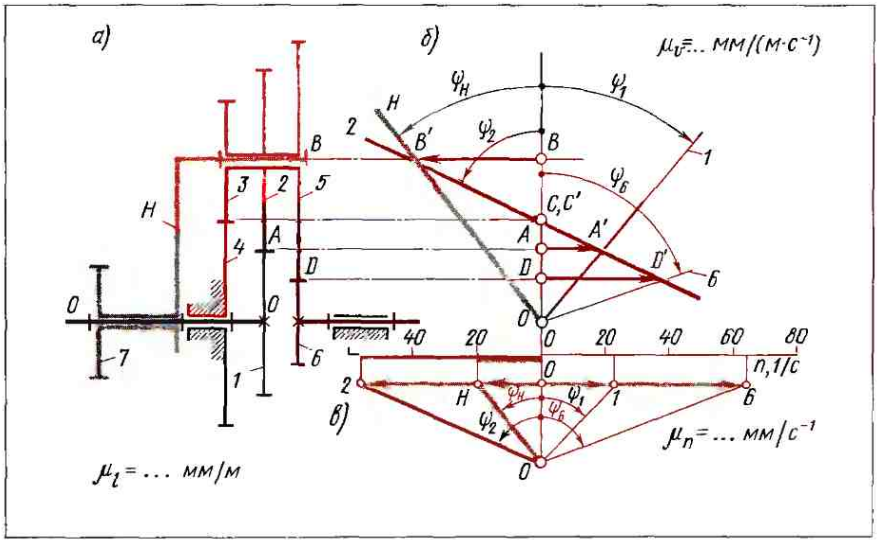


Рис. 3.11

углом ψ_1 к линии отсчета углов. Прямую $A'CB'$ распределения скоростей точек колес *2, 3, 5,* объединенных в блок (сателлит), проводят через точки A' и $C(C')$, так как через точку C проходит ось мгновенного вращения сателлита, ибо колесо *4* неподвижно, сателлит совершает сложное движение: вращение с водилом H вокруг оси OO и вокруг оси B. Отрезок BB' между линией отсчета и прямой распределения скоростей пропорционалеи скорости оси B сателлита. Для водила H прямая $B'O$ распределения линейных скоростей проходит через точку B' и ось вращения O под углом ψ_H. Линейная скорость точки D — полюса зацепления колес *5* и *6* — изображается отрезком DD'.

Для получения наглядной картины об угловых скоростях и частотах вращения зубчатых колес выбирают общую точку O (рис. 3.11, *в*), через которую проводят пучок лучей, параллельных соответствующим прямым распределения скоростей, т. е. лучей с углами наклона ψ_1, ψ_2, ψ_H, ψ_6. Если этот пучок лучей пересечь какой-либо прямой, перпендикулярной линии отсчета линейных скоростей, то можно отметить точки пересечения *1, 2, H, 6* и отрезки $O1$, $O2$, OH, $O6$, отсчитываемые от начала отсчета O. Нетрудно показать, что эти отрезки пропорциональны частоте вращения и угловой скорости соответствующих зубчатых колес. Записывают следующие соотношения:

$$OA = \mu_l r_{w1};\ AA' = \mu_v v_A;\ v_A = \omega_1 r_{w1};$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_{w1}} = \frac{AA'/\mu_v}{OA/\mu_l} = \frac{\mu_l}{\mu_v}\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\mu_l}{\mu_v}\frac{O1}{OO} = \frac{O1}{\mu_\omega},$$

т. е. $O1 = \mu_\omega \omega_1$.

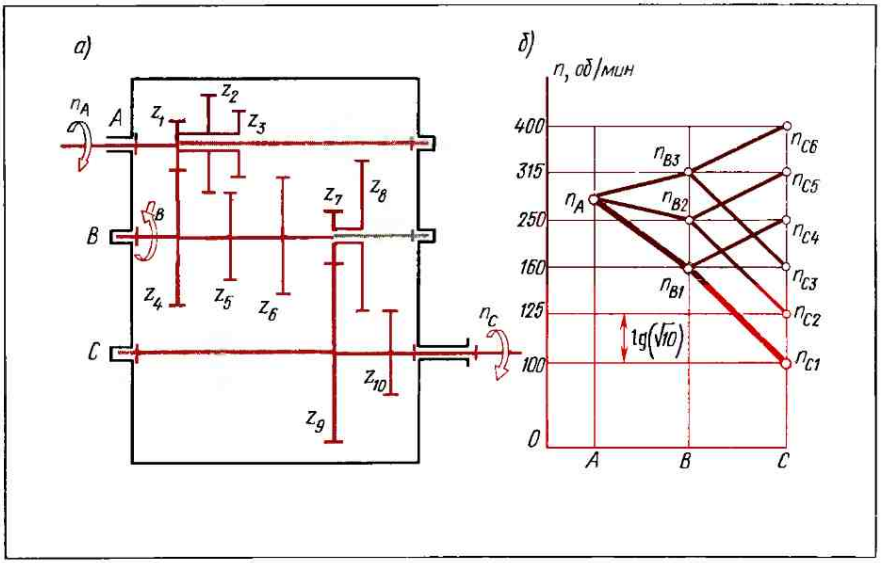


Рис. 3.12

Аналогично:

$OH=\mu_\omega\omega_H$; $O6=\mu_\omega\omega_6$; $O2=\mu_\omega\omega_2$,

где $\mu_\omega=(\mu_v/\mu_l)OO$ — масштаб угловой скорости; $[\mu_\omega]$=мм/(рад·с$^{-1}$) — единица СИ масштаба угловой скорости.

Так как между частотой вращения n_1(1/с) и угловой скоростью ω_1(рад/с) существует соотношение $\omega_1=2\pi n_1$, то

$$n_1=\omega_1/(2\pi)=\overline{O1}/(2\pi\mu_\omega)=\overline{O1}/(\mu_n),$$

где $\mu_n=2\pi\mu_\omega$ — масштаб частоты вращения; $[\mu_n]$=мм/с$^{-1}$ — единица СИ масштаба частоты вращения.

Передаточные отношения определяют из соотношений:

$$u_{61}=\omega_6/\omega_1=\mathrm{tg}\psi_6/\mathrm{tg}\psi_1=O6/O1;\ u_{71}=\omega_7/\omega_1=\mathrm{tg}\psi_H/\mathrm{tg}\psi_1=$$
$$=OH/O1.$$

На линии частот вращения зубчатых колес обычно для наглядности наносят шкалу (рис. 3.11, *в*).

При проектировании сложных зубчатых механизмов, например коробки передач (рис. 3.12, *а*), проводят последовательные построения, а результаты представляют в виде совокупности нескольких линий частот вращения для разных валов, например *A*, *B*, *C*. На рис. 3.12, *а* приведена схема шестиступенчатой коробки передач, состоящей из подвижного блока колес z_1, z_2, z_3 на валу *A*, подвижного блока колес z_7, z_8 на валу *B*, колес z_4, z_5, z_6, закрепленных на валу *B*, и колес z_9, z_{10}, закрепленных на валу *C*.

При проектировании подобных механизмов частота вращения

выходного вала C должна изменяться в требуемых пределах по заданному закону, что и отражается в форме графика — «лучевой диаграммы». На рис. 3.12, *б* изображен один из таких графиков, показывающий изменение частоты вращения вала C в пределах от $n_{C1}=100$ мин$^{-1}$ до $n_{C6}=400$ мин$^{-1}$ с последовательностью частот вращения по закону геометрической прогрессии с заданным знаменателем прогрессии $\sqrt[10]{10}=1{,}25$. Шкалу частот вращения принимают логарифмической с постоянной длиной отрезков между соседними значениями неравномерной шкалы.

Планы скоростей и ускорений при сложном движении точек звена. При сложном движении точки или тела движение исследуется одновременно в основной и подвижной системах отсчета.

Движение точки или тела по отношению к основной системе отсчета называется абсолютным движением.

Движение точки или тела по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным движением.

Движение подвижной системы отсчета по отношению к основной системе отсчета называется переносным движением.

Теорема сложения скоростей *при сложном движении точки* гласит: *абсолютная скорость $\bar{v}_a$ точки равна геометрической сумме переносной $\bar{v}_e$ и относительной $\bar{v}_r$ скоростей этой точки:*

$$\bar{v}_a=\bar{v}_e+\bar{v}_r. \tag{3.9}$$

При определении переносной скорости $\bar{v}_e$ точки предполагается, что относительное движение точки остановлено.

При *плоском движении звена переносное движение является поступательным* со скоростью произвольно выбранной точки звена, принятой за полюс, а *относительное движение является вращательным* вокруг этой точки; угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Абсолютное ускорение $\bar{a}_a$ любой точки звена при плоскопараллельном (плоском) движении твердого тела *равно геометрической сумме двух ускорений: ускорения a_e в поступательном переносном движении и ускорения $\bar{a}_r$ во вращательном относительном движении:*

$$\bar{a}_a=\bar{a}_e+\bar{a}_r=\bar{a}_e+\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^\tau, \tag{3.10}$$

где $\bar{a}_r^n$ и $\bar{a}_r^\tau$ — соответственно *нормальное ускорение в относительном движении, направленное по радиусу вращения точки к центру кривизны траектории, и касательное ускорение, направленное перпендикулярно радиусу вращения.*

Элементы абсолютного движения обозначают индексом a, относительного — индексом r, переносного — индексом e. Индекс принимают подстрочным, если в обозначении элемента не указывают точку, движение которой рассматривается. Если рассматривается совокупность элементов, то эти индексы опускают и вводят в качестве подстрочного индекса обозначения точки и номер звена, например v_{D2}, $\bar{v}_{C3}$, v_{D2C3}, v_{D2D3}. Если принадлежность точек к звену оговорена отдельно или ясно видна по схеме, то номер звена можно опускать, например $\bar{v}_D$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_{DC}$ (нельзя $\bar{v}_{DD}$).

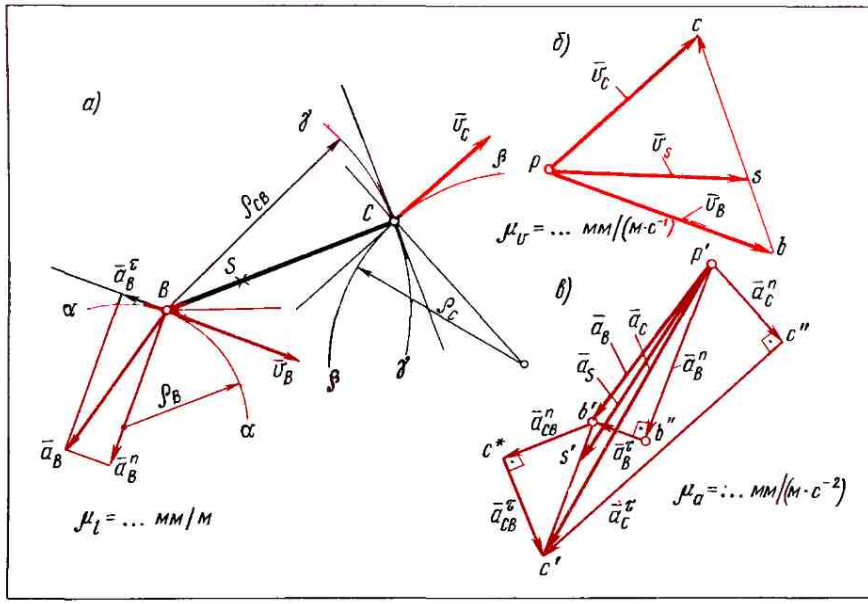


Рис. 3.13

Соотношения (3.9) и (3.10) используют для построения планов скоростей и ускорений *точек* звена при его плоском движении (например, звена BC на рис. 3.13). Векторное уравнение (3.9) для скоростей точек C и B запишем в виде

$$\underline{\bar{v}_C} = \underline{\bar{v}_B} + \underline{\bar{v}_{CB}}.$$

Это означает: абсолютная скорость $\bar{v}_C$ точки C равна геометрической сумме переносной скорости $\bar{v}_B$, определяемой движением точки B, и относительной скорости $\bar{v}_{CB}$ точки C при вращении звена вокруг точки B. Это векторное уравнение решается, если оно содержит не более двух неизвестных. Если известны траектории $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, описываемые точками C и B в абсолютном движении (рис. 3.13, *а*), то направление всех скоростей в этом уравнении определено: по касательной к траектории движения. Необходимо знать модуль скорости только одной из точек (например, $|\bar{v}_B|$). При анализе векторных уравнений принято подчеркивать обозначение векторов одной или двумя чертами внизу. Две черты означают, что данный вектор известен как по направлению, так и по величине. Одна черта означает, что для вектора известно только направление или только величина.

Решение записанного векторного уравнения показано на рис. 3.13, *б* в виде отрезков, пропорциональных соответствующим скоростям:

$$\underline{\overline{pc}} = \underline{\overline{pb}} + \underline{\overline{bc}}, \text{ где } \overline{pc} \infty \bar{v}_C;\ \overline{pb} \infty \bar{v}_B;\ \overline{bc} \infty \bar{v}_{CB}.$$

Скорость любой точки S на звене BC находится методом пропорционального деления отрезка cb, изображающего относительную скорость v_{CB}:

$$bs = cb\,(BS/CB).$$

Для определения ускорений записывают уравнение (3.10) в следующем виде:

$$\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau. \qquad (3.11)$$

Нормальные ускорения определяют по формулам:

$$a_C^n = v_C^2/\rho_C;\ a_B^n = v_B^2/\rho_B;\ a_{CB}^n = v_{CB}^2/\rho_{CB} = v_{CB}^2/l_{CB},$$

где ρ_B, ρ_C и $\rho_{CB} = l_{CB}$ — радиусы кривизны соответствующих траекторий абсолютного и относительного движения.

Касательное ускорение $\bar{a}_B^\tau = \mathrm{d}v_B/\mathrm{d}t$ также задано.

Решение векторного уравнения (3.11) приведено на рис. 3.13, *в* в виде построения плана ускорений:

$$\overline{p'c''} + \overline{c''c'} = \overline{p'b''} + \overline{b''b'} + \overline{b'c^*} + \overline{c^*c'}.$$

Отрезки $\overline{p'c''}$, $\overline{p'b''}$, $\overline{b'c^*}$ выражают соответственно нормальные ускорения $\bar{a}_C^n$, $\bar{a}_B^n$, $\bar{a}_{CB}^n$ в масштабе μ_a:

$$\overline{p'c''} = \mu_a \bar{a}_C^n;\ \overline{p'b''} = \mu_a \bar{a}_B^n;\ \overline{b'c^*} = \mu_a \bar{a}_{CB}^n.$$

Отрезки $\overline{c''c'}$, $\overline{b''b'}$, $\overline{c^*c'}$ пропорциональны касательным ускорениям $\bar{a}_C^\tau$, $\bar{a}_B^\tau$, $\bar{a}_{CB}^\tau$, причем отрезок $\overline{b''b'} = \mu_a \bar{a}_B^\tau$ вычисляют предварительно, а отрезки $\overline{c^*c'}$ и $\overline{c''c'}$ позволяют определить искомые ускорения:

$$\bar{a}_{CB}^\tau = \overline{c^*c'}/\mu_a \ \text{ и } \ \bar{a}_C^\tau = \overline{c''c'}/\mu_a.$$

Ускорение любой другой точки на звене BC, например S (рис. 3.13, *а*), находят, используя свойство подобия фигур и отрезков на звене и плане ускорений (рис. 3.13, *в*):

$$\overline{b's'} = \overline{b'c'}\,(BS/BC) \ \text{ и } \ \bar{a}_S = \overline{p's'}/\mu_a.$$

Отрезок $b's'$ находят из соотношения

$$b's' = b'c'\,(BS/BC).$$

Методика построения планов скоростей и планов ускорения *для двухповодковых групп с тремя вращательными парами* (рис. 3.14, *а*) состоит в составлении соответствующих векторных уравнений для каждого звена и нахождении совместного решения.

Например, для двухповодковой группы из звеньев BC и CD, изображенной на рис. 3.14, *а*, составляют следующие уравнения.

Для определения скоростей:

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}; \\ \bar{v}_C &= \bar{v}_D + \bar{v}_{CD} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

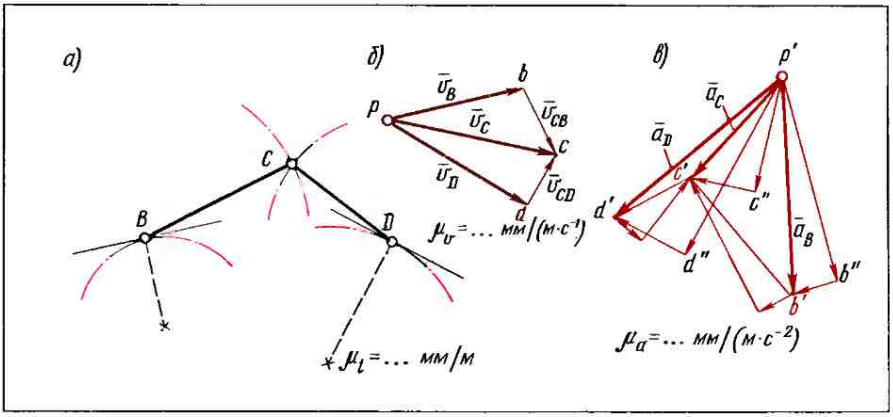


Рис. 3.14

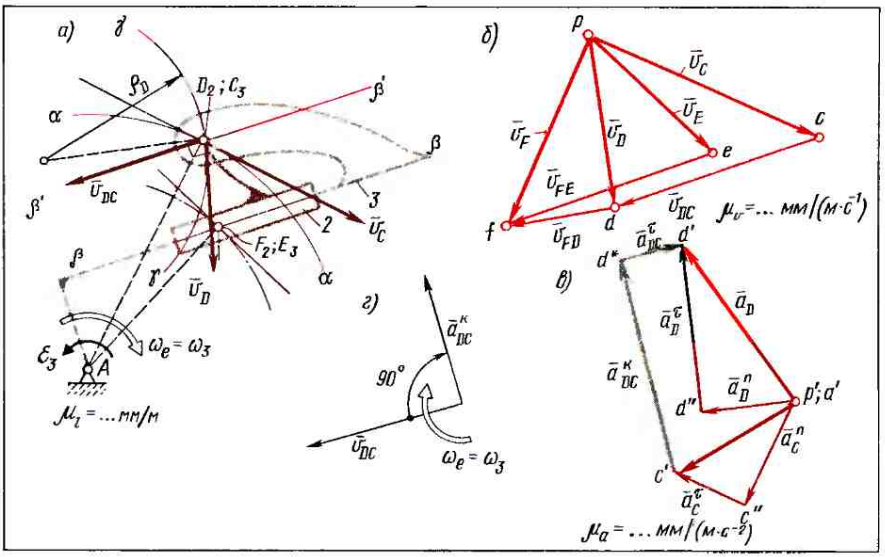


Рис. 3.15

правые части соотношений (3.12) приравнивают:

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\bar{v}_{CB}} = \underline{\underline{\bar{v}_D}} + \underline{\bar{v}_{CD}},$$

т. е. скорость точки C можно найти, если известны величины и направления скоростей концевых точек B и D обоих поводков, которыми группа присоединяется к начальному звену и стойке или к ранее присоединенным группам. Решение уравнения (3.12) приведено на рис. 3.14, *б* в виде плана скоростей.

Для определения ускорений:

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= \bar{a}_B + \bar{a}_{CB} = \underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau}; \\ \bar{a}_C &= \bar{a}_D + \bar{a}_{CD} = \underline{\underline{\bar{a}_D^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_D^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CD}^n}} + \underline{\bar{a}_{CD}^\tau} \end{aligned} \qquad (3.13)$$

правые части соотношений (3.13) приравнивают:

$$\underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau} = \underline{\underline{\bar{a}_D^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_D^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CD}^n}} + \underline{\bar{a}_{CD}},$$

т. е. ускорение точки C можно определить, если известны величины и направления нормальных и касательных ускорений концевых точек B и D обоих поводков двухповодковой группы.

Графическое решение векторного уравнения (3.13) приведено на рис. 3.14, *в* в виде плана ускорений.

В случае, когда *переносное движение при сложном движении точки не является поступательным* (рис. 3.15), *то абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова:*

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r), \qquad (3.14)$$

где вектор $\bar{v}_r$ относительной скорости точки определяется из соотношения (3.9):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Соотношения (3.9) и (3.14) используют для построения планов скоростей и ускорений, например, точки D звена *2*, перемещающегося относительно звена *3* (рис. 3.15, *а*). Переносным является движение точки C звена *3*, которому принадлежит направляющий элемент β—β поступательной кинематической пары между звеньями *2* и *3*. Точка C звена *3* совпадает по положению в данный момент с рассматриваемой точкой D звена *2*. Их относительное движение — прямолинейное в направлении β′—β′, параллельном направляющему элементу β—β.

Направления движения точек D и C зависят от их связей с другими звеньями механизма, определяющими траектории α—α точки C и γ—γ точки D при их движении относительно стойки.

Векторное уравнение (3.9) скоростей записывают в следующем виде:

$$\underline{\underline{\bar{v}_D}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\bar{v}_{DC}}.$$

Скорости $\bar{v}_D$ и $\bar{v}_C$ направлены по касательным к соответствующим траекториям точек: v_C — к α—α, v_D — к γ—γ, v_{DC} направлено

вдоль β′—β′. Графическое решение векторного уравнения приведено на рис. 3.15, *б* в таком виде:

$$\overline{pd}=\overline{pc}+\overline{cd},$$

где каждый из отрезков пропорционален соответствующей скорости. Поэтому $\overline{pc}=\mu_v\bar{v}_C$, а искомые скорости:

$$\bar{v}_D=\overline{pd}/\mu_v \text{ и } \bar{v}_{DC}=\overline{cd}/\mu_v.$$

По плану скоростей аналогично можно определить скорости и других точек, например F, принадлежащей звену *2*, в данный момент совпадающей по положению с точкой E звена *3* (рис. 3.15, *а*)

$$\bar{v}_{F2}=\bar{v}_{E3}+\bar{v}_{F_2E_3}, \text{ или } \bar{v}_F=\bar{v}_E+\bar{v}_{FE}.$$

При решении этого векторного уравнения можно воспользоваться равенством скоростей точек F и D в относительном движении звена *2* по отношению к звену 3: $v_{FE}=v_{DC}$ или $\overline{cd}=\overline{ef}$.

Для построения плана ускорений воспользуемся уравнением $\bar{a}_a=\bar{a}_e+\bar{a}_r+\bar{a}_к$, записанным в следующей форме:

$$\bar{a}_D=\bar{a}_C+\bar{a}_{DC}+\bar{a}^к_{DC},$$

или

$$\bar{a}^n_D+\bar{a}^\tau_D=\bar{a}^n_C+\bar{a}^\tau_C+\bar{a}^n_{DC}+\bar{a}^\tau_{DC}+\bar{a}^к_{DC}. \qquad (3.15)$$

В обозначении кориолисова ускорения используют верхний индекс, если в нижнем индексе приводят обозначение точек в основной и подвижной системах отсчета. Например, $a^к_{D2C3}$ или $a^к_{DC}$ — для обозначения кориолисова ускорения точки D_2 (или D) относительно подвижной системы, точка C_3 (или C) которой совпадает в данный момент времени с точкой D_2 (или D).

В уравнении (3.15) нормальные ускорения соответственно равны:

$$a^n_D=v^2_D/\rho_D;\ a^n_C=v^2_C/\rho_C;\ a^n_{DC}=v^2_{DC}/\rho_{DC}=v^2_{DC}/\infty=0.$$

Касательное ускорение точки C $a^\tau_C=\varepsilon_3\rho_C$. Кориолисово ускорение $\bar{a}^к_{DC}=2\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r=2\bar{\omega}_3\times\bar{v}_{DC}$. Для определения направления кориолисова ускорения учтем, что вектор ω_3 перпендикулярен плоскости чертежа, а вектор относительной скорости $\bar{v}_{DC}$ расположен в плоскости чертежа. Поэтому достаточно вектор относительной скорости $\bar{v}_{DC}$ повернуть на 90° в плоскости чертежа в направлении угловой скорости переносного движения (в данном случае $\bar{\omega}_3$) (рис. 3.15, *г*). Повернутый вектор, согласно правилу Жуковского, совпадает с направлением кориолисова ускорения для плоских механизмов.

Решение векторного уравнения для ускорений приведено на рис. 3.15, *в* в виде отрезков:

$$\overline{p'd''}+\overline{d''d'}=\overline{p'c''}+\overline{c''c'}+\overline{c'd^*}+\overline{d^*d'}.$$

Каждый из отрезков пропорционален соответствующему ускорению

$$\overline{p'd''}=\mu_a\bar{a}^n_D;\ \overline{p'c''}=\mu_a\bar{a}^n_C;\ \overline{c''c'}=\mu_a\bar{a}^\tau_C;\ \overline{c'd^*}=\mu_a\bar{a}^\kappa_{DC}.$$

Искомые ускорения равны

$$\bar{a}^\tau_{DC}=\overline{d^*d'}/\mu_a;\ \bar{a}^\tau_D=\overline{d''d'}/\mu_a.$$

При определении скоростей и ускорений точек в случае *двухповодковой группы, в которой концевые кинематические пары — вращательная и поступательная*, используют соотношения для сложного движения точки и плоского движения звена.

На рис. 3.16, *а* изображена двухповодковая группа, поводок *3* которой образует поступательную кинематическую пару со звеном *4*, а звено *2* образует вращательные пары *B* и *C*. Для определения скорости точки *C* можно записать следующие уравнения:

$$\bar{v}_C=\underline{\bar{v}_B}+\underline{\bar{v}_{CB}};\ \bar{v}_C=\bar{v}_F+\underline{\bar{v}_{CF}}.$$

Эти соотношения дают решение, если предварительно определить скорость точки *F* на звене *4*, так как задана скорость точки *M* того же звена *4*

$$\bar{v}_F=\underline{\underline{\bar{v}_M}}+\underline{\underline{\bar{v}_{FM}}}.$$

Приравнивают правые части соотношений:

$$\underline{\bar{v}_B}+\underline{\bar{v}_{CB}}=\underline{\bar{v}_F}+\underline{\bar{v}_{CF}}.$$

Это уравнение решается, если известны скорости v_B точки *B* на звене *2*, v_F точки *F* на звене *4*.

Решение векторного уравнения приведено на рис. 3.16, *б* в виде плана скоростей. Аналогичные соотношения записывают для ускорений:

$$\bar{a}_F=\underline{\underline{\bar{a}_M}}+\underline{\underline{\bar{a}^n_{FM}}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_{FM}}};$$

$$\bar{a}_C=\bar{a}_B+\bar{a}_{CB}=\underline{\underline{\bar{a}^n_B}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_B}}+\underline{\underline{\bar{a}^n_{CB}}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_{CB}}};$$

$$\bar{a}_C=\bar{a}_F+\bar{a}_{CF}+\bar{a}^\kappa_{CF}=\underline{\underline{\bar{a}_F}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_{CF}}}+\underline{\underline{\bar{a}^\kappa_{CF}}},$$

после приравнивания правых частей соотношений получают

$$\underline{\underline{\bar{a}^n_B}}+\underline{\underline{\bar{a}^n_{CB}}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_{CB}}}=\underline{\underline{\bar{a}^n_F}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_F}}+\underline{\underline{\bar{a}^\kappa_{CF}}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_{CF}}}.$$

Приведенные соотношения решаются, если предварительно определить величины и направления всех векторов, подчеркнутых двумя чертами. На рис. 3.16, *г* показано определение направления кориолисова ускорения по правилу Жуковского. Решение этого векторного уравнения приведено в виде плана ускорений на рис. 3.16, *в*.

Применение изложенных выше приемов кинематического исследования двухповодковых групп рассмотрено ниже на примере шестизвенного кулисного механизма (рис. 3.17, *а*), используемого в разных технологических машинах.

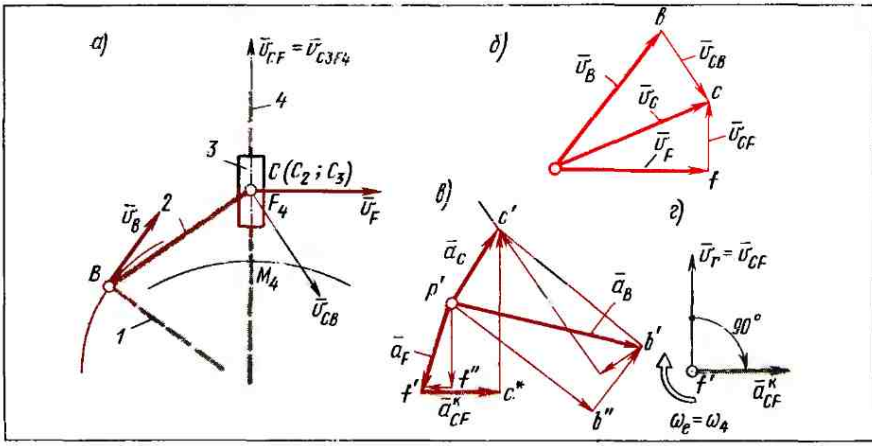


Рис. 3.16

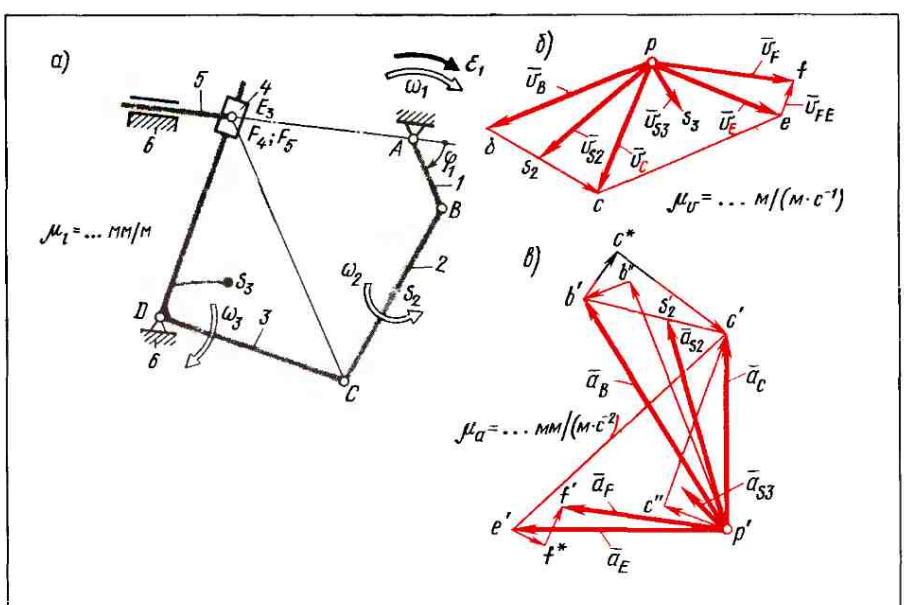


Рис. 3.17

Пусть начальное звено *1* механизма совершает вращательное движение относительно оси A с заданными угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1. Для положения начального звена *1*, определяемого угловой координатой φ_1, можно найти скорость $v_B = \omega_1 l_{BA}$ точки B и ускорения:

нормальное $a_B^n = \omega_1^2 l_{BA} = v_B^2 / l_{BA}$;

касательное $a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{BA}$.

На планах скоростей (рис. 3.17, *б*) и ускорений (рис. 3.17, *в*) эти векторы изображают отрезками, направление и длина которых соответствует физическим величинам

$$\overline{pc} = \mu_v \bar{v}_B;\ \overline{p'b''} = \mu_a \bar{a}_B^n;\ \overline{b''b'} = \mu_a \overline{a_B^\tau}.$$

Единицы СИ масштабов: $[\mu_v] = \text{мм}/(\text{м}\cdot\text{с}^{-1})$ и $[\mu_a] = \text{мм}/(\text{м}\cdot\text{с}^{-2})$, а их числовое значение выбирают с учетом размеров поля на чертеже, отведенного для построения и требуемой точности расчетов. Чем больше размеры отрезков, тем более точными будут результаты графических вычислений и построений.

Звенья *2* и *3* образуют двухповодковую группу, присоединенную одним концевым шарниром в точке B к начальному звену *1* и вторым концевым шарниром в точке D к стойке *6*. Промежуточная кинематическая пара в точке C является вращательной, она соединяет два звена *2* и *3*. По теореме о плоском движении этих звеньев записывают следующие векторные уравнения:

для определения скоростей:

$$\bar{v}_C = \underline{\bar{v}_B} + \underline{\bar{v}_{CB}};\ \bar{v}_C = \underline{\bar{v}_D} + \underline{\bar{v}_{CD}} = \underline{\bar{v}_{CD}},$$

$\bar{v}_D = 0$, так как ось D неподвижна;

для определения ускорений:

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau};\ \bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CD}^n}} + \underline{\bar{a}_{CD}^\tau},$$

здесь $\bar{a}_D = 0$.

Векторы относительных скоростей $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{CD}$ направлены по касательным к траекториям относительного движения, т. е. $\bar{v}_{CB} \perp BC$; $\bar{v}_{CD} \perp CD$.

Числовые значения нормальных ускорений $\bar{a}_{CB}^n$ и $\bar{a}_{CD}^n$ определяются с учетом скоростей и радиусов кривизны траекторий движения точек:

$$a_{CB}^n = v_{CB}^2 / l_{CB};\ a_{CD}^n = v_C^2 / l_{CD}.$$

Векторы нормальных ускорений направлены по нормали к центру кривизны соответствующей траектории относительного движения точек. Векторы касательных ускорений $\bar{a}_{CB}^\tau$ и $\bar{a}_{CD}^\tau$ направлены по касательным к траекториям относительного движения. Следовательно, $\bar{a}_{CB}^n \parallel CB$; $\bar{a}_{CB}^\tau \perp CB$; $\bar{a}_{CD}^n \parallel CD$; $\bar{a}_{CD}^\tau \perp CD$.

Графическое решение записанных выше векторных уравнений приведено в виде плана скоростей (рис. 3.17, *б*) и плана ускорений (рис. 3.17, *в*).

Искомые величины параметров $\bar{v}_C$ и $\bar{a}_C$ определяют по соотношениям

$$\bar{v}_C = \overline{pc}/\mu_v; \quad \bar{a}_C = \overline{p'c'}/\mu_a.$$

К звену *3* рассматриваемого механизма присоединена вторая двухповодковая группа, составленная из звеньев *4* и *5*, образующих между собой вращательную пару в точке *F*. Звено *4* образует со звеном *3* поступательную кинематическую пару. Звено *5* со стойкой *6* также образует поступательную кинематическую пару. Наличие этих связей определяет относительное движение звеньев: ползун *5* движется вдоль направляющей стойки *6*, а звено *4* может скользить относительно направляющей *ED* на звене *3*, совершающей вращательное движение относительно оси *D*.

Для составления векторных уравнений для двухповодковой группы из звеньев *4* и *5* рассматривают сложное движение ползуна *4* т. е. движение точки *F* на звене *4* относительно точки *E* на звене *3*, положение которых в рассматриваемый момент совпадает. Для этих двух точек F_4 и E_3, принадлежащих разным звеньям, записывают следующие векторные уравнения:

для определения скоростей:

$$\bar{v}_{F4} = \bar{v}_{E3} + \bar{v}_{F_4E_3} \text{ или } \underline{\bar{v}_F} = \underline{\underline{\bar{v}_E}} + \underline{\bar{v}_{FE}};$$

для определения ускорений:

$$\bar{a}_F = \underline{\bar{a}_F^{\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_E^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_E^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{FE}^{\kappa}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{FE}^n}} + \underline{\bar{a}_{FE}^{\tau}}.$$

Здесь $\bar{a}_{FE}^n = 0$, так как относительное движение — поступательное.

При построении плана скоростей скорость точки *E* определяют по соотношению $\underline{\bar{v}_E} = \underline{\bar{v}_C} + \underline{\bar{v}_{EC}}$ или из подобия фигур: $\triangle pce \infty \triangle DCE$.

При построении плана ускорений ускорение точки *E* определяют по подобию фигур на схеме механизма и на плане ускорений: $\triangle p'c'e' \infty \triangle DCE$.

Решение векторного уравнения для определения скоростей приведено на рис. 3.17, *б*.

Вектор ef проведен параллельно линии *DE*, а вектор $\overline{pf}$ — параллельно направляющей стойки *6*. Искомая скорость v_F точки *F* определяется по соотношению

$$\bar{v}_F = \overline{pf}/\mu_v.$$

Скорость v_{FE} точки *F* звена *4* относительно точки *E* звена *3* определяют из соотношения $\bar{v}_{FE} = \overline{ef}/\mu_v$.

Угловые скорости звеньев *3* и *2* находят по соотношениям

$$\omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}} = \frac{pc/\mu_v}{CD/\mu_l} = \frac{\mu_l}{\mu_v}\left(\frac{\overline{pc}}{CD}\right),$$

$\operatorname{sgn}\omega_3 = -1$ (по часовой стрелке);

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{bc/\mu_v}{BC/\mu_l} = \frac{\mu_l}{\mu_v}\left(\frac{bc}{BC}\right),$$

$\operatorname{sgn}\omega_2 = +1$ (против часовой стрелки).

Векторные уравнения для определения ускорений следующие:

$$\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau;$$
$$\bar{a}_F^\tau = \bar{a}_E + \bar{a}_{FE}^\kappa + \bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^\tau,$$

здесь $\bar{a}_{FE}^n = 0$. Их решение приведено на рис. 3.17, *в*.

Вектор $\overline{p'c''}$ проведен параллельно линии CD, его длина определена по соотношению $\overline{p'c''} = \mu_a \bar{a}_C^n$. Направление вектора $\overline{c''c'}$ проведено перпендикулярно линии DC, а его длина определяется в результате решения векторного уравнения. Векторы $\overline{p'b''} = \mu_a \times \times \bar{a}_B^n$ и $\overline{b''b'} = \mu_a \bar{a}_B^\tau$ проводят соответственно параллельно и перпендикулярно звену BA с учетом направления углового ускорения ε_1. Для решения первого уравнения к вектору $\overline{p'b'} = \mu_a \bar{a}_B$ прибавляют вектор $\overline{b'c^*} = \mu_a \bar{a}_{CB}^n$ и вектор $\overline{c^*c'}$, длина которого находится из построения. Точка c' представляет собой точку пересечения двух векторов, пропорциональных $\bar{a}_{CB}^\tau$ и $\bar{a}_C^\tau$, известных по направлению, но не известных по величине. Искомое ускорение: $\bar{a}_C = \overline{p'c'}/\mu_a$.

Ускорение точки E находят по подобию треугольников на схеме механизма и на плане ускорений: $\triangle CDE \sim \triangle c'p'e'$.

Векторное уравнение для определения ускорения точки F на ползуне *4* и ползуне *5* в правой части содержит два вектора, известных по величине и направлению: $\overline{p'e'} = \mu_a \bar{a}_E$ и $\overline{e'f^*} = \mu_a \bar{a}_{FE}^\kappa$, и один вектор $\overline{f^*f'} = \mu_a \bar{a}_{FE}^\tau$, направление которого параллельно линии ED.

Ускорение $\bar{a}_{FE}^\kappa$ находят по соотношению

$$\bar{a}_{FE}^\kappa = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_t = 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{FE}.$$

Точку f' на плане ускорений получают, как точку пересечения векторов $\overline{p'f'}$ и $\overline{f^*f'}$, известных по направлению. Искомое ускорение точки F: $\bar{a}_F = \overline{p'f'}/\mu_a$.

Ускорения центров масс S_2, S_3, S_5 звеньев *2, 3, 5* находят по методу подобия фигур и пропорционального деления отрезков векторов ускорения точек в относительном движении и на схеме механизма. Например:

$$\overline{b's_2'} = \overline{b'c'}\frac{BS_2}{BC} \text{ и } \bar{a}_{S2} = \mu_a \overline{p's_2'} \text{ или } \triangle c's_3'e' \sim \triangle CS_3E.$$

На рис. 3.17 показана только одна сторона $c'e'$ треугольника $\bar{a}_{S3} = \overline{p's_3'}/\mu_a$.

Звено *5* совершает поступательное движение; следовательно,

$$\bar{a}_{S5} = \bar{a}_F = \overline{p'f'}/\mu_a.$$

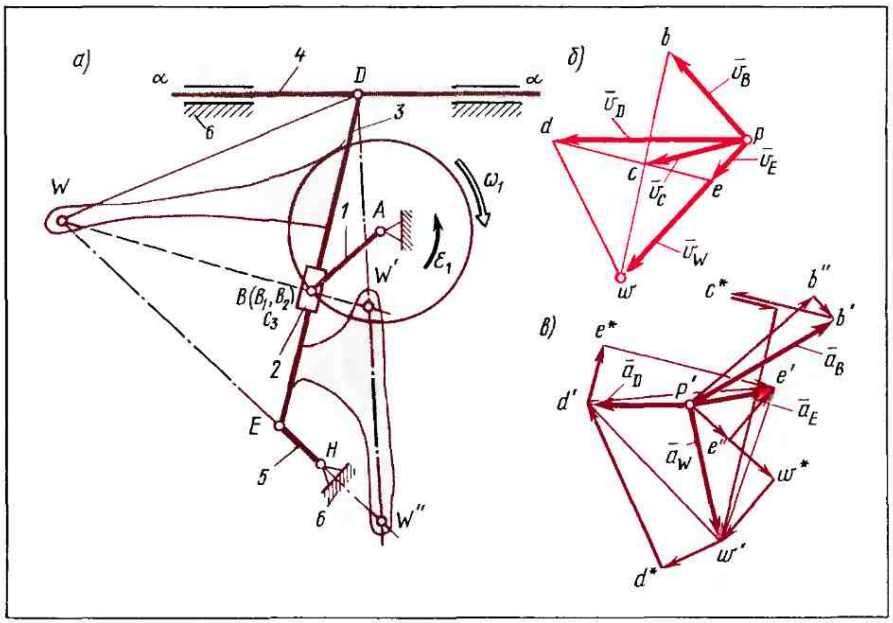


Рис. 3.18

Угловые ускорения звеньев находят по соотношениям:

$$\varepsilon_2 = a^{\tau}_{CB}/l_{CB} = \frac{\mu_l}{\mu_a}\frac{c^*c'}{BC};\ \operatorname{sgn}\varepsilon_2 = +1;$$

$$\varepsilon_3 = a^{\tau}_{C}/l_{DC} = \frac{\mu_l}{\mu_a}\frac{c''c'}{CD};\ \operatorname{sgn}\varepsilon_3 = +1.$$

При кинематическом исследовании механизмов *с трехповодковыми группами*, состоящими из базисного звена и трех поводков, уравнения, составленные для произвольно выбранных точек, непосредственно решить нельзя. Поэтому выбирают на базисном звене *3* точки, которые получили название о с о б ы х (рис. 3.18, *а*). Они находятся на пересечении осевых линий двух поводков или перпендикуляров к осям ползунов. Например, особая точка *W* находится на пересечении линии *EH* поводка *5* и перпендикуляра *WB* к направляющей *ED* ползуна *2* (второй поводок) (рис. 3.18, *а*). Следовательно, для каждой трехповодковой группы на базисном звене существуют три особые точки. На рис. 3.18, *а* особые точки обозначены буквами *W*, *W'* и *W''*. При кинематическом анализе достаточно найти параметры только одной особой точки, например *W*. Смысл выбора этих точек, например *W*, заключается в том, чтобы добиться одинакового направления скоростей относительного движения двух точек, для которых записывается векторное уравнение. Например, направление скорости $\bar{v}_{BC}$ для звена *2* совпадает с $\bar{v}_{CW}$

для базисного звена или направление скорости $\bar{v}_{HF}$ для поводка 5 совпадает с $\bar{v}_{EW}$ для базисного звена.

Проанализируем уравнение сложения скоростей

$$\bar{v}_C = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\bar{v}_{CB}}.$$

Это соотношение не решается непосредственно. Поэтому по теореме о плоскопараллельном движении базисного звена 3 составляют уравнения скоростей для особой точки W:

$$\bar{v}_W = \bar{v}_C + \underline{\bar{v}_{WC}} = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\bar{v}_{CB}} + \underline{\bar{v}_{WC}};$$

$$\bar{v}_W = \underline{\bar{v}_E} + \underline{\bar{v}_{WE}}.$$

В этих уравнениях совпадают направления векторов $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{WC}$ (перпендикулярно линии ED) и векторов $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_{WE}$ (перпендикулярно HEW).

Приравнивая правые части, получают уравнение

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} + \overline{\underline{v_{CB}} + \underline{v_{WC}}} = \overline{\underline{v_E} + \underline{v_{WE}}}.$$

Это векторное уравнение, хотя и содержит четыре неизвестные величины, позволяет определить вектор v_W скорости особой точки W, так как в левой и правой частях уравнения векторы $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{WC}$, а также $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_{WE}$ попарно имеют совпадающие направления. Решение векторного уравнения приведено на плане скоростей (рис. 3.18, *б*) в виде $\triangle pbw$ со сторонами $\overline{pb} = \mu_v \bar{v}_B$; $\overline{pw} = \mu_v(\underline{v_E} + \underline{v_{WE}})$; $\overline{bw} = \mu_v(\underline{v_{CB}} + \underline{v_{WC}})$.

Отрезок $\overline{pw}$ пропорционален скорости $\bar{v}_w$ точки W, принадлежащей базисному звену 3: $\overline{pw} = \mu_v \bar{v}_W$. Для нахождения скорости точки D составляют векторное уравнение:

$$\underline{\bar{v}_D} = \underline{\underline{\bar{v}_W}} + \underline{\bar{v}_{WD}}.$$

Здесь скорость точки D направлена вдоль направляющей aa звена 4, а относительная скорость $\bar{v}_{WD}$ — перпендикулярно линии WD. Решение этого векторного уравнения приведено на плане скоростей (рис. 3.18, *б*) в виде $\triangle pdw$: $dw \perp DW$; $pd \parallel aa$. Искомая скорость $\bar{v}_D = \overline{pd}/\mu_v$.

Скорости остальных точек базисного звена (например, C и E) легко находятся, например, по методу подобия фигур: ($\triangle wde \infty \triangle WDE$ и $\triangle wcd \infty \triangle WCD$) или по методу пропорционального деления отрезков ($de/ec = DE/EC$).

Аналогичные рассуждения и построения выполняют для определения ускорений точек в механизме с трехповодковой группой.

Ниже приведены необходимые соотношения:

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{BA}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{BA};$$

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^\kappa}}.$$

Последнее уравнение содержит три неизвестных параметра, так как $a_{CB}^n = 0$.

Для особой точки W записывают систему уравнений:

$$\bar{a}_W = \bar{a}_E + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WE}}} + \underline{\bar{a}^\tau_{WE}} = \underline{\underline{\bar{a}^n_E}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WE}}} + \underline{\bar{a}^\tau_E} + \underline{\bar{a}^\tau_{WE}};$$

$$\bar{a}_W = \bar{a}_C + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WC}}} + \underline{\bar{a}^\tau_{WC}} = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^\kappa_{CB}}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WC}}} + \underline{\bar{a}^\tau_{CB}} + \underline{\bar{a}^\tau_{WC}}.$$

Учитывают, что $\bar{a}^\tau_E \| \bar{a}^\tau_{WE}$ и $\bar{a}^\tau_{CB} \| \bar{a}^\tau_{WC}$, и, приравнивая правые части уравнений, имеют

$$\underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^\kappa_{CB}}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WC}}} + \overline{\underline{\bar{a}^\tau_{CB} + \bar{a}^\tau_{WC}}} = \underline{\underline{\bar{a}^n_E}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{WE}}} + \overline{\underline{\bar{a}^\tau_E + \bar{a}^\tau_{WE}}};$$

в этом уравнении две пары векторов имеют совпадающие направления, что позволяет найти ускорение $\bar{a}_W$ особой точки W: $a_W = \overline{p'w'}/\mu_a$ (рис. 3.18, *в*).

Далее находят ускорения остальных точек, записав и решив векторные уравнения:

$$\bar{a}^\tau_D = \bar{a}_W + \underline{\underline{\bar{a}^n_{DW}}} + \underline{\bar{a}^\tau_{DW}};$$

$$\underline{\underline{\bar{a}^n_E}} + \underline{\bar{a}^\tau_E} = \bar{a}_D + \underline{\underline{\bar{a}^n_{ED}}} + \underline{\bar{a}^\tau_{ED}}.$$

Искомые величины касательных ускорений точек D и E находят по величине соответствующих отрезков на плане ускорений (рис. 3.18, *в*) с учетом масштаба построения:

$$a^\tau_D = \overline{p'd'}/\mu_a; \quad a^\tau_E = \overline{e''e'}/\mu_a; \quad a_E = \overline{p'e'}/\mu_a.$$

Определение кинематических передаточных функций графическим методом. При построении планов скоростей и ускорений, рассмотренных в этой главе, исходили из предположения, что известен закон изменения обобщенных координат механизма по времени. Для механизма с одной степенью свободы ($W=1$) полагали заданными значения угловой скорости ω_1 и углового ускорения ε_1. В случае, когда эти величины на определенной стадии проектирования машины еще являются неизвестными, то используют *планы возможных скоростей и возможных ускорений* (при условии, что $\varepsilon_1=0$). Графические построения аналогичны рассмотренным, но числовые значения масштабов μ_v и μ_a планов скоростей и планов ускорений неизвестны. Это не является препятствием для вычисления передаточных кинематических функций, являющихся *отношениями кинематических параметров для выходного и входного звеньев.* Эти параметры не зависят от масштабов графических построений. В этом легко убедиться на анализе примеров, рассмотренных выше.

Например, для механизма транспортера, изображенного на рис. 3.17, *а*, передаточные функции скорости движения отдельных точек и звеньев определяются из следующих соотношений:

Передаточные функции скорости точек F, S_2, S_3:

$$v_{qF} = \frac{v_F}{\omega_1} = \frac{v_F}{v_B/l_{BA}} = l_{BA}\frac{pf/\mu_v}{pb/\mu_v} = l_1\frac{pf}{pb};$$

$$v_{qS2}=\frac{v_{S2}}{\omega_1}=\frac{v_{S2}}{v_B/l_{BA}}=l_1\frac{ps_2}{pb};$$

$$v_{qS3}=\frac{v_{S3}}{\omega_1}=l_1\frac{ps_3}{pb}.$$

Передаточные отношения угловых скоростей звеньев *1*, *2* и *3*:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{v_{CB}/l_{CB}}{v_B/l_{BA}}=\frac{l_{BA}}{l_{CB}}\frac{bc}{pb}=\frac{1}{\lambda_2}\frac{bc}{pb};$$

$$u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{v_C/l_{CD}}{v_B/l_{BA}}=\frac{1}{\lambda_3}\frac{pc}{pb},$$

где $l_1=l_{BA}$; $\lambda_2=l_2/l_1=l_{BC}/l_{BA}$; $\lambda_3=l_3/l_1=l_{DC}/l_1$.

Аналогичные выкладки проводят и для передаточных функций ускорения движения точек и звеньев в предположении, что касательное ускорение входного звена равно нулю. Из приведенных соотношений видно, что передаточные кинематические функции выражены через отношения отрезков. При изменении масштаба построения длина отрезков может измениться, но это не окажет влияния на их отношение, т. е. на числовое значение передаточных функций.

§ 3.3 Аналитический метод определения кинематических передаточных функций плоских рычажных механизмов с применением ЭВМ

Сущность данного метода заключается в том, что линейные и угловые координаты, скорости и ускорения звеньев и передаточные функции определяются в виде аналитических выражений, которые содержат конечное число алгебраических или тригонометрических операций. Аналитические выражения могут определять функцию явно, неявно или параметрически.

Исходными данными являются кинематическая схема механизма, определяющая его структуру и размеры звеньев и зависимости обобщенных координат механизма от времени. Если последнее не задано, то уравнения записывают в функции обобщенных координат, т. е. определяют кинематические передаточные функции.

Аналитические выражения определяют для координат, скоростей и ускорений характерных точек механизма, для которых необходимо количественное описание движения при проектировании.

Ниже приведены примеры определения аналитических выражений для кинематических характеристик некоторых механизмов, широко применяемых в машинах.

Кулисный механизм. На рис. 3.19, *а* приведена схема шестизвенного кулисно-тангенсного механизма, состоящего из кривошипа *1*, кулисы *3*, ползунов *2*, *4*, *5*. На рис. 3.19, *б* показана схема

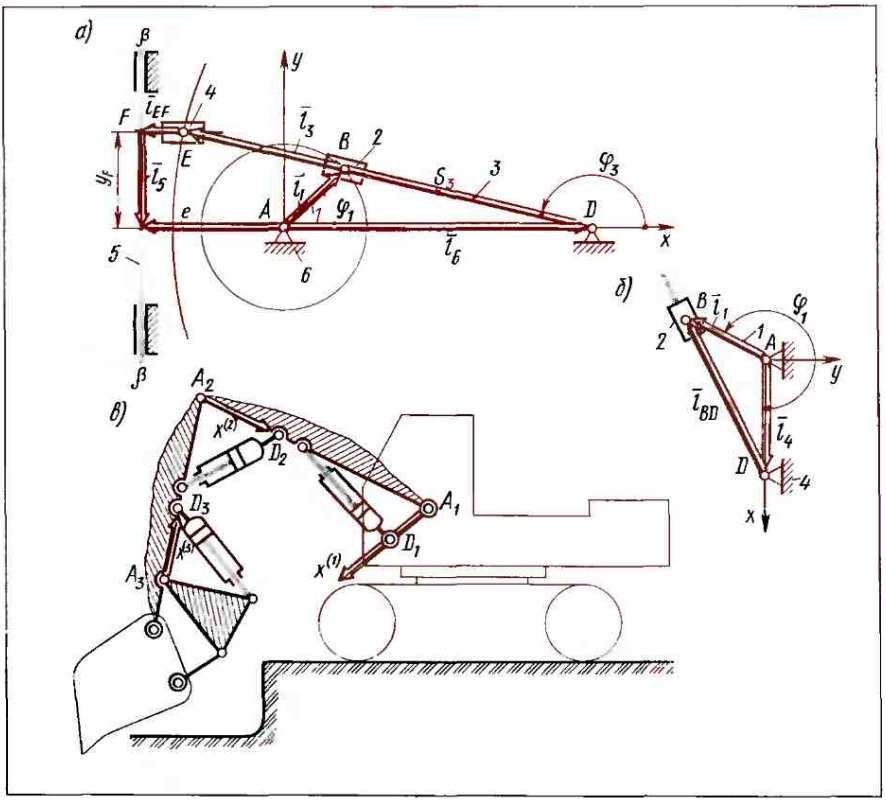


Рис. 3.19

четырехзвенного кулисного механизма, а на рис. 3.19, *в* — пример применения кулисного механизма в машине. Размеры длины звеньев записывают в долях от длины кривошипа через коэффициенты λ_3, λ_e, λ_6 относительной длины звеньев: $\lambda_3 = l_3/l_1$, $\lambda_e = e/l_1$, $\lambda_6 = l_6/l_1$. При определении требуемого положения звена учитывают его ориентацию относительно осей координат с помощью вектора, связанного с рассматриваемым звеном. Такой вектор связывают с характерными точками на звене: с осью звена, проходящей через оси его шарниров (например, на рис. 3.19: $\bar{l}_1 = \overline{AB}$, $\bar{l}_3 = \overline{DE}$, $\bar{l}_6 = \overline{AD}$), или с направляющими элементами в поступательных кинематических парах (например, на рис. 3.19 $\bar{e} \perp \beta\beta$; $\bar{l}_5 \parallel \beta\beta$).

Углы наклона векторов отсчитывают в положительном направлении от оси абсцисс. Начало координат A системы координат Axy располагают на оси вращения начального звена (рис. 3.19) или в какой-либо другой точке, а ось абсцисс Ax связывают со стойкой (например, с направлением Ad через оси A и D вращательных кинематических пар на рис. 3.19).

Угол φ_3 наклона вектора $\bar{l}_3$, связанного с кулисой, определяют

по соотношению

$$\operatorname{tg}\varphi_3=(y_E-y_D)/(x_E-x_D),$$

где x_D, y_D и x_E, y_E — координаты начала D и конца E вектора $\bar{l}_6$.

Угол φ_3 в зависимости от конкретных соотношений между длинами звеньев может изменяться в пределах от 0 до 360° (например, для механизма с вращающейся кулисой). Обратные тригонометрические функции многозначны, а главные значения ограничены пределами. Так, для круговой функции arctg φ_3 главное значение изменяется только в пределах $\pm 90°$. Поэтому для правильного определения значения угла φ_3 используют функцию сигнум, определяющую знак аргумента и обозначаемую через $y=\operatorname{sgn} x$:

$$y=\begin{cases}-1 & \text{при } x<0;\\ 0 & \text{при } x=0;\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Например, направляющий угол φ_3 определяют из соотношения:

$$\varphi_3=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\frac{y_E-y_D}{x_E-x_D}, & \text{если } \operatorname{sgn}(x_E-x_D)=-1;\\ \pi-\operatorname{arctg}\frac{y_E-y_D}{x_E-x_D}, & \text{если } \operatorname{sgn}(x_E-x_D)=+1;\\ \pi/2, & \text{если } \operatorname{sgn}(x_E-x_D)=0;\\ \pi, & \text{если } \operatorname{sgn}(y_E-y_D)=0;\\ 2\pi+\varphi_3, & \text{если } \varphi_3<0.\end{cases} \qquad (3.16)$$

Так как $y_E/y_B=(l_6-x_E)/(l_6-x_B)$; $x_B=l_1\cos\varphi_1$; $y_B=l_1\sin\varphi_1$; $x_D=l_6=\lambda_6 l_1$; $y_D=0$, то соотношение (3.16) записывают в окончательном виде:

$$\varphi_3=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1-\lambda_6}\right), & \text{если } \operatorname{sgn}(\cos\varphi_1-\lambda_6)=-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\lambda_1-\lambda_6}\right), & \text{если } \operatorname{sgn}(\cos\varphi_1-\lambda_6)=+1;\\ \pi/2, & \text{если } \operatorname{sgn}(x_E-x_D)=0;\\ \pi, & \text{если } \operatorname{sgn}(\sin\varphi_1)=0;\\ 2\pi+\varphi_3, & \text{если } \varphi_3<0.\end{cases} \qquad (3.17)$$

Координаты x_F, y_F точки F на ползуне *5*:

$$x_F=-e;\ y_F=y_E=l_3\sin\varphi_3=l_1\lambda_3\sin\varphi_3.$$

Координаты x_{S3}, y_{S3} точки S_3 на кулисе *3*:

$$x_{S3}=l_1\lambda_{S3}\lambda_3\cos\varphi_3;\ y_{S3}=l_1\lambda_{S3}\lambda_3\sin\varphi_3;$$

где $\lambda_{S3}=l_{S3D}/l_1$.

Кинематические передаточные функции находят путем дифференцирования функций положения звеньев по обобщенной координате φ_1.

Передаточное отношение u_{31} угловых скоростей:

$$u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}=\frac{d}{d\varphi_1}\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1-\lambda_6}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{1+\left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1-\lambda_6}\right)^2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1-\lambda_6)(\cos\varphi_1)-\sin\varphi_1(-\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_1-\lambda_6)^2},$$

или окончательно:

$$u_{31}=-\frac{(1-\lambda_6\cos\varphi_1)}{1-2\lambda_6\cos\varphi_1+\lambda_6^2}. \qquad (3.18)$$

Передаточная функция v_{qF} скорости точки F ползуна *5*:

$$v_{qF}=\frac{v_F}{\omega_1}=\frac{d(l_1\lambda_3\sin\varphi_3)}{d\varphi_1}=l_1\lambda_3 u_{31}\cos\varphi_3. \qquad (3.19)$$

Передаточные функции v_{qS3x} и v_{qS3y} проекций скорости точки S_3 на кулисе *3*:

$$\left.\begin{aligned} v_{qS3x}&=v_{S3x}/\omega_1=-l_1\lambda_{S3}\lambda_3 u_{31}\sin\varphi_3;\\ v_{qS3y}&=v_{S3y}/\omega_1=l_1\lambda_{S3}\lambda_3 u_{31}\cos\lambda_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

Дифференцируя выведенные соотношения (3.18)—(3.20) второй раз, получают передаточные функции углового ускорения кулисы и ускорений точек F и S_3.

Характер изменения функций положения φ_3; y_F и передаточных функций u_{31}; v_{qF} механизма, вычисленных на ЭВМ, удобно проследить на дисплее или на графиках, полученных с помощью графопостроителя (рис. 3.20 и 3.21). Показано изменение функций в зависимости от угла φ_1 поворота кривошипа при разных соотношениях между средними скоростями выходного звена при рабочем и вспомогательном ходах, оцениваемых коэффициентом изменения средней скорости K_v.

На рис. 3.20, *а, б* кривые соответствуют изменению y_F и v_{qF}, а на рис. 3.21, *а, б* — изменению φ_3 и u_{31} для пяти фиксированных значений K_v в диапазоне от 1,25 до 2,25 с шагом 0,25.

Кривошипно-ползунный механизм. Кинематическая схема механизма приведена на рис. 3.22. Направляющие *4* ползуна *3* наклонены относительно системы координат $0x^{(0)}y^{(0)}$ под углом φ_{40}. Целесообразно выбрать новую систему координат Axy, начало A которой совмещено с осью вращения кривошипа *1*, а ось Ax абсцисс ориентирована параллельно направляющим *4* ползуна *3*, имеющим смещение e. Для однозначного определения направляющих углов φ_1 и φ_2 со звеньями *1* и *2* связывают векторы $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$. Длину шатуна *2*

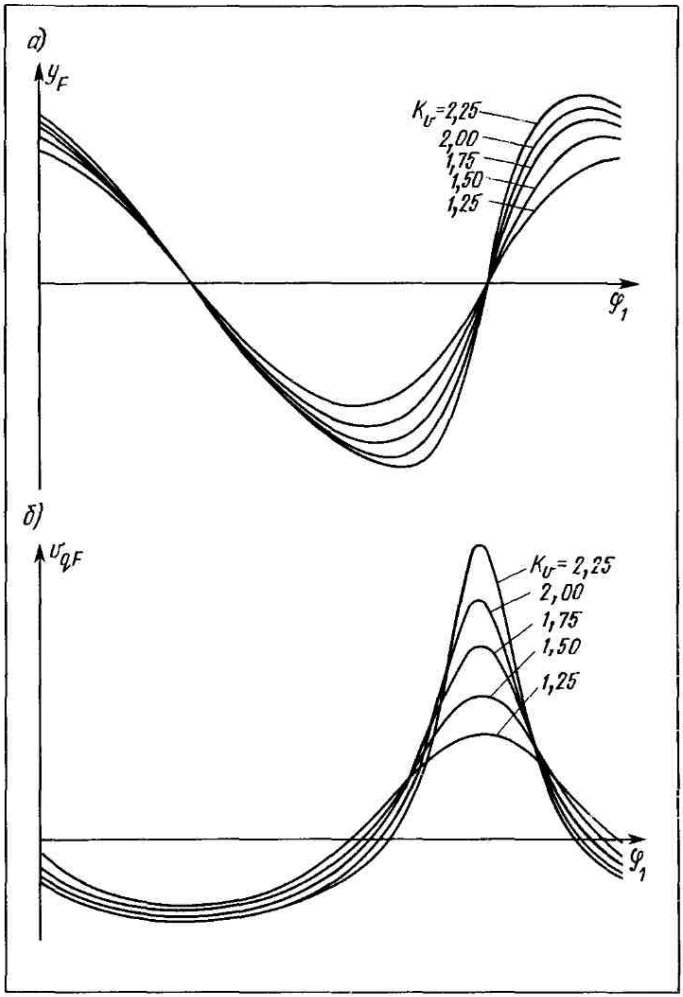


Рис. 3.20

и положение точки S на шатуне выражают через длину l_1 кривошипа: $l_2=\lambda_2 l_1$; $l_{BS}=\lambda_S l_2=\lambda_S\lambda_2 l_1$; $e=\lambda_e l_1$.

Направляющий угол φ_2 вектора $\bar{l}_2$:

$$\operatorname{tg}\varphi_2=(y_C-y_B)/(x_C-x_B), \qquad (3.21)$$

где x_C, y_C и x_B, y_B — координаты начала B и конца C вектора $\bar{l}_2$, которые выражают в виде соотношений:

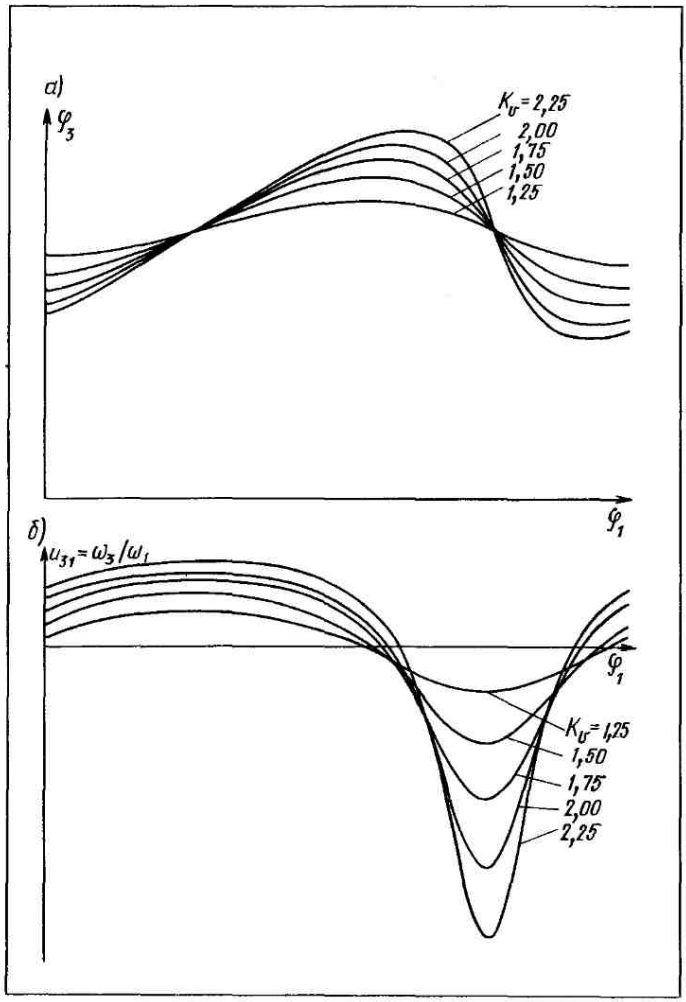


Рис. 3.21

$$x_B = l_1 \cos\varphi_1; \quad y_B = l_1 \sin\varphi_1;$$

$$x_C = l_1 \cos\varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin\varphi_1 - e)^2} = l_1[\cos\varphi_1 + \sqrt{\lambda_2^2 - (\sin\varphi_1 - \lambda_e)^2}];$$

$$y_C = e = \lambda_e l_1. \qquad (3.22)$$

После подстановки уравнений (3.22) в (3.21) имеют:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\lambda_e - \sin\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 - (\sin\varphi_1 - \lambda_e)^2}} \qquad (3.23)$$

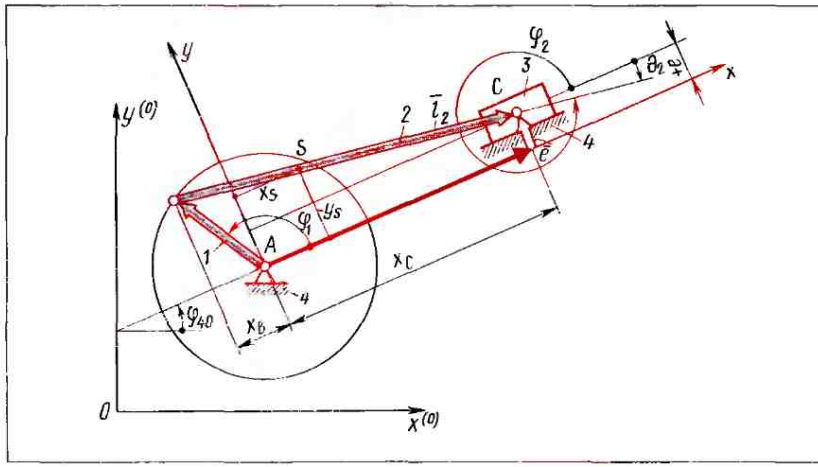


Рис. 3.22

или

$$\sin\varphi_2 = \frac{\lambda_e - \sin\varphi_1}{\lambda_2};$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - (\sin\varphi_1 - \lambda_e)^2}}. \qquad (3.24)$$

Из соотношений (3.23) или (3.24) находят угол φ_2:

$$\varphi_2 = \begin{cases} 2\pi + \arcsin[(\lambda_e - \sin\varphi_1)/\lambda_2], & \text{если } \operatorname{sgn}(\sin\varphi_1 - \lambda_e) = +1; \\ \arcsin[(\lambda_e - \sin\varphi_1)/\lambda_2], & \text{если } \operatorname{sgn}(\sin\varphi_1 - \lambda_e) = -1. \end{cases}$$

Функция положения точки C ползуна *3* соответствует выражению

$$x_C = l_1[\cos\varphi_1 + \sqrt{\lambda_2^2 - (\sin\varphi_1 - \lambda_e)^2}]. \qquad (3.25)$$

Функция положения точки S на шатуне *2*

$$x_S = l_1(\cos\varphi_1 + \lambda_S\lambda_2\cos\varphi_2);$$

$$y_S = l_1(\sin\varphi_1 + \lambda_S\lambda_2\sin\varphi_2). \qquad (3.26)$$

Кинематические передаточные функции получают дифференцированием соотношений (3.23)—(3.26) по обобщенной координате φ_1.

Передаточное отношение u_{21} угловых скоростей шатуна и кривошипа

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}=\frac{d\{\arcsin((\lambda_e-\sin\varphi_1)/\lambda_2)\}}{d\varphi_1}=-\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2\sqrt{1-[(\lambda_e-\sin\varphi_1)/\lambda_2]^2}},$$

или окончательно

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=-\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-(\lambda_e-\sin\varphi_1)^2}}=-\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2\cos\varphi_2}. \tag{3.27}$$

Передаточные функции скорости некоторых точек: точки C на ползуне

$$v_{qC}=\frac{v_C}{\omega_1}=\frac{dx_C}{d\varphi_1}=l_1\left[-\sin\varphi_1-\frac{(\sin\varphi_1-\lambda_e)\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-(\sin\varphi_1-\lambda_e)^2}}\right],$$

или

$$v_{qC}=\frac{v_C}{\omega_1}=-l_1\left[\sin\varphi_1+\frac{(\sin\varphi_1-\lambda_e)\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-(\lambda_e-\sin\varphi_1)^2}}\right], \tag{3.28}$$

или

$$v_{qC}=\frac{v_C}{\omega_1}=-l_1\left(\sin\varphi_1-\frac{\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right)=l_1\frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\cos\varphi_2}; \tag{3.29}$$

точки S на шатуне:

$$\begin{gathered}v_{qSx}=\frac{v_{Sx}}{\omega_1}=-l_1(\sin\varphi_1+\lambda_S\lambda_2u_{21}\sin\varphi_2);\\ v_{qSy}=\frac{v_{Sy}}{\omega_1}=l_1(\cos\varphi_1+\lambda_S\lambda_2u_{21}\cos\varphi_2);\\ v_{qS}=\sqrt{v_{qSx}^2+v_{qSy}^2}\,.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Угловое ускорение шатуна *2*:

$$\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}=\frac{d(\omega_1u_{21})}{dt}=u_{21}\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_1\frac{du_{21}}{dt} \tag{3.31}$$

или

$$\varepsilon_2=u_{21}\varepsilon_1+\omega_1^2\frac{du_{21}}{d\varphi_1}. \tag{3.32}$$

Передаточная функция углового ускорения шатуна *2* определится соотношением

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}=u_{21}\left(\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\right)+\frac{du_{21}}{d\varphi_1}=u_{21}\left(\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\right)+\varepsilon_{q2}, \tag{3.33}$$

где

$$\varepsilon_{q2}=\frac{du_{21}}{d\varphi_1}=\frac{d}{d\varphi_1}\left(-\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2\cos\varphi_2}\right)=\frac{\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1-u_{21}\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\lambda_2\cos^2\varphi_2}=$$
$$=\frac{1}{\lambda_2\cos\varphi_2}\left(\sin\varphi_1+\frac{\sin\varphi_2\cdot\cos^2\varphi_1}{\lambda_2\cos^2\varphi_2}\right).$$

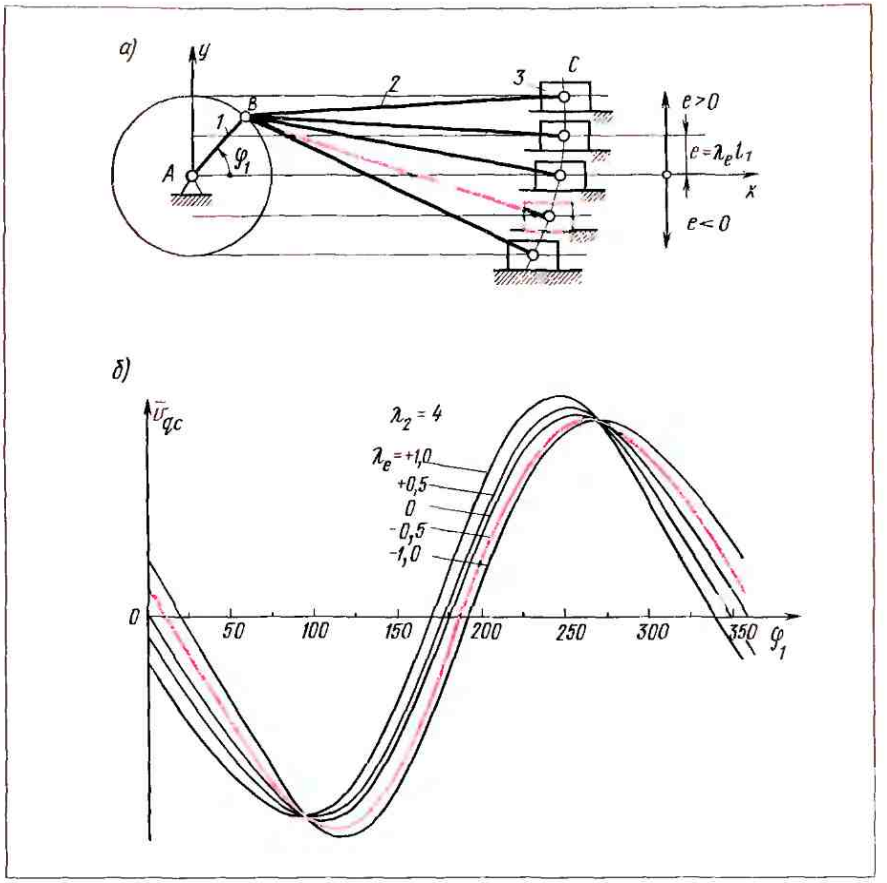


Рис. 3.23

Окончательно получают

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}=\frac{1}{\lambda_2\cos\varphi_2}\left[-\cos\varphi_1\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}+\sin\varphi_1+\frac{\sin\varphi_2\cdot\cos^2\varphi_1}{\lambda_2\cos^2\varphi_2}\right]. \qquad (3.34)$$

Отношение ускорения a_C к квадрату угловой скорости ω_1 точки C на ползуне равно

$$\frac{a_C}{\omega_1^2}=-\frac{l_1}{\cos\varphi_2}\left[\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{\lambda_2}\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_2}\right]. \qquad (3.35)$$

Результаты вычислений некоторых кинематических функций, выполненных на ЭВМ, приведены в виде графиков: на рис. 3.23, *б* — графики изменения функции $v_{\varphi C}=v_C/\omega_1$ от угла φ_1 при фиксированной длине шатуна ($\lambda_2=4$), но при разных относительных смещениях λ_e направляющей ползуна (рис. 3.23, *а*); на рис. 3.24 — графики изменения передаточного отношения $u_{21}=\omega_2/\omega_1$ угловых скоро-

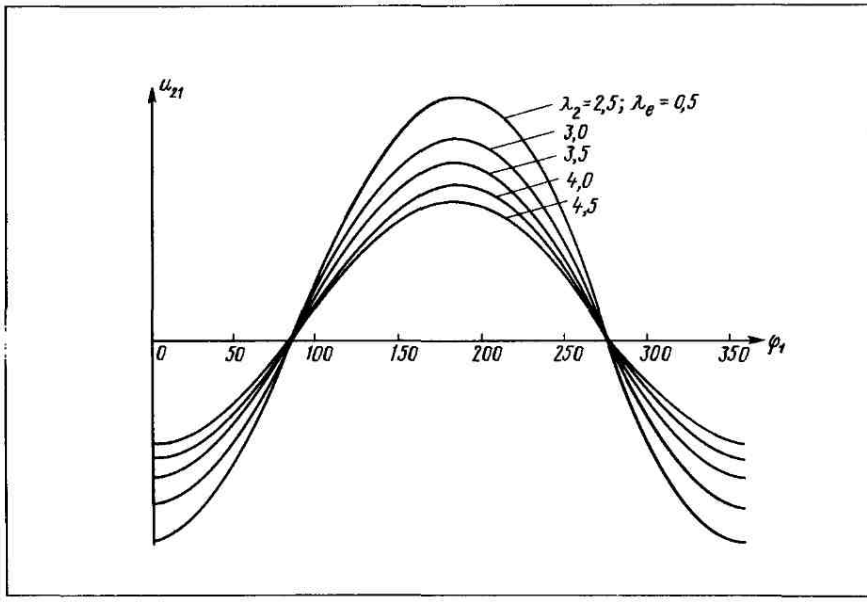


Рис. 3.24

стей звеньев от угла φ_1 при фиксированном смещении направляющей ползуна ($\lambda_e=0,5$), но при разных относительных длинах λ_2 шатуна.

В частном случае для центрального кривошипно-ползунного механизма при $e=0$ имеют место следующие соотношения:

$$\varphi_2=-\arcsin(\sin\varphi_1/\lambda_2); \tag{3.36}$$

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=-\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}}; \tag{3.37}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}=\frac{-\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}}\left(\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\right)+\frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi}}\left(1-\frac{\cos^2\varphi_1}{(\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1)}\right); \tag{3.38}$$

для точки C на ползуне 3:

$$x_C=l_1\left(\cos\varphi_1+\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}\right);$$

$$v_{qC}=\frac{v_C}{\omega_1}=-l_1\sin\varphi_1\left(1+\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}}\right); \tag{3.40}$$

$$\frac{a_C}{\omega_1^2}=-l_1\left[\sin\varphi_1\left(1+\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\varphi_1-\frac{1-2\cos^2\varphi_1-(\sin^2\varphi_1\cdot\cos^2\varphi_1)/(\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1)}{\sqrt{\lambda_2^2-\sin^2\varphi_1}}\right]. \tag{3.41}$$

Для решения ряда практических задач более удобными оказываются приближенные формулы, которые могут быть получены

путем разложения обратной тригонометрической функции $\arcsin x$ в степенной ряд:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots .$$

Применяя такое разложение в степенной ряд для функций (3.36), при $e=0$ имеют

$$\varphi_2 \approx -\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_2} - \frac{1}{6}\frac{\sin^3\varphi_1}{\lambda_2^3} - \frac{3}{40}\frac{\sin^5\varphi_1}{\lambda_2^5}. \qquad (3.42)$$

Этот ряд быстро сходится и обычно ограничиваются первыми двумя членами, если $1/\lambda_2 < 1$. При этих условиях справедливы следующие приближенные формулы:

для шатуна *2*:

$$\sin\varphi_2 = -\frac{1}{\lambda_2}\sin\varphi_1; \qquad (3.43)$$

$$\cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{1}{2\lambda_2^2}\sin^2\varphi_1; \qquad (3.44)$$

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx -\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2} - \frac{1}{2\lambda_2^3}\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1; \qquad (3.45)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2} \approx \frac{1}{\lambda_2}\sin\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_2^3}\sin\varphi_1\left(-1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi_1\right); \qquad (3.46)$$

для точки C на ползуне *3*:

$$x_C \approx l_1\left(\lambda_2 + \cos\varphi_1 - \frac{1}{2\lambda_2}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{8\lambda_2^3}\sin\varphi_1\right); \qquad (3.47)$$

$$v_{qC} = \frac{v_C}{\omega_1} \approx l_1\left(-\sin\varphi_1 - \frac{1}{\lambda_2}\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1 - \frac{1}{2\lambda_2^3}\sin^3\varphi_1\cdot\cos\varphi_1\right) \approx$$

$$\approx -l_1\left(\sin\varphi_1 + \frac{1}{2\lambda_2}\sin 2\varphi_1\right); \qquad (3.48)$$

$$\frac{a_C}{\omega_1^2} = l_1\left[-\cos\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_2}(1-2\cos^2\varphi_1) + \frac{1}{\lambda_2^3}\sin^2\varphi_1\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varphi_1\right)\right]. \qquad (3.49)$$

Механизмы с двухповодковыми структурными группами. Выше были рассмотрены примеры определения передаточных функций относительно простых механизмов. Для более сложных механизмов математические соотношения оказываются весьма громоздкими и могут возникнуть затруднения при преобразованиях. Если в механизме содержится несколько двухповодковых структурных групп, то целесообразно выделить их в порядке присоединения к механизму и предварительно рассмотреть каждую группу в определенной системе координат, относительно которой звенья группы образуют систему с нулевой подвижностью.

Для каждой структурной группы можно образовать векторный контур, составляющие которого определенным образом связаны со звеньями группы, а их геометрическая сумма равна вектору, кото-

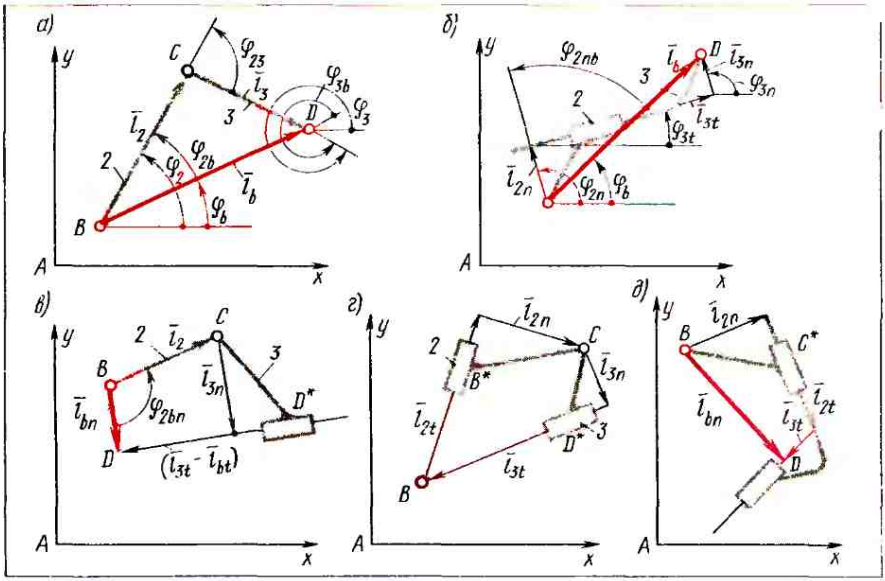


Рис. 3.25

рый можно рассматривать как *базовый вектор* $\bar{l}_b$ *структурной группы.*

На рис. 3.25 приведено несколько примеров векторных контуров для двухповодковых групп разных модификаций. Если звено в группе имеет два шарнира, то вектор, связанный с этим звеном, располагают вдоль осевой линии звена (например, вектор $\bar{l}_2$ на рис. 3.25, *а, в*). Если звенья образуют поступательную кинематическую пару, то со звеном связывают нормальную и осевую (вдоль направляющей) составляющие вектора (например, $\bar{l}_{2n}$, $\bar{l}_{2t}$, $\bar{l}_{3n}$, $\bar{l}_{3t}$ на рис. 3.25, *б, в, г, д*).

Векторный контур для двухповодковой группы должен соответствовать следующим соотношениям (рис. 3.25):

$$\bar{l}_b = \bar{l}_2 + \bar{l}_3, \tag{3.50}$$

или

$$\bar{l}_{bn} + \bar{l}_{bt} = \bar{l}_{2n} + \bar{l}_{2t} + \bar{l}_{3n} + \bar{l}_{3t}. \tag{3.51}$$

Некоторые составляющие уравнения (3.51) могут быть равны нулю для конкретной модификации структурной группы (рис. 3.25, *б, в, г, д*).

Если известны координаты осей или точек, связанных с элементами внешних кинематических пар, то положение базового вектора $\bar{l}_b$ структурной группы может быть найдено по соотношениям, определяющим положение вектора, связывающего две заданные точки. Например, для двухповодковой группы с одними вращатель-

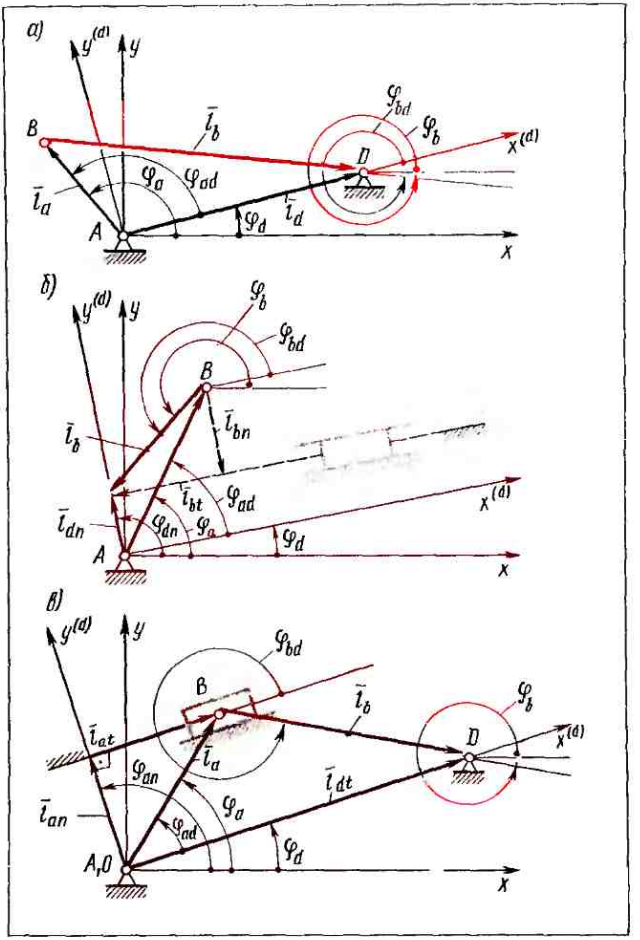


Рис. 3.26

ными кинематическими парами B и D (рис. 3.25, $а$) при известных координатах x_B, y_B и x_D, y_D точек B и D:

длина вектора l_b:

$$l_b = l_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}; \qquad (3.52)$$

направляющий угол φ_b вектора $\bar{l}_b$ относительно оси абсцисс Ax:

$$\varphi_b = \begin{cases} \operatorname{arctg}[(y_D - y_B)/(x_D - x_B)] & \text{если } \operatorname{sgn}(x_D - x_B) = 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}[(y_D - y_B)/(x_D - x_B)], & \text{если } \operatorname{sgn}(x_D - x_B)\, u = -1. \end{cases} \qquad (3.53)$$

Координаты начала B и конца D базового вектора $\bar{l}_b$ для каждой структурной группы известны, если заданы движение начального звена и координаты точки D или определены параметры движения ранее присоединенных структурных групп. С начальным зве-

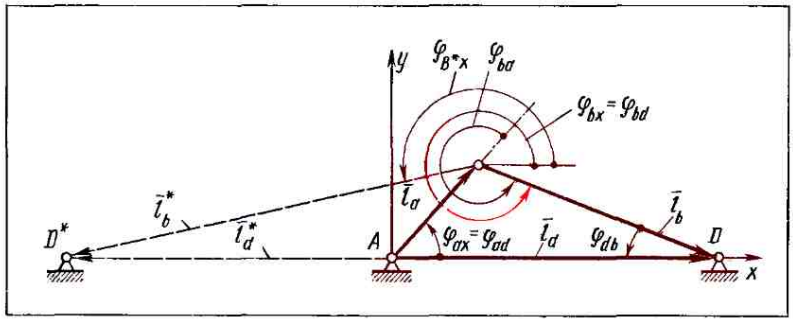


Рис. 3.27

ном связывают вектор $\bar{l}_a$, начало которого совпадает с началом A системы координат xAy (рис. 3.26). Координаты точки B на начальном звене определяют по соотношению

$$x_B = l_a \cos\varphi_a;\ y_B = l_a \sin\varphi_a. \qquad (3.54)$$

Помимо системы координат с горизонтальной осью абсцисс Ax целесообразно пользоваться системой координат, ориентированной по стойке механизма или по оси звена с последующим переходом от одной системы к другой методом преобразования координат.

На рис. 3.26 показано несколько примеров выбора системы координат $Ax^{(d)}y^{(d)}$, ось абсцисс которой ориентирована определенным образом относительно вектора $\bar{l}_d$, связанного со стойкой: *а* — ось $Ax^{(d)}$ совпадает с вектором $\bar{l}_d$, соединяющим точки A и D на стойке; *б* — ось $Ax^{(d)}$ проведена параллельно направляющей выходного звена, имеющей смещение $\bar{l}_{dn}$ относительно шарнира A начального звена; *в* — начальное звено имеет поступательное перемещение, а ось $Ax^{(d)}$ ориентирована по вектору $\bar{l}_{dt}$ с учетом смещения точки D на стойке на величину $\bar{l}_{an}$. Во всех этих случаях имеет место поворот одной системы координат относительно другой на угол φ_d, а положение начального звена $\bar{l}_a$ относительно оси $Ax^{(d)}$ определяется углом $\varphi_{ad} = \varphi_a - \varphi_d$.

Координаты точки B на начальном звене определяют по соотношениям

$$x_B^{(d)} = l_a \cos\varphi_{ad};\quad y_B^{(d)} = l_a \sin\varphi_{ad}. \qquad (3.55)$$

При определении координат точек B и D базового вектора следует обращать внимание на возможные варианты сборки механизма, показанные на рис. 3.27, которые определяют конкретные значения углов между векторами.

Так как размеры звеньев каждой структурной группы известны, то при известном векторе $\bar{l}_b$ определяют параметры остальных векторов контура по соотношениям между элементами треугольника и преобразования координат.

Для двухповодковой группы с тремя вращательными кинематическими парами (см. рис. 3.25, *а*) решение сводится к нахождению

углов треугольника по его трем известным сторонам l_2, l_3 и l_b. Например, угол φ_{2b} находят по одной из следующих формул:

$$\cos\varphi_{2b}=\frac{l_2^2+l_b^2-l_3^2}{2l_2l_b}; \tag{3.56}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_{2b}}{2}=\sqrt{\frac{(p-l_2)(p-l_b)}{p(p-l_3)}}; \tag{3.57}$$

$$\sin\frac{\varphi_{2b}}{2}=\sqrt{\frac{(p-l_2)(p-l_b)}{l_2l_b}}, \tag{3.58}$$

где $p=0{,}5(l_3+l_2+l_b)$ — полупериметр векторного контура.

Формулы для углов φ_{23} и φ_{3b} аналогичны и получаются заменой индексов в соотношениях (3.56)—(3.58) соответствующих сторон по методу циклической подстановки.

Для структурных групп, изображенных на рис. 3.25, *б*, *в*, для отыскания углов φ_{2nb} (рис. 3.25, *б*) или φ_{2bn} (рис. 3.25, *в*) рассматривают соответствующие прямоугольные треугольники, так как длины векторов $\bar{l}_{2n}$, $\bar{l}_{3n}$, $\bar{l}_{3t}$, $\bar{l}_b$, $\bar{l}_{bn}$, $(\bar{l}_{3t}-\bar{l}_{bt})$ известны при заданных размерах звеньев *2* и *3*.

После определения параметров вектора, связанного с тем или иным звеном механизма или со структурной группой, определяют кинематические характеристики механизма.

Применительно к вектору $\bar{l}_b$ (рис. 3.25, *а*) последовательность вычислений следующая:

для координат точки D

$$x_D=x_B+l_b\cos\varphi_b;\quad y_D=y_B+l_b\sin\varphi_b; \tag{3.59}$$

для проекций скорости точки D

$$\begin{aligned}\dot{x}_D&=\mathrm{d}x_D/\mathrm{d}t=\dot{x}_B+l_b\dot{\varphi}_b\sin\varphi_b+\dot{l}_b\cos\varphi_b;\\ \dot{y}_D&=\mathrm{d}y_D/\mathrm{d}t=\dot{y}_B+l_b\dot{\varphi}_b\cos\varphi_b+\dot{l}_b\sin\varphi_b,\end{aligned} \tag{3.60}$$

где точкой обозначена производная функция по времени;

для проекций ускорения точки D

$$\begin{aligned}\ddot{x}_D&=\ddot{x}_B-l_b\ddot{\varphi}_b\sin\varphi_b-l_b\dot{\varphi}_b^2\cos\varphi_b+\ddot{l}_b\cos\varphi_b-2\dot{l}_b\dot{\varphi}_b\sin\varphi_b;\\ \ddot{y}_D&=\ddot{y}_B+l_b\ddot{\varphi}_b\cos\varphi_b-l_b\dot{\varphi}_b^2\sin\varphi_b+\ddot{l}_b\sin\varphi_b+2\dot{l}_b\dot{\varphi}_b\cos\varphi_b.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Использование изложенной методики показано *на примере шарнирного четырехзвенника* (рис. 3.28). Система координат Axy совпадает с системой координат $Ax^{(d)}y^{(d)}$, связанной со стойкой. Система координат $Bx^{(2)}y^{(2)}$ связана со звеном *2*, на котором расположена точка K с заданными координатами $x_K^{(2)}$, $y_K^{(2)}$.

Векторные уравнения записывают в следующем виде:

$$\bar{l}_2+\bar{l}_3=\bar{l}_b;\ \bar{l}_a+\bar{l}_b=\bar{l}_d,$$

или

$$\bar{l}_1+\bar{l}_b=\bar{l}_4;\ \bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3=\bar{l}_4.$$

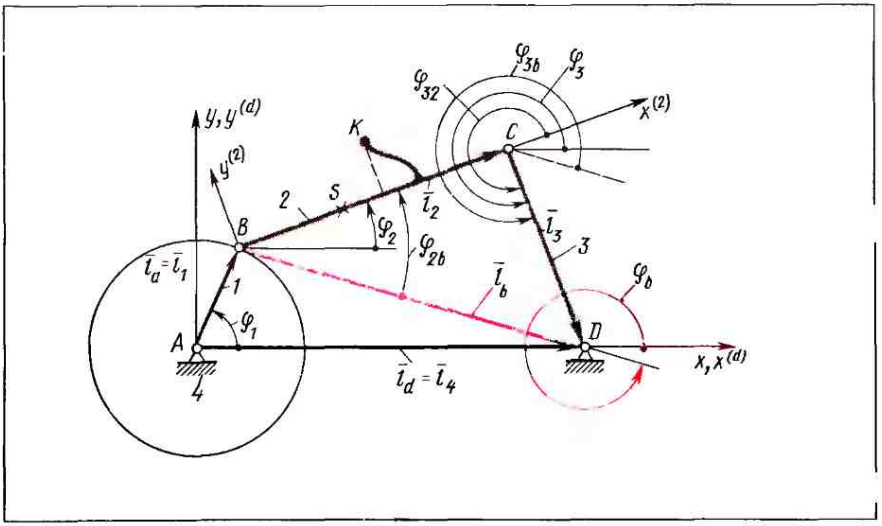


Рис. 3.28

Последнее уравнение проецируют на координатные оси системы координат AXY:

$$\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 = l_4\cos\varphi_4 = l_4; \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 = l_4\sin\varphi_4 = 0, \text{ так как } \varphi_4 = 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Координаты точек B и D базового вектора $\bar{l}_b$ струк следующие:

$$x_B = l_1\cos\varphi_1;\ y_B = l_1\sin\varphi_1;\ x_D = l_4;\ y_D = 0. \tag{3.64}$$

Длины проекций базового вектора $\bar{l}_{bx}$ и $\bar{l}_{by}$ на координатные оси

$$l_{bx} = x_D - x_B = l_4 - l_1\cos\varphi_1;\ l_{by} = y_D - y_B = -l_1\sin\varphi_1. \tag{3.65}$$

Длина базового вектора $\bar{l}_b$

$$l_b = \sqrt{(l_4 - l_1\cos\varphi_1)^2 + (-l_1\sin\varphi_1)^2},$$

или

$$l_b = l_1\sqrt{1 + \lambda_4^2 - 2\lambda_4\cos\varphi_1}, \tag{3.66}$$

где $\lambda_4 = l_4/l_1$.

Направляющий угол φ_b базового вектора $\bar{l}_b$

$$\operatorname{tg}\varphi_b = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-l_1\sin\varphi_1}{l_4 - l_1\cos\varphi_1} = -\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_4 - \cos\varphi_1}. \tag{3.67}$$

Положение векторов $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$, связанных со звеньями *2* и *3* двухповодковой группы, определяют относительно базового вектора $\bar{l}_b$ углами φ_{2b} и φ_{3b}, которые находят по теореме косинусов из $\triangle BCD$:

$$\cos\varphi_{2b} = \frac{l_2^2 + l_b^2 - l_3^2}{2l_2l_b}. \tag{3.68}$$

Введя обозначения: $\lambda_2=l_2/l_1$, $\lambda_3=l_3/l_1$, $\lambda_b=l_b/l_1=\sqrt{1+\lambda_4^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}$, можно записать

$$\cos\varphi_{2b}=\frac{\lambda_2^2+\lambda_b^2-\lambda_3^2}{2\lambda_2\lambda_b}=\frac{\lambda_2^2+1+\lambda_4^2-2\lambda_4\cos\varphi_1-\lambda_3^2}{2\lambda_2\sqrt{1+\lambda_4^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}}; \tag{3.69}$$

$$\cos\varphi_{3b}=\frac{l_b^2+l_3^2-l_2^2}{2l_bl_3}=\frac{\lambda_b^2+\lambda_3^2-\lambda_2^2}{2\lambda_b\lambda_3}. \tag{3.70}$$

По теореме синусов,

$$\sin\varphi_{32}=\frac{l_b}{l_3}\sin\varphi_{2b}=\frac{\lambda_b}{\lambda_3}\sin\varphi_{2b}. \tag{3.71}$$

Направляющие углы φ_2 и φ_3 векторов $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$

$$\varphi_2=\varphi_b+\varphi_{2b};\quad \varphi_3=\varphi_b+\varphi_{3b}. \tag{3.72}$$

После подстановки в (3.72) соотношений (3.68)—(3.70) имеют

$$\varphi_2=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_4-\cos\varphi_1}\right)+\arccos\frac{1+\lambda_2^2+\lambda_4^2-\lambda_3^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}{2\lambda_2\sqrt{1+\lambda_4^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}}. \tag{3.73}$$

$$\varphi_3=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_4-\cos\varphi_1}\right)+\arccos\frac{1+\lambda_3^2+\lambda_4^2-\lambda_2^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}{2\lambda_3\sqrt{1+\lambda_4^2-2\lambda_4\cos\varphi_1}}. \tag{3.74}$$

Координаты точки C (внутренний шарнир двухповодковой группы)

$$x_C=l_1(\cos\varphi_1+\lambda_2\cos\varphi_2);\quad y_C=l_1(\sin\varphi_1+\lambda_2\sin\varphi_2). \tag{3.75}$$

Координаты точки S на оси шатуна, расположенной на расстоянии $l_{BS}=\lambda_{S2}l_2=\lambda_{S2}\lambda_2l_1$,

$$x_S=l_1(\cos\varphi_1+\lambda_{S2}\lambda_2\cos\varphi_2);\quad y_S=l_1(\sin\varphi_1+\lambda_{S2}\lambda_2\sin\varphi_2). \tag{3.76}$$

Координаты точки K, жестко связанной с шатуном и имеющей координаты $x_K^{(2)}$ и $y_K^{(2)}$ в системе координат $B_x^{(2)}y^{(2)}$, связанной с шатуном 2,

$$\begin{aligned} x_K&=l_1\cos\varphi_1+x_K^{(2)}\cos\varphi_2-y_K^{(2)}\sin\varphi_2;\\ y_K&=l_1\sin\varphi_1+x_K^{(2)}\sin\varphi_2+y_K^{(2)}\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Для определения передаточных отношений $u_{21}=\omega_2/\omega_1$ и $u_{31}=\omega_3/\omega_1$ дифференцируют выражения (3.72)—(3.74) по обобщенной координате φ_1:

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}=\frac{d\varphi_b}{d\varphi_1}+\frac{d\varphi_{2b}}{d\varphi_1};\quad u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}=\frac{d\varphi_b}{d\varphi_1}+\frac{d\varphi_{3b}}{d\varphi_1}. \tag{3.78}$$

После дифференцирования уравнения (3.63) получают

$$\begin{aligned} \omega_1l_1\sin\varphi_1+\omega_2l_2\sin\varphi_2+\omega_3l_3\sin\varphi_3&=0;\\ \omega_1l_1\cos\varphi_1+\omega_2l_2\cos\varphi_2+\omega_3l_3\cos\varphi_3&=0 \end{aligned} \tag{3.79}$$

или

$$\begin{aligned}\sin\varphi_1+u_{21}\lambda_2\sin\varphi_2+u_{31}\lambda_3\sin\varphi_3=0;\\ \cos\varphi_1+u_{21}\lambda_2\cos\varphi_2+u_{31}\lambda_3\cos\varphi_3=0.\end{aligned}\tag{3.80}$$

Эта система является линейной относительно неизвестных u_{21} и u_{31}. Определитель системы линейных уравнений обозначают **D** и вычисляют

$$\mathbf{D}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_2\sin\varphi_2 & \lambda_3\sin\varphi_3\\ \lambda_2\cos\varphi_2 & \lambda_3\cos\varphi_3\end{vmatrix}=\lambda_2\lambda_3\sin\varphi_2\cos\varphi_3-$$

$$-\lambda_2\lambda_3\cos\varphi_2\sin\varphi_3=\lambda_2\lambda_3\sin(\varphi_2-\varphi_3).$$

Определители $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ получают из **D**, заменяя соответствующие столбцы из коэффициентов при неизвестных столбцами, составленными из свободных членов:

$$\mathbf{D}_1=\begin{vmatrix}-\sin\varphi_1 & \lambda_3\sin\varphi_3\\ -\cos\varphi_1 & \lambda_3\cos\varphi_3\end{vmatrix}=-\lambda_3\sin\varphi_1\cos\varphi_3+\lambda_3\cos\varphi_1\sin\varphi_3=$$

$$=-\lambda_3(\sin\varphi_1-\varphi_3);$$

$$\mathbf{D}_2=\begin{vmatrix}-\sin\varphi_1 & \lambda_2\sin\varphi_2\\ -\cos\varphi_1 & \lambda_2\cos\varphi_2\end{vmatrix}=-\lambda_2\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Корни системы находят по формулам Крамера:

$$u_{21}=\frac{\mathbf{D}_2}{\mathbf{D}}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\lambda_3\sin(\varphi_2-\varphi_3)};\tag{3.81}$$

$$u_{31}=\frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{D}}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_3)}{\lambda_2\sin(\varphi_2-\varphi_3)}.\tag{3.82}$$

При определении передаточных отношений u_{21} и u_{31} непосредственно по формулам (3.78) получают следующие соотношения в функции обобщенной координаты φ_1:

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{\lambda_b^2}\left(1-\lambda_4\cos\varphi_1-\frac{\lambda_4(\lambda_3^2-\lambda_2^2+\lambda_b^2)\sin\varphi_1}{\sqrt{4\lambda_2^2\lambda_b^2-(-\lambda_3^2+\lambda_2^2+\lambda_b^2)^2}}\right);\tag{3.83}$$

$$u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{1}{\lambda_b^2}\left(1-\lambda_4\cos\varphi_1+\frac{\lambda_4(\lambda_2^2-\lambda_3^2+\lambda_b^2)\sin\varphi_1}{\sqrt{4\lambda_3^2\lambda_b^2-(-\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_b^2)^2}}\right).\tag{3.84}$$

Для определения угловых ускорений звеньев и соответствующих передаточных функций проводят дифференцирование системы (3.79):

$$\begin{aligned}\omega_1^2l_1\cos\varphi_1+\varepsilon_1l_1\sin\varphi_1+\omega_2^2l_2\cos\varphi_2+\varepsilon_2l_2\sin\varphi_2+\omega_3^2l_3\cos\varphi_3+\\ +\varepsilon_3l_3\sin\varphi_3=0;\\ \omega_1^2l_1\sin\varphi_1+\varepsilon_1l_1\cos\varphi_1+\omega_2^2l_2\sin\varphi_2+\varepsilon_2l_2\cos\varphi_2+\omega_3^2l_3\sin\varphi_3+\\ +\varepsilon_3l_3\cos\varphi_3=0.\end{aligned}\tag{3.85}$$

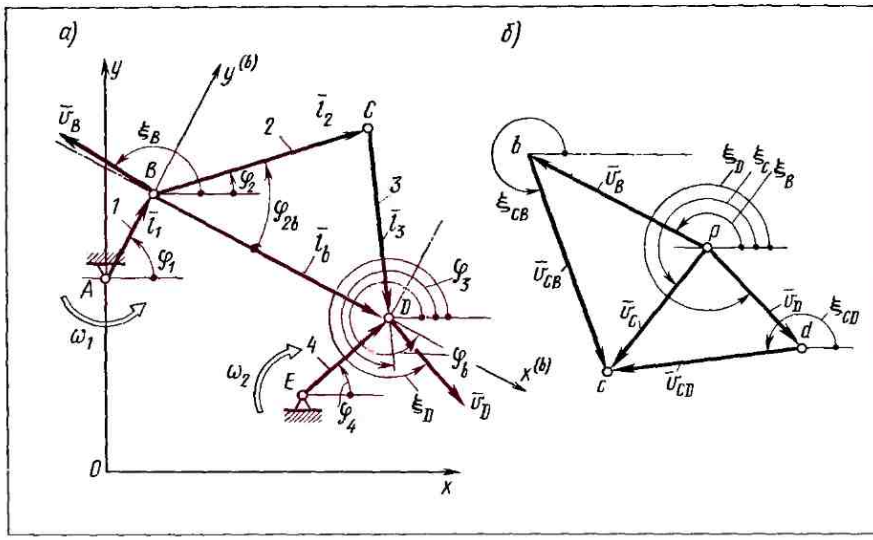


Рис. 3.29

Система (3.85) является линейной относительно искомых величин ε_2 и ε_3.

Систему (3.85) иногда преобразуют относительно $(\varepsilon_2/\omega_1^2)$ и $(\varepsilon_3/\omega_1^2)$:

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}\lambda_2 \sin\varphi_2 + \frac{\varepsilon_3}{\omega_1^2}\lambda_3 \sin\varphi_3 = -\cos\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\sin\varphi_1 - u_{21}^2\lambda_2\cos\varphi_2 - u_{31}^2\lambda_3\cos\varphi_3; \quad (3.86)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}\lambda_2 \cos\varphi_2 + \frac{\varepsilon_3}{\omega_1^2}\lambda_3 \cos\varphi_3 = -\sin\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\cos\varphi_1 - u_{21}^2\lambda_2\sin\varphi_2 - u_{31}^2\lambda_3\sin\varphi_3$$

Корни системы (3.86) находят по формулам Крамера.

При проектировании механизмов со сложной структурой объем работы по определению функций положения, по дифференцированию и преобразованию передаточных функций может оказаться значительным. В подобных случаях целесообразно использовать векторные уравнения, описанные в § 3.2 для составления алгоритма решения задачи, а все вычисления и расчеты выполнять не графически, а с использованием ЭВМ.

На основе плана механизма и векторных уравнений для скоростей и ускорений точек звеньев механизма строят планы скоростей и ускорений в произвольном масштабе. Эти построения являются расчетной схемой для вывода требуемых зависимостей в аналитической форме. Для пояснения этой методики рассмотрен пример механизма с двумя степенями свободы (рис. 3.29, *а*), состоя-

щего из двух начальных звеньев *1* и *4* и одной двухповодковой группы из звеньев *2* и *3*. С каждым из звеньев связывают вектор, что позволяет однозначно определить положение звена на координатной плоскости Oxy.

По плану механизма определяют направляющие углы φ_2 и φ_3 звеньев *2* и *3* и φ_b базового вектора структурной группы по методике, изложенной в предыдущем параграфе; углы φ_1 и φ_2 принимают заданными, ибо звенья *1* и *4* являются начальными:

$$\varphi_b = \operatorname{arctg}\left[(y_D - y_B)/(x_D - x_B)\right],$$

где

$$x_B = x_A + l_1 \cos\varphi_1;\ y_B = y_A + l_1 \sin\varphi_1;$$

$$x_D = x_E + l_4 \cos\varphi_4;\ y_D = y_E + l_4 \sin\varphi_4.$$

$$\varphi_{2b} = \arccos\frac{l_2^2 + l_b^2 - l_3^2}{2l_2 l_b} = \arccos\frac{\lambda_2^2 + \lambda_b^2 - \lambda_3^2}{2\lambda_2\lambda_b};$$

$$\varphi_{3b} = \arccos\frac{l_b^2 + l_3^2 - l_2^2}{2l_b l_3} = \arccos\frac{\lambda_b^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_b\lambda_3},$$

где

$$\lambda_2 = l_2/l_1;\ \lambda_3 = l_3/l_1;\ \lambda_4 = l_4/l_1;$$

$$\lambda_b = l_b/l_1 = \frac{1}{l_1}\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}.$$

Направляющие углы φ_2 и φ_3 звеньев *2* и *3*

$$\varphi_2 = \varphi_b + \varphi_{2b};\ \varphi_3 = \varphi_b + \varphi_{3b}.$$

Направляющие углы векторов абсолютных и относительных скоростей точек B, D (рис. 3.29, *б*):

$$\xi_B = \varphi_1 + \pi/2;\ \xi_D = \varphi_4 + \pi/2;\ \xi_{CB} = \varphi_2 + \pi/2;\ \xi_{CD} = \varphi_3 + \pi/2.$$

Связь между скоростями отдельных точек звеньев механизма определяют соответствующими векторными уравнениями, например для точки C механизма записывают:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB};\ \bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{CD}$$

$$\underline{\bar{v}_B} + \underline{\underline{\bar{v}_{CB}}} = \underline{\bar{v}_D} + \underline{\underline{\bar{v}_{CD}}}$$

и строят план скоростей (рис. 3.29, *б*). На плане скоростей показаны направляющие углы соответствующих векторов.

Далее план скоростей проецируют на координатные оси Ox и Oy и записывают уравнения проекций скоростей. Например:

$$v_B \cos\xi_B + v_{CB}\cos\xi_{CB} = v_C \cos\xi_C;$$

$$v_D \cos\xi_D + v_{CD}\cos\xi_{CD} = v_C \cos\xi_C;$$

$$v_B \sin\xi_B + v_{CB}\sin\xi_{CB} = v_C \sin\xi_C;$$

$$v_D \sin\xi_D + v_{CD}\sin\xi_{CD} = v_C \sin\xi_C.$$

Учитывая, что $v_B = \omega_1 l_1$, $v_D = \omega_4 l_4$, систему уравнений записывают в следующей форме:

$$\omega_1 l_1 \cos\xi_B + v_{CB}\cos\xi_{CB} = \omega_4 l_4 \cos\xi_D + v_{CD}\cos\xi_{CD}$$

$$\omega_1 l_1 \sin\xi_B + v_{CB}\sin\xi_{CB} = \omega_4 l_4 \sin\xi_D + v_{CD}\sin\xi_{CD}.$$

Эта система является линейной. Ее записывают в канонической форме:

$$a_{11}v_{CB} + a_{12}v_{CD} = b_1; \quad a_{21}v_{CB} + a_{22}v_{CD} = b_2$$

и находят корни v_{CB} и v_{CD} по формулам Крамера.

Определив относительные скорости v_{CB} и v_{CD}, находят угловые скорости ω_2 и ω_3 звеньев *2* и *3* и линейную скорость точки C:

$$\omega_2 = v_{CB}/l_2; \quad \omega_3 = v_{CD}/l_3; \quad v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2},$$

где v_{Cy} и v_{Cx} — проекции скорости точки C, определяемые из соотношений: $v_{Cx} = v_B\cos\xi_B + v_{CB}\cos\xi_{CB}$; $v_{Cy} = v_B\sin\xi_B + v_{CB}\sin\xi_{CB}$.

§ 3.4 Применение графического и численного дифференцирования и интегрирования

Если одна из кинематических функций задана или определена в форме графика или в виде таблицы значений, то найти производную или интеграл от этой функции непосредственно в аналитической форме нельзя. В этом случае эффективными являются численные и графические методы дифференцирования и интегрирования.

Графическое и численное дифференцирование. Графическое дифференцирование начинают с построения графика функции по заданным значениям. При экспериментальном исследовании такой график вычерчивают с помощью самопишущих приборов. Далее проводят касательные к кривой в фиксированных положениях и вычисляют значения производной по тангенсу угла, образованного касательной с осью абсцисс.

Например, определение углового ускорения ε при заданном графике $\omega(t)$ проводят графическим дифференцированием.

На рис. 3.30, *а* кривая $\omega(t)$ изображена по оси ординат в масштабе μ_ω, мм/(рад·с$^{-1}$), по оси абсцисс μ_t, мм/с. Искомая функция $\varepsilon(t)$ может быть найдена по соотношению

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(y_\omega/\mu_\omega)}{d(x_i/\mu_t)} = \frac{\mu_t}{\mu_\omega}\frac{dy_\omega}{dx_i} = \frac{\mu_t}{\mu_\omega}\operatorname{tg}\psi. \qquad (3.87)$$

Тангенс угла ψ наклона касательной к кривой $\omega(t)$ в некоторой точке с номером i представляют в виде отношения отрезков $y_{\varepsilon i}/K$, где K — выбранный отрезок дифференцирования OD, мм (рис. 3.30, *б*):

$$\operatorname{tg}\psi_i = y_{\varepsilon i}/K.$$

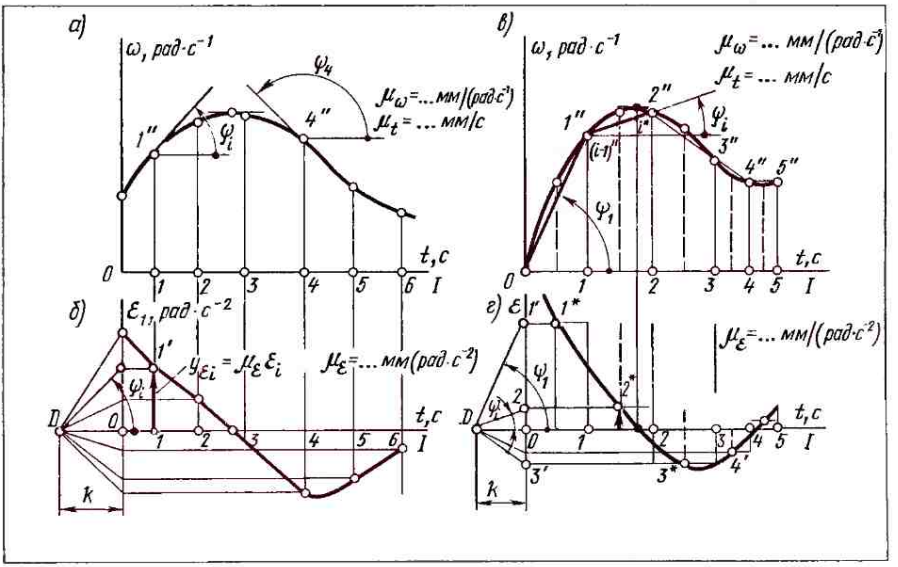


Рис. 3.30

После подстановки этого соотношения в соотношение (3.87) получают

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \operatorname{tg} \psi_i = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \frac{y_{\varepsilon i}}{K} = y_{\varepsilon i} / \mu_\varepsilon, \qquad (3.88)$$

где $y_{\varepsilon i}$ — ордината искомого графика углового ускорения;

$$\mu_\varepsilon = \mu_\omega K / \mu_t \qquad (3.89)$$

— масштаб искомого графика $\varepsilon_i(t)$; единицы СИ: $[y_{\varepsilon i}] =$ мм; $[\mu_\varepsilon] =$ мм/(рад·с$^{-2}$).

График функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$ строят по найденным значениям ординат для ряда позиций. Точки на кривой соединяют от руки плавной линией, а затем обводят с помощью лекала.

Графическое дифференцирование рассмотренным *методом касательных* имеет относительно низкую точность.

Более высокую точность получают при графическом дифференцировании *методом хорд* (рис. 3.30, *в* и *г*).

На заданной кривой отмечают ряд точек *1″, 2″, 3″,* которые соединяют хордами, т. е. замеияют заданную кривую ломаной линией. Принимают следующее допущение: угол наклона касательных в точках, расположенных посередине каждого участка кривой, равен углу ψ_i наклона соответствующей хорды. Это допущение вносит некоторую погрешность, но она относится только к данной точке. Эти погрешности не суммируются, что обеспечивает приемлемую точность метода.

Остальные построения аналогичны ранее описанным при графическом дифференцировании методом касательных. Выбирают отрезок $DO=k$ (мм); проводят лучи, наклоненные под углами ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i, ..., до пересечения с осью ординат в точках $1'$, $2'$, $3'$ ..., которые переносят на ординаты, проведенные в середине каждого из интервалов. Полученные точки 1^*, 2^*, 3^* являются точками искомой функции $\varepsilon=\varepsilon(t)=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$.

Масштабы по осям координат при этом методе построения связаны таким же соотношением (3.89), которое было выведено для случая графического дифференцирования методом касательных.

Дифференцирование функции $f(x)$, заданной (либо вычисленной) в виде массива чисел, выполняют *методом численного дифференцирования с применением ЭВМ*.

Чем меньше шаг Δx в массиве чисел, тем точнее можно вычислить значение производной функции в этом интервале

$$f'(x)\approx[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x.$$

Можно пользоваться также выражением

$$f'(x)_{i+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)_{i+1}-f(x)_i}{\Delta x_i}+\frac{f(x)_{i+2}-f(x)_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}\right].$$

При численном дифференцировании используют интерполяционные формулы, которые сопоставляют заданные значения какой-либо величины с функцией известного класса, зависящей от нескольких параметров, выбранную так, чтобы при заданных значениях аргумента (в узлах интерполяции) значения функции совпадали с заданными значениями величины, т. е. чтобы график функции проходил через заданные точки. Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных. Для функции $y(x)$, заданной таблицей разностей для равноотстоящих значений аргумента с шагом Δx, используют следующие соотношения для вычисления аргумента и производных:

$$x_i=x_0+i\Delta x\ (i=0;\ \pm1;\ \pm2;\ ...),$$

$$y_i'=y'(x_i)=\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta y_i-\frac{1}{2}\Delta^2 y_i+\frac{1}{3}\Delta^3 y_i-...\right);$$

$$y_i''=y''(x_i)=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\Delta^2 y_i-\Delta^3 y_i+\frac{11}{12}\Delta^4 y_i-\frac{5}{6}\Delta^5 y_i+...\right).$$

При разработке прикладных программ для численного дифференцирования на ЭВМ используют интерполяционные формулы Стирлинга, Бесселя, Ньютона и др.

Графическое и численное интегрирование. Этот прием применяется в тех случаях, когда функцию нельзя проинтегрировать в аналитической форме или это связано с большим объемом работы. Численное интегрирование ведется по квадратурным формулам Ньютона—Котеса (правило трапеций, правило Симпсона, правило Уэддля, формула Грегори), формулам Гаусса и Чебышева.

При заданных значениях функции $y_i=y(x_i)$ для $n+1$ равноот-

стоящих значений аргумента $x_i = x_0 + i\Delta x_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) квадратурные формулы Ньютона—Котеса имеют следующий вид:

правило трапеций для n шагов

$$I = \int_{x}^{x_0 + n\Delta x} y(x)\mathrm{d}x \approx \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right);$$

правило трапеций для $n = 1$

$$I = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1);$$

правило Симпсона для $n = 2$

$$I = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2); \qquad (3.90)$$

правило Уэддля для $n = 6$

$$I = \frac{3}{10}\Delta x(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6).$$

При вычислениях на ЭВМ используют программы, имеющиеся в каталоге конкретной машины (например, QTFG или QSF).

При графическом определении интеграла подынтегральная функция задается графиком. Для примера рассмотрим определение угла поворота $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_i} \omega \mathrm{d}t$ выходного звена по заданной кривой $\omega(t)$.

График угловой скорости $\omega(t)$ изображается в декартовых координатах с учетом числовых значений масштабов: угловой скорости μ_ω и времени μ_t. Промежуток времени от t_0 до t_i делится на такое количество интервалов Δt_i, которое позволяет считать, что на каждом малом промежутке времени Δt_i движение можно принять равномерным.

Эти промежутки времени, отмеченные на рис. 3.31, *а* точками *0, 1, 2, 3, 4*, не обязательно должны быть равными.

В каждом интервале времени, например от t_{i-1} до t_i, можно приближенно считать, что

$$y_{\omega i\text{ср}} \approx (y_{\omega(i-1)} + y_{\omega i})/2,$$

т. е. можно принять, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника высотой $y_{\omega i\text{ср}}$ и основанием Δx_{ti}.

Концы средних ординат для каждого интервала $y_{\omega 1\text{ср}}$, $y_{\omega 2\text{ср}}$, ..., $y_{\omega i\text{ср}}$ проецируют на ось ординат и соединяют найденные точки *1′*, *2′*, *3′*, ..., *i′* с точкой *D*, которая ограничивает слева выбранный отрезок интегрирования *OD* длиной *K*, мм (рис. 3.31, *а*).

Лучи *D1′*, *D2′*, *D3′*, ..., проведенные через точку *D*, образуют углы ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i с положительным направлением оси *x*, причем

$$\mathrm{tg}\,\psi_i = y_{\omega i\text{ср}}/K.$$

На искомом графике (φ, t) (рис. 3.31, *б*) проводят линии *01″*, *1″2″*, *2″3″*, ..., параллельные в пределах соответствующих интер-

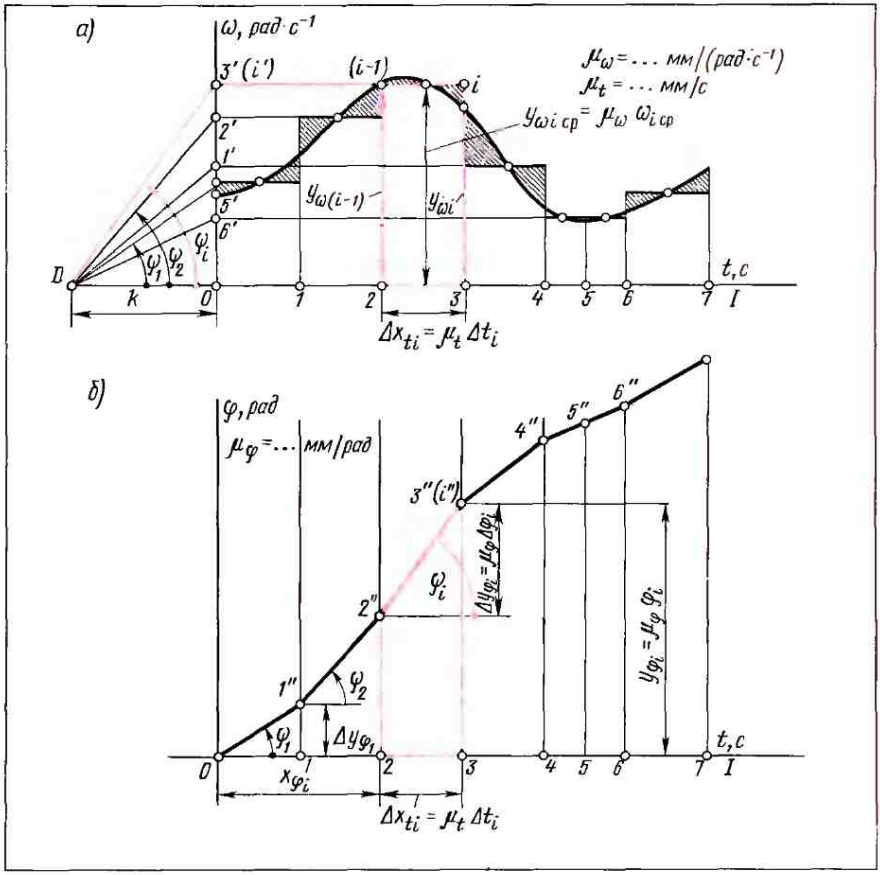


Рис. 3.31

валов лучам *D1′*, *D2′*, *D3′*, ... Первый отрезок *01″* проводят через начало координат *0*, следующие отрезки соответственно через точку *1″*, затем через точку *2″* и т. д. Эти линии наклонены относительно положительного направления оси *x* под углами ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i соответственно, т. е.

$$\operatorname{tg}\psi_i = \Delta y_{\varphi i} / \Delta x_{ti}.$$

Отрезки на графиках связаны с соответствующими физическими параметрами с помощью масштабов соотношениями:

$$y_{\omega,\text{ср}} = \mu_\omega \omega_{i\text{ср}};\ \Delta y_{\varphi i} = \mu_\varphi \Delta\varphi_i;\ \Delta x_{ti} = \mu_t \Delta t_i.$$

Приравнивая правые части написанных выше соотношений для тангенса угла ψ_i, получают

$$\frac{\Delta y_{\varphi i}}{\Delta x_{ii}} = \frac{y_{\omega i \text{ср}}}{K}, \text{ или } \Delta y_{\varphi i} = \frac{y_{\omega i \text{ср}} \Delta x_{ii}}{K}.$$

По чертежу (рис. 3.31, *б*) следует

$$y_{\varphi i} = y_{\varphi(i-1)} + \Delta y_{\varphi i} = \sum_{i=1}^{i} \Delta y_{\varphi i} = \sum_{i=1}^{i} \frac{y_{\omega i \text{ср}} \Delta x_{ii}}{K} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\mu_\omega \omega_{i \text{ср}} \mu_t \Delta t_i}{K} =$$

$$= \frac{\mu_\omega \mu_t}{K} \lim_{\Delta t \to 0} \sum \omega_{i \text{ср}} \Delta t_i = \frac{\mu_\omega \mu_t}{K} \int_{t_0}^{t_i} \omega \, dt = \mu_\varphi \varphi_i,$$

где $\varphi_i = \int_{t_0}^{t_i} \omega \, dt$.

Масштаб искомого графика

$$\mu_\varphi = \mu_\omega \mu_t / K, \ [\mu_\varphi] = \text{мм/рад}. \tag{3.91}$$

Следовательно, ломаная линия *01″2″3″*, ..., *i″* дает приближенный график функции $\varphi(t) = \int \omega dt$, а ординаты в узловых точках *1-1″*, *2-2″*, *3-3″*, ... соответствуют значению этой функции. Через найденные точки проводят плавную линию, которая дает более или менее точные результаты для всех промежуточных точек.

Увеличение числа узловых точек и масштаба чертежа позволяет повысить точность метода графического интегрирования. Отрезок K выбирается произвольно, но его величина влияет на размеры ординат искомой функции, т. е. его назначают с учетом желаемого масштаба графика первообразной функции: чем больше его величина, тем меньше этот масштаб.

При исследовании и проектировании механизмов закон изменения скорости входного звена может быть задан функциями $\omega(\varphi_1)$ или $v(S)$ обобщенных координат φ_1 и S. В этом случае необходимо вычисление интегралов:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega} \text{ или } S(t) = \int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{S_0}^{S} \frac{dS}{v}. \tag{3.92}$$

Если функции $\omega(\varphi)$ и $v(S)$ заданы в виде графиков (рис. 3.32, *а*), то искомые функции $\varphi(t)$ и $S(t)$ находят графическим интегрированием, проводя построения, аналогичные ранее описанным, но с некоторыми отличиями. Так, ось ординат искомого графика (рис. 3.32, *б*) разбивают на интервалы, равные интервалам на оси абсцисс (оси φ_1) на графике $\omega(\varphi)$ (рис. 3.32, *а*). В этом случае масштабы по осям φ сохраняют одинаковыми, т. е. $\mu_\varphi = \mu_\varphi^*$. Точки *1″*, *2″*, *3″*, *4″* искомой кривой (рис. 3.32, *б*) получают при пересечении линий, параллельных оси абсцисс с линиями, проведенными параллельно соответствующим лучам *D1*, *D2*, *D3*, ..., т. е. наклоненными

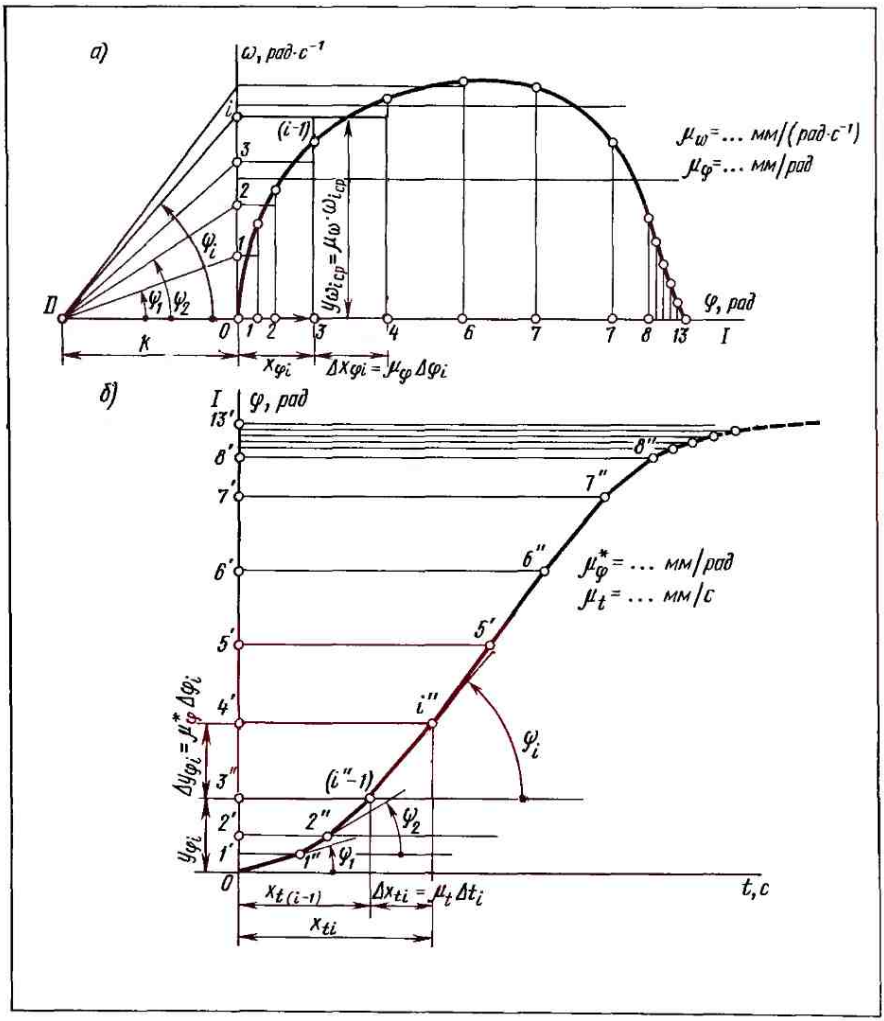


Рис. 3.32

относительно оси x под углами ψ_1, ψ_2, $\psi_3 - \psi_i$, ... Отрезок $D0 = K$ — отрезок интегрирования в мм.

Обоснование этого метода интегрирования вытекает из соотношений, вытекающих из графических построений:

$$\operatorname{tg}\psi_i = \frac{y_{\omega_i cp}}{K} = \frac{\mu_\omega \omega_{icp}}{K} \quad \text{(см. рис. 3.32, } a\text{)};$$

$$\operatorname{tg}\psi_i = \frac{\Delta y_{\varphi i}}{\Delta x_{ti}} = \frac{\mu^*_\varphi \Delta\varphi_i}{\mu_t \Delta t_i}; \quad x_{ti} = \sum_{i=1}^{i} \Delta x_{ti} \quad \text{(см. рис. 3.32, } б\text{)}.$$

Делают необходимые подстановки и преобразования:

$$x_{ll} = \sum_{i=1}^{i} \Delta x_{ll} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\Delta y_{ll}}{\operatorname{tg} \psi_i} = \sum_{i}^{i} \frac{\Delta y_{ll} K}{y_{\omega i p}} = \sum_{i}^{i} \frac{K \mu_\varphi \Delta \varphi_i}{\mu_\omega \omega_{i p}} =$$

$$= \frac{K \mu_\varphi}{\mu_\omega} \lim_{\Delta \varphi_i \to 0} \sum_{i}^{i} \frac{\Delta \varphi_i}{\omega_{i p}} = \frac{K \mu_\varphi}{\mu_\omega} \int \frac{d\varphi}{\omega} = \mu_t t_i, \qquad (3.93)$$

где $\mu_t = K\mu_\varphi^*/\mu_\omega$ — масштаб времени движения; $t = \int d\varphi/\omega$ — время движения; единицы СИ: $[\mu_t] = $ мм/с; $[K] = $ мм; $[\mu_\omega] = $ мм/м·с$^{-1}$; $[\mu_\varphi] = $ мм/рад.

Полученные при построениях точки $1''$, $2''$, ..., i'' соединяют плавной кривой и получают искомый график $\varphi = \varphi(t)$, т. е. искомый закон движения входного звена.

Это доказательство основано на допущении, что кривую $(1/\omega, \varphi)$ на малом интервале $\Delta\varphi$ можно заменить линейной функцией, а площадь криволинейной трапеции — площадью прямоугольника с высотой, равной полусумме ординат на границах данного интервала.

При малых величинах ω целесообразно в этой области брать большее число узловых точек, как это сделано на рис. 3.32, *а* для интервалов *0-3* и *8-13*, которые разделены на более мелкие, например интервалы *0-1; 1-2; 2-3*.

Определение углового ускорения ε входного звена при заданной функции $\omega(\varphi)$ или линейного ускорения a' входного звена при заданной функции $v(S)$ вычисляют по следующим соотношениям:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi};$$

$$a' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = v \frac{dv}{dS}. \qquad (3.94)$$

Если заданные функции $\omega(\varphi)$ или $v(S)$ представлены в виде графиков, то вычисление этих соотношений сводится к определению числового значения длины поднормали к кривой в соответствующей точке.

На рис. 3.33, *а* приведены необходимые построения для случая, когда задана функция $\omega = \omega(\varphi)$.

Для произвольно выбранной i-й точки на графике $\omega(\varphi)$ связь между отрезками $x_{\varphi i}$ и $y_{\omega i}$ и соответствующими кинематическими параметрами выражают с помощью масштабов:

$$x_{\varphi i} = \mu_\varphi \varphi_i; \quad y_{\omega i} = \mu_\omega \omega_i.$$

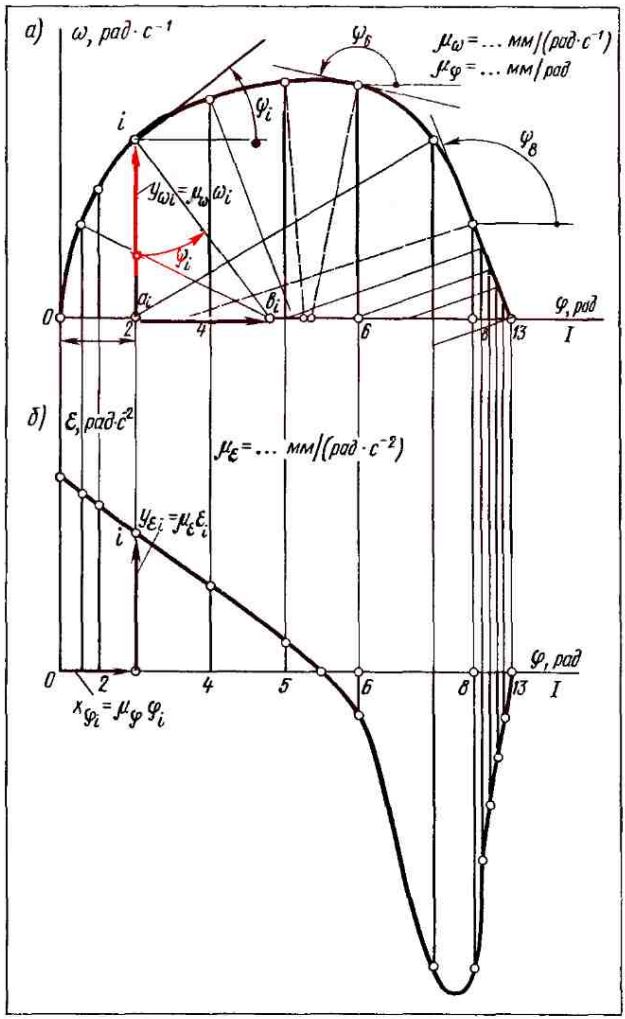


Рис. 3.33

Угловое ускорение выражают в виде следующего соотношения:

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{d\psi_i}\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i \frac{d\omega_i}{d\psi_i} = \frac{y_{\omega i}}{\mu_\omega}\frac{d(y_{\omega i}/\mu_\omega)}{d(x_{\varphi i}/\mu_\varphi)} =$$

$$= \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} y_{\omega i}\frac{dy_{\omega i}}{dx_{\varphi i}} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} y_{\omega i} \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2}(a_i b_i) = \frac{(a_i b_i)}{\mu_\varepsilon}, \qquad (3.95)$$

где ψ_i — угол наклона касательной к кривой $\omega(\varphi)$ в i-й точке (рис. 3.33, *а*); $(a_i b_i) = y_{\omega i}\operatorname{tg}\psi_i$ — отрезок поднормали в i-й точке графика; $\mu_\varepsilon = \mu_\omega^2/\mu_\varphi$ — масштаб углового ускорения ε; единица СИ: $[\mu_\varepsilon]$ = мм/(рад·с$^{-2}$).

Аналогичные построения проводят для ряда положений *1, 2, 3, 4, ...*, определяют поднормали и соответствующие им угловые ускорения ε. Результаты расчетов изображают в виде графика $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ (рис. 3.33, *б*)

§ 3.5 Кинематические характеристики плоских механизмов с высшими парами

Передаточные кинематические функции механизмов с высшими парами определяют несколькими методами в зависимости от поставленной задачи.

Метод центроид. Для образования простейшего механизма с высшей парой достаточно присоединить звено к одному начальному звену и стойке (рис. 3.34, *а*) или к двум начальным звеньям (рис. 3.34, *б*). В первом случае получают трехзвенный механизм с одной степенью свободы ($n=2$; $p_н=2$; $p_в=1$):

$$W_п = 3n - 2p_н - p_в = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Во втором случае планетарный механизм имеет две степени свободы ($n=3$; $p_н=3$; $p_в=1$):

$$W_п = 3n - 2p_н - p_в = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Неподвижной центроидой называют геометрическое место мгновенных центров вращения движущейся плоской фигуры в неподвижной плоскости. Подвижной центроидой называют геометрическое место мгновенных центров скоростей в плоскости, связанной с движущейся плоской фигурой. При движении плоской фигуры в ее плоскости подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной, т. е. длины соответствующих дуг неподвижной и подвижной центроид равны. Обратная теорема о центроидах гласит, что всякое движение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить путем качения без скольжения подвижной центроиды по неподвижной с соответствующей в каждый данный момент угловой скоростью.

Мгновенный центр скоростей P является точкой плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю. Он определяется как точка пересечения перпендикуляров, восставленных из любых двух точек фигуры к векторам скоростей этих точек.

В каждый момент времени с мгновенным центром скоростей совпадает мгновенный центр вращения — точка неподвижной плоскости, поворотом вокруг которой плоская фигура перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.

Метод центроид наиболее часто используют применительно к

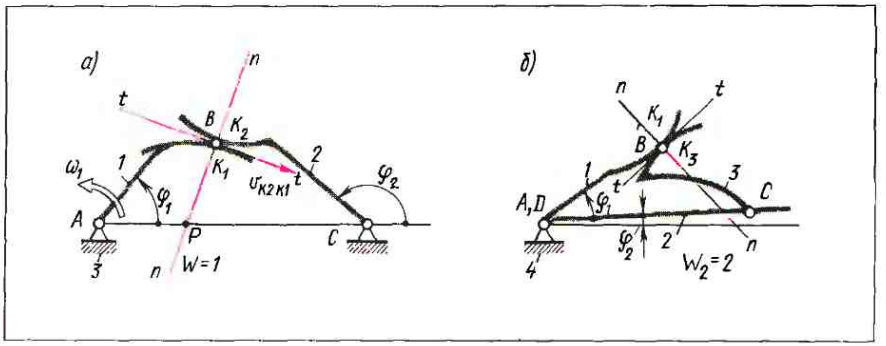


Рис. 3.34

передаче вращательного движения между звеньями с параллельнымн осямн. Отношение угловых скоростей звеньев *1* н *2* является функцнеи обобщенной координаты φ_1

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt}=u_{12}(\varphi_1).$$

На рис. 3.34, *а* показаны звенья *1* и *2*, вращающиеся относительно осей A н C н образующие между собой высшую кннематнческую пару B в точке контакта (K_1 и K_2 — точки звеньев *1* н *2* соответственно). Найдем центронды как геометрические места мгновенных центров вращения и мгновенных центров скоростей.

По отношению к звену *1* звено *2* имеет сложное движение (рис. 3.34, *б*). Однако, используя метод обращення движения, можно указать направление относнтельных скоростей двух точек C н K_2 относительно точек неподвнжного звена *1*; скорость v_{CA} точки C относнтельно оси A перпенднкулярна межосевому расстоянию AC, а точка K_2 в данный момент нмеет скорость $v_{K_2-K_1}$ скольженнн, направленную вдоль общей касательной $t-t$ к сопрнкасающимся профнлям. Мгновенный центр скоростей P звена *2* в относительном движении (прн неподвнжном звене *1*) находится как точка пересечения двух перпендикуляров к скоростям этих точек. Иначе: мгновенный центр скоростей P звена *2* и совпадающий с нним мгновенный центр вращения в относительном движении находятся в точке пересечения межосевого расстояння AC и общей нормали $n-n$ к профилям, проведенным в общей контактной точке K (K_1 и K_2).

Скорость относнтельного движения звеньев в этой точке — мгновенном центре скоростей P — равна нулю, т. е. $\bar{v}_{12}=\bar{v}_{P1}-\bar{v}_{P2}=0$, где $\bar{v}_{P1}$ и $\bar{v}_{P2}$ — векторы скоростей точек P_1 и P_2 прн вращении нх соответственно вокруг осей A и C. Соответственно можно запнсать н следующее равенство: $|\omega_1 P\bar{A}|=|\omega_2 P\bar{C}|$, нз которого следует, что

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=PC/PA. \qquad (3.96)$$

Мгновенный центр скоростей — точку P — называют полюсом зацепления. Термин «зацепление» в данном случае является синонимом термина «высшая пара». Зубчатым зацеплением называют процесс передачи движения поверхностями звеньев высшей пары, которые при последовательном взаимодействии зубьев обеспечивают требуемый закон их относительного движения.

В ряде случаев оси вращения обозначают буквами O с индексами *1* и *2*: O_1 и O_2 (рис. 3.35). При таких обозначениях соотношение (3.96) записывают в следующем виде:

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=\mp PO_2/PO_1. \qquad (3.96а)$$

Следовательно, полюс зацепления P звеньев *1* и *2* в относительном движении расположен на межосевой линии AC (рис. 3.34, *а*) или O_1O_2 (рис. 3.35, *а*) и делит межосевое расстояние на отрезки $AP(PO_1)$ и $PC(PO_2)$, отношение которых обратно пропорционально отношению мгновенных угловых скоростей звеньев (в том [illegible] зубчатых колес). Если полюс зацепления P расположен [illegible] осями O_1 и O_2, то звенья вращаются в разных направлениях, т. е. u_{12} имеет знак минус, а зацепление называется внешним (рис. 3.35, *а*). Если полюс зацепления P находится вне отрезка O_1O_2, то звенья вращаются в одинаковом направлении и передаточное отношение u_{12} имеет знак плюс, а зацепление называется внутренним (рис. 3.35, *б*).

Скорость скольжения $v_{ск}$ профилей в относительном движении определяют по соотношению

$$v_{ск}=\omega_{21}l_{KP}=l_{KP}(\omega_1\mp\omega_2).$$

Обозначим межосевое расстояние $AC\,(O_1O_2)$ через a_w, а расстояние полюса зацепления P до осей $A\,(O_1)$ и $C\,(O_2)$ — через r_{w1} и r_{w2}. Тогда

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\mp\frac{PO_2}{PO_1}=\mp\frac{r_{w2}}{r_{w1}}=\frac{a_w\mp r_{w1}}{r_{w1}}, \qquad (3.97)$$

или радиусы центроид r_{w1} и r_{w2} определяют по соотношению

$$r_{w1}=\frac{a_w}{u_{12}\pm1};\quad r_{w2}=a_w\frac{u_{12}}{u_{12}\pm1}. \qquad (3.98)$$

Если передаточное отношение u_{12} постоянно, то радиусы центроид r_{w1} и r_{w2} также постоянны. Следовательно, при передаче вращательного движения между звеньями с параллельными осями с постоянным межосевым расстоянием (a_w=const) и постоянным передаточным отношением (u_{12}=const) центроиды являются окружностями. В теории зацеплений эти окружности называют начальными окружностями.

На рис. 3.35 показано расположение начальных окружностей для внешнего (рис. 3.35, *а*), внутреннего (рис. 3.35, *б*) и реечного (рис. 3.35, *в*) зацеплений с постоянными передаточными отношениями.

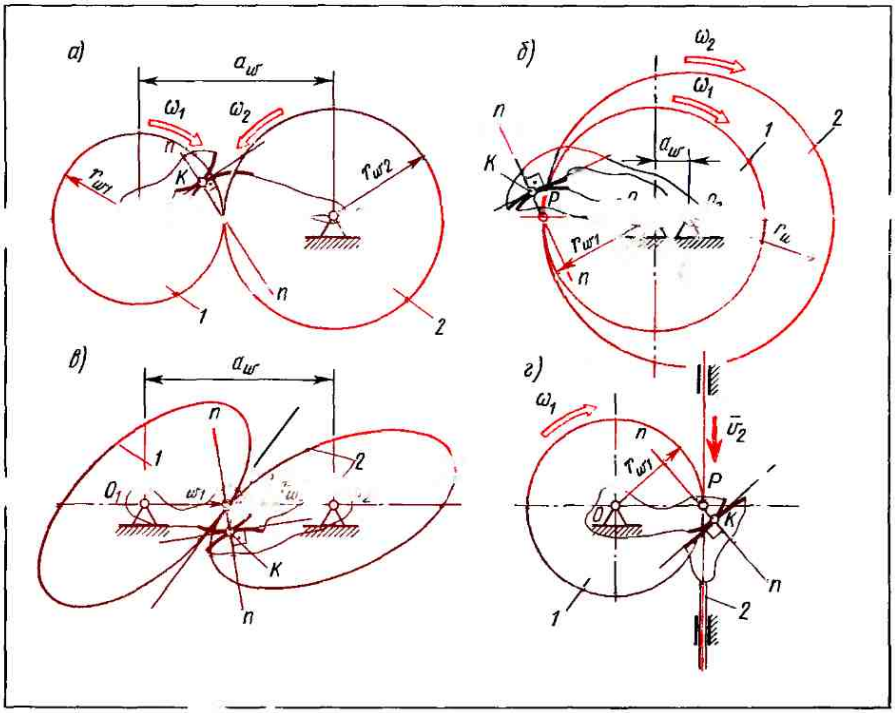


Рис. 3.35

Если передаточное отношение u_{12} переменно, то радиусы (рис. 3.35, *г*) являются переменными и их находят из следующих соотношений:

для колеса *1*

$$r_{w1} = \frac{a_w}{u_{12} \pm 1} = \frac{a_w}{u_{12}(\varphi_1) \pm 1};$$

для колеса *2*

$$r_{w2} = a_w \frac{u_{12}}{u_{12} \pm 1} = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{u_{12}(\varphi_1) \pm 1}; \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{u_{12}(\varphi_1)}.$$

Угол ψ_1 наклона общей касательной к центроидам в точке их касания относительно радиуса-вектора r_{w1} определяется как угол наклона касательной к кривой, заданной в полярных координатах:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{r_{w1}}{dr_{w1}/d\varphi_1} = -\frac{u_{12}(\varphi_1) \pm 1}{du_{12}/d\varphi_1}. \qquad (3.99)$$

Если некоторые звенья механизма участвуют в сложном движении, состоящем из суммы двух вращательных движений, то для определения передаточных отношений можно воспользоваться методом обращения движения.

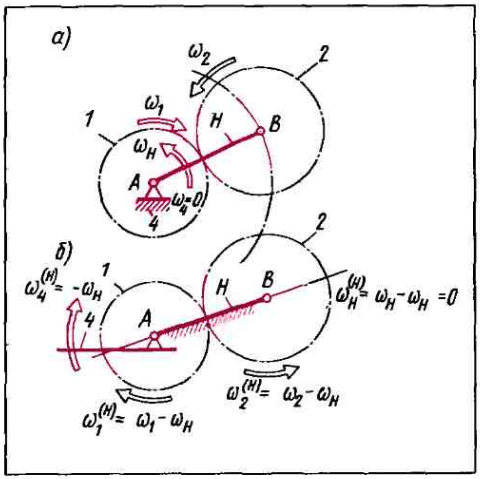


Рис. 3.36

На рис. 3.36, *а* изображены центроиды колес *1* и *2* зубчатого планетарного дифференциального механизма с водилом *H*. Колесо *2* участвует в двух вращениях: в переносном вместе с водилом *H* со скоростью ω_H и в относительном вокруг своей собственной оси со скоростью ω_{2H}, называемой относительной угловой скоростью.

Сообщим всем звеньям механизма вращение со скоростью, равной по величине и противоположной по направлению угловой скорости водила *H*, т. е. сообщим механизму угловую скорость $(-\omega_H)$ (рис. 3.36, *б*). При таком обращении движения водило можно условно рассматривать неподвижным, а колесо *1* — вращающимся вокруг неподвижной оси *A* с угловой скоростью $(\omega_1-\omega_H)$, а колесо *2* — вращающимся вокруг неподвижной оси *B* с угловой скоростью $(\omega_2-\omega_H)$.

Учитывая соотношения (3.97) между угловыми скоростями и радиусами центроид, находят соотношения (3.100), определяющие связь между угловыми скоростями и радиусами центроид планетарных зубчатых колес *1* и *2*:

$$\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}=\mp\frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \qquad (3.100)$$

Знак минус относится к внешнему зацеплению, плюс — к внутреннему. Это соотношение называют *формулой Виллиса.*

Метод заменяющих рычажных механизмов. В плоских механизмах высшая кинематическая пара образуется путем касания двух кривых, по которым очерчены соприкасающиеся элементы звеньев, образующих эту пару (рис. 3.34, *а*). В частном случае один из элементов пары может быть точкой.

Для каждой из соприкасающихся кривых в точке контакта *K* можно найти радиусы кривизны и центры кривизны. Оба центра кривизны и контактная точка расположены на общей прямой, являющейся нормалью *n—n* к соприкасающимся кривым. Профиль на плоскости может быть заменен в любой его точке кругом кривизны, т. е. окружностью, которая проходит через точку и две другие близкие точки кривой. Кривизна окружности эквивалентна самой кривой до производных второго порядка включительно. При смене контактной точки двух кривых с переменной кривизной центры кривизны и радиусы кривизны меняются. Если же кривизна кривых остается неизменной, то положение центров

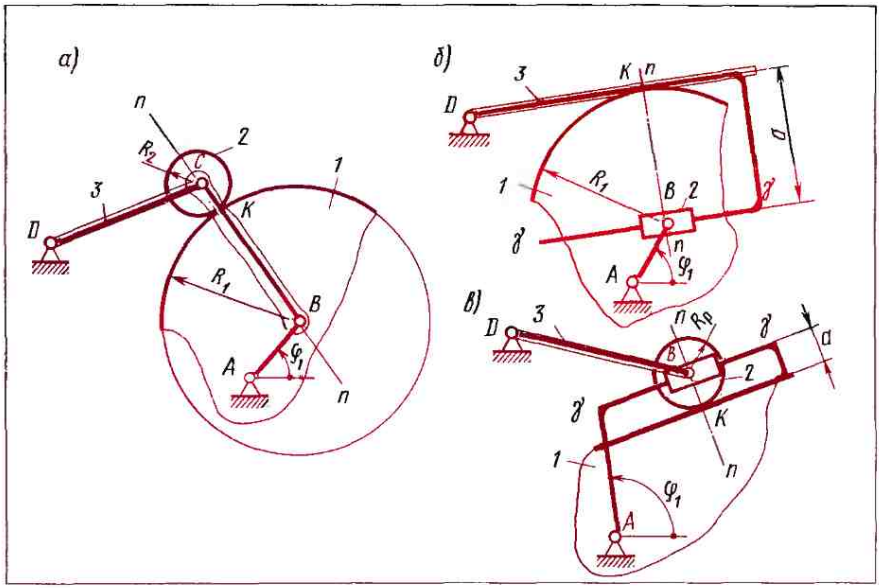


Рис. 3.37

кривизны относительно соответствующих звеньев и радиусы кривизны остаются постоянными. Это обстоятельство позволяет заменять механизмы с высшими кинематическими парами эквивалентными механизмами с низшими кинематическими парами. Такие механизмы называют заменяющими рычажными механизмами. Они эквивалентны в кинематическом смысле механизму с высшими парами до производных второго порядка включительно.

Для образования заменяющего механизма любую высшую кинематическую пару заменяют одним звеном (например, звеном BC на рис. 3.37, *а*), длина которого равна сумме радиусов кривизны элементов кинематической пары: $l_{BC}=R_1+R_2$, и двумя низшими кинематическими парами. Вращательные кинематические пары B и C при замене высшей кинематической пары располагают в центрах кривизны соприкасающихся профилей (рис. 3.37, *а*). Если радиус кривизны одного из элементов равен бесконечности [прямая линия на звене *3* (рис. 3.37, *б*) и на звене *1* (рис. 3.37, *в*)], то заменяющим звеном является ползун *2*, направляющая $\gamma\gamma$ которого параллельна прямой линии профиля и проходит со смещением a через ($a=R$ на рис. 3.37, *б*, $a=R_p$ на рис. 3.37, *в*) центр кривизны B другого профиля.

Если радиус кривизны одного из элементов равен нулю (заострение), то длина заменяющего звена равна радиусу кривизны второго профиля.

Если радиус кривизны одного из элементов равен нулю (заострение), а другого из элементов равен бесконечности (прямая ли-

ния), то заменяющим звеном является ползун, направляющая которого совпадает с профилем и проходит через контактную точку. Для заменяющих механизмов определяют кинематические характеристики изложенными выше методами.

