

**Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський,
М. В. Марченко**

**ТЕОРІЯ
МЕХАНІЗМІВ І МАШИН
в системі Mathcad**

Навчальний посібник

Хмельницький – 2014

УДК 621.01

Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський, М. В. Марченко. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad: Навчальний посібник. – Хмельницький: РВЦ ХНУ, 2014. – 324 с.

Навчальний посібник складається з 8 розділів і додатку. Перші 7-м розділів присвячені розв'язанню конкретних задач курсу ТММ. В кожному з цих розділів подано короткий огляд теорії та приклади розв'язування відповідних задач і програми обчислення в системі Mathcad. В останньому розділі наведені основні відомості про Mathcad, прийоми роботи з його математичним, графічним і текстовим редактором. Викладеного матеріалу достатньо для початкового ознайомлення з цим пакетом і попередні знання не потрібні.

Даний посібник слід розглядати як вступ до використання однієї із найбільш розповсюджених систем – Mathcad – для розв'язування задач ТММ різного ступеня складності. Використання цієї системи дозволяє аналізувати поведінку механічних систем у відповідності до поставленої задачі, що дає можливість розв'язувати реальні інженерні задачі студентам молодших курсів, які ще не знайомі з числовими методами та програмуванням.

Призначений для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів України.

Рецензенти:

докт. техн. наук, проф. Боровик О.В.

(Національна академія Державної прикордонної служби України);

докт. техн. наук, проф. Пасіка В.Р.

(Українська академія друкарства);

докт. техн. наук, проф. Сорокатий Р.В.

(Хмельницький національний університет).

ЗМІСТ

| | |
|--|------------|
| Передмова | 5 |
| 1. Кінематичне дослідження механізмів | 7 |
| 1.1. Задачі і методи кінематичного дослідження механізмів | 7 |
| 1.2. Аналоги швидкостей і прискорень | 8 |
| 1.3. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів методом замкнених векторних контурів..... | 10 |
| 1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів..... | 29 |
| 1.5. Приклади аналітичного дослідження кінематики плоских важільних механізмів у системі Mathcad за допомогою погрупного методу | 49 |
| 1.6. Аналітичне дослідження кінематики механізмів III класу | 56 |
| 2. Силовий розрахунок важільних механізмів | 63 |
| 2.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів | 63 |
| 2.2. Сили, що діють у машинах | 63 |
| 2.3. Визначення сил інерції..... | 65 |
| 2.4. Силовий розрахунок плоских механізмів без урахування сил тертя..... | 72 |
| 2.5. Силовий розрахунок плоских механізмів з використанням уніфікованих підпрограм..... | 79 |
| 3. Динаміка механізмів і машин | 110 |
| 3.1. Зведення сил і моментів сил | 110 |
| 3.2. Зведення мас і моментів інерції | 114 |
| 3.3. Рівняння руху механізму..... | 119 |
| 3.4. Дослідження руху механізмів методом Віттенбауера..... | 121 |
| 3.5. Нерівномірність і регулювання руху механізмів і машин | 126 |
| 3.6. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машини | 127 |
| 3.7. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху машини за допомогою кривої Віттенбауера | 133 |
| 3.8. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера | 134 |
| 4. Кулачкові механізми | 147 |
| 4.1. Загальні зауваження | 147 |
| 4.2. Основні параметри кулачкових механізмів | 147 |
| 4.3. Якісні характеристики законів руху вихідної ланки | 149 |
| 4.4. Синтез кулачкових механізмів | 151 |
| 4.4.1. Методи синтезу та вихідні дані | 151 |
| 4.4.2. Синтез кулачкового механізму з роликівим штовхачем | 152 |
| 4.4.3. Синтез коромислового кулачкового механізму | 156 |
| 4.4.4. Синтез кулачкового механізму з плоским штовхачем | 162 |
| 5. Зубчасті передачі | 166 |
| 5.1. Загальні відомості | 166 |
| 5.2. Геометричні параметри циліндричних евольвентних зубчастих передач | 166 |
| 5.3. Основна теорема зубчастого зачеплення | 171 |
| 5.4. Ковзання профілів зубів..... | 173 |
| 5.5. Властивості й рівняння евольвенти кола..... | 174 |
| 5.6. Теоретичні вихідний і твірний контури | 177 |

| | |
|---|------------|
| 5.7. Розрахунок геометричних параметрів циліндричних прямозубих зубчастих коліс з умови верстатного зачеплення | 179 |
| 5.8. Розрахунок геометричних параметрів циліндричної прямозубої зубчастої передачі з умови щільного зачеплення двох коліс | 182 |
| 5.9. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач | 185 |
| 5.10. Геометричні та кінематичні умови існування передачі | 188 |
| 5.10.1. Коефіцієнт перекриття | 189 |
| 5.10.2. Підрізання зубів | 193 |
| 5.10.3. Загострення зубів | 195 |
| 5.10.4. Інтерференція зубів | 196 |
| 6. Синтез важільних механізмів | 204 |
| 6.1. Основні задачі синтезу та методи їх розв'язування | 204 |
| 6.2. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах | 207 |
| 6.3. Синтез чотириланкових механізмів за двома крайніми положеннями вихідної ланки | 209 |
| 6.4. Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки | 215 |
| 6.5. Приклади синтезу шестиланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та максимальним ходом вихідної ланки | 225 |
| 7. Зрівноваження механізмів | 232 |
| 7.1. Задача про зрівноваження механізмів | 232 |
| 7.2. Визначення положення центра мас плоского механізму | 232 |
| 7.3. Метод замінювальних мас | 234 |
| 7.4. Зрівноваження механізмів відносно фундаменту | 238 |
| 7.4.1. Умови зрівноваження механізмів | 238 |
| 7.4.2. Повне зрівноваження сил інерції механізму | 239 |
| 7.5. Зрівноваження обертових мас | 244 |
| 8. Mathcad в інженерних розрахунках | 250 |
| 8.1. Загальна характеристика пакету Mathcad | 250 |
| 8.2. Структура пакету Mathcad | 253 |
| 8.3. Інтерфейс пакету Mathcad | 255 |
| 8.4. Налаштування робочого середовища | 256 |
| 8.5. Робота з текстом | 258 |
| 8.6. Обчислення значень арифметичних виразів | 258 |
| 8.7. Вбудовані функції та функції, визначені користувачем | 260 |
| 8.8. Представлення ранжованих змінних в Mathcad | 261 |
| 8.9. Побудова графіків | 262 |
| 8.10. Побудова графіків поверхонь та просторових кривих | 267 |
| 8.11. Вектори та матриці | 268 |
| 8.12. Лінійні рівняння та системи | 269 |
| 8.13. Знаходження похідних та інтегралів | 271 |
| 8.14. Знаходження екстремумів функції та ряду | 273 |
| 8.15. Програмування в системі Mathcad | 275 |
| Додаток | 278 |
| Література | 324 |

ПЕРЕДМОВА

Теорія механізмів і машин (ТММ) є однією з основних загальноінженерних дисциплін, яку викладають у вищих технічних навчальних закладах. ТММ розглядає будову і класифікацію механізмів, методи кінематичного та динамічного дослідження, проектування їхніх схем, які є загальними для механізмів і машин різного призначення. Ці знання необхідні інженерам-механікам для створення сучасних машин, умілого їх використання. Знання курсу ТММ вимагають не лише глибокого засвоєння теорії, але і вміння грамотно поставити задачу, розв'язати її, проаналізувати результати і про необхідності вибрати оптимальний варіант розв'язку.

Обширна література з ТММ [1–3, 7, 10, 12, 13, 19, 22, 23, 27–29] допомагає вивчити теорію, здійснити постановку задачі і вибрати методи розв'язування типових задач. Проте одержані знання та вміння не звільняють від рутинних і громізких розрахунків, за якими може загубитися сутність механічних явищ і процесів. У сучасній навчальній літературі не приділяється достатня увага математичному моделюванню і аналізу одержаних розв'язків. Між іншим потреба в таких посібниках відчують як студенти в процесі навчання, так і спеціалісти в їх практичній діяльності. Іншими словами, необхідно вивчити не лише методи розв'язування задач різного ступеня складності, але і вміти аналізувати їх так, щоб ці розв'язки не приховували фізику процесів і явищ.

У наш час розвиток обчислювальної техніки набув лавиноподібного характеру, одержали широке застосування такі потужні пакети математичного моделювання, які не вимагають спеціальних знань в програмуванні, це Maple, MATLAB, Mathcad, SolidWorks тощо [5]. Полегшуючи розв'язання складних математичних задач, такі системи дозволяють зняти психологічний бар'єр при вивченні механіки і математики, а також роблять цей процес більш цікавим і простим, значно підвищують ефективність праці різних спеціалістів. Грамотне їх використання у навчальному процесі дозволяє підвищити рівень математичної та технічної освіти.

Даний посібник слід розглядати як вступ до використання однієї із найбільш розповсюджених систем – Mathcad – для розв'язування задач ТММ різного ступеня складності. Використання цієї системи дозволяє аналізувати поведінку механічних систем у відповідності до поставленої задачі, що дає можливість розв'язувати реальні інженерні задачі студентам молодших курсів, які ще не знайомі з числовими методами та програмуванням.

Пакет Mathcad [5, 6, 8, 9, 14–18, 20, 24–26] є ефективним засобом для аналітичних перетворень і чисельних розв’язків інженерних та фізичних задач. Межі його використання розповсюджуються від простих обчислень до розрахунку складних задач у різних галузях знань. За допомогою Mathcad можна з успіхом розв’язувати різні задачі ТММ. Пакет має надзвичайно зручний математично-орієнтований інтерфейс і прекрасний засіб графіки. Наявність інтеграції Mathcad з такими потужними системами автоматизації розрахунків, як Excel, Creo Elements і SolidWorks робить його незамінним інструментом у руках не тільки студентів, але і інженерів, які займаються розробкою складних систем.

Посібник призначений для осіб, які вивчають ТММ або знайомі з нею. Найбільш ефективним способом навчання мистецтву використання методів ТММ є не формальне вивчення правил та прийомів, а показ їх в дії. Тому в посібнику основна увага приділена розв’язанню практичних задач, спеціально підібраних для того, щоб, з одного боку, самостійно навчити розв’язувати математично громіздкі задачі механіки, а з іншого боку – показати можливості системи Mathcad, зацікавити студентів і спеціалістів в оволодінні цим програмним продуктом.

Посібник складається з 8-ти розділів і додатку. Перші 7-м розділів присвячені розв’язанню конкретних задач курсу ТММ. В кожному з цих розділів подано короткий огляд теорії та приклади розв’язування відповідних задач і програми обчислення в системі Mathcad. В останньому розділі наведені основні відомості про Mathcad, прийоми роботи з його математичним, графічним і текстовим редактором. Наведені відомості орієнтовані на російськомовну версію Mathcad, викладеного матеріалу достатньо для початкового ознайомлення з цим пакетом і попередні знання не потрібні.

Навчальний посібник складений авторським колективом кафедри машинознавства Хмельницького національного університету: д.т.н., проф. Кіницьким Я.Т. – передмова, розділ 1 (пп. 1.1-1.3, 1.6), розділ 2 (пп. 2.1-2.4), розділи 3-7, додаток; к.т.н., доц. Харжевським В.О. – розділи 1 (пп. 1.4, 1.5), розділ 2 (пп. 2.5); к.т.н., доц. кафедри Марченком М.В. – розділ 8.

Вважаємо своїм обов’язком подякувати рецензентам, які познайомились з рукописом посібника і дали ряд цінних зауважень.

Всі зауваження і пропозиції щодо структури, змісту та стилю викладу матеріалів посібника автори просять надсилати за адресою: 29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 11, Хмельницький національний університет, кафедра машинознавства, e-mail: vk@solidworks.net.ua.

КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ**1.1 Задачі і методи кінематичного дослідження механізмів**

При кінематичному дослідженні механізму розглядається рух його ланок без урахування сил, що діють на них, тобто розглядається рух ланок з чисто геометричної точки зору, з урахуванням тільки фактора часу [3, 12, 29].

Як відомо, будь-який рух тіла характеризується *переміщенням* його у просторі, *швидкістю* і *прискоренням* руху його точок. Звідси й витікають основні задачі кінематичного дослідження механізмів:

- 1) визначення *положень ланок* механізму, побудова траєкторій його окремих рухомих точок і знаходження переміщень окремих ланок;
- 2) визначення *швидкостей* окремих точок і ланок механізму;
- 3) визначення *прискорень* окремих точок і ланок механізму.

У результаті такого дослідження встановлюють відповідність кінематичних параметрів (переміщень, швидкостей і прискорень) заданим умовам роботи механізму, а також одержують вихідні дані для виконання подальших розрахунків. Знання кінематичних параметрів потрібні для визначення динамічних сил (сил інерції, моментів сил інерції), кінетичної енергії та потужності механізму. Траєкторії окремих точок допомагають встановити картину взаємного положення ланок під час руху машини, усунути можливість їх співударів. Дані кінематичного дослідження дуже часто використовуються для розв'язання оберненої задачі – синтезу механізмів.

Більшість механізмів і машин має періодичний рух. Під *періодом (циклом) руху* розуміють проміжок часу, після закінчення якого механізм повертається у початкове положення, а його кінематичні параметри набувають початкового значення, після цього рух повторюється за тим самим законом. Звідси випливає, що для кінематичного дослідження достатньо одного періоду роботи механізму. При цьому повинні бути задані кінематична схема механізму (розміри всіх його ланок) і закон руху початкової ланки. Якщо початкова ланка здійснює обертовий рух, то закон руху задають у вигляді рівняння $\varphi = \varphi(t)$, яке виражає залежність кута повороту (узагальненої координати) початкової ланки від часу. При поступальному русі цей закон можна виразити рівнянням $s = s(t)$, тобто залежністю лінійних переміщень початкової ланки від часу.

Існує чотири методи кінематичного дослідження механізмів: графічний, графоаналітичний, аналітичний і експериментальний. *Графічні і графоаналітичні методи* дозволяють розв'язувати майже всі основні задачі кінематичного дослідження механізмів. Для більшості практичних задач точність цих методів достатня. При дослідженні деяких механізмів вони значно спрощують розрахунки, економлять час, сприяють зменшенню помилок у результатах завдяки наочності досліджень.

Проте дуже часто *аналітичний метод* має не тільки суттєву перевагу над першими, але й є єдиним. Це, перш за все, стосується широкого класу задач, коли ланки механізму повинні забезпечити рух за певним, наперед

заданим законом. Для динамічного розрахунку механізмів, коли необхідно, наприклад, виконати аналіз коливань, потрібні аналітичні залежності законів руху ланок механізму. Особливо широкого поширення набув останнім часом аналітичний метод, коли з'явилися сучасні комп'ютери, які дозволяють здійснювати багатоваріантні дослідження механізмів і тим самим вибирати такі схеми механізмів і розміри їхніх ланок, що забезпечують найкращі умови роботи, тобто удається здійснити оптимальний синтез механізмів.

Найдостовірніші результати дає *експериментальний метод* дослідження механізмів. Це пояснюється тим, що при графічних і аналітичних методах розв'язання задач кінематики доводиться приймати ряд допущень. Теоретичні залежності таких ідеалізованих механізмів інколи значно відрізняються від дійсних. Крім цього, у сучасних машинах все частіше використовуються механізми з пружними, гідравлічними, пневматичними зв'язками, теоретичні розрахунки яких вимагають експериментальної перевірки. Отже експериментальні дослідження сучасних швидкохідних машин часто дають єдину можливість одержати дійсні параметри машин.

У цьому посібнику розглядаються лише аналітичні методи кінематичного дослідження. Інші методи наведені в різних підручниках [3, 12, 23, 29] та навчальних посібниках [13, 21, 22, 27].

1.2. Аналоги швидкостей і прискорень

Аналітичне дослідження кінематики механізмів зручно вести з використанням *аналогів швидкостей і прискорень*, які вперше були використані Ассуром [3, 7, 23]. Це пояснюється тим, що для заданої кінематичної схеми механізму аналоги швидкостей і прискорень залежать тільки від узагальненої координати і не залежать від швидкості руху початкової ланки, тобто кінематичне дослідження можна провадити суто геометричними методами. Крім цього, що дуже важливо, аналоги швидкостей і прискорень дають змогу легко порівнювати закони руху ланок, а звідси й вибрати оптимальний варіант механізму для забезпечення заданих умов роботи.

Узагальненою координатою, як правило, вибирають переміщення початкової ланки (кут φ_1 повороту кривошипа або лінійне переміщення s_1 повзуна).

Як відомо, швидкість будь-якої точки M ланки, що має *поступальний рух*, є першою похідною від переміщення цієї точки за часом:

$$v_i = ds_i/dt. \quad (1.1)$$

Якщо помножити і поділити (1.1) на $d\varphi_1$, одержимо

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1}, \quad (1.2)$$

де $d\varphi_1/dt = \omega_1$, а $ds_i/d\varphi_1 = s'_i$ – аналог лінійної швидкості точки M ; ω_1 – кутова швидкість початкової ланки (кривошипа).