§ 3.6 Кинематические характеристики пространственных механизмов

Наибольшее применение для определения кинематических характеристик пространственных рычажных механизмов в аналитической форме находят два метода: метод преобразования координат и геометрический метод, который заключается в последовательном проецировании кинематической схемы на ряд плоскостей с последующим определением неизвестных величин с помощью тригонометрических формул. Первый метод наиболее целесообразно применять для открытых кинематических цепей со многими степенями свободы (например, механизмов роботов и манипуляторов), а второй — для более простых механизмов с одной степенью свободы. Одним из таких механизмов является универсальный шарнир, применяемый для передачи вращательного движения от ведущего вала *1* к ведомому валу *3*, оси которых расположены под углом (рис. 3.38, *а, б, в*). На рис. 3.39 показаны примеры конструкции карданной передачи (*в*) и деталей одинарного шарнира Гука (*б*) грузового автомобиля ЗИЛ-130 (*а*).

Геометрический метод. Для составления аналитических соотношений между углами φ_1 и φ_3 звенья механизма проецируют на три плоскости (см. рис. 3.38): на осевую плоскость П с изображением межосевого угла β без искажения и на две плоскости Π_1 и Π_3, которые перпендикулярны соответственно оси входного звена *1* и выходного звена *3* с изображением углов поворота φ_1 и φ_3 без искажения (рис. 3.38). Углы отсчитываются от выбранной системы отсчета *xyz*, связанной со стойкой *4*: φ_1 — от оси Oz, φ_3 — от оси Oy.

Проекции на разные плоскости точки B, обозначающей кинематическую пару между входным звеном *1* и крестовиной *2*, обозначены $B_п$, B_1, B_3. На проекции справа (плоскость Π_1) отрезок $B_1B_п$ изображает без искажения расстояние точки B от осевой плоскости П.

Угловая координата φ_1 входного звена *1* определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = B_1B^*/B_пB_1. \qquad (3.101)$$

Угловая координата φ_3 выходного звена *3* определяется соотношением (см. проекцию на плоскость Π_3 слева на рис. 3.38):

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\varphi_3^* = B_пC/B_пB_3. \qquad (3.102)$$

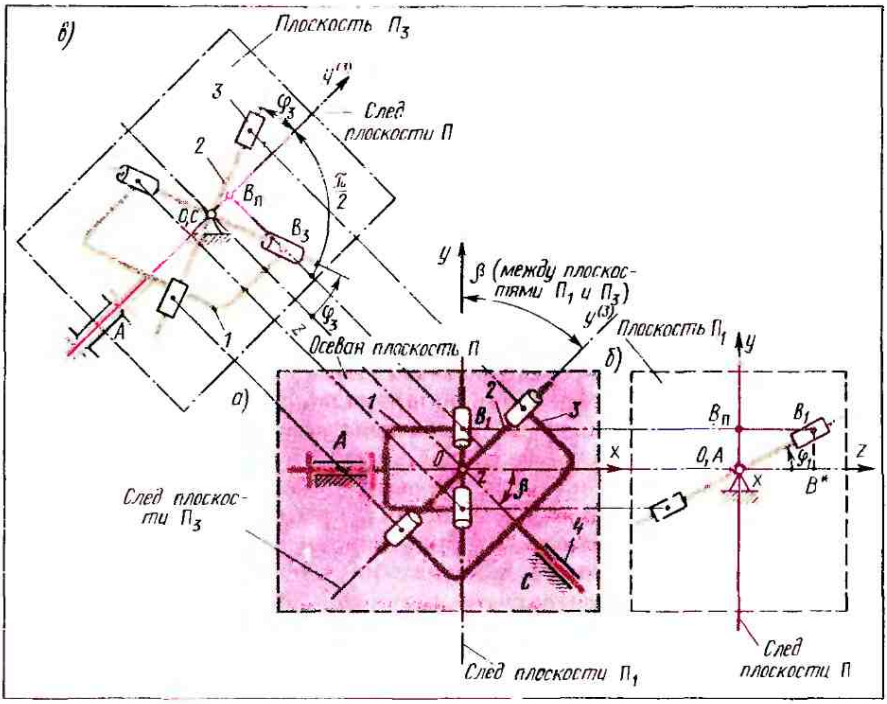


Рис. 3.38

Углы φ_3 и $\varphi_3^{(3)}$ в проекции на плоскость $П_3$ изображаются без искажения, и они равны между собой, так как угол между осями крестовины, равный $\pi/2$, изображается на проекции также без искажения. Отрезок $B_3B_П$ равен отрезку $B_1B_П$, так как он характеризует расстояние точки B_3 от осевой плоскости П и изображается в проекции на плоскость $П_3$ без искажения.

Учитывая, что $B_ПB_3 = B_ПB_1$, соотношения (3.101) и (3.102) записывают в виде

$$\operatorname{tg}\varphi_3/\operatorname{tg}\varphi_1 = \left(\frac{B_ПC}{B_ПB_3}\right) / \left(\frac{B_1B^*}{B_ПB_1}\right) = \frac{B_ПC}{B_1B^*}. \qquad (3.103)$$

Соотношение между отрезками $B_ПC$ и B_1B^* находят из $\triangle B_1OB_3$, изображенного на осевой плоскости П, в котором угол B_1OB_3 равен β и изображается без искажения:

$$\cos\beta = OB_3/OB_1. \qquad (3.104)$$

Учитывая, что $OB_3 = B_ПC$ и $OB_1 = B_1B^*$, соотношение (3.104) записывают в виде

$$\operatorname{tg}\varphi_3/\operatorname{tg}\varphi_1 = B_ПC/B_1B^* = OB_3/OB_1 = \cos\beta,$$

или в окончательной форме

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta. \qquad (3.105)$$

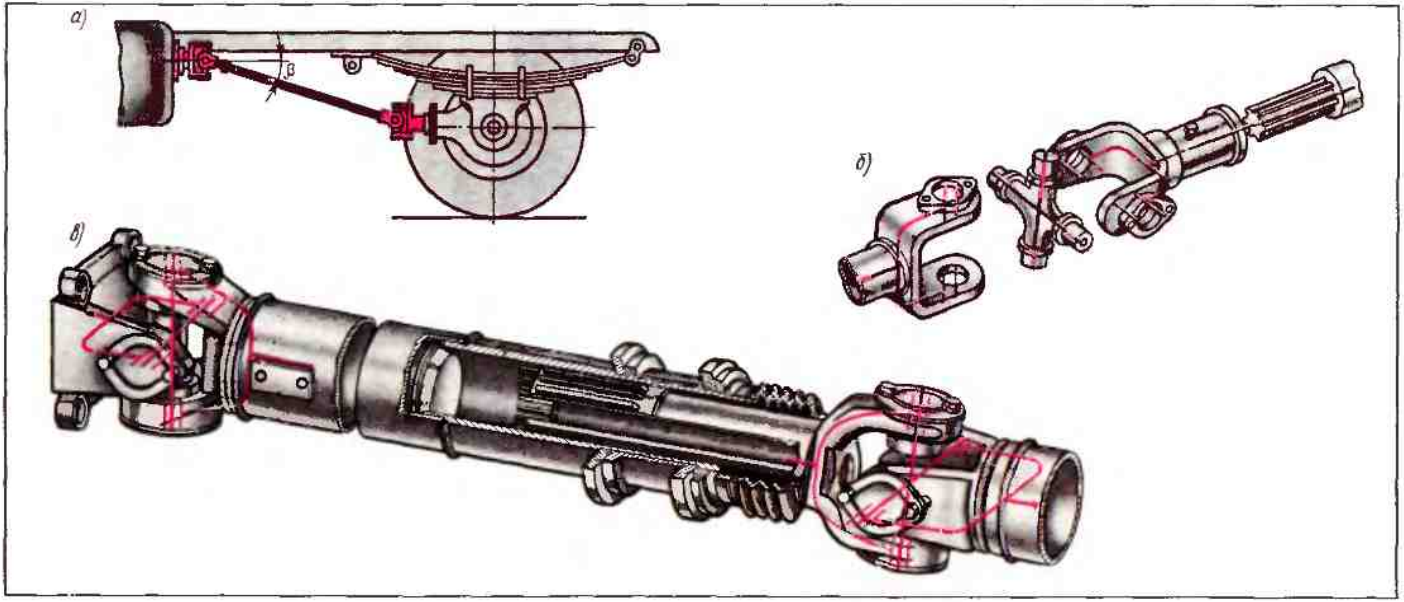


Рис. 3.39

Угловую скорость ω_3 выходного звена находят в результате дифференцирования:

$$\omega_3=\frac{d\varphi_3}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta)\right]=\frac{1}{1+\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\varphi_1}\frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1}\omega_1=$$

$$=\omega_1\frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1+(1-\sin^2\beta)\sin^2\varphi_1}, \quad \text{или} \quad \omega_3=\omega_1\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Передаточное отношение u_{31} определяется соотношением

$$u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}. \qquad (3.106)$$

Из выражения (3.106) следует, что передаточное отношение карданного механизма является величиной переменной, изменяющейся в пределах: максимальное значение $u_{31max}=1/\cos\beta$ при $\varphi_1=0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots$; минимальное значение $u_{31min}=\cos\beta$ при $\varphi_1=\pi/2;\ \frac{3}{2}\pi;\ \ldots$.

Среднее значение $u_{31ср}=1$, так как за один оборот входного звена *1* выходное звено *3* совершает также один оборот. Неравномерность вращения выходного звена *3* оценивают коэффициентом

$$\delta=\frac{\omega_{3max}-\omega_{3min}}{\omega_{3ср}}=\frac{1}{\cos\beta}-\cos\beta=\sin^2\beta/\cos\beta,$$

или

$$\delta=\sin\beta\operatorname{tg}\beta. \qquad (3.107)$$

При увеличении межосевого угла β, град, коэффициент δ неравномерности вращения возрастает:

β, град...	5	10	15	20	25	30	35	40
δ...	0,00765	0,0306	0,0693	0,1245	0,1971	0,2887	0,4016	0,5394

Угловое ускорение выходного звена *3* находят в результате повторного дифференцирования функции положения

$$\varepsilon_3=\frac{d\omega_3}{dt}=\omega_1^2\frac{\cos\beta\sin^2\beta\cdot 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1)^2},$$

или

$$\varepsilon_3=\omega_1^2\frac{\cos\beta\sin^2\beta\sin 2\varphi_1}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1)^2}. \qquad (3.108)$$

Передаточная характеристика для ускорения выходного звена

$$\frac{\varepsilon_3}{\omega_1^2}=\frac{\cos\beta\sin^2\beta\sin 2\varphi_1}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1)^2}. \qquad (3.109)$$

На практике для устранения неравномерности движения выходного вала применяют двойные карданные механизмы, обычно со

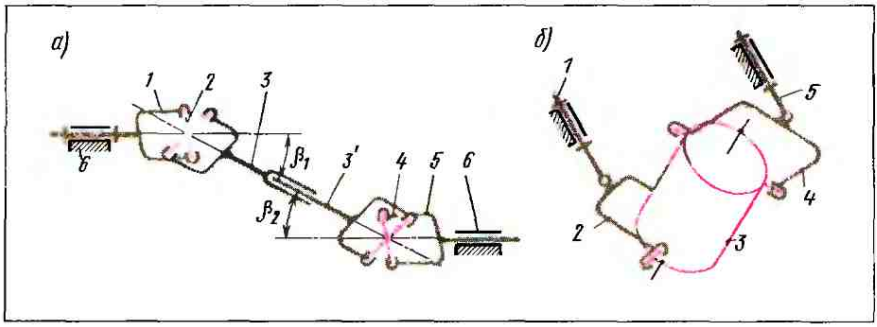


Рис. 3.40

свободным шлицевым соединением на одном из валов (промежуточном, ведущем илн ведомом) для устранения контурных избыточных связей (рис. 3.39, *в*; 3.40, *а*).

Углы β_1 и β_2 между осями входного и промежуточного и выходного валов выбирают равными: $\beta_1=\beta_2$, а вилки на промежуточном валу располагают в одной плоскости. При этих условиях коэффициент δ неравномерности движения равен нулю в силу соотношений, которые можно записать, используя соотношения (3.101), (3.102), для определения передаточного отношения u_{51}:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi_3\cos\beta_1;\ \ \operatorname{tg}\varphi_5=\operatorname{tg}\varphi_3\cos\beta_2;$$

$$u_{51}=\omega_5/\omega_1=\operatorname{tg}\varphi_5/\operatorname{tg}\varphi_1=\cos\beta_2/\cos\beta_1=1.$$

Интересным случаем является использование неравномерности движения в двойном карданном механизме с пространственной рамой-крестовиной для различных смесителей, обеспечивающих эффективное перемешивание жидких и сыпучих сред с разными компонентами (рис. 3.40, *б*).

Сложное движение пространственного звена *3*, с которым связан сосуд для смешиваемых компонентов, способствует хорошему перемешиванию смеси. При определенных размерах звеньев коэффициент неравномерности движения достигает значений до 1,5 и более. При $\delta>2$ ведомый вал совершает возвратно-вращательное движение.

Метод преобразоваиия координат. Применение ЭВМ для кинематического анализа механизмов связано с разработкой соответствующих алгоритмов, т. е. с четким и однозначным описанием предписаний, определяющих содержание и последовательность операций, выполняемых при расчетах. Такое описание наиболее просто выполняется с использованием уравнений преобразования координат с матричной формой записи необходимых операций вычисле-

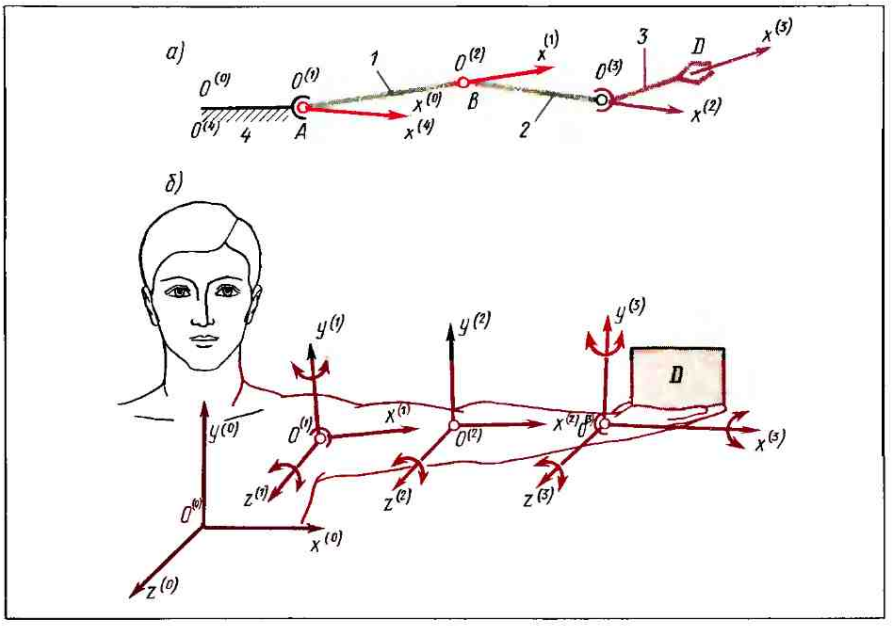


Рис. 3.41

ния. При этом методе выбирают некоторое число систем координат, достаточное для математического описания геометрической формы звеньев и относительного движения звеньев в каждой кинематической паре. Число систем координат определяется числом элементов звеньев, образующих кинематические пары. Неподвижная система координат $x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ связана со стойкой. В каждой кинематической паре выбирают две системы координат (способ 1) или одну систему координат (способ 2). При 1-м способе две системы координат относятся к элементам пары звеньев, образующих эту пару. При втором способе каждой кинематической паре соответствует прямоугольная система координат, одна из осей которой связана с характерными признаками звена, например осевой линией. Для примера на рис. 3.41, *а* показаны координатные оси $O_1x^{(1)}$, $O_2x^{(2)}$, $O_3x^{(3)}$, $O_4x^{(4)}$ (или $O_0x^{(0)}$) четырехзвенной открытой кинематической цепи из звеньев *1, 2, 3, 4*, моделирующей структуру руки человека (рис. 3.41, *б*). Ось $z^{(i)}$ направляют вдоль оси пары, а ось $y^{(i)}$ дополняет правую систему координат $O^{(i)}x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$.

Начало координат каждой i-й локальной координатной системы совмещают с той кинематической парой, которой данное звено соединено с предыдущим звеном. Для плоских механизмов оси $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, ..., $z^{(k)}$ параллельны между собой, так как они перпендикулярны базовой плоскости, в которой рассматривается движение звеньев плоского механизма.

Переход от i-й локальной координатной системы к другой

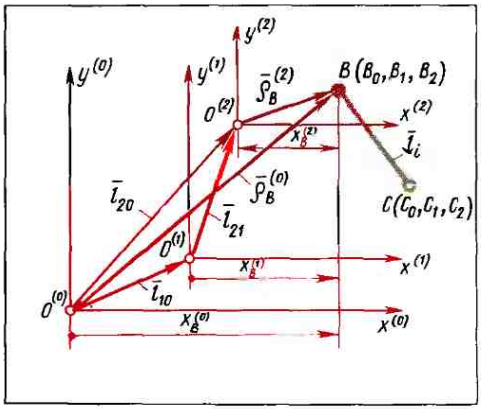


Рис. 42

$(i+1)$ системе определяется уравнениями преобразования декартовых прямоугольных координат, в общем случае — переноса и поворота координатных осей; в частном случае — только поворота осей, если начала локальных систем координат совпадают.

При параллельном переносе осей декартовых координат (рис. 3.42) проекции вектора $\bar{l}_i$, связывающего точки B и C на каком-либо звене, остаются постоянными:

$$l_{ix}^{(1)} = l_{ix}^{(2)} = l_{ix}^{(0)}; \quad l_{iy}^{(1)} = l_{iy}^{(2)} = l_{iy}^{(0)}.$$

Радиусы-векторы какой-либо точки B на звене связаны определенными соотношениями:

$$\bar{\rho}_B^{(0)} = \bar{\rho}_B^{(1)} + \bar{l}_{10} = \bar{\rho}_B^{(2)} + \bar{l}_{20}; \quad \bar{\rho}_B^{(1)} = \bar{\rho}_B^{(2)} + \bar{l}_{21},$$

где $\bar{l}_{10}$, $\bar{l}_{20}$, $\bar{l}_{21}$, $\bar{\rho}_B^{(0)}$, $\bar{\rho}_B^{(1)}$, $\bar{\rho}_B^{(2)}$ — векторы, связывающие соответствующие ($O^{(0)}$, $O^{(1)}$, $O^{(2)}$) начала координат между собой и с точкой B.

Связь между координатами точки B в трехмерном пространстве определяется следующими соотношениями (при параллельном переносе):

$$x_B^{(0)} = x_B^{(1)} + l_{10x}; \quad y_B^{(0)} = y_B^{(1)} + l_{10y}; \quad z_B^{(0)} = z_B^{(1)} + l_{10z}.$$

При повороте координатных осей (рис. 3.43) необходимо учитывать направляющие косинусы углов поворота осей (например, φ_{21}).

Общие формулы преобразования координат при параллельном переносе и повороте осей, например для систем $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ и $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, имеют следующий вид (рис. 3.43):

$$\begin{aligned} x_B^{(1)} &= a_{11}x_B^{(2)} + a_{12}y_B^{(2)} + a_{13}z_B^{(2)} + l_{21x}; \\ y_B^{(1)} &= a_{21}x_B^{(2)} + a_{22}y_B^{(2)} + a_{23}z_B^{(2)} + l_{21y}; \\ z_B^{(1)} &= a_{31}x_B^{(2)} + a_{32}y_B^{(2)} + a_{33}z_B^{(2)} + l_{21z}, \end{aligned} \qquad (3.110)$$

где l_{21x}, l_{21y}, l_{21z} — координаты начала O_2 системы $x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ в системе координат $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$; a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, ... — коэффициенты при координатах, являющиеся направляющими косинусами, причем индексы соответствуют порядковому номеру оси: $1—x$, $2—y$, $3—z$; на первом месте в индексе приводится обозначение оси $(i+1)$-й локальной системы координат, на втором месте — i-й локальной системы координат:

$$a_{11}=\cos(x^{(2)}, x^{(1)});\ a_{12}=\cos(x^{(2)}, y^{(1)});\ a_{13}=\cos(x^{(2)}, z^{(1)});$$
$$a_{21}=\cos(y^{(2)}, x^{(1)});\ a_{22}=\cos(y^{(2)}, y^{(1)});\ a_{23}=\cos(y^{(2)}, z^{(1)});\quad (3.111)$$
$$a_{31}=\cos(z^{(2)}, x^{(1)});\ a_{32}=\cos(z^{(2)}, y^{(1)});\ a_{33}=\cos(z^{(2)}, z^{(1)}).$$

Для сокращения записи используют матрицы, составленные из параметров преобразования координат, представляющие собой систему чисел (элементов) в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

матрица $\mathbf{M}_{21}$ направляющих косинусов, называемая матрицей поворота осей:

$$\mathbf{M}_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.112)$$

Матрицы-столбцы проекций точек на координатные оси: начала координат $O^{(2)}$ системы $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ относительно системы $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$.

$$\mathbf{L}_{21}=\begin{vmatrix} l_{21x} \\ l_{21y} \\ l_{21z} \end{vmatrix}; \quad (3.113)$$

радиусов-векторов $\bar{\boldsymbol{\rho}}_B^{(1)}$ и $\boldsymbol{\rho}_B^{(2)}$ точки B относительно начал координат $O^{(1)}$ и $O^{(2)}$:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_B^{(1)}=\begin{vmatrix} x_B^{(1)} \\ y_B^{(1)} \\ z_B^{(1)} \end{vmatrix};\ \bar{\boldsymbol{\rho}}_B^{(2)}=\begin{vmatrix} x_B^{(2)} \\ y_B^{(2)} \\ z_B^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (3.114)$$

Квадратная матрица $\mathbf{T}_{21}$ преобразования координат (с добавлением тождества $1\equiv 1$) в общем случае:

$$\mathbf{T}_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & l_{21x} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & l_{21y} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & l_{21z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.115)$$

В принятых обозначениях формулы преобразования координат записывают в таком виде:

при параллельном переносе осей координат

$$\bar{\rho}_B^{(1)}=\bar{\rho}_B^{(2)}+\bar{l}_{21}, \quad (3.116)$$

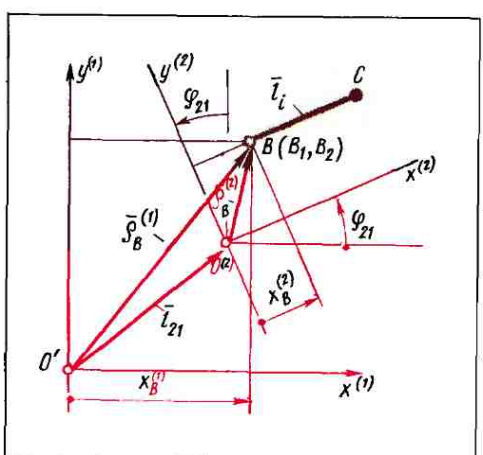


Рис. 3.43

что равносильно записи

$$\begin{vmatrix} x_B^{(1)} \\ y_B^{(1)} \\ z_B^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B^{(2)} \\ y_B^{(2)} \\ z_B^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{21x} \\ l_{21y} \\ l_{21z} \end{vmatrix}; \tag{3.117}$$

при повороте осей координат

$$\bar{\rho}_B^{(1)} = \mathbf{M}_{21}\bar{\rho}_B^{(2)}, \tag{3.118}$$

что равносильно записи

$$\begin{vmatrix} x_B^{(1)} \\ y_B^{(1)} \\ z_B^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_B^{(2)} \\ y_B^{(2)} \\ z_B^{(2)} \end{vmatrix}; \tag{3.119}$$

в общем случае преобразования координат

$$\bar{\rho}_B^{(1)} = \mathbf{T}_{21}\bar{\rho}_B^{(2)}, \tag{3.120}$$

или

$$\bar{\rho}_B^{(1)} = \mathbf{M}_{21}\bar{\rho}_B^{(2)} + \mathbf{L}_{21}, \tag{3.121}$$

что равносильно записи

$$\begin{vmatrix} x_B^{(1)} \\ y_B^{(1)} \\ z_B^{(1)} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & l_{21x} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & l_{21y} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & l_{21z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_B^{(2)} \\ y_B^{(2)} \\ z_B^{(2)} \\ 1 \end{vmatrix}. \tag{3.122}$$

Применение метода преобразования координат для определения положения звеньев ниже проиллюстрировано на примере кинематической схемы промышленного робота (рис. 3.44). Четыре подвижных звеиа *1, 2, 3, 4* образуют четыре одноподвижные пары, из которых три вращательные и одна поступательная. Число степеней свободы робота равно четырем: $W = 6n - 5p_1 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$. Поэтому должны быть заданы четыре обобщенные координаты: относительные углы поворота звеньев $\varphi_{10} = q_1(t)$; $\varphi_{21} = q_2(t)$; $\varphi_{43} = q_4(t)$ и относительное перемещение вдоль оси звена *3* $S_{32} = q_3(t)$ (рис. 3.44).

Поставлена задача: определить радиус-вектор $\rho_E^{(0)}$ точки E схвата *4* относительно неподвижной системы координат $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$, связанной со стойкой *5* (или 0). Оси систем координат ориентированы относительно элементов кинематических пар следующим образом:

ось $z^{(0)}$ неподвижной системы координат стойки направлена вдоль оси вращательной пары A;

со звеном *1* связана система $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$, имеющая смещение l_{10} начала координат $O^{(2)}$ вдоль оси z^0. Ось $z^{(1)}$ совпадает с осью

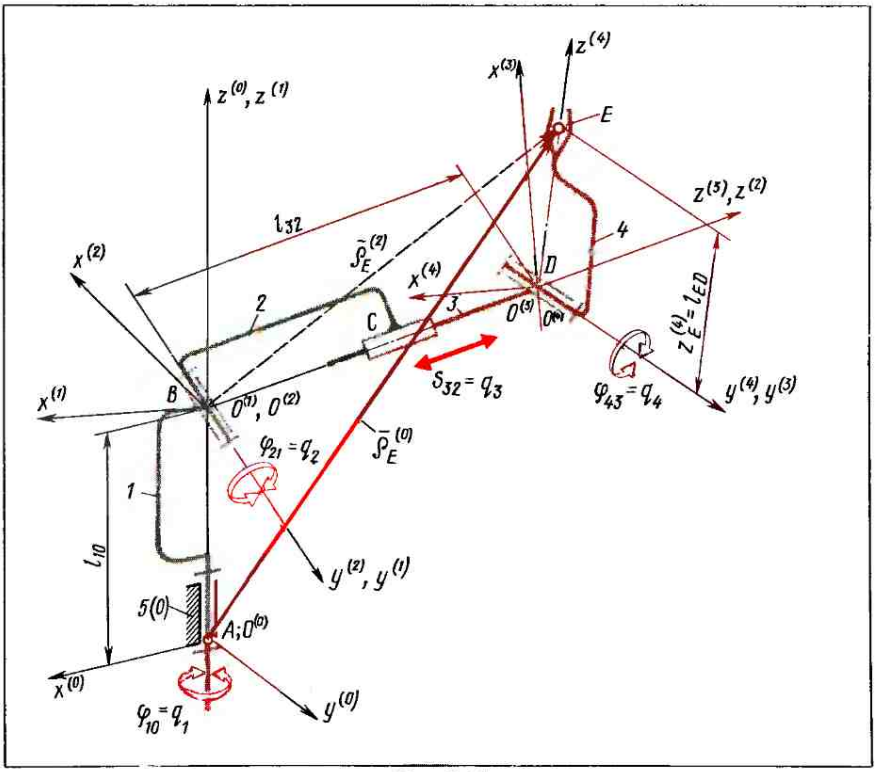


Рис. 3.44

$z^{(0)}$, а ось $y^{(1)}$ направлена по оси вращательной кинематической пары B;

со звеном *2* связана система $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, имеющая начало координат $O^{(2)}$, совпадающее с точкой $O^{(1)}$. Ось $y^{(2)}$ совпадает с осью $y^{(1)}$, т. е. с осью вращательной кинематической пары B;

начало координат системы $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ имеет смещение l_{32} относительно точки $O^{(2)}$ вдоль оси $z^{(2)}$. Ось $z^{(3)}$ выбрана совпадающей с осью $z^{(2)}$;

координата $z_E^{(4)}$ точки E схвата *4* задана в системе $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$, ось $y^{(4)}$ которой направлена по оси вращательной кинематической пары D.

Для определения радиуса-вектора $\rho_E^{(0)}$ необходимо разрешить следующее уравнение:

$$\bar{\rho}_E^{(0)} = \mathbf{T}_{40}\bar{\rho}_E^{(4)},$$

где

$$\bar{\rho}_E^{(4)} = \begin{vmatrix} x_E^{(4)} \\ y_E^{(4)} \\ z_E^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{ED} \end{vmatrix};$$

$$\bar{\rho}_E^{(0)} = \begin{vmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ z_E^{(0)} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{T}_{40} = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{10}.$$

Здесь $\mathbf{T}_{10}$ — матрица перехода от системы $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ к системе $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$:

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$\mathbf{T}_{21}$ — матрица перехода от системы $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ к системе $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$:

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$\mathbf{T}_{32}$ — матрица перехода от системы $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ к системе $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$:

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$\mathbf{T}_{43}$ — матрица перехода от системы $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$ к системе $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$:

$$\mathbf{T}_{43} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{43} & 0 & \sin\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{43} & 0 & \cos\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Развернутые формулы, определяющие положение схвата E, ввиду громоздкости не приведены. При решении конкретных задач целесообразно использовать ЭВМ, в математическом обеспечении которых имеются стандартные подпрограммы для выполнения матричных операций.

Для определения скорости и ускорения точек и звеньев сложных механизмов при использовании метода преобразования координат имеют в виду, что радиус-вектор $\bar{\rho}_E^{(0)}$, например точки E, есть векторная функция обобщенных координат:

$$\bar{\rho}_E^{(0)} = \bar{\rho}_E(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n),$$

поэтому скорость v_E точки E определяется по соотношению:

$$v_E = \frac{d\bar{\rho}_I}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{\rho}_E}{\partial q_i}\dot{q}_i, \qquad (3.123)$$

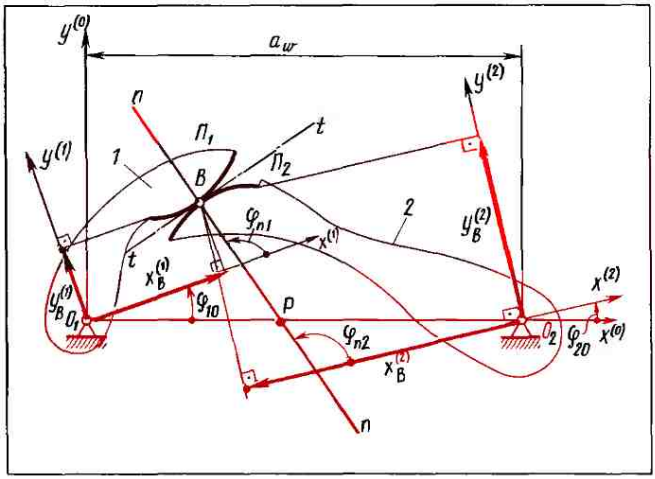


Рис. 3.45

или

$$v_{Ex} = \dot{x}_E^{(0)} = \frac{dx_E^{(0)}}{dt};$$

$$v_{Ey} = \dot{y}_E^{(0)} = \frac{dy_E^{(0)}}{dt}; \qquad (3.124)$$

$$v_{Ez} = \dot{z}_E^{(0)} = \frac{dz_E^{(0)}}{dt};$$

$$v_E = \sqrt{v_{Ex}^2 + v_{Ey}^2 + v_{Ez}^2}.$$

Абсолютную угловую скорость j-го звена относительно стойки (0) $\bar{\omega}_{j0}$ находят сложением угловых скоростей при относительном движении звеньев

$$\bar{\omega}_{j0} = \sum_{i=1}^{j} \bar{\omega}_{i/(i-1)}; \qquad (3.125)$$

индекс $i/(i-1)$ указывает на порядковый номер звеньев, участвующих в относительном движении, например $\bar{\omega}_{40} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} + \omega_{32} + \omega_{43}$.

Преобразование координат при определении положений звеньев механизмов с высшими парами. При аналитическом определении закона движения выходного звена 2 $\varphi_{20} = \varphi_{20}(t)$, образующего высшую кинематическую пару со звеном 1 (рис. 3.45), необходимо располагать уравнениями профилей Π_1 и Π_2 и законом движения начального звена $\varphi_{10} = \varphi_{10}(t)$. Уравнения профилей Π_1 и Π_2 задают в подвижных системах координат $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}$ и $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}$: $y^{(1)} = f_1(x^{(1)})$ и $y^{(2)} = f_2(x^{(2)})$, связанных с соответствующими звеньями. Для общей контактной точки B должны соблюдаться следующие условия:

$$x_{B1}^{(0)} + x_{B2}^{(0)} = a_w; \quad y_{B1}^{(0)} = y_{B2}^{(0)};$$
$$\varphi_{10} + \varphi_{n1} = \varphi_{20} + \varphi_{n2}. \qquad (3.126)$$

Последнее соотношение определяет требование совпадения нормалей к профилям $П_1$ и $П_2$ в контактной точке B, так как углы φ_{n1} и φ_{n2} определяют положение нормали $n—n$ относительно подвижных осей $O^{(1)}x^{(1)}$ и $O^{(2)}x^{(2)}$.

Систему уравнений (3.126) преобразуют и объединяют с уравнениями профилей $П_1$ и $П_2$:

$$\begin{gathered}
x_B^{(1)}\cos\varphi_{10}-y_B^{(1)}\sin\varphi_{10}+x_B^{(2)}\cos\varphi_{20}-y_B^{(2)}\sin\varphi_{20}=a_w;\\
x_B^{(1)}\sin\varphi_{10}+y_B^{(1)}\cos\varphi_{10}=x_B^{(2)}\sin\varphi_{20}+y_B^{(2)}\cos\varphi_{20};\\
\varphi_{10}+\operatorname{arctg}\left(-\frac{dx^{(1)}}{dy^{(1)}}\right)_B=\varphi_{20}+\operatorname{arctg}\left(-\frac{dx^{(2)}}{dy^{(2)}}\right)_B;\\
y^{(1)}=f_1(x^{(1)});\quad y^{(2)}=f_2(x^{(2)}).
\end{gathered}\tag{3.127}$$

Из системы уравнений (3.127) при заданной зависимости $\varphi_{10}=\varphi_{10}(t)$ находят искомые величины: координаты $x_B^{(1)}$, $y_B^{(1)}$ и $x_B^{(2)}$, $y_B^{(2)}$ контактной точки B в подвижных системах координат и угол φ_{20} поворота выходного звена *2*. Передаточное отношение $u_{21}=\omega_2/\omega_1$ находят путем дифференцирования зависимости φ_{20} по обобщенной координате φ_{10}.

Метод планов угловых скоростей. При исследовании и проектировании пространственных зубчатых и некоторых видов рычажных механизмов вполне эффективным является метод планов угловых скоростей, основанный на решении векторных уравнений типа

$$\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{21}.\tag{3.128}$$

Уравнение (3.128) решается, если определены направления векторов и задан закон изменения одного из этих векторов. Вектор $\bar{\omega}_{21}$ определяет положение мгновенной оси вращения OP в относительном движении звеньев, т. е. при вращении звена *2* из данного положения относительно неподвижного звена *1* в положение, бесконечно близкое к данному.

Рассмотрим применение метода на примере планетарного зубчатого конического механизма, изображенного на рис. 3.46, *а* и состоящего из конических колес z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 и водила H. Колеса z_2 и z_5 объединены в общий блок, а колесо z_3 закреплено на стойке *6*.

Оси мгновенного относительного вращения обозначены $P_{12}O$, $P_{2H}O$, $P_{23}O$ и $P_{54}O$. Они пересекаются в общей точке O.

Можно записать следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{21};\ \bar{\omega}_H=\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_{H2};\\
\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_{23};\ \bar{\omega}_H=\bar{\omega}_5+\bar{\omega}_{H5};\\
\bar{\omega}_5=\bar{\omega}_2;\\
\bar{\omega}_4=\bar{\omega}_5+\bar{\omega}_{45};\ \bar{\omega}_3=0.
\end{array}\right\}\tag{3.129}$$

Система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\bar{\omega}_2=\underline{\bar{\omega}_{23}}=\underline{\underline{\bar{\omega}_1}}+\underline{\bar{\omega}_{21}}.$$

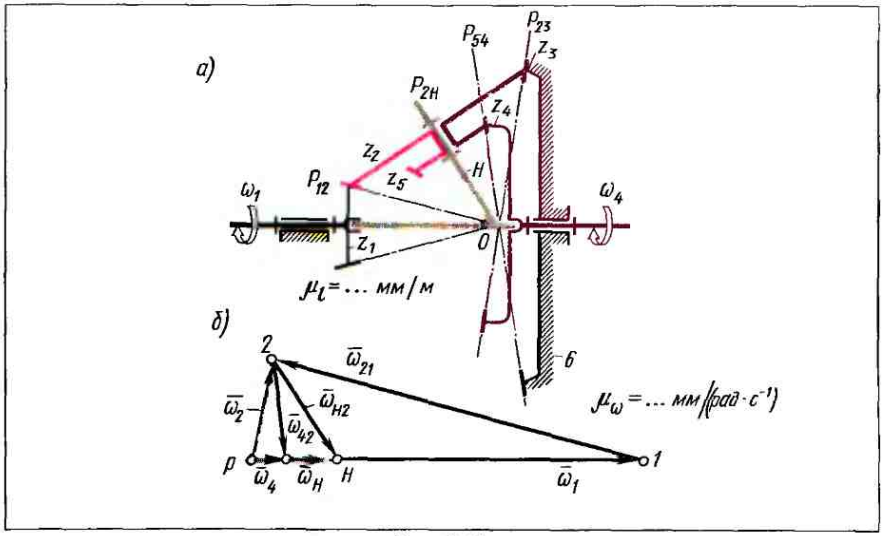


Рис. 3.46

Это уравнение решается относительно $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_{21}$ с помощью плана угловых скоростей, приведенного на рис. 3.46, *б*: в треугольнике *p12* вектор $\bar{\omega}_1$ изображен отрезком $p1 = \mu_\omega \omega_1$; вектор $\bar{\omega}_{21}$ проведен параллельно оси $P_{12}O$, а вектор $\bar{\omega}_2$ — параллельно оси $P_{23}O$. Величину искомых векторов находят делением длины отрезков *p2* и *p12* на масштаб угловой скорости: $\omega_2 = (p2)/\mu_\omega$; $\omega_{21} = (12)/\mu_\omega$.

Уравнение $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_{45} = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{45}$ также решается графически: вектор $(\bar{p4}) = \mu_\omega \omega_4$ проведен параллельно оси вращения колеса *4*, вектор $(\bar{24}) = \mu_\omega \omega_{45}$ — параллельно оси $P_{54}O$.

Величину искомых векторов угловых скоростей находят по длине отрезков *p4* и *24* в $\Delta p24$: $\omega_4 = (p4)/\mu_\omega$; $\omega_{45} = (24)/\mu_\omega$.

Уравнение $\bar{\omega}_H = \bar{\omega}_2 + \omega_{H2}$ также решается графически построением треугольника $\bar{p2H}$.

Величину искомых векторов находят из соотношений $\omega_H = (pH)/\mu_\omega$; $\omega_{H2} = (2H)/\mu_\omega$.

Метод планов угловых скоростей целесообразно, например, применить к исследованию карданного механизма.

Записывают систему векторных уравнений, связывающих между собой векторы угловых скоростей: $\bar{\omega}_1$ — входного звена, $\bar{\omega}_2$ — промежуточного звена (крестовины) и $\bar{\omega}_3$ — выходного звена и векторов относительного вращения ω_{21} и ω_{23} крестовины *2* относительно звеньев *1* и *3* (рис. 3.47, *а*):

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}; \quad \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32},$$

или

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32}.$$

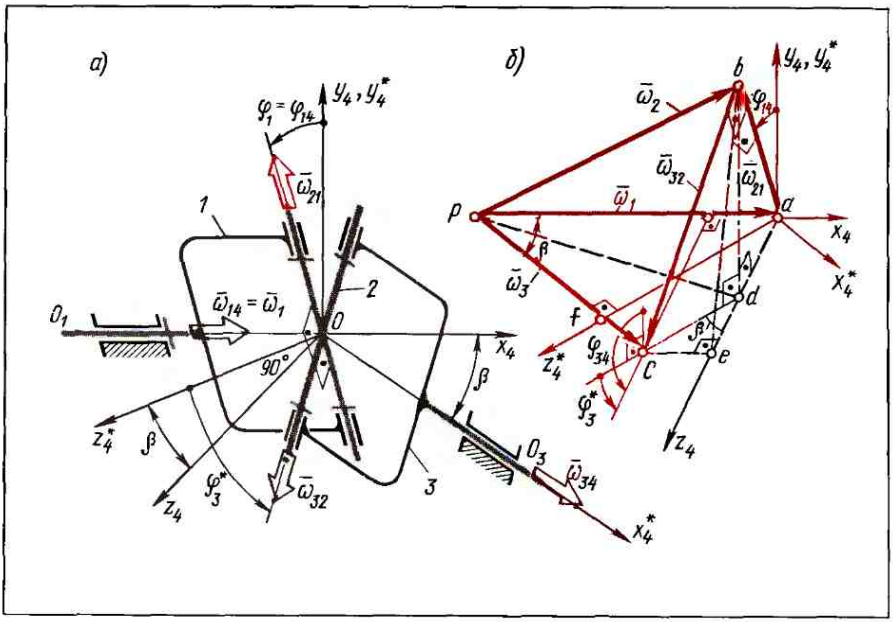


Рис. 3.47

В последнем векторном уравнении число неизвестных параметров равно трем, т. е. уравнение решается графическим построением в трехмерном пространстве (рис. 3.47, *б*). Длина отрезка *pa* выбирается так: $pa = \mu_\omega \omega_1$; длина остальных отрезков определяется в результате решения $ab = \mu_\omega \omega_{21}$; $bc = \mu_\omega \omega_{32}$; $pc = \mu_\omega \omega_3$; $pb = \mu_\omega \omega_2$.

Функцию положения находят из совместного рассмотрения трех прямоугольных треугольников $\triangle abd$, $\triangle bdc$ и $\triangle cde$:

$$\text{из } \triangle ebd \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_{14} = bd/de;$$

$$\text{из } \triangle cbd \quad \operatorname{tg}\varphi_3^* = \operatorname{tg}\varphi_{34} = cd/bd;$$

$$\text{из } \triangle cde \quad \cos\beta = de/dc.$$

После подстановки имеют

$$\operatorname{tg}\varphi_3^* = cd/bd = \frac{de \operatorname{tg}\varphi_1}{cd} = \operatorname{tg}\varphi_1 \cos\beta.$$

Для определения вектора угловой скорости $\bar{\omega}_3$ выполняют построение в осевой плоскости входного и выходного звеньев и записывают соотношения между отрезками:

$$pc = pf + fc = pa\cos\beta + ad\sin\beta;$$

$$\text{из } \triangle adb \quad ad = ab\sin\varphi_1;$$

$$\text{из } \triangle aeb \quad ab = ae\sin\varphi_1;$$

$$\text{из } \triangle pca^* \quad ae = pc\sin\beta.$$

После подстановки имеют

$$pc = pa\cos\beta + pc\sin^2\beta\sin^2\varphi_1,$$

или

$$pc = pa\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Так как отрезки pc и pa пропорциональны угловым скоростям ω_3 и ω_1, то можно записать

$$\omega_3 = \omega_1\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}. \qquad (3.130)$$

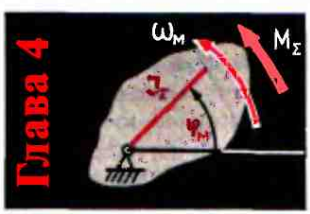
Угловую скорость ω_{21} находят по соотношению

$$ab = pc\sin\beta\sin\varphi_1$$

или

$$\omega_{21} = \omega_1\frac{\cos\beta\sin\beta\sin\varphi_1}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Соотношение (3.130) идентично соотношению (3.106), полученному при решении задачи геометрическим методом.



Исследование движения машинного агрегата с жесткими звеньями

К механизму машинного агрегата во время его движения приложены различные силы. Это — движущие силы, силы сопротивления, силы тяжести и многие другие. Характер их действия может быть разным: некоторые из них зависят от положения звеньев механизма, другие — от их скорости, третьи — постоянны. Своим действием приложенные силы сообщают механизму тот или иной закон движения.

Кинематические характеристики — скорость, ускорение, время срабатывания, коэффициент неравномерности и др. — определяются посредством решения уравнения движения. Выбор способа решения уравнения движения зависит от характера действия заданных сил и от передаточных свойств механизма. При этом размеры, массы и моменты инерции звеньев должны быть известными. Однако распространена и обратная задача, когда заданы кинематические характеристики режима движения машины и необходимо найти массы, моменты инерции, а следовательно, и размеры звеньев, при которых механизм, нагруженный заданными силами, двигался бы в требуемом режиме. В настоящей главе курса рассматриваются способы решения как прямой

задачи — динамического исследования механизма машинного агрегата, так и обратной — его динамического проектирования. При этом необходимо подчеркнуть, что при решении обеих задач предполагается, что все звенья механизма являются абсолютно жесткими.

§ 4.1 Силы, действующие в машинах, и их характеристики

Силы и пары сил*, приложенные к механизму машины, можно разделить на следующие группы.

1. Движущие силы и моменты, совершающие *положительную* работу за время своего действия или за один цикл, если они изменяются периодически. Эти силы и моменты приложены к звеньям механизма, которые называются ведущими.

2. Силы и моменты сопротивления, совершающие *отрицательную* работу за время своего действия или за один цикл. Эти силы и моменты делятся, во-первых, на силы и моменты полезного сопротивления, которые совершают требуемую от машины работу и приложены к звеньям, называемым ведомыми, и, во-вторых, на силы и моменты сопротивления среды (газа, жидкости), в которой движутся звенья механизма. Силы сопротивления среды обычно малы по сравнению с другими силами, поэтому в дальнейшем они учитываться не будут, а силы и моменты полезного сопротивления будут называться просто силами и моментами сопротивления.

3. Силы тяжести подвижных звеньев и силы упругости пружин. На отдельных участках движения механизма эти силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу. Однако за полный кинематический *цикл работа этих сил равна нулю,* так как точки их приложения движутся циклически.

4. Силы и моменты, приложенные к корпусу машины (т. е. к стойке) извне. К ним помимо силы тяжести корпуса относятся реакция основания (фундамента) машины на ее корпус и многие другие силы. Все эти силы и моменты, поскольку они приложены к неподвижному корпусу (стойке), работы *не совершают.*

5. Силы взаимодействия между звеньями механизма, т. е. силы, действующие в его кинематических парах. Эти силы согласно 3-му закону Ньютона всегда взаимообратны. Их нормальные составляющие работы *не совершают,* а касательные составляющие, т. е. силы трения, работу совершают, причем работа силы трения на относительном перемещении звеньев кинематической пары *отрицательна.*

Силы и моменты первых трех групп относятся к категории активных. Обычно они известны или могут быть оценены. Все эти силы и моменты приложены к механизму извне, а поэтому являются *внеш-*

* В дальнейшем, как это принято в технической литературе, вместо выражения «приложена пара сил с моментом M» будем употреблять более короткий оборот «приложен момент M».

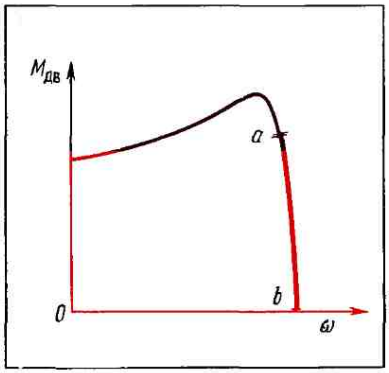


Рис. 4.1

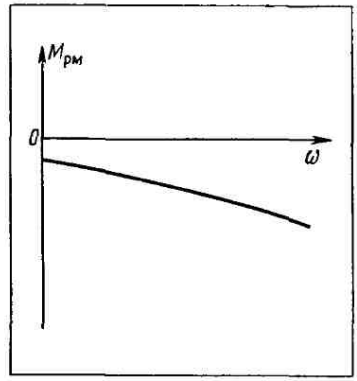


Рис. 4.2

ними. К числу внешних относятся также и все силы и моменты 4-й группы. Однако не все они являются активными.

Силы 5-й группы, если рассматривать механизм в целом, не выделяя отдельных его частей, являются *внутренними.* Эти силы представляют собой реакции на действие активных сил. Реакцией будет также и сила (или момент), с которой основание (фундамент) машины действует на ее корпус (т. е. на стойку механизма). Реакции наперед неизвестны. Они зависят от активных сил и моментов и от ускорений звеньев механизма.

Наибольшее влияние на закон движения механизма оказывают движущие силы и моменты, а также силы и моменты сопротивления. Их физическая природа, величина и характер действия определяются рабочим процессом машины или прибора, в которых использован рассматриваемый механизм. В большинстве случаев эти силы и моменты не остаются постоянными, а изменяют свою величину при изменении положения звеньев механизма или их скорости. Эти функциональные зависимости, представленные графически, или массивом чисел, или аналитически, носят название механических характеристик и при решении задач считаются известными.

При изображении механических характеристик будем придерживаться следующего правила знаков: силу и момент будем считать положительными, если на рассматриваемом участке пути (линейном или угловом) они производят положительную работу.

Характеристики сил, зависящих от скорости. На рис. 4.1 показана механическая характеристика асинхронного электродвигателя — зависимость движущего момента от угловой скорости ротора машины. Рабочей частью характеристики является участок *ab*, на котором движущий момент резко уменьшается даже при незначительном увеличении скорости вращения.

От скорости зависят силы и моменты, действующие также в таких роторных машинах, как электрогенераторы, вентиляторы, воздуходувки, центробежные насосы (рис. 4.2) и многие другие.

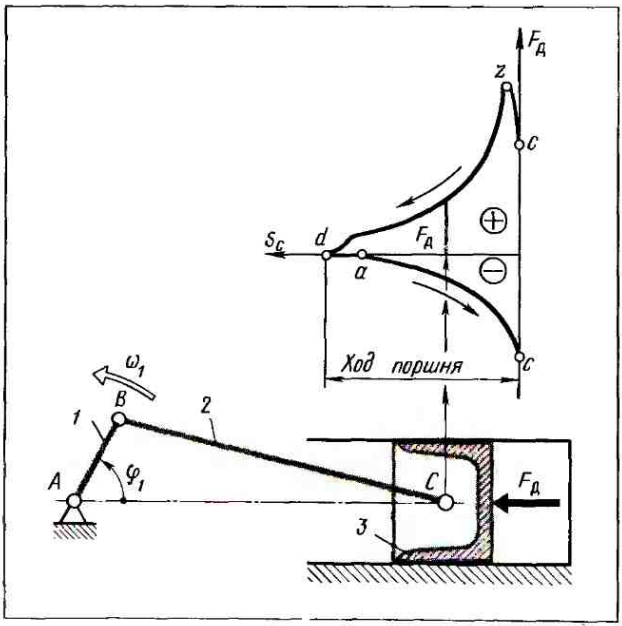


Рис. 4.3

При увеличении скорости момент двигателей обычно уменьшается, а момент машин-потребителей механической энергии обычно увеличивается. Такое свойство очень полезно, так как автоматически содействует устойчивому поддержанию режима движения машины, и чем сильнее оно выражено, тем устойчивость больше. Назовем такое свойство машин саморегулированием.

Характеристики сил, зависящих от перемещения. На рис. 4.3 показана кинематическая схема механизма двухтактного двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и его механическая характеристика. Сила $F_д$, приложенная к поршню *3*, действует всегда влево. Поэтому при движении поршня влево (процесс расширения газов) она совершает положительную работу и показана со знаком плюс (ветвь *czd*). При движении поршня вправо (процесс сжатия газов) сила $F_д$ получает знак минус (ветвь *dac*). Если подача топлива в ДВС не изменяется, то при следующем обороте начального звена (звено *1*) механическая характеристика $F_д = F_д(s_C)$ повторит свою форму. Это значит, что сила $F_д$ будет изменяться периодически.

Работа силы $F_д$ графически изобразится площадью, ограниченной кривой $F_д(s_C)$. На рис. 4.3 эта площадь имеет две части: положительную и отрицательную, причем первая больше второй. Поэтому работа силы $F_д$ за полный период будет положительной. Следовательно, сила $F_д$ является движущей, хотя она и знакопеременна. Отметим попутно, что если сила, будучи знакопеременной, совершает за один период отрицательную работу, то она является силой сопротивления.

Силы, зависящие только от перемещения, действуют во многих других машинах и приборах (в поршневых компрессорах, ковочных машинах, строгальных и долбежных станках, разнообразных приборах как с пневмоприводом, так и с пружинными двигателями и т. д.), причем действие сил может быть как периодическим, так и непериодическим.

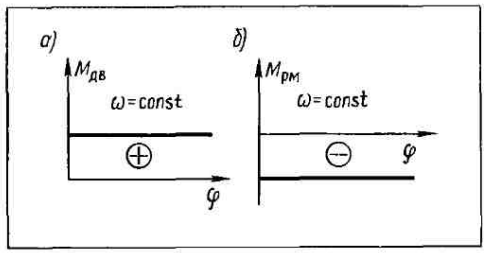


Рис. 4.4

Вместе с тем нужно отметить, что момент машин роторного типа от перемещения, т. е. от угла поворота ротора не зависит; характеристики таких машин при ω=const изображены на рис. 4.4, *а, б*. При этом у машин-двигателей $M_{дв}>0$, а у машин-потребителей механической энергии (т. е. рабочих машин) $M_{рм}<0$.

Если изменять подачу топлива в ДВС, то его механическая характеристика примет вид семейства кривых (рис. 4.5, *а*): чем больше подача топлива (параметр h семейства), тем выше располагается характеристика. Семейством кривых изображается и механическая характеристика шунтового электродвигателя (рис. 4.5, *б*): чем больше сопротивление цепи обмотки возбуждения двигателя (параметр h), тем правее размещается кривая. Характеристика гидродинамической муфты также имеет вид семейства кривых (рис. 4.5, *в*): чем больше наполнение муфты жидкостью (параметр h), тем правее и выше располагаются характеристики.

Таким образом, воздействуя на параметр h, можно управлять режимом работы привода — теплового, электрического или гидравлического, увеличивая его движущую силу или скорость. Вместе с тем параметр управления h связан с величиной потока энергии, протекающей через машину, т. е. определяет ее нагруженность и производительность.

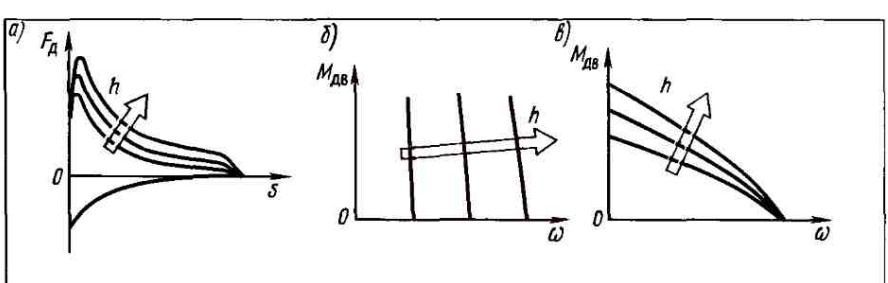


Рис. 4.5

§ 4.2 Динамическая модель машинного агрегата

Механизм машинного агрегата обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Чтобы лучше представить себе это, рассмотрим в качестве примера силовую установку, в которой двигатель внутреннего сгорания (ДВС) приводит в движение через зубчатую передачу вал потребителя механической энергии, т. е. рабочей машины (рис. 4.6, *а*). Пусть таким потребителем будет электрогенератор, или вентилятор, или центробежный насос, или какая-либо другая рабочая машина.

К поршню *3* приложена движущая сила $F_д$, к ротору *4* рабочей машины — момент сопротивления $M_{рм}$, ко всем звеньям — силы тяжести, во всех кинематических парах действуют силы трения. Если ДВС имеет несколько цилиндров, то число подвижных звеньев будет уже больше четырех. При этом на каждый поршень будет действовать движущая сила, так что картина нагружения механизма станет еще более сложной.

Определение закона движения такой сложной многозвенной системы представляет собой трудную задачу. Однако в рассматриваемом примере механизм имеет *одну* степень свободы ($W=1$). Это значит, что прежде всего надо определить закон движения всего лишь одного из его звеньев, которое тем самым будет являться начальным. Такая постановка задачи приводит к мысли, заменить весь сложный многозвенный механизм одним условным звеном.

Выберем в качестве начального звена исследуемого механизма коленчатый вал ДВС, т. е. звено *1* (рис. 4.6, *а*)*. К условному звену (рис. 4.6, *б*) предъявим такое требование: пусть его момент инерции $I_\Sigma^{пр}$ и момент $M_\Sigma^{пр}$, которым оно нагружено, будут такими, что закон движения условного звена получится полностью совпадающим с законом движения начального звена *1*. Это значит, что условное звено окажется своеобразной динамической моделью механизма. А отсюда следует, что если определить закон движения этой простой модели (рис. 4.6, *б*), то автоматически станет известным искомый закон движения начального звена заданного механизма, т. е. будет справедливым для любого момента времени уравнение

$$\omega_1 = \omega_м, \tag{4.1}$$

в котором ω_1 — угловая скорость начального звена (во взятом примере звена *1*), а $\omega_м$ — угловая скорость модели.

Из сказанного следует, что при построении модели механизма все силы и моменты, приложенные к нему, оказываются приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом $M_\Sigma^{пр}$, т. е. той расчетной величиной, кото-

* Если заданный механизм имеет звено, находящееся в непрерывном вращательном движении, то именно его и целесообразно выбирать в качестве начального.

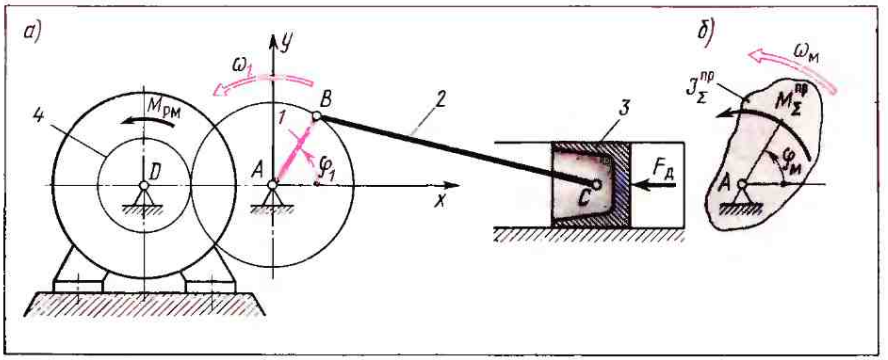


Рис. 4.6

рая в теоретической механике называется обобщенной силой. Следовательно, $M_\Sigma^{пр}$ является эквивалентом всей заданной нагрузки, приложенной к механизму. Равным образом, массы всех звеньев (точнее говоря, их инертности) оказываются также приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом инерции $J_\Sigma^{пр}$, который является, таким образом, эквивалентом всей инертности механизма. Сам же заданный многозвенный механизм (рис. 4.6, *а*), нагруженный сложной системой сил и моментов, оказывается замененным простой моделью (рис. 4.6, *б*).

Итак, построение динамической модели состоит в приведении сил (определение $M_\Sigma^{пр}$) и в приведении масс (определение $J_\Sigma^{пр}$). Подчеркнем при этом, что динамическая модель должна быть обязательно построена так, чтобы было выполнено уравнение (4.1); иначе сам переход от заданного реального механизма к его модели становится бессмысленным. Выполнение же уравнения (4.1), как следует из уравнения Лагранжа II рода, будет обеспечено в том случае, если *при приведении сил будет соблюдено условие равенства элементарных работ, а при приведении масс — условие равенства кинетических энергий.*

§ 4.3 Приведение сил

Рассмотрим приведение сил на примере механизма с *одной* степенью свободы ($W = 1$) (рис. 4.7, *а*). Выберем в качестве начального звено *1*. Механизм нагружен силами $\bar{F}$ и $\bar{F}_3$ и моментом M_4. Заменим механизм его моделью и приведем к ней обе силы и момент. В результате силы $\bar{F}$ и $\bar{F}_3$ и момент M_4 будут представлены соответствующими приведенными моментами (рис. 4.7, *б*). Их алгебраическая сумма даст величину суммарного приведенного момента

$$M_\Sigma^{пр} = M_F^{пр} + M_{F3}^{пр} + M_{M4}^{пр}, \qquad (4.2)$$

приложенного к модели (рис. 4.7, *в*).

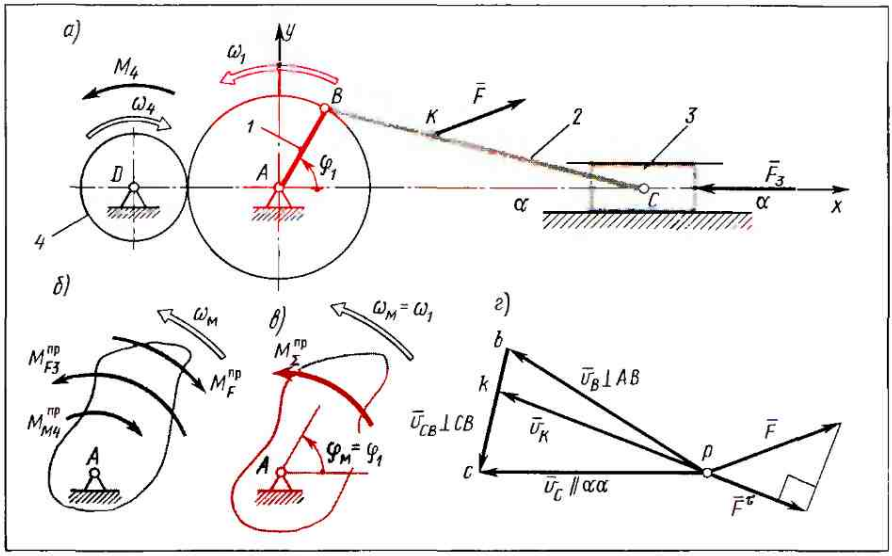


Рис. 4.7

Приведем силу $\bar{F}$, т. е. найдем $M^{пр}_F$. Для этого согласно § 4.2 надо записать исходное условие — *равенство элементарных работ* фактически приложенной силы F и заменяющего ее приведенного момента $M^{пр}_F$

$$M^{пр}_F d\varphi_м = F ds_K \cos(\bar{F}, d\bar{s}_K), \tag{4.3}$$

где $d\varphi_м$ и ds_K — возможные перемещения модели и точки K приложения силы. Учитывая уравнение (4.1), из которого следует $d\varphi_м = d\varphi_1$, решим уравнение (4.3) относительно искомого приведенного момента:

$$M^{пр}_F = F\frac{ds_K}{d\varphi_1}\cos(\bar{F}, d\bar{s}_K) = F\frac{ds_K/dt}{d\varphi_1/dt}\cos(\bar{F}, d\bar{s}_K) = F\frac{v_K}{\omega_1}\cos(\bar{F}, d\bar{s}_K),$$

откуда, имея в виду, что $\angle(\bar{F}, d\bar{s}_K) = \angle(\bar{F}, \bar{v}_K)$, получим

$$M^{пр}_F = F\frac{v_K}{\omega_1}\cos(\bar{F}, \bar{v}_K). \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) имеет обобщающий смысл: под буквой K можно понимать любую точку механизма, к которой приложена сила F, известная по величине и направлению.

Приведем момент M_4. Запишем исходное условие — равенство элементарных работ

$$M^{пр}_{M4} d\varphi_м = M_4 d\varphi_4, \tag{4.5}$$

где $d\varphi_м$ и $d\varphi_4$ — возможные угловые перемещения модели и звена *4*. Решим (4.5) относительно $M^{пр}_{M4}$, помня, что $d\varphi_м = d\varphi_1$:

$$M_{M4}^{\text{пр}}=M_4\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1}=M_4\frac{d\varphi_4/dt}{d\varphi_1/dt}=M_4\frac{\omega_4}{\omega_1},$$

т. е. в окончательном виде

$$M_{M4}^{\text{пр}}=M_4\frac{\omega_4}{\omega_1}. \tag{4.6}$$

Уравнению (4.6) можно придать обобщающий вид:

$$M_{Mj}^{\text{пр}}=M_j\frac{\omega_j}{\omega_1}, \tag{4.7}$$

где M_j — фактически приложенный к звену j момент.

Практическое использование для расчетов уравнений (4.4) и (4.7) можно осуществить либо графически (способом планов), либо аналитически (с помощью аналогов).

Графический способ. Для этого преобразуем уравнение (4.4), учитывая, что $\omega_1=v_B/l_{AB}$:

$$M_F^{\text{пр}}=Fl_{AB}\frac{v_K}{v_B}|\cos(\bar{F},\ \bar{v}_K)|. \tag{4.8}$$

В уравнение (4.8) следует подставлять абсолютную величину $|\cos(\bar{F},\ v_K)|$.

Чтобы найти отношение v_K/v_B возможных скоростей и угол $(\bar{F},\ v_K)$, построим план возможных скоростей, который для механизмов с $W=1$ выполняется по той же методике, что и план действительных скоростей (см. § 3.2). При этом надо помнить, что возможные скорости в отличие от действительных не зависят от приложенных сил, т. е. никак не связаны с законом движения механизма, и к тому же конкретного числового значения не имеют.

Направление приведенного момента $M_F^{\text{пр}}$ определяется так: поскольку $\bar{F}^{\tau}$ действует навстречу $\bar{v}_K$ (рис. 4.7, *г*), то и момент $M_F^{\text{пр}}$ должен быть направлен навстречу $\omega_{\text{м}}$ (рис. 4.7, *б*).

Используем уравнение (4.8) для приведения силы F_3, учитывая, что $\cos(\bar{F}_3,\ v_C)=1$, так как $\angle(\bar{F}_3,\ v_C)=0$:

$$M_{F3}^{\text{пр}}=F_3l_{AB}\frac{v_C}{v_B}. \tag{4.9}$$

Для определения приведенного момента $M_{M4}^{\text{пр}}$ вернемся к уравнению (4.6), в котором $\omega_4/\omega_1=u_{41}$ (рис. 4.7, *а*):

$$M_{M4}^{\text{пр}}=M_4|u_{41}|. \tag{4.10}$$

В уравнение (4.10) следует подставлять абсолютную величину передаточного отношения $|u_{41}|=z_1/z_4$. Приведенный момент $M_{M4}^{\text{пр}}$ направлен против $\omega_{\text{м}}$ (рис. 4.7, *б*), так как заданный момент M_4 действует навстречу ω_4.

Аналитический способ. Для этого назначим прямоугольную систему координат Axy (рис. 4.7, *а*).

Составим расчетное уравнение для определения $M_F^{\text{пр}}$. Мощность силы $\bar{F}$ [см. уравнение (4.4)] выразим через проекции:

$$Fv_K\cos(\bar{F},\ \bar{v}_K)=F_xv_{Kx}+F_yv_{Ky}.$$

Подставив это выражение в уравнение (4.4), получим

$$M_F^{\text{пр}} = F_x \frac{v_{Kx}}{\omega_1} + F_y \frac{v_{Ky}}{\omega_1}.$$

Как известно из § 3.3, отношения $v_{Kx}/\omega_1 = v_{qKx}$ и $v_{Ky}/\omega_1 = v_{qKy}$ являются проекциями аналога скорости точки K. Поэтому последнее уравнение примет окончательный расчетный вид:

$$M_F^{\text{пр}} = F_x v_{qKx} + F_y v_{qKy}. \tag{4.11}$$

Следует подчеркнуть, что в уравнение (4.11) все проекции подставляются со своими знаками.

Если в результате расчета приведенный момент $M_F^{\text{пр}} > 0$, то он направлен против часовой стрелки; если же $M_F^{\text{пр}} < 0$, то $M_F^{\text{пр}}$ направлен по часовой стрелке.

Применим уравнение (4.11) для приведения силы F_3:

$$M_{F3}^{\text{пр}} = F_{3x} v_{qCx}. \tag{4.12}$$

В заданном механизме точка C движется вдоль оси x (рис. 4.7, *а*), поэтому $v_{qCy} = 0$. Знак $M_{F3}^{\text{пр}}$ укажет его направление.

Для приведения момента M_4 используем уравнение (4.6). Передаточное отношение $u_{41} = \omega_4/\omega_1 = -z_1/z_4 < 0$, поскольку при внешнем зацеплении зубчатых колес *4* и *1* они вращаются навстречу друг другу (рис. 4.7, *а*). Поэтому

$$M_{M4}^{\text{пр}} = M_4(-z_1/z_4). \tag{4.13}$$

Знак $M_{M4}^{\text{пр}}$ укажет направление его действия.

В более общем случае, когда звено j, к которому приложен момент M_j, не связано какой-либо передачей с начальным звеном *1*, отношение ω_j/ω_1 [см. уравнение (4.7)] представляет собой аналог ω_{qj} угловой скорости ω_j (см. § 3.1). Следовательно, расчетное уравнение в общем виде записывается так:

$$M_{Mj}^{\text{пр}} = M_j \omega_{qj}.$$

Достоинством аналитического способа является то, что применение его открывает возможность использования ЭВМ для выполнения расчетов. Однако нельзя забывать, что аналитический способ требует знания формул для проекций аналогов скоростей и сил, которые составить подчас не так просто.

Определив $M_F^{\text{пр}}$, $M_{F3}^{\text{пр}}$, $M_{M4}^{\text{пр}}$ (графически или аналитически), их нужно согласно уравнению (4.2) алгебраически сложить и получить искомый момент $M_\Sigma^{\text{пр}}$. Отметим, что $M_\Sigma^{\text{пр}}$ можно также определить графически, применив теорему Жуковского [1, 3, 5].

Построим графики приведенных моментов для механизма машинного агрегата (рис. 4.6, *а*). Механические характеристики машин заданы. В качестве начального выберем звено *1*.

Сделаем приведение графическим способом. Построим планы возможных скоростей для различных положений механизма в пределах одного рабочего цикла. Приведенный движущий момент $M_д^{\text{пр}}$

определим по уравнению (4.9), положив $F_3 = F_д$:

$$M_д^{пр} = F_д l_{AB} \frac{v_C}{v_B}.$$

Значения $F_д$ для каждого положения механизма возьмем с механической характеристики (рис. 4.3). Когда приведение выполняется способом планов (графическим способом), то приведенные моменты получают те знаки, которые имеют фактически приложенные силы и моменты на механических характеристиках. График $M_д^{пр}(\varphi_1)$ показан на рис. 4.8, *а*.

Приведенный момент сопротивления $M_c^{пр}$ определим по уравнению (4.10), приняв $M_4 = M_{рм}$:

$$M_c^{пр} = M_{рм}|u_{41}|.$$

Момент $M_{рм}$ возьмем с механической характеристики (рис. 4.4, *б*), полагая, что вал рабочей машины (генератора) вращается практически равномерно. График $M_c^{пр}(\varphi_1)$ показан на рис. 4.8, *б*.

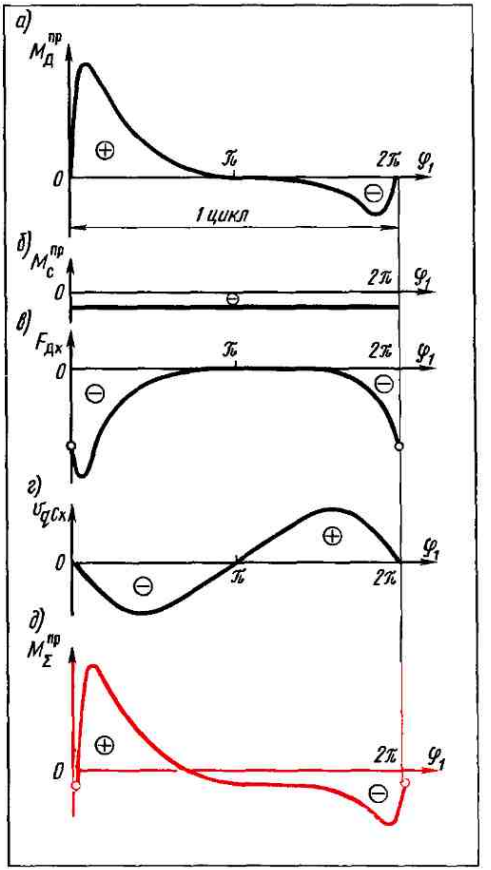


Рис. 4.8

Перейдем к аналитическому способу: назначим систему координат Axy (рис. 4.6, *а*). Приведенный движущий момент $M_д^{пр}$ определим по уравнению (4.12), положив $F_{3x} = F_{дx}$,

$$M_д^{пр} = F_{дx} v_{qCx}. \qquad (4.14)$$

Так как сила $F_д$ в любом положении механизма действует влево (рис. 4.6), т. е. в отрицательном направлении, то согласно правилам векторной алгебры проекции $F_{дx}$ следует присвоить знак минус (рис. 4.8, *в*). Проекция v_{qCx} аналога скорости определяется по уравнению

$$v_{qCx} = -l_{AB} \sin\varphi_1 \left(1 + \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2\varphi_1}}\right)$$

(см. § 3.3) и изображена на рис. 4.8, *г*.

Выполнив расчет по уравнению (4.14), получим приведенный момент $M_д^{пр}(\varphi_1)$, который изобразится тем же графиком, что и $M_д^{пр}(\varphi_1)$, полученным способом планов (рис. 4.8, *а*).

Приведенный момент сопротивления подсчитаем по уравнению (4.13), приняв $M_4 = M_{рм}$ (рис. 4.4, *б*),

$$M_c^{пр} = M_{рм}(-z_1/z_4).$$

Так как $M_{рм}$ направлен против часовой стрелки (рис. 4.6, *а*), то согласно правилам векторной алгебры $M_{рм} > 0$ и, следовательно, $M_c^{пр} < 0$. Абсолютную величину момента $M_{рм}$ нужно взять с механической характеристики (рис. 4.4, *б*). Приведенный момент сопротивления $M_c^{пр}(\varphi_1)$ изобразится тем же графиком, что и $M_c^{пр}$, полученный способом планов (рис. 4.8, *б*).

Здесь важно обратить внимание на то, что правило знаков для изображения сил и моментов на механических характеристиках совершенно иное, чем правило, взятое из векторной алгебры для определения знаков проекций сил и знаков моментов. Поэтому знаки приведенных моментов, полученных графически и аналитически, будут совпадать только в том случае, когда начальное звено вращается против часовой стрелки (т. е. в положительном направлении).

Суммарный приведенный момент определится так:

$$M_{\Sigma}^{пр} = M_д^{пр} + M_c^{пр} \qquad (4.15)$$

(см. рис. 4.8, *д*). Таким образом, благодаря приведению сил вся основная нагрузка, приложенная к механизму (рис. 4.6, *а*), оказалась замененной одним суммарным приведенным моментом (рис. 4.6, *б*).

§ 4.4 Приведение масс

Приведение масс рассмотрим на примере механизма с *одной* степенью свободы ($W = 1$) (рис. 4.9, *а*), выбрав в качестве начального звено *1*.

Заменим заданный механизм его динамической моделью (рис. 4.9, *б*). Это значит сосредоточим в ней инертность всех звеньев механизма. Обозначим момент инерции модели $J_{\Sigma}^{пр}$. Следовательно, $J_{\Sigma}^{пр}$ является эквивалентом инертности всего механизма и называется его приведенным моментом инерции. Как было указано в § 4.2, величина $J_{\Sigma}^{пр}$ определяется из условия *равенства кинетических энергий* $T_м$ модели и всего механизма T:

$$T_м = T. \qquad (4.16)$$

Кинетическая энергия модели (рис. 4.9, *б*) определяется следующим образом:

$$T_м = \frac{J_{\Sigma}^{пр}\omega_м^2}{2}.$$

Напомним, что кинетическая энергия звена i в общем виде может быть записана так:

$$T_i = \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{iS}\omega_i^2}{2}, \qquad (4.17)$$

где v_{Si} — скорость центра масс S_i звена i; J_{iS} — момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс S_i. В случае

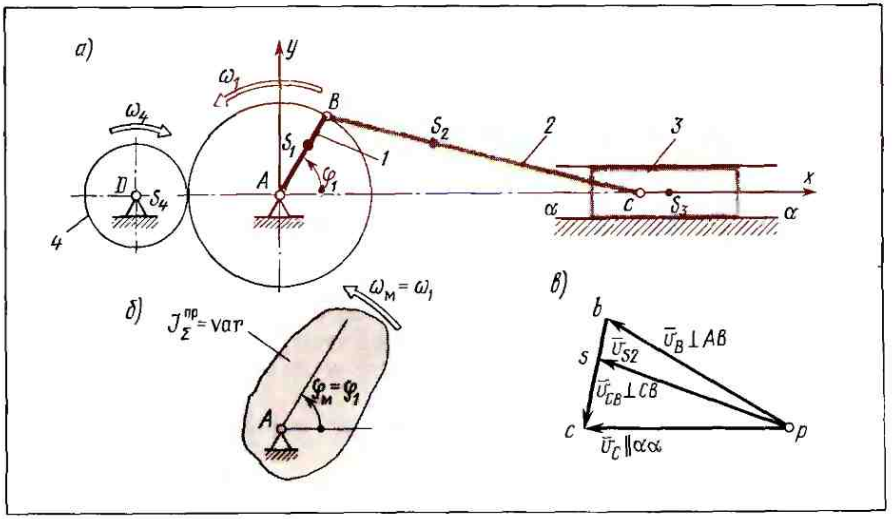


Рис. 4.9

поступательного движения $\omega_i = 0$. В случае вращательного движения вокруг оси A уравнение (4.17) приводится к виду

$$T_i = \frac{J_{iA}\omega_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия T заданного механизма (рис. 4.9, *а*) складывается из кинетических энергий всех его четырех подвижных звеньев $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$. Звено *1* участвует во вращательном движении, звено *2* — в плоском, звено *3* — в поступательном, звено *4* — во вращательном. Поэтому

$$T = \frac{J_{1A}\omega_1^2}{2} + \left(\frac{m_2 v_{S2}^2}{2} + \frac{J_{2S}\omega_2^2}{2}\right) + \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{J_{4D}\omega_4^2}{2}.$$

Подставим выражения $T_м$ и T в исходное уравнение (4.16) и, учитывая уравнение (4.1), после простых преобразований получим

$$J_\Sigma^{пр} = J_{1A} + m_2\left(\frac{v_{S2}}{\omega_1}\right)^2 + J_{2S}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{v_C}{\omega_1}\right)^2 + J_{4D}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2. \quad (4.18)$$

Практическое использование уравнения (4.18) может быть осуществлено или графически (с помощью планов возможных скоростей), или аналитически (с помощью аналогов скоростей).

Графический способ. Преобразуем уравнение (4.18), учитывая, что $\omega_1 = v_B/l_{AB}$, $\omega_2 = v_{CB}/l_{CB}$, $\omega_4/\omega_1 = u_{41}$:

$$J_\Sigma^{пр} = J_{1A} + \left[m_2 l_{AB}^2\left(\frac{v_{S2}}{v_B}\right)^2 + J_{2S}\left(\frac{l_{AB}}{l_{CB}}\right)^2\left(\frac{v_{CB}}{v_B}\right)^2\right] + m_3 l_{AB}^2\left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2 + J_{4D}u_{41}^2. \quad (4.19)$$

В механизме с одной степенью свободы отношения действительных скоростей равны отношениям возможных скоростей. Поэтому эти отношения возьмем из плана возможных скоростей (рис. 4.9, *в*).

Аналитический способ. Согласно § 3.1 отношения, заключенные в скобках уравнения (4.18), представляют собой аналоги скоростей:

$$\frac{v_{S2}}{\omega_1}=v_{qS2},\ \frac{\omega_2}{\omega_1}=\omega_{q2},\ \frac{v_C}{\omega_1}=v_{qC},\ \frac{\omega_4}{\omega_1}=\omega_{q4},$$

поэтому уравнение (4.18) запишем в таком виде:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}}=J_{1A}+(m_2v_{qS2}^2+J_{2S}\omega_{q2}^2)+m_3v_{qC}^2+J_{1D}\omega_{q4}^2. \tag{4.20}$$

Заметим, что $v_{qS2}^2=v_{qS2x}^2+v_{qS2y}^2$, $v_{qC}^2=v_{qCx}^2$, так как $v_{qCy}=0$. Кроме того, $\omega_{q4}=\omega_4/\omega_1=u_{41}=-z_1/z_4=\text{const}$. Расчеты при аналитическом способе можно выполнить на ЭВМ.

Уравнению (4.20) можно придать обобщающий вид, справедливый для любого механизма:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}}=\sum_{i=1}^{n}(m_iv_{qSi}^2+J_{iS}\omega_{qi}^2), \tag{4.21}$$

где n — число подвижных звеньев механизма. Внутри скобок стоят аналоги скоростей v_{qSi} и ω_{qi}, которые характеризуют передаточные свойства механизма. Из уравнения (4.21) следует, что приведенный момент инерции $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$ механизма от его закона движения не зависит и является характеристикой самого механизма.

Приведенный момент инерции механизма $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$ можно рассматривать как сумму приведенных моментов инерции отдельных его звеньев. Поэтому уравнения (4.19) и (4.20) представим в таком виде:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}}=J_1^{\text{пр}}+J_2^{\text{пр}}+J_3^{\text{пр}}+J_4^{\text{пр}},$$

где

$$J_1^{\text{пр}}=J_{1A}=\text{const}, \tag{4.22}$$

$$J_2^{\text{пр}}=m_2l_{AB}^2\left(\frac{v_{S2}}{v_B}\right)^2+J_{2S}\left(\frac{l_{AB}}{l_{CB}}\right)^2\left(\frac{v_{CB}}{v_B}\right)^2=$$
$$=m_2v_{qS2}^2+J_{2S}\omega_{q2}^2=\text{var}, \tag{4.23}$$

$$J_3^{\text{пр}}=m_3l_{AB}^2\left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2=m_3v_{qC}^2=\text{var}, \tag{4.24}$$

$$J_4^{\text{пр}}=J_{4D}u_{41}^2=\text{const}. \tag{4.25}$$

Приведенные моменты инерции $J_2^{\text{пр}}$ и $J_3^{\text{пр}}$ — величины переменные, так как в выражения (4.23) и (4.24) входят либо отношения возможных скоростей, либо аналоги скоростей, которые зависят от положения механизма. Поэтому приведенный момент инерции всего механизма [уравнения (4.19) и (4.20)] также будет переменным, зависящим от обобщенной координаты φ_1. Многим механизмам свойствен периодический характер этой зависимости. Однако есть

механизмы (например, зубчатые, шарнирный параллелограмм и др.), приведенный момент инерции которых постоянен.

Из сказанного следует, что модель, которой заменяется механизм (рис. 4.9, *б*), является *условным* телом, потому что момент инерции ее (в общем случае) — переменный, тогда как реальные физические тела имеют постоянные моменты инерции.

В заключение укажем, что поскольку ни планы возможных скоростей, ни аналоги скоростей от закона движения механизма не зависят, то приведение масс, равно как и приведение сил, можно делать, и *не зная закона его движения*. Следовательно, решая динамическую задачу, вполне возможно(и нужно) сначала построить динамическую модель механизма, сделав приведение сил и масс, а затем уже находить закон ее движения.

§ 4.5 Уравнение движения механизма

Выполнив приведение сил и масс, любой механизм с одной степенью свободы (рычажный, зубчатый, кулачковый и др.), столь бы сложным он ни был, можно заменить его динамической моделью (рис. 4.10). Эта модель в общем случае имеет переменный приведенный момент инерции J_Σ, и к ней приложен суммарный приведенный момент M_Σ^*. Закон движения модели *такой же,* как и закон движения начального звена механизма [см. уравнение (4.1)].

Основой для составления уравнения движения механизма с *одной* степенью свободы служит теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_{\text{нач}} = \Sigma A. \tag{4.26}$$

Работу совершают все активные силы и моменты и силы трения во всех кинематических парах механизма (см. § 4.1).

Уравнение движения в энергетической форме. Запишем формулу для кинетической энергии модели, учитывая уравнение (4.1),

$$T_{\text{м}} = J_\Sigma \omega^2/2. \tag{4.27}$$

Поскольку вся нагрузка, приложенная к модели, выражается суммарным приведенным моментом M_Σ, то сумма работ равна

$$\Sigma A = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi} M_\Sigma d\varphi. \tag{4.28}$$

Здесь переменная интегрирования $\varphi_{\text{м}}$ заменена координатой φ начального звена, так как $\varphi_{\text{м}} = \varphi$.

---

* Для упрощения записи здесь и в дальнейшем опускаем значок «пр» при приведенных моментах и приведенных моментах инерции, а также номер 1 начального звена в обозначении его координаты φ, угловой скорости ω и углового ускорения ε.

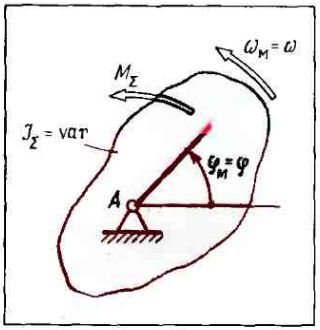


Рис. 4.10

Учитывая (4.16) и подставив выражения (4.27) и (4.28) в основное уравнение (4.26), получим уравнение движения в энергетической форме:

$$\frac{J_\Sigma \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma нач}\omega_{нач}^2}{2} = \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_\Sigma d\varphi. \qquad (4.29)$$

В общем случае верхний предел φ интегрирования в уравнении (4.29) считается переменным.

Если вся нагрузка, приложенная к механизму, зависит только от его положения, то и суммарный приведенный момент M_Σ есть функция только координаты φ. В этом случае уравнение (4.29) решается непосредственно относительно искомой величины ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_\Sigma(\varphi)d\varphi}{J_\Sigma} + \frac{J_{\Sigma нач}}{J_\Sigma}\omega_{нач}^2}. \qquad (4.30)$$

Укажем, что интеграл под корнем имеет знак, который надо учитывать.

Уравнение движения в дифференциальной форме. Продифференцируем уравнение (4.29) по координате φ

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_\Sigma \omega^2}{2}\right) = M_\Sigma.$$

Определим производную, стоящую в левой части уравнения, помня, что в общем случае переменной величиной является не только угловая скорость ω, но и J_Σ (см. § 4.4). Поэтому

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_\Sigma \omega^2}{2}\right) = J_\Sigma \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi} = J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\omega^2,$$

откуда

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\omega^2 = M_\Sigma. \qquad (4.31)$$

Это и есть уравнение движения в дифференциальной форме, поскольку искомая переменная величина — угловая скорость ω начального звена механизма — стоит под знаком производной. При пользовании уравнением (4.31) надо помнить, что суммарный приведенный момент M_Σ, а также производная $dJ_\Sigma/d\varphi$ суть величины алгебраические и подставляются со своими знаками.

В случае, когда исследуется механизм, имеющий $J_\Sigma = \text{const}$ (например, зубчатый механизм с круглыми колесами), то уравнение его движения упрощается и приобретает такой вид:

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_\Sigma. \qquad (4.32)$$

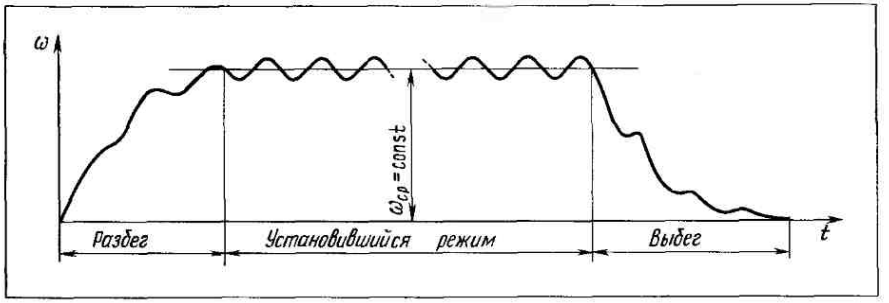


Рис. 4.11

Уравнение движения в дифференциальной форме (4.31) может быть получено также и из уравнений Лагранжа II рода [2], [4].

Для определения углового ускорения ε начального звена используем уравнение (4.31) и решим его относительно $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$:

$$\varepsilon = \frac{M_\Sigma}{I_\Sigma} - \frac{\omega^2}{2I_\Sigma} \frac{dI_\Sigma}{d\varphi}. \qquad (4.33)$$

Величины M_Σ и $dI_\Sigma/d\varphi$ подставляются в уравнение (4.33) со своими знаками. Если угловое ускорение ε получится со знаком, противоположным знаку угловой скорости ω, то это значит, что начальное звено механизма движется замедленно.

Производная $dI_\Sigma/d\varphi$ подсчитывается или численным дифференцированием на ЭВМ, или графическим дифференцированием (см. § 3.4). Другой значительно более точный (но и более трудоемкий) способ определения производной $dI_\Sigma/d\varphi$ можно найти в литературе. (См.: *Минут С. Б.* Об определении производной приведенного момента инерции массы звеньев механизма. — Науч. тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1970; *Зиновьев В. А., Бессонов А. П.* Основы динамики машинных агрегатов. М., 1964).

Угловое ускорение ε можно определить также способом, описанным в § 3.4 (способом поднормали). Там же изложены способы построения функций $\varepsilon(t)$ и $\varphi(t)$.

Процесс движения машинного агрегата в общем случае состоит из трех фаз: разбега, установившегося режима и выбега (рис. 4.11). Разбег и выбег относятся к неустановившемуся режиму, который характеризуется *непериодическими*, т. е. неповторяющимися, изменениями скорости главного вала агрегата (начального звена). При установившемся режиме скорость главного вала изменяется *периодически*. В частном случае скорость может быть постоянной. Часто установившееся движение чередуется с разгонами (при повышениях скоростного режима) и торможениями (при понижениях скоростного режима). Так работает, например, автомобильный двигатель. Многие механизмы в установившемся режиме вообще не работают. Это особенно характерно для целого ряда приборов (реле, контакторы и т. п.). Их механизм во время

срабатывания переходит из одного положения в другое, не совершая замкнутого повторяющегося кинематического цикла.

В трех последующих параграфах 4-й главы будет рассмотрен неустановившийся, а в остальных параграфах — установившийся режим движения.

§ 4.6 Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от положения

Для определения закона движения механизма при неустановившемся режиме должны быть известны следующие исходные данные: кинематическая схема механизма; характеристики геометрии масс всех подвижных звеньев; механические характеристики сил и моментов; начальные условия движения. Последнее важно для исследования именно неустановившегося режима.

Рассмотрим механизм, нагруженный силами и моментами, которые являются функциями только *перемещения* своих точек приложения. Пусть приведенный момент инерции рассматриваемого механизма имеет *переменную* величину $J_\Sigma = \text{var}$. Требуется определить зависимость скорости начального звена от его угла поворота, т. е. $\omega(\varphi)$. Подобная задача является весьма распространенной. В качестве примеров можно привести механизмы дизель-компрессоров, буровых станков и подъемных кранов с приводом от двигателей внутреннего сгорания, различных устройств с пневмоприводом, приборов с пружинными двигателями и др.

Для решения поставленной задачи нужно взять уравнение движения в энергетической форме [см. уравнение (4.30)]:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\Sigma A}{J_\Sigma} + \frac{J_{\Sigma\text{нач}}}{J_\Sigma}\omega_{\text{нач}}^2}, \qquad (4.34)$$

где ΣA — определяется по уравнению (4.28).

Порядок определения искомой угловой скорости ω графическим способом таков (рис. 4.12):

1. Выполняется приведение масс и строится диаграмма приведенного момента инерции механизма $J_\Sigma(\varphi)$, которая показана на рис. 4.12 повернутой на 90°*. Начальное положение отмечено как нулевое. Для отсчета углов φ принято $\varphi_{\text{нач}} = \varphi_0 = 0$.

2. По механическим характеристикам строятся диаграммы приведенного движущего момента и приведенного момента сопротивления, а затем диаграмма суммарного приведенного момента $M_\Sigma(\varphi)$. Если в механизме есть пружины циклического действия, то приве-

* Поворот диаграммы $J_\Sigma(\varphi)$ на 90° нужен для определения угловой скорости ω графическим методом энергомасс, который будет изложен в конце параграфа.

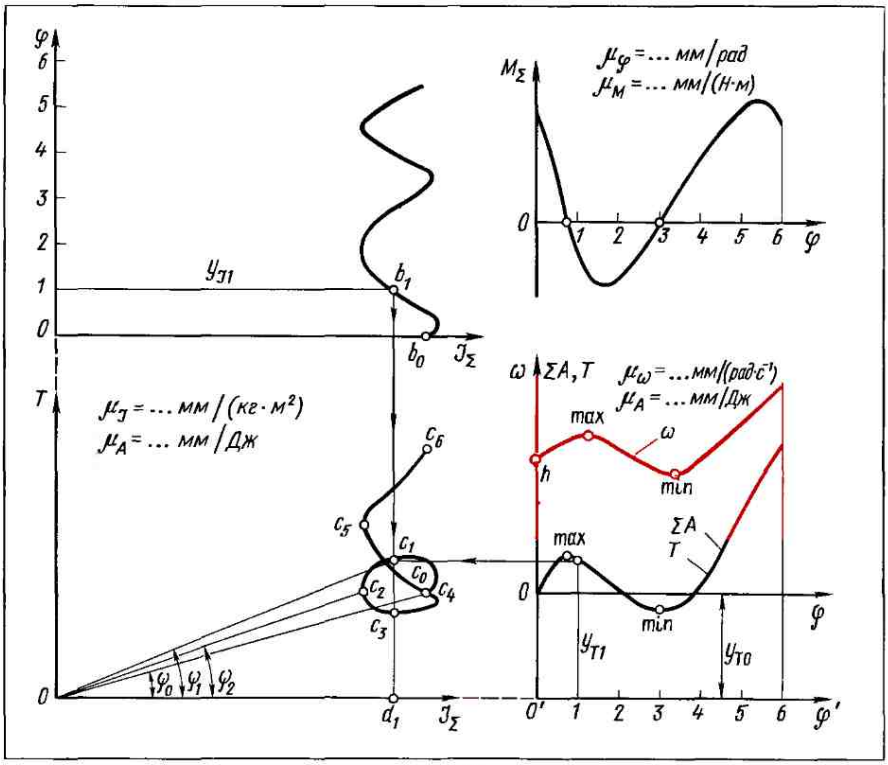


рис. 4.12

денные моменты их упругих сил должны войти в суммарный приведенный момент. В случае, когда силы тяжести и силы трения значительны, то и их приведенные моменты также должны войти слагаемыми в величину M_Σ. В результате выполнения п. 1 и 2 заданный механизм приводится к динамической модели.

3. Графическим интегрированием (см. § 3.4) строится диаграмма суммы работы $\Sigma A(\varphi)$. Ординаты этой диаграммы отсчитываются от оси φ.

4. По уравнению (4.34) с учетом начальных условий подсчитывается для каждого положения механизма угловая скорость ω и относительно оси φ строится искомая зависимость $\omega(\varphi)$. ΣA подставляется в (4.34) со своим знаком. Величина $\omega_0 = \omega_{нач}$ содержится в исходных данных и изображена ординатой $Oh = \mu_\omega \omega_0$. Величина $J_{\Sigma нач}$ есть значение приведенного момента инерции механизма в нулевой позиции.

В таком же порядке нужно вести расчет и численным способом с применением ЭВМ.

Решая задачу графическим способом, объем подсчетов можно несколько сократить, если из уравнения (4.27) с учетом (4.16) определить ω:

$$\omega = \sqrt{2T/J_\Sigma}\,. \qquad (4.35)$$

Сместим вниз ось φ на диаграмме $\Sigma A(\varphi)$ на величину $y_{T0} = \mu_A T_0$ (рис. 4.12), где $T_0 = J_{\Sigma 0}\omega_0^2/2$. Тогда ординаты, отсчитываемые от новой, смещенной оси φ', изобразят текущее значение кинетической энергии T в различных положениях механизма [см. уравнение (4.26)].

Наглядное представление о том, как изменяется скорость, можно получить графическим путем, разработанным И. И. Артоболевским. Для этого необходимо построить кривую энергомасс $T(J_\Sigma)$ (диаграмму Виттенбауэра). Чтобы ее получить, нужно исключить из зависимостей $T(\varphi)$ и $J_\Sigma(\varphi)$ параметр φ (на рис. 4.12 это показано для положения *1*).

Соединим любую точку диаграммы $T(J_\Sigma)$ (например, точку c_1) с началом координат. Напишем уравнение (4.35) применительно к положению 1 механизма, выразив T и J_Σ через изображающие их отрезки: $T_1 = y_{T1}/\mu_A$, $J_{\Sigma 1} = y_{J1}/\mu_J$. Тогда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}\,\frac{y_{T1}}{y_{J1}}} = \sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}}\,\sqrt{\frac{c_1 d_1}{0d_1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}}\,\sqrt{\operatorname{tg}\psi_1}. \qquad (4.36)$$

Сравним между собой углы ψ. Согласно уравнению (4.36) угловая скорость ω_1 в 1-м положении больше ω_0 — угловой скорости в начальном положении, потому что $\psi_1 > \psi_0$; рассуждая таким же образом, получим, что $\omega_2 < \omega_1$, так как $\psi_2 < \psi_1$ и т. д. Следовательно, переходя по кривой энергомасс от позиции к позиции, можно наглядно проследить, как изменяется угловая скорость начального звена механизма при изменении его положения.

Метод построения графика $\omega(\varphi)$ останется в силе и для механизмов, у которых $J_\Sigma = \text{const}$. При этом графики функций $J_\Sigma(\varphi)$ и $T(J_\Sigma)$ будут представлять прямые линии.

Вышеизложенный метод пригоден для изучения обеих фаз неустановившегося движения, т. е. и разбега (разгона), и выбега. Это же относится и к методам, изложенным в двух последующих параграфах.

§ 4.7 Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от скорости

Рассматриваемый случай отличается от предыдущего, во-первых, тем, что силы и моменты не зависят от перемещения, а являются функциями только *скорости*, и, во-вторых, тем, что приведенный момент инерции механизма есть величина *постоянная* $J_\Sigma = \text{const}$. Типичными примерами для таких условий

являются турбогенераторные и гидрогенераторные агрегаты, многие грузоподъемные машины и станки, прокатные станы, центробежные насосы и воздуходувки с электроприводом, следящие системы с электромоторным приводом и целый ряд других устройств.

Для решения поставленной задачи нужно взять уравнение движения в дифференциальной форме [см. уравнение (4.32)]:

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_\Sigma.$$

Разделим переменные ω и t и проинтегрируем, приняв $t_{нач} = 0$:

$$t = J_\Sigma \int_{\omega_{нач}}^{\omega} \frac{d\omega}{M_\Sigma}. \qquad (4.37)$$

По уравнению (4.37) определяется закон изменения скорости $\omega(t)$. Напомним, что M_Σ подставляется в уравнение (4.37) с учетом знака.

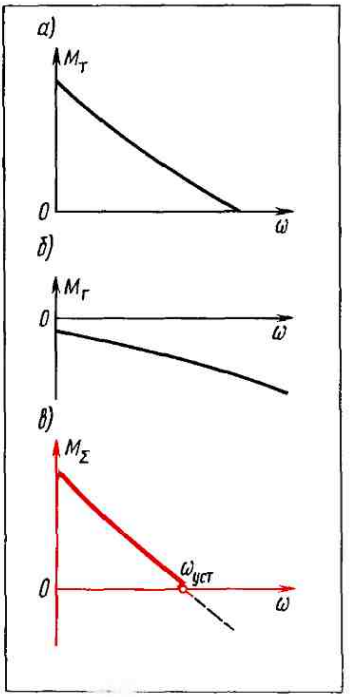


Рис. 4.13

Рассмотрим в качестве примера разгон трубогенераторного агрегата из неподвижного состояния; это значит, что при $t = 0$ угловая скорость $\omega_{нач} = 0$. Механические характеристики машин представлены на рис. 4.13, *а, б*. Примем в качестве начального звена вал одной из машин и приведем к нему все массы и оба момента, т. е. подсчитаем $J_\Sigma = \text{const}$ и $M_\Sigma = M_т + M_г$ (рис. 4.13, *в*). График $M_\Sigma(\omega)$ близок к прямой, поэтому можно его аппроксимировать уравнением $M_\Sigma = A - B\omega$. Член A равен $M_{\Sigma нач}$, а коэффициент B характеризует крутизну спада зависимости $M_\Sigma(\omega)$. Теперь уравнение (4.37) примет такой вид:

$$t = J_\Sigma \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{A - B\omega}.$$

Решение его при заданных начальных условиях

$$\omega = \omega_{уст}(1 - e^{-t/T}) \qquad (4.38)$$

представлено на рис. 4.14, причем $\omega_{уст} = A/B$.

В уравнении (4.38) $T = J_\Sigma/B$; эта величина называется постоянной времени машинного агрегата. Графически она изображена на рис. 4.14 отрезком ab. Физический смысл ее состоит в следующем. Если бы в процессе разгона суммарный момент M_Σ не уменьшался, а оставался постоянным, равным $M_{\Sigma нач}$, то движение было равно-

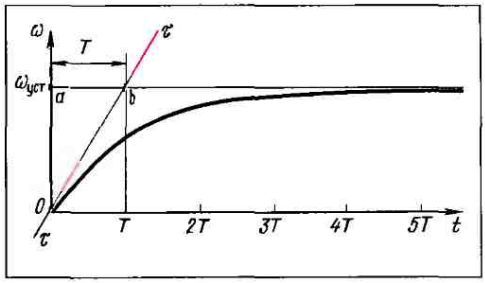


Рис. 4.14

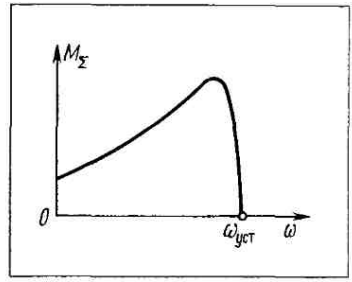


Рис. 4.15

ускоренным, а угловая скорость ω достигала бы значения $\omega_{уст}$ через время T.

Теоретически процесс разгона продолжается бесконечно долго. Однако уже при $t = 3T$ отношение $\omega/\omega_{уст}$ составит 0,95; при $t = 4T$ оно возрастет до 0,98, а при $t = 5T$ получим $\omega/\omega_{уст} = 0{,}995$, т. е. при $t = (4—5)T$ процесс разгона практически закончится. Знание величины T позволяет, таким образом, определить продолжительность разгона агрегата. Отсюда следует очевидный результат: чем больше инертность агрегата (чем больше J_Σ), тем больше T, равное J_Σ/B, тем более продолжительным будет разгон.

Из сказанного следует, что если задать время разгона, то можно определить ту величину J_Σ, при которой процесс разгона действительно займет заданное время. Так, если потребовать, чтобы разгон продолжался бы время $t = t^*$, считая, что он практически завершается через время $t = 5T$, то $5T = t^*$. Отсюда $5(J_\Sigma/B) = t^*$, или $J_\Sigma = (1/5)Bt^*$. Таким образом, используя изложенную методику, можно не только найти закон изменения скорости механизма [см. уравнение (4.38)], но и решить обратную задачу — по заданным условиям движения (например, по времени срабатывания t^*) определить, каковы должны быть параметры механизма (моменты инерции звеньев, а затем и их размеры), т. е. выполнить динамическое проектирование механизма.

В рассматриваемом примере угловая скорость ω начального звена получилась нарастающей без колебаний. Это является результатом того, что моменты, приложенные к валам машин, периодически не изменяются (поскольку они не зависят от угловых координат валов), а приведенный момент инерции агрегата — постоянен.

Во многих случаях линейная аппроксимация зависимости $M_\Sigma(\omega)$ невозможна. Так, например, в случае разгона токарного станка асинхронным двигателем зависимость $M_\Sigma(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 4.15. В этом случае уравнение (4.37) можно решить графически или применить численное интегрирование на ЭВМ (см. § 3.4).

§ 4.8 Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами и моментами, зависящими как от положения, так и от скорости

Рассмотрим более общий случай динамического исследования, когда силы и моменты, приложенные к механизму, являются функциями как *перемещения* (т. е. изменения положения), так и *скорости*, а приведенный момент инерции механизма есть величина *переменная* $J_\Sigma = \text{var}$. Примерами могут служить технологические машины с электроприводом (металлорежущие станки, ковочные прессы и др.), различные приборы с электромагнитным приводом (реле, контакторы, средства автоматической защиты и др.); сюда же относится изучение таких динамических процессов, как запуск двигателей внутреннего сгорания от электростартера, пуск мотор-компрессорных установок, станков и т. п.

Поставленная задача решается путем использования уравнения движения (4.29):

$$\frac{J_\Sigma \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma \text{нач}} \omega_{\text{нач}}^2}{2} = \Sigma A.$$

Один из методов решения этого уравнения предложен М. А. Скуридиным. (См.: *Скуридин М. А.* Определение движения механизма по уравнению кинетической энергии при задании сил функциями скорости и времени. — Науч. тр./АН СССР, 1951, т. XII, вып. 45). Особенность его заключается в том, что работа сил, зависящих только от положения, отделяется от работы сил, зависящих от скорости. Поэтому и приведение этих двух видов сил делается *раздельно*. Покажем метод решения поставленной задачи на конкретном примере пуска в ход кулисного механизма поперечно-строгального станка (рис. 4.16, *а*).

Исходные данные перечислены в начале § 4.6. Так как станок запускается в режиме холостого хода, т. е. когда нет процесса резания, то вся энергия электродвигателя расходуется на увеличение кинетической энергии агрегата и на преодоление потерь трения. Наиболее сильно трение проявляет себя между ползуном *5* и неподвижной направляющей. Силу трения $F_т$ в этой поступательной паре в первом приближении можно принять постоянной (рис. 4.16, *б*). Трение в других кинематических парах учитывать не будем, поскольку оно относительно слабо выражено. Точно так же опустим влияние сил тяжести. Механическая характеристика асинхронного электродвигателя $M(\omega_{\text{рот}})$ изображена на рис. 4.16, *в*. Пусть начальные условия движения таковы: при $t = t_{\text{нач}}$ имеем $\varphi = \varphi_{\text{нач}}, \omega = \omega_{\text{нач}} = 0$.

Выберем в качестве начального звена бóльшее колесо *1* зубчатой передачи. Наметим ряд положений механизма 0, 1, 2, ...; отсчет

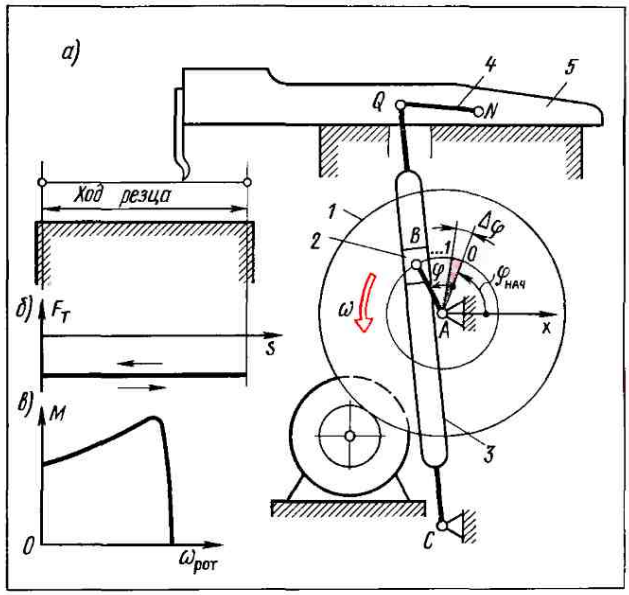


Рис. 4.16

углов φ будем вести от начального (нулевого) положения $\varphi_0 = \varphi_{нач}$ (рис. 4.16, *а*).

Приведем массы звеньев механизма и построим диаграмму $J_\Sigma(\varphi)$ (рис. 4.17). Затем выполним приведение силы трения $F_т$ и ее приведенный момент M_φ представим графически (рис. 4.18). Важно отметить, что M_φ — есть функция *только* координаты φ начального звена. Наконец, приведем момент электродвигателя (рис. 4.19, *а*); приведенный момент M_ω есть функция только угловой скорости ω*. Запишем уравнение движения так:

$$\frac{J_\Sigma \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma нач}\omega_{нач}^2}{2} = A_\varphi + A_\omega, \qquad (4.39)$$

где A_φ — работа приведенного момента M_φ; A_ω — работа приведенного момента M_ω.

Рассмотрим два близких положения: нулевое, для которого заданы φ_0 и ω_0, и первое; они отделены небольшим интервалом $\Delta\varphi$. Для нулевого положения по начальным условиям легко определить величины $J_{\Sigma 0}$, $T_0 = J_{\Sigma 0}\omega_0^2/2$, $M_{\omega 0}$ (см. рис. 4.17, 4.19, *а*). Для первого положения можно определить $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, а по углу φ_1 — и величину $J_{\Sigma 1}$ (рис. 4.17).

Напишем уравнение движения (4.39) для интервала *0-1*, т. е. для $\varphi_0 - \varphi_1$:

$$\frac{J_{\Sigma 1}\omega_1^2}{2} - \frac{J_{\Sigma 0}\omega_0^2}{2} = A_{\varphi 01} + A_{\omega 01}. \qquad (4.40)$$

* В общем случае график M_ω (ω) представляет не одну кривую, а семейство их с параметром φ, т. е. $M_\omega(\varphi, \omega)$.

Работу $A_{\varphi 01}$ определим интегрированием зависимости $M_\varphi(\varphi)$ (рис. 4.18) на участке *0-1*. Работу $A_{\omega 01}$ оценим следующим образом. Так как скорость ω в процессе движения изменяется, то изменяется и приведенный момент M_ω, как это видно из рис. 4.19, *а*. В каждом новом положении скорость ω начального звена и приведенный момент M_ω приобретают новые значения, какие — пока неизвестно. Но приближенно можно принять, что в пределах небольшого интервала *0-1* момент M_ω при увеличении угла φ изменяется линейно и в конце интервала получит некоторое значение $M_{\omega 1}$ (рис. 4.19, *б*); поэтому

$$A_{\omega 01} \approx \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2} \Delta\varphi. \quad (4.41)$$

Ошибка от сделанного приближения будет тем меньше, чем меньше выбранный интервал $\Delta\varphi$.

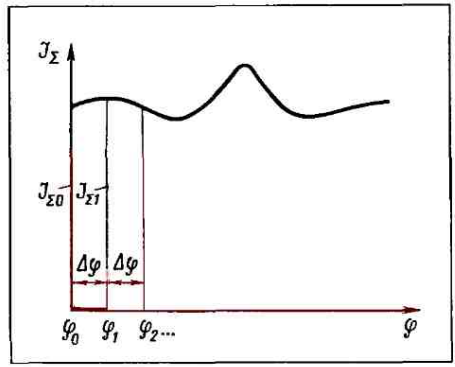


Рис. 4.17

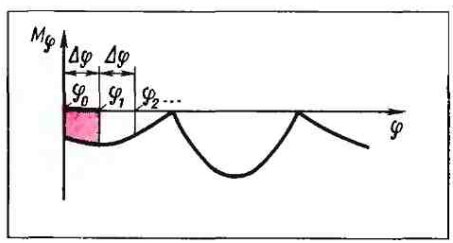


Рис. 4.18

Подставим в уравнение (4.40) величину $A_{\omega 01}$ из формулы (4.41).

Тогда $\frac{J_{\Sigma 1}\omega_1^2}{2} - T_0 = A_{\varphi 01} + \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2}\Delta\varphi$. Отсюда

$$\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega_1^2 - \left(\frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi}\right) = M_{\omega 1}. \quad (4.42)$$

Обозначим сумму, содержащуюся в скобках, буквой B:

$$B_{01} = \frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi}. \quad (4.43)$$

Тогда уравнение приобретает окончательный расчетный вид:

$$\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega_1^2 - B_{01} = M_{\omega 1}. \quad (4.44)$$

Напомним, что в уравнениях (4.43) и (4.44) нужно учитывать знак величин $M_{\omega 0}$, $M_{\omega 1}$ и $A_{\varphi 01}$. В разбираемом примере $A_{\varphi 01} < 0$; кроме того, $T_0 = 0$, так как $\omega_0 = 0$.

Как было указано выше, задавшись интервалом $\Delta\varphi$, можно определить $J_{\Sigma 1}$ и все слагаемые величины B_{01}. Для данного интервала эта величина является вполне определенной и не зависящей от угловой скорости ω. Следовательно, в уравнении (4.44) неизвестными будут только величины ω_1 и $M_{\omega 1}$. При этом $M_{\omega 1}$ строго связан

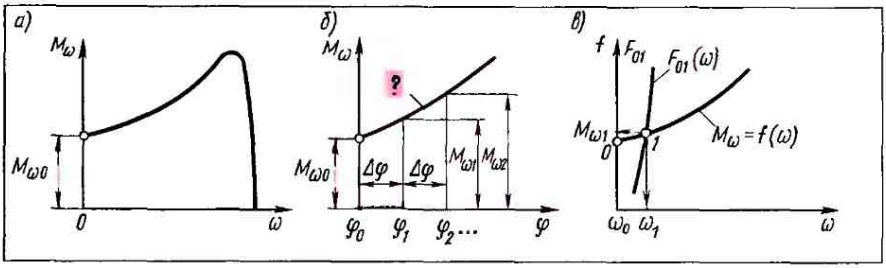


Рис. 4.19

с ω_1 зависимостью $M_\omega(\omega)$ (рис. 4.19, *а*). Поэтому уравнение (4.44) можно решить графическим путем, наложив на характеристику $M_\omega = f(\omega)$ график функции $\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega^2 - B_{01} = F_{01}(\omega)$ (рис. 4.19, *в*).

Если характеристика $M_\omega = f(\omega)$ представлена в виде формулы, то уравнение (4.44) можно решить аналитическим путем.

Определив ω_1 в конце 1-го интервала *0-1*, перейдем ко 2-му интервалу *1-2*. Расчетное уравнение для него имеет вид

$$\frac{J_{\Sigma 2}}{\Delta\varphi}\omega_2^2 - B_{12} = M_{\omega 2}, \tag{4.45}$$

где

$$B_{12} = \frac{2T_1}{\Delta\varphi} + M_{\omega 1} + \frac{2A_{\varphi 12}}{\Delta\varphi}. \tag{4.46}$$

Новое уравнение решается относительно ω_2 таким же способом, как и предыдущее.

Так, последовательно пройдя все интервалы углов φ, получим ряд значений угловой скорости ω, по которым можно построить график искомого закона изменения скорости $\omega = \omega(\varphi)$.

В предыдущих параграфах были рассмотрены динамические процессы, протекающие в машинных агрегатах, механизмы которых имеют одну степень свободы. Динамика механизмов с двумя и более степенями свободы, встречающихся пока значительно реже, еще только разрабатывается. С имеющимися разработками в этой области можно познакомиться в книгах [4, 5].

§ 4.9 Установившийся режим. Неравномерность движения механизма

Перейдем к установившемуся режиму движения механизма. По-прежнему будем рассматривать машинные агрегаты, механизмы которых имеют одну степень свободы. Для этих механизмов установившимся движением называется такое, при котором скорость начального звена (обобщенная

скорость) является *периодической* функцией времени. График $\omega(t)$ при установившемся движении (тахограмма) представлен на рис. 4.20. Как видно, угловая скорость ω периодически колеблется относительно некоторого постоянного среднего значения.

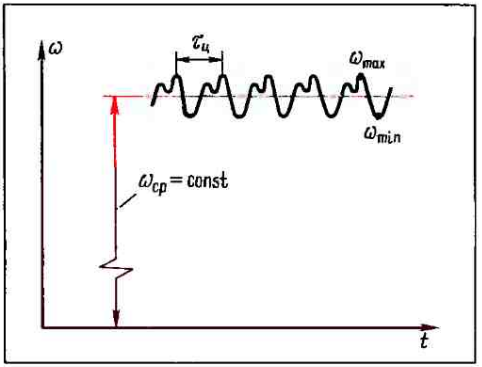


Рис. 4.20

В § 4.1 и 4.4 было отмечено, что силы, приложенные к механизмам целого ряда машин, а также приведенный момент инерции J_Σ *периодически* изменяются. Если к тому же *сумма работ всех сил за период их действия равна нулю,* то угловая скорость начального звена механизма также неизбежно будет изменяться периодически. Указанные выше условия являются необходимыми и достаточными для поддержания установившегося режима.

Период изменения скорости начального звена (обобщенной скорости механизма) называется циклом установившегося движения или сокращенно циклом. Время $\tau_ц$ цикла равно или кратно периоду действия сил. Поэтому при установившемся режиме сумма работ всех сил за цикл равна нулю:

$$\Sigma A_ц = 0. \qquad (4.47)$$

Так как работа сил тяжести за цикл равна нулю, то равенство (4.47) будет выполняться, если работа движущих сил за цикл равна работе всех сил сопротивления за цикл (по модулю):

$$A_д^ц = |A_c^ц|. \qquad (4.48)$$

Уравнение работ (4.48) [или (4.47)] является основным энергетическим уравнением установившегося режима. Из него вытекает [см. уравнение (4.26)], что приращения кинетической энергии механизма за цикл не происходит: $T_{кон} = T_{нач}$, и, следовательно, угловая скорость начального звена в начале и в конце цикла одинакова.

Итак, при установившемся режиме скорость ω начального звена хотя и остается в среднем постоянной, но внутри цикла изменяется, проходя через максимальное ω_{max} и минимальное ω_{min} значения (рис. 4.20). Неравномерность вращения оценивается коэффициентом неравномерности

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min})/\omega_{ср}, \qquad (4.49)$$

где $\omega_{ср}$ — средняя за цикл скорость. Из уравнения (4.49) видно, что δ — характеризует размах колебаний скорости по отношению к ее среднему значению. Чем меньше δ, тем относительно меньше

размах колебаний, тем спокойнее вращается начальное звено. Величина $\omega_{ср}$ (рад/с) подсчитывается по формуле $\omega_{ср}=2\pi n$, в которой n — частота вращения начального звена, $с^{-1}$.

Для каждого вида машин имеется своя допустимая величина коэффициента неравномерности [δ], выработанная практикой; так, для металлорежущих станков это 1/25—1/50, для прядильных машин 1/50—1/100, для дизельного привода электрогенераторов 1/100—1/200.

Коэффициент неравномерности есть величина *весьма малая*, что позволяет принять среднюю величину угловой скорости равной среднему арифметическому из ее максимального и минимального значений:

$$\omega_{ср}=(\omega_{max}+\omega_{min})/2. \qquad (4.50)$$

Совместное решение уравнений (4.49) и (4.50) дает величины максимальной и минимальной скорости:

$$\omega_{max}=\omega_{ср}(1+\delta/2),\ \omega_{min}=\omega_{ср}(1-\delta/2). \qquad (4.51)$$

Как видно из уравнений (4.51), отличие ω_{max} и ω_{min} от $\omega_{ср}$, отнесенное к $\omega_{ср}$, составляет $\pm\delta/2$, т. е. обычно не более $\pm 2\%$.

В установившемся режиме работают очень многие машины (станки, прессы, прокатные станы, лесопильные рамы, текстильные машины, генераторы электрической энергии, компрессоры, насосы и т. д.). Наилучшее условие для работы всех этих машин — абсолютно равномерное вращение их главного вала (принимаемого обычно в качестве начального звена). Колебания скорости главного вала вызывают дополнительные динамические нагрузки, вследствие чего снижается долговечность и надежность машин. Более того, колебания скорости ухудшают рабочий процесс машины. Следовательно, поскольку колебания скорости полностью устранить нельзя, то нужно по возможности хотя бы сократить их размах. Иными словами, величину коэффициента неравномерности δ надо сделать приемлемо малой. Рассмотрим, каким образом можно решить эту задачу.

Все звенья механизма обладают инертностью. Как известно из физики, это свойство состоит в том, что чем инертнее материальное тело, тем медленнее происходят изменения его скорости, вызываемые действием приложенных сил. Поэтому, чтобы получить вращение главного вала машины с циклической неравномерностью, не превышающей требуемой величины, инертность этого вала со всеми жестко связанными с ним деталями надо сделать достаточно большой. Для этого на главном валу машины надо закрепить добавочную массу, выполненную в виде колеса с развитым ободом и называемую м а х о в и к о м. Подбирая его момент инерции, можно обеспечить вращение главного вала машины с заданным коэффициентом неравномерности [δ].

Итак, основное назначение маховика состоит в *ограничении колебаний* угловой скорости в пределах, устанавливаемых величиной коэффициента неравномерности [δ]. Определение момента

инерции маховика по заданным условиям движения (т. е. по заданной величине $[\delta]$) производится в процессе проектирования машины и составляет одну из задач ее *динамического синтеза.*

§ 4.10 Установившийся режим. Динамический синтез и анализ по методу Мерцалова

Пусть дана кинематическая схема механизма. Выберем в качестве начального звена главный вал механизма, совершающий непрерывное вращательное движение. Приведем массы всех звеньев и распределим их по двум группам. В I группу включим обязательно начальное звено с закрепленным на нем маховиком, а также все те звенья, которые связаны с ним постоянным передаточным отношением; во II группу войдут все остальные звенья механизма. Так, для примера, рассмотренного в § 4.4 (рис. 4.9), I группу составит начальное звено *1* и звено *4* (так как $u_{41}=\text{const}$), II группу — звенья *2* и *3*. Заметим, что приведенные моменты инерции звеньев I группы суть величины постоянные, а звеньев II группы — переменные [уравнения (4.22)—(4.25)].

Запишем приведенный момент инерции J_Σ всего механизма следующим образом:

$$J_\Sigma = J_\text{I} + J_\text{II}, \tag{4.52}$$

где $J_\text{I}=\text{const}$, а $J_\text{II}=\text{var}$. Составим расчетную формулу для определения приведенного момента инерции J_I I группы звеньев, необходимого для обеспечения заданного значения $[\delta]$.

Кинетическая энергия I группы звеньев выражается так: $T_\text{I}=\frac{1}{2}J_\text{I}\omega^2$. Угловая скорость ω колеблется внутри цикла между значениями ω_max и ω_min (рис. 4.20), следовательно, колеблется и кинетическая энергия T_I, проходя через максимальное $T_\text{Imax}=\frac{1}{2}J_\text{I}\omega^2_\text{max}$ и минимальное $T_\text{Imin}=\frac{1}{2}J_\text{I}\omega^2_\text{min}$ значения. Подчеркнем, что момент инерции J_I имеет постоянную величину, не зависящую от положения механизма.

Определим наибольший перепад кинетической энергии I группы звеньев: $\Delta T_\text{Iнб}=T_\text{Imax}-T_\text{Imin}$. Подставив значения T_Imax и T_Imin, получим

$$\Delta T_\text{Iнб}=\frac{J_\text{I}\omega^2_\text{max}}{2}-\frac{J_\text{I}\omega^2_\text{min}}{2}=\frac{J_\text{I}}{2}(\omega^2_\text{max}-\omega^2_\text{min})=J_\text{I}\omega_\text{ср}\frac{\omega_\text{max}+\omega_\text{min}}{2}\cdot\frac{\omega_\text{max}-\omega_\text{min}}{\omega_\text{ср}}.$$

Используя формулы (4.49) и (4.50), имеем

$$\Delta T_\text{Iнб}=J_\text{I}\omega^2_\text{ср}\delta,$$

или, решая относительно искомой величины J_I:

$$J_\text{I}=\frac{\Delta T_\text{Iнб}}{\omega^2_\text{ср}[\delta]}. \tag{4.53}$$

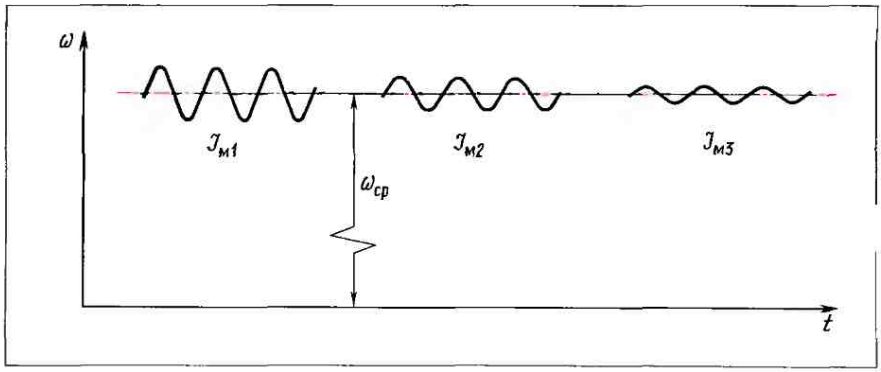


Рис. 4.21

Формула (4.53) является расчетной для определения приведенного момента инерции I группы звеньев, необходимого для обеспечения вращения начального звена с заданной неравномерностью, выраженной коэффициентом [δ], т. е. является уравнением динамического синтеза при установившемся режиме. Заметим, что чем меньше заданное значение [δ], т. е. чем равномернее должно вращаться начальное звено и чем меньше, следовательно, его угловое ускорение, тем больше должен быть необходимый момент инерции J_I, тем массивнее получится маховик. На рис. 4.21 представлены три тахограммы, снятые с одной и той же машины, но при разных маховиках ($J_{м1} < J_{м2} < J_{м3}$).

Коэффициент неравномерности [δ] и частоту вращения n, по которой вычисляют $\omega_{ср} = 2\pi n$, задают при проектировании. Для определения $\Delta T_{Iнб}$ существует несколько методов. Рассмотрим наиболее простой и наглядный метод, предложенный Н. И. Мерцаловым. Отметим, что диаграмма $T_I(\varphi)$, построенная по методу Мерцалова, используется также и в динамическом анализе.

Сначала рассмотрим задачу динамического синтеза, т. е. определим необходимое значение J_I по заданному коэффициенту неравномерности [δ].

Кинетическая энергия T всех подвижных звеньев механизма состоит из слагаемых T_I и T_{II}: $T = T_I + T_{II}$. Отсюда:

$$T_I = T - T_{II}. \tag{4.54}$$

Кинетическую энергию T выразим из уравнения (4.26):

$$T = \Sigma A + T_{нач}, \tag{4.55}$$

тогда

$$T_I = \Sigma A + T_{нач} - T_{II}. \tag{4.56}$$

По уравнению (4.56) для одного полного цикла строят диаграмму $T_I(\varphi)$ и по этой диаграмме находят величину $\Delta T_{Iнб}$, входящую в расчетное уравнение динамического синтеза (4.53).

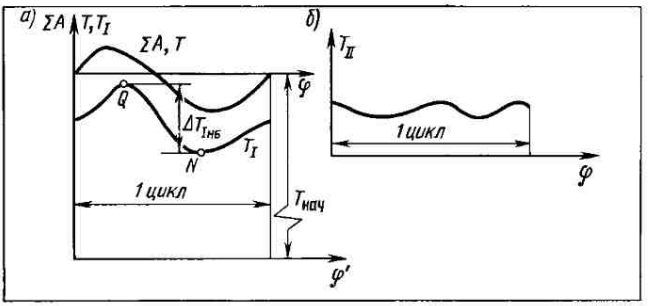


Рис. 4.22

Проиллюстрируем сказанное графиками. Пусть известны диаграмма $\Sigma A(\varphi)$ (верхняя кривая на рис. 4.22, *а*, построенная относительно оси φ) и диаграмма $T_{II}(\varphi)$ (рис. 4.22, *б*) кинетической энергии II группы звеньев, т. е. тех, приведенные моменты инерции которых переменны. Согласно уравнению (4.56) прибавим к сумме работ ΣA значение кинетической энергии $T_{нач}$ всего механизма в начале цикла. Для этого сместим ось φ на величину $T_{нач}$ вниз (рис. 4.22, *а*), после чего верхняя кривая на рис. 4.22, *а* будет относительно оси φ' изображать кинетическую энергию T всего механизма, как это следует из уравнения (4.55). Вычтем согласно уравнению (4.54) из кинетической энергии T кинетическую энергию T_{II} и получим нижнюю кривую на рис. 4.22, *а*. Нижняя кривая, отнесенная к оси φ', и является кривой кинетической энергии $T_I(\varphi)$. Отметим на этой кривой точку максимума Q и точку минимума N и по ним определим наибольший перепад кинетической энергии $\Delta T_{Iнб}$, необходимый для подсчета J_I по уравнению (4.53).

Обратим внимание, что для подсчета J_I по формуле (4.53) надо знать не саму кинетическую энергию T_I, а ее наибольшее изменение $\Delta T_{Iнб}$. Но $\Delta T_{Iнб}$ не зависит от начального значения $T_{нач}$, и, следовательно, для определения $\Delta T_{Iнб}$ не нужно знать числового значения $T_{нач}$, т. е. не нужно выявлять положение сдвинутой оси абсцисс φ'.

Составим порядок определения момента инерции маховика по методу Мерцалова графическим способом:

приведение сил и моментов; построение диаграммы суммарного приведенного момента $M_\Sigma(\varphi)$ (см. § 4.3);

построение диаграммы $\Sigma A(\varphi)$ способом графического интегрирования [см. уравнение (4.28)];

приведение масс; построение диаграммы $J_{II}(\varphi)$ (см. § 4.4);

определение кинетической энергии T_{II} по формуле $T_{II}=\frac{1}{2}J_{II}\omega_{ср}^2$ и переход к диаграмме $T_{II}(\varphi)$;

построение диаграммы кинетической энергии $T_I(\varphi)$ по уравнению (4.56) (без выявления положения сдвинутой оси абсцисс) и определение $\Delta T_{Iнб}$;

подсчет J_I по уравнению (4.53) и определение момента инерции маховика.

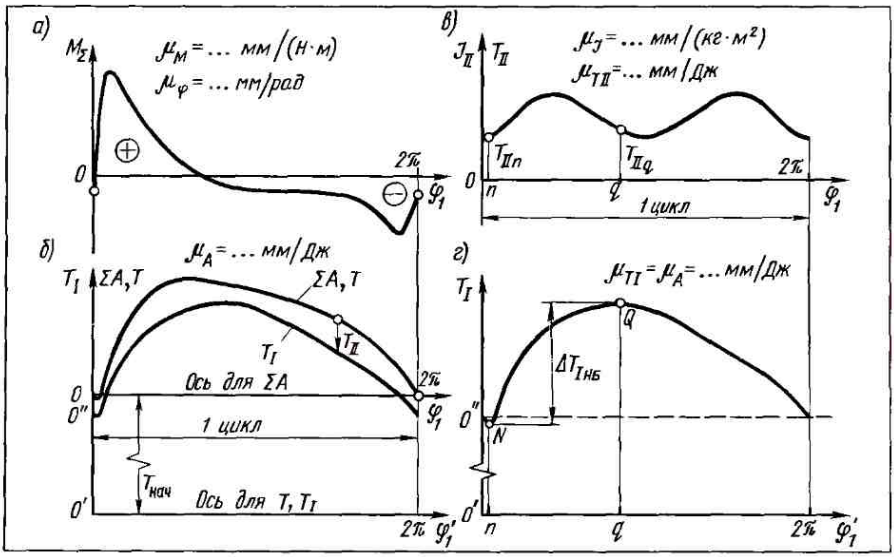


Рис. 4.23

В таком же порядке нужно вести расчет и численным способом с применением ЭВМ.

На рис. 4.23 изображены графики, выполненные для расчета маховика ДВС по методу Мерцалова. Пусть нагрузкой на ДВС будет электрогенератор. Механические характеристики, необходимые для расчета, задаются в функции перемещения (рис. 4.3 и 4.4, *б*). Начальным звеном является звено *I*.

Приведение движущей силы $F_д$ и момента сопротивления $M_{рм}$ сделано в § 4.3 (рис. 4.8, *а, б*). Так как маховик может выполнять свою роль только в условиях установившегося режима, то при его расчете непременно должно быть *соблюдено основное энергетическое уравнение* (4.48): $A_д^ц = |A_c^ц|$. Это уравнение обусловливает обязательное соотношение между работами движущих сил и сил сопротивления, а именно: $\int_0^{2\pi} M_д d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} |M_c| d\varphi_1$. Отсюда, учитывая, что $M_c = \text{const}$, получим

$$|M_c| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_д d\varphi_1.$$

Подсчитав $|M_c|$, нужно определить $M_\Sigma = M_д + M_c$ (рис. 4.8, *д* и 4.23, *а*)*. Признаком установившегося режима на рис. 4.23, *а* является то, что площадки над осью абсцисс и под ней равновелики, а

* При исследовании установившегося режима начало цикла может быть выбрано в любом положении начального звена; выберем в качестве начального (нулевого) положения то, в котором поршень *3* занимает крайнюю правую позицию (рис. 4.6, *а* и 4.3).

на рис. 4.23, *б* — то, что ордината кривой ΣA в конце цикла равна нулю.

Так как механизм во взятом примере (рис. 4.6, *а*) такой же, как и рассмотренный в § 4.4, то, используя формулы (4.22)—(4.25), заключаем, что в состав I группы входят звенья *1* и *4*, а в состав II группы — звенья *2* и *3* (см. начало параграфа). График приведенного момента инерции $J_{\text{II}}=J_2^{\text{пр}}+J_3^{\text{пр}}$ представлен на рис. 4.23, *в*.

Кинетическая энергия T_{II} определяется уравнением $T_{\text{II}}=\frac{\omega_1^2}{2}J_{\text{II}}$. Пока задача динамического синтеза не завершена, точное текущее значение ω_1 еще не известно. Но вследствие малости коэффициента неравномерности справедливо приближенное равенство $\omega_1\approx\omega_{\text{ср}}$ (см. § 4.9). Поэтому можно принять $T_{\text{II}}\approx\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2}J_{\text{II}}$. Так как $\omega_{\text{ср}}^2/2=$ $=\text{const}$, то график $J_{\text{II}}(\varphi_1)$ представляет собой одновременно и график $T_{\text{II}}(\varphi_1)$, но выполненный в другом масштабе (рис. 4.23, *в*); соотношение между масштабами таково: $\mu_{T\text{II}}=2\mu_J/\omega_{\text{ср}}^2$. Таким образом, метод Мерцалова не является, строго говоря, точным, но вследствие малости ошибки вполне пригоден для практических расчетов.

Поскольку T_{II} подсчитано не вполне точно, график $T_{\text{I}}(\varphi_1)$ (рис. 4.23, *б* и 4.23, *г*), а вместе с ним и наибольший перепад $\Delta T_{\text{Iнб}}$ кинетической энергии (рис. 4.23, *г*) содержат некоторую ошибку. При $[\delta]>0{,}10$ можно сделать уточнение величины $\Delta T_{\text{Iнб}}$ по формуле, предложенной Д. М. Лукичевым: $\Delta T_{\text{Iнб}}^*=\Delta T_{\text{Iнб}}-[\delta](T_{\text{II}n}+T_{\text{II}q})$ (см.: *Лукичев Д. М.* Расчет маховика машины. — Вопросы теории механизмов и машин, 1953, № 23). В этой формуле $T_{\text{II}n}$ и $T_{\text{II}q}$ — значения кинетической энергии T_{II} в тех положениях n и q механизма, в которых кинетическая энергия T_{I} проходит свои крайние экстремумы.

Определив $\Delta T_{\text{Iнб}}$, по уравнению (4.53) динамического синтеза при установившемся режиме подсчитываем J_{I}, а затем $J_{\text{мах}}$. Во многих случаях момент инерции маховика $J_{\text{мах}}$ преобладает над остальными моментами инерции I группы звеньев. Поэтому всякие изменения кинетической энергии T_{I} происходят прежде всего за счет изменений кинетической энергии маховика.

Рассмотрим роль маховика. В процессе расширения газов (рис. 4.3) ДВС вырабатывает энергии больше, чем потребляет генератор. Избыток ее идет на увеличение T_{I} (участок NQ на рис. 4.23, *г*), т. е. прежде всего на увеличение кинетической энергии маховика. Во время процесса сжатия газов ДВС сам потребляет энергию на совершение работы сжатия. Генератор в это время также продолжает забирать энергию с вала ДВС. Оба эти расхода энергии возмещаются за счет уменьшения T_{I} (участок QN на рис. 4.23, *г*), т. е. в основном за счет уменьшения кинетической энергии маховика.

Таким образом, маховик *то накапливает* кинетическую энергию, когда работа двигателя оказывается в избытке, *то отдает* часть ее. Чем больше $J_{\text{мах}}$ (а следовательно, и J_{I}), тем выше аккумулирующая способность маховика, тем меньше будут колебания ω_1 при

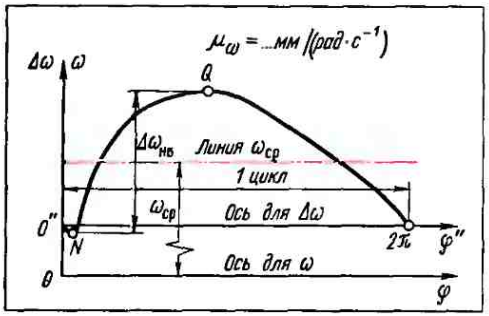


Рис. 4.24

колебаниях потока энергии, тем равномернее будет вращаться вал машинного агрегата, что видно из уравнения (4.53), решенного относительно δ:

$$\delta = \frac{\Delta T_{1нб}}{\omega_{ср}^2 J_1}.$$

Выше было изложено решение задачи динамического синтеза, состоящей в определении момента инерции маховика $J_{мах}$, обеспечивающего требуемое условие движения, заданное коэффициентом неравномерности [δ]. Теперь решим обратную задачу — задачу динамического анализа: известны все характеристики механизма, в том числе и $J_{мах}$, требуется определить закон движения, а затем и фактическое значение δ. Решение этой задачи также основано на применении диаграммы $T_1(\varphi)$, которая строится по методу Мерцалова (рис. 4.23).

Проведем через начальную точку O'' кривой $T_1(\varphi_1)$ ось (показана на рис. 4.23, *г* штрихами). Относительно этой новой оси кривая изобразит изменение кинетической энергии ΔT_1, которое выражается так:

$$\Delta T_1 = T_1 - T_{1нач} = \frac{J_1\omega^2}{2} - \frac{J_1\omega_{нач}^2}{2} = J_1\frac{\omega+\omega_{нач}}{2}(\omega-\omega_{нач}).$$

Так как неравномерность вращения начального звена заведомо мала, то можно приближенно принять $(\omega+\omega_{нач})/2 \approx \omega_{ср}$. Тогда, обозначив $\omega-\omega_{нач}=\Delta\omega$, получим

$$\Delta J_1 \approx J_1\omega_{ср}\Delta\omega.$$

Но $J_1\omega_{ср}=\text{const}$. Следовательно, при установившемся движении с малым значением коэффициента неравномерности δ изменение кинетической энергии ΔT_1 приблизительно пропорционально изменению угловой скорости начального звена. Поэтому кривая на рис. 4.23, *г* одновременно изображает как $\Delta T_1(\varphi)$, так и $\Delta\omega(\varphi)$, но в разных масштабах; соотношение между масштабами таково: $\mu_\omega = \mu_{T1}J_1\omega_{ср}$. График $\Delta\omega(\varphi)$ изображен на рис. 4.24.

Коэффициент неравномерности δ определяют по формуле

$$\delta = \frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_{ср}} = \frac{\Delta\omega_{нб}}{\omega_{ср}}.$$

Угловое ускорение ε начального звена при установившемся движении подсчитывают по уравнению (4.33), в котором $J_\Sigma = J_1 + J_{II}$. Значения M_Σ и J_{II} берут с соответствующих диаграмм (рис. 4.23, *а, в*); $\omega \approx \omega_{ср}$ Производную $\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi} = \frac{dJ_{II}}{d\varphi}$ определяют графическим диф-

ференцированием функции $J_{II}(\varphi)$ (поскольку $J_I = \text{const}$) так, как указано в § 4.5. В величинах M_Σ и $\frac{dJ_{II}}{d\varphi}$ нужно учитывать знак.

Угловое ускорение начального звена можно также выразить следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\omega.$$

Тогда ε определяют по диаграмме $\omega(\varphi)$ (рис. 4.24), применяя графическое или численное дифференцирование.

§ 4.11 Установившийся режим. Динамический анализ и синтез с учетом влияния скорости на действующие силы

Для динамического анализа и синтеза, сделанного в § 4.10 по методу Мерцалова, характерен неучет влияния скорости на действующие силы и моменты. Так, в примере проектирования маховика для ДВС (см. § 4.10) момент сопротивления электрогенератора был задан в виде характеристики $M_{рм}(\varphi)$ (рис. 4.4, *б*), а не характеристики $M_{рм}(\omega)$ (рис. 4.2). Такой же неучет влияния скорости свойствен и некоторым другим методам динамического синтеза (например, методам Артоболевского, Виттенбауэра [1, 2]).

Пренебрежение влиянием скорости на силы и моменты допустимо по той причине, что скорость начального звена вследствие малой неравномерности его вращения отклоняется от своего среднего значения в большинстве случаев не более чем на $\pm 2\%$ (см. § 4.9). Поэтому изменения сил и моментов, приложенных к начальному звену и зависящих от скорости, также будут небольшими, и ими можно пренебречь.

Однако существуют машины, в которых влияние скорости на силы и моменты выражено очень резко. К ним относятся, например, асинхронные и шунтовые двигатели, получившие наиболее широкое распространение в промышленном электроприводе. Механические характеристики этих машин — в их рабочей части — представляют собой практически прямую линию, расположенную почти вертикально (например, рис. 4.1, 4.5, *б*). Это значит, что даже небольшие колебания угловой скорости вызывают заметные изменения движущего момента. Поэтому следует ожидать, что *резко выраженная* зависимость момента от скорости должна оказать свое влияние на результаты динамического анализа и синтеза.

Рассмотрим агрегат, состоящий из асинхронного электродвигателя *ДВ* и рабочей технологической машины *РМ*, связанных передачей *П* (рис. 4.25). Примем вал рабочей машины в качестве начального звена и сделаем приведение сил и масс. Характеристики электродвигателя и рабочей машины, полученные после приведения, показаны на рис. 4.26, *а, б*.

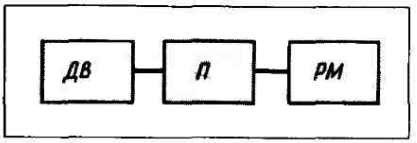


Рис. 4.25

Рабочую часть характеристики двигателя аппроксимируем прямой

$$M_д = A - B\omega. \qquad (4.57)$$

Из (4.57) следует, что увеличение скорости ω вызывает уменьшение движущего момента. В § 4.1 такое свойство двигателя было названо саморегулированием. Согласно (4.57) саморегулирование будет тем сильнее выражено, чем больше коэффициент B. Отметим также, что момент электродвигателя $M_д = \text{invar}(\varphi)$ (см. § 4.1).

Момент сопротивления $M_м$ многих технологических машин существенно зависит от угла φ (рис. 4.26, *б*), но мало зависит от ω. Поэтому примем $M_м = \text{invar}(\omega)$. Представим момент $M_м$ как сумму двух слагаемых: постоянного (constante) $M_{мc}$ и переменного (variable) $M_{мv}$:

$$M_м = M_{мc} + M_{мv}. \qquad (4.58)$$

Слагаемое $M_{мc}$ есть среднее за цикл значение момента $M_м$ рабочей машины: $M_{мc} = M_{ср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_м d\varphi = \text{const}$. Переменное слагаемое есть функция только обобщенной координаты φ: $M_{мv} = M_{мv}(\varphi)$; при этом $\int_0^{2\pi} M_{мv} d\varphi = 0$.

Суммарный приведенный момент инерции всего машинного агрегата также представим как сумму двух слагаемых (рис. 4.26, *в*)

$$J_\Sigma = J_c + J_v, \qquad (4.59)$$

где $J_c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_\Sigma d\varphi = \text{const}$. В состав J_c входит слагаемым момент инерции маховика $J_{мах}$. Переменное слагаемое $J_v = J_v(\varphi)$*. Для уравнения движения понадобится производная $dJ_\Sigma/d\varphi$. Из (4.59) следует, что $dJ_\Sigma/d\varphi = dJ_v/d\varphi$. График $dJ_v/d\varphi = J'_v$ в функции от обобщенной координаты φ представлен на рис. 4.26, *г*. Так как $J_v = J_v(\varphi)$ есть функция периодическая, то $\int_0^{2\pi} J'_v d\varphi = 0$.

Напишем уравнение движения машинного агрегата в дифференциальной форме [см. уравнение (4.31)]:

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\omega^2 = M_д + M_м.$$

* Следует обратить внимание, что разложение J_Σ на два слагаемых в уравнении (4.59) сделано несколько иначе, чем в уравнении (4.52), что продиктовано математическими соображениями.

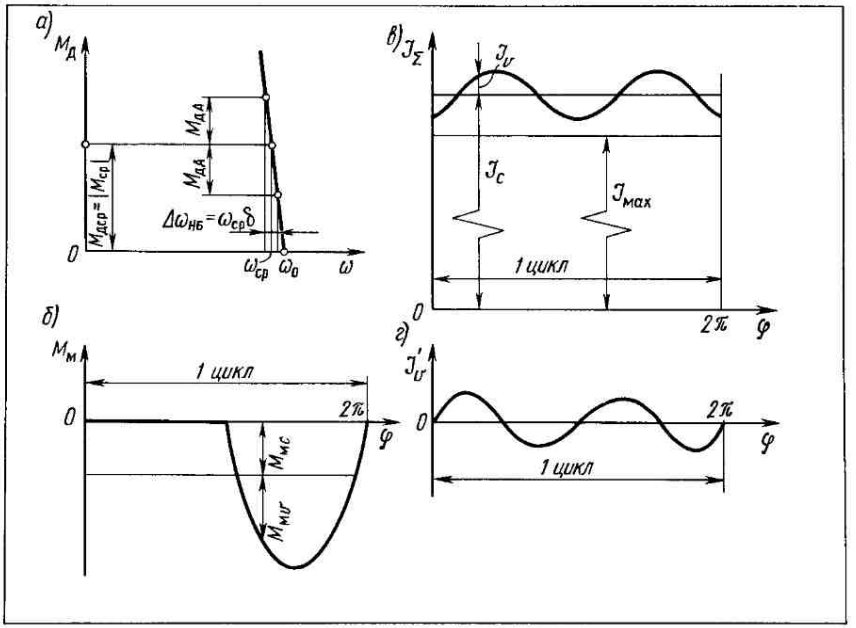


Рис. 4.26

С учетом уравнений (4.57)—(4.59) после несложных преобразований получим

$$J_c\dot{\omega} + B\omega = (A + M_{ср}) + (M_{мv} - J_v\dot{\omega} - \frac{1}{2}J'_v\omega^2). \qquad (4.60)$$

Двучлен $A + M_{ср} = L_c$ есть величина постоянная. Многочлен $M_{мv} - J_v\dot{\omega} - J'_v\omega^2/2 = L_v$ периодически и явно зависит от φ, т. е. $L_v = L_v(\varphi)$. Изменения L_v в течение цикла вызывают внутрицикловые колебания угловой скорости ω начального звена. Поэтому назовем $L_v(\varphi)$ вынуждающим моментом. Посредством него математически выражается влияние на закон движения начального звена как колебаний момента сопротивления $M_{мv}$ рабочей машины, так и неравномерного движения звеньев (ползунов, шатунов, коромысел, кулис и т. п.), связанных с начальным звеном переменным передаточным отношением. Вынуждающий момент характеризует виброактивность рабочей машины.

Так как механизм движется с малым коэффициентом неравномерности, то $\omega \approx \omega_{ср}$, а угловое ускорение ε есть величина малая. Поэтому, допуская небольшую ошибку, многочлен $L_v(\varphi)$ можно записать так: $L_v(\varphi) = M_{мv} - J'_v\omega^2_{ср}/2$.

Разложим вынуждающий момент $L_v(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$L_v(\varphi) = L_{v1}(\varphi) + L_{v2}(2\varphi) + L_{v3}(3\varphi) + \ldots . \qquad (4.61)$$

В ряду удержим только 1-ю гармонику L_{v1}, поскольку обычно имен-

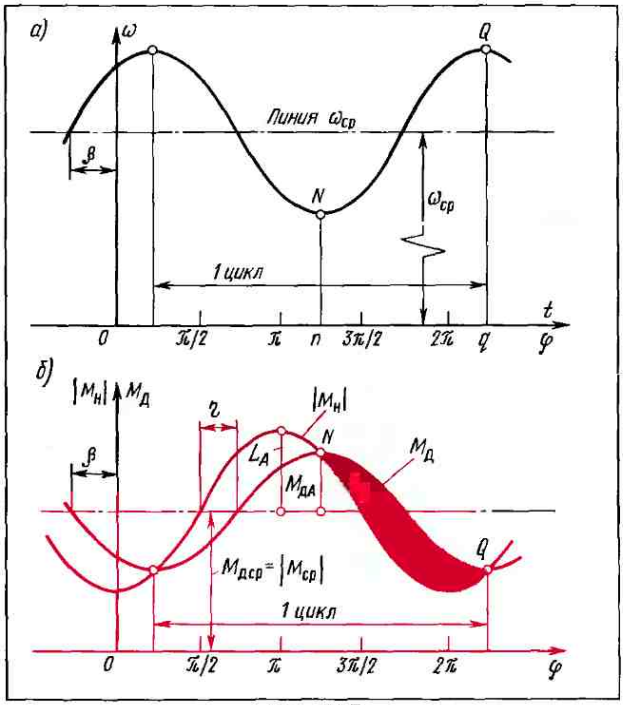


Рис. 4.27

но она бывает наиболее влиятельной. Тогда $L_v(\varphi) = L_A \cos\varphi$. Так как при вращении с малой неравномерностью $\varphi \approx \omega_{ср} t$, то

$$L_v(\varphi) = L_A \cos(\omega_{ср} t) = L_v(t). \qquad (4.62)$$

Решим задачу динамического анализа, т. е. по известным характеристикам механизма определим закон его движения. Для этого подставим выражение $L_v(t)$ в уравнение (4.60):

$$J_c \dot{\omega} + B\omega = (A + M_{ср}) + L_A \cos(\omega_{ср} t). \qquad (4.63)$$

Для установившегося режима решение уравнения (4.63) имеет вид

$$\omega = \omega_{ср} + \frac{L_A \cos\beta}{J_c \omega_{ср}} \sin(\omega_{ср} t + \beta), \qquad (4.64)$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = B/(J_c \omega_{ср}), \qquad (4.65)$$

$$\omega_{ср} = (A + M_{ср})/B. \qquad (4.66)$$

Напомним, что $M_{ср} < 0$. График колебаний угловой скорости относительно ее среднего уровня изображен на рис. 4.27, *а*.

Используя уравнения (4.49) и (4.64), определим коэффициент неравномерности δ вращения вала рабочей машины

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min})/\omega_{ср} = 2L_A \cos\beta/(J_c \omega_{ср}^2).$$

Косинус угла β найдем, используя (4.65), после чего получим

$$\delta = 2L_A/(\omega_{ср}\sqrt{(J_c\omega_{ср})^2 + B^2}). \tag{4.67}$$

Зная уравнение (4.64) $\omega = \omega(\varphi)$, составим выражение для движущего момента

$$\begin{aligned} M_д = A - B\omega = (A - B\omega_{ср}) - \frac{BL_A\cos\beta}{J_c\omega_{ср}}\sin(\varphi + \beta) = \\ = (A - B\omega_{ср}) - M_{дA}\sin(\varphi + \beta). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Таким образом, движущий момент в течение цикла будет изменяться по гармоническому закону, колеблясь около своего среднего значения $M_{дср} = A - B\omega_{ср}$. Используя (4.66), заключаем, что это среднее значение равно абсолютной величине среднего значения $|M_{ср}|$ момента сопротивления, что и следовало ожидать, имея в виду установившийся режим движения. Амплитуду $M_{дA}$ колебаний движущего момента легко получить из рис. 4.26, *а*:

$$M_{дA} = \delta B\omega_{ср}/2. \tag{4.69}$$

Результаты, представленные уравнениями (4.64) и (4.68), можно уточнить, если проделать аналогичные действия, взяв 2-ю гармонику L_{v2} ряда Фурье (4.61), затем 3-ю L_{v3} и т. д., и, используя принцип суперпозиции, все полученные решения алгебраически сложить. После сложения функции $\omega(\varphi)$ и $M_д(\varphi)$ не получатся уже гармоническими. Они будут отражать характерные особенности рабочей машины и ее механизма. При использовании ЭВМ применение принципа суперпозиции не составит труда.

Рассмотрим динамику вращательного движения главного вала для случая $L_v \approx L_{v1}$. Уравнение (4.63) запишем в следующем виде:

$$J_c\dot{\omega} = M_д + (M_{ср} + L_v).$$

Двучлен $M_{ср} + L_v$ содержит момент сопротивления $M_м$ рабочей машины; назовем этот двучлен нагрузочным моментом $M_н = M_н(\varphi)$. Тогда

$$J_c\dot{\omega} = M_д + M_н. \tag{4.70}$$

Рис. 4.28 является иллюстрацией уравнения (4.70).

Изобразим функции $M_д(\varphi)$ и $|M_н(\varphi)|$ графически (рис. 4.27, *б*). Обе кривые сдвинуты друг относительно друга на фазовый угол $\eta = 90° - \beta$. Имея в виду уравнение (4.65), получим

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{ctg}\beta = J_c\omega_{ср}/B. \tag{4.71}$$

Нетрудно заметить, что закрашенная площадка между точками N и Q (рис. 4.27, *б*) изображает избыточную работу движущего момента, которая воплощается в наибольший перепад кинетической энергии $\Delta T_{пб} = \frac{1}{2}J_c\omega^2_{max} - \frac{1}{2}J_c\omega^2_{min}$.

Из формул (4.69), (4.67) и (4.71) следует, что чем сильнее выражено саморегулирование [т. е. чем больше коэффициент B в

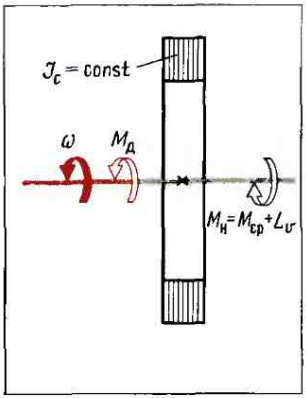


Рис. 4.28

уравнении (4.57)], тем больше амплитуда $M_{дA}$ и тем меньше угол η, т. е. тем ближе располагается кривая $M_д(\varphi)$ к кривой $|M_н(\varphi)|$. Такой же вывод будет справедлив и для периодического процесса, вынуждаемого 2-й, 3-й и более высокими гармониками разложения в ряд Фурье [уравнение (4.61)]. А это значит, что *чем резче* выражено саморегулирование, тем ближе друг к другу (в любом положении механизма) значения моментов $M_д$ и $|M_н|$, т. е. *тем меньше* тот наибольший перепад кинетической энергии, который должен воспринять маховик.