Тоді рівняння (1.2) можна записати так:

$$v_i = s'_i \omega_1. \quad (1.3)$$

Отже, **аналогом швидкостей** називають першу похідну від переміщень за узагальненою координатою (φ_1 або s_1).

Аналогічно запишемо рівняння (1.3) для кутової швидкості ланки i (**обертовий рух**):

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \varphi'_i \omega_1, \quad (1.4)$$

де $\varphi'_i = d\varphi_i / d\varphi_1$ — аналог кутової швидкості ланки.

Як видно з (1.3) і (1.4), аналоги швидкостей чисельно дорівнюють значенням швидкостей відповідних точок або ланок при $\omega_1 = 1$, а в загальному випадку є відношеннями швидкостей: $s'_i = v_i / \omega_1$, $\varphi'_i = \omega_i / \omega_1$. Тому їх часто ще називають **передаточними функціями**.

Таким чином, дійсні значення швидкостей v_i або ω_i дорівнюють добутку кутової швидкості кривошипа ω_1 на відповідні аналоги швидкостей s'_i або φ'_i .

Прискорення точки M також можна виразити через аналоги прискорень, якщо продиференціювати рівняння (1.2) і (1.3). Тоді

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{dv_i}{dt} = \frac{d(s'_i \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{ds'_i}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + s'_i \frac{d\omega_1}{dt} = s''_i \omega_1^2 + s'_i \varepsilon_i; \\ \varepsilon_i &= \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d(\varphi'_i \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{d\varphi'_i}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + \varphi'_i \frac{d\omega_1}{dt} = \varphi''_i \omega_1^2 + \varphi'_i \varepsilon_i, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

де $s''_i = \frac{ds'_i}{d\varphi_1} = \frac{d^2 s_i}{d\varphi_1^2}$ — аналог лінійного прискорення точки M ;

$\varphi''_i = \frac{d\varphi'_i}{d\varphi_1} = \frac{d^2 \varphi_i}{d\varphi_1^2}$ — аналог кутового прискорення ланки i .

Значить, **аналогом прискорення** називають другу похідну від переміщень за узагальненою координатою.

Якщо початкова ланка обертається з постійною швидкістю ($\omega_1 = \text{const}$), то

кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$, і залежності (1.5) можна записати так:

$$a_i = s''_i \omega_1^2; \quad \varepsilon_i = \varphi''_i \omega_1^2. \quad (1.6)$$

У загальному випадку рівняння швидкостей і прискорень будь-якої точки M ланки можуть бути одержані таким чином. Нехай \vec{r}_M є радіусом-вектором, який визначає положення точки M . З теоретичної механіки відомо, що швидкість \vec{v}_M і прискорення \vec{a}_M точки M можуть бути одержані послідовним дворазовим диференціюванням радіуса-вектора \vec{r}_M за часом t . Маємо

$$v = \frac{d\vec{r}_M}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \vec{r}_M, \quad (1.7)$$

де $\vec{r}'_M = \frac{d\vec{r}_M}{d\varphi_1}$ — аналог швидкостей точки M .

1.3. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів методом замкнених векторних контурів

У технічній літературі опубліковано велику кількість праць з аналітичного дослідження плоских важільних механізмів. Проте, якщо розглянути загальні методи розв'язку цих задач, універсальні для будь-якого механізму, можна виділити дві їх різновидності [23]:

- метод замкнених векторних контурів, який запропонував В. А. Зінов'єв;
- метод перетворення координат, який запропонував Ю. Ф. Морошкін.

Перший метод більш зручний для кінематичного дослідження плоских механізмів, другий – для просторових механізмів.

Розглянемо **метод замкнених векторних контурів**. При цьому методи аналітичні залежності для визначення основних кінематичних параметрів можна одержати, якщо умовно уявити механізм замкненим векторним контуром, утвореним ланками цього механізму. Методику одержання розрахункових залежностей розглянемо на прикладі шарнірного чотириланкового механізму, кінематичну схему якого зображено на рис. 1.1.

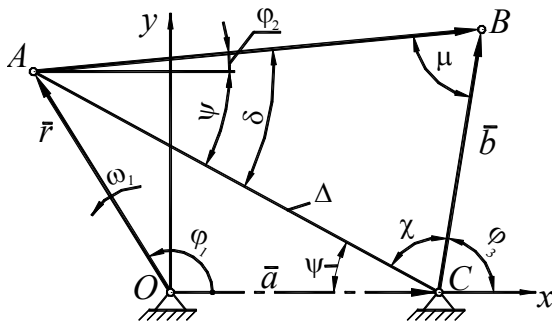


Рис. 1.1. Кінематична схема шарнірного чотириланкового механізму

Цей механізм можна зобразити у вигляді замкненого векторного контуру $OABC$, для якого запишемо таке векторне рівняння:

$$\vec{r} + \vec{l} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (1.8)$$

де $r = l_{OA}$, $l = l_{AB}$, $b = l_{BC}$, $a = l_{OC}$.

Спроекуємо одержаний векторний контур на координатні осі x і y та запишемо рівняння проєкцій на ці осі:

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 &= a + b \cos \varphi_3; \\ r \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 &= a + b \sin \varphi_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

де φ_1 – узагальнена координата (кут повороту кривошипа).

Всі кути φ_i , які визначають положення ланок, відраховують проти ходу годинникової стрілки від лінії, що паралельна осі абсцис x і проведена через початок відповідного вектора; початок відрахунку позначають точкою,

1.3. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів

напрямок – стрілкою. Можна відраховувати кути від іншої лінії. Кути, які відраховують проти ходу годинникової стрілки, будемо вважати додатними, за рухом годинникової стрілки – від'ємними.

Значення кутів φ_2 і φ_3 можна одержати безпосередньо із рівнянь (1.9), проте у цьому випадку необхідно розв'язати квадратне рівняння, в якому часом важко вірно вибрати його корені. Тому зручніший такий порядок розрахунку.

Проведемо допоміжну лінію AC , довжина якої $l_{AC} = \Delta$ і кут нахилу ψ визначаються із ΔOAC :

$$\Delta = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi_1}; \quad \psi = \arcsin \frac{r \sin \varphi_1}{\Delta}. \quad (1.10)$$

Із ΔABC знайдемо кути:

$$\mu = \arccos \frac{l^2 + b^2 - \Delta^2}{2lb}; \quad \delta = \arccos \frac{l^2 + \Delta^2 - b^2}{2l\Delta}; \quad \chi = \pi - \mu - \delta. \quad (1.11)$$

Тоді

$$\varphi_2 = \delta - \psi; \quad \varphi_3 = \pi - \psi - \chi. \quad (1.12)$$

Треба пам'ятати, що кути φ_i у загальному випадку мають знак "+" або "-", що враховується при розрахунках. Кут між напрямком абсолютної швидкості \bar{v}_B точки B і напрямком відносної швидкості \bar{v}_{BA} називають **кутом передачі** ($\mu = \angle ABC$). Щоб механізм не заклинювало, кут передачі має задовольняти умові $\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}$. Значення кутів μ_{\min} і μ_{\max} залежать від якості виготовлення механізму, умов тертя. Якщо відсутні такі дані, можна рекомендувати $\mu_{\min} = 30^\circ$, $\mu_{\max} = 180^\circ - \mu_{\min}$. Досліджуючи механізми, треба зважати на величину кутів передачі.

Для визначення аналогів швидкостей продиференціюємо рівняння (1.9) за узагальненою координатою φ_1 :

$$\left. \begin{aligned} -r \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} - l \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= -b \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}; \\ r \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + l \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= b \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Врахувавши, що

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = 1, \quad \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \varphi'_2, \quad \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \varphi'_3 \quad (1.14)$$

є аналоги кутових швидкостей ланок механізму, одержимо

$$r \sin \varphi_1 + l \varphi'_2 \sin \varphi_2 = b \varphi'_3 \sin \varphi_3; \quad r \cos \varphi_1 + l \varphi'_2 \cos \varphi_2 = b \varphi'_3 \cos \varphi_3. \quad (1.15)$$

Щоб встановити аналоги швидкостей φ'_2 і φ'_3 , скористаємось першим рівнянням (1.15), у якому від усіх кутів відніmemo спочатку кут φ_3 , а потім кут

φ_2 , що відповідає повороту системи координат xOy спочатку на кут $(-\varphi_3)$, а потім на кут $(-\varphi_2)$. При цьому одержимо

$$r \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l\varphi'_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \quad r \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = b\varphi'_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2). \quad (1.16)$$

Тоді

$$\varphi'_2 = \frac{-r \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad \varphi'_3 = \frac{r \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{b \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (1.17)$$

Для визначення аналогів прискорень продиференціюємо за узагальненою координатою φ_1 рівняння (1.15) і одержимо

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varphi_1 + l\varphi''_2 \sin \varphi_2 + l(\varphi'_2)^2 \cos \varphi_2 &= b\varphi''_3 \sin \varphi_3 + b(\varphi'_3)^2 \cos \varphi_3; \\ -r \sin \varphi_1 + l\varphi''_2 \cos \varphi_2 - l(\varphi'_2)^2 \sin \varphi_2 &= b\varphi''_3 \cos \varphi_3 - b(\varphi'_3)^2 \sin \varphi_3; \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

де φ''_2 і φ''_3 – аналоги кутових прискорень, які дорівнюють похідним за узагальненою координатою φ_1 від відповідних аналогів кутових швидкостей φ'_2 і φ'_3 , тобто

$$\varphi''_2 = \frac{d\varphi'_2}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}, \quad \varphi''_3 = \frac{d\varphi'_3}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}, \quad (1.19)$$

Величини φ''_2 і φ''_3 можна також знайти з рівнянь (1.18), якщо повернути систему координат послідовно на кути $(-\varphi_3)$ і $(-\varphi_2)$. При цьому одержимо

$$\left. \begin{aligned} \varphi''_2 &= \frac{b(\varphi'_3)^2 - r \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l(\varphi'_2)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \\ \varphi''_3 &= \frac{r \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l(\varphi'_2)^2 - b(\varphi'_3)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{b \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Дійсні кутові швидкості ω_2 , ω_3 і прискорення ε_2 , ε_3 ланок 2 і 3 згідно з формулами (1.4) і (1.6) при $\omega_1 = \text{const}$ дорівнюють:

$$\omega_2 = \varphi'_2 \omega_1; \quad \omega_3 = \varphi'_3 \omega_1; \quad \varepsilon_2 = \varphi''_2 \omega_1^2; \quad \varepsilon_3 = \varphi''_3 \omega_1^2. \quad (1.21)$$

Цей метод може бути використаний і для більш складних механізмів, до яких входить декілька структурних груп II класу. При цьому потрібно розглянути таку саму кількість замкнених векторних контурів. Для кожного контуру окремо складають векторні рівняння замкнутості, проектують їх на координатні осі і одержують рівняння проєкцій, за якими знаходять положення ланок, потім шляхом диференціювання рівнянь проєкцій визначають аналоги швидкостей і прискорень. Проте остаточні залежності для з'ясування кінематичних параметрів у таких механізмах залежать не тільки від кількості та виду груп, які складають механізм, але й від положення точок приєднання до

1.3. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів

ланок попередніх груп і варіантів зборки. Це призводить до того, що для кожного механізму одержують свої алгоритми і досить громіздкі програми для комп'ютерів, які вимагають значних затрат часу на їх складання і відладку. Скласти бібліотеку індивідуальних програм для всіх механізмів недоцільно і неможливо. Рациональніше створити уніфіковані блоки (підпрограми), використовуючи які можна скласти програму кінематичного дослідження будь-якого важільного механізму [6-10].

Методика аналітичного дослідження кінематики просторових механізмів методом перетворенням координат розглядається в підручниках [12, 23].

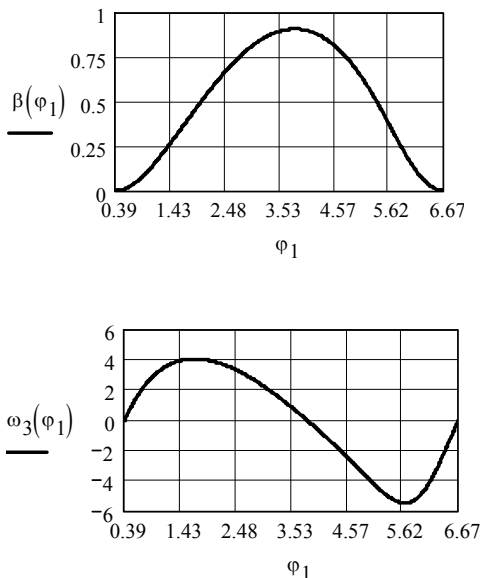
Приклад 1.1. Для шарнірного чотириланкового механізму (рис. 1.1) скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми кутових переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Нульовим положенням механізму прийняти крайнє праве положення ланки 3, а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

Розв'язання. Початкове положення кривошипа 1 визначатися кутом

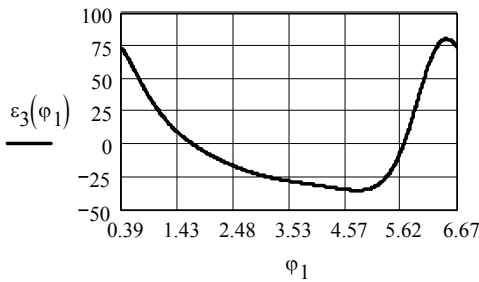
$$\varphi_0 = \arccos \left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2a(r+l)} \right].$$

Інші кінематичні параметри визначаються залежностями (1.10) – (1.12), (1.14), (1.19), (1.21). Програма в системі Mathcad наведена нижче.

Програма PR 1.1 [15]



$$\begin{aligned}
 &r := 0.03 \quad l := 0.16 \quad b := 0.085 \\
 &a := 0.13 \quad \omega_1 := 10 \quad N := 360 \\
 &\varphi_0 := \arccos \left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2(r+l)a} \right] \\
 &\varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{N} .. 2 \cdot \pi + \varphi_0 \\
 &\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)} \\
 &\psi(\varphi_1) := \arcsin \left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)} \right) \\
 &\mu(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b} \right) \\
 &\delta(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)} \right) \\
 &\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) \\
 &\varphi_2(\varphi_1) := \delta(\varphi_1) + \psi(\varphi_1)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi_3(\varphi_1) &:= \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1) \\ \beta_0 &:= \mu_0 + \varphi_0 \quad \beta(\varphi_1) := \varphi_3(\varphi_1) - \beta_0 \\ \varphi'_3(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi''_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_3(\varphi_1) \\ \omega_3(\varphi_1) &:= \varphi'_3(\varphi_1) \cdot \omega_1 \\ \varepsilon_3(\varphi_1) &:= \varphi''_3(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 \end{aligned}$$

Приклад 1.2. Для кривошипно-повзунного механізму (рис. 1.2) скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми лінійних переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Нульовим положенням механізму прийняти крайнє праве положення ланки 3, а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

Програма PR 1.2 [15]

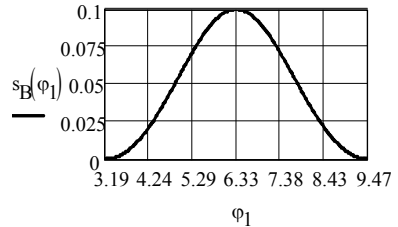
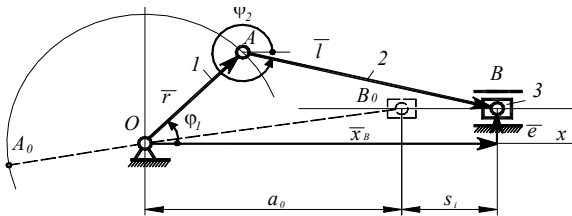


Рис. 1.2. Кінематична схема кривошипно-повзунного механізму

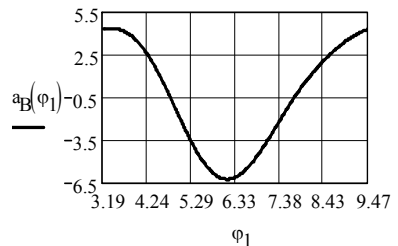
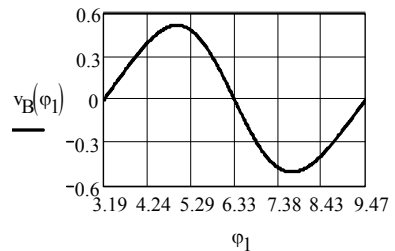
$$\begin{aligned} r &:= 0.05 \quad l := 0.25 \quad e := 0.01 \quad \omega_1 := 10 \\ N &:= 360 \end{aligned}$$

$$\varphi_0 := \pi + \operatorname{asin}\left(\frac{e}{l-r}\right) \quad a_0 := \sqrt{(l-r)^2 - e^2}$$

$$\varphi_1 := \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \operatorname{asin}\left[\frac{(e - r \cdot \sin(\varphi_1))}{l}\right]$$

$$x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) + l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$



$$\varphi_2'(\varphi_1) := -r \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))} \quad x_B'(\varphi_1) := -r \cdot \sin(\varphi_1) - l \cdot \varphi_2'(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$\varphi_2''(\varphi_1) := \frac{\left(r \cdot \cos(\varphi_1) + l \cdot \varphi_2'(\varphi_1)^2 \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) \right)}{l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))}$$

$$x_B''(\varphi_1) := -r \cdot \cos(\varphi_1) - l \cdot \varphi_2''(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) - l \cdot \varphi_2'(\varphi_1)^2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$s_B(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) - a_0 \quad v_B(\varphi_1) := x_B'(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_B(\varphi_1) := x_B''(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