Сделав этот важный вывод, перейдем к решению задачи динамического синтеза, т. е. к определению момента инерции J_c, обеспечивающего заданный коэффициент неравномерности $[\delta]$. Для этого из уравнения (4.67) определим искомую величину J_c:

$$J_c = \frac{2L_A}{[\delta]\omega_{ср}^2}\sqrt{1-\left([\delta]\frac{B\omega_{ср}}{2L_A}\right)^2}. \qquad (4.72)$$

Если расчет маховика ведется классическими методами Мерцалова, Виттенбауэра, Артоболевского, т. е. не учитывается влияние скорости на $M_д$, то $B=0$ [см. уравнение (4.57)]. Тогда из уравнения (4.72) получим $J_c = J_{c0} = 2L_A/([\delta]\omega_{ср}^2)$.

Преобразуем подкоренное выражение в уравнении (4.72). Для этого введем коэффициент саморегулирования $k = \omega_{ср}/\omega_0$ (см. рис. 4.26, *а*). Если характеристика $M_д(\omega)$ — горизонталь, т. е. $M_д$ не зависит от скорости, то $k=0$; если $M_д(\omega)$ — вертикаль, то $k=1$. Таким образом, $0 \leqslant k \leqslant 1$, и чем сильнее выражено саморегулирование, тем больше k.

Из рис. 4.26, *а* следует, что $B\omega_{ср} = \frac{k}{1-k}M_{д\,ср}$. Подставив $B\omega_{ср}$ под корень уравнения (4.72), получим

$$J_c = J_{c0}\sqrt{1-\frac{[\delta]^2}{\gamma^2}\left(\frac{k}{1-k}\right)^2} = J_{c0}\alpha, \qquad (4.73)$$

где $\gamma = 2L_A/|M_{ср}|$ — коэффициент, показывающий неравномерность вынуждающего момента $L_v(\varphi)$, а α — поправочный коэффициент.

На рис. 4.29 по уравнению (4.73) изображен график необходимого момента инерции $J_c(k)$ при заданных L_A, γ, $\omega_{ср}$, $[\delta]$. Если момент $M_д$ не зависит от скорости ($k=0$), то $J_c = J_{c0}$. Если момент $M_д$ есть функция скорости, т. е. $k \neq 0$, но $0 < k < k'$ (рис. 4.29), то график $J_c(k)$ протекает почти горизонтально, т. е. $J_c \approx J_{c0}$. Умеренное саморегулирование *практически не влияет* на необходимую величину J_c. Это значит, что для очень большого числа машинных агре-

гатов, у которых саморегулирование выражено не резко ($k \leqslant k'$), т. е. характеристика $M(\omega)$ далека от вертикали (рис. 4.2, 4.5, *в*), маховик можно проектировать, используя классические методы.

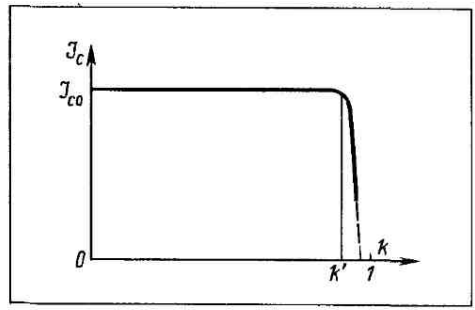


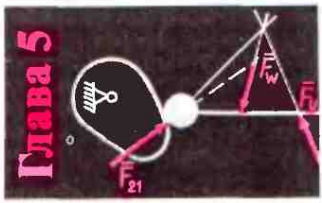
Рис. 4.29

Если же саморегулирование выражено резко ($k > k'$), то в протекании кривой $J_c(k)$ наступает крутой спад (рис. 4.29). При $[\delta] = 1/20$, $\gamma = 2$ (пример, типичный для многих рабочих машин) спад начинается близ точки с абсциссой $k' = 0{,}9$, для которой $J_c = 0{,}974 J_{c0}$. Если $k > k'$, то даже небольшое обострение саморегулирования (т. е. небольшое увеличение коэффициента k) приводит к резкому снижению необходимой величины J_c, т. е. к уменьшению проектируемого маховика. Такой результат имеет большое практическое значение: если привод рабочих машин осуществляется от асинхронных или шунтовых электродвигателей, характеристика которых близка к вертикали (рис. 4.1, 4.5, *б*) и у которых, следовательно, $k > 0{,}9$, то необходимый момент инерции явно меньше J_{c0}. Значит, в указанных случаях классические методы динамического синтеза дают завышенный результат. Этим и объясняется тот непонятный, на первый взгляд, факт, что валы различных станков, механических пил, прессов и т. п. рабочих машин, приводимых от асинхронных двигателей и имеющих сравнительно небольшие маховики, вращаются тем не менее с небольшой неравномерностью. Расчет с учетом влияния *резко выраженного* саморегулирования (когда $k > k'$) позволяет сознательно создавать маховики *с небольшим* моментом инерции, а следовательно, компактные и с меньшей металлоемкостью.

Выше было рассмотрено влияние саморегулирования на значение J_c в случае гармонического нагружения $L_v(\varphi)$ [см. уравнение (4.72)]. Можно показать, что и при других, более сложных видах нагружения характер влияния саморегулирования остается таким же, как он изображен на рис. 4.29.

Величина J_c, подсчитанная по уравнению (4.72), есть постоянная составляющая момента инерции, приведенного к выходному валу передачи $П$ (рис. 4.26, *в*). Определив J_c и зная приведенные моменты инерции звеньев двигателя, передачи и рабочей машины, находим $J_{мах}$, т. е. ту часть J_c, которая приходится на маховик.

В рассматриваемом примере (рис. 4.25) источником виброактивности является рабочая машина *РМ*, а не двигатель *ДВ*. Поэтому маховик следует располагать именно на валу рабочей машины, т. е. на валу, *прилегающем к источнику виброактивности,* а не на валу, удаленном от него, т. е. не на валу электродвигателя. Подробное исследование этого явления сделано М. З. Коловским (См.: *Коловский М. З.* Динамика машин. Л., 1980).



Силовой расчет механизмов

Во время движения механизма в его кинематических парах действуют силы, являющиеся силами взаимодействия между звеньями. Напомним (см. § 4.1), что эти силы относятся к категории внутренних по отношению к механизму в целом. Нагруженность кинематических пар силами взаимодействия является важной динамической характеристикой механизма. Знание сил в кинематических парах необходимо для расчета звеньев механизма на прочность, жесткость, вибростойкость, износоустойчивость, для расчетов подшипников на долговечность и для проведения других подобных расчетов, выполняемых при проектировании механизма. Определение внутренних сил, а также — в целом ряде задач — сил и пар сил, приложенных к механизму извне, составляет содержание его силового расчета.

§ 5.1 Общая методика силового расчета

Изложение методов силового расчета в данной книге будет сделано только для *плоских* механизмов. При этом примем, что механизм имеет *плоскость симметрии*, которая параллельна плоскости движения и в которой действуют *все* приложенные силы. Указанному условию отвечает очень большое число механизмов энергетических, технологических, транспортных машин и различных приборов.

Силовой расчет следует выполнять с учетом *ускоренного* движения звеньев, так как их ускорения в современных быстроходных машинах весьма значительны. Неучет ускоренного движения звеньев вызовет недооценку нагружающих сил, что может привести к ошибкам в дальнейших инженерных расчетах.

Учет ускоренного движения звеньев выполним методом кинетостатики, *условно* приложив к каждому подвижному звену механизма главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции. Тогда для каждого звена можно записать три уравнения кинетостатики:

$$\sum_i F_x + \Phi_{ix} = 0; \tag{5.1}$$

$$\sum_i F_y + \Phi_{iy} = 0; \tag{5.2}$$

$$\sum_i M_O(\bar{F}) + \sum_i M + M_O(\bar{\Phi}_i) + M_{\Phi i} = 0. \tag{5.3}$$

Два алгебраических уравнения (5.1) и (5.2) могут быть заменены одним эквивалентным векторным уравнением сил:

$$\sum_i \bar{F} + \bar{\Phi}_i = 0.$$

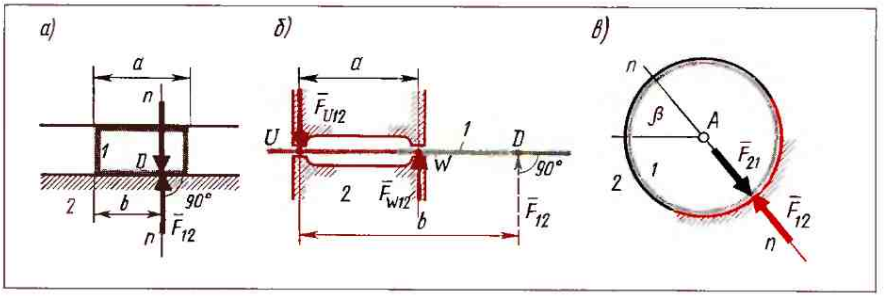


Рис. 5.1

Главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции определяются по уравнениям

$$\bar{\Phi}_i = -m_i\bar{a}_{Si};\ M_{\Phi i} = -J_{iS}\varepsilon_i. \qquad (5.4)$$

Уравнение $M_{\Phi i} = -J_{iS}\varepsilon_i$ предполагает, что главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}_i$ приложен к центру масс S_i.

Следует подчеркнуть, что никакой силы $\bar{\Phi}_i$ и никакой пары сил $M_{\Phi i}$ к звену i в действительности не приложено. Главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции *не имеют никакого физического содержания* и в расчетных уравнениях (5.1) — (5.3) выполняют роль не более, чем чисто математических величин, посредством которых учитывается влияние ускоренного движения звеньев.

Силы в кинематических парах, являющиеся искомыми, определяют из уравнений (5.1) — (5.3), в которых они содержатся в составе сумм $\sum_i F_x$, $\sum_i F_y$, $\sum_i M_O(\bar{F})$. Поскольку значения Φ_{ix}, Φ_{iy}, $M_{\Phi i}$ зависят от ускорений, искомые силы также зависят от ускорений. Следовательно, для проведения силового расчета надо знать закон движения механизма.

Рассмотрим действие сил в кинематических парах.

Сила взаимодействия звеньев, образующих низшую пару, представляет собой равнодействующую элементарных сил, распределенных по поверхности соприкосновения звеньев. Как известно из теоретической механики, сила взаимодействия двух соприкасающихся тел *при отсутствии трения* направлена *по общей нормали* к их поверхности.

В поступательной паре сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, направлена по нормали $n-n$ к поверхности соприкосновения звеньев (рис. 5.1, *а*). Модуль силы $\bar{F}_{12}$ и расстояние b — неизвестны и должны быть определены в процессе силового расчета. Сказанное полностью относится и к силе $\bar{F}_{21}$, приложенной к звену *2* от звена *1*, так как силы взаимодействия $\bar{F}_{12}$ и $\bar{F}_{21}$ связаны третьим законом Ньютона: $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$.

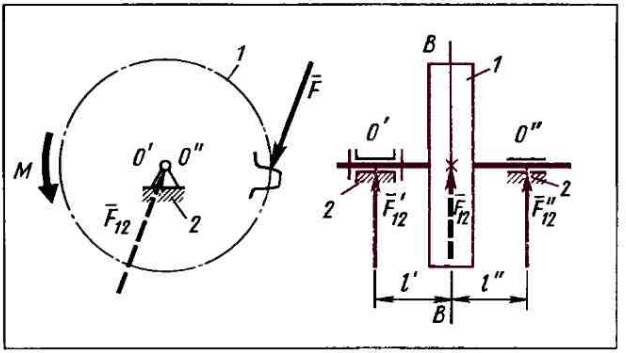


Рис. 5.2

В процессе силового расчета расстояние b может получиться больше длины a (рис. 5.1, *б*). В этом случае к звену *1* приложена уже не одна, а две реакции $\bar{F}_{U12}$ и $\bar{F}_{W12}$, направленные навстречу друг другу и неизвестные по модулю. Именно они и представляют реальное силовое воздействие на стержень *1* от звена *2*, а сила $\bar{F}_{12}$ (показанная штрихами) является лишь их равнодействующей. Таким образом, поступательная пара вносит в уравнение две неизвестные величины.

Во вращательной паре при неучёте трения сила $\bar{F}_{12}$ направлена нормально к цилиндрической поверхности соприкосновения обоих звеньев, т. е. проходит *через центр шарнира A* (рис. 5.1, *в*). Положение центра шарнира всегда известно, но модуль силы $\bar{F}_{12}$ и угол β — неизвестны. И эта низшая пара приносит в расчет две неизвестных.

Следовательно, от каждой силы, действующей в любой низшей кинематической паре, в расчетных уравнениях (5.1) — (5.3) появляются *две неизвестные* величины.

Пусть вращательная пара конструктивно выполнена в виде двух подшипников O' и O'' (рис. 5.2). Сила $\bar{F}_{12}$, полученная из расчета, расположена (во взятом примере) в плоскости BB зубчатой передачи и является равнодействующей реакций $\bar{F}'_{12}$ и $\bar{F}''_{12}$. Эти реакции и представляют собой реальное силовое нагружение подшипников. Именно они нужны для расчета подшипников на долговечность, а вала — на прочность.

В высшей паре контакт звеньев может быть либо точечным, либо линейным. Силовое взаимодействие звеньев при точечном контакте выражается в виде сосредоточенной силы, при линейном — в виде нагрузки, распределенной по линии контакта. В последнем случае под силой взаимодействия понимают равнодействующую элементарных распределенных сил.

Так как трение не учитывается, сила $\bar{F}_{12}$ будет направлена *по общей нормали* $n-n$ (рис. 5.3). Следовательно, для силы $\bar{F}_{12}$ известна как точка приложения (точка K), так и линия действия и неизвестным остается только модуль. Таким образом, в расчетных

уравнениях (5.1) — (5.3) члены, образованные силами взаимодействия в высших парах, содержат *по одному неизвестному.*

Рассмотрим статическую определимость любого плоского механизма без избыточных связей ($q_п = 0$), в состав которого входят n подвижных звеньев, $p_н$ низших и $p_в$ высших кинематических пар. Поскольку для каждого звена механизма можно записать три расчетных уравнения (5.1) — (5.3), то общее число уравнений для всех его n подвижных звеньев составит $N_у = 3n$.

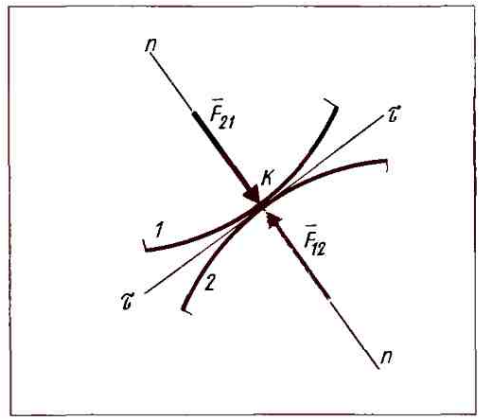


Рис. 5.3

Выше было показано, что каждая низшая пара вносит в расчетные уравнения две неизвестные величины, а каждая высшая — одну. Поэтому все кинематические пары вносят $N_F = 2p_н + p_в$ неизвестных. Эти неизвестные относятся к силам в кинематических парах, т. е. к внутренним силам. Конкретно N_F неизвестных представляют собой модули этих сил, линейные координаты точек их приложения, угловые координаты линий их действия.

Запишем для плоского механизма формулу Чебышева (§ 2.4)

$$3n = (2p_н + p_в) + W_п.$$

Сопоставив с ней выражения для $N_у$ и N_F, получим $N_у = N_F + W_п$. Таким образом, число уравнений $N_у$ достаточно для определения всех N_F внутренних неизвестных. Отсюда следует принципиально важный вывод: *механизм без избыточных связей* ($q_п = 0$) *статически определим.*

Оставшиеся $W_п$ уравнений используются для определения тех внешних силовых факторов, т. е. сил и пар сил, приложенных к механизму извне, которые не заданы и в силовом расчете являются искомыми*. Следовательно, число этих внешних неизвестных не должно превышать числа степеней свободы механизма. Если же все внешнее нагружение задано, то оставшиеся $W_п$ уравнений используются как контрольные.

Установим последовательность выполнения силового расчета. Пусть задан механизм (рис. 5.4, *а*) без избыточных связей, имеющий $W_п = 1$. Допустим, что момент M_1 (пара сил), приложенный к кулачковому валу извне, не задан и является искомым. Осталь-

* В ряде учебников неизвестные внешние силовые факторы называются уравновешивающими силами и уравновешивающими моментами.

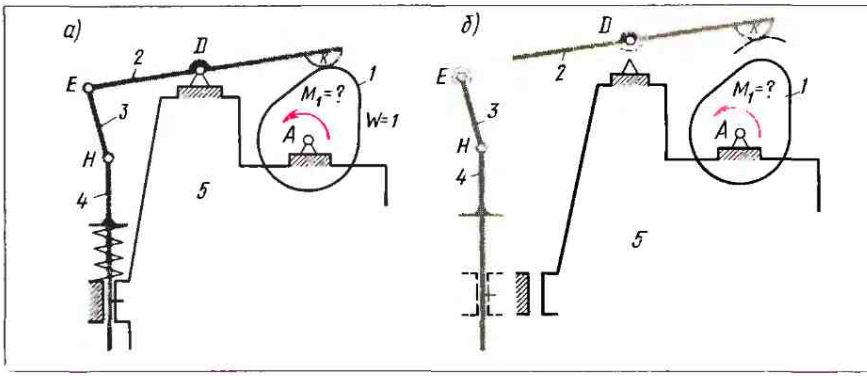


Рис. 5.4

ными неизвестными будут внутренние силы в кинематических парах. Чтобы определить их, механизм надо расчленить.

Расчленим его на структурные группы Ассура и первичный механизм, причем так, чтобы *неизвестный* внешний момент M_1 оказался бы приложенным обязательно к подвижному звену *первичного* механизма (рис. 5.4, *б*). Подчеркнем, что при таком именно расчленении механизма в силовом нагружении каждой структурной группы неизвестными будут только силы в кинематических парах. Поэтому число неизвестных в группе составит $N_F = 2p_{н.г} + p_{в.г}$, а число расчетных уравнений для нее $N_у = 3n_{п.г}$.

В то же время, для любой структурной группы справедливо соотношение $3n_{п.г} = 2p_{н.г} + p_{в.г}$ (§ 2.5). Сопоставляя его с выражениями, полученными для $N_у$ и N_F, заключаем, что $N_у = N_F$. Это значит, что любая структурная группа Ассура, сколь бы сложной она ни была, обладает замечательным свойством: она *статически определима*.

Если в механизме имеются избыточные связи, то те структурные группы, которые их содержат, являются статически неопределимыми. Вместе с ними статически неопределимым становится и весь механизм.

После того как силовой расчет всех структурных групп проделан, подвижное звено *1* первичного механизма (рис. 5.4, *б*) получает статическую определимость. При этом необходимо совершенно четко отметить, что если подвижное звено совершает вращательное движение, то вовсе не обязательно принимать его равномерным. Более того, если искусственно задавать вращение без углового ускорения, то решение уравнения моментов, составленного для подвижного звена первичного механизма, во многих случаях может оказаться далеким от истинного даже при вращении с весьма малым коэффициентом неравномерности, а в иных случаях и попросту абсурдным.

На основании вышеизложенного можно сформулировать общую методику силового расчета; силовой расчет механизма без избы-

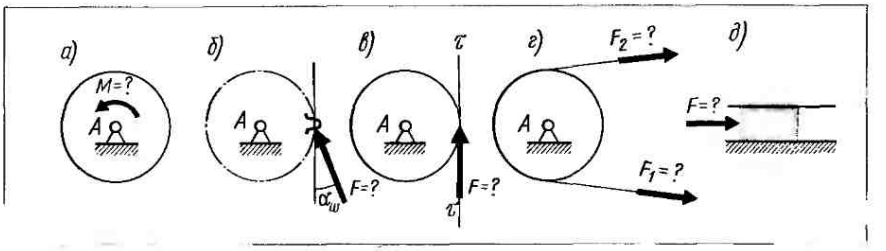


Рис. 5.5

точных связей следует проводить по структурным группам, начиная от группы, наиболее удаленной от первичного механизма, и заканчивая расчет самим первичным механизмом. Таким образом, силовой расчет проводится в порядке, обратном кинематическому. Структурное расчленение надо проводить так, чтобы неизвестный внешний силовой фактор оказался бы приложенным к подвижному звену именно первичного механизма. Добавим, что если все внешние силовые факторы, нагружающие заданный механизм, известны, то выбор первичного механизма для структурного расчленения становится произвольным. Сформулированная общая методика верна также и для механизмов с $W_п > 1$ степенями свободы.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим, что конкретно представляет собой при $W_п = 1$ неизвестный внешний силовой фактор, приложенный к подвижному звену первичного механизма.

Если подвижное звено соединено с источником (или потребителем механической энергии — в зависимости от направления потока энергии) посредством муфты (рис. 5.5, *а*), то внешним силовым фактором является неизвестный момент M. Если же подвод (или отвод) энергии осуществляется через зубчатую или фрикционную передачу (рис. 5.5, *б*,*в*), то внешним силовым фактором будет неизвестная по модулю сила $\bar{F}$. Расположение линии действия силы $\bar{F}$ определяется либо геометрией зубчатой передачи (углом зацепления α_w), либо проходит через точку соприкосновения фрикционных катков касательно к их рабочим поверхностям. При ременной передаче (рис. 5.5, *г*) внешний силовой фактор представлен уже не одной, а двумя неизвестными по модулю силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, связанными между собой формулой Эйлера [1]. Поэтому внешний силовой фактор по-прежнему один раз неизвестен. Линии действия сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ определяются положением ведущей и ведомой ветвей ременной передачи. Если же подвижное звено первичного механизма совершает прямолинейно поступательное движение (рис. 5.5, *д*), то внешним силовым фактором является неизвестная по модулю сила $\bar{F}$, действующая обычно вдоль направляющей поверхности. Таким образом, и здесь внешний силовой фактор один раз неизвестен.

§ 5.2 Графический метод силового расчета рычажного механизма

Рассмотрим силовой расчет кулисного механизма поперечно-строгального станка. Исходными данными являются: 1) кинематическая схема механизма (рис. 5.6); 2) массы и моменты инерции звеньев, положения их центров масс; 3) угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 звена *1*; 4) сила сопротивления $\bar{F}_c$ (сила резания), приложенная к резцу (к звену *5*), и силы тяжести всех звеньев.

Требуется определить внутренние силы во всех кинематических парах; поскольку в данном примере станок соединен с источником механической энергии с помощью зубчатой передачи $z' - z''$ (рис. 5.6), то внешний силовой фактор, приложенный к зубчатому колесу z' (к звену *1*), представляет собой силу, модуль $F_д$ которой также требуется определить.

Проделав кинематическую часть расчета (гл. 3), определим полные ускорения центров масс всех звеньев и их угловые ускорения по величине и направлению. По найденным ускорениям определим числовые значения и направления главных векторов и главных моментов сил инерции всех звеньев [см. уравнения (5.4)].

Теперь надо сделать расчленение механизма. Поскольку неизвестная внешняя сила $\bar{F}_д$ приложена к звену *1*, именно это звено войдет в состав первичного механизма (рис. 5.7, *д*). Остальные звенья составят две структурные группы *2—3* и *4—5* (рис. 5.7, *а, г*) Силовой расчет начинается с наиболее удаленной от первичного механизма группы *4—5*.

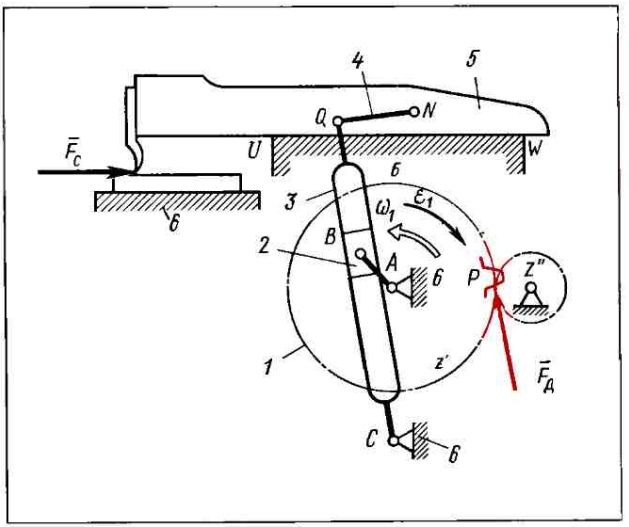
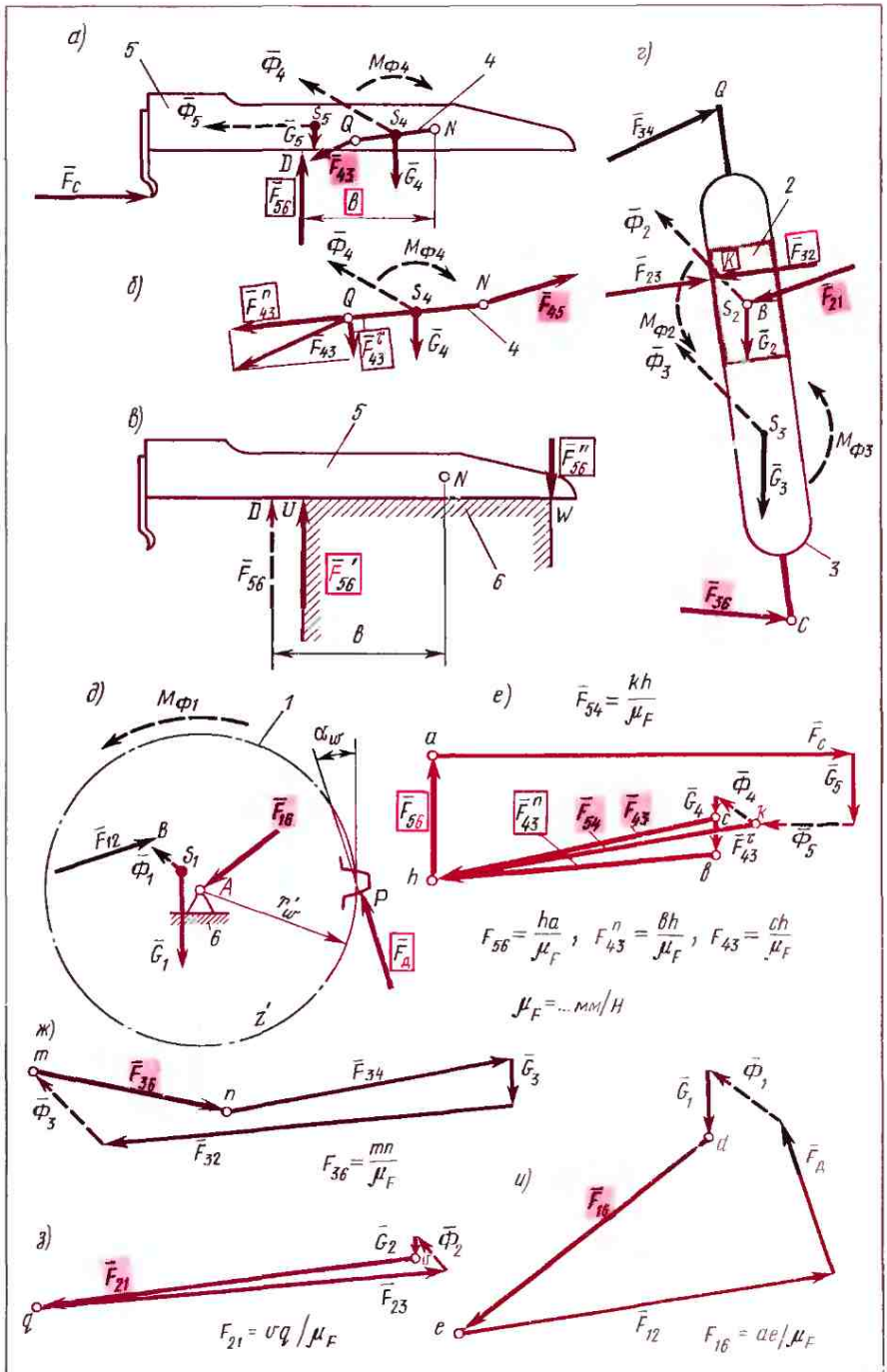


Рис. 5.6


а)
б)
в)
г)
д)
е)
ж)
з)
и)
Рис. 5.7

К звеньям структурной группы *4—5* (рис. 5.7, *а*) приложены следующие внешние силы и моменты: $\bar{G}_4$, $\bar{\Phi}_4$, $M_{\Phi 4}$, $\bar{F}_c$, $\bar{G}_5$, $\bar{\Phi}_5$ — все они известны. Неизвестными являются модуль и направление как силы $\bar{F}_{43}$, так и сил взаимодействия $\bar{F}_{45} = -\bar{F}_{54}$ в шарнире N (на рисунке не показаны), а также модуль силы $\bar{F}_{56}$ и ее плечо b.

Применим *способ разложения сил:* разложим силу $\bar{F}_{43}$ на две составляющие $\bar{F}^{\tau}_{43}$ и $\bar{F}^{n}_{43}$ так, чтобы момент составляющей $\bar{F}^{n}_{43}$ относительно точки N был равен нулю (рис. 5.7, *б*). Из уравнения моментов $\sum\limits_{4} M_N = 0$:

$$M_N(\bar{F}^{\tau}_{43}) + M_N(\bar{G}_4) - M_N(\bar{\Phi}_4) - M_{\Phi 4} = 0,$$

определим момент $M_N(\bar{F}^{\tau}_{43})$, а потом и составляющую $F^{\tau}_{43} = M_N(\bar{F}^{\tau}_{43})/l_{QN}$.

Затем из векторного уравнения $\sum\limits_{4,5} \bar{F} = 0$:

$$\bar{F}_{56} + \bar{F}_c + \bar{G}_5 + \bar{\Phi}_5 + \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_4 + \bar{F}^{\tau}_{43} + \bar{F}^{n}_{43} = 0;$$

путем построения плана сил (рис. 5.7, *е*) определим неизвестные по модулю $\bar{F}_{56}$ и $\bar{F}^{n}_{43}$.

Силу $\bar{F}_{43}$ в шарнире Q получим из уравнения

$$\bar{F}_{43} = \bar{F}^{\tau}_{43} + \bar{F}^{n}_{43}.$$

Силу $\bar{F}_{54}$ в шарнире N найдем из векторного уравнения $\sum\limits_{5} \bar{F} = 0$:

$$\bar{F}_{56} + \bar{F}_c + \bar{G}_5 + \bar{\Phi}_5 + \bar{F}_{54} = 0$$

(см. план сил, рис. 5.7, *е*).

Расчет группы *4—5* закончим определением плеча b (рис. 5.7, *а*), используя уравнение моментов $\sum\limits_{5} M_N = 0$:

$$-M_N(\bar{F}_{56}) + M_N(\bar{G}_5) + M_N(\bar{F}_c) + M_N(\bar{\Phi}_5) = 0,$$

а затем уравнение

$$b = M_N(\bar{F}_{56})/F_{56}.$$

Если плечо b получится такой длины, что точка D окажется вне опорной поверхности UW (рис. 5.7, *в*), то силовое воздействие стойки *6* на ползун *5* сведется к двум реакциям $\bar{F}'_{56}$ и $\bar{F}''_{56}$* (§ 5.1). Найденная же из силового расчета сила $\bar{F}_{56}$ (показанная штрихами) является лишь их равнодействующей. Искомые реакции определяются из уравнений

$$F'_{56} = F_{56}\frac{l_{DW}}{l_{UW}}; \quad F''_{56} = F_{56}\frac{l_{DU}}{l_{UW}}.$$

Если же получится $F_{56} = 0$, но $M_N(\bar{F}_{56}) \neq 0$, то реакции $\bar{F}'_{56}$ и $\bar{F}''_{56}$ представляют собой пару сил. Тогда их модули находятся из соотношения $|\bar{F}'_{56}| = |\bar{F}''_{56}| = |M_N(\bar{F}_{56})|/l_{UW}$.

---

* Поступательная кинематическая пара *5—6* конструктивно выполняется в виде ласточкина хвоста. Поэтому стойка *6* может оказать на ползун *5* реакцию, направленную как вверх, так и вниз.

Перейдем к расчету группы *2-3*. К ее звеньям приложены (рис. 5.7, *г*): ставшая известной сила $\bar{F}_{34} = -\bar{F}_{43}$, а также известные внешние силы и моменты $\bar{G}_2$, $\bar{\Phi}_2$, $M_{\Phi 2}$, $\bar{G}_3$, $\bar{\Phi}_3$, $M_{\Phi 3}$. Центр масс S_2 кулисного камня *2* находится в точке *B*. Неизвестными являются модуль и направление сил $\bar{F}_{21}$ и $\bar{F}_{36}$ в шарнирах *B* и *C*, модуль сил взаимодействия $\bar{F}_{23} = -\bar{F}_{32}$ в поступательной паре *2-3* и расположение линии их действия.

Линия действия сил $\bar{F}_{23}$ и $\bar{F}_{32}$ проходит через точку *K* перпендикулярно оси кулисы *3*. Положение точки *K* найдем *способом двух моментов*, который позволяет сделать это через отношение моментов одной и той же силы относительно двух любых точек. Для системы сил, приложенных к звену *3*, составим относительно точки *C* уравнение моментов $\sum\limits_{3} M_C = 0$:

$$M_C(\bar{F}_{32}) - M_C(\bar{F}_{34}) + M_C(\bar{G}_3) + M_C(\bar{\Phi}_3) + M_{\Phi 3} = 0$$

и определим величину и знак $M_C(\bar{F}_{32})$. Затем из уравнения моментов, составленного относительно точки *B* для системы сил, приложенных к звену *2*, $\sum\limits_{2} M_B = 0$:

$$-M_B(\bar{F}_{23}) + M_{\Phi 2} = 0\,,$$

найдем величину и знак $M_B(\bar{F}_{23})$, а потом и $M_B(\bar{F}_{32}) = -M_B(\bar{F}_{23})$.

Расстояние l_{BK} определяем из уравнения

$$l_{BK} = l_{BC}k/(k-1)\,,$$

в котором $k = M_B(\bar{F}_{32})/M_C(\bar{F}_{32})$ — величина алгебраическая. Расстояние l_{BK} откладываем на прямой *BC*. Если $l_{BK} > 0$, то это расстояние откладываем от точки *B* в сторону точки *C*, если $l_{BK} < 0$, то откладываем в обратную сторону.

Модуль силы $\bar{F}_{32}$ определяем по уравнению $F_{32} = M_C(\bar{F}_{32})/l_{CK}$. Направление силы $\bar{F}_{32}$ вдоль линии действия должно быть согласовано со знаком ее момента $M_C(\bar{F}_{32})$.

Если линия действия силы $\bar{F}_{32}$ выйдет за пределы опорной поверхности ползуна *2*, то силовое воздействие ползуна на кулису *3* сведется к двум реакциям $\bar{F}'_{32}$ и $\bar{F}''_{32}$ (см. § 5.1), определение которых аналогично определению реакций $\bar{F}'_{56}$ и $\bar{F}''_{56}$.

Построением плана сил (рис. 5.7,*ж*) находим из векторного уравнения $\sum\limits_{3} \bar{F} = 0$:

$$\bar{F}_{34} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{32} + \bar{\Phi}_3 + \bar{F}_{36} = 0\,,$$

силу $\bar{F}_{36}$. Реакцию $\bar{F}_{21}$ в шарнире *B* определим также графически из векторного уравнения (рис. 5.7,*з*) $\sum\limits_{2} \bar{F} = 0$:

$$\bar{F}_{23} + \bar{\Phi}_2 + \bar{G}_2 + \bar{F}_{21} = 0\,,$$

где $\bar{F}_{23} = -\bar{F}_{32}$.

Теперь надо сделать силовой расчет первичного механизма. К его подвижному звену *1* приложены следующие силы и моменты (рис. 5.7,*д*): ставшая известной сила $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$, сила тяжести $\bar{G}_1$, главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}_1$, главный момент сил инерции $M_{\Phi 1}$, неизвестная по модулю и направлению реакция $\bar{F}_{16}$ стойки, действующая в шарнире A, и неизвестная по модулю движущая сила $\bar{F}_д$, являющаяся воздействием зубчатого колеса z'' на зубчатое колесо z'. Линия действия силы $\bar{F}_д$ проходит через полюс зацепления P под углом зацепления α_w. Положение полюса P и величина угла α_w определяются из геометрического расчета зубчатой передачи (см. гл. 13).

Движущая сила $F_д$ (в данном примере — это так называемая «уравновешивающая сила») определяется из составленного относительно точки A уравнения моментов $\sum_{(1)} M_A = 0$:

$$M_A(\bar{F}_д) + M_A(\bar{G}_1) - M_A(\bar{F}_{12}) + M_A(\bar{\Phi}_1) + M_{\Phi 1} = 0, \qquad (5.5)$$

где $|\bar{\Phi}_1| = m_1|\bar{a}_{S1}|$, $|M_{\Phi 1}| = J_{1S}|\varepsilon_1|$; отсюда получим

$$F_д = M_A(\bar{F}_д)/(r'_w \cos\alpha_w).$$

Отметим, что силу $F_д$ можно также определить и более коротким путем, не делая расчленения механизма, а применив теорему Жуковского [1, 4, 5].

Если из задачи об определении закона движения механизма станка, выполненной еще до его силового расчета (по методике, изложенной в гл. 4), использовать значение $M_д$ — приведенного к звену *1* движущего момента электродвигателя, и значение J_1 — приведенного момента инерции I группы звеньев, то уравнение (5.5) примет вид

$$M_д + M_A(\bar{G}_1) - M_A(\bar{F}_{12}) + M_{\Phi 1} = 0, \qquad (5.6)$$

где $|M_{\Phi 1}| = J_1|\varepsilon_1|$. В уравнении (5.6) все члены известны; поэтому оно из расчетного становится контрольным.

Реакцию $\bar{F}_{16}$ стойки определим из векторного уравнения сил, приложенных к звену *1*, $\sum_{(1)} \bar{F} = 0$:

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_д + \bar{\Phi}_1 + \bar{G}_1 + \bar{F}_{16} = 0,$$

которое легко решается графически (рис. 5.7, *и*).

В случае, когда необходимо знать не суммарное воздействие $\bar{F}_{16}$ стойки *6* на звено *1*, а конкретное нагружение его подшипников, то надо иметь конструктивную схему звена *1*, включающую его размеры вдоль оси вращения (см. § 5.1). Тогда искомые реакции определяются методами пространственной статики.

§ 5.3 Аналитический метод силового расчета рычажного механизма

Аналитический метод рассмотрим на примере центрального кривошипно-ползунного механизма. Исходные

данные: 1) кинематическая схема (рис. 5.8); 2) массы и моменты инерции звеньев, положения их центров масс; 3) закон движения механизма; 4) внешнее силовое нагружение F_3 и M_1. Зависимости $F_3(\varphi_1)$, $M_1(\varphi_1)$ и закон движения $\omega_1=\omega_1(\varphi_1)$ примем заданными в табличной форме. Силами тяжести можно пренебречь, поскольку в большинстве механизмов современных машин они малы по сравнению с другими силами.

Определение сил в кинематических парах. Зададимся системой координат Axy (рис. 5.8). Необходимые для силового расчета кинематические характеристики возьмем из гл. 3:

$$\sin\varphi_2 = -(1/\lambda_2)\sin\varphi_1; \qquad (5.7)$$

$$x_C = l_{AC} = l_{AB}(\cos\varphi_1 + \lambda_2\cos\varphi_2); \qquad (5.8)$$

$$a_{Cx} = -l_{AB}(\cos\varphi_1 + \lambda_2 B)\omega_1^2 - \\ - l_{AB}(\sin\varphi_1 + \lambda_2\omega_{q2}\sin\varphi_2)\varepsilon_1; \qquad (5.9)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{q2}\omega_1^2 + \omega_{q2}\varepsilon_1. \qquad (5.10)$$

В этих уравнениях $\omega_{q2} = -\cos\varphi_1/\lambda_2\cos\varphi_2$ — аналог угловой скорости (передаточная функция) звена *2*; ε_{q2} — аналог углового ускорения звена *2*:

$$\varepsilon_{q2} = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \omega_{q2}\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\lambda_2\cos^2\varphi_2},$$

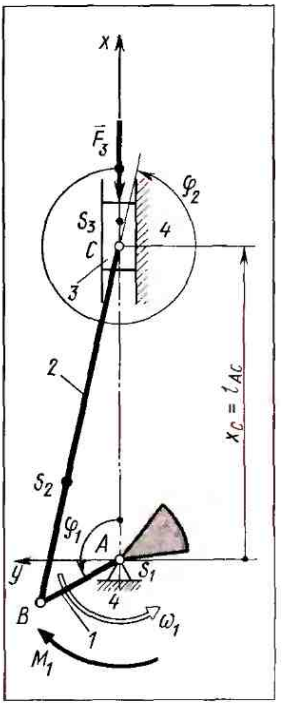


Рис. 5.8

а $\lambda_2 = l_{BC}/l_{AB}$, $B = \varepsilon_{q2}\sin\varphi_2 + \omega_{q2}^2\cos\varphi_2$. Способ определения углового ускорения ε_1 начального звена *1* описан в § 4.5 и 3.4.

Следуя методике, изложенной в гл. 3, получим

$$a_{S2x} = -l_{AB}(\cos\varphi_1 + \lambda_2\lambda_S B)\omega_1^2 - l_{AB}(\sin\varphi_1 + \lambda_2\lambda_S\omega_{q2}\sin\varphi_2)\varepsilon_1; \qquad (5.11)$$

$$a_{S2y} = -[l_{AB}(1-\lambda_S)\sin\varphi_1]\omega_1^2 + [l_{AB}(1-\lambda_S)\cos\varphi_1]\varepsilon_1, \qquad (5.12)$$

где $\lambda_S = l_{BS2}/l_{BC}$.

При установившемся движении с малым коэффициентом неравномерности (см. § 4.9) можно положить $\omega_1 \approx \omega_{ср}$, $\varepsilon_1 \approx 0$. Тогда после преобразований и упрощений уравнения (5.9) проекция ускорения a_{Cx} примет вид

$$a_{Cx} \approx -\omega_{ср}^2 l_{AB}(\cos\varphi_1 + \tfrac{1}{\lambda_2}\cos 2\varphi_1). \qquad (5.13)$$

Определим проекции главных векторов сил инерции и главные моменты сил инерции, заметив, что $a_{Cy} = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ (рис. 5.8):

$$\Phi_{2x} = -m_2 a_{S2x};\ \Phi_{2y} = -m_2 a_{S2y};\ \Phi_{3x} = -m_3 a_{C_x}; \qquad (5.14)$$

$$M_{\Phi 1} = -J_{1A}\varepsilon_1;\ M_{\Phi 2} = -J_{2S}\varepsilon_2;\ M_{\Phi 3} = 0. \qquad (5.15)$$

Главный вектор сил инерции звена *1* $\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_{S1} = 0$, так как

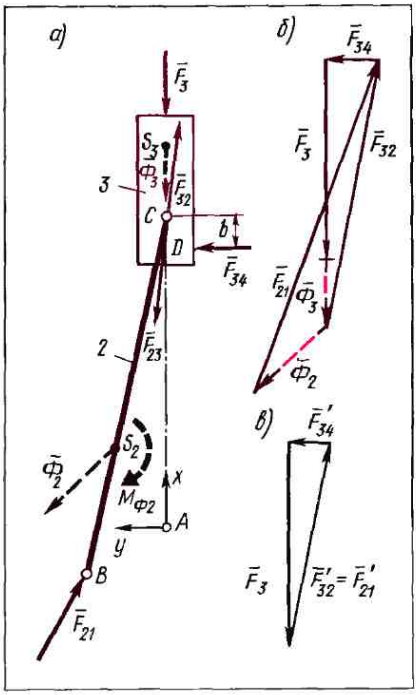


Рис. 5.9

$a_{S1}=0$, поскольку центр масс S_1 благодаря противовесу находится на оси вращения A (рис. 5.8).

Как следует из уравнений (5.9) — (5.15), величины главных векторов и главных моментов сил инерции существенно зависят от квадрата угловой скорости ω_1^2, начального звена *1*, что имеет особое значение для быстроходных механизмов.

В уравнении (5.13) приведено приближенное выражение для проекции a_{Cx}, вполне пригодное для практических расчетов применительно к установившемуся режиму. Как видно, эта проекция, а следовательно, и проекция Φ_{3x} являются функцией не только угла φ_1, но и двойного угла $2\varphi_1$. Поэтому первое слагаемое в выражении силы инерции $\Phi_3=\Phi_{3x}$ (если раскрыть скобки) периодически изменяется с частотой вращения звена *1* и называется силой инерции первого порядка. Второе слагаемое периодически изменяется с двойной частотой и называется силой инерции второго порядка.

Расчленив механизм, перейдем к силовому расчету структурной группы *2-3*. К ее звеньям приложены следующие известные внешние силы: $\bar{F}_3$, $\bar{\Phi}_3$, $\bar{\Phi}_2$ и момент $M_{\Phi 2}$ (рис. 5.9, *а*). Неизвестными являются модуль и направление силы $\bar{F}_{21}$, модуль силы $\bar{F}_{34}$ и ее плечо b, модуль и направление сил взаимодействия в шарнире C, связанных соотношением $\bar{F}_{23}=-\bar{F}_{32}$.

Сумма проекций на ось x сил, приложенных к звеньям *2* и *3*, равна нулю: $\sum\limits_{2,3} X=0$. Следовательно,

$$F_{21x}+\Phi_{2x}+F_{3x}+\Phi_{3x}=0. \qquad (5.16)$$

Из уравнения (5.16) определяется проекция F_{21x}. Знаки в этом уравнении, как и во всех последующих, имеют алгебраический смысл. Это значит, что числовые значения известных проекций сил подставляются в уравнения проекций и моментов со строгим соблюдением их знаков. Так, проекция F_{3x} имеет знак минус, поскольку сила направлена вниз (рис. 5.9, *а*). Модуль и направление силы $\bar{F}_3$ надо взять из исходных данных. Величины и знаки проекций Φ_{2x} и Φ_{3x} определяются в результате расчетов по уравнениям (5.11), (5.9) и (5.14).

Сумма проекций на ось x сил, приложенных к звену *3*, $\sum\limits_{3} X=0$,

или

$$F_{32x} + F_{3x} + \Phi_{3x} = 0, \tag{5.17}$$

откуда определяем проекцию F_{32x}.

Для подсчета проекции F_{23y} используем уравнение моментов для звена *2* (относительно точки B) $\sum\limits_{2} M_B = 0$. Отсюда

$$F_{23y} l_{BC} \cos\varphi_2 - F_{23x} l_{BC} \sin\varphi_2 + \Phi_{2y} l_{BS2} \cos\varphi_2 - \\ - \Phi_{2x} l_{BS2} \sin\varphi_2 + M_{\Phi 2} = 0. \tag{5.18}$$

В этом уравнении $\bar{F}_{23x} = \bar{F}_{32x}$.

Модуль силы $\bar{F}_{23}$, нагружающей шарнир C, найдем из уравнения

$$F_{23} = \sqrt{F_{23x}^2 + F_{23y}^2},$$

а угловую координату φ_{F23} вектора $\bar{F}_{23}$ — через $\sin\varphi_{F23}$ и $\cos\varphi_{F23}$, а именно: $\sin\varphi_{F23} = F_{23y}/F_{23}$, $\cos\varphi_{F23} = F_{23x}/F_{23}$.

Сумма проекций на ось y сил, приложенных к звену *2*, $\sum\limits_{2} Y = 0$, или

$$F_{21y} + F_{23y} + \Phi_{2y} = 0, \tag{5.19}$$

откуда определяем проекцию F_{21y}, а затем и модуль силы F_{21}:

$$F_{21} = \sqrt{F_{21x}^2 + F_{21y}^2}.$$

Найдем угловую координату φ_{F21} вектора $\bar{F}_{21}$:

$$\sin\varphi_{F21} = F_{21y}/F_{21}, \quad \cos\varphi_{F21} = F_{21x}/F_{21}.$$

Из уравнения проекций на ось y сил, приложенных к звену *3*, $\sum\limits_{3} Y = 0$, т. е.

$$F_{34y} + F_{32y} = 0; \tag{5.20}$$

найдем проекцию F_{34y}. Ее абсолютная величина покажет модуль, а знак — направление силы $\bar{F}_{34}$, приложенной к ползуну *3* от стойки *4*.

Плечо $b = 0$, так как согласно уравнению моментов для звена *3* (относительно точки C) $\sum\limits_{3} M_C = 0$, или (рис. 5.9, *а*):

$$F_{34} b = 0. \tag{5.21}$$

Таким образом, для структурной группы *2-3* были использованы шесть уравнений (5.16)—(5.21), из которых были определены все неизвестные.

На рис. 5.9, *б* представлен план сил, приложенных к звеньям структурной группы. Этот план наглядно показывает, насколько важно учитывать влияние ускоренного движения звеньев. Если им пренебречь, т. е. положить силы инерции $\bar{\Phi}_2$ и $\bar{\Phi}_3$ равными нулю (рис. 5.9, *в*), то такой неучет приведет к заниженным значениям

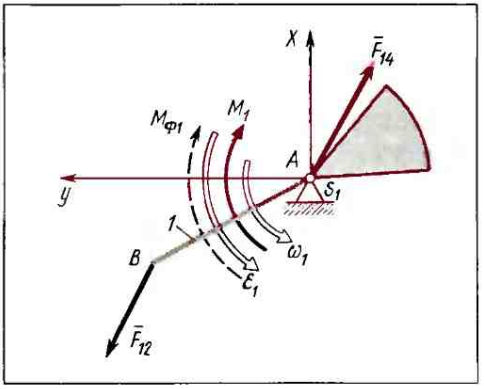


Рис. 5.10

сил в кинематических парах (сил $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{32}$, $\bar{F}_{34}$), что особенно проявит себя в механизмах быстроходных машин.

Перейдем к силовому расчету первичного механизма, составленного из подвижного звена *1* и стойки *4* (рис. 5.10). К звену *1* приложены: ставшая известной сила $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$, момент M_1, направленный согласно заданию (рис. 5.8) по часовой стрелке, главный момент сил инерции $M_{\Phi 1}$ и неизвестная по модулю и направлению реакция $\bar{F}_{14}$ стойки. Напомним, что главный вектор сил инерции $\Phi_1=0$.

Поскольку $\Phi_1=0$, уравнения проекций сил, приложенных к звену *1*, т. е. $\sum_1 X=0$, $\sum_1 Y=0$, приобретают такой вид:

$$F_{14x}+F_{12x}=0; \tag{5.22}$$

$$F_{14y}+F_{12y}=0, \tag{5.23}$$

откуда $F_{14x}=-F_{12x}$, $F_{14y}=-F_{12y}$.

Составим уравнение моментов для звена *1* относительно точки *A*:

$$M_A(\bar{F}_{12})+M_1+M_{\Phi 1}=0. \tag{5.24}$$

Момент $M_A(\bar{F}_{12})$ подставляется в уравнение с тем знаком, который он получает при подсчете по формуле $M_A(\bar{F}_{12})=F_{12y}l_{AB}\cos\varphi_1-F_{12x}l_{AB}\sin\varphi_1$.

Уравнение (5.24) является контрольным, поскольку все три слагаемых в его левой части известны. Однако оно может быть и расчетным. Например, когда силовой анализ выполняется для механизма, движущегося в установившемся режиме с малым коэффициентом неравномерности. В этом случае момент $M_{\Phi 1}$ обычно неизвестен и его надо определить из уравнения (5.24). Момент $M_{\Phi 1}$ может иметь значительную величину, что весьма существенно для расчета главного вала машины (звена *1*) на прочность.

При малой неравномерности вращения звена *1* его угловое ускорение ε_1 в начале расчета часто не определяют, поскольку оно весьма мало. Однако принять вследствие этого $M_{\Phi 1}=-\varepsilon_1 J_{1A}\approx 0$ никак нельзя. Неравенство момента $M_{\Phi 1}$ нулю вытекает из уравнения (5.24), поскольку моменты M_1 и $M_A(\bar{F}_{12})$ заведомо не равны и сильно отличаются друг от друга. Заметная величина $M_{\Phi 1}$ при очень малом значении ε_1 объясняется следующим: чем с меньшим угловым ускорением ε_1 должно вращаться звено *1*, тем бóльшим должен быть момент инерции J_{1A} этого звена (см. § 4.10); поэтому произведение весьма малой величины ε_1 на весьма большую J_{1A}, т. е. $|\varepsilon_1 J_{1A}|=|M_{\Phi 1}|$, отнюдь не мало́.

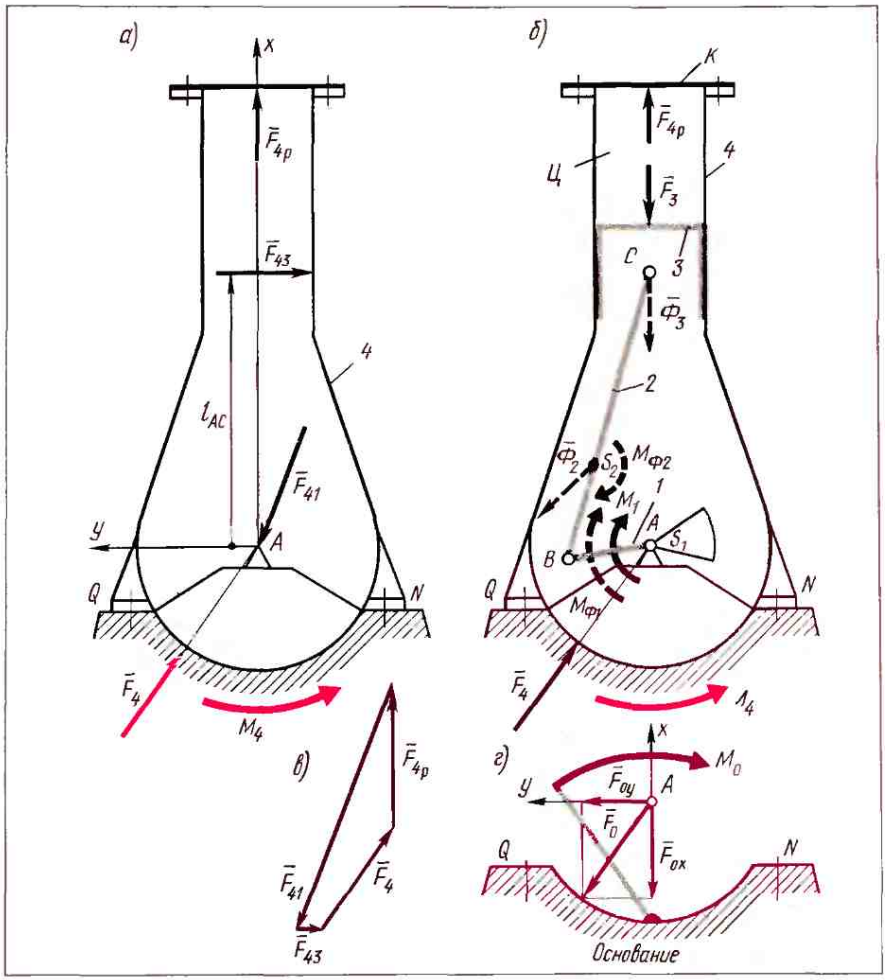


Рис. 5.11

Определение силовых факторов, нагружающих корпус машины и ее основание. Рассмотрим стойку кривошипно-ползунного механизма. Конструктивно это корпус машины, который устанавливается на специальном основании. Если машина — автомобильный ДВС, то таким основанием будет рама автомобиля, если — стационарный компрессор или пресс, то — фундамент, на котором установлен компрессор или пресс и т. д.

К стойке *4* приложены следующие силы и моменты (рис. 5.11, *а*): ставшие известными воздействия звена *1* $\bar{F}_{41}=-\bar{F}_{14}$ и звена *3* $\bar{F}_{43}=-\bar{F}_{34}$, сила $\bar{F}_{4p}=-\bar{F}_3$, зависящая от рабочего процесса машины, и, наконец, реакция основания, представленная в виде двух силовых факторов, а именно — неизвестного по модулю и

направлению главного вектора $\bar{F}_4$ и неизвестного главного момента M_4. Условимся определять величину главного момента M_4, полагая, что линия действия главного вектора $\bar{F}_4$ проходит через точку A. Напомним, что в перечисление сил, действующих на стойку, как и ранее, условно не включена ее сила тяжести.

Если силовой расчет выполняется для кривошипно-ползунного механизма поршневой машины (насоса, компрессора, детандера, ДВС и т. п.), то сила $\bar{F}_{4p}$ является силой давления рабочего тела (жидкости, газа), находящегося внутри цилиндра $Ц$, на его крышку K (рис. 5.11, *б*). Если кривошипно-ползунный механизм есть главный механизм пресса или станка, то силой $\bar{F}_{4p}$ является то воздействие, которое обрабатываемое изделие оказывает на стол пресса или станка.

Составим векторное уравнение равновесия стойки

$$\bar{F}_{4p} + \bar{F}_{41} + \bar{F}_{43} + \bar{F}_4 = 0,$$

представленное графически на рис. 5.11, *в*. Используя соотношения $\bar{F}_{4p} = -\bar{F}_3$, $\bar{F}_{41} = -\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{43} = -\bar{F}_{34}$, получим $\bar{F}_4 = -\bar{F}_3 + \bar{F}_{21} + \bar{F}_{34}$. Но из плана сил (рис. 5.9, *б*) следует $\bar{F}_{21} + \bar{F}_{34} + \bar{F}_3 = -(\bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3)$. Поэтому $\bar{F}_4 = -(\bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3)$ или в проекциях: $F_{4x} = -(\Phi_{2x} + \Phi_{3x})$, $F_{4y} = -\Phi_{2y}$. Отсюда определяем $F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2}$ и угловую координату φ_{F4} вектора $\bar{F}_4$: $\sin\varphi_{F4} = F_{4y}/F_4$, $\cos\varphi_{F4} = F_{4x}/F_4$.

Сила $\bar{F}_{43}$ создает относительно точки A момент M_A $(\bar{F}_{43})$ (рис. 5.11, *а*). Уравновешивает его только реактивный момент M_4, действующий от основания на корпус (на стойку), так как остальные силы, приложенные к стойке, момента относительно точки A не создают. Момент M_A $(\bar{F}_{43})$ стремится опрокинуть корпус машины. Величину момента M_4, препятствующего этому опрокидыванию, определим из уравнения равновесия стойки $M_A(\bar{F}_{43}) + M_4 = 0$, откуда $M_4 = -F_{43y} l_{AC}$ [см. уравнение (5.8)].

Опрокидывание испытывает корпус и компрессора, и ДВС, и электродвигателя, т. е. *любой машины,* независимо от того, какой рабочий процесс в ней протекает. Опрокидывание испытывает также *любой передаточный механизм*. Поэтому машину и передаточный механизм всегда надо надежно закреплять на их основании. Конструктивное исполнение этого закрепления и методика его расчета излагаются в курсе «Детали машин» и в специальных машиностроительных курсах.

Выразим искомый момент M_4 по-иному. Для этого составим уравнение моментов относительно точки A для всех четырех звеньев (рис. 5.9, *а*, 5.10, 5.11, *а*), т. е. для механизма в целом. Заметим, что моменты сил взаимодействия $\bar{F}_{23}$ и $\bar{F}_{32}$ в шарнире C равны и противоположны друг другу (рис. 5.9, *а*), а потому в уравнение моментов не войдут. То же самое относится к моментам сил взаимодействия во всех остальных кинематических парах, т. е. сил, являющихся внутренними для механизма в целом. Следовательно, в уравнение войдут только моменты сил и пар сил, прило-

женных к механизму извне (рис. 5.11, *б*)*. Поэтому для механизма в целом оно примет вид

$$M_1 + M_A(\bar{\Phi}_2) + M_{\Phi 2} + M_{\Phi 1} + M_4 = 0. \qquad (5.25)$$

Из (5.25) следует, что величина искомого момента M_4 определяется внешним активным моментом M_1, приложенным к валу машины (т. е. к звену *1* механизма), а также влиянием ускоренного движения звеньев. Это влияние численно оценивается посредством момента главного вектора и главных моментов сил инерции, поскольку силовой расчет проводится методом кинетостатики (см. § 5.1).

Определим, какое давление на свое основание (фундамент) оказывает машина, механизмом которой является кривошипно-ползунный. Систему нагружения основания со стороны машины можно свести к главному вектору $\bar{F}_o = -\bar{F}_4$, линия действия которого проходит через точку A (ось вращения звена *1*, т. е. вала машины), и к главному моменту $M_o = -M_4$ (рис. 5.11, *г*).

Проекции главного вектора $\bar{F}_o$ на оси x и y:

$$F_{ox} = \Phi_{1x} + \Phi_{2x} + \Phi_{3x} = \Phi_{\Sigma x}; \qquad (5.26)$$

$$F_{oy} = \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = \Phi_{\Sigma y}. \qquad (5.27)$$

Главный момент M_o выразится так:

$$M_o = [M_{\Phi 1} + M_{\Phi 2} + M_A(\bar{\Phi}_1) + M_A(\bar{\Phi}_2)] + M_1 = M_{\Phi\Sigma} + M_1. \qquad (5.28)$$

В уравнениях (5.26) — (5.28) буквами $\bar{\Phi}_\Sigma$ и $M_{\Phi\Sigma}$ обозначены общий главный вектор (через его проекции) и общий главный момент системы сил инерции всех подвижных звеньев механизма. Члены Φ_{1x}, Φ_{1y}, $M_A(\bar{\Phi}_1)$ входят в состав этих уравнений в том случае, когда центр масс звена *1* не находится на его оси вращения; слагаемые $\Phi_{3y} = 0$, $M_A(\bar{\Phi}_3) = 0$ (рис. 5.9, *а*), $M_{\Phi 3} = 0$ [см. уравнение (5.15)].

Как видно из уравнений (5.26) и (5.27), главный вектор $\bar{F}_o$ вычисляется посредством сил инерции, а это указывает на то, что он есть результат ускоренного движения всех подвижных звеньев механизма, т. е. имеет динамическую природу. Отметим, что на основание машины передается также воздействие ее силы тяжести и в ряде случаев воздействия других активных сил (например, сил за-

* Силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ — это воздействия рабочего тела (например, газа, жидкости — в случае поршневой машины или обрабатываемого изделия — в случае машины технологической). Но рабочее тело не является звеном механизма и в его состав не входит, а потому для механизма силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ — это силы внешние (а не внутренние, как это может показаться).

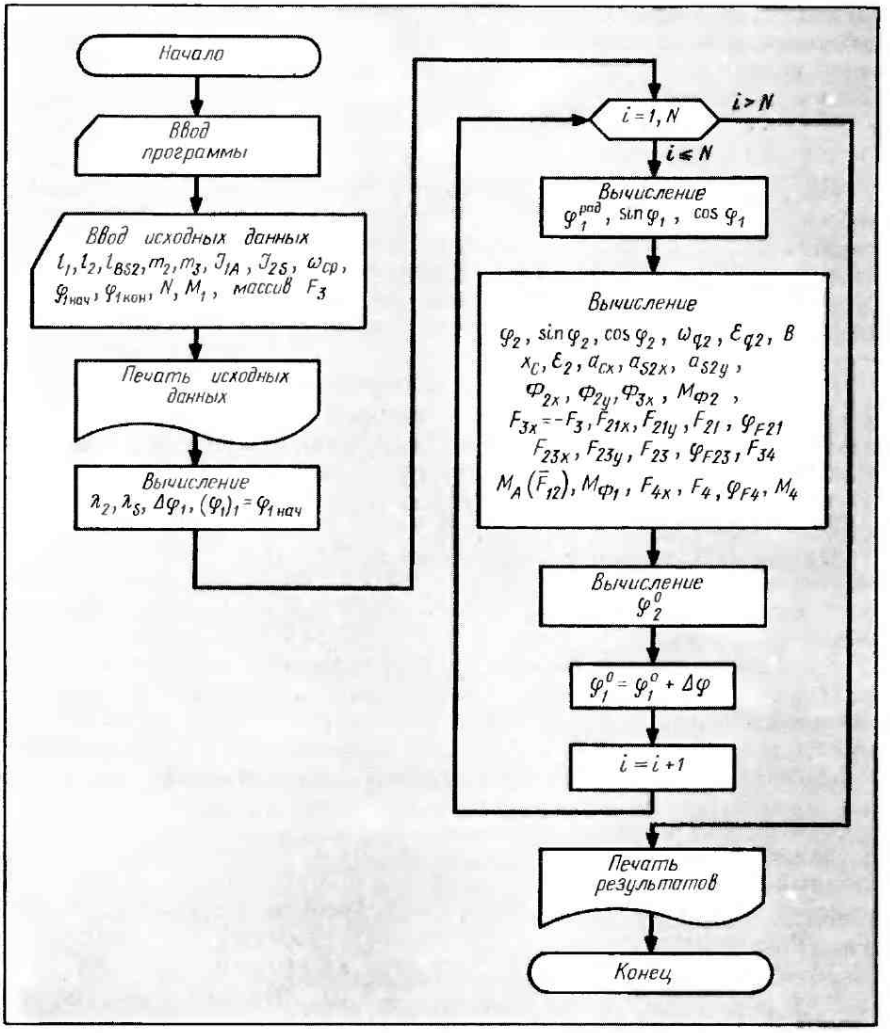


Рис. 5.12

тяжки фундаментных болтов), которые в силовом расчете не рассматривались. Следовательно, в общем случае главный вектор $\bar{F}_0$ содержит две составляющие: во-первых, динамическую составляющую, вызванную *ускоренным движением* звеньев механизма, и, во-вторых, составляющую, вызванную действием *активных сил*.

Главный момент M_0 в общем случае складывается также из двух составляющих: во-первых, из динамической составляющей, являющейся результатом *ускоренного движения* звеньев [см., например,

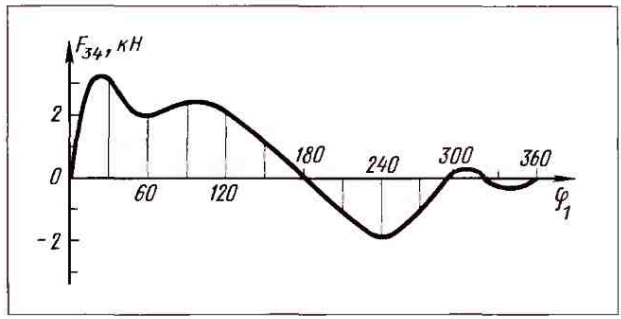


Рис. 5.13

квадратные скобки в уравнении (5.28)], и, во-вторых, из составляющей, вызванной действием *активных сил и моментов*.

Выполнение силового расчета графическим или аналитическим методом надо проводить многократно, для различных положений механизма. Это значит, что независимо от метода силовой расчет представляет собой весьма трудоемкую работу. Радикально снизить трудоемкость можно путем применения ЭВМ (см.: *Лукичев Д. М., Тимофеев Г. А.* Определение усилий в кинематических парах рычажных механизмов с применением ЕС ЭВМ. М., 1983).

Анализ результатов силового расчета, выполненного на ЭВМ. На основании методики, изложенной в § 5.3, составлена схема алгоритма силового расчета кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.12). Эта схема алгоритма годится для любой одноцилиндровой двухтактной поршневой машины, а также для кривошипного пресса и других двухтактных технологических машин, главным механизмом которых является кривошипно-ползунный.

По программе, составленной на языке ФОРТРАН для машины ЕС-1022, в числах сделан силовой расчет механизма дизеля, работающего в установившемся режиме с малым коэффициентом неравномерности. Шаг изменения обобщенной координаты φ_1 в пределах одного оборота коленчатого вала $\Delta\varphi_1 = 5°$. ЭВМ выполнила весь расчет (решение 33 уравнений 72 раза каждое) за 46 с.

Результаты расчета можно представить графически. На рис. 5.13 изображен график изменения силы $\bar{F}_{34}$, приложенной к поршню *3* со стороны цилиндра (стойки) *4*(см. рис. 5.11, *б*). Положительные ординаты соответствуют действию силы влево. Как видно, при $0 < \varphi_1 < 180°$ поршень прижат к зеркалу цилиндра своей правой образующей; при $180° < \varphi_1 < 360°$ он должен был бы быть прижат левой образующей. Однако на участке 290—320° происходит весьма нежелательное двукратное перемещение поршня в зазоре, сначала слева направо, а затем справа налево. Этого перемещения не было бы, если массы m_3 и m_2 поршня и шатуна имели бы меньшую величину.

На рис. 5.14 и 5.15 изображены годографы сил, приложенных

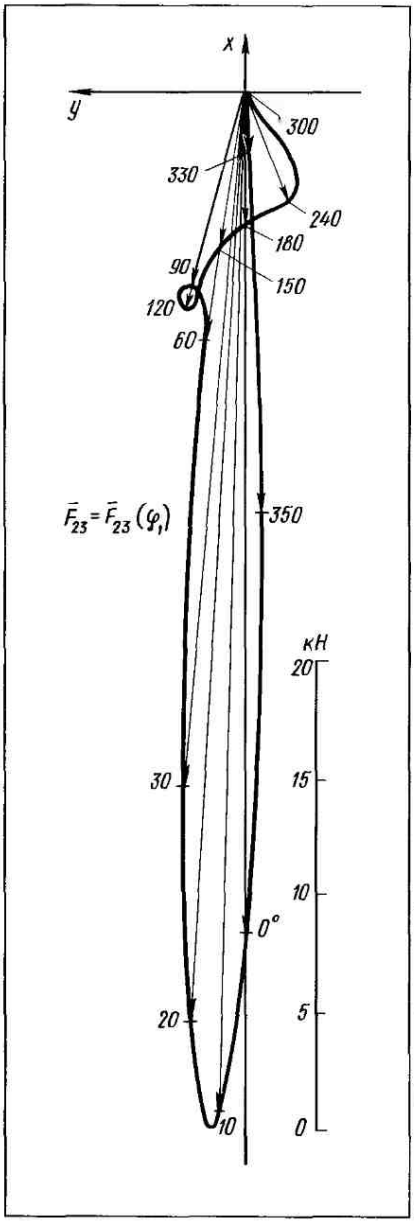


Рис. 5.14

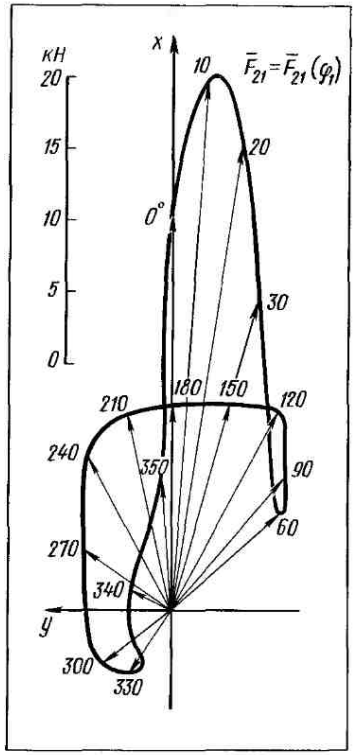


Рис. 5.15

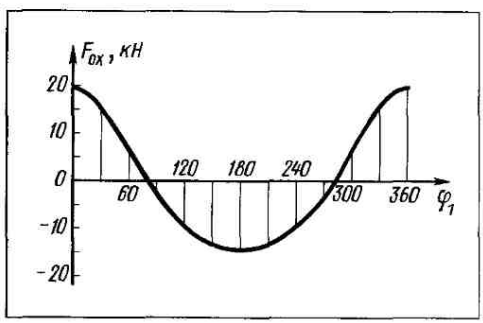


Рис. 5.16

к шатуну *2* от поршня *3* (сила $\bar{F}_{23}$) и от коленчатого вала *1* (сила $\bar{F}_{21}$). Цифрами указаны соответствующие значения обобщенной координаты φ_1 в градусах. Годографы сил и график $F_{34}(\varphi_1)$ нужны для расчета деталей механизма на прочность, жесткость и продольную устойчивость, а также для расчета кинематических пар *3-4, 2-3, 2-1* на износ, долговечность и невыдавливаемость смазочного материала (см. гл. 8).

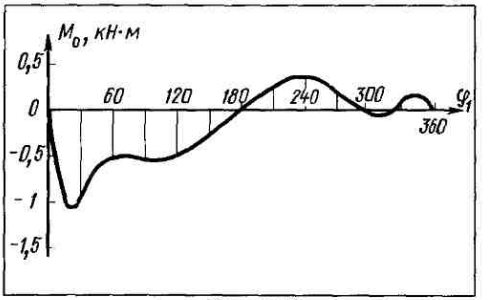
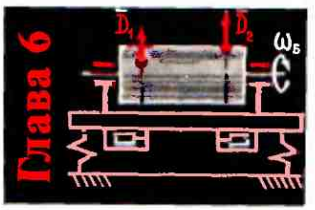


Рис. 5.17

График изменения вертикальной составляющей $\bar{F}_{ox}$ главного вектора $\bar{F}_o$, действующего от корпуса ДВС на его основание (рис. 5.11, *г*), показан на рис. 5.16. Знаком плюс отмечено действие составляющей вверх. В то же время горизонтальная составляющая $\bar{F}_{oy}$ главного вектора изменяется по закону синуса. Ее амплитуда равна 6 кН.

На рис. 5.17 изображен главный момент M_o, действующий на основание от корпуса ДВС. Знак плюс указывает, что главный момент M_o направлен против часовой стрелки. На участке 290—320° главный момент M_o так же, как и сила F_{34}, дважды меняет знак.



Уравновешивание механизмов

В 5-й главе было показано, что при ускоренном движении звеньев механизма силовое воздействие машины на ее основание содержит динамические составляющие. При установившемся режиме динамические составляющие изменяются циклическн. Это значит, что машина оказывает на свое основание периодические возмущения, вызывающие его вибрацию. Для устранения такого вредного воздействия или по крайней мере для его уменьшения надо путем специальных мероприятий свести к нулю эти составляющие или ограничить допустимым значением их амплитуду. Решение подобной задачи, относящейся к динамическому проектированию механизма машинного агрегата, называется его уравновешиванием и составляет содержание настоящей главы. При этом особо будет рассмотрено динамическое воздействие вращающихся звеньев механизма (роторов) на их опоры и способы его устранения.

§ 6.1 Виды неуравновешенности механизмов. Статическое уравновешивание

Рассмотрим плоский механизм, начальное звено *1* которого вращается с *постоянной* угловой скоростью (рис. 6.1, *а*). При этом все остальные звенья будут двигаться с угловыми ускорениями, а центры масс S_1, S_2, S_3 будут иметь линейные ускорения. Определим по формулам (5.4) главные векторы и главные моменты сил инерции всех звеньев.

Пусть конструкция звеньев механизма такова, что они симметричны относительно плоскости чертежа, что свойственно механизмам очень многих машин. Тогда главные векторы и главные моменты (результирующие пары) сил инерции всех звеньев будут располагаться в этой плоскости.

Приведем всю систему сил инерции к центру A (рис. 6.1, *б*), в результате чего вся эта система сведется к общему главному вектору

$$\bar{\Phi}_\Sigma = \sum_1^n \bar{\Phi}_i \tag{6.1}$$

и к общему главному моменту

$$M_{\Phi\Sigma} = \sum_2^n M_{\Phi i} + \sum_2^n M_A(\bar{\Phi}_i), \tag{6.2}$$

где n — число подвижных звеньев механизма (на рис. 6.1, *а* $n=3$). Поскольку выше было принято $\omega_1 = \text{const}$, то $M_{\Phi 1} = 0$, $M_A(\bar{\Phi}_1) = 0$. Ранее (в § 5.3) было показано, что динамические составляющие $\bar{F}_{o\Phi}$ и $M_{o\Phi}$ нагружения основания численно равны общему главному вектору $\bar{\Phi}_\Sigma$ и общему главному моменту $M_{\Phi\Sigma}$ системы сил инерции

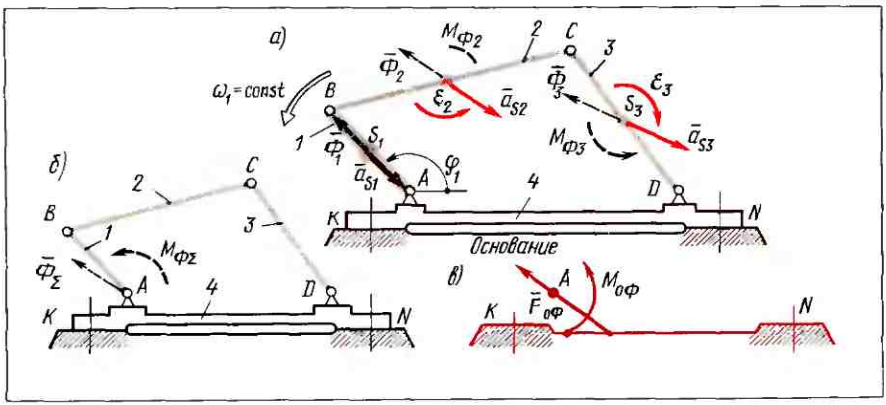


Рис. 6.1

всех подвижных звеньев механизма: $\bar{F}_{оф} = \bar{\Phi}_{\Sigma}$, $M_{оф} = M_{\Phi\Sigma}$ (рис. 6.1, *в*). При этом необходимо отметить, что силы, нагружающие основание, фактически приложены в тех именно местах, где корпус машины (т. е. стойка *4* механизма) крепится к основанию (на рис. 6.1 в местах *K* и *N*). Поэтому $\bar{F}_{оф}$ и $M_{оф}$ — *чисто расчетные* величины, характеризующие лишь суммарный результат динамического воздействия механизма на его основание. Если общий главный вектор сил инерции механизма $\bar{\Phi}_{\Sigma} \neq 0$, т. е. $\bar{F}_{оф} \neq 0$, то такой механизм называется статически неуравновешенным. Если же $M_{\Phi\Sigma} \neq 0$, но $\bar{\Phi}_{\Sigma} = 0$, т. е. $M_{оф} \neq 0$, но $\bar{F}_{оф} = 0$, то говорят о моментной неуравновешенности механизма*.

Специальные мероприятия, выполняемые при проектировании механизма и ставящие своей целью достичь условия

$$\bar{\Phi}_{\Sigma} = 0, \tag{6.3}$$

представляют собой статическое уравновешивание механизма. Отметим, что при этом совсем не ставится задача достичь одновременно выполнения условия $M_{\Phi\Sigma} = 0$. Следовательно, статически уравновешенный механизм никакого динамического воздействия на свое основание *в виде силы не оказывает* ($\bar{F}_{оф} = \bar{\Phi}_{\Sigma} = 0$). Вместе с тем такой механизм в общем случае продолжает оказывать динамическое воздействие в виде момента ($M_{оф} = M_{\Phi\Sigma} \neq 0$).

Из теоретической механики известно, что $\bar{\Phi}_{\Sigma} = -m_{\Sigma}\bar{a}_S$, где m_{Σ} — масса системы всех подвижных звеньев механизма, а $\bar{a}_S$ — ускорение центра масс *S* этой системы. Отсюда следует, что условие (6.3) выполняется только при $a_S = 0$, что, в свою очередь, возможно лишь в случае, когда центр масс *S* системы подвижных звеньев механизма не перемещается. Таким образом, статическое уравновешивание есть такое действие, в результате которого *центр масс* системы подвижных звеньев работающего механизма *становится неподвижным*. Достичь этого можно методом заменяющих масс**. Рассмотрим этот метод.

Пусть дано тело *AB* массой *m*, совершающее плоское или вращательное движение (рис. 6.2, *а*). Сосредоточим массу тела, распределенную по всему его объему, в точках *A* и *B* (рис. 6.2, *б*). Значения сосредоточенных масс m_A и m_B определим из уравнений:

$$m_A + m_B = m; \quad m_A l_{AS} = m_B l_{BS}. \tag{6.4}$$

---

* Термин «статическая неуравновешенность» укоренился, хотя и очень неудачен. Он произошел вследствие того, что статическая неуравновешенность может быть обнаружена и без приведения механизма в движение, т. е. в неподвижном (статическом) состоянии. Однако по своей физической природе так называемая «статическая» неуравновешенность (равно как и моментная) представляет собой явление, в полном смысле динамическое.

** Статическое уравновешивание можно выполнить также и методом векторов главных точек (см., например, [1, 2, 3]).

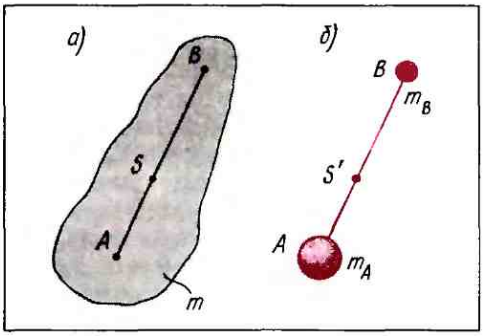


Рис. 6.2

Первое из уравнений (6.4) означает, что масса заменяющей системы $[m_A, m_B]$ равна массе заданного тела; второе — что центр масс S' системы $[m_A, m_B]$ располагается в том же месте, что и центр масс S заданного тела. А отсюда следует, что главный вектор сил инерции заменяющей системы $[m_A, m_B]$ равен главному вектору сил инерции заданного тела. Однако главный момент сил инерции системы масс $[m_A, m_B]$ не равен главному моменту сил инерции заданного тела.

Поскольку при статическом уравновешивании учитываются только главные векторы сил инерции звеньев [см. уравнение (6.3)] и не принимаются во внимание главные моменты сил инерции, то применительно именно к статическому уравновешиванию замена каждого звена двумя сосредоточенными массами является вполне корректной.

Выполним статическое уравновешивание шарнирного четырехзвенника (рис. 6.3, *а*), для которого заданы длины подвижных звеньев l_1, l_2, l_3, их массы m_1, m_2, m_3 и положения центров масс S_1, S_2, S_3.

Заменим каждое звено двумя сосредоточенными массами, используя уравнения (6.4): $m_{1A} = m_1 l_{BS1}/l_1$, $m_{1B} = m_1 l_{AS1}/l_1$, $m_{2B} =$

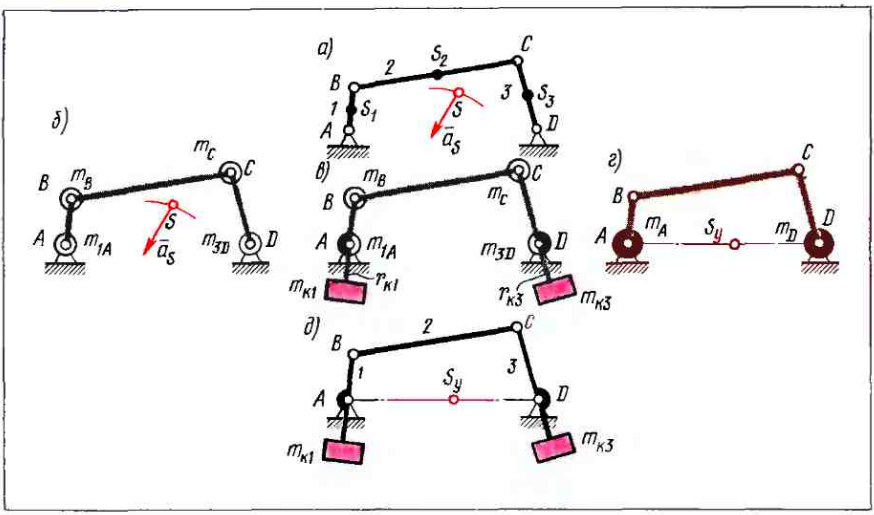


Рис. 6.3

$=m_2 l_{CS2}/l_2$, $m_{2C}=m_2 l_{BS2}/l_2$, $m_{3C}=m_3 l_{DS3}/l_3$, $m_{3D}=m_3 l_{CS3}/l_3$. Объединим массы, размещенные в точках B и C: $m_B=m_{1B}+m_{2B}$, $m_C=m_{2C}+m_{3C}$. Таким образом, заданный механизм окажется замененным четырьмя массами, сосредоточенными в точках A, B, C, D (см. рис. 6.3, *б*, на котором серыми линиями показаны ставшие безынертными звенья механизма).

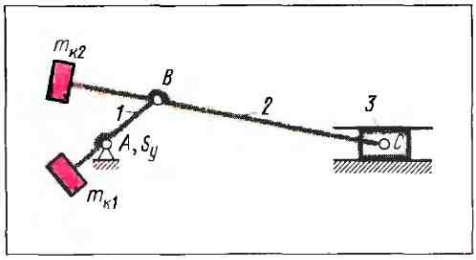


Рис. 6.4

Центр масс S системы $[m_{1A}, m_B, m_C, m_{3D}]$ находится в том же месте, что и центр масс системы подвижных звеньев *1, 2, 3* заданного механизма. При работе механизма центр масс S движется с ускорением $\bar{a}_S$, а это означает, что заданный механизм (рис. 6.3, *а*) статически неуравновешен.

Разместим на звеньях *1* и *3* противовесы (корректирующие массы) $m_{к1}$ и $m_{к3}$ (рис. 6.3, *в*) с таким расчетом, чтобы центры масс систем $[m_B, m_{к1}]$ и $[m_C, m_{к3}]$ оказались бы в неподвижных точках A и D. Для этого должны выполняться соотношения:

$$m_{к1} r_{к1} = m_B l_1, \quad m_{к3} r_{к3} = m_C l_3. \tag{6.5}$$

Объединим массы, размещенные на звеньях *1* и *3*: $m_A = m_{1A} + m_B + m_{к1}$, $m_D = m_{3D} + m_C + m_{к3}$ (рис. 6.3, *в, г*). Таким образом, после размещения противовесов заданный механизм может быть заменен системой двух неподвижных масс m_A и m_D. Поэтому центр масс S_y этой системы, а следовательно, и центр масс заданного механизма, но дополненного противовесами $m_{к1}$ и $m_{к3}$ тоже станет неподвижным (рис. 6.3, *г, д*). А это означает, что статическое уравновешивание заданного механизма достигнуто. Массы $m_{к1}$ и $m_{к3}$ противовесов надо определить из уравнений (6.5), задавшись размерами $r_{к1}$ и $r_{к3}$.

Таким образом, метод заменяющих масс состоит в следующем: каждое звено механизма надо заменить двумя сосредоточенными массами; затем, вводя противовесы (корректирующие массы) и объединяя их с заменяющими массами, добиться того, чтобы объединенные массы оказались бы в конечном счете размещенными в *неподвижных* точках механизма.

Двумя противовесами можно статически уравновесить и кривошипно-ползунный механизм (рис. 6.4) (см. [1, 2, 3]). Однако установка противовеса $m_{к2}$ на шатуне *2* сильно удлиняет его, а вместе с тем увеличивает и габариты всего механизма. Поэтому такое решение конструктивно неудачно и в инженерной практике редко применяется. Обычно кривошипно-ползунный механизм статически уравновешивается только одним противовесом, разме-

щаемым на звене *1*. Но в этом случае статическое уравновешивание будет уже не полным, а частичным.

Допустим, надо статически уравновесить горизонтальный кривошипно-ползунный механизм (рис. 6.5, *а*) таким образом, чтобы устранить динамическое воздействие на основание, но только в вертикальном направлении. Заменим звенья заданного механизма тремя сосредоточенными массами m_{1A}, m_B, m_C (см. рис. 6.5, *б*, на котором серыми линиями показаны ставшие безынертными звенья механизма). Выполняя замену, всю массу m_3 сосредоточим в точке C, поскольку звено *3* движется поступательно. Используя уравнения (6.4), получим $m_{1A} = m_1 l_{BS1}/l_1$, $m_B = m_{1B} + m_{2B} = m_1 l_{AS1}/l_1 + m_2 l_{CS2}/l_2$, $m_C = m_{2C} + m_3 = m_2 l_{BS2}/l_2 + m_3$.

Разместим на звене *1* противовес $m_{к1}$ (рис. 6.5, *в*) с таким расчетом, чтобы центр масс системы $[m_{к1}, m_B]$ оказался бы в неподвижной точке A. Для этого выполним соотношение

$$m_{к1} r_{к1} = m_B l_1. \qquad (6.6)$$

Объединим массы, размещенные на звене *1*: $m_A = m_{1A} + m_B + m_{к1}$ (рис. 6.5, *г*). Таким образом, после размещения противовеса $m_{к1}$ заданный механизм может быть заменен системой двух масс: неподвижной m_A и горизонтально движущейся m_C. Поэтому центр масс S' этой системы, а следовательно, и центр масс заданного механизма, но дополненного противовесом $m_{к1}$ будет двигаться, но только горизонтально (рис. 6.5, *г*, *д*). А отсюда следует, что вертикальное динамическое воздействие на основание механизма будет устранено. Но останется горизонтальное воздействие, которое может быть оценено по формуле $F_{оФx} = \Phi_{\Sigma x} = -(m_{2C} + m_3) a_{Cx}$. Массу противовеса $m_{к1}$ следует определить из уравнения (6.6), задавшись размером $r_{к1}$.

Частичное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма можно продолжить. Используя уравнение (5.13), выразим оставшуюся неуравновешенность $\Phi_{\Sigma x}$ следующим образом:

$$\Phi_{\Sigma x} = \omega_1^2 l_1 m_C \cos\varphi_1 + (1/\lambda_2)\omega_1^2 l_1 m_C \cos 2\varphi_1 = \Phi_{Ix} + \Phi_{IIx}.$$

Здесь $\omega_1 = \omega_{ср} = \text{const}$, $1/\lambda_2 = l_1/l_2$, Φ_{Ix} — сила инерции первого порядка, Φ_{IIx} — сила инерции второго порядка (рис. 6.6).

Устраним ту часть силового воздействия на основание, которое оценивается силой инерции Φ_{Ix}, введя еще два противовеса $[m_к, m_к]$, вращающихся в противоположные стороны с частотой вращения звена *1* (рис. 6.6)*. Эти противовесы вызовут динамическое

---

* Если машина имеет вспомогательные валы, вращающиеся с той же частотой, что и вал звена *1*, то противовесы $[m_к, m_к]$ могут быть закреплены на них, так что никакого конструктивного усложнения механизма при этом не произойдет.

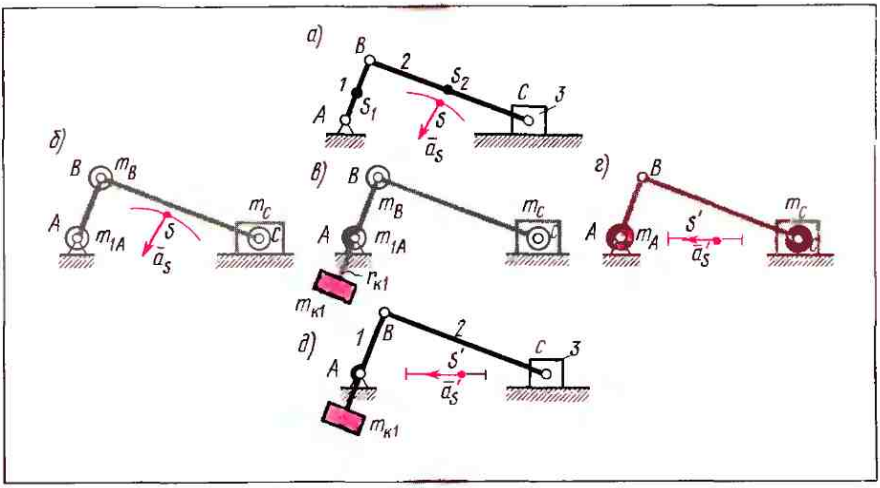


Рис. 6.5

нагружение опор D и E, численно равное центробежным силам инерции противовесов: $|\bar{\Phi}_{цк}| = m_к\omega_1^2 r_к$. Равнодействующая обеих центробежных сил инерции направлена вдоль оси x, и ее проекция на эту ось составит $\Sigma\Phi_{цкx} = -2m_к r_к\omega_1^2\cos\varphi_1$ (рис. 6.6). Если противовесы сделать такими, чтобы $2m_к r_к = m_C l_1$, то получим $\Sigma\Phi_{цкx} + \Phi_{1x} \equiv 0$. Это значит, что благодаря добавочным противовесам часть динамического воздействия, численно равная силе инерции

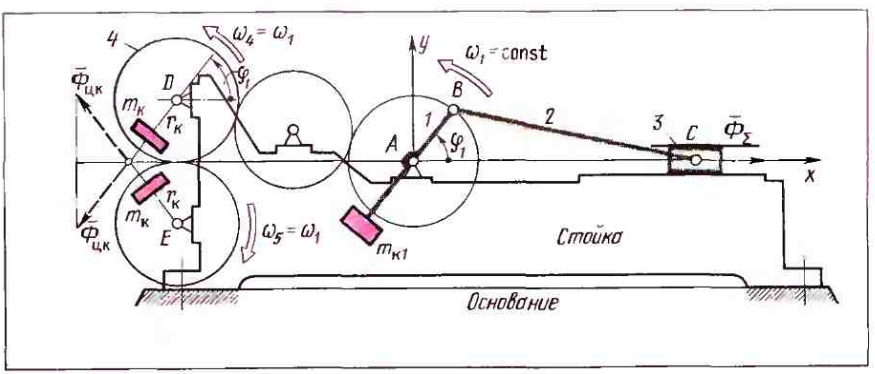


Рис. 6.6

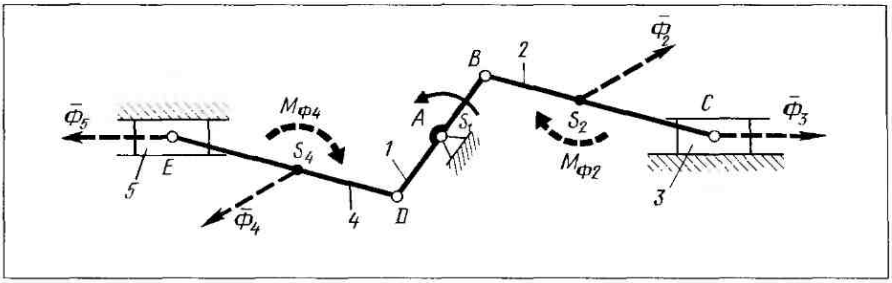


Рис. 6.7

первого порядка Φ_{1x} будет уравновешена. Но другая часть воздействия, оцениваемая силой инерции второго порядка Φ_{11x}, останется. Однако, поскольку Φ_{11x} в несколько раз меньше Φ_{1x}, статическая неуравновешенность, оставшаяся после введения двух добавочных противовесов $[m_к, m_к]$, будет весьма небольшой.

Полной статической уравновешенности можно добиться и без

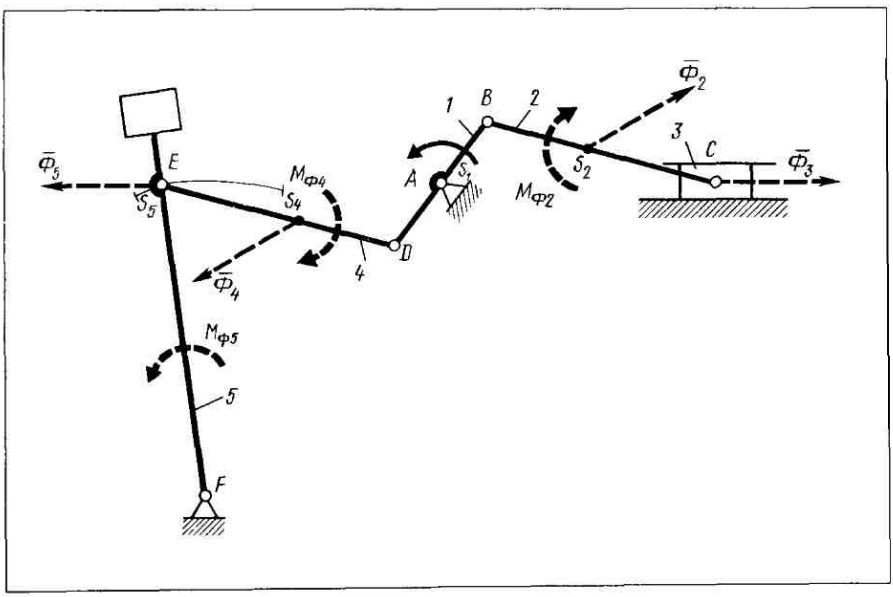


Рис. 6.8

размещения противовесов, если спроектировать так называемый самоуравновешенный механизм. Примером такого механизма является сдвоенный кривошипно-ползунный (рис. 6.7), используемый для мотоциклетных и других двигателей внутреннего сгорания. Механизм выполнен кососимметричным, правая и левая шатунно-поршневые группы *2-3* и *4-5* абсолютно одинаковы, центр масс S_1 коленчатого вала *1* находится на оси вращения ($\bar{\Phi}_1 = 0$). Поэтому $\bar{\Phi}_\Sigma = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 + \bar{\Phi}_4 + \bar{\Phi}_5 = 0$ (рис. 6.7), что и свидетельствует о полной статической уравновешенности механизма. Однако надо обратить внимание на то, что $M_{\Phi\Sigma} = M_{\Phi 2} + M_{\Phi 4} + M_A(\bar{\Phi}_2) + M_A(\bar{\Phi}_4) \neq 0$, т. е. моментной уравновешенностью механизм не обладает.

Другим примером служит механизм кузнечно-прессовой машины (рис. 6.8). Для снижения потерь трения вместо левого ползуна применено коромысло *5*. Оно имеет такую конструкцию, что центр масс S_5 находится в точке E и $m_5 = m_3$. Центр масс S_5 совершает возвратное движение по дуге (а не по прямой, как C), но с тем же размахом. Поэтому, строго говоря, $\bar{\Phi}_5 \neq \bar{\Phi}_3$, $\bar{\Phi}_4 \neq \bar{\Phi}_2$. Однако главные векторы сил инерции $\bar{\Phi}_5$ и $\bar{\Phi}_3$, а также $\bar{\Phi}_4$ и $\bar{\Phi}_2$ попарно очень близки по модулю друг к другу и почти противоположно направлены. Поэтому $\bar{\Phi}_\Sigma \approx 0$, т. е. механизм обладает практически полной статической уравновешенностью. Но моментной уравновешенностью он не обладает.

Отметим весьма существенное свойство механизма, полностью статически уравновешенного: такой механизм сохраняет свою полную статическую уравновешенность *при любой величине* ω_1 угловой скорости начального звена, как *постоянной,* так и *переменной.*

§ 6.2 Моментное уравновешивание

Моментное уравновешивание выполняется для механизмов, статически полностью уравновешенных ($\bar{\Phi}_\Sigma = 0$). Задачей моментного уравновешивания является достижение условия

$$M_{\Phi\Sigma} = 0. \tag{6.7}$$

Следовательно, в результате моментного уравновешивания *устраняется* динамическое воздействие механизма на его основание, *оказываемое в виде момента:* $M_{o\Phi} = M_{\Phi\Sigma} = 0$. Рассмотрим моментное уравновешивание на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 6.1, *а*, 6.3, *а*).

Расчет выполним при условии $\omega_1 = \text{const}$. По уравнению (6.2) подсчитаем $M'_{\Phi\Sigma}$ — общий главный момент сил инерции, заменяющий собой всю систему сил инерции механизма, полностью стати-

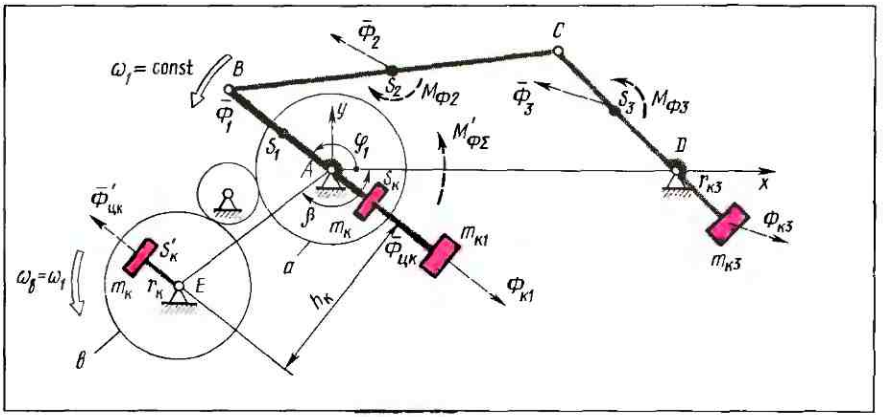


Рис. 6.9

чески уравновешенного ($\bar{\Phi}_\Sigma = 0$), но не прошедшего еще моментного уравновешивания ($M'_{\Phi\Sigma} \neq 0$). При этом надо иметь в виду, что после полного статического уравновешивания в схеме механизма появились противовесы (рис. 6.3, *д*), массы $m_{к1}$ и $m_{к3}$ которых будем приближенно рассматривать как сосредоточенные. Момент силы инерции $\bar{\Phi}_{к3}$ противовеса $m_{к3}$ также должен быть включен в алгебраическое уравнение (6.2). Заметив это, получим

$$M'_{\Phi\Sigma} = M_{\Phi 2} + M_{\Phi 3} + M_A(\bar{\Phi}_2) + M_A(\bar{\Phi}_3) + M_A(\bar{\Phi}_{к3}) \qquad (6.8)$$

(см. рис. 6.9, причем противовесы $[m_к, m_к]$ учитывать пока не надо). Важно подчеркнуть, что поскольку момент $M'_{\Phi\Sigma}$ определяется при условии $\bar{\Phi}_\Sigma = 0$, то его величина не зависит от выбора центра приведения, т. е. в качестве последнего можно выбрать *любую* точку, а не обязательно точку A.

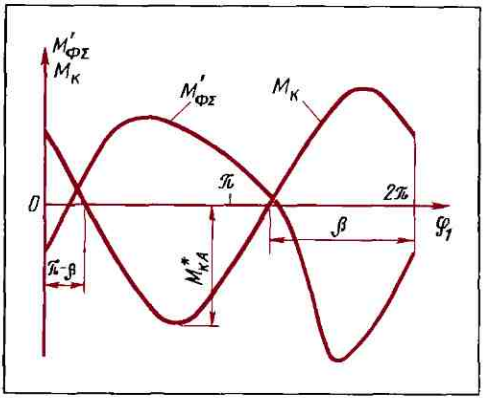


Рис. 6.10

В процессе движения механизма все слагаемые в правой части уравнения (6.8), а следовательно, и момент $M'_{\Phi\Sigma}$ периодически изменяются. Для одного оборота начального звена это изменение показано на рис. 6.10.

Введем в схему механизма два одинаковых противовеса массой $m_к$ каждый, ко-

торые прикрепим к зубчатым колесам a и b (рис. 6.9). Зубчатое колесо a жестко связано со звеном *1* и имеет угловую скорость $\omega_1 = \text{const}$; равное ему колесо b вращается в ту же сторону и с такой же угловой скоростью, что и колесо a. Радиальные координаты $r_к$ противовесов (корректирующих масс) одинаковы; угловые координаты противовесов в любом положении механизма отличаются друг от друга на 180°.

Вследствие этого центробежные силы инерции противовесов составляют пару сил $[\bar{\Phi}_{цк}, \bar{\Phi}'_{цк}]$ с плечом $h_к$ (рис. 6.9). Плечо пары $h_к = l_{AE}\sin(\varphi_1 + \beta)$; модуль центробежной силы $\Phi_{цк} = m_к r_к \omega_1^2$. Поэтому момент пары сил, который в дальнейшем будем называть корректирующим, составляет

$$M_к = m_к r_к \omega_1^2 l_{AE}\sin(\varphi_1 + \beta) = M_{кA}\sin(\varphi_1 + \beta). \qquad (6.9)$$

Положение точки E (рис. 6.9) надо выбрать так, чтобы корректирующий момент $M_к$ был направлен навстречу моменту $M'_{Φ\Sigma}$.

После введения противовесов в точках $S_к$ и $S'_к$ вся система сил инерции механизма будет сведена к общему главному моменту $M_{Φ\Sigma} = M'_{Φ\Sigma} + M_к$. Момент $M_к$ согласно уравнению (6.9) изменяется по синусоидальному закону. Но из рис. 6.10 видно, что изменение момента $M'_{Φ\Sigma}$ не подчиняется закону синуса, хотя и сравнительно близко к нему. Следовательно, корректирующий момент $M_к$ не может точно уравновесить момент $M'_{Φ\Sigma}$. Поэтому надо найти такое значение угла β и амплитуды $M_{кA}$, при котором синусоидальная зависимость наилучшим образом аппроксимировала бы функцию $-M'_{\Sigma Φ}(\varphi_1)$. Тогда моментное уравновешивание будет практически выполнено: $M_{оΦ} = M_{Φ\Sigma} = M'_{Φ\Sigma} + M_к \approx 0$. Обозначим найденное наилучшее значение амплитуды символом $M^*_{кA}$ (рис. 6.10), после чего определим массу каждого противовеса: $m_к = M^*_{кA}/r_к\omega_1^2 l_{AE}$.

Таким образом, полностью уравновешенный механизм, т. е. для которого достигнуто выполнение условий $\bar{F}_{оΦ} = \bar{Φ}_\Sigma = 0$ и $M_{оΦ} = M_{Φ\Sigma} = 0$, никакого динамического воздействия на свое основание не оказывает, хотя и имеет звенья, движущиеся ускоренно.

Различные современные методы уравновешивания механизмов всесторонне изложены В. А. Щепетильниковым (см.: *Щепетильников В. А.* Уравновешивание механизмов. М., 1982).

§ 6.3 Неуравновешенность ротора и ее виды

Ротором в теории балансировки (уравновешивания) называется любое вращающееся тело. Поэтому ротором является якорь электродвигателя, коленчатый вал компрессора, шпиндель токарного станка, баланс часов и т. п.

Из теоретической механики известно, что давление вращающегося тела на его опоры в общем случае складывается из двух составляющих: *статической,* вызванной действием заданных сил (силы тяжести тела и др.), и *динамической,* обусловленной уско-

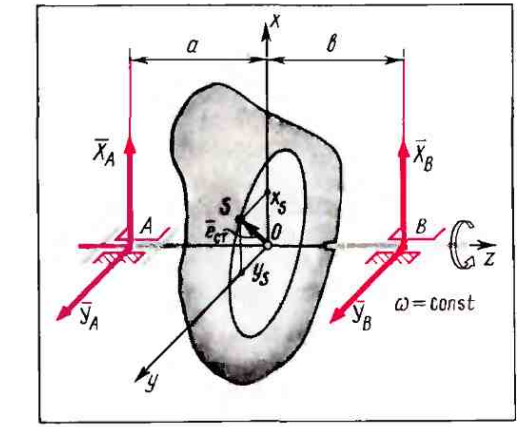


Рис. 6.11

ренным движением материальных частиц, из которых состоит вращающееся тело (т. е. ротор). Если динамическая составляющая не равна нулю, то ротор в этом случае называется неуравновешенным.

При *равномерном* вращении ротора вокруг оси z (рис. 6.11) проекции динамической составляющей определяются следующим образом: $X_A+X_B=\Phi_x$, $Y_A+Y_B=\Phi_y$, $-X_Aa+X_Bb=M_{\Phi y}$, $Y_Aa-Y_Bb=M_{\Phi x}$. Как видно, неуравновешенность численно оценивается посредством проекций главного вектора $\bar{\Phi}$ и главного момента $\bar{M}_\Phi$ центробежных сил инерции ротора. Эти проекции подсчитываются по формулам:

$$\Phi_x=\omega^2 m x_S;\ \Phi_y=\omega^2 m y_S;\ M_{\Phi x}=-\omega^2 J_{yz};\ M_{\Phi y}=\omega^2 J_{xz}, \qquad (6.10)$$

где m — масса ротора; J_{yz} и J_{xz} — центробежные моменты инерции ротора относительно системы координат $Oxyz$ (рис. 6.11). Плоскость Oxy проходит через центр масс S ротора, а вся система координат $Oxyz$ вращается вместе с ротором. Отметим, что в рассматриваемой динамической задаче главный момент сил инерции ротора $\bar{M}_\Phi$ есть величина векторная. Как следует из уравнений (6.10), неуравновешенность ротора возрастает пропорционально квадрату его угловой скорости. Поэтому если быстроходные роторы (рабочие колеса турбин, шлифовальные круги, магнитные барабаны ЭВМ и многие другие) неуравновешены, то они оказывают на свои опоры динамические давления, вызывающие вибрацию стойки (станины) и ее основания. Устранение этого вредного воздействия называется балансировкой (уравновешиванием) ротора. Решение данной задачи относится к динамическому проектированию машин.

Модуль главного вектора центробежных сил инерции ротора согласно уравнениям (6.10) составит $\Phi=\omega^2 m\sqrt{x_S^2+y_S^2}$. В векторном виде запишем $\bar{\Phi}=\omega^2 m\bar{e}_{ст}$, где $\bar{e}_{ст}=\bar{r}_{OS}$ — радиус-вектор центра масс S ротора, координирующий его эксцентричное положение (рис. 6.11) и именуемый эксцентриситетом массы ротора. Обозначим

$$\bar{D}_{ст}=m\bar{e}_{ст}. \qquad (6.11)$$

Вектор $\bar{D}_{ст}$ называется главным вектором дисбалансов ротора. Очевидно, что $\bar{\Phi}=\omega^2\bar{D}_{ст}$.

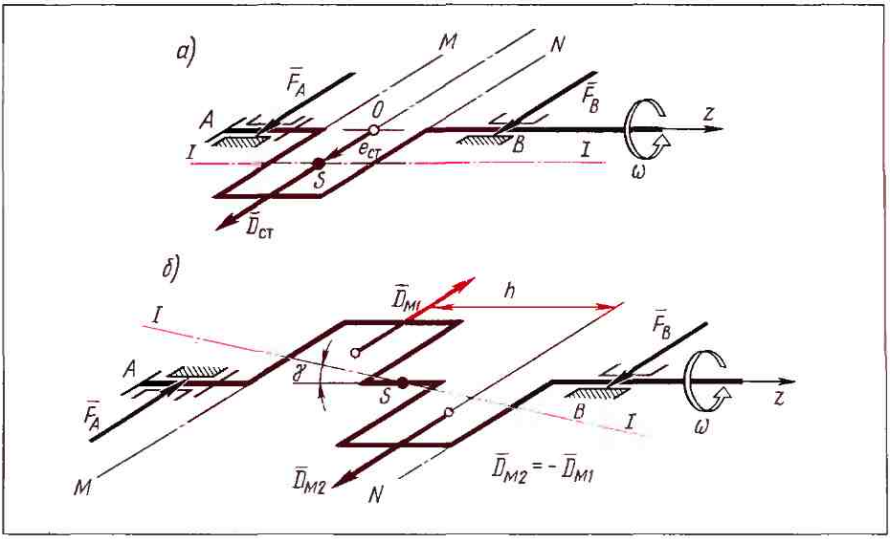


Рис. 6.12

Модуль главного момента центробежных сил инерции ротора согласно уравнениям (6.10) составит $M_\Phi = \omega^2 \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2} = \omega^2 M_D$,

где
$$M_D = \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2}. \qquad (6.12)$$

Величина M_D называется главным моментом дисбалансов ротора и имеет векторный смысл, т. е. $\bar{M}_\Phi = \omega^2 \bar{M}_D$. В дальнейшем неуравновешенность ротора количественно будем характеризовать не через $\bar{\Phi}$ и $\bar{M}_\Phi$, а через пропорциональные им главный вектор $\bar{D}_{ст}$ и главный момент $\bar{M}_D$ дисбалансов ротора.

Виды неуравновешенности ротора. Статическая неуравновешенность свойственна такому ротору, центр масс S которого не находится на оси вращения, но главная центральная ось инерции (ось $I—I$) которого параллельна оси вращения. В этом случае $e_{ст} \neq 0$, $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Следовательно, согласно уравнениям (6.11) и (6.12) статическая неуравновешенность выражается только главным вектором $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов, в то время как главный момент дисбалансов $\bar{M}_D = 0$. Вектор $\bar{D}_{ст}$ направлен радиально и вращается вместе с ротором. Примером может служить одноколенчатый вал (рис. 6.12, *а*). Опоры A и B нагружены силами $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Статическая неуравновешенность может быть устранена, если к ротору прикрепить добавочную массу $m_к$, называемую корректирующей. Ее надо разместить с таким расчетом, чтобы $\bar{D}_к = m_к \bar{e}_к = -\bar{D}_{ст}$. Это значит, что центр корректирующей массы должен находиться на линии действия OS вектора $\bar{D}_{ст}$, а вектор $\bar{e}_к$ должен быть направлен в сторону, противоположную вектору $\bar{e}_{ст}$.

Однако статическую балансировку не всегда удается выполнить одной корректирующей массой. Так, конструкция одноколенчатого вала (рис. 6.12, *а*) вынуждает применить две массы, расположенные в плоскостях коррекции M и N, так как пространство между этими двумя плоскостями должно быть полностью свободно для движения шатуна. В этом случае вектор $\bar{D}_к$ будет выражать суммарное воздействие обеих корректирующих масс. Следовательно, число и расположение плоскостей коррекции выбирают сообразно конструкции и назначению ротора.

Моментная неуравновешенность имеет место в том случае, когда центр масс S ротора находится на оси вращения, а главная центральная ось инерции $I—I$ ротора наклонена к оси вращения ротора под углом γ (рис. 6.12, *б*). В этом случае $e_{ст} = 0$, $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$. Следовательно, $\bar{D}_{ст} = 0$, так что моментная неуравновешенность выражается только лишь главным моментом $\bar{M}_D$ дисбалансов, т. е. парой дисбалансов $[\bar{D}_{M1}, \bar{D}_{M2}]$, которая вращается вместе с ротором. Примером может служить двухколенчатый вал, для которого $M_D = D_{M1}h$. Опоры A и B нагружены парой сил $[\bar{F}_A, \bar{F}_B]$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Так как пара уравновешивается только парой, то устранить моментную неуравновешенность можно в том случае, если применить не менее чем две корректирующие массы. Их расположение в плоскостях коррекции и их величины должны быть такими, чтобы дисбалансы корректирующих масс составили бы именно пару. Момент $\bar{M}_{Dк}$ этой пары должен быть равен $-\bar{M}_D$. Значит, момент $\bar{M}_{Dк}$ должен быть направлен противоположно моменту пары $[\bar{D}_{M1}, \bar{D}_{M2}]$, т. е. применительно к положению ротора, изображенному на рис. 6.12, б, — против часовой стрелки.

Динамическая неуравновешенность является совокупностью двух предыдущих, т. е. $e_{ст} \neq 0$, $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$. Следовательно, динамическая неуравновешенность выражается через $\bar{D}_{ст}$ и $\bar{M}_D$. Из теоретической механики известно, что такая система нагружения эквивалентна двум скрещивающимся векторам. Поэтому динамическая неуравновешенность может быть выражена также и другим образом, а именно двумя скрещивающимися векторами дисбалансов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, которые расположены в двух плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и вращаются вместе с ротором («крест дисбалансов»). Примером динамически неуравновешенного ротора может служить двухколенчатый вал с эксцентрично закрепленным на нем круглым диском (рис. 6.13). Опоры A и B нагружены скрещивающимися силами $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Динамическую неуравновешенность можно устранить двумя корректирующими массами, расположенными в плоскостях коррекции, перпендикулярных оси вращения (см. § 6.4).

Из сказанного следует, что ликвидация всякой неуравновешенности — и статической, и моментной, и динамической — имеет своим результатом то, что главная центральная ось инерции ротора *совмещается* с его осью вращения, или аналитически $\bar{D}_{ст} = 0$,

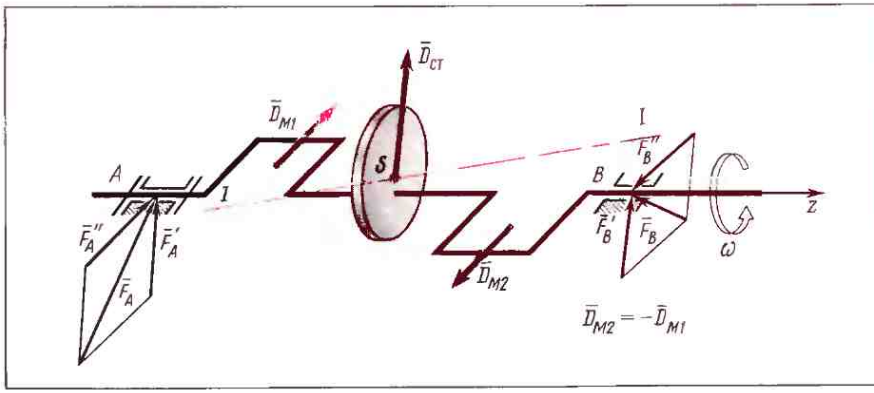


Рис. 6.13

$\bar{M}_D = 0$. В этом случае ротор называется полностью сбалансированным. Отметим важное свойство такого ротора: если ротор полностью сбалансирован для некоторого значения угловой скорости ω, то он сохранит свою полную сбалансированность при *любой* другой угловой скорости, как *постоянной*, так и *переменной*.

§ 6.4 Динамическая балансировка роторов при проектировании

Если эксплуатация машины или прибора требует применения полностью сбалансированного ротора, а конструкция его такова, что ротор неуравновешен (например, рис. 6.12, 6.13), то балансировку такого ротора надо начать уже при проектировании.

Пусть ротор представляет собой совокупность нескольких деталей *1, 2, 3* (рис. 6.14, *а*), вращающихся, как единое целое. Массы m_i и координаты a_i, e_i и φ_i центров масс S_i всех этих деталей известны. Располагая этими сведениями, следует подсчитать дисбалансы неуравновешенных масс по формуле $\bar{D}_i = m_i\bar{e}_i$.

Выполняя балансировку ротора, можно было бы каждой неуравновешенной массе противопоставить свою корректирующую массу. Однако такое решение не является целесообразным, так как в системе ротора почти всегда происходит частичное взаимное уравновешивание дисбалансов. Поэтому следует применить другой метод.

Назначим две плоскости приведения *A* и *B*, перпендикулярные оси вращения *z*. На рис. 6.14, *а* плоскостью *A* выбрана та, в которой движется центр масс S_1, а плоскость *B* удалена от нее на расстояние *l*. Приведем к плоскостям *A* и *B* дисбалансы $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$ всех неуравновешенных масс, т. е. заменим каждый вектор дисбаланса двумя, параллельными ему и расположенными в плоскостях приве-

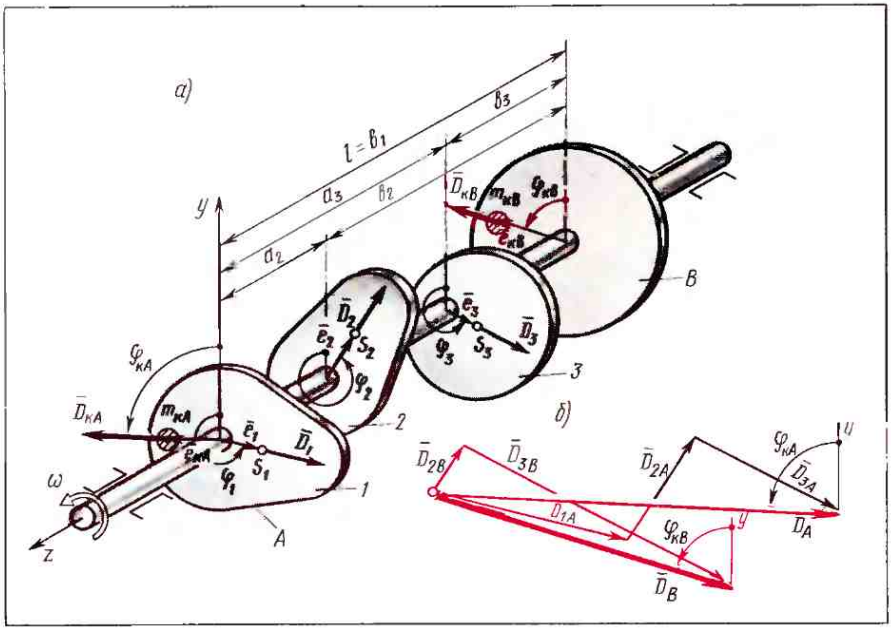


Рис. 6.14

дения A и B. Для этого используем формулы: $D_{iA} = D_i b_i / l$, $D_{iB} = D_i a_i / l$, т. е. применительно к рис. 6.14, *а*:

$$D_{1A} = D_1 b_1 / l = D_1;\ D_{2A} = D_2 b_2 / l;\ D_{3A} = D_3 b_3 / l;$$
$$D_{1B} = D_1 a_1 / l = 0;\ D_{2B} = D_2 a_2 / l;\ D_{3B} = D_3 a_3 / l. \qquad (6.13)$$

В результате приведения пространственная система дисбалансов $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$ получилась замененной двумя плоскими системами. Сложим дисбалансы, расположенные в каждой из плоскостей (рис. 6.14, *б*):

$$\bar{D}_A = \Sigma \bar{D}_{iA} = \bar{D}_{1A} + \bar{D}_{2A} + \bar{D}_{3A};\ \bar{D}_B = \Sigma \bar{D}_{iB} = \bar{D}_{2B} + \bar{D}_{3B}. \qquad (6.14)$$

Таким образом, неуравновешенность заданного ротора можно представить *двумя скрещивающимися* векторами дисбалансов $\bar{D}_A$ и $\bar{D}_B$ (на рис. 6.14, *а* не показаны), расположенными в плоскостях приведения A и B. Поэтому заданный ротор, как и всякий другой, можно сбалансировать также двумя корректирующими массами. Если позволяет конструкция, разместим эти массы в плоскостях приведения A и B. Тогда они будут одновременно и плоскостями коррекции.

Условиями полной балансировки будут $\bar{D}_{кA} = -\bar{D}_A$, $\bar{D}_{кB} = -\bar{D}_B$. Векторы $\bar{D}_{кA}$ и $\bar{D}_{кB}$ показаны на рис. 6.14, *а*. Их угловые координаты $\varphi_{кA}$ и $\varphi_{кB}$ следует взять с планов дисбалансов (рис. 6.14, *б*). Корректирующие массы равны: $m_{кA} = D_{кA}/e_{кA}$, $m_{кB} = D_{кB}/e_{кB}$, где $e_{кA}$ и $e_{кB}$ — их эксцентриситеты (рис. 6.14, *а*), назначаемые сообразно конструктивным возможностям ротора.

Устранение неуравновешенности ротора состоит в том, что корректирующие массы $m_{кA}$ и $m_{кB}$ должны быть размещены в плоскостях коррекции A и B в местах, определяемых координатами $\varphi_{кA}$, $e_{кA}$ и $\varphi_{кB}$, $e_{кB}$. Отметим, что вместо корректирующих масс (противовесов) можно применить так называемые «антипротивовесы». Это значит, что на линии действия вектора $\bar{D}_{кB}$ размещается не корректирующая масса, а диаметрально противоположно ей из ротора удаляется соответствующее количество материала (удаляется, как говорят, «тяжелое место» ротора). То же самое можно сделать и в другой плоскости коррекции. Конечно, возможность применения такого приема непосредственно определяется конструкцией ротора.

В заключение § 6.4 рассмотрим ротор, размеры которого вдоль оси вращения малы по сравнению с его радиальными размерами. Это значит, применительно к рис. 6.14, *а*, что детали *1, 2, 3* расположены весьма близко друг к другу, так что размеры a_2 и a_3 малы. Тогда согласно формулам (6.13) дисбалансы D_{2B} и D_{3B} будут также малыми, и ими можно пренебречь. Следовательно, согласно уравнениям (6.14) $D_B \approx 0$, так что вся неуравновешенность ротора будет выражаться практически только одним дисбалансом $\bar{D}_A$ и будет поэтому статической. А отсюда вытекает, что и балансировка такого ротора с малыми размерами вдоль оси вращения должна быть статической. Ее можно выполнить одной корректирующей массой, назначив плоскость коррекции так, чтобы она проходила через центр масс ротора. Добавим, что при малости размеров a_2 и a_3, т. е. координат z центров масс S_2 и S_3 (рис. 6.14, *а*) центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} ротора будут также малы. Следовательно, согласно уравнению (6.12) малым будет и главный момент дисбалансов $\bar{M}_D$ такого ротора, так что им можно пренебречь. Это еще раз подтверждает то, что неуравновешенность ротора, имеющего малые размеры вдоль оси вращения, практически будет только статической.

§ 6.5 Статическая и динамическая балансировка изготовленных роторов

Полностью сбалансированный при проектировании ротор после изготовления обладает тем не менее некоторой неуравновешенностью, вызванной неоднородностью материала и отклонениями фактических размеров ротора от их номинальных значений. Такая неуравновешенность устраняется в процессе изготовления на специальных балансировочных станках. Балансировка может быть как автоматической, так и неавтоматической. Сначала рассмотрим статическую и динамическую балансировки, выполняемые в неавтоматическом режиме.

Статическая балансировка. В § 6.4 было показано, что для роторов с малыми размерами вдоль оси вращения (шкивы, маховики, диски и т. п.) допустимо ограничиться статической балансировкой.

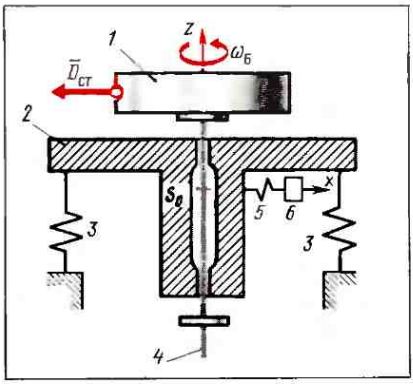


Рис. 6.15

При этом определяется только главный вектор дисбалансов $\bar{D}_{ст}$. Если требуется невысокая точность балансировки, то она выполняется в статическом режиме [2, 3, 8, т. 6].

Более точным и перспективным в отношении автоматизации процесса балансировки является способ определения статической неуравновешенности *в процессе вращения ротора,* т. е. в динамическом режиме*. Одним из примеров оборудования, работающего по этому принципу, служит балансировочный станок, изображенный на рис. 6.15. Неуравновешенный ротор *1,* закрепленный на шпинделе *4,* вращается с постоянной скоростью $\omega_б$ в подшипниках, смонтированных в плите *2.* Эта плита опирается на станину посредством упругих элементов *3.* С плитой *2* с помощью мягкой пружины *5* связана масса *6* сейсмического датчика. Собственная частота колебаний массы датчика должна быть значительно ниже частоты вращения ротора. Массе *6* дана свобода прямолинейного перемещения вдоль оси *x,* проходящей через центр масс S_0 плиты.

При вращении шпинделя вместе с ротором ось *z* под влиянием неуравновешенности ротора описывает коническую поверхность, а плита *2* совершает пространственное движение. Составляющая этого движения, направленная вдоль оси *x,* воспринимается массой *6.* Вынужденные колебания массы относительно плиты *1* преобразуются датчиком в ЭДС, направляемую в электронное счетно-решающее устройство (на рис. 6.15 не показано), являющееся неотъемлемой частью балансировочного станка. Это устройство выдает сведения об искомой неуравновешенности в виде модуля и угловой координаты главного вектора $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов ротора. (На рис. 6.15 статическая неуравновешенность ротора условно представлена в виде неуравновешенности некоторой точечной массы, дисбаланс которой равен главному вектору $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов ротора.) После определения $\bar{D}_{ст}$ оператор устраняет неуравновешенность обычно способом удаления материала (удаления «тяжелого места») (см. § 6.4).

Динамическая балансировка. Роторы, размеры которых вдоль оси вращения значительны, требуют динамической балансировки, так как главный момент дисбалансов $\bar{M}_D$ таких роторов будет существенным (см. § 6.4). Поэтому неуравновешенность будет выра-

* Отсюда следует, что термин «статическая неуравновешенность» не только очень неудачен (см. сноску § 6.1), но и попросту устаревает, поскольку современные точные и высокопроизводительные балансировочные станки определяют так называемую «статическую неуравновешенность» в динамическом режиме.

жаться не только главным вектором дисбалансов $\bar{D}_{ст}$, но и главным моментом дисбалансов $\bar{M}_D$, или двумя скрещивающимися векторами дисбалансов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ (см. § 6.3 и 6.4), т. е. будет динамической. Такую неуравновешенность можно условно представить в виде неуравновешенности двух точечных масс, дисбалансы которых соответственно равны $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$.

Ось вращения ротора в станках, предназначенных для динамической балансировки, может быть или неподвижной, или может двигаться относительно станины. В зависимости от числа возможных движений оси вращения (числа ее степеней свободы) балансировочные станки целесообразно разделить на три группы. К первой группе относятся станки, когда ось вращения балансируемого ротора неподвижна; ко второй, — когда ось вращения колеблется относительно другой, неподвижной, оси; к третьей — когда ось вращения совершает пространственное движение [4, 8, т. 6]. Примеры станков первой группы будут рассмотрены ниже.

Станок, изображенный на рис. 6.16, *а*, относится ко второй группе. Этот станок не имеет электронно-решающих устройств. Балансируемый ротор *1* укладывается на подшипники рамы *2*, которая шарнирно оперта на станину *3*. Другая опора рамы — упругая (опора *5*). Вследствие этого рама может покачиваться относительно неподвижной оси *O*, проходящей через центр шарнира перпендикулярно плоскости рисунка. Вместе с рамой будет покачиваться относительно станины и ротор со своей осью вращения *z*.

Представим динамическую неуравновешенность ротора в виде двух дисбалансов $\bar{D}_A$ и $\bar{D}_B$, приведенных к плоскостям коррекции *A* и *B*. Метод балансировки предусматривает сначала определение дисбаланса $\bar{D}_A$, а затем дисбаланса $\bar{D}_B$. Чтобы при выявлении дисбаланса $\bar{D}_A$ исключить влияние дисбаланса $\bar{D}_B$, ротор надо уложить на подшипники рамы определенным образом: плоскость коррекции *B* должна пройти через ось шарнира *O* (рис. 6.16, *а*). Тогда дисбаланс $\bar{D}_B$ момента относительно этой оси не даст и, следовательно, на вынужденные колебания системы ротор—рама влиять не будет.

Сделаем основной пуск, т. е. приведем ротор во вращение. Момент $M_{DA} = D_A l \cos\omega_б l$ вынудит колебания системы ротор — рама. Амплитуду этих колебаний замерим индикатором *4*. Замеры будем проводить при угловой скорости $\omega_б$ балансировки, равной угловой частоте собственных колебаний системы. С достаточной степенью точности можно считать, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна дисбалансу, т. е.

$$S_A = \mu_D D_A , \qquad (6.15)$$

где S_A — замеренная амплитуда, а D_A — модуль дисбаланса $\bar{D}_A$.

Коэффициент пропорциональности μ_D пока неизвестен, а значит, из уравнения (6.15) нельзя определить искомый дисбаланс D_A. Поэтому сделаем *кроме основного еще два пуска,* называемых пробными, откуда описываемый метод балансировки на рамном станке получил название «метода двух пробных пусков» (см. [1, 2, 5, 8],

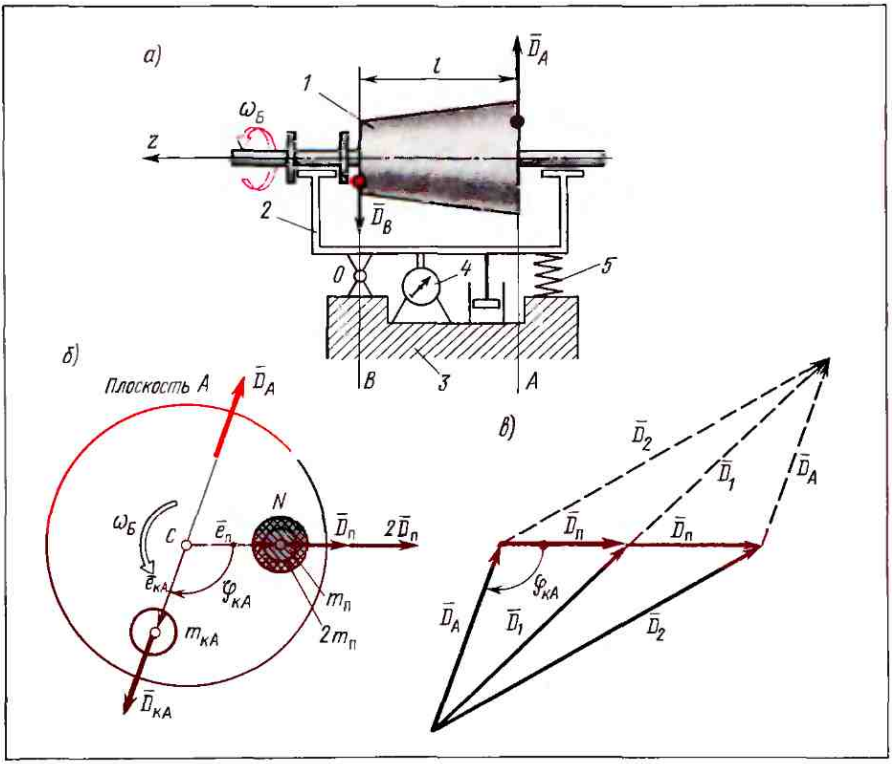


Рис. 6.16

Савелова А. А. Теория и практика балансировки вращающихся машинных частей. Изд. МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1946).

Перед первым пробным пуском в произвольном месте плоскости коррекции A (например, в точке N с эксцентриситетом $e_п$, рис. 6.16, *б*) к ротору прикрепим пробную массу $m_п$, модуль дисбаланса которой равен

$$D_п = m_п e_п . \tag{6.16}$$

Сделаем первый пробный пуск. Теперь колебания с амплитудой S_1 будут вынуждаться моментом суммарного дисбаланса

$$\bar{D}_1 = \bar{D}_A + \bar{D}_п , \tag{6.17}$$

причем замеренная амплитуда $S_1 = \mu_D D_1$.

Перед вторым пробным пуском прикрепим в точке N удвоенную пробную массу $2m_п$, дисбаланс которой также удвоится. Осуществив второй пробный пуск, замерим амплитуду S_2 колебаний, вынужденных моментом дисбаланса

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_A + 2\bar{D}_п ; \tag{6.18}$$

при этом $S_2 = \mu_D D_2$.

Таким образом, выполнив основной пуск и два пробных, получим величины амплитуд S_A, S_1, S_2.

На рис. 6.16, *в* изображены векторные уравнения (6.17) и (6.18). Использовав свойство диагоналей параллелограмма, получим из рис. 6.16, *в* модуль дисбаланса $\bar{D}_п$:

$$D_п = \sqrt{(D_A^2 + D_2^2 - 2D_1^2)/2}\,.$$

Помножим обе части этого уравнения на μ_D и на основании пропорциональности амплитуд и дисбалансов, а также уравнения (6.16) найдем значение коэффициента пропорциональности μ_D:

$$\mu_D = (\sqrt{S_A^2 + S_2^2 - 2S_1^2})/(m_п e_п \sqrt{2}\,)\,. \qquad (6.19)$$

Теперь из уравнения (6.15) определим модуль D_A искомого дисбаланса: $D_A = S_A/\mu_D$.

Для балансировки ротора в плоскости A в этой плоскости следует расположить корректирующую массу $m_{кA}$, дисбаланс которой определяется из уравнения $\bar{D}_{кA} = -\bar{D}_A$. Величину самой массы $m_{кA}$ получим, задавшись эксцентриситетом $e_{кA}$ (рис. 6.16, *б*): $m_{кA} = D_{кA}/e_{кA}$.

Угловую координату $\varphi_{кA}$ найдем через ее косинус (рис. 6.16, *в*): $\cos\varphi_{кA} = (D_A^2 + D_п^2 - D_1^2)/2D_A D_п$, или $\cos\varphi_{кA} = (S_A^2 + S_п^2 - S_1^2)/2S_A S_п$, где $S_п = \mu_D D_п$. Полученному значению косинуса соответствуют два угла, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку. Поэтому верное направление отсчета угла $\varphi_{кA}$ от линии CN наперед неизвестно и его следует определить способом проб.

Получив из опыта амплитуды S_A, S_1, S_2, можно найти искомый дисбаланс D_A и угловую координату $\varphi_{кA}$ также и графическим путем.

Чтобы определить вектор дисбаланса $\bar{D}_B$, ротор *1* нужно снять с подшипников рамы *2*, повернуть вокруг вертикальной оси и вновь положить на подшипники, но так, чтобы с осью шарнира O на этот раз была бы совмещена плоскость коррекции A. Тогда влияние момента дисбаланса $\bar{D}_A$ на вынужденные колебания системы ротор — рама будет исключено, и они будут происходить только под воздействием момента $M_{DB} = D_B l \cos\omega_б t$. После такой перекладки ротора надо методом двух пробных пусков определить дисбаланс $\bar{D}_B$, а затем отбалансировать ротор в плоскости коррекции B.

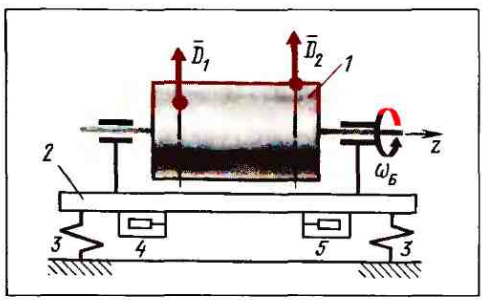


Рис. 6.17

Пример станка третьей группы, когда ось вращения ротора совершает во время балансировки пространственное движение, показан на рис. 6.17. Неуравновешенный ротор *1* вращается с по-

стоянной угловой скоростью ω_6 в подшипниках, смонтированных на плите *2*. Она опирается на станину посредством четырех пружин *3*. С плитой *2* связаны два сейсмических датчика *4* и *5*.

При вращении ротора под влиянием его неуравновешенности ось *z* и плита *2* совершают пространственное движение, которое воспринимается датчиками *4* и *5*. Датчики преобразуют вынужденные механические колебания плиты в ЭДС, направляемые в электронное счетно-решающее устройство (на рис. 6.17 не показано), которое является составной частью балансировочного станка. Электросхема этого устройства смонтирована таким образом, что измеритель дисбаланса $\bar{D}_1$ настраивается на исключение в своих показаниях влияния дисбаланса $\bar{D}_2$ и дает, таким образом, сведения только о дисбалансе $\bar{D}_1$. Точно так же благодаря специальной настройке измеритель дисбаланса $\bar{D}_2$ дает сведения только об этом дисбалансе. Следовательно, оба искомых дисбаланса одновременно определяются электронным устройством, чем обеспечивается *высокая производительность* станка. После определения $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ оператор балансирует ротор в плоскостях коррекции, обычно способом удаления материала (см. § 6.4).

Автоматическая балансировка. Станок для динамической балансировки называется автоматическим, если обе фазы балансировки — как измерение неуравновешенности, так и ее устранение — осуществляются без участия оператора. Возможны два метода автоматической балансировки: дискретный метод, когда обе фазы выполняются последовательно, причем вторая фаза — на неподвижном роторе, и непрерывный метод, когда обе фазы совмещены во времени и ротор во всем процессе балансировки не останавливается.

Устранять неуравновешенность можно двумя способами — добавлением или удалением корректирующих масс $m_{к1}$ и $m_{к2}$ в плоскостях коррекции. Автоматические балансировочные станки, работающие с добавлением корректирующих масс, необходимы для уравновешивания тонкостенных роторов.

Наиболее распространен способ удаления материала, осуществляемый путем сверления отверстий или фрезерования пазов на роторе, а также другими средствами. Станки, использующие этот способ, описаны ниже.

Автоматический станок для дискретной балансировки обычно состоит из двух агрегатов — измеряющего *И* и устраняющего *У* неуравновешенность (рис. 6.18), связанных между собой электронным устройством *ЭУ*. Сведения о неуравновешенности ротора P_2 подаются в устройство *ЭУ* от датчиков α и β неподвижных чувствительных опор *A* и *B*. В решающем блоке *РБ* эти сведения преобразуются в сигналы, эквивалентные дисбалансам $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в плоскостях коррекции *1-1* и *2-2*. Сигналы направляются в блоки *УБ1* и *УБ2*, которые управляют инструментами, устраняющими дисбалансы в плоскостях коррекции. Но поступившие сигналы пока сохраняются там в памяти, так как в это время происходит устранение дисбалансов предыдущего ротора P_1 путем удаления материала. При этом

никакой *обратной связи* между балансируемым ротором P_1 и *ЭУ не существует*. По завершении балансировки ротор P_1 снимается с агрегата *У*, а на его место автоматически переносится ротор P_2, для балансировки которого из памяти *УБ1* и *УБ2* вызываются очередные импульсы, управляющие инструментами, которые устраняют дисбалансы ротора P_2. В это время в измеряющий агрегат *И* на место ротора P_2 автоматически подается следующий ротор P_3 и процесс повторяется.

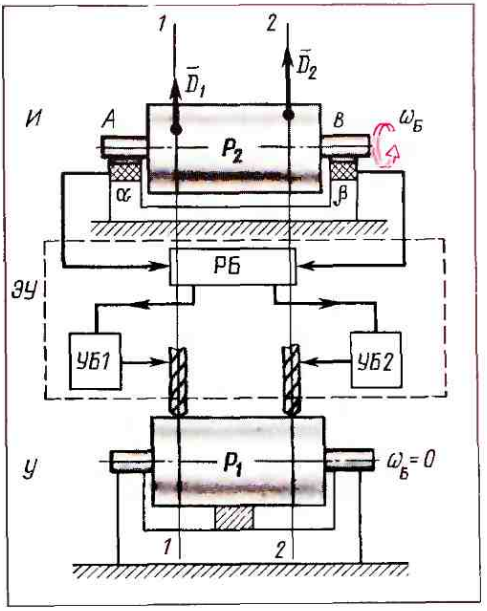


Рис. 6.18

Основным требованием метода непрерывной балансировки является наличие *ненарушаемой обратной связи* между балансируемым ротором и электронным устройством. Одним из примеров такой балансировки является электрохимическая балансировка, действующая по принципу анодного растворения, а поэтому пригодная только для металлических роторов и к тому же нечувствительных к воздействию электролита на составные части ротора. Схема такого автоматического станка показана на рис. 6.19 [8, т. 6]. Блок *УБ*, который управляет удалением материала ротора, представляет коллектор с тремя электрически изолированными друг от друга соплами, через которые на ротор непрерывно подается электролит. Струя из центрального сопла *С* является общим токоподводящим электродом; струи из сопл *I* и *II*, расположенных в плоскостях коррекции *1-1* и *2-2*, выполняют роль токоснимающих электродов. Кратковременные включения тока *i* происходят в те моменты времени, когда «тяжелые места» ро-

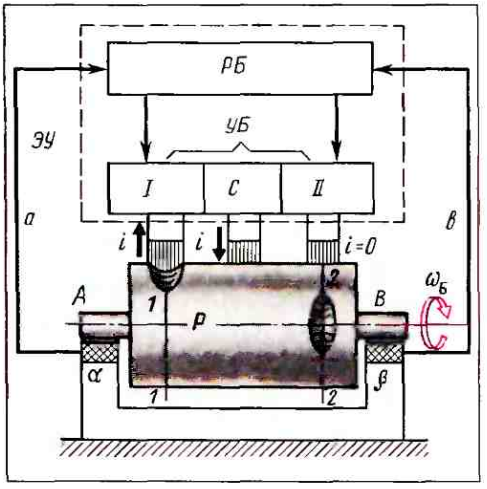


Рис. 6.19

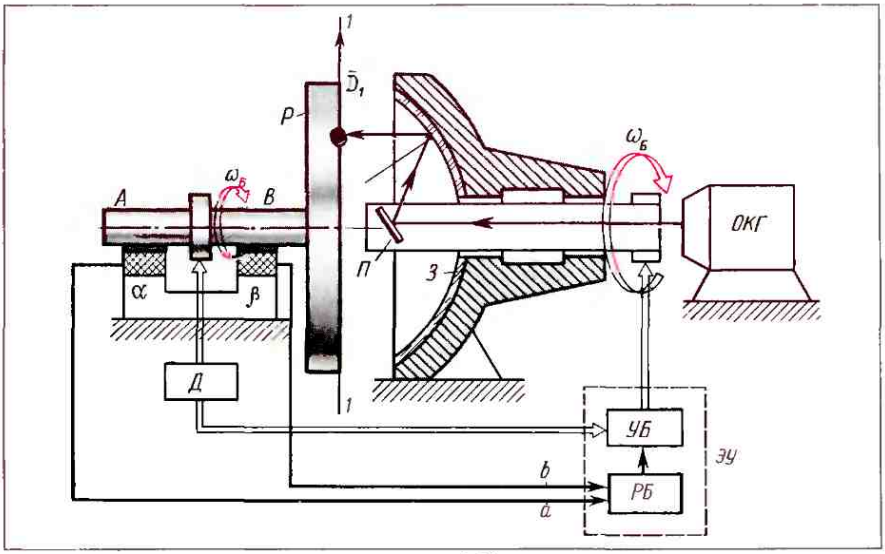


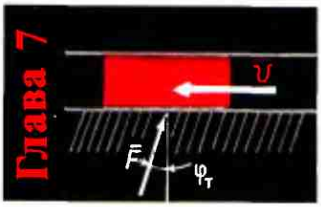
Рис. 6.20

тора проходят под соплами *I* и *II*. Команды на включение этих импульсов формируются в решающем блоке *РБ* под действием сигналов, поступающих от специальных датчиков α и β и зависящих от величин реакций неподвижных чувствительных опор *А* и *В*. Короткие импульсы уходящего с ротора тока *i* вызывают в нужных местах на его поверхности (в плоскостях коррекции *1-1* и *2-2*) растворение металла (рис. 6.19). Таким образом, ротор в процессе балансировки непрерывно подает по каналам *a* и *b* обратной связи в *ЭУ* сведения о своей неуравновешенности, которая постепенно устраняется.

Для удаления корректирующих масс из тела ротора, изготовленного из любого материала, применяется балансировка с использованием *лазера* [8, т. 6]. Этот способ стал возможным в связи с появлением и разработкой мощных оптических квантовых генераторов. Для повышения производительности применен лазер непрерывного действия и разработана оптическая система, обеспечивающая синхронное следование луча лазера за «тяжелой точкой» ротора в плоскости коррекции. Практически это осуществлено, например, в автоматическом лазерном балансировочном станке ЛБС-3, принципиальная схема которого приведена на рис. 6.20. Балансируемый ротор *Р* опирается на неподвижные чувствительные опоры *А* и *В* и приводится во вращение двигателем *Д*. От него же подается механический сигнал и в блок *УБ*, приводящий в синхронное с ротором вращение полый шпиндель с оптической призмой *П*. Сигналы опорных датчиков α и β перерабатываются в решающем блоке *РБ* в фазирующий импульс, также посылаемый в управляющий блок *УБ*, который обеспечивает требуемое фазовое положение призмы *П* относительно ротора *Р*. Луч из оптического квантового генератора *ОКГ* проходит через полый шпиндель и, отражаясь от вращающей-

ся призмы *П* и неподвижного сферического зеркала *З*, фокусируется в «тяжелом месте» ротора, находящемся в плоскости коррекции *1-1*. Из этого места во время всего процесса балансировки луч удаляет неуравновешенный материал ротора, постепенно уменьшая тем самым дисбаланс $\bar{D}_1$. Одновременно автоматически уменьшается энергия луча лазера.

Балансировочные автоматические устройства применяют не только в балансировочных станках, но также и в роторных машинных установках, когда в процессе их эксплуатации происходит по тем или иным причинам нарушение сбалансированности ротора. Например, на вал ротора такого агрегата жестко закрепляют автоматический компенсатор в виде обоймы со свободно расположенными внутри нее корректирующими массами (шары, кольца и др.) [8, т. 6]. Эти массы при вращении ротора (со сверхкритической скоростью) самоустанавливаются относительно обоймы, устойчиво обеспечивая уравновешенное состояние ротора.



Трение в механизмах и машинах

При работе машин и механизмов происходит явление, которое сопровождается рассеиванием механической энергии. Это явление называется трением. Подсчитано, что около 33% мировых энергетических ресурсов бесполезно затрачивается на работу, связанную с трением. Вполне закономерно, что эти затраты необходимо сделать минимальными, т. е. уменьшить силы трения. Для быстроходных машин и механизмов такая задача становится еще более актуальной. Физические основы явления трения, силовой расчет механизма с учетом трения и оценка экономичности механизма посредством его коэффициента полезного действия кратко излагаются в настоящей главе.

§ 7.1 Виды и характеристики внешнего трения

При исследовании физических основ явления трения различают трение внешнее и внутреннее. Внешнее трение — сопротивление относительному перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательным к ним и сопровождаемое диссипацией энергии. Внутреннее трение — процессы, происходящие в твердых, жидких и газообразных телах при их деформации и приводящие к необратимому рассеянию механической энергии.

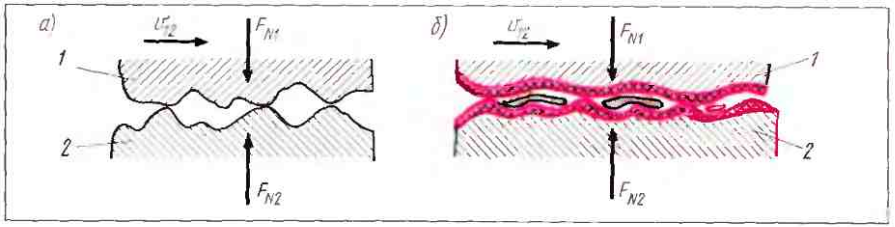


Рис. 7.1

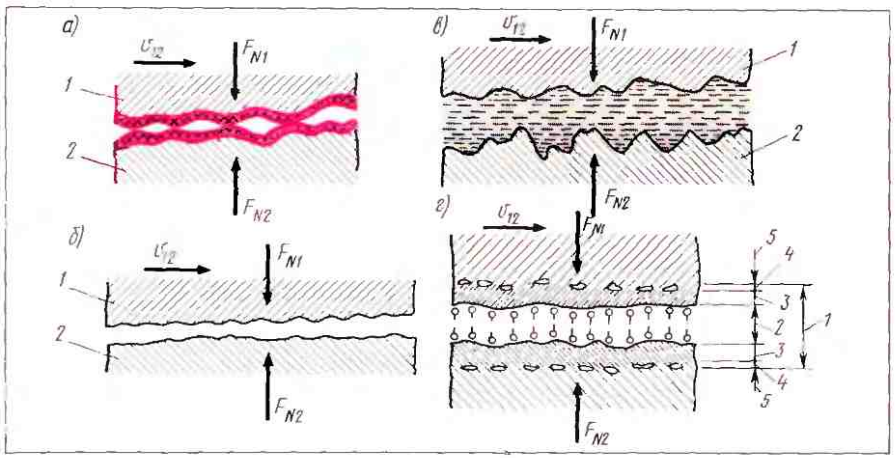


Рис. 7.2

Сила сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы, тангенциально направленная к общей границе между этими телами, называется силой трения.

Материал, вводимый на поверхности трения для уменьшения силы трения и интенсивности изнашивания, называется смазочным материалом. Подведение смазочного материала к поверхности трения называют смазыванием, а действие смазочного материала, в результате которого между двумя поверхностями уменьшается сила трения и (или) интенсивность изнашивания, называется смазкой.

В зависимости от состояния поверхностей трения различают два вида трения: *трение без смазочного материала* (сухое трение) и *трение со смазочным материалом.*

Трением без смазочного материала называют трение твердых тел *1* и *2* при отсутствии на поверхностях трения введенного смазочного материала любого вида (рис. 7.1, *а*).

Трением со смазочным материалом называют трение твердых тел *1* и *2* при наличии на поверхностях трения введенного смазочного материала любого вида (рис. 7.1, *б*).

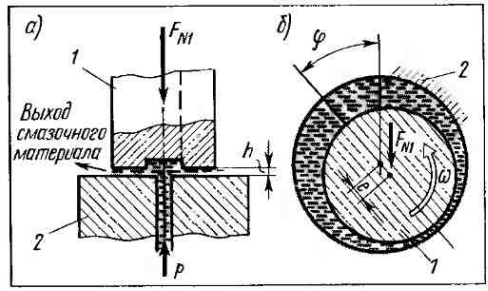


Рис. 7.3

Различают следующие виды смазки: твердая, при которой разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется твердым смазочным материалом (рис. 7.2, *а*); жидкостная, при которой полное разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется жидким смазочным материалом (рис. 7.2, *в*); газовая, при которой разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется газовым смазочным материалом (рис. 7.2, *б*); полужидкостная, при которой частично осуществляется жидкостная смазка; граничная, при которой трение и износ между поверхностями, находящимися в относительном движении, определяются свойствами поверхностей и свойствами смазочного материала, отличными от объемных (рис. 7.2, *г*). Промежуточный слой *1* называют третьим телом между основными материалами *5* фрикционной пары. Он состоит из адсорбированного слоя *2*, пленки оксидов или других химических соединений *3* и слоя дефектного основного материала *4*. При толщине слоя жидкости 0,1 мкм ее свойства уже отличаются от объемных свойств.

Различают также смазку: гидростатическую (газостатическую), при которой полное разделение поверхностей трения деталей *1* и *2*, находящихся в относительном движении или покое, осуществляется в результате поступления жидкости (газа) в зазор *h* между поверхностями трения под внешним давлением *p* (рис. 7.3, *а*); гидродинамическую (газодинамическую), при которой полное разделение поверхностей трения *1* и *2* осуществляется в результате давления, самовозникающего в слое жидкости при относительном движении поверхностей (рис. 7.3, *б*); эластогидродинамическая, при которой характеристики трения и толщина пленки жидкого смазочного материала между двумя поверхностями определяются упругими свойствами материалов тел и самопроизвольным снижением напряжений, ползучестью, упругим последействием и

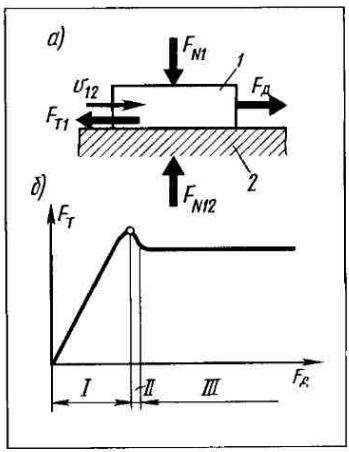


Рис. 7.4

необратимыми остаточными деформациями материалов, участвующих в трении.

Трению движения (рис. 7.4, *а*) предшествует трение покоя (зона *I* на рис. 7.4, *б*), т. е. трение между телами *1* и *2* при относительном предварительном микросмещении двух тел, и период перехода (зона *II*) от покоя к скольжению (зона *III*). Предварительное смещение равно расстоянию, при котором сила трения покоя $F_{т.п}$ возрастает от нуля до некоторого максимального значения (рис. 7.4, *б*).

Эти микросмещения перед полным скольжением достаточно малы: порядка 0,1...1,0 мкм и в ряде случаев могут быть необратимыми. Сила трения покоя, любое превышение которой ведет к возникновению движения, называется наибольшей силой трения покоя. Отношение наибольшей силы трения покоя $F_{т.п}$ двух тел к силе, нормальной относительно поверхностей трения F_{N12}, прижимающей тела друг к другу, называется коэффициентом сцепления $f_{т.п}$.

По кинематическому признаку различают следующие виды трения движения: трение скольжения, трение качения, трение верчения, трение качения с проскальзыванием и трение при виброперемещениях.

Процессы трения рассматривают на моделях, позволяющих оценить молекулярное взаимодействие материалов контактирующих тел с учетом влияния внешней среды (оксиды, пленка, смазка). Первоначально разработанные теории механического сцепления, молекулярного притяжения, сваривания, среза и пропахивания получили значительное развитие в молекулярно-механической теории трения, нашедшей наиболее широкое распространение. Согласно этой теории процесс трения происходит не только на границе раздела твердых тел, но и в некотором объеме поверхностных слоев, физико-механические свойства которых отличаются от свойств материалов в объеме тел. Это связано с деформированием поверхностных слоев, с изменением температуры, с образованием слоев адсорбированных паров влаги или газов, с образованием пленок оксидов, атомов или молекул окружающей среды и т. п.

Общее представление о значении коэффициентов трения скольжения $f_т$ дают экспериментальные данные для разных видов трения, приведенные ниже: трение ювенильных поверхностей при отсутствии смазки и оксидов — 0,8...6,0; трение окисленных поверхностей — 0,4...0,8; граничное трение при наличии мономолекулярного слоя смазки на поверхности — 0,2...0,6; граничное трение при наличии мультимолекулярного слоя полярных молекул — 0,1...0,4; гидродинамическое трение при наличии слоя неполярных молекул — 0,008...0,02; гидродинамическое трение при наличии жидкокристаллической объемной фазы — 0,0001...0,001.

Для расчетов механизмов, работающих при разных режимах и видах трения, важное значение имеет зависимость силы трения от скорости $v_{ск}$ относительного движения трущихся поверхностей.

Обобщение экспериментальных данных позволяет принимать для

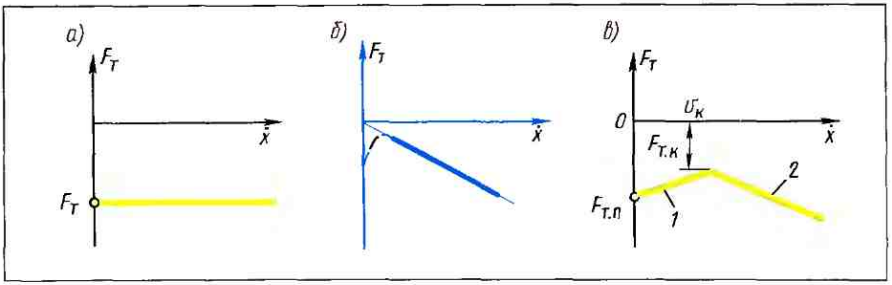


Рис. 7.5

тех или иных условий следующие принципиальные зависимости:

сила сухого трения $F_т$ не зависит от скорости скольжения $v_{ск} = \dot{x}$ (рис. 7.5, *а*)

$$F_т = f_т F_N;$$

сила вязкого трения $F_т$ линейно зависит от скорости скольжения $\dot{x}$ (рис. 7.5, *б*)

$$F_т = k\dot{x};$$

сила сухого трения $F_т$ линейно зависит от скорости скольжения $\dot{x}$; но имеет относительно граничной скорости $v_к$ падающую *(1)* и возрастающую *(2)* ветви характеристики (рис. 7.5, *в*).

Резкое падение силы трения с увеличением скорости движения обычно наблюдается в зоне малых скоростей перемещений. Это, например, характерно для технологического оборудования (перемещение суппортов по направляющим, позиционирование автооператоров и роботов). При крутопадающей скоростной характеристике силы трения наблюдаются неустойчивость движения, характерное скачкообразное движение. Это сопровождается неравномерностью подач, снижением точности обработки, неточностью позиционирования. В связи с этим снижается производительность оборудования, возрастает износ направляющих и инструментов, ухудшается качество обработанных на станках поверхностей деталей, возникают дополнительные динамические нагрузки в механизмах привода.

Для уменьшения вредных последствий скачкообразного движения при малых скоростях перемещения используют разные способы. Широко применяют следующие:

использование разгрузки (механической, пневматической, гидравлической и т. п.) для уменьшения нормального давления;

уменьшение коэффициента трения во фрикционной паре применением фторопласта (кривая *3* на рис. 7.6) взамен чугуна (кривая *1*) и бронзы (кривая *2*) и антискачковой смазки (кривая *4*);

использование гидростатической смазки;

применение вместо опор скольжения направляющих качения.

Затраты энергии на внутренний сдвиг материала и внутриобъем-

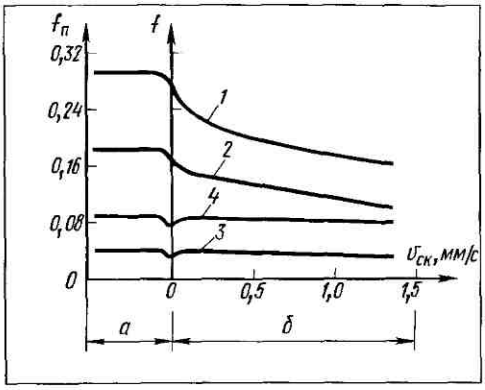


Рис. 7.6

ное выделение теплоты при внутреннем трении оценивают демпфирующей способностью или коэффициентом поглощения.

Коэффициентом поглощения ψ (или относительным гистерезисом) называют отношение энергии W, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии U:

$$\psi = W/U.$$

Для металлов коэффициент поглощения при внутреннем трении очень мал (около 0,01—0,02 для сталей разных марок) и при расчете звеньев из металла внутреннее трение обычно не учитывают. Однако для высокомолекулярных материалов (например, резины и пластмасс) коэффициент поглощения имеет порядок в пределах 0,1—1,0, т. е. почти в 100 раз больше, чем для металлов. Поэтому при расчетах деталей из резины и пластмасс необходимо учитывать потери на внутреннее трение в материале.

Внутреннее трение в твердых телах используется в основном для снижения уровня шумов при ударных и вибрационных нагрузках путем замены металлических материалов пластмассами и композиционными материалами; снижения напряжений в конструкциях, возникающих при колебаниях вблизи резонанса.

§ 7.2 Действие сил в кинематических парах с учетом трения

В гл. 5 был рассмотрен силовой расчет механизмов без учета трения в кинематических парах. Наличие трения изменяет величину и направление действующих сил. Согласно положениям теоретической механики при наличии трения скольжения сила взаимодействия двух соприкасающихся тел *отклоняется* от общей нормали к их поверхностям на угол трения. Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения

$$\operatorname{tg}\varphi_т = f_т. \qquad (7.1)$$

В данном параграфе проведен анализ действия сил в кинематических парах с учетом трения.

В поступательной паре сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, отклоняется от нормали $n—n$ и составляет тупой угол $90° + \varphi_т$ с вектором скорости $\bar{v}_{12}$ движения звена *1* относительно звена *2* (рис. 7.7, *а*). Как видно из рисунка, касательная состав-

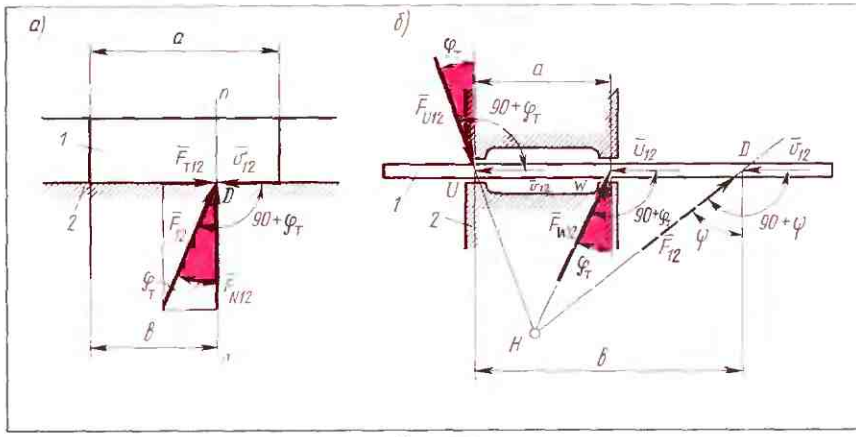


Рис. 7.7

ляющая $\bar{F}_{\tau 12}$ — сила трения — направлена против относительной скорости $\bar{v}_{12}$; в этом проявляется тормозящее действие трения. Обе составляющие реакции $\bar{F}_{12}$ связаны друг с другом соотношением

$$F_{\tau 12}=f_{\tau}F_{N12}. \qquad (7.2)$$

Модуль силы $\bar{F}_{12}$ и координата b точки ее приложения (точка D) неизвестны и определяются в ходе силового расчета. Все сказанное целиком относится и к силе $\bar{F}_{21}$ (на рис. 7.7, *а* не показана), приложенной к звену *2* со стороны звена *1*, так как по третьему закону Ньютона $\bar{F}_{21}=-\bar{F}_{12}$.

Если в результате расчета получается, что $b>a$ (рис. 7.7, *б*), то это значит, что к звену *1* приложена не одна, а две реакции $\bar{F}_{U12}$ и $\bar{F}_{W12}$, неизвестные по модулю (см. § 5.1). Вследствие трения они отклоняются от нормали и составляют с вектором относительной скорости $\bar{v}_{12}$ угол $90°+\varphi_{\tau}$. Линии действия этих реакций пересекаются в точке H. Линия действия их равнодействующей $\bar{F}_{12}$ должна проходить через точки H и D. Равнодействующая $\bar{F}_{12}$ составляет с вектором $\bar{v}_{12}$ угол $90°+\psi$.

Если точки D и W совпадают, то $\psi=\varphi_{\tau}$ и $F_{U12}=0$. Но чем дальше точка D находится от края направляющего гнезда (от точки W), тем большим становится угол ψ. Отсюда следует, что суммарное тормозящее действие трения, оцениваемое касательной составляющей $F_{\tau 12}=F_{12}\sin\psi$, в поступательной паре может быть весьма значительным и тем большим, чем дальше располагается точка D от точки W. Ясно также, что чем меньше размер a, тем ближе точка H к оси гнезда, тем больше угол ψ, т. е. тем больше трение в поступательной паре. Угол ψ может получиться много больше угла φ_{τ}. Все это необходимо учитывать при проектировании поступательной пары.

Во вращательной паре (рис. 7.8, *а*) силы взаимодействия $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$ (сила $\bar{F}_{21}$ на рис. 7.8 не показана) также отклоняются от нормали n—n, а потому проходят не через центр шарнира, а по

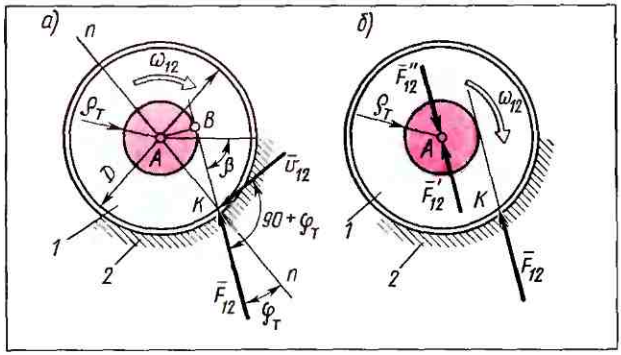


Рис. 7.8

касательной к окружности, центр которой совпадает с центром шарнира. Круг, ограниченный этой окружностью, называется кругом трения. Его радиус равен $\rho_т=(D/2)\sin\varphi_т$, где D — диаметр вала (оси шарнира). Так как угол трения $\varphi_т$ обычно не превышает 6—7°, то $\sin\varphi_т\approx\operatorname{tg}\varphi_т=f_т$. Поэтому с некоторым допущением можно принять

$$\rho_т=(D/2)f_т. \qquad (7.3)$$

Модуль силы $\bar{F}_{12}$ и положение точек K и B, а следовательно, и направление линии действия силы $\bar{F}_{12}$, координируемое углом β, — неизвестны и определяются силовым расчетом.

Действие силы $\bar{F}_{12}$ (рис. 7.8, *а*) можно заменить совместным действием силы $\bar{F}'_{12}$, равной $\bar{F}_{12}$ и приложенной в центре шарнира, и пары сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$ (рис. 7.8, *б*). Направление действия пары сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$ — противоположно угловой скорости ω_{12}, с которой звено *1* вращается относительно звена *2*. В этом проявляется тормозящее действие трения в шарнире. Пару сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$, прило-

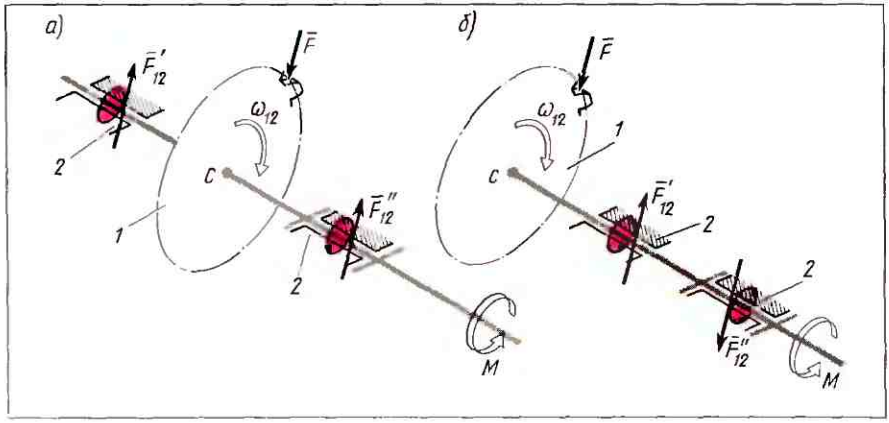


Рис. 7.9

женную к звену *1* от звена *2*, будем называть моментом трения в шарнире, величина которого составит

$$M_{т12} = F_{12}\rho_т. \qquad (7.4)$$

Очевидно, что $M_{т21} = -M_{т12}$.

Вращательная пара может быть выполнена конструктивно в виде двух подшипников. Если подшипники расположены по разные стороны от плоскости, в которой действует нагружающая сила $\bar{F}$ (рис. 7.9, *а*), то реакции обоих подшипников направлены в одну и ту же сторону и могут быть заменены равнодействующей $\bar{F}_{12}$, равной их арифметической сумме. По этой равнодействующей и подсчитывается общий момент трения обоих подшипников $M_{т12} = F_{12}\rho_т$.

Иная картина будет, если подшипники находятся по одну сторону от плоскости, в которой действует нагружающая сила $\bar{F}$ (рис. 7.9, *б*) (например, при консольном расположении зубчатого колеса). В таком случае реакции подшипников направлены в противоположные стороны и равнодействующая этих реакций определяется уже их разностью (а не суммой), в то время как общий момент трения обоих подшипников по-прежнему равняется арифметической сумме моментов трения в каждом подшипнике. Следовательно, общий момент трения нельзя оценивать посредством момента равнодействующей силы, так как трение при этом было бы сильно недоучтено. При одностороннем расположении подшипников силовой расчет с учетом трения нужно проводить, рассматривая в отдельности реакцию каждого подшипника, и нельзя заменять обе реакции их равнодействующей.

Высшая кинематическая пара (рис. 7.10) в плоском механизме допускает два относительных движения: звенья *1* и *2* могут скользить ($\bar{v}_{12}$) и перекатываться друг по другу (ω_{12}). Поэтому и трение в высшей кинематической паре проявляется двояко: в виде трения скольжения и трения качения. Тормозящее действие трения качения ($M_{кач}$) в большинстве случаев весьма невелико, и поэтому его в дальнейшем учитывать не будем. Конечно, при расчете подшипников качения, при исследовании движения тяжелых предметов на подкладных катках и рольгангах и в других подобных задачах трением качения пренебрегать нельзя. Но такие задачи относятся к области специальных расчетов, а поэтому выходят за рамки учебной дисциплины.

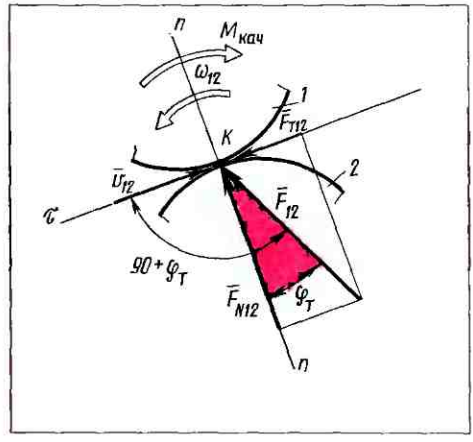


Рис. 7.10

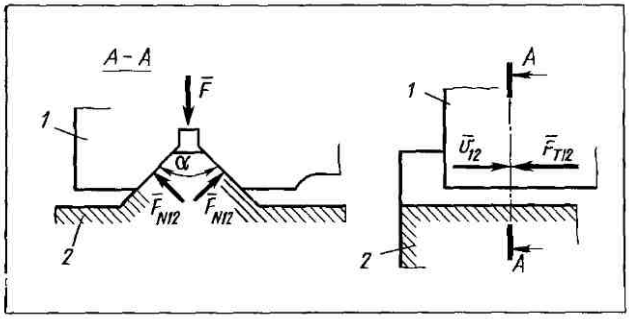


Рис. 7.11

Трение скольжения проявляет себя в высших кинематических парах так же, как и в низших: сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, отклоняется от нормали на угол трения $\varphi_т$ и составляет с вектором относительной скорости $\bar{v}_{12}$ угол $90° + \varphi_т$. Угол $\varphi_т$ подсчитывается по уравнению (7.1). Касательная составляющая $\bar{F}_{т12}$ — сила трения — направлена навстречу относительной скорости $\bar{v}_{12}$. В этом проявляется тормозящее действие трения. Модуль сил взаимодействия $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ неизвестен и определяется силовым расчетом.

Если относительное движение в высшей паре сводится к одному лишь чистому качению (т. е. $v_{12} = 0$), то сила трения $F_{т12}$ отнюдь не обязательно должна быть равной нулю. В этом случае она является силой трения покоя.

Сила трения покоя подчиняется соотношению $F_{т.п} \leqslant f_{т.п} F_N$, справедливому для любой кинематической пары. Допуская небольшую ошибку, можно принять $f_{т.п.} \approx f_т^*$. Поэтому для угла трения $\varphi_{т.п}$, на который при покое фактически отклоняется реакция, имеет место следующее соотношение: $\varphi_{т.п} \leqslant \varphi_т$, где $\varphi_т = \operatorname{arctg} f_т$ — угол трения скольжения. Если при покое трение не проявляет себя, то $\varphi_{т.п} = 0$, и реакция направлена нормально поверхности соприкосновения.

Как было отмечено ранее (§ 7.1), коэффициенты трения зависят от многих причин и определяются опытным путем. Поэтому в справочниках приведены лишь усредненные значения коэффициентов трения $f_э$, вследствие чего результаты силового расчета всегда имеют *некоторую погрешность*.

Следует также иметь в виду, что значение коэффициента трения $f_т$, подставляемое в расчетные формулы, зависит от конструктивного решения кинематической пары и может весьма заметно отличаться от значения $f_э$, получаемого из физического эксперимента с плоскими образцами. Так, если поступательная пара в сечении, перпендикулярном вектору относительной скорости $\bar{v}_{12}$, имеет клиновидную форму — например, кинематическая пара, образованная задней бабкой 1 и направляющими станины *2* токарного станка (рис. 7.11), — то в формулу $F_{т12} = f_т F$ подставляется расчет-

* Напомним, что коэффициент сцепления $f_{т.п}$, строго говоря, несколько больше коэффициента трения скольжения $f_т$.

ное значение коэффициента трения, определяемое по уравнению $f_т = f_э / \sin(\alpha/2)$.

Во вращательной паре расчетное значение $f_т$, подставляемое в уравнение (7.3), зависит от степени приработанности звеньев, составляющих пару. Для неприработавшихся звеньев принимают $f_т = 1{,}57 f_э$, а для приработанных — $f_т = 1{,}27 f_э$.

В винтовой паре соотношение между $f_т$ и $f_э$ определяется профилем резьбы (см.: *Решетов Д. Н.* Детали машин. М., 1974).

Необходимо иметь в виду, что все вышеизложенное о действии сил в кинематических парах справедливо в случае *отсутствия смазки и при граничной смазке*. В случае жидкостной смазки существенное влияние оказывает скоростной режим кинематической пары.

§ 7.3 Силовой расчет механизма с учетом трения

Основные положения силового расчета с учетом трения такие же, как и расчета без учета трения (см. § 5.1). Это объясняется тем, что согласно анализу действия сил в кинематических парах, сделанному в § 7.2, наличие трения *не изменяет* числа неизвестных в кинематических парах. Следовательно, структурные группы Ассура и при учете трения *сохраняют свою статическую определимость*. Поэтому силовой расчет проводится по структурным группам с использованием уравнений кинетостатики (5.1) — (5.3), в которые должны быть включены силы трения и моменты трения. Последнее обстоятельство, однако, в большинстве случаев очень сильно усложняет вычисления. Чтобы снизить их сложность, И. И. Артоболевский предложил применить *метод последовательных приближений*. Покажем, как выполняется силовой расчет этим методом на конкретном примере кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 5.8).

Для силового расчета с учетом трения в состав исходных данных надо дополнительно ввести коэффициенты трения в кинематических парах: $f_{тA}$, $f_{тB}$, $f_{тC}$, $f_{т34}$. Кроме того, из кинематического расчета механизма должны быть получены направления относительных скоростей во всех кинематических парах, т. е. ω_{14}, ω_{21}, ω_{23}, v_{34}.

Напомним, что силовой расчет кривошипно-ползунного механизма без учета трения, или в первом приближении, был уже проделан (см. § 5.3), в результате чего были получены силы взаимодействия во всех кинематических парах, т. е. силы $\bar{F}_{14}$, $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{23}$, $\bar{F}_{34}$.

Теперь выполним расчет во втором приближении. Для этого по заданным диаметрам шарниров A, B и C определим радиусы кругов трения в них $\rho_{тA} = (D_A/2) f_{тA}$, $\rho_{тB} = (D_B/2) f_{тB}$, $\rho_{тC} = (D_C/2) f_{тC}$ [уравнение (7.3)], а затем и моменты трения в этих шарнирах $M_{т14} = F_{14}\rho_{тA}$, $M_{т21} = F_{21}\rho_{тB}$, $M_{т23} = F_{23}\rho_{тC}$ [уравнение (7.4)]. Найдем также силу трения в поступательной паре *3-4*: $F_{т34} = f_{т34} F_{N34}$, где $F_{N34} = F_{34}$.

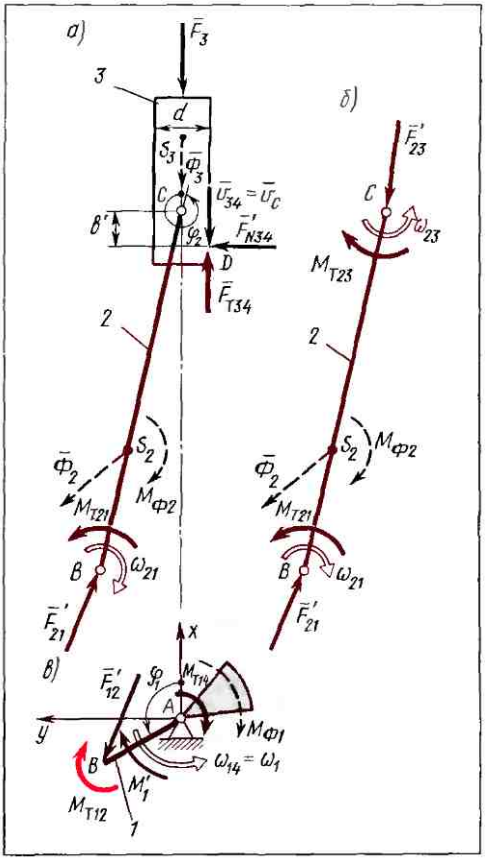


Рис. 7.12

Расчет во втором приближении делается в *том же порядке*, что и в первом приближении. Следовательно, как и прежде, начнем его со структурной группы *2-3* (рис. 7.12, *а*). К ее звеньям приложены известные силы и моменты: $\bar{\Phi}_2$, $M_{\Phi 2}$, $\bar{\Phi}_3$ и движущая сила $\bar{F}_3$. К звеньям *2* и *3* приложены также подсчитанные выше момент трения M_{T21}, сила трения $\bar{F}_{T34}$ и моменты трения M_{T23} и $M_{T32}=-M_{T23}$ в шарнире C (на рис. 7.12, *а* не показаны). Сила и моменты трения направлены навстречу соответствующим относительным скоростям. Неизвестными являются модуль и направление силы $\bar{F}'_{21}$, модуль нормальной составляющей $\bar{F}'_{N34}$ и плечо b', модуль и направление сил взаимодействия $\bar{F}'_{23}=-\bar{F}'_{32}$ в шарнире C (рис. 7.12, *б*).

Сумма проекций на ось x сил, приложенных к звеньям *2* и *3*, равна нулю $\sum\limits_{2,3} X=0$.

В развернутом виде

$$F'_{21x}+\Phi_{2x}+F_{3x}+\Phi_{3x}+F'_{34x}=0. \qquad (7.5)$$

Здесь $F'_{34x}=F_{T34}$. Из уравнения (7.5) определим F'_{21x}. Напомним, что уравнение (7.5), как и все последующие уравнения проекций и моментов, записаны в алгебраическом виде. Поэтому числовые значения проекций и моментов должны подставляться во все уравнения со строгим соблюдением их знаков.

Составим уравнение проекций на ось x сил, приложенных к звену *3*, $\sum\limits_{3} X=0$, или

$$F'_{32x}+F_{3x}+\Phi_{3x}+F'_{34x}=0, \qquad (7.6)$$

откуда определим F'_{32x}.

Проекцию составляющей F'_{23y} найдем из уравнения моментов для звена *2* (относительно точки B) $\sum\limits_{2} M_B=0$:

$$M_B(\bar{F}'_{23y})+M_B(\bar{F}'_{23x})+M_B(\bar{\Phi}_2)+M_{\Phi 2}+M_{T21}+M_{T23}=0. \qquad (7.7)$$

Искомая проекция $F'_{23y}=M_B(\bar{F}'_{23y})/(l_{BC}\cos\varphi_2)$. В уравнении (7.7) $M_B(\bar{F}'_{23x})=-F'_{23x}l_{BC}\sin\varphi_2$, $M_B(\bar{\Phi}_2)=\Phi_{2y}l_{BS2}\cos\varphi_2-\Phi_{2x}l_{BS2}\sin\varphi_2$.

Сумма проекций на ось y сил, приложенных к звену *2*, равна нулю: $\sum\limits_2 Y=0$. Поэтому

$$F'_{21y}+F'_{23y}+\Phi_{2y}=0, \tag{7.8}$$

откуда определим F'_{21y}.

Проекцию F'_{34y} нормальной составляющей F'_{N34} найдем из уравнения проекций на ось y сил, приложенных к звену *3*, $\sum\limits_3 Y=0$:

$$F'_{34y}+F'_{32y}=0. \tag{7.9}$$

Составим уравнение моментов для звена *3*, $\sum\limits_3 M_C=0$:

$$M_C(\bar{F}'_{N34})+M_C(\bar{F}_{\tau 34})+M_{\tau 32}=0, \tag{7.10}$$

откуда, определив $M_C(\bar{F}'_{N34})$, найдем затем и плечо b'.

По проекциям сил определим их модули F'_{21}, F'_{23}, F'_{34} и угловые координаты φ'_{f21}, φ'_{f23} (см. § 5.3).

Перейдем к силовому расчету первичного механизма (рис. 7.12, *в*). К его подвижному звену *1* приложены следующие силы и моменты: ставшая известной сила $\bar{F}'_{12}=-\bar{F}'_{21}$, главный момент сил инерции $M_{\Phi 1}$, моменты трения $M_{\tau 14}$ и $M_{\tau 12}=-M_{\tau 21}$ в шарнирах A и B; неизвестными являются момент полезного сопротивления M'_1, а также модуль и направление реакции $\bar{F}'_{14}$ в кинематической паре *1-4* (на рис. 7.12, *в* не показана).

Момент полезного сопротивления M'_1 подсчитаем из уравнения моментов $\sum\limits_1 M_A=0$:

$$M_A(\bar{F}'_{12})+M'_1+M_{\Phi 1}+M_{\tau 12}+M_{\tau 14}=0. \tag{7.11}$$

Значение M'_1 получится меньше значения M_1, взятого из первого приближения, выполненного без учета трения. Такой результат очевиден, так как при наличии трения заданная движущая сила F_3 преодолевает уже меньшее полезное сопротивление, чем то, которое могла бы преодолеть, если бы трения не было.

Проекции реакции стойки $\bar{F}'_{14}$ найдем из уравнений $\sum\limits_1 X=0$, $\sum\limits_1 Y=0$:

$$F'_{14x}+F'_{12x}=0; \tag{7.12}$$

$$F'_{14y}+F'_{12y}=0, \tag{7.13}$$

а затем — модуль силы $\bar{F}'_{14}$ и ее угловую координату φ'_{F14}.

В результате силового расчета, выполненного во втором приближении, получены *уточненные* значения сил $\bar{F}'_{14}$, $\bar{F}'_{21}$, $\bar{F}'_{23}$, $\bar{F}'_{N34}$, действующих в кинематических парах, и плеча b'. Для этого были использованы уравнения (7.5) — (7.13), в существе своем такие же, как и уравнения (5.16) — (5.24).

По полученным во втором приближении значениям сил можно определить моменты трения в шарнирах и силу трения в поступательной паре *3-4*, а затем проделать расчет в третьем приближении, используя уравнения, подобные (7.5) — (7.13). В результате получим еще более точные, более близкие к окончательному результату значения $\bar{F}''_{14}$, $\bar{F}''_{21}$, $\bar{F}''_{23}$, $\bar{F}''_{N34}$ и b''. Процесс последовательных приближений можно продолжать и дальше в зависимости от требуемой степени точности расчета. Однако опыт показывает, что достаточно второго приближения.

Метод последовательных приближений можно применять, когда механизм *далек* от самоторможения. В этом случае обеспечивается хорошая сходимость решения к точному. При самоторможении метод последовательных приближений *принципиально непригоден.* Явление самоторможения будет рассмотрено в § 7.4.

§ 7.4 Потери энергии на трение. Механический коэффициент полезного действия

Энергия, подводимая к механизму в виде работы $A_д$ движущих сил и моментов за цикл установившегося режима, расходуется на совершение полезной работы $A_{пс}$, т. е. работы сил и моментов полезного сопротивления, а также на совершение работы $A_т$, связанной с преодолением сил трения в кинематических парах и сил сопротивления среды: $A_д = A_{пс} + A_т$. Значения $A_{пс}$ и $A_т$ подставляются в это и в последующие уравнения по абсолютной величине.

Механическим коэффициентом полезного действия (или сокращенно к.п.д.) называется отношение

$$\eta = A_{пс}/A_д. \qquad (7.14)$$

Как видно, к.п.д. показывает, какая доля механической энергии, подведенной к машине, полезно расходуется на совершений той работы, для которой машина создана (например, на выполнение технологической обработки изделий, на производство электроэнергии, на подъем груза и т. п.).

Отношение $\xi = A_т/A_д$ называется механическим коэффициентом потерь, который характеризует, какая доля механической энергии $A_д$, подведенной к машине, вследствие наличия различных видов трения превращается в конечном счете в теплоту и бесполезно теряется, рассеиваясь в окружающем пространстве. Так как потери на трение неизбежны, то всегда $\xi > 0$. Между коэффициентом потерь и к. п. д. существует очевидная связь: $\xi = 1 - \eta$. В современных условиях, когда экономное расходование энергии является одной из первоочередных задач народного хозяйства, к. п. д. и коэффициент потерь являются важными характеристиками механизмов машин.

В уравнение (7.14) вместо работ $A_д$ и $A_{пс}$, совершаемых за цикл,

можно подставлять средние за цикл значения соответствующих мощностей:

$$\eta = P_{\text{пс}}/P_{\text{д}}\,. \tag{7.15}$$

Для механизмов различных передач (зубчатых, ременных и др.), имеющих один ведущий (индекс вщ) и один ведомый (индекс вм) валы, уравнение (7.15) принимает вид

$$\eta = \frac{M_{\text{вм}}\omega_{\text{вм}}}{M_{\text{вщ}}\omega_{\text{вщ}}} = \frac{M_{\text{вм}}}{M_{\text{вщ}}u}\,.$$

Если с механизма, находящегося в установившемся движении, снята полезная нагрузка ($A_{\text{пс}} = 0$), то такой режим называется «холостым ходом». Очевидно, что $\eta_{\text{х.х}} = 0$, $\xi_{\text{х.х}} = 1$, так как вся энергия, подводимая к механизму при холостом ходе, тратится только лишь на преодоление его собственных потерь. Отсюда следует, что $0 \leqslant \eta < 1$, $1 \geqslant \xi > 0$.

Подчеркнем, что к. п. д. и коэффициент потерь определяются только тогда, когда механизм находится в установившемся движении. Если оно является периодически изменяющимся, то к. п. д. и коэффициент потерь представляют собой средние за цикл энергетические характеристики механизма.

Обычно к. п. д. отдельных механизмов определяют экспериментально и указывают в справочниках. Расчетные формулы для определения к. п. д. системы механизмов, соединенных последовательно или параллельно (см.: [1, 2, 3, 4]).

Рассмотрим, каким образом определяют к. п. д. отдельного механизма расчетным путем, например механизма двойного клина (рис. 7.13, *а*). Пусть к клину *1* приложена движущая сила $\bar{F}_1$, перемещающая его вниз. При этом клин *2* будет отжиматься вправо, преодолевая действие пружины. Это будет прямым ходом механизма. Перемещения клиньев связаны векторным соотношением $\Delta s_2 = \Delta s_1 + \Delta s_{21}$ (рис. 7.13, *б*), откуда

$$\Delta s_2 = \Delta s_1 \operatorname{tg}\gamma. \tag{7.16}$$

При прямом ходе на клин *1* кроме движущей силы $\bar{F}_1$ действуют еще реакции $\bar{F}_{12}$ и $\bar{F}_{13}$, которые вследствие трения составляют с относительными перемещениями Δs_{12} и $\Delta s_{13} = \Delta s_1$ угол $90° + \varphi_{\text{т}}$. Так как к. п. д. определяется в обязательном предположении, что звенья движутся равномерно, то силы инерции принимаются равными нулю. При определении к. п. д. не рассматриваются также силы тяжести звеньев.

По уравнению сил, приложенных к клину *1*, $\bar{F}_1 + \bar{F}_{13} + \bar{F}_{12} = 0$ строим план сил (рис. 7.13, *в*), для которого, используя теорему синусов, записываем

$$F_{12}/\sin(90° - \varphi_{\text{т}}) = F_1/\sin(\gamma + 2\varphi_{\text{т}})\,,$$

отсюда

$$F_{12} = F_1 \frac{\cos\varphi_{\text{т}}}{\sin(\gamma + 2\varphi_{\text{т}})}\,. \tag{7.17}$$

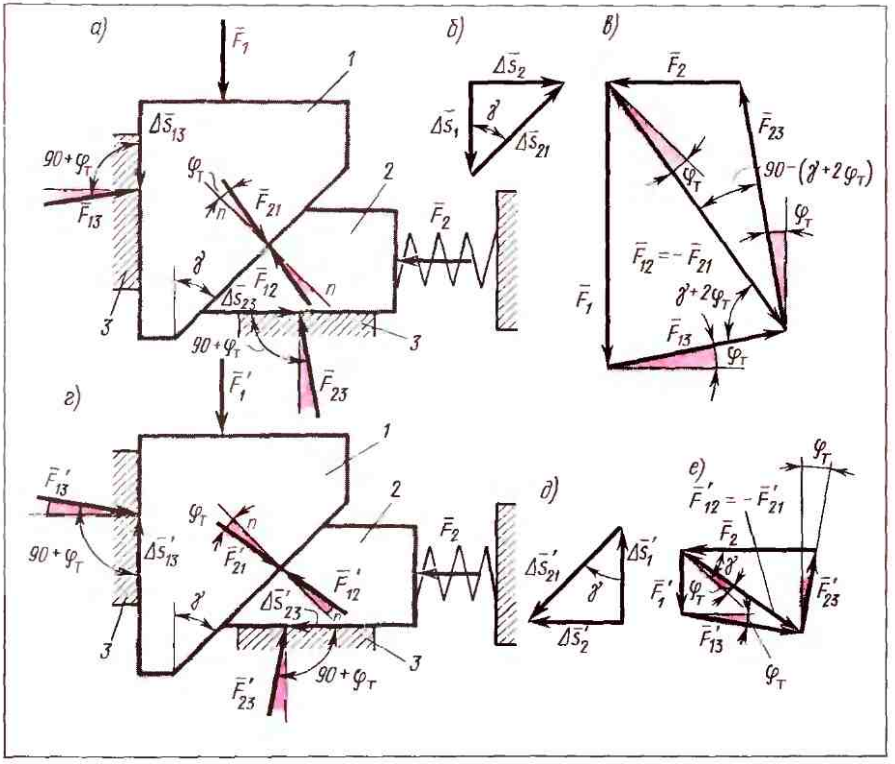


Рис. 7.13

На клин *2* действует сила $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$, сила полезного сопротивления $\bar{F}_2$ и реакция $\bar{F}_{23}$ (рис. 7.13, *а*), связанные уравнением $\bar{F}_{21}+\bar{F}_{23}+\bar{F}_2=0$. Из плана сил (рис. 7.13, *в*) по теореме синусов находим

$$F_2 = F_{21}\frac{\cos(\gamma+2\varphi_т)}{\cos\varphi_т}. \qquad (7.18)$$

К. п. д. при прямом ходе составит

$$\eta_{пр} = F_2\Delta s_2/(F_1\Delta s_1),$$

или, используя уравнения (7.16) — (7.18), получим

$$\eta_{пр} = \mathrm{tg}\gamma/\mathrm{tg}(\gamma+2\varphi_т). \qquad (7.19)$$

Добавим, что для винтовой пары скольжения и для червячной зубчатой пары к. п. д. имеет схожее выражение

$$\eta = \mathrm{tg}\gamma/\mathrm{tg}(\gamma+\varphi_т),$$

где γ — угол подъема витков винта или червяка.

Допустим, что прямой ход закончился, клинья *1* и *2* остановились, а затем под действием силы $\bar{F}_2$ начали свое обратное движе-

ние. При этом изменит свое направление и поток энергии: сила $\bar{F}_2$ станет движущей, а сила $\bar{F}_1'$ — силой полезного сопротивления (рис. 7.13, *г*). Треугольник перемещений при обратном ходе показан на рис. 7.13, *д*: направления всех перемещений изменились на обратные. Поэтому силы трения в кинематических парах также изменят свои направления на противоположные. С учетом этого построим план сил при обратном ходе (рис. 7.13, *е*). Нетрудно заметить, что в уравнениях знаки при углах трения должны также измениться на противоположные.

Запишем к. п. д. обратного хода: $\eta_{об} = F_1' \Delta s_1 / (F_2 \Delta s_2)$. Чтобы раскрыть это выражение, нет необходимости повторять силовой расчет. Определить $\eta_{об}$ можно так: взять величину, обратную $\eta_{пр}$ [см. уравнение (7.19)], и изменить знак при угле трения на обратный, т. е.

$$\eta_{об} = \operatorname{tg}(\gamma - 2\varphi_т)/\operatorname{tg}\gamma .$$

Если выполнить механизм с углом $\gamma < 2\varphi_т$, то прямой ход будет возможен: сила $\bar{F}_1$ переместит клин *1* вниз, а клин *2* будет отодвинут вправо. Однако обратный ход будет невозможен: если $\gamma < 2\varphi_т$, то клин *1* при обратном ходе защемляется между клином *2* и вертикальной стенкой стойки, так что движущая сила $\bar{F}_2$, сколь бы велика она ни была, не сможет осуществить обратный ход, даже если с клина *1* снять полезную нагрузку $\bar{F}_1'$. Наступает *самоторможение при обратном ходе*. Обратный ход был бы возможен, если силу $\bar{F}_1'$ сделать также движущей, направив ее вверх. Тогда она будет вытаскивать клин *1* вверх, помогая движущей силе $\bar{F}_2$ осуществлять обратный ход.

Самоторможение механизма при обратном ходе используется в клиновых соединениях, а также в эксцентриковых зажимах, винтовых домкратах и др.

Если угол γ назначить в пределах $2\varphi_т < \gamma < 90° - 2\varphi_т$, то будет возможен как прямой, так и обратный ход. Часть энергии, подведенной к клину *1* при прямом ходе, будет возвращена ему при обратном ходе, другая весьма значительная часть энергии будет поглощена трением. Этим свойством клиновых механизмов широко пользуются в различных поглощающих устройствах, например в механизмах автосцепок локомотивов и вагонов.

При $\gamma > 90° - 2\varphi_т$ прямой ход механизма становится невозможным. В этом случае клин *2* защемляется между клином *1* и горизонтальной опорной плоскостью стойки; движущая сила $\bar{F}_1$, сколь бы велика она ни была, не может вызвать прямой ход механизма, даже если с клина *2* снять полезную нагрузку $\bar{F}_2$; наступает самоторможение при прямом ходе. Механизм в этом случае абсолютно неработоспособен и применения не имеет.

Для механизма, находящегося в состоянии самоторможения, к. п. д. теряет физический смысл, так как механизм при этом неподвижен и силы никакой работы не совершают. Однако если формально подсчитать к. п. д. при самоторможении, то получим $\eta_с < 0$; абсолютной величиной $\eta_с$ характеризуют «надежность» самоторможения.

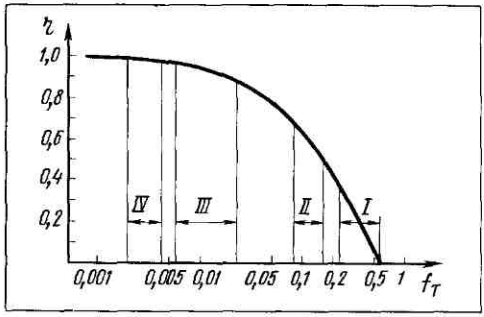


Рис. 7.14

Возникновение самоторможения обусловлено обязательным наличием трения. Чем слабее трение (чем меньше $f_т$, а следовательно, и $\varphi_т$), тем уже область самоторможения. При отсутствии трения самоторможение механизма наступить не может. У такого идеального механизма $\eta_{пр} = \eta_{об} = 1$ во всем диапазоне углов γ (кроме 0 и 90°).

В заключение рассмотрим уравнение (7.19). Из него следует, что коэффициент трения $f_т$, определяющий значение угла трения $\varphi_т$, оказывает большое влияние на к.п.д. Эта зависимость наглядно показана на рис. 7.14 (при $\gamma = 30°$) для разных видов трения и смазки: *I* — трение без смазочного материала $\eta = 5...40\%$; *II* — граничная смазка $\eta = 50...70\%$; *III* — гидродинамическая и гидростатическая смазка $\eta = 90...97\%$; *IV* — трение качения* $\eta = 98...99\%$.

Рассмотренный пример показывает, что высокие значения к. п. д. можно получить только при замене трения скольжения трением качения или в условиях совершенной жидкостной смазки. Поэтому в современных конструкциях станков с программным управлением, в прецизионных станках и другом технологическом оборудовании, где требуется высокая точность позиционирования и малые потери мощности на трение, широкое распространение получили шариковые винтовые пары качения или гидростатические передачи винт — гайка. В первом случае по винтовым канавкам винта и гайки перекатываются шарики, а во втором случае между рабочими поверхностями винта и гайки создается масляный слой, давление в котором поддерживается на требуемом уровне.

---

* При трении качения надо брать приведенный коэффициент трения $f_т^{пр}$ и приведенный угол трения $\varphi_т^{пр} = \operatorname{arctg} f_т^{пр}$.



Расчет износа элементов кинематических пар

В процессе эксплуатации механизма машины или прибора неизбежно происходит износ элементов его кинематических пар. Износ снижает прочность деталей и точность механизма, повышает нагрузки на подшипники, увеличивает вибрации и шум. Значительный износ часто бывает причиной нарушения работоспособности механизма и может привести даже к поломке деталей и выходу машины из строя. Поэтому при проектировании механизма важно знать форму и величину поверхности трения, рассчитать эпюру износа, с тем чтобы правильно выбрать конструкционные и смазочные материалы. Важно также выявить те детали и узлы, которые потребуют замены или ремонта ранее других. Таким образом, расчет ожидаемого износа, метод выполнения которого излагается в настоящей главе, имеет своей целью обеспечить необходимые ресурс и надежность работы механизма машины или прибора.

§ 8.1 Критерии оценки износа

Виды изнашивания. Изнашивание — процесс разрушения и отделения материала с поверхности твердого тела, проявляющийся в постепенном изменении размеров и формы тела; при этом могут изменяться и свойства поверхностных слоев материала.

Основные виды изнашивания следующие: механическое — результат механических воздействий; коррозионно-механическое — механическое воздействие сопровождается химическим или электрическим взаимодействием со средой; абразивное — результат режущего или царапающего действия твердых частиц, находящихся в свободном или закрепленном состоянии; эрозионное — результат воздействия потока жидкости или газа; усталостное — выкрашивание частиц материала поверхностного слоя при периодически меняющейся нагрузке (этот вид изнашивания особенно характерен для высших кинематических пар); изнашивание при заедании — результат схватывания, глубинного вырывания материала, переноса его с одной поверхности трения на другую (заедание или схватывание характеризуется сильным местным нагревом вследствие высоких скоростей скольжения и больших удельных давлений; такому виду изнашивания чаще всего подвержены незакаленные трущиеся поверхности кинематической пары из однородных материалов).

Изнашивание различают и по характеру деформирования поверхностного слоя (изнашивание при упругом контакте, пластическом контакте и при микрорезании).

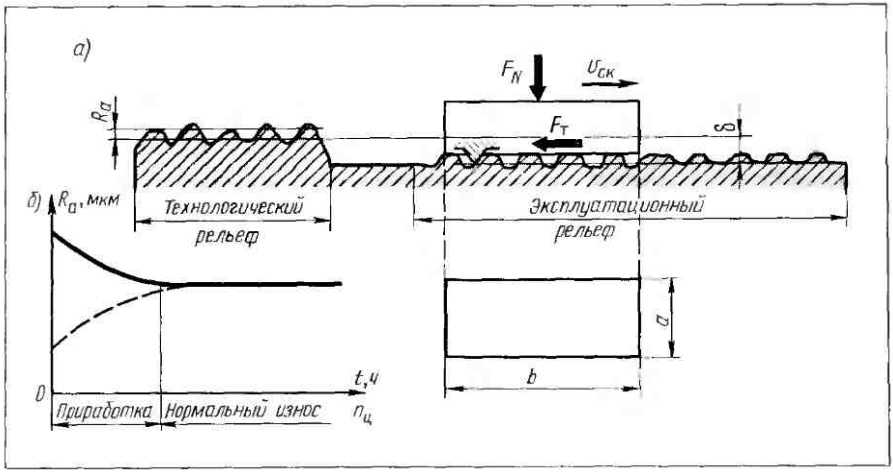


Рис. 8.1

Физическая модель изнашивания такая: при скольжении микронеровности перед ней возникает лобовой валик деформируемого материала, который находится под воздействием сжимающих напряжений (рис. 8.1, *а*). За микронеровностью вследствие сил трения материал растягивается. Следовательно, материал испытывает знакопеременное деформирование, многократное повторение которого приводит к накоплению в нем повреждений микроструктуры и отделению частиц материала. Эксперименты показывают, что материал разрушается не сразу, а лишь после некоторого числа циклов работы ($n_ц$).

Стадии изнашивания. Обычно имеют место две стадии изнашивания: 1) приработка поверхностей трения; 2) нормальный (эксплуатационный) износ, когда после приработки вместо исходной шероховатости поверхности, полученной при изготовлении, образуется некоторая новая равновесная шероховатость, которая в дальнейшем существенно не меняется [10]. Другими словами: в процессе изнашивания исходный (технологический) микрорельеф поверхности преобразуется в эксплуатационный с изменением параметров шероховатости, например среднего арифметического отклонения профиля *Ra* (рис. 8.1, *б*).

Для уменьшения времени приработки следует по опытным данным определить параметры равновесной шероховатости и назначить такой вид технологической обработки поверхности трения, которая ближе всего к равновесной шероховатости. Применение более гладкой исходной поверхности по сравнению с эксплуатационной (с меньшими значениями *Ra* на стадии приработки, штриховая линия на рис. 8.1, б), как правило, невыгодно из-за повышения стоимости изготовления; при этом может увеличиться и время приработки.

Количественная оценка износа. Результат изнашивания в едини-

цах длины, объема или массы называют износом. Различают предельный и допустимый износы. Предельный износ — износ, соответствующий предельному состоянию изнашивающегося изделия (или его части). Допустимый износ — значение износа, при котором изделие сохраняет работоспособность.

Предельный износ элементов пар определяют рядом критериев, из которых основными являются: а) нарушение в результате износа работоспособности механизма — поломка деталей, т. е. потеря прочности, заклинивание, потеря нужной точности; б) недопустимое ухудшение эксплуатационных характеристик машины (снижение качества изделий, увеличение вибраций и шума из-за появившихся зазоров в кинематических парах и т. д.).

При трении со смазочным материалом, когда толщина слоя смазочного материала, разделяющего трущиеся поверхности, превышает сумму их наибольших неровностей, износ оказывается весьма незначительным.

Графическое изображение распределения значений износа по поверхности трения или по определенному ее сечению называется эпюрой износа.

Износ оценивают толщиной слоя разрушенного материала δ (линейный износ, рис. 8.1, *а*) или его массой.

Скорость изнашивания определяется величиной износа в единицу времени:

$$\gamma = \mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = kp^m v_{\text{ск}}^n,$$

где k — коэффициент износа (численно равен γ при $p = v_{\text{ск}} = 1$); p — удельное давление в исследуемой точке поверхности трения; $v_{\text{ск}}$ — скорость скольжения (относительная скорость) в исследуемой точке поверхности трения; m — показатель степени, зависящий от вида взаимодействия контактирующих поверхностей (упругий контакт, пластический контакт, микрорезание); его величина колеблется в пределах от 1 до 3; n — показатель степени, зависящий от вида изнашивания. Для приработанных элементов кинематических пар принимают $m = 1$, $n = 1$ и тогда

$$\gamma = \mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = kpv_{\text{ск}}. \qquad (8.1)$$

Физический смысл формулы (8.1) можно пояснить на следующем примере (рис. 2.1, *а*). Пусть ползун размером $a \times b$ прижат к направляющей силой F_N, коэффициент трения скольжения f, удельное давление в любой точке поверхности трения $p = F_N/ab = \text{const}$.

Работа силы трения $F_\text{т}$ расходуется на разрушение и отделение материала и выделение теплоты, поэтому приближенно можно считать, что скорость изнашивания пропорциональна работе силы трения в единицу времени, т. е. мощности трения $P_\text{т}$:

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{abf} F_N f v_{\text{ск}} = cF_\text{т} v_{\text{ск}} = cP_\text{т},$$

где $c = k/(abf)$ — коэффициент пропорциональности.

В общем случае удельное давление p в разных точках поверхности трения различно, но такое толкование формулы (8.1) можно дать для любой элементарной площадки с центром в заданной точке поверхности трения.

Интенсивность изнашивания — износ, приходящийся на единицу пути трения: $\gamma_s = \mathrm{d}\delta/\mathrm{d}s$, где s — относительное перемещение, или путь трения. Следовательно,

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \gamma_s v_{\text{ск}}.$$

Величины γ и γ_s обычно определяют опытным путем по средним значениям p и $v_{\text{ск}}$, а затем по формуле (8.1) подсчитывают коэффициент износа k. Так, например, испытание образцов при средних режимах эксплуатации ($p_{\text{ср}} = 16 \cdot 10^5$ Па, $(v_{\text{ск}})_{\text{ср}} = 2$ м/с) показало, что за время $t_{\text{р}} = 100$ ч работы средний износ составил $\delta = 2$ мкм, следовательно, из формулы (8.1)

$$k = \gamma/(pv_{\text{ск}}) = 2 \cdot 10^{-2}/(16 \cdot 10^5 \cdot 2) = 6{,}25 \cdot 10^{-9} \text{ мкм}/(\text{ч} \cdot \text{Па} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

В справочнике [11] приведены опытные данные по γ и γ_s (в справочнике вместо γ_s применено обозначение J).

Интенсивность изнашивания γ_s может меняться в весьма широких пределах, примерно от $\gamma_s = 10^{-12}$ (износ 0,001 мкм на 1 км пути трения, т. е. очень малая величина) до $\gamma_s = 10^{-3}$ (износ 1 мм на 1 м пути трения, т. е. очень большая величина).

Свойство материала оказывать сопротивление изнашиванию в определенных условиях трения, оцениваемое величиной, обратной скорости или интенсивности изнашивания, называют износостойкостью. На износостойкость влияют твердость материалов, их упругие свойства, режим работы (нагрузка, скорость, температура), внешние условия (смазка, окружающая среда), конструктивные особенности узла трения.

По величине γ_s различают 10 классов износостойкости материалов, которые можно разделить на 3 основные группы в зависимости от вида контактного взаимодействия поверхностей трения: 0 — V классы ($\gamma_s = 10^{-12} \ldots 10^{-7}$) — высокая износостойкость вследствие упругого деформирования); VI—VII классы ($\gamma_s = 10^{-6} \ldots 10^{-5}$) — средняя износостойкость при упругопластическом деформировании); VIII—IX классы ($\gamma_s = 10^{-4} \ldots 10^{-3}$ — весьма низкая износостойкость при микрорезании).

Так, например, по опытным данным [11] для шатунных шеек стальных коленчатых валов двигателей автомобилей $\gamma_s = 5 \cdot 10^{-12} \ldots 4 \cdot 10^{-11}$ (весьма высокая износостойкость при упругом контакте), а для зуба ковша экскаватора (сталь 45) $\gamma_s = 10^{-4} \ldots 10^{-3}$ (весьма низкая износостойкость при микрорезании).

В последнее время большое внимание уделяют материалам деталей машин, механизмов и приборов, предназначенных для работы в узлах трения без специальной смазочной среды: материалы на основе полимеров (подшипники, зубчатые колеса, кулачки и др.), углеграфитные материалы (уплотнительные элементы, вкла-

дыши гидронасосов, детали узлов трения в авиационной и химической промышленности), металлокерамические материалы (детали узлов трения, работающие при высоких температурах) и др.

Для повышения износостойкости трущихся поверхностей новых деталей наряду с гальваническими покрытиями широко применяют их термическую обработку: поверхностную закалку с нагревом газовым пламенем (для поверхностного упрочнения стальных зубчатых колес, червяков, шеек коленчатых валов и пр.), высокочастотную закалку (кулачковые валы, шестерни, шейки валов, гильзы цилиндров, станины станков и др.). С этой же целью применяют обработку поверхностным пластическим деформированием, в процессе которого повышается твердость поверхностных слоев и достигается нужный класс шероховатости поверхности (обкатывание и раскатывание цилиндрических и плоских поверхностей, прошивание, калибрование и др.).

Принимаются во внимание и соображения замены деталей при ремонте машины: ремонт упрощается и удешевляется, если изношенная деталь простая и легко заменимая (например, втулка или вкладыш).

Иногда оказывается более выгодным не замена, а восстановление и увеличение срока службы деталей путем наращивания изношенных поверхностей трения газовой или электродуговой наплавкой, газовой или электрической металлизацией, плазменным напылением (для нанесения тугоплавких соединений) и другими способами.

Износ в общем случае (при переменных p и $v_{ск}$) определяют по формуле

$$\delta = k\int_0^{t_р} p v_{ск}\,\mathrm{d}t. \qquad (8.2)$$

Для удобства расчета в механизмах с одной степенью свободы формулу (8.2) целесообразно преобразовать, введя обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\omega = \varphi$. Тогда износ за один цикл работы, для которого $\varphi = \varphi_ц$,

$$\delta_ц = k\int_0^{\varphi_ц} p(v_{ск}/\omega)\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (8.3)$$

где $v_{ск}/\omega = v_{ск}(\varphi)/\omega$ — аналог скорости скольжения (или передаточная функция $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi$) в рассматриваемой точке элемента кинематической пары.

Если число циклов работы $n_ц$, то износ

$$\delta = \delta_ц n_ц. \qquad (8.4)$$

По формуле (8.4) можно найти число циклов работы по заданной величине предельного износа, что необходимо при определении ресурса работы машины.

§ 8.2 Расчет износа элементов низших и высших кинематических пар

Для правильного выбора конструкционных и смазочных материалов, мест подвода смазочного материала и расчета ожидаемого износа рассмотрим форму и величину поверхности трения и распределение износа по ней для различных кинематических пар, что зависит от формы элементов и условий работы пары.

Вращательная пара (рис. 8.2). Условия работы пары: сила $\bar{F}_{21}^{n}=\text{const}$, $\omega_1=\text{const}$, $\omega_2=0$. Тогда $\delta_1=\text{const}$ (цапфа вала *1* будет изнашиваться равномерно), а износ δ_2 зависит от угловой координаты ψ рассматриваемой точки: $\delta_2=\delta_2(\psi)$ — подшипник будет изнашиваться неравномерно. Через некоторое число циклов работы центр вала переместится из положения O в O', следовательно, износ подшипника *2* в направлении силы $\bar{F}_{21}^{n}$ будет во всех точках рабочей поверхности в пределах угла $\psi_{\max}=\pm 90°$ одинаковым и равным $\delta_{2\max}=OO'$, а по нормали к поверхности трения различным, изменяясь по закону косинуса $\delta_2=\delta_{2\max}\cos\psi$.

Суммарный износ сопряжения [10]: $\delta_\Sigma=\delta_1+\delta_2$.

Так как $v_{ск}=\text{const}$ для всех точек, то и закон распределения давления будет косинусоидальным [4]: $p=p_{\max}\cos\psi$. Для определения $p_{\max}$ рассмотрим элементарную площадку на втулке подшипника шириной $r\,d\psi$ и длиной b. Элементарная сила в направлении нормали к поверхности трения

$$dF_{12}^{n}=pbr\,d\psi=p_{\max}br\cos\psi\,d\psi.$$

Сила $\bar{F}_{21}^{n}$ уравновешена вертикальными проекциями сил $d\bar{F}_{12}^{n}$*, поэтому

$$F=F_{21}^{n}=2\int_0^{\pi/2}p_{\max}br\cos^2\psi\,d\psi.$$

Интеграл $\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi$ вычисляют так:

$$\cos 2\psi=\cos^2\psi-\sin^2\psi=2\cos^2\psi-1;$$

$$\cos^2\psi=(\cos 2\psi+1)/2;$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos 2\psi+1)d\psi=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\psi+\psi\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

---

* Вертикальные проекции сил трения $d\bar{F}_\tau$ в зонах 0...ψ и 0...$-\psi$ уравновесятся и в уравнение не войдут.

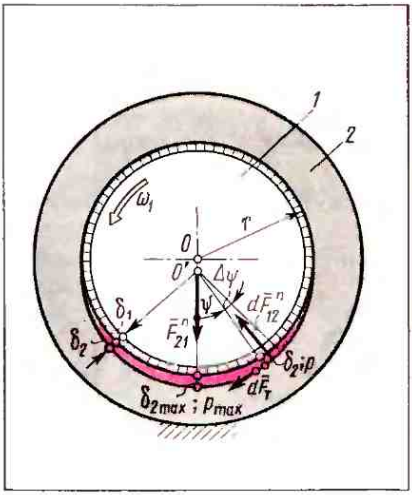


Рис. 8.2

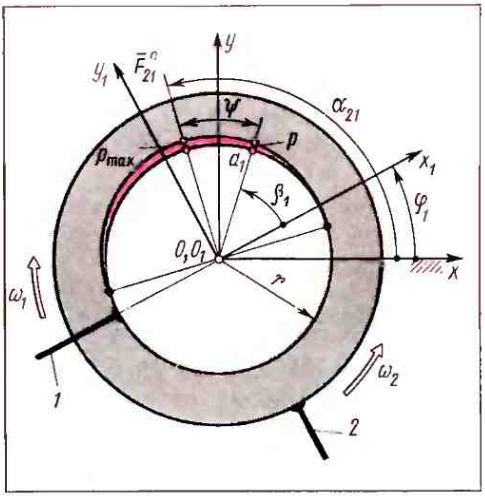


Рис. 8.3

Следовательно, $F = 2p_{max}br\pi/4$, откуда

$$p_{max} = 2F/(\pi br).$$

Закон распределения давления, который нужно знать для расчета износа за цикл работы по формуле (8.3), имеет вид

$$p = [2F/(\pi br)]\cos\psi, \qquad (8.5)$$

где ψ — угловая координата рассматриваемой точки.

В общем случае, когда сила $\bar{F}$ переменна, формула (8.5) должна применяться для каждого мгновенного положения. Поэтому в общем случае (рис. 8.3) вращательной пары механизма с обобщенной координатой φ для определения износа одного из элементов пары *1-2* (например, звена *1* в некоторой точке a_1) нужно знать в неподвижной системе координат Oxy угловую координату звена *1* $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi)$ и угловую координату $\alpha_{21} = \alpha_{21}(\varphi)$ вектора силы $\bar{F} = \bar{F}_{21}^n$, приложенной к звену *2*, а в подвижной системе $O_1x_1y_1$, связанной со звеном *1*, — угловую координату β_1 исследуемой точки a_1*.

Тогда давление p в точке a_1 по формуле (8.5)

$$p = p_{max}\cos\psi,$$

где $p_{max} = 2F/(\pi br)$, $\psi = \alpha_{21} - (\varphi_1 + \beta_1)$; при этом, если $|\psi| \geqslant \pi/2$, то $p = 0$.

---

* В общем случае независимо от нумерации звеньев для расчета нужно взять вектор силы, приложенной от внутреннего элемента к внешнему элементу вращательной пары.

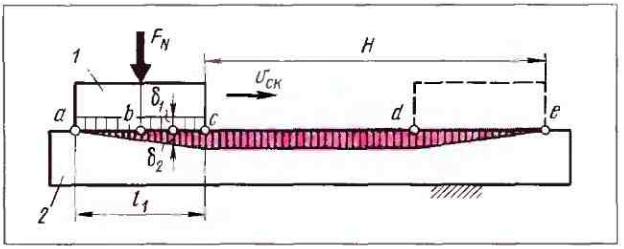


Рис. 8.4

Скорость скольжения в точке a_1 равна произведению относительной угловой скорости и радиуса цапфы:

$$v_{ск} = \omega_{21} r ,$$

где $\omega_{21} = |\omega_1| \pm |\omega_2|$ (знак плюс при разных направлениях вращения звеньев).

После определения $p = p(\varphi)$ и $v_{ск}/\omega = v_{ск}(\varphi)/\omega$ величину износа δ_1 в заданной точке a_1 находят по формулам (8.3) и (8.4); по нескольким исследованным точкам строят эпюры износа элементов пары (рис. 8.2).

Поступательная пара (рис. 8.4). Условия работы пары: ползун *1* длиной l_1 движется возвратно-поступательно по неподвижной направляющей *2*, ход ползуна H; сила $\bar{F}_N = \text{const}$ (приложена посередине ползуна); давление p распределено равномерно.

В этом случае износ δ_1 плоской поверхности ползуна равномерный. Износ δ_2 в крайних точках направляющей (a, e) равен нулю, а на участке cd — максимальный. Эпюры износа элементов пары даны на рис. 8.4. При $p = \text{const}$

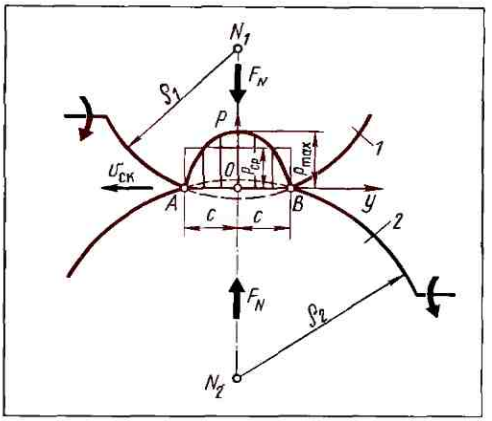


Рис. 8.5

$$\delta_2 = kp \int_0^{t_p} v_{ск} dt = kps,$$

где s — путь трения: в точках a, e — $s = 0$; в точке b — $s = 2l_1/2 = l_1$; в точках c, d — $s = 2l_1$ (износ максимальный).

В общем случае расчет износа $\delta_{1,2}$ ведут по формулам (8.3), (8.4). Если сила $\bar{F}_N$ приложена не посередине ползуна, давление по длине ползуна следует принимать распределенным по линейному закону. Если ползун цилиндрический (поршень), то распределение давления p

нужно учитывать в двух направлениях: вдоль оси и по сечению, перпендикулярному оси поршня.

Методику конкретных расчетов износа элементов кинематических пар рычажных механизмов (алгоритм, программа для ЕС ЭВМ и числовые примеры) (см.: *Лукичев Д. М., Тимофеев Г. А.* Расчет износа элементов кинематических пар с использованием ЭВМ. М., 1984).

Высшая пара. Условия работы пары: элементы пары (рис. 8.5) выполнены в виде двух выпуклых цилиндров радиусами ρ_1 и ρ_2 с параллельными осями N_1 и N_2; передаваемая нормальная удельная нагрузка F_N (Н/м) распределяется равномерно.

Здесь сперва нужно определить площадь контакта поверхностей и распределение давления по площади контакта. В общем случае высшей пары первоначальный контакт осуществляется по линии или в точке, а затем при нагружении пятно касания принимает форму эллипса, переходящего в предельных случаях в круг или прямоугольник. В теории контактных деформаций упругих тел получены формулы для определения размеров пятна контакта и распределения давления [11]. В рассматриваемом случае пятно контакта после нагружения будет в виде прямоугольника, половина ширины которого

$$c=1{,}128\sqrt{\theta_\Sigma \rho F_N},$$

где $\rho=\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$ — приведенный радиус кривизны; $\theta_\Sigma=\theta_1+\theta_2$ — упругая постоянная материалов звеньев *1* и *2*.

Величины θ_1 и θ_2 определяются по формуле

$$\theta_{1,2}=(1-\mu_{1,2}^2)/E_{1,2},$$

где $E_{1,2}$ — модуль продольной упругости материалов звеньев *1, 2*; $\mu_{1,2}$ — коэффициент Пуассона материалов звеньев *1, 2*.

Максимальное давление в зоне контакта

$$p_{\max}=0{,}564\sqrt{F_N/(\theta_\Sigma \rho)}; \quad p=p_{\max}\sqrt{1-(y/c)^2},$$

где y — координата рассматриваемой точки.

В любом сечении вдоль линии контакта длиной b (перпендикулярно чертежу) распределение давления аналогично. Для приближенных расчетов среднее значение давления в этом случае:

$$p_{\text{ср}}\approx 0{,}77p_{\max}.$$

Поскольку в общем случае высшей пары контактирующие поверхности в относительном движении перекатываются со скольжением, пятно контакта в окрестности рассматриваемой точки O будет перемещаться по исследуемому профилю некоторое время $t_к$, определяемое как время зацепления (контакта) его участка AB за один цикл работы (рис. 8.5). В момент входа в зацепление точки A, опережающей точку O звена *2* на расстояние c, в исследуемой точке O давление минимальное $p=p_{\min}=0$; затем оно будет возрастать до $p=p_{\max}$, а в момент входа в зацепление точки B, отстающей от исследуемой точки на расстояние c, давление снова упадет до нуля. Поэтому приближенно износ в точке O за цикл работы можно

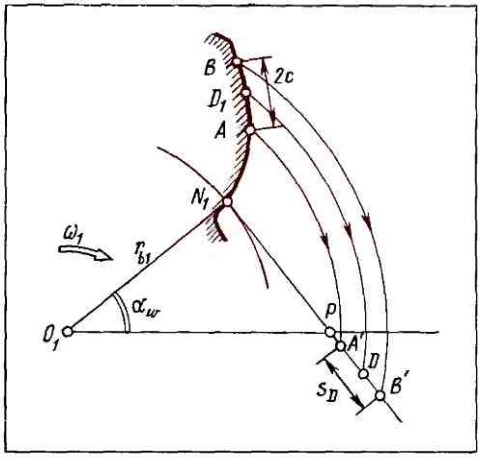


Рис. 8.6

определить по среднему давлению $p_{ср}$, скорости скольжения $v_{ск}$ и времени зацепления $t_к$ участка профиля AB по формуле

$$\delta_ц = k p_{ср} v_{ск} t_к,$$

а износ за $n_ц$ циклов работы по формуле (8.4).

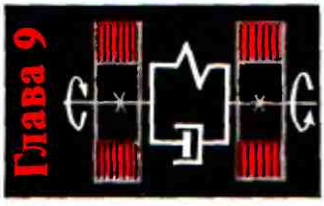
Так, например, для некоторой точки D_1 колеса цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи (рис. 8.6):

$$F_N = k_д M_{д1}/(r_{b1} b),$$

где $k_д$ — коэффициент динамичности нагрузки; $M_{д1}$ — движущий момент;

$$v_{ск} = \omega_1 l_{PD}(1 + z_1/z_2);\ t_к = s_D/v_D,$$

где $s_D = A'B'$ и $v_D = \omega_1 r_{b1}$ — путь и скорость общей контактной точки D по линии зацепления за время зацепления участка профиля AB. Величины s_D и l_{PD} можно найти из геометрии зацепления. Ширина пятна контакта $2c$ обычно весьма мала, на рис. 8.6 для наглядности показана в увеличенном виде.



Исследование движения машинного агрегата с учетом упругости звеньев

В 4-й главе было исследовано движение машинного агрегата. При этом предполагалось, что звенья механизма агрегата абсолютно жесткие. Однако в действительности звенья обладают упругостью, вследствие чего они деформируются под действием приложенных сил. Поэтому на основное движение звеньев механизма накладывается добавочное, порожденное их податливостью и представляющее собой колебательный процесс. Этот процесс приводит не только к нарушению закона движения механизма, но и может вызвать динамические перегрузки его звеньев и кинематических пар. Исследованию влияния упругости на движение машинного агрегата посвящена данная глава, материал которой изложен по методике, разработанной М. З. Коловским (см.: *Коловский М. З.* Динамика машин, Л., 1980).

§ 9.1 Динамическая модель машинного агрегата

Рассмотрим машинный агрегат, состоящий из двигателя *ДВ*, передаточного механизма *П* и рабочей машины *РМ* (т. е. потребителя механической энергии) (рис. 9.1, *а*).

Пусть передаточный механизм является зубчатым (рис. 9.1, *б*). Его валы подвергаются скручиванию, зубья — изгибу. Определим жесткость передаточного механизма.

Во время работы механизма в зубчатом зацеплении действует сила, деформирующая зубья. Рассмотрим составляющую F_τ этой силы, касательную начальным окружностям, а также составляющую δ_τ упругого перемещения зубьев по этому же направлению тт (рис. 9.1, *в*). Сила и упругая деформация связаны соотношением $F_\tau = c\delta_\tau$, где c — линейная жесткость зубчатого зацепления. Линейная жесткость пропорциональна длине b зубьев: $c = ab$, где a — коэффициент, который для стальных колес принимают равным 15 000 МПа.

В дальнейших расчетах удобнее пользоваться не линейной жесткостью, а угловой. Чтобы перейти к ней, закрепим неподвижно ступицу в сечении *2* колеса z_2, а к валу большего колеса z_3 в сечении *3* приложим момент M_3. Под его действием зубья сдеформируются, и сечение *3* повернется на угол φ_3. Очевидно, что $\delta_\tau = \varphi_3 r_{w3}$, а $F_\tau = M_3/r_{w3}$. Подставим эти выражения в уравнение $F_\tau = c\delta_\tau$, после чего получим $M_3 = cr_{w3}^2\varphi_3$ или окончательно $M_3 = c_{32}\varphi_3$, где $c_{32} = cr_{w3}^2$. Величина c_{32} есть угловая жесткость зубчатого зацепления, приведенная к сечению *3* при неподвижном сечении *2*.

Если же поступить наоборот, т. е. закрепить сечение *3*, а к сечению *2* приложить момент M_2, то сечение *2* повернется на угол φ_2. Проделав те же действия, что и ранее, получим $M_2 = c_{23}\varphi_2$, где $c_{23} = cr_{w2}^2$. Здесь необходимо обратить особое внимание на то, что $c_{23} \neq c_{32}$. Можно записать, что $c_{23} = cr_{w3}^2(r_{w2}/r_{w3})^2 = c_{32}u_{32}^2$, т. е. $c_{23} = c_{32}u_{32}^2$, где $u_{32} = r_{w2}/r_{w3} = z_2/z_3$ — передаточное отношение зубчатого зацепления.

Жесткость вала длиной l и диаметром d (например, вала *3-4*, рис. 9.1, *б*) определяется по формуле, известной из курса «Сопротивление материалов»: $c_{34} = GJ_p/l$, где $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $J_p = \pi d^4/32$. Для угловой жесткости вала справедливо $c_{34} = c_{43}$. Отметим также, что угловая жесткость вала обычно много меньше угловой жесткости зубчатого зацепления.

Определим жесткость всего передаточного механизма *П* (рис. 9.1, *б*). При этом не будем учитывать инертность зубчатых колес и валов, так как она мала по сравнению с инертностью других звеньев машинного агрегата. Сделаем сечение *1* неподвижным, а к сечению *6* приложим момент M_6. Под действием этого момента участок *6-5* будет скручен, и сечение *6* повернется относительно сечения *5*. Равным образом, момент M_6 вызовет деформацию зубьев в зацеплении *5-4*, вследствие чего сечение *5* повернется

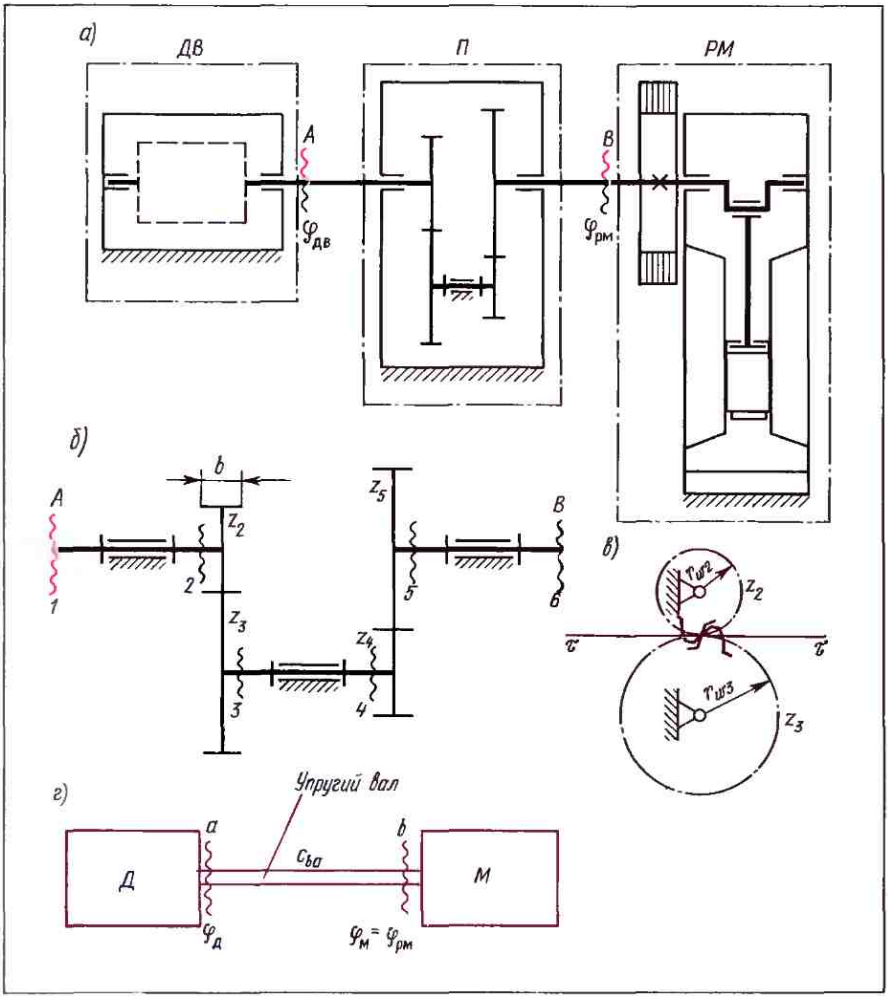


Рис. 9.1

относительно сечения *4*. Этот поворот вызовет добавочное угловое перемещение сечения *6*. Рассуждая и дальше так же, придем к заключению, что полное угловое перемещение φ_6 сечения *6* представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых вызвано деформацией соответствующего участка передачи.

При определении этих слагаемых необходимо придерживаться следующих положений:

1) подсчитывая поворот сечения *6*, вызванный деформацией какого-либо участка (например, участка *4-3*) все остальные последовательно включенные участки при этом следует считать абсолютно жесткими;

2) так как участок *4-3* связан с сечением *6* не прямо, а через зубчатое зацепление *5-4*, то, определяя угол поворота сечения *6*, вызванный углом скручивания φ_{43}, нужно этот угол φ_{43} умножать на передаточное отношение $u_{54}=z_4/z_5$;

3) по причине, изложенной в п. 2, момент, скручивающий участок *4-3*, не равен M_6 и поэтому его надо определять как M_6u_{54}.

Учитывая все это, запишем

$$\varphi_6=\frac{M_6}{c_{65}}+\frac{M_6}{c_{54}}+\frac{M_6u_{54}}{c_{43}}u_{54}+\frac{M_6u_{54}}{c_{32}}u_{54}+\frac{M_6u_{52}}{c_{21}}u_{52}=$$

$$=M_6\left(\frac{1}{c_{65}}+\frac{1}{c_{54}}+\frac{u_{54}^2}{c_{43}}+\frac{u_{54}^2}{c_{32}}+\frac{u_{52}^2}{c_{21}}\right).$$

Жесткостью c_{61} передачи, приведенной к сечению *6* при неподвижном сечении *1*, назовем отношение $c_{61}=M_6/\varphi_6$, откуда

$$\frac{1}{c_{61}}=\frac{1}{c_{65}}+\frac{1}{c_{54}}+\frac{1}{c_{43}/u_{54}^2}+\frac{1}{c_{32}/u_{54}^2}+\frac{1}{c_{21}/u_{52}^2}.$$

Если нужно было бы определить жесткость c_{16} передачи *П*, но приведенную к сечению *1* при неподвижном сечении *6*, то $c_{16}=c_{61}u_{52}^2$, где $u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$ — передаточное отношение зубчатого механизма.

Таким образом, передачу *П* можно заменить ее моделью — некоторым условным упругим валом с жесткостью $c=c_{ba}$, который якобы соединяет двигатель *Д* с рабочей машиной *М* (рис. 9.1, *г*). Угол скручивания этого вала определяется как разность угловых координат его концевых сечений *b* и *a*.

Примем, что кинематические характеристики $\varphi_м$, $\dot{\varphi}_м$, $\ddot{\varphi}_м$ сечения *b* вала в точности такие же, как и кинематические характеристики выходного сечения *B* передачи (рис. 9.1, б), т. е.

$$\varphi_м=\varphi_{рм},\quad \dot{\varphi}_м=\dot{\varphi}_{рм},\quad \ddot{\varphi}_м=\ddot{\varphi}_{рм}. \tag{9.1}$$

Но податливый вал моделирует только упругие свойства передачи *П*; ее передаточных свойств он воспроизвести не может. Их учитывают с помощью уравнений

$$\varphi_д=\varphi_{дв}u_{BA};\quad \dot{\varphi}_д=\dot{\varphi}_{дв}u_{BA};\quad \ddot{\varphi}_д=\ddot{\varphi}_{дв}u_{BA}, \tag{9.2}$$

где $\varphi_д$, $\dot{\varphi}_д$, $\ddot{\varphi}_д$ — кинематические характеристики сечения *a* условного вала; $\varphi_{дв}$, $\dot{\varphi}_{дв}$, $\ddot{\varphi}_{дв}$ — кинематические характеристики входного сечения *A* передачи; u_{BA} — передаточное отношение, которое для механизма (рис. 9.1, *б*) $u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$.

Так как согласно уравнениям (9.1) именно выходные характеристики передачи при замене ее упругим валом не претерпели изме-

нения, то операции, выполненные по уравнениям (9.2), условимся называть «пересчетом к выходному сечению передачи». Однако при этом нельзя забывать, что между сечением a с координатой $\varphi_д$ и сечением b с координатой $\varphi_м$ находится условный упругий вал (рис. 9.1, *г*), и поэтому пересчет к выходному сечению передачи отнюдь не означает равенства координат $\varphi_д$ и $\varphi_м$. Такое равенство имело бы место только в случае абсолютно жесткой передачи.

Поворот сечения b упругого вала по отношению к сечению a составит $\varphi_м - \varphi_д$. Поэтому упругий момент, приложенный к рабочей машине M от передачи, выразится так:

$$M_{му} = -c(\varphi_м - \varphi_д), \tag{9.3}$$

где c — жесткость упругого вала, приведенная к выходному сечению b; знак минус указывает на то, что реакция упругого элемента направлена всегда навстречу его деформации.

В соответствии с этим упругий момент $M_{ду}$, приложенный к двигателю $Д$ от передачи, равен — $M_{му}$, поэтому

$$M_{ду} = -c(\varphi_д - \varphi_м). \tag{9.4}$$

Колебательный процесс всегда сопровождается действием сил сопротивления (так называемых диссипативных сил). Природа этих сил различна. Их причиной является: трение в кинематических парах, а также в неподвижных соединениях деталей (конструкционное трение в резьбе, в стыках и т. п.); внутреннее трение, возникающее между частицами материала (в металлах — весьма небольшое); наконец, специальные демпферы, устанавливаемые в нужных случаях на валопроводах для ограничения возникающих колебаний.

Связь между силой сопротивления и характеристиками движения — сложная. Однако опыт показывает, что при небольших амплитудах — что как раз и свойственно рассматриваемой задаче — можно считать, что сила сопротивления примерно пропорциональна скорости относительного движения.

Силы сопротивления проявляют себя в различных местах механизма. Но все их можно привести к одному сечению и заменить одним моментом вязкого сопротивления. Поскольку для передачи $П$, замененной условным валом, скорость сечения b относительно сечения a составляет $\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д$ (рис. 9.1, *г*), момент вязкого сопротивления, приложенный к рабочей машине M от передачи, выразится следующим образом:

$$M_{мт} = -k(\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д), \tag{9.5}$$

где k — коэффициент сопротивления, приведенный к сечению b; знак минус показывает, что момент сопротивления направлен всегда против относительной скорости. Аналогично момент вязкого сопротивления, приложенный к двигателю $Д$ от передачи, запишется так:

$$M_{дт} = -k(\dot{\varphi}_д - \dot{\varphi}_м). \tag{9.6}$$

Если бы нужно было определить коэффициент сопротивления k_{16}, приведенный к сечению *1* (рис. 9.1, *б*), то $k_{16}=k_{61}u_{52}^2$, где k_{61} — коэффициент сопротивления, приведенный к сечению *6*. Отметим также, что величина коэффициента сопротивления находится опытным путем.

Составим уравнения движения машинного агрегата. Так как учитываются *упругие деформации* звеньев передачи, *то жесткой кинематической связи* между ее входными и выходными характеристиками *нет*, поскольку на основное движение механизма накладывается колебательный процесс. Следовательно, механизм имеет уже не одну (как при абсолютно жесткой передаче), а две степени свободы, и поэтому для его исследования надо назначить две обобщенные координаты и составить два уравнения движения. Как уже было отмечено, инертность звеньев передачи (из-за ее малости) учитывать не будем.

Сначала составим уравнение рабочей машины в дифференциальной форме (см. § 4.5). Выберем в качестве начального звена входной вал рабочей машины с координатой $\varphi_{рм}=\varphi_м$. К нему приведем все массы и силы, приложенные к механизму рабочей машины, (см. § 4.4 и 4.3) после чего запишем

$$J_м\ddot{\varphi}_м+\frac{1}{2}\frac{dJ_м}{d\varphi_м}\dot{\varphi}_м^2=M_{\Sigma м}.$$

В суммарный приведенный момент $M_{\Sigma м}$ войдет приведенный момент сопротивления рабочей машины $M_м(\varphi_м, \dot{\varphi}_м)$ и момент $M_{мп}$, приложенный к валу рабочей машины от передачи. Он состоит из упругого момента $M_{му}$ и момента вязкого сопротивления $M_{мт}$ [см. уравнения (9.3) и (9.5)], т. е.

$$M_{мп}=M_{му}+M_{мт}=-c(\varphi_м-\varphi_д)-k(\dot{\varphi}_м-\dot{\varphi}_д). \qquad (9.7)$$

Теперь уравнение рабочей машины примет такой вид:

$$J_м\ddot{\varphi}_м+\frac{1}{2}\frac{dJ_м}{d\varphi_м}\dot{\varphi}_м^2=M_м(\varphi_м, \dot{\varphi}_м)-c(\varphi_м-\varphi_д)-k(\dot{\varphi}_м-\dot{\varphi}_д). \qquad (9.8)$$

Составим уравнение двигателя с механизмом любой структуры. Начальным звеном выберем выходной вал двигателя с координатой $\varphi_{дв}$. Приведя к нему все массы и силы, приложенные к механизму двигателя, запишем

$$J_{дв}\ddot{\varphi}_{дв}+\frac{1}{2}\frac{dJ_{дв}}{d\varphi_{дв}}\dot{\varphi}_{дв}^2=M_{\Sigma дв}.$$

В суммарный приведенный момент $M_{\Sigma дв}$ войдет приведенный движущий момент $M_{дв}(\varphi_{дв}, \dot{\varphi}_{дв})$ и момент $M_{двп}$, приложенный к валу двигателя от передачи.

Замена передачи условным валом (рис. 9.1, *г*) потребовала пересчета к ее выходному сечению кинематических характеристик двигателя по уравнениям (9.2). Эта же причина вынуждает сделать пересчет приведенного момента инерции $J_{дв}$ двигателя и его произ-

водной $dJ_{дв}/d\varphi_{дв}$, а также моментов $M_{дв}$ и $M_{двп}$ к выходному сечению передачи по уравнениям:

$$J_д = \frac{J_{дв}}{u_{BA}^2};\ \frac{dJ_д}{d\varphi_д} = \frac{1}{u_{BA}^3}\frac{dJ_{дв}}{d\varphi_{дв}};\ M_д = \frac{M_{дв}}{u_{BA}};\ M_{дп} = \frac{M_{двп}}{u_{BA}}. \qquad (9.9)$$

Для передачи, изображенной на рис. 9.1, *б*, $u_{BA} = u_{52} = z_2z_4/(z_3z_5)$.

Момент $M_{дп}$ состоит из двух слагаемых: $M_{ду}$ и $M_{дт}$ [см. уравнения (9.4) и (9.6)]. Учитывая это, а также используя уравнения (9.2) и (9.9), получим после простых преобразований:

$$J_д\ddot{\varphi}_д + \frac{1}{2}\frac{dJ_д}{d\varphi_д}\dot{\varphi}_д^2 = M_д(\varphi_д, \dot{\varphi}_д) - c(\varphi_д - \varphi_м) - k(\dot{\varphi}_д - \dot{\varphi}_м). \qquad (9.10)$$

Системой уравнений (9.8) и (9.10) описывается динамический процесс, протекающий в машинном агрегате при учете упругости звеньев передачи. Неизвестными функциями в этой системе являются обобщенные координаты $\varphi_д = \varphi_д(t)$ и $\varphi_м = \varphi_м(t)$.

Ранее при замене передачи упругим валом было предложено условие, что кинематические характеристики $\varphi_м$, $\dot{\varphi}_м$, $\ddot{\varphi}_м$ сечения *b* этого вала в точности такие же, как и кинематические характеристики выходного сечения *B* передачи, что и было записано в виде уравнений (9.1). Но в равной мере можно было бы предложить и другое условие: кинематические характеристики $\varphi_д$, $\dot{\varphi}_д$, $\ddot{\varphi}_д$ сечения *a* упругого вала в точности такие же, как и кинематические характеристики входного сечения *A* передачи, т. е. $\varphi_д = \varphi_{дв}$; $\dot{\varphi}_д = \dot{\varphi}_{дв}$; $\ddot{\varphi}_д = \ddot{\varphi}_{дв}$. Тогда уравнения (9.1), (9.2) и (9.9) потеряли бы силу. При постановке второго условия все кинематические, инерционные и силовые характеристики рабочей машины надо было бы пересчитать к входному сечению *A* передачи. К этому сечению нужно было бы привести коэффициенты жесткости *c* и сопротивления *k*, а именно: $c_{ab} = c_{ba}u_{BA}^2$, $k_{ab} = k_{ba}u_{BA}^2$.

Отметим, что в дальнейшем изложении будет использоваться первое условие и связанные с ним уравнения (9.1), (9.2) и (9.9).

§ 9.2 Установившееся движение машинного агрегата

Рассмотрим *установившееся* движение машинного агрегата, происходящее с *малым* коэффициентом неравномерности. Возьмем типичный пример, когда двигатель агрегата — роторная машина, передаточный механизм — зубчатый с передаточным отношением $u_{BA} = u_{52} = z_2z_4/(z_3z_5)$ (рис. 9.1), а рабочая машина имеет рычажный механизм — допустим, кривошипно-ползунный.

Пересчитаем по уравнениям (9.2) и (9.9) все кинематические, инерционные и силовые характеристики двигателя к выходному сечению *B* передачи. К этому же сечению приведем коэффициенты жесткости $c = c_{61}$ и сопротивления $k = k_{61}$.

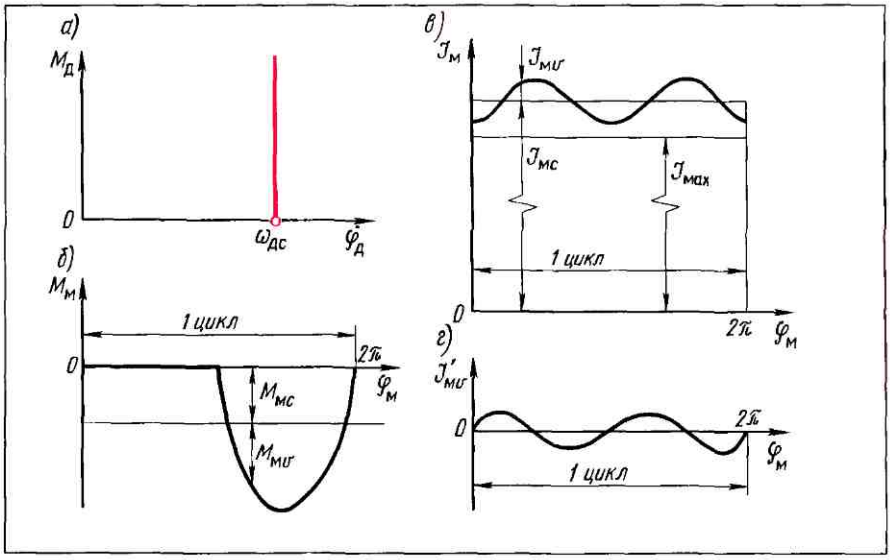


Рис. 9.2

Пусть двигатель имеет *абсолютно жесткую* характеристику (рис. 9.2, *а*); его момент не зависит от угла поворота $M_д = \text{invar}\ (\varphi_д)$, а момент инерции его ротора — постоянный $J_д = \text{const}$. Как и ранее (см. § 4.11), момент сопротивления рабочей машины примем не зависящим от скорости вращения $M_м = \text{invar}\ (\varphi_м)$. Но момент $M_м$ существенно зависит от угла поворота $\varphi_м$ (рис. 9.2, *б*). Представим момент $M_м$ как сумму двух слагаемых $M_м = M_{мс} + M_{мυ}$, в которой

$$M_{мс} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_м\,(\varphi_м)\,d\varphi_м = \text{const};\quad M_{мυ} = \text{var},\ \text{причем}\ \int_0^{2\pi} M_{мυ}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

Приведенный к валу рабочей машины момент инерции $J_м$ ее механизма и его производная $dJ_м/d\varphi_м$ представлены на рис. 9.2, *в, г*. Примем, что $J_м = J_{мс} + J_{мυ}$; при этом

$$J_{мс} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_м(\varphi_м)\,d\varphi_м = \text{const};$$

$$J_{мυ} = \text{var};\quad \int_0^{2\pi} J_{мυ}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{dJ_м}{d\varphi_м} = \frac{dJ_{мυ}}{d\varphi_м} = J'_{мυ};\quad \int_0^{2\pi} J'_{мυ}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

С учетом этого запишем уравнения движения машинного агрегата (9.8) и (9.10) в таком виде:

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м + J_{мv}\ddot{\varphi}_м + \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2 =$$

$$= M_{мс} + M_{мv} - c(\varphi_м - \varphi_д) - k(\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д); \quad (9.11)$$

$$J_д\ddot{\varphi}_д = M_д - c(\varphi_д - \varphi_м) - k(\dot{\varphi}_д - \dot{\varphi}_м). \quad (9.12)$$

Представим уравнение (9.11) следующим образом:

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м = M_{мп} + M_{мс} + \left[M_{мv} + \left(-j_{мv}\ddot{\varphi}_м - \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2\right)\right],$$

где $M_{мп}$ — момент, приложенный к рабочей машине от передачи и определяемый по уравнению (9.7). Напомним, что $M_{мс} = \text{const}$ (рис. 9.2, *б*). Члены, заключенные в квадратные скобки, зависят явно от угловой координаты $\varphi_м$ (см. рис. 9.2, *б, в, г*) и изменяются периодически. Объединим их одним обозначением

$$L_{мv}(\varphi_м) = M_{мv} + \left(-J_{мv}\ddot{\varphi}_м - \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2\right). \quad (9.13)$$

Теперь уравнение (9.11) примет вид

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м = M_{мп} + M_{мс} + L_{мv}(\varphi_м). \quad (9.14)$$

Аналогично запишем уравнение (9.12)

$$J_д\ddot{\varphi}_д = M_д + M_{дп}, \quad (9.15)$$

где $M_{дп} = M_{ду} + M_{дт}$ — момент, приложенный к двигателю от передачи [см. уравнения (9.4) и (9.6)].

Динамическая модель исследуемого машинного агрегата, построенная по уравнениям (9.14) и (9.15), изображена на рис. 9.3. Решим уравнения (9.14) и (9.15) относительно искомых функций $\varphi_м(t)$ и $\varphi_д(t)$.

Так как характеристика двигателя абсолютно жесткая (т. е. вертикаль, рис. 9.2, *а*), то решение для $\varphi_д(t)$ и ее производных получаем сразу:

$$\dot{\varphi}_д = \omega_{дс} = \text{const}, \quad \varphi_д = \omega_{дс}t; \quad \ddot{\varphi}_д = 0. \quad (9.16)$$

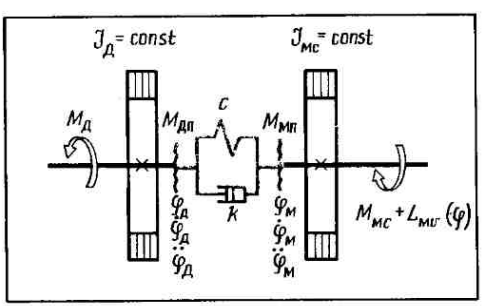


Рис. 9.3

Таким образом, вращение вала двигателя — равномерное, с угловой скоростью $\omega_{дв} = \omega_{дс}/u_{52} = \text{const}$. Движущий момент $M_д$, пересчитанный к выходному сечению передачи, а следовательно, и фактический момент двигателя $M_{дв} = M_д u_{52}$ будут иметь переменную величину. Момент $M_д(t)$ определяют из уравнения (9.12) после того, как будет найдена $\varphi_м(t)$.

Получив решения (9.16), замечаем, что уравнение (9.11), являющееся развернутой формой уравнения (9.14), содержит только одну неизвестную функцию $\varphi_м(t)$, которую и определим из этого уравнения. Как видно, оно является нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Используем для его решения распространенный в нелинейной механике *метод последовательных приближений*. Применительно к динамическим задачам теории механизмов и машин этот метод был впервые разработан и эффективно применен М. З. Коловским.

Оставим в правой части уравнения (9.14) только член $L_{мv}(\varphi_м)$, зависящий явно от угловой координаты $\varphi_м$, а остальные слагаемые перенесем в левую часть и запишем ее с учетом уравнения (9.7):

$$J_{мc}\ddot{\varphi}_м+k\dot{\varphi}_м+c\varphi_м-(k\dot{\varphi}_д+c\varphi_д+M_{мc})=L_{мv}(\varphi_м). \qquad (9.17)$$

В уравнении (9.17) $J_{мc}$, $M_{мc}$, k, c — не изменяющиеся в процессе движения величины. В то же время член $L_{мv}(\varphi_м)$, стоящий в правой части уравнения (9.17), периодически изменяется. Он математически представляет воздействие, *вынуждающее колебательный процесс*. Это воздействие [см. уравнение (9.13)] проистекает со стороны рабочей машины и порождено, во-первых, ее технологическим процессом — слагаемое $M_{мv}$ и, во-вторых, кривошипно-ползунным механизмом рабочей машины — слагаемое $(-J_{мv}\ddot{\varphi}_м-J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2/2)$. В дальнейшем многочлен $L_{мv}(\varphi_м)$ будем называть вынуждающим моментом.

Искомый закон движения $\varphi_м(t)$ определим в процессе последовательных приближений.

1-е приближение. Поскольку заведомо известно, что неравномерность вращения вала рабочей машины мала, то вначале положим, что момент $L_{мv}(\varphi_м)$, вызывающий эту неравномерность, примерно равен нулю. С учетом этого подставим в уравнение (9.17) решение (9.16), тогда

$$J_{мc}\ddot{\varphi}_м+k(\dot{\varphi}_м-\omega_{дc})+c(\varphi_м-\omega_{дc}t)-M_{мc}=0.$$

Решение этого дифференциального уравнения для установившегося режима имеет такой вид: $\varphi_м=\omega_{дc}t-\Delta$; $\varphi_м=\omega_{дc}=\text{const}$; $\ddot{\varphi}_м=0$, где

$$\Delta=-M_{мc}/c. \qquad (9.18)$$

Таким образом, в первом приближении оба вала агрегата вращаются равномерно; угловая скорость вала рабочей машины $\varphi_м=\omega_{мc}=\omega_{дc}=\omega_{дв}u_{52}=\text{const}$. Координаты выходного сечения B передачи и ее входного сечения A (рис. 9.1, *б*) связаны соотношением $\varphi_м=\varphi_{дв}u_{52}-\Delta$, где $\Delta=\text{const}$ — *статическая деформация* передачи, приведенная к ее выходному сечению.

2-е приближение. Теперь учтем влияние вынуждающего момента $L_{мv}(\varphi_м)$, подставив в его выражение [уравнение (9.13)] результаты 1-го приближения. Тогда получим $L_{мv}=M_{мv}-J'_{мv}\omega_{мc}^2/2$, где $M_{мv}$ и $J'_{мv}$ периодически зависят от взятого из первого прибли-

жения угла $\varphi_м = \omega_{мс} t - \Delta$, т. е. от времени t. Поэтому $L_{мυ} = L_{мυ}(t)$ есть периодическая функция времени.

Решение $\varphi_м = \varphi_м(t)$ уравнения (9.17) для второго приближения будем искать в виде

$$\varphi_м = \omega_{мс} t - \Delta + \eta, \tag{9.19}$$

где $\eta = \eta(t)$ — динамическая деформация. Из уравнения (9.19) определим $\dot{\varphi}_м = \omega_{мс} + \dot{\eta}$; $\ddot{\varphi}_м = \ddot{\eta}$. Подставим полученные выражения в уравнение (9.17) и после несложных преобразований получим

$$J_{мс}\ddot{\eta} + k\dot{\eta} + c\eta = L_{мυ}(t). \tag{9.20}$$

Разложим вынуждающий момент $L_{мυ}(t)$ в ряд Фурье:

$$L_{мυ}(t) = L_{мA1}\cos(\omega_{мс} t - \Delta - \beta_1) + L_{мA2}\cos(2\omega_{мс} - 2\Delta - \beta_2) + \ldots =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} L_{мAi}\cos(i\omega_{мс} t - i\Delta - \beta_i);$$

амплитуды $L_{мAi}$ и фазы β_i определяются по формулам разложения в ряд Фурье. Теперь для решения уравнения (9.20) можно использовать принцип суперпозиции:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i. \tag{9.21}$$

Первое слагаемое η_1 определим из дифференциального уравнения (9.20), в правую часть которого поставлена 1-я гармоника из разложения в ряд Фурье:

$$J_{мс}\ddot{\eta}_1 + k\dot{\eta}_1 + c\eta_1 = L_{мA1}\cos(\omega_{мс} t - \Delta - \beta_1).$$

Для установившегося режима необходимо найти только частное решение этого уравнения, хорошо известное из курса теоретической механики:

$$\eta_1 = \frac{L_{мA1}}{\sqrt{(c - \omega_{мс}^2 J_{мс})^2 + (k\omega_{мс})^2}}\cos(\omega_{мс} t - \Delta - \beta_1 - \gamma_1) =$$
$$= \eta_{A1}\cos(\omega_{мс} t - \Delta - \beta_1 - \gamma_1), \tag{9.22}$$

где $\operatorname{tg}\gamma_1 = k\omega_{мс}/(c - \omega_{мс}^2 J_{мс})$.

Аналогично получим частное решение η_i для слагаемого с номером i:

$$\eta_i = \frac{L_{мAi}}{\sqrt{[c - (i\omega_{мс})^2 J_{мс}]^2 + (ki\omega_{мс})^2}}\cos(i\omega_{мс} t - i\Delta - \beta_i - \gamma_i) =$$
$$= \eta_{Ai}\cos(i\omega_{мс} t - i\Delta - \beta_i - \gamma_i),$$

где $\operatorname{tg}\gamma_i = ki\omega_{мс}/[c - (i\omega_{мс})^2 J_{мс}]$.

Таким образом, $\eta = \eta(t)$ есть та *динамическая деформация*, которая вызваиа податливостью передаточного механизма и которая накладывается на основное движение машинного агрегата [см. уравнение (9.19)]. Эта динамическая деформация выражается как сумма упругих гармонических колебаний [см. уравнение

(9.21)], происходящих с частотами $\nu_1=\omega_{мс}$, $\nu_2=2\omega_{мс}$, $\nu_3=3\omega_{мс}$..., где $\omega_{мс}$ — средняя угловая скорость рабочей машины. Как было отмечено ранее,

$$\omega_{мс}=\omega_{дс}=\omega_{дв}u_{52}=\text{const}. \tag{9.23}$$

Надо иметь в виду, что ряд (9.21) обычно быстро сходится. В самом деле, амплитудные значения $L_{мA1}$, $L_{мA2}$, $L_{мA3}$... обычно монотонно убывают при увеличении i — номера члена ряда (9.21), и к тому же номер i содержится в знаменателе амплитудных значений η_{A1}, η_{A2}, η_{A3}.... Поэтому, решая задачу приближенно, во многих случаях можно рассматривать только функцию $\eta_1(t)$, вызванную воздействием 1-й гармоники.

§ 9.3 Исследование влияния упругости звеньев

Определим частоту собственных колебаний агрегата. Для этого надо снять с механизма вынуждающий момент ($L_{мυ}=0$) и вязкое сопротивление ($k=0$). Тогда дифференциальное уравнение (9.20) будет описывать собственные (свободные) колебания и примет вид

$$J_{мс}\ddot{\eta}+c\eta=0.$$

Отсюда согласно положениям теоретической механики получим частоту собственных колебаний

$$p=\sqrt{c/J_{мс}}. \tag{9.24}$$

Подчеркнем, что p есть угловая частота, единица которой рад/с, а не частота периодического процесса в Гц.

Рассмотрим, как влияет упругость передачи на закон движения вала рабочей машины. Согласно уравнению (9.22) амплитуда динамической деформации η_{A1} при учете только первой гармоники возмущающего момента

$$\eta_{A1}=\frac{L_{мA1}}{\sqrt{(c-\omega_{мс}^2J_{мс})^2+(k\omega_{мс})^2}}. \tag{9.25}$$

Функция $\eta_{A1}=\eta_{A1}(c)$ представлена на рис. 9.4, *а* при неизменном значении средней угловой скорости $\omega_{мс}$ рабочей машины*.

При статическом нагружении увеличение жесткости ведет к уменьшению деформации. Однако в условиях динамического колебательного процесса зависимость деформации от жесткости *более сложная*. Если жесткость мала ($c<c_{рез}$), где $c_{рез}=\omega_{мс}^2J_{мс}$ — жесткость, при которой наступает максимум динамической деформации, то при периодической нагрузке увеличение жесткости вызывает увеличение (а не уменьшение) деформации (рис. 9.4, *а*). Если жесткость велика ($c>c_{рез}$), то при ее увеличении деформация будет

* Очень малые значения жесткости c конструктивно нереализуемы; поэтому в области очень малых значений (включая $c=0$) график $\eta_{A1}(c)$ показан штрихами.

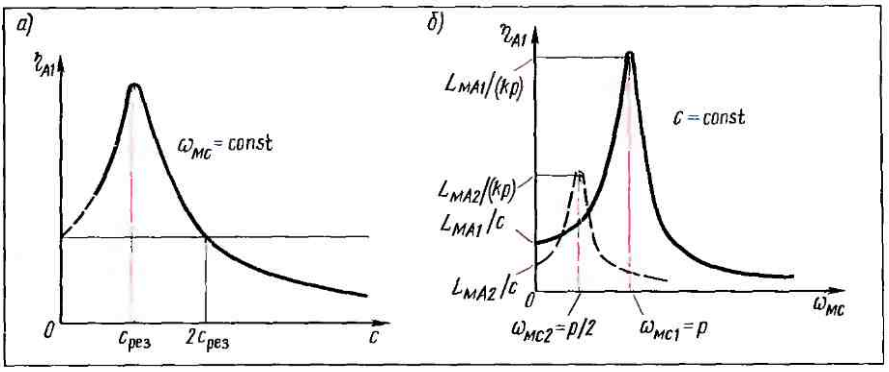


Рис. 9.4

уменьшаться. Такое влияние жесткости конструктор должен обязательно учитывать при проектировании передаточного механизма, чтобы избежать р е з о н а н с а.

На рис. 9.4, *б* сплошной линией изображена зависимость $\eta_{A1} = \eta_{A1}(\omega_{MC})$ при заданном значении жесткости c передачи. Резонанс в системе наступает тогда, когда частота ν_1 1-й гармоники совпадает с собственной частотой: $\nu_1 = p$. Так как частота 1-й гармоники равна средней угловой скорости рабочей машины $\nu_1 = \omega_{MC}$, то, следовательно, резонанс наступает, когда $\omega_{MC} = \omega_{MC1} = p$, или согласно уравнению (9.24) $\omega_{MC} = \omega_{MC1} = \sqrt{c/J_{MC}}$. Поэтому при резонансе $\eta_{A1} = L_{MA1}/(kp)$ [см. уравнение (9.25)].

Введем известный из курса теоретической механики к о э ф ф и ц и е н т д и н а м и ч н о с т и

$$\sigma_1 = \frac{\eta_{A1}}{L_{MA1}/c},$$

где L_{MA1}/c — та статическая деформация, которую мог бы вызвать момент, равный амплитудному значению L_{MA1} 1-й гармоники вынуждающего момента. Таким образом, коэффициент σ_1, больший единицы, характеризует перегрузку агрегата, вызванную динамическими деформациями. При резонансе, когда $\omega_{MC} = p = \sqrt{c/J_{MC}}$,

$$\sigma_{рез1} = c/(kp) = \sqrt{cJ_{MC}}/k.$$

Как видно, резонансное значение коэффициента динамичности зависит от сопротивления k. Если бы сопротивления не было ($k = 0$), то $\sigma_{рез1} \to \infty$. Но сопротивление, хоть и небольшое, но всегда есть. Следовательно, $\sigma_{рез1}$ имеет конечную величину, которая, однако, может достигать значений 15...20. Поэтому работа на резонансном режиме ($\omega_{MC} = \omega_{MC1}$) *недопустима*. Если все же избежать этого режима никак нельзя, то следует поставить *специальный демпфер*, который искусственно увеличит сопротивление и снизит $\sigma_{рез1}$.

Расчеты показывают, что если средняя угловая скорость ω_{MC} рабочей машины в 1,5...2 раза отличается от собственной частоты p,

то сопротивление обычно практически не влияет на величину амплитуды η_{A1} вынужденных колебаний, и ее можно определять, положив в формуле (9.25) $k=0$ (см.: *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., 1974).

Если угловая скорость $\omega_{мс}$, при которой эксплуатируется рабочая машина, меньше собственной частоты p, то надо проверить отсутствие резонанса, вызываемого 2-й и более высокими гармониками. Для 2-й гармоники, частота которой $\nu_2=2\omega_{мс}$, резонанс наступает при $\nu_2=p$, откуда $\omega_{мс_2}=p/2$. График $\eta_{A2}(\omega_{мс})$ амплитуды колебаний, вынуждаемых 2-й гармоникой, показан на рис. 9.4, *б* штрихами.

Рассмотрим момент $M_{им}=-M_{мп}$, которым рабочая машина нагружает передачу, т. е. момент в сечении B (рис. 9.1, *а*). Согласно уравнению (9.7)

$$M_{пм}=k(\dot{\varphi}_м-\dot{\varphi}_д)+c(\varphi_м-\varphi_д).$$

Преобразуем это уравнение с учетом уравнений (9.16), (9.18), (9.19) и (9.23). После простых преобразований получим

$$M_{пм}=M_{мс}+(k\dot{\eta}+c\eta). \qquad (9.26)$$

В уравнении (9.26) первое слагаемое — постоянный момент $M_{мс}$, нагружающий передачу. Двучлен, заключенный в скобки, есть переменная динамическая составляющая нагружения $M_{пv}=k\dot{\eta}+c\eta$. Рассмотрим составляющую $M_{пv}$, введя возмущение только от 1-й гармоники

$$M_{пv1}=k\dot{\eta}_1+c\eta_1.$$

Для этого найдем сначала зависимость $\dot{\eta}_1(t)$.

Из уравнения (9.22) следует $\dot{\eta}_1=-\eta_{A1}\omega_{мс}\sin(\omega_{мс}t-\alpha_1)$, где $\alpha_1=\Delta+\beta_1+\gamma_1$. Поэтому $M_{пv1}=-k\eta_{A1}\omega_{мс}\sin(\omega_{мс}t-\alpha_1)+c\eta_{A1}\cos(\omega_{мс}t-\alpha_1)$. После элементарных тригонометрических преобразований получим

$$M_{пv1}=\eta_{A1}\sqrt{c^2+(k_{\omega мс})^2}\cos(\omega_{мс}t-\alpha_1+\varsigma_1)=$$
$$=M_{пA1}\cos(\omega_{мс}t-\alpha_1+\varsigma_1).$$

Введем по предложению М. З. Коловского степень динамической нагруженности передачи χ_1, которую определим как отношение амплитуды 1-й гармоники $M_{пA1}$ динамической составляющей $M_{пv}$ к амплитуде 1-й гармоники $L_{мA1}$ вынуждающего момента $L_{мv}$, учитывая уравнение(9.25):

$$\chi_1=\frac{M_{пA1}}{L_{мA1}}=\frac{\sqrt{c^2+(k\omega_{мс})^2}}{\sqrt{(c-\omega_{мс}^2J_{мс})^2+(k\omega_{мс})^2}}. \qquad (9.27)$$

График $\chi_1=\chi_1(c)$ показан на рис. 9.5 при неизменном значении $\omega_{мс}$. Если $\chi_1>1$, то имеет место динамическая перегруженность передаточного механизма. При резонансе, когда $c=c_{рез}=\omega_{мс}^2J_{мс}$, коэффициент χ_1 может достигать значений, весьма превышающих единицу.

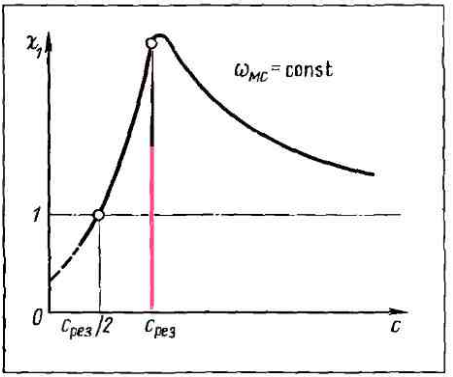
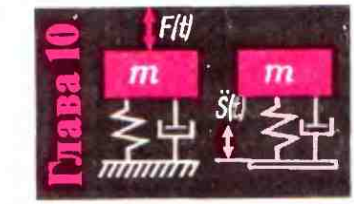


Рис. 9.5

Как следует из уравнения (9.27), при $c = c_{рез}/2$ коэффициент χ_1 принимает значение, равное единице. Можно показать, что если для значения $c = c_{рез}/2$ подсчитать коэффициент χ для гармоник более высокого порядка, чем первого, то $\chi_i < 1$. Иными словами, если жесткость $c < c_{рез}/2 = \omega_{мс}^2 J_{мс}/2$, то амплитуды $M_{пAi}$ всех гармоник динамического момента $M_{пv}$ будут меньше, чем амплитуды $L_{мAi}$ соответствующих гармоник вынуждающего момента $L_{мv}$. Этим можно воспользоваться, чтобы *улучшить динамические характеристики* участка AB машинного агрегата (рис. 9.1, *а*).

Если на участке AB последовательно с передачей $П$ включить *упругую муфту*, подобрав ее жесткость так, чтобы общая жесткость участка стала бы меньше $c_{рез}/2$ (т. е. меньше $\omega_{мс}^2 J_{мс}/2$), то динамическая составляющая $M_{пv}$ момента, нагружающего передачу, станет меньше вынуждающего момента $L_{мv}$. При этом, однако, нельзя упускать из виду, что малая жесткость, защищая передачу от перегрузок, может повлечь за собой слишком большие деформации. Поэтому необходима осторожность в выборе предела снижения жесткости участка AB.

Кроме того, при $c < c_{рез}/2$ выход на рабочий скоростной режим $\omega_{мс}$ во время пуска агрегата неизбежно будет связан с проходом зоны резонанса, так как при $c < c_{рез}/2$ средняя угловая скорость $\omega_{мс}$ рабочей машины больше частоты p собственных колебаний агрегата (зарезонансный режим). Проход зоны резонанса сопровождается хоть кратковременными, но значительными динамическими перегрузками. Особенно опасен в этом отношении процесс выбега, когда после выключения двигателя машинный агрегат, будучи предоставленным самому себе, теряет скорость под действием небольших сопротивлений (трение в кинематических парах и т. п.). Здесь обратный проход зоны резонанса может оказаться достаточно длительным, вследствие чего амплитуды вынужденных колебаний успеют возрасти до недопустимого предела. В то же время для конструкции, обладающей большей жесткостью ($c > c_{рез}$), средняя угловая скорость $\omega_{мс}$ рабочей машины меньше частоты собственных колебаний p агрегата (дорезонансный режим), так что проход зоны резонанса (как прямой, так и обратный) попросту отсутствует.



Виброактивность и виброзащита машин

Создание высокопроизводительных машин и скоростных транспортных средств, форсированных по мощностям, нагрузкам и другим рабочим характеристикам, неизбежно приводит к увеличению интенсивности и расширению спектра вибрационных и виброакустических полей. Этому способствует также широкое использование в промышленности и строительстве новых высокоэффективных машин, работающих на основе вибрационных и виброударных процессов. Вредная вибрация нарушает планируемые конструктором законы движения машин, механизмов и систем управления, порождает неустойчивость рабочих процессов и может вызвать отказы и полную расстройку всей системы. Из-за вибрации увеличиваются динамические нагрузки в элементах конструкций (кинематических парах механизмов, стыках и др.), в результате снижается несущая способность деталей, развиваются трещины, возникают усталостные разрушения. Действие вибрации может изменить внутреннюю и поверхностную структуру материалов, условия трения и износа на контактных поверхностях деталей машин и привести к нагреву конструкций.

Вибрация порождает шум, являющийся важным экологическим показателем среды обитания человека. Вибрация оказывает и непосредственное влияние на человека, снижая его функциональные возможности и работоспособность. Поэтому особое значение приобретают методы и средства оценки виброактивности и уменьшения уровня вибрации. Совокупность таких методов и средств принято называть виброзащитой.

§ 10.1 Источники колебаний и объекты виброзащиты

При постановке задач виброзащиты в исследуемой механической системе обычно выделяют две подсистемы: *И* и *О* (рис. 10.1), соединенные между собой связями *С*. Подсистема *И*, в которой непосредственно происходят физические процессы, вызывающие колебания, называется источником колебаний. Подсистема *О* представляет ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, она называется объектом виброзащиты. Силы, возникающие в связях *С*, соединяющих объект с источником колебаний, и вызывающие колебания объекта, называются силовыми (динамическими) воздействиями.

Рассмотрим некоторые характерные примеры:

двигатель (турбина, генератор, двигатель внутреннего сгорания, любой роторный механизм), установленный на фундаменте, имеет неуравновешенный ротор. Здесь источником колебаний является ротор, а объектом виброзащиты — корпус двигателя, динамические воздействия представляют собой динамические реак-

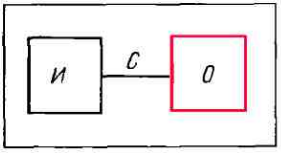


Рис. 10.1

ции опор ротора. Задача виброзащиты: уменьшить колебания корпуса двигателя, вызванные неуравновешенностью ротора;

при решении задачи о защите человека-оператора от вибрации, например при его работе на автомобиле или на тракторе, можно стремиться к уменьшению колебаний шасси со всеми установленными на нем агрегатами; можно стремиться к уменьшению колебаний кабины водителя или только сидения. В каждом случае объект, источник и динамические воздействия будут определяться по-разному.

Иногда бывают заданы не динамические воздействия, а перемещения точек крепления связей к источнику. Такие воздействия называются кинематическими. Силовые и кинематические воздействия часто объединяются общим термином — механические воздействия.

Механические воздействия принято делить на три класса: линейные перегрузки; вибрационные воздействия; ударные воздействия.

Линейными перегрузками называются кинематические воздействия, возникающие при ускоренном движении источника колебаний. Особенно значительные линейные перегрузки возникают на транспортных машинах, в особенности на летательных аппаратах, при увеличении скорости, торможении, а также различных маневрах (виражи, разворот и т. д.). Основными характеристиками линейных перегрузок являются постоянное ускорение a_0 (рис. 10.2) и максимальная скорость изменения ускорения $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$.

Вибрационные воздействия (кинематические и силовые) являются колебательными процессами. Силовые воздействия характеризуются функциями времени составляющих сил $F(t)$ или моментов сил $M(t)$, действующих на объект; кинематические воздействия характеризуются ускорениями $a(t)$ точек источника колебаний, связанных с объектом виброзащиты, их скоростями $v(t)$ и перемещениями $s(t)$.

Вибрационные воздействия делятся на стационарные и нестационарные и случайные. Простейшим видом стационарного вибрационного воздействия является гармоническое. Гармоническими называют периодические процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t + \psi), \qquad (10.1)$$

где X_0 — амплитуда; ω_0 — частота; ψ — начальная фаза; t — время.

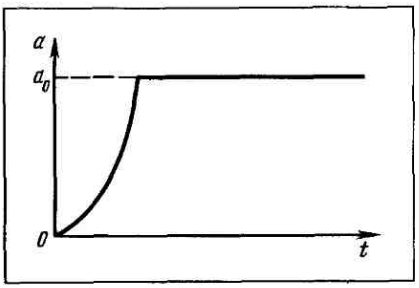


Рис. 10.2

При анализе гармонического

процесса часто пренебрегают начальной фазой и уравнение (10.1) записывается в виде

$$x(t) = X_0 \sin \omega_0 t. \quad (10.2)$$

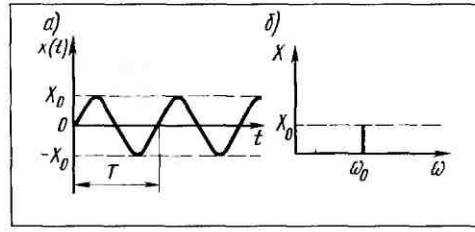


Рис. 10.3

Выражение (10.2) может быть представлено графически в функции времени (рис. 10.3, *а*) или в виде амплитудно-частотной характеристики — частотного спектра (рис. 10.3, *б*). Время, в течение которого совершается одно полное колебание материальной точки, называется периодом T. Частота и период связаны соотношением $T = 2\pi/\omega_0$. Частотный спектр представляется одной составляющей амплитуды на данной частоте. Такой спектр называется еще дискретным или линейным. К числу примеров колебательных систем, находящихся под действием гармонических сил, можно отнести вибрации несбалансированного ротора, поршневых машин, неуравновешенных рычажных механизмов и др.

В машинах, содержащих цикловые механизмы, при установившемся движении возникают периодические механические воздействия:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t). \quad (10.3)$$

Часто в таких системах можно пренебречь влиянием всех гармоник, кроме одной, и считать воздействие гармоническим. Это возможно в тех случаях, когда одна из гармоник (обычно первая) превалирует над остальными или когда одна из гармоник является резонансной для данного объекта.

Вибрационные возбуждения, с которыми приходится иметь дело на многих современных технических объектах, обычно являются полигармоническими, что вызвано существованием большого числа независимых источников вибрации и нерегулярностью некоторых физических процессов (например, процессы горения в реактивном двигателе, обтекание тел турбулентным потоком, взрывные и ударные процессы).

Такие вибрационные процессы могут быть представлены в виде суммы бесконечного (или конечного) числа k гармонических компонент вида

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t). \quad (10.4)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_1 t \, dt; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_1 t \, dt; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Возможен и другой способ записи полигармонического процесса

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \qquad (10.5)$$

где $X_0 = \frac{a_0}{2}$; $X_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\psi_k = \operatorname{arctg}(a_k/b_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Из анализа формулы (10.5) следует, что полигармонический процесс состоит из постоянной компоненты X_0 и бесконечного (или конечного) числа синусоидальных компонент, называемых гармониками, с амплитудами X_k и начальными фазами ψ_k. Частоты всех гармоник кратны основной частоте ω_1. Как правило, виброизолируемые объекты подвергаются именно полигармоническому возбуждению, и поэтому описание реальных процессов простой гармонической функцией оказывается недостаточным. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Так, например, спектры вибраций машин наряду с основной рабочей частотой содержат интенсивные гармонические составляющие кратных частот.

Нестационарные вибрационные воздействия возбуждаются чаще всего переходными процессами, происходящими в источниках. Например, силовое воздействие на корпус двигателя с неуравновешенным ротором, возникающее при разгоне, может быть приближенно описано выражением

$$x = a(\omega)\cos\omega(t)t, \qquad (10.6)$$

где $\omega(t)$ — закон изменения угловой скорости ротора.

Диапазон, в котором располагаются частоты полигармонических воздействий, возникающих в современных технических объектах, весьма широк. Полигармонические воздействия, охватывающие диапазон, превышающий несколько октав $|\omega_{max}/\omega_{min} > 10|$, называются широкополосными; если ширина диапазона мала по сравнению со средней частотой процесса, воздействие называется узкополосным. Узкополосные воздействия проявляются в форме биений. При решении задач виброзащиты учет ширины полосы механических воздействий имеет первостепенное значение. В частности, от широкополосности воздействия зависит выбор динамической модели (расчетной схемы) защищаемого объекта; она должна выбираться с таким расчетом, чтобы были учтены собственные частоты объекта, расположенные в полосе спектра воздействия.

Высокочастотные вибрационные воздействия могут передаваться объекту не только через элементы механических соединений его с источником, но и через окружающую среду (воздух, воду). Такие воздействия, называемые акустическими, оказываются особенно интенсивными на современных реактивных летательных аппаратах. Интенсивность акустических воздействий характеризуется

давлением акустического поля. Связь между абсолютной и относительной интенсивностями выражается формулой

$$p = p_0 10^{D/20},$$

где p — давление, Па; D — относительное давление, дБ; p_0 — пороговое давление, соответствующее $D = 0$; обычно принимают $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па.

Примерные значения амплитуд отдельных гармоник полигармонических кинематических воздействий, лежащих в различных частотных диапазонах, следующие:

Диапазон частот, Гц	0,1...10	10...150	150...500	500...2000
Амплитуды g, ед.	0,001...1	0,5...5	4...15	7...20

Случайные вибрационные возбуждения зачастую не являются полностью предсказуемыми, подобно гармоническому или полигармоническому возбуждению. Например, такие процессы, как аэродинамический шум струи газа, пульсация жидкости при ее движении в трубопроводе, вибрации платформы, на которой установлено несколько агрегатов, вибрации, обусловленные шероховатостями пар трения, являются по своей природе стохастическими. Эти процессы трудно аппроксимировать регулярными функциями. Стохастический сигнал не может быть представлен графически наперед заданным, так как он обусловлен процессом, содержащим элемент случайности.

Ударными называют кратковременные механические воздействия, в которых максимальные значения сил являются весьма большими. Функция, выражающая зависимость силы, момента силы или ускорения при ударе от времени, называется формой удара. Основными характеристиками формы являются длительность удара и его амплитуда — максимальное значение механического воздействия при ударе.

Возбуждения кинематического ударного типа возникают при резких изменениях скорости движения источника (например, при посадке самолета, запуске ракеты, наезде колеса автомобиля на глубокую выбоину, при пересопряжении зубьев зубчатых колес и т. п.). Часто эти явления сопровождаются возникновением колебаний конструкций источника и возбуждением вибрационных воздействий.

В некоторых случаях ударное воздействие можно рассматривать как классический удар, сводящийся к «мгновенному» изменению скорости движения источника или к приложению «мгновенных» сил и моментов. В этих случаях

$$x(t) = \Delta q \, \delta(t),$$

где Δq — приращение скорости, импульс силы или момента силы за время удара. Использование такого представления допустимо лишь

в тех случаях, когда продолжительность удара существенно меньше наименьшего из периодов собственных колебаний объекта. В остальных случаях необходимо учитывать форму удара, которая обычно определяется непосредственными измерениями в натурных условиях.

§ 10.2 Влияние механических воздействий на технические объекты и на человека

Рассмотрим, как влияют механические воздействия на различные технические объекты (машины, приборы, аппараты) и человека.

1. Действие линейных перегрузок эквивалентно статическому нагружению объекта. В некоторых случаях, главным образом при наличии в объекте соединений с силовым замыканием, действие линейной перегрузки может вызвать нарушение нормального функционирования системы (размыкание пружины электрических контактов, ложные срабатывания релейных устройств и т. п.).

2. Наиболее опасными для технических объектов оказываются вибрационные воздействия. Знакопеременные напряжения, вызванные вибрационными воздействиями, приводят к накоплению повреждений в материале, что вызывает появление усталостных трещин и разрушение. Кроме усталостных напряжений в механических системах наблюдаются и другие явления, вызываемые вибрациями, например постепенное ослабление («разбалтывание») неподвижных соединений. Вибрационные воздействия вызывают малые относительные смещения сопряженных поверхностей в соединениях деталей машин, при этом происходит изменение структуры поверхностных слоев сопрягаемых деталей, их износ и, как результат, уменьшение силы трения в соединении, что вызывает изменение диссипативных свойств объекта, смещает его собственные частоты и т. п.

Если в механизме имеются подвижные соединения с зазорами (например, кинематические пары в механизмах), вибрационные воздействия могут вызвать соударения сопрягаемых поверхностей, приводящие к их разрушению и генерированию шума. В большинстве случаев разрушение объекта при вибрационных воздействиях связано с возникновением резонансных явлений. Поэтому при полигармонических воздействиях наибольшую опасность представляют те гармоники, которые могут вызвать резонанс объекта.

3. Ударные воздействия также могут явиться причиной разрушения объекта. Часто повреждения, вызываемые ударом, носят характер хрупких разрушений. Однако многократные удары могут приводить и к усталостным разрушениям, особенно в тех случаях, когда периодическое ударное воздействие оказывается способным вызвать резонансные колебания объекта.

4. Вибрационные и ударные воздействия, не вызывая разрушений объектов, могут приводить к нарушению их нормального функ-

ционирования. Например, вибрации металлорежущих станков и другого технологического оборудования, вызванные действием различных источников, приводят к снижению точности и чистоты обработки, а также и к другим нарушениям технологических процессов.

Механические воздействия существенно влияют на точность приборов, устанавливаемых в системах управления движением и служащих для измерения параметров движений. Под действием вибраций и ударов резко увеличивается «уход» гироскопических приборов, а следовательно, и ошибка измерений, производимых этими приборами; приборы, содержащие измерительное устройство маятникового типа, обнаруживают склонность к смещению нулевого положения.

Нарушение функционирования объекта, не связанное с разрушениями или с другими необратимыми изменениями, называется о т к а з о м. Способность объекта не разрушаться при механических воздействиях называется в и б р о п р о ч н о с т ь ю, а способность нормально функционировать — в и б р о у с т о й ч и в о с т ь ю. Цель виброзащиты технических объектов — повышение их вибропрочности и виброустойчивости.

5. Вибрация, возникающая при работе машин различных типов и оборудования, оказывает вредное влияние на людей, находящихся вблизи источника вибрации или в непосредственном контакте с ним. Вибрация вызывает нарушения физиологического и функционального состояния человека-оператора. Стойкие физиологические изменения называются вибрационной болезнью. Функциональные нарушения могут выражаться в ухудшении зрения, изменении реакции вестибулярного аппарата (нарушение координации движений; возникновение галлюцинаций, относящихся к ориентации тела и т. п.), а также в более быстрой утомляемости.

В первую очередь вибрация оказывает вредное влияние на рабочих, использующих ручные механизированные инструменты, на персонал, обслуживающий вибрационные машины (виброгрохоты, вибромолоты, виброштамповки свай, труб и т. п., виброконвейеры, виброкатки, виброуплотнители, вибросепараторы, вибраторы жидкого металла, средства вибрационной очистки и т. д.), а также многие строительные, дорожные и сельскохозяйственные машины (бульдозеры, грейдеры, скреперы, тракторы, комбайны и т. д.). В несколько меньшей степени действие вибрации обычно испытывает персонал, связанный с работой машин и механизмов, содержащих неуравновешенные движущиеся элементы, а также с работой всех видов транспортных средств. В перечисленных случаях возникает необходимость ограничения вредного воздействия вибрации на человека. Допустимые для человека динамические воздействия регламентируются санитарными нормами и правилами. Создание эффективных методов и средств индивидуальной и комплексной виброзащиты человека-оператора является *одной из важнейших технико-экономических и социальных задач современной техники.*

§ 10.3 Анализ действия вибраций

Характер нарушений условий функционирования объектов (механизмов, приборов) под действием вибраций определяется видом механических воздействий и свойствами объекта.

Модель объекта должна отражать основные черты реальной системы, влияющие на оценку ее динамической реакции, и вместе с тем быть удобной для анализа и интерпретации результатов. Наиболее приемлемой в этих условиях является линейная модель, достаточно передающая свойства широкого класса конструкций при малых колебаниях. Удобной формой описания свойств линейного объекта в условиях вибрационных воздействий являются операторы динамической податливости $l_{BA}(p)$, связывающие силу $G_B(t)$, приложенную в заданном направлении в точке B объекта, с проекцией перемещения $x_A(t)$ точки A на некоторое направление: $x_A(t) = l_{BA}(p)G_B(t)$. Обратные операторы $k_{BA}(p) = l_{BA}^{-1}(p)$ называются операторами динамической жесткости. Характеристиками $l_A(p)$, $k_A(p)$, связывающими силу, приложенную в точке A, с проекцией перемещения этой же точки на направление действия силы, называются операторами динамической податливости и динамической жесткости в точке A. Частотные характеристики объекта $l_{BA}(i\omega)$, $k_{BA}(i\omega)$ называются соответственно динамической податливостью и динамической жесткостью.

Выражение для оператора динамической податливости может быть представлено в виде

$$l_{BA}(p) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{g_{B\nu}g_{A\nu}}{p^2 + 2\beta_\nu\omega_\nu p + \omega_\nu^2}.$$

Здесь ω_ν — собственные частоты консервативной системы; $g_{B\nu}$ — нормированные коэффициенты ν-й формы колебаний в точках A и B; β_ν — безразмерный коэффициент линейного демпфирования на ν-й форме колебаний. При $p = i\omega$, опуская малые величины второго порядка, имеем частотную характеристику объекта:

$$l_{BA}(i\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{g_{B\nu}g_{A\nu}}{(\omega_\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_\nu\omega_\nu^2\omega^2}(\omega_\nu^2 - \omega^2 - i2\beta_\nu\omega_\nu\omega).$$

Таким образом, динамическая податливость объекта с n степенями свободы представлена в виде суммы податливостей n систем с одной степенью свободы, имеющих собственные частоты консервативной системы (системы, для которой при колебаниях полная механическая энергия постоянна). На этих частотах ($\omega = \omega_\nu$) динамическая податливость возрастает по модулю ввиду появления в знаменателе ν-го слагаемого малого члена $2\beta_\nu\omega_\nu$. С увеличением номера ν формы колебаний максимальная величина модуля динамической податливости уменьшается. На рис. 10.4 показан примерный вид зависимости модуля динамической податливости от частоты.

При рассмотрении математических моделей конкретных линейных систем выражения для динамических податливостей могут быть вычислены непосредственно путем отыскания решения от действия гармонической силы с единичной амплитудой.

Во многих случаях допустимо пренебрежение всеми формами колебаний, за исключением одной преобладающей. Такие объекты обычно моделируются системами с одной степенью свободы (рис. 10.5, *а, б*), имеющими массу m коэффициент упругости c и коэффициент вязкого трения b. При возбуждении системы силой $G(t)$ модуль динамической податливости имеет следующий вид:

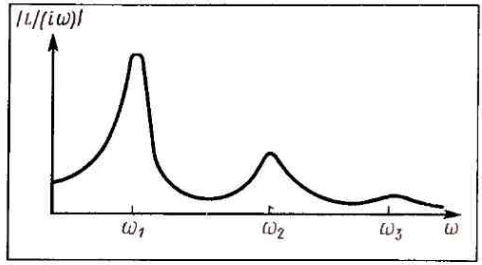


Рис. 10.4

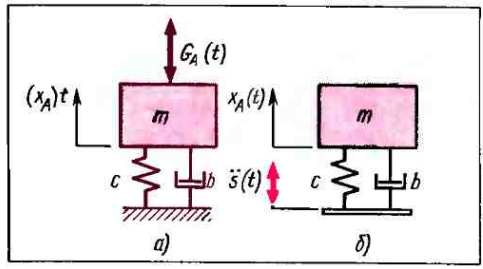


Рис. 10.5

$$|l_A(i\omega)| = m^{-1}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2]^{-1/2};$$
$$\beta = b/(2m\omega_0) .$$

Реакция объекта на механическое воздействие может вычисляться как во временных, так и в частотных представлениях. Реакцию системы на вибрационное воздействие удобнее вычислять в частотных представлениях. Для гармонических и полигармонических воздействий вычисления амплитудных и фазовых искажений осуществляют для каждой гармонической компоненты процесса. В силу линейности объекта эффект от действия нескольких гармонических компонент равен сумме воздействий от каждой из них.

В и б р о и з о л я т о р, или амортизатор, — элемент виброзащитной системы, наиболее существенная часть которого — упругий элемент. В результате внутреннего трения в упругом элементе происходит демпфирование колебаний. Кроме того, в ряде конструкций амортизаторов применяют специальные д е м п ф и р у ю щ и е у с т р о й с т в а для рассеяния энергии колебаний. Динамические характеристики амортизатора существенно зависят от его статических характеристик, причем и те и другие являются нелинейными. Нелинейность характеристик амортизатора определяется рядом причин: нелинейными свойствами упругого элемента (например, резины), внутренним трением в упругом элементе, наличием конструктивных особенностей амортизатора типа ограничительных упоров, демпферов сухого трения, нелинейных пружин и т. д. На

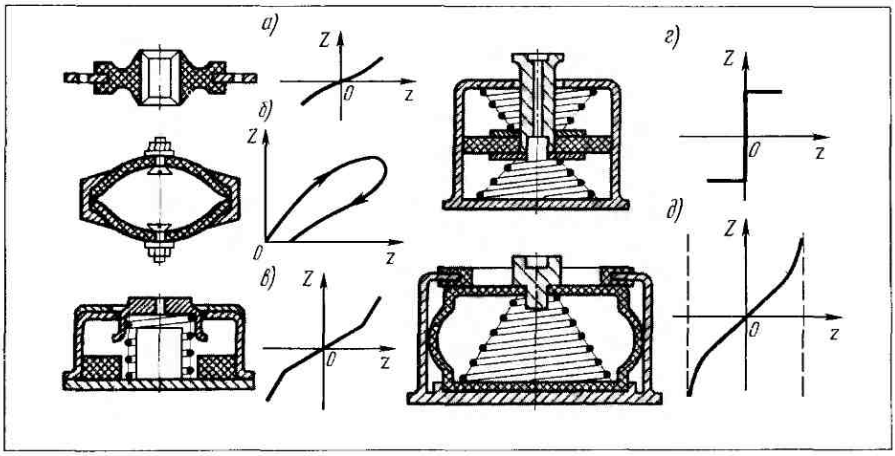


Рис. 10.6

рис. 10.6 изображены различные амортизаторы и их силовые характеристики (по оси абсцисс — перемещения, по оси ординат — реакции): *а* — резинометаллический; *б* — сетчатый; *в* — с упругими ограничителями хода; *г* — демпферный; *д* — с конической пружиной.

В любом амортизаторе могут быть определены три взаимно перпендикулярные направления x, y, z такие, что перемещение точки крепления амортизатора в одном из этих направлений вызывает силовую реакцию амортизатора в противоположном направлении. Эти направления называются главными. Если через X, Y и Z обозначить проекции реакции амортизатора на главные направления и учесть упругие и демпфирующие свойства реальных амортизаторов при малых колебаниях, то можно предположить следующее: реакции по главным направлениям зависят только от соответствующих перемещений и их первых производных по времени. Тогда функции

$$X = X(x, \dot{x}),\ Y = Y(y, \dot{y}),\ Z = Z(z, \dot{z}) \tag{10.7}$$

называют динамическими характеристиками амортизатора.

При анализе малых колебаний амортизируемого объекта вблизи положения равновесия можно считать перемещения x, y и z малыми и линеаризировать динамические характеристики (10.7), разлагая их в ряд Маклорена и отбрасывая члены, имеющие порядок выше первого:

$$X(x, \dot{x}) \approx c_x x + k_x \dot{x}\,,\quad Y(y, \dot{y}) \approx c_y y + k_y \dot{y},\quad Z(z, \dot{z}) = c_z z + k_z \dot{z}\,, \tag{10.8}$$

где

$$c_x = \frac{\partial X}{\partial x}(0, 0)\,;\quad c_y = \frac{\partial Y}{\partial y}(0, 0)\,;\quad c_z = \frac{\partial Z}{\partial z}(0, 0)$$

— жесткости амортизатора в главных направлениях, а

$$k_x = \frac{\partial X}{\partial \dot{x}}(0,0);$$

$$k_y = \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}(0,0);$$

$$k_z = \frac{\partial Z}{\partial \dot{z}}(0,0)$$

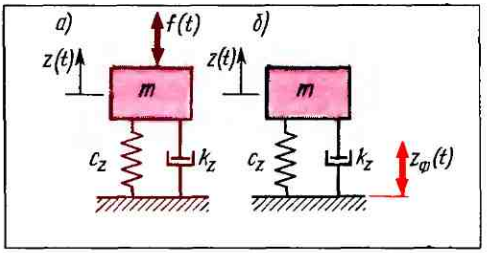


Рис. 10.7

— коэффициенты демпфирования.

Рассмотрим малые колебания амортизированного объекта (рис. 10.7, *а*), имеющего массу m. Для вывода уравнения движения амортизированных систем можно использовать принцип Даламбера. В произвольный момент времени t при значении текущей координаты z на массу m действует реакция $Z(z, \dot{z})$ амортизатора. Приравнивая нулю сумму сил, приложенных к массе m, и силы инерции $m\ddot{z}$ в соответствии с (10.8), получаем дифференциальное уравнение движения массы m:

$$m\ddot{z} + k_z\dot{z} + c_z z = 0. \qquad (10.9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$ms^2 + k_z s + c_z = 0. \qquad (10.10)$$

Его корни

$$S_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-k_z \pm \sqrt{k_z^2 - 4mc_z}\right).$$

Общее решение уравнения (10.9) имеет вид

$$z = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий; $S_{1,2}$ — корни характеристического уравнения (10.10), которые для удобства можно представить в таком виде:

$$S_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\,\omega_0,$$

где $c_z/m = \omega_0^2$; $k_z/(2\sqrt{c_z m}) = \xi$; ω_0 — собственная частота амортизированной системы; ξ — безразмерный коэффициент затухания.

На рис. 10.7, *б* дана схема системы амортизации при изоляции фундамента от колебаний $z_\Phi = Z_0 \sin\omega t$.

§ 10.4 Основные методы виброзащиты

Уменьшение интенсивности колебаний объекта может быть достигнуто следующими способами.

Снижение виброактивности источника. Возбуждение колебаний источниками возбуждения может быть обусловлено различными причинами. Удобно разделить возмущающие факторы на две груп-

пы. К первой группе относят явления, связанные с трением в кинематических парах. Снижение виброактивности факторов этой группы связано с изменением свойств материалов трущихся поверхностей и может быть достигнуто способами, специфическими для каждого частного случая, например применением специальных смазок.

Вторая группа возмущающих факторов связана с движущимися телами (вращение роторов, перемещение звеньев механизмов).

Снижение виброактивности источника в этом случае заключается в уменьшении динамических реакций с помощью уравновешивания движущихся масс.

Изменение конструкции объекта. Можно указать два способа снижения колебаний, общих для всех механических систем. Первый способ состоит в устранении резонансных явлений. Если объект обладает линейными свойствами, то задача сводится к соответствующему изменению его собственных частот. Для нелинейных объектов должны выполняться условия отсутствия резонансных явлений. Второй способ заключается в увеличении диссипации механической энергии в объекте. Этот способ виброзащиты, называемый демпфированием, будет рассмотрен ниже.

Динамическое гашение колебаний. Динамический виброгаситель (кратко — гаситель) формирует дополнительные динамические воздействия, прикладываемые к объекту в точках присоединения гасителя. Динамическое гашение осуществляется при таком выборе параметров гасителя, при котором эти дополнительные воздействия частично уравновешивают (компенсируют) динамические воздействия, возбуждаемые источником.

Виброизоляция. Действие виброизоляции сводится к ослаблению связей между источником и объектом; при этом уменьшаются динамические воздействия, передаваемые объекту. Ослабление связей обычно сопровождается возникновением некоторых нежелательных явлений: увеличением статических смещений объекта, увеличением амплитуд относительных колебаний при низкочастотных воздействиях и при ударах, увеличением габаритов системы. Поэтому применение виброизоляции как метода виброзащиты, в большинстве случаев связано с нахождением компромиссного решения, удовлетворяющего всю совокупность требований.

Виброзащитные устройства и их эффективность. Демпферы, динамические гасители и виброизоляторы образуют в совокупности виброзащитные устройства. Пассивными называют устройства, состоящие из инерционных, упругих и диссипативных элементов. Активные устройства могут кроме перечисленных содержать элементы немеханической природы и, как правило, обладают независимым источником энергии. Эффективность виброзащитных систем принято оценивать отношением величины какого-либо характерного параметра колебаний объекта с виброзащитным устройством, к величине того же параметра при отсутствии виброзащиты. Это отношение называется коэффициентом эффективности вибрационной защиты.

§ 10.5 Демпфирование колебаний. Диссипативные характеристики механических систем

Диссипативные силы. При колебаниях упругих систем происходит рассеяние энергии в окружающую среду, а также в материале упругих элементов и в узлах сочленения деталей конструкции. Эти потери вызываются силами неупругого сопротивления — диссипативными силами, на преодоление которых непрерывно и необратимо расходуется энергия колебательной системы или возбудителей колебаний. Для описания диссипативных сил используются характеристики, представляющие зависимость диссипативных сил от скорости движения масс колебательной системы или от скорости деформации упругого элемента. Вид характеристики определяется природой сил сопротивления. Наиболее распространенные характеристики диссипативных сил представлены на рис. 10.8.

Вязкое сопротивление (рис. 10.8, *а*) характеризуется коэффициентом сопротивления b_1* и описывается выражением

$$F_д(\dot{x}) = b_1\dot{x}. \qquad (10.11)$$

Такую характеристику имеют диссипативные силы, возникающие при малых колебаниях в вязкой среде (газе или жидкости), а также в ряде гидравлических демпферов.

При больших виброскоростях имеет место квадратичная зависимость (рис. 10.8, *б*) диссипативной силы от скорости:

$$F_д(\dot{x}) = b_2\dot{x}^2\operatorname{sgn}\dot{x}. \qquad (10.12)$$

Часто в конструкциях демпферов используют элементы сухого трения, характеристика которого (рис. 10.8, *в*) имеет вид

$$F_д(\dot{x}) = b_0\operatorname{sgn}\dot{x}, \qquad (10.13)$$

где $b_0 = \text{const}$ — сила сухого трения.

Все приведенные зависимости можно представить единой нелинейной характеристикой

$$F_д(\dot{x}) = b_\mu |\dot{x}|^\mu \operatorname{sgn}\dot{x}, \qquad (10.14)$$

где μ, b_μ — постоянные. При μ, равном 1, 2 и 0, соответственно получаются характеристики (10.11) — (10.13).

Гистерезис. Во многих случаях разделение полной силы на упругую и диссипативную является условным, а зачастую и вообще физически неосуществимым. Последнее относится прежде всего к силам внутреннего трения в материале упругого элемента и к силам конструкционного демпфирования, связанного с диссипацией энергии при деформации неподвижных соединений (заклепочных, резьбовых, прессовых и т. д.).

---

* Коэффициент сопротивления обозначают как буквой b, так и буквой k (см. гл. 9, § 10.3 и гл. 11).

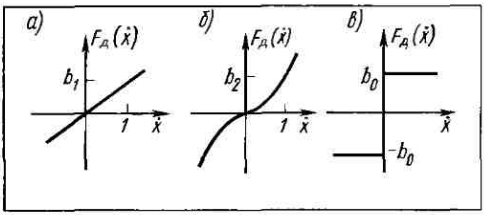


Рис. 10.8

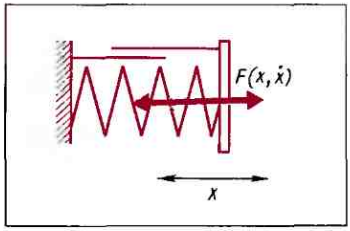


Рис. 10.9

Если провести циклическое деформирование упругодиссипативного элемента (рис. 10.9), например, по закону

$$x = a\cos\omega t, \tag{10.15}$$

то обнаруживается различие линий нагрузки и разгрузки на диаграмме сила — перемещение (рис. 10.10). Это явление называется гистерезисом. Площадь, ограниченная петлей гистерезиса, выражает энергию Ψ, рассеянную за один цикл деформирования, и определяет работу диссипативных сил

$$\Psi = \oint F(x,\ \dot{x})\mathrm{d}x = \int_0^T F_д(\dot{x})\dot{x}\mathrm{d}t, \tag{10.16}$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период деформирования.

Пусть, например, динамическая характеристика упругодиссипативного элемента имеет вид

$$F(x,\ \dot{x}) = F_y(x) + F_д(\dot{x}),$$

где $F_y(x) = cx$ — линейная упругая составляющая. Петля гистерезиса такого элемента с линейной диссипативной силой (10.11) при деформации по закону (10.15) имеет вид эллипса (рис. 10.10, *а*). Угол α наклона его большой оси характеризует жесткость элемента $c = \mathrm{tg}\,\alpha$. Рассеяниая за цикл энергия (10.15):

$$\Psi = \int_0^T b_1\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t = b_1(a\omega^2)\int_0^T \sin^2\omega t\mathrm{d}t = \pi a^2\omega b_1.$$

На рис. 10.10, *б* показана петля гистерезиса элемента с сухим трением (10.13). Для него рассеянная энергия

$$\Psi = 4ab_0. \tag{10.17}$$

Для элемента с диссипативной характеристикой вида (10.14) рассеянная за период энергия

$$\Psi = k_\mu a^{\mu+1}\omega^\mu b_\mu, \tag{10.18}$$

где $k_\mu = \int_0^\pi |\sin\tau|^{\mu+1}\mathrm{d}\tau$. Некоторые значения k_μ приведены ниже:

μ	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3
k_μ	4,000	3,500	3,142	2,874	2,666	2,498	2,356

Рассеяние энергии при колебаниях упругодиссипативной системы оценивают коэффициентом поглощения (см. § 7.1). При упругой линейной характеристике потенциальная энергия $П$ упругого элемента

$$П = ca^2/2;$$

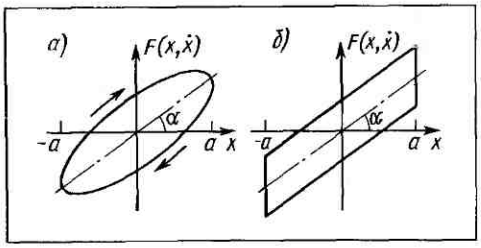


Рис. 10.10

коэффициент поглощения

$$\psi = 2\Psi/(ca^2).$$

Согласно (10.17) — (10.18) в зависимости от вида характеристики диссипативной силы коэффициент поглощения является функцией: частоты при вязком демпфировании (10.11)

$$\psi = 2\pi b_1 \omega/c;$$

амплитуды при сухом трении (10.13)

$$\psi = 8b_0/(ca);$$

амплитуды и частоты в общем случае (10.14)

$$\psi = 2k_\mu a^{\mu-1}\omega^\mu b_\mu/c.$$

При отыскании периодических колебаний вида (10.15) системы, диссипативные свойства которой заданы одним из изложенных выше способов, исходную динамическую характеристику $F(x, \dot{x})$ заменяют эквивалентной упруговязкой моделью:

$$F(x, \dot{x}) \approx cx + b\dot{x}. \qquad (10.19)$$

Коэффициент b эквивалентного демпфирования подбирают так, чтобы исходная и заменяющая схемы обладали одинаковой поглощающей способностью. Энергия (10.16), рассеянная линейным эквивалентным демпфером,

$$\Psi = \pi a^2 \omega b.$$

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Уравнение движения массы m записывают в виде

$$m\ddot{x} + cx + F(\dot{x}) = Q_0 \cos(\omega t - \varphi). \qquad (10.20)$$

Отыскивая решение (10.15) и проводя линеаризацию (10.19) нелинейной функции $F(\dot{x})$, вместо (10.20) получим

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q_0 \cos(\omega t - \varphi). \qquad (10.21)$$

В результате решения линеаризованного уравнения (10.21) амплитуда

$$a = \frac{Q_0}{c\sqrt{(1 - \frac{\omega}{\omega_0})^2 + (\frac{b\omega}{c})^2}},$$

где $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ — собственная частота системы.

Величина b является функцией амплитуды и частоты, т. е. $b = b(a, \omega)$. Поэтому это соотношение в общем случае представляет собой уравнение, решение которого определяет искомую амплитуду. Для резонансной амплитуды, достигаемой при малом демпфировании на частоте $\omega \approx \omega_0$, имеем

$$a_р = Q_0/(b\omega_0). \qquad (10.22)$$

Для линейной системы соотношение (10.22) можно записать в виде

$$a_р = \pi Q_0/(c\delta),$$

где $\delta = 2\pi n/\omega_0$ — логарифмический декремент колебаний; $n = b/(2m)$ — коэффициент демпфирования.

Учет внутреннего трения в материалах. Многочисленными экспериментами установлено, что поглощающие свойства большинства материалов не зависят от частоты деформирования. Поэтому диссипативные свойства материала удобно характеризовать с помощью коэффициента поглощения ψ или связанного с ним равенством $\psi = 2\delta$ логарифмического декремента колебаний δ. Эти величины, определяемые, как правило, экспериментально, представляют в виде зависимостей от амплитуд относительных деформаций, нормальных или касательных напряжений.

Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях. Наряду с внешними демпфирующими факторами на колебания механических систем заметное влияние могут оказать энергетические потери внутри самой конструкции (конструкционное демпфирование). Эти потери происходят из-за трения в кинематических парах, а также в соединениях типа прессовых, шлицевых, резьбовых, заклепочных и т. п. Хотя такие соединения принято называть неподвижными, в действительности при их нагружении неизбежно возникают малые проскальзывания по контактным поверхностям; на соответствующих относительных перемещениях силы трения совершают работу.

Лишь в некоторых простых схемах соединений поглощение энергии за один цикл можно вычислить с помощью теоретического расчета. Более надежные оценки рассеяния энергии могут быть получены экспериментальным путем — либо по параметрам резонансного пика в режиме моногармонических вынужденных колебаний, либо по огибающей свободных затухающих колебаний.

§ 10.6 Принципы виброизоляции. Виброзащитные системы с одной степенью свободы

Элементы расчетной модели и их характеристика. В расчетной модели виброзащитной системы можно выделить три основные части: источник возмущения (*И*), объект защиты (*О*) и виброизолирующее устройство (*ВУ*). В простейшем случае источ-

ник и объект считаются твердыми телами, движущимися поступательно вдоль некоторой оси x. На рис. 10.11 дана принципиальная схема виброзащитной системы: *а* — общий случай; *б* — силовое возбуждение $F=F(t)$; *в* — кинематическое возбуждение $\xi=\xi(t)$. Приложенные к системе внешние силы F (возмущения), а также внутренние силы R и R', с которыми виброизолирующее устройство, расположенное между источником и объектом, воздействует на них, считаются направленными вдоль оси x; тем самым ось x служит осью рассматриваемого виброизолирующего устройства.