Приклад 1.3. Для кривошипно-кулісного механізму (рис. 1.3) скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми лінійних переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Нульовим положенням механізму прийняти крайнє праве положення ланки 3, а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

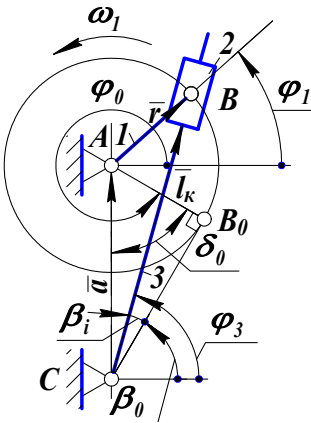


Рис. 1.3. Кінематична схема кулісного механізму

Програма PR 1.3 [15]

$$r := 0.03 \quad a := 0.06 \quad \omega_1 := 10 \quad N := 360$$

$$\delta_0 := \arccos\left(\frac{r}{a}\right) \quad \varphi_0 := \delta_0 - \frac{\pi}{2} \quad \beta_0 := \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\varphi_1 := \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi + \varphi_0$$

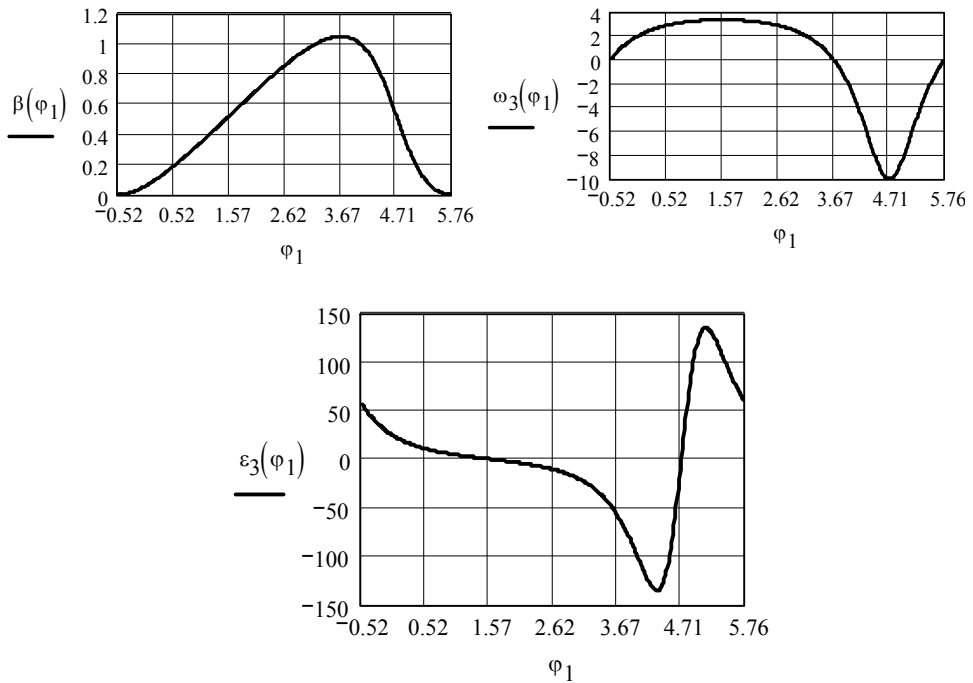
$$x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$\varphi_k(\varphi_1) := \operatorname{atan}\left[\frac{\left(a + r \cdot \sin(\varphi_1)\right)}{r \cdot \cos(\varphi_1)}\right]$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \begin{cases} R \leftarrow \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leftarrow \pi + \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3}{2}\pi \\ R \leftarrow \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq 2\pi + \varphi_0 \end{cases}$$

$$l_k(\varphi_1) := r \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3(\varphi_1))} \quad \beta(\varphi_1) := \varphi_3(\varphi_1) - \beta_0 \quad \beta'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \beta(\varphi_1)$$

$$\omega_3(\varphi_1) := \beta'(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \beta''(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \beta(\varphi_1) \quad \varepsilon_3(\varphi_1) := \beta''(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$



Приклад 1.4. Для синусного механізму (рис. 1.4) скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми лінійних переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Нульовим положенням механізму прийняти крайнє праве положення ланки 3, а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

Програма PR 1.4 [15]

$$\begin{aligned}
 r &:= 0.05 & \omega_1 &:= 10 & N &:= 360 & \varphi_1 &:= 0,2 \frac{\pi}{N} .. 2\pi \\
 x_B(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) & y_B(\varphi_1) &:= r \cdot \sin(\varphi_1) \\
 x'_B(\varphi_1) &:= -r \cdot \sin(\varphi_1) & y'_B(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) \\
 x''_B(\varphi_1) &:= -r \cdot \cos(\varphi_1) & y''_B(\varphi_1) &:= -r \cdot \sin(\varphi_1) \\
 s_B(\varphi_1) &:= r - x_B(\varphi_1) & v_B(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} s_B(\varphi_1) \cdot \omega_1 \\
 a_B(\varphi_1) &:= \frac{d^2}{d\varphi_1^2} s_B(\varphi_1) \cdot \omega_1^2
 \end{aligned}$$

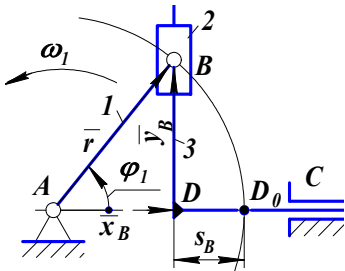
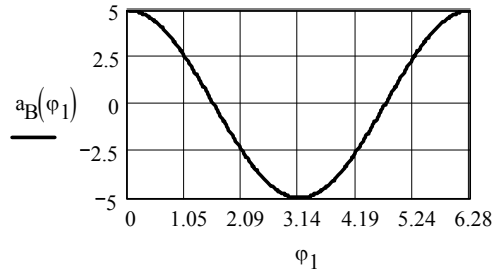
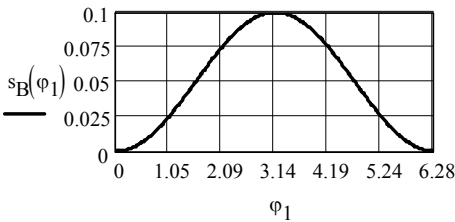
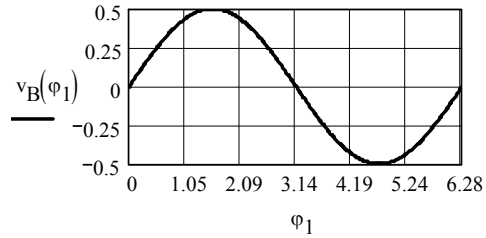


Рис. 1.4. Кінематична схема синусного механізму



Приклад 1.5. Для кривошипного механізму з коливальним повзуном (рис. 1.5) скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми кутових переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Нульовим положенням механізму прийняти крайнє верхнє положення ланки 2, а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

Програма PR 1.5 [15]

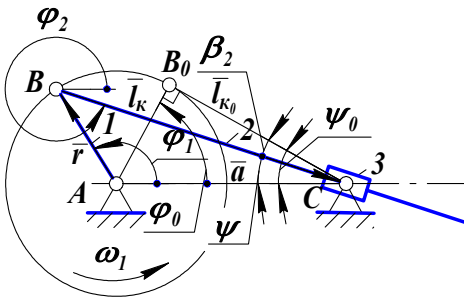
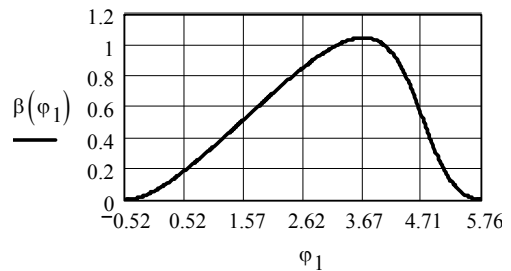


Рис. 1.5. Кінематична схема кривошипного механізму з коливальним повзуном

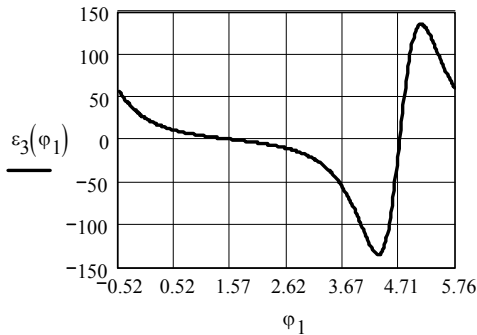
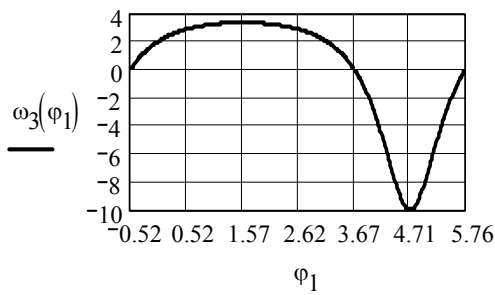


$$r := 0.05 \quad a := 0.1 \quad \omega_1 := 10$$

$$N := 360$$

$$l_{k0} := \sqrt{a^2 + r^2} \quad \varphi_0 := \arccos\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\psi_0 := \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$$



$$\varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi + \varphi_0$$

$$l_k(\varphi_1) := \sqrt{(r^2 + a^2) - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)}$$

$$\psi(\varphi_1) := \text{asin}\left(\left(\frac{\sin(\varphi_1)}{r \cdot l_k(\varphi_1)}\right)\right)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := 2\pi - \psi(\varphi_1)$$

$$\beta_2(\varphi_1) := \psi_0 - \psi(\varphi_1)$$

$$\varphi'_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\varphi''_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_2(\varphi_1)$$

$$\omega_2(\varphi_1) := \varphi'_2(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$\varepsilon_2(\varphi_1) := \varphi''_2(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

Приклад 1.6. Для тангенціального механізму (рис. 1.6), в якому відрізок $H=0,2$ м, кут φ_1 змінюється в межах $\pm 60^\circ$, скласти програму в системі Mathcad для обчислення основних кінематичних параметрів механізму та побудувати діаграми лінійних переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки 3. Початкове положення ланки 1 прийняти, коли ланка 3 знаходиться в нижньому положенні ($\varphi_1 = -60^\circ$), а кількість положень механізму прийняти $N=360$.

Програма PR 1.6 [15]

$$H := 0.25 \quad \omega_1 := 10 \quad \varphi_{1m} := 80 \text{deg} \quad N := 180$$

$$\varphi_0 := 2\pi - \varphi_{1m} \quad y_{B0} := H \cdot \tan(\varphi_{1m}) \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{180} \dots \varphi_0 + 2 \cdot \varphi_{1m}$$

$$y_B(\varphi_1) := H \cdot \tan(\varphi_1) \quad s_B(\varphi_1) := y_{B0} + y_B(\varphi_1) \quad s'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} s_B(\varphi_1)$$

$$s''_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} s'_B(\varphi_1) \quad v_B(\varphi_1) := s'_B(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_B(\varphi_1) := s''_B(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

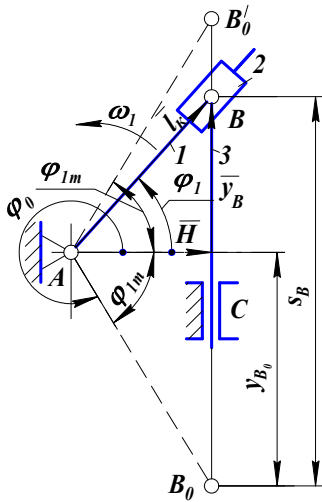
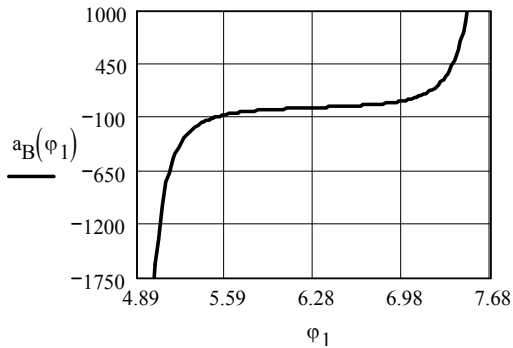
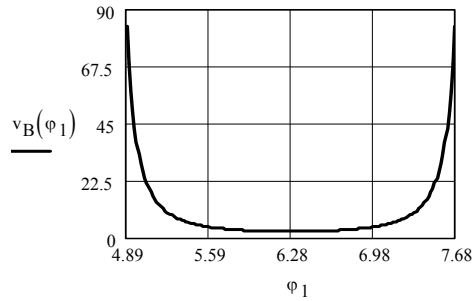
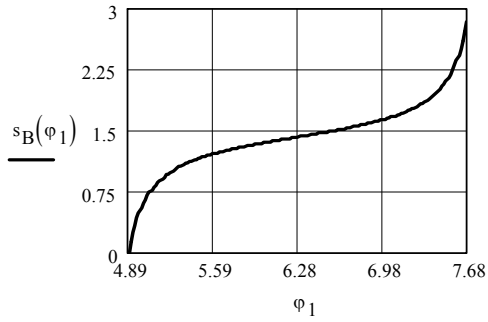


Рис. 1.6. Кінематична схема тангсного механізму



Приклади 1.7 – 1.10 [15]. Для механізмів, які зображенні нижче (рис. 1.7–1.10), треба виконати:

а) використовуючи метод замкнених векторних контурів, вивести аналітичні залежності для визначення координат точки M ;

б) використовуючи систему Mathcad або іншу систему програмування, скласти програму для обчислення кінематичних параметрів, що вказані вище (п. а);

в) побудувати шатунну криву, яку описує точка M , і показати на ній положення цієї точки тоді, коли кут $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_1 = \pi$.

Розміри ланок задані поряд із схемою механізму. Початковою ланкою прийняти кривошип I .

Приклад 1.7 (рис. 1.7)
Програма PR 1.7

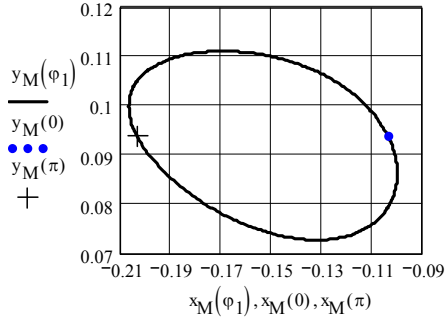
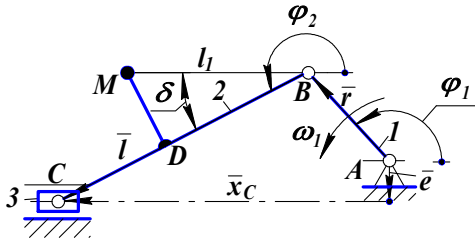


Рис. 1.7. Побудова шатунної кривої точки M кривошипно повзунного механізму

$$r := 0.05 \quad l := 0.25 \quad e := 0.01$$

$$l_{BD} := 0.15 \quad l_{DM} := 0.1 \quad N := 180$$

$$l_{BM} := \sqrt{l_{BD}^2 + l_{DM}^2} \quad \delta := \text{atan}\left(\frac{l_{DM}}{l_{BD}}\right)$$

$$\varphi_1 := 0, \frac{\pi}{N} .. 2 \cdot \pi \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \pi - \text{asin}\left(\frac{-e - r \cdot \sin(\varphi_1)}{l}\right) \quad x_M(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1) - \delta)$$

$$y_M(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1) - \delta)$$

Приклад 1.8 (рис. 1.8)
Програма PR 1.8

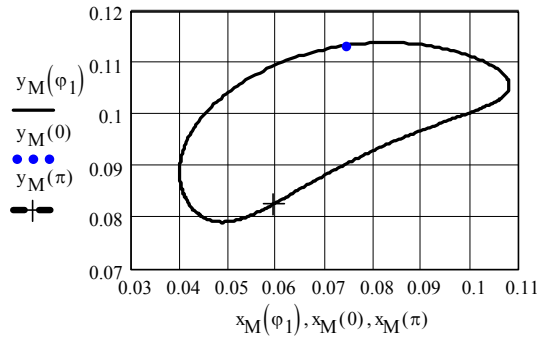
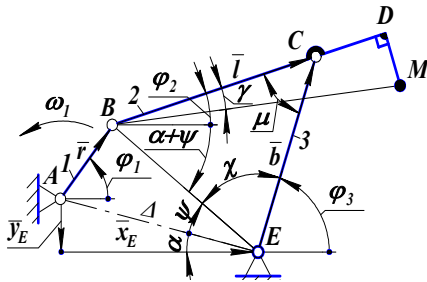


Рис. 1.8. Побудова шатунної кривої точки M шарнірного чотириланкового механізму

$$r := 0.03 \quad l := 0.09 \quad b := 0.075 \quad x_E := 0.08 \quad y_E := -0.02$$

$$l_{BD} := 0.12 \quad l_{DM} := 0.02 \quad N := 360$$

$$a := \sqrt{x_E^2 + y_E^2} \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{y_E}{x_E}\right) \quad l_{BM} := \sqrt{l_{BD}^2 + l_{DM}^2} \quad \gamma := \text{atan}\left(\frac{l_{DM}}{l_{BD}}\right)$$

$$\varphi_0 := \arccos\left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2(r+l)a}\right] \quad \mu_0 := \arccos\left[\frac{(r+l)^2 + b^2 - a^2}{2(r+l)b}\right] \quad \varphi_1 := 0, \frac{2\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1 + \alpha)} \quad \psi(\varphi_1) := \arcsin\left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha)}{\Delta(\varphi_1)}\right)$$

$$\mu(\varphi_1) := \arccos\left(\frac{r^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b}\right) \quad \delta(\varphi_1) := \arccos\left(\frac{r^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)}\right)$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) \quad \varphi_2(\varphi_1) := (\delta(\varphi_1) - \psi(\varphi_1)) - \alpha$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1) - \alpha \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_M(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1) - \gamma) \quad y_M(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1) - \gamma)$$

Приклад 1.9 (рис. 1.9)

Програма PR 1.9

$$r := 0.05 \quad a := 0.25 \quad l_{BM} := 0.45 \quad N := 360$$

$$\varphi_1 := 0, 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi \quad l_k(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)} \quad \psi(\varphi_1) := \arcsin\left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{l_k(\varphi_1)}\right)$$

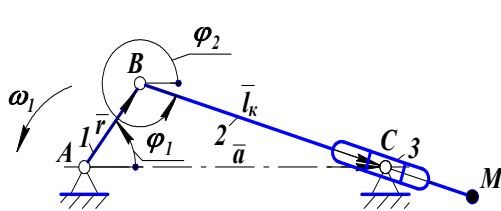
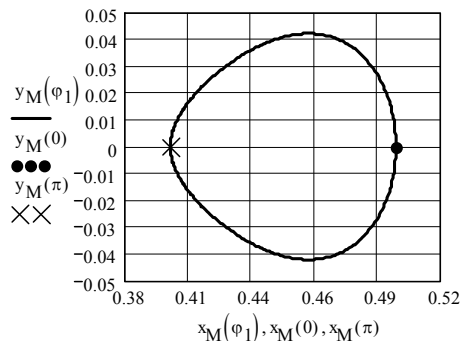


Рис. 1.8. Побудова шатунної кривої точки *M* кривошипного механізму з коливальним повзуном



$$\varphi_2(\varphi_1) := 2\pi - \psi(\varphi_1) \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_M(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \quad y_M(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

Приклад 1.10 (рис. 1.10)

Програма PR 1.10

$$r := 0.06 \quad l := 0.32 \quad b := 0.18 \quad x_D := 0.32 \quad y_D := 0.09 \quad l_{BM} := 0.2 \quad N := 360$$

$$a := \sqrt{x_D^2 + y_D^2} \quad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{y_D}{x_D}\right) \quad \varphi_1 := 0, \frac{2\pi}{N} \dots 2\pi$$

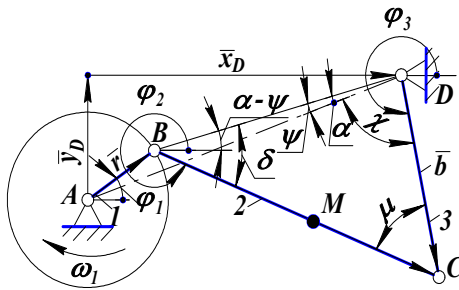
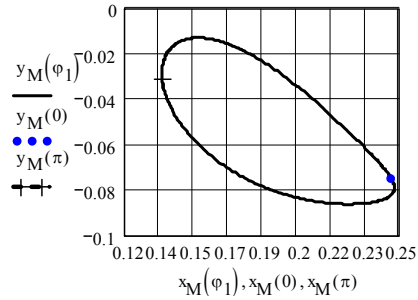


Рис. 1.10. Побудова шатунної кривої точки M шарнірного чотириланкового механізму



$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1 + \alpha)} \quad \psi(\varphi_1) := a \sin\left(r \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha)}{\Delta(\varphi_1)}\right)$$

$$\mu(\varphi_1) := \arccos\left(\frac{r^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b}\right) \quad \delta(\varphi_1) := \arccos\left(\frac{r^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)}\right)$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) \quad \varphi_2(\varphi_1) := 2\pi - \delta(\varphi_1) - \psi(\varphi_1) + \alpha$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) + \chi(\varphi_1) + \alpha \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad x_M(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$y_M(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BM} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

Приклади 1.11 – 1.16 [15]. Для механізмів, які зображенні нижче (рис. 1.11 – 1.16), треба виконати:

а) використовуючи метод замкнених векторних контурів, вивести аналітичні залежності для визначення положень ланок, їх аналогів швидкостей та прискорень;

б) знайти положення кривошипа l в заданому крайньому положенні механізму;

в) використовуючи систему Mathcad, скласти програму для обчислення кінематичних параметрів, що вказані вище (п. а);

г) побудувати діаграми лінійних (або кутових) переміщень, швидкостей і прискорень вихідної ланки 5.

Розміри ланок механізму задані у відповідних програмах. Початковою ланкою прийняти кривошип l , кутова швидкість якого $\omega_1 = 15 \text{ c}^{-1}$.

Приклад 1.11 (рис. 1.11)
Програма PR 1.11

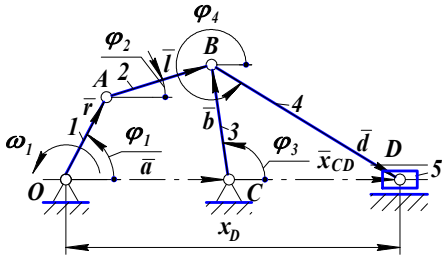


Рис. 1.11. Кінематична схема шестиланкового важільного механізму

$$r := 0.1 \quad l := 0.25 \quad a := 0.35 \quad b := 0.22$$

$$d := 0.55 \quad \omega_1 := 15 \quad N := 360$$

$$\varphi_0 := \arccos \left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2(r+l)a} \right]$$

$$\varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)}$$

$$\psi(\varphi_1) := \arcsin \left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)} \right) \quad \mu(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b} \right)$$

$$\delta(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)} \right)$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \delta(\varphi_1) + \psi(\varphi_1)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1)$$

$$\varphi_4(\varphi_1) := \arcsin \left(\frac{-b \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1))}{d} \right)$$

$$x_{CD}(\varphi_1) := b \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + d \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1))$$

$$\varphi'_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) \quad \varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1)$$

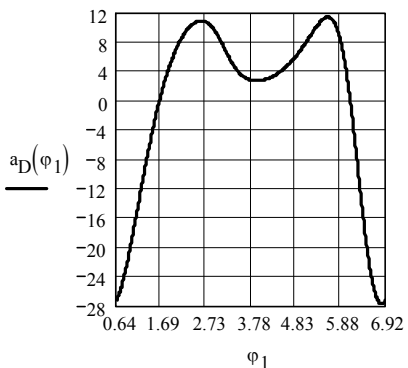
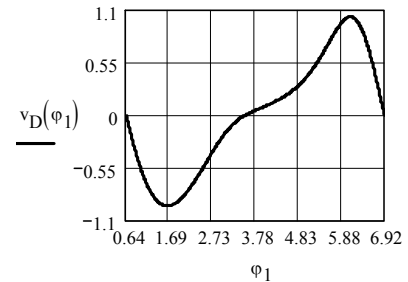
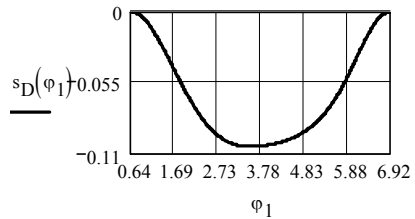
$$\varphi'_4(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_4(\varphi_1) \quad x'_{CD}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{CD}(\varphi_1)$$

$$\varphi''_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_2(\varphi_1) \quad \varphi''_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_3(\varphi_1)$$

$$\varphi''_4(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_4(\varphi_1) \quad x''_{CD}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x'_{CD}(\varphi_1)$$

$$x_{CD}(\varphi_0) = 0.44 \quad s_D(\varphi_1) := x_{CD}(\varphi_1) - x_{CD}(\varphi_0)$$

$$v_D(\varphi_1) := x'_{CD}(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_D(\varphi_1) := x''_{CD}(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$



Приклад 1.12 (рис. 1.12)

Програма PR 1.12

$$r := 0.2 \quad l_1 := 0.5 \quad l_2 := 0.3 \quad l_3 := 0.3 \quad l_4 := 0.4 \quad l_5 := 0.4 \quad e := 0.08$$

$$x_E := 0.6 \quad y_E := -0.43 \quad \varphi_0 := -18\text{deg} \quad \omega_1 := 15 \quad N := 360$$

$$a_0 := \sqrt{(l_1 - r)^2 - e^2} \quad \psi := \text{atan2}(x_E, y_E) \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \text{asin}\left[\frac{(e - r \cdot \sin(\varphi_1))}{l_1}\right] \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) + l_1 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$\varphi'_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) \quad \varphi''_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_2(\varphi_1) \quad x'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_B(\varphi_1)$$

$$x''_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x'_B(\varphi_1) \quad s_B(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) - a_0 \quad v_B(\varphi_1) := x'_B(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$a_B(\varphi_1) := x''_B(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 \quad x_A(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$\gamma := \text{acos}\left[\frac{(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right]$$

$$x_C(\varphi_1) := x_A(\varphi_1) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1) - \gamma) \quad y_C(\varphi_1) := y_A(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1) - \gamma)$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{(x_C(\varphi_1))^2 + (y_C(\varphi_1))^2}$$

$$\mu(\varphi_1) := \text{acos}\left[\frac{(l_4^2 + (l_5)^2 - \Delta(\varphi_1)^2)}{2l_4 \cdot l_5}\right]$$

$$\delta(\varphi_1) := \text{acos}\left[\frac{(l_4^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - l_5^2)}{2l_4 \cdot \Delta(\varphi_1)}\right]$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1)$$

$$\varphi_4(\varphi_1) := \psi - \delta(\varphi_1)$$

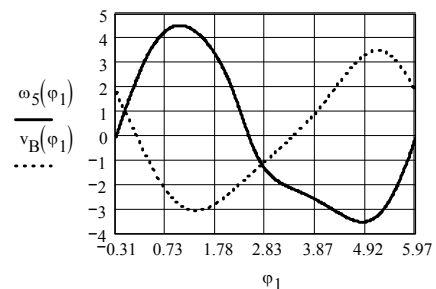
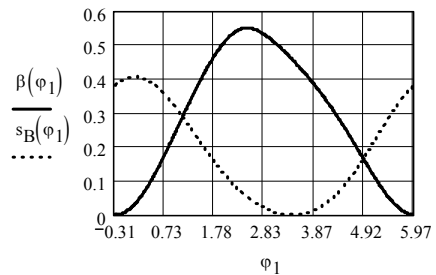
$$\varphi_5(\varphi_1) := -\pi + \psi + \chi(\varphi_1) \quad \beta_0(\varphi_1) := \varphi_5(\varphi_0)$$

$$\beta(\varphi_1) := \varphi_5(\varphi_1) - \beta_0(\varphi_1)$$

$$\varphi'_5(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_5(\varphi_1)$$

$$\varphi''_5(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_5(\varphi_1) \quad \omega_5(\varphi_1) := \varphi'_5(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$\varepsilon_5(\varphi_1) := \varphi''_5(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$



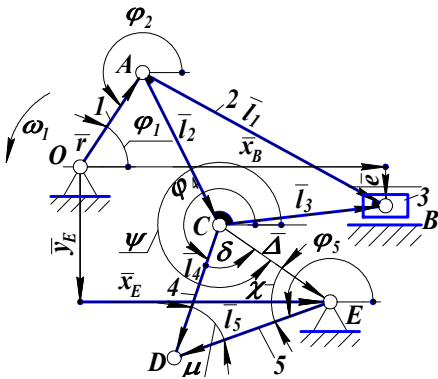
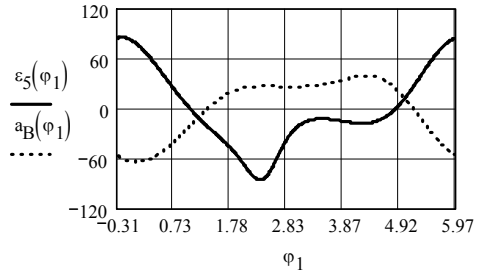


Рис. 1.12. Кінематична схема шестиланкового важільного механізму



Приклад 1.13 (рис. 1.13)
Програма PR 1.13

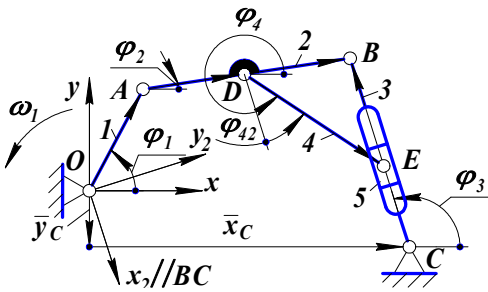
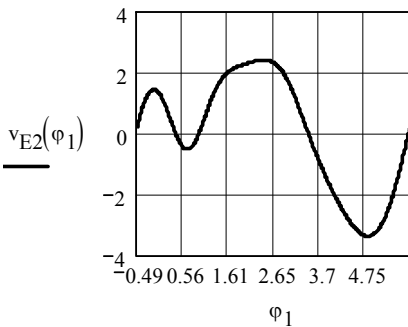
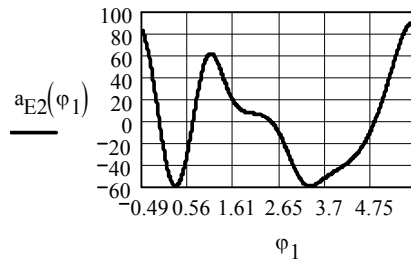
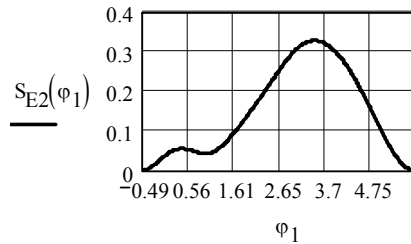


Рис. 1.13. Кінематична схема шестиланкового важільного механізму



$r := 0.15$ $l := 0.35$ $b := 0.3$
 $x_C := 0.13$ $y_C := 0.45$ $l_{AD} := 0.15$
 $l_4 := 0.5$ $\omega_1 := 15$ $\varphi_0 := -28\text{deg}$
 $N := 360$

$$a := \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{y_C}{x_C}\right) \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)} \quad \psi(\varphi_1) := \text{asin}\left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)}\right)$$

$$\begin{aligned} \mu(\varphi_1) &:= \arccos\left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b}\right) & \delta(\varphi_1) &:= \arccos\left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)}\right) \\ \chi(\varphi_1) &:= \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) & \varphi_2(\varphi_1) &:= \delta(\varphi_1) + \psi(\varphi_1) - \alpha \\ \varphi_3(\varphi_1) &:= \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1) - \alpha \\ x_A(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) & y_A(\varphi_1) &:= r \cdot \sin(\varphi_1) & x_D(\varphi_1) &:= x_A(\varphi_1) + l_{AD} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \\ y_D(\varphi_1) &:= y_A(\varphi_1) + l_{AD} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) \\ x_{D2}(\varphi_1) &:= x_D(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + y_D(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \\ y_{D2}(\varphi_1) &:= y_D(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) - x_D(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)) \\ x_{C2}(\varphi_1) &:= x_C(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + y_C(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \\ y_{C2}(\varphi_1) &:= -y_C \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) - x_C \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)) & \varphi_{42}(\varphi_1) &:= \arcsin\left[\frac{(y_{C2}(\varphi_1) - y_{D2}(\varphi_1))}{l_4}\right] \\ y_{E2}(\varphi_1) &:= y_{D2}(\varphi_1) + l_4 \cdot \cos(\varphi_{42}(\varphi_1)) & y'_{E2}(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} y_{E2}(\varphi_1) & y''_{E2}(\varphi_1) &:= \frac{d^2}{d\varphi_1^2} y_{E2}(\varphi_1) \\ S_{E2}(\varphi_1) &:= y_{E2}(\varphi_1) - y_{E2}(\varphi_0) & v_{E2}(\varphi_1) &:= y'_{E2}(\varphi_1) \cdot \omega_1 & a_{E2}(\varphi_1) &:= y''_{E2}(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 \end{aligned}$$

Примітка. Параметри $x_{D2}, y_{D2}, x_{C2}, y_{C2}, \varphi_{42}$ та їх похідні, а також S_{E2}, v_{E2}, a_{E2} знайдені в 2-ій системі координат $x_2 O y_2$, в якій вісь абсцис паралельна коромислу BC .