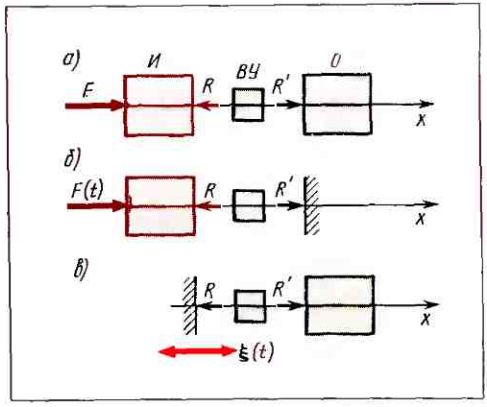


Рис. 10.11

В большинстве случаев масса одного из тел системы — источника или объекта — существенно превышает массу другого тела — соответственно объекта или источника. Тогда движение тела «большой» массы может считаться не зависящим от движения тела «малой» массы. Если, в частности, «большую» массу имеет объект, то его обычно считают неподвижным; движение системы вызывается в этом случае приложенными к источнику внешними силами, представляющими силовое возбуждение $F=F(t)$ (рис. 10.11, *б*). Если «большую» массу имеет источник, то закон его движения $\xi=\xi(t)$ можно считать заданным; это движение играет роль кинематического возбуждения объекта (рис. 10.11, *в*). В обоих случаях тело «большой» массы называют несущим или основанием, тело «малой» массы — несомым.

Схему, представленную на рис. 10.11, *б*, обычно используют тогда, когда речь идет о защите зданий, сооружений, перекрытий или фундаментов от динамических воздействий, возбуждаемых установленными на них машинами и механизмами с неуравновешенными движущимися частями или иным виброактивным оборудованием. Схему, изображенную на рис. 10.11, *в*, используют в задачах виброзащиты приборов, аппаратов, точных механизмов или станков, т. е. оборудования, чувствительного к вибрациям и устанавливаемого на колеблющихся основаниях или на движущихся объектах.

Виброизолирующее устройство представляет важнейшую часть виброзащитной системы; его назначение состоит в создании такого режима движения, инициируемого заданными возмущениями, при котором реализуется цель защиты объекта. Во многих случаях это оказывается достижимым при использовании безынерционного виброизолирующего устройства, которое для схем, изображенных на рис. 10.11, представляет одноосный виброизолятор. Для такого

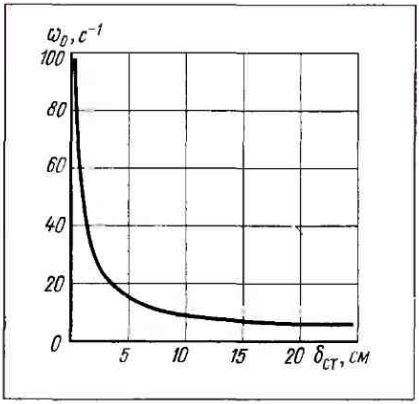


Рис. 10.12

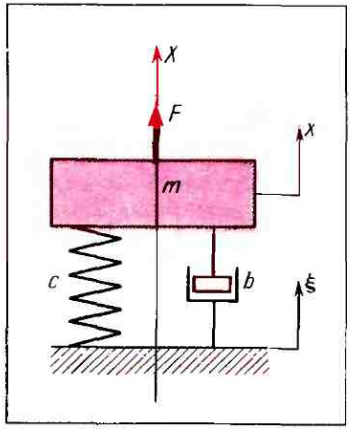


Рис. 10.13

виброизолятора реакции R и R' совпадают по величине ($R = R'$), причем в рассматриваемом ниже простейшем случае реакцию R можно считать пропорциональной деформации δ и скорости деформации $\dot{\delta}$ виброизолятора:

$$R = c\delta + b\dot{\delta}. \qquad (10.23)$$

Зависимость (10.23) описывает линейную характеристику простого безынерционного виброизолятора; коэффициенты c и b называются соответственно жесткостью и коэффициентом демпфирования. При $b = 0$ (10.23) описывает характеристику линейного идеального упругого элемента (пружины); при $c = 0$ — характеристику линейного вязкого демпфера. Таким образом, модель виброизолятора с характеристикой (10.23) определяет собственную частоту системы

$$\omega_0 = \sqrt{c/m}\,.$$

Значение c определяет также статическую деформацию $\delta_{ст}$ (осадку) виброизолятора, связанную с ω_0 формулой

$$\omega_0 = \sqrt{g \sin \alpha / \delta_{ст}}\,,$$

где $\delta_{ст}$ — деформация под осевой статической нагрузкой $mg \sin \alpha$; m — масса несомого тела; α — угол наклона оси виброизолятора к горизонту. Зависимость $\omega_0 = \omega_0(\delta_{ст})$ привєдена на рис. 10.12.

Расчетная модель простейшей виброзащитной системы с одной степенью свободы дана на рис. 10.13; здесь m, x — соответственно масса и координата несомого тела; F — сила, приложенная к несомому телу; ξ — координата основания; c, b — соответственно жесткость и коэффициент демпфирования виброизолятора. Демпфирующие свойства такой системы характеризуются коэффициентом демпфирования

$$n = b/(2m)$$

и относительным демпфированием

$$\nu = n/\omega_0 = b/(2\sqrt{cm}).$$

При $\nu=1$ в системе реализуется критическое демпфирование.

Эффективность виброзащиты. Коэффициенты эффективности при гармоническом возбуждении. Под эффективностью виброзащиты понимается степень реализации виброзащитным устройством целей виброзащиты. При силовом гармоническом возбуждении

$$F(t)=F_0\sin\omega t;\ \xi(t)=0,$$

где F_0 и ω — соответственно амплитуда и частота вынуждающей силы; цель защиты может состоять в уменьшении амплитуды R_0 силы, передаваемой на неподвижный объект,

$$R_0=\frac{F_0\sqrt{\omega_0^4+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}$$

или в уменьшении амплитуды X_0 установившихся вынужденных колебаний источника:

$$X_0=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}.$$

При кинематическом гармоническом возбуждении

$$F(t)=0;\ \xi(t)=\xi_0\sin\omega t$$

цель защиты может заключаться в уменьшении амплитуды абсолютного ускорения (перегрузки) объекта

$$W=\frac{\xi_0\omega^2\sqrt{\omega_0^4+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}},$$

а также в уменьшении амплитуды его колебаний относительно основания.

Количественно степень реализации цели виброзащиты можно охарактеризовать значениями безразмерных коэффициентов эффективности. Для расчетной модели, изображенной на рис. 10.13, при силовом возбуждении вводят коэффициенты

$$k_R=R_0/F_0;\ k_x=cX_0/F_0.$$

В случае кинематического возбуждения рассматривают коэффициенты

$$k_R=W/(\omega^2\xi_0);\ k_{x'}=X_0'/\xi_0.$$

Величины k_R и k_x называют соответственно коэффициентом виброизоляции и коэффициентом динамичности.

Зависимость k_R, k_x и $k_{x'}$ от безразмерных параметров ν и $z=\omega/\omega_0$ имеет такой вид:

$$k_R=\sqrt{\frac{1+4\nu^2z^2}{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}};$$

$$k_x=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}};\quad k_{x'}=\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}}.$$

Эквивалентные коэффициенты жесткости и демпфирования. Виброизолирующее устройство часто выполняют в виде соединения нескольких виброизоляторов, образующих сложный виброизолятор. При определенных условиях реакция R такого соединения может аппроксимироваться зависимостью (10.23), где δ — деформация соединения в целом. Тогда рассматриваемый сложный виброизолятор эквивалентен (в смысле воздействия на источник и объект) простому, коэффициенты $c_э$ и $b_э$ называются эквивалентными коэффициентами жесткости и демпфирования.

Эффективность виброзащитных систем при полигармонических воздействиях. Полигармоническим называется процесс, представимый в виде конечной тригонометрической суммы. Например, полигармоническое возмущение кинематического типа задается суммой:

$$\xi(t)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{j0}\sin(\omega_j t+\alpha_j),$$

где ξ_{j0}, ω_j, α_j — соответственно амплитуда, частота и начальная фаза j-й гармоники. Совокупность чисел $\xi_{j0}(j=1, 2, ..., n)$ образует амплитудный спектр воздействия. Условие эффективности виброзащиты может при этом отождествляться с совокупностью условий эффективности на каждой из гармоник воздействия. Так, если цель виброзащиты состоит в уменьшении перегрузки $\max|\ddot{x}(t)|$ объекта, условие эффективности эквивалентно выполнению n неравенств $k_{Ri}(\nu, z_j)\leqslant 1$, $(j=1, 2, ..., n)$, что равнозначно условию ограниченности ординат амплитудно-частотной характеристики системы в заданных точках $z=z_j(j=1, 2, ..., n)$.

§ 10.7 Динамическое гашение колебаний

Метод динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств с целью изменения его вибрационного состояния. Работа динамических гасителей основана на формировании силовых воздействий, передаваемых на объект. Этим динамическое гашение отличается от другого способа уменьшения вибрации, характеризуемого наложением на объект дополнительных кинематических связей, например закреплением отдельных его точек.

Изменение вибрационного состояния объекта при присоединении динамического гасителя может осуществляться как путем перераспределения колебательной энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний. Первое реализуется изменением настройки системы объект — гаситель по отношению к частотам действующих вибрационных возмущений путем коррекции упругоинерционных свойств системы.

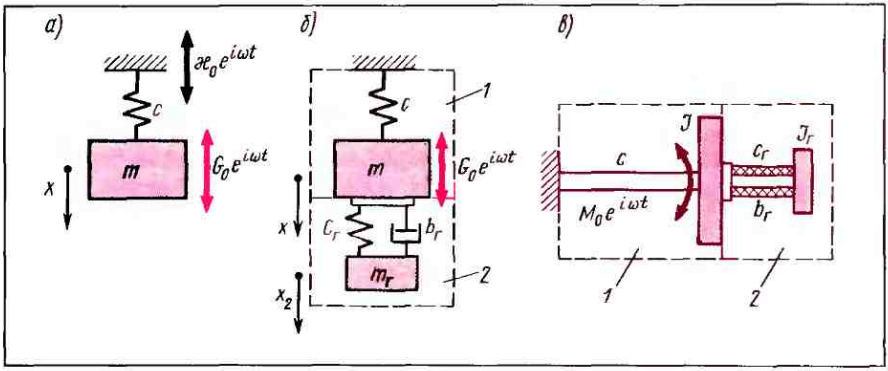


Рис. 10.14

В этом случае присоединяемые к объекту устройства называют инерционными динамическими гасителями. Инерционные гасители применяют для подавления моногармонических или узкополосных случайных колебаний.

При действии вибрационных нагрузок более широкого частотного диапазона предпочтительней оказывается второй способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы путем присоединения к объекту дополнительных специальных демпфируемых элементов. Динамические гасители диссипативного типа получили название поглотителей колебаний. Если они одновременно корректируют упругоинерционные и диссипативные свойства системы, то их называют динамическими гасителями с трением.

Динамические гасители могут быть конструктивно реализованы на основе пассивных элементов (масс, пружин, демпферов) и активных, имеющих собственные источники энергии. В последнем случае речь идет о применении систем автоматического регулирования, использующих электрические, гидравлические и пневматические управляемые элементы.

Динамическое гашение применимо для всех видов колебаний: продольных, изгибных, крутильных и т. д.; при этом вид колебаний, осуществляемых присоединенным устройством, как правило, аналогичен виду подавляемых колебаний.

Пружинный одномассный инерционный динамический гаситель (рис. 10.14). Простейший динамический гаситель *2* (рис. 10.14, *б*) выполняется в виде твердого тела, упруго присоединяемого к демпфируемому объекту *1* в точке, колебания которой требуется погасить. Существенное влияние на результирующие характеристики движения объекта с гасителем оказывают диссипативные потери в гасителе. На рис. 10.14, *а* представлен простейший случай, когда демпфируемый объект моделируется сосредоточенной массой m, прикрепленной к основанию линейной пружиной с жесткостью c.

Дифференциальные уравнения продольных колебаний системы с гасителем имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}+b_г(\dot{x}-\dot{x}_г)+cx+c_г(x-x_г)&=G_0e^{i\omega t};\\ m_г\ddot{x}_г+b_г(\dot{x}_г-\dot{x})+c_г(x_г-x)&=0, \end{aligned} \qquad (10.24)$$

где x, $x_г$ — абсолютные координаты перемещений масс.

При динамическом гашении крутильных колебаний по схеме, показанной на рис. 10.14, *в*, уравнения, записанные относительно абсолютных углов поворота дисков демпфируемого объекта и гасителя φ, $\varphi_г$, имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}+b_г(\varphi-\dot{\varphi}_г)+c\varphi+c_г(\varphi-\varphi_г)&=M_0e^{i\omega t};\\ J_г\ddot{\varphi}_г+b_г(\dot{\varphi}_г-\dot{\varphi})+c_г(\varphi_г-\varphi)&=0. \end{aligned} \qquad (10.25)$$

Здесь J, $J_г$ — моменты инерции демпфируемого объекта и гасителя; c, $c_г$ — крутильные жесткости валов; $b_г$ — коэффициент вязких потерь при парциальных колебаниях гасителя; M_0 — амплитуда вибрационного крутящего момента, приложенного к диску демпфируемой системы.

На рис. 10.15 приведены (*а* — для демпфируемого объекта, *б* — для гасителя) амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой системы с гасителем (см. рис. 10.14, *б*). Для сравнения на рис. 10.15, *а* штриховой линией нанесена амплитудно-частотная характеристика объекта (см. рис. 10.14, *а*). При выбранной настройке присоединение гасителя образует такую результирующую систему с двумя степенями свободы, у которой на частоту возбуждения приходится антирезонанс. При этом частота антирезонанса совпадает также с частотой резонанса исходной системы.

Катковые инерционные динамические гасители. Возможности использования инерционных динамических гасителей могут быть расширены при обеспечении компенсирующей реакции гасителя. Это достигается, в частности, применением в качестве гасителей неизохронных элементов, имеющих возможность подстраивать частоту своих движений к частоте возбуждения. Существенной неизохронностью обладают, например, элементы, способные осу-

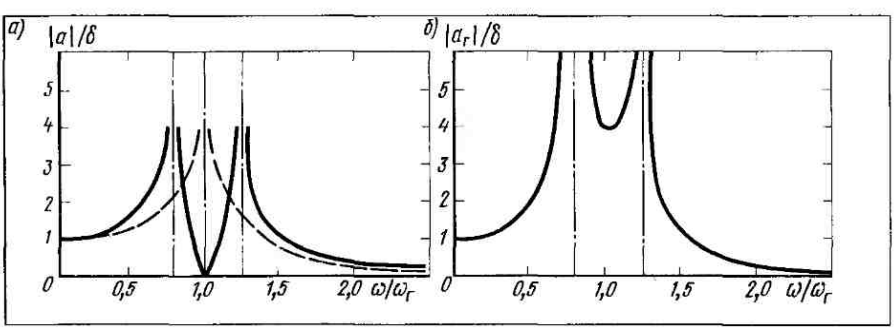


Рис. 10.15

ществлять обкатку замкнутых поверхностей: цилиндр в цилиндрической полости, шар в цилиндрической или сферической полости, кольцо, надетое на стержень, и т. п. Прикрепление таких элементов к вибрирующему объекту приводит к тому, что осуществляемое ими движение обкатки синхронизируется с внешним возбуждением. При этом периодическая реакция, создаваемая вращающимся элементом, противодействует вибрационной нагрузке.

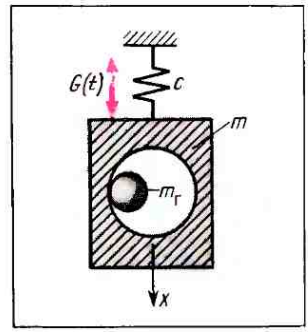


Рис. 10.16

В качестве примера рассмотрим демпфируемый объект с одной степенью свободы, возбуждаемый гармонической силой $G(t)=G_0\cos(\omega t+\varphi)$ и снабженный шаровым или роликовым гасителем массой $m_г$ и радиусом $\rho_г$, расположенным в цилиндрической полости радиусом ρ (рис. 10.16). Рассматриваемая системы описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$(m+m_г)\ddot{x}+cx=G_0\cos(\omega t+\psi)+$$
$$+(\rho-\rho_г)m_г(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi);$$
$$m_г(\rho-\rho_г)^2\ddot{\varphi}=m_г(\rho-\rho_г)\ddot{x}\sin\varphi. \qquad (10.26)$$

Здесь x — продольная координата объекта; φ — относительная угловая координата положения гасителя, отсчитываемая от вертикальной оси. Найдем условия стабилизации объекта, полагая $x=\dot{x}=\ddot{x}=0$. Из (10.26) имеем

$$\varphi=\omega_г t+\varphi_0,$$

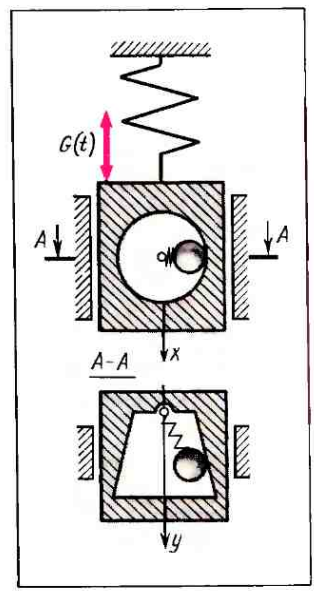


Рис. 10.17

т. е. гаситель совершает равномерное вращение. Центробежная реакция, передаваемая равномерно вращающимся телом демпфируемому объекту, полностью уравновешивает возбуждение и обеспечивает стабилизацию объекта. Осуществляя слежение за частотой возбуждения, катковые гасители рассматриваемого типа чувствительны к изменению амплитуды возбуждения на частоте настройки.

Иногда с увеличением частоты увеличивается эксцентриситет дебаланса. Необходимое для компенсации увеличение радиуса полости $\rho(\omega)$ может быть осуществлено тогда выполнением конструкции гасителя в виде, показанном на рис. 10.17. Форма поверхности, по которой происходит обкатка, выполнена таким образом, чтобы при увеличении частоты и, следовательно, центробежной реакции

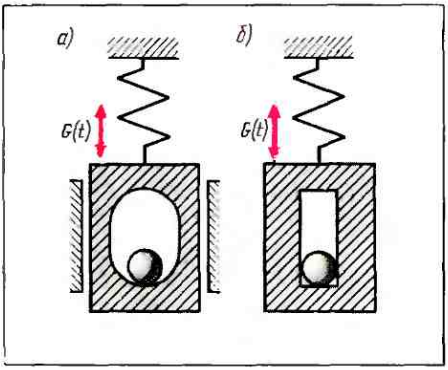


Рис. 10.18

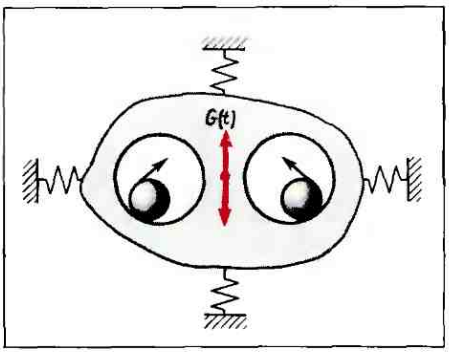


Рис. 10.19

шарик перемещался в направлении оси y вращения образующей. Характеристика пружины выбирается из условия, позволяющего обеспечить удержание шарика на требуемом радиусе.

Выбором формы осевого сечения полости можно регулировать в некоторых пределах спектр периодической реакции гасителя. Например, вытягивая окружность в эллипс (рис. 10.18, *а*), можно увеличить роль высших гармоник с кратными частотами в спектре реакции гасителя. Это полезно в тех случаях, когда аналогичные гармоники имеются в возбуждении. Теоретически, увеличивая эксцентриситет эллипса до единицы, т. е. вытягивая полость в поверхность, допускающую лишь одномерные перемещения массы гасителя (рис. 10.18, *б*), приходим к идее ударного гасителя, реакция которого имеет спектр кратных гармоник, близкий к равномерному.

Использование одного каткового гасителя требует наличия направляющих у демпфируемого объекта, компенсирующих боковые реакции гасителя. Их применения можно избежать при использовании двух одинаковых гасителей с половинной массой (рис. 10.19), расположенных симметрично относительно линии действия возмущающей силы. После прохождения резонансной частоты системы гасители синхронизируют свое вращение в противоположных направлениях, компенсируя тем самым боковые нагрузки. Таким образом, диапазон эффективности таких гасителей — область зарезонансных частот.

Маятниковые инерционные динамические гасители. Поддержание равенства парциальной частоты динамического гасителя с частотой возбуждения в широком диапазоне может быть обеспечено при использовании гасителей колебаний маятникового типа, расположенных в поле центробежных сил, образованном вращением, являющимся причиной колебаний. На рис. 10.20 показаны схемы подобных гасителей, предназначенных для подавления крутильных (рис. 10.20, *а*) и продольных (рис. 10.20, *б*) колебаний. Рассмотрим принцип их действия на примере маятникового гаси-

теля крутильных колебаний. Пусть диск (рис. 10.20, *а*) радиусом ρ и с моментом инерции J упруго связан с валом двигателя, совершающим вращение по закону:

$$\varphi_0(t)=\Omega t+\vartheta_0 e^{i\omega t},$$

где Ω — средняя угловая скорость вала; ϑ_0 — показатель неравномерности вращения; ω — частота крутильных колебаний вала, причем $\omega=n\Omega$, где $n=1, 2,\ldots$ — кратность колебаний.

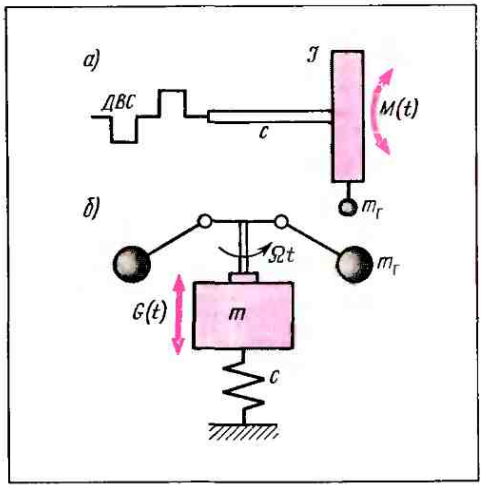


Рис. 10.20

В результате приведенный к диску вибрационный момент $M(t)=c\vartheta_0 e^{i\omega t}$ (c — крутильная жесткость участка вала между двигателем и диском) возбуждает крутильные колебания диска. Для подавления указанных колебаний к диску шарнирно прикреплен маятник, имеющий массу $m_г$, расположенную на конце невесомого стержня длиной l (рис. 10.21). Рассмотрим колебания маятника относительно диска во вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат, жестко связанной с диском (рис. 10.21, *а*). Прикладывая к центру масс маятника центробежную силу $F=m_г\Omega^2 d$,

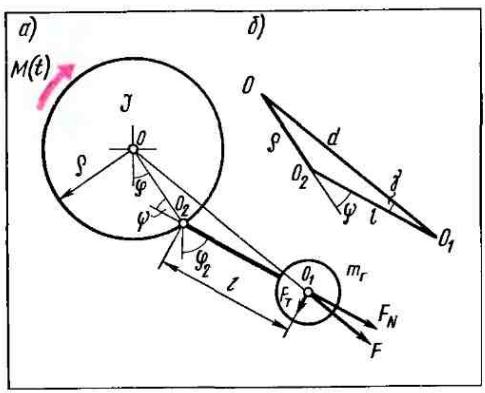


Рис. 10.21

где d — расстояние от центра масс маятника до центра вращения диска, разложим ее на две составляющие: F_N и F_T — вдоль оси маятника и перпендикулярно ей. Имеем

$$F_N=m_г\Omega^2 d\cos\gamma; \quad F_T=m_г\Omega^2 d\sin\gamma.$$

Обозначая угловое отклонение маятника относительно диска через $\psi=\varphi_г-\varphi$, где φ, $\varphi_г$ — абсолютные угловые отклонения диска и маятника, из треугольника на рис. 10.21, *б* с учетом малости острых углов найдем

$$\gamma=\rho\psi/(\rho+l).$$

В результате при малых колебаниях маятника

$$F_N\approx m_г\Omega^2(\rho+l); \quad F_T\approx m_г\Omega^2\rho\psi.$$

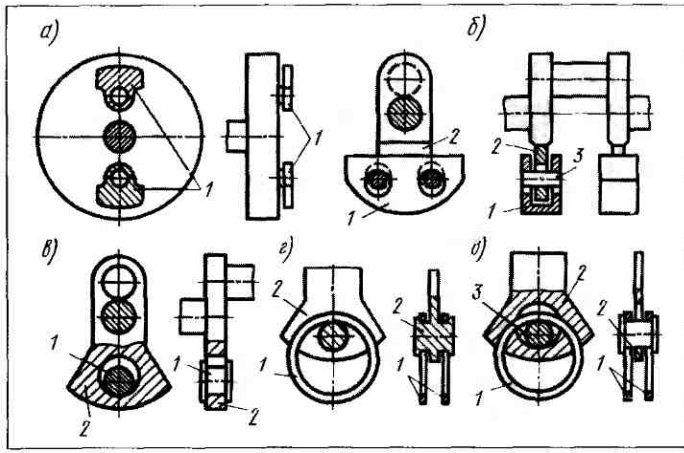


Рис. 10.22

Дифференциальные уравнения, описывающие колебания рассматриваемой системы с двумя степенями свободы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}+b_r(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_r)+c\varphi-m_r\Omega^2\rho(\rho+l)(\varphi_r-\varphi)&=\vartheta_0 e^{i\omega t};\\ m_r l^2\ddot{\varphi}_r+b_r(\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi})+m_r\Omega^2\rho l(\varphi-\varphi)+m_r\ddot{\varphi}\rho l&=0. \end{aligned} \qquad (10.27)$$

При составлении второго дифференциального уравнения не учитывались малые кориолисовы силы, а переносное движение диска учитывалось с помощью последнего члена. Согласно этому уравнению парциальная собственная частота колебания маятника

$$\omega_r=\Omega\sqrt{\rho/l}=(\omega/n)\sqrt{\rho/l},$$

т. е. она пропорциональна угловой скорости вращения вала или частоте колебаний. Таким образом, при изменении частоты колебаний автоматически подстраивается частота гасителя.

При гашении чисто крутильных колебаний для компенсации изгибающего действия силы F_N целесообразно устанавливать два маятника в диаметрально противоположных точках диска. Создаваемый ими динамический эффект гашения колебаний имеет суммарное действие.

Конструктивное обеспечение настройки (10.27) обладает рядом особенностей. Простейшая схема типа той, что показана на рис. 10.22, *а*, оказывается осуществимой, как правило, лишь при $n=1$. С увеличением n длина маятников существенно уменьшается. Для обеспечения подвеса на малом плече l используют конструкции, показанные на рис. 10.22, *б—д*. На рис. 10.22, *б* приведена схема свободной бифилярной установки маятника-противовеса *1* на выступе кривошипа *2* коленчатого вала, в котором выполнены отверстия радиусом ρ_1. Такой же радиус имеют круглые

отверстия противовеса. Соединение осуществляется с помощью штифтов *3* радиусом ρ_2, меньшим, чем радиусы отверстий. Описанное крепление обеспечивает поступательное движение противовеса по окружности радиусом $l = 2)\rho_1 - \rho_2)$.

Радиус крепления маятника-противовеса в данном случае: $\rho = h - l$, где h — расстояние от центра вращения диска до центра масс противовеса.

Окончательная формула настройки маятника с бифилярным подвесом имеет вид

$$2n^2(\rho_1 - \rho_2)/[h - 2(\rho_1 - \rho_2)] = 1$$

На рис. 10.22, *в* гашение колебаний осуществляется роликовым маятником *1*, помещенным свободно в цилиндрическом отверстии противовеса кривошипа *2*. Такая схема имеет при реализации существенные габаритные ограничения, поэтому вместо роликов используют иногда кольцевые маятники *1* (рис. 10.22, *г, д*). «Маятниковые» элементы зачастую конструктивно реализуются в виде шаровых или цилиндрических тел, свободно расположенных в полостях объекта. Такие конструкции находят, например, применение при *гашении изгибных колебаний* коленчатых валов. При этом одно или два тела *1* (рис. 10.23, *а*) устанавливают в пазах противовеса кривошипа *2*, они способны совершать качательные движения в плоскости изгиба, обкатываясь по ограниченной цилиндрической или тороидальной поверхности. Часто также используют установку маятника с бифилярным подвесом *1* (рис. 10.23, *б*). Установочные плоскости качаний маятников для гашения изгибных и крутильных колебаний коленчатых валов оказываются взаимно перпендикулярными.

Инерционные динамические гасители с активными элементами. Использование в системах динамического гашения колебаний элементов с собственными источниками энергии расширяет их функциональные свойства. Появляется возможность достаточно просто и в широком диапазоне осуществлять подстройку параметров гасителя в связи с изменением действующих возмущений,

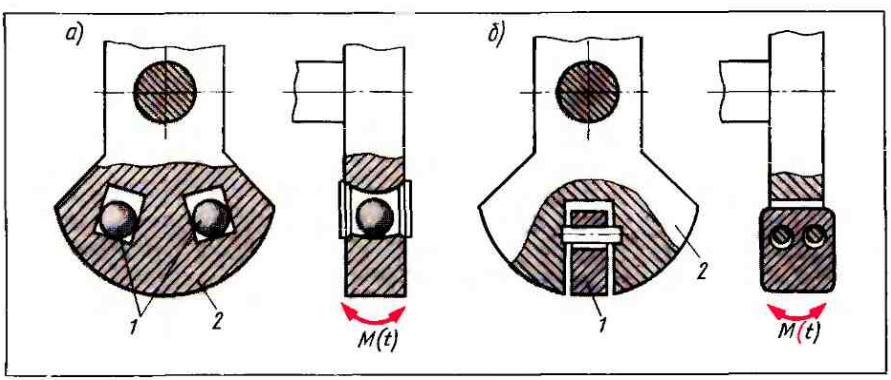


Рис. 10.23

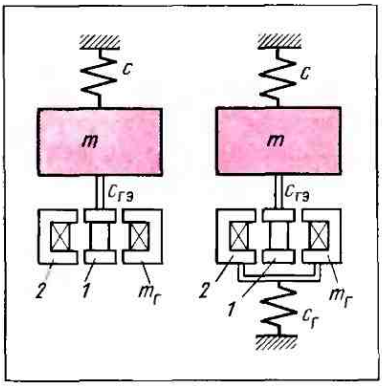


Рис. 10.24

производить непрерывную настройку в режиме слежения, отыскивать и реализовывать наилучшие законы для компенсирующих реакций. На рис. 10.24 приведены схемы использования электромагнита в качестве регулятора эквивалентной жесткости динамического гасителя продольных колебаний. Схемы различаются прикреплением сердечника *1* и корпуса с катушкой *2* к демпфируемому объекту или неподвижному основанию.

Аналогичные схемы могут быть осуществлены для управляемого динамического *гашения крутильных колебаний*. В качестве исполнительного элемента удобно использовать модифицированную конструкцию двигателя постоянного тока (рис. 10.25), устранив относительный сдвиг полюсов ротора *1* и статора *2* и ликвидировав возможность переключения полюсов при колебаниях.

Жесткость гасителя может изменяться также путем перемещения массы динамического гасителя *1* вдоль упругой балки с помощью регулируемого электродвигателя (рис. 10.26, *а*). Учитывая, что в режиме наилучшего динамического гашения (антирезонанс) фазы колебаний объекта *2* и гасителя *1* сдвинуты на $\pi/2$, выработка

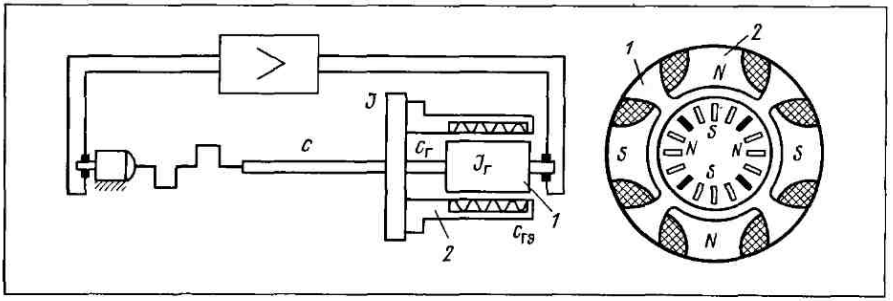


Рис. 10.25

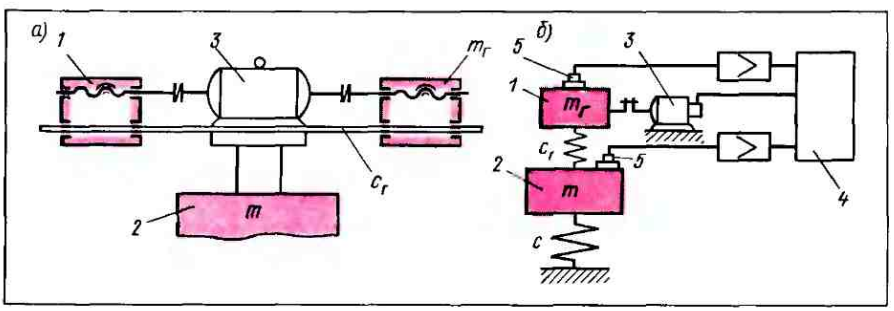


Рис. 10.26

управляющего сигнала осуществляется фазовым дискриминатором *4* (рис. 10.26,*б*), в котором сравниваются показания датчиков *5* абсолютных перемещений объекта и гасителя. При сдвиге фаз, отличающемся от $\pi/2$, срабатывает реле, включающее электродвигатель *3* в соответствии с необходимым направлением компенсирующей подстройки.

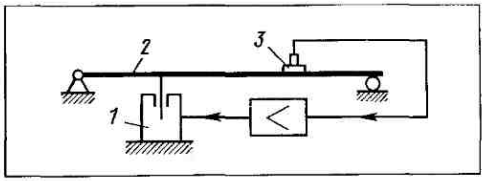


Рис. 10.27

Эффективность активного динамического гашения ограничивается инерционностью системы управления. Для снижения массы присоединяемых к объекту частей корпус *1* исполнительного устройства (рис. 10.27) активного гасителя устанавливают иногда на неподвижном основании и передают силовое воздействие на какие-либо точки упругого объекта *2* по результатам измерения колебаний других точек (например, *3*), вибрации которых следует погасить.

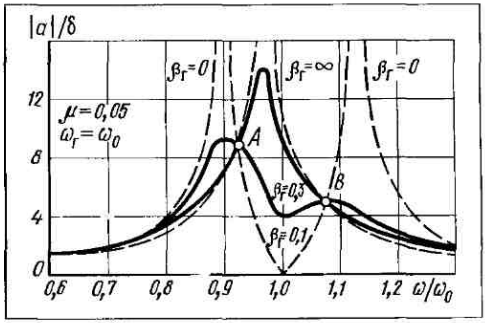


Рис. 10.28

В тех случаях, когда осуществляется гашение колебаний движущихся объектов, например транспортных устройств, неподвижная система, относительно которой вырабатываются компенсирующие силы, передаваемые на объект, может быть организована с помощью гироскопических устройств.

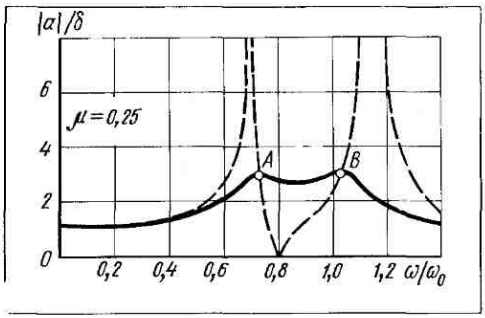


Рис. 10.29

Пружинный одномассный динамический гаситель с трением. Расширение частотного диапазона, в котором осуществляется динамическое гашение колебаний, может быть достигнуто также при рациональном использовании диссипативных свойств пружинного одномассного гасителя. На рис. 10.28 приведены амплитудно-частотные характеристики объекта (см. рис. 10.14, *б*) для различных коэффициентов вязкого трения $\beta_г$. Здесь $|a|$ — амплитуда. Для обеспечения максимального значения амплитуды остаточных колебаний следует подобрать затухание $\beta_г$ таким образом, чтобы в точках *A*

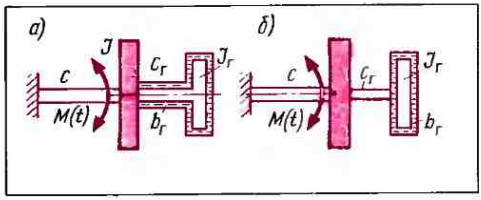


Рис. 10.30

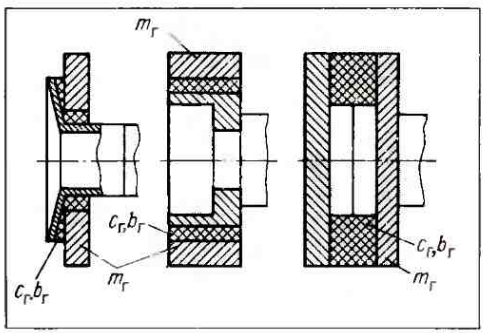


Рис. 10.31

или B достигался экстремум амплитудно-частотной характеристики. На рис. 10.29 приведена амплитудно-частотная характеристика динамического гасителя с трением. Здесь: $\mu = m_г/m$ ($m_г$ — масса гасителя; m — масса объекта); $\delta = G_0/c$ (G_0 — внешнее возбуждение).

Для выяснения габаритов гасителя и напряжений в пружине следует определить амплитуду $|a_0|$ колебаний массы гасителя относительно демпфируемой системы. В общем случае эта величина может быть определена из системы дифференциальных уравнений (10.24). На практике, однако, пользуются простым приближенным соотношением, получаемым с помощью энергетического баланса.

Работа гармонической силы $G(t)$ при гармоническом движении демпфируемой системы $x(t)$ с амплитудой $|a|$ определяется соотношением

$$E_в = \pi G_0 |a| \sin\varphi \approx \pi G_0 |a|,$$

где φ — значение фазы, близкое к $\pi/2$. Энергия, рассеиваемая в вязком демпфере в результате относительного движения масс m и $m_г$:

$$E_д = \pi b_г \omega |a_0|^2.$$

Приравнивая величины $E_в$ и $E_д$, получим

$$\frac{|a_0|}{\delta} = \sqrt{\frac{|a_0|}{\delta} \frac{1}{2\mu\xi\nu\beta_г}},$$

где $\xi = \omega/\omega_0$; $\nu = \omega_г/\omega_0$; $\beta_г = b_г/(2\sqrt{c_г m_г})$.

Конструкции динамического гасителя с трением можно создавать как с параллельным соединением упругого и демпфирующего элементов (рис. 10.30, *а*), так и последовательным (рис. 10.30, *б*). Удачным является выполнение упругодемпфирующего элемента в виде единой резиновой детали. На рис. 10.31 приведены примеры подобных конструкций, предназначенных для подавления крутильных колебаний. С помощью подобных деталей создаются также резинометаллические опоры с гасителем колебаний (рис. 10.32).

Гироскопические гасители колебаний. Для гашения колебаний транспортных объектов и в некоторых других специальных случаях находят применение динамические гасители, основанные на использовании гироскопов. Эквивалентное действие подобных систем аналогично работе пружинного гасителя с трением, хотя устройство и принцип функционирования различен. На рис. 10.33 приведена схема успокоителя бортовой качки судов. Ротор гироскопа *1* смонтирован в кожухе *2*, который может качаться относительно судна вокруг оси *3*, перпендикулярной продольной оси корабля. При этом центр тяжести кожуха располагается ниже оси качаний на расстоянии *l*. Колебания кожуха демпфируются с помощью тормозного барабана *4*. Масса ротора составляет обычно ~1% массы судна.

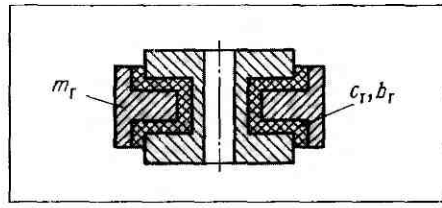


Рис. 10.32

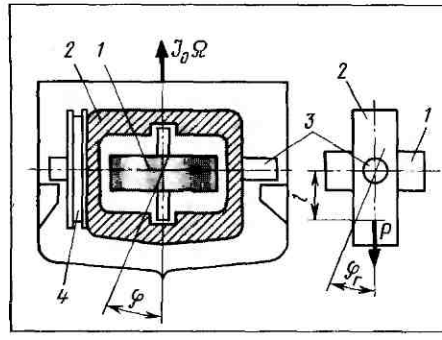


Рис. 10.33

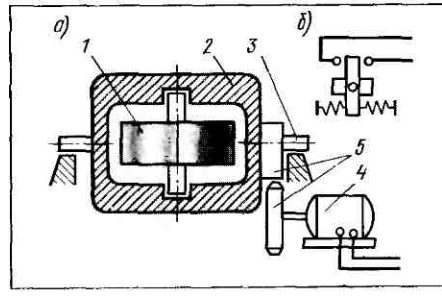


Рис. 10.34

Наряду с рассмотренной схемой для гашения бортовой качки нашла применение гироскопическая схема с обратной связью. Кожух *2* исполнительного гироскопа с ротором *1* (рис. 10.34, *а*) установлен концентрично относительно оси *3* прецессии. Повороты кожуха осуществляются серводвигателем *4* через зубчатую передачу *5* с помощью сигналов малого направляющего гироскопа (рис. 10.34, *б*). Последний установлен аналогично исполнительному гироскопу и представляет собой его сильно уменьшенную копию. При бортовой качке в результате поворота кожуха направляющего гироскопа замыкаются соответствующие контакты реле, включающего серводвигатель. В результате кожух исполнительного гироскопа поворачивается таким образом, что возникающий реактивный момент, действующий на опоры кожуха, противодействует качке.

В большинстве современных судов для подавления качки ис-

пользуют устройства, основанные на применении управляемых или неподвижных крыльев, меняющих угол атаки при крене таким образом, чтобы возникающая подъемная сила при их обтекании водой противодействовала качке. В отличие от гироскопических успокоителей эти устройства осуществляют стабилизацию лишь при движении судна.

§ 10.8 Поглотители колебаний с вязким и сухим трением

Поглотители колебаний с вязким трением. На рис. 10.35 показаны схемы простейших поглотителей колебаний вязкого типа, присоединенных к демпфируемому объекту с одной степенью свободы. Поглотители широко используют для гашения как продольных, так и крутильных колебаний; при этом они пригодны для демпфирования колебаний, изменяющихся по любым законам. При подавлении моногармонических колебаний поглотители колебаний менее эффективны, чем динамические гасители с трением, однако даже в этом случае зачастую им отдают предпочтение из-за конструктивной простоты и отсутствия упругого элемента, склонного к усталостным поломкам.

Рассматриваемая система также может быть описана уравнениями (10.24) в случае продольных колебаний, либо (10.25) в случае крутильных при условии, что $c_г \equiv 0$.

При $\beta_0 = b_г/(2m_г\omega_0) = 0$ и $\beta_0 = \infty$ будут системы с одной степенью свободы, амплитудно-частотные характеристики которых показаны на рис. 10.36. Наилучшая настройка поглотителя дает максимум амплитуды в точке B. Величина β_0, обеспечивающая экстремум характеристики в точке B (сплошная линия), определяется соотношением

$$\beta_0 = \sqrt{1/[2(2+\mu)(1+\mu)]}.$$

Простейшая конструкция поглотителя колебаний вязкого типа приведена на рис. 10.35, *а*. Втулка *1*, жестко связанная с кожухом *2*, насажена на вал *3*, крутильные колебания которого требуется погасить. Внутри кожуха находится маховик *4*, способный проскальзывать относительно втулки благодаря вкладышу *5* с малым коэффициентом трения. Малый зазор между кожухом и маховиком заполнен жидкостью с большой вязкостью.

В схеме, изображенной на рис. 10.35, *б*, демпфирующий эффект создается при колебаниях жестко насаженной на вал *3* ступицы *1* с лопатками, прокручивающейся относительно маховика *2*; внутренние камеры заполнены вязкой жидкостью.

На рис. 10.35, *в* ведущий вал *3* вращает полумуфту *1*, имеющую торообразную полость с внутренними перегородками *6* и скрепленный с ней кожух *2*, свободно прокручивающийся относительно ана-

логичной второй полумуфты *4*, жестко соединенной с ведомым валом *5*. Полость между полумуфтами заполнена жидкостью небольшой вязкости. Вследствие разности скоростей ведомого и ведущего вала под действием разности центробежных сил осуществляется круговая циркуляция жидкости в направлении, показанном стрелками. Возникающие при этом кориолисовы силы осуществляют передачу крутящего момента.

В поглотителе на рис. 10.35, *г* демпфирующая сила возникает при перетекании масла через малые отверстия при колебаниях диафрагмы *1* относительно заполненного маслом и свободно насаженного кожуха *2*.

Поглотители колебаний с сухим трением. Поглотители колебаний с сухим трением получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и обслуживания, а также относительно малым габаритам. Их применяют для гашения как крутильных, так и продольных колебаний. Рассмотрим принцип действия такого поглотителя на примере гашения крутильных колебаний объекта с одной степенью свободы (рис. 10.37). В этом случае диск с моментом инерции $J_г$ присоединяется к объекту с помощью пары сухого трения, создающей при относительных колебаниях момент постоянной величины θ, противодействующий относительному смещению объекта и поглотителя.

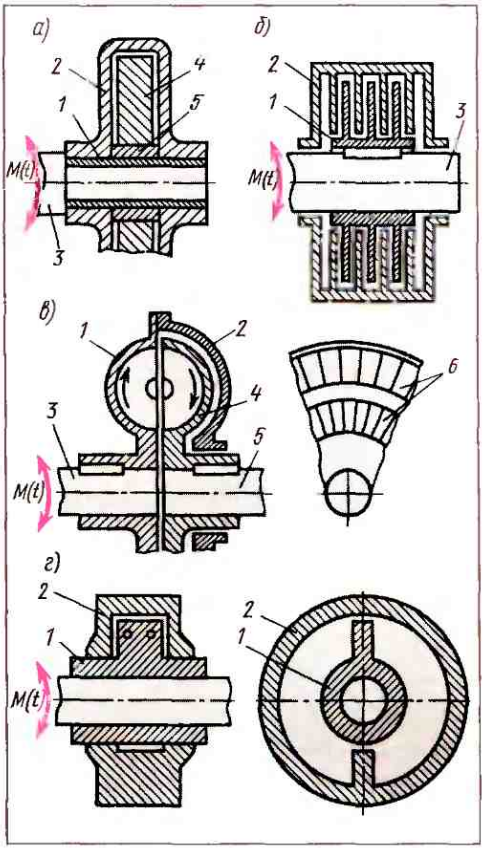


Рис. 10.35

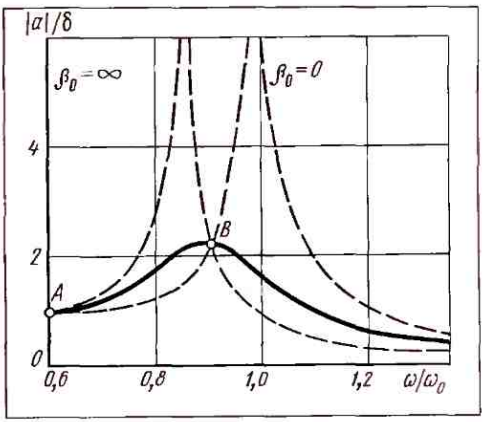


Рис. 10.36

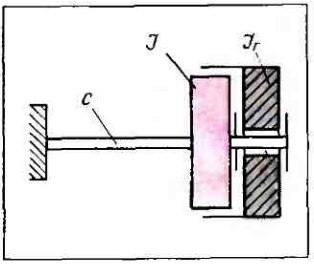


Рис. 10.37

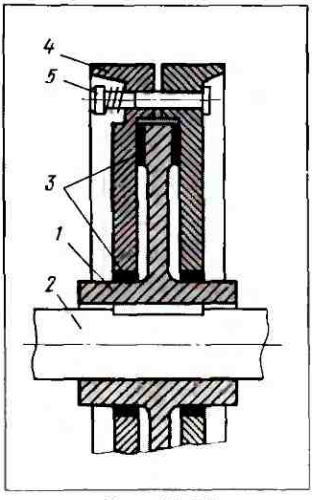


Рис. 10.38

По аналогии с (10.25) дифференциальные уравнения системы могут быть записаны в таком виде:

$$J\ddot{\varphi}+\theta\,\mathrm{sgn}(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_г)+c\varphi=M_0e^{i\omega t};$$
$$J_г\ddot{\varphi}_г-\theta\,\mathrm{sgn}(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_г)=0.$$

На рис. 10.38 показана конструкция поглотителя с сухим трением. Ступица *1*, жестко соединенная с валом *2*, вовлекает во вращение через фрикционные диски *3* маховик *4*, свободно насаженный на вал. Регулировка величины сил сухого трения обеспечивается степенью сжатия пружины *5*. При колебаниях вала происходит относительное проскальзывание маховика и ступицы, приводящее к рассеянию энергии вследствие трения на фрикционных поверхностях.

Оптимальный момент сил сухого трения, дающий максимальное рассеяние энергии за цикл: $\theta=(\sqrt{2}/\pi)J_г\omega^2\vartheta_0$, где ϑ_0 — амплитуда угловых колебаний вала при отсутствии демпфера.

Недостатком поглотителей сухого трения является непостоянство момента трения вследствие износа и загрязнения трущихся поверхностей, а также возможность перекоса и заедания дисков.

§ 10.9 Ударные гасители колебаний

Основу ударного виброгасителя составляет тело массой $m_г$ (рис. 10.39), соударяющееся с элементом A демпфируемой системы, колебания которого следует уменьшить. Наибольшее распространение получили плавающие ударные гасители (рис. 10.40, *а, б, в*), выполненные в виде шара, цилиндра, кольца, установленного свободно с зазором 2Δ. Плавающие гасители настраивают на режим двух поочередных соударений тела о каждый ограничитель за период движений, дающий для таких устройств наибольший эффект. Наряду с этим используют пружинные (рис. 10.40, *г*) и маятниковые (рис. 10.40, *д*) ударные гасители с соответствующей подвеской гасителя. В таких устройствах реализуют, как правило, режим односторонних соударений с одним ударом за период. Реже применяют аналогичные устройства двустороннего действия (рис. 10.40, *е*).

На рис. 10.41 приведены статические упругие характеристики $f(y)$ перемещения y гасителя относительно деформируемой точки A

объекта для основных вариантов установки гасителей (*а* — плавающий гаситель, *б* — пружинный односторонний гаситель; *в* — пружинный двусторонний гаситель).

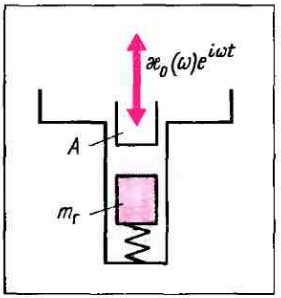


Рис. 10.39

Непосредственная гармоническая линеаризация описанных статических характеристик невозможна, поскольку их значения при ударе неоднозначны. Удобным приемом является гармоническая линеаризация обратных функций $y=Q(R)$, характеризующих зависимость относительного смещения от «упругой» реакции гасителя. Например, для гасителя плавающего типа (рис. 10.42) $y=\Delta\operatorname{sgn} R$. Осуществляя гармоническую линеаризацию функций с помощью обычных приемов, имеем $y\approx q(R_0)R$, где $q(R_0)$ — коэффициент гармонической линеаризации, зависящий теперь от амплитуды R_0 периодической реакции гасителя, причем $q=c_г^{-1}$.

Повышение коэффициента восстановления обеспечивается путем использования материалов контактных пар с пониженными вязкопластическими свойствами, например закаленных подшипниковых сталей и т. п. Кроме того, следует уменьшать сопротивление при колебаниях массы гасителя относительно корпуса. Хорошие результаты дает использование сферических тел.

Подобрав параметры гасителя из условия

$$m_г\Delta=(\pi/4)\varepsilon m_A,$$

где m_A — вращающаяся неуравновешенная масса; ε — эксцентриситет установки массы m_A; $m_г$ — масса гасителя, можно обеспечить

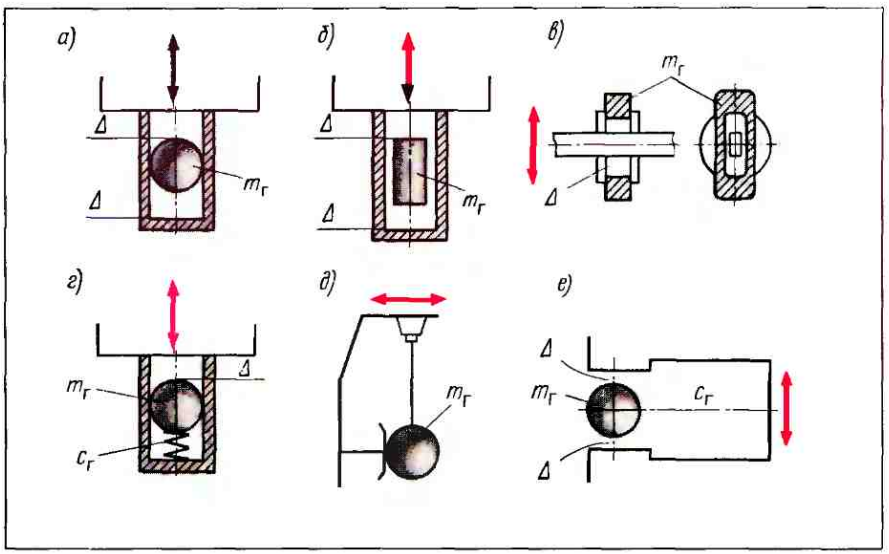


Рис. 10.40

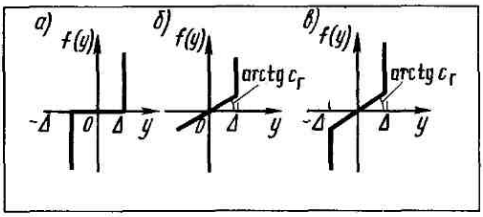


Рис. 10.41

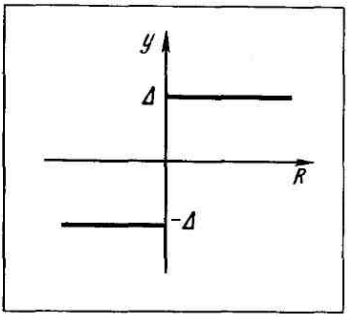


Рис. 10.42

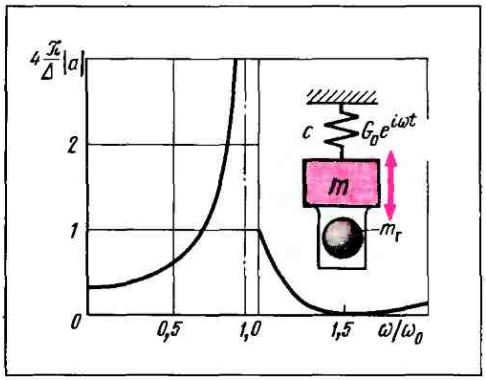


Рис. 10.43

подавление колебаний в широком частотном диапазоне существования режима с поочередными ударами об ограничители. На рис. 10.43 приведена амплитудно-частотная характеристика системы с одной степенью свободы, имеющей частоту $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, снабженной ударным гасителем плавающего типа и возбуждаемой периодической силой постоянной амплитуды. Гашение колебаний достигается лишь при переходе через собственную частоту демпфируемой системы. В дорезонансной области возможна сильная раскачка системы на частоте

$$\omega = \sqrt{c/(m + m_r)}.$$

Таким образом, благодаря существенной неизохронности плавающий ударный гаситель способен настраиваться на частоту возбуждения в широком диапазоне частот, противодействуя колебаниям точки его крепления. Потери энергии, возникающие при ударах, ограничивают сверху этот диапазон. Для повышения указанной границы ударный элемент укрепляют на пружине, что приводит, однако, и к увеличению нижней граничной частоты, которая становится равной $\sqrt{c_r/m_r}$.

§ 10.10 Основные схемы активных виброзащитных систем

В настоящее время разработано большое количество схем активных виброзащитных систем. На рис. 10.44 представлена схема управляемого электродинамического виброгасителя,

в которой изменение параметров колебательной системы достигается в результате управления электронными элементами, что позволяет применять эту схему *для гашения колебательной системы, работающей в переходных режимах*. Здесь колеблющийся агрегат массы M опирается на упругие связи жесткости c и на магнитоэлектрические преобразователи (динамики *5* и *6*). Датчик перемещений *1*, соединенный с колеблющейся массой, передает сигнал $x(t)$ на усилитель *2* и дальше на дифференцирующее устройство *3* и усилитель *4*, питающий магнитоэлектрические преобразователи. Как видно из схемы, эти элементы образуют петлю электромеханической обратной связи. Меняя параметры петли, можно изменять параметры схемы, следовательно, изменять ее резонансные свойства в широких пределах.

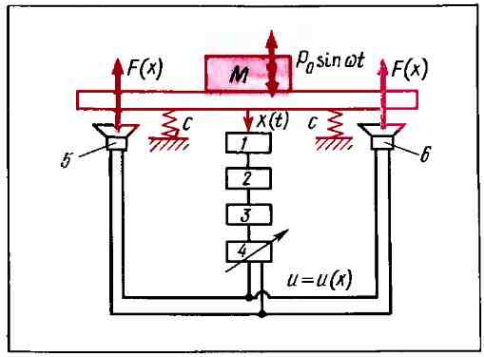


Рис. 10.44

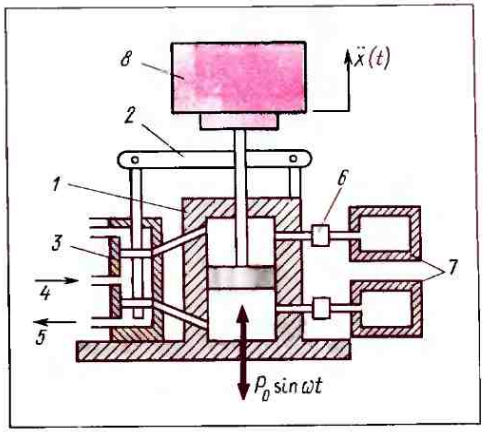


Рис. 10.45

На рис. 10.45 показана схема пневмомеханической виброзащитной системы с пневматическим возбудителем (силовым цилиндром) двойного действия (*1* — пневмомеханический возбудитель; *2* — механическая обратная связь по смещению; *3* — сервоклапан; *4* — входной канал; *5* — выходной канал; *6* — дроссель; *7* — емкость; *8* — изолируемый объект).

Механическая обратная связь по смещению через золотниковое устройство управляет расходом газа, подаваемого внешним источником

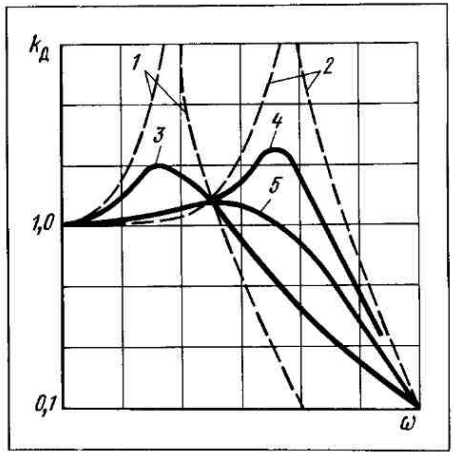


Рис. 10.46

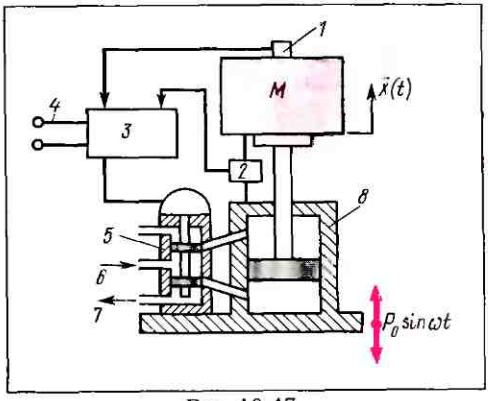


Рис. 10.47

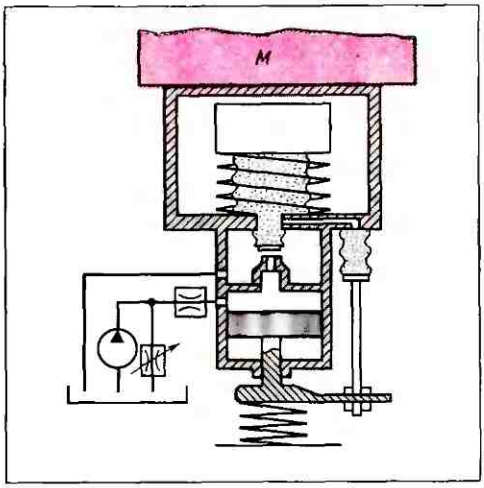


Рис. 10.48

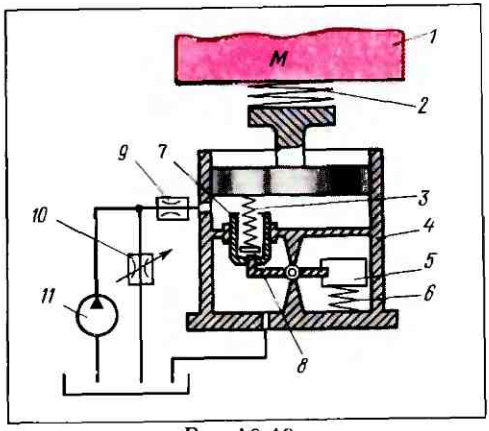


Рис. 10.49

энергии. Вследствие наличия обратной связи по смещению, перемещающей золотник, выходное усилие возбудителя является функцией интеграла относительного смещения. Управление по интегралу от смещения может быть эффективным только на очень низких частотах. Поэтому обратная связь по смещению используется лишь для позиционирования защищаемого объекта. Качество же защиты от вибраций и ударов определяется жесткостью и демпфированием пассивной пневматической системы. Система сравнительно мало чувствительна к изменению величины изолируемой массы.

Зависимость коэффициента $k_д$ по смещению от частоты ω для пневмомеханической виброзащитной системы со вспомогательными емкостями показана на рис. 10.46 в логарифмическом масштабе. Кривая *1* — при нулевом, *2* — бесконечном, *3* — низком, *4* — высоком, *5* — оптимальном демпфировании.

Кривые *3* и *4* получаются при отсутствии дросселирования и при полном перекрытии потока газа между возбудителем и дополнительными емкостями. Оптимальное демпфирование определяется минимизацией резонансного коэффициента динамичности. Довольно большие отклонения величины демпфирования от оптимального значения мало влияют на $k_д$.

На рис. 10.47 приведена схема электрогидравличе-

ской виброзащитной системы с силовым цилиндром двойного действия (*1* — датчик ускорения; *2* — датчик относительного смещения; *3* — сервоусилитель; *4* — электропитание; *5* — сервозолотник; *6* — входной канал; *7* — выходной канал; *8* — гидравлический возбудитель). В этой схеме сигналы от датчиков ускорения и относительного смещения подаются в усилитель с электрическим питанием. Усилитель вырабатывает сигнал, управляющий движением золотника, который регулирует подачу (от внешнего гидравлического источника энергии) и слив малосжимаемой рабочей жидкости из силового цилиндра. Поток рабочей жидкости через золотник регулируется по ускорению, относительной скорости, относительному смещению и интегралу относительного смещения. Коэффициенты усиления по каждому каналу обратной связи настраиваются независимо.

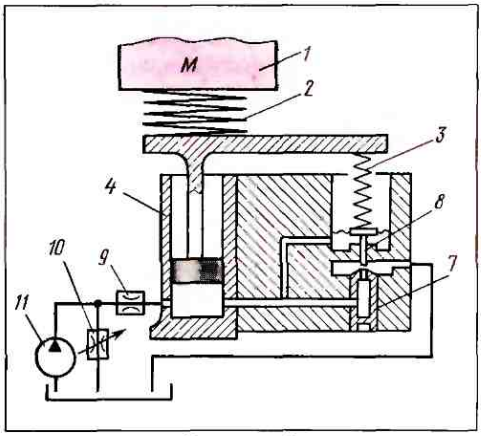


Рис. 10.50

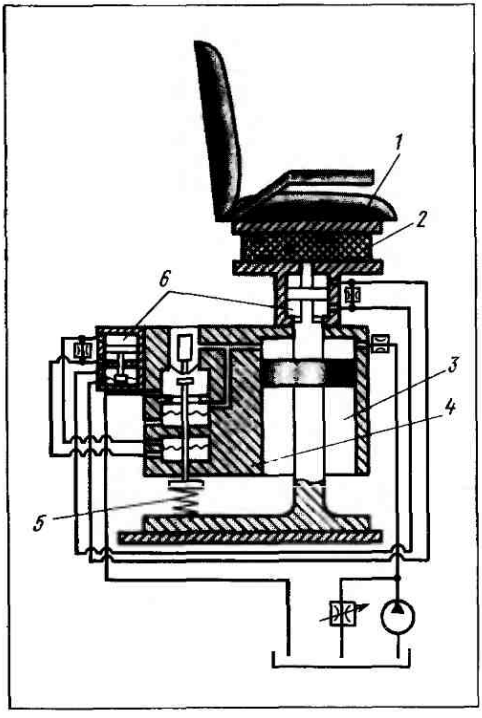


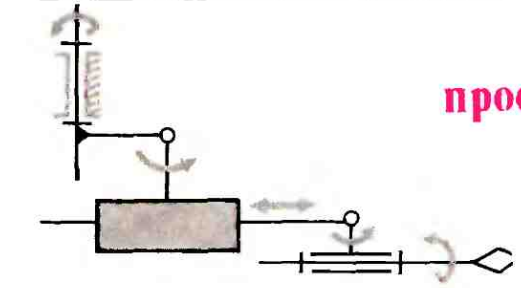
Рис. 10.51

Для устранения амплитудного и фазового искажения, вносимого люфтами в шарнирных соединениях рычага заслонки, а также его деформацией на высоких частотах, в схеме гидравлической виброзащитной системы (рис. 10.48) применяют «гидравлический рычаг». Последний представляет собой соединение двух сильфонов с разными диаметрами, заполненных несжимаемой жидкостью. С целью стабилизации положения изолируемого объекта относительно поршня силовой системы, а также компенсации теплового расширения жидкости в сильфонах применена система автоматического регулятора положения, вырабатывающая сигнал обратной связи по относительному смещению.

Динамическая модель такой виброзащитной системы показана на рис. 10.49 (*1* — изолируемая масса; *2* — упругий элемент; *3* — обратная связь по положению; *4* — силовой гидроцилиндр; *5* — масса; *6* — пружина; *7* — сопло; *8* — заслонка; *9* — постоянный дроссель; *10* — регулируемый дроссель; *11* — питающий насос).

В указанных схемах нижний диапазон эффективности ограничен значением собственной частоты датчика вибрационных перемещений. Устранение этого ограничения достигается в гидравлической виброзащитной системе, динамическая модель которой приведена на рис. 10.50 (описанне позиций см. к рис. 10.49). Силовая система в виде гидроцилиндра здесь выполнена в одном корпусе с управляющей системой. Управляющая система содержит механизм регулирования давления рабочей жидкости, состоящий из датчика в виде чувствительной мембраны, регистрирующей колебания давления в полости силового цилиндра, заслонки, жестко укрепленной на мембране, и образующий вместе с соплом элемент, вырабатывающий управляющий сигнал.

На рис. 10.51 приведена схема гидравлической виброзащитной системы кресла *1* человека-оператора, содержащая упругий элемент *2*, гидроцилиндр *3*, силовой стабилизатор *4* в виде датчика пульсации давления рабочей жидкости и элемента типа сопло — заслонка, обратные связи *5, 6* по положению и по ускорению. Обратная связь по положению обеспечивает стабилизацию кресла относительно фундамента. Обратная связь по ускорению введена для предсказания возмущающего воздействия с опережением, необходимым для компенсации возмущения и повышения эффективности системы в резонансных зонах тела человека-оператора. Система позволяет свести до минимума вертикальные колебания кресла с оператором.



Методы проектирования схем основных видов механизмов



Синтез кинематических схем механизмов с низшими парами. Механизмы роботов-манипуляторов

В 3-й главе было показано, как, располагая структурной схемой механизма и размерами его звеньев, определить функцию положения и передаточную функцию различных точек и звеньев механизма, т. е. определить его кинематические характеристики. При проектировании механизма необходимо решать и обратную задачу: по выбранной структурной схеме и заданной кинематической характеристике определить размеры звеньев проектируемого механизма, при которых они совершали бы требуемые движения. Такая задача называется синтезом кинематической схемы механизма, и методы ее решения излагаются в главах II раздела книги.

Кинематический синтез механизмов с низшими кинематическими парами (рычажных механизмов) содержит целый ряд конкретных задач, среди которых следует указать: синтез по нескольким заданным дискретным положениям звеньев; синтез по заданной аналитически функции положения или по отдельным заданным кинематическим параметрам (средней скорости, отношению средних скоростей при прямом и обратных ходах и т. п.); синтез по заданной траектории точки звена.

Методы кинематического синтеза рычажных механизмов, имеющих одну степень свободы, а также исследование механизмов с незамкнутыми кинематическими цепями и с числом степеней свободы, большим единицы (механизмов манипуляторов и роботов), излагаются в настоящей главе.

§ 11.1 Условие существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах

Важной кинематической характеристикой при синтезе механизма является проворачиваемость его звеньев (наличие в нем одного или двух кривошипов), которая зависит от соотношения длин звеньев [1]. Сперва рассмотрим плоский шарнирный четырехзвенник $ABCD$ (рис. 11.1, *а*) с длинами звеньев a, b, c и d. Для того чтобы звено AB могло стать кривошипом, оно должно при вращении последовательно пройти через крайние левое (AB_1) и правое (AB_3) положения.

Предполагая, что a — длина самого короткого звена, d — самого длинного, и, используя известное соотношение между длинами сторон треугольника (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон), запишем следующие неравенства:

из ΔB_1C_1D

$$d + a < b + c, \tag{11.1}$$

из ΔB_3C_3D

$$d - a < b + c. \tag{11.2}$$

Независимо от соотношения длин b и c неравенство (11.1) всегда обеспечит выполнение неравенства (11.2).

Если же самым длинным является звено BC или CD ($b > c > d$ или $c > b > d$), то неравенство (11.1) только усиливается.

Позиции AB_2 и AB_4 характеризуют крайние положения коромысла CD. Звено BC согласно рис. 11.1, *а* не делает полного оборота относительно стойки AD и потому является шатуном.

Неравенство (11.1) позволяет дать общую формулировку условия проворачиваемости звена плоского шарнирного четырехзвенника, а именно — самое короткое звено шарнирного четырехзвенника может быть кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев. Это положение носит название п р а в и л а Г р а с г о ф а.

Применяя это правило, шарнирные четырехзвенники разбивают на три группы:

механизм будет кривошипно-коромысловым (рис. 11.1, *а*), если размеры его звеньев удовлетворяют правилу, и за стойку принято звено, расположенное рядом с самым коротким;

механизм будет двухкривошипным, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев и за стойку принято самое короткое его звено; это следует из того, что если кривошип при выполнении правила Грасгофа делает полный оборот относительно стойки и шатуна, то и эти звенья совершают полный оборот относительно кривошипа;

механизм будет двухкоромысловым, если размеры его звеньев не удовлетворяют правилу, а также в случае, когда сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин

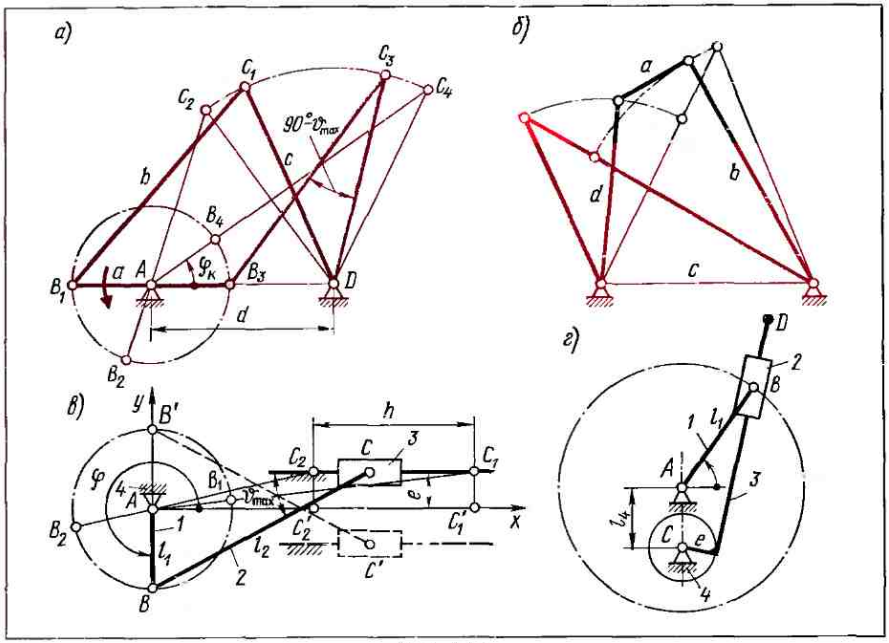


Рис. 11.1

остальных звеньев, но самое короткое его звено является шатуном (рис. 11.1, *б*), и, следовательно, возможность быть ему кривошипом отпадает, потому что оно не является звеном, расположенным рядом со стойкой.

В предельном случае, когда неравенство (11.1) превращается в равенство, все звенья механизма в одном из крайних положений располагаются по одной прямой. В результате появится неопределенность движения выходного звена (оно сможет двигаться либо в одном, либо в другом направлении).

Во внеосном кривошипно-ползунном механизме (рис. 11.1, *в*) звено *1* будет кривошипом, если при вращении пройдет положения $\varphi = 90$ и 270°, что возможно при выполнении условия

$$l_1 < l_2 - |e|,$$

где e — внеосность (или дезаксиал). Штриховой линией изображена схема, когда $e<0$. Если $l_1 > l_2 - |e|$, звено *1* будет коромыслом, и такой механизм правильнее называть коромыслово-ползунным.

В кулисном механизме (рис. 11.1, *г*) звено *1* всегда может быть кривошипом; звено *CD* (кулиса) будет кривошипом, если при вращении пройдет положение $\varphi = 270°$, что возможно при выполнении условия

$$l_1 > l_4 + e,$$

где e — внеосность кулисы; в этом случае имеем механизм с вра-

щающейся кулисой. Если $l_1 < l_4 + e$, то кулиса CD будет коромыслом (механизм с качающейся кулисой). Наиболее распространены схемы кулисных механизмов, в которых внеосность $e = 0$.

§ 11.2 Синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям звеньев

Кривошипно-ползунный механизм. Для центрального кривошипно-ползунного механизма (внеосность $e = 0$, рис. 11.2, *а*) ход ползуна *3* (его максимальное перемещение) равен удвоенной длине кривошипа: $h = 2l_1$. Крайние положения ползуна соответствуют угловым координатам кривошипа $\varphi = 0$ и 180°.

Как уже отмечалось, при проектировании механизмов нужно учитывать весьма важный параметр, характеризующий условие передачи сил и работоспособность механизма, — угол давления ϑ (угол между вектором силы, приложенной к ведомому звену, и вектором скорости точки приложения движущей силы; трение и ускоренное движение масс при этом пока не учитываются). Угол давления не должен превышать допустимого значения: $\vartheta_{max} \leqslant \vartheta_{доп}$. Угол ϑ при передаче усилия на ведомое звено отмечают на схеме механизма в зависимости от того, какое его звено является ведомым. Если им будет ползун *3*, то сила $\bar{F}_{32}$ передается на него с углом давления ϑ_{32}, а если кривошип *1*, то сила $\bar{F}_{12}$ составит угол ϑ_{12} с вектором скорости v_B.

При ведомом кривошипе угол давления ϑ_{12} два раза за цикл (когда шатун и кривошип располагаются по одной прямой) получает максимальное значение, равное 90°. Эти положения кривошип проходит только благодаря инерции вращающихся масс деталей, жестко связанных с кривошипом *1*.

Наибольший угол давления $\vartheta_{32\,max}$ определяют путем исследования функции $\vartheta_{32} = \vartheta_{32}(\varphi)$ на максимум. Для центрального механизма ($e = 0$) максимальное значение угла давления $\vartheta_{32max} = \arcsin l_1/l_2$ будет при $\varphi = 90$ или 270°. Следовательно, чем меньше значение $\lambda_2 = l_2/l_1$, тем меньше размеры механизма (по отношению к длине кривошипа), но больше углы давления. А с возрастанием величины $\vartheta_{32\,max}$, независимо от того, какое звено является ведомым, увеличивается усилие между ползуном и направляющей (между поршнем и стенкой цилиндра поршневой машины). Поэтому, например, для механизмов двигателей внутреннего сгорания отношение λ_2 принято выбирать в пределах $\lambda_2 = 3...5$, что соответствует значению $\vartheta_{32max} = 19...11°$ (см.: *Баранов Г. Г.* Курс теории механизмов и машин. М., 1967).

Во внеосном кривошипно-ползунном механизме (рис. 11.1, *в*) ход ползуна (его максимальное перемещение) из $\triangle AC_1C_1'$ и $\triangle AC_2C_2'$

$$h = l_{C_1C_2} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - e^2} - \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2}, \qquad (11.3)$$

откуда при заданных h, e и $\lambda_2 = l_2/l_1$ можно найти l_1 (например, методом интерполяционного приближения — задаваясь рядом зна-

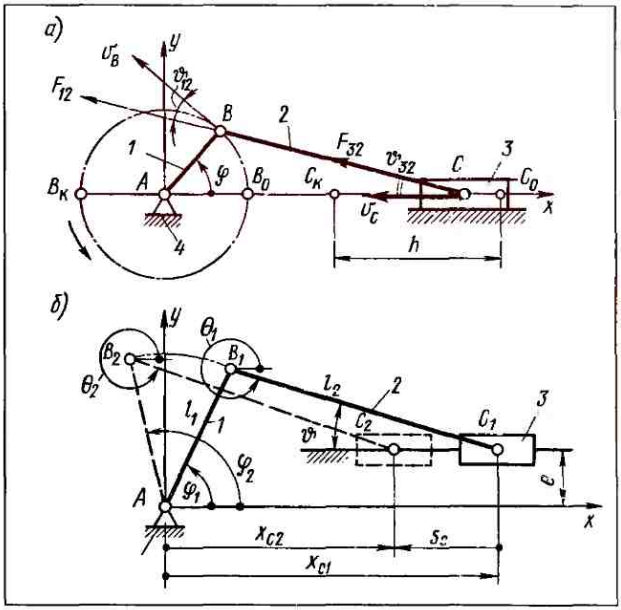


Рис. 11.2

чений l_1, близких к $h/2$, и проверяя равенство левой и правой частей уравнения). Максимальный угол давления ϑ_{32max} при $e>0$ будет в положении, когда $\varphi=270°$; если же $e<0$, то при $\varphi=90°$.

Если заданы два положения кривошипа (рис. 11.2, *б*), определяемые координатами φ_1 и φ_2, перемещение ползуна s_C (с учетом знака: на рис. 11.2, *б* $s_C<0$) и отношения $\lambda_2=l_2/l_1$ и $\lambda_e=e/l_1$, то длины звеньев l_1 и l_2 определяют следующим образом.

Проецируя векторную цепь $\bar{l}_1+\bar{l}_2$ на ось y, имеем для любого положения $l_1\sin\varphi+l_2\sin\theta=e$, откуда угловая координата звена *2* в положениях *1* и *2*:

$$\theta_{1,2}=\arcsin[(\lambda_e-\sin\varphi_{1,2})/\lambda_2]\ .$$

Проецируя ту же цепь на ось x, имеем

$$s_C=x_{C_2}-x_{C_1}=(l_1\cos\varphi_2+l_2\cos\theta_2)-(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\theta_1)\,,$$

откуда, после подстановки $l_2=\lambda_2 l_1$, получим

$$l_1=s_C/[\cos\varphi_2-\cos\varphi_1+\lambda_2(\cos\theta_2-\cos\theta_1)]\ .$$

Затем по величине λ_2 находят l_2.

Кривошипно-коромысловый механизм (рис. 11.3). По заданным длине стойки l_4, длине ведомого коромысла l_3 и его координатам γ_1, γ_2 в крайних положениях неизвестные длины звеньев l_1 и l_2 находят следующим образом. Соединяя прямыми точки C_1 и C_2 с точкой A, имеем

$$l_{AC_1}=l_1+l_2;\quad l_{AC_2}=l_2-l_1\,,$$

откуда

$$l_1 = (l_{AC_1} - l_{AC_2})/2\,; \quad l_2 = (l_{AC_1} + l_{AC_2})/2\,. \qquad (11.4)$$

Максимальный угол давления $\vartheta_{32\,max}$ будет при $\varphi = 0$ или 180°.

Механизм с возвратно-вращающимся (качающимся) цилиндром. Этот механизм, применяемый в гидроприводах, изображен на рис. 11.4, *а* в крайних положениях AB_1C и AB_2C. При переходе из одного крайнего положения в другое поршень *2* перемещается на расстояние h (ход поршня), а ведомое коромысло *1* длиной l_1 поворачивается на нужный угол β. Чтобы полностью использовать цилиндр при перемещении поршня, задаются отношением длины цилиндра $l_3 \approx l_{B1C}$ к ходу поршня h в виде коэффициента $k = l_3/h > 1$, определяемого конструктивно; например, $k = 1{,}3$; 1,4 и т. д.

Приходится также учитывать угол давления ϑ как угол между осью цилиндра, по направлению которой передается усилие $\bar{F}_{12}$, и вектором скорости υ_B точки приложения силы. Этот угол переменный, поэтому при проектировании задаются допускаемым углом давления $\vartheta_{доп}$, с тем чтобы при работе механизма не превысить его.

Синтез *оптимальной по углам давления* схемы такого механизма при заданных l_1, k, β ведут следующим образом (рис. 11.4, *а*). Построив два положения AB_1 и AB_2 ведомого звена *1*, примем ход поршня $h = l_{B1B2}$. Отложив на продолжении прямой B_2B_1 отрезок $l_3 = l_{B1C} = kh$, получим точку C. В крайних положениях механизма, как это видно из $\triangle AB_1N$ и $\triangle ANB_2$, угол давления по абсолютной величине будет наибольшим: $\vartheta_{max} = \beta/2$.

Во всех остальных положениях угол давления будет меньше, поскольку при переходе точки B из положения B_1 в положение B_2 он меняет свой знак и, следовательно, проходит через нулевое значение. Из $\triangle AB_1N$

$$h = 2l_1 \sin(\beta/2)\,.$$

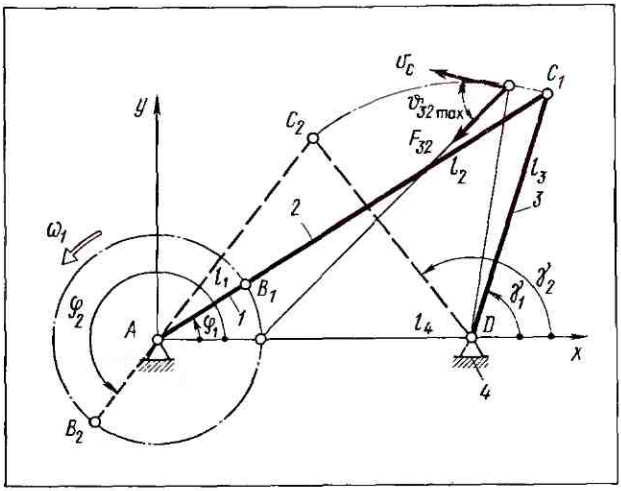


Рис. 11.3

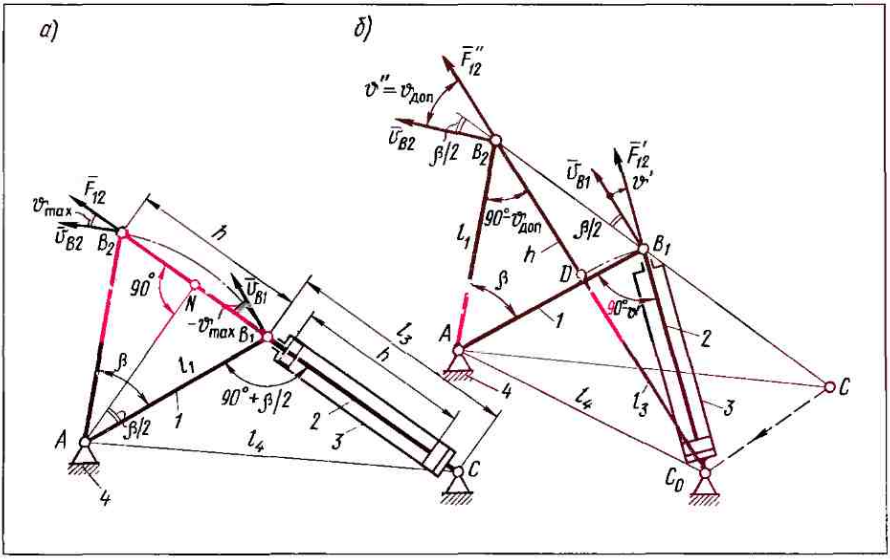


Рис. 11.4

Из $\triangle AB_1C$, по теореме косинусов, длина стойки

$$l_4 = l_{AC} = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 \sin\beta/2}\,.$$

При небольших углах β ϑ_{max} может быть в данной схеме значительно меньше $\vartheta_{доп}$, и этот вариант кинематической схемы можно улучшить с точки зрения габаритов механизма путем уменьшения длины стойки l_4.

Оптимальную по габаритам схему механизма при условии $\vartheta_{max} = \vartheta_{доп}$ получим следующим образом (рис. 11.4, *б*). Пусть заданы l_1, k, β, $\vartheta_{доп}$. Вычертив первый вариант схемы, переместим точку C в новое положение C_0, для которого угол давления в положении *2* механизма увеличится и будет равен допускаемому: $\vartheta'' = \vartheta_{доп}$. При перемещении точки C угол давления в положении *1* также меняется: сперва он уменьшается, а затем может, пройдя через нулевое значение, поменять знак и снова увеличиваться.

Ход поршня теперь будет $h = l_{B2D} < l_{B1B2}$; его можно найти, решая квадратное уравнение, полученное из $\triangle C_0B_1B_2$ по теореме косинусов:

$$(B_1C_0)^2 = (B_1B_2)^2 + (C_0B_2)^2 - 2B_1B_2 \cdot C_0B_2 \cos(\vartheta_{доп} - \beta/2)\,,$$

где $B_1C_0 = kh$, $B_1B_2 = 2l_1\sin(\beta/2)$, $C_0B_2 = kh + h = (k+1)h$.

Решение приводит к формуле

$$h = -b/2 + \sqrt{b^2/4 - c}\,,$$

где

$$b = -4l_1(k+1)\sin(\beta/2)\cos(\vartheta_{доп} - \beta/2)/(2k+1)\,;$$

$$c = [2l_1\sin(\beta/2)]^2/(2k+1)\,.$$

После этого определяют $l_3 = kh$ и длину стойки из $\triangle AC_0B_2$

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + (l_3 + h)^2 - 2l_1(l_3 + h)\sin \vartheta_{доп}}.$$

Данный вариант кинематической схемы является весьма целесообразным для случая, когда нужно преодолевать большую нагрузку на ведомом звене в начале движения, поскольку угол давления $\vartheta' < \vartheta'' = \vartheta_{доп}$, в результате чего увеличивается момент движущей силы F'_{12} относительно оси A и уменьшаются потери на трение в кинематических парах.

Кинематические пары следует подобрать так, чтобы механизм был статически определимым, или же, если это затруднительно, свести к минимуму число избыточных связей. В данном случае механизм будет статически определимым (без избыточных связей), если пара A вращательная, пары B и C сферические, пара поршень – цилиндр цилиндрическая. Тогда, учитывая, что число степеней свободы механизма $W = W_o + W_м = 1 + 2 = 3$ (две местные подвижности — независимые вращения поршня со штоком и цилиндра относительно своих осей), по формуле Малышева получим $q = 0$.

§ 11.3 Синтез четырехзвенных механизмов по трем положениям звеньев

Шарнирный четырехзвенник. Пусть заданы (рис. 11.5, *а*) длина стойки l_4, угловые координаты входного звена *1* в трех положениях $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соответствующие угловые координаты выходного звена *3* $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Нужно найти длины звеньев l_1, l_2, l_3.

Рассмотрим векторный контур $ABCDA$, для которого в любом положении механизма $\bar{l} + \bar{l}_2 = \bar{l}_4 + \bar{l}_3$. Проецируя этот контур на координатные оси x и y, имеем

$$l_1\cos\varphi + l_2\cos 0 = l_4 + l_3\cos\gamma; \qquad (11.5)$$

$$l_1\sin\varphi + l_2\sin\theta = l_3\sin\gamma. \qquad (11.6)$$

Исключим угол θ, решив уравнения (11.5) и (11.6) относительно слагаемых, содержащих θ, возведя полученные равенства в квадрат и сложив их:

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4\cos\gamma - 2l_1l_4\cos\varphi - 2l_1l_3\cos(\varphi - \gamma).$$

После деления на $2l_3l_4$ и замены текущих значений углов φ и γ на заданные φ_i и γ_i (индекс $i = 1, 2, 3$) получим систему трех линейных уравнений

$$\frac{l_1}{l_4}\cos(\varphi_i - \gamma_i) + \frac{l_1}{l_3}\cos\varphi_i + \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} = \cos\gamma_i,$$

или

$$p_1\cos(\varphi_i - \gamma_i) + p_2\cos\varphi_i + p_3 = \cos\gamma_i,\ (i = 1,\ 2,\ 3), \quad (11.7)$$

где неизвестными являются безразмерные параметры

$$p_1 = \frac{l_1}{l_4};\ p_2 = \frac{l_1}{l_3};\ p_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4}. \quad (11.8)$$

Из системы (11.7) находим p_1, p_2, p_3, а затем согласно (11.8) находим искомые длины звеньев по формулам

$$l_1 = p_1l_4;\ l_3 = l_1/p_2;\ l_2 = \sqrt{2l_3l_4p_3 + l_1^2 + l_3^2 + l_4^2}.$$

Задачу синтеза шарнирного четырехзвенника по трем положениям выходного звена и соответствующим углам поворота входного звена решают методом обращения движения. В этом случае заданы длины звеньев l_4, l_3, координаты выходного звена *3* в трех положениях γ_1, γ_2, γ_3 и углы поворота входного звена $(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $(\varphi_3 - \varphi_1)$. Требуется найти длины звеньев l_1, l_2 и начальную угловую координату (в положении *1*) φ_1.

Положение шарнира B по заданным условиям находят путем сообщения всему механизму относительно центра A угловой скорости $(-\omega_1)$. В результате звено AB в системе координат Axy станет неподвижным, а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка AD_1 (рис. 11.5, *б*). Для 2-го и 3-го положений механизма угловыми координатами стойки по отношению к оси абсцисс будут $-(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $-(\varphi_3 - \varphi_1)$. Положение шарнира C является определенным по отношению к стойке и найдется путем построения заданных углов γ_1, γ_2, γ_3 (точки C_1, C_2, C_3).

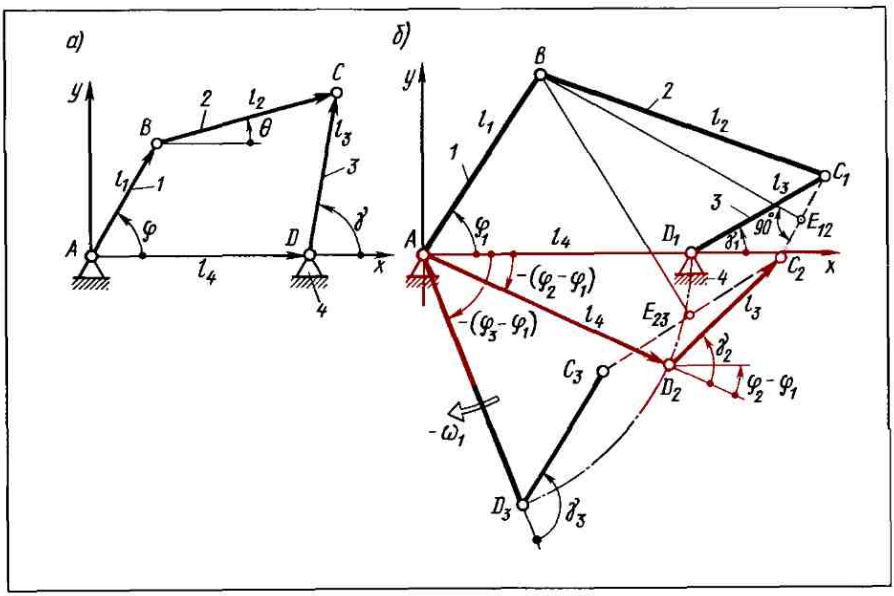


Рис. 11.5

Длина шатуна BC для трех заданных положений одна и та же ($BC = BC_i$, $i = 1, 2, 3$), поэтому точки C_i должны находиться на окружности, описанной из центра B. Следовательно, положение неизвестной точки B найдется, если точки C_i соединить двумя прямыми C_1C_2 и C_2C_3, провести через их середины E_{12}, E_{23} перпендикуляры и найти точку пересечения последних. При аналитическом решении для получения формул координат x_i, y_i точек C_i кинематическая цепь AD_iC_i представлена в виде суммы двух векторов $\bar{l}_4$ и $\bar{l}_3$. Координаты точек C_i определяются проекциями указанной векторной цепи на координатные оси:

$$x_i = l_4\cos(\varphi_i - \varphi_1) + l_3\cos[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)];$$
$$y_i = -l_4\sin(\varphi_i - \varphi_1) + l_3\sin[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)].$$

Координаты точки B найдем из системы уравнений окружности, описанной из центра B радиусом l_2:

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2;\ i = 1, 2, 3. \qquad (11.9)$$

Система (11.9) трех уравнений с тремя неизвестными x_B, y_B и l_2 после несложных преобразований для исключения x_B^2 и y_B^2 сводится к линейной.

По координатам x_B и y_B определяют искомые параметры кинематической схемы механизма:

длину входного звена *1*

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}; \qquad (11.10)$$

длину шатуна BC

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2} \qquad (11.11)$$

(как расстояние между точками $B(x_B, y_B)$ и $C_1(x_1, y_1)$;

начальную угловую координату входного звена

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}(y_B/x_B). \qquad (11.12)$$

Кривошипно-ползунный механизм. Проектирование схемы данного механизма по трем положениям входного и выходного звеньев производят в системе координат Axy (рис. 11.6) аналогично синтезу четырехшарнирного механизма. Задача сводится к определению неизвестных длин звеньев l_1 и l_2, а также начальной угловой координаты φ_1 звена *1* при заданных внеосности (эксцентриситете) e, трех линейных координатах точки C ползуна x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} и углах поворота звена *1* по отношению к его начальному (первому) положению $\varphi_2 - \varphi_1$ и $\varphi_3 - \varphi_1$.

Чтобы найти положение шарнира B по этим условиям, применяют метод обращения движения, сообщая всему механизму относительно центра A угловую скорость $(-\omega_1)$. В результате звено AB станет неподвижным, а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка и, следовательно, ось направляющей ползуна. При наличии эксцентриситета e эта ось во всех положениях касается окружности радиусом, равным e.

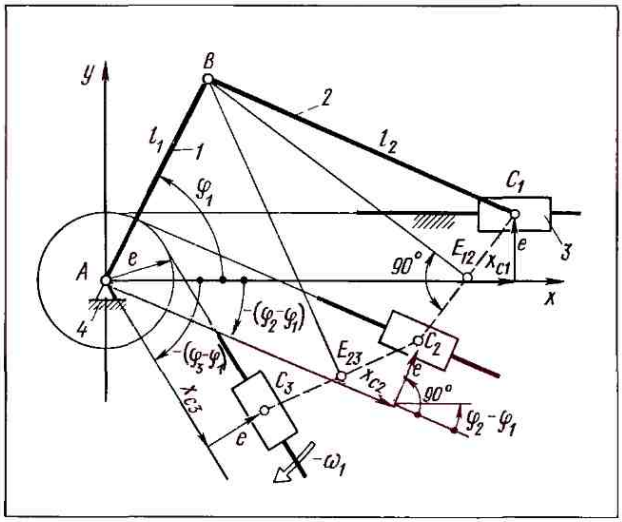


Рис. 11.6

Графически центр шарнира B находят как точку пересечения перпендикуляров BE_{12} и BE_{23} к серединам отрезков C_1C_2 и C_2C_3.

При аналитическом решении определяют координаты x_i и y_i точек ползуна C_i (индекс $i = 1, 2, 3$) из уравнений проекций на координатные оси суммы векторов $\bar{x}_{Ci} + \bar{e}$:

$$x_i = x_{Ci}\cos[-(\varphi_i - \varphi_1)] + e\cos[90° - (\varphi_i - \varphi_1)];$$
$$y_i = x_{Ci}\sin[-(\varphi_i - \varphi_1)] + e\sin[90° - (\varphi_i - \varphi_1)],$$

или после преобразования

$$x_i = x_{Ci}\cos(\varphi_i - \varphi_1) + e\sin(\varphi_i - \varphi_1);$$

$$y_i = -x_{Ci}\sin(\varphi_i - \varphi_1) + e\cos(\varphi_i - \varphi_1).$$

Дальнейшее решение аналогично решению четырехшарнирного механизма и проводится по формулам (11.9)—(11.12).

§ 11.4 Синтез механизмов по средней скорости звена и по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена

Кривошипно-коромысловый механизм. Даны длина выходного звена l_3 и координаты γ_1 и γ_2 его крайних положений (рис. 11.7). Разность $\gamma_2 - \gamma_1 = \beta$ является угловым ходом (размахом) выходного звена. Кривошип AB вращается равномерно, а его центр вращения находится в некоторой, пока неизвестной, точке A на оси x.

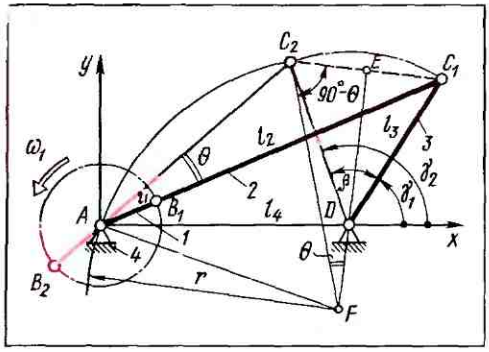


Рис. 11.7

Движение коромысла из положения *1* в положение *2* примем за прямой ход, а движение в противоположном направлении — за обратный ход.

Требуется спроектировать кинематическую схему механизма, для которого отношение средних угловых скоростей выходного звена при обратном и прямом ходах равно некоторой заданной величине $K_\omega = \omega_{обр}/\omega_{пр}$ (коэффициент изменения средней скорости выходного звена).

На рис. 11.7 изображены два крайних положения механизма, в каждом из которых кривошип и шатун находятся на одной прямой; угол между этими двумя прямыми AC_1 и AC_2 обозначен буквой θ. Из чертежа следует, что за время прямого хода $t_{пр}$ кривошип повернется на угол $(180° + \theta)$, а за время обратного хода $t_{обр}$ — на угол $(180° - \theta)$. Следовательно, при равномерном вращении кривошипа

$$K_\omega = \frac{\beta/t_{обр}}{\beta/t_{пр}} = \frac{180° + \theta}{180° - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180° \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1}.$$

Если угловой ход β поделить прямой DE пополам и через точку C_2 провести прямую C_2F, составляющую угол θ с направлением DE, то она пересечется с последним в некоторой точке F. Окружность радиусом $l_{FC2} = r$ будет геометрическим местом искомых центров вращения кривошипа A, поскольку в любой точке этой окружности вписанный $\angle C_1AC_2$ равен половине центрального $\angle C_1FC_2 = 2\theta$, опирающегося на ту же дугу C_1C_2, и, следовательно, равен θ. Точка A пересечения указанной окружности с осью абсцисс согласно исходным данным задачи будет центром вращения кривошипа. После этого задача сводится к синтезу механизма по двум крайним положениям звена *3* (см. § 11.2); длины кривошипа l_1 и шатуна l_2 определяются по формулам (11.4).

Если в спроектированном механизме максимальный угол давления больше допускаемого, следует выбрать другое положение центра вращения кривошипа на окружности радиусом r (выше точки A).

Кривошипно-ползунный механизм. При проектировании машин иногда задают среднюю скорость ползуна (поршня) $v_{ср}$ (м/с). Для центрального кривошипно-ползунного механизма (рис. 11.2, *а*)

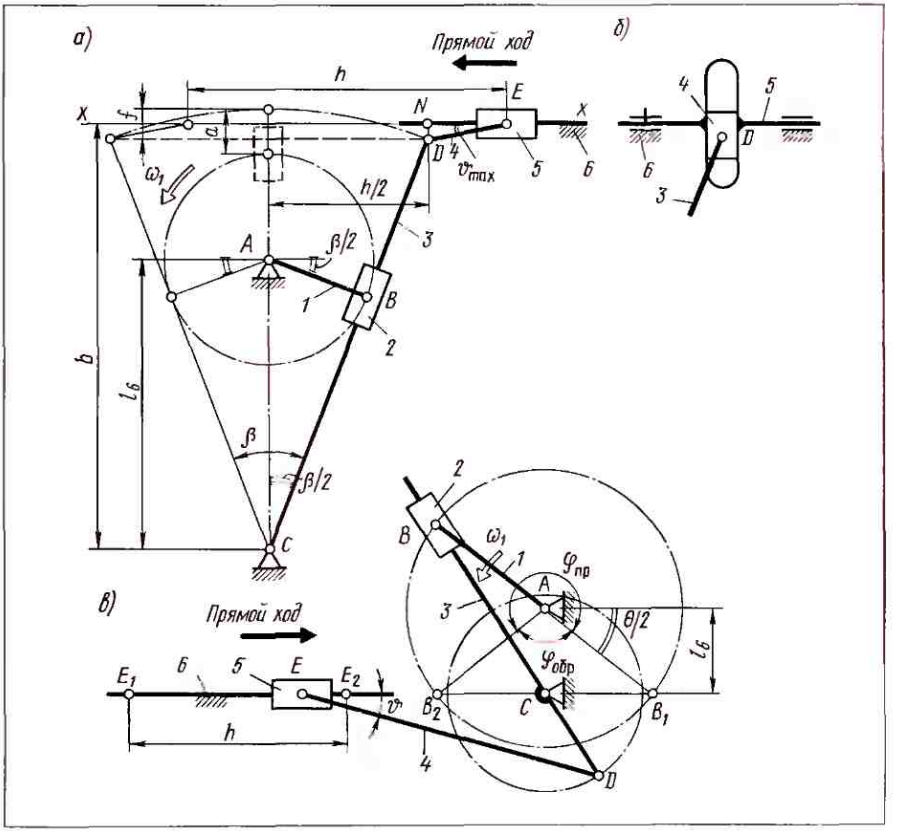


Рис. 11.8

двойной ход ползуна (поршня), соответствующий одному обороту кривошипа, $2h = 4l_1$.

Если частота вращения (число оборотов в секунду) кривошипного вала равна $n(1/с)$, то

$$v_{ср} = 2hn = 4l_1 n,$$

откуда длина кривошипа (м) $l_1 = v_{ср}/(4n)$.

Затем по заданной величине $\lambda_2 = l_2/l_1$ можно найти и длину шатуна l_2.

Механизм с качающейся кулисой. Шестизвенный кулисный механизм (рис. 11.8, *а*) преобразует вращательное движение кривошипа *1* в возвратно-поступательное движение ползуна *5*, при этом средняя скорость $v_{обр}$ ползуна при обратном ходе больше в K_v раз средней скорости $v_{пр}$ прямого хода. Исходными данными обычно служат ход h выходного звена *5* и коэффициент изменения его средней скорости $K_v = v_{обр}/v_{пр}$.

Например, в строгальных и долбежных станках изделие обра-

батывается в одном направлении с заданной скоростью резания, а холостой (обратный) ход режущего инструмента осуществляется с большей средней скоростью; в этом случае $K_v > 1$.

Коэффициент K_v и угол β размаха (угловой ход) кулисы связаны (при $\omega_1 = \text{const}$) зависимостью

$$K_v = \frac{h/t_{обр}}{h/t_{пр}} = \frac{180^\circ + \beta}{180^\circ - \beta},$$

откуда

$$\beta = 180^\circ \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Длину кулисы находят из рассмотрения ее крайнего положения по формуле

$$l_3 = l_{CD} = h/[2\sin(\beta/2)].$$

В среднем (вертикальном) положении кулисы CD длины звеньев l_3, $l_6 = l_{AC}$ (стойки) и $l_1 = l_{AB}$ связаны соотношением

$$l_3 = l_6 + l_1 + a, \qquad (11.13)$$

где размер a выбирают конструктивно с целью наиболее полного использования длины кулисы. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ABC$

$$l_1 = l_6 \sin(\beta/2). \qquad (11.14)$$

Подстановка значения l_1 в выражение (11.13) дает длину стойки (межосевое расстояние)

$$l_6 = (l_3 - a)/[1 + \sin(\beta/2)].$$

После вычисления l_6 можно по формуле (11.14) найти l_1; для механизмов данного типа обычно $l_6/l_1 \geqslant 2$.

При ведущем кривошипе угол давления при передаче усилия от кулисного камня (ползуна) *2* к кулисе *3* $\vartheta_{32} = 0$, что является достоинством кулисных механизмов. Для обеспечения наименьших углов давления при передаче усилия от звена *4* к ведомому ползуну *5* целесообразно положение оси *xx* выбрать так, чтобы она делила стрелку сегмента f пополам. Тогда из прямоугольного $\triangle NDE$ длина звена *4*

$$l_4 = l_{DE} \geqslant f/(2\sin \vartheta_{доп}),$$

где $f = l_3 - l_3\cos(\beta/2)$; в этом случае будет обеспечено соотношение $\vartheta_{max} \leqslant \vartheta_{доп}$.

Расстояние между осью вращения кулисы и осью направляющей ползуна *5* определяют по формуле

$$b = l_3 - f/2.$$

Применяют и другой вариант двухповодковой группы звеньев *4*, *5* с двумя поступательными и одной вращательной парами (рис. 11.8, *б*). По углам давления этот вариант лучше предыдущего: $\vartheta_{54} = 0$.

Механизм с вращающейся кулисой. Схема наиболее часто встречающегося варианта такого механизма изображена на рис. 11.8, *в*. Исходные данные: длина $l_1 = l_{AB}$ кривошипа, ход h ползуна *5* и коэффициент изменения его средней скорости $K_v = v_{обр}/v_{пр} > 1$.

Прямой ход ползуна *5* совершается при повороте кривошипа *1* на угол $\varphi_{пр} = 180° + \theta$, обратный — при повороте кривошипа на угол $\varphi_{обр} = 180° - \theta$. Поэтому при $\omega_1 = \text{const}$

$$K_v = \frac{h/t_{обр}}{h/t_{пр}} = \frac{180° + \theta}{180° - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180° \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Расстояние $l_6 = l_{AC}$ между осями вращения кривошипа *1* и кулисы *3* из $\triangle AB_1C$ определяется по формуле

$$l_6 = l_1 \sin(\theta/2);$$

обычно для механизмов данного типа $l_1/l_6 \geqslant 2$.

Крайние положения точки E ползуна (E_1 и E_2) определяются положениями точки B (B_1 и B_2), когда направления кулисы *3* и шатуна *4* совпадают, поэтому длина кривошипа CD:

$$l_{CD} = h/2.$$

Длина шатуна *4* должна быть такой, чтобы максимальная величина угла давления $\vartheta = \vartheta_{54}$ не превосходила допускаемого значения $\vartheta_{доп}$, поэтому

$$l_4 \geqslant h/(2\sin\vartheta_{доп}).$$

Удлинять шатун *4* сверх полученного предела не следует, так как это увеличит габариты всего механизма. Для получения наименьших усилий в кулисной паре *2-3* (камень — кулиса) желательно выбрать длину кривошипа *1* как можно большей, однако следует учитывать, что при этом возрастают габариты механизма.

Методика решения более сложных задач синтеза рычажных механизмов по заданной непрерывной функции положения и по заданной траектории в данном учебнике не рассматривается; см. об этом в [5].

§ 11.5 Манипуляторы, их устройство и область применения

М а н и п у л я т о р о м называют техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций рук человека. Основной механизм манипулятора — пространственный рычажный механизм с незамкнутой кинематической цепью и несколькими степенями свободы. С помощью манипулято-

ров решают ряд задач в различных областях науки и техники, связанных с работой в опасных или вредных для человека зонах, а также при выполнении трудоемких и монотонных работ. Манипуляторы применяют в кузнечно-прессовом и литейном производствах (например, для укладки тяжелых заготовок на штамп, обслуживания пескодувных машин), в буровых машинах угольной промышленности, для сборки часов, для выполнения таких технологических операций в машиностроении, как сварка, сборка, окраска изделий и т. д.

Различают механические манипуляторы с ручным и автоматическим управлением.

В манипуляторах с ручным управлением осуществляется копирование движений и усилий руки оператора (копирующие манипуляторы), причем в ряде случаев с увеличением перемещений и усилий на исполнительном механизме.

Механические копирующие манипуляторы состоят из двух симметрично расположенных механизмов — управляющего и исполнительного (другими словами: задающей и исполнительной рук), связь между которыми осуществляется различными механическими передачами.

Обслуживаемое манипулятором рабочее пространство по сравнению с рабочим пространством руки человека-оператора может быть увеличено путем применения сферического шарнира, через который проходит труба с размещенными в ней силовыми связями; эта труба выполняет роль неравноплечего рычага, копирующего движения управляющей рукоятки, но в увеличенном размере. Если нужно передать движение и усилие оператора через герметичную стенку (без проемов и уплотнений), применяют торцовые и цилиндрические магнитные муфты.

Во многих случаях работой копирующего манипулятора нужно управлять на значительном расстоянии от оператора; в таких дистанционно-управляемых манипуляторах применяют следящие системы, обеспечивающие передачу движения и сил.

В манипуляторах с автоматическим управлением звенья исполнительного механизма приводятся в движение от приводов по определенной программе.

Приводы в манипуляторах могут быть механические, электрические, гидравлические, пневматические и комбинированные. Гидропривод позволяет манипулировать наиболее значительными массами (50 кг и более со скоростью до 1 м/с) [3].

Манипуляторы с автоматическим управлением, применяемые в машинах-автоматах для выполнения различных транспортных операций (загрузка, перемещение, выгрузка изделий и т. п.) и работающие по жесткой (неизменяемой) программе, носят название *автооператоров*.

Манипуляторы с автоматическим управлением и изменяемой программой, используемые в производстве для многократного выполнения определенных технологических и транспортных операций, называют *промышленными роботами* (ПР). ПР от-

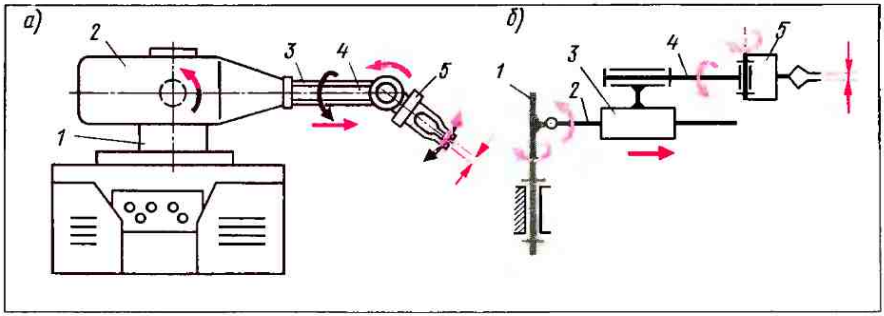


Рис. 11.9

личаются от обычных машин-автоматов тем, что благодаря наличию незамкнутой кинематической цепи основного механизма с несколькими степенями свободы они обладают широким диапазоном различных пространственных движений рабочих органов и, как следствие, возможностью быстрой переналадки на выполнение другой программы.

Конструктивные схемы манипуляторов ПР весьма разнообразны. Так, на рис. 11.9, *а* изображен общий вид одного из ПР; его кинематическая схема дана на рис. 11.9, *б*; с учетом движения губок схвата у данного ПР шесть степеней свободы. На рис. 11.10 представлена кинематическая схема ПР «Универсал 15» с пятью основными степенями свободы (без учета движения губок схвата). На рис. 11.11 дана кинематическая схема промышленного робота «М 901» с тремя основными степенями свободы, а на рис. 11.12 — модель механизма манипулятора ПР с шестью степенями свободы, включая движение губок схвата. Основные элементы такого манипулятора: неподвижная *станина 0*, вращающийся стол *1*, *«рука»*, состоящая из звеньев *2, 3, 4*, *«кисть» 5* и *схват* с губками (*«пальцами»*) *6*.

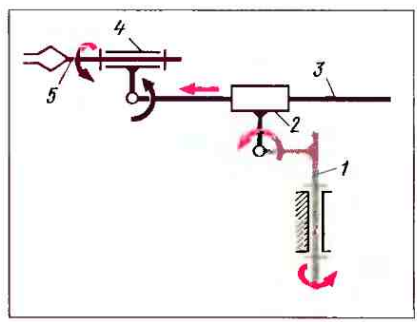


Рис. 11.10

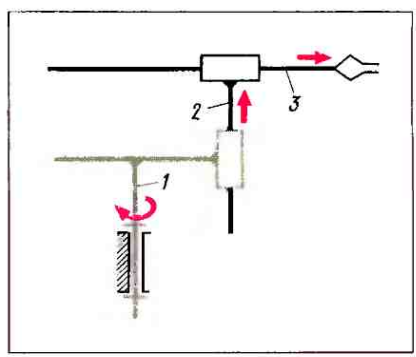


Рис. 11.11

Каждая модель ПР, как правило, имеет несколько схватов разной конструкции в зависимости от формы и размеров объекта манипулирования. Применяют схваты в виде клещевых захватов, сдвигающихся губок, пневмоприсосов,

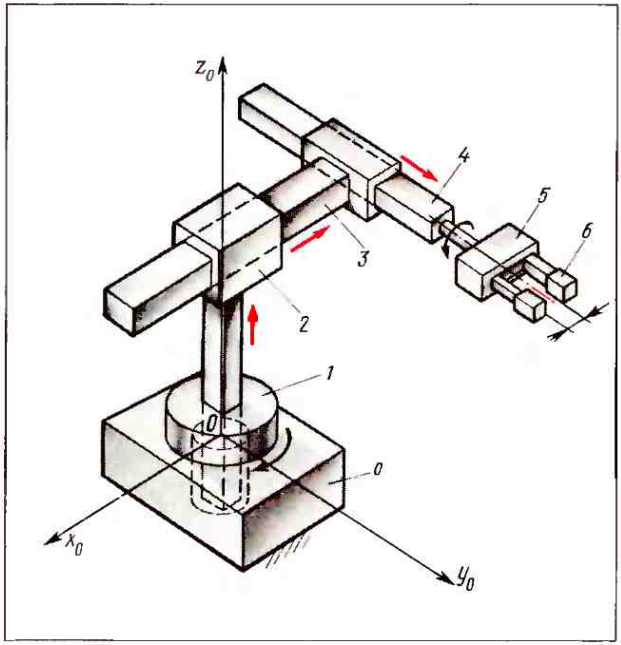


Рис. 11.12

электромагнитов и др. В тех случаях, когда требуется информация о контакте с объектом манипулирования, на схвате устанавливают соответствующие датчики.

Преимущественное применение в основных рычажных механизмах манипуляторов ПР получили кинематические цепи с однодвижными поступательными и вращательными парами. Сферические шарниры затрудняют подвод движений от приводов, и по этой причине заменяются кинематическими соединениями с тремя вращательными парами.

Различают три класса или поколения ПР с автоматическим управлением. К первому поколению относят те из них, которые работают по жесткой программе. Такие роботы-манипуляторы находят все более широкое применение в машиностроении и выпускаются серийно в нашей стране и за рубежом.

Ко второму поколению относят роботы-манипуляторы, в системе управления которых жесткая программа сочетается с элементами адаптации (приспособления) к неизвестным или меняющимся условиям внешней среды (например, поиск предмета в заданной зоне); информацию о внешней среде получают с помощью соответствующих датчиков.

Роботы-манипуляторы третьего поколения — с элементами искусственного интеллекта; их система управления сама формирует и затем реализует программу в зависимости от поставленной цели,

решая логические задачи и самообучаясь; это — кибернетические устройства.

Кинематический анализ пространственных рычажных механизмов манипуляторов при их исследовании и проектировании наиболее целесообразно проводить матричным методом преобразования координат, методика решения таких задач была изложена в гл. 3.

§ 11.6 Технические показатели манипуляторов

Работоспособность манипуляторов и промышленных роботов характеризуется рядом технических показателей, к которым прежде всего относят форму и размеры рабочей зоны, маневренность манипулятора, угол и коэффициент сервиса, число степеней свободы основного механизма.

Незамкнутая кинематическая цепь манипулятора позволяет схвату занимать различные положения в некотором объеме. Рабочим объемом манипулятора называют объем, ограниченный поверхностью, огибающей все возможные положения схвата. Так, например, для манипулятора, схема которого изображена на рис. 11.13, *а*, рабочий объем — сфера радиусом r_1, равным сумме длин звеньев *1, 2, 3*. Рабочий объем характеризует наибольшие габариты манипулятора.

Для обхода препятствий и выполнения сложных операций с объектом манипулирования важное значение имеет возможность различного подхода кинематической цепи механизма к заданной точке рабочего объема, характеризуемая маневренностью манипулятора, которая определяется как число степеней свободы механизма при неподвижном (фиксированном) положении схвата, подведенного к этой точке. Маневренность манипулятора зависит не только от вида и числа кинематических пар, но и от их расположения. Так, манипулятор, изображенный на рис. 11.13, *а*, имеет маневренность, равную единице; в этом случае при неподвижном схвате по формуле Малышева (при $q = 0$) число степеней свободы $W = 6n - \sum_{i=1}^{5}(6 - i)p_i = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1$ — это групповая подвижность, означающая возможность совместного вращения звеньев *1, 2* вокруг оси *AC*, проходящей через центры сферических пар. Маневренность, равная единице, в данном случае означает, что к заданной точке *E* в заданном направлении *CE* схват может подойти при различных положениях остальных звеньев *1, 2*, геометрическим местом которых будут конические поверхности с вершинами в точках *A* и *C* и образующими *AB* и *CB*.

Если пары *A* и *B* поменять местами (рис. 11.13, *б*), то число степеней свободы по формуле Малышева останется прежним: $W = 1$, но это — местная подвижность, означающая возможность вращения звена *2* вокруг оси *BC*, а маневренность будет равна

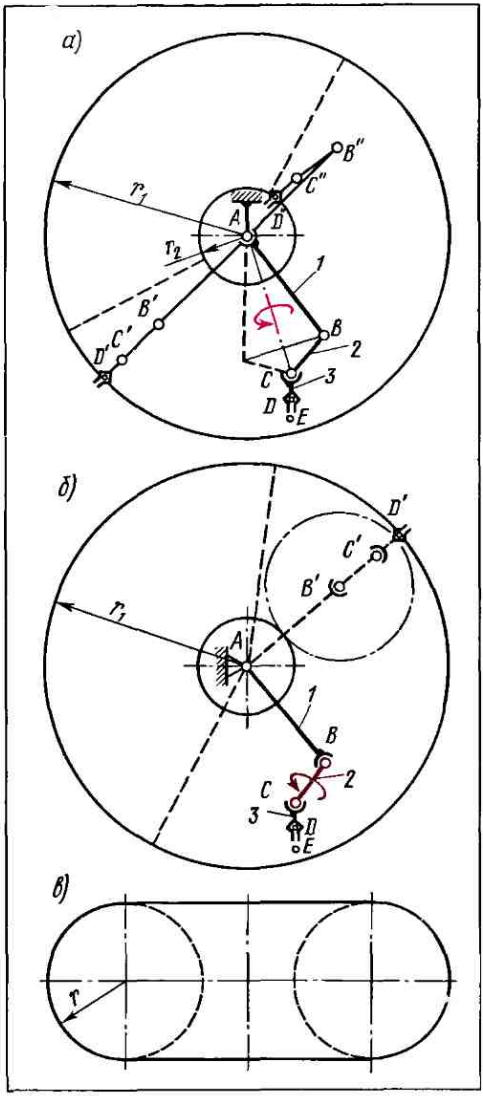


Рис. 11.13

нулю, поскольку в данном случае схват может подойти к заданной точке E рабочего объема в заданном направлении CE только при одном единственном положении звеньев *1, 2*.

Чем больше маневренность, тем больше возможностей для выполнения сложных операций с объектом манипулирования кратчайшим, наиболее рациональным путем.

Часть рабочего объема, в котором можно выполнять операции с объектом манипулирования, называют зоной обслуживания или рабочей зоной. Так, для манипулятора, изображенного на рис. 11.13, *а*, максимально возможная рабочая зона — пространство между сферами радиусом $r_1 = AD'$ и радиусом $r_2 = AD''$, а в конкретном случае зона обслуживания лишь часть такого пространства (штриховая линия на рис. 11.13, *а*); для манипулятора, изображенного на рис. 11.13, *б*, максимально возможная рабочая зона — тор (кольцо кругового сечения) с размерами $r_1 = AD'$ и $r = B'D'$ (рис. 11.13, *в*), а в конкретном случае рабочая зона — часть такого тора (штриховая линия на рис. 11.13, б). Манипулятор с тремя поступательными парами (рис. 11.14, *а*) имеет рабочую зону в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры которого a, b, c определяются максимальными перемещениями (ходами) соответствующих звеньев в своих направляющих: звена *2* вдоль оси y, звена *3* вдоль оси x и звена *1* относительно оси z. Для манипулятора с одной вращательной и двумя поступательными парами (рис. 11.14, *б*) максимально возможная рабочая зона — пространство в виде полого цилиндра, для которого разность радиусов $r_2 - r_1$ определяется мак-

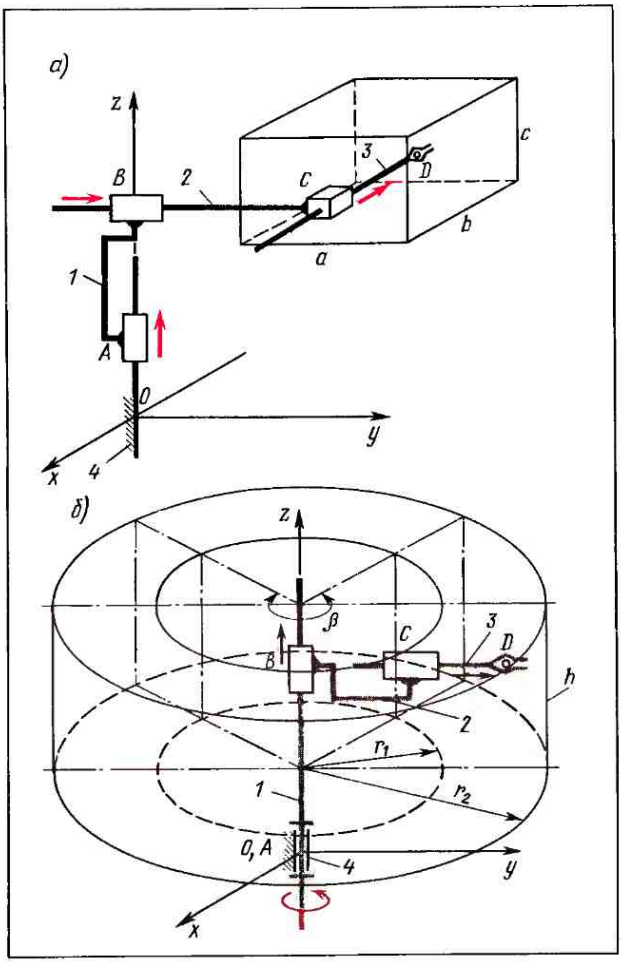


Рис. 11.14

симальным перемещением звена *3* относительно звена *2*, а высота h — максимальным перемещением звена *2* относительно звена *1*; в каком-либо конкретном случае зона обслуживания — часть этого пространства в пределах угла β (штрихпунктирные линии на рис. 11.14, *б*).

Для определения размеров звеньев манипулятора по заданной рабочей зоне при выбранной структурной схеме необходимо исследовать его функцию положения, применяя описанный выше матричный метод преобразования координат. Так, например, для манипулятора с тремя степенями свободы, изображенного на рис. 11.15, функцией положения точки D схвата будет зависимость ее радиуса-вектора $\bar{p}_D$ от обобщенных координат и постоян-

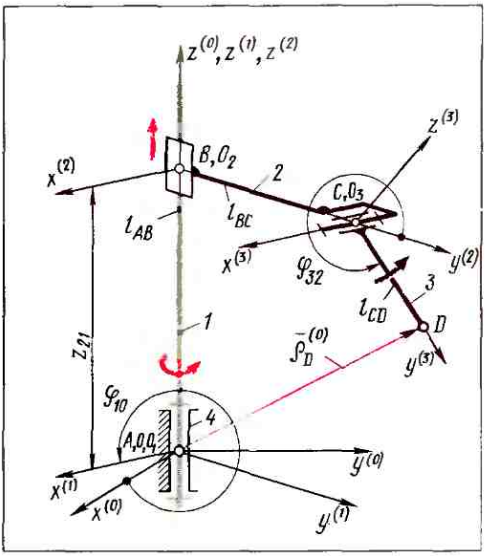


Рис. 11.15

ных длин звеньев l_{BC} и l_{CD}. Данный механизм с незамкнутой кинематической цепью — статически определимый, без избыточных связей ($q=0$), поскольку он собирается без натягов. В механизме три одноподвижные пары: две из них вращательные (A, C) и одна поступательная (B).

Обобщенных координат три: φ_{10} — угол поворота звена *1* относительно стойки *4*; z_{21} — линейное перемещение звена *2* относительно звена *1*; φ_{32} — угол поворота звена *3* относительно звена *2*. Число степеней свободы $W=3$ подтверждается и по формуле Малышева:

$$W=6n-\left[\sum_{i=1}^{5}(6-i)p_i-q\right]=6\cdot 3-5\cdot 3=3.$$

Система координат $O_1x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ связана со звеном *1*, вращающимся вокруг оси $z^{(1)}$: система $O_2x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ связана со звеном *2*, движущимся прямолинейно относительно звена *1*; система $O_3x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ связана со звеном *3*, вращающимся вокруг оси $x^{(3)}$. Оси $z^{(0)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ — совпадают, оси $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ — параллельны.

Функция положения $\bar{\rho}_D^{(0)}=\bar{\rho}_D^{(0)}(\varphi_{10}, z_{21}, \varphi_{32})$ в матричной форме имеет такой вид:

$$\rho_D^{(0)}=\mathbf{T}_{10}\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{32}\rho_D^{(3)}, \qquad (11.15)$$

где

$$\rho_D^{(0)}=\begin{bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{T}_{10}=\begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{T}_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & l_{BC} \\ 0 & \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \rho_D^{(3)}=\begin{bmatrix} 0 \\ l_{CD} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Четвертая строка (0001) в матрицах $\mathbf{T}_{10}$, $\mathbf{T}_{21}$, $\mathbf{T}_{32}$ и единица в столбцовых матрицах приводят к тождественному преобразованию $1\equiv 1$ и добавлены для того, чтобы матрицы стали квадратными и их

можно было бы перемножать. Матрицы умножаются по известному правилу: строка на столбец. Последовательное умножение матриц в (11.15) приводит к равенству

$$\begin{bmatrix} x_D^{(0)} \\ y_D^{(0)} \\ z_D^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{BC}\sin\varphi_{10} - l_{CD}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{32} \\ l_{BC}\cos\varphi_{10} + l_{CD}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{32} \\ z_{21} + l_{CD}\sin\varphi_{32} \\ 1 \end{bmatrix},$$

и, следовательно, искомые координаты точки D в неподвижной системе $Ox^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} x_D^{(0)} &= -l_{BC}\sin\varphi_{10} - l_{CD}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{32}; \\ y_D^{(0)} &= l_{BC}\cos\varphi_{10} + l_{CD}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{32}; \\ z_D^{(0)} &= z_{21} + l_{CD}\sin\varphi_{32}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Полезно проверить при некоторых простейших значениях обобщенных координат соответствие полученных формул (11.16) и кинематической схемы механизма (рис. 11.15). Например, при $\varphi_{10} = \varphi_{32} = 0$: $x_D^{(0)} = 0$; $y_D^{(0)} = l_{BC} + l_{CD}$; $z_D^{(0)} = z_{21}$; при $\varphi_{10} = \varphi_{32} = 270°$: $x_D^{(0)} = l_{BC}$; $y_D^{(0)} = 0$; $z_D^{(0)} = z_{21} - l_{CD}$

С помощью зависимостей (11.16), имея заданный диапазон изменения координат точки D, можно подобрать нужные значения длин звеньев l_{BC}, l_{CD} и диапазоны изменения обобщенных координат φ_{10}, z_{21} и φ_{32}.

Большое значение имеет такой технический показатель, как скорость движения схвата и отдельных звеньев манипулятора; при этом максимальная скорость движения определяется не только характером рабочего процесса манипулятора и мощностью приводов, но и условиями безопасности для обслуживающего персонала.

Если зависимости обобщенных координат от времени известны, то скорости можно найти дифференцированием по времени функции положения. Так, например, для рассмотренного манипулятора с тремя степенями свободы при заданных зависимостях $\varphi_{10}(t)$, $z_{21}(t)$ и $\varphi_{32}(t)$ проекции вектора скорости точки D схвата на оси координат получим, дифференцируя (11.16) по времени:

$$\left.\begin{aligned} v_{Dx} &= \dot{x}_D^{(0)} = -\omega_1\cos\varphi_{10}(l_{BC} + l_{CD}\cos\varphi_{32}) + \omega_{32}l_{CD}\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{32}; \\ v_{Dy} &= \dot{y}_D^{(0)} = -\omega_1\sin\varphi_{10}(l_{BC} + l_{CD}\cos\varphi_{32}) - \omega_{32}l_{CD}\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{32}; \\ v_{Dz} &= \dot{z}_D^{(0)} = v_{21} + \omega_{32}l_{CD}\cos\varphi_{32}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.17)$$

Величину и направление вектора скорости точки D найдем по формулам

$$\left.\begin{aligned} v_D &= \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2 + v_{Dz}^2}, \quad \cos\alpha = v_{Dx}/v_D, \\ \cos\beta &= v_{Dy}/v_D, \quad \cos\gamma = v_{Dz}/v_D, \end{aligned}\right\} \qquad (11.18)$$

где α, β, γ — направляющие углы вектора скорости.

Расчет по формулам (11.17), (11.18) для конкретных числовых

значений дает возможность оценить характер изменения и максимальную скорость точки D схвата.

В общем случае для каждой точки рабочей зоны манипулятора существует некоторый телесный угол ψ — угол сервиса, внутри которого схват может подойти к этой точке. Как известно, величина телесного угла определяется отношением площади сферы, вырезанной телесным углом, к квадрату радиуса сферы, поэтому максимальное значение телесного угла $\psi_{max} = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ стерадиан.

Отношение угла ψ к его максимальному значению $\theta = \psi/(4\pi)$ называют коэффициентом сервиса в данной точке. Величина θ может изменяться от нуля для точек на границе рабочего объема, где схват может быть подведен в одном единственном направлении, до единицы для точек зоны полного сервиса, где схват может быть подведен в любом направлении.

Определение значения коэффициента сервиса θ связано с анализом движения звеньев механизма манипулятора при различных фиксированных положениях центра схвата.

Методику вычисления θ рассмотрим на примере манипулятора с двумя сферическими и одной вращательной парами (рис. 11.13, *а*). Для определения угла сервиса ψ в некоторой точке E рабочей зоны рассмотрим механизм манипулятора как пространственный четырехзвенник со сферическими парами A, C, D и вращательной парой B; точка D центра схвата совпадает с заданной точкой E (рис. 11.16, *а*). Сперва определим возможные положения звена CD (схвата) в плоскости чертежа, а затем все его возможные положения в пространстве путем вращения плоского четырехзвенника относительно условной стойки AD длиной r, совпадающей с осью x пространственной системы координат $Oxyz$ [5].

В области, где коэффициент сервиса $\theta=1$, угол сервиса $\psi=4\pi$; следовательно, точка C должна иметь возможность занять любое положение на сфере радиусом $DC=l_3$ с центром в точке D; для этого в плоском четырехзвеннике звено CD должно быть кривошипом, т. е. поворачиваться на полный оборот. Как известно (см. § 11.1), условие существования кривошипа состоит в том, что сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев должна быть меньше суммы длин остальных звеньев. Если, например, звено *1* самое длинное, а звено *3* самое короткое, то $l_1+l_3 \leqslant r+l_2$, откуда $r_{min}=r_1=l_1-l_2+l_3$.

Если самое длинное звено $AD=r$, а самое короткое звено *3*, то $r+l_3 \leqslant l_1+l_2$, откуда $r_{max}=r_2=l_1+l_2-l_3$.

В пределах от r_1 до r_2 (зона *II* на рис. 11.16, *б*) $\theta=1$.

Если же звено *3* является коромыслом, то $\theta<1$. В предельных положениях, когда звенья *1, 2, 3* находятся на одной прямой Ax, $\theta=0$; это имеет место при $r=r_0=l_1-l_2-l_3$ и при $r=r_3=l_1+l_2+l_3$. Следовательно, в зонах *I* и *III* на рис. 11.16, *б* $\theta<1$.

В любой промежуточной точке зон *I* или *III*, например в точке D', можно определить коэффициент сервиса θ следующим образом. Найдя максимально возможный угол поворота φ_m коромысла $C'D'$, когда звенья AB' и $B'C'$ находятся на одной прямой, опре-

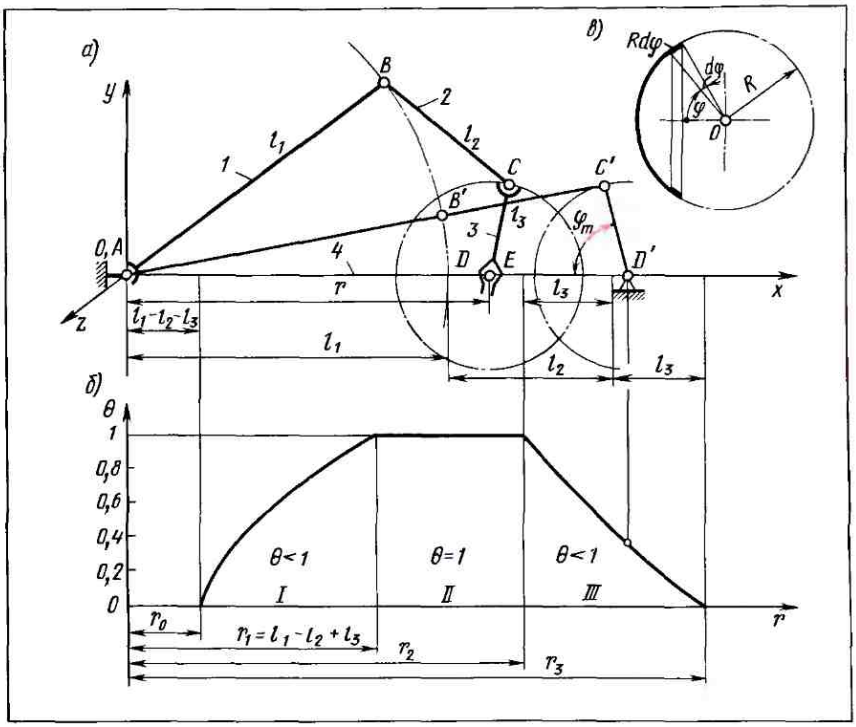


Рис. 11.16

делим поверхность сферического сектора радиусом $R=l_3$ и углом $\varphi=\varphi_m$ (рис. 11.16, *в*). Формулу поверхности S шарового сектора получим путем суммирования элементарных поверхностей $dS=2\pi R\sin\varphi\cdot Rd\varphi$ в пределах от $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_m$:

$$S=\int_0^{\varphi_m}2\pi R^2\sin\varphi d\varphi=2\pi R^2(1-\cos\varphi_m).$$

В нашем случае $R=l_3$ и, $S=2\pi l_3^2(1-\cos\varphi_m)$, следовательно,

$$\theta=\frac{\psi}{4\pi}=\frac{S/l_3^2}{4\pi}=\frac{1-\cos\varphi_m}{2}.$$

На рис. 11.16, *а* для $r=AD'\cos\varphi_m\approx 0{,}24$ и $\theta=0{,}38$. График зависимости $\theta=\theta(r)$ для манипулятора с размерами звеньев, изображенных на рис. 11.16, *а*, представлен на рис. 11.16, *б*. Подобные графики нужны не только при исследовании имеющегося манипулятора, но и при проектировании кинематических схем манипуляторов по заданным условиям.

К техническим показателям, характеризующим манипуляторы и промышленные роботы, также относятся: грузоподъемность или нагрузочная способность; быстродействие, характеризуемое затра-

той времени на движение звеньев манипулятора при выполнении операций по определенной программе; точность позиционирования, определяемая разбросом положений руки ПР в момент многократно повторяемой технологической операции; энергетические затраты (расход электроэнергии, сжатого воздуха, рабочей жидкости и т. д.).

§ 11.7 О системах управления манипуляторами

В манипуляторах промышленных роботов (ПР) с *автоматическим управлением* различают два режима работы систем автоматического управления: режим обучения и рабочий режим. В режиме обучения оператор с помощью специальной системы, включающей в себя датчики перемещений звеньев и устройства для записи сигналов датчиков на магнитную ленту или перфоленту, проводит исполнительный механизм манипулятора через требуемую последовательность рабочих положений звеньев. Информация, получаемая от датчиков положения звеньев, кодируется (шифруется) и поступает в запоминающее устройство в виде определенной программы. В рабочем режиме манипулятор работает автоматически по этой программе, которая декодируется (расшифровывается) и преобразуется в заданные движения звеньев.

На рис. 11.17, *а* дана кинематическая схема одного из промышленных роботов с приводами, а на рис. 11.17, *б* — структурная схема его основного рычажного механизма и упрощенная блок-схема автоматического управления манипулятором. Манипулятор ПР (рис. 11.17, *а*) имеет 5 степеней свободы ($W=5$) и соответственно 5 отдельных приводов: D_1, D_2, D_3, D_4 — электродвигатели и D_5 — пневмопривод. Двигатель D_1 через червячную передачу приводит во вращательное движение вокруг вертикальной оси звено *1*; двигатель D_2 с помощью винтовой передачи (винт—гайка) перемещает поступательно (вверх-вниз) звено *2;* двигатель D_3 с помощью такой же передачи сообщает горизонтальное поступательное движение (вправо-влево) звену *3*; электропривод D_4 посредством червячной передачи осуществляет вращательное движение схвата *4* вокруг горизонтальной оси; пневмопривод D_5 раскрывает и закрывает губки схвата *5* путем преобразования поступательного движения поршня посредством рычажного механизма.

На рис. 11.17, *б* показано, что преобразованные сигналы датчиков перемещений системы управления подаются в виде электрических напряжений u_i на соответствующие приводы, которые прикладывают определенные моменты или силы к звеньям и перемещают их на нужные расстояния. Скорость вращения каждого электродвигателя регулируется напряжением, подводимым к якорю двигателя, а управление этими напряжениями осуществляется от датчиков положения звеньев.

При *ручном управлении* оператор, действуя на звенья управляющего механизма, приводит в движение звенья исполнительного

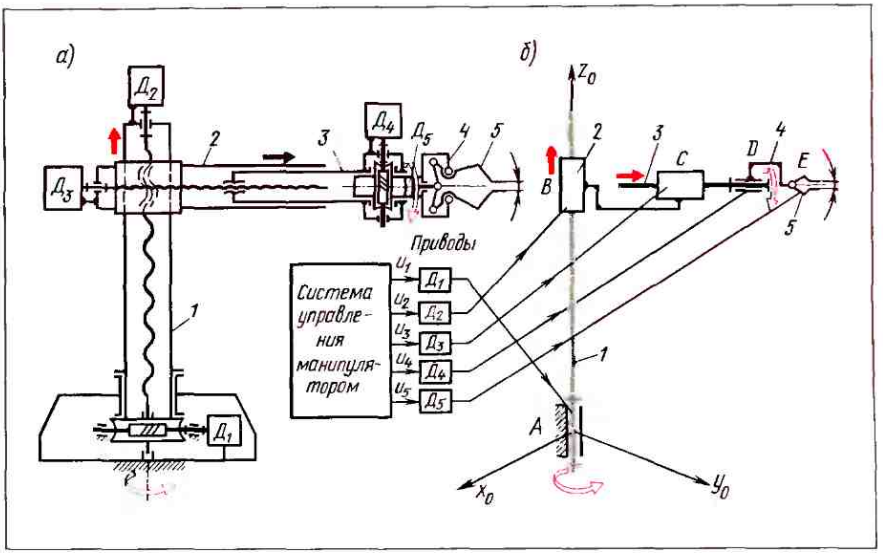


Рис. 11.17

механизма. Передача движения может осуществляться с помощью рычажных, зубчатых, волновых, винтовых передач, гибких проволочных валов, других механических элементов и различных муфт. Для увеличения (при необходимости) перемещений и усилий руки оператора в манипуляторах применяют сервоприводы (вспомогательные приводы) — электрические, гидравлические, пневматические, которые приводят в движение отдельные звенья исполнительного механизма по сигналам, вырабатываемым при движении звеньев управляющего механизма.

К ручным системам управления копирующими манипуляторами предъявляется специфическое требование их «очувствления», когда человек-оператор должен ощущать не только перемещения объекта манипулирования, но и нагрузку в виде силы или момента, действующих на схват манипулятора.

Для управления копирующими манипуляторами применяют два вида силовых следящих систем: с пассивным отражением усилия, когда оператор ощущает усилия на исполнительном органе лишь в процессе его движения, и с активным отражением усилия — так называемые обратимые следящие системы, когда оператор ощущает силу (или момент) на исполнительном органе как при его движении, так и в неподвижном положении.

Таким образом, в отличие от обычных систем автоматического регулирования эти системы обладают не только свойством управления по положению, но и свойством передачи (отражения) усилия.

Для воспроизведения на валу оператора усилий, развиваемых исполнительным органом, служат так называемые моментные загружатели или имитаторы нагрузки.

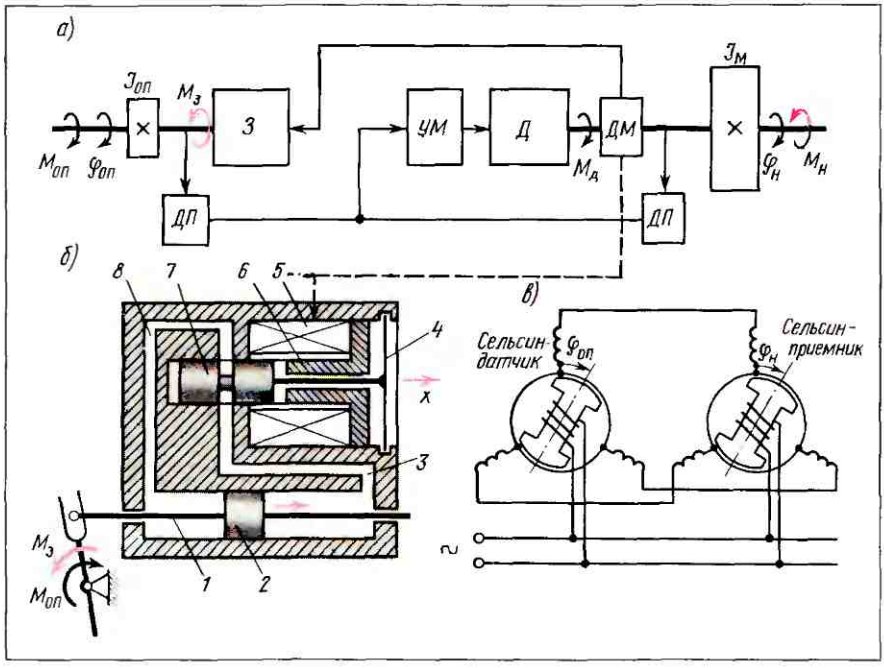


Рис. 11.18

В качестве моментных загружателей применяют фрикционные или порошковые электромагнитные муфты и электрогидравлические загружатели. При применении фрикционных электромагнитных муфт одна из половин муфты неподвижна, другая связана с валом оператора. При отсутствии нагрузки и соответствующего сигнала управления половинки муфт свободно скользят друг относительно друга и оператор не ощущает нагрузки на своем валу. При подаче сигнала с измерителя (датчика) моментов на обмотки управления одной из половинок муфты в ее магнитной цепи создается магнитный поток, который охватывает подвижную половинку муфты и прижимает ее к неподвижной. Чем больше сигнал, тем больший момент ощущает оператор.

Аналогичен принцип работы порошковой электромагнитной муфты. Порошок из ферромагнитного материала (например, железа) помещают между движущимися половинками муфты в магнитном поле, которое образуется в обмотке электромагнита при включении тока. При увеличении нагрузки, измеряемой датчиком моментов, увеличивается ток возбуждения и магнитная индукция в рабочем зазоре, возрастает тангенциальная сила, необходимая для сдвига ведомой части относительно неподвижного магнитопровода, и в результате увеличивается момент сопротивления на валу оператора.

Схема электрогидравлического пассивного загружателя дана на рис. 11.18, *б*. При приложении оператором момента $M_{оп}$ к валу опе-

ратора и соответствующего усилия к штоку *1* поршень *2* перемещается в гидроцилиндре, заполненном рабочей жидкостью (например, маслом), и вытесняет последнюю по каналам *3, 8* из одной полости цилиндра в другую. Если с датчика моментов на валу нагрузки (рис. 11.18, *а*) не поступает сигнала, то ток в обмотке управления *5* загружателя равен нулю, и золотник *7* (с кольцевой прорезью) находится в нейтральном (среднем) положении, удерживаемом центрирующей пружиной *4*. При этом золотник *7* не перекрывает каналы *3, 8*, сопротивление движению жидкости минимальное и оператор ощущает лишь небольшое усилие. Если появляется нагрузка на исполнительном органе в виде момента $M_н$, она измеряется датчиком моментов *ДМ* (рис. 11.18, *а*), в обмотке управления *5* золотником появляется ток, и золотник *7* перемещается в осевом направлении *x* до положения, где усилие на золотник уравновешивается силой пружины *4*. В результате золотник частично перекрывает каналы *3, 8*, сопротивление движению рабочей жидкости увеличивается и оператор ощущает увеличение момента $M_н$ на валу нагрузки в виде момента сопротивления $M_з$, развиваемого загружателем. Чем больше момент $M_н$, тем больше будет момент $M_з$. Максимальный ход золотника ограничен упором *6*. Недостаток системы с пассивным отражением усилия — ощущение оператором нагрузки только при движении звена управления; кроме того, не фиксируется знак момента нагрузки, в результате оператор не ощущает разницы (по усилию): поднимается груз или опускается.

Блок-схема следящей системы с пассивным отражением усилия дана на рис. 11.18, *а*. Пусть к валу нагрузки приложен некоторый момент $M_н$, а оператору нужно повернуть этот вал на некоторый угол $\varphi_н$. В этом случае он поворачивает вал управления на угол $\varphi_{оп}=\varphi_н$, что фиксируется датчиком положения *ДП*. Сигнал, пропорциональный углу $\varphi_{оп}$, поступает на усилитель мощности *УМ* и далее на исполнительный элемент — двигатель *Д*, который поворачивает вал нагрузки на заданный угол $\varphi_н=\varphi_{оп}$ и развивает момент $M_д=M_н$; этот момент измеряется датчиком моментов *ДМ* и, как было сказано выше, фиксируется загружателем *З*, с тем чтобы оператор имел информацию о величине нагрузки от объекта манипулирования.

В копирующих манипуляторах для воспроизведения угла поворота вала нагрузки по заданному углу поворота вала оператора применяют также *сельсинную следящую систему* (рис. 11.18, *в*) — самосинхронизирующуюся электрическую машину для плавной передачи на расстояние угла поворота вала. Сельсин-датчик и сельсин-приемник питаются от одной сети через статор и ротор, обмотки которых связаны только индуктивно. При повороте ротора сельсин-датчика на угол $\varphi_{оп}$ нарушается равновесие в цепи и возникают уравновешивающие токи, поворачивающие ротор сельсин-приемника на угол $\varphi_н \approx \varphi_{оп}$; при незначительной механической нагрузке разность $\varphi_{оп}-\varphi_н$ невелика (1—2°); если нагрузка велика,

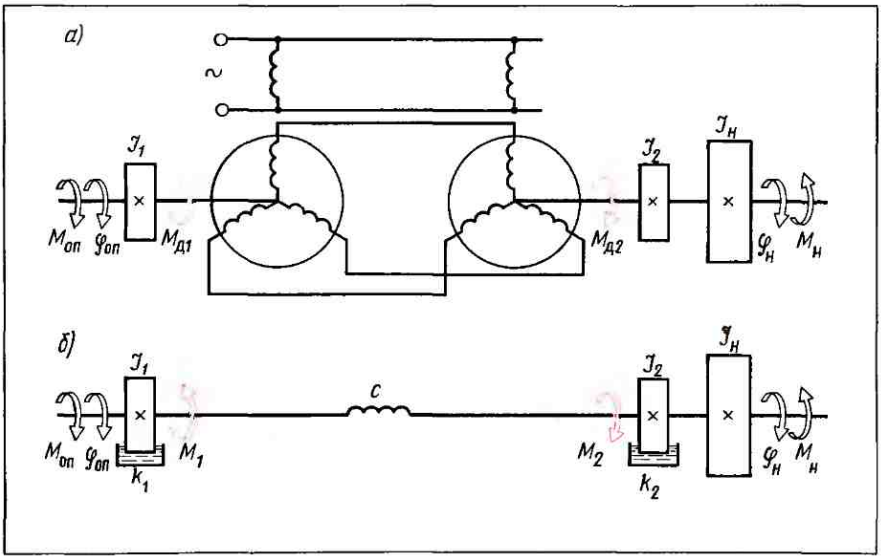


Рис. 11.19

применяют усилитель, а сельсин-приемник лишь управляет движением в трансформаторном режиме.

Динамика таких систем довольно сложна, поскольку в уравнениях движения приходится учитывать приведенные моменты инерции $J_{оп}$ и $J_н$ масс, связанных с валом оператора и с валом нагрузки, упругость звеньев, трение в механизмах, динамические характеристики электрических машин.

В дистанционно управляемых копирующих манипуляторах применяют обратимые следящие системы симметричного типа, состоящие из двух взаимосвязанных следящих систем, обеспечивающих активное отражение усилий; вариант такой системы, наиболее простой, дан на рис. 11.19, *а*. При наличии нагрузки на исполнительном звене в виде момента $M_н$ и движущемся или неподвижном звене управления сельсин на стороне нагрузки развивает момент $M_{д2}$, а сельсин на стороне оператора — равный ему, но противоположный по знаку синхронизирующий момент $M_{д1}$. В результате оператор ощущает внешнюю нагрузку от объекта манипулирования не только при движении, но и при неподвижном положении схвата манипулятора. Динамика таких систем весьма сложна, уравнения движения составляются и исследуются с помощью чисто механического аналога (динамической модели, рис. 11.19, *б*). Здесь учитывают внешнюю нагрузку в виде момента $M_н$, приведенные моменты инерции J_1, J_2, $J_н$ масс механизмов, связанных с валом оператора, с валом нагрузки и самой нагрузки, угол рассогласования между осями сельсинов в виде некоторой расчетной жесткости c упругой передачи, зависимость динамических синхронизирующих моментов $M_{д1}$, $M_{д2}$, развиваемых сельсинами при вращении, от скорости вра-

щения в виде их статических моментов M_1, M_2 и коэффициентов k_1, k_2 вязкого (скоростного) трения и т. д. При этом следует иметь в виду, что управление осуществляется по каждой степени свободы манипулятора (см.: *Кулешов В. С., Лакота Н. А.* Динамика систем управления манипуляторами. М., 1971).

§ 11.8 Некоторые вопросы динамики манипуляторов

Для определения закона движения пространственного механизма манипулятора ПР с несколькими степенями свободы в проектировочных расчетах можно применить систему уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\ i=1, 2, \ldots, W, \qquad (11.19)$$

где q_i — обобщенные координаты; Q_i — обобщенные силы; W — число степеней свободы механизма; T — кинетическая энергия всего механизма.

Решение системы (11.19) позволит найти перемещения, скорости и ускорения звеньев механизма, движущихся под действием приложенных к ним сил (движущих и сопротивления) в функции времени t. Это необходимо для правильного выбора мощности приводов, определения максимальных скоростей движения, инерционной нагрузки, быстродействия манипулятора.

Кинетическая энергия механизма манипулятора $T=\Sigma T_i$, где T_i — кинетическая энергия i-го звена, совершающего (в общем случае) пространственное движение в выбранной неподвижной системе координат $x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ (рис. 11.20). Пусть с этим звеном связана система координат $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ с началом в центре масс S_i звена. Если координатные оси $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ выбраны так, что они являются главными осями инерции, и, следовательно, центробежные моменты инерции J_{xiyi}, J_{yizi}, J_{zixi} обращаются в нуль, то кинетическая энергия i-го звена будет равна сумме кинетической энергии в поступательном движении по траектории центра масс со скоростью v_{si} и кинетической энергии в сферическом движении вокруг центра масс:

$$T_i=\frac{1}{2}(m_i v_{si}^2+J_{xi}\omega_{xi}^2+J_{yi}\omega_{yi}^2+J_{zi}\omega_{zi}^2), \qquad (11.20)$$

где m_i — масса i-го звена; J_{xi}, J_{yi}, J_{zi} — моменты инерции звена относительно координатных осей $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$; ω_{xi}, ω_{yi}, ω_{zi} — проекции вектора мгновенной угловой скорости звена при сферическом движении относительно центра масс на координатные оси $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$.

Таким образом, формула (11.20) применяется при условии, что выбранные оси координат, связанные со звеньями, являются главными центральными осями инерции.

Обобщенные силы Q_i определяют из условия равенства элементарных работ всех внешних сил на возможных перемещениях ра-

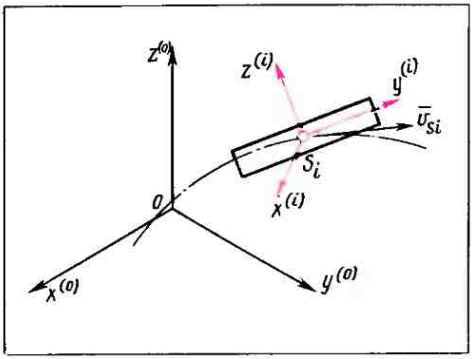


Рис. 11.20

боте обобщенной силы при изменении только одной обобщенной координаты q_i:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \right.$$

$$\left. + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right),$$

где F_{jx}, F_{jy}, F_{jz} — проекции векторов внешних сил $\bar{F}_j$ на координатные оси $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$; x_j, y_j, z_j — координаты точки приложения силы $\bar{F}_j$.