Приклад 1.14 рис. 1.14)

Програма PR 1.14

$$\begin{aligned} r &:= 0.15 & a &:= 0.25 & e &:= 0.15 & l_{BC} &:= 0.5 & d &:= 0.3 & \omega_1 &:= 15 & N &:= 360 \\ \delta_0 &:= \arccos\left(\frac{r}{a}\right) & \varphi_0 &:= \delta_0 - \frac{\pi}{2} & \beta_0 &:= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r}{a}\right) & \varphi_1 &:= \varphi_0, \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi + \varphi_0 \\ \varphi_k(\varphi_1) &:= \operatorname{atan}\left[\frac{(a + r \cdot \sin(\varphi_1))}{r \cdot \cos(\varphi_1)}\right] \\ \varphi_3(\varphi_1) &:= \begin{cases} R \leftarrow \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leftarrow \pi + \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3\pi}{2} \\ R \leftarrow \varphi_k(\varphi_1) & \text{if } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq 2\pi + \varphi_0 \end{cases} \end{aligned}$$

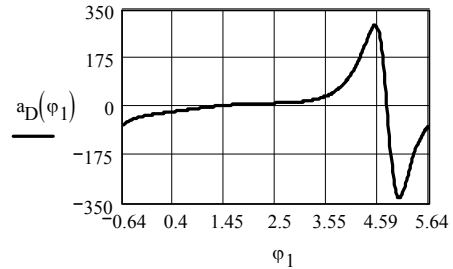
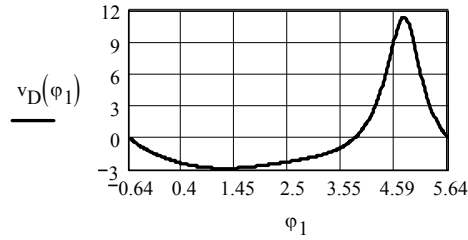
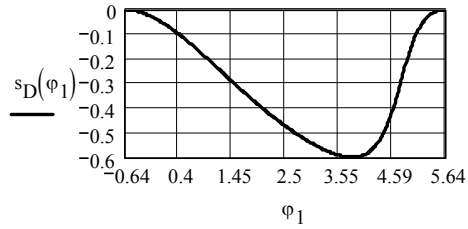
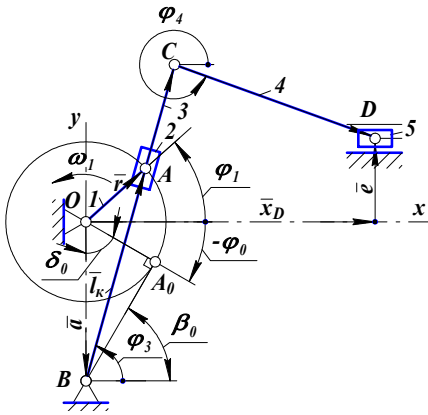


Рис. 1.14. Кінематична схема механізму поперечно-стругального верстату

$$l_k(\varphi_1) := r \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3(\varphi_1))} \quad \beta(\varphi_1) := \varphi_3(\varphi_1) - \beta_0$$

$$x_C(\varphi_1) := l_{BC} \cos(\varphi_3(\varphi_1))$$

$$y_C(\varphi_1) := -a + l_{BC} \sin(\varphi_3(\varphi_1))$$

$$\varphi_4(\varphi_1) := \operatorname{asin}\left(\frac{e + a - l_{BC} \sin(\varphi_3(\varphi_1))}{d}\right)$$

$$x_D(\varphi_1) := l_{BC} \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + d \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1))$$

$$s_D(\varphi_1) := x_D(\varphi_1) - x_D(\varphi_0) \quad x'_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_D(\varphi_1) \quad x''_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x'_D(\varphi_1)$$

$$v_D(\varphi_1) := x'_D(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_D(\varphi_1) := x''_D(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

Приклад 1.15 (рис. 1.15)
Програма PR 1.15

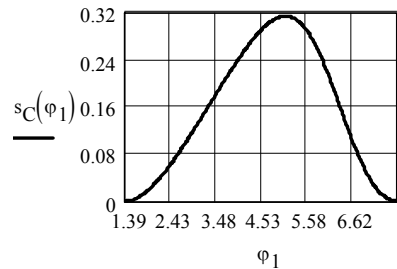
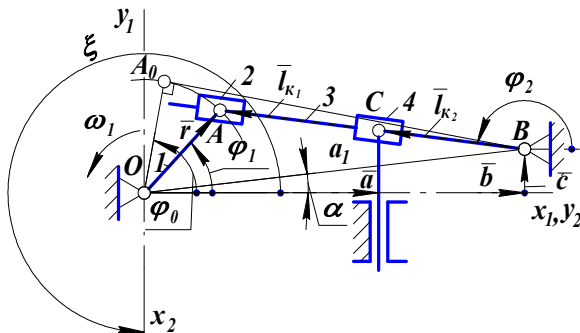


Рис. 1.15. Кінематична схема механізму поперечно-стругального верстату

$$r := 0.15 \quad b := 0.55 \quad c := 0.05$$

$$\omega_1 := 15 \quad N := 360$$

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{c}{b}\right) \quad a_1 := \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\delta_0 := \operatorname{asin}\left(\frac{r}{a_1}\right) \quad \varphi_0 := \frac{\pi}{2} - \delta_0 + \alpha \quad \xi := \frac{-\pi}{2}$$

$$\varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} .. 2\pi + \varphi_0$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \operatorname{atan2}(r \cdot \cos(\varphi_1) - b, r \cdot \sin(\varphi_1) - c)$$

$$l_k(\varphi_1) := \frac{r \cdot \cos(\varphi_1) - b - c}{\cos(\varphi_3(\varphi_1))} \quad \varphi_{k2}(\varphi_1) := \varphi_3(\varphi_1) - \xi$$

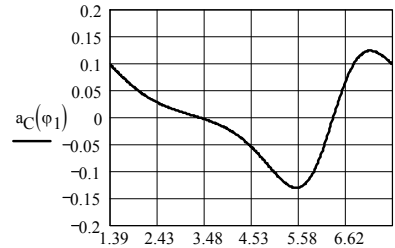
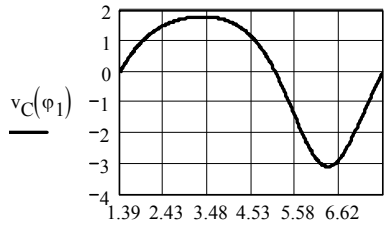
$$x_{B2}(\varphi_1) := b \cdot \cos(\xi) + c \cdot \sin(\xi)$$

$$y_{B2}(\varphi_1) := c \cdot \cos(\xi) - b \cdot \sin(\xi)$$

$$l_{k2}(\varphi_1) := \frac{(a_1 \cdot \cos(\xi) - y_{B2}(\varphi_1))}{\sin(\varphi_{k2}(\varphi_1))} \quad x_{C2}(\varphi_1) := x_{B2}(\varphi_1) + l_{k2}(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_{k2}(\varphi_1))$$

$$x_C(\varphi_1) := x_{C2}(\varphi_1) \quad x'_C(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_C(\varphi_1) \quad x''_C(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x'_C(\varphi_1)$$

$$s_C(\varphi_1) := x_C(\varphi_1) - x_C(\varphi_0) \quad v_C(\varphi_1) := x'_C(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_C(\varphi_1) := x''_C(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$



Приклад 1.16 (рис. 1.16)
Програма PR 1.16

$$r := 0.11 \quad a := 0.3 \quad b := 0.25 \quad \omega_1 := 15 \quad N := 360$$

$$l_{k0} := \sqrt{a^2 - r^2} \quad \varphi_0 := \frac{\pi}{2} - \operatorname{acos}\left(\frac{r}{a}\right) \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} .. 2\pi + \varphi_0 \quad x_A(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad l_{k1}(\varphi_1) := \sqrt{x_A(\varphi_1)^2 + (a - y_A(\varphi_1))^2}$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \operatorname{atan2}(-x_A(\varphi_1), a - y_A(\varphi_1)) \quad \varphi'_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\varphi''_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_2(\varphi_1) \quad \omega_2(\varphi_1) := \varphi'_2(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \varepsilon_2(\varphi_1) := \varphi''_2(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

$$l_{k2}(\varphi_1) := \frac{(a + b - y_A(\varphi_1))}{\sin(\varphi_2(\varphi_1))} \quad x_C(\varphi_1) := x_A(\varphi_1) + l_{k2}(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$s_C(\varphi_1) := x_C(\varphi_1) - x_C(\varphi_0) \quad x'_C(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_C(\varphi_1) \quad x''_C(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x'_C(\varphi_1)$$

$$v_C(\varphi_1) := x'_C(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_C(\varphi_1) := x''_C(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

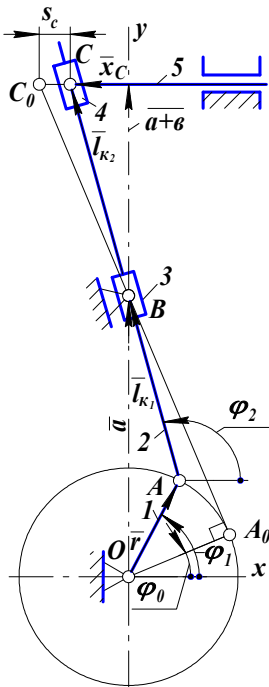
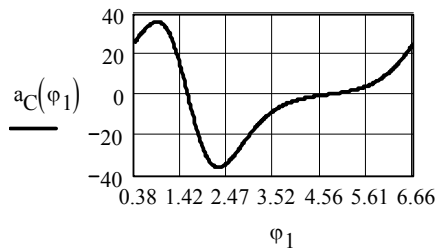
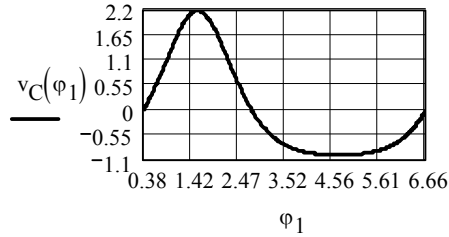
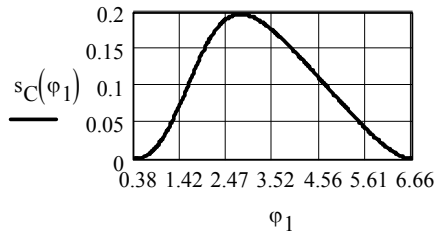


Рис. 1.16. Кінематична схема механізму поперечно-стругального верстату



1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Розглянутий метод замкнутих векторних контурів, як уже відзначалось раніше (п. 1.3), можна використати і для більш складніших механізмів, до яких входять декілька структурних груп II класу. При цьому потрібно розглянути таку ж саму кількість замкнутих векторних контурів. Для кожного контуру окремо складають векторні рівняння замкнутості, проектують їх на координатні осі і одержують рівняння проєкцій, за яким знаходять положення ланок, потім шляхом диференціювання рівнянь проєкцій визначають аналоги швидкостей і прискорень. Проте остаточні залежності для з'ясування кінематичних параметрів у таких механізмах залежать не тільки від кількості та виду груп, які складають механізм, але й від положення точок приєднання до ланок попередніх груп і варіантів зборки. Це призводить до того, що для кожного механізму одержують свої алгоритми і досить громіздкі програми

для ЕОМ, які вимагають значних затрат часу на їх складання і відладку. Скласти бібліотеку індивідуальних програм для всіх механізмів недоцільно і неможливо. Раціональніше створити уніфіковані блоки (підпрограми), використовуючи які можна скласти програму кінематичного дослідження будь-якого важільного механізму [4, 11–15]. Як показано далі, такими підпрограмами може бути система залежностей для визначення кінематичних параметрів структурної групи, якщо задані кінематичні параметри (положення, швидкість, прискорення) елементів кінематичних пар, якими ці групи приєднуються. Такий метод зводить аналітичне дослідження механізмів до розгляду окремих структурних груп, методика кінематичного дослідження яких не залежить від механізму, у який вона входить. Це дає змогу усунути деякий різнобій, який має місце у теорії механізмів і машин: в одних випадках при дослідженнях механізм розбивають на структурні групи (побудова положень механізмів, плани швидкостей, силовий розрахунок), а в інших (аналітична кінематика) – на замкнуті векторні контури, що залежать не тільки від структурної групи.

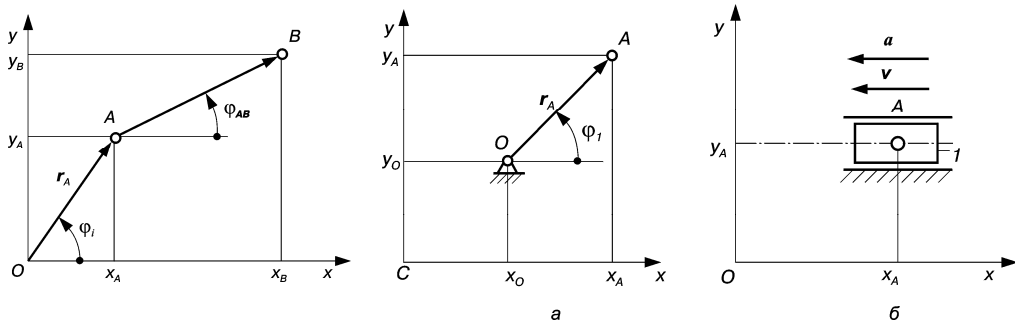
Визначення положення точки і ланки у плоскому русі. Положення будь-якої точки A на координатній площині (рис. 1.17) можна задати координатами x_A і y_A , або радіусом-вектором \vec{r}_A відносно початку координат O , положення точки B – координатами x_B, y_B і т. д. Модуль радіуса-вектора і напрямний кут φ_i зв'язані з координатами, наприклад точки A (x_A, y_A) залежностями

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}; \quad \varphi_i = \arctg \frac{y_A}{x_A} \quad (1.22)$$

або, навпаки, координати точки A можна виразити через модуль радіуса-вектора і напрямний кут:

$$x_A = r_A \cos \varphi_i; \quad y_A = r_A \sin \varphi_i. \quad (1.23)$$

Положення будь-якої ланки AB на координатній площині можна задати координатами двох точок $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ або координатою однієї точки, наприклад точки A , довжиною ланки AB і значенням напрямного кута φ_{AB} .



1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Рис. 1.17. Положення точки і ланки у плоскому русі

Рис. 1.18. Початкові ланки механізмів:
а) кривошип; б) повзун

Кінематика механізму I класу. Як відомо, початкова ланка і стаяк утворюють механізм I класу (рис. 1.18). Залежно від того, яку кінематичну пару утворюють ланки механізму – обертову (рис. 1.18, а) чи поступальну (рис. 1.18, б), – початкова ланка здійснює відносно стаяка відповідно обертовий або поступальний рух. При обертовому русі положення кривошипа OA визначаються кутом φ_1 , при поступальному – переміщенням повзуна s_1 . Параметр φ_1 або s_1 називають узагальненою координатою, яка визначає положення всіх ланок механізму.

Координати точки A кривошипа OA у системі координат xCy мають вигляд

$$x_A = x_O + l_{OA} \cos \varphi_1; y_A = y_O + l_{OA} \sin \varphi_1, \quad (1.24)$$

де x_O, y_O – координати центра обертання кривошипа; l_{OA} – дійсна довжина кривошипа.

Якщо початок координат C і центр обертання ланки збігаються, залежності (1.24) набувають вигляду

$$x_A = l_{OA} \cos \varphi_1; y_A = l_{OA} \sin \varphi_1. \quad (1.25)$$

Тут і далі знаки координат або інших величин визначаються знаками тригонометричних функцій.

Продиференціювавши рівняння (1.24) або (1.25) за узагальненою координатою φ_1 , одержимо аналоги проєкцій швидкості точки A на координатні осі x і y :

$$x'_A = -l_{OA} \sin \varphi_1; y'_A = l_{OA} \cos \varphi_1, \quad (1.26)$$

$$\text{де } x'_A = \frac{dx_A}{d\varphi_1}; y'_A = \frac{dy_A}{d\varphi_1}; \varphi'_1 = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = 1.$$

Повторним диференціюванням рівняння (1.25) знаходимо аналоги проєкцій прискорень точки A на ці самі осі:

$$x''_A = -l_{OA} \cos \varphi_1 = -y'_A; y''_A = -l_{OA} \sin \varphi_1 = x'_A, \quad (1.27)$$

$$\text{де } x''_A = \frac{d(x'_A)}{d\varphi_1} = \frac{d^2 x_A}{d\varphi_1^2}; y''_A = \frac{d(y'_A)}{d\varphi_1} = \frac{d^2 y_A}{d\varphi_1^2}.$$

Для зручності одержання основної (головної) програми кінематичного дослідження за допомогою ЕОМ можна скласти окрему підпрограму, яка дає змогу при заданих координатах його центра обертання (x_O, y_O), довжини кривошипа l_{OA} і значення узагальненої координати φ_1 (у радіанах) визначити кінематичні параметри руху кривошипа ($x_A, y_A, x'_A, y'_A, x''_A, y''_A$), використовуючи залежності (1.24) – (1.27).

Розділ 1. Кінематичне дослідження механізмів

Підпрограма для розрахунку *механізму першого класу* в цьому випадку буде мати наступний вигляд:

```

KM1(x0, y0, R, φ1, ResultType) := for i ∈ 1..N
    xA ← R · cos(φ1) + x0
    yA ← R · sin(φ1) + y0
    Result ← xA if ResultType = 0
    Result ← yA if ResultType = 1
    Result
    
```

В цій підпрограмі: N – кількість положень механізму для розрахунку. Змінна *ResultType* визначає, яке значення буде повертати підпрограма після завершення роботи: якщо $ResultType=0$, то x_A , якщо $ResultType=1$ – y_A .

Структурна група I виду. Для кінематичного дослідження цієї групи треба знати такі величини (рис. 1.19):

- координати точок $M (x_M, y_M)$ і $N (x_N, y_N)$, якими група приєднується до основного механізму, аналоги проекцій їхніх швидкостей і прискорень за узагальненою координатою $\varphi_1 - x'_M, y'_M, x'_N, y'_N, x''_M, y''_M, x''_N, y''_N$;

- лінійні та кутові розміри ланок – $l_i = l_{MD}, l_j = l_{ND}, l_{MS_i}, l_{NS_j}, l_{MP_i}, l_{NP_j}, \gamma_{S_i}, \gamma_{S_j}, \gamma_{P_i}, \gamma_{P_j}$, де S_i і S_j – центри мас відповідно ланок i та j ($i \neq j$); P_i і P_j – точки приєднання наступних структурних груп або інші характерні точки відповідно ланок i та j (на рис. 1.19 точки P і S збігаються, а тому кути $\gamma_{P_i} = \gamma_{S_i}, \gamma_{P_j} = \gamma_{S_j}$).

Напрямки координатних осей x і y для цієї групи можуть бути довільними, а тому залишимо їх такими, які вони були в основному механізмі, або виберемо так, щоб це було зручно при розгляді наступних структурних груп.

Примітка. Параметри точок $B_1, B_2, C, D, E, E_2, F, F_2, M_2, N, N_2, S_j$ позначені аналогічно параметрам точок A, M, S_i .

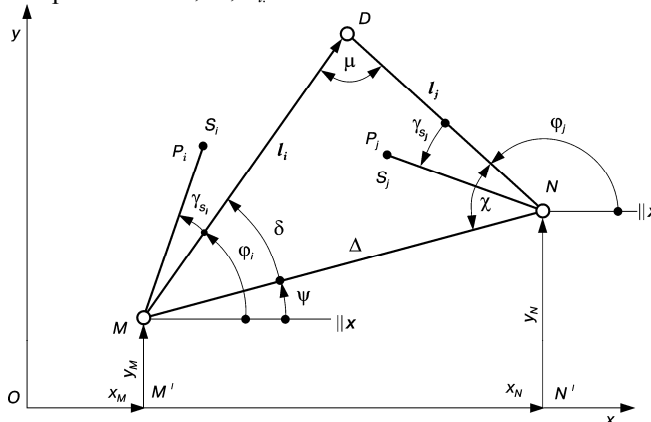


Рис. 1.19. Структурна група II класу I виду

Положення ланок i та j визначається кутами φ_i і φ_j , а допоміжного вектора Δ – кутом ψ . Модуль вектора Δ та його кут нахилу знаходимо за формулами

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}. \quad (1.28)$$

Чверть тригонометричного кола, в якому розмішений кут ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$), цілком визначається знаками чисельника і знаменника виразу (1.28), оскільки $\operatorname{tg}\psi = \sin\psi/\cos\psi$.

Розглянувши ΔMDN , одержимо

$$\mu = \arccos \frac{l_i^2 + l_j^2 - \Delta^2}{2l_i l_j}; \quad \delta = \arccos \frac{l_i^2 + \Delta^2 - l_j^2}{2l_i \Delta};$$

$$\chi = \pi - \delta - \mu. \quad (1.29)$$

Тоді

$$\varphi_i = \psi + \delta; \quad \varphi_j = \pi + \psi - \chi. \quad (1.30)$$

Знаючи координати точок M і N , а також кути φ_i і φ_j , можна визначити координати центрів мас S_i і S_j (або точок P_i і P_j):

$$x_{S_i} = x_M + l_{MS_i} \cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \quad y_{S_i} = y_M + l_{MS_i} \sin(\varphi_i + \gamma_{S_i});$$

$$x_{S_j} = x_N + l_{NS_j} \cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}); \quad y_{S_j} = y_N + l_{NS_j} \sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}). \quad (1.31)$$

Для визначення аналогів кутових швидкостей і прискорень складемо векторне рівняння замкнутості контуру $OM'MDNN'$

$$\bar{x}_M + \bar{y}_M + \bar{l}_i = \bar{x}_N + \bar{y}_N + \bar{l}_j. \quad (1.32)$$

У проекції на вісь x рівняння (1.18) набуває вигляду

$$x_M \cos 0 + y_M \cos \frac{\pi}{2} + l_i \cos \varphi_i = x_N \cos 0 + y_N \cos \frac{\pi}{2} + l_j \cos \varphi_j. \quad (1.33)$$

Продиференціювавши рівняння (1.33) за узагальненою координатою φ_1 , запишемо

$$x'_M \cos 0 + y'_M \cos \frac{\pi}{2} - l_i \varphi'_i \sin \varphi_i = x'_N \cos 0 + y'_N \cos \frac{\pi}{2} - l_j \varphi'_j \sin \varphi_j \quad (1.34)$$

де

$$x'_M = \frac{dx_M}{d\varphi_1}; \quad x'_N = \frac{dx_N}{d\varphi_1}; \quad \varphi'_i = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}; \quad \varphi'_j = \frac{d\varphi_j}{d\varphi_1} \text{ і т. д.}$$

У цьому рівнянні тільки дві величини невідомі – φ'_i і φ'_j . Для їхнього визначення послідовно повертаємо систему координат xOy на кути $(-\varphi_j)$ і $(-\varphi_i)$, після відповідних перетворень одержимо

$$\varphi'_i = \frac{(x'_M - x'_N) \cos \varphi_j + (y'_M - y'_N) \sin \varphi_j}{l_i \sin(\varphi_i - \varphi_j)};$$

$$\varphi'_j = \frac{(x'_N - x'_M) \cos \varphi_i + (y'_N - y'_M) \sin \varphi_i}{l_j \sin(\varphi_j - \varphi_i)}. \quad (1.35)$$

Щоб визначити аналоги прискорень $\varphi''_i = \frac{d^2 \varphi_i}{d\varphi_1^2}$, $\varphi''_j = \frac{d^2 \varphi_j}{d\varphi_1^2}$, необхідно продиференціювати за узагальненою координатою рівняння (1.34):

$$x''_M \cos 0 + y''_M \cos \frac{\pi}{2} - l_i \varphi''_i \sin \varphi_i - l_i (\varphi'_i)^2 \cos \varphi_i =$$

$$= x''_N \cos 0 + y''_N \cos \frac{\pi}{2} - l_j \varphi''_j \sin \varphi_j - l_j (\varphi'_j)^2 \cos \varphi_j. \quad (1.36)$$

Здійснивши знову поворот системи координат на кути $(-\varphi_j)$ і $(-\varphi_i)$, знайдемо

$$\left. \begin{aligned} \varphi''_i &= \frac{(x''_M - x''_N) \cos \varphi_j + (y''_M - y''_N) \sin \varphi_j - l_i (\varphi'_i)^2 \cos(\varphi_i - \varphi_j) + l_j (\varphi'_j)^2}{l_i \sin(\varphi_i - \varphi_j)}; \\ \varphi''_j &= \frac{(x''_N - x''_M) \cos \varphi_i + (y''_N - y''_M) \sin \varphi_i - l_j (\varphi'_j)^2 \cos(\varphi_j - \varphi_i) + l_i (\varphi'_i)^2}{l_j \sin(\varphi_j - \varphi_i)} \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Використовуючи залежності (1.28)–(1.30), (1.35), (1.37), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах руху точок M і D та розмірів ланок i, j визначити кутові переміщення φ_i і φ_j , їхні аналоги швидкостей φ'_i і φ'_j та прискорень φ''_i і φ''_j .

Аналоги проекцій швидкостей і прискорень центрів мас S_i і S_j одержимо шляхом диференціювання за узагальненою координатою φ_1 рівнянь (1.31):

$$\left. \begin{aligned} x'_{S_i} &= x'_M - l_{MS_i} \varphi'_i \sin(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \quad y'_{S_i} = y'_M + l_{MS_i} \varphi'_i \cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \\ x'_{S_j} &= x'_N - l_{NS_j} \varphi'_j \sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}); \quad y'_{S_j} = y'_N + l_{NS_j} \varphi'_j \cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}); \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

$$\left. \begin{aligned} x''_{S_i} &= x''_M - l_{MS_i} \varphi''_i \sin(\varphi_i + \gamma_{S_i}) - l_{MS_i} (\varphi'_i)^2 \cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \\ y''_{S_i} &= y''_M + l_{MS_i} \varphi''_i \cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}) - l_{MS_i} (\varphi'_i)^2 \sin(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \\ x''_{S_j} &= x''_N - l_{NS_j} \varphi''_j \sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}) - l_{NS_j} (\varphi'_j)^2 \cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}); \\ y''_{S_j} &= y''_N + l_{NS_j} \varphi''_j \cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}) - l_{NS_j} (\varphi'_j)^2 \sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}) \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Координати будь-якої точки (P_i або P_j), що лежать на ланках групи, та їхні аналоги швидкостей і прискорень визначаються так само, як і координати точок S_i і S_j .

Якщо точки M або N нерухомі, а кути γ_S, γ_P дорівнюють нулю, то залежності (1.28)–(1.39) дещо спрощуються.

Для визначення кінематичних параметрів точок S_i, S_j, P_i, P_j або інших точок, які належать ланкам i або j (див. рис. 1.19), можна скласти окрему підпрограму, використавши залежності (1.31), (1.38), (1.39), яка дає змогу при заданих кінематичних параметрах руху будь-якої точки M (або N), параметрів руху ланки i , якій належить ця точка, відрізка l_{MS_i} і кута γ_{S_i} визначити координати точки $S_i(x_{S_i}, y_{S_i})$ та їхні аналоги швидкостей і прискорень $x'_{S_i}, y'_{S_i}, x''_{S_i}, y''_{S_i}$.

Залежностями (1.28)–(1.39) можна користуватися при будь-якому розміщенні точки D відносно лінії MN , якщо у цій групі позначати точкою M таку кінематичну пару, яка при обході контуру MDN , наприклад, за рухом годинникової стрілки, дає можливість зберегти такий же порядок позначень. Це видно з рис. 1.20, де показано два можливі варіанти складання групи I виду. Початок векторів \bar{l}_i і \bar{l}_j , як і на рис. 1.19, розмістимо у точці M , початок вектора \bar{l}_j – у точці N , а напрямні кути ϕ_i, ϕ_j і ψ будемо відраховувати від лінії, яка проведена через початок відповідного вектора

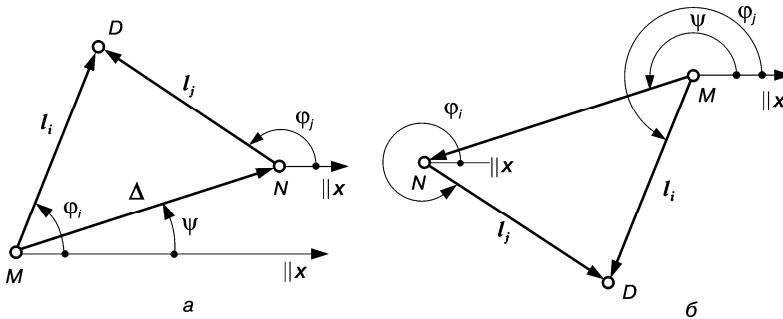


Рис. 1.20. Два варіанти складання групи I виду

паралельно осі x .

Якщо на рис. 1.20, б позначення кінематичних пар змінити, то їхній порядок при обході контуру за рухом годинникової стрілки буде відрізнятися від показаного раніше (замість MDN буде MND). В останньому випадку залежності (1.30) набудуть іншого вигляду. Дотримуючись цього правила, при кінематичному дослідженні механізмів немає необхідності окремо записувати залежності і розробляти програми для двох варіантів складання групи; правильність розрахунків забезпечується наведеними залежностями і відповідним позначенням кінематичних пар M, N , ланок i, j та їхніх параметрів.

Підпрограма для розрахунку *структурної групи I-го виду* має наступний вигляд:

$$\text{KG1}(x_M, y_M, x_N, y_N, l_i, l_j, \text{ResultType}) := \left\{ \begin{array}{l}
 MN \leftarrow \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\
 \psi \leftarrow \text{atan2}(x_N - x_M, y_N - y_M) \\
 \mu_j \leftarrow \text{acos}\left(\frac{l_i^2 + l_j^2 - MN^2}{2 \cdot l_i \cdot l_j}\right) \\
 \Delta \leftarrow \text{acos}\left(\frac{l_i^2 - l_j^2 + MN^2}{2 \cdot l_i \cdot MN}\right) \\
 \kappa \leftarrow \pi - \Delta - \mu_j \\
 \varphi_i \leftarrow \psi + \Delta \\
 \varphi_j \leftarrow \psi - \kappa + \pi \\
 \text{Result} \leftarrow \varphi_i \text{ if } \text{ResultType} = 0 \\
 \text{Result} \leftarrow \varphi_j \text{ if } \text{ResultType} = 1 \\
 \text{Result}
 \end{array} \right.$$

Для визначення кінематичних параметрів точок S_i, S_j, P_i, P_j , або інших точок, що належать ланкам i та j , можна використати окрему підпрограму *KDT*, що дозволяє при заданих координатах будь-якої точки (наприклад, M) відповідної ланки, та їх аналогів $(x_M, y_M, x'_M, y'_M, x''_M, y''_M)$, відстані $l_{M_{S_i}}$ від базової до шуканої точки, куті γ_{S_i} , що визначає положення точки S_i , а також куті φ_i та його аналогів, що визначає положення базової ланки (рис. 1.19).

Підпрограма *KDT* для визначення кінематичних параметрів *додаткової точки ланки* має наступний вигляд:

$$\text{KDT}(x_M, y_M, M_{S_i}, \gamma_{S_i}, \varphi, \text{ResultType}) := \left\{ \begin{array}{l}
 x_{S_i} \leftarrow x_M + M_{S_i} \cdot \cos(\varphi + \gamma_{S_i}) \\
 y_{S_i} \leftarrow y_M + M_{S_i} \cdot \sin(\varphi + \gamma_{S_i}) \\
 \text{Result} \leftarrow x_{S_i} \text{ if } \text{ResultType} = 0 \\
 \text{Result} \leftarrow y_{S_i} \text{ if } \text{ResultType} = 1 \\
 \text{Result}
 \end{array} \right.$$

Структурна група II виду. Ланки цієї групи (рис. 1.21), приєднуючись до основного механізму, утворюють з його ланками обертову M і поступальну N пари. Напрямна повзуна N або центр шарніру M можуть бути рухомі або нерухомі (кожний окремо).

1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Для кінематичного дослідження цієї групи необхідно знати такі величини:

- координати x_M і y_M точки M шарнірного приєднання групи до основного механізму у системі координат xOy та їхні аналоги швидкостей і прискорень x'_M, y'_M, x''_M, y''_M ;
- координати x_F і y_F будь-якої точки F (або F_1) у системі координат xOy , через яку проходить вісь напрямної повзуна N і кут нахилу ξ цієї напрямної до осі x , а також їхні аналоги швидкостей і прискорень $x'_F, y'_F, x''_F, y''_F, \xi', \xi''$;
- лінійні та кутові розміри ланок MD і DN : $l_i, l_j, \varphi_{j_2}, l_{MS_i}, l_{NS_j}, \gamma_{S_i}, \gamma_{S_j}$, де S_i і S_j – будь-які точки, які належать відповідно шатуну MD і повзуну ND .