Решение конкретных задач по определению закона движения механизма манипулятора сводится к составлению системы дифференциальных уравнений (11.19) и решению их численными методами.

Такие решения с применением систем уравнений Лагранжа второго рода являются приближенными не только из-за численных методов решения дифференциальных уравнений, но и потому, что трение в кинематических парах здесь можно оценить лишь весьма приближенно, а упругость звеньев и зазоры в кинематических парах не учитываются вообще. Поэтому при разработке опытных образцов ПР применяют экспериментальные методы динамического исследования ПР, позволяющие с помощью соответствующих датчиков и аппаратуры записать осциллограммы перемещений, скоростей и ускорений звеньев и опытным путем учесть как неточности теоретического расчета, так и влияние ранее неучтенных факторов.

Так, например, на рис. 11.21, *а* дан примерный вид осциллограммы при выдвижении руки одного из ПР с определенным грузом в схвате, записанной и обработанной по методике Е. Г. Нахапетяна (см.: *Нахапетян Е. Г.* Оценка быстроходности механизмов позиционирования манипуляторов и ПР. — Вестник машиностроения. 1976, № 2; Экспериментальное исследование и диагностирование роботов/Под ред. *Е. Г. Нахапетяна,* М., 1981).

На рис. 11.21, *а* $s(t)$ — перемещение схвата, записанное с помощью реохордного датчика; $v(t)$ — скорость движения схвата, записанная с помощью магнитоиндукционного датчика; $a(t)$ — ускорение схвата, записанное с помощью акселерометра инерционного типа; $\Delta s(t)$ — малые перемещения (колебания в одной плоскости) схвата в конце хода руки после его останова, записанные тензометрическим датчиком; $t_р$ — время разгона; $t_{уст}$ — время установившегося движения; $t_т$ — время торможения; $t_ф$ — время фиксации (успокоения) схвата с грузом после останова руки робота; $t_п$ — общее время движения руки до останова; $T_п$ — полное время движения, включая время фиксации схвата.

В результате измерений можно, например, оценить различные параметры движения: максимальные скорость и ускорение, вре-

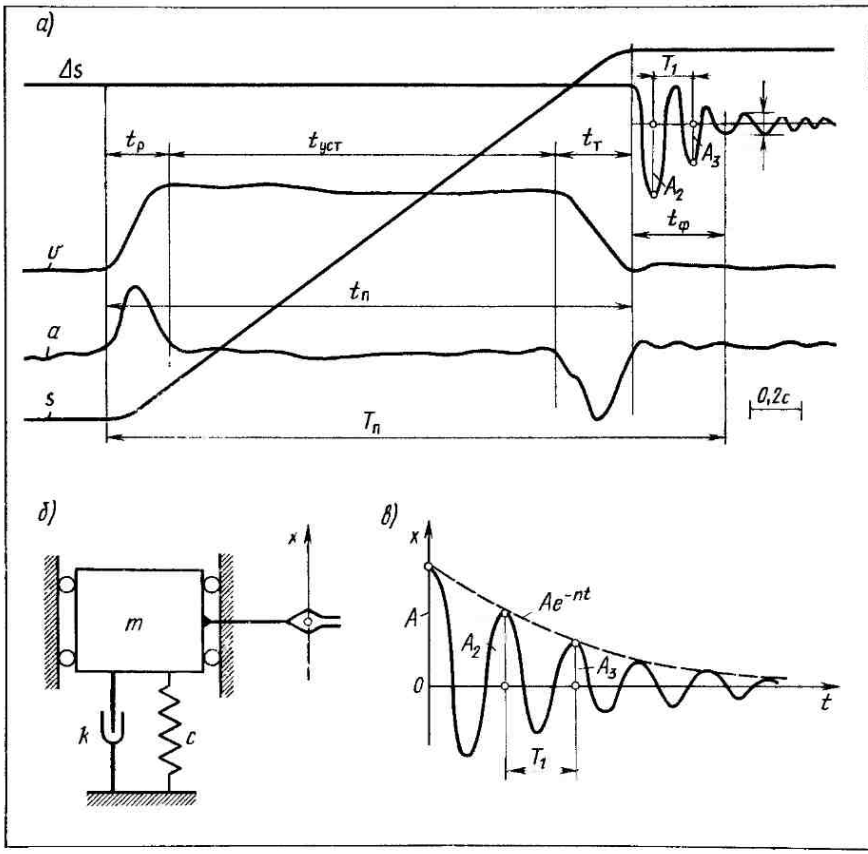


Рис. 11.21

менные интервалы, фактические перемещения, время фиксации схвата и точность позиционирования.

Так, например, по периоду T_1 затухающих колебаний схвата и амплитудам A_2, A_3 кривой $\Delta s(t)$ можно вычислить логарифмический декремент затухания $\delta=\ln(A_2/A_3)$ и коэффициент демпфирования $n=2\delta/T_1$, если за динамическую модель руки робота при его останове принять линейный диссипативный осциллятор (рис. 11.21, *б*). В этом случае используется дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+cx=0,$$

или

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=0, \qquad (11.21)$$

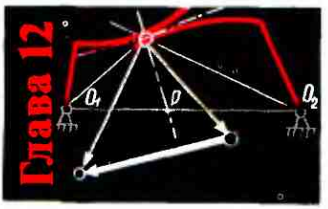
где $n=k/(2m)$ — коэффициент демпфирования; $p^2=c/m$; k — расчетный коэффициент вязкого трения, учитывающий трение внешней

среды и силы сопротивления, возникающие при упругих колебаниях и деформациях звеньев; c — приведенная жесткость; m — приведенная масса.

Одно из решений уравнения (11.21):

$$x = Ae^{-nt}\sin(pt + \alpha)$$

— гармонический закон колебаний с амплитудой Ae^{-nt}, убывающей со временем по логарифмическому закону [виброграмма $x = x(t)$]. Чем больше n, тем быстрее затухают колебания (рис. 11.21, *в*).



Методы синтеза механизмов с высшими парами

Осуществление требуемых движений механизмами, содержащими только низшие кинематические пары (т. е. рычажными механизмами), не всегда бывает целесообразным ввиду сложности кинематической схемы. В таких случаях применяются механизмы с высшими кинематическими парами, которые воспроизводят требуемое движение при малом числе звеньев. Минимальное их число равно трем: входное и выходное звенья и стойка. Другое весьма существенное достоинство механизмов с высшими парами состоит в том, что они преобразуют движения теоретически точно, чего механизмы с низшими парами выполнить не могут.

Поверхности элементов высшей кинематической пары, обеспечивающие заданный закон движения, называются сопряженными поверхностями. Механизмы могут иметь либо одну, либо несколько пар сопряженных поверхностей. Первый случай используется, например, в кулачковых механизмах, воспроизводящих возвратное движение выходного звена по заданному закону, задаваемому посредством передаточной функции. Второй случай используется в зубчатом зацеплении, в котором непрерывное движение выходного звена обеспечивается путем последовательного взаимодействия нескольких пар сопряженных поверхностей. Передаточная функция зубчатых механизмов, как правило, постоянна и называется передаточным отношением. Наличие высшей кинематической пары вносит существенные особенности в методы синтеза механизма.

§ 12.1 Основная теорема зацепления

Основная теорема зацепления устанавливает связь между геометрией сопряженных поверхностей и законом относительного движения элементов высшей кинематической пары. При зацеплении в плоскости основная теорема зацепления

устанавливает связь между геометрией сопряженных профилей и их относительным движением.

Применительно к задачам синтеза сопряженных поверхностей и сопряженных профилей закон относительного движения является заданным. В соотношениях

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}$$

или

$$\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 \qquad (12.1)$$

векторы угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ известны, что позволяет найти векторы относительной угловой скорости: $\bar{\omega}_{12} = -\bar{\omega}_{21}$.

Векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ могут быть параллельными, пересекаться в одной точке или скрещиваться (рис. 12.1).

Геометрическое место положений мгновенных осей вращения в основной системе отсчета называют **неподвижным аксоидом**, а в движущемся теле — **подвижным аксоидом**. При параллельных неподвижных осях вращения (рис. 12.1, *а*) аксоидами являются цилиндры с радиусами r_{w1} и r_{w2}, соприкасающиеся между собой по образующей и перекатывающиеся друг по другу без скольжения. Если векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ направлены в разные стороны, то аксоидные цилиндры касаются **внешним** образом. Если векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ имеют одинаковое направление, то аксоидные цилиндры касаются **внутренним** образом (меньший цилиндр расположен внутри большего).

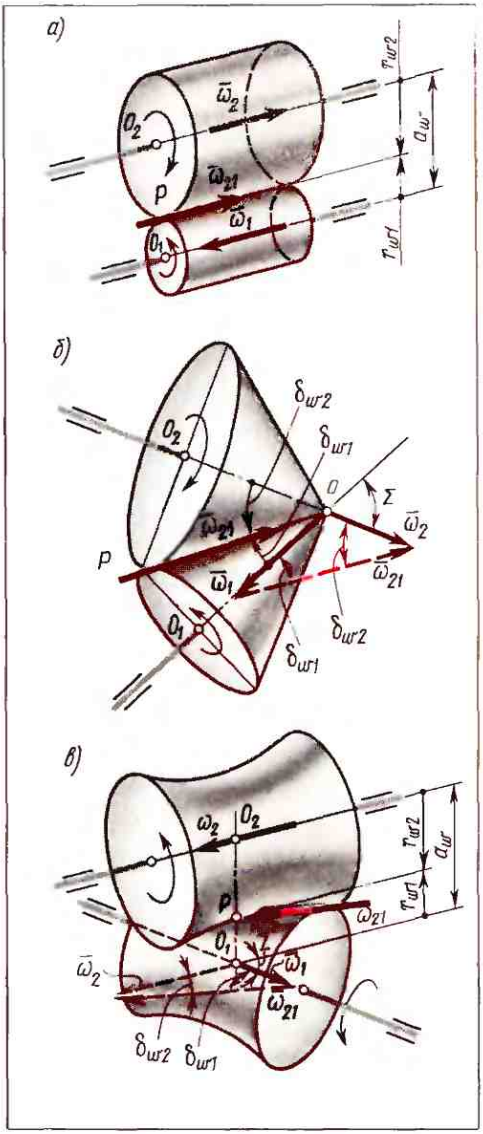


Рис. 12.1

При пересекающихся неподвижных осях (рис. 12.1, *б*) аксоидами являются два конуса с углами при вершине $2\delta_{w1}$ и $2\delta_{w2}$. Углы аксоидных конусов δ_{w1} и δ_{w2} определяют положение **мгновенной оси вращения** в основной системе отсчета. Их значения мож-

но найти по теореме синусов из треугольника, являющегося векторным решением соотношения (12.1) (рис. 12.1, *б*):

$$|\bar{\omega}_1|/\sin\delta_{w2}=|\bar{\omega}_2|/\sin\delta_{w1}.$$

Передаточное отношение $u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|$ выражается соотношением

$$u_{12}=\frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|}=\frac{\sin\delta_{w2}}{\sin\delta_{w1}}=\frac{\sin(\Sigma-\delta_{w1})}{\sin\delta_{w1}}=\frac{\sin\Sigma}{\mathrm{tg}\,\delta_{w1}}-\cos\Sigma. \qquad (12.2)$$

При скрещивающихся осях (рис. 12.1, *в*) относительное движение звеньев является винтовым, т. е. движение тела состоит из его вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения со скоростью, параллельной этой оси. В этом случае находят мгновенную винтовую ось. Если угловые скорости $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ постоянны, то аксоидами звеньев в относительном движении являются однополостные гиперболоиды вращения с прямолинейной образующей, которые катятся друг по другу, касаясь по мгновенной винтовой оси, со скольжением вдоль этой оси.

Линия кратчайшего расстояния между осями на рис. 12.1, *в* обозначена O_1O_2, а ее длина — через a_w. На этой линии расположена точка P, через которую проходит мгновенная винтовая ось.

В сечении, перпендикулярном мгновенной винтовой оси винта, составляющие скорости точки P равны, т. е.

$$r_{w1}|\bar{\omega}_1|\cos\delta_{w1}=r_{w2}|\bar{\omega}_2|\cos\delta_{w2},$$

откуда следует, что передаточное отношение можно определить из соотношения

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=r_{w2}\cos\delta_{w2}/(r_{w1}\cos\delta_{w1}). \qquad (12.3)$$

Модуль вектора относительной угловой скорости вращения находят по теореме косинусов при решении векторного уравнения (12.1)

$$\omega_{21}=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_1\omega_2\cos\Sigma}.$$

При заданном законе относительного движения звеньев, элементы которых образуют высшую кинематическую пару, в общем случае формулируют основную теорему зацепления в следующем виде: *сопряженные поверхности в любой точке контакта имеют общую нормаль к этим поверхностям, которая перпендикулярна вектору скорости точки контакта в заданном относительном движении поверхностей.*

Доказательство этой теоремы заключается в том, что если сформулированное условие не выполняется, то имеется составляющая относительной скорости элементов высшей кинематической пары, направленная вдоль общей нормали. В этом случае элементы высшей пары должны либо оторваться друг от друга, либо взаимно внедряться, что противоречит условию образования контакта в высшей паре. Так как подобное предположение является невозможным, то это является доказательством основной теоремы зацепле-

ния. Краткая запись основной теоремы зацепления в аналитической форме основана на условии перпендикулярности векторов $\bar{v}_r$ и $\bar{n}$, записанном в форме скалярного произведения векторов:

$$\bar{v}_r \cdot \bar{n} = 0,$$

где $\bar{v}_r$ — вектор скорости относительного движения в касательной плоскости к элементам высшей кинематической пары; $\bar{n}$ — единичный вектор общей нормали в точке контакта.

Основная теорема плоского зацепления. Идея основной теоремы плоского зацепления была высказана английским ученым Виллисом (см.: *Willis R.* Principles of mechanism. London, 1841) при разработке классификации механизмов на основе анализа отношения скоростей звеньев. В современной интерпретации эту теорему (называемую теоремой Виллиса) формулируют в следующей форме: общая нормаль в точке контакта сопряженных профилей в любой момент зацепления должна проходить через полюс зацепления P, положение которого на межосевой линии O_1O_2 определяется заданным относительным движением звеньев.

По ранее выведенному соотношению (3.97)

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mp\frac{PO_2}{PO_1} = \mp\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{a_w \mp r_{w1}}{r_{w1}} \qquad (12.4)$$

следует, что положение полюса P однозначно определяется через радиус r_{w1}, если заданы межосевое расстояние a_w и передаточное отношение u_{12}.

Для доказательства сформулированной теоремы в точке контакта K профилей Π_1 и Π_2 (рис. 12.2) рассматривают векторы скоростей точек A и B, принадлежащих соответственно звеньям *1* и *2*, и соотношения между ними:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

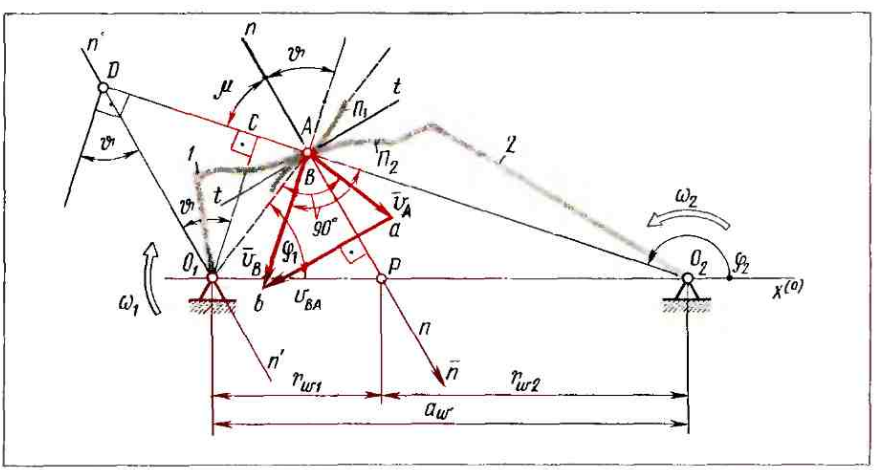


Рис. 12.2

Направление векторов определяют из условий движения точек: $\bar{v}_A \perp AO_1$; $\bar{v}_B \perp BO_2$; $\bar{v}_{BA} \parallel t-t$ или $\bar{v}_{BA} \perp n-n$, где $t-t$ и $n-n$ — общая касательная и общая нормаль к сопряженным профилям $П_1$ и $П_2$. Далее через ось O_1 проводят линию O_1D, параллельную общей нормали ($n'-n' \parallel n-n$), и отмечают точку D на пересечении с радиусом O_2KD. Полученный $\triangle O_1DK$ подобен $\triangle abK$, образованному векторами v_A, v_B, v_{BA}.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{aK}{O_1K}=\frac{bK}{DK}, \text{ или } \frac{|\bar{v}_A|}{|\bar{v}_B|}=\frac{O_1K}{DK}, \text{ или } \frac{\omega_1 r_A}{\omega_2 r_B}=\frac{r_A}{\mu_l DK}.$$

Так как $DK/KO_2=O_1P/PO_2$ (что следует по условию пересечения сторон угла DO_2O_1 двумя параллельными прямыми), то после подстановки получают соотношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{(r_B/\mu_l)}{DK}=\frac{KO_2}{DK}=\frac{PO_2}{PO_1}. \qquad (12.5)$$

Соотношение (12.5) идентично соотношению (12.4), что является доказательством прохождения общей нормали $n-n$ через полюс зацепления P. Иногда используют и иную форму доказательства, рассматривая проекции абсолютных скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B в момент их контактирования в положении K, которые должны быть равны друг другу по условию контактирования профилей $П_1$ и $П_2$ без размыкания контакта и без внедрения одного профиля в другой.

Из анализа основной теоремы зацепления следует, что при заданном законе изменения передаточной функции, т. е. при заданных центроидах, определяющих положение полюса P на межосевой линии O_1O_2, конструктор располагает свободой выбора геометрии контактируемых профилей. Любой паре центроид соответствует множество сопряженных профилей, обеспечивающих заданное изменение отношения угловых скоростей звеньев.

Целесообразность выбора той или иной пары профилей с определенной геометрией конструктор увязывает с технологией изготовления (с методом изготовления, станочным оборудованием, режущим инструментом, методами контроля и т. п.), с работоспособностью передачи («несущая способность», высокий к.п.д., малый износ профилей, надежность и долговечность и т. п.), с чувствительностью передачи к погрешностям, возникающим при изготовлении, монтаже и эксплуатации.

Из основной теоремы зацепления следует, что сопряженные профили должны располагаться относительно центроид так, чтобы в любой точке контакта общая нормаль проходила через полюс зацепления P. Если это требование не выполняется, то такие профили не могут быть сопряженными. На рис. 12.3, *а* показаны центроида $Ц$ и профиль $П$, к которому проведен ряд нормалей $n-n$. На участке AB профиля $П$ нормали пересекают центроиду $Ц$, а на участке BC — нормали не имеют общих точек с центроидой $Ц$. Следовательно, для участка AB профиля $П$ возможно найти сопряжен-

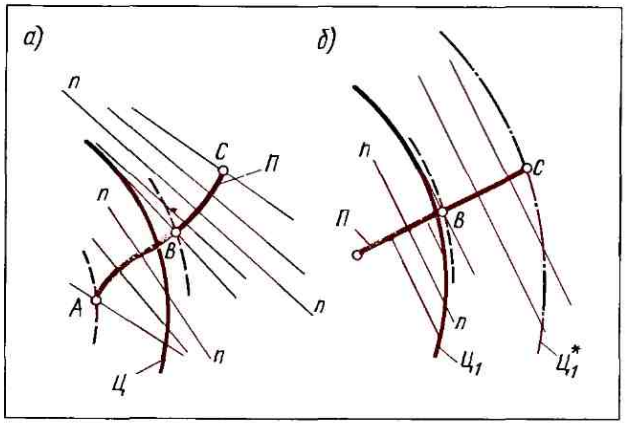


Рис. 12.3

ный профиль, а для участка BC сопряженный профиль спроектировать невозможно. В этом случае высота головки зуба должна быть ограничена (на рис. 12.3, *а* пунктирной линией условно показана линия вершин зубьев, проходящая через точку B).

Аналогичные рассуждения можно распространить на частный случай профиля $П$, очерченного по прямой линии (рис. 12.3, *б*): на участке AB нормали пересекают центроиду $Ц_1$, а на участке BC нормали не имеют общих точек с центроидой $Ц_1$. Однако если выбрать другую центроиду $Ц_1^*$ (или иначе расположить прямолинейный профиль по отношению к центроиде), то можно добиться, чтобы нормали к профилю на всем участке AC пересекали бы центроиду $Ц_1^*$, т. е. для всего профиля AC найти другой сопряженный профиль. Это условие, вытекающее из основной теоремы зацепления, является необходимым, но иногда оказывается недостаточным, ибо возможны и другие ограничения.

Ранее в гл. 3 было показано, что важной кинематической характеристикой любого механизма, не зависящей от времени и закона изменения обобщенной координаты, является передаточная функция v_{qB} скорости движения, представляющая собой первую производную перемещения S_B какой-либо точки B по обобщенной координате φ_1:

$$v_{qB} = \mathrm{d}S_B/\mathrm{d}\varphi_1 = v_B/\omega_1.$$

При передаче вращательного движения высшей парой кинематической передаточной функции v_{qB} можно придать определенный геометрический образ. Пусть в качестве обобщенной координаты выбран угол поворота φ_1 звена *1*, а в качестве функции — перемещение S_B точки B ведомого звена *2* (рис. 12.2).

Передаточная функция $v_{qB} = v_B/\omega_1$ имеет единицу СИ м·рад$^{-1}$. Ее можно изобразить на схеме механизма в виде некоторого отрезка в масштабе $\mu_q = [\text{мм}/(\text{м}\cdot\text{рад}^{-1})]$.

Геометрический образ о передаточной функции скорости движения формулируют в следующем виде: отрезок DK, расположенный на прямой, соединяющей контактную точку K с осью вращения O_2 ведомого звена, между общей нормалью $n—n$ в контактной точке K и прямой $n'—n'$, проведенной ей параллельно через ось вращения O_1 ведущего звена, прямо пропорционален передаточной функции $v_{qB}=v_B/\omega_1$.

Для доказательства этой теоремы рассматривают подобие треугольников $\triangle DKO_1 \infty \triangle Kab$ (рис. 12.2):

$$\frac{KD}{Bb}=\frac{AO_1}{Aa} \text{ или } \frac{KD}{v_B}=\frac{AO_1}{v_A}=\frac{AO_1}{\omega r_a}=\frac{\mu_l}{\omega_1}.$$

После преобразования получают

$$KD=\mu_l(v_B/\omega_1), \text{ или } KD=\mu_l v_{qB}.$$

Это соотношение и требовалось обосновать. Кинематическая передаточная функция v_{qB} при произвольно выбранной геометрии контактируемых профилей изменяется и ее можно представить в виде графиков в координатах: v_{qB}, S_B или v_{qB}, φ_2.

Следует обратить внимание, что расположение отрезка KD, пропорционального кинематической передаточной функции v_{qB}, относительно контактной точки зависит от схемы зацепления. При внешнем зацеплении, когда полюс зацепления P расположен между осями вращения O_1 и O_2, отрезок KD по линии O_2D расположен также с внешней стороны по отношению к отрезку O_2K.

При внутреннем зацеплении, когда полюс зацепления P расположен вне отрезка O_1O_2, отрезок KD расположен внутренним образом на линии O_2D, т. е. от точки K в сторону оси O_2. Иногда пользуются определенным правилом: вектор скорости v_B выходного звена *2*, будучи повернут на 90° в направлении угловой скорости ω_1 входного звена, показывает расположение отрезка KD, пропорционального кинематической передаточной функции относительно контактной точки K.

§ 12.2 Скорость скольжения сопряженных профилей

Соотношение между угловыми скоростями ω_1, ω_2 звеньев, скоростью скольжения профилей и расстоянием контактной точки K от полюса зацепления P формулируется в следующем виде: скорость скольжения сопряженных профилей в высшей паре равна произведению расстояния l_{KP} между контактной точкой K и полюсом зацепления P на угловую скорость $\omega_{12}=\omega_1-\omega_2$ в относительном движении профилей (см. рис. 12.2).

Для доказательства рассматривают подобие треугольников: $\triangle Kab \infty \triangle O_1KD$, следовательно,

$$\frac{ab}{DO_1}=\frac{Ka}{KO_1},\ \text{или}\ \frac{v_{ск}}{DO_1}=\frac{v_A}{KO_1};\qquad(12.6)$$

$\triangle DO_1O_2\infty\triangle KPO_2$, следовательно,

$$\frac{DO_1}{KP}=\frac{O_1O_2}{PO_2}=\frac{O_1P+PO_2}{PO_2}=\frac{O_1P}{PO_2}+1=\mp\frac{\omega_2}{\omega_1}+1.\qquad(12.7)$$

Соотношение (12.6) с учетом соотношения (12.7) преобразуют в следующем виде относительно искомой скорости скольжения:

$$v_{ск}=v_A\frac{DO_1}{KO_1}=\frac{\omega_1 r_A}{r_A\mu_l}DO_1=\frac{\omega_1}{\mu_l}KP\left(\mp\frac{\omega_2}{\omega_1}+1\right),$$

или

$$v_{ск}=\left(\frac{KP}{\mu_l}\right)(\omega_1\mp\omega_2)=l_{KP}(\omega_1\mp\omega_2).\qquad(12.8)$$

Соотношение (12.8) соответствует сформулированной выше теореме о скорости скольжения контактируемых профилей. В полюсе зацепления P между профилями скольжение отсутствует. Чем дальше расположена контактная точка K относительно полюса зацепления P, тем больше скорость скольжения. Учитывая, что износ контактируемых поверхностей является функцией скорости скольжения, конструктор должен выбирать такое расположение сопряженных профилей относительно центроид, чтобы скорость скольжения находилась в допустимых пределах.

Наиболее распространенными являются передачи с сопряженными профилями, имеющими головку и ножку зуба, т. е. профилями, расположенными по обе стороны от центроид.

В ряде случаев можно использовать сопряженные профили, имеющие только ножки или только головки зубьев, т. е. проектировать передачи с дополюсным, заполюсным или внеполюсным зацеплениями.

Несмотря на то что скорость $\bar{v}_{ск}=\bar{v}_{K2K1}=\bar{v}_{BA}$ скольжения профилей Π_1 и Π_2 одинакова, они изнашиваются с разной интенсивностью. В связи с этим полезно рассмотреть движение каждого профиля Π_1 и Π_2 относительно общей контактной точки K (рис. 12.4):

$$\underline{\underline{\bar{v}_A}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{AK}},\ \text{или}\ \underline{\underline{\bar{v}_{K1}}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{K1K}};$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{BK}},\ \text{или}\ \underline{\underline{\bar{v}_{K2}}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{K2K}}.\qquad(12.9)$$

Направление вектора скорости $\bar{v}_K$ общей контактной точки совпадает с касательной к линии зацепления (л. з.) — геометрическому месту контактных точек K на неподвижной плоскости при взаимодействии профилей Π_1 и Π_2 (см. рис. 12.2).

Направление векторов скоростей $v_{K1K}=v_{AK}$ и $v_{K2K}=v_{BK}$ совпадает с общей касательной $t-t$ к профилям Π_1 и Π_2 в точке контакта K.

Векторным соотношениям (12.9) соответствуют построения на рис. 12.4 в виде планов скоростей.

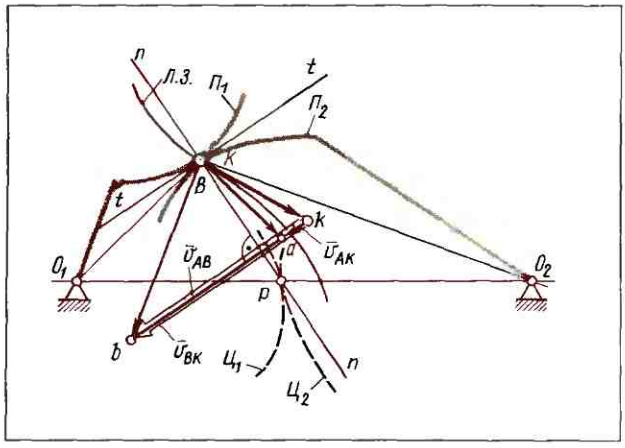


Рис. 12.4

Скорость скольжения $\bar{v}_{AK} = \overline{ak}/\mu_v$ профиля $П_1$ относительно контактной точки K при заданной на рис. 12.4 геометрии высшей пары существенно меньше, чем скорость скольжения $v_{BK} = kb/\mu_v$ профиля $П_2$ относительно той же контактной точки K. Это означает, что за один и тот же промежуток времени на профиле $П_2$ будет контактировать участок бо́льшей длины, чем на профиле $П_1$. В силу отмеченного при прочих постоянных условиях профиль $П_1$ на данном участке будет изнашиваться больше, чем участок на профиле $П_2$, даже, если материал профилей одинаков по износостойкости.

Скорость скольжения v_{K2K1} профилей друг относительно друга и скорости скольжения v_{K1K} и v_{K2K} профилей относительно общей контактной точки в процессе взаимодействия профилей все время меняется: уменьшается до ноля при движении контактной точки K к полюсу P и далее увеличивается, меняя при этом свое направление. Такой характер скольжения профилей влияет на интенсивность износа на разных участках профилей элементов высшей кинематической пары в том случае, если основным видом износа является абразивный износ.

Производить оценку скольжения профилей в относительном движении только по величине скорости скольжения недостаточно: необходимо еще учитывать скорость движения контактной точки по каждому профилю, т. е. скорости v_{BK} и v_{AK} (рис. 12.4).

Отношение скорости скольжения $v_{ск} = v_{BA}$ профилей к относительным скоростям v_{AK} и v_{BK} точек A и B профилей при перемещении относительно общей контактной точки K называют коэффициентами скольжения λ_A и λ_B соответственно:

$$\lambda_A = v_{ск}/v_{AK} \quad \text{и} \quad \lambda_B = v_{ск}/v_{BK}\,. \tag{12.10}$$

Если скорость точки на профиле совпадает со скоростью перемещения контактной точки по линии зацепления, то в этом случае

коэффициент скольжения теоретически равен бесконечности. Такой случай имеет место в кулачковых механизмах, когда один из элементов высшей кинематической пары вырождается в точку (острие).

§ 12.3 Угол давления при передаче движения высшей парой

Положение общей нормали $n-n$ в точке контакта K взаимодействующих профилей может быть зафиксировано разными способами. Угол между нормалью $n-n$ и радиусом-вектором r_A, проведенным от оси O_1 в контактную точку K, называют углом ведущего профиля (см. рис. 12.2). Угол между нормалью $n-n$ и радиусом-вектором r_B, проведенным от оси O_2 в контактную точку K, называют углом передачи μ. Угол между нормалью $n-n$ и вектором скорости $\bar{v}_B$ ведомого звена называют углом давления ϑ. При проектировании механизмов с высшей парой эти углы играют большую роль. Особенно приходится учитывать условия передачи сил и моментов сил и назначать в связи с этим определенные ограничения. Например, часто применяют ограничения по углу давления: $\vartheta \leqslant \vartheta_{доп}$, при котором изменяющиеся углы давления ϑ не должны превосходить определенный допускаемый уровень $\vartheta_{доп}$.

Связь между углом давления ϑ и кинематическими параметрами механизма находят в следующем виде: схема на рис. 12.2 позволяет записать следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}\vartheta = DC/CO_1 = (AD - AC)/CO_1 = [AD - (CO_2 - BO_2)]/CO_1 ,$$

где CO_1 — перпендикуляр к лучу O_2D, опущенный из центра O_1.

В это выражение можно подставить значения отрезков:

$$AD = \mu_l(v_B/\omega_1); \quad BO_2 = \mu_l r_B;$$
$$CO_1 = O_1O_2\sin\varphi_2 = \mu_l a_w \sin\varphi_2;$$
$$CO_2 = O_1O_2\cos\varphi_2 = \mu_l a_w \cos\varphi_2$$

и получить формулу в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{(v_B/\omega_1) - (a_w\cos\varphi_2 - r_B)}{a_w\sin\varphi_2}. \qquad (12.11)$$

В формуле (12.11) величины v_B/ω_1, r_B и φ_2 являются переменными.

Если в механизме с высшей парой в частном случае ведомое звено *2* совершает прямолинейно-поступательное движение, то формула (12.11) также приобретает частное значение:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{(v_B/\omega_1) \mp e}{S_н + S_B}, \qquad (12.12)$$

где e — внеосность — смещение оси ведомого звена относительно оси вращения ведущего звена; $S_н + S_B = y_B$ — координата точки на

ведомом звене в направлении его поступательного движения относительно координатных осей, имеющих начало координат на оси вращения ведущего звена.

Теорему об угле давления ϑ можно сформулировать в следующем виде: угол давления при передаче вращательного движения в простом плоском механизме с высшей парой зависит от передаточной функции $v_{qB} = v_B/\omega_1$, межосевого расстояния a_w и координат r_{B2} и φ_2 контактной точки ведомого звена и определяется соотношением (12.11).

В некоторых частных случаях передача движения сопряженными профилями может осуществляться с постоянными углами давления.

§ 12.4 Графические методы синтеза сопряженных профилей

Метод последовательных положений профиля. Определение сопряженного профиля $П_2$ по заданному профилю $П_1$ (рис. 12.5, *а*) методом последовательных положений заключается в обращении движения центроиды $Ц_1$ относительно не-

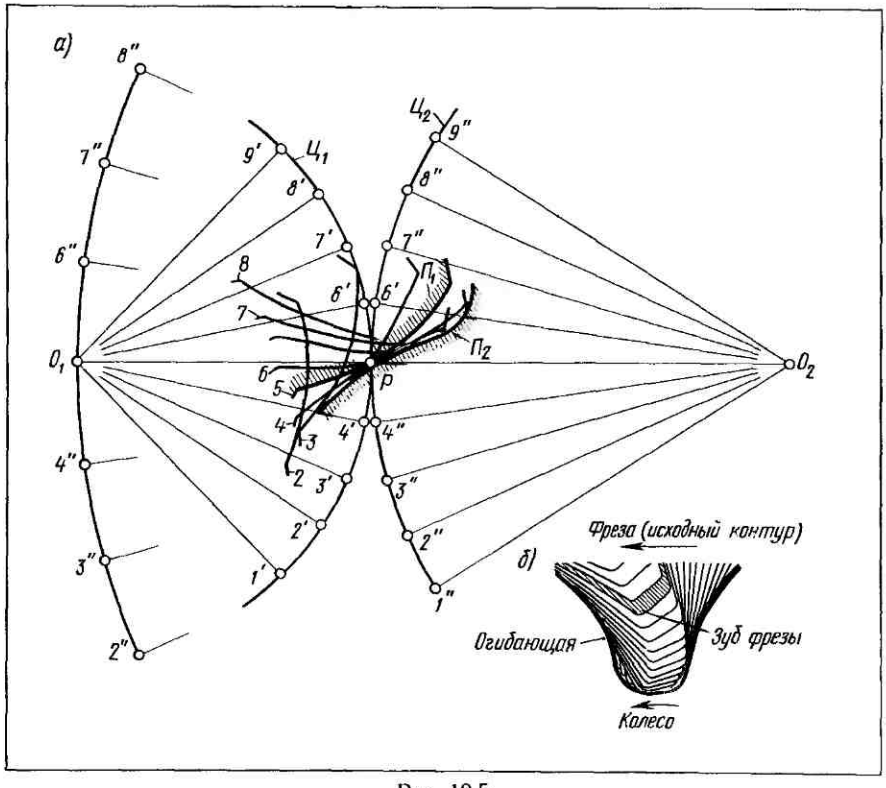


Рис. 12.5

подвижной центроиды $Ц_2$, вычерчивании ряда положений профиля $П_1$ и построении к ним огибающей кривой, которая является искомым профилем $П_2$.

Так как центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ обкатываются друг по другу без скольжения, то длина соответствующих участков центроид должна быть одинаковой: $P1' = P1''$; $P2' = P2''$; $P3' = P3''$; ...; $P8' = P8''$; $P9' = P9''$ или $1'2' = 1''2''$; $2'3' = 2''3''$; ... .

При обращении движения лучи $O_1 1'$; $O_1 2'$; $O_1 3'$; ... ; $O_1 8'$; $O_1 9'$ будут последовательно занимать положения $1''1$, $2''2$, $3''3$, ... , $8''8$, $9''9$. Зафиксировав профиль $П_1$ относительно линии O_1O_2, можно вычертить ряд его последовательных положений. Так, положение линии O_1O_2 при обращении движения соответственно совпадает с $O_2 1''1$, $O_2 2''2$, $O_2 3''3$, ... , $O_2 8''8$, $O_2 9''9$ и т. д. Огибающая ряда последовательных положений профиля $П_1$ является искомым профилем $П_2$.

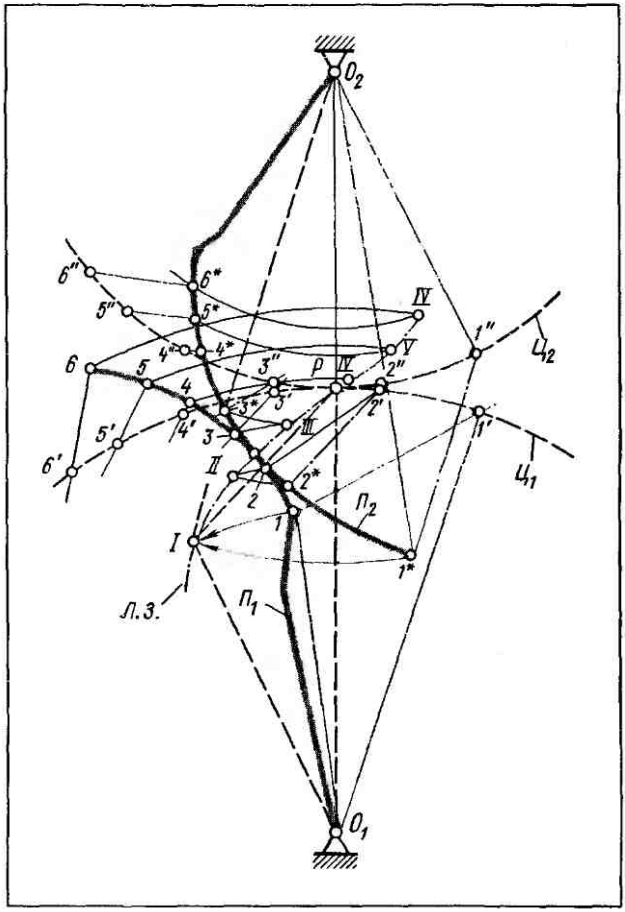


Рис. 12.6

На рис. 12.5, *б* показан пример выполненного построения для исследования станочного зацепления исходного контура инструмента и эвольвентного зубчатого колеса.

Метод построения сопряженного профиля по положениям нормалей (способ Рело). Данный метод основан на основной теореме зацепления и используется в тех случаях, когда можно легко определить положение нормалей к заданному профилю $П_1$ (рис. 12.6).

На профиле $П_1$ выбирают ряд точек *1, 2, 3, ... , 6* и проводят в каждой точке нормаль к профилю до пересечения с центроидой в точках соответственно *1′, 2′, 3′, ... , 6′*. Центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ обкатываются друг по другу без скольжения, поэтому на центроиде $Ц_2$ можно найти соответственные точки *1″, 2″, 3″, ... , 6″* по условию: $\overset{\smile}{P1''} = \overset{\smile}{P1'}$; $\overset{\smile}{P2''} = \overset{\smile}{P2'}$; $\overset{\smile}{P3''} = \overset{\smile}{P3'}$; ... ; $\overset{\smile}{P6''} = \overset{\smile}{P6'}$, которые будут контактировать при прохождении полюса *P* с точками *1′, 2′, 3′, ... , 6′* центроиды $Ц_1$. Положение точек контакта профилей на неподвижной плоскости легко найти поворотом треугольников $11'O_1$; $22'O_1$; $33'O_1$; ... ... ; $66'O_1$ вокруг оси O_1 до положений, при которых бы соответствующая нормаль *11′; 22′; 33′; ... ; 66′* неизменно проходила бы через полюс *P*: PIO_1; $PIIO_1$; $PIIIO_1$; ... ; $PVIO_1$. Геометрическое место точек контакта *I, II, III, ... , VI* является линией зацепления (л. з.).

В этих положениях соответствующие нормали к профилям $П_1$ и $П_2$ являются общими. Если их повернуть относительно оси O_2 на соответствующие углы, то они займут положения *1*1″; 2*2″; ... ; 6*6″*. При этом происходит поворот треугольников IPO_2, $IIPO_2$, ... , $VIPO_2$ до положения $1*1''O_2$; $2*2''O_2$; ... ; $6*6''O_2$.

Соединив полученные при построении точки *1*, 2*, 3*, ... , 6** плавной кривой, получают *искомый профиль $П_2$, сопряженный с заданным профилем $П_1$*.

Следовательно, построение сопряженного профиля по методу Рело основано на использовании понятия о линии зацепления — геометрическом месте контактных точек в неподвижной системе координат, связанной со стойкой.

§ 12.5 Дифференциальная форма основного уравнения зацепления профилей

Условия взаимодействия сопряженных профилей, определяемые основной теоремой зацепления, могут быть представлены в аналитической форме. Такая форма оказывается полезной и даже предпочтительной при проектировании и исследовании зацеплений, являющихся теоретической основой нестандартных передач разнообразного назначения, профилирования режущего инструмента, работающего по методу огибания, и т. п.

Пусть профиль $П_1$ задан явным уравнением $y^{(1)} = f_1(x^{(1)})$ в системе координат $O_1x^{(1)}y^{(1)}$ (см. рис. 3.45).

Уравнение нормали $n - n$, проходящей через точку *B* касания сопряженных профилей, имеет вид

$$(x^{(1)}-x_B^{(1)})+f'(x^{(1)})_B(y^{(1)}-y_B^{(1)})=0\,, \qquad (12.13)$$

где $f'(x^{(1)})_B=(\mathrm{d}y^{(1)}/\mathrm{d}x^{(1)})_B$ — угловой коэффициент касательной в точке B; $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ — текущие координаты точки на нормали; $x_B^{(1)}$, $y_B^{(1)}$ — координаты точки B касания профилей в системе $O_1x^{(1)}y^{(1)}$.

Согласно основной теореме зацеплений нормаль $n-n$ должна проходить через полюс P с координатами

$$x_P^{(1)}=r_{w1}\sin\varphi_{10} \quad \text{и} \quad y_P^{(1)}=-r_w\cos\varphi_{10}\,. \qquad (12.14)$$

Уравнение (12.13) записывают в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\varphi_t=\left(\frac{\mathrm{d}y^{(1)}}{\mathrm{d}x^{(1)}}\right)_B=-\frac{x^{(1)}-x_B^{(1)}}{y^{(1)}-y_B^{(1)}}=\frac{x_P^{(1)}-x_B^{(1)}}{y_P^{(1)}-y_B^{(1)}}\,. \qquad (12.15)$$

С учетом соотношений (12.14) уравнение (12.15) можно записать в такой форме:

$$(x_B^{(1)}-r_{w1}\cos\varphi_{10})+(\mathrm{d}y^{(1)}/\mathrm{d}x^{(1)})_B(y_B^{(1)}+r_{w1}\sin\varphi_{10})\,. \qquad (12.16)$$

Это уравнение нормали к заданному профилю Π_1, проходящей через полюс P в момент зацепления сопряженных профилей, иногда называют *уравнением зацепления в дифференциальной форме.*

Радиус центроиды r_{w1} можно выразить через межосевое расстояние a_w и передаточное отношение $u_{21}=\omega_2/\omega_1$ следующим соотношением:

$$r_{w1}=a_w\frac{u_{21}}{u_{21}+1} \qquad (12.17)$$

Это соотношение (12.17) подставляют в (12.16) и приводят к следующему виду:

$$\begin{gathered}x_B^{(1)}+u_{21}(x_B^{(1)}-a_w\cos\varphi_{10})+(\mathrm{d}y^{(1)}/\mathrm{d}x^{(1)})_B\times\\ \times[y_B^{(1)}+u_{21}(y_B^{(1)}+a_w\sin\varphi_{10})]=0\,.\end{gathered} \qquad (12.18)$$

Дифференциальное уравнение зацепления профилей (12.18) позволяет определить угол φ_{10} при заданных параметрах передачи: межосевом расстоянии a_w, передаточном отношении u_{21} и уравнении одного из профилей Π_1: $y^{(1)}=f(x^{(1)})$.

Координаты точки K контакта находят в неподвижной системе координат $O_1x^{(0)}y^{(0)}$, связанной со стойкой, преобразованием координаты из матричного уравнения следующего вида:

$$\bar{\mathbf{r}}_K^{(0)}=\mathbf{M}_{10}\bar{\mathbf{r}}_B^{(1)}\,, \qquad (12.19)$$

где

$$\bar{\mathbf{r}}_K^{(0)}=\begin{vmatrix}x_K^{(0)}\\ y_K^{(0)}\\ 1\end{vmatrix};\quad \bar{\mathbf{r}}_B^{(1)}=\begin{vmatrix}x_B^{(1)}\\ y_B^{(1)}\\ 1\end{vmatrix};\quad \mathbf{M}_{10}=\begin{vmatrix}\cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0\\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Искомые координаты точки K определяют *уравнение линии зацепления — геометрического места точек контакта:*

$$\begin{aligned}x_K^{(0)}&=x_B^{(1)}\cos\varphi_{10}-y_B^{(1)}\sin\varphi_{10}\,;\\ y_K^{(0)}&=x_B^{(1)}\sin\varphi_{10}+y_B^{(1)}\cos\varphi_{10}\,.\end{aligned} \qquad (12.20)$$

Координаты точки B на профиле Π_2, являющемся сопряженным заданному профилю Π_1, находят также с использованием преобразования координат путем перехода от неподвижной $O_1x^{(0)}y^{(0)}$ к подвижной системе координат $O_2x^{(2)}y^{(2)}$, используя матричную форму записи:

$$\bar{\mathbf{r}}_B^{(2)} = \mathbf{M}_{02}\bar{\mathbf{r}}_K^{(0)}, \tag{12.21}$$

где

$$\mathbf{r}_B^{(2)} = \begin{vmatrix} x_B^{(2)} \\ y_B^{(2)} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{r}_K^{(0)} = \begin{vmatrix} x_K^{(0)} \\ y_K^{(0)} \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{02} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{20} & -\sin\varphi_{20} & -a_w\cos\varphi_{20} \\ \sin\varphi_{20} & \cos\varphi_{20} & a_w\sin\varphi_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В окончательном виде получают:

$$\begin{aligned} x_B^{(2)} &= x_K^{(0)}\cos\varphi_{20} + y_K^{(0)}\sin\varphi_{20} - a_w\cos\varphi_{20}; \\ y_B^{(2)} &= -x_K^{(0)}\sin\varphi_{20} + y_K^{(0)}\cos\varphi_{20} + a_w\sin\varphi_{20}. \end{aligned} \tag{12.22}$$

В последнем выражении угол φ_{20} определяют из соотношения:

$$\varphi_{20} = \int_0^{\varphi_{10}} u_{21}\mathrm{d}\varphi_{10}. \tag{12.23}$$

При постоянном передаточном отношении u_{21} это соотношение приводится к частному случаю: $\varphi_{20} = u_{21}\varphi_{10}$.

§ 12.6 Производящие поверхности

При расчете геометрических параметров элементов высшей кинематической пары учитывают технологические возможности изготовления деталей на формообразующих станках (металлорежущих, прокатных станах, прессах и т. д.). Геометрия соответствующего формообразующего инструмента тесным образом связана с производящими поверхностями. Для инструментов, осуществляющих процесс формообразования путем срезания стружки, такой производящей поверхностью является воображаемая поверхность, содержащая режущие кромки инструмента или образуемая при их главном движении, необходимом для резания. Если режущие кромки — прямые, а главное движение — прямолинейное, то производящей поверхностью является плоскость. Если режущие кромки криволинейные, а главное движение — прямолинейное, то производящей поверхностью является цилиндрическая поверхность (например, эвольвентная поверхность для долбяков).

Зацепление проектируемой поверхности зубьев с производящей поверхностью по аналогии с зацеплением нарезаемого колеса с производящей поверхностью режущего инструмента называют станочным зацеплением. Этот термин был предложен В. А. Гавриленко, крупным ученым, обобщившим и развившим основные положения теории зацепления эвольвентных передач [13].

Сущность станочного зацепления заключается в том, что *производящая поверхность* (поверхность режущих кромок инструмента) *и проектируемая поверхность зуба* («нарезаемого» колеса) *имеют такое же относительное движение, какое имели бы зубчатые колеса при зацеплении друг с другом при взаимодействии аксоидных поверхностей.*

При нарезании цилиндрических зубчатых колес оси производящего колеса (т. е. воображаемого зубчатого колеса, у которого боковые поверхности являются производящими поверхностями) и проектируемого («нарезаемого») колеса параллельны между собой и аксоидами являются цилиндры. Если производящее колесо имеет конечное число зубьев, то режущими инструментами являются долбяк (рис. 12.7, *е*), абразивный хон (рис. 12.7, *ж*), которыми можно обрабатывать боковые поверхности зубьев колес с различными числами зубьев (рис. 12.7, *з*). При бесконечно большом радиусе аксоида производящего колеса инструмент должен иметь бесконечно большое число зубьев, т. е. превратиться в *рейку*. В этом случае инструментом обычно являются червячная фреза (рис. 12.7, *б*) или абразивный червячный круг (рис. 12.7, *г*), у которых реечный производящий контур (рис. 12.7, *д*) расположен на винтовой поверхности. Частным случаем является инструмент, называемый зуборезной гребенкой (рис. 12.7, *а*) или пара тарельчатых шлифовальных кругов (рис. 12.7, *в*). Главным движением резания у долбяка, гребенки и абразивного тона является поступательное движение, а у червячной фрезы и шлифовальных кругов — вращательное движение.

В процессе движения огибания (обкатки) основной шаг инструмента по профильной нормали соответствует основному шагу проектируемого («нарезаемого») колеса. Процесс перехода от формообразования одного зуба к другому в процессе обкатки осуществляется автоматически при непрерывном относительном движении (рис. 12.7, *д, з*).

Реечный контур, принятый в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев семейства зубчатых колес, представителем которого он является, называют исходным контуром. Исходный контур является объектом стандартизации, ибо он определяет геометрию зуборезного инструмента и зубчатых колес.

При проектировании конических передач используют станочные зацепления, у которых аксоидами производящих поверхностей являются конические поверхности. Оси аксоидных конусов производящего колеса и проектируемого («нарезаемого») колеса пересекаются. Наиболее употребительным при расчетах является част-

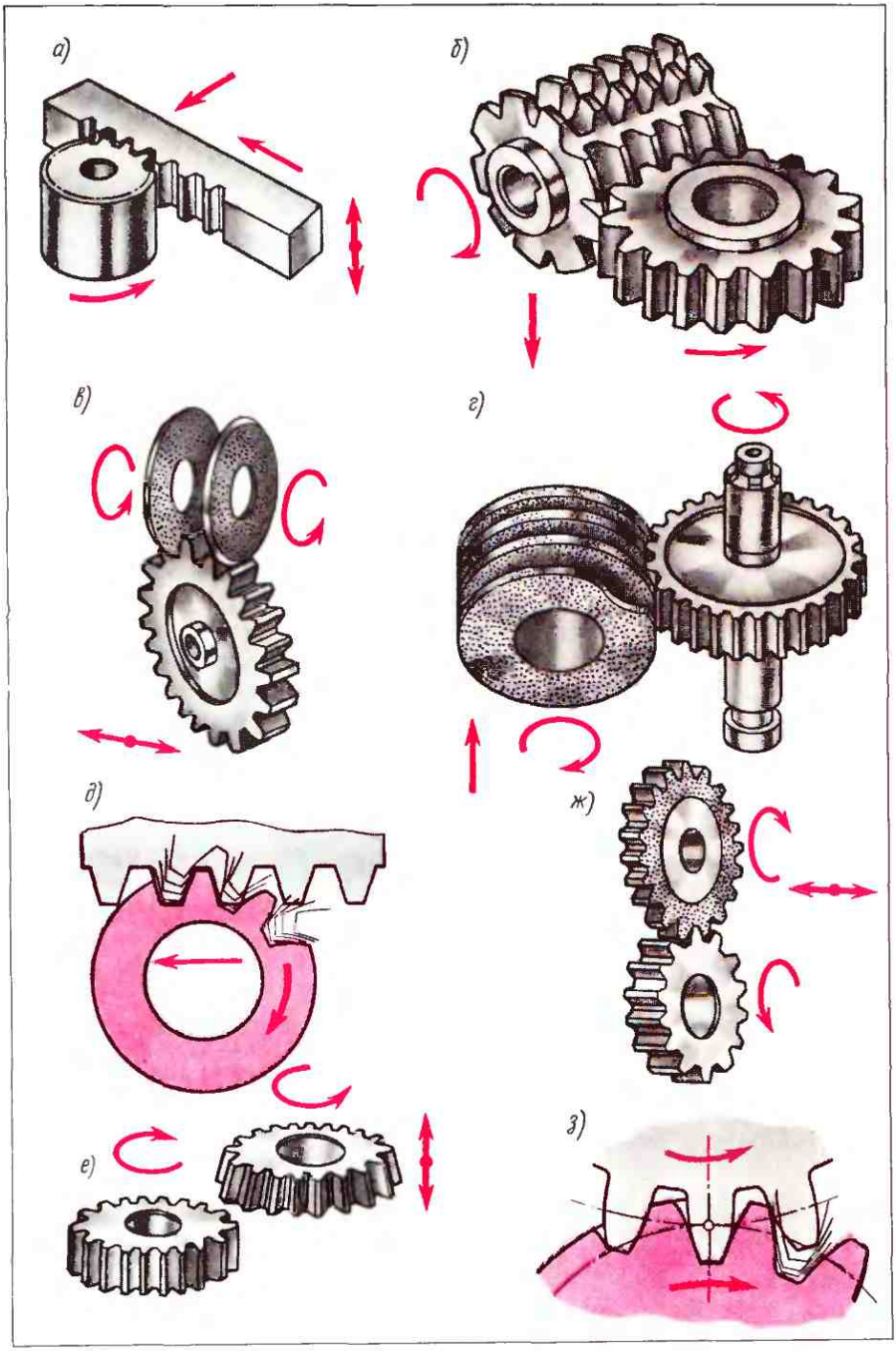


Рис. 12.7

ный случай, когда аксоидом производящего колеса является плоскость, имеющая ось вращения, проходящую через вершину аксоида. Колесо с плоским аксоидом называется теоретическим исходным плоским колесом. Развертка торцового сечения такого исходного плоского колеса имеет контур зубьев условной рейки, называемый торцовым теоретическим (номинальным) исходным контуром.

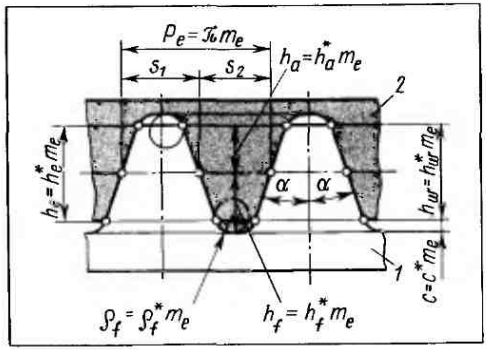


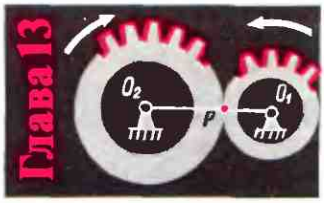
Рис. 12.8

Расчет любого зубчатого зацепления предполагает использование двух станочных зацеплений с соответствующими производящими колесами и производящими механизмами огибания. Если производящие поверхности могут быть приведены в такое положение, что они совпадают между собой при наложении друг с другом во всех точках, то такие поверхности называются конгруэнтной производящей парой. На рис. 12.8 показаны конгруэнтные исходные контуры *1* и *2* реечного профиля. Использование принципа конгруэнтной производящей пары упрощает анализ сопряженности боковых поверхностей в зацеплении, рода контакта, наличия или отсутствия интерференции профилей.

Идея построения теории зацепления на базе производящей пары была выдвинута Т. Оливье, опубликовавшим в 1877 г. работу «Аналитический метод решения вопросов о зацеплениях» и очень четко и последовательно использована при разработке теории эвольвентного зацепления научной школой МВТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф. В. А. Гавриленко.

Интерференция в рабочем зацеплении отсутствует, если использовать конгруэнтную производящую пару. Производящая пара обеспечивает касание боковых поверхностей зубьев по линии, так как совпадают станочные мгновенные контактные линии.

В случае использования пар с неконгруэнтными производящими поверхностями в передаче возможны как точечный, так и линейный контакт, но не исключена и интерференция боковых поверхностей зубьев. В таких случаях необходим дополнительный анализ проектируемой передачи по тем или иным показателям.



Цилиндрические зубчатые передачи

Передача непрерывного вращения от одного вала к другому с заданным передаточным отношением чаще всего осуществляется с помощью зубчатых механизмов. Зубчатые механизмы получили очень широкое применение как в машиностроении, так и в приборостроении благодаря большой надежности и точности в воспроизведении заданного закона движения. Если оси вращения валов параллельны, то применяется цилиндрическая зубчатая передача, аксоидами колес которой являются цилиндры (§ 12.1). Такая передача относится к категории плоских механизмов. В данной главе излагаются основы синтеза цилиндрической зубчатой передачи по заданному передаточному отношению. Эти основы называются геометрическим расчетом зубчатой передачи.

§ 13.1 Элементы зубчатого колеса

Цилиндрические зубчатые передачи (см. § 2.3) могут быть внешнего (рис. 2.6, *а*) и внутреннего (рис. 2.6, *б*) зацеплений. Следует также указать реечное зацепление (рис. 2.6, *в*), разграничительное между внешним и внутренним зацеплениями. Простая зубчатая передача имеет два подвижных звена, которыми являются зубчатые колеса. Рассмотрим элементы зубчатого колеса (рис. 13.1).

Поверхность (*1*), отделяющая зубья от тела зубчатого колеса, называется поверхностью впадин зубьев. Поверхность (*2*), ограничивающая зубья со стороны, противоположной телу зубчатого колеса, — поверхность вершин зубьев. Пространство между двумя соседними зубьями (*3*) — впадина. Поверхность, ограничивающая зуб со стороны впадины (*4*), называется боковой поверхностью зуба.

Боковая поверхность состоит из главной (*5*) и переходной (*6*) поверхностей. Главная поверхность — это та часть боковой поверхности зуба, которая, взаимодействуя с главной поверхностью другого зуба, обеспечивает заданное передаточное отношение. Переходная поверхность соединяет главную поверхность с поверхностью впадин.

Главной поверхностью чаще всего является *эвольвентная* поверхность, так как среди цилиндрических передач особое распространение получили эвольвентные цилиндрические передачи. Объясняется это тем, что они имеют весьма значительные преимущества перед другими передачами. Так, эвольвентные передачи допускают, в определенных пределах, изменение межосевого рас-

стояния, сохраняя при этом постоянство передаточного отношения, чего другие передачи не допускают, и обладают хорошими эксплуатационными качествами. Изготовление эвольвентных колес и инструмента для их нарезания является наиболее простым, что имеет очень важное практическое значение.

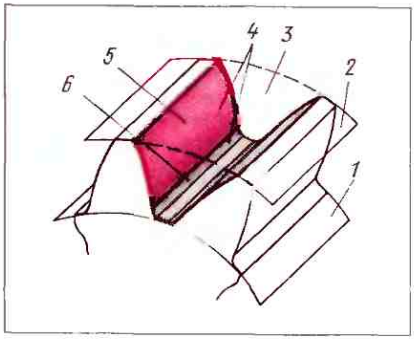


Рис. 13.1

Рассмотрим образование эвольвентных поверхностей, которые будут являться главными поверхностями прямого и косого зубьев. На рис. 13.2, *а* в перспективе показана главная поверхность прямого зуба, которую можно представить как совокупность совершенно одинаковых эвольвент ($Э, Э'$), расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси колеса. Эти эвольвенты являются траекториями точек образующей прямой KK', принадлежащей плоскости N, которая перекатывается по основному цилиндру *1* без скольжения. Начальные точки всех эвольвент располагаются на образующей K_bK_b' основного цилиндра. Пересечение главной поверхности прямого зуба с любым соосным цилиндром *2* происходит по образующей этого цилиндра (например, прямая KK'). Эта прямая параллельна оси колеса и называется линией прямого зуба. Главная поверхность прямого зуба является эвольвентной линейчатой цилиндрической поверхностью.

Главная поверхность косого зуба (рис. 13.2, *б*) также может быть представлена как совокупность одинаковых эвольвент ($Э, Э'$), расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси колеса; однако в этом случае образующая прямая KK' расположена на плоскости N под некоторым углом к оси колеса. Благодаря этому при перекатывании плоскости N по основному цилиндру *1* без скольжения начальные точки эвольвент располагаются по винтовой линии K_bK_b' на основном цилиндре. В пересечении с любым соосным цилиндром *2* главная поверхность косого зуба образует винтовую линию KK^*, называемую линией косого зуба. Главная поверхность косого зуба является эвольвентной линейчатой винтовой поверхностью.

Таким образом, основное сходство главных поверхностей прямого и косого зубьев состоит в том, что в любом торцовом сечении, т. е. в сечении плоскостью, перпендикулярной оси колеса, они имеют эвольвенту.

На рис. 13.2, *в* дано верхнее торцовое сечение, в котором изображена основная окружность (радиус r_b) и прямая $n—n$, касательная к ней. При обкатывании прямой $n—n$ по основной окружности без скольжения точка K_y этой прямой описывает правую ветвь эвольвенты K_bK_y. При обкатывании прямой $n—n$ в другом направлении точка K_y описывает левую ветвь эвольвенты K_bK_y'.

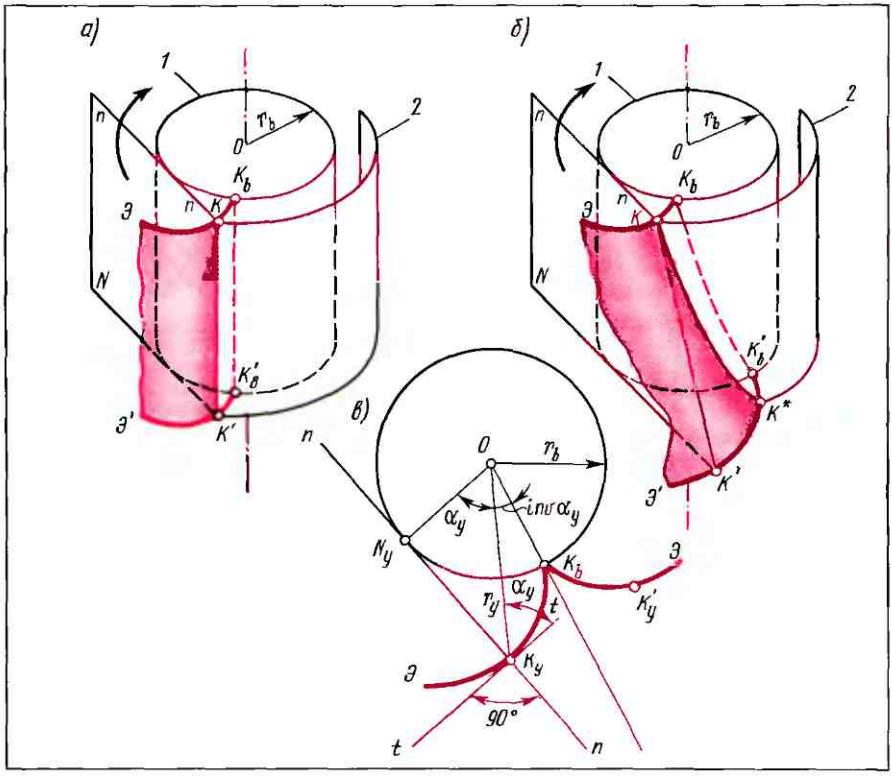


Рис. 13.2

Острый угол между касательной к профилю зуба в точке K_y и ее радиусом-вектором OK_y, обозначенный через α_y, носит название угла профиля. Можно показать, что $\angle K_y O N_y = \alpha_y$. Угол, образованный начальным радиусом-вектором OK_b и текущим радиусом-вектором OK_y, называется эвольвентным углом и обозначается $\text{inv}\alpha_y$. Любая точка K_y эвольвенты вполне определяется двумя параметрами: радиусом-вектором r_y и эвольвентным углом $\text{inv}\alpha_y$.

На основании того, что прямая n—n перекатывается по основной окружности без скольжения, можно составить равенство $\overset{\smile}{K_b N_y} = \overline{K_y N_y}$, подставив в которое значение дуги и отрезка, будем иметь

$$r_b (\text{inv}\ \alpha_y + \alpha_y) = r_b \text{tg}\alpha_y,$$

откуда

$$\text{inv}\alpha_y = \text{tg}\alpha_y - \alpha_y. \qquad (13.1)$$

Связь между r_y и углом α_y устанавливается из $\triangle K_y O N_y$ зависимостью

$$r_y = r_b / \cos\alpha_y. \qquad (13.2)$$

Формулы (13.1) и (13.2) выражают уравнение эвольвенты в параметрической форме. Если исключить из этих уравнений параметр α_y, то будем иметь прямую связь между $\text{inv}\alpha_y$ и r_y, выраженную через r_b. Это обстоятельство указывает на то, что эвольвента вполне определяется основной окружностью. Поэтому для аналитического определения координат эвольвентного профиля или для графического построения его необходимо и достаточно задать только *радиус основной окружности.*

Для геометрической теории зацепления важное значение имеют следующие основные свойства эвольвенты (рис. 13.2, *в*):

а) эвольвента — симметричная кривая, имеющая две ветви, сходящиеся в точке K_b, расположенной на основной окружности. Следовательно, эвольвента не имеет точек внутри основной окружности;

б) точка N_y является мгновенным центром скоростей прямой $n—n$ и центром кривизны эвольвенты в точке K_y. Поэтому нормалью к эвольвенте в любой ее точке является прямая, касательная к основной окружности;

в) отрезок N_yK_y есть радиус кривизны ρ_y эвольвенты в точке K_y;

г) угол профиля α_y и радиус кривизны ρ_y в начальной точке эвольвенты (K_b) равны нулю. По мере удаления точек эвольвенты от основной окружности угол профиля увеличивается. При этом увеличиваются и радиусы кривизны эвольвенты;

д) при увеличении радиуса основной окружности эвольвентный профиль постепенно теряет свою кривизну и при $r_b = \infty$ эвольвента преобразуется в прямую линию.

На рис. 13.3, *а* изображено зубчатое колесо с внешними зубьями. Наибольший радиус r_a имеет окружность вершин. На рис. 13.3, *б* изображено зубчатое колесо с внутренними зубьями. В этом случае тело колеса имеет форму кольца, внутрь полости которого зубья обращены своими вершинами. Поэтому радиус r_a окружности вершин внутренних зубьев меньше радиуса r_f окружности впадин, который является, таким образом, наибольшим. На рис. 13.3 изображены также эвольвентный профиль зуба, основная окружность, на базе которой он построен (радиус r_b), а также делительная окружность радиуса r и окружность произвольного радиуса r_y.

На рис. 13.3 буквой α обозначен $\angle KON$, равный углу профиля зуба в точке K, находящейся на делительной окружности прямозубого колеса. В Советском Союзе этот угол стандартизован и равен 20°. Таким образом, делительная окружность прямозубого колеса является той окружностью, которая пересекает профиль зуба в точке, для которой угол профиля равен стандартному углу α=20°.

Если длину окружностей — делительной, основной и произвольного радиуса — поделить на число зубьев z, то получим расстояния между профилями двух соседних зубьев, называемые шагом, т. е. получим шаг по делительной окружности p, шаг по основной окружности p_b и шаг по окружности произвольного радиуса p_y. Дуги p, p_b и p_y соответствуют одному и тому же угловому шагу $\tau = p/r = p_b/r_b = p_y/r_y$. Отсюда следует, что шаги пропорцио-

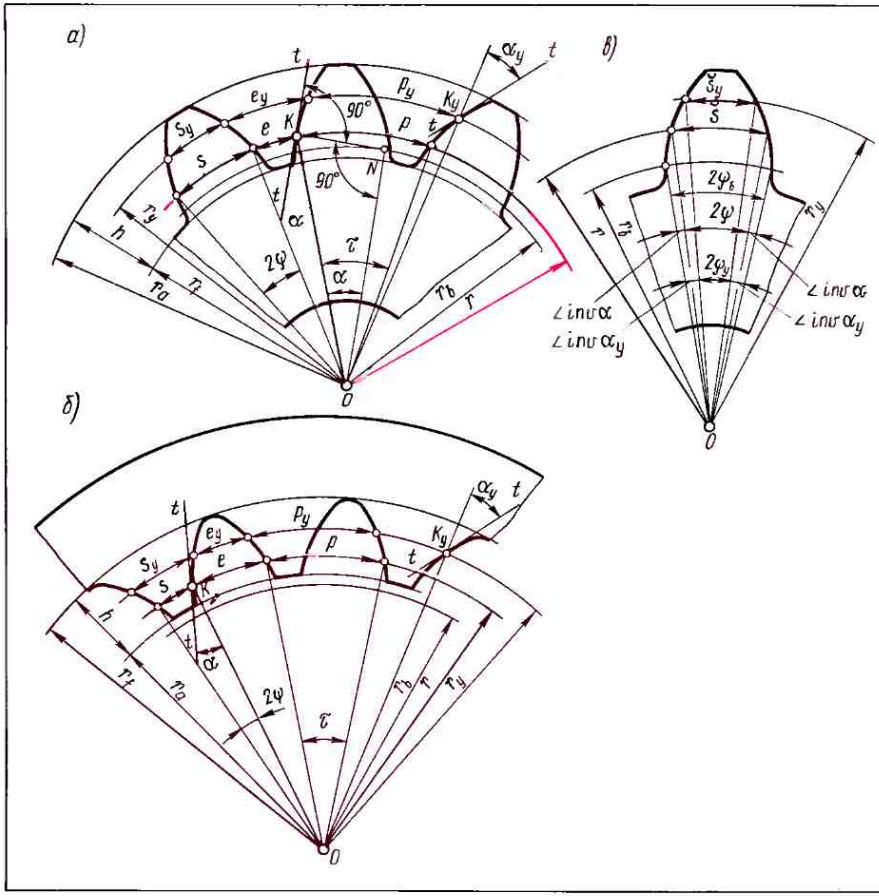


Рис. 13.3

нальны радиусам соответствующих окружностей. Угловой шаг можно выразить и так: $\tau = 360°/z$.

Важным элементом колеса является шаг по делительной окружности. Выразим длину делительной окружности через шаг p и число зубьев колеса z: $2\pi r = pz$. Отсюда диаметр делительной окружности $d = (p/\pi)z = mz$. Отношение p/π обозначают буквой m и называют модулем зубьев колеса (единица модуля — мм). Модуль стандартизован, причем стандарт предусматривает целый ряд значений модуля. Через модуль выражают радиус делительной окружности и все линейные размеры как колеса, так и передачи:

$$r = mz/2; \qquad (13.3)$$

$$p = \pi m. \qquad (13.4)$$

Радиус основной окружности находится из $\triangle KON$ (рис. 13.3, *а*):

$$r_b = r\cos\alpha = (mz/2)\cos\alpha. \qquad (13.5)$$

Радиус произвольной окружности колеса на основании равенств (13.2) и (13.5) выражается следующим образом:

$$r_y = r\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y} = \frac{mz}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y}. \qquad (13.6)$$

Так как шаги пропорциональны радиусам, то шаг по основной окружности

$$p_b = p\cos\alpha = \pi m\cos\alpha,$$

а шаг по окружности произвольного радиуса

$$p_y = p\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y} = \pi m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y}.$$

Основными параметрами колес являются модуль m и число зубьев z. Размеры делительных окружностей характеризуют размеры колес и передачи. Поскольку модуль определяется из прочностного расчета, а число зубьев назначает конструктор, то для уменьшения габаритов зубчатой передачи надо *снижать числа зубьев* ее колес [см. уравнение (13.3)].

Для колес с внутренними зубьями радиусы основной и делительной окружностей и шаги по этим окружностям определяют по тем же формулам, что и для колеса с внешними зубьями.

Шаг зубьев колеса по любой окружности можно представить как сумму толщины зуба s_y и ширины впадины e_y, т. е.

$$p_y = s_y + e_y;\ p = s + e = \pi m.$$

Колеса одного и того же модуля, имеющие одно и то же число зубьев, могут отличаться друг от друга толщиной зуба по делительной окружности.

Различают: 1) колеса с равноделенным шагом, у которых по делительной окружности толщина зуба равна ширине впадины и, следовательно, половине шага $s = e = \pi m/2$;

2) колеса, у которых $s > e$, т. е. $s > \pi m/2$;

3) колеса, у которых $s < e$, т. е. $s < \pi m/2$.

На рис. 13.3, *в* изображены центральные углы 2ψ и $2\psi_y$, соответствующие дуговым толщинам зуба s и s_y, а также эвольвентные углы $\mathrm{inv}\alpha$ и $\mathrm{inv}\alpha_y$. Из рисунка следует

$$\psi_b = \psi + \mathrm{inv}\alpha = \psi_y + \mathrm{inv}\alpha_y,$$

отсюда

$$\psi_y = \psi + \mathrm{inv}\alpha - \mathrm{inv}\alpha_y.$$

Выражая угловые толщины через линейные $\psi_y = s_y/(2r_y)$ и $\psi = s/(2r)$ и подставляя их значения в уравнение, ранее составленное для ψ_y, получим формулу для определения толщины внешнего зуба:

$$s_y = r_y(s/r + 2\mathrm{inv}\alpha - 2\mathrm{inv}\alpha_y). \qquad (13.7)$$

Аналогично составляется формула для определения толщины s_y внутреннего зуба:

$$s_y = r_y(s/r - 2\mathrm{inv}\alpha + 2\mathrm{inv}\alpha_y).$$

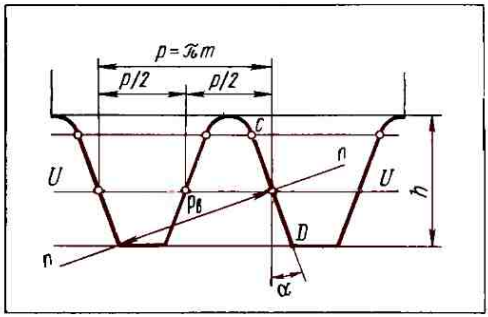


Рис. 13.4

Если безгранично увеличивать число зубьев колеса, а следовательно, и радиусы всех окружностей, то в пределе при $z = \infty$ все окружности преобразуются в параллельные прямые, а эвольвентный профиль зуба станет *прямолинейным* (см. свойства эвольвенты в § 13.1), что имеет очень большое практическое значение. При $z = \infty$ получим зубчатую рейку (рис. 13.4). В любом месте прямолинейной части зуба рейки профильный угол будет одним и тем же, равным α.

Прямая UU, по которой толщина зуба рейки в точности равна ширине впадины, т. е. равна половине шага, называется делительной прямой. Шаг зубьев рейки, измеренный по любой прямой, параллельной делительной, имеет одинаковое значение $p=\pi m$. Шаг рейки, замеренный по нормали $n—n$ к ее профилю, равен $\pi m \cos\alpha$, т. е. равен шагу p_b по основной окружности колеса, модуль которого такой же, как и модуль рейки.

§ 13.2 Элементы и свойства эвольвентного зацепления

На рис. 13.5, *а, в* изображены внешнее и внутреннее зацепления двух эвольвент $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$, касающихся друг друга в точке K.

Из свойств эвольвенты (см. § 13.1) следует, что прямая KN_1 (рис. 13.5, *а*), проведенная от точки K касательно к основной окружности радиуса r_{b1}, является нормалью к эвольвенте $\mathcal{Э}_1$. На том же основании прямая KN_2, проведенная касательно к основной окружности радиуса r_{b2}, является нормалью к эвольвенте $\mathcal{Э}_2$. Отрезки KN_1 и KN_2 составляют общую прямую N_1N_2, касательную к двум основным окружностям. Следовательно, прямая N_1N_2 будет общей нормалью к двум эвольвентам, которые по этой причине являются сопряженными и имеют точку контакта на прямой N_1N_2.

Рассматривая новое положение этих эвольвент, контактирующих в точке K', путем тех же рассуждений убеждаемся, что эвольвенты $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$ имеют общую нормаль, представленную той же прямой N_1N_2, а стало быть, и точка их контакта будет находиться на этой прямой. Следовательно, прямую N_1N_2 можно рассматривать, как геометрическое место точек контакта сопряженных эвольвент $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$. Полученный результат полностью справедлив и для внутреннего зацепления эвольвент $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$ (рис. 13.5, *в*).

Таким образом, в процессе зацепления двух эвольвентных про-

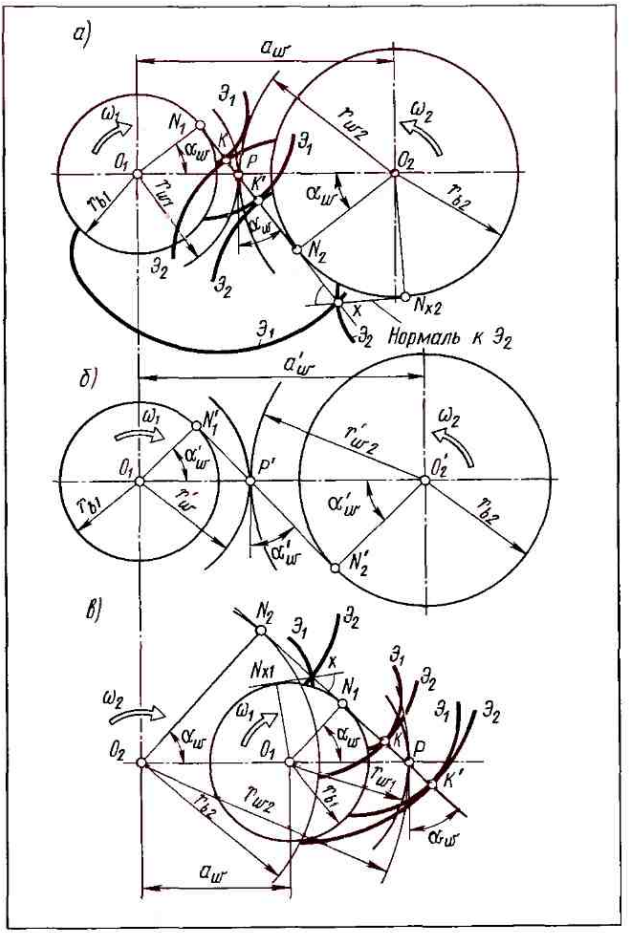


Рис. 13.5

филей их общая нормаль, как касательная к двум основным окружностям, не меняет своего положения, а потому не изменяет своего положения и полюс P. Этим самым доказывается первое, главнейшее свойство эвольвентного зацепления, а именно: *эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточного отношения в процессе зацепления,* поскольку из теоремы Виллиса о мгновенном передаточном отношении (см. § 12.1) следует, что соотношение

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = \mp O_2P/O_1P = \text{const}.$$

Рассмотрим основные элементы эвольвентного зацепления. Ими являются:

линия зацепления — прямая N_1N_2 — траектория точки K контакта профилей в ее абсолютном движении (т. е. в движении по отношению к неподвижному звену зубчатой передачи);

полюс зацепления — точка P пересечения линии зацепления с межосевой линией O_1O_2, определяющая мгновенный центр скоростей двух колес в их движении относительно друг друга;

начальные окружности, касающиеся в полюсе зацепления; радиусы их обозначаются r_{w1} и r_{w2}. Начальные окружности в процессе зацепления двух профилей обкатываются друг по другу *без скольжения*, т. е. линейные скорости точек, лежащих на обеих начальных окружностях, одинаковы;

угол зацепления — острый угол α_w между линией зацепления и прямой, перпендикулярной межосевой линии.

На рис. 13.5 показаны центральные углы N_1O_1P и N_2O_2P, равные углу зацепления. Из тех же рисунков следует, что угол профиля в точке эвольвенты, лежащей на начальной окружности, численно равен углу зацепления α_w. Оба угла обозначают одной и той же буквой, однако при этом следует помнить об их смысловом различии, а именно: угол профиля является геометрическим параметром самого профиля, а угол зацепления — кинематическим параметром зацепления двух профилей.

Межосевое расстояние $a_w = r_{w1} + r_{w2}$ для внешнего зацепления и $a_w = r_{w2} - r_{w1}$ для внутреннего зацепления является геометрическим параметром передачи.

Эвольвентное зацепление, как внешнее, так и внутреннее, допускает изменение межосевого расстояния с сохранением ранее предусмотренного передаточного отношения. Для доказательства второго свойства эвольвентного зацепления достаточно рассмотреть две схемы внешнего зацепления, изображенные на рис. 13.5, *а, б*. Оба зацепления имеют одни и те же эвольвенты, т. е. одинаковые основные окружности с радиусами r_{b1} и r_{b2}, но отличаются друг от друга межосевыми расстояниями $a'_w > a_w$ и углами зацепления $\alpha'_w > \alpha_w$.

Для первой схемы (рис. 13.5, *а*):

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O_2P}{O_1P} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -\frac{r_{b2}\cos\alpha_w}{r_{b1}\cos\alpha_w} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}}; \quad (13.8)$$

для второй схемы (рис. 13.5, *б*):

$$u'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O'_2P'}{O_1P'} = -\frac{r'_{w2}}{r'_{w1}} = -\frac{r_{b2}\cos\alpha'_w}{r_{b1}\cos\alpha'_w} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}}. \quad (13.9)$$

Из сопоставления выражений (13.8) и (13.9) следует, что передаточное отношение одинаково для обеих схем и, следовательно, не зависит от изменения величины a_w. Изменение межосевого расстояния сказывается только на величине угла зацепления и радиусов начальных окружностей.

Третье важное свойство эвольвентного зацепления заключается в том, что *при внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряженными только в пределах отрезка N_1N_2 линии зацепления.* Эвольвенты $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$, проходящие через точку x, расположенную вне участка N_1N_2 ниже точки N_2 (рис. 13.5, *а*), не имеют общей нормали. Это означает, что эвольвенты не касаются

в точке x, а пересекаются. То же самое произойдет вне участка N_1N_2 выше точки N_1.

В отличие от внешнего зацепления сопряжение эвольвентных профилей внутреннего зацепления возможно лишь вне участка N_1N_2 линии зацепления (рис. 13.5, *в*). На участке N_1N_2 происходит пересечение эвольвент, так как здесь прямая N_1N_2, являясь нормалью к $Э_2$, не будет таковой к $Э_1$.

В реальной передаче пересечение эвольвент вызывает повышенный износ зубьев и усталостные напряжения в их материале, а в некоторых случаях поломку зубьев или заклинивание передачи. Поэтому в проектируемых зацеплениях, как внешнем, так и внутреннем, возможность пересечения эвольвент должна быть исключена.

§ 13.3 Основные положения станочного зацепления. Реечное станочное зацепление

Способы изготовления зубчатых колес. В настоящее время зубчатые колеса изготавливают способами копирования и огибания.

По первому способу изготовляют зубчатые колеса в основном только с равноделенным шагом. При этом большинство их выполняется с заведомой погрешностью. Второй способ — способ огибания—такими существенными недостатками не обладает: этим способом можно изготовить самые разнообразные зубчатые колеса и притом теоретически точно. Поэтому способ огибания нашел преимущественное распространение и представляет особый интерес для конструктора.

При способе огибания заготовке, из которой изготовляют зубчатое колесо, и режущему инструменту, имеющему зубчатую форму (червячная фреза, гребенка, долбяк), сообщают на станке такие движения относительно друг друга, которые воспроизводят *процесс зацепления*. Это зацепление называют станочным.

Помимо движений, воспроизводящих процесс зацепления, инструменту сообщается еще технологическое движение резания. При этом режущие кромки инструмента описывают зубчатую поверхность, называемую производящей (см. § 12.6). Укажем, что производящая поверхность и изготавливаемая боковая поверхность зуба являются взаимоогибаемыми, откуда сам способ и получил свое наименование.

Если производящую поверхность рассечь плоскостью, перпендикулярной оси нарезаемого колеса, то в сечении получим исходный производящий контур (ИПК). Станочное зацепление есть зацепление ИПК с профилем зуба нарезаемого колеса.

Рассмотрим реечное станочное зацепление, т. е. такое, когда ИПК имеет очертания зубчатой рейки. Эвольвентные кромки этого ИПК прямолинейны (см. § 13.1). Режущий инструмент (чер-

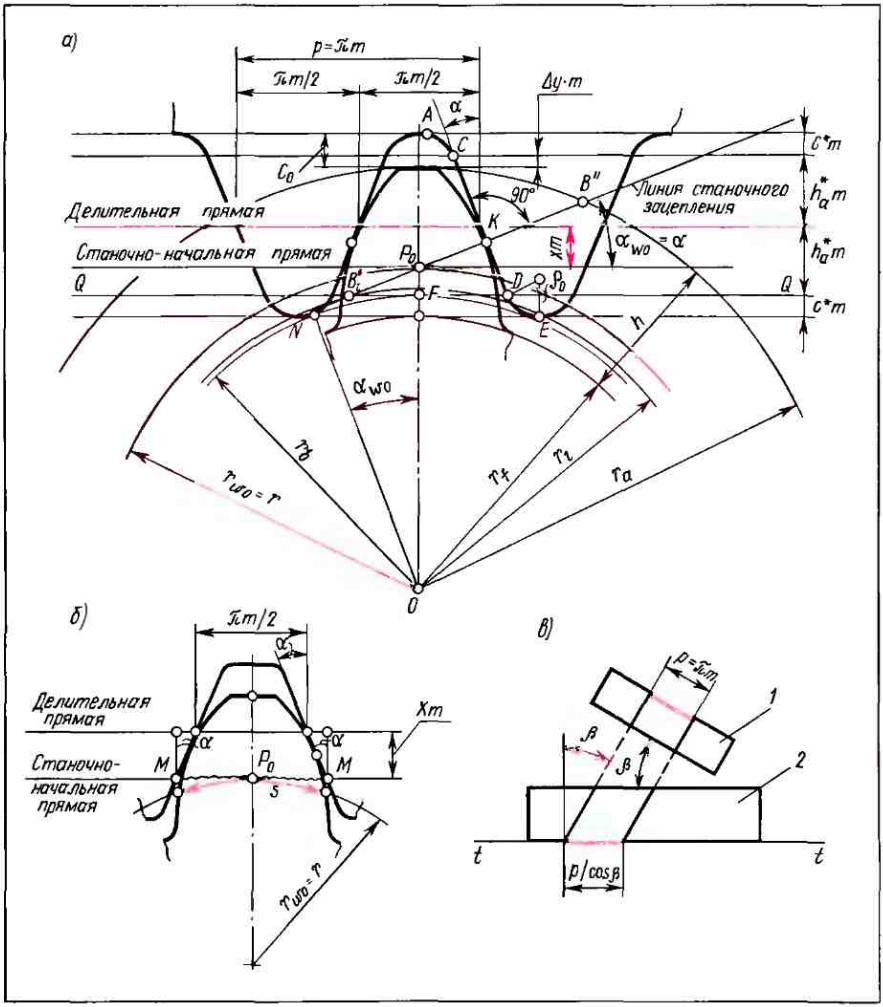


Рис. 13.6

вячная фреза или гребенка), образующий своим главным движением эвольвентный реечный ИПК, обладает очень ценным свойством: его можно изготовить сравнительно дешево и достаточно точно. Геометрия зубьев нарезаемого колеса определяется параметрами ИПК реечного инструмента и его расположением по отношению к колесу.

Исходный производящий контур эвольвентного реечного инструмента. Форма и размеры ИПК стандартизованы. Эвольвентные части профиля зубьев ИПК (рис. 13.6, *а*) прямолинейны и наклонены к оси зуба под углом α. Переходы от прямолинейной части зуба к основанию впадины и к вершине осуществлены по дуге

радиусом ρ_0. Точки сопряжения отмечены на ИПК буквами A, C, D, E. Прямолинейная часть CD является эвольвентной, а скругления AC и DE — неэвольвентной частью контура. Прямая, разделяющая зуб по высоте на две равные части, называется делительной. На ИПК отмечаются еще четыре линии, параллельные делительной прямой и проходящие по основаниям впадин зубьев, по их вершинам и через точки сопряжения C и D. Расстояния между этими прямыми выражают размеры зуба исходного производящего контура по высоте и измеряются соответственно величинами $h_a = h_a^* m$ и $c = c^* m$, где h_a^* — коэффициент высоты зуба, а c^* — коэффициент радиального зазора. Согласно стандарту: $h_a^* = 1{,}0$; $c^* = 0{,}25$. Прямые, проходящие через точки C и D, называются прямыми граничных точек.

Размерами вдоль делительной прямой являются шаг, толщина зуба и ширина впадины. Шаг p исходного производящего контура, измеренный по любой прямой, параллельной делительной, есть величина постоянная, равная πm, где m — стандартный модуль. Толщина зуба ИПК по делительной прямой равна ширине впадины $s_0 = e_0 = \pi m/2$, а вместе они составляют шаг. Угол профиля зуба стандартизован: $\alpha = 20°$. Радиус скругления (дуги DE)

$$\rho_0 = c^* m/(1 - \sin\alpha) \approx 0{,}4m. \qquad (13.10)$$

Таким образом, ИПК реечного инструмента характеризуется четырьмя стандартными параметрами: m, α, h_a^*, c^*.

Реечное станочное зацепление и коэффициент смещения. Реечное станочное зацепление, как и всякое зацепление, имеет начальные линии. Ими являются станочно-начальная прямая рейки и станочно-начальная окружность колеса. Напомним, что станочно-начальные линии катятся друг по другу без скольжения (см. § 13.2). Можно показать, что в реечном станочном зацеплении радиус r_{w0} станочно-начальной окружности равен радиусу делительной окружности r.

Угол реечного станочного зацепления α_{w0} равен профильному углу α исходного производящего контура (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Отметим также, что угол профиля зуба колеса в точке, находящейся на делительной окружности, равен профильному углу α исходного производящего контура.

На станке инструмент можно расположить по-разному относительно нарезаемого колеса. Поэтому в станочном зацеплении делительная прямая ИПК может располагаться различным образом по отношению к делительной окружности колеса: 1) она может касаться делительной окружности — нулевая установка инструмента; 2) быть отодвинутой от нее — положительная установка; 3) пересекать ее — отрицательная установка.

Расстояние между делительной прямой и делительной окружностью называется с м е щ е н и е м инструмента. Его выражают в виде произведения модуля m на коэффициент смещения x и ему присваивают знак. При нулевой установке смещение $mx = 0$, $x = 0$. При положительной установке $mx > 0$, $x > 0$. При отрицательной

установке смещением является стрелка сегмента, которую делительная прямая отсекает от делительной окружности; в этом случае $mx < 0$, $x < 0$.

На рис. 13.6, *а* изображено реечное станочное зацепление при нарезании зубчатого колеса с положительным смещением и указаны все элементы производящего исходного контура, нарезаемого колеса и станочного зацепления.

Линия реечного станочного зацепления начинается в точке N и через полюс P_0 уходит в бесконечность. Длина ее активной части ограничена точками B_1' и B'', находящимися на пересечении линии станочного зацепления с прямой QQ граничных точек и окружностью вершин (рис. 13.6, *а*).

Профиль зуба колеса имеет эвольвентную и неэвольвентную части. Переход эвольвентного профиля в неэвольвентный находится на окружности граничных точек колеса, радиус которой $r_1 = OB_1'$.

Расстояние между окружностью вершин зубьев колеса и прямой впадин ИПК представляет собой станочный зазор c_0. Величина его складывается из двух частей: c^*m и $\Delta y \cdot m$, где Δy — коэффициент уравнительного смещения.

Размеры изготовляемого зубчатого колеса с внешними зубьями. Диаметр вершин прямозубого колеса (рис. 13.6, *а*):

$$d_a = 2r_a = m(z + 2h_a^* + 2x - 2\Delta y).$$

Высота зуба из того же рисунка

$$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y).$$

Если $x = 0$ (смещения инструмента нет) и $\Delta y = 0$, то $d_a = m(z + 2h_a^*)$, $h = m(2h_a^* + c^*)$, и при стандартных значениях $h_a^* = 1{,}0$ и $c^* = 0{,}25$ получим $d_a = m(z + 2)$ и $h = 2{,}25m$.

Станочно-начальная прямая перекатывается по станочно-начальной окружности (она же делительная) без скольжения. Поэтому толщина зуба s по делительной окружности нарезаемого колеса равна ширине MM впадины по станочно-начальной прямой ИПК (рис. 13.6, *б*).

Отрезок MM складывается из ширины впадины ИПК по делительной прямой $e_0 = \pi m/2$ и двух катетов, каждый из которых равен $xm \operatorname{tg}\alpha$, поэтому

$$s = \pi m/2 + 2xm \operatorname{tg}\alpha. \qquad (13.11)$$

Если инструмент установлен относительно колеса без смещения ($mx = 0$), то $s = \pi m/2$; значит, толщина зуба s по делительной окружности колеса равна ширине впадины e, так как $s + e = \pi m$. В этом случае получается колесо с равноделенным шагом $s = e$. Если $mx > 0$, то $s > \pi m/2$ и, следовательно, $s > e$. Если $mx < 0$, то $s < \pi m/2$, и поэтому $s < e$.

При нарезании косозубых колес применяется *тот же* инструмент *1*, что для прямозубых, но устанавливается он *наклонно* под углом β по отношению к торцовой плоскости t–t колеса (заготовки) (рис. 13.6, *в*). На этом рисунке показана развертка *2* делительного

цилиндра косозубого колеса, в результате чего винтовые линии косого зуба преобразовались в прямые линии. В торцовой плоскости $t—t$ косозубого колеса вследствие наклона инструмента шаг увеличивается и становится равным $p/\cos\beta$, а следовательно, и модуль в торцовой плоскости будет нестандартным, равным $m/\cos\beta$. Поэтому при расчете линейных размеров косозубого колеса по формулам, в которые входит стандартный модуль, вместо m следует подставлять $m/\cos\beta$, например делительный диаметр косозубого колеса $d=zm/\cos\beta$.

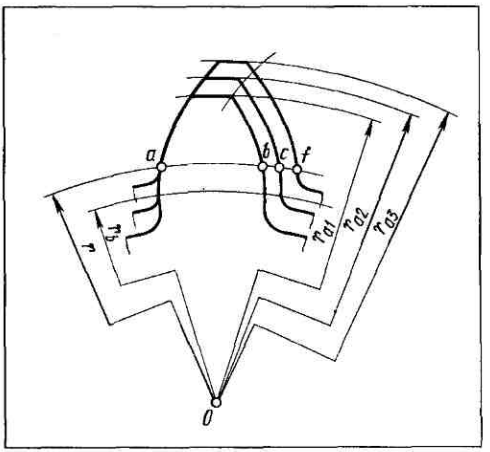


Рис. 13.7

Обратим внимание на размеры h_a^*m, c^*m, xm, $\Delta y \cdot m$, перпендикулярные делительной прямой (рис. 13.6, *а*), которые принято называть размерами по высоте. На рис. 13.6, *в* эти размеры расположены перпендикулярно плоскости рисунка. Поэтому при повороте инструмента на угол β размеры по высоте не изменяются. А отсюда следует, что когда в уравнениях встречаются произведения h_a^*m, c^*m, xm, $\Delta y \cdot m$, то их при расчете косозубой передачи можно подставлять в эти уравнения без всякого пересчета сомножителей. Так, например, формула диаметра вершин косозубого колеса может быть записана следующим образом: $d_a=d+2(h_a^*m+xm-\Delta y \cdot m)$, где $d=zm/\cos\beta$.

Угол профиля исходного производящего контура при нарезании косозубого колеса увеличивается по сравнению со стандартной величиной $\alpha=20°$, поскольку размеры по высоте не изменяются, а шаг в торцовом сечении увеличивается. Расчетный угол профиля α_t исходного производящего контура при нарезании косозубых колес определяют по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha_t=\operatorname{tg}\alpha/\cos\beta.$$

На рис. 13.7 сравниваются профили зубьев трех колес, имеющих одинаковые числа зубьев, нарезанные одним и тем же инструментом, но с различными смещениями: $x_1<x_2<x_3$. Колеса имеют одинаковые радиусы делительных и основных окружностей; следовательно, профили зубьев всех трех колес очерчены по одной и той же эвольвенте. Но толщины зубьев s_1 (дуга ab), s_2 (дуга ac), s_3 (дуга af) и радиусы окружностей вершин r_{a1}, r_{a2}, r_{a3} у колес будут разные. По мере увеличения x толщина зуба у основания увеличивается, а у вершины уменьшается, т. е. коэффициент смещения существенно влияет на форму зуба. Таким образом, из

зубьев трех рассматриваемых колес зуб третьего колеса будет самым прочным. Кроме того, для эвольвентной части профиля зуба третьего колеса используется участок эвольвенты, наиболее удаленный от ее основания и обладающий поэтому бóльшими радиусами кривизны (см. § 13.1), что способствует уменьшению износа и контактных напряжений боковой поверхности зуба. Следовательно, назначая при проектировании тот или иной *коэффициент смещения,* можно влиять *на форму* зубьев колес и *на качество* зубчатой передачи, наделяя ее желательными свойствами. Однако следует заметить, что указанная зависимость формы зубьев и свойств зубчатой передачи от коэффициента смещения x резко ощутима при малых числах зубьев и ослабляется по мере увеличения z.

§ 13.4 Подрезание и заострение зуба

Согласно свойствам эвольвентного зацепления (см. § 13.2) прямолинейная, т. е. эвольвентная, часть ИПК и эвольвентная часть профиля зуба колеса располагаются касательно друг к другу только на линии станочного зацепления, начинающейся в точке N. Левее этой точки прямолинейный участок ИПК не касается эвольвентного профиля зуба колеса, а пересекает его. Так как ИПК физически представляет собой тот след, который режущая кромка инструмента оставляет на материале изготавливаемого колеса, то указанное пересечение приводит к подрезанию зуба колеса у его основания (рис. 13.8). Подрезание *уменьшает* эвольвентную часть профиля зуба колеса и *ослабляет* зуб в его опасном сечении.

Подрезание не происходит, когда граница B_l' активной части линии станочного зацепления располагается правее точки N (см. рис. 13.6, *а*), т. е. когда выполняется условие

$$P_0N \geqslant P_0B_l'. \tag{13.12}$$

Используя условие (13.12), определим минимальное число зубьев колеса, при котором они не будут подрезаны. Из ΔP_0ON (см. рис. 13.6, *а*) следует, что $P_0N = P_0O\sin\alpha$, а из $\Delta P_0FB_l'$, что $P_0B_l' = P_0F/\sin\alpha$.

Подставляя величины P_0N и P_0B_l' в условие (13.12) и решая относительно z, имеем

$$z \geqslant 2(h_a^* - x)/\sin^2\alpha. \tag{13.13}$$

Если $x = 0$, то из этого выражения получается минимальное число зубьев колеса без смещения, которые не будут подрезаны реечным инструментом

$$z_{\min} = 2h_a^*/\sin^2\alpha. \tag{13.14}$$

При проектировании колес без смещения число зубьев необходимо брать равным или больше $z_{\min}$. В случае стандартного инструмента ($h_a^* = 1{,}0$; $\alpha = 20°$) $z_{\min} \approx 17$.

Для косозубых колес уравнение (13.14) приобретает вид

$$z_{min} = 2h_a^* \cos\beta / \sin^2\alpha_t.$$

Следовательно, косозубые колеса менее подвержены подрезанию зубьев, поскольку $\alpha_t > \alpha$, а $\cos\beta < 1$.

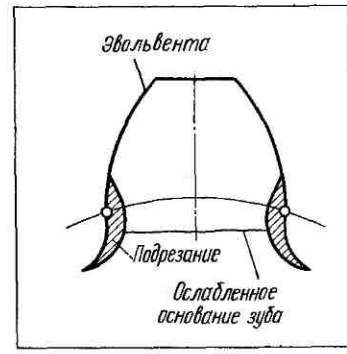


Рис. 13.8

В § 13.1 было указано, что для уменьшения габаритов зубчатых передач колеса следует проектировать с малым числом зубьев. Однако при $z < 17$, чтобы не произошло подрезания, колеса должны быть изготовлены со смещением инструмента. Выясним, каково же то минимальное смещение, при котором не получается подрезания зубьев. Оно определяется также из выражения (13.12), на основании которого, используя (13.13), можно записать, что

$$(z/2)\sin^2\alpha \geqslant h_a^* - x.$$

Подставляя сюда значение $\sin^2\alpha$ из (13.14) и решая относительно x, имеем

$$x \geqslant h_a^*(z_{min} - z)/z_{min}, \qquad (13.15)$$

а, переходя к минимальному значению x_{min}, получим формулу

$$x_{min} = h_a^*(z_{min} - z)/z_{min}. \qquad (13.16)$$

Из зависимости (13.16) следует, что зубчатое колесо, имеющее $z > z_{min}$, можно нарезать с положительным, нулевым и даже с отрицательным смещением, поскольку для такого колеса $x_{min} < 0$. Для зубчатого колеса, у которого $z = z_{min}$, можно взять положительное или нулевое смещение, а для колеса, у которого $z < z_{min}$ — только положительное смещение.

Если увеличивать коэффициент смещения, то толщина зуба s_a у вершины *будет уменьшаться*. При некотором коэффициенте смещения, называемом максимальным (x_{max}), наступает заострение зуба ($s_a = 0$). Опасность заострения особенно велика у колес с малым числом зубьев (меньше 15).

Для предотвращения излома вершины заостренного зуба коэффициент смещения назначают так, чтобы толщина s_a была бы не меньше $0{,}2m$ ($s_a \geqslant 0{,}2m$). Толщину зуба s_a при проектировании определяют по уравнению (13.7), положив $r_y = r_a$ и $\alpha_y = \alpha_a$; согласно уравнению (13.2) $\cos\alpha_a = r_b/r_a$.

§ 13.5 Эвольвентная зубчатая передача

Элементы эвольвентной зубчатой передачи. На рис. 13.9 показана зубчатая передача внешнего зацепления α_w, полюс зацепления P, межосевое расстояние a_w, начальные окружности радиусами r_{w1} и r_{w2}. Эти элементы были рассмотрены

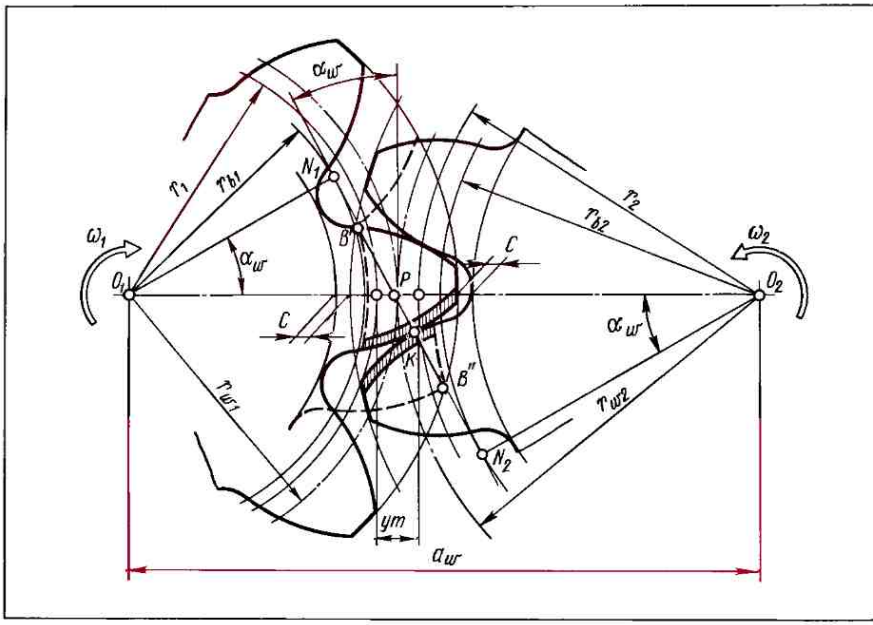


Рис. 13.9

ранее (в § 13.2) при знакомстве со свойствами эвольвентного зацепления.

В точках B' и B'' линия зацепления пересекается окружностями вершин зубьев колес; в точке B' сопряженные профили входят в зацепление, а в точке B'' — выходят из зацепления. Процесс взаимодействия главных поверхностей сопряженных зубьев происходит на участке $B'B''$ линии зацепления; эта часть линии зацепления называется активной линией зацепления. Зубчатая передача должна быть спроектирована так, чтобы участок $B'B''$ *укладывался в пределах* линии зацепления N_1N_2. Если точки B' и B'' выйдут за эти пределы, то в зубчатой передаче произойдет заклинивание.

При заданном направлении вращения только одна сторона зуба будет передавать и воспринимать усилие; ее называют рабочей стороной зуба. В зацеплении участвуют активные профили зубьев, расположенные на рабочих сторонах зубьев, которые соответствуют активной линии зацепления. На рис. 13.9 активные профили заштрихованы.

Между окружностью вершин одного колеса и окружностью впадин другого имеется расстояние, которое называется радиальным зазором. На рис. 13.9 радиальный зазор отмечен буквой c; его величина выражается произведением коэффициента c^* на модуль, т. е. $c = c^*m$, где $c^* = 0{,}25$.

Уравнения эвольвентной зубчатой передачи. При составлении уравнений для определения угла зацепления α_w и межосевого рас-

стояния a_w следует иметь в виду, что номинальные значения этих величин подсчитывают при условии, что зубья одного колеса входят во впадины другого плотно, *без бокового зазора*. Учтя это, а также то, что начальные окружности катятся друг по другу без скольжения, запишем $s_{w1} = e_{w2}$ и $s_{w2} = e_{w1}$, где s_{w1} и s_{w2} — толщина зубьев, а e_{w1} и e_{w2} — ширина впадин по начальным окружностям колес зубчатой передачи.

Поскольку начальные окружности перекатываются *без скольжения*, то шаги p_{w1} и p_{w2} по этим окружностям равны друг другу: $p_{w1} = p_{w2} = p_w$. Шаг $p_w = s_{w1} + e_{w1}$, или, поскольку $s_{w2} = e_{w1}$,

$$p_w = s_{w1} + s_{w2}. \tag{13.17}$$

С другой стороны, шаг по начальной окружности $p_w = \pi m(\cos\alpha/\cos\alpha_w)$.

Учитывая уравнения (13.3), (13.6) и (13.11), выразим толщину зубьев s_{w1} и s_{w2} по формуле (13.7) и подставим в (13.17). Проделав несложные преобразования, получим уравнение для определения угла зацепления

$$\operatorname{inv}\alpha_w = \operatorname{inv}\alpha + \frac{2x_\Sigma \operatorname{tg}\alpha}{z_\Sigma}, \tag{13.18}$$

где $x_\Sigma = x_1 + x_2$, $z_\Sigma = z_1 + z_2$. После подсчета инволюты угла зацепления по уравнению (13.18) сам угол α_w следует определить по таблице инволютной функции.

Межосевое расстояние зубчатой передачи

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}.$$

Учитывая зависимость (13.6), можно записать

$$r_w = \frac{mz}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w},$$

поэтому межосевое расстояние

$$a_w = \frac{mz_\Sigma}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}. \tag{13.19}$$

Межосевое расстояние может быть выражено также следующим образом (рис. 13.9):

$$a_w = r_1 + r_2 + ym, \tag{13.20}$$

где ym — расстояние между делительными окружностями. Оно называется воспринимаемым смещением, а величина y — коэффициентом воспринимаемого смещения.

Приравнивая (13.19) и (13.20) и учитывая (13.3), получим формулу для определения коэффициента воспринимаемого смещения:

$$y = \frac{z_\Sigma}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} - 1\right). \tag{13.21}$$

При расчете косозубых передач применяют те же формулы, что и при расчете прямозубых, но вместо параметров m и α берут $m/\cos\beta$ и α_t, а произведения $x_\Sigma \operatorname{tg}\alpha$ и ym сохраняют без изменения.

Определим уравнительное смещение зубчатой передачи. При геометрическом проектировании передачи должны быть выполнены два условия: 1) зубья колес должны зацепляться друг с другом теоретически без бокового зазора; 2) между окружностями вершин и впадин зубчатых колес должен быть стандартный радиальный зазор $c = c^* m = 0{,}25m$.

Выполнение первого условия обеспечивается тем, что межосевое расстояние выражается через воспринимаемое смещение по формуле (13.20). Второе условие требует, чтобы

$$a_w = r_{a1} + c + r_{f2} \tag{13.22}$$

Совместное решение уравнений (13.20) и (13.22) дает

$$r_1 + ym + r_2 = r_{a1} + c + r_{f2},$$

или

$$r_1 + ym + r_2 = r_{a1} + c + r_{a2} - h.$$

Подставляя в это равенство формулы для r_{a1}, r_{a2} и h из § 13.3, после преобразования придем к выражению

$$ym = x_1 m - \Delta y \cdot m + x_2 m,$$

откуда получим Δy — коэффициент уравнительного смещения, упомянутый ранее в § 13.3:

$$\Delta y = x_\Sigma - y. \tag{13.23}$$

Итак, уравнительное смещение $\Delta y \cdot m$ (см. рис. 13.6, *а*) вводится для получения зубчатой передачи без бокового зазора и со стандартной величиной радиального зазора.

Если зубчатая передача составлена из колес без смещений ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$), то, согласно уравнениям (13.18), (13.21), (13.23) и (13.20) такая передача будет характеризоваться следующими параметрами: угол зацепления $\alpha_w = \alpha = 20°$, коэффициент воспринимаемого смещения $y = 0$, коэффициент уравнительного смещения $\Delta y = 0$, межосевое расстояние $a_w = r_1 + r_2 = m(z_1 + z_2)/2$, т. е. равно сумме радиусов делительных окружностей. При указанных условиях радиусы начальных окружностей $r_{w1} = mz_1/2 = r_1$, $r_{w2} = mz_2/2 = r_2$, т. е. начальные окружности колес совпадают с их делительными окружностями.

Особенности эвольвентной передачи внутреннего зацепления. На рис. 2.6, *б* изображена передача внутреннего зацепления. Меньшее колесо (шестерня), обозначенное номером *1*, имеет внешние зубья; большее колесо, именуемое просто колесом и обозначенное номером *2*, имеет внутренние зубья. Инструментом для изготовления колес с внутренними зубьями способом огибания является

не реечный инструмент, а *долбяк* (инструментальное колесо), число зубьев и основные размеры которого стандартизованы. При изготовлении колес долбяком может произойти не только подрезание и заострение зубьев, но и срезание их у вершины. Предотвращение этого явления должно быть учтено при проектировании передачи внутреннего зацепления.

Как было отмечено в § 13.2, при внутреннем зацеплении эвольвентные профили $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$ пересекаются на участке N_1N_2 (см. рис. 13.5, *в*). Кроме того, при внутреннем зацеплении может иметь место еще один вид пересечения эвольвент, если числа зубьев шестерни (z_1) и колеса (z_2) близки друг к другу.

В правильно спроектированной передаче внутреннего зацепления должны отсутствовать оба вида пересечения эвольвентных профилей. Это значит, что активная часть линии внутреннего зацепления должна целиком находиться вне отрезка N_1N_2. Кроме того, числа зубьев z_1 и z_2 должны подчиняться определенным ограничениям.

Для передачи, составленной из колес без смещений, нарезаемых стандартным долбяком, необходимо иметь $z_1 \geqslant 20$, $z_2 \geqslant 85$, а разность $z_2 - z_1 \geqslant 8$. Если передачу составить из колес со смещениями, то z_2 и $z_2 - z_1$ можно существенно уменьшить и сократить тем самым размеры всей передачи.

Геометрический расчет зубчатой передачи внутреннего зацепления довольно сложен и в данной книге не приводится. Методика такого расчета изложена в [2,13] и других трудах (см.: *Скворцова Н. А., Лукичев Д. М.* Новые методы расчетов и конструирования машин, повышение их надежности и долговечности, вып. 5, ГОСИНТИ, М., 1962).

§ 13.6 Качественные показатели зубчатой передачи. Выбор расчетных коэффициентов смещения

Качественные показатели. Рассмотрим качественные показатели, которые дают возможность оценить передачу в отношении плавности и бесшумности зацепления, возможного износа и прочности зубьев, а также сравнить ряд передач по тем же показателям. Такая оценка важна для рационального назначения расчетных коэффициентов смещения при проектировании зубчатых передач.

Коэффициент перекрытия учитывает непрерывность и плавность зацепления в передаче. Такие качества передачи обеспечиваются перекрытием работы одной пары зубьев работой другой пары. Для этого каждая последующая пара зубьев должна войти в зацепление еще до того, как предшествующая пара выйдет из зацепления. О величине перекрытия судят по коэффициенту перекрытия, который выражают отношением угла торцового пере-

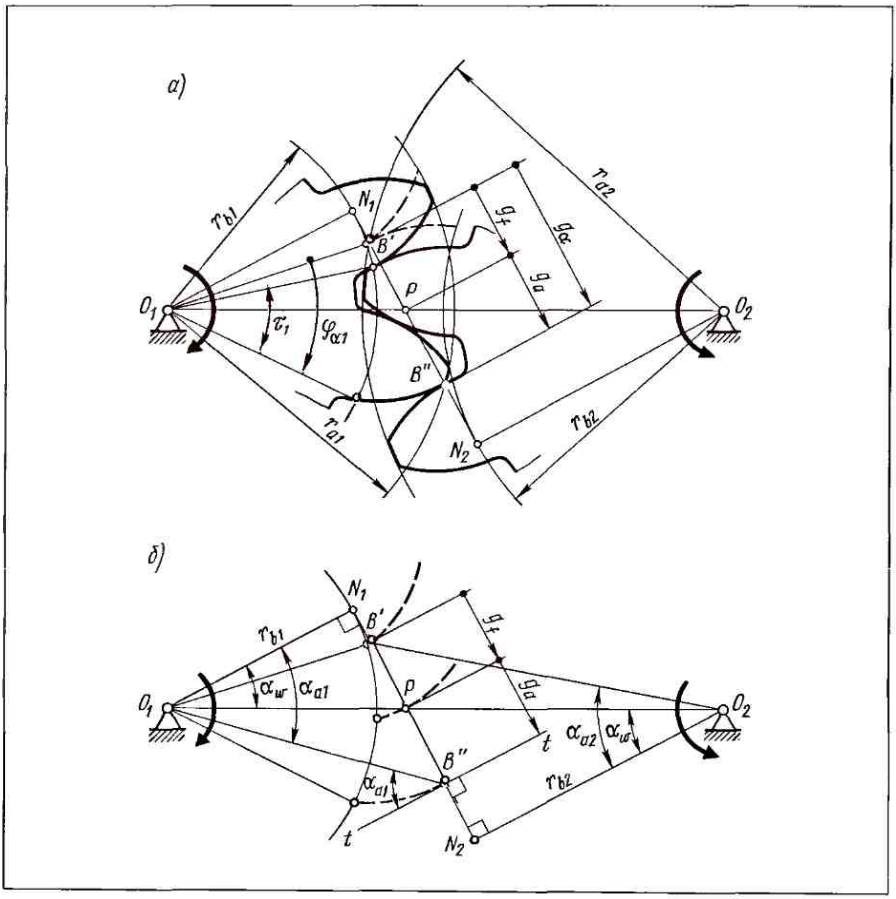


Рис. 13.10

крытия к угловому шагу. Угол торцового перекрытия φ_a — это угол поворота колеса от положения зубьев при входе в зацепление, когда они касаются в точке B', до положения зубьев при выходе из зацепления, когда они касаются в точке B'' (рис. 13.10, *а*). Следовательно, коэффициент перекрытия прямозубой передачи

$$\varepsilon_a = \varphi_{a1}/\tau_1 = \varphi_{a2}/\tau_2. \qquad (13.24)$$

Здесь $\tau_1 = 2\pi/z_1$ — угловой шаг; $\varphi_{a1} = g_a/r_{b1}$, где $g_a = g_f + g_a$ — длина активной линии зацепления. Она складывается из длин дополюсной g_f и заполюсной g_a частей активной линии зацепления (рис. 13.10, *б*):

$$g_f = r_{b2}(\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_w); \qquad (13.25)$$

$$g_a = r_{b1}(\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_w). \qquad (13.26)$$

Подстановка (13.25) и (13.26) в (13.24) с учетом (13.5) дает

формулу для определения коэффициента перекрытия прямозубой передачи:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \operatorname{tg}\alpha_{a1} + z_2 \operatorname{tg}\alpha_{a2} - (z_1+z_2)\operatorname{tg}\alpha_w}{2\pi}. \qquad (13.27)$$

Если при расчете по формуле (13.27) получится $\varepsilon_\alpha < 1$, то в этом случае непрерывности процесса зацепления зубьев не будет: одна пара зубьев успеет выйти из зацепления еще до того, как следующая пара зубьев войдет в него. Поэтому минимально допустимым значением ε_α является 1,05, которое обеспечивает непрерывность процесса зацепления с 5%-ным запасом.

Важно отметить, что коэффициент перекрытия ε_α *уменьшается* при увеличении коэффициентов смещения x_1 и x_2. Поэтому при проектировании передачи коэффициенты смещения надо назначать так, чтобы ε_α не получился бы меньше 1,05.

Продолжительность зацепления одной пары зубьев в косозубой передаче ($\beta \neq 0$) больше, чем в прямозубой ($\beta = 0$). Поэтому и коэффициент перекрытия косозубой передачи ε_γ больше ε_α и подсчитывается по формуле

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \qquad (13.28)$$

В этой сумме слагаемое ε_α определяется по формуле (13.27). Второе слагаемое $\varepsilon_\beta = b/p_x$. Здесь $b = \psi m$ — ширина зубчатого колеса, ψ — коэффициент ширины зубчатого колеса, назначаемый из условий прочности и износостойкости зуба, $p_x = \pi m/\sin\beta$ — осевой шаг косого зуба. Подставив b и p_x в выражение для ε_β, получим

$$\varepsilon_\beta = \psi \sin\beta/\pi. \qquad (13.29)$$

Как непосредственно следует из уравнений (13.28) и (13.29), коэффициент перекрытия ε_γ косозубой передачи ($\beta \neq 0$) *больше* коэффициента перекрытия ε_α прямозубой ($\beta = 0$), что является достоинством косозубой передачи.

Коэффициент скольжения учитывает влияние геометрических и кинематических факторов на величину проскальзывания профилей в процессе зацепления (см. § 12.2). Наличие скольжения при одновременном нажатии одного профиля на другой приводит к износу профилей. Коэффициенты скольжения выражаются формулами

$$\lambda_1 = v_{ск}/v_{K1\text{-}K};\ \lambda_2 = v_{ск}/v_{K2\text{-}K},$$

где $v_{ск}$ — скорость скольжения; $v_{K1\text{-}K}$, $v_{K2\text{-}K}$ — скорости перемещения точек контакта по профилям зубьев первого и второго колеса.

За время одного оборота колеса с меньшим числом зубьев z_1 второе колесо не завершает полный оборот. Следовательно, его зубья в u_{12} раз реже вступают в контакт, чем зубья первого колеса, и поэтому меньше изнашиваются. Для того чтобы сравнивать интенсивность износа зубьев по коэффициентам скольжения, разделим λ_2 на $u_{12} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1$:

$$\lambda_1 = v_{ск}/v_{K1\text{-}K};\ \lambda_2 = v_{ск}/(v_{K2\cdot K}u_{12}).$$

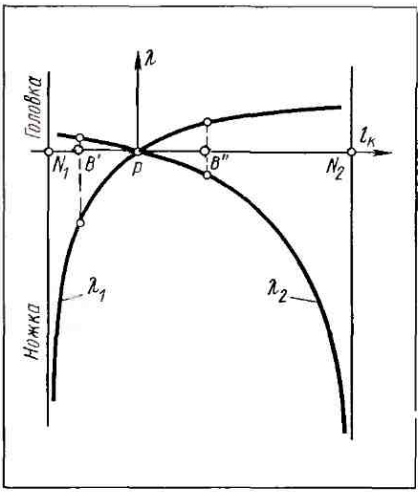


Рис. 13.11

Расчетные формулы для λ_1 и λ_2 имеют такой вид:

$$\lambda_1=\left(1+\frac{1}{u_{12}}\right)\frac{l_K}{l_K+l_{P1}};\qquad \lambda_2=\left(1+\frac{1}{u_{12}}\right)\frac{l_K}{l_K-l_{P2}}, \tag{13.30}$$

где l_K — величина алгебраическая, выражающая расстояние от полюса зацепления P до текущего положения точки K контакта пары зубьев (см. рис. 13.9); l_{P1} и l_{P2} — абсолютные значения длин отрезков PN_1 и PN_2.

В процессе зацепления точка контакта K зубьев движется вдоль линии зацепления от положения B' (вход зубьев в зацепление) до положения B'' (выход зубьев из зацепления). Отсюда следует, что расстояние l_K изменяется от значения $(-B'P)$ до нуля и затем от нуля до значения $(+B''P)$. Поэтому, как вытекает из формул (13.30), коэффициенты скольжения λ_1 и λ_2 также изменяются в процессе зацепления. Наибольшее значение λ_1 приобретает в положении B', а λ_2 — в положении B'' (рис. 13.11).

Коэффициенты скольжения λ_1 и λ_2 зависят от коэффициентов смещения x_1 и x_2. Воздействуя на x_1 и x_2, конструктор получает значения коэффициентов λ_1 и λ_2, отвечающие условиям эксплуатации.

Коэффициент удельного давления учитывает влияние геометрии зубьев (радиусов кривизны их профилей) на величину контактных напряжений, возникающих в местах соприкосновения зубьев. При чрезмерном нагружении контактные напряжения могут быть столь значительны, что вызовут выкрашивание материала на рабочей поверхности зубьев.

Контактные напряжения определяются по формуле Герца:

$$\sigma=0{,}418\sqrt{\frac{Q}{b}E\frac{1}{\rho}},$$

где Q — сила взаимодействия зубьев; b — ширина зубчатых колес; $E=2E_1E_2/(E_1+E_2)$ — приведенный модуль упругости их материалов; ρ — приведенный радиус кривизны эвольвентных профилей в точке контакта, посредством которого определяется влияние геометрии зуба на контактные напряжения.

Для текущего момента зацепления зубьев (см. рис. 13.9)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2},$$

или, согласно свойствам эвольвентных профилей (см. § 13.1):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{N_1N_2}{N_1K\cdot N_2K}.$$

Коэффициентом удельного давления ϑ называется отношение

$$\vartheta=\frac{m}{\rho}=\frac{m\cdot N_1N_2}{N_1K\cdot N_2K}. \qquad (13.31)$$

Коэффициент ϑ — величина безразмерная, не зависящая от модуля m, так как ρ пропорционален модулю.

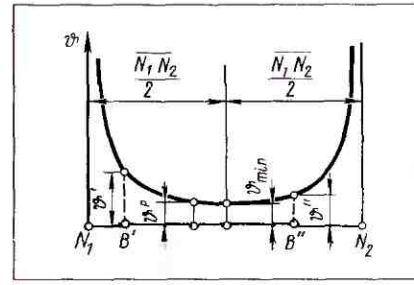


Рис. 13.12

Поскольку точка K контакта зубьев движется вдоль линии зацепления, расстояние N_1K увеличивается, а расстояние N_2K уменьшается (см. рис. 13.9). Поэтому, как следует из уравнения (13.31), коэффициент удельного давления ϑ изменяется в процессе зацепления. График этого изменения представлен на рис. 13.12.

Подставив коэффициент ϑ в формулу Герца, получим

$$\sigma=0{,}418\sqrt{QE/(bm)}\,\sqrt{\vartheta}.$$

Коэффициент удельного давления ϑ уменьшается при увеличении коэффициентов смещения x_1 и x_2. Поэтому конструктор может снижать контактные напряжения, назначая коэффициенты смещения x_1 и x_2 так, чтобы коэффициент ϑ имел возможно меньшее значение.

Выбор расчетных коэффициентов смещения для передач внешнего зацепления. При назначении коэффициентов смещения x_1 и x_2 для любой передачи должны быть выполнены следующие три условия: 1) отсутствие подрезания; 2) отсутствие заострения; 3) непрерывность зацепления. Первое условие применительно к шестерне выполняется, если ее коэффициент смещения x_1 превосходит свой минимальный уровень $x_{\min 1}$ (см § 13.4). Второе и третье условия ограничивают коэффициент смещения x_1 шестерни верхними пределами $x'_{\max 1}$ и $x''_{\max 1}$ (см. § 13.4 и 13.6). Эти пределы неодинаковы, и для расчета зубчатой передачи важен тот $x_{\max 1}$, который имеет меньшее значение. Таким образом, коэффициент смещения x_1 шестерни надо назначать так, чтобы соблюдалось соотношение $x_{\min 1}\leqslant x_1\leqslant x_{\max 1}$. То же самое следует сказать и о коэффициенте смещения x_2 колеса, $x_{\min 2}\leqslant x_2\leqslant x_{\max 2}$.

Внутри указанных пределов коэффициенты смещения x_1 и x_2 надо назначать так, чтобы зависящие от них качественные показатели передачи, характеризующие ее свойства (плавность хода, износостойкость, прочность), имели бы оптимальные значения. При этом надо учитывать конкретные условия работы передачи: быстроходность, характер нагрузки, наличие или отсутствие закрытой масляной ванны, материалы шестерни и колеса и вид их термообработки и др. [13].

Для передачи с числом зубьев z_1 и z_2 можно построить в координатах x_1 и x_2 область допустимых значений коэффициентов сме-

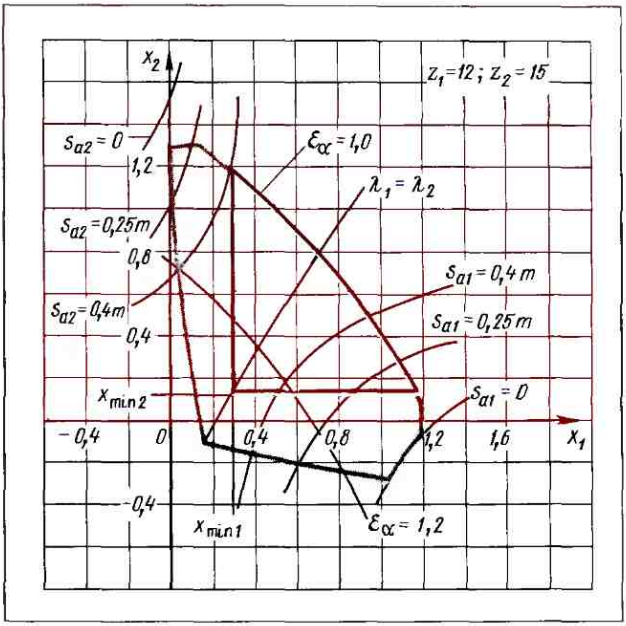
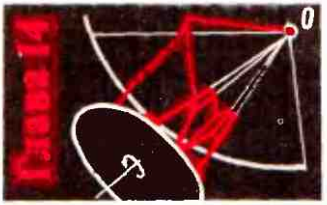


Рис. 13.13

щения (рис. 13.13). Эта область ограничена линиями $x_{\min 1}$, $x_{\min 2}$, $\varepsilon_\alpha=1{,}0$, $s_{a1}=0$, $s_{a2}=0$, составляющими так называемый блокирующий контур. Допустимые значения коэффициентов x_1 и x_2 содержатся внутри блокирующего контура.

Для каждой зубчатой передачи можно построить свой блокирующий контур. Пример такого контура для прямозубой передачи $z_1=12$, $z_2=15$ представлен красной линией на рис. 13.13. Как видно, линии $s_{a1}=0$, $s_{a2}=0$ вышли за пределы допустимой области. Это указывает на то, что для передачи 12/15 ограничение по $\varepsilon_\alpha=1$ наступает раньше, чем ограничение по заострению. Помимо блокирующего контура в координатах x_1 и x_2 указывают также изолинию $\varepsilon_\alpha=1{,}2$, а иногда и некоторые другие, характеризующие геометрию и свойства зубчатой передачи. На рис. 13.13 серыми линиями указано также возможное расширение допустимой области, которое, однако, не рекомендовано стандартом.

Альбом блокирующих контуров для передачи с прямозубыми колесами, изготовленными стандартным реечным инструментом, имеется в справочном руководстве (см.: *Болотовская Т. П., Болотовский И. А., Бочаров Г. С* и др. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач. М., 1963) и в приложении к стандарту на зубчатые передачи (см.: ГОСТ 16530—83, 16531—83, 16532—70). В этом приложении содержатся также рекомендации по выбору коэффициентов смещения x_1 и x_2 и порядок геометрического расчета эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления.



Пространственные зубчатые передачи

Во многих машинах осуществление требуемых движений механизмов связано с необходимостью передать вращение с одного вала на другой при условии, что оси этих валов либо пересекаются, либо скрещиваются. В таких случаях применяют соответственно или коническую, или гиперболоидную зубчатую передачу. Аксоидами колес первой являются конусы, аксоидами колес второй — однополостные гиперболоиды (см. § 12.1). Обе передачи относятся к категории пространственных механизмов. Изложению основ их синтеза (геометрического расчета) по заданному передаточному отношению посвящена данная глава.

§ 14.1 Коническая зубчатая передача

Если угол между осями равен 90°, то коническую зубчатую передачу называют ортогональной. В общем случае в неортогональной передаче угол, дополненный до 180° к углу между векторами угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ звеньев *1* и *2*, называют межосевым углом Σ (рис. 14.1, *а*).

Связь между векторами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ угловых скоростей *1* и *2* определяется соотношением

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}. \qquad (14.1)$$

Положение вектора $\bar{\omega}_{21}$ относительно векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ определяют углами $\delta_{\omega 1}$ и $\delta_{\omega 2}$, сумма которых равна межосевому углу Σ:

$$\delta_{\omega 1} + \delta_{\omega 2} = \Sigma. \qquad (14.2)$$

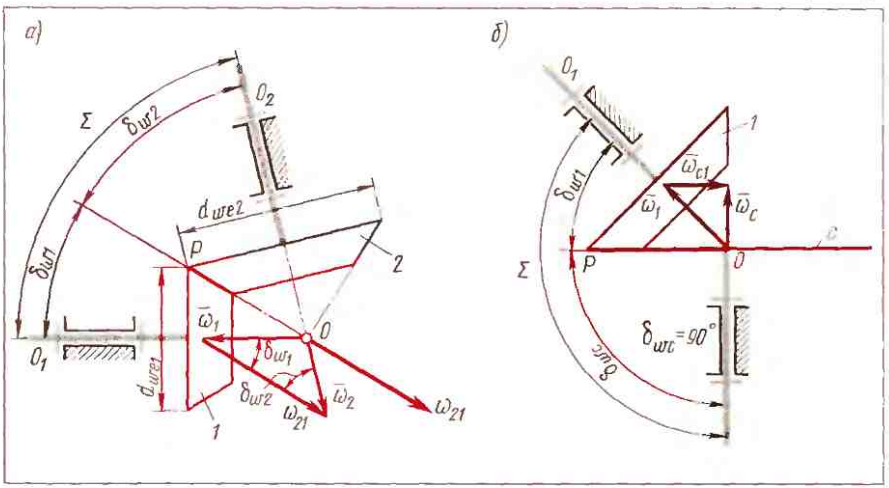


Рис. 14.1

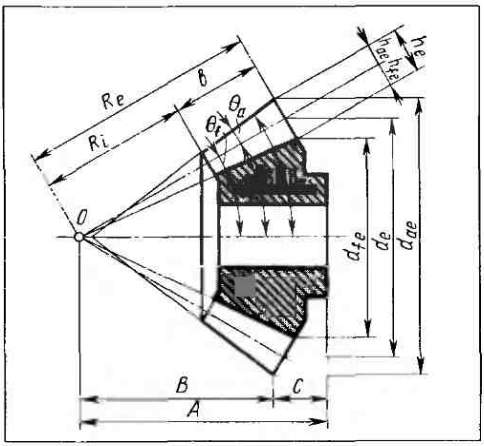


Рис. 14.2

Если через точку O пересечения осей O_1O и O_2O провести вектор $\overline{\omega}_{21}$, то он совпадет с мгновенной осью OP относительного движения ведущего и ведомого звеньев и определит конические поверхности аксоидов, называемых начальными конусами. При обозначении параметров, относящихся к начальному конусу, используют индекс $\ll w \gg$. Углы δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов определяют при решении векторного соотношения (14.1) с использованием теоремы синусов (рис. 14.1,*а*):

$$\sin\delta_{w1}/|\overline{\omega}_2| = \sin\delta_{w2}/|\overline{\omega}_1|.$$

Отношение модулей угловых скоростей $|\overline{\omega}_1|$ и $|\overline{\omega}_2|$ является передаточным отношением:

$$u_{12} = |\overline{\omega}_1|/|\overline{\omega}_2| = \sin\delta_{w2}/\sin\delta_{w1}. \qquad (14.3)$$

При заданных межосевом угле Σ и передаточном отношении u_{12} углы начальных конусов определяют при совместном решении соотношений (14.2) и (14.3):

$$u_{12} = \frac{\sin\delta_{w2}}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin(\Sigma-\delta_{w1})}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin\Sigma\cos\delta_{w1}-\cos\Sigma\sin\delta_{w1}}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin\Sigma}{\operatorname{tg}\delta_{w1}} - \cos\Sigma.$$

Искомые углы δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов находят по формулам

$$\delta_{w1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Sigma}{u_{12}+\cos\Sigma}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Sigma}{z_2/z_1+\cos\Sigma}\right); \qquad (14.4)$$

$$\delta_{w2} = \Sigma - \delta_{w1}. \qquad (14.5)$$

Для ортогональной передачи при $\Sigma = 90°$ соотношения (14.4) и (14.5) имеют частный вид:

$$\delta_{w1} = \operatorname{arctg}(1/u_{12}) = \operatorname{arctg}(z_1/z_2); \quad \delta_{w2} = \operatorname{arctg} u_{12} = \operatorname{arctg}(z_2/z_1). \qquad (14.6)$$

Частным случаем неортогональной передачи является плоская коническая передача, в которой поверхность одного из начальных колес является плоскостью и угол при вершине $\delta_{wc} = 90°$ (рис. 14.1, *б*).

Параметры, относящиеся к плоскому коническому колесу, обозначают с добавлением индекса «*c*» (например: число зубьев плоского колеса z_c, угловая скорость ω_c). Формирование колес,

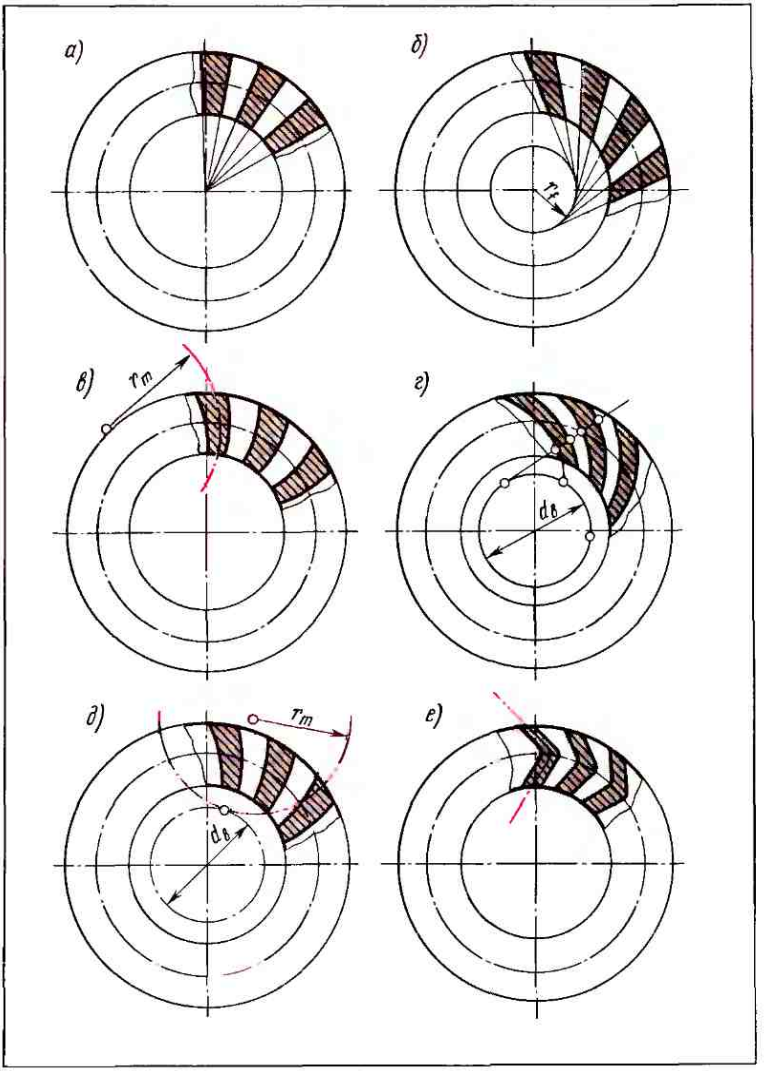


Рис. 14.3

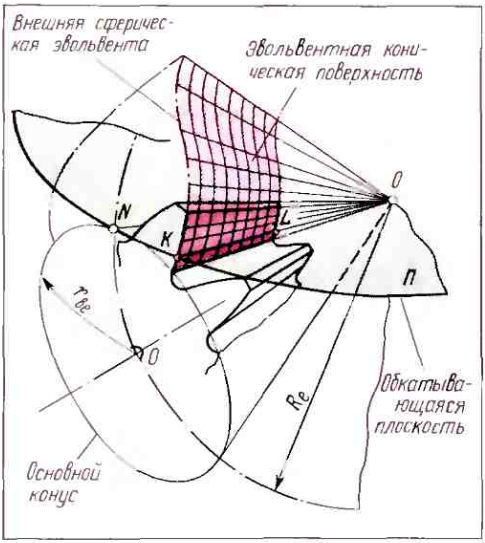


Рис. 14.4

размеров зубьев и расположение их элементов проводят относительно базовой конической поверхности на каждом колесе, называемой делительным конусом. При проектировании конических передач углы δ_1 и δ_2 делительных конусов принимают совпадающими с углами δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов, что упрощает расчетные соотношения. Зубья образуют на колесе зубчатый венец, который располагается между конусом вершин с углом δ_a и конусом впадин с углом δ_f (рис. 14.2). При изготовлении заготовок и колес используют базовое расстояние A и размеры B до вершины конуса и C — до базовой плоскости. Поверхность, отделяющая зуб от впадины, называется боковой поверхностью зуба. Пересечение боковой поверхности зуба с соосной поверхностью называют линией зуба. Линия зуба может совпадать с образующей делительного соосного конуса (прямые зубья) или иметь угол β наклона линии зуба на делительной поверхности. Различают виды конических колес, отличающихся по форме линий зубьев на развертке делительного конуса (рис. 14.3): *а* — с прямыми; *б* — тангенциальными; *в* — круговыми; *г, д, е* — криволинейными зубьями. Прямозубые передачи используют для работы при легких нагрузках и невысоких скоростях (обычно при частоте вращения <1000 об/мин). Для работы в режиме максимальных нагрузок, при высоких скоростях и для обеспечения максимальной плавности работы и бесшумности используют передачи с криволинейными зубьями.

Образование боковой поверхности зубьев можно проследить по рис. 14.4. Плоскость $П$ касается основного конуса и перекатывается по нему без скольжения. Любая прямая KL на обкатывающейся плоскости $П$ в пространстве опишет коническую эвольвентную поверхность, а любая точка (K, L или другая) описывает траекторию, расположенную на сфере определенного радиуса, называемую сферической эвольвентой. В каждом сферическом сечении на боковой поверхности зуба можно выделить линию пересечения, называемую профилем зуба. Профили зубьев в сечениях конического колеса отличаются друг от друга. Различают торцовые сечения: внешнее, среднее, внутреннее и текущее. При обозначении параметров в том или ином

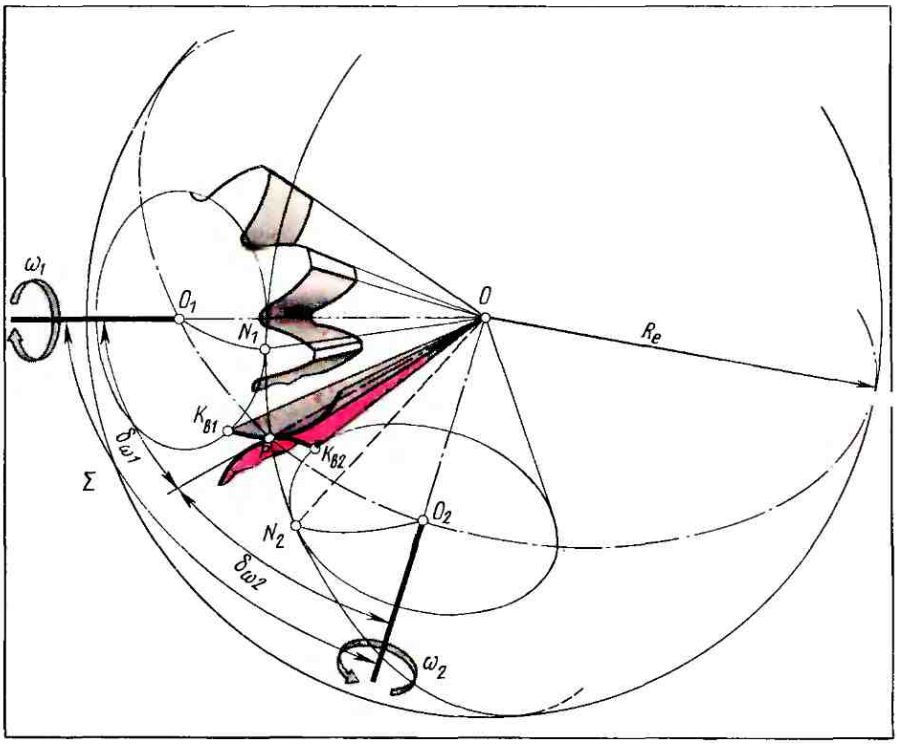


Рис. 14.5

сечении добавляют соответствующий индекс (см. рис. 14.2), например для внешнего сечения — «*e*», для среднего — «*m*», для внутреннего — «*i*», для текущего — «*x*».

Радиус R_e внешнего торцового сечения называют внешним конусным расстоянием. Расстояние между внешним и внутренним торцовыми сечениями конического колеса называют шириной зубчатого венца и обозначают «*b*» (см. рис. 14.2).

Взаимодействие сопряженных эвольвентных конических поверхностей при заданных начальных конусах представляет коническое эвольвентное зацепление (рис. 14.5).

Полюсная прямая *PO*, лежащая в плоскости N_1ON_2, касательной к основным конусам, может рассматриваться как образующая боковых поверхностей зубьев. Любые сопряженные сферические эвольвенты $Э_1$ и $Э_2$ имеют линию зацепления, расположенную на сфере (например, N_1PN_2) и являющуюся дугой большого круга сферы.

Взаимодействие сферических эвольвент описать в аналитической форме довольно сложно. Учитывая, что высотные размеры зубьев

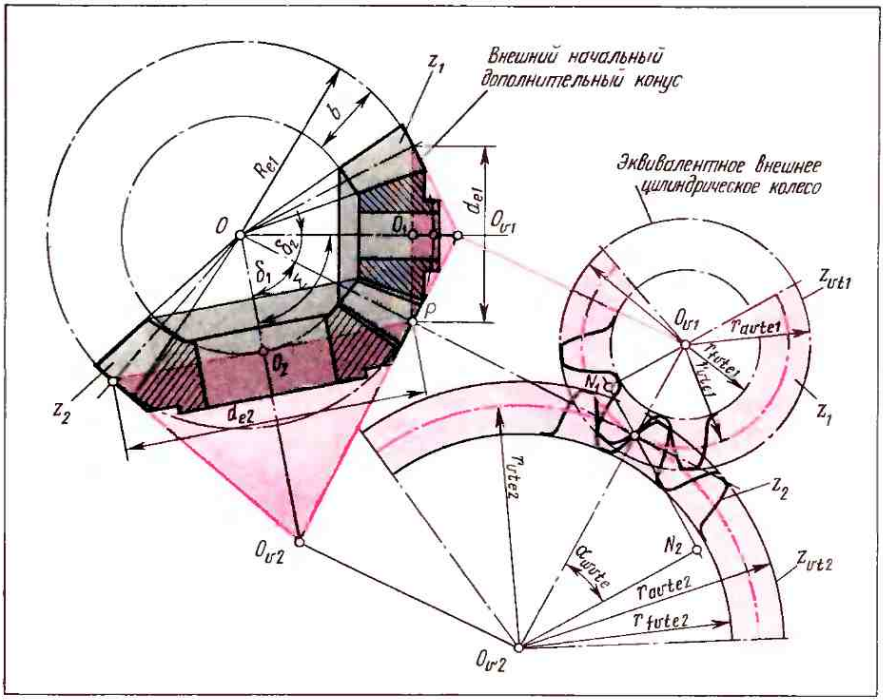


Рис. 14.6

невелики по сравнению с радиусом сферы и профили зубьев расположены на узком сферическом поясе, используют инженерную методику расчета, которая заключается в использовании дополнительных конусов (рис. 14.6).

Дополнительным делительным конусом называют соосную коническую поверхность, образующая которого (например, PO_{v1}, или PO_{v2} на рис. 14.6) перпендикулярна образующей делительного конуса конического зубчатого колеса. Введение дополнительных конусов позволяет рассматривать взаимодействие профилей зубьев не на сфере, а на поверхности соприкасающихся со сферой дополнительных конусов. Если дополнительные конусы развернуть на плоскость, то профили зубьев становятся плоскими кривыми, достаточно близкими к обычным эвольвентам, соответствующим определенным размерам основных окружностей, радиусы $O_{vte1}N_1$ и $O_{vte2}N_2$ которых находят для *эквивалентной цилиндрической передачи*. Параметры эквивалентной цилиндрической передачи имеют дополнительный индекс «*vt*». Каждое из зубчатых колес такой передачи называют *эквивалентным цилиндрическим зубчатым колесом* с числами зубьев z_{vt1} и z_{vt2} в отличие от чисел зубьев z_1 и z_2 на конических колесах.

Связь между числами зубьев z_1 и z_{vt1} или z_2 и z_{vt2} легко устано-

вить при рассмотрении размеров концентрических окружностей конического и эквивалентного цилиндрического колес:

$$r_{vte1}=\frac{0{,}5d_{e1}}{\cos\delta_1}=\frac{0{,}5m_e z_1}{\cos\delta_1}=0{,}5m_e z_{vt1};$$

$$r_{vte2}=\frac{0{,}5d_{e2}}{\cos\delta_2}=\frac{0{,}5m_e z_2}{\cos\delta_2}=0{,}5m_e z_{vt2}.$$

Внешний окружной модуль m_e, соответствующий расстоянию между одноименными профилями соседних зубьев по дуге концентрической окружности конического колеса на внешнем торце, равен модулю эквивалентной цилиндрической передачи. Поэтому числа зубьев z_{vt1} и z_{vt2} можно выразить соотношениями

$$z_{vt1}=z_1/\cos\delta_1;\ z_{vt2}=z_2/\cos\delta_2. \qquad (14.7)$$

В общем случае числа z_{vt1} и z_{vt2} являются дробными и в процессе расчета не округляются, а вычисляются с точностью до 0,01.

Передаточное отношение эквивалентной цилиндрической передачи определяется следующим соотношением:

$$u_{v12}=\frac{z_{vt2}}{z_{vt1}}=\frac{z_2/\cos\delta_2}{z_1/\cos\delta_1}=u_{12}\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}. \qquad (14.8)$$

Угол зацепления α_{wvte} эквивалентной цилиндрической передачи, радиусы r_{avte1} и r_{avte2} окружностей вершин, радиусы r_{fvte1} и r_{fvte2} окружностей впадин (рис. 14.6) рассчитывают по формулам, аналогичным выведенным ранее для цилиндрических эвольвентных передач.

При расчете конических передач с криволинейной линией зуба (см. рис. 14.3) эквивалентная цилиндрическая передача является не прямозубой, а имеет винтовые зубья. Поэтому профили зубьев рассматривают в соответствующих нормальных сечениях. Прямозубое цилиндрическое зубчатое колесо, размеры и форма зубьев которого в главном сечении практически идентична размерам и форме зубьев конического зубчатого колеса с тангенциальными и криволинейными зубьями в сечении, нормальном к средней линии зуба, называют *биэквивалентным цилиндрическим колесом,* число зубьев которого обозначают z_{vn} (соответственно z_{vn1} и z_{vn2}).

С достаточной для практических расчетов точностью коэффициент формы зубьев таких конических колес оценивают по аналогии с биэквивалентным цилиндрическим колесом, число зубьев которого

$$z_{vn1}=\frac{z_1}{\cos\delta_1\cos^3\beta_n};\ z_{vn2}=\frac{z_2}{\cos\delta_2\cos^3\beta_n}, \qquad (14.9)$$

где β_n — угол наклона средней линии зуба, соответствующий внешнему, среднему, внутреннему или другим расчетным нормальным сечениям зуба конического зубчатого колеса.

Геометрия боковых поверхностей и профилей зубьев теснейшим образом связана с технологией изготовления конических колес. Способ копирования фасонного профиля инструмента для образования профиля на коническом колесе не может быть использован,

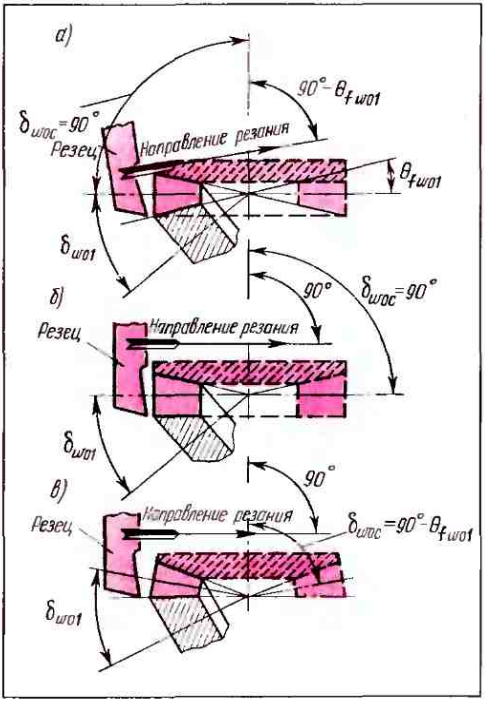


Рис. 14.7

ибо размеры впадины конического колеса изменяются по мере приближения к вершине конуса. В связи с этим такие инструменты, как модульная дисковая фреза, пальцевая фреза, фасонный шлифовальный круг, могут использоваться только для черновой прорезки впадин или для образования впадин колес не выше 8-й степени точности.

Для нарезания более точных конических колес используют способ обкатки в станочном зацеплении нарезаемой заготовки с *воображаемым производящим колесом*. Боковые поверхности производящего колеса образуются за счет движения режущих кромок инструмента в процессе главного движения резания, обеспечивающего срезание припуска. Преимущественное распространение получили инструменты с прямолинейным лезвием. При прямолинейном главном движении прямолинейное лезвие образует *плоскую производящую поверхность*. Такая поверхность не может образовать эвольвентную коническую поверхность со сферическими эвольвентными профилями. Получаемые сопряженные конические поверхности, отличающиеся от эвольвентных конических поверхностей, называют квазиэвольвентными (по старой терминологии — октоидальными).

Производящие колеса могут быть плоскими с $\delta_{woc}=90°$ (рис. 14.7, *а, б*) или плосковершинными с $\delta_{woc}=90°-\theta_{fwo1}$ (рис. 14.7, *в*) при одном и том же угле δ_{wo1} при вершине аксоидного конуса станочного зацепления. В первых двух случаях образуемые квазиэвольвентные конические колеса будут сопряженными, ибо производящие плоские колеса образуют совпадающую пару, у которой боковые производящие поверхности зубьев могут совпадать при наложении во всех своих точках (как отливка и форма или шаблон и контршаблон). Однако станок, реализующий схему станочного зацепления по рис. 14.7, *а*, должен иметь поворотные направляющие, допускающие установку резцовых направляющих под углом $(90°-\theta_{fwo1})$, где θ_{fwo1} — угол ножки зуба нарезаемого колеса в станочном зацеплении. Это усложняет конструкцию станка и используется ограниченно.

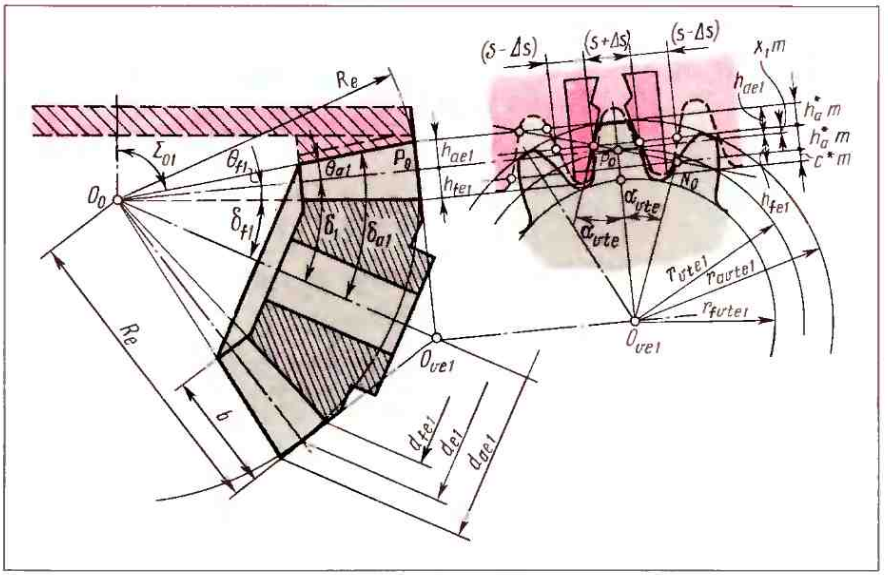


Рис. 14.8

В случае движения резцов без учета угла θ_{fwo1} (рис. 14.7, *б*) высота ножки зуба по мере приближения к вершине конуса остается неизменной, что ослабляет зуб и приводит иногда к подрезу ножки.

Большинство моделей станков использует *плосковершинное производящее колесо,* у которого вершины зубьев расположены в плоскости, а угол аксоидного конуса в станочном зацеплении рассчитывается с учетом угла θ_{fwo1} ножки зуба нарезаемого колеса. Два плосковершинных колеса не образуют совпадающую производящую пару, и поэтому нарезаемые квазиэвольвентные колеса будут несопряженными. Эти погрешности обычно являются незначительными и ими обычно пренебрегают.