Залежності для визначення кінематичних параметрів тут зручно записувати у системі x_2Oy_2 , причому **вісь x_2 направляти паралельно напрямній FF_1** у бік **додатної проекції вектора l_i** на цю вісь. Всі вектори і кути відраховуємо так, як показано на рис. 1.21. Координати точок M, F, N , кути φ_i, φ_j та їхні аналоги швидкостей і прискорень у системі координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2. Тоді, використовуючи рівняння перетворення координат для плоскої системи, записуємо відомі координати точок M і F у другій системі координат:

$$\begin{aligned} x_{M_2} &= x_M \cos \xi + y_M \sin \xi; & y_{M_2} &= y_M \cos \xi - x_M \sin \xi; \\ x_{F_2} &= x_F \cos \xi + y_F \sin \xi; & y_{F_2} &= y_F \cos \xi - x_F \sin \xi. \end{aligned} \quad (1.40)$$

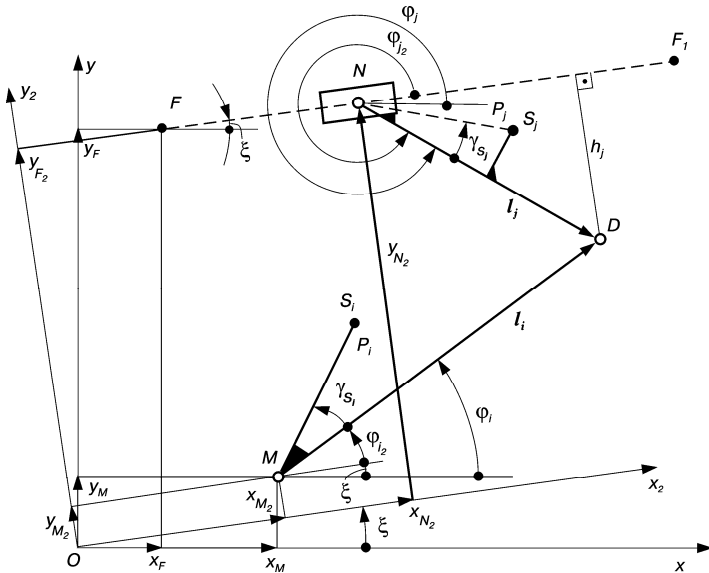


Рис. 1.21. Структурна група II класу II виду

Розділ 1. Кінематичне дослідження механізмів

Кут, який визначає положення шатуна MD , можна знайти за такою очевидною залежністю (див. рис. 1.21):

$$\varphi_{i_2} = \arcsin \frac{y_{F_2} - y_{M_2} + h_j}{l_i}, \quad (1.41)$$

де $h_j = l_j \sin \varphi_{j_2}$ – відстань точки D від напрямної FF_1 .

У системі координат xOy положення ланок групи визначається кутами

$$\varphi_i = \varphi_{i_2} + \xi; \quad \varphi_j = \varphi_{j_2} + \xi. \quad (1.42)$$

Основні залежності для визначення кінематичних параметрів ланок можна одержати, якщо записати векторне рівняння:

$$\bar{x}_{M_2} + \bar{y}_{M_2} + \bar{l}_i = \bar{x}_{N_2} + \bar{y}_{N_2} + \bar{l}_j. \quad (1.43)$$

Із рівнянь проєкцій на осі x_2 і y_2 знайдемо

$$x_{N_2} = x_{M_2} + l_i \cos \varphi_{i_2} - l_j \cos \varphi_{j_2}; \quad y_{N_2} = y_{M_2} + l_i \sin \varphi_{i_2} - l_j \sin \varphi_{j_2} \quad (1.44)$$

Слід зазначити, що у цій групі $y_{N_2} = y_{F_2}$; $\varphi_{j_2} = \text{const}$.

Шляхом диференціювання рівнянь (1.44) за узагальненою координатою φ_1 визначаємо аналоги швидкостей і прискорень (або їхні проєкції) для ланок групи

$$\left. \begin{aligned} x'_{N_2} &= x'_{M_2} - l_i \varphi'_{i_2} \sin \varphi_{i_2}; \quad y'_{N_2} = y'_{M_2} + l_i \varphi'_{i_2} \cos \varphi_{i_2}; \\ \varphi'_{i_2} &= \frac{d\varphi_{i_2}}{d\varphi_1} = \frac{y'_{N_2} - y'_{M_2}}{l_i \cos \varphi_{i_2}}; \quad \varphi'_i = \varphi'_{i_2} + \xi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

$$\left. \begin{aligned} x''_{N_2} &= x''_{M_2} - l_i \varphi''_{i_2} \sin \varphi_{i_2} - l_i (\varphi'_{i_2})^2 \cos \varphi_{i_2}; \quad y''_{N_2} = y''_{M_2} + l_i \varphi''_{i_2} \cos \varphi_{i_2} - l_i (\varphi'_{i_2})^2 \sin \varphi_{i_2}; \\ \varphi''_{i_2} &= \frac{d^2 \varphi_{i_2}}{d\varphi_1^2} = \frac{y''_{N_2} - y''_{M_2} + l_i (\varphi'_{i_2})^2 \sin \varphi_{i_2}}{l_i \cos \varphi_{i_2}}; \quad \varphi''_i = \varphi''_{i_2} + \xi''. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

де

$$\left. \begin{aligned} x'_{M_2} &= x'_M \cos \xi - x_M \xi' \sin \xi + y'_M \sin \xi + y_M \xi' \cos \xi; \\ y'_{M_2} &= y'_M \cos \xi - y_M \xi' \sin \xi - x'_M \sin \xi - x_M \xi' \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

$$\left. \begin{aligned} x''_{M_2} &= x''_M \cos \xi - 2x'_M \xi' \sin \xi - x_M \xi'' \sin \xi - x_M (\xi')^2 \cos \xi + \\ &+ y''_M \sin \xi + 2y'_M \xi' \cos \xi + y_M \xi'' \cos \xi - y_M (\xi')^2 \sin \xi; \\ y''_{M_2} &= y''_M \cos \xi - 2y'_M \xi' \sin \xi - y_M \xi'' \sin \xi - y_M (\xi')^2 \cos \xi - \\ &- x''_M \sin \xi - 2x'_M \xi' \cos \xi - x_M \xi'' \cos \xi + x_M (\xi')^2 \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Координати будь-якої з точок S_i чи S_j , що належать ланкам групи, визначаються так само, як і групи I виду.

На практиці найчастіше використовуються механізми, в яких точки D і N збігаються ($l_j = 0$). У цьому випадку залежності (1.41), (1.43) і (1.44) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{i_2} &= \arcsin \frac{y_{F_2} - y_{M_2}}{l_i}; \quad \bar{x}_{M_2} + \bar{y}_{M_2} + \bar{l}_i = \bar{x}_{N_2} + \bar{y}_{N_2}; \\ x_{N_2} &= x_{M_2} + l_i \cos \varphi_{i_2}; \quad y_{N_2} = y_{M_2} + l_i \sin \varphi_{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

Інші залежності не змінюються.

Якщо напрямна FF_1 повзуна N нерухома, то у цьому випадку залежності (1.48) суттєво спрощуються, оскільки $\xi' = \xi'' = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x'_{M_2} &= x'_M \cos \xi + y'_M \sin \xi; \quad y'_{M_2} = y'_M \cos \xi - x'_M \sin \xi; \\ x''_{M_2} &= x''_M \cos \xi + y''_M \sin \xi; \quad y''_{M_2} = y''_M \cos \xi - x''_M \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Використовуючи залежності (1.40)–(1.48), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах руху точок M і F та розмірів ланок i, j визначити їхні переміщення φ_{i_2} і x_{N_2} та аналоги швидкостей φ'_i, x'_{N_2} і прискорень φ''_i, x''_{N_2} . Для визначення параметрів будь-якої точки при повороті системи координат xOy на деякий кут ξ можна скласти окрему підпрограму, використавши залежності (1.40)–(1.48).

Якщо необхідно одержати кінематичні параметри будь-якої точки або всіх груп механізму в одній системі координат, наприклад у системі xOy (див. рис. 1.21), систему координат x_2Oy_2 повертають на кут $(-\xi)$. Для цього можна використати також залежності (1.40), (1.48), (1.50), помінявши місцями індекси параметрів в одній системі на індекси в іншій системі, наприклад замість x_{M_2} підставити x_M і, навпаки, замість $x_M - x_{M_2}$. Тоді рівняння (1.40) набуде вигляду $x_M = x_{M_2} \cos \xi + y_{M_2} \sin(-\xi)$ і т. ін.

Для кінематичного дослідження *структурної групи 2-го виду* може бути використана підпрограма $KG2$, наведена нижче.

$$KG2(x_M, y_M, x_F, y_F, \xi, l_i, \text{ResultType}) := \left\{ \begin{aligned} x_{M2} &\leftarrow \text{PKT}(x_M, y_M, \xi, 0) \\ y_{M2} &\leftarrow \text{PKT}(x_M, y_M, \xi, 1) \\ x_{F2} &\leftarrow \text{PKT}(x_F, y_F, \xi, 0) \\ y_{F2} &\leftarrow \text{PKT}(x_F, y_F, \xi, 1) \\ \varphi_{i2} &\leftarrow \text{asin} \left(\frac{y_{F2} - y_{M2}}{l_i} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases}
 x_{N2} \leftarrow x_{M2} + l_1 \cdot \cos(\varphi_{i2}) \\
 \mu_j \leftarrow 0.5 \cdot \pi - |\varphi_{i2}| \\
 \text{Result} \leftarrow \varphi_{i2} \text{ if } \text{ResultType} = 0 \\
 \text{Result} \leftarrow x_{N2} \text{ if } \text{ResultType} = 1 \\
 \text{Result} \leftarrow \mu_j \text{ if } \text{ResultType} = 2 \\
 \text{Result}
 \end{cases}$$

Підпрограма для перетворення системи координат на кут ξ та визначення параметрів точки M у повернутій системі координат має наступний вигляд:

$$\text{PKT}(x_M, y_M, \xi, \text{ResultType}) := \begin{cases}
 x_{M2} \leftarrow x_M \cdot \cos(\xi) + y_M \cdot \sin(\xi) \\
 y_{M2} \leftarrow y_M \cdot \cos(\xi) - x_M \cdot \sin(\xi) \\
 \text{Result} \leftarrow x_{M2} \text{ if } \text{ResultType} = 0 \\
 \text{Result} \leftarrow y_{M2} \text{ if } \text{ResultType} = 1 \\
 \text{Result}
 \end{cases}$$

Структурна група III виду. Структурна група цього виду складається з двох ланок, які утворюють між собою поступальну кінематичну пару і приєднуються до основного механізму обертовими парами (рис. 1.22).

Для кінематичного дослідження групи III виду необхідно мати такі величини:

- координати точок M і N , якими група приєднується до основного механізму, та їхні аналоги швидкостей і прискорень – $x_M, y_M, x_N, y_N, x'_M, y'_M, x'_N, y'_N, x''_M, y''_M, x''_N, y''_N$;

- лінійні і кутові розміри ланки $MTD - e = l_{MT}, \gamma, l_{TS\epsilon}$ (тут прийнято $\angle DTM = \pi/2$). Відрізок e слід вважати додатним, якщо порядок позначень ΔMTD за рухом годинникової стрілки буде таким, як це показано контурною лінією на рис. 1.22, тобто MTD , і від'ємним – MDT (штрихова лінія).

Для визначення положень ланок групи використаємо допоміжний вектор $\Delta = MD$, довжина і положення якого мають вигляд:

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}. \quad (1.51)$$

Тоді

$$l_{\epsilon} = \sqrt{\Delta^2 - e^2}; \quad \delta = \arctg \frac{e}{l_{\epsilon}}; \quad \varphi_{\epsilon} = \psi - \delta. \quad (1.52)$$

Складемо рівняння замкнутості векторного контуру MDN з урахуванням положення початку координат основного механізму:

$$\bar{x}_M + \bar{y}_M + \bar{e} + \bar{l}_{\epsilon} = \bar{x}_N + \bar{y}_N. \quad (1.53)$$

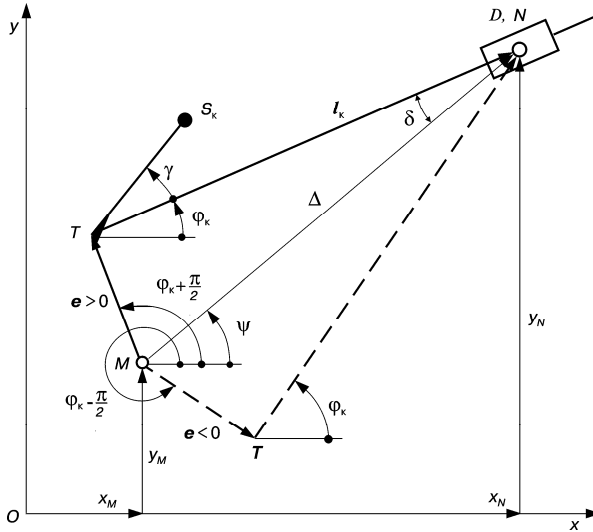


Рис. 1.22. Структурна група II класу III виду

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}. \quad (1.51)$$

Тоді

$$l_{\dot{e}} = \sqrt{\Delta^2 - e^2}; \quad \delta = \arctg \frac{e}{l_{\dot{e}}}; \quad \varphi_{\dot{e}} = \psi - \delta. \quad (1.52)$$

Складемо рівняння замкнутості векторного контуру MDN з урахуванням положення початку координат основного механізму:

$$\bar{x}_M + \bar{y}_M + \bar{e} + \bar{l}_{\dot{e}} = \bar{x}_N + \bar{y}_N. \quad (1.53)$$

Записавши рівняння (1.53) у проєкціях на координатні осі та продиференціювавши їх за узагальненою координатою φ_1 , визначимо аналоги лінійних і кутових швидкостей і прискорень ланок групи:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{\dot{e}} &= \frac{d\varphi_{\dot{e}}}{d\varphi_1} = \frac{(x'_M - x'_N) \sin \varphi_{\dot{e}} + (y'_N - y'_M) \cos \varphi_{\dot{e}}}{l_{\dot{e}}}; \\ l'_{\dot{e}} &= \frac{dl_{\dot{e}}}{d\varphi_1} = (x_N - x'_M) \cos \varphi_{\dot{e}} + (y'_N - y'_M) \sin \varphi_{\dot{e}} + e\varphi'_{\dot{e}}; \\ \varphi''_{\dot{e}} &= \frac{d^2\varphi_{\dot{e}}}{d\varphi_1^2} = \frac{(y''_N - y''_M) \cos \varphi_{\dot{e}} + (x''_N - x''_M) \sin \varphi_{\dot{e}} + e(\varphi'_{\dot{e}})^2 - 2l'_{\dot{e}}\varphi'_{\dot{e}}}{l_{\dot{e}}}; \\ l''_{\dot{e}} &= \frac{d^2l_{\dot{e}}}{d\varphi_1^2} = (x''_N - x''_M) \cos \varphi_{\dot{e}} + (y''_N - y''_M) \sin \varphi_{\dot{e}} + e\varphi''_{\dot{e}} + l_{\dot{e}}(\varphi'_{\dot{e}})^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Розділ 1. Кінематичне дослідження механізмів

де l'_e, l''_e – відповідно аналоги відносних швидкості v_{ND} і прискорення a_{ND} (повзуна відносно куліси).

Використовуючи залежності (1.51)–(1.54), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах руху точок M і N та розмірах ланок (e, γ, l_{TS_e}) визначити їхні переміщення l_k, φ_e , аналоги швидкостей l'_e, φ'_e і прискорень l''_e, φ''_e .

Якщо $e = 0$, залежності (1.52)–(1.54) дещо спрощуються:

$$l_e = \Delta; \delta = 0; \varphi_e = \psi; l'_e = (x'_N - x'_M) \cos \varphi_e + (y'_N - y'_M) \sin \varphi_e;$$

$$\varphi''_e = \frac{(y''_N - y''_M) \cos \varphi_e + (x''_N - x''_M) \sin \varphi_e - 2l'_e \varphi'_e}{l_e};$$

$$l''_e = (x''_N - x''_M) \cos \varphi_e + (y''_N - y''_M) \sin \varphi_e + l_e (\varphi'_e)^2.$$

Для кінематичного дослідження *структурної групи 3-го виду* може бути використана наступна підпрограма:

$$\text{KG3}(x_M, y_M, x_N, y_N, MT) := \left\{ \begin{array}{l} MN \leftarrow \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\ \psi \leftarrow \text{atan2}(x_N - x_M, y_N - y_M) \\ l_k \leftarrow \sqrt{MN^2 - MT^2} \\ \varphi_k \leftarrow \psi - \text{atan}\left(\frac{MT}{l_k}\right) \\ \text{Result} \leftarrow \varphi_k \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

Структурна група IV виду (рис. 1.23) складається з двох ланок, які утворюють між собою обертову пару D , і приєднується до основного механізму поступальними парами M і N .