Расчетная схема, приведенная на рис. 14.8, позволяет на базе станочного зацепления конического колеса с производящим плосковершинным колесом перейти к эквивалентному станочного зацеплению с теоретическим исходным контуром. Исходный контур, совпадающий с реечным контуром, принятым в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев конических колес, регламентирован по ряду параметров: $\alpha=20°$; $h_a^*=1{,}2$; $c^*=0{,}2$; $\rho_f^*\leqslant 0{,}3$. Однако с учетом особенностей методов нарезания зубьев эти параметры можно изменять в пределах использования стандартного инструмента. Так, например, можно допускать неравенство толщины зуба и ширины впадины по делительной прямой за счет относительного расположения соседних резцов; не требуется строгого соответствия номинального модуля резцов модулю нарезаемого колеса. Внешний модуль может быть нестандартным и даже дробным. Можно изменять угол α за счет наклона резцов.

Расчет параметров конической передачи проводят в такой последовательности (рис. 14.8):

число зубьев плоского колеса

$$z_c=\frac{1}{\sin\Sigma}\sqrt{z_1^2+z_2^2+2z_1z_2\cos\Sigma}; \qquad (14.10)$$

при $\Sigma=90°$

$$z_c=\sqrt{z_1^2+z_2^2}; \qquad (14.11)$$

внешнее конусное расстояние

$$R_e=0{,}5m_ez_c; \qquad (14.12)$$

ширина зубчатого венца $b\leqslant 0{,}3R_e$, или $b\leqslant 10m_e$; коэффициент ширины зубчатого венца $k_{be}=b/R_{we}=0{,}2...0{,}3$;

угол делительного конуса:

$$\delta_1=\operatorname{arctg}[\sin\Sigma/(z_2/z_1+\cos\Sigma)]; \qquad (14.13)$$

$$\delta_2=\Sigma-\delta_1; \qquad (14.14)$$

при $\Sigma=90°$

$$\delta_1=\operatorname{arctg}(z_1/z_2); \qquad (14.15)$$

коэффициент смещения исходного контура $x_1=0...0{,}6$ — в зависимости от числа зубьев z_1 и передаточного отношения передачи; $x_2=-x_1$;

$$x_1\geqslant x_{1\min}=1{,}068-0{,}58z_1/\cos\delta_1; \qquad (14.16)$$

коэффициент изменения расчетной толщины зуба исходного контура

$$x_{\tau 1}=0{,}03-0{,}008(z_2/z_1-2{,}5); \quad x_{\tau 2}=-x_{\tau 1}. \qquad (14.17)$$

Расчет параметров зубчатых колес проводят по следующим расчетным формулам, вывод которых основан на расчетной схеме (рис. 14.8):

внешняя высота головки зуба:

$$h_{ae1}=(h_a^*+x_1)m_e; \quad h_{ae2}=2h_a^*m_e-h_{ae1}; \qquad (14.18)$$

внешняя высота ножки зуба:

$$h_{fe1}=h_{ae2}+c^*m_e; \quad h_{fe2}=h_{ae1}+c^*m_e; \qquad (14.19)$$

внешняя высота зуба:

$$h_e=h_{ae}+h_{fe}; \qquad (14.20)$$

внешняя окружная толщина зуба:

$$s_{e1}=(0{,}5\pi+2x_1\operatorname{tg}\alpha+x_{\tau 1})m_e; \quad s_{e2}=\pi m_e-s_{e1}; \qquad (14.21)$$

угол ножки зуба:

$$\theta_{f1}=\operatorname{arctg}(h_{fe1}/R_e); \qquad (14.22)$$

$$\theta_{f2}=\operatorname{arctg}(h_{fe2}/R_e); \qquad (14.23)$$

угол головки зуба:

$$\theta_{a1}=\theta_{f2};\ \theta_{a2}=\theta_{f1};\qquad (14.24)$$

угол конуса вершин:

$$\delta_{a1}=\delta_1+\theta_{a1};\ \delta_{a2}=\delta_2+\theta_{a2};\qquad (14.25)$$

угол конуса впадин:

$$\delta_{f1}=\delta_1-\theta_{f1};\ \delta_{f2}=\delta_2-\theta_{f2};\qquad (14.26)$$

внешний делительный диаметр:

$$d_{e1}=m_e z_1;\ d_{e2}=m_e z_2;\qquad (14.27)$$

внешний диаметр вершин зубьев:

$$d_{ae1}=d_{e1}+2h_{ae1}\cos\delta_1;\ d_{ae2}=d_{e2}+2h_{ae2}\cos\delta_2.\qquad (14.28)$$

При проверке качества зацепления по геометрическим показателям рассчитывают коэффициент ε_α торцового перекрытия, внешнюю окружную толщину зуба s_{ae} на поверхности вершин и проверяют отсутствие подрезания зубьев с использованием эквивалентного цилиндрического зацепления.

Рекомендуемые значения показателей следующие: коэффициент торцового перекрытия $\varepsilon_\alpha\geqslant 1{,}3$; относительная окружная толщина зуба на поверхности вершин $s^*_{ae}=s_{ae}/m_e\geqslant 0{,}3$ — при однородной структуре металла; $s^*_{ae}\geqslant 0{,}4$ — при поверхностном упрочнении зубьев.

При выборе исходных данных учитывают заданное передаточное отношение u_{12} и его допустимое отклонение в связи с тем, что числа зубьев — целые числа. Рекомендуется числа зубьев колес назначать в пределах от 12 до 100.

Для прямозубой конической пары передаточные отношения рекомендуется назначать: $u_{12}\leqslant 5$ — для замедляющей и $u_{12}\geqslant 0{,}35$ — для ускоряющей передач.

Межосевой угол Σ назначают в пределах от 10 до 170°, для ортогональной передачи его назначают равным 90°.

Параметры исходного контура стандартизованы. На рис. 12.8 они приведены в соответствии с ГОСТ 13754—81.

Коэффициент ширины зубчатого колеса $k_{be}=b/R_{we}$ рекомендуется выбирать в пределах 0,2...0,8. Увеличение длины зуба за эти пределы на практике приводит к краевому контакту зубьев вследствие погрешностей монтажа и деформаций их под нагрузкой, т. е. не приводит к повышению несущей способности передачи.

При проектировании быстроходных передач, работающих при переменных нагрузках, числа зубьев z_1 и z_2 должны быть взаимно простыми числами, т. е. не иметь общих делителей. Если передача работает при постоянной нагрузке и умеренных линейных скоростях, то стремятся к тому, чтобы числа z_1 и z_2 были бы кратны друг другу, или имели возможно большее число общих делителей, что способствует ускоренной приработке рабочих поверхностей зубьев.

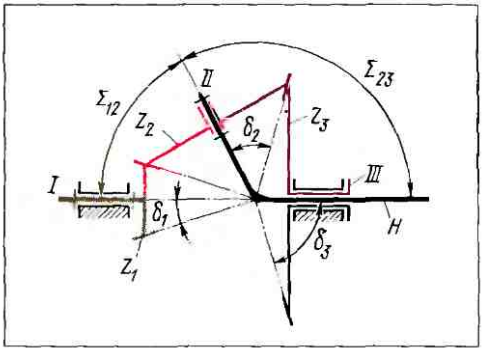


Рис. 14.9

При расчете соосных конических передач необходимо согласовывать числа зубьев, углы их начальных конусов и углы между осями. Например, для планетарного механизма с коническими колесами, схема которого изображена на рис. 14.9, должны выполняться следующие соотношения:

$$\Sigma_{12}+\Sigma_{23}=180°;$$

$$\operatorname{tg}\delta_2=\frac{\sin\Sigma_{12}}{z_1/z_2+\cos\Sigma_{12}};$$

$$\operatorname{tg}\delta_2=\frac{\sin\Sigma_{23}}{z_3/z_2+\cos\Sigma_{23}}.$$

Решая эти соотношения совместно, получают соотношение для межосевого угла Σ_{12}:

$$\cos\Sigma_{12}=(z_3-z_1)/(2z_2).$$

Из последнего соотношения легко установить нижний предел для чисел z_2: $z_2\geqslant 0{,}5(z_3-z_1)$.

§ 14.2 Гиперболоидные зубчатые передачи

В зубчатой передаче со скрещивающимися осями вращение колес, относительное движение колес для данного мгновения может быть представлено как вращение вокруг мгновенной винтовой оси с одновременным скольжением вдоль нее. При постоянном передаточном отношении мгновенная винтовая ось занимает постоянное положение в неподвижном пространстве; аксоидами относительного движения являются однополостные гиперболоиды вращения (см. рис. 12.1, *в*). Поэтому зубчатую передачу со скрещивающимися осями вращения колес называют гиперболоидной.

Начальной поверхностью колеса называется относящаяся к данному зубчатому колесу в передаче одна из взаимокасающихся соосных поверхностей вращения, в любой точке касания которых проходящие через нее линии зубьев колес имеют общую касательную, и вектор скорости относительного движения колес направлен вдоль нее или равен нулю. Размеры начальных поверхностей могут существенно отличаться от размеров аксоидных гиперболоидов. В качестве начальных поверхностей могут быть приняты более простые по своей форме поверхности, например, круглые цилиндры,

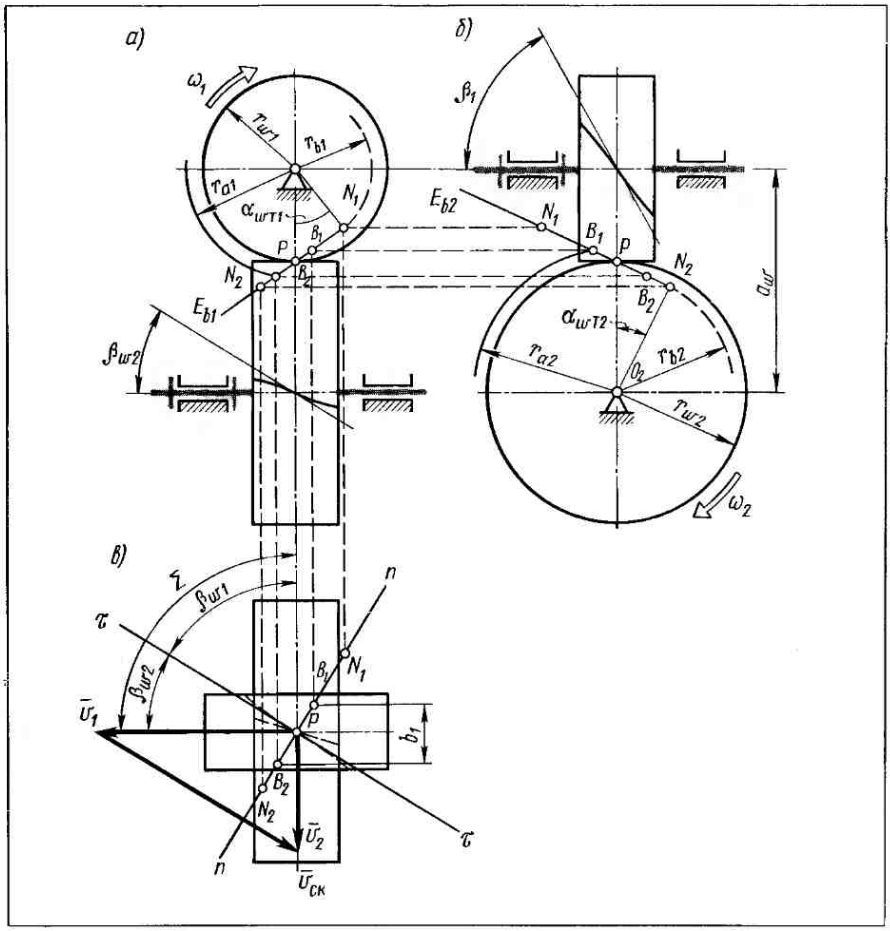


Рис. 14.10

касающиеся друг друга только в одной точке, лежащей на линии кратчайшего расстояния между осями колес.

Гиперболоидная зубчатая передача, у зубчатых колес которой начальные поверхности — круглые цилиндры, называются винтовой зубчатой передачей (см. рис. 2.6, *д*). Если в качестве начальных поверхностей зубчатых колес применить конусы с несовпадающими вершинами, то получим гипоидную зубчатую передачу (см. рис. 2.6, *ж*).

Винтовая зубчатая передача. Винтовая зубчатая передача состоит из двух эвольвентных цилиндрических косозубых колес (рис. 14.10, *а, б, в*), оси которых скрещиваются под произвольным углом Σ. Межосевой угол $\Sigma = \beta_{w1} \pm \beta_{w2}$, где β_{w1} и β_{w2} — углы наклона линий зубьев (винтовых линий) по начальным цилиндрам; верхний знак соответствует одноименному направлению винтовых

линий, нижний — разноименному. В винтовой передаче эти углы в общем случае не одинаковы.

В частном случае ортогональной передачи $\Sigma=\beta_{w1}+\beta_{w2}=90°$, а направление винтовых линий зубьев обоих колес — одинаковое (оба правые или оба левые). Рассмотрим зубчатую передачу с межосевым углом $\Sigma=90°$.

На рис. 14.10 показаны три проекции начальных цилиндров винтовой передачи с радиусами r_{w1} и r_{w2} и концентричные им основные цилиндры с радиусами r_{b1} и r_{b2}. Винтовые линии на начальных цилиндрах показаны в положении касания в точке P — полюсе зацепления, $n—n$ — нормаль к ним. Общая касательная $\tau—\tau$ составляет с осями колес соответственно углы β_{w1} и β_{w2}, сумма которых равна углу Σ.

Касательно к основным цилиндрам через полюс зацепления P проходят образующие плоскости E_{b1} и E_{b2}, в которых расположены прямолинейные образующие боковые поверхности зубьев, составляющие углы β_{b1} и β_{b2}, с осями колес.

В передачах с параллельными осями производящие плоскости обоих колес сливаются в одну, являющуюся плоскостью зацепления, а боковые поверхности зубьев из-за равенства углов $\beta_{b1}=\beta_{b2}=\beta_b$ соприкасаются по общей образующей (линейный контакт). При скрещивающихся осях производящие плоскости пересекаются по прямой, представляющей собой геометрическое место точек контакта боковых поверхностей зубьев, называемой линией зацепления. Она проходит через точку P касания начальных цилиндров касательно к обоим основным цилиндрам колес. Проекции линии зацепления совпадают с проекциями плоскостей E_{b1} и E_{b2} и составляют в торцовых сечениях колес различные по величине углы зацепления α_{wt1} и α_{wt2}, величины которых определяются по формуле, известной из теории эвольвентных цилиндрических передач. Предельные точки N_1 и N_2 линии зацепления отмечены на основных цилиндрах на трех проекциях. Активная длина линии зацепления определяется точками B_1 и B_2 пересечения линии зацепления поверхностями цилиндров вершин зубьев колес с радиусами r_{a1} и r_{a2}. Линия зацепления N_1N_2 является общей нормалью к боковым поверхностям зубьев обоих колес.

Из рассмотрения плана скоростей (см. рис. 14.10, *в*), построенного для контактной точки, совпадающей с полюсом P, исходя из равенства нормальных составляющих v^n окружных скоростей очевидно, что: $v_1\cos\beta_{w1}=v_2\cos\beta_{w2}$, так как $v_1=r_{w1}\omega_1$ и $v_2=r_{w2}\omega_2$, тогда $\omega_1 r_{w1}\cos\beta_{w1}=\omega_2 r_{w2}\cos\beta_{w2}$, откуда

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_{w2}\cos\beta_{w2}}{r_{w1}\cos\beta_{w1}}. \qquad (14.29)$$

Таким образом, особенность винтовой зубчатой передачи состоит в том, что передаточное отношение этой передачи зависит не только от отношения радиусов r_{w1} и r_{w2}, как это имело место для цилиндрических передач с одинаковыми углами наклона линий зубьев, но и от величин углов β_{w1} и β_{w2}.

Из формулы (14.29) видно, что одно и то же передаточное отношение может быть получено путем многочисленных комбинаций радиусов начальных цилиндров и углов наклона на них линий зубьев, из которых следует выбирать те, которые наилучшим образом удовлетворяют качественным показателям, заданным при проектировании.

Винтовая зубчатая передача обладает еще одним свойством: при заданном направлении вращения ведущего колеса возможно изменить направление вращения ведомого за счет изменения направления винтовых линий зубьев.

В нормальном сечении шаг и модуль для обоих колес винтовой передачи одинаковы, поэтому применительно к передаче, у которой начальные и делительные цилиндры сливаются, имеем: $p=p_{w1}=p_{w2}=p_w=\pi m$; в торцовых же сечениях модули разные: $m/\cos\beta_1$ и $m/\cos\beta_2$.

Радиусы делительных и начальных цилиндров определяются по формулам:

$$r_{w1}=r_1=\frac{mz_1}{2\cos\beta_1};\quad r_{w2}=r_2=\frac{mz_2}{2\cos\beta_2}.$$

Межосевое расстояние для такой передачи:

$$a_w=a=r_{w1}+r_{w2}=\frac{m}{2}\left(\frac{z_1}{\cos\beta_1}+\frac{z_2}{\cos\beta_2}\right).$$

Все исполнительные размеры колес (например, диаметры вершин, высота и толщина зубьев) определяют по формулам для косозубых колес (см. гл. 13).

Скорость скольжения боковых поверхностей зубьев в направлении общей касательной к винтовым поверхностям зубьев для контактной точки, совпадающей с полюсом P, определим из треугольника скоростей на рис. 14.10, *в*

$$(v_s)_p=\frac{v_1}{\sin\beta_{w1}}=\frac{\omega_1 r_{w1}}{\sin\beta_{w1}}=\omega_1\frac{mz_1}{2\cos\beta_{w1}\sin\beta_{w1}}=\frac{\omega_1 mz_1}{\sin 2\beta_{w1}}.$$

Скорость скольжения, зубьев колес винтовой передачи при контакте их в полюсе не равна нулю.

Для получения минимальных габаритов передачи из условия прочности угол наклона β_{w1} винтовой линии зуба на ведущем колесе следует брать для ускоряющих передач ($u_{12}<1$) в пределах 30...35°, для замедляющих ($u_{12}>1$) — в пределах 50...60°, для передач с $u_{12}=1$ — в пределах 45...50°.

Как уже указывалось, контакт боковых поверхностей зубьев у рассматриваемой зубчатой передачи теоретически происходит в одной точке, практически же вследствие износа и деформации материала — по небольшой площадке. В результате на рабочих поверхностях зубьев возникают высокие контактные напряжения, которые в сочетании со значительным скольжением профилей и при отсутствии условий для создания масляного клина могут привести к заеданию рабочих поверхностей зубьев. Поэтому винтовые

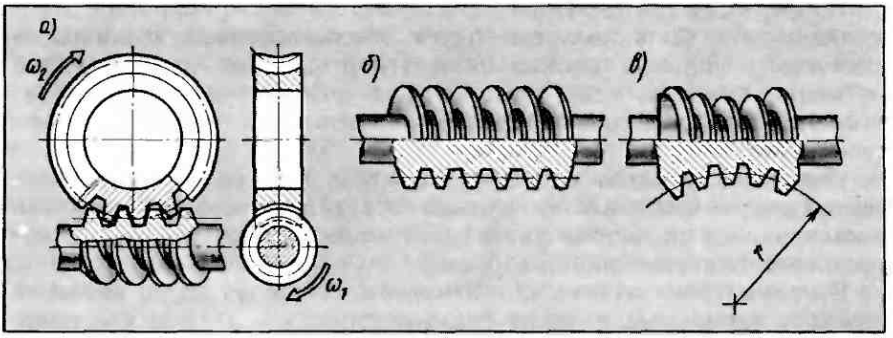


Рис. 14.11

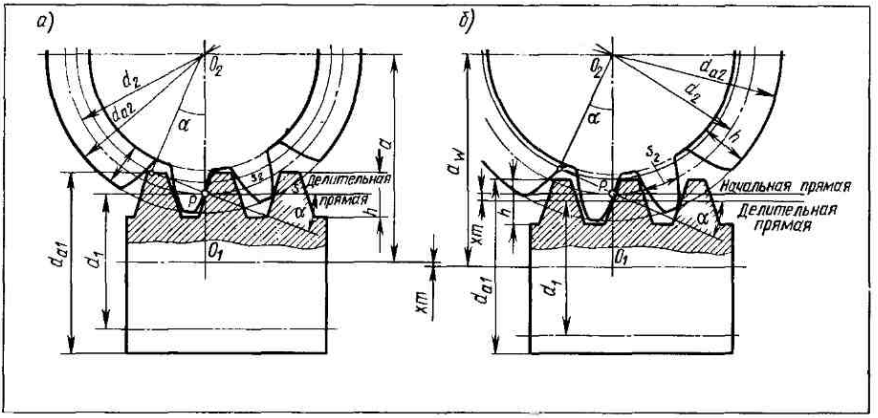


Рис. 14.12

зубчатые передачи, как правило, используются при относительно небольших мощностях при непрерывном и обильном смазывании.

Червячная зубчатая передача. Эта передача является частным случаем гиперболоидной зубчатой передачи. Угол скрещивания осей в большинстве случаев равен 90°. Передача состоит из червяка и червячного колеса (рис. 14.11, *а*). Червяком называется косозубое зубчатое колесо, линия зубьев которого делает один или более оборотов вокруг его оси (рис. 14.11, *б*). Число зубьев червяка z_1 называют числом заходов; z_1 чаще всего равно 1, 2, 4. Червячное колесо нарезают фрезой, представляющей собой точную копию червяка. Поэтому в червячных передачах касание витков червяка и зубьев колеса происходит по линии (линейный контакт). Для увеличения соприкосновения ободу червячного колеса придают форму, при которой колесо охватывает червяк (см. рис. 14.11, *в*). Числа зубьев червячного колеса принимают равными 32...80, иногда 200...300, а в отдельных случаях до 1000.

Как правило, в червячной передаче ведущим является червяк, поэтому червячная передача чаще всего работает как замедляющая.

Передаточное число червячной передачи выражается равенством $u_{12}=\omega_1/\omega_2=z_2/z_1$. Передаточное число колеблется в пределах от 8 до 80, а в специальных случаях до 1000.

Наиболее распространенными видами червячных зубчатых передач являются передачи с цилиндрическим червяком и глобоидные передачи.

Глобоидные червячные передачи благодаря более благоприятным условиям зацепления (хорошим гидродинамическим условиям смазки, обеспечивающим устойчивый масляный клин в зоне контакта) могут передавать большие мощности, чем передачи с цилиндрическим червяком.

Рассмотрим схему зацепления червячного колеса с архимедовым червяком (рис. 14.12, *а, б*). Боковая поверхность витка архимедова червяка представляет собой линейчатую винтовую поверхность, сечение которой плоскостью, перпендикулярной оси, дает архимедову спираль. В осевом сечении эти червяки имеют прямолинейный профиль витка обычно с углом профиля $\alpha=20°$. Взаимодействие такого червяка и червячного колеса в плоскости, перпендикулярной оси колеса, проходящей через ось червяка (средняя плоскость червячной передачи), сводится к зацеплению рейки с прямолинейным и колеса с эвольвентным профилями зубьев, т. е. при рабочем зацеплении червячной передачи воспроизводится станочное зацепление. Делительная прямая реечного профиля совпадает с образующей делительного цилиндра червяка. Поскольку модуль рейки стандартизован, то осевой модуль червяка тоже имеет стандартное значение.

Размеры червячной передачи. Диаметр делительного цилиндра червяка выбирают кратным осевому модулю червяка, т. е. диаметр делительного цилиндра

$$d_1=qm,$$

где q — коэффициент диаметра червяка. Сочетания m, q и z должны соответствовать ГОСТ 2144—76.

Если коэффициент смещения исходного производящего контура инструмента при нарезании червячного колеса $x\neq 0$, то начальный цилиндр червяка уже не сливается с его делительным цилиндром. В этом случае диаметр начального цилиндра червяка

$$d_{w1}=m(q+2x). \qquad (14.30)$$

Наклон винтовой линии витка по делительному цилиндру определяют делительным углом подъема γ. Углом γ называется острый угол между касательной в данной точке к винтовой линии на делительном цилиндре и плоскостью торцового сечения червяка.

На основании рис. 14.13 угол γ находят из соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma=P_{z1}/(\pi d_1).$$

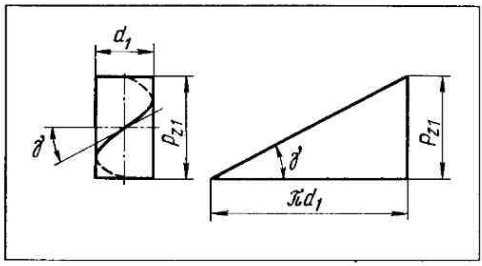


Рис. 14.13

Здесь P_{z1} — ход витка, т. е. расстояние между одноименными осевыми профилями одного витка по образующей делительного цилиндра: $P_{z1}=pz_1$, где $p=\pi m$ — шаг червяка — расстояние между соседними витками по образующей цилиндра, равный торцовому шагу червячного колеса по его делительной окружности (в средней плоскости червячной передачи), тогда

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{P_{z1}}{\pi d_1}=\frac{pz_1}{\pi d_1}=\frac{mz_1}{d_1}=\frac{z_1}{q}.$$

Начальный угол подъема γ_w по аналогии с учетом формулы (14.30) определяют из следующего выражения:

$$\operatorname{tg}\gamma_w=z_1/(q+2x).$$

Диаметр вершин витков червяка

$$d_{a1}=m(q+2h_{a1}^*);$$

диаметр цилиндра впадин

$$d_{f1}=d_1-2(h_a^*+c^*)m=m[q-2(h_a^*+c^*)];$$

высота витка

$$h=m(2h_a^*+c^*);$$

толщина витка по делительному цилиндру

$$s_1=\pi m/2\ .$$

Обычно принимают $h_a^*=1$, $c^*=0{,}2$. Следует отметить, что в червячной передаче без смещения (см. рис. 14.12, *а*) начальная прямая рейки в осевом сечении червяка совпадает с делительной прямой, а начальная окружность колеса — с делительной окружностью. Угол зацепления α_w равен углу профиля витка червяка в осевом сечении $\alpha_w=\alpha$. В червячной передаче со смещением xm (см. рис. 14.10, *б*) начальная прямая не совпадает с делительной прямой рейки и касается делительной окружности колеса, являющейся, как и в передаче без смещения, начальной окружностью. Угол зацепления передачи со смещением тоже равен α.

Так как червячное колесо нарезают фрезой, представляющей собой копию червяка, то, как указывалось раньше, рабочее зацепление червячной передачи в средней плоскости является одновременно и станочным зацеплением при нарезании червячного колеса. Поэтому расстояние между средней и начальной прямыми рейки

будет смещением исходного производящего контура инструмента для среднего сечения червячного колеса, совпадающим по своей величине с воспринимаемым смещением червячной передачи.

На основании ранее выведенных формул для эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи основные размеры червячного колеса в среднем сечении и червячной передачи определяют по следующим формулам:

диаметр делительной окружности (она же начальная)

$$d_2 = mz_2;$$

диаметр окружности вершин зубьев

$$d_{a2} = m(z_2 + 2x + 2h_a^*);$$

диаметр окружности впадин

$$d_{f2} = m(z_2 + 2x - 2h_a^* - 2c^*);$$

высота зуба

$$h = m(2h_a^* + c^*);$$

толщина зуба по делительной окружности

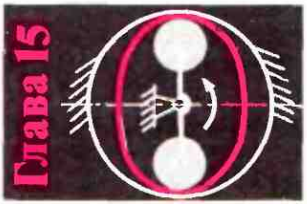
$$s_2 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha\right);$$

межосевое расстояние червячной передачи

$$a_w = m[(q + z_2)/2 + x].$$

Коэффициент смещения x исходного производящего контура инструмента выбирают в пределах ± 1.

Достоинствами червячной передачи являются: компактность конструкции при больших передаточных числах, плавность и бесшумность работы, возможность самоторможения. Недостатки — повышенная скорость скольжения и вследствие этого сравнительно низкий к.п.д., необходимость применения для колес дорогих антифрикционнных материалов.



Многозвенные зубчатые механизмы

При проектировании зубчатых механизмов многих машин и приборов (манипуляторов, станков, автомобилей, летательных аппаратов, индикаторов, тахометров, печатающих устройств ЭВМ и др.) возникает необходимость обеспечить передачу вращения с большим передаточным отношением или при значительных межосевых расстояниях. В таких случаях применяют многозвенные зубчатые механизмы либо снижающие скорость вращения выходного вала по сравнению с входным — редукторы, либо повышающие ее — мультипликаторы.

Многозвенные зубчатые механизмы могут быть как плоскими, так и пространственными. Они подразделяются на два основных вида: зубчатые механизмы с неподвижными осями всех колес и механизмы, оси отдельных колес которых перемещаются относительно стойки. Ко второму виду относятся планетарные и волновые зубчатые механизмы. Большим достоинством механизмов второго вида является их компактность. Проектирование многозвенных зубчатых механизмов включает два этапа: выбор структурной схемы; определение чисел зубьев для воспроизведения заданного передаточного отношения.

§ 15.1 Многозвенные зубчатые механизмы с неподвижными осями колес

Число степеней свободы многозвенных зубчатых механизмов с неподвижными осями колес равно единице, благодаря чему $u=\text{const}$. Такие механизмы проектируются либо несоосными (рис. 15.1, 15.2, 15.3), либо соосными (рис. 15.4, *а, б, в*). Первые, наиболее часто встречающиеся в практике, структурно подразделяются на рядовые (с развернутой схемой) и ступенчатые.

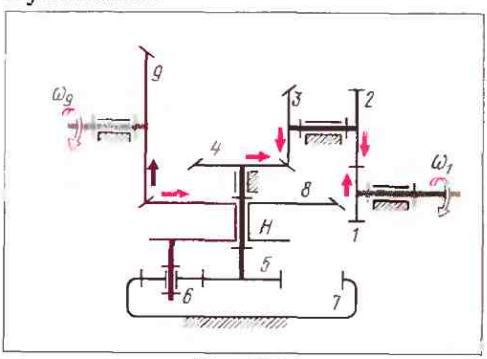


Рис. 15.1

Общее передаточное отношение многозвенного механизма равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов (ступеней), последовательно включенных в его состав:

$$u_{1j}=u_{12}u_{23}u_{34}\ldots u_{(j-1)j}. \qquad (15.1)$$

Рядовые зубчатые механизмы представляют собой по-

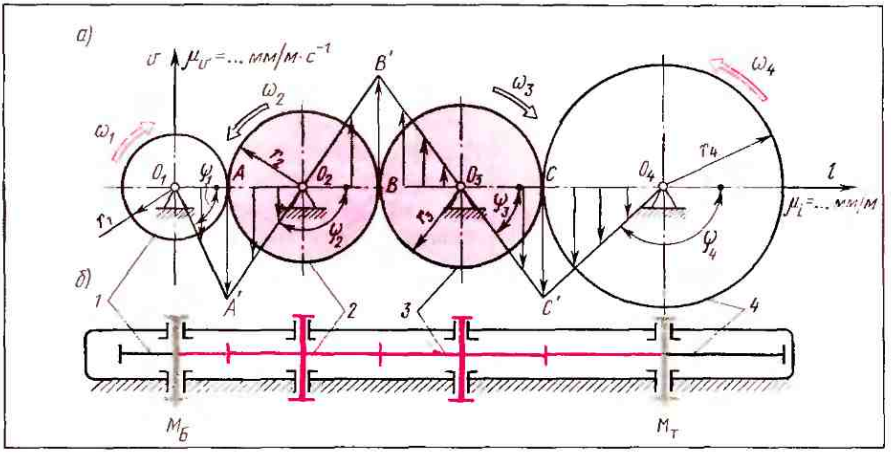


Рис. 15.2

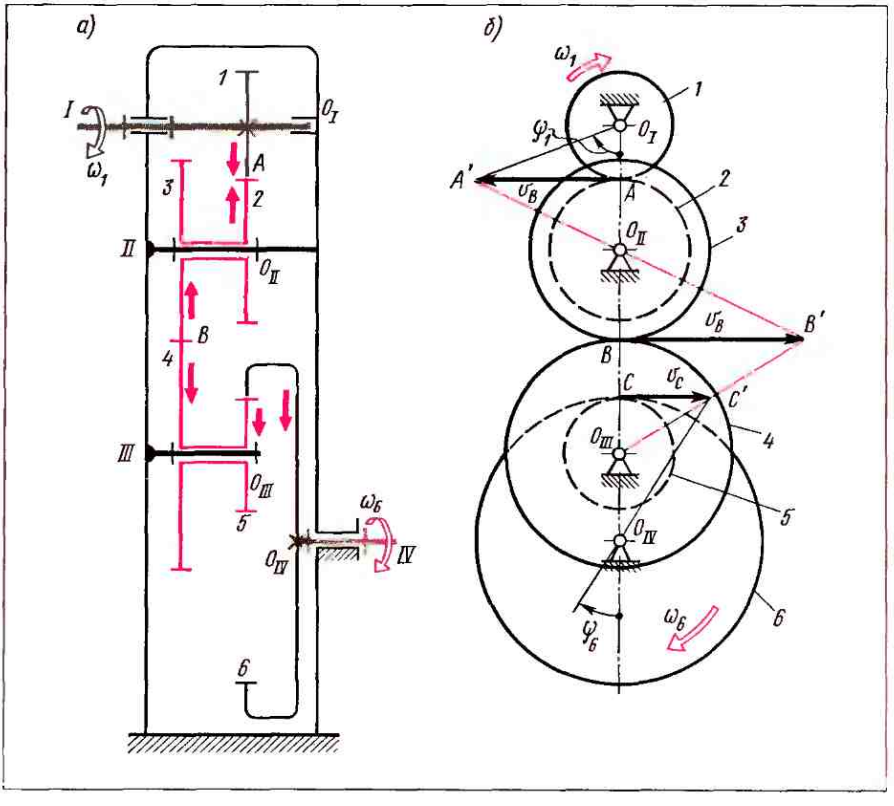


Рис. 15.3

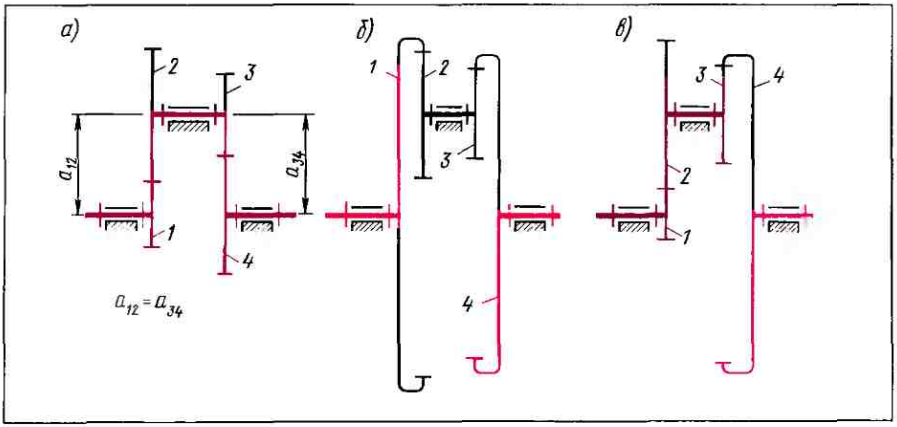


Рис. 15.4

следовательное соединение нескольких пар *единичных* зубчатых колес (рис. 15.2, *а, б*). Имея схему передачи и зная числа зубьев или радиусы начальных окружностей колес r_{wi}, можно определить общее передаточное отношение такого редуктора аналитически или графически. Для колес без смещения, которые обычно используют в планетарных механизмах, начальные окружности совпадают с делительными, т. е. $r_{wi}=r_i$.

Аналитическое определение передаточного отношения основывается на формулах (3.97) и (15.1). Так, для рядового механизма (см. рис. 15.2), общее передаточное отношение будет $u_p=u_{14}=u_{12}u_{23}u_{34}$, где $u_{12}=\omega_1/\omega_2=-r_2/r_1=-z_2/z_1$ — передаточное отношение первой пары сцепляющихся зубчатых колес внешнего (знак минус) зацепления; $u_{23}=\omega_2/\omega_3=-r_3/r_2=-z_3/z_2$ — передаточное отношение второй пары аналогичных колес; $u_{34}=\omega_3/\omega_4=-r_4/r_3=-z_4/z_3$ — третьей пары.

Тогда искомое передаточное отношение

$$u_p=u_{14}=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right)=-\frac{z_4}{z_1}=-\frac{r_4}{r_1}.$$

В общем случае при j колесах в механизме

$$u_{ij}=\frac{\omega_i}{\omega_j}=(-1)^t\frac{z_j}{z_i}=(-1)^t\frac{r_j}{r_i}. \qquad (15.2)$$

Общее передаточное отношение рядового зубчатого механизма постоянно и равно обратному отношению чисел зубьев или радиусов крайних колес. Знак передаточного отношения определяется множителем $(-1)^t$, где t — число передач внешнего зацепления. Но значение u_{ij} в таких передачах относительно невелико, так как оно ограничено допустимой величиной z_i и z_j, а числа зубьев промежуточных колес (*2* и *3* на рис. 15.2), находящихся одновременно в зацеплении с предшествующими и последующими колесами, не влияют на величину общего передаточного отношения механизма. Применяют эти колеса в основном там, где необходимо изменить

направление вращения ведомого вала при неизменном направлении вращения ведущего (коробки передач станков, автомобилей и пр.), либо там, где необходимо обеспечить передачу движения при больших межосевых расстояниях (когда нельзя увеличить размеры ведущих и ведомых колес).

Графическое определение передаточного отношения таких зубчатых механизмов можно осуществить методом планов скоростей (треугольников скоростей) (см. § 3.2). Треугольники скоростей можно построить, если известны линейные скорости не менее двух точек звена (по величине и направлению). Используя этот метод и построив треугольники скоростей (ломаная $O_1A'B'C'O_4$ на рис. 15.2, *а*), получаем наглядное представление о характере изменения скоростей от одного вала к другому, и можно определить графически угловую скорость любого колеса [см. формулу (3.8)]; так, $\omega_4 = v_c/r_4 = (CC'/\mu_v)(\mu_e/O_4C) = -(\mu_e/\mu_v)\operatorname{tg}\psi_4$, или частоту его вращения $n_4 = 30\omega_4/\pi = \mu_e 30 \operatorname{tg}\psi_4/(\mu_v\pi)$.

Тогда передаточное отношение всего механизма

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\operatorname{tg}\psi_1\mu_e/\mu_v}{\operatorname{tg}\psi_4\mu_e/\mu_v} = -\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\operatorname{tg}\psi_4},$$

или в общем случае

$$u_{ij} = \pm \operatorname{tg}\psi_i/\operatorname{tg}\psi_j. \qquad (15.3)$$

Знак отношения определяется по знаку тангенса.

Ступенчатые зубчатые механизмы представляют собой последовательное соединение нескольких пар блочных колес (спаренные колеса *2* и *3*; *4* и *5* на рис. 15.3, *а*). Передаточное отношение этого механизма

$$u_{16} = u_{12}u_{34}u_{56} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_3}{\omega_4}\frac{\omega_5}{\omega_6} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right)\left(+\frac{z_6}{z_5}\right) =$$

$$= +\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5};$$

так как $\omega_2 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_5$, то после сокращения получаем

$$u_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = +\frac{z_2z_4z_6}{z_1z_3z_5}.$$

Или в общем случае при j колесах и t внешних зацеплениях полное передаточное отношение ступенчатой передачи

$$u_{ij} = (-1)^t \frac{z_2z_4z_6 \dots z_j}{z_1z_3z_5 \dots z_{(j-1)}}, \qquad (15.4)$$

т. е. равно отношению произведения чисел зубьев ведомых колес к произведению чисел зубьев ведущих колес.

За счет подбора чисел зубьев колес в ступенчатом редукторе можно получить бóльшие передаточные отношения при тех же габаритах, что и у рядового. Знак передаточного отношения определяется множителем $(-1)^t$ или по правилу стрелок (см. рис. 15.3). В этом случае направление вращения колеса показывают на схеме механизма прямой стрелкой в ту сторону, куда движутся точки на обращенных к наблюдателю сторонах венцов колес (см. стрелки на колесе *1* и *2*). Пользуясь этим правилом, устанавливаем, что веду-

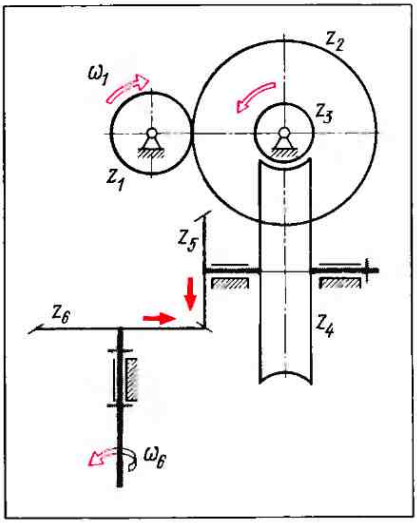


Рис. 15.5

щее *1* и ведомое *6* колеса вращаются в одну и ту же сторону. Треугольники скоростей (рис. 15.3, *б*), построенные по изложенной выше методике, позволяют определить графически

$$u_{16} = \frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\operatorname{tg}\psi_6} = + \frac{AA' \cdot CO_{IV}}{O_1A \cdot CC'}.$$

Ступенчатые зубчатые механизмы часто применяются в коробках скоростей, где передаточное отношение изменяется скачкообразно. Это позволяет при $\omega_1 = \text{const}$ сообщать выходному звену различные по величине и направлению скорости и воспроизводить любой ряд передаточных отношений с заданной закономерностью (см. рис. 3.12, *б*).

Пространственные многозвенные зубчатые механизмы используются в тех случаях, когда необходимо передавать движение между скрещивающимися осями (рис. 15.5) или пересекающимися (рис. 15.6, *а*). В последнем случае применяются механизмы из конических колес, углы между осями которых Σ_{12} и Σ_{34} могут иметь любые значения (чаще всего они равны 90°). При аналитическом исследовании такого механизма определяется ω_4 или передаточное отношение [см. формулу (14.3)] по известным параметрам из выражения $u_{14} = u_{12}u_{34} = |\overline{\omega}_1|/|\overline{\omega}_4| = (\sin\delta_2 \cdot \sin\delta_4)/(\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_3)$. Направление вращения колес определяется с помощью стрелок. При графическом методе исследования строится векторный план угловых скоростей колес (см. гл. 3), вращающихся вокруг пересекающихся осей, из которого (рис. 15.6, *б*) находятся искомые передаточное отношение $u_{14} = |\overline{\omega}_1|/|\overline{\omega}_4| = \overline{pa}/\overline{pc}$ и скорость ведомого колеса $\omega_4 = (\overline{pc})/\mu_\omega$.

§ 15.2 Планетарные зубчатые механизмы

Такие многозвенные зубчатые механизмы обязательно имеют колеса с движущимися геометрическими осями (см. рис. 3.11), которые называются планетарными или сателлитами. Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется водилом. Вращающееся вокруг неподвижной оси колесо, по которому обкатываются сателлиты, называется центральным; неподвижное центральное колесо называется опорным. Как правило, планетарные механизмы изготовляются соосными.

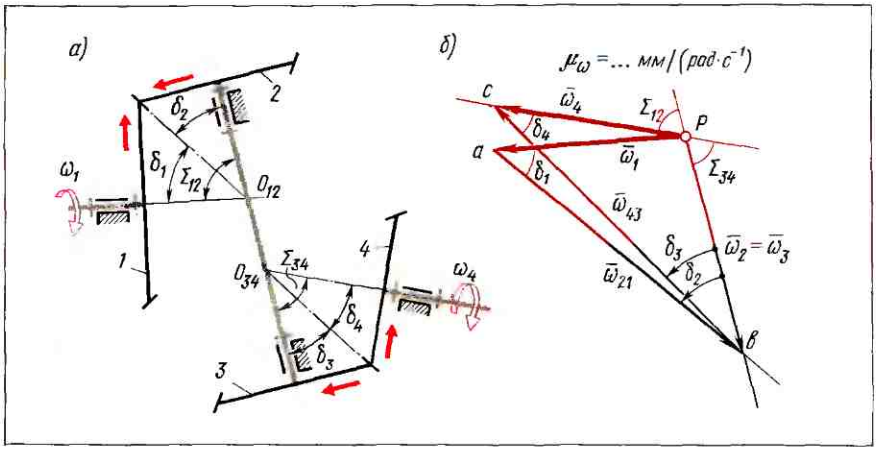


Рис. 15.6

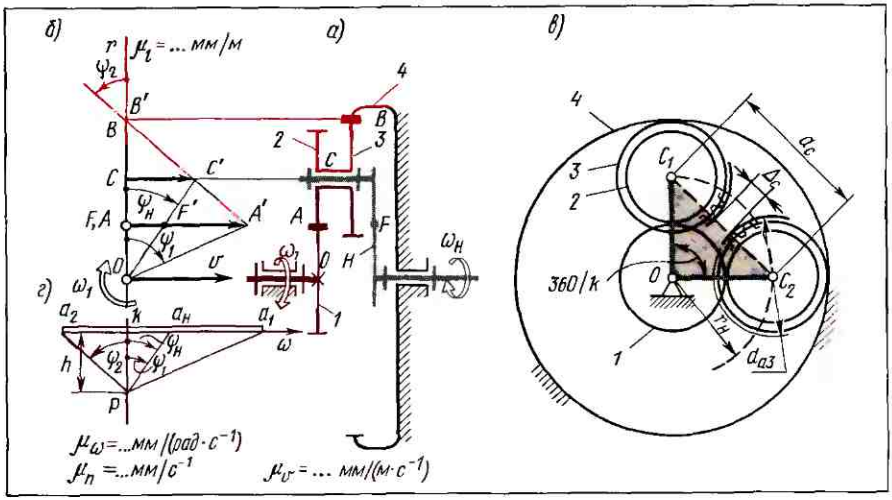


Рис. 15.7

Планетарные механизмы подразделяются на планетарные редукторы и мультипликаторы, которые обладают одной степенью свободы и обязательно имеют опорное звено, и зубчатые дифференциальные механизмы, число степеней свободы которых два и более ($W \geqslant 2$) и которые опорного звена обычно не имеют. Типичным примером планетарного редуктора является соосный механизм с цилиндрическими колесами, схема которого изображена на рис. 15.7, *а*. Этот механизм состоит из центрального колеса *1* и водила *H*, вращающихся вокруг неподвижных осей, трех сателлитов, составленных из двух жестко связанных в единый блок колес *2* и *3*, опорного колеса *4* и стойки. При вращении колеса *1* сателлиты *2-3* поворачиваются как рычаг относительно мгновенного центра вращения *B* (колесо *4* неподвижно) и заставляют вращаться водило *H*. При этом планетарные колеса (сателлиты) совершают сложное движение: вращаются вокруг собственной оси (относительно водила) с ω_2 и вместе с водилом обкатываются с ω_H вокруг оси *OO* (переносное движение). Число степеней свободы этого механизма равно единице. Поэтому редуктор имеет постоянное передаточное отношение. Обычно у реального механизма имеется несколько симметрично расположенных сателлитов *k* (колеса *2, 3* на рис. 15.7, *а, в*). Их вводят с целью уменьшения габаритов механизма, снижения усилия в зацеплении, разгрузки подшипников центральных колес, улучшения уравновешивания водила, хотя механизм в этом случае имеет избыточные связи ($q > 0$), т. е. является статически неопределимым. При кинематических расчетах учитывается один сателлит, так как остальные являются пассивными в кинематическом отношении.

Если в рассмотренном механизме (рис. 15.7) освободить от закрепления опорное колесо *4* (корпус редуктора) и сообщить ему вращение, то все центральные колеса станут подвижными и механизм превратится в дифференциальный (рис. 15.8), так как число степеней свободы *W* его будет равно двум. Число степеней свободы (подвижности) *W* механизма показывает, скольким звеньям дифференциала необходимо сообщить независимые движения, чтобы получить определенность движения всех остальных звеньев. Здесь в зависимости от направления вращения наружных валов может происходить либо разложение движения (одного ведущего на два ведомых), либо сложение движения. Ведущим считается такой вал, у которого направление скорости вращения и момента совпадают. Следовательно, планетарный редуктор (или мультипликатор), имеющий неподвижное колесо, можно превратить в дифференциал, если освободить неподвижное (опорное) колесо и сообщить ему вращение. Наоборот, любой дифференциал можно превратить в планетарный редуктор, если закрепить одно (при $W=2$) или несколько из его центральных колес. Это так называемое *свойство обратимости планетарных механизмов*, которое позволяет применять одинаковые методы исследования и проектирования для редукторов и для дифференциалов. При этом каждому элементарному дифференциалу будут соответствовать два планетарных редуктора,

получаемых при остановке его центральных колес. Планетарные механизмы применяются либо для воспроизведения заданной траектории (направляющие механизмы), либо, чаще, для изменения скоростей вращения (воспроизведение заданного передаточного отношения).

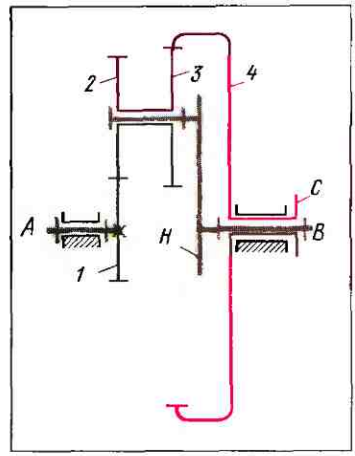


Рис. 15.8

Аналитический метод исследования основывается на способе обращения движения (см. гл. 3). Сообщается всем звеньям механизма угловая скорость, равная по величине и противоположная по направлению угловой скорости водила ω_H. Тогда водило становится неподвижным и механизм из планетарного обращается в зубчатый механизм с неподвижными осями колес (обращенный механизм), состоящий из нескольких последовательно соединенных пар зубчатых колес (*1, 2* и *3, 4* для схемы на рис. 15.7, *а*). Но скорости этих колес будут иными: вместо $\omega_1^{(4)}$ будет $\omega_1^{(H)} = \omega_1^{(4)} - \omega_H^{(4)}$ (индекс в скобках указывает номер неподвижного звена); аналогично вместо $\omega_2^{(4)} = \omega_3^{(4)}$ будет $\omega_2^{(H)} = \omega_2^{(4)} - \omega_H^{(4)} = \omega_3^{(4)} - \omega_H^{(4)}$; вместо $\omega_4 = 0$ будет $\omega_4^{(H)} = 0 - \omega_H^{(4)}$. Для каждой планетарной пары обращенного механизма по формуле (3.100) можно записать $(\omega_1^{(4)} - \omega_H^{(4)})/(\omega_2^{(4)} - \omega_H^{(4)}) = -r_2/r_1$; $(\omega_3^{(4)} - \omega_H^{(4)})/(0 - \omega_H^{(4)}) = +r_4/r_3$.

В итоге получается система уравнений, связывающих относительные угловые скорости отдельных планетарных пар при остановленном водиле; решая ее, находим искомую величину ω или u. При этом число уравнений системы должно соответствовать числу искомых величин. Перемножая последние два выражения, имеем $(\omega_1^{(4)} - \omega_H^{(4)})/(0 - \omega_H^{(4)}) = -(r_2 r_4)/(r_1 r_3)$. Но $[-(r_2 r_4)/(r_1 r_3)] = (-r_2/r_1) \times \times (+r_4/r_3) = u_{12}^{(H)} u_{34}^{(H)} = u_{14}^{(H)}$. Тогда $[(\omega_1^{(4)}/\omega_H^{(4)}) - 1]/(0 - 1) = u_{14}^{(H)}$. Откуда передаточное отношение реального механизма (при $\omega_4 = 0$)

$$u_H^{(4)} = 1 - u_{14}^{(H)}. \qquad (15.5)$$

Эта формула справедлива для любой схемы планетарного редуктора при наличии неподвижного центрального колеса. Значит, и передаточное отношение от любого планетарного колеса i к водилу H при неподвижном опорном колесе j равно единице минус передаточное отношение $u_{ij}^{(H)}$ от этого же колеса к опорному в обращенном механизме, т. е.

$$u_{iH}^{(i)} = 1 - u_{ij}^{(H)}, \qquad (15.6)$$

или

$$u_{iH}^{(i)} + u_{ij}^{(H)} = 1.$$

Значит, для планетарных механизмов с круглыми колесами сумма передаточных отношений при различных останавливаемых звеньях всегда равна единице. Передаточное отношение $u_{ij}^{(H)}$ обращенного механизма подсчитывают от подвижного колеса i к тому колесу, которое в реальном планетарном механизме неподвижно (j). Поэтому для схемы на рис. 15.7, *а* $u_{ij}^{(H)}=u_{14}^{(H)}=-r_2r_4/(r_1r_3)$, а для всего механизма

$$u_{1H}^{(4)}=1-u_{14}^{(H)}=1+\frac{r_2r_4}{r_1r_3}=1+\frac{z_2z_4}{z_1z_3}. \qquad (15.7)$$

В отличие от механизма с неподвижными осями передаточное отношение планетарного редуктора зависит не только от числа зубьев и знака их отношения, но и числа ступеней между центральными колесами (при остановленном водиле). Поэтому каждая конкретная схема планетарного редуктора имеет свое, вполне определенное, выражение для подсчета значения передаточного отношения $u_{ij}^{(j)}$, написанное через числа зубьев (или радиусы). При определении угловой скорости промежуточного колеса рекомендуется пользоваться формулой (15.6).

Графический метод исследования сводится к построению треугольников линейных скоростей каждого колеса (см. гл. 3) и нахождению из них ω_i или u_{iH}. Для этого переносятся на вертикаль (см. рис. 15.7, *б*) характерные точки схемы ($OABC$) и откладывается отрезок $AA'=v_A\mu_v$, соответствующий вектору скорости точки A колеса *1*. Соединяя точки A' и O наклонным лучом (под углом ψ_1), получаем треугольник скоростей этого колеса, в котором OA' — прямая распределения линейных скоростей первого колеса.

Треугольник скоростей колес *2-3* строится по известным линейным скоростям двух точек: точки A (где $v_{A2}=v_{A1}$) и точки B (мгновенный центр скоростей колес *2-3*), где $v_B=0$. Соединяя точки A' и B, получаем прямую распределения скоростей колес *2-3* (под углом ψ_2). На этой прямой лежит точка C' — конец вектора CC', который соответствует линейной скорости центра сателлитов *2-3* и точки C водила. Проводя луч OC' (под углом ψ_H), получаем треугольник скоростей для водила ($\triangle OCC'$). Отношение тангенсов углов наклона линий скоростей входного и выходного звеньев дает значение передаточного отношения данной схемы редуктора $u_{1H}^{(4)}=\omega_1/\omega_H=\operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_H=(AA'/OA)(OC/CC')$. Учитывая, что $AA'=CC'(AB/BC)$, имеем $u_{1H}^{(4)}=(r_4-r_1)(r_1+r_3)/(r_1r_3)=1+(r_2r_4)/(r_1r_3)$.

Строя план угловых скоростей (рис. 15.7, *г*), можно определить $\omega_2=ka_2/\mu_\omega$; $\omega_H=ka_H/\mu_\omega$ или $n_H=ka_H/\mu_n$; $u_{1H}^{(4)}=ka_1/(ka_H)$.

Если известны моменты сил M_1 и M_2 на входном и выходном валах редуктора и если считать, что трение отсутствует и звенья движутся равномерно, то передаточное отношение может быть определено из соотношения

$$u_{1H}^{(4)}=\omega_1^{(4)}/\omega_H^{(4)}=-M_H/M_1. \qquad (15.8)$$

Кинематическое исследование дифференциального механизма с целью нахождения скоростей вращения звеньев проводится аналогично.

Любой элементарный дифференциал с $W=2$, который нельзя разложить на более простые самостоятельные механизмы (рис. 15.8), в отличие от редуктора имеет три наружных вала *A, B, C*. Поэтому положение каждого звена в таком механизме определяется двумя независимыми обобщенными координатами (углами поворота двух валов), т. е. $\varphi_C=f(\varphi_A, \varphi_B)$. Тогда угловая скорость ведомого звена согласно формуле (3.1) будет

$$\omega_C = u_{CA}^{(B)}\omega_A + u_{CB}^{(A)}\omega_B. \qquad (15.9)$$

Используя эту формулу, можно определить ω_H для механизма, изображенного на рис. 15.8 (при известных z_i, ω_1, ω_4):

$$\omega_H = \omega_1 u_{H1}^{(4)} + \omega_4 u_{H4}^{(1)}. \qquad (15.10)$$

Частное передаточное отношение (при $\omega_4=0$)

$$u_{H1}^{(4)} = \frac{1}{u_{1H}^{(4)}} = \frac{1}{1+\dfrac{z_2z_4}{z_1z_3}} = \frac{z_1z_3}{z_1z_3+z_2z_4}.$$

Аналогично при остановленном первом колесе ($\omega_1=0$) имеем

$$u_{H4}^{(1)} = \frac{1}{u_{4H}^{(1)}} = \frac{1}{1+\dfrac{z_3z_1}{z_2z_4}} = \frac{z_2z_4}{z_2z_4+z_1z_3}.$$

Подставляя эти значения в (15.10), получаем

$$\omega_H = \frac{\omega_1 z_1 z_3 + \omega_4 z_2 z_4}{z_2z_4 + z_1z_3}.$$

Любой элементарный дифференциал с $W=2$ позволяет реализовать шесть различных передаточных отношений от одного вала к другому при остановленном третьем: $u_{AB}^{(C)}$; $u_{BA}^{(C)}$; $u_{AC}^{(B)}$; $u_{CA}^{(B)}$; $u_{BC}^{(A)}$; $u_{CB}^{(A)}$. Но все эти значения взаимосвязаны, поскольку $u_{BA}^{(C)} = 1/u_{AB}^{(C)}$ и т. д.; $u_{AB}^{(C)} + u_{AC}^{(B)} = 1$; $u_{BC}^{(A)} + u_{BA}^{(C)} = 1$; $u_{CA}^{(B)} + u_{CB}^{(A)} = 1$. Кроме того, среди этих шести значений всегда есть одно наибольшее (>2) и положительное, которым удобно пользоваться для характеристики механизма в целом.

Кинематический расчет пространственных планетарных передач, составленных из конических зубчатых колес, осуществляется аналитическим или графическим методом, но при исследованиях оперируют векторной величиной угловой скорости. Такие механизмы нашли широкое применение в виде дифференциалов с двумя степенями свободы (рис. 15.9, *а*). Этот механизм состоит из центральных колес *1, 3* и водила *H*, вращающихся вокруг оси *AOF*, планетарного колеса *2*, участвующего в двух вращательных движениях в пространстве (вместе с водилом вокруг оси *OF* и относительно водила вокруг оси *OC*). Следовательно, ось *OC* является осью вращения колеса *2* относительно водила *H*, линия *OB* — осью мгновенного вращения колеса *2* относительно колеса *1*, линия *OD* — осью мгновенного вращения колеса *2* относительно колеса *3*.

Графический метод исследования основан на построении плана

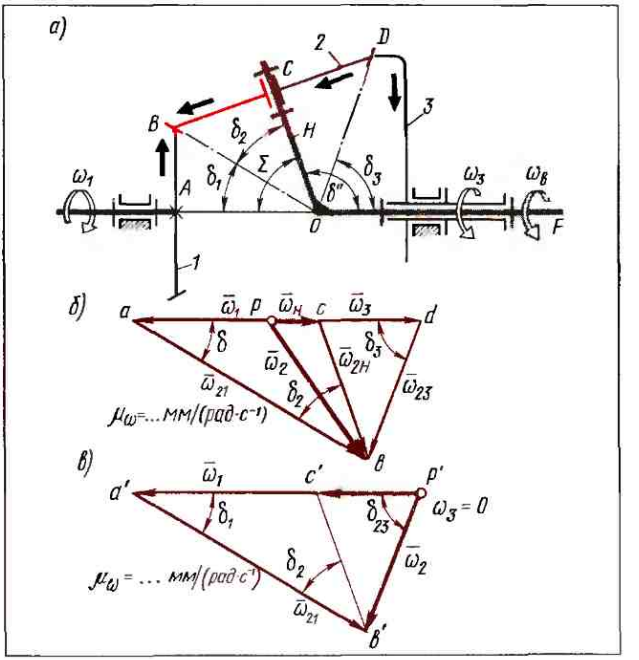


Рис. 15.9

угловых скоростей (см. гл. 3). Задавшись величиной и направлением ω_1 и ω_3 (так как $W = 2$), строится план угловых скоростей (рис. 15.9, *б*), из которого определяется искомая скорость водила ω_H.

При аналитическом решении, останавливая водило, получаем обращенный механизм, у которого скорость первого колеса $\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_H$, второго $\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_H$, третьего $\overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_H$. Но эти векторные разности не параллельны, поэтому их следует брать по абсолютной величине. Тогда для колес *1-2* и соответственно колес *2-3* будет

$$|\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_H| / |\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_H| = z_2/z_1; \quad |\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_H| / |\overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_H| = z_3/z_1.$$

После перемножения получим $|\overline{\omega} - \overline{\omega}_H| / |\overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_H| = z_3/z_1$. Но, так как векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_H$, $\overline{\omega}_3$ направлены по одной прямой, то разности скоростей в последнем уравнении являются алгебраическими. Знак определяется по правилу стрелок, показывающих направление вращения колес при остановленном водиле. Тогда $(\omega_1 - \omega_H)/(\omega_3 - \omega_H) = -z_3/z_1$. Минус справа потому, что направления стрелок на колесах *1* и *3* (рис. 15.9, *а*) не совпадают. Из последнего выражения определяется $\omega_H = (\omega_1 + \omega_3 z_3/z_1)/(1 + z_3/z_1)$. Это же решение может быть получено и из рассмотрения треугольников *abc* и *bcd* (рис. 15.9, *б*).

Широко используется дифференциальный механизм данной схемы с $z_1 = z_3$ и $\Sigma = 90°$ в автомобилях, станках, счетно-решающих

устройствах. При этом $\omega_H = 0{,}5(\omega_1 + \omega_3)$. Поэтому при $\omega_3 = 0$, колесо *1* будет вращаться в два раза быстрее водила. Если $\omega_H = 0$, то $\omega_1 = -\omega_3$ и колеса будут вращаться только в противоположные стороны. Если это редуктор, т. е. одно колесо заторможено ($\omega_3 = 0$), то, используя те же уравнения, будем иметь свой план угловых скоростей (рис. 15.9, *в*). Взяв из него отношение отрезков $a'p'/c'p' = \omega_1/\omega_H$, получим $u_{1H}^{(3)}$, взяв отношение $a'c'/c'p' = (\omega_1 - \omega_H)/(\omega_3 - \omega_H)$, получим $u_{13}^{(H)}$, величина которого положительна. Используя (15.6), находим аналитически $u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)} = 1 - (-z_3/z_1) = 1 + z_3/z_1$.

§ 15.3 Выбор схем планетарных механизмов и их кинематические особенности

В инженерной практике получили распространение четыре схемы простейших планетарных механизмов, в которых сателлиты (двойные — рис. 15.7, 15.10, или одинарные — рис. 15.11) зацепляются одновременно с двумя центральными колесами. Все они имеют три соосных вала, один из которых неподвижный. Поочередное затормаживание одного из валов позволяет получать в каждом механизме на выходе три различные скорости. Передаточное отношение всех этих редукторов определяется одинаково формулой (15.6), из которой следует, что в зависимости от знака $u_{ij}^{(H)}$ механизмы обладают разными кинематическими возможностями. Если $u_{ij}^{(H)} > 0$, то передаточное отношение реального планетарного механизма $u_{\text{ред}} = u_{iH}^{(j)}$ может быть значительно больше передаточного отношения обращенного механизма $u_{ij}^{(H)}$, составленного из тех же колес. Если $u_{ij}^{(H)} < 0$, то передаточное отношение планетарного механизма $u_{iH}^{(j)}$ лишь на единицу больше $u_{ij}^{(H)}$ обращенного механизма. В соответствии с этим будут различны потери на трение и динамические качества передач. Все эти качества в значительной мере предопределяются принципом образования структурных схем простейших планетарных механизмов. Поэтому все схемы простейших механизмов по своим свойствам подразделяются на две основные группы: механизмы с положительным передаточным отношением обращенного механизма ($u_{ij}^{(H)} > 0$) — рис. 15.10, *а, б*, и механизмы с отрицательным передаточным отношением обращенного механизма ($u_{ij}^{(H)} < 0$) — схемы на рис. 15.7 и 15.11.

Механизмы первой группы имеют двойные сателлиты и могут быть составлены из колес однотипного только внешнего (схема *а*) *либо только внутреннего* (схема *б*) *зацепления.* Передаточное отношение реального механизма будет $u_{1H}^{(4)} = 1 - (z_2 z_4/z_1 z_3)$. Как правило, такие механизмы работают как понижающие передачи, т. е. ведущим является водило. Тогда получим $u_{H1}^{(4)} = 1/u_{1H}^{(4)} = z_1 z_3/(z_1 z_3 - z_2 z_4)$.

Так как приведенный механизм здесь (рис. 15.10, *а*) получается

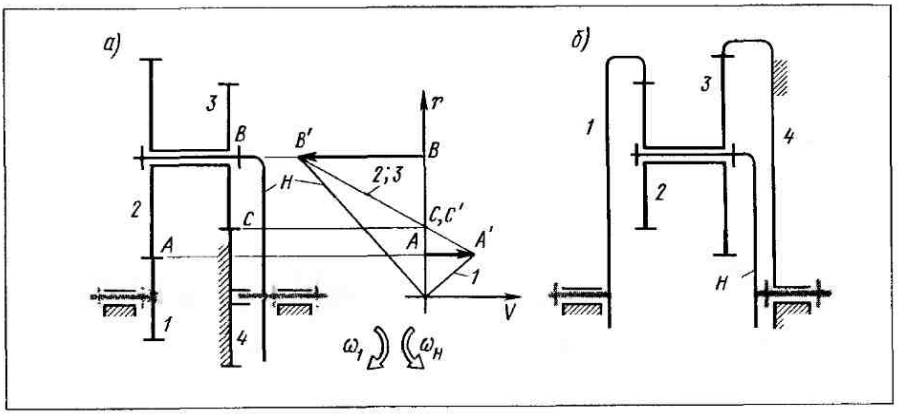


Рис. 15.10

двухрядным (колеса *1-2* и *3-4*), то за счет подбора чисел зубьев колес можно получить большие передаточные отношения. Так, например, если в схеме на рис. 15.10, *а* принять $z_1 = z_3 = 100$; $z_2 = 99$; $z_4 = 101$; то $u_{1H}^{(4)} = 1/(1 - u_{14}^{(H)}) = 1/[1 - (9999/100\,000)] = 10\,000$. Однако к.п.д. $< 1\%$.

Передаточное отношение в таких механизмах тем больше, чем меньше $u_{14}^{(H)}$ отличается от 1. Но при увеличении $u_{H1}^{(4)}$ одновременно значительно снижается к.п.д. Обычно такие механизмы используются при одном сателлите, когда необходимо получить большое передаточное отношение, не взирая на низкий к.п.д. (в несиловых передачах). Особенностью механизмов этих схем является то, что за счет изменения размеров закрепленного центрального колеса (рис. 15.10) можно получить вращение наружных валов, либо одного направления, либо разных. При очень больших передаточных отношениях значительно больше проявляется влияние неточности изготовления и сборки на постоянство передаточного отношения в пределах оборота. Поэтому, несмотря на большие кинематические возможности, планетарные механизмы этой группы используют лишь в тех случаях, когда полезные нагрузки невелики. Обычно здесь $u_р = 30...100$ при приемлемых к.п.д., а в маломощных передачах $u_р$ достигает 1500...1700. Преимущество имеют механизмы с двумя внутренними зацеплениями, обладающие меньшими габаритами и большими к.п.д. (рис. 15.10, *б*).

Механизмы второй группы составляются обязательно из колес разнотипного зацепления с двойным (рис. 15.7) *или одинарным* (рис. 15.11) *сателлитом.* В соответствии с этим обращенный механизм получается либо двухрядный (рис. 15.7), у которого $u_{14}^{(H)} = (-z_2/z_1)(+z_4/z_3) < 0$, либо однорядный (рис. 15.11). Поэтому у реального механизма для первой схемы $u_{1H}^{(4)} = 1 + (z_2 z_4/z_1 z_3)$.

для второй (где $z_2 = z_3$) будет $u_{1H}^{(4)} = 1 + (z_4/z_1)$, а направление вращения выходного и входного валов всегда одинаково. Механизмы этих схем имеют широкое применение в силовых передачах многосателлитных редукторах средней и большой мощности при $u_{1H}^{(4)} = 3...15$ и высоком к.п.д. (0,96...0,98). Наличие нескольких сателлитов ($k > 1$) позволяет значительно снизить габариты, улучшить динамику (уравновешивание, разгрузку опор центральных колес и водила и пр.) и уменьшить вес по сравнению с другими видами зубчатых передач при тех же передаточных отношениях. При ведущем колесе *1* эти механизмы работают как редуктор. Однорядный механизм (рис. 15.11), обычно применяемый при $u_{1H}^{(4)} = 3...8$, имеет те же достоинства, что и вышеупомянутые механизмы, но выгодно отличается малым осевым размером, наименьшая величина которого получается при $u_{1H}^{(4)} \leqslant 4$. Механизм такой схемы широко используется в силовых передачах, в многоступенчатых планетарных коробках скоростей или как самостоятельная передача и особенно в качестве встроенных редукторов электроприводов, установок дистанционного управления, летательных аппаратов и т. д.

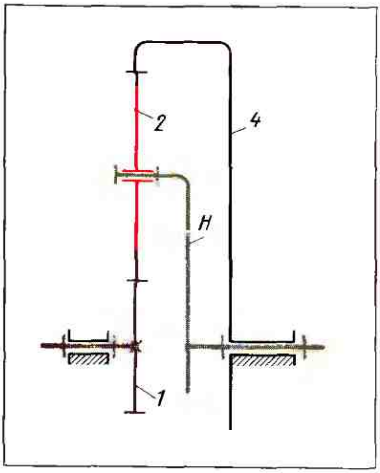


Рис. 15.11

Последующее развитие структуры планетарных механизмов в осевом направлении приводит к схемам с тремя центральными колесами рис. 15.12. Водило здесь свободно вращается в опорах, не передавая движения. При кинематическом исследовании этот механизм расчленяется на два простых: первый включает центральные колеса *1, 5,* сателлит *2* и водило *H* (рис. 15.12, *а*); второй — состоит из центрального колеса *4*, сателлита *3* и водила *H*. При неподвижном колесе *5* $W = 1$ и общее передаточное отношение редуктора

$$u_{14}^{(5)} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_H}\frac{\omega_H}{\omega_4} = u_{1H}^{(5)} u_{H4}^{(5)} = (1 - u_{15}^{(H)})\frac{1}{1 - u_{45}^{(H)}};$$

$$u_{14}^{(5)} = \left(1 + \frac{z_5}{z_1}\right)\frac{1}{1 - \frac{z_1 z_5}{z_4 z_2}} = \frac{z_2 z_4 (z_1 + z_5)}{z_1 (z_4 z_2 - z_3 z_5)}.$$

Это позволяет за счет подбора соответствующих чисел зубьев получать большие передаточные отношения ($u_p > 100$) при хорошем к.п.д. и большой компактности. Из построенных треугольников

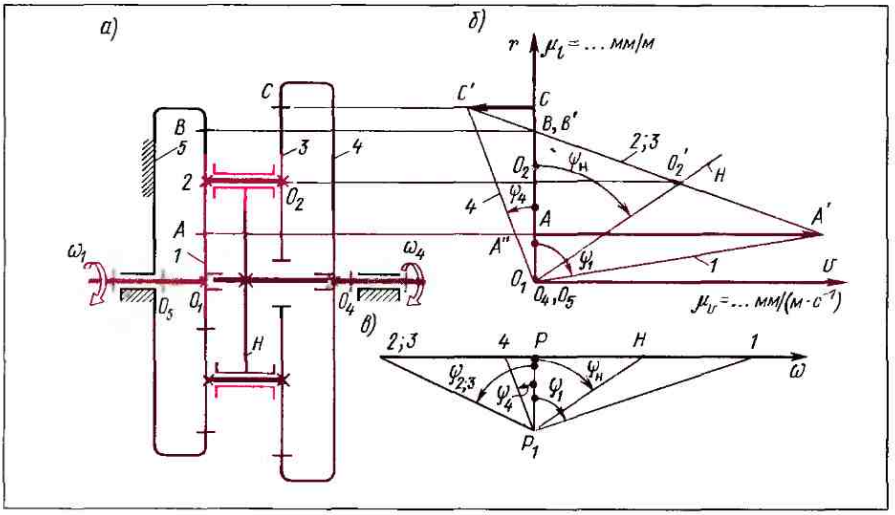


Рис. 15.12

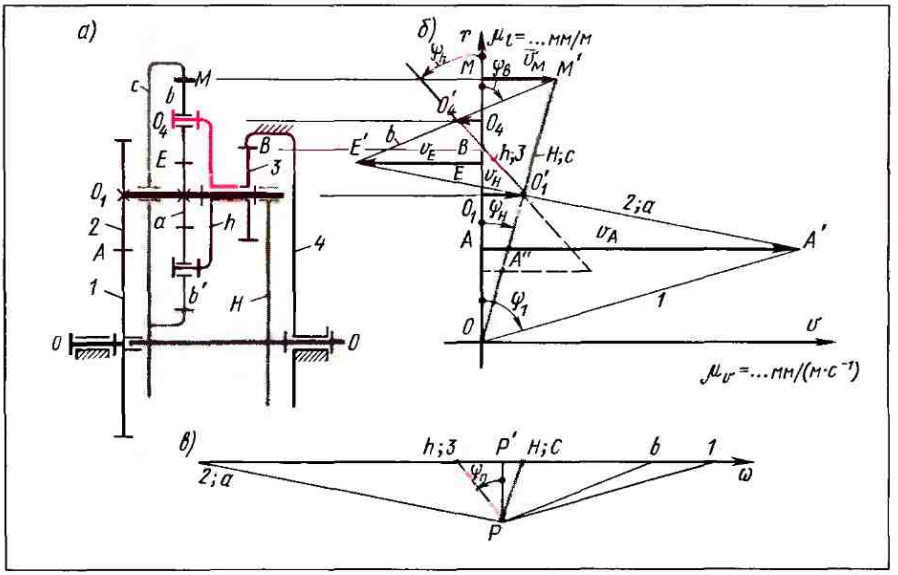


Рис. 15.13

скоростей (рис. 15.12, *б*) и плана угловых скоростей (рис. 15.12, *в*) видно, что ведущее и ведомое колеса вращаются в разные стороны. Наиболее рациональная конструкция получается при $u_р = 20...100$, хотя к.п.д. несколько ниже, чем в планетарных передачах с двумя центральными колесами.

Развитие структуры планетарных механизмов в радиальном направлении приводит к бипланетарным механизмам (рис. 15.13), которые состоят из основного планетарного механизма (о.п.м.) (звенья *1, 2, H, 4*) и сателлитного планетарного механизма (с.п.м.) из звеньев (*a, в, c, 3 — h*). Сателлит *2* о.п.м. скреплен с центральным колесом «а» с.п.м., сателлит *3* — с водилом *h* с.п.м., а водило *H* — с колесом *c*. Останавливая водило *H* ($\omega_H = 0$), получаем планетарный механизм $a - b - c - h$ и две пары колес *1-2* и *3-4* с неподвижными осями, для которого $u_{14}^{(H)} = u_{12}^{(H)} u_{ah}^{(H)} u_{34}^{(H)}$ (рис. 15.13, *а*). Применяя второе обращение (полагая $\omega_h = 0$) только для с. п. м., получим (при $\omega_c = 0$) $u_{ah}^{(c)} = 1 - u_{ac}^{(h)} = 1 + (z_c/z_a)$. Передаточное отношение всего бипланетарного механизма

$$u_{1H}^{(4)} = 1 - u_{14}^{(H)} = 1 - u_{12}^{(H)}(1 - u_{ac}^{(h)}) u_{34}^{(H)}, \qquad (15.11)$$

или

$$u_{1H}^{(4)} = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1 + \frac{z_c}{z_a}\right)\left(+\frac{z_4}{z_3}\right) = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\left(\frac{z_a + z_c}{z_a}\right).$$

Обычно $u_{1H}^{(4)} = 17...85$ при хороших к. п. д. Угловые скорости промежуточных звеньев: относительная скорость малого водила h: $\omega_{hH} = \omega_{3H} = \omega_3 - \omega_H = -u_{34}^{(H)}\omega_H = -u_{34}^{(H)}\omega_1/u_{1H}^{(4)}$; большого водила: $\omega_H = \omega_1/u_{1H}^{(4)}$; ведущего звена с. п. м. $\omega_a = \omega_2 - \omega_H = (\omega_1/u_{12}^{(H)})(1 - u_{1H}^{(4)})$ и т. д.

Графические построения для определения передаточного отношения (рис. 15.13, *б*) удобно начинать с линии *H*; задаваясь ω_H, строят скорость $v_{01} = \omega_H O_1 O$, а затем проводятся линия *h* (скорость оси сателлита O_4O_4), линия *b* (по v_{04} и $v_м$), линия *2-a* и линия *1*:

$$u_{1H}^{(4)} = \omega_1/\omega_H = \operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_H = AA'/AA'' > 0; \quad \omega_a = (\mu_e/\mu_v)\operatorname{tg}\psi_a.$$

Из плана угловых скоростей (рис. 15.13, *в*) видно, что входное *1* и выходное *H* звенья вращаются в одном и том же направлении. Такие механизмы в основном применяются для получения сложного движения исполнительных органов в технологических машинах.

Если два соосных вала зубчатого дифференциала соединяются (замыкаются) с ведущим или ведомым валом через какую-либо передачу (простую зубчатую или планетарную), то получается замкнутая планетарная передача (рис. 15.14, *а, б*). Такой механизм получается, если в однорядном дифференциале с тремя вращающимися соосными валами замкнуть звено *3* и *H* через зубчатую передачу, состоящую из двух пар колес *4-5* и *6-7*. Тогда ведомое звено *7* получает вращение от звена *3* через колеса *4-5* и параллельно от звена *H* через пару колес *6-7*. Механизм имеет одну степень свободы $W = 1$.

Построение плана скоростей удобнее начинать с конечного звена *7*, а затем строить линии *3-4*, *6-H*, *2* и *1*. Передаточное отношение всего механизма: $u_{17} = \operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_7$.

Для аналитического определения передаточного отношения следует пользоваться формулой Виллиса. Останавливая водило, имеем для колес *1-3*: $(\omega_1 - \omega_H)/(\omega_3 - \omega_H) = -r_3/r_1$; для колес *4-5* будет: $\omega_4/\omega_5 = -r_5/r_4$; для колес *6-7* имеем $\omega_6/\omega_7 = +r_7/r_6$. Заменяя в первом выражении $\omega_3 = \omega_4 = -\omega_5(r_7/r_4)$ и $\omega_H = \omega_6 = \omega_7(r_7/r_6)$, имеем

$$\frac{\omega_1 - \omega_7(r_7/r_6)}{-\omega_5(r_5/r_4) - \omega_7(r_7/r_6)} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Делим на ω_7 и определяем

$$u_{17} = \omega_1/\omega_7 = -\frac{r_3}{r_1}\left(-\frac{r_5}{r_4} - \frac{r_7}{r_6}\right) + \frac{r_7}{r_6} = \frac{r_3 r_5}{r_1 r_4} + \frac{r_3 r_7}{r_1 r_6} + \frac{r_7}{r_6}.$$

Замкнутые дифференциальные механизмы обычно имеют более высокий к. п. д., что объясняется возможностью разделения передаваемой мощности на два параллельных потока и позволяет реализовать значительно большие крутящие моменты на выходе при малых габаритах привода. При этом надо следить, чтобы потоки мощности не были встречными, что может вызвать циркуляцию ее и потери. Такие передачи используются, как правило, в силовых приводах.

Для осуществления больших передаточных отношений применяются многоступенчатые планетарные механизмы, образуемые последовательным соединением простейших планетарных механизмов (рис. 15.15, *а*). Такой многоступенчатый редуктор, составленный из трех однорядных механизмов по рис. 15.11, *а*, будет иметь

$$u_{\text{общ}} = u_{1H3} = u^{(3)}_{1H1} u^{(6)}_{4H2} u^{(9)}_{7H3} = (1 + z_3/z_1)\left(1 + \frac{z_6}{z_4}\right)(1 + z_9/z_7).$$

Если $u^{(3)}_{1H1} = u^{(6)}_{4H2} = u^{(9)}_{7H3} = 7$, то при высоком к. п. д. (88...94%) и меньших габаритах $u_{\text{общ}} = 7^3 = 343$, что больше, чем у редуктора с неподвижными осями (при одинаковых мощностях и таком же $u_{\text{общ}}$). Соединение здесь звеньев с тормозами позволяет получать различные значения угловой скорости ведомого звена ω_{H3} при неизменной скорости ведущего вала.

Механизм, включающий две планетарные ступени с общим водилом (см. рис. 15.15, *б*), называется сдвоенным планетарным механизмом. Такие механизмы используются в коробках скоростей (транспортные, грузоподъемные машины). Затормаживая в них по очереди звенья, можно получить несколько скоростей вращения ведомого звена при постоянной скорости ведущего. Так, в схеме, приведенной на рис. 15.15, *б*, при затормаживании звена *3* (тормозной барабан *А*) получается двухступенчатый редуктор:

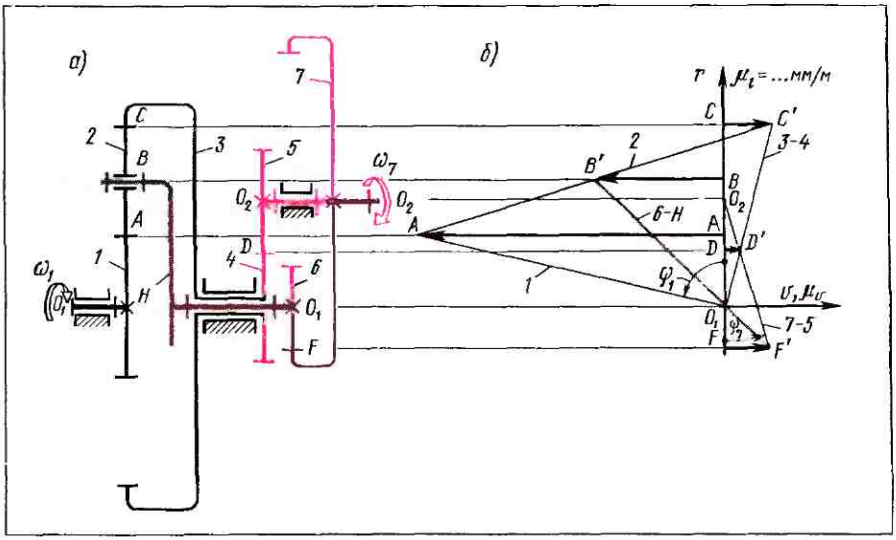


Рис. 15.14

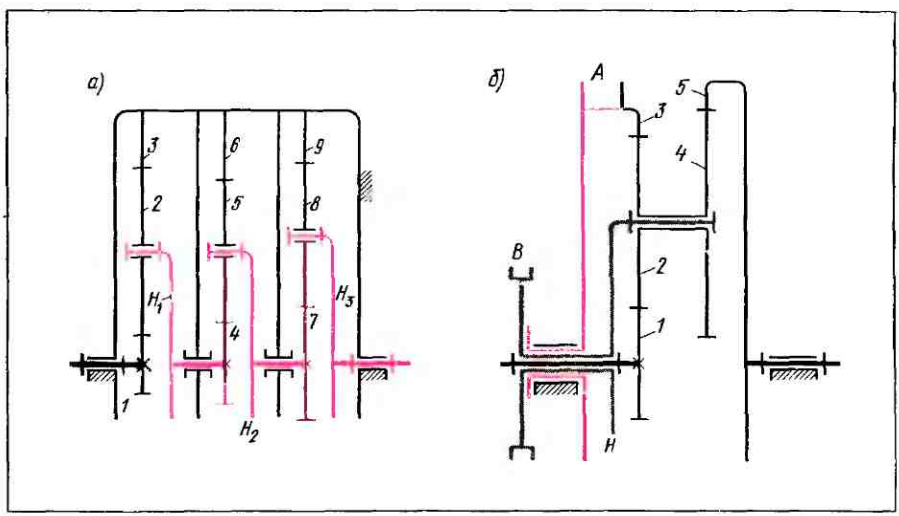


Рис. 15.15

первая планетарная ступень составлена из звеньев *1-2-3-H* и вторая — из звеньев *H-3-4-5*. Общее передаточное отношение редуктора

$$u_{\text{общ}} = u_{1H}^{(3)} u_{H5}^{(3)} = (1 - u_{13}^{(H)}) \frac{1}{1 - u_{53}^{(H)}} = \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \frac{1}{1 - \frac{z_4 z_3}{z_5 z_6}}.$$

При затормаживании звена H (водило) получается ступунчатый механизм с неподвижными осями, составленный из колес *1-2-4-5* $u_{\text{общ}} = -z_2 z_5/(z_1 z_4)$; колесо *3* при этом вращается вхолостую.

Увеличивая число планетарных ступеней, можно получить коробку скоростей с большим числом скоростей ведомого вала (трехскоростная, четырехскоростная и т. д.), исследование которых проводят аналогично, к.п.д. при этом обычно 0,9...0,8.

При проектировании многоступенчатых планетарных механизмов первостепенное значение имеет распределение общего передаточного отношения $u_{\text{общ}}$ по ступеням так, чтобы в каждой ступени оно не превышало рационально допустимого значения и чтобы в тихоходной передаче оно было бы меньше, чем в быстроходной (первый от ведущего звена). От выбора передаточных отношений отдельных ступеней зависят габариты механизма, к.п.д., точность передачи движения, условия изготовления и т. д. При этом должны учитываться и конкретные условия, в которых будет работать механизм. В коробках скоростей транспортных машин $u_{\text{общ}}$ разбивается так, чтобы наибольшие размеры ступеней по диаметру были бы одинаковыми.

Для приборных устройств, где требуется точность поворота выходного вала следует назначать бóльшее передаточное отношение для последней ступени.

Таким образом, заданное передаточное отношение можно обеспечить множеством различных схем планетарных передач, которые будут значительно отличаться по размерам, к. п. д., динамическим качествам. Схемы должны выбираться как с учетом качества простых планетарных передач, из которых компонуется зубчатый редуктор, так и назначения механизма, условия и режима его работы, места установки, а также учета типа передачи и вида зацепления, распределения $u_{\text{общ}}$ по ступеням и выбора числа ступеней, оценки потерь на трение, вибрации и упругости звеньев и пр. Поэтому в общем случае выбор схемы с учетом множества факторов может быть выполнен только методами оптимизации с применением ЭВМ.

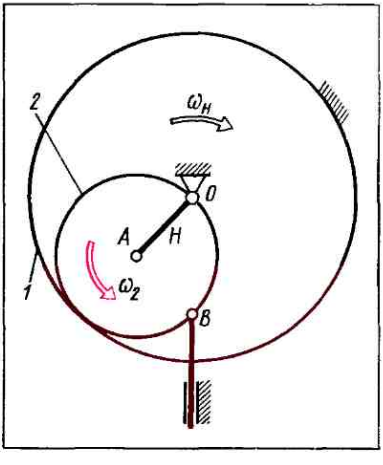


Рис. 15.16

В инженерной практике планетарные механизмы применяются также в качестве направляющих механизмов. Например, для преобразования вращательного движения в поступательное в прессах используется планетарный механизм с одним неподвижным центральным колесом (рис. 15.16). При вращении водила точка B сателлита *2* перемещается по прямой, совпадающей с диаметром неподвижного колеса *1*, у которого $z_1 = 2z_2$. Соединяя шарнирно точку B сателлита со звеном *3*, получаем прямолинейное движение его. Здесь $u_{H2}^{(1)} = \omega_H/\omega_2 = 1/u_{21}^{(H)} = 1/(1-z_1/z_2) = 1/(1-2) = -1$, т. е. $\omega_2 = -\omega_H$. Если в этом механизме обеспечить $(z_1-z_2) = 1...4$, то можно получить значительные $u_{H2}^{(1)}$, что как раз и реализовано в волновых зубчатых передачах, в которых волнообразователь выполняет роль водила, а движение гибкого колеса соответствует движению сателлита.

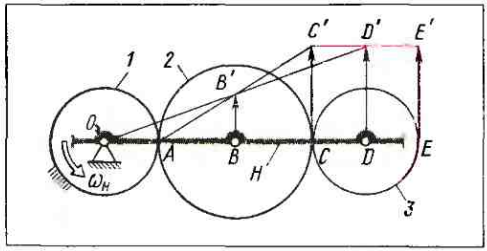


Рис. 15.17

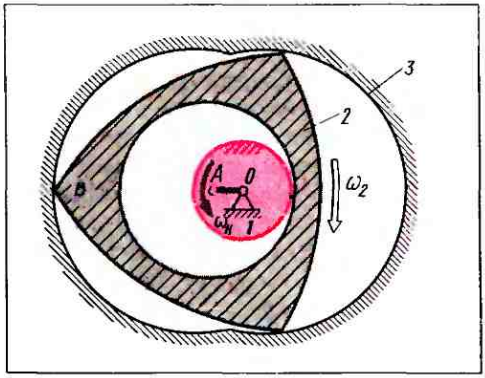


Рис. 15.18

В рабочих машинах для получения сложного движения исполнительного звена используется механизм, состоящий из одного неподвижного центрального колеса, вокруг которого вращается водило с сателлитами *2* и *3*. Если $z_3 = z_1$ (рис. 15.17), то третье колесо движется поступательно (не вращается), что хорошо видно из треугольников скоростей звена *3*, у которого $v_C = v_D = v_E$ (так как $C'D'E' \parallel OD$). На этом колесе *3* обычно закрепляется исполнительное звено.

Если здесь центральное колесо *1* (при $\omega_1 = 0$) сочетается с сателлитом *2* с внутренними зубьями, который выполнен заодно с роторным поршнем двигателя (рис. 15.18), получающим вращение за счет изменения давления продуктов сгорания в цилиндре *3*, то можно с вала водила снимать вращение с $\omega_H = \omega_2 z_2/(z_2 - z_1)$. При этом точка B сателлита описывает эпитрохоиду, по которой выполнена рабочая полость цилиндра *3*.

§ 15.4 Определение чисел зубьев колес планетарных механизмов

После выбора схемы планетарной передачи, назначения числа сателлитов (k) и модуля (m) производится определение чисел зубьев колес так, чтобы наиболее точно обеспечить заданное передаточное отношение, а также условия соосности, соседства, сборки и отсутствия заклинивания колес передачи.

Заданное передаточное отношение обеспечивают подбором чисел зубьев так, чтобы при подстановке их значений в выражение (15.6) получаемое фактическое значение передаточного отношения максимально приближалось к заданному. Допустимое отклонение фактического от заданного 1...4%.

Условие соосности входного и выходного валов указывает на то, что оба центральных зубчатых колеса и водило должны иметь общую геометрическую ось вращения, благодаря чему обеспечивается зацепление сателлитов с центральными колесами и $r_H = \text{const}$. Для этого (см. рис. 15.10, *а, б*; 15.7, *а*; 15.11) должно быть:

$$\begin{aligned} r_{H1} &= r_1 + r_2 = r_3 + r_4; \quad z_1 + z_2 = z_3 + z_4; \\ r_{H2} &= r_1 - r_2 = r_4 - r_3; \quad z_1 - z_2 = z_4 - z_3; \\ r_{H3} &= r_1 + r_2 = r_4 - r_3; \quad z_1 + z_2 = z_4 - z_3; \\ r_{H4} &= r_1 + r_2 = r_3 - r_2; \quad z_1 + z_2 = z_3 - z_2. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Это условие ограничивает выбор размеров одного из четырех колес при произвольном назначении радиусов трех остальных.

Условие соседства (условие совместного размещения нескольких сателлитов по общей окружности в одной плоскости) требует, чтобы при многосателлитной конструкции соседние сателлиты не задевали своими зубьями друг друга. Для этого необходимо назначать числа зубьев (радиусы) колес так, чтобы расстояние между осями соседних сателлитов a_c было бы больше диаметра окружности вершин d_{ac}^{max} наибольшего из сателлитов *3* (см. рис. 15.7, *в*), т. е. $a_c > d_{ac}^{max}$ или $a_c = d_{ac}^{max} + \Delta_c$, где Δc — зазор между окружностями вершин соседних сателлитов, величина которого определяется допусками на точность сборки. Из треугольника C_1OC_2 этого рисунка $a_c = 2(r_1 + r_2)\sin(\pi/k)$, где k — число сателлитов. Тогда $\sin(\pi/k) > d_{ac}^{max}/[2(r_1 + r_2)]$. Для колес без смещения это условие имеет вид

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{z_c^{max} + 2h_a^*}{z_1 + z_2}. \tag{15.13}$$

Если в механизме $z_2 > z_3$, то в числителе берется $z_c^{max} = z_2$; если $z_2 < z_3$, то ставят $z_c^{max} = z_3$. В знаменателе берется плюс при внешнем зацеплении и минус при внутреннем зацеплении колес *1-2*.

Условие сборки (собираемости) при равных углах между сателлитами учитывает необходимость одновременного зацепления всех

сателлитов с центральными колесами при симметричной геометрии зон зацепления. После установки первого сателлита подвижное центральное колесо принимает строго определенное положение, и если не выполнить некоторых требований, то при установке следующих сателлитов их зубья могут и не оказаться точно против впадин одного из центральных колес и тогда осуществить сборку механизма невозможно. Чтобы этого избежать, необходимо так подобрать числа зубьев колес, чтобы зубья всех сателлитов (колеса *2* и *3*) (см. рис. 15.7, *в*) точно вошли во впадины центральных колес (*1* и *4*).

Проще всего правильная сборка осуществляется, если сателлиты равномерно располагаются по окружности r_H, т. е. если центральные углы между радиусами-векторами центров сателлитов одинаковы и равны $360/K$. Это упрощает изготовление и эксплуатацию механизма (позволяет избежать применения противовесов). Чтобы сформулировать искомое условие, рассмотрим процесс сборки редуктора (см. рис. 15.7, *в*). Причем условимся ставить сателлиты на свою ось в водиле в одном и том же положении, когда центр сателлита располагается на вертикали, проходящей через ось центральных колес и ось симметрии впадины зуба этих колес. Примем, что оба колеса блока сателлитов имеют одинаковую ориентацию зубьев друг относительно друга у всех K блочных сателлитов. Поставив первый сателлит на ось, когда она занимает «вертикальное» положение, поворачиваем водило на угол $\varphi_H = \frac{2\pi}{K} + 2\pi П$, где $П$ — число полных поворотов водила. При этом первое колесо повернется также на некоторый угол $\varphi_1 = \varphi_H u_{1H}$. Ставим второй сателлит на свою ось, находящуюся теперь на том месте, которое занимал сателлит до поворота водила («вертикальное» положение). Но при одинаковых сателлитах второй сателлит войдет на свое место в том же «вертикальном» положении только тогда, когда сцепляющееся с ним центральное колесо (первое) повернется на целое число угловых шагов (целое число зубьев), т. е. когда $\varphi_1 = Ц\tau = Ц 2\pi/z_1$, где $Ц$ — любое целое число. Делая подстановку, получаем, $Ц 2\pi/z_1 = \varphi_H u_{1H}$. Или $Ц 2\pi/z_1 = (2\pi/K + 2\pi П) u_{1H}$. Откуда

$$\frac{z_1 u_{1H}}{K}(1 + KП) = Ц. \qquad (15.14)$$

В простейшем случае при $П = 0$ $(z_1 u_{1H})/K = Ц_0$. Тогда окончательно условие сборки имеет вид

$$Ц_0(1 + KП) = Ц. \qquad (15.15)$$

Выполнение этого условия означает, что если один из сателлитов установить в выбранном вертикальном положении, то все последующие сателлиты свободно входят в зацепление с соответствующими центральными колесами в том же положении при повороте водила на угол

$$\varphi_H = \frac{2\pi}{K}(1 + KП). \qquad (15.16)$$

Если при назначенном числе зубьев $Ц_0$ окажется не целым числом, то надо подобрать $П$ таким, чтобы выражение $Ц_0(1+КП)$ стало целым числом. Если $\frac{z_1 u_{1H}}{K}$ равно целому числу $(Ц_0)$, то для установки сателлита достаточно повернуть водило только на угол $\varphi_H = 2\pi/K$.

Условие правильного зацепления — условие отсутствия заклинивания передачи (при назначении числе зубьев колес, выполненных без подреза и среза зубьев). Чтобы избежать заклинивания передач внутреннего зацепления, составленных из эвольвентных нулевых колес с прямыми зубьями, необходимо (см. гл. 14) выбирать z_i каждого колеса передач больше допустимого минимума $z_{\min}$. Для колес с внутренними зубьями при $\alpha = 20°$ и $h_a^* = 1{,}0$ имеем $z_{\min\,вн} = 85$; если $h_a^* = 0{,}8$, то $z_{\min\,вн} = 58$; для сцепляющихся с ними колес с внешними зубьями соответственно $z_{\min\,вш} = 20$ или 18 зубьев, а для всей передачи разность чисел зубьев сцепляющихся колес $z_{вн} - z_{вш}$ должна быть не менее 8 при $h_a^* = 1{,}0$ и не менее 7 при $h_a^* = 0{,}8$.

Во избежание подрезания зубьев эвольвентных нулевых колес для передач внешнего зацепления при $\alpha = 20°$ и $h_a^* = 1{,}0$ следует выбирать $z_{\min} \geqslant 17$; при $h_a^* = 0{,}8$ соответственно $z_{\min} \geqslant 14$ (см. гл. 14).

В зацеплениях, составленных из эвольвентных нулевых косозубых колес или из ненулевых колес (с прямым или косым зубом), число зубьев малого колеса может быть значительно снижено.

При неэвольвентном профиле зуба условие правильного зацепления должно быть выбрано в соответствии с теорией используемого зацепления (см. гл. 14). При составлении исходных уравнений (условий) для каждой конкретной схемы необходимо учитывать вид колеса, модули рядов колес.

Таким образом, задача определения числа зубьев сводится к составлению исходных уравнений, отражающих указанные условия для каждой конкретной схемы, и совместному решению их. Методов их решения, а значит, и методов подбора чисел зубьев, обеспечивающих все эти условия, имеется много. Рассмотрим два из них на конкретных схемах.

Рассмотрим методику подбора чисел зубьев на примере однорядного механизма (рис. 15.11), составленного из эвольвентных нулевых колес. Выпишем исходные уравнения вышеперечисленных условий: уравнение передаточного отношения $u_{1H}^{(4)} = 1 + z_4/z_1$; условие соосности $z_1 + z_2 = z_4 - z_2$; условие равного угла между сателлитами (условие сборки) $z_1 u_{1H}^{(4)}/K = Ц_0$; условие соседства (для нулевых колес) $\sin(\pi/K) > (z_2 + 2h_a^*)/(z_1 + z_2)$; условие правильного зацепления (при $h_a^* = 1{,}0$ и $\alpha = 20°$) в виде неравенств $z_1 \geqslant 17$; $z_4 \geqslant 85$; $(z_4 - z_2) > 8$; $z_2 \geqslant 20$.

Из первого условия определим $z_4 = z_1\,(u_{1H}^{(4)} - 1)$, а из второго $z_2 = (z_4 - z_1)/2 = [z_1(u_{1H}^{(4)} - 1) - z_1]/2 = z_1(u_{1H}^{(4)} - 2)/2$.

Для определения чисел зубьев колес составим систему отношений:

$$z_1 : z_2 : z_4 : Ц_0 = z_1 : \frac{z_1(u_{1H}^{(4)} - 2)}{2} : z_1(u_{1H}^{(4)} - 1) : \frac{z_1 u_{1H}^{(4)}}{K},$$

или

$$z_1 : z_2 : z_4 : Ц_0 = \left[1 : \frac{u_{1H}^{(4)} - 2}{2} : (u_{1H}^{(4)} - 1) : \frac{u_{1H}^{(4)}}{K}\right] z_1. \quad (15.17)$$

Это основное уравнение, позволяющее подобрать числа зубьев этих колес при выполнении первых трех условий. Здесь нужно назначить $z_1 \geqslant 17$ и получить $z_2 \geqslant 20$; $z_4 \geqslant 85$; $(z_4 - z_3) > 8$ и $Ц_0$ — целое число (для заданного числа сателлитов). Если $Ц_0$ не целое число, то условие сборки следует расширить, взяв вместо $Ц_0$ $Ц = (1 + KП)$, и подобрать $П$ так, чтобы $Ц$ было целым числом при назначенном z_1. Если эта попытка не дает решения, выбирают новое значение z_1. Полученные z_1, z_2, z_4 должны быть проверены по условию соседства.

Пусть известно для этой схемы механизма $u_{1H}^{(4)} = 18/5$; $k = 3$. Составим основное уравнение

$$z_1 : z_2 : z_4 : Ц_0 = \left[1 : \frac{4}{5} : \frac{13}{5} : \frac{6}{5}(1 + 3П)\right] z_1$$

и зададим ряд значений z_1: пусть $z_1 = 20 (> 17)$, тогда $z_2 = z_1 4/5 = 16$ (что < 20); $z_4 = 13 z_1/5 = 52$ (что < 85). Так как z_2 и z_4 меньше допустимых значений, то этот вариант отпадает. Зададим новое значение $z_1 = 35$ и получим $z_2 = 35 \cdot 4/5 = 28$; $z_3 = 91 (> 85)$ и $Ц_0 = (6/5)\,35(1 + 3П) = 42(1 + 3П)$. Значит, можно взять $П = 0$. Тогда правая часть этого соотношения будет являться целым числом. Поэтому и угол поворота водила для установки следующего сателлита $\varphi_H = 120°$. Полученные z проверям по условию соседства $\sin(\pi/K) > (28 + 2)/(35 + 28)$ и убеждаемся, что неравенство выполняется. Таким образом, второй вариант при $z_1 = 35$; $z_2 = 28$; $z_4 = 91$ дает наименьшие габариты и обеспечивает $z_3 > 20$ и $z_4 > 85$.

Наиболее распространенным методом подбора чисел зубьев является *метод сомножителей,* при котором числа зубьев определяются только по двум условиям — передаточному отношению и условию соосности, а проверки — по условию сборки и соседства.

Рассмотрим сущность этого метода определения чисел зубьев на примере механизма, изображенного на рис. 15.10, *а*, составленного из нулевых колес. Из уравнения передаточного отношения этой схемы $u_{1H}^{(4)} = 1 - (z_2 z_4 / z_1 z_3)$ находится значение дроби $z_2 z_4/(z_1 z_3) = 1 - u_{1H}^{(4)} = M/N$. Каждое из этих двух взаимно простых чисел M и N несократимой дроби представляется в виде сомножителей $C_2 C_4/(C_1 C_3)$. В свою очередь, каждое из C_i должно быть пропорционально z_i. Полагая C_2/C_1 пропорциональным z_2/z_1, получаем $z_2 = z_1(C_2/C_1)$. Аналогично рассуждая, имеем $z_4 = z_3(C_4/C_3)$. Подставляя эти значения в условия соосности $z_1 + z_2 = z_4 + z_3$, получаем (при одинаковых модулях) $z_1 + z_1(C_2/C_1) = z_3(C_4/C_3) + z_3$, или $z_1[(C_1 + C_2)C_3] = z_3[(C_4 + C_3)C_1]$. Чтобы это соотношение было тождественно, проще всего положить $z_1 = C_1(C_4 + C_3)$ и $z_3 = C_3(C_1 +$

$+C_2$). Аналогичные рассуждения дают $z_2=C_2(C_4+C_3)$ и $z_4=C_4(C_1+C_3)$. Чтобы выполнялось условие правильного зацепления, вводится множитель γ (любое положительное число). Тогда окончательно имеем для этой схемы:

$$\begin{aligned} z_1&=C_1(C_4+C_3)\gamma; \quad z_2=C_2(C_4+C_3)\gamma;\\ z_3&=C_3(C_1+C_2)\gamma; \quad z_4=C_4(C_1+C_2)\gamma. \end{aligned} \tag{15.18}$$

Полученные значения z_1, z_2, z_3, z_4 проверяют по условию сборки и соседства.

Подбор чисел зубьев планетарных зубчатых механизмов по заданному передаточному отношению требует выполнения большого числа математических операций. Поэтому такую задачу практически решают с помощью ЭВМ. Для этого используется программа разложения заданного u_p на сомножители и последующего определения z с учетом ограничений и наименьших габаритов. Иногда в программу вводятся требуемые $u_p=M/N$; z_{imin}; z_{imax}, k ограничения и путем перебора определяют комбинации чисел зубьев, из которых выбирается нужное сочетание z_1, z_2, z_3, z_4 при минимальных габаритах, сохранении заданного соотношения передаточного отношения по ступеням.

Пример. Определить z_1, z_2, z_3, z_4 для механизма (см. рис. 15.10, *а*), у которого $u_{1H}^{(4)}=-1/24$; $k=3$; $m=1$. Находим $(z_2z_4)/(z_1z_3)=1-(-1/24)=25/24$, которое раскладываем на сомножители

$$\frac{C_2C_4}{C_1C_3}=\frac{5\cdot5}{6\cdot4}=\frac{5\cdot5}{8\cdot3}=\frac{5\cdot5}{4\cdot6}=\frac{5\cdot5}{3\cdot8}$$

и т. д. Так как таких комбинаций сомножителей может быть много, то и возможных вариантов решений, удовлетворяющих указанным условиям, тоже много. Подсчитывая по формулам (15.18) числа зубьев для четырех вариантов сочетаний сомножителей, имеем:

	1	2	3	4
z_1	$=6(5+4)\gamma=54\gamma$	$8\cdot8\gamma=64\gamma$	$4\cdot11\gamma=44\gamma$	$3\cdot13\gamma=39\gamma$
z_2	$=5(5+4)\gamma=45\gamma$	$5\cdot8\gamma=40\gamma$	$5\cdot11\gamma=55\gamma$	$5\cdot13\gamma=65\gamma$
z_3	$=4(6+5)\gamma=44\gamma$	$3\cdot13\gamma=39\gamma$	$6\cdot9\gamma=54\gamma$	$8\cdot8\gamma=64\gamma$
z_4	$=5(6+5)\gamma=55\gamma$	$5\cdot13\gamma=65\gamma$	$5\cdot9\gamma=45\gamma$	$5\cdot8\gamma=40\gamma$

По условиям правильного зацепления во всех вариантах можно выбрать $\gamma=1$. Наименьшие габариты будут для варианта 1 и 3. Проверяем их по условию сборки:

$$Ц=\frac{z_1u_{1H}^{(4)}}{k}(1+kП)=\frac{54}{3}\left(-\frac{1}{24}\right)(1+3П)=-\frac{3}{4}(1+3П).$$

Чтобы оно выполнялось, необходимо иметь $(1+3П)$, кратным 4, что имеет место при $П=1$. Это означает, что при сборке водило необходимо повернуть на угол $\varphi_H=(2\pi/3)(1+3\cdot1)=2\pi/3+2\pi$, т. е. на угол 120° плюс два полных оборота, и тогда обеспечивается сборка механизма с тремя равномерно распределенными

по окружности сателлитами. Проверяем условие соседства: $\sin(\pi/k) > (45+2)/(54+45)$; оно тоже выполняется. Для 3-го варианта $(4\times 4/3)(-1/24)(1+3П) \neq Ц$, т. е. левая часть не обращается в целое число и вариант отбрасываем. Поэтому останавливаем выбор на $z_1=54$; $z_2=45$; $z_3=44$; $z_4=55$.

Для схемы механизма с двумя внутренними зацеплениями (см. рис. 15.11, *б*) при известных $u_{1H}^{(4)}$, m, k формулы для определения z_i получаются на основе аналогичных рассуждений, но с учетом особенностей написания условия соосности рассматриваемой схемы: $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$. В этом случае формулы для подсчета будут:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1(C_4 - C_3)\gamma; \quad z_2 = C_2(C_4 - C_3)\gamma; \\ z_3 &= C_3(C_1 - C_2)\gamma; \quad z_4 = C_4(C_1 - C_2)\gamma. \end{aligned} \tag{15.19}$$

В механизме со смешанным зацеплением (рис. 15.7), учитывая условие соосности $z_1 + z_2 = z_4 - z_3$, формулы подсчета чисел зубьев имеют такой вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1(C_4 - C_3)\gamma; \quad z_2 = C_2(C_4 - C_3)\gamma; \\ z_3 &= C_3(C_1 + C_2)\gamma; \quad z_4 = C_4(C_1 + C_2)\gamma. \end{aligned} \tag{15.20}$$

Общий множитель γ выбирается так, чтобы все числа зубьев были целыми и выполнялось условие правильного зацепления. Обязательно полученные z_i проверяют по условию сборки (15.14) и совместности (15.13).

§ 15.5 Волновые зубчатые передачи

Волновая зубчатая передача (рис. 15.19) отличается от других зубчатых механизмов тем, что один ее элемент — гибкое колесо — претерпевает волновую деформацию, за счет которой происходит передача вращательного движения. Волновая зубчатая передача состоит из трех основных элементов: гибкого зубчатого колеса *1* (рис. 15.19, *а, в*), жесткого колеса *2* и генератора волн *b*. Гибкое зубчатое колесо представляет собой тонкостенную оболочку. Один конец ее соединен с валом и сохраняет цилиндрическую форму, на другом конце ее торца нарезан зубчатый конец с числом зубьев z_1. Этот конец оболочки деформируется на величину $2w_0$ генератором волн, введенным внутрь ее.

В торцовом сечении гибкое колесо относительно первоначально круглой получает криволинейную форму под действием генератора волн (рис. 15.19, *б*). Контур деформированного гибкого колеса образует относительно недеформированного две волны деформации (рис. 15.19, *г*). Ось *ББ* называется большой осью, а ось *ВВ* — малой осью кривой деформации. На оси *ББ* расположены вершины волны деформации, а на оси *ВВ* — впадины. Число волн деформации может быть равным *1, 2, 3* и т. д. Чаще всего при-

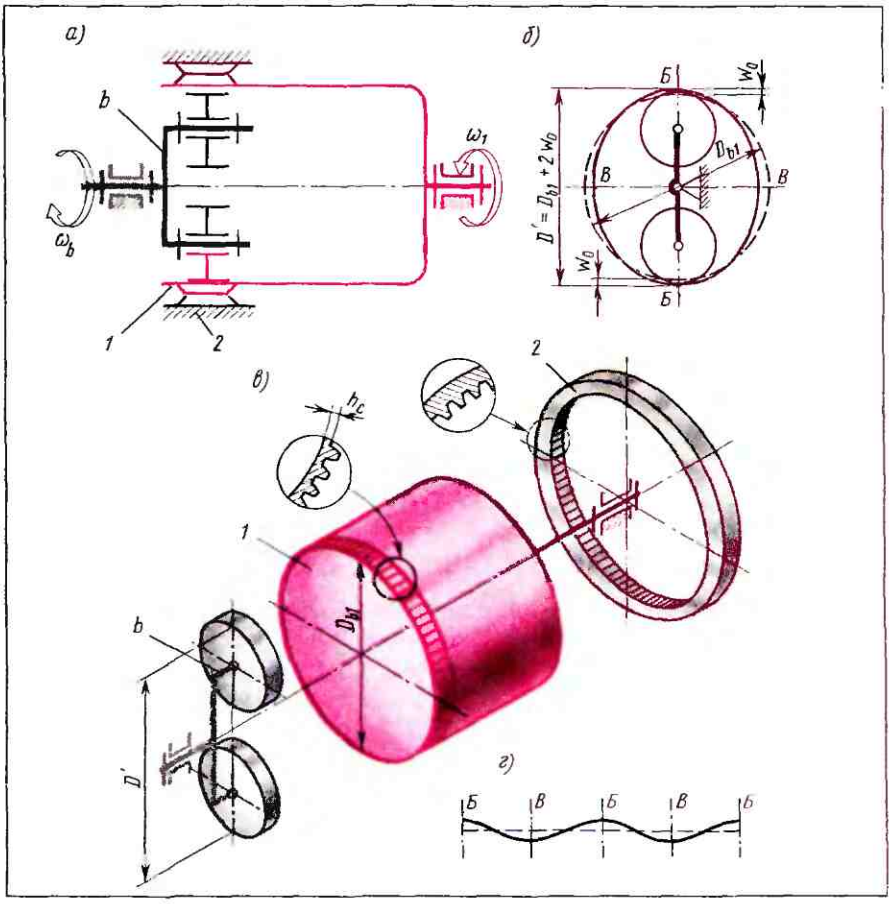


Рис. 15.19

меняются двухволновые передачи, у которых числа зубьев гибкого и жесткого колес связаны соотношением $z_2 - z_1 = 2$.

Гибкие колеса для волновых передач, предназначенных для передачи движения через герметичную стенку, представляют собой закрытые с одного конца оболочки.

Генератор волн служит для образования и движения волны деформации на гибком зубчатом колесе. Генераторы волн бывают механические, электромагнитные, пневматические и гидравлические. Применяются несколько видов механических генераторов: двухроликовый, четырехроликовый, дисковый, кольцевой и кулачковый. Генератор волн может быть расположен внутри гибкого колеса и снаружи.

Кинематика волновой передачи. При вращении генератора каждая волна деформации бежит по периметру гибкого колеса, в ре-

зультате каждый зуб гибкого колеса за один оборот генератора волн дважды входит в зацепление с жестким колесом.

При остановленном жестком колесе после полного оборота генератора волн ($\varphi_b=2\pi$) вал гибкого колеса повернется в противоположном генератору направлении на угол, равный $\varphi_1=2\pi(z_1-z_2)/z_1$, где $2\pi/z_1$ — угловой шаг гибкого колеса.

От углов поворота можно перейти к угловым скоростям, тогда передаточное отношение от генератора волн к гибкому колесу при остановленном жестком

$$u_{b1}^{(2)}=\frac{\omega_b}{\omega_1}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{z_1}(z_1-z_2)}=-\frac{z_1}{z_2-z_1}. \qquad (15.21)$$

Если остановить гибкое колесо, то после поворота генератора волн на угол $\varphi_b=2\pi$ жесткое колесо повернется в том же направлении, что и генератор волн, — на угол $\varphi_2=2\pi(z_2-z_1)/z_2$, где $2\pi/z_2$ — угловой шаг жесткого колеса.

В этом случае передаточное отношение от генератора волн к жесткому колесу:

$$u_{b2}^{(1)}=\frac{\omega_b}{\omega_2}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{z_2}(z_2-z_1)}=\frac{z_2}{z_2-z_1}. \qquad (15.22)$$

Выражения (15.21) и (15.22) показывают, что передаточное отношение волновой зубчатой передачи зависит только от чисел зубьев колес.

Волновая передача может быть двухступенчатой (рис. 15.20). В этом случае гибкое колесо *1* выполняется в виде кольца с двумя зубчатыми венцами z_1 и z_3, которые входят в зацепление с жесткими колесами *2* и *4* (с числами зубьев z_2 и z_4 соответственно). Жесткое колесо *2* неподвижно; движение передается с помощью двух волновых зацеплений от вала генератора волн *3* жесткому колесу *4*. Передаточное отношение многоступенчатой волновой передачи (рис. 15.20) определяется, как и аналогичного планетарного механизма, по формуле

$$u_{b4}=\frac{z_1z_4}{z_1z_4-z_2z_3}. \qquad (15.23)$$

В передаче с волновой зубчатой муфтой, если $z_3=z_1$ и $z_4=z_1$, то выходной вал связан с колесом *4* муфты, и передаточное отношение

$$u_{b4}=-\frac{z_1}{z_2-z_1}. \qquad (15.24)$$

Если $z_3=z_1$ и $z_2=z_1$, то выходной вал связан с колесом *4* передачи, и передаточное отношение

$$u_{b4}=\frac{z_4}{z_4-z_1}. \qquad (15.25)$$

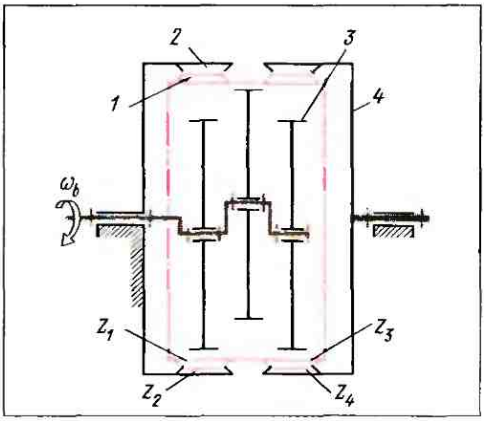


Рис. 15.20

Особенности волнового зацепления. При вращении генератора волн через каждую точку обода гибкого колеса за один оборот генератора проходят две волны деформации. Напряжения в материале гибкого колеса не должны превышать допустимых при знакопеременной нагрузке и во всяком случае не выходить за пределы линейного участка кривой закона Гука. Поэтому для стальных колес величина деформации w_0 и толщина обода гибкого колеса под зубом h_c относительно малы: $w_0 = (0{,}003...0{,}015)d_1$; $h_c = (0{,}005...0{,}03)d_1$.

Малая величина деформации w_0 определяет малую разницу делительных радиусов жесткого колеса и гибкого колеса до деформации и малую разность чисел зубьев колес, а соотношение величин w_0 и d_1 соответствует большому числу зубьев. При таких соотношениях величин w_0, z_1, z_2 зазоры между зубьями в зоне вершины волны деформации малы и в значительной степени исчезают при нагружении и даже при сборке передачи. Благодаря этому в волновой передаче очень большое число пар зубьев (до 40%) одновременно находится в зацеплении.

Из вышесказанного можно отметить следующие особенности волновой зубчатой передачи:

большое передаточное отношение u, получаемое в одной ступени. Для передач со стальными гибкими колесами (рис. 15.19) $u=50...300$, для двухступенчатой передачи (рис. 15.20) $u=2000...10^4$ и более;

при одновременном зацеплении большого числа пар зубьев колес передача воспринимает значительные нагрузки при относительно малых габаритах и весе;

многопарность зацепления и несколько одинаковых зон зацепления вызывают значительное усреднение ошибок изготовления и монтажа колес и обеспечивают высокую кинематическую точность волновых передач;

по этой же причине уровень шума волновой передачи меньше, чем в обычных многозвенных зубчатых или планетарных передачах;

относительно небольшая величина деформации гибкого колеса позволяет выполнить его в виде глухой оболочки и изготовить герметичные волновые механизмы, передающие вращение из одной среды в другую без подвижных уплотнений (см. рис. 2.8);

коэффициент полезного действия для передаточных отношений $u=50...200$ достаточно высок и лежит в пределах 70...85%.

Расчет геометрических параметров. Расчет проводится при следующих допущениях:

1) профиль зуба гибкого колеса при деформации не изменяет свою форму;

2) зацепление зубьев гибкого и жесткого колес можно рассматривать в одной торцовой плоскости, нормальной к осям гибкого и жесткого колес и проходящей примерно посередине зубчатого венца гибкого колеса;

3) срединная линия тела гибкого колеса под зубчатым венцом (рис. 15.21) не изменяет своей длины и обладает свойствами нейтральной линии; радиус срединной линии (окружности) гибкого колеса в недеформированном состоянии обозначается r_c; переменный радиус кривизны срединной линии деформированного гибкого колеса обозначается r_{cy};

4) ось симметрии зуба гибкого колеса остается после деформации нормальной к срединной линии гибкого колеса.

Существует несколько методов геометрического расчета волновых зубчатых передач. Здесь рассматривается геометрический расчет волновых зубчатых передач с генераторами волн внутреннего и внешнего деформирования, обеспечивающими постоянную кривизну срединной линии деформированного гибкого колеса в пределах зон зацепления, ограниченных центральными углами 2β (рис. 15.21, *а, б*). На участках постоянной кривизны зацепление в волновой передаче рассматривается как внутреннее эвольвентное зацепление жесткого колеса с числом зубьев $z_ж$ и условного колеса, имеющего параметры, одинаковые с гибким колесом (на участке, ограниченном углом 2β); расчетное число зубьев условного колеса z_y.

За исходный параметр геометрического расчета передач внутреннего и внешнего деформирования принимается величина максимальной относительной деформации гибкого колеса w_0/r_c. Уравнение для определения расчетного числа зубьев условного колеса выводится на основе уравнения срединной линии деформированного гибкого колеса (см.: *Шувалов С. А., Волков А. Д.* Деформация гибкого зубчатого колеса волновой передачи двумя дисками. Известия вузов. № 10, 1974):

$$\frac{w_0}{r_c}k' = \pm\left(\frac{r_c}{r_{cy}} - 1\right). \qquad (15.26)$$

Здесь верхний знак относится к внутреннему деформированию гибкого колеса дискам, нижний — к внешнему деформированию кольцами;

$$k' = 1/(k-1); \quad k = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \sin\beta\cos\beta}{\frac{4\beta}{\pi}\sin\beta + \frac{4}{\pi}\cos\beta - 2\sin\beta}. \qquad (15.27)$$

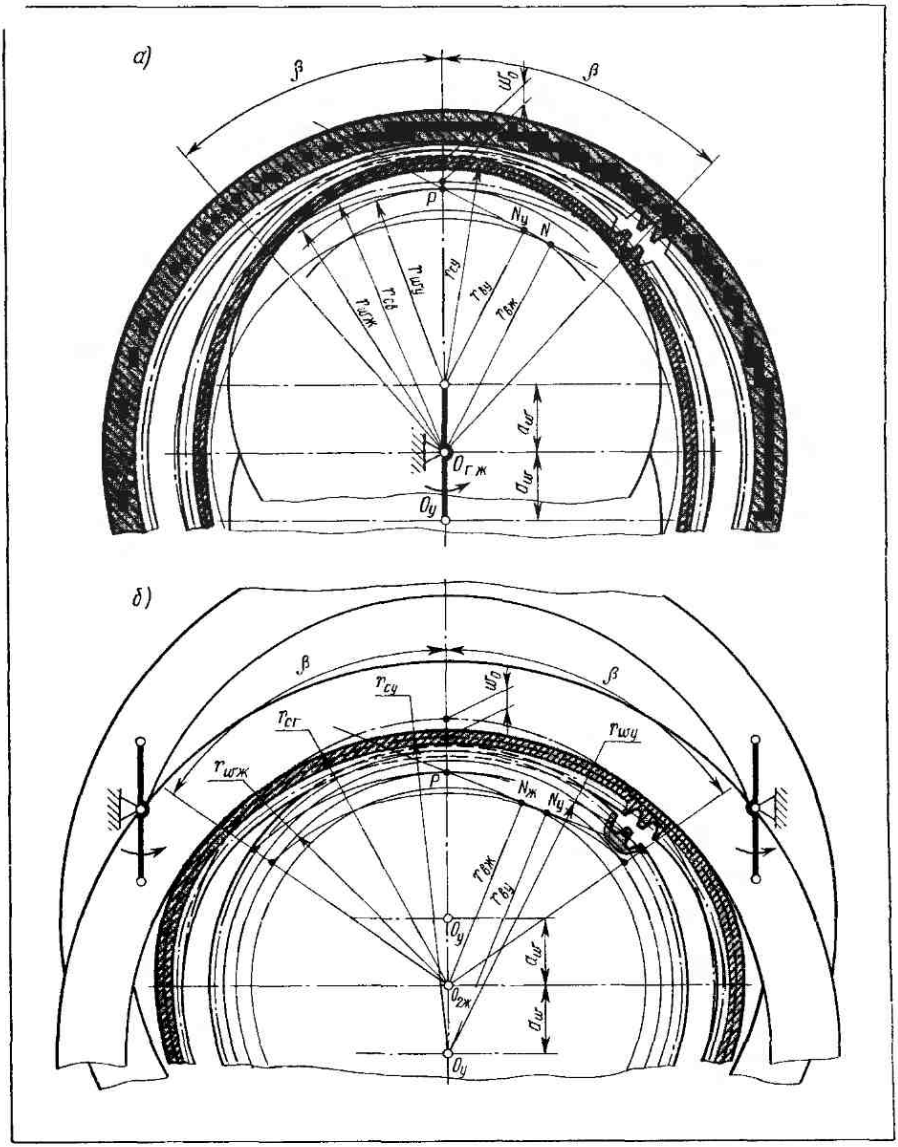

а)
β
β
ωб
p
Nц
N
rсц
rωцц
rсг
rωж
rсж
rбц
rбж
dωг
dωг
Oг ж
Oц
б)
β
β
rсц
ωб
rсг
rωцц
rωж
p
Nж
Nц
rбж
rбц
Oц
dωг
Oг ж
dωг
Oц

Рис. 15.21

На основании допущения (3) при геометрическом расчете существует равенство шагов по срединной линии до и после деформирования гибкого колеса, что позволяет записать

$$r_{cy}/r_c = z_y/z_r, \tag{15.28}$$

где z_r — число зубьев гибкого колеса; z_y — расчетное число зубьев условного колеса.

После подстановки (15.28) в (15.26) и преобразования получим

$$z_y = z_r \Big/ \left(1 \pm k' \frac{w_0}{r_c}\right). \tag{15.29}$$

Далее определяется радиус срединной окружности деформированного гибкого колеса (рис. 15.21, *а, б*)

$$r_{cy} = m\left(\frac{z_r}{2} + x_r \mp h_a^* \mp c^* \mp \frac{h_c}{2m}\right), \tag{15.30}$$

где x_r — коэффициент смещения гибкого колеса; h_a^* — коэффициент высоты зуба и c^* — коэффициент радиального зазора — параметры исходного контура; m — модуль зубьев колеса.

Параметры, входящие в (15.30), следует определять по уравнениям:

$$h_c = \left(60 + \frac{z_r}{5}\right) m z_r \cdot 10^{-4}; \tag{15.31}$$

$$x_r = \left(h_a^* + c^* + \frac{h_c}{2m}\right)\delta; \tag{15.32}$$

$$\frac{w_0}{r_c} = \pm\left(\frac{z_ж - z_r}{z_r}\right)\gamma, \tag{15.33}$$

где при внутреннем деформировании $\delta = 1$; $\gamma = 0{,}95...1{,}1$ (чаще $\gamma = 1$); при внешнем деформировании $\delta = 0{,}8...0{,}9$; $\gamma = 0{,}85...1{,}1$.

Далее из (15.28) определяется радиус срединной окружности недеформированного гибкого колеса

$$r_c = \frac{z_r}{z_y} r_{cy}. \tag{15.34}$$

Межосевое расстояние в волновой передаче, равное эксцентриситету установки деформирующих дисков или колец (см. рис. 15.21, *а, б*), получается равным

$$a_w = \pm r_c \pm w_0 \mp r_{cy},$$

или

$$a_w = \pm r_c\left(1 \pm \frac{w_0}{r_c}\right) \mp r_{cy}. \tag{15.35}$$

Зная межосевое расстояние, можно определить угол зацепления в волновой передаче:

$$\alpha_w = \arccos \frac{\pm (z_ж - z_y) m \cos\alpha}{2a_w}. \tag{15.36}$$

Передачу внутреннего деформирования можно проектировать при угле зацепления $\alpha_w = \alpha$; при этом в (15.32) $\delta = 1$, а в (15.33) $\gamma = 1$; $w_0 = m$ и $z_2 = z_1 + 2$; $z_г = z_1$; $z_ж = z_2$. Тогда

$$x_г = x_1 = \frac{1}{2}\left(2h_a^* + 2c^* + \frac{h_c}{m}\right); \qquad (15.37)$$

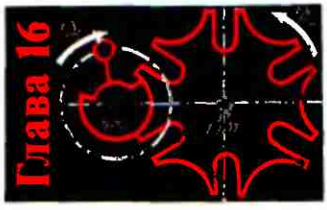
$$z_y = \frac{z_1^2}{z_1 + 2k'}. \qquad (15.38)$$

Коэффициент $2k'$ может быть подсчитан по формуле (15.27) или принят в зависимости от угла β:

β	40°	50°	60°	70°
$2k'$	4,38485	4,02916	3,78522	3,62553

Остальные параметры и размеры волновой передачи рассчитываются так же, как и зубчатой передачи с внутренним зацеплением.

Области применения волновых передач. Отмеченные свойства волновой передачи определяют наиболее рациональные области применения волновых передач: силовые и кинематические приводы общего назначения с большим передаточным отношением; задающие и исполнительные механизмы отсчетные устройства повышенной кинематической точности; исполнительные малоинерционные быстродействующие механизмы систем автоматического регулирования и управления; приводы для передачи движения в герметизированное пространство в химической, атомной и космической технике.



Механизмы с прерывистым движением выходного звена

В машинах автоматического и полуавтоматического действия широко используются механизмы, которые позволяют в пределах рабочего цикла иметь остановки выходного звена заданной продолжительности при непрерывном движении входного звена. Такие механизмы называют механизмами с остановками или механизмами с прерывистым движением выходного звена. Остановка может быть полной или почти полной (квазиостановка), а ее продолжительность как заданной, так и неопределенной. Оценку долей движения и остановки в общем рабочем цикле механизма осуществляют посредством относительных коэффициентов времени движения и времени остановки выходного звена. Для сообщения прерывистого движения выходному звену применяются разные механизмы: храповые, мальтийские, зубчатые с неполными колесами и др.

§ 16.1 Зубчатые и храповые механизмы

На рис. 16.1, *а* приведена схема зубчатого механизма прерывистого движения, в котором ведущее звено *1* представляет собой зубчатый сектор с z_1 зубьями, который может входить в зацепление с зубчатым колесом *2*, число зубьев которого $z_2 = z_1$. После поворота зубчатого сектора *1* на угол $\varphi_{1д}$ звено *2* останавливается и фиксируется в неподвижном состоянии запирающими дугами: выступом *4* на ведущем звене *1* и вырезом *3* на ведомом звене *2*. Состояние остановки соответствует повороту ведущего колеса на угол $\varphi_{1п}$.

Коэффициент $k_п$ времени остановки (рис. 16.1, *б*):

$$k_п = T_п/T_ц = \varphi_{1п}/(2\pi).$$

Угол $\varphi_{1д}$ содержит целое число угловых шагов $2\pi/z_1$, которое соответствует целому числу угловых шагов $2\pi/z_2$ на колесе *1*. Однако коэффициент перекрытия в зубчатой передаче сектор *2* — колесо *1* обычно >1 и это может вызвать дополнительный поворот колеса *2* по сравнению с углом 2π, что нарушит условие сопряжения зубьев в начале следующей фазы движения. Для устранения этого явления на стадии проектирования механизма предусматривают обеспечение коэффициента перекрытия последней пары зубьев равным 1. Это наиболее просто достигается уменьшением высоты последнего зуба на сегменте *1* на расчетную величину.

Недостатком зубчатых механизмов с неполным числом зубьев является наличие удара в моменты начала зацепления и начала фиксации остановки запирающими дугами. Поэтому они используются в тихоходных машинах при незначительной величине ускоряемых масс.

Более широкое применение находят рычажные механизмы в сочетании с муфтами свободного хода или с храповыми колесами.

В муфте свободного хода (рис. 16.2, *а*) ролики или шарики *4* расположены между элементами звеньев *3* и *5*. В зависимости от направления относительного поворота звеньев *3* и *5* ролики или шарики *4* могут заклиниваться между поверхностями или проскальзывать. Для удержания роликов или шариков в постоянном контакте с поверхностью звена *3* применяют пружины, натяжения которых можно регулировать винтами (на схеме не показаны). Непрерывное вращение кривошипа *1* преобразуется в одностороннее прерывистое движение звена *5* посредством шатуна *2*, коромысла *3* и роликов или шариков *4*. Угловая скорость ω_5 звена *5* является переменной.

Храповые механизмы (рис. 16.2, *б*, *в*), допускающие движение выходного звена только в одном направлении с остановками, имеют в своем составе ведомое храповое колесо *4* с зубьями,

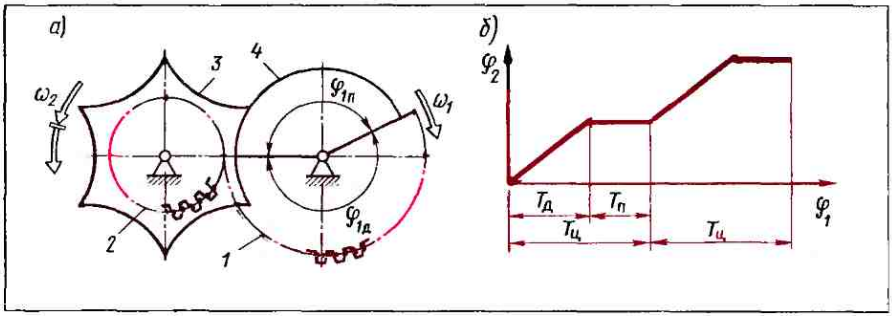


Рис. 16.1

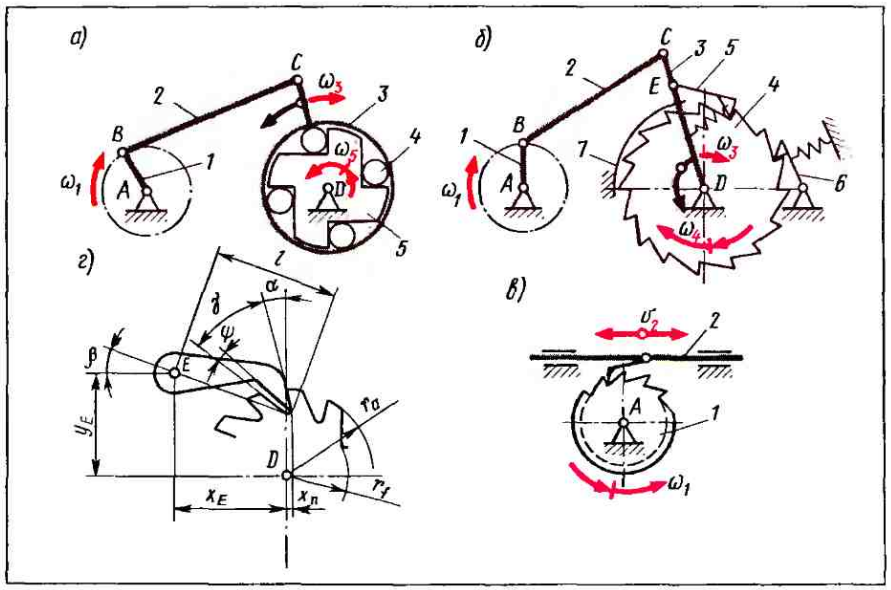


Рис. 16.2

в рабочие поверхности которых упираются элементы рабочей *5* и стопорной *6* собачек (рис. 16.2, *б*). Рабочая собачка *5* шарнирно закрепляется на коромысле *3* шарнирного четырехзвенника *ABCD* с кривошипом *1* и шатуном *2*. При постоянном угле качания коромысла *3* число захватываемых собачкой зубьев можно регулировать щитком *7*, передвигая его по наружной дуге. Стопорная собачка *6* не допускает поворота храпового колеса *4* под действием сил полезного сопротивления.

В некоторых устройствах входное звено *2* может совершать поступательное движение (рис. 16.2, *в*), а храповое колесо *1* — вращательное движение с остановками. Для надежного контакта собачек с зубьями храпового колеса используют принудительное замыкание силой упругости пружины (рис. 16.2, *б*).

Профили зубьев храповых колес могут иметь различное исполнение: нормальное с заострением (рис. 16.2, *б*) и усиленное с фаской (рис. 16.2, *г*); без поднутрения ($\alpha = 0$) и с поднутрением ($\alpha \neq 0$), где α — угол поднутрения профиля.

Основным размерным параметром храповых колес является стандартный модуль m (ГОСТ 9563—60) по окружности вершин радиуса $r_a = mz$. Высота зуба $h = r_a - r_f$ зависит от формы зуба. Для нормального профиля без поднутрения высота зуба определяется по формуле

$$h = \frac{mz \sin(\pi/z)}{\sin\gamma} \cos(\gamma - \pi/z).$$

Для нормального профиля с поднутрением высота зуба определяется аналогично:

$$h = \frac{mz \sin(\pi/z)}{\sin\gamma} \cos(\gamma + \alpha - \pi/2) \cos\alpha.$$

Угол впадины γ по нормали станкостроения в зависимости от модуля равен 55 или 60°. Угол головки собачки выполняется меньшим, чем γ на угол $\psi = 5°$. Остальные размеры l, y_E, x_E, $x_П$ назначаются в зависимости от выбранных значений m и z.

Храповые механизмы редко применяют в быстроходных машинах из-за большого уровня шума при их работе и малой надежности вращения на их выходе при отсутствии тормозной системы.

Значительно большее распространение по сравнению с храповыми получили мальтийские механизмы из-за более благоприятных кинематических характеристик и надежного обеспечения заданного времени покоя, связанного с выполнением многократно повторяющихся операций определенной продолжительности.

§ 16.2 Мальтийские механизмы

В станках-автоматах, обрабатывающих центрах и автоматических линиях нашли широкое применение устройства, преобразующие непрерывное вращательное движение входного звена в одностороннее прерывистое движение выходного звена, называемые шаговыми механизмами. С помощью этих механизмов транспортируются заготовки, происходит смена инструментов и приспособлений на один линейный или угловой шаг, т. е. с одной фиксированной позиции на другую позицию. Среди шаговых механизмов простейшими являются мальтийские механизмы, получившие свое название от сходства очертаний выходного звена с эмблемой духовно-рыцарского Мальтийского ордена. Некоторые разновидности мальтийских механизмов приведены на рис. 16.3: *а* — с поступательным и *б, в, г* — вращательным движением выходного звена; *б* — с внешним и *в* — внутренним зацеплением; *б, в* — между параллельными и *г* — пересекающимися осями.

Выходное звено *2* мальтийского механизма выполняется в виде диска или стола, на котором расположено несколько пазов. Наиболее часто число пазов z равно четырем (рис. 16.3, *в* и 16.4, *а*) или шести (рис. 16.3, *б*). В паз может входить палец B, расположенный на ведущем кривошипе *1*, вращающемся относительно оси O_1. Палец B входит в паз по касательной к окружности радиуса O_1B, совпадающей с направлением оси паза, что необходимо для устранения жесткого удара. Начальное положение диска с пазами должно быть фиксированным. Для этого применяют различные стопорные устройства. Например, на рис. 16.4, *а* стол *2* фиксируется в определенном положении фиксатором *3*, движение которого согласовано с вращением входного звена *1* с помощью цилиндрического кулачка *5* и рычага *4*. При повороте диска *2* на угол ψ_2 фиксатор *3* не имеет связи с диском *2*. После выхода пальца B из паза наступает окончание поворота диска *2* и он надежно фиксируется в заданном положении фиксатором *3*. Для этой же цели можно использовать стопорные устройства типа запирающих дуг C и D равного радиуса (рис. 16.3, б, *в*). В момент, когда центры кривизны поверхностей C и D совпадают и находятся на оси O_1, запирающие дуги обеспечивают надежное фиксирование выходного звена *2* в неподвижном состоянии. Это состояние сохраняется в период поворота входного звена на угол $\varphi_{1п}$ (рис. 16.4, *б*).

Механизм, у которых радиальные пазы расположены на диске равномерно, называют *правильными (или однородными) мальтийскими механизмами.*

Коэффициент времени движения мальтийского механизма определяют по соотношению

$$k_д = \frac{T_д}{T_ц} = \frac{\varphi_{1д}}{2\pi} = \frac{\pi - \psi_2}{2\pi} = \frac{\pi - 2\pi/z}{2\pi} = \frac{z-2}{2z};$$

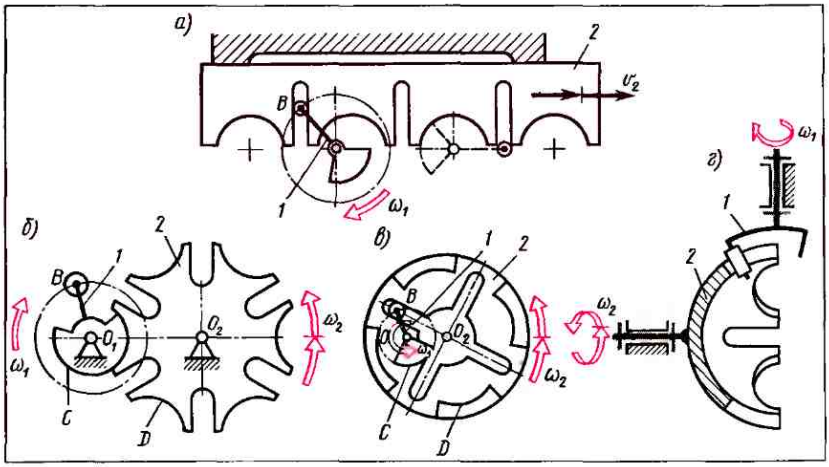


Рис. 16.3

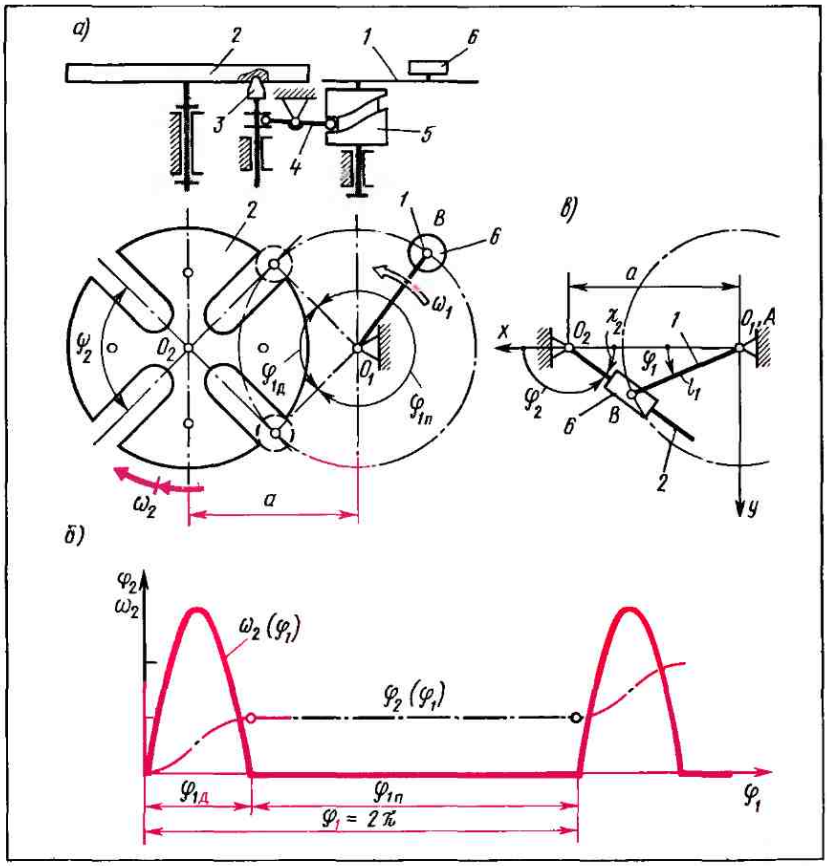


Рис. 16.4

коэффициент времени остановки

$$k_п = \frac{T_п}{T_ц} = \frac{2\pi - \varphi_{1д}}{2\pi} = \frac{\pi + \psi_2}{2\pi} = \frac{\pi + 2\pi/z}{2\pi} = \frac{z+2}{2z}.$$

Для двухпазового диска ($z = 2$) $k_д = 0$ и $k_п = 1$, т. е. такой механизм является неработоспособным. Поэтому наименьшее число пазов на диске мальтийского механизма равно трем.

При увеличении числа пазов коэффициенты $k_д$ и $k_п$ меняются в следующих пределах:

z	2	3	4	5	6	8	10
$k_д$	0	0,167	0,25	0,30	0,33	0,375	0,40
$k_п$	1	0,833	0,75	0,70	0,67	0,625	0,60

Следовательно, для технологических машин, у которых рабочий процесс или операция производится в период остановки диска, применяют диски с малым числом пазов. Это позволяет снизить потери времени на вспомогательный ход, соответствующий повороту выходного звена. Однако этот критерий является не единственным и в ряде случаев он может оказаться не определяющим окончательный выбор числа пазов. Это связано с динамикой привода, ибо поворот ведомых звеньев происходит неравномерно. Для определения кинематических передаточных функций мальтийского механизма рассматривают расчетную схему, представленную на рис. 16.4, *в* в виде заменяющего кулисного механизма (см. гл. 3): кулиса *2* совпадает с осью паза на диске *2*, а ползун *6* заменяет палец, скользящий вдоль паза при вращении входного звена *1* длиной l_1. Длину межосевого расстояния O_1O_2 обозначают буквой a.

Угол φ_2 поворота кулисы определяют по соотношению

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{l_1 \sin\varphi_1}{a - l_1\cos\varphi_1} = \frac{\lambda_1 \sin\varphi_1}{1 - \lambda_1\cos\varphi_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_a - \cos\varphi_1}, \qquad (16.1)$$

где $\lambda_a = a/l_1$ — относительная длина межосевого расстояния a; $\lambda_1 = l_1/a$ — относительная длина радиуса входного звена l_1; отсюда

$$\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\left[\sin\varphi_1/(\lambda_a - \cos\varphi_1)\right], \qquad (16.2)$$

или

$$\varphi_2 = \pi - \chi,$$

где

$$\chi = \arcsin\left[-\frac{\lambda_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{1 - 2\lambda_1\cos\varphi_1 + \lambda_1^2}}\right].$$

Угловую скорость ω_2 выходного звена мальтийского механизма определяют путем дифференцирования выражения (16.2) по обобщенной координате φ_1:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_1\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\omega_1\frac{\lambda_1(\cos\varphi_1 - \lambda_1)}{1 - 2\lambda_1\cos\varphi_1 + \lambda_1^2}. \qquad (16.3)$$

Угловая скорость ω_2 достигает максимального значения при угле $\varphi_1 = 0$:

$$\omega_{2\max} = -\omega_1 \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} = -\omega_1 \frac{\sin(\pi/z)}{1-\sin(\pi/z)}.$$

Максимальные значения передаточного отношения $u_{21\max} = \omega_{2\max}/\omega_1$ в зависимости от числа z пазов следующие:

z	3	4	5	6	8	10	12
$u_{21\max}$	−6,46	−2,41	−1,43	−1,0	−0,62	−0,45	−0,35

Угловое ускорение ε_2 выходного звена мальтийского механизма определяют путем дифференцирования выражения (16.3):

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \frac{\lambda_1(1-\lambda_1^2)\sin\varphi_1}{(1-2\lambda_1\cos\varphi_1+\lambda_1^2)^2}.$$

Кинематическая передаточная функция $(\varepsilon_2/\omega_1^2)$ углового ускорения выходного звена достигает максимального значения при значениях угла φ_1, определяемых по соотношению

$$(\varphi_1)_{\varepsilon\max} = \arccos\left[-\frac{1+\lambda_1^2}{4\lambda_1} + \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_1^2}{4\lambda_1}\right)^2+2}\right].$$

Максимальные значения кинематической передаточной функции $(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{\max}$ в зависимости от числа z пазов следующие:

z	3	4	5	6	8	10	12
$(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{\max}$	31,44	5,41	2,30	1,35	0,70	0,46	0,35
$(\varphi_1)_{\varepsilon\max}$	4,71	11,46	17,58	22,92	31,65	38,49	44,00

Из приведенных данных следует, что при малом числе пазов выходное звено мальтийского механизма имеет плохие динамические характеристики. Например, если сравнить два механизма, диски которых имеют 3 и 8 пазов, а кривошипы вращаются с одинаковой постоянной частотой, то максимальное значение углового ускорения у трехпазового диска в 45 раз больше, чем у восьмипазового диска. Соответственно возрастают и динамические нагрузки в кинематических парах. Если сравнение провести для случая равенства продолжительности периодов остановки за счет изменения частоты вращения входного звена, то различие в угловых ускорениях выходного звена для сравниваемых чисел пазов достигает 80.

Оптимальное сочетание требуемого коэффициента времени остановки, коэффициента времени движения и допустимых значений динамических нагрузок в кинематических парах выбирают на основе анализа конкретных условий работы механизма. На практике чаще всего применяют диски с числом пазов 4, 6 и 8. Следует обратить внимание, что угловое ускорение диска в начале периода дви-

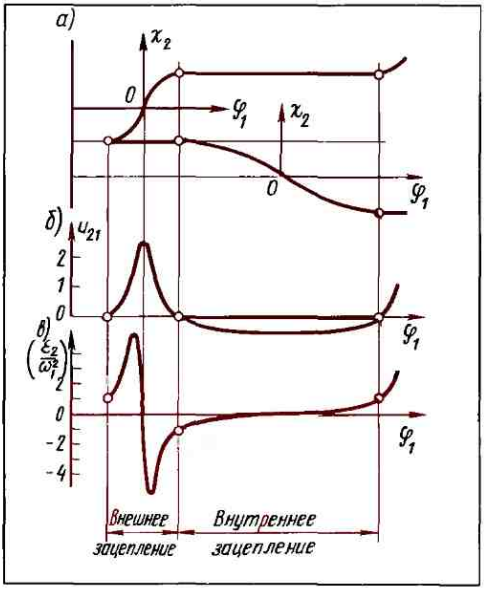


Рис. 16.5

жения и при остановке изменяется скачком от нулевого значения до некоторой конечной величины. Величина этого скачка определяет интенсивность «мягкого» удара.

Если нет жестких ограничений на коэффициент времени движения, то можно применять мальтийские механизмы с внутренним зацеплением (рис. 16.3, *в*), которые имеют более благоприятные динамические свойства. При внутреннем зацеплении максимальные ускорения выходного звена значительно меньше, чем при внешнем зацеплении, однако время поворота выходного звена всегда больше времени остановки, так как $k_д > 0{,}5$.

Представление об особенностях мальтийских механизмов с внешним и внутренним зацеплением дают графики, приведенные на рис. 16.5: *а* — функций положения $\chi_2(\varphi_1)$ и кинематических передаточных функций; *б* — скорости u_{21} и *в* — ускорения ε_2/ω_1^2 выходного звена. Черные линии относятся к внешнему зацеплению, а красные — к внутреннему зацеплению.

§ 16.3 Рычажные механизмы с квазиостановками

В тех случаях, когда необходимо передавать большие нагрузки с высокой надежностью и с плавным законом изменения ускорений ведомого звена, в качестве механизмов прерывистого движения применяют рычажные механизмы с низшими кинематическими парами или зубчато-рычажные механизмы, используя некоторые особенности кривых, описываемых точками звеньев, совершающих плоское движение.

На рис. 16.6, *а* приведена схема планетарно-рычажного механизма с длительной квазиостановкой (кажущейся остановкой) выходного звена ползуна *5* в крайнем правом положении. Этот эффект достигается тем, что палец *C* шатуна *4* установлен не на оси *B* кривошипа *1*, как это имеет место в обычном кривошипно-

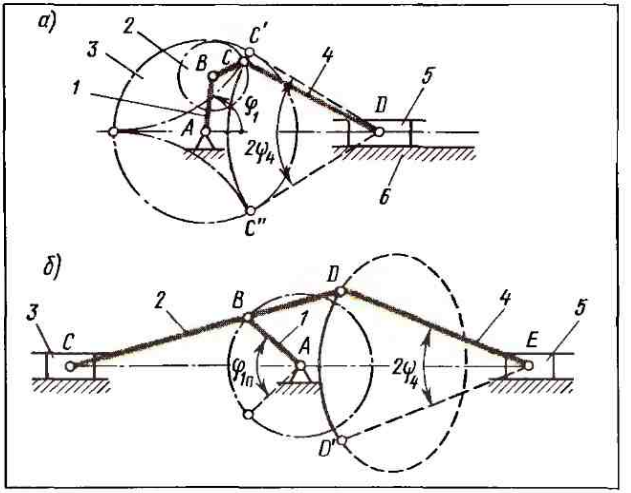


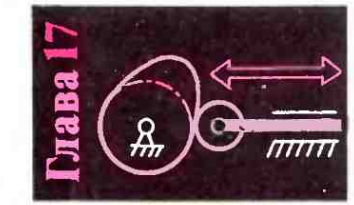
Рис. 16.6

ползунном механизме, а на некотором расстоянии BC вдоль радиуса планетарного колеса *2*, обкатывающего по неподвижному колесу *3* с внутренними зубьями. Числа зубьев колес z_2 и z_3 в планетарном зубчатом механизме подбирают такими, чтобы точка C описывала требуемую траекторию. В описываемом механизме (рис. 16.6, *а*) отношение чисел зубьев колес *3* и *1* подобрано равным трем. В этом случае точка C описывает замкнутую гипоциклоиду. Каждая из ветвей этой гипоциклоиды (например, $C'C''$, которая на рис. 16.6, *а* показана красной линией) на некотором участке имеет кривизну, близкую к постоянной. Если длину шатуна CD выбрать равной радиусу кривизны этого участка траектории точки C, то точка D будет почти неподвижной, т. е. ползун *5* будет иметь продолжительную квазиостановку.

Аналогичное свойство шатунной кривой используется и в механизме прерывистого действия, схема которого приведена на рис. 16.6, *б*. Спаренные кривошипно-ползунные механизмы из звеньев *1, 2, 3, 4, 5* имеют ту особенность, что один из ползунов — звено 5 — имеет длительную квазиостановку в крайнем правом положении. Это достигается тем, что палец D шатуна *4* соединен не с кривошипом *1*, а с шатуном *2*. Точка D описывает сложную шатунную кривую, но ее можно на некотором участке, например DD' (рис. 16.6, *б*), аппроксимировать дугой постоянной кривизны. Назначив длину шатуна DE равной радиусу кривизны этой дуги в пределах угла $2\psi_4$, получают механизм с *квазипрерывистым движением* ползуна *5*.

Иногда используют участки кривых, имеющие прямолинейные очертания. Если по такой квазипрямой перемещать ползун кулисного механизма, то кулиса будет иметь квазиостановку во время

движения ползуна в пазу кулисы на этом участке траектории. Конструктивным недостатком подобных механизмов с квазиостановками часто является значительная длина звеньев и, как следствие, увеличение габаритов.



Кулачковые механизмы

Рабочий процесс многих машин вызывает необходимость иметь в их составе механизмы, движение выходных звеньев которых должно быть выполнено строго по заданному закону и согласовано с движением других механизмов. Наиболее простыми, надежными и компактными для выполнения такой задачи являются кулачковые механизмы. Воспроизведение движения выходного звена — толкателя они осуществляют теоретически точно. Их входное звено называется кулачком. Закон движения толкателя, задаваемый передаточной функцией, определяется профилем кулачка и является основной характеристикой кулачкового механизма, от которой зависят его функциональные свойства, а также динамические и вибрационные качества. Проектирование кулачкового механизма разделяется на ряд этапов: назначение закона движения толкателя, выбор структурной схемы, определение основных и габаритных размеров, расчет координат профиля кулачка. Методы выполнения этих этапов изложены в настоящей главе.

§ 17.1 Виды кулачковых механизмов и их особенности

Общее представление о кинематических схемах кулачковых механизмов можно получить на примере газораспределительных механизмов двигателей внутреннего сгорания, показанных на рис. 17.1. Эти механизмы служат для открытия и закрытия клапанов, что позволяет наполнять цилиндры двигателей горючей смесью (или воздухом), выпускать отработанные газы и надежно изолировать камеру сгорания от окружающей среды во время тактов сжатия и рабочего хода.

Кинематические схемы механизмов газораспределения приведены на рис. 17.1, *а, б, в,* а конструктивное оформление их звеньев *1* и *2* — на рис. 17.1, *г, д, е, ж, з, и.*

В зависимости от особенностей конструкции, функционального назначения машины и ряда других факторов применяют разные виды кулачков (рис. 17.2), основными из которых являются: *а, б* —

плоские с поступательным перемещением кулачка; *в, г,* — *цилиндрические; д, е, ж* — *дисковые; з* — *конические; и* — *гиперболоидные; к* — *коноидные.* Толкатель кулачкового механизма (рис. 17.2) совершает движение: *а, в, г, д, ж, з* — поступательное; *б, е, и* — вращательное; *к* — сочетание двух поступательных.

Контакт элементов в высшей кинематической паре может обеспечиваться *геометрическим замыканием* за счет пазов (рис. 17.2, *б, ж, и*), охватывающих роликов (рис. 17.2, *г*) и т. п. или *силовым замыканием* пары путем воздействия силы: тяжести, упругости пружин (см. рис. 17.1, *б, в, е, ж, з*), давления жидкости или воздуха и т. п.

Рабочая поверхность толкателей, воспринимающая нагрузку от кулачка, подвержена износу. Чтобы уменьшить износ, распределить его равномернее по контактной поверхности толкателя и уве-

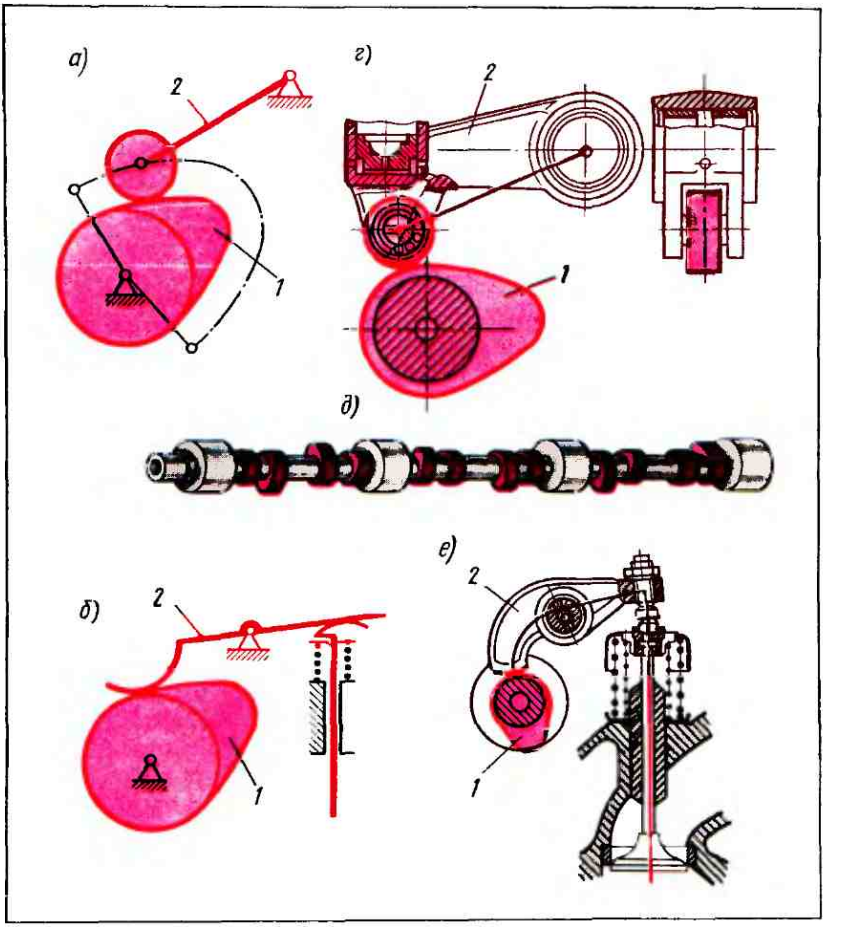


Рис. 17.1

личить надежность и долговечность механизма, используют башмаки различной конструкции; наибольшее применение получили (см. на рис. 17.1): *а, г* — роликовые; *в, ж* — тарельчатые с плоской, *б, е* — цилиндрической и *з, и* — сферической контактными поверхностями, а также остроконечные со сферой малого радиуса (ибо конец толкателя не может быть выполнен абсолютно острым, т. е. точечным). Выполнение башмака в виде роликов позволяет частично исключить трение скольжения, заменив его трением качения, уменьшить износ элементов высшей кинематической пары и повысить надежность механизма.

Общее число возможных сочетаний кулачков, толкателей, башмаков, способов замыкания кинематической пары и их конструктивного оформления весьма велико. Наиболее целесообразное сочетание выбирается с учетом большого числа факторов. Удачное решение получают на основе опыта эксплуатации и данных о на-

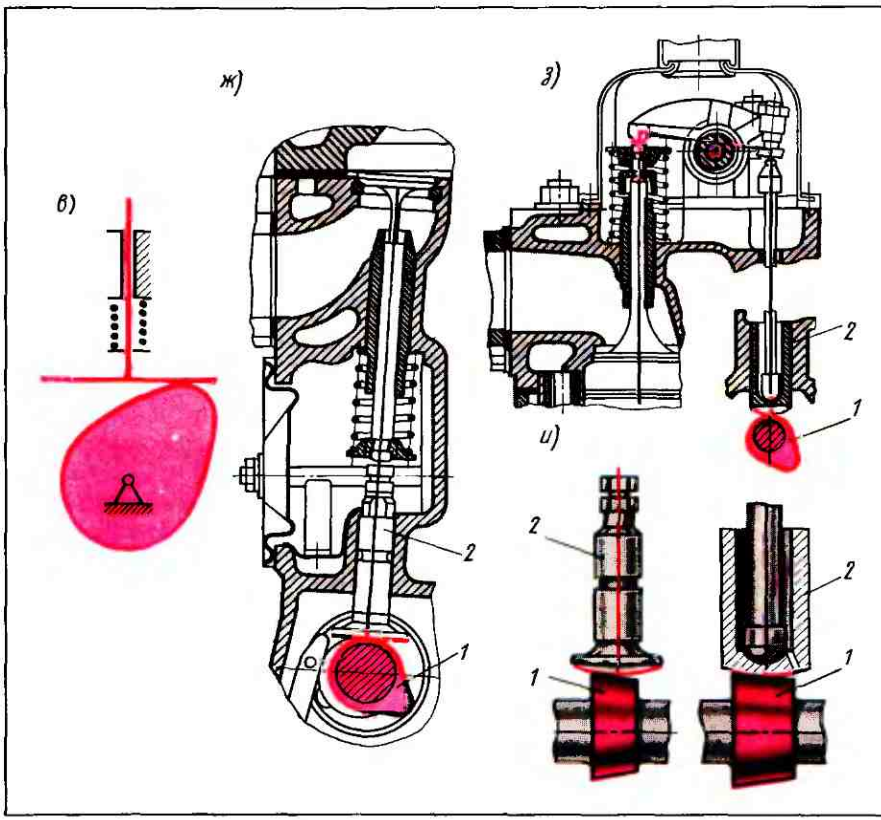


Рис. 17.1, продолжение

дежности и долговечности кулачковых механизмов разнообразных машин. Однако есть основные факторы и показатели, которые необходимо учитывать при проектировании конкретных кулачковых механизмов.

Единого универсального критерия, учитывающего весь сложный комплекс вопросов, связанных с выбором закона движения толкателя, не существует. Поэтому при оценке эффективности профиля кулачка устанавливают комплекс заданных условий и ограничений и располагают их в порядке убывающей важности. На первых этапах проектирования находят решение для обязательных условий, а затем проводят уточнения, исходя из экономических, технологических, эксплуатационных и других практических соображений.

§ 17.2 Закон перемещения толкателя и его выбор

Наиболее типичным графиком зависимости между перемещением толкателя и углом поворота кулачка является кривая, приведенная на рис. 17.3, *б* для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем (рис. 17.3, *а*). На этом графике внутри цикла (угол $\varphi_{1ц}$) можно выделить четыре фазы и соответствующие им фазовые углы поворота кулачка: угол удаления ($\varphi_у$), угол дальнего стояния ($\varphi_д$), угол сближения ($\varphi_с$) и угол ближнего стояния ($\varphi_б$). При геометрическом замыкании контакта в высшей кинематической паре кулачок является ведущим звеном на обоих фазах движения толкателя: как при удалении, так и при сближении. При силовом замыкании контакта (рис. 17.1, *б*) движение толкателя на фазе сближения происходит под действием приложенной силы пружины (или силы тяжести, или давления воздуха и т. п.), а на фазе удаления — под действием профиля кулачка, который возбуждает силу в контакте, направленную по общей нормали $n—n$ (рис. 17.3, *а*). Угол между нормалью $n—n$ и направлением движения выходного звена *2* называют углом давления ϑ. Текущий угол давления ϑ_i является величиной переменной и может иметь знак (плюс или минус) в зависимости от расположения нормали относительно вектора скорости толкателя.

Сумма фазовых углов $\varphi_у + \varphi_д + \varphi_с = \varphi_{1р}$ определяет рабочий профильный угол $\delta_р = \varphi_{1р}$ на кулачке, равный центральному углу, внутри которого расположен рабочий профиль кулачка (рис. 17.3, *б*).

Координаты $x_B^{(0)}$, $y_B^{(0)}$ точки B на профиле кулачка определяют положение толкателей в неподвижной системе координат $Ax^{(0)}y^{(0)}$. Координата $x_B^{(0)} = e$ определяет смещение оси толкателя *2* относительно оси A вращения кулачка *1*. Координата $y_B^{(0)}$ может быть представлена в форме суммы $(S_н + S_{Bi})$, в которой первое слагаемое $S_н = \sqrt{r_0^2 + e^2}$ является величиной постоянной, а второе — $S_{Bi}(\varphi_1)$ — функцией угла поворота кулачка φ_1. Радиус r_0 называют

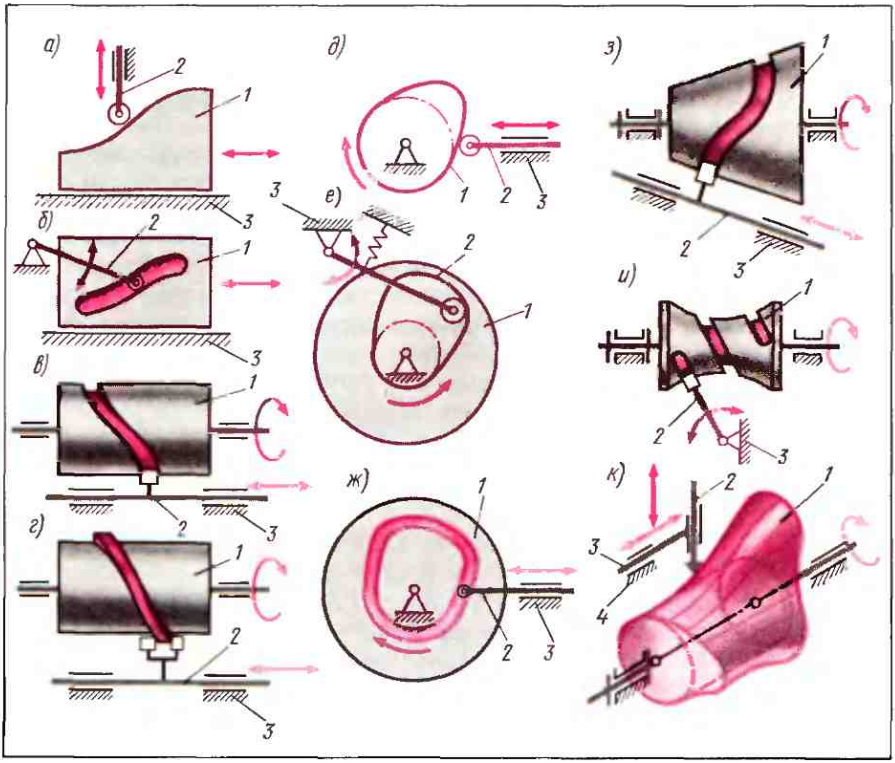


Рис. 17.2

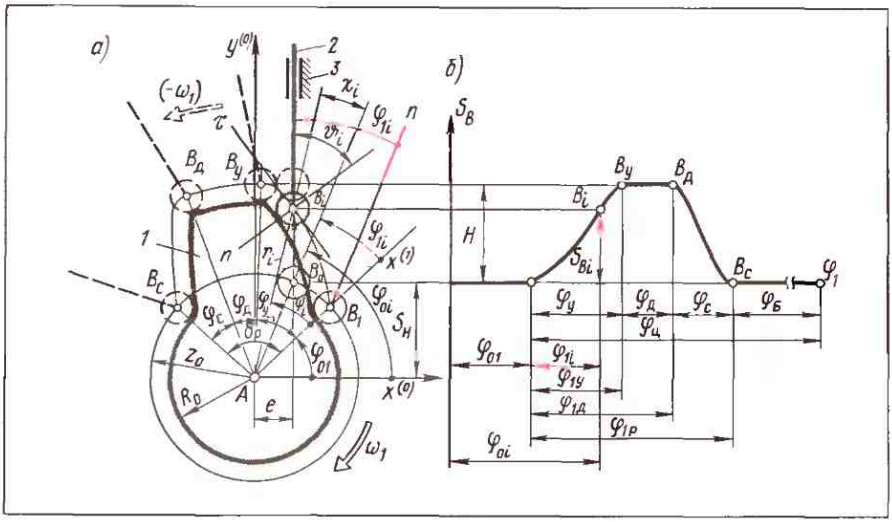


Рис. 17.3

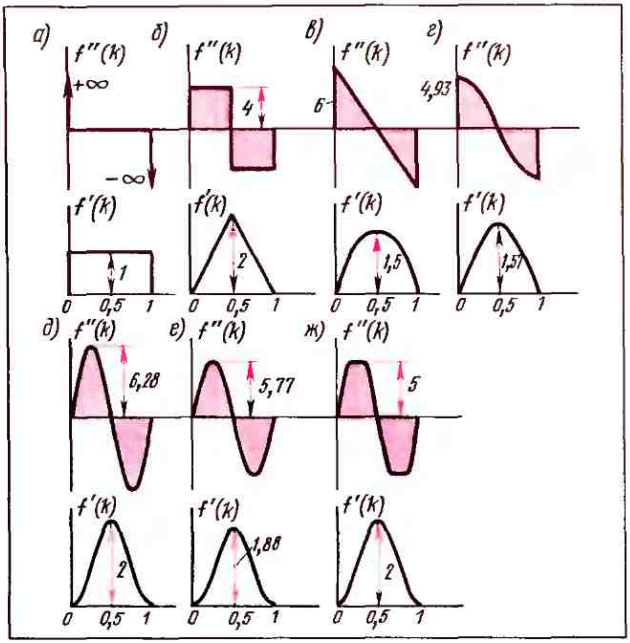


Рис. 17.4

начальным радиусом центрового профиля, являющегося траекторией оси ролика в относительном качении по конструктивному профилю с начальным радиусом R_0. Следует обратить внимание, что полярный угол ψ_i точки B_i на профиле кулачка в общем случае не равен углу поворота кулачка φ_{1i}:

$$\psi_i = \varphi_{1i} + \chi_i,$$

где $\chi_i = \operatorname{arctg}[(S_н + S_{Bi})/e] - \operatorname{arctg}(S_н/e)$. В частном случае при $e = 0$ угол $\chi_i = 0$ и $\varphi_{1i} = \psi_i$.

Радиус-вектор AB точки B, r_i и его наибольшее значение $r_{наиб}$ определяются из соотношений:

$$r_i = \sqrt{(S_н + S_{Bi})^2 + e^2}; \quad r_{наиб} = \sqrt{(S_н + H)^2 + e^2}.$$

Координаты точки B в подвижной системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)}$, связанной с кулачком 1, определяют из соотношений:

$$x_B^{(1)} = r_i \cos \psi_i; \quad y_B^{(1)} = r_i \sin \psi_i.$$

В практике проектирования наибольшее применение получили относительно простые законы движения толкателя, показанные на рис. 17.4 для фазы удаления толкателя; *а* — линейный; *б* — параболический; *г* — косинусоидальный; *д* — синусоидальный; *в*, *е*, *ж* — описанные полиномами. Функции перемещения приведены в табл. 17.1 в зависимости от безразмерного параметра k, значения которого на фазе удаления находятся в пределах $0 \leqslant k_y \leqslant 1$.

Таблица 17.1

Функция перемещения толкателя	Пределы изменения $k_y = \varphi_1/\varphi_y$	Графики скорости и ускорения толкателя	Максимальные значения коэффициентов	
			$[f'(k_y)]_{max}$	$[f''(k_y)]_{max}$
$S = Hk_y$	0...1,0	Рис. 17.4, а	1,0	$\pm\infty$
$S = \begin{cases} 2Hk_y^2 \\ H[1-2(1-k_y)^2] \end{cases}$	0...0,5 0,5...1,0	Рис. 17.4, б	2,0	± 4
$S = H(3k_y^2 - 2k_y^3)$	0...1,0	Рис. 17.4, в	1,5	± 6
$S = \frac{1}{2}H[1 - \cos(\pi k_y)]$	0...1,0	Рис. 17.4, г	1,57	$\pm 4{,}93$
$S = H(k_y - (\sin 2\pi k_y)/(2\pi))$	0...1,0	Рис. 17.4, д	2,0	$\pm 6{,}28$
$S = H(10k_y^3 - 15k_y^4 + 6k_y^5)$	0...1,0	Рис. 17,4, е	1,88	$\pm 5{,}77$
$S = \begin{cases} H\frac{8}{3}(5k_y^3 - 15k_y^4 + 24k_y^5 - 16k_y^6) \\ H[1 - \frac{8}{3}[5(1-k_y^3) - 15(1-k_y)^4 + \\ + 24(1-k_y)^5 - 16(1-k_y)^6] \end{cases}$	0...0,5 0,5...1,0	Рис. 17.4, ж	2,0	$\pm 5{,}0$

При линейном законе скорость движения толкателя $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ на фазе удаления постоянна, ускорение $a^\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ равно нулю, но в начале и конце фазы ускорение равно бесконечности, что проявляется в форме «жесткого» удара. Такой закон допустим при малых массах толкателя и малых скоростях движения.

В точках разрыва кривой ускорений (рис. 17.4), характерных для параболического (*б, в*) и косинусоидального (*г*) законов движения, ускорение и силы инерции толкателя изменяются на конечную величину («мягкий» удар). При плавных кривых изменения ускорения (*д, е, ж*) удары теоретически отсутствуют, если погрешности изготовления профилей достаточно малы.

Наибольшее применение имеют кулачки, обеспечивающие плавную и безразрывную кривую ускорения толкателя (рис. 17.3, *д, е, ж*). Иногда безударный профиль задается тремя плавными кривыми: полуволной синусоиды на участке положительного ускорения, четвертьволной синусоиды и квадратной параболой на участке отрицательных ускорений. В табл. 17.1 приведены числовые значения максимальных скоростей и ускорений толкателя в относительной форме.

§ 17.3 Угол давления и коэффициент возрастания сил в кинематических парах

Угол давления ϑ определяет положение нормали в высшей кинематической паре относительно вектора скорости и контактной точки ведомого звена (см. рис. 12.2). Его

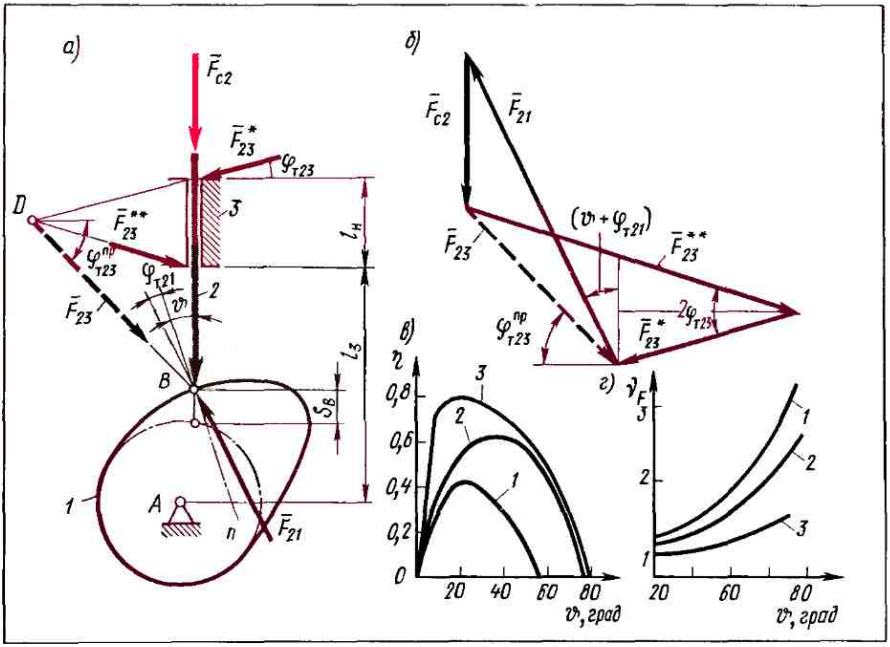


Рис. 17.5

величина определяется размерами механизма, передаточной функцией $v_{qB} = v_B/\omega_1$ скорости движения и перемещения S_B толкателя [см. формулы (12.11) и (12.12)].

При заданной внешней статической нагрузке на толкателе, например силе $F_{пс2}$ полезного сопротивления, силе $F_п$ упругости пружины для силового замыкания и силе тяжести G_2 толкателя (рис. 17.5, *а*), реакции в кинематических парах являются зависимыми от угла давления, т. е. от закона движения толкателя и габаритных размеров механизма. Этот вывод легко установить из анализа плана сил, приложенных к толкателю (рис. 17.5, *а, б*) и формул (12.11) и (12.12). Чем больше угол давления ϑ, тем больше реакции F_{23} и F_{21} в кинематических парах, а следовательно, тем больше силы трения при заданных коэффициентах трения: $f_{т21}$ — между башмаком толкателя *2* и кулачком *1* и $f_{т23}$ — толкателем *2* и направляющими *3*. При расчетах сил в кинематических парах для поступательной кинематической пары между толкателем и направляющими используют приведенный коэффициент трения $f^{пр}_{т23}$, который рассчитывают по величине угла $\varphi^{пр}_{т23}$, определяющего положение реакции F_{23} относительно перпендикуляра к направлению перемещения толкателя.

Можно написать следующие соотношения между силами, приложенными к звену *2* (рис. 17.5, *а*):

$$\bar{F}_{c2} = \underline{\bar{F}_{пс2}} + \underline{\bar{G}_2} + \underline{\bar{F}_п} + \underline{\bar{\Phi}_2};$$

$$\bar{F}_{23} + \bar{F}_{c2} + \bar{F}_{21} = 0;$$

$$\bar{F}_{23}^{*} + \bar{F}_{23}^{**} = \bar{F}_{23}.$$

Так как сила $\bar{F}_{21}$ должна проходить через узлы сил D и B, координаты которых легко найти, то

$$\operatorname{tg} \varphi_{т23}^{пр} = \frac{l_3 + 0{,}5l_н - S_н + S_B(\varphi_1)}{0{,}5l_н / \operatorname{tg} \varphi_{т23}}.$$

Принимая $\varphi_{т23}^{пр} = \operatorname{arctg} f_{т23}^{пр} \approx f_{т23}^{пр}$; $\varphi_{т23} = \operatorname{arctg} f_{т23} \approx f_{т23}$, соотношение (17.2) записывают окончательно в следующем виде:

$$f_{т23}^{пр} = f_{т23} = \left(\frac{l_3 - S_н + 0{,}5l_н - S_B(\varphi_1)}{0{,}5l_н} \right).$$

В качестве параметра, оценивающего влияние угла давления на условия передачи сил в кулачковых механизмах, Л. Н. Решетов предложил использовать отношение сил $\nu_F = F_{21}/F_{c2}$, названное коэффициентом возрастания усилий.

Аналитическое соотношение для определения ν_F в случае плоского кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем легко найти из плана сил (рис. 17.5, *б*) по теореме синусов:

$$\frac{F_{c2}}{\sin(90° - \varphi_{т23}^{пр} - \vartheta - \varphi_{т21})} = \frac{F_{21}}{\sin(180° - \varphi_{т23}^{пр})}$$

или

$$\nu_F = \frac{F_{21}}{F_{c2}} = \frac{\cos \varphi_{т23}^{пр}}{\cos(\vartheta + \varphi_{т23}^{пр} + \varphi_{т21})}.$$

На рис. 17.5, *г* показаны кривые изменения коэффициента ν_F возрастания усилий для трех случаев при разных значениях коэффициентов трения $(f_{т21} + f_{т23}^{пр})$: кривая *1*—0,1; *2*—0,2; *3*—0,5. Задаваясь допустимым коэффициентом ν_F, можно рассчитать по формуле (17.4) значение допускаемого угла давления:

$$\vartheta_{доп} = \arccos \left(\frac{\cos \varphi_{т23}^{пр}}{\nu_{F доп}} \right) - \varphi_{т23}^{пр} - \varphi_{т21}.$$

Чем меньше коэффициенты трения $f_{т21}$ и $f_{т23}^{пр}$ и больше допустимое значение коэффициента ν_F, тем большие углы давления ϑ возможно использовать при проектировании кулачковых механизмов.

При ориентировочных расчетах принимают следующие значения допускаемых углов давления $\vartheta_{доп}$: для поступательно движущегося толкателя $\vartheta_{доп} = 30...15°$; для вращающегося толкателя $\vartheta_{доп} = 45...20°$.

Если габариты механизма позволяют, то для уменьшения потерь на трение целесообразно принимать меньшие значения угла: $\vartheta_{доп} = 15...20°$. Это оказывает положительное влияние на коэффициент полезного действия η, оценивающий отношение работы сил трения к работе движущих сил за какой-то промежуток времени. Для механизма с поступательно движущимся толкателем на

рис. 17.5, *в* приведены три графика, показывающие изменение мгновенного к. п. д. в зависимости от угла давления при разных сочетаниях коэффициентов трения $f_{т21}$ и $f_{т23}$:

Кривая	*1*	*2*	*3*
$f_{т21}$	0,2	0,2	0,01
$f_{т23}^{пр}$	0,4	0	0,2

Графики показывают, что максимальные значения к. п. д. соответствуют определенным углам давления.

§ 17.4 Определение размеров кулачкового механизма по заданному допускаемому углу давления

Габаритные размеры механизма (радиус кулачка r_0, смещение e осей толкателя и кулачка, межосевое расстояние a и т. п.), обеспечивающие эффективную работу спроектированного механизма, зависят от заданных условий и ограничений. Оптимальным решением при заданных ограничениях называют такое, при котором выходные параметры синтеза, в данном случае габаритные размеры механизма, будут наименьшими. Следовательно, математическая модель оптимизации с учетом соотношений (12.11) и (12.12) может быть записана в следующей форме:

для поступательно движущегося толкателя

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{(v_B/\omega_1 \mp e)}{S_н + S_B(\varphi_1)} \leqslant \vartheta_{доп}; \qquad (17.1)$$

для вращающегося толкателя

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{(v_B/\omega_1) - (a\cos\varphi_2 - l_2)}{a\sin\varphi_2} \leqslant \vartheta_{доп}. \qquad (17.2)$$

Соотношения (17.1) и (17.2) являются ограничениями по углу давления, который является величиной переменной, зависящей от заданного закона изменения кинематических параметров движения толкателя.

При проектировании кулачковых механизмов конструктор стремится выбрать закон движения толкателя, который бы наилучшим образом удовлетворял заданным требованиям. Во многих случаях в качестве исходного принимают график изменения ускорения толкателя a_B (или относительных значений ускорения $\nu_a = a_{Bi}/a_{Bнач}$) в функции угла поворота кулачка (рис. 17.6, *а*). Остальные кинематические параметры получают в аналитической форме или путем численного или графического интегрирования. Например, график скорости толкателя v_B или кинематической передаточной функции скорости $v_{qB} = v_B/\omega_1$ (рис. 17.6, *б*) при графическом интегрировании находят по соотношениям:

$$a_B^{\tau} = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_B}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1\frac{dv_B}{d\varphi_1}, \quad \text{откуда}$$

$$v_B = \int_{t_н} a_B^{\tau} dt; \quad v_{qB} = v_B/\omega_1 = \int_{\varphi_{1н}} \left(\frac{a_B^{\tau}}{\omega_1^2}\right) d\varphi_1.$$

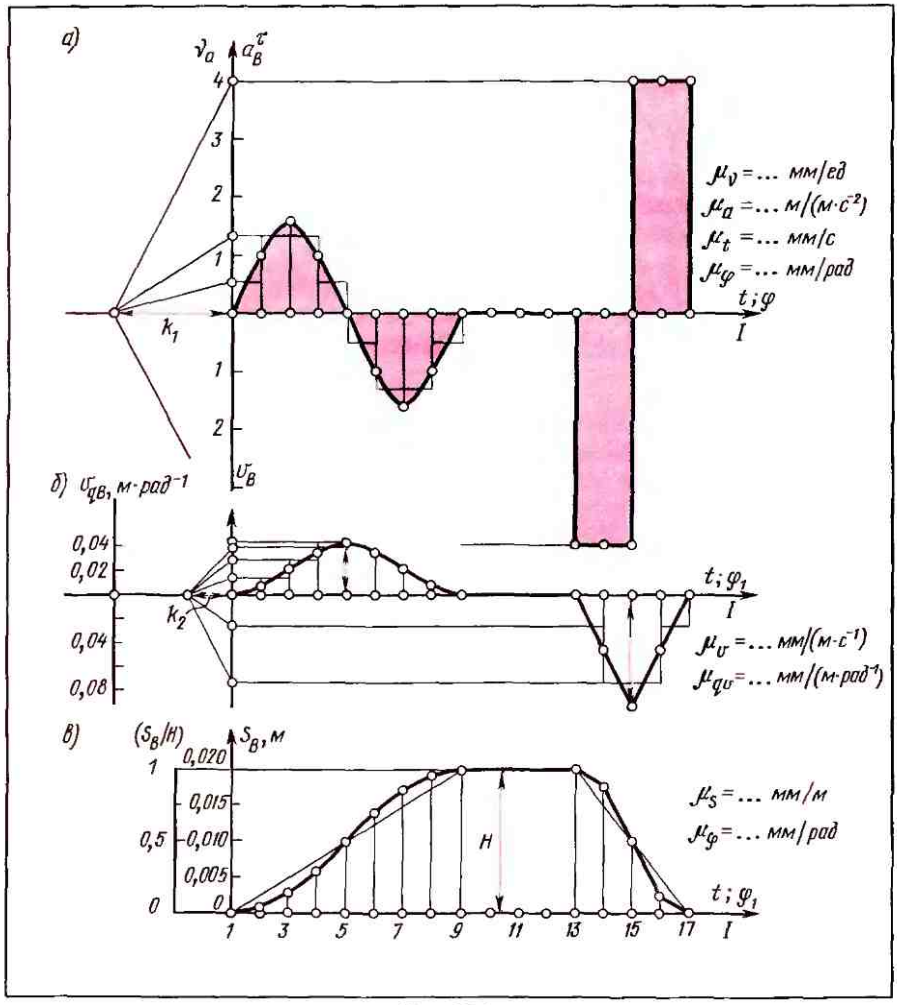


Рис. 17.6

Связь между масштабами графиков (рис. 17.6, *а, б*) следующая: $\mu_v = \mu_a \mu_t / K_1$; $\mu_{qv} = \mu_{qa} \mu_\varphi / K_1$, где $[\mu_v] =$ мм/(м·с$^{-1}$); $[\mu_{qv}] =$ = мм/(м·рад$^{-1}$).

Аналогичен переход к графику перемещений толкателя (рис. 17.6, *в*) по соотношениям:

$$v_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{dS_B}{d\varphi_1},$$

откуда

$$S_B = \int_{t_н} v_B dt; \quad S_B = \int_{\varphi_{1н}} \left(\frac{v_B}{\omega_1}\right) d\varphi_1 = \int_{\varphi_{1н}} v_{qB} d\varphi_1.$$

При этом связь между масштабами графиков определяют из соотношений $\mu_s = \mu_v \mu_t / K_2$ и $\mu_s = \mu_{qv} \mu_\varphi / K_2$, где $[\mu_s] =$ мм/м.

Записанным выше ограничениям по углу давления ϑ можно придать геометрическую интерпретацию. Используя заданные (рис. 17.7, *а*) или вычисленные (см. рис. 17.6, *б*, *в*) функции положения $S_B(\varphi_1)$ и передаточную функцию скорости $v_{qB}(\varphi_1)$, строят график в координатах v_{qB}, S_B, т. е. аналогично построению на фазовой плоскости: скорость $\dot{x}$ — перемещение x.

При вращающемся толкателе выбирают полярную систему координат с началом в точке C (рис. 17.7, *в*), при поступательно движущемся толкателе — прямоугольную систему координат $x^{(2)}y^{(2)}$ с началом в точке B_0 на начальной окружности кулачка (рис. 17.7, *б*). Система координат — правая: поворот от положительного направления перемещения S_B к отрезкам, изображающим положительные величины кинематической передаточной функции v_{qB}, проводят против часовой стрелки. Следовательно, при отсчете S_B вправо от нижнего положения ролика B — положительные значения v_{qB} откладывают вверх, отрицательные — вниз (рис. 17.7, *а*). При этом кулачок *1* вращается в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки (рис. 17.7, *б*). Значения масштабов по осям координат $[\mu_s]$=мм/м и $[\mu_{qv}]$=мм/(м·рад$^{-1}$) принимают одинаковыми, что позволяет изображать углы давления ϑ без искажения. Максимальные значения передаточной функции $v_{qB\max}$ на фазе удаления для краткости обозначают через v_{q3}, на фазе сближения — через v_{q4}.

На рис. 17.7, *б*, *в* эти величины изображены отрезками $3'3^* = \mu_{qv} v_{q3}$ и $4'4^* = \mu_{qv} v_{q4}$. Принимая условие, что этим значениям v_{qB} соответствуют углы давления, равные допускаемому $\vartheta_{доп}$, находят предельное положение оси O_1 вращения кулачка в точке A пересечения ограничивающих лучей (рис. 17.7, *б*). Каждый из этих лучей определяет «допустимую полуплоскость», лежащую по одну ее сторону. Часть плоскости, которая принадлежит всем этим полуплоскостям, образует область допустимых решений (ОДР), в которой наверняка выполняются ограничения по соотношениям (17.6) и (17.7). В этой области (рис. 17.7, *б*, *в*) можно выбирать ось O_1 вращения кулачка по условию $\vartheta \leqslant \vartheta_{доп}$.

Такая геометрическая интерпретация соотношений (17.1) и (17.2) используется для графического определения искомых габаритных размеров кулачкового механизма: межосевого расстояния $a = l_{CO1}$ и радиуса $r_0 \geqslant r_{0\min} = l_{AB0}$ при вращающемся толкателе (рис. 17.7, *в*) или смещения осей «*е*» и радиуса $r_0 \geqslant r_{0\min} = l_{AB0}$ при поступательно движущемся толкателе (рис. 17.6, *б*).

При аналитических методах синтеза и при использовании ЭВМ для вычисления координат профиля необходимо располагать соответствующими зависимостями, представленными в аналитической форме. Обозначения необходимых параметров показаны на рис. 17.7, *в* для вращающегося и на рис. 17.7, *б* — для поступательно движущегося толкателя.

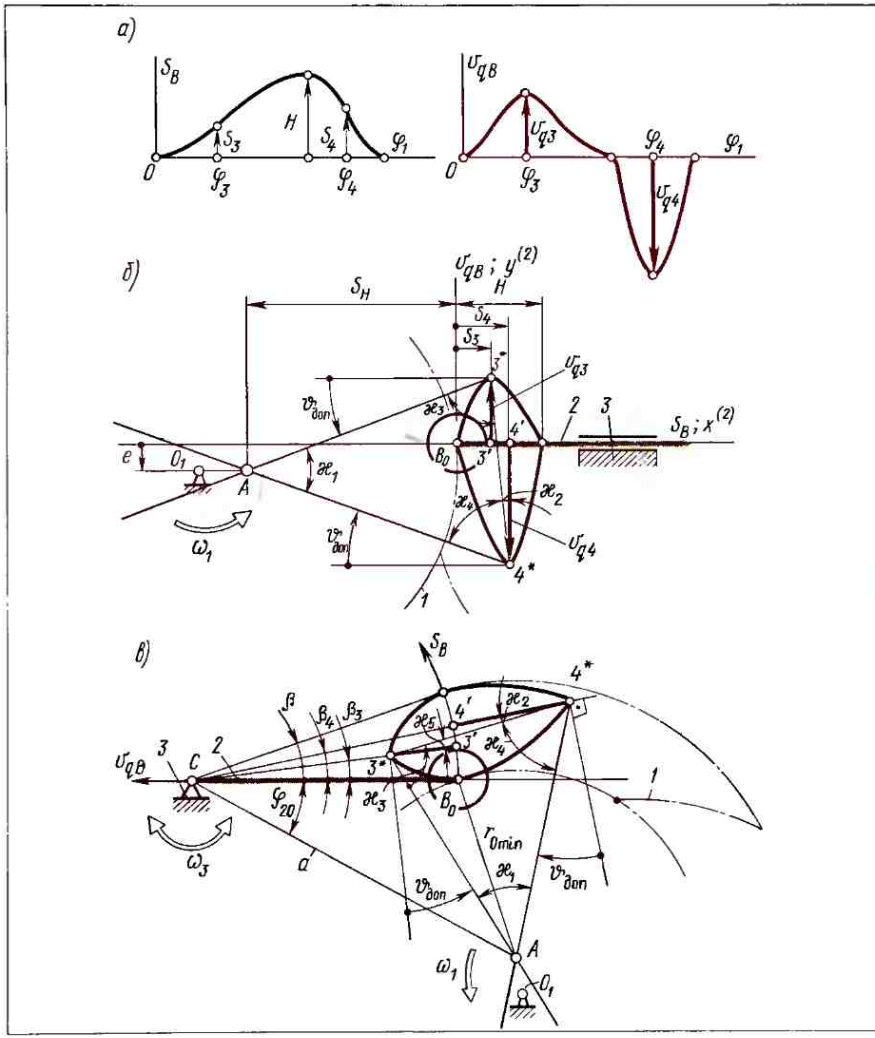


Рис. 17.7

Перемещения S_B оси ролика относительно начального положения B_0, соответствующие передаточным функциям скорости v_{q3} и v_{q4}, обозначают для краткости записи через S_3 и S_4. Их находят по графику перемещений при графическом интегрировании заданной функции или с помощью стандартных подпрограмм нахождения максимума при интегрировании с использованием ЭВМ.

Перемещениям S_3 и S_4 соответствуют углы поворота толкателя $\beta_3 = S_3/l_2$ и $\beta_4 = S_4/l_2$, где l_2 — длина толкателя.

Угол $\varkappa_2$ в треугольнике $C3^*4^*$ (рис. 17.7, *в*) определяют по теореме синусов, так как известны длины двух сторон этого тре-

угольника: $C4^*=l_2-v_{q4}\operatorname{sgn}\omega_1$ и $C3^*=l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1$ (обозначения масштабов опущены); здесь $v_{q4}<0$, тогда

$$\frac{C3^*}{\sin\varkappa_2}=\frac{3^*4^*}{\sin(\beta_4-\beta_3)} \quad \text{или} \quad \sin\varkappa_2=\frac{(l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)\sin(\beta_4-\beta_3)}{l_{34}}. \tag{17.3}$$

Расстояние между точками 3^* и 4^*, обозначенное через l_{34}, определяют по теореме косинусов:

$$l_{34}=3^*4^*=\sqrt{(l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)^2+(l_2-v_{q4}\operatorname{sgn}\omega_1)^2-2(l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)(l_2-v_{q4}\operatorname{sgn}\omega_1)\cos(\beta_4-\beta_3)}. \tag{17.4}$$

В случае поступательно движущегося толкателя соотношения (17.3) и (17.4) приобретают частные значения (рис. 17.7, *б*):

$$\varkappa_2=\operatorname{arctg}[(S_4-S_3)/(v_{q3}-v_{q4})];$$
$$l_{34}=3^*4^*=(v_{q3}-v_{q4})/\cos\varkappa_2.$$

Далее рассматривают угол $\varkappa_5$ и треугольник $A3^*4^*$, в котором известна одна сторона 3^*4^* и можно найти два угла $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ и далее угол $\varkappa_1$:

$$\varkappa_5=\varkappa_2+(\beta_4-\beta_3); \tag{17.5}$$
$$\varkappa_3=90^\circ-\vartheta_{\text{доп}}+(\beta_4-\beta_3)+\varkappa_2; \tag{17.6}$$
$$\varkappa_4=90^\circ-\vartheta_{\text{доп}}-\varkappa_2; \tag{17.7}$$
$$\varkappa_1=180^\circ-(\varkappa_3+\varkappa_4)=2\vartheta_{\text{доп}}-(\beta_4-\beta_3). \tag{17.8}$$

Для поступательно движущегося толкателя углы β_4 и β_3 в пределе равны нулю и формулы (17.6) и (17.8) приобретают частное значение:

$$\varkappa_3=90^\circ-\vartheta_{\text{доп}}+\varkappa_2;$$
$$\varkappa_4=90^\circ-\vartheta_{\text{доп}}-\varkappa_2;$$
$$\varkappa_1=2\vartheta_{\text{доп}}.$$

Одну из сторон $A3^*=l_{31}$ рассматриваемого треугольника $A3^*4^*$ находят по теореме синусов:

$$\frac{A3^*}{\sin\varkappa_4}=\frac{3^*4^*}{\sin\varkappa_1}, \text{ или } l_{31}=A3^*=l_{34}\frac{\sin\varkappa_4}{\sin\varkappa_1}.$$

Межосевое расстояние $a=l_{CA}$ находят по теореме косинусов из треугольника $C3^*A$ (рис. 17.7, *в*):

$$a=\sqrt{(l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)^2+l_{31}^2+2(l_2-v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)l_{31}\sin\vartheta_{\text{доп}}}. \tag{17.9}$$

Угол φ_{20}, определяющий ближнее положение оси толкателя CB_0 относительно межосевого расстояния CA, находят из треугольника $C3^*A$ по теореме синусов:

$$\frac{A3^*}{\sin(\varphi_{20}+\beta_3)}=\frac{a}{\sin(90^\circ+\vartheta_{\text{доп}})}, \text{ или } \sin(\varphi_{20}+\beta_3)=\frac{l_{31}}{a}\cos\vartheta_{\text{доп}},$$

откуда

$$\varphi_{20} = \arcsin\left(\frac{l_{31}}{a}\cos\vartheta_{доп}\right) - \beta_3. \qquad (17.10)$$

Радиус r_0 начальной окружности кулачка находят из треугольника CB_0A:

$$r_0 = \sqrt{a^2 + l_2^2 - 2al_2\cos\varphi_{20}}. \qquad (17.11)$$

В случае поступательно движущегося толкателя находят смещение «e» оси его направляющей относительно оси A вращения кулачка, координату $S_н$ и радиус r_0 начальной окружности (рис. 17.8, *б*):

$$e = l_{31}\sin\vartheta_{доп} - v_{q3}; \qquad (17.12)$$

$$S_н = l_{31}\cos\vartheta_{доп} - S_3; \qquad (17.13)$$

$$r_0 = \sqrt{S_н^2 + e^2}. \qquad (17.14)$$

При выборе оси O_1 вращения кулачка в точке A пересечения граничных лучей график изменения углов ϑ в функции угла φ_1 поворота кулачка касается в двух точках прямых, соответствующих углам $\vartheta_{доп}$ (рис. 17.8, кривая *1*), и решение считается оптимальным по критерию минимальных размеров кулачка. Если ось O_1 расположить вне области ОДР, то в некоторых положениях толкателя угол ϑ превышает угол $\vartheta_{доп}$ (рис. 17.8, кривая *2*).

При жестких ограничениях по габаритным размерам механизма принимают во внимание тот факт, что опасность заклинивания толкателя при ведущем кулачке и силовом замыкании контакта характерна только для фазы удаления. На фазе сближения толкатель движется под действием силы упругости пружины или силы тяжести и заклинивание невозможно. Это позволяет расширить границы ОДР для положения оси вращения кулачка с учетом допускаемого угла давления $\vartheta_{доп}$ и направления вращения кулачка.

На рис. 17.9, *а*, *б* показано несколько областей ОДР для механизма с вращающимся толкателем, а на рис. 17.9, *в* — для механизма с поступательным движением толкателя:

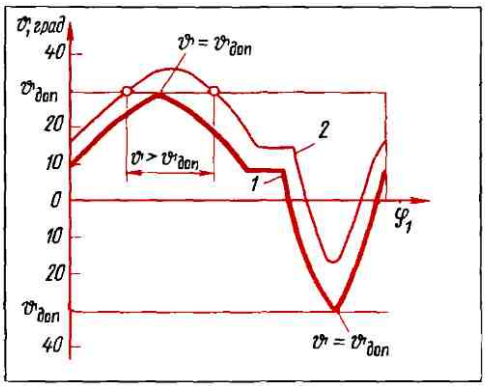


Рис. 17.8

ОДР — направление вращения кулачка реверсивное, допускаемые углы давления при удалении и сближении одинаковы и равны $\vartheta_{доп}$ (рис. 17.9, *а*, *б*, *в*);

ОДР1 — направление вращения кулачка реверсивное, значения допускаемых углов на фазе удаления и фазе сближения различные;

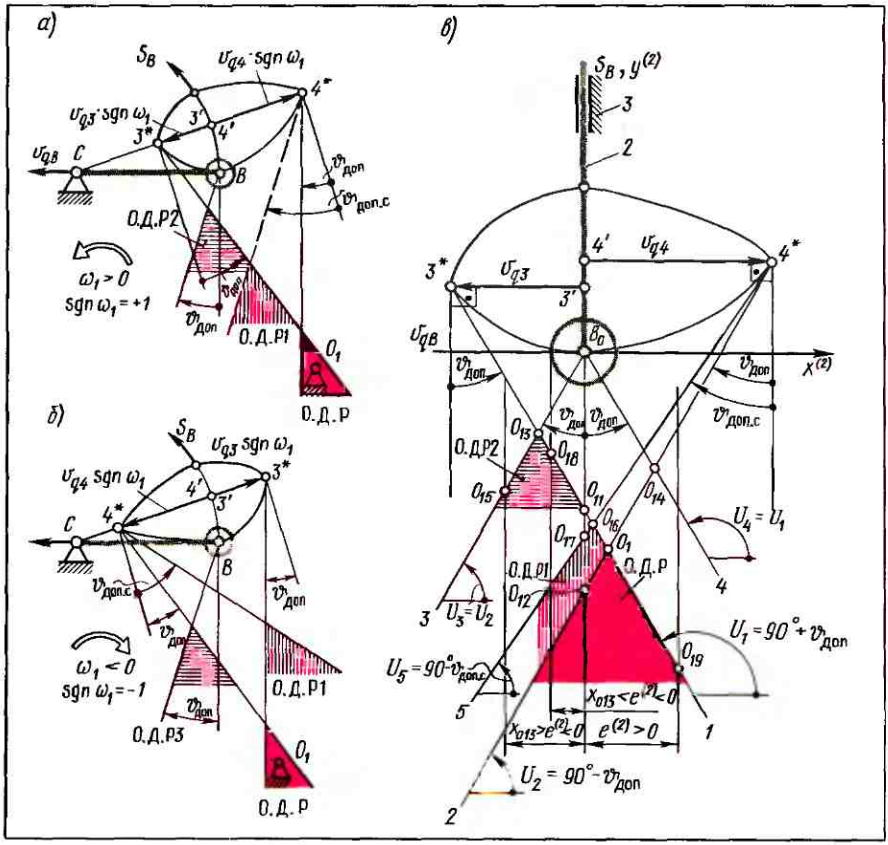


Рис. 17.9

ОДР2 — удаление толкателя осуществляется при вращении кулачка против часовой стрелки; предельное значение угла давления при сближении не регламентировано (рис. 17.9, *а*, *б*);

ОДР3 — удаление толкателя осуществляется при вращении кулачка по часовой стрелке, предельное значение угла давления при сближении не регламентировано (рис. 17.9, *б*).

На рис. 17.9, *в* показано расположение оси O_1 кулачка при разных частных ограничениях: при $e=0$: O_{11}; O_{12}; O_{17} и при $e\neq 0$: O_{15}; O_{18}; O_{19}.

Соответственно ограничениям на движение звеньев получают разные габаритные размеры кулачкового механизма. На рис. 17.10 показаны три центровых профиля кулачков, оси вращения которых были выбраны соответственно: профиль *а* (черная линия) — в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1 = \pm 1$ и $e = 0$; профиль *б* (серая линия) в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1 = \pm 1$ и $e \neq 0$; профиль *b* (красная линия) — в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1 = +1$.

Соответствующие аналитические зависимости получают как

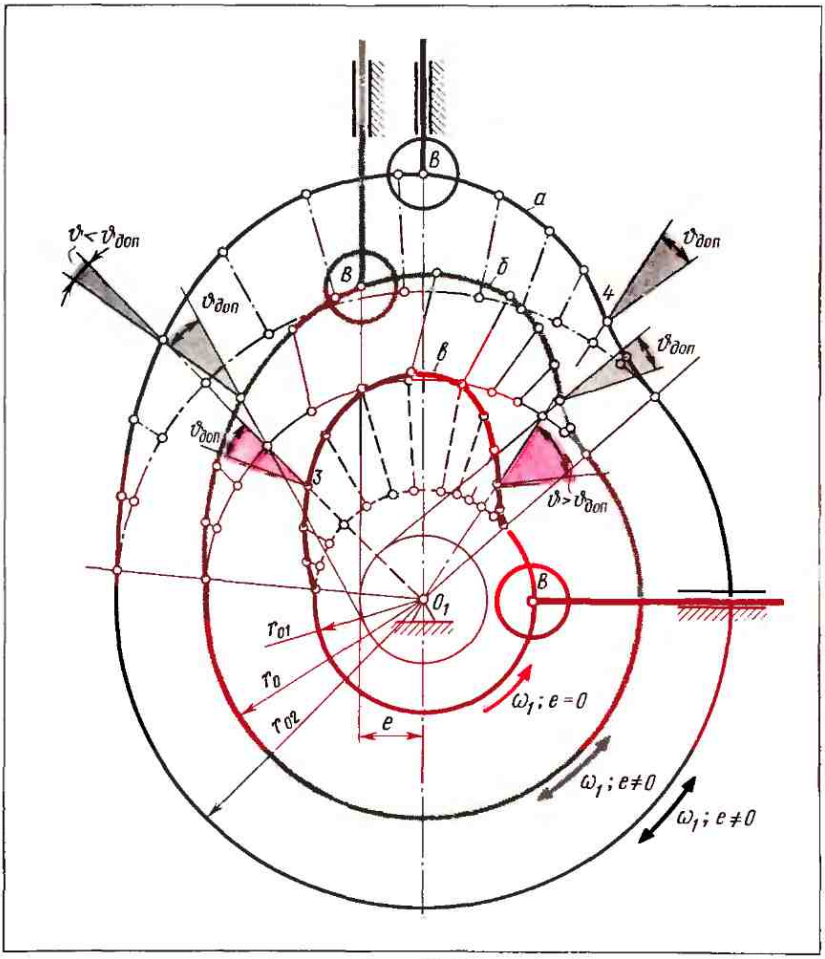


Рис. 17.10

частные случаи ранее выведенных соотношений (17.3...17.9).

Для режима движения механизма, соответствующего области ОДР (см. рис. 17.9, *а*), принимают v_{q4} и S_4 равными нулю.

Если область дозволенных решений ограничивается лучами *5*A* и *6*A* (рис. 17.11, *а, б*), то в расчетные формулы (17.3...17.9) подставляют значения v_{q5} и v_{q6}, s_5 и s_6 взамен v_{q3}, v_{q4}, s_3 и s_4 соответственно.

При вращающемся толкателе имеют место следующие соотношения:

$$\beta_3 = S_3/l_2; \quad \beta_4 = 0;$$

$$\sin\varkappa_2 = [(l_2 - v_{q3})/l_{34}]\sin\beta_3;$$

$$l_{34} = \sqrt{(l_2 - v_{q3})^2 + l_2^2 - 2(l_2 - v_{q3}) l_2 \cos\beta_3}\,;$$

$$\varkappa_3 = 90^\circ - \vartheta_{\text{доп}} - \beta_3 + \varkappa_2\,;$$

$$\varkappa_3 = 90^\circ - \vartheta_{\text{доп}} - \varkappa_2\,;$$

$$\varkappa_1 = 180^\circ - (\varkappa_3 + \varkappa_4) = 2\vartheta_{\text{доп}} - \beta_3\,.$$

При поступательно движущемся толкателе зависимости будут следующими:

$$\varkappa_2 = \operatorname{arctg}(-s_3/v_{q3})\,;$$

$$l_{34} = v_{q3}/\cos\varkappa_2\,;$$

$$l_{31} = v_{q3}\frac{\sin(90^\circ - \vartheta_{\text{доп}} - \varkappa_2)}{\cos\varkappa_2 \sin 2\vartheta_{\text{доп}}}\,,\ \text{или}\ \ l_{31} = v_{q3}\frac{\cos(\vartheta_{\text{доп}} + \varkappa_2)}{\cos\varkappa_2 \sin 2\vartheta_{\text{доп}}}\,.$$

Остальные формулы (17.9) — (17.14) остаются без изменений. Расчеты по изложенной методике рекомендуется выполнять на ЭВМ.

§ 17.5. Определение габаритных размеров кулачка по условию выпуклости профиля

Если башмак толкателя выполнить плоским, то угол давления остается постоянным в любой момент взаимодействия кулачка с толкателем. В частном случае, когда плоскость башмака перпендикулярна оси толкателя, угол давления ϑ становится равным нулю (рис. 17.12, *а, б*). Это позволяет направляющие толкателя выполнить в виде цилиндрической пары и распределить износ башмака на бóльшую поверхность за счет перемещения контактной точки B вдоль башмака. Для такой конструкции элементов высшей кинематической пары ограничением является условие выпуклости профиля кулачка, которое можно записать в форме ограничения на радиус кривизны ρ профиля:

$$\rho_{\min} \geqslant 0\,. \qquad (17.15)$$

В соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 17.12, *а*, это условие можно выразить следующим неравенством:

$$\rho_i = S_{\text{н}} + S_{Bi}(\varphi_1) - l_{CD}\,. \qquad (17.16)$$

В соотношении (17.25): $S_{\text{н}} = r_0$; $S_{Bi}(\varphi_1)$ — текущее значение функции перемещения; l_{CD} — отрезок, имеющий определенный геометрический смысл, который легко выяснить сопоставлением $\triangle O_1CD$ на схеме механизма с $\triangle p_a c_1' c_2'$ плана ускорений (рис. 17.12, *в*), построенного для заменяющего рычажного механизма из звеньев *1*, 3, 2,* по уравнению

$$\bar{a}_{C2}^{\tau} = \bar{a}_{C1}^{n} + \bar{a}_{C2C1}^{\tau} + \bar{a}_{C2C1}^{\kappa}\,,$$

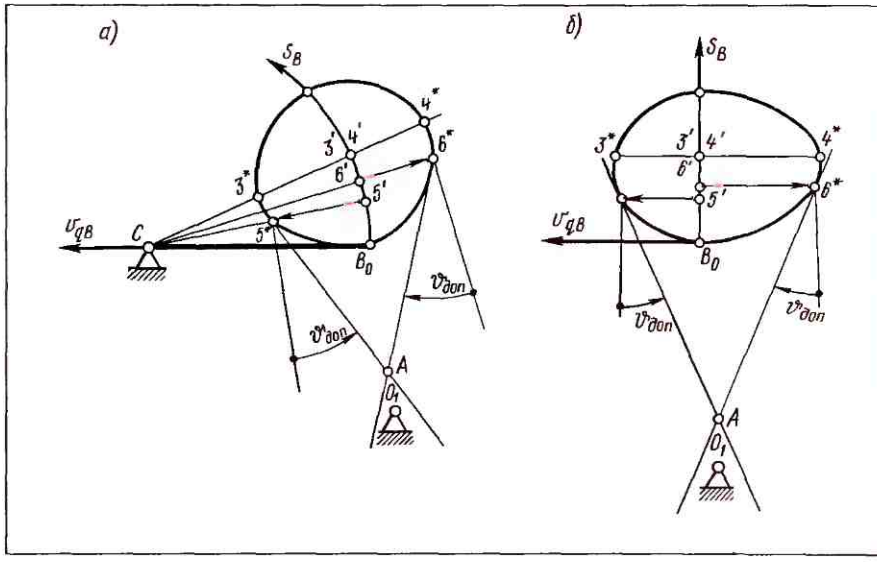


Рис. 17.11

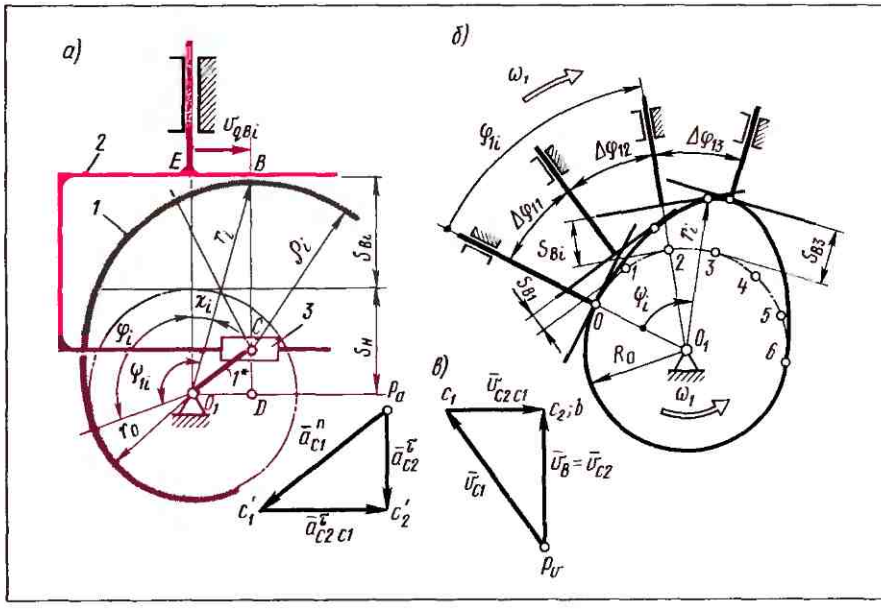


Рис. 17.12

в котором $\bar{a}^{\kappa}_{C2C1} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{C2C1} = 0$. Из подобия треугольников следует

$$\frac{OC}{a^n_{C1}} = \frac{CD}{a^{\tau}_{C2}}, \quad \text{или} \quad l_{CD} = a^{\tau}_{C2}\frac{l_{OC}}{a^n_{C1}} = \frac{a^{\tau}_{C2}}{\omega_1^2} = a^{\tau}_{qC2},$$

т. е. расстояние между точками C и D численно равно передаточной функции ускорения точки C_2 (или B) толкателя *2*:

$$a^{\tau}_{qC2} = a^{\tau}_{qB} = a^{\tau}_{C2}/\omega_1^2 = l_{CD}.$$

Следовательно, соотношение (17.16) можно записать так:

$$\rho_i = r_0 + S_{Bi}(\varphi_1) + a^{\tau}_{qBi}(\varphi_1)$$

или разрешить его относительно радиуса r_0 начальной окружности кулачка:

$$r_0 = \rho_i - S_{Bi}(\varphi_1) - a^{\tau}_{qBi}(\varphi_1).$$

В частном случае при $\rho_i = 0$ и $a^{\tau}_{qBi} = a^{\tau}_{qB\max}$ при $S_{Bi} = H$ значение радиуса r_0 минимально.

§ 17.6 Определение координат профиля дисковых кулачков

В технической документации или на рабочих чертежах необходимо приводить данные о координатах профиля кулачка. Координаты рассчитываются либо для центрового, либо для конструктивного профилей в зависимости от технологии изготовления кулачков.

Если размер ролика отличается от размеров инструмента — фрезы или шлифовального круга, то рассчитывают координаты технологического профиля, определяющего положение оси инструмента, необходимое для настройки станка, например с числовым программным управлением. Для контроля точности профиля рассчитывают координаты измерительного профиля, соответствующего размерам индентора измерительной машины.

Координаты центрового профиля дискового кулачка с поступательно движущимся толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 17.13, *а*. Координаты текущей точки B_i на центровом профиле: в полярной системе координат r_i и ψ_i; в декартовой подвижной системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)}$, связанной с кулачком *1*: $x^{(1)}_{Bi}$, $y^{(1)}_{Bi}$.

Координаты текущей точки C_i на конструктивном профиле: в полярной системе координат R_{Ci} и $\psi_{Ci} = \psi_i + \gamma_i$; в декартовой системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)} - x^{(1)}_{Ci}$, $y^{(1)}_{Ci}$ (на чертеже не обозначены). Габаритные размеры r_0, R_p, $S_н$, e принимают заданными или вычисленными ранее. Перемещение толкателя (S_{Bi} — текущее значение и H — ход толкателя) заданы в функции обобщенной координаты φ_1 либо в аналитической форме, либо в форме массива (таблицы) значений.

Анализируя расчетную схему (рис. 17.13, *а*), можно записать следующие соотношения:

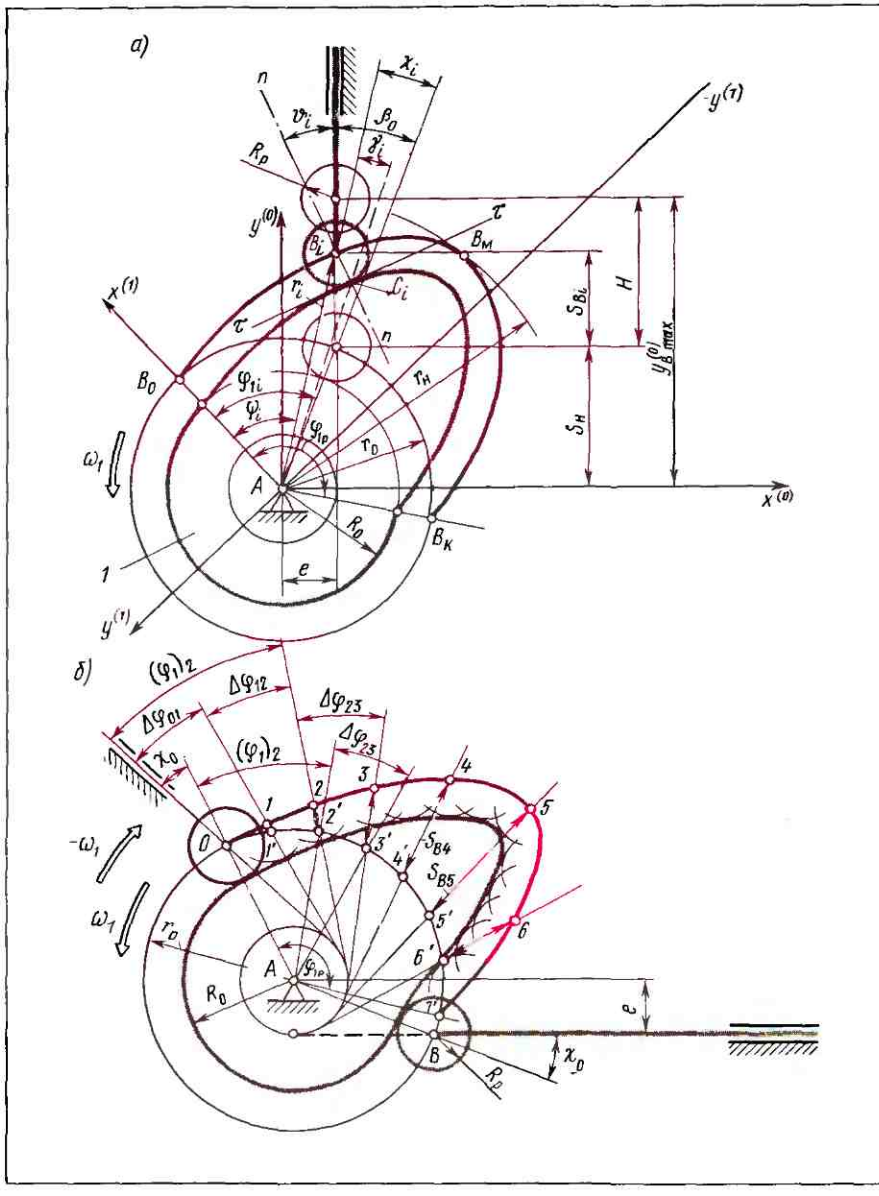

а)
n
ϑ_i
χ_i
β_0
γ_i
$R_р$
$y^{(1)}$
τ
B_i
$B_м$
$y^{(0)}$
r_i
C_i
$x^{(1)}$
S_{Bi}
H
$y^{(0)}_{B\,max}$
B_0
φ_{1i}
φ_i
$r_н$
$S_н$
ω_1
φ_{10}
r_0
A
$x^{(0)}$
R_0
$B_к$
e
1
$y^{(1)}$
б)
$(\varphi_1)_2$
$\Delta\varphi_{12}$
$\Delta\varphi_{23}$
$\Delta\varphi_{01}$
χ_0
$(\varphi_1)_2$
$\Delta\varphi_{23}$
1
2
3
4
5
6
0
1'
2'
3'
4'
5'
6'
$-\omega_1$
S_{B4}
S_{B5}
ω_1
r_0
A
φ_{10}
R_0
7'
e
B
χ_0
R_0

Рис. 17.13

координаты точки B_i на центровом профиле:

$$r_i = \sqrt{e^2 + (S_н + S_{Bi})^2}\,; \tag{17.17}$$

$$r_н = \sqrt{e^2 + (S_н + H)^2} \tag{17.18}$$

(следует учитывать, что при переходе от системы координат $x^{(2)}B_0y^{(2)}$ к системе $x^{(1)}Ay^{(1)}$ меняется знак смещения: $e^{(1)} = -e^{(2)}$);

$$\beta_0 = \operatorname{arctg}(e/S_н)\,;$$

$$\chi_i = \operatorname{arctg}[(S_н + S_{Bi})/e] - \operatorname{arctg}(S_н/e)\,. \tag{17.19}$$

При отсчете углов по часовой стрелке от оси $Ax^{(1)}$ (см. рис. 17.12, *а*) и смещении оси толкателя $e > 0$:

$$\psi_i = \varphi_{1i} - \chi_i\,; \tag{17.20}$$

$$x_{Bi}^{(1)} = r_i \cos\psi_i\,; \tag{17.21}$$

$$y_{Bi}^{(1)} = -r_i \sin\psi_i\,. \tag{17.22}$$

Координаты точки C_i на конструктивном профиле:

$$\vartheta_i = \operatorname{arctg}[(v_{qBi} - e)/(S_н + S_{Bi})]\,; \tag{17.23}$$

$$R_{Ci} = \sqrt{R_р^2 + r_i^2 - 2R_р r_i \cos(\vartheta_i + \beta_0 - \chi_i)}\,; \tag{17.24}$$

$$\gamma_i = \arccos[(r_i^2 + R_{Ci}^2 - R_р^2)/(2r_i R_{Ci})]\,; \tag{17.25}$$

$$\psi_{Ci} = \psi_i + \gamma_i\,; \tag{17.26}$$

$$x_{Ci}^{(1)} = R_{Ci}\cos\psi_{Ci}\,; \tag{17.27}$$

$$y_{Ci}^{(1)} = -R_{Ci}\sin\psi_{Ci}\,. \tag{17.28}$$

Расчеты координат по формулам (17.17) — (17.28) проводят с использованием ЭВМ и стандартных подпрограмм из математического обеспечения системы автоматизированных расчетов по курсовому проектированию.

Частные случаи профилей дискового кулачка. В практике проектирования широко используют кулачковые механизмы без смещения оси толкателя ($e = 0$). В этом случае формулы (17.11) — (17.14) приобретают частный вид:

$$r_i = r_0 + S_{Bi}\,; \tag{17.29}$$

$$\beta_i = 0\,; \tag{17.30}$$

$$\psi_i = \varphi_{1i}\,. \tag{17.31}$$

Для некоторых законов движения толкателя (например, движение с постоянными скоростью, ускорением и углом давления) уравнение профиля легко выразить в аналитической форме.

Так, для случая движения толкателя с постоянной скоростью ($v_B = \text{const}$) кинематическая передаточная функция скорости $v_{qB} = v_B/\omega_1$ является величиной постоянной, а перемещение толкателя определяется соотношением

$$S_B = \int_{\varphi_{10}} v_{qB}\,d\varphi_1 = \frac{v_B}{\omega_1}\varphi_{1i}\,.$$

Подставляя это соотношение в формулы (17.29) и (17.31), имеют

$$r_i = r_0 + (v_B/\omega_1)\psi_i . \qquad (17.32)$$

Соотношение (17.32) является уравнением архимедовой спирали.

Для случая движения толкателя с постоянным ускорением ($a_B^r = \text{const}$) кинематическая передаточная функция ускорения ($a_{qB}^r = a_B^r/\omega_1^2$) является величиной постоянной, а перемещение толкателя определяется в результате двойного интегрирования:

$$S_B = \int\limits_{\varphi_{10}}\int\left(\frac{a_B^r}{\omega_1^2}\right) d\varphi_1^2 = \frac{a_B^r}{\omega_1^2}\frac{\varphi_{1t}^2}{2} .$$

Подставляя это соотношение в формулы (17.29) и (27.31), имеют

$$r_i = r_0 + (a_B^r/\omega_1^2)\psi_i^{\,2}/2 . \qquad (17.33)$$

Это уравнение кривой 2-го порядка.

Для случая передачи движения от кулачка к ролику с постоянным углом давления ϑ формула (17.23) приобретает частное значение:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_{qB}}{S_u + S_{Bi}} = \frac{v_B}{\omega_1(r_0 + S_{Bi})} = \frac{v_B}{\omega_1 r_i} = \frac{\omega_1 dS_B/d\varphi_1}{\omega_1 r_i} = \frac{dr_i}{r_i d\varphi_1} ,$$

или

$$dr_i/r_i = \operatorname{tg}\vartheta\, d\varphi_1 . \qquad (17.34)$$

Принимая $\vartheta = \vartheta_{доп}$, после интегрирования уравнения (17.34) получают уравнение профиля:

$$r_i = r_0 e^{\psi_i \operatorname{tg}\vartheta_{доп}} . \qquad (17.35)$$

Соотношение (17.35) является уравнением логарифмической спирали.

Графический метод профилирования. В этом случае используют метод обращения движения, описанный в гл. 3.

Построение выполняют в такой последовательности (рис. 17.13, *б*). Вычерчивают окружности радиусами e, r_0 и $R_0 = r_0 + R_р$ с общим центром в точке A. На начальной окружности радиуса r_0 выбирают начальную точку *0* профиля и отмечают дуговые шаги *0 1′*, *1′2′*, *2′3′*, ... , равные $\Delta\varphi_1 r_0$ в соответствии с заданным углом $\varphi_{1р}$ рабочего профиля и выбранным числом N шагов ($\Delta\varphi_1 = \varphi_{1р}/N$). Через отмеченные точки *1′*, *2′*, *3′* проводят положения *1′1; 2′2; 3′3; 4′4;* ... оси толкателя в обращенном движении стойки ($-\omega_1$) с учетом направления вращения кулачка. Эти линии проходят через точки *0*, *1′*, *2′*, *3′*, ... касательно к окружности, радиус которой равен величине смещения e. Сумма углов $\Delta\varphi_{01} + \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \ldots$ равна заданному углу $\varphi_{1р}$. В направлении относительного движения толкателя от начальной окружности (точки *0*, *1′*, *2′*, *3′*, ...) откладывают с учетом

масштаба длины звеньев величины перемещений S_{Bi} толкателя: отрезки *1'1, 2'2', 33', ...* .

Через точки *0, 1, 2, 3 ...* проводят плавную кривую, являющуюся центровым профилем кулачка. Конструктивный профиль получают как огибающую относительных положений ролика, ось которого последовательно движется по центровому профилю (рис. 17.13, *б*).

Координаты центрового профиля дискового кулачка с вращающимся толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 17.14, *а*. Координаты текущей точки B_i на центровом профиле кулачка обозначены: в полярной системе координат r_i и ψ_i, в декартовой системе $O_1x^{(1)}y^{(1)}$ — $x_B^{(1)}$ и $y_B^{(1)}$ (ось $O_1x^{(1)}$ направлена через начальную точку профиля).

Радиус r_i текущей точки B_i на центровом профиле кулачка выражают из $\triangle O_1C_iB_i$ по теореме косинусов:

$$r_i = \sqrt{a^2 + l_2^2 - 2al_2\cos\varphi_{2i}}\,, \tag{17.36}$$

где

$$\varphi_{2i} = \varphi_{20} + \beta_i\,; \tag{17.37}$$

$$\beta_i = S_{Bi}/l_2\,; \tag{17.38}$$

$$\varphi_{20} = \arcsin[(r_0/l_2)\sin\psi_0]\,; \tag{17.39}$$

$$\psi_0 = \arccos[(a^2 + r_0^2 - l_2^2)/(2ar_0)]\,. \tag{17.40}$$

Полярный угол ψ_i текущей точки B_i на центровом профиле кулачка:

$$\psi_i = \varphi_{1i} - \chi_i, \tag{17.41}$$

где

$$\chi_i = \psi_0 - \arcsin[(l_2/r_0)\sin\varphi_{2i}]. \tag{17.42}$$

Декартовы координаты текущей точки B_i выражают через полярные координаты:

$$x_B^{(1)} = r_i\cos\psi_i; \qquad y_B^{(1)} = -r_i\sin\psi_i.$$

При графическом методе профилирования используют метод обращения движения, т. е. вращают стойку (линию CO_1) (рис. 17.14, *б*) относительно неподвижного кулачка *1*. Для ряда фиксированных положений CO_1 линии стойки: *0, 1, 2, 3, 4, ...*, определяемых числом шагов $\Delta\varphi_1 = \varphi_{1p}/N$, находят на окружности радиуса r_0 методом засечек размером l_2 (длина толкателя) точки *0, 1, 2, 3, ...*, от которых откладывают дуги *11', 22', 33'*, изображающие в масштабе чертежа перемещения S_{B1}, S_{B2}, S_{B3}, ... оси *B* ролика толкателя. Точки *0, 1', 2', 3', ...* соединяют кривой, являющейся центровым профилем кулачка. Выбрав радиус ролика R_p, графически строят конструктивный профиль кулачка, как огибающую относительных положений ролика, ось которого занимает последовательные положения на центровом профиле.

Выбор радиуса R_p ролика. Радиус R_p ролика в силовых механизмах назначают по условию контактной прочности, т. е. с учетом

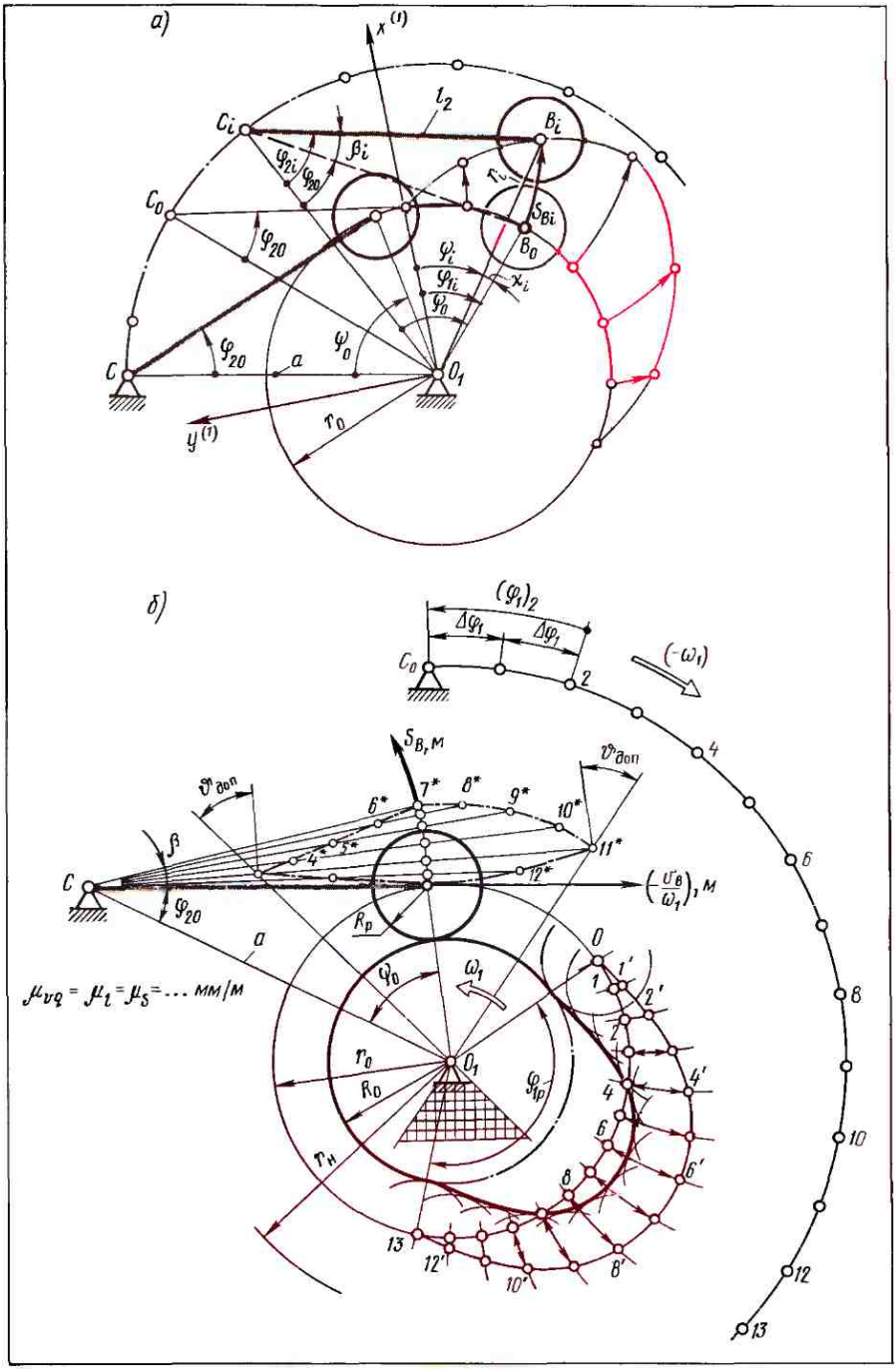

а)
б)
$x^{(1)}$
$y^{(1)}$
C_i
C_0
B_i
B_0
t_2
β_i
φ_{2i}
φ_{20}
S_{Bi}
ψ_i
φ_{1i}
φ_0
x_i
ψ_0
C
a
O_1
r_0
$(\varphi_1)_2$
$\Delta\varphi_1$
$(-\omega_1)$
$S_B, м$
$v_{B\,доп}$
β
$\left(\frac{v_B}{\omega_1}\right), м$
R_p
ω_1
R_0
$r_н$
φ_{1p}
$\mu_{vq} = \mu_l = \mu_S = \ldots$ мм/м

Рис. 17.14

ширины ролика, механических свойств материалов рабочих поверхностей ролика и кулачка и заданной долговечности. В кинематических передачах геометрическим ограничением являются допустимые ошибки положения и отсутствие самопересечения конструктивного профиля, когда радиус ролика ошибочно назначают больше, чем минимальный радиус кривизны на какомлибо участке центрового профиля (рис. 17.15). Подобное самопересечение профиля показано на рис. 17.15 для профиля *4* при $R_{р4}>\rho_{min}$. При $R_{р3}=\rho_{min}$ на конструктивном профиле имеет место теоретическое заострение профиля ($\rho_1=0$). При выполнении условия $R_{р2}<\rho_{min}$ кривизна конструктивного профиля во всех точках не достигает предельного значения. На практике принимают $R_р \leqslant 0{,}7\rho_{кmin}$, назначая конкретные значения в соответствии со стандартным рядом диаметров и длин в машиностроении (ГОСТ 6636—69). Кроме того, радиус ролика ограничивают условием

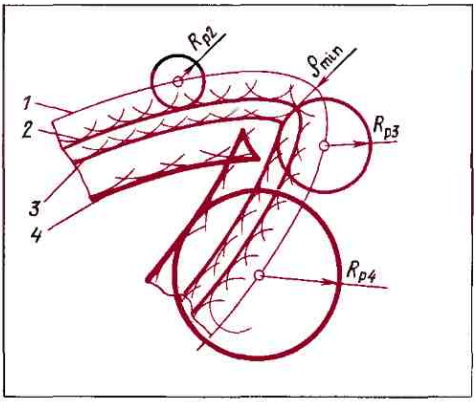


Рис. 17.15

$$R_р \leqslant 0{,}4r_0.$$

Координаты дискового кулачка с плоским толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 17.12, *а*. Полярные координаты текущей точки B_i на профиле кулачка обозначены r_i и ψ_i. Смещение BE контактной точки B относительно оси толкателя легко находят из подобия $\triangle CO_1D$ на схеме механизма и треугольника на плане скоростей (см. рис. 17.12, *в*), построенному согласно векторному уравнению: $\bar{v}_B=\bar{v}_{C2}=\bar{v}_{C1}+\bar{v}_{C2C1}$.

Точка D совпадает с полюсом P зацепления высшей кинематической пары: $O_1D/v_B=CO_1/v_{C1}$, откуда $BE=O_1D=v_B/\omega_1=v_{qB}$, т. е. расстояние BE численно равно кинематической передаточной функции v_{qB} скорости толкателя.

Угол χ_i смещения контактной точки B_i находят из соотношения

$$\operatorname{tg}\chi_i=\frac{BE}{EO_1}=\frac{v_{qBi}}{S_{Bi}+S_{Bi}}=\frac{v_{qBi}}{r_0+S_{Bi}}.$$

Полярные координаты:

$$\psi_i=\varphi_{1i}+\chi_i; \qquad r_i=\sqrt{(r_0+S_{Bi})^2+v_{qBi}^2}.$$

При графическом способе профилирования используют метод обращенного движения стойки относительно неподвижного кулачка (см. рис. 17.12, *б*).

От начального положения стойки O_10 откладывают углы $\Delta\varphi_{11}$, $\Delta\varphi_{12}$, $\Delta\varphi_{13}$ поворота стойки при ее вращении в направлении, противоположном вращению кулачка. От начальной окружности радиуса R_0 в направлении перемещения толкателя откладывают от точек *1, 2, 3, 4, ...* в соответствующем масштабе перемещения S_{B1}, S_{B2}, S_{B3}, ... толкателя, заданные таблицей или графиком перемещений, и вычерчивают положение башмака (тарелки) толкателя. Огибающая семейства прямых (положений башмака) является конструктивным профилем кулачка (т. е. $R_i = r_i$).

§ 17.7 Механизмы с цилиндрическими кулачками

В технологических машинах-автоматах и полуавтоматах широкое применение получили кулачки *1*, выполненные в форме цилиндров (или барабанов), имеющих паз и совершающих вращательное движение с угловой скоростью ω_1 (рис. 17.16, *а*). Толкатель *2* совершает либо поступательное (см. рис. 17.2, *в, г*), либо вращательное движение.

При графическом профилировании используют развертку цилиндра кулачка на плоскость (рис. 17.16, *б*). Используя метод обращения движения, считают, что развертка неподвижна, а ось C качания толкателя *2* движется со скоростью $\bar{v}_C = -\bar{v}_{B1}$, где $v_{B1} = \omega_1 r_1$ — скорость точки центрового профиля на барабане. Заданные перемещения оси B ролика откладывают по дугам S_{Bi}, S_{Bk}, ... радиуса $l_2 = l_{BC}$. Наибольший подъем толкателя — ход H также откладывают по дуге радиуса l_2.

Угол ϑ между вектором скорости толкателя $\bar{v}_{B2}$ и нормалью $n—n$ к профилю кулачка на развертке является углом давления. В векторном треугольнике скоростей углы χ_1 и χ_2 выражают в следующем виде: $\chi_1 = \vartheta + \beta_i$; $\chi_2 = 90° - \chi$. По теореме синусов записывают соотношение:

$$v_{B1}/\sin\chi_2 = v_{B2}/\sin\chi_1, \quad \text{или} \quad \omega_1 r_1/\cos\vartheta = v_{B2}/\sin(\vartheta + \beta_i).$$

Так как: $\sin(\vartheta + \beta_i) = \sin\vartheta\cos\beta_i + \cos\vartheta\sin\beta_i$, то после подстановки получают

$$r_1 = \frac{v_{B2}/\omega_1}{\operatorname{tg}\vartheta\cos\beta_i + \sin\beta_i} = \frac{v_{qB2}}{\operatorname{tg}\vartheta\cos\beta_i + \sin\beta_i}. \qquad (17.43)$$

Ограничивая угол давления ϑ по условию $\vartheta \leqslant \vartheta_{доп}$, можно вычислить (или построить графически) изменение величины $r_1(\beta_i)$ и принять ее наибольшее значение за минимальный радиус цилиндрического кулачка, обеспечивающий работу механизма без заклинивания. Частным случаем является механизм, в котором толкатель перемещается поступательно. В этом случае кривая профиля кулачка на развертке аналогична графику перемещения толкателя при равенстве соответствующих масштабов. Угол β_i в любом поло-

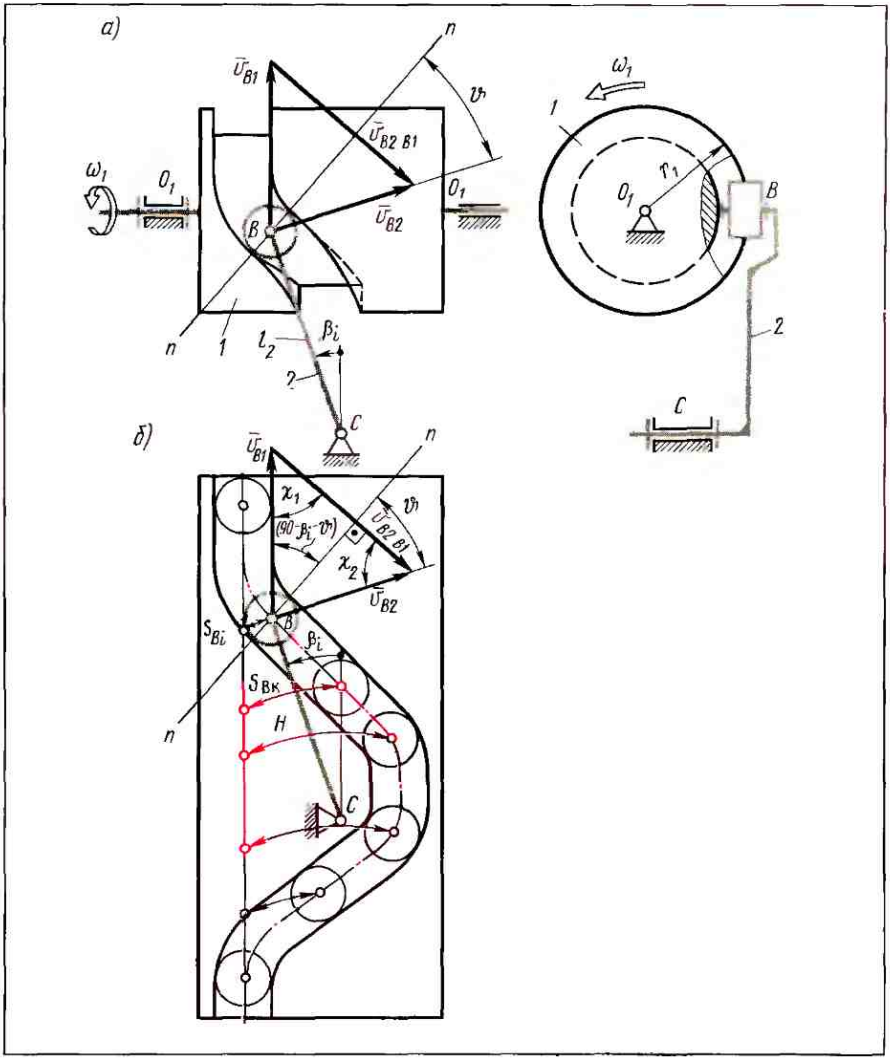

а)
n
$\bar{v}_{B1}$
ϑ
$\bar{v}_{B2\,B1}$
ω_1
O_1
B
$\bar{v}_{B2}$
O_1
n
1
l_2
β_i
2
C
ω_1
1
r_1
O_1
B
2
C
б)
$\bar{v}_{B1}$
n
χ_1
$(90-\beta_i-\vartheta)$
ϑ
$\bar{v}_{B2\,B1}$
χ_2
$\bar{v}_{B2}$
S_{Bi}
B
β_i
S_{BK}
H
n
C

Рис. 17.16

жении равен нулю и выведенное выше соотношение (17.43) принимает частное значение:

$$r_1 = \frac{v_{B1}/\omega_1}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{v_{qB2}}{\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Из последнего соотношения следует $r_{1\min} = v_{qB2\max}/\operatorname{tg}\vartheta_{\text{доп}}$.

§ 17.8 Влияние упругости звеньев кулачкового механизма на закон движения толкателя и форму профиля кулачка

При синтезе быстроходных кулачковых механизмов приходится учитывать характеристики реальных звеньев, которые отличаются от характеристик абсолютно твердых тел. Например, низкая жесткость, значительные массы и высокие ускорения при движении звеньев газораспределительных механизмов ДВС (см. рис. 17.1, *ж, з* и 17.17, *а*) приводят к возникновению упругих колебаний, которые накладываются на закон движения выходных звеньев. Считается, что в этом механизме по крайней мере четыре звена обладают податливостью: распределительный вал *1*, штанга *2*, коромысло *3* и клапан *4* с клапанной пружиной (рис. 17.17, *а*). В период, когда клапан *4* закрыт, все звенья механизма разгружены и можно принять, что каждый следующий

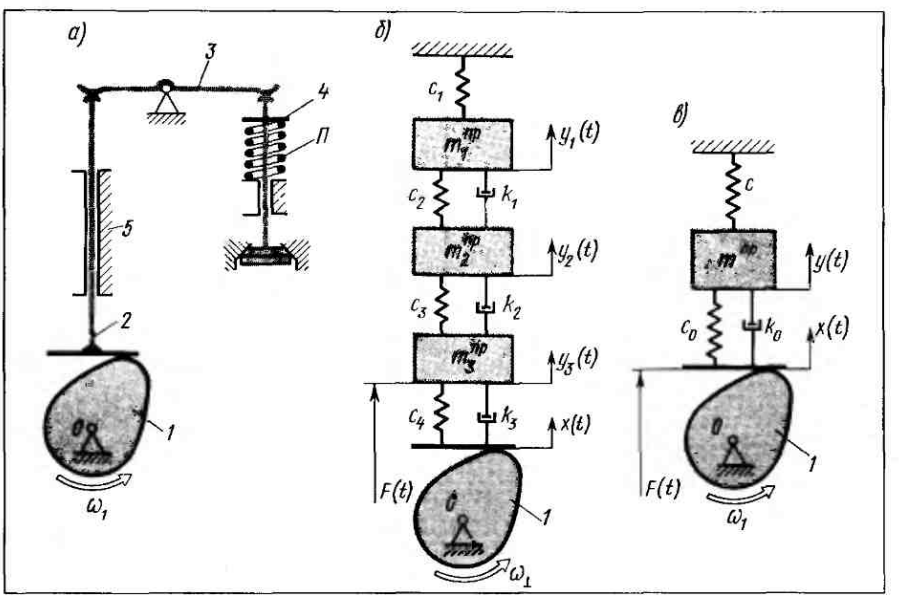


Рис. 17.17

подъем ведомых звеньев не связан с предыдущим и не зависит от него.

При выборе динамической модели механизма, которая отражала бы влияние упругости звеньев реального механизма, стремятся учесть инерционные свойства механизма в форме конечного числа приведенных масс, которые соединены безынерционными геометрическими, кинематическими или упругодиссипативными связями. На рис. 17.17 показаны две динамические модели: трехмассная (рис. 17.17, *б*) и одномассная (рис. 17.17,*в*), отличающиеся уровнем идеализации рассматриваемого механизма.

При приведении масс и моментов инерции звеньев к той или иной модели стремятся сохранить баланс кинетической энергии. При учете упругости звеньев эта задача решается приближенно. При трехмассной модели к массе $m_1^{\text{пр}}$ относят массу клапана m_4, треть массы клапанных пружин и часть массы от момента инерции коромысла. При расчете массы $m_2^{\text{пр}}$ учитывают одну треть массы штанги *2*, оставшуюся часть массы от момента инерции коромысла. При расчете массы $m_3^{\text{пр}}$ учитывают оставшиеся две трети массы штанги *2*, массу башмака и часть массы распределительного вала, соответствующую участку между соседними опорами.

При одномассной динамической модели (рис. 17.17, *в*) масса $m^{\text{пр}}$ учитывает инерционные характеристики всех звеньев механизма, приведенные к одной точке с учетом соответствующих кинематических передаточных функций.

Аналогичные рассуждения проводят относительно коэффициентов жесткости c_1, c_2, c_3, c_4 в трехмассной модели, c_0 и c — в одномассной модели и соответствующих коэффициентов демпфирования k_1, k_2, k_3, и k_0. Коэффициенты жесткости c_1 и c соответствуют коэффициенту жесткости клапанной пружины; c_2 — коэффициенту жесткости коромысла; c_3 — приведенному коэффициенту жесткости штанги *2*; c_4 — приведенному коэффициенту жесткости участка распределительного вала; c_0 — приведенной жесткости механизма. Для упрощения расчетной схемы коэффициенты демпфирования k принимают в первом приближении равными нулю.

Вынужденные колебания масс в трехмассной системе описываются следующей системой дифференциальных уравнений (верхний индекс «пр» у приведенных масс опущен для краткости записи):

$$m_1\ddot{y}_1+(c_1+c_2)y_1-c_2y_2=0;$$

$$m_2\ddot{y}_2-c_2y_1+(c_2+c_3)y_2-c_3y_3=0;$$

$$m_3\ddot{y}_3-c_3y_2+(c_3+c_4)y_3=F(t).$$

В правой части последнего уравнения функция $F(t)$ описывает изменение возбуждающей силы, учитывающей силу предварительной затяжки клапанных пружин, силу упругости вследствие перемещения ведомого звена, задаваемого профилем кулачка.

Вынужденные колебания массы m в одномассной системе описываются дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y}+k_0\dot{y}+(c_0+c)y=F(t).$$

Если ординаты y_1, y_2, y_3 и y соответствуют перемещениям звена приведения за счет упругости звеньев, а ордината $x(t)$ соответствует номинальному перемещению за счет профиля кулачка, то разность соответствующих величин выражает деформацию $z(t)$ звеньев кинематической цепи механизма. Например, для одномассной модели:

$$z(t)=x(t)-y(t).$$

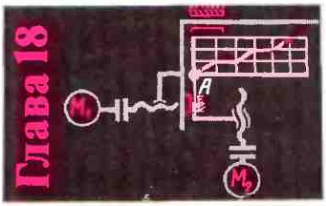
Решение написанных дифференциальных уравнений при произвольном виде функции $F(t)$ проводят одним из численных методов с использованием ЭВМ.

Не приводя в учебнике подробных выкладок, можно остановиться только на важнейших выводах, которые характеризуют динамические качества кулачкового механизма с учетом упругости звеньев.

В момент разрыва кинематической цепи (при $z\leqslant 0$) штанга *2* отрывается от кулачка *1*, возникают дополнительные динамические нагрузки на звенья и клапан *4* становится неуправляемым. При интенсивных отрывах наблюдается повторный отскок клапана за счет ударного восстановления контакта. Все эти явления являются нежелательными и их следует устранять на стадии проектирования профиля кулачка.

Упругие колебания вызывают изменение действительной скорости в момент посадки клапана на седло, по сравнению со скоростью, определяемой профилем кулачка. Это приводит к преждевременной посадке клапана на седло или к повторному отскоку клапана.

Особое внимание при синтезе следует уделять выбору величин положительных ускорений толкателя, соответствующих концевым участкам профиля кулачка, так как эти участки вызывают наибольшие расчетные деформации в механизме. Наибольшая амплитуда упругих колебаний соответствует концу участка положительных ускорений и она возрастает с увеличением частоты вращения распределительного вала, так как максимальное ускорение связано с частотой вращения квадратичной зависимостью.



Управление движением системы механизмов

Совокупность механизмов, соединенных между собой определенным образом и предназначенных для выполнения взаимосогласованных движений, подчиненных общим для данной совокупности закономерностям, называют системой механизмов. Система механизмов является основой практически любых современных машин. Разнообразные механизмы обеспечивают требуемое движение звеньев, связанное с преобразованием энергии, состояния, свойств или положения объектов и материалов, с управлением, контролем и регулированием движения рабочих органов машины. Системы механизмов бывают достаточно сложными.

В любой системе механизмов должны быть согласованы параметры функционирования, т. е. положения, скорости и ускорения исполнительных звеньев отдельных механизмов, управляющих и контролирующих устройств. Достижение требуемой цели путем преднамеренного управляющего воздействия на объект или систему называют управлением. Совокупность предписаний (т. е. последовательность и содержание команд), обеспечивающих заданное функционирование системы механизмов, называют программой управления или алгоритмом управления.

§ 18.1 Система программного управления движением механизмов

К системе программного управления относят средства, на которые возложена задача управления работой в заданном режиме функционально взаимосвязанных механизмов. Совокупность средств программного управления, участвующих в выработке по заданной программе управляющих воздействий на исполнительные органы машины и другие механизмы, включает *технические средства* (приводы, аппараты электроавтоматики, измерительные преобразователи, устройства контроля, адаптации и диагностики, вычислительно-логические устройства, каналы связи и т. п.) и *программное обеспечение*, осуществляющее организацию процесса управления и реализацию задач управления применительно к конкретной системе механизмов. Для примера на рис. 18.1 представлена принципиальная схема системы механизмов технологической машины, на которой выделены механизмы, предназначенные для обеспечения функционирования машины и выполнения совокупности действий, необходимых для обработки заготовки (материала) и получения изделия с заданными параметрами.

Система, обеспечивающая согласованность перемещений всех исполнительных органов в соответствии с заданной программой управления, называется *системой управления машин*. Если система управления обеспечивает требуемую согласованность

движения всех исполнительных устройств в зависимости от времени, то ее называют системой управления машины по времени. Если система управления обеспечивает требуемую согласованность движения всех исполнительных устройств в зависимости от их положения, то ее называют системой управления машины по пути.

В *системе автоматического управления* (САУ) все управляющие воздействия осуществляются без непосредственного участия человека. При *полуавтоматическом и ручном управлении* управляющие воздействия выполняются или вырабатываются с участием человека-оператора.

По виду начальной (априорной) информации, включаемой в программу управления механизмами, САУ разделяют на две группы: с полной и неполной начальной информацией (рис. 18.2). В первом случае заданная программа является неизменной («жесткой») и выполняется независимо от получаемых результатов. Только в экстремальных условиях ее выполнение может быть приостановлено, если по каким-либо причинам контролируемые параметры достигли пороговых (предельно допустимых) значений.

Во втором случае с целью оптимального управления неполная начальная информация дополняется текущей информацией, вырабатываемой с помощью различных измерительных и контролирующих устройств и датчиков и используемой для корректировки программы управления. Такие САУ могут быть *самоприспособляющимися* (адаптивными), *самонастраивающимися, самоорганизующимися* и *самообучающимися* (рис. 18.2).

В самоприспособляющихся системах оптимальное управление обеспечивается за счет изменения только управляющего воздействия. Например, в системах управления металлорежущими станками самоприспособляющиеся устройства обеспечивают автоматическое приспособление режима работы станка к изменяющимся условиям обработки: снижают продольную подачу суппорта с целью уменьшения прогиба обрабатываемой заготовки, когда текущее значение силы резания превысит заданное пороговое значение.

Адаптивные системы имеют датчики, позволяющие получать информацию от внешней среды и в зависимости от этой информации осуществлять те или иные движения. Например, адаптивные роботы снабжены помимо основной программы дополнительными подпрограммами, позволяющими роботу ориентироваться в окружающей обстановке и изменять режим работы с помощью *обратной связи.*

В более сложных системах управления достаточно задать конечную цель работы. Используя ЭВМ и информацию о состоянии машины, такие САУ логически оценивают ситуацию и находят оптимальное решение с учетом конкретной обстановки в соответствии с разработанными алгоритмами поиска.

Перечень функций конкретной системы программного управления зависит от уровня сложности управляемой системы механиз-

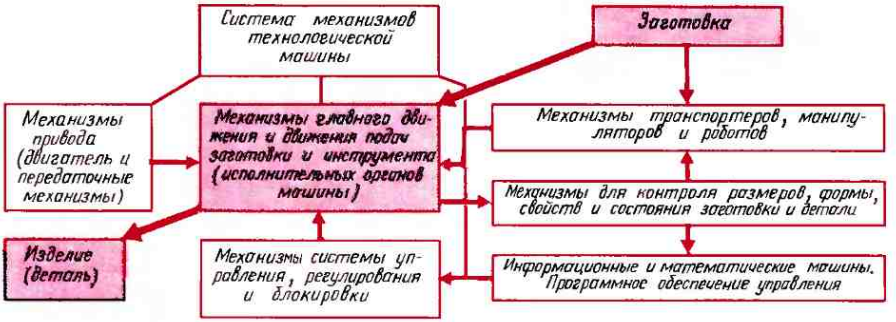


Рис. 18.1

мов. Например, системы числового программного управления металлообрабатывающим оборудованием (станками) в зависимости от функциональных возможностей (количества осей координат) подразделяют на системы:

для станков с прямоугольным формообразованием по одной оси координат;

для станков с контурным формообразованием по двум или трем осям координат;

для обрабатывающих центров и станков со сложным объемным формообразованием по четырем-пяти осям координат;

для тяжелых и уникальных станков и станочных модулей со специальными задачами управления по десяти—двенадцати осям координат.

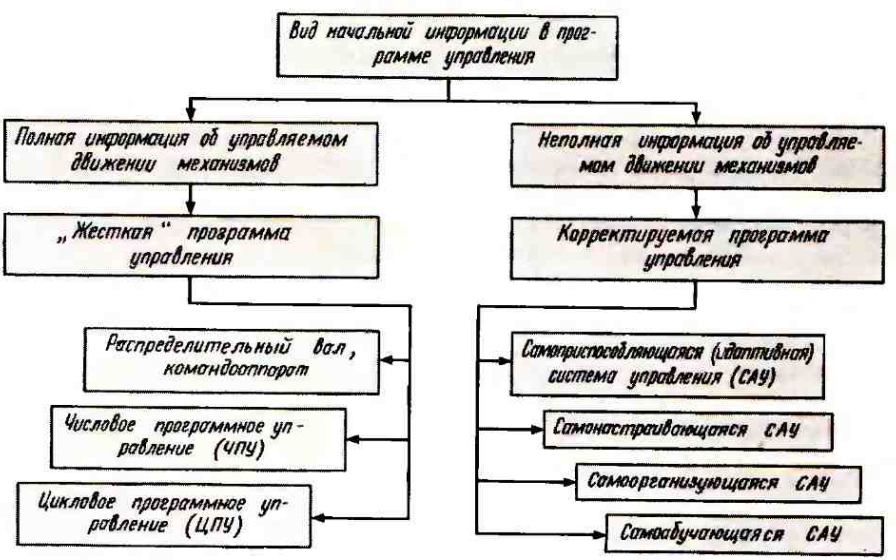


Рис. 18.2

Компоненты устройств, входящих в систему программного управления (СПУ), по своему информационному назначению подразделяют на ранги определенных уровней, которые связаны между собой информационными каналами.

На уровне 1-го ранга СПУ формируется информация с помощью соответствующих преобразователей о положении исполнительных органов, о состоянии системы механизмов и параметрах возмущений, действующих в системе, о правильном ходе рабочих процессов и возникающих неполадках и способах их устранения. Например, на металлорежущих станках по информационным каналам 1-го ранга передается информация датчика обратной связи о положении исполнительных органов; датчиков, измеряющих температурные и силовые деформации, силовые параметры процесса резания, текущий износ инструмента, колебания в системе станок — приспособление — инструмент — заготовка, колебания припуска на заготовке, колебания твердости материала.

Уровень 2-го ранга СПУ — это совокупность исполнительных регулируемых приводов и механизмов: основных, осуществляющих программное перемещение исполнительных органов; вспомогательных, выполняющих различного рода вспомогательные команды; дополнительных, предназначенных для корректирующих и подналадочных перемещений.

Уровень 3-го ранга СПУ — это технические средства, входящие в состав системы программного управления, алгоритмы работы которых реализуются схемным путем или с помощью программ, вводимых в их запоминающие устройства.

Уровень 4-го ранга и выше выходит за пределы СПУ конкретного станка, а используется при управлении гибкими производственными системами (ГПС).

По характеру управляющих сигналов САУ разделяют на две группы: дискретные и непрерывные (аналоговые).

В дискретных САУ обязательно наличие устройств, в которых управляющие воздействия изменяются дискретно, т. е. скачками (импульсами) даже при плавном изменении входных величин. Примерами дискретных САУ являются системы, содержащие элементы релейного или импульсного действия. При импульсном действии скачки выходной величины происходят через заданные интервалы времени; при релейном действии — при достижении входной величиной определенных пороговых значений.

Программа в дискретных САУ реализуется в виде совокупности дискретных величин, задаваемых обычно в алфавитно-цифровой форме, зафиксированной на специальных программоносителях (перфорированных картах и лентах, магнитных дисках, лентах и картах или специальных коммутаторах).

Траекторию перемещения звена представляют в виде определенной последовательности элементарных перемещений вдоль координатных осей.

Пример системы механизмов, движение которых осуществляется с помощью дискретных управляющих сигналов, приведен на

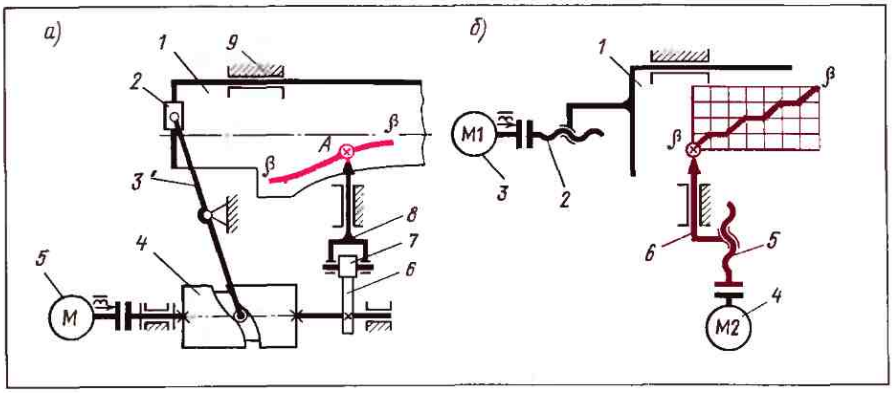


Рис. 18.3

рис. 18.3, *б*. Движение точки *A* по заданной траектории β — β осуществляется с помощью электродвигателей *M1* и *M2*, которые могут вращаться одновременно или иметь остановки. Сложная траектория β — β обеспечивается совместной и согласованной работой двух винтовых механизмов с винтами *2* и *5*, получающими вращение от электродвигателей *3* и *4* в соответствии с программой управления. Характерный вид подобной траектории показан на рис. 18.3, *б* при движении звена из начальной точки с координатами $x_{Aн}$, $y_{Aн}$ до конечной точки с координатами $x_{Aк}$, $y_{Aк}$. Последовательность управляющих воздействий для перемещения по осям координат в соответствии с функциональной связью между координатами опорных точек, заданных программой управления, вырабатывается с помощью специальных вычислительных устройств, например, интерполяторов в системах числового программного управления.

В аналоговых САУ значения непрерывных сигналов являются непрерывными функциями времени, которые реализуются в виде изменения каких-либо физических элементов. Примерами аналоговых САУ являются системы с кулачками, распределительными валами, с устройствами изменения угла сдвига по фазе двух напряжений и т. д.

Пример системы механизмов с аналоговой системой управления приведен на рис. 18.3, *а*. Движение точки *A* по заданной траектории β — β осуществляется в результате сложения перемещений: звена *1* (например, продольное перемещение стола металлообрабатывающего станка) и звена *8* (перемещение суппорта), осуществляемых посредством цилиндрического кулачка *4* и вращающегося толкателя *3* и дискового кулачка *6*, в контакте с которым находится ролик *7*, закрепленный на поступательно движущемся толкателе *8*. Источником движения является электродвигатель *5*. В качестве программоносителя в данной системе являются профили кулачков, являющиеся аналогами относительных перемещений звеньев *1* и *8*. Подобные системы управления называют незамкнутыми САУ

с одним априорным потоком информации прямого действия (без усилителей).

Во многих случаях используют *смешанную систему* задания алгоритма управления, в которой часть программы реализуется в аналоговой форме, а часть программы — в числовой форме. Например, смешанный способ задания алгоритма управления используется в ряде станков-автоматов для обработки заготовок.

Управление системой механизмов может быть централизованным, децентрализованным и смешанным.

При централизованном управлении обеспечивается выполнение заранее установленной программы, независимой от положения звеньев тех или иных механизмов. Такое управление осуществляется в функции времени программным управлением. Система механизмов при программном управлении функционирует достаточно надежно, но при ее проектировании предусматривают определенные предохранительные устройства, гарантирующие выключение механизмов, торможение или останов двигателей при перегрузках или аварийных ситуациях. При таком управлении команды подаются от распределительных валов, командоаппаратов или с помощью пультов.

При децентрализованном управлении движением механизмов в функции положения звеньев информация передается от упоров, путевых и конечных переключателей и выключателей или иных датчиков положения или перемещения. Надежность функционирования системы механизмов при децентрализованном управлении зависит от надежности датчиков и других элементов системы управления. Децентрализованное управление может быть также с регулированием по заданным режимам работы (например, по давлению, предельной нагрузке, скорости и т. д.).

При смешанном управлении движением системы механизмов используются отдельные элементы централизованного и децентрализованного управления, что обеспечивает большую надежность и универсальность. При смешанном управлении можно уменьшить количество предохранительных устройств, заменив их установкой датчиков, контролирующих выполнение команд или положение звеньев. Например, при работе автоматической линии при смешанном управлении невыполнение какой-либо команды о перемещении звена в определенное положение фиксируется путевым датчиком, по сигналу которого отключается командоаппарат, вал которого при нормальной работе вращается равномерно. При устранении неисправностей командоаппарат включается, что обеспечивает дальнейшее функционирование системы механизмов по системе программного управления.

При смешанном управлении осуществляется наиболее оптимальное сочетание разнообразных требований, обеспечивающих управление по времени, по положению и перемещению звеньев, по ограничиванию режимов движения звеньев и нагрузок на звенья и в кинематических парах.

Одним из методов программирования промышленных роботов

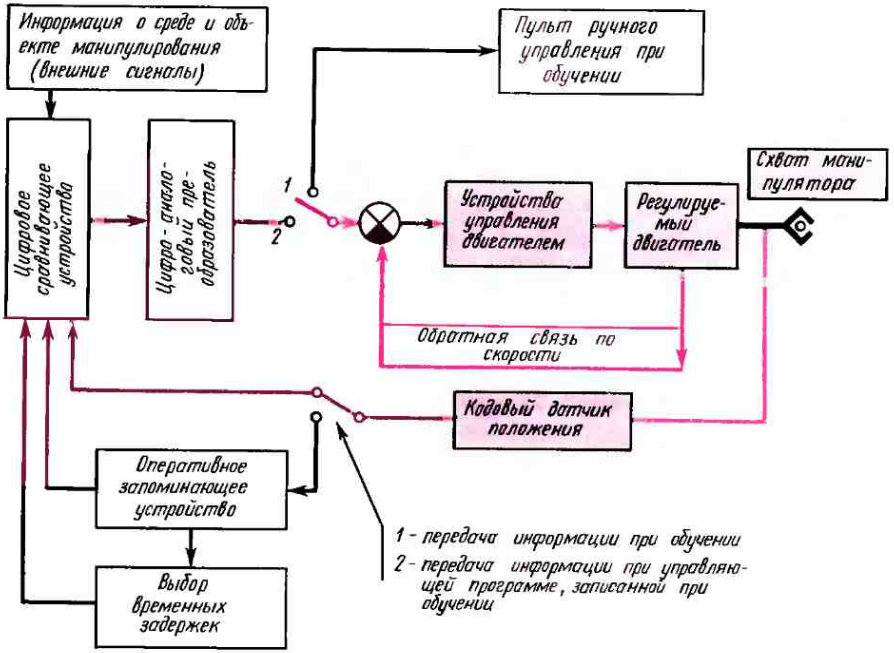


Рис. 18.4

(ПР) является *программирование методом обучения,* при котором в памяти устройств программного управления (УПУ) формируются данные, определяющие автоматическое функционирование ПР в рабочем режиме. Процесс обучения состоит из четырех фаз: приведение системы в требуемое состояние; запоминание состояния систем ПР; преобразование запомненных данных; воспроизведение движения. В процессе обучения формируется либо линейная управляющая программа, либо управляющая программа с ответвлениями, обеспечивающая адаптивное поведение ПР (поисковые движения, контрольные операции, реакции на сбои и отказы и т. п.)

Структуру системы управления движением промышленного робота можно проследить по схеме, приведенной на рис. 18.4, отражающей определенные уровни управления. На первом уровне автоматизированные приводы для всех степеней подвижности обеспечивают движение исполнительных звеньев и механизмов робота в пределах рабочей зоны с помощью управляющих программ по каждому частному циклу. Информация о положении исполнительных звеньев, характеристиках внешней среды и объекта манипулирования вырабатывается датчиками и по каналам обратной связи передается оператору или в специальные устройства более высоких уровней управления для внесения коррективов в движение, если в этом возникает необходимость. Формирование сигналов управления движением приводов и устройствами автоматики обычно осу-

ществляют на втором уровне, обеспечивающем согласование движения звеньев робота во взаимодействии с окружающей средой, т. е. с другими устройствами, в частности с технологическим оборудованием.

При отработке управления программированием ПР методом обучения устройствами памяти (оперативными запоминающими устройствами — ОЗУ) запоминаются все параметры движения, осуществляемого при ручном управлении циклом, и в последующем многократно воспроизводятся в рабочем режиме. В блоке памяти на магнитной ленте или барабане записывается кодовая информация о координатах звеньев для каждой заданной позиции, о скорости движения, о временных задержках, о сигналах об исполнении команд управления, о комбинации и порядке переходов элементарных операций и шагов программы.

В блок памяти также записываются внешние сигналы об обслуживаемой среде (команды передачи и разрешения приема сигналов обслуживаемых устройств, технологического оборудования и т. д.), сигналы о скорости движения, о временных интервалах, о вспомогательных операциях по захвату объекта, о последовательности переходов при выполнении цикла работы и т. п.

Удобство разработки управляющих программ в режиме обучения по сравнению с аналитическим методом программирования заключается в простоте принципа, возможности использования любой системы координат, уточнении позиционирования при наличии зазоров в кинематических парах, податливости звеньев и деформации их под нагрузкой.

Программное управление движением может быть цикловым, позиционным, контурным или комбинированным.

При цикловом управлении задают координаты, скорости и другие параметры, необходимые для выполнения последовательности движения в пределах частных циклов, и временные интервалы между частными циклами. Информация о выполнении частных циклов вырабатывается обычно средствами путевой автоматики для предельных значений по каждой из координат (концевые выключатели и т. п.).

При позиционном управлении задают независимые перемещения по каждой координате, соответствующие требуемой точке рабочей зоны манипулятора.

При контурном управлении обеспечивается одновременное, непрерывное и согласованное движение приводов звеньев манипулятора, обеспечивающее движение исполнительного звена по заданной траектории в рабочей зоне с требуемыми скоростью и ускорением. Контурное управление требует сложного программного обеспечения, связанного с циклами интерполяции участков траектории и с отработкой команд в реальном масштабе времени. Обычно при контурном управлении используют мини-ЭВМ, цифровые дифференциальные анализаторы и другие устройства.

При комбинированном управлении используют методы цикло-

го, позиционного и контурного управления, сочетая их возможности и преимущества при решении конкретных задач.

Информация о положении рабочих органов машин, о режиме движения звеньев механизмов, о параметрах и характеристиках процессов, необходимая для автоматического функционирования системы механизмов в соответствии с алгоритмами управления, вырабатывается датчиками.

По характеру создаваемых импульсов различают датчики: механические, электрические, фотоэлектрические, электронные, пневматические, гидравлические и т. д.

Различают следующие причины, вызывающие появление импульса датчика: силовые, когда давление рабочей среды или сила, действующая на определенные элементы звеньев механизма, достигают заданной величины; размерные, когда размер, определяющий требуемое положение, достигает заданной величины; путевые, когда движущееся звено механизма занимает определенное (предусмотренное) положение; скоростные, когда скорость движения звена механизма достигает заданной величины; временные, когда сигналы подаются по заданному промежутку цикла работы.

По виду используемой энергии различают исполнительные устройства: механические, электрические, электромеханические, гидравлические и пневматические.

В качестве электрических исполнительных устройств используют электродвигатели (асинхронные с короткозамкнутым ротором с двумя скоростями: рабочей и «ползучей», и шаговые), электромагниты и электромагнитные муфты (дисковые, асинхронные и порошковые).

В качестве гидравлических приводов используют гидроцилиндры (поступательное движение выходного звена), гидромоторы (вращательное движение выходного звена), поворотные гидродвигатели (ограниченный угол поворота выходного звена).

В качестве пневматических двигателей используют поршневые и диафрагменные.

§ 18.2 Циклограмма системы механизмов

Большинство механизмов используется в машинах и устройствах, имеющих цикловой характер работы. За период цикла осуществляется определенная совокупность работ и процессов, в результате которой система приходит в точно такое же состояние, в котором она находилась в начале цикла.

Различают разные виды циклов. Периодическое совпадение положений и направления движения точек всех звеньев механизма или системы механизмов называют кинематическим циклом. Периодически повторяющееся изменение мощности действующих сил и моментов сил характеризует энергетический цикл.

Периодически повторяющаяся совокупность операций технологической машины называется рабочим циклом. По истечении технологического цикла заканчивается изготовление детали или изделия. Период времени с момента подачи сырья или материала на первую операцию до получения готового изделия называют производственным циклом.

Графическое изображение последовательности движения исполнительных звеньев механизма или согласованности перемещений исполнительных органов за цикл называют графиком цикличности или циклограммой.

В основу разработки циклограмм принимают синхронные во времени графики перемещений исполнительных органов механизмов или устройств. Для примера на рис. 18.5 показаны: *а* — изменение угла поворота коленчатого вала; *б, в* — перемещение поршня, впускного и выпускного клапанов одного из цилиндров ДВС и соответствующие им *д* — линейные; *г* — прямоугольные и *е* — круговые циклограммы.

На линейной циклограмме графики перемещений исполнительных органов условно изображают наклонными прямыми, а периоды остановки («выстой») — горизонтальными прямыми.

На прямоугольной и круговой циклограммах графики перемещений не изображают, а интервалы отдельных этапов движения или операций выделяют штриховкой или толстыми линиями (прямая или дуга окружности), протяженность которых соответствует определенным этапам движения. Такие циклограммы обычно дополняют названиями отдельных этапов движения или операций.

Циклограммы используют для анализа требуемой синхронизации перемещений исполнительных звеньев и последовательности относительных положений звеньев внутри цикла, при этом определяют время отдельных интервалов движения (рабочих и вспомогательных), оценивают возможности совмещения технологических и транспортных операций, сокращения времени некоторых операций, разбивки операций на менее продолжительные переходы и т. п. Такой анализ часто позволяет уплотнить циклограмму, т. е. уменьшить время цикла и повысить производительность технологических машин.

Согласование перемещений исполнительных звеньев механизма проводят в зависимости или от времени, или от положения звеньев. В первом случае используют систему управления по времени, во втором случае — систему управления по пути. Промежуток времени, по истечении которого повторяется последовательность перемещения всех исполнительных звеньев механизма, называют временем цикла. На циклограммах иногда указывают не время движения, а угол поворота главного вала основного механизма. Условно считают, что этот вал вращается равномерно. За цикл установившегося движения принимают период изменения обобщенной скорости механизма в функции времени. Например, для кривошипно-ползунного механизма двухтактного или четырехтактного ДВС цикловые углы поворота будут разными: в двухтактном ДВС соот-

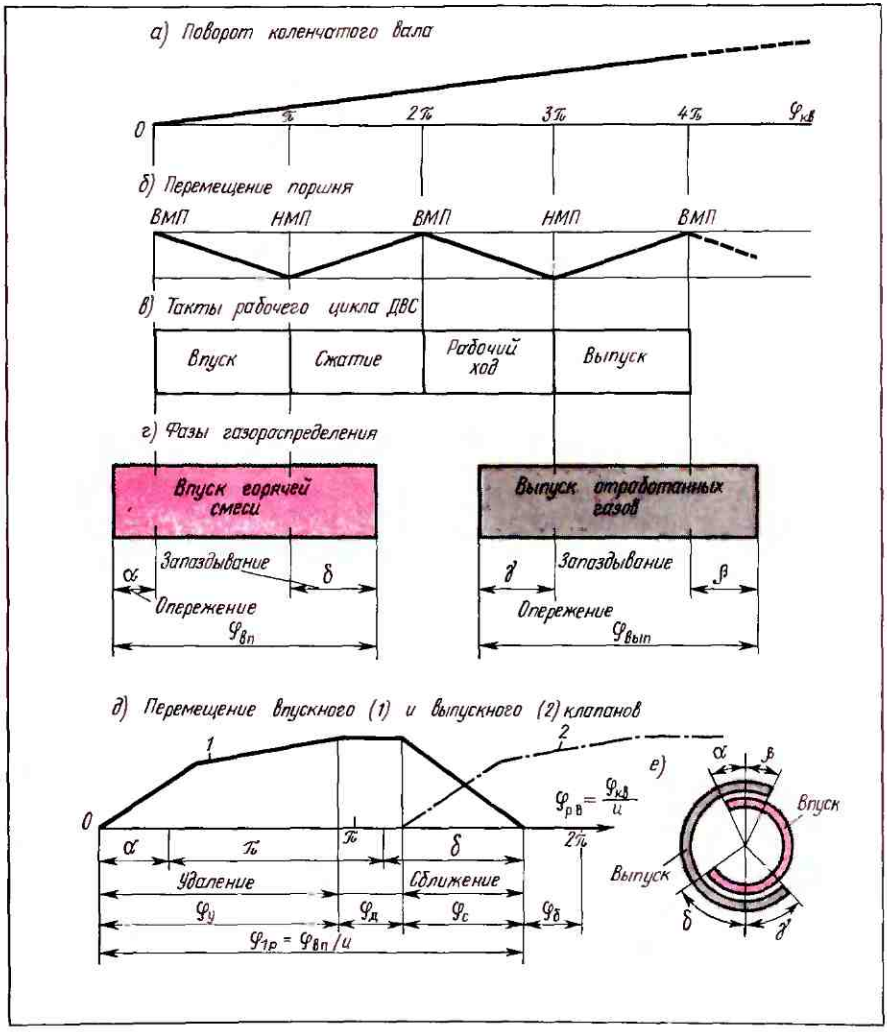


Рис. 18.5

ветствует повороту коленчатого вала на один оборот, а в четырехтактном — повороту на два оборота.

В пределах каждого цикла различают такты или фазы, которые позволяют выделить основное состояние механизма или машины. Например, можно выделить такты движения и такты покоя исполнительных звеньев, такты впуска, сжатия, расширения воздуха или рабочей смеси и выпуска отработавших газов в четырехтактном карбюраторном ДВС, такт продувки и сжатия и такт рабочего хода и выпуска в двухтактном дизеле (рис. 18.5, *г*). В течение такта движения состояние ни одного из исполнительных

механизмов не изменяется, т. е. состояние движения звеньев либо сохраняется, либо отсутствует.

Схему согласованности перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений называют тактограммой. Например, на циклограмме или тактограмме кулачкового механизма выделяют четыре основные фазы: удаления, дальнего покоя, сближения и ближнего покоя толкателя.

Фазовые углы назначают на основе анализа рабочих циклов машины. Например, в ДВС интервалы тактов принимают по положению поршня в предельных положениях: в верхней и нижней «мертвых точках» (в. м. т. и н. м. т.), т. е. угол поворота коленчатого вала за время одного такта равен 180°. Моменты открытия и закрытия клапанов в ДВС называют фазами газораспределения. Они обеспечиваются кулачками на распределительном валу. Впускной клапан должен открываться до прихода поршня в в. м. т., т. е. с опережением на некоторый угол α, а закрываться с некоторым запаздыванием на угол δ (рис. 18.5, *е*). Выпускной клапан открывается до прихода поршня в н. м. т., т. е. с опережением на угол γ, а закрывается с запаздыванием на угол β. Конкретные величины углов опережения и запаздывания зависят от марки двигателя. Например, для ВАЗ-2106 $\alpha = 12°$; $\delta = 40°$; $\gamma = 42°$; $\beta = 10°$; для ЗИЛ-130: $\alpha = 31°$; $\delta = 83°$; $\gamma = 67°$; $\beta = 47°$.

Кулачковый распределительный вал представляет собой совокупность кулачков, установленных на общем валу, но предназначенных для передачи движения или команд на движение разным исполнительным органам.

Один из радиусов-векторов на распределительном валу принимают за начало отсчета (базовый), относительно которого определяют углы установки отдельных кулачков. Эти углы достаточно просто определяют аналитически или графически с использованием метода обращения движения. Для примера на рис. 18.6 показано определение угла установки δ_{21} кулачка *К2* относительно кулачка *К1* при заданном смещении фаз начала движения толкателей по углу поворота φ_{21} распределительного вала.

Вначале определяют углы ψ_{01} и ψ_{02}, характеризующие начальное положение толкателей B_1O_{21} и B_2O_{22} относительно межосевой линии $O_1O_{21}O_{22}$.

Угол установки δ_{21} кулачка *К2* относительно кулачка *К1* определяют по соотношению

$$\delta_{21} = \varphi_{21} + \psi_{01} + \psi_{02}\,.$$

В этом соотношении учтено, что оси B_1 и B_2 расположены по разным сторонам относительно линии $O_1O_{21}O_{22}$ (рис. 18.6).

Для выяснения особенностей основ управления системой механизмов с несколькими двигателями на рис. 18.7 приведены принципиальные схемы ряда устройств агрегатного станка, на поворотном столе *2* которого установлена деталь *1*. В детали *1* обрабатывается одно (или несколько отверстий) с помощью сверлильной головки *8*, перемещаемой по направляющим с помощью цилиндра *Ц1*. Переме-

щение головки осуществляется по трем режимам: быстрый подвод инструмента к детали a_1a_1', рабочая подача при сверлении $a_1'a_1''$ и быстрый отвод $a_1''a_1$ головки в исходное положение. Положения силовой головки *8* фиксируются переключателями: *К1* и *К3* — в крайних положениях и *К2* — при изменении скорости подачи с быстрой на рабочую. Во время обработки планшайба занимает определенное положение, фиксируемое фиксатором *9*, перемещаемым с помощью цилиндра *Ц3*. Положения фиксатора контролируются переключателями *К4* и *К5*. В фиксированном положении планшайба надежно закрепляется тормозом *4*, приводимым в действие цилиндром *Ц2*. Положение штока цилиндра *Ц2* контролируется переключателями *К6* и *К7*.

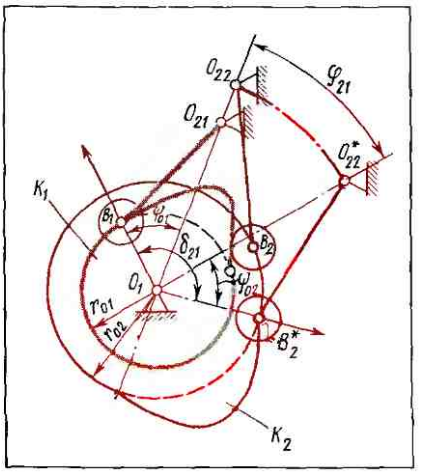


Рис. 18.6

После окончания обработки отверстия планшайба поворачивается вокруг своей оси с помощью зубчатой передачи *3*, зубчато-реечной передачи *6* и цилиндра *Ц4*. После поворота и фиксации положения планшайбы шток цилиндра *Ц4* возвращает рейку в исходное положение. Положения штока фиксируются переключателями *К8* и *К9*. Положения зажима планшайбы обозначают a_2, а разжима — $\bar{a}_2$. Положения фиксатора обозначают: при отводе a_3, а при фиксации — $\bar{a}_3$. Состояния планшайбы во время поворота планшайбы и при обратном ходе рейки (останов) соответственно обозначают a_4 и $\bar{a}_4$.

Циклограмма работы целевых механизмов станка приведена на рис. 18.8. Наклонными линиями на циклограмме показаны интервалы перемещения исполнительных органов и соответствующих им штоков силовых цилиндров. При разработке циклограммы учитывают необходимые блокировки: цикл может начаться после включения вращения режущих инструментов; обработка может проводиться только после зажима планшайбы в фиксированном положении; разжим планшайбы и отвод фиксатора возможен лишь после вывода инструмента из обрабатываемого отверстия; при поломке инструмента выключаются вращение и подача силовой головки; после выполнения операции все механизмы (за исключением планшайбы, поворачивающейся в заданном направлении) занимают исходные положения.

Иногда используют видоизмененные циклограммы работы системы механизмов, в которых не учитывается масштаб времени. Такая циклограмма отражает только последовательность включений тех

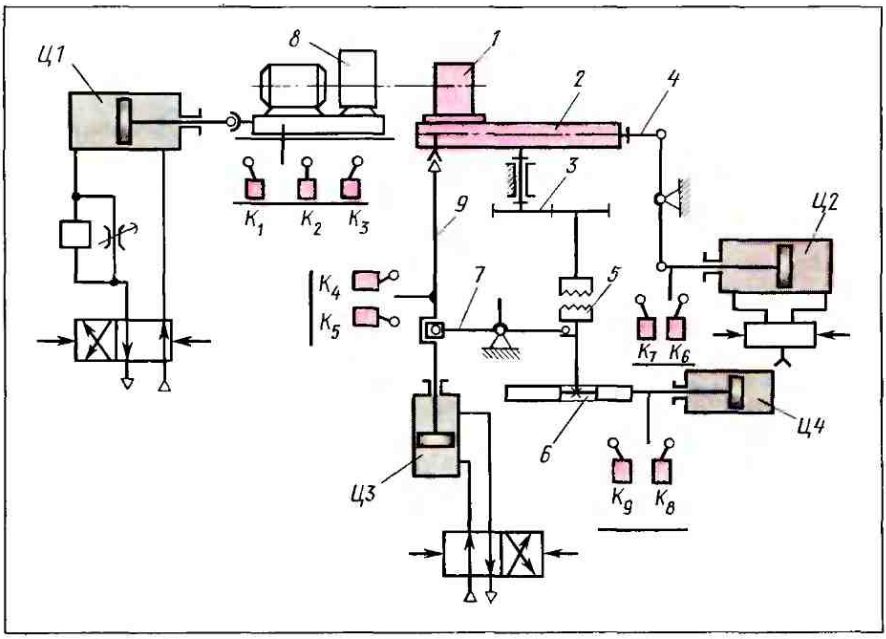


Рис. 18.7

Целевой механизм	Цилиндр	Основные фазы движения исполнительных органов
Вращение режущих инструментов	—	Вращение инструмента
Подача сверлильной головки	1	Быстрый подвод; Рабочая подача; Быстрый отвод; Исходное положение
Зажим планшайбы	2	Зажим; Разжим
Фиксация планшайбы	3	Фиксация; Отвод фиксатора; Подвод фиксатора
Поворот планшайбы	4	Поворот планшайбы
Перемещение рейки в механизме поворота планшайбы	4	Ход рейки вперед; Ход рейки назад

Рис. 18.8

или иных механизмов и управляющих устройств и ее принято называть тактограммой или таблицей включений.

Тактом работы системы механизмов и устройств называется промежуток времени между двумя соседними изменениями его полного состояния. Такты обозначают числами 1, 2, 3, 4, ...

Положение исполнительных звеньев механизмов и устройств фиксируется в определенных положениях. Обычно выбирают два таких положения: включено — выключено, движется — заторможено, намагничено — размагничено и т. п.

Переход от одного положения к другому происходит за очень короткие промежутки времени, на тактограммах (см. рис. 18.9) он изображается толстой вертикальной линией в пределах строки. Эти линии являются границами тактов. Фиксированным положениям исполнительных звеньев соответствуют горизонтальные линии в соответствующих строках: толстая линия — для одного положения (единичный входной сигнал), штриховая (или тонкая) — для другого положения (нулевой входной сигнал).

В ряде случаев для одного исполнительного звена необходимо различать несколько положений, например: включено на быстрый подвод вперед, включено на ход вперед с рабочей скоростью, включено на быстрый обратный ход, выключено.

Устройства, имеющие два состояния, относятся к классу релейных устройств. Они характеризуются входными каналами a_1, a_2, a_3, ... и выходными каналами f_1, f_2, f_3, ... По каждому каналу могут подаваться дискретные сигналы, принимающие значения 0 и 1.

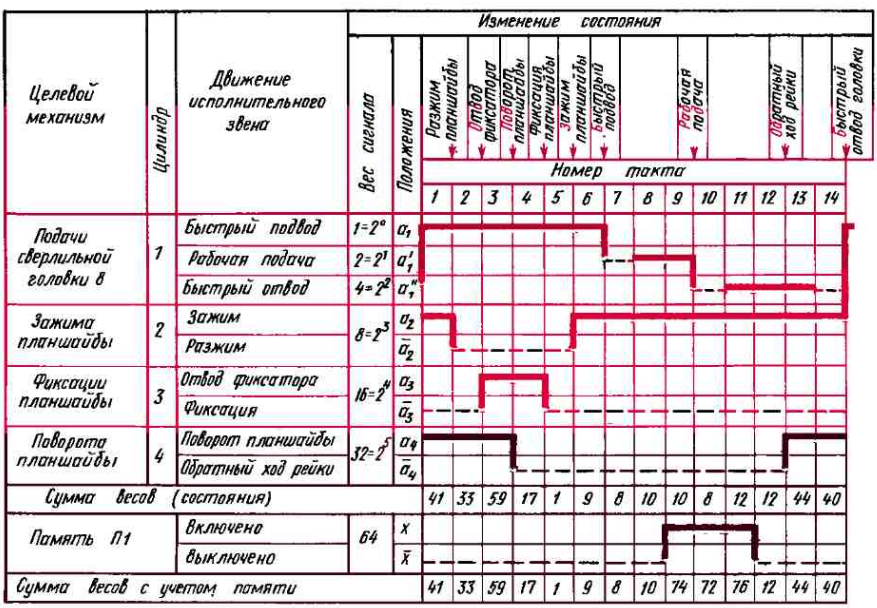


Рис. 18.9

Комбинации значений сигналов в один и тот же момент времени во входных каналах релейного устройства называют входом, а в выходных каналах — выходом. Операции над дискретными сигналами выполняются по правилам алгебры логики.

Для полного описания состояния дискретных многотактных систем включают также элемент памяти (например, триггеры).

Для каждого такта необходимо иметь разные значения входа, которые оцениваются десятичными эквивалентами. С этой целью каждый входной канал имеет определенный вес: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и т. д. Для определения веса такта умножают вес входного канала на значение сигнала (0 или 1) и полученные значения суммируют.

Например, на рис. 18.9 разным состояниям целевых механизмов присвоены веса 1, 2, 4, 8, 16, 32 и определена сумма весов для всех состояний, различаемых тактами в пределах от 1 до 14: 41, 33, 59, 17, 1 и т. д. Для 7 и 10 тактов, а также тактов 8 и 9, 11 и 12 эквивалентные суммы весов оказались одинаковыми (соответственно равными 8, 10 и 12). В таких случаях для реализации системы управления вводят дополнительный входной канал — элемент памяти *П1*, которому присваивают соответствующий вес (на рис. 18.9 вес элемента памяти равен 64). Такие элементы памяти вводят до тех пор, пока каждому входному сигналу не будет соответствовать отличный от предшествующих суммарный вес. В таблицу (рис. 18.9) оказалось достаточным включить один элемент памяти, чтобы в строке «сумма весов с учетом памяти» появились для всех 14 тактов разные значения десятичного эквивалента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. М., 1975.
2. *Гавриленко В. А.* и др. Теория механизмов. М., 1973.
3. *Юдин В. А., Петрокас Л. В.* Теория механизмов и машин. М., 1977.
4. *Кожевников С. Н.* Теория механизмов и машин. М., 1973.
5. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. М., 1979.
6. *Фролов К. В.* Методы совершенствования машин и современные задачи машиноведения. М., 1984.
7. *Решетов Л. Н.* Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М., 1979.
8. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. М., 1979—1981.
9. Основы балансировочной техники. В 2 т./Под ред. *В. А. Щепетильникова.* М., Машиностроение 1975.
10. *Проников А. С.* Надежность машин. М., 1978.
11. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2 т./Под ред. *И. В. Крагельского* и *В. В. Алисина.* М., 1979.
12. *Попов С. А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. М., 1986.
13. *Гавриленко В. А.* Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. М., 1969.

Предметный указатель

Аксоил неподвижный 341
— подвижный 341
Активная часть линии зацепления 374
——— станочного зацепления 370, 372
Алгоритм управления машиной 475
Амплитуда колебаний 177, 220, 263, 269, 270
Аналог скорости точки 62, 148, 152
— ускорения точки 64

Балансировка 212
— автоматическая 222
— динамическая 215, 218
— статическая 207

Вибрационные воздействия 268
—— высокочастотные 270
—— гармонические 268
—— кинематические 268
—— механические 268
—— нестационарные 268
—— полигармонические 269, 286
—— случайные 271
—— стационарные 268
—— ударные 271
Вибрация 14, 15, 16
Виброгаситель динамический 278, 286, 287
Виброзащита 267
—, методы 277
Виброзащитная система 302
—— пневмомеханическая 303
—— электрогидравлическая 304
—— электродинамическая 302
Виброизолятор безынерционный 283
— сложный 283
Виброизоляция 278
Вибропрочность 273
Виброустойчивость 273
Виллиса теорема 343, 365
— формула 122
Водило 406
Волновая зубчатая передача 30, 427
———, генератор волн 30,428
———, гибкое колесо 30, 427
———, жесткое колесо 30,427

Гаситель колебаний гироскопический 297
—— динамический с активными элементами 293
—— катковый инерционный 288
—— маятниковый инерционный 290
—— пружинный с трением 295
—— ударный 300
Гашение колебаний 286
Гистерезис 280
Главная центральная ось инерции 213
Главный вектор дисбалансов ротора 212
—— сил инерции 180, 202
— момент дисбалансов ротора 213
—— сил инерции 180, 202
Годограф сил 199
Грасгофа правило 308

Двигатель 141, 142, 144, 173, 253
Декремент колебаний 282
Демпфер 275
Демпфирование колебаний 275, 278, 279
—— конструкционное 279, 282
Деформация динамическая 262
— статическая 261
Динамика машин 14
—— акустическая 16
—— экспериментальная 17
Динамическая жесткость 274
— модель механизма машинного агрегата 144, 260
— податливость 274

Жесткость линейная 253
— передаточного механизма 253, 255
— угловая 253

Заменяющий механизм 122
Заострение зуба 373
Зацепление внешнее 29, 358, 364
— внутреннее 29, 358, 364
— реечное 29, 358
— станочное 367
—— реечное 367
— эвольвентное 364

Звено механизма 18, 19
— — входное 21
— — выходное 21
— — начальное 60, 144, 145, 150, 161, 173, 257
Зуб внешний 361
— внутренний 361
Зубчатая передача 29
— — гиперболоидная 29, 394
— — коническая 29, 383
— — цилиндрическая 29, 358
— — — эквивалентная 388
— рейка 364
Зубчатое колесо 29, 358, 361

Изнашивание 243
— абразивное 243
— , интенсивность 246
— коррозионно-механическое 243
— механическое 243
— при заедании 243
— , скорость 245
— , стадии 244
— усталостное 243
— эрозионное 243
Износ 245, 247
— сопряжения 248
— , эпюра 245
Износостойкость материалов 246
— — , классы 246
Исходный производящий контур 355, 367

Кинематическая пара 19
— — вращательная 22, 182, 231
— — высшая 22, 182, 183, 233
— — , замыкание 19
— — низшая 22, 182, 183
— — , подвижность 22
— — поступательная 22, 181, 230
— — сферическая 22
— — цилиндрическая 22
— — , элемент 19
Кинематическая цепь 19
— — замкнутая 19
— — незамкнутая 19
— схема 21
Кинематическое возбуждение 283, 285
— соединение 23
Колебания вынужденные 175, 218, 261, 266, 281
— гармонические 177, 262
— собственные (свободные) 263
Колесо косозубое 370
— зубчатое цилиндрическое эквивалентное 388
Контур блокирующий 382
Конус дополнительный 388
— начальный 384
Координата обобщенная 59, 152, 257
Копирования способ 367
Коробка передач 74, 418
Коромысло 19
Коэффициент возрастания усилия 452
— воспринимаемого смещения 375
— высоты зуба 369
— демпфирования 277, 282, 284
— динамичности 264
— изменения средней скорости 318
— неравномерности 165
— перекрытия 377
— поглощения 230, 281
— потерь механических 238
— радиального зазора 369
— саморегулирования 178
— сервиса 330
— скольжения 379
— смещения 369, 372
— сопротивления 256
— трения 228, 234, 242
— удельного давления 380
— уравнительного смещения 370, 376
— ширины зубчатого венца 379, 392
К. п. д. механический 238
Кривошип 19
Круг трения 232
Кулачок 30, 444
— дисковый 445
— цилиндрический 30, 470

Линия зацепления 365, 374
— зуба 359
— станочного зацепления 370, 372

Малышева формула 32
Манипулятор 321
— , грузоподъемность 331
— , зона обслуживания 326
— дистанционно-управляемый 322
— , имитатор нагрузки 333
— копирующий 322
— , маневренность 325
— , осциллограмма 338
— , рабочий объем 325
— , режим обучения 332
— , система управления 332
— , скорость движения схвата 329
— , следящая система 333, 335
— , точность позиционирования 332
— , функция положения 91, 95, 328
— , число степеней свободы 328
Масса корректирующая 213, 216, 221
Маховик 166
Машина 4
— автоматического действия 13
— информационная 5
— технологическая 4
— транспортная 5
— энергетическая 5
Метод заменяющих масс 203
— Мерцалова 167
— обращения движения 69, 427
— последовательных приближений 235, 261
— преобразования координат 128, 135
— сомножителей 425
Механизм 5, 19
— двойного клина 239
— зубчатый 24, 29, 253
— кривошипно-коромысловый 24, 209, 317
— кривошипно-ползунный 24, 28, 92, 190, 205, 209, 235, 318
— кулачковый 30, 444
— кулисный 24, 89, 161, 186
— мальтийский 31, 438
— планетарный 29, 427
— плоский 23
— пространственный 23
— — дифференциальный 427
— рычажный 24, 28
— самоуравновешенный 209
— самоустанавливающийся 33
— статически уравновешенный 205

— храповой 31, 435
Механическая характеристика 141
Модуль зубьев 362
—— окружной внешний 389
Момент активный 140
— вынуждающий 175, 261, 266
— движущий 140, 141
— инерции суммарный приведенный 145, 150
— сил суммарный приведенный 144, 150
— сопротивления 140, 144
— трения 232
Мультипликатор 408

Неуравновешенность механизма 203
— ротора 213

Огибания способ 367
Окружность вершин 361
— впадин 361
— делительная 361, 363, 369
— начальная 366, 374, 375
— основная 359
— станочно-начальная 369
Основание (фундамент) 195, 201, 203
Ось вращения мгновенная 136

Параметр управления 143
Пара производящая 357
—— конгруэнтная 357
Передаточная функция кинематическая 59, 62, 88, 191
Передаточное отношение 61, 147, 167, 253, 255, 258, 342, 365
——, способы определения 402, 409
План возможных скоростей 147, 152
— механизма 65
—сил 188
— скоростей 70, 75
— угловых скоростей 136
— ускорений 70, 75
Плоскости коррекции 214, 216
Поверхности производящие 354, 367
— сопряженные 342
Поверхность зуба боковая 358
Поглотитель колебаний 298
—— с вязким трением 298
—— с сухим трением 298
Подрезание зуба 372
Полюс зацепления 343, 366
Профили сопряженные 343
Профиль кулачка 444, 463
Прямая граничных точек 370
— делительная 364, 369
— станочно-начальная 369, 370

Рабочая машина 143, 144, 173, 253
Расстояние межосевое 366, 375
Реакция основания 140, 195
Редуктор зубчатый 402, 408
—— бипланетарный 417
—— замкнутый 417
—— планетарный 408
———, условие отсутствия подреза и заклинивания 424
———,— сборки 423
———,— соосности 422
———,— соседства 422
Резонанс 272, 264, 266
Робот 10, 12, 322

Робототехническая система 10, 11
— неуравновешенный 212
— полностью сбалансированный 215

Саморегулирование 142, 174
Самоторможение 238, 241
Сила активная 140
— внешняя 140, 183
— внутренняя 141, 183
— движущая 140, 142, 144
— диссипативная 256
— обобщенная 145, 337
— сопротивления 140, 142
— трения 140, 226
—— вязкого 229
—— покоя 228, 234
—— сухого 229, 231, 234
— тяжести 140
Скорость скольжения 229, 346, 379
— угловая 61, 141, 144, 157, 166, 176
Смазка 226
Смещение инструмента 369
Статическая определимость группы Ассура 184, 235
—— механизма 183

Тактограмма машины 489
Теорема зацепления основная 340, 365
— плоского зацепления 343
Толкатель кулачкового механизма 445
Трение качения 228, 233
— покоя 228, 234
— скольжения 228, 230, 233

Угол давления 447, 450
— зацепления 366, 374, 375
— межосевой 383
— профиля зуба 360
— сервиса 330
— станочного зацепления 369
— торцового перекрытия 377
— трения 230, 234
— фазовый 447
— эвольвентный 360, 363
Ускорение угловое 64, 155, 172, 175, 191, 194
Уравнение движения механизма 153
— работ 165
— эвольвенты 360
Уравнения кинетостатики 180
Уравновешивание механизма 203, 206, 209

Центроида 118
Цикл установившегося движения 165
Циклограмма машины 483
Цилиндр аксоидный 341
— основной 359

Частота вращения 166
— собственная 263, 266, 274, 277, 281
Чебышева формула 33, 183
Червячная передача 29, 398
Число степеней свободы 22, 32, 33, 144, 145, 150, 164, 183, 185, 257

Шаг осевой 379
— по делительной окружности 361
— угловой 362

Эвольвента 359
— сферическая 386
Эксцентриситет массы 212

Оглавление

Предисловие
4 Введение
9 *Глава 1.* **Проблемы теории механизмов и машин**
18 *Раздел 1.* **ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И СИСТЕМ МАШИН**
18 *Глава 2.* **Строение механизмов**
18 § 2.1 Основные определения
22 § 2.2 Классификация кинематических пар
23 § 2.3. Виды механизмов и их структурные схемы
32 § 2.4. Структурные формулы механизмов
34 § 2.5. Структурный анализ и синтез механизмов. Влияние избыточных связей на работоспособность и надежность машин
41 § 2.6. Локальные избыточные связи в кинематической паре
50 § 2.7. Контурные избыточные связи и синтез механизмов с оптимальной структурой
59 *Глава 3.* **Кинематические характеристики механизмов**
59 § 3.1. Кинематика входных и выходных звеньев и передаточные функции механизма
65 § 3.2. Планы положений, скоростей и ускорений плоских рычажных механизмов
89 § 3.3. Аналитический метод определения кинематических передаточных функций плоских рычажных механизмов с применением ЭВМ
109 § 3.4. Применение графического и численного дифференцирования и интегрирования
118 § 3.5. Кинематические характеристики плоских механизмов с высшими парами
124 § 3.6. Кинематические характеристики пространственных механизмов
139 *Глава 4.* **Исследование движения машинного агрегата с жесткими звеньями**
140 § 4.1. Силы, действующие в машинах, и их характеристики
144 § 4.2. Динамическая модель машинного агрегата
145 § 4.3. Приведение сил
150 § 4.4. Приведение масс
153 § 4.5. Уравнение движения механизма
156 § 4.6. Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от положения
158 § 4.7. Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от скорости

161 § 4.8. Неустановившийся режим. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами и моментами, зависящими как от положения, так и от скорости
164 § 4.9. Установившийся режим. Неравномерность движения механизма
167 § 4.10. Установившийся режим. Динамический синтез и анализ по методу Мерцалова
173 § 4.11. Установившийся режим. Динамический анализ и синтез с учетом влияния скорости на действующие силы

180 *Глава 5.* **Силовой расчет механизмов**

180 § 5.1. Общая методика силового расчета
186 § 5.2. Графический метод силового расчета рычажного механизма
190 § 5.3. Аналитический метод силового расчета рычажного механизма

201 *Глава 6.* **Уравновешивание механизмов**

202 § 6.1. Виды неуравновешенности механизмов. Статическое уравновешивание
209 § 6.2. Моментное уравновешивание
211 § 6.3. Неуравновешенность ротора и ее виды
215 § 6.4. Динамическая балансировка роторов при проектировании
217 § 6.5. Статическая и динамическая балансировка изготовленных роторов

225 *Глава 7.* **Трение в механизмах и машинах**

225 § 7.1. Виды и характеристики внешнего трения
230 § 7.2. Действие сил в кинематических парах с учетом трения
235 § 7.3. Силовой расчет механизма с учетом трения
238 § 7.4. Потери энергии на трение. Механический коэффициент полезного действия

243 *Глава 8.* **Расчет износа элементов кинематических пар**

243 § 8.1. Критерии оценки износа
248 § 8.2. Расчет износа элементов низших и высших кинематических пар

252 *Глава 9.* **Исследование движения машинного агрегата с учетом упругости звеньев**

253 § 9.1. Динамическая модель машинного агрегата
258 § 9.2. Установившееся движение машинного агрегата
263 § 9.3. Исследование влияния упругости звеньев

267 *Глава 10.* **Виброактивиость и виброзащита машин**

267 § 10.1. Источники колебаний и объекты виброзашиты
272 § 10.2. Влияние механических воздействий на технические объекты и на человека
274 § 10.3. Анализ действия вибраций
277 § 10.4. Основные методы виброзащиты
279 § 10.5. Демпфирование колебаний. Диссипативные характеристики механических систем
282 § 10.6. Принципы виброизоляции. Виброзащитные системы с одной степенью свободы
286 § 10.7. Динамическое гашение колебаний
298 § 10.8. Поглотители колебаний с вязким и сухим трением
300 § 10.9. Ударные гасители колебаний
302 § 10.10. Основные схемы активных виброзащитных систем

307 *Раздел II.* **МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СХЕМ ОСНОВНЫХ ВИДОВ МЕХАНИЗМОВ**

307 *Глава 11.* **Синтез кинематических схем механизмов с низшими парами. Механизмы роботов-манипуляторов**

308 § 11.1. Условие существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах

310 § 11.2. Синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям звеньев
314 § 11.3. Синтез четырехзвенных механизмов по трем положениям звеньев
317 § 11.4. Синтез механизмов по средней скорости звена и по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена
321 § 11.5. Манипуляторы, их устройство и область применения
325 § 11.6. Технические показатели манипуляторов
332 § 11.7. О системах управления манипуляторами
337 § 11.8. Некоторые вопросы динамики манипуляторов

340 *Глава 12.* **Методы синтеза механизмов с высшими парами**

340 § 12.1. Основная теорема зацепления
346 § 12.2. Скорость скольжения сопряженных профилей
349 § 12.3. Угол давления при передаче движения высшей парой
350 § 12.4. Графические методы синтеза сопряженных профилей
352 § 12.5. Дифференциальная форма основного уравнения зацепления профилей
354 § 12.6. Производящие поверхности

358 *Глава 13.* **Цилиндрические зубчатые передачи**

358 § 13.1. Элементы зубчатого колеса
364 § 13.2. Элементы и свойства эвольвентного зацепления
367 § 13.3. Основные положения станочного зацепления. Реечное станочное зацепление
372 § 13.4. Подрезание и заострение зуба
373 § 13.5. Эвольвентная зубчатая передача
377 § 13.6. Качественные показатели зубчатой передачи. Выбор расчетных коэффициентов смещения

383 *Глава 14.* **Пространственные зубчатые передачи**

383 § 14.1. Коническая зубчатая передача
394 § 14.2. Гиперболоидные зубчатые передачи

402 *Глава 15.* **Многозвенные зубчатые механизмы**

402 § 15.1. Многозвенные зубчатые механизмы с неподвижными осями колес
406 § 15.2. Планетарные зубчатые механизмы
413 § 15.3. Выбор схем планетарных механизмов и их кинематические особенности
422 § 15.4. Определение числа зубьев колес планетарных механизмов
427 § 15.5. Волновые зубчатые передачи

434 *Глава 16.* **Механизмы с прерывистым движением выходного звена**

435 § 16.1. Зубчатые и храповые механизмы
438 § 16.2. Мальтийские механизмы
442 § 16.3. Рычажные механизмы с квазиостановками

444 *Глава 17.* **Кулачковые механизмы**

444 § 17.1. Виды кулачковых механизмов и их особенности
447 § 17.2. Закон перемещения толкателя и его выбор
450 § 17.3. Угол давления и коэффициент возрастания сил в кинематических парах
453 § 17.4. Определение размеров кулачкового механизма по заданному допускаемому углу давления
461 § 17.5. Определение габаритных размеров кулачка по условию выпуклости профиля
463 § 17.6. Определение координат профиля дисковых кулачков
470 § 17.7. Механизмы с цилиндрическими кулачками
472 § 17.8. Влияние упругости звеньев кулачкового механизма на закон движения толкателя и форму профиля кулачка

474 *Глава 18.* **Управление движением системы механизмов**

475 § 18.1. Система программного управления движением механизмов
483 § 18.2. Циклограмма системы механизмов