Для кінематичного дослідження цієї групи повинні бути задані:

- кути нахилу до осі абсцис x напрямних повзунів M і N та їхні аналоги швидкостей та прискорень – $\xi_i, \xi_j, \xi'_i, \xi'_j, \xi''_i, \xi''_j$;

- координати і аналоги швидкостей та прискорень будь-яких точок (E, F), через які проходять осі напрямних повзунів M і N – $x_E, y_E, x_F, y_F, x'_E, y'_E, x'_F, y'_F, x''_E, y''_E, x''_F, y''_F$;

- лінійні і кутові розміри ланок MD і ND – $l_i, l_j, \alpha_i, \alpha_j, l_{MS_i}, l_{NS_j}, \gamma_{S_i}, \gamma_{S_j}$ (S_i і S_j – точки, які належать відповідно ланкам i і j).

Залежності для визначення кінематичних параметрів у даному випадку можна записати так, як і для групи I виду, у системі координат xOy . Варіант складання ланок групи враховується напрямними кутами α_i і α_j .

Складемо векторне рівняння

$$\bar{x}_E + \bar{y}_E + \bar{l}_{e_i} + \bar{l}_i = \bar{x}_F + \bar{y}_F + \bar{l}_{e_j} + \bar{l}_j, \quad (1.55)$$

яке у проєкціях на координатні осі x і y має вигляд

$$\left. \begin{aligned} x_E \cos 0 + y_E \cos \frac{\pi}{2} + l_{e_i} \cos \xi_i + l_i \cos(\alpha_i + \xi_i) = \\ = x_F \cos 0 + y_F \cos \frac{\pi}{2} + l_{e_j} \cos \xi_j + l_j \cos(\alpha_j + \xi_j); \\ x_E \sin 0 + y_E \sin \frac{\pi}{2} + l_{e_i} \sin \xi_i + l_i \sin(\alpha_i + \xi_i) = \\ = x_F \sin 0 + y_F \sin \frac{\pi}{2} + l_{e_j} \sin \xi_j + l_j \sin(\alpha_j + \xi_j). \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

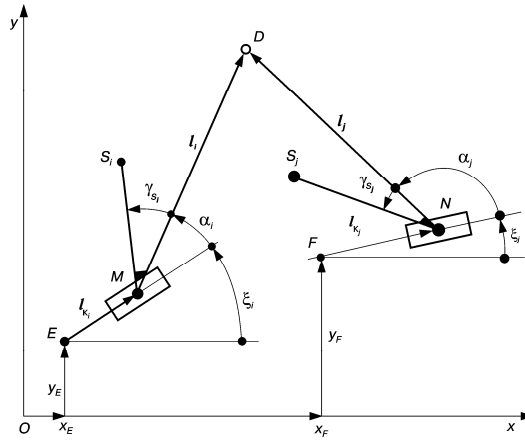


Рис. 1.23. Структурна група II класу IV виду

Із другого рівняння (1.56) знаходимо величини відрізків l_{e_i} , l_{e_j} , здійснивши поворот системи координат xOy відповідно на кут $(-\xi_j)$ і $(-\xi_i)$:

$$\left. \begin{aligned} l_{e_i} &= \frac{(x_E - x_F) \sin \xi_j + (y_F - y_E) \cos \xi_j - l_i \sin(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + l_j \sin \alpha_j}{\sin(\xi_i - \xi_j)}; \\ l_{e_j} &= \frac{(x_F - x_E) \sin \xi_i + (y_E - y_F) \cos \xi_i - l_j \sin(\alpha_j + \xi_j - \xi_i) + l_i \sin \alpha_i}{\sin(\xi_j - \xi_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

При $\xi_i = \xi_j$ група має зайвий ступінь вільності і в ній з'являється невизначеність у русі ланок.

Продиференціювавши рівняння (1.56) за узагальненою координатою φ_1 , після відповідних перетворень одержимо

$$\left. \begin{aligned} l'_{\xi_j} &= [(x'_E - x'_F) \sin \xi_j + (y'_F - y'_E) \cos \xi_j - l_{\xi_j} \xi'_i \cos(\xi_i - \xi_j) - \\ &\quad - l_i \xi'_i \cos(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + l_{\xi_j} \xi'_j - l_j \xi'_j \cos \alpha_j] / \sin(\xi_i - \xi_j); \\ l'_{\xi_i} &= [(x'_F - x'_E) \sin \xi_i + (y'_E - y'_F) \cos \xi_i + l'_{\xi_j} \xi'_i + l_i \xi'_i \cos \alpha_i - \\ &\quad - l_{\xi_j} \xi'_j \cos(\xi_j - \xi_i) - l_j \xi'_j \cos(\alpha_i + \xi_j - \xi_i)] / \sin(\xi_j - \xi_i); \end{aligned} \right\} (1.58)$$

$$\left. \begin{aligned} l''_{\xi_j} &= [(x''_E - x''_F) \sin \xi_j + (y''_F - y''_E) \cos \xi_j - 2l'_{\xi_j} \xi'_i \cos(\xi_i - \xi_j) - l_{\xi_j} \xi''_i \cos(\xi_i - \xi_j) + \\ &\quad + l_{\xi_j} (\xi'_j)^2 \sin(\xi_i - \xi_j) - l_i \xi''_i \cos(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + l_i (\xi'_i)^2 \sin(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + \\ &\quad + 2l'_{\xi_j} \xi'_j + l_{\xi_j} \xi''_j + l_j \xi''_j \cos \alpha_j - l_j (\xi'_j)^2 \sin \alpha_j] / \sin(\xi_i - \xi_j); \\ l''_{\xi_i} &= [(x''_F - x''_E) \sin \xi_i + (y''_E - y''_F) \cos \xi_i + 2l'_{\xi_j} \xi'_i + l_{\xi_j} \xi''_i + l_i \xi''_i \cos \alpha_i - l_i (\xi'_i)^2 \sin \alpha_i - \\ &\quad - 2l_{\xi_j} \xi'_j \cos(\xi_j - \xi_i) - l_{\xi_j} \xi''_j \cos(\xi_j - \xi_i) + l_{\xi_j} (\xi'_j)^2 \sin(\xi_j - \xi_i) - \\ &\quad - l_j \xi''_j \cos(\alpha_i + \xi_j - \xi_i) + l_j (\xi'_j)^2 \sin(\alpha_i + \xi_j - \xi_i)] / \sin(\xi_j - \xi_i), \end{aligned} \right\} (1.59)$$

де l_{ξ_j} , l_{ξ_i} – відносні переміщення ланок i та j ; $l'_{\xi_j} = dl_{\xi_j} / d\varphi_1$, $l'_{\xi_i} = dl_{\xi_i} / d\varphi_1$ – їхні аналоги швидкостей; $l''_{\xi_j} = d^2l_{\xi_j} / d\varphi_1^2$, $l''_{\xi_i} = d^2l_{\xi_i} / d\varphi_1^2$ – аналоги прискорень.

У тих випадках, коли довжина ланок i та j дорівнює нулю ($l_i = l_j = 0$) і одна з напрямних нерухома (наприклад, $\xi_j = \text{const}$), залежності (1.55)–(1.59) значно спрощуються.

Якщо відомі координати точки E або F та їхні аналоги швидкостей і прискорень, параметри руху точки D можна визначити, склавши векторне рівняння

$$\bar{x}_E + \bar{y}_E + \bar{l}_{\xi_j} + \bar{l}_i = \bar{x}_D + \bar{y}_D \quad (1.60)$$

На основі цього рівняння одержимо

$$\left. \begin{aligned} x_D &= x_E + l_{\xi_j} \cos \xi_j + l_i \cos(\xi_i + \alpha_i); \quad y_D = y_E + l_{\xi_j} \sin \xi_j + l_i \sin(\xi_i + \alpha_i); \\ x'_D &= x'_E + l'_{\xi_j} \cos \xi_j - l_{\xi_j} \xi'_j \sin \xi_j - l_i \xi'_i \sin(\xi_i + \alpha_i); \\ y'_D &= y'_E + l'_{\xi_j} \sin \xi_j + l_{\xi_j} \xi'_j \cos \xi_j + l_i \xi'_i \cos(\xi_i + \alpha_i); \\ x''_D &= x''_E + l''_{\xi_j} \cos \xi_j - 2l'_{\xi_j} \xi'_j \sin \xi_j - l_{\xi_j} \xi''_j \sin \xi_j - l_{\xi_j} (\xi'_j)^2 \cos \xi_j - \\ &\quad - l_i \xi''_i \sin(\xi_i + \alpha_i) - l_i (\xi'_i)^2 \cos(\xi_i + \alpha_i); \\ y''_D &= y''_E + l''_{\xi_j} \sin \xi_j + 2l'_{\xi_j} \xi'_j \cos \xi_j + l_{\xi_j} \xi''_j \cos \xi_j - l_{\xi_j} (\xi'_j)^2 \sin \xi_j + \\ &\quad + l_i \xi''_i \cos(\xi_i + \alpha_i) - l_i (\xi'_i)^2 \sin(\xi_i + \alpha_i). \end{aligned} \right\} (1.61)$$

1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Кінематичні параметри руху точок M і N можна знайти, використавши їх координати, які виражаються рівняннями проекцій відповідних векторів на координатні осі x і y :

$$x_M = x_E + l_{\xi} \cos \xi_i; \quad y_M = y_E + l_{\xi} \sin \xi_i;$$

$$x_N = x_F + l_{\eta} \cos \xi_j; \quad y_N = y_F + l_{\eta} \sin \xi_j.$$

Для визначення кінематичних параметрів руху будь-якої точки S_i, S_j , що належать ланкам i або j , можна використати залежності (1.30), (1.38), (1.39).

Використовуючи залежності (1.57)–(1.61), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах, вказаних раніше, визначити переміщення ланок l_{ξ}, l_{η} , їхні аналоги швидкостей l'_{ξ}, l'_{η} і прискорень l''_{ξ}, l''_{η} , а також параметри руху точки $D(x_D, y_D, x'_D, y'_D, x''_D, y''_D)$ або інших точок – M, N тощо.

На практиці найчастіше використовують окремий випадок групи IV виду, при якому $l_i = l_j = 0$ (рис. 1.24). Залежності для визначення кінематичних

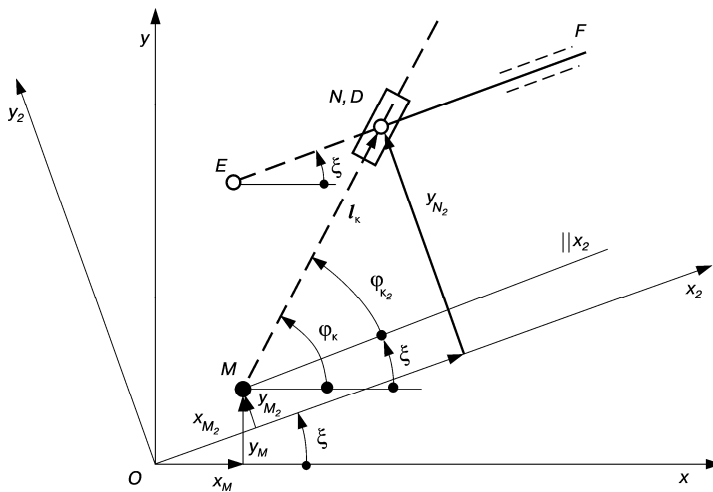


Рис. 1.24. Структурна група II класу IV виду, в якій $l_i = l_j = 0$

параметрів тут зручно записувати, як і для груп II виду, у системі координат x_2Oy_2 , причому вісь x_2 направити паралельно напрямній EF так, щоб ордината $y_{N_2} \geq 0$ і система координат була правою, тобто найменший кут повороту осі x_2 до осі y_2 здійснювався проти руху годинникової стрілки. Усі параметри у системі координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2.

Складемо векторне рівняння

$$\bar{x}_{M_2} + \bar{y}_{M_2} + \bar{l}_{\hat{e}} = \bar{x}_{N_2} + \bar{y}_{N_2},$$

яке у проекціях на осі координат x_2 і y_2 має вигляд

$$x_{M_2} + l_{\hat{e}} \cos \varphi_{\hat{e}_2} = x_{N_2}; \quad y_{M_2} + l_{\hat{e}} \sin \varphi_{\hat{e}_2} = y_{N_2}, \quad (1.61)$$

де $\varphi_{\hat{e}_2} = \varphi_{\hat{e}} - \xi$, причому $\varphi_{\hat{e}} \neq \xi$, $0 < \varphi_{\hat{e}_2} < \pi$.

Між кутами (див. рис. 1.23, 1.24) існує така відповідність:

$$\varphi_{\hat{e}} = \xi_i, \quad \xi = \xi_j, \quad \varphi_{\hat{e}_2} = \xi_i - \xi_j.$$

Ординати точок E і N у системі координат x_2Oy_2 рівні між собою, тобто $y_{N_2} = y_{E_2}$.

Використавши рівняння (1.61), знайдемо

$$l_{\hat{e}} = \frac{y_{E_2} - y_{M_2}}{\sin \varphi_{\hat{e}_2}}; \quad x_{N_2} = x_{M_2} + l_{\hat{e}} \cos \varphi_{\hat{e}_2}. \quad (1.62)$$

Продиференціювавши рівняння (1.61) за узагальненою координатою φ_1 , одержимо

$$\left. \begin{aligned} l'_{\hat{e}} &= \frac{y'_{E_2} - y'_{M_2} - l_{\hat{e}} \varphi'_{k_2} \cos \varphi_{\hat{e}_2}}{\sin \varphi_{\hat{e}_2}}; \quad x'_{N_2} = x'_{M_2} + l'_{\hat{e}} \cos \varphi_{\hat{e}_2} - l_{\hat{e}} \varphi'_{\hat{e}_2} \sin \varphi_{\hat{e}_2}; \\ l'' &= [y''_{E_2} - y''_{M_2} - 2l'_{\hat{e}} \varphi'_{\hat{e}_2} \cos \varphi_{\hat{e}_2} - l_{\hat{e}} \varphi''_{\hat{e}_2} \cos \varphi_{\hat{e}_2} + l_{\hat{e}} (\varphi'_{\hat{e}_2})^2 \sin \varphi_{\hat{e}_2}] / \sin \varphi_{\hat{e}_2}; \\ x''_{N_2} &= x''_{M_2} + l''_{\hat{e}} \cos \varphi_{\hat{e}_2} - 2l'_{\hat{e}} \varphi'_{\hat{e}_2} \sin \varphi_{\hat{e}_2} - l_{\hat{e}} \varphi''_{\hat{e}_2} \sin \varphi_{\hat{e}_2} - l_{\hat{e}} (\varphi'_{\hat{e}_2})^2 \cos \varphi_{\hat{e}_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Отже, при $l_i = l_j = 0$, використовуючи залежності (1.40), (1.48), (1.61)–(1.63), можна скласти простішу підпрограму для кінематичного дослідження групи IV виду.

Для кінематичного дослідження *структурної групи 4-го виду* (рис. 1.24) може бути використана наступна підпрограма:

$$\text{KG4}(x_M, y_M, x_E, y_E, \varphi_k, \xi) := \left\{ \begin{array}{l} x_{M2} \leftarrow \text{PKT}(x_M, y_M, \xi, 0) \\ y_{M2} \leftarrow \text{PKT}(x_M, y_M, \xi, 1) \\ x_{E2} \leftarrow \text{PKT}(x_E, y_E, \xi, 0) \\ y_{E2} \leftarrow \text{PKT}(x_E, y_E, \xi, 1) \\ \varphi_{k2} \leftarrow \varphi_k - \xi \\ l_k \leftarrow \frac{y_{E2} - y_{M2}}{\sin(\varphi_{k2})} \\ x_{N2} \leftarrow x_{M2} + l_k \cdot \cos(\varphi_{k2}) \\ \text{Result} \leftarrow x_{N2} \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

1.4. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Структурна група V виду. Ланки групи цього виду (рис. 1.25) утворюють при їх приєднанні до основного механізму поступальну і обертову кінематичні пари, а між собою – поступальну.

Для виконання кінематичного дослідження руху ланок цієї групи повинні бути задані такі величини:

- координати точки M шарнірного приєднання групи та їхні аналоги швидкостей та прискорень в основній системі координат xOy : $x_M, y_M, x'_M, y'_M, x''_M, y''_M$;

- положення напрямної повзуна N у цій системі координат, яке можна задати координатами будь-якої точки F (x_F, y_F), що лежить на осі цієї напрямної, і напрямним кутом ξ , а також їхніми аналогами швидкостей та прискорень: $x'_F, y'_F, x''_F, y''_F, \xi', \xi''$;

- розміри ланок – $l_j, \alpha_i, \alpha_j, l_{NS_i}, l_{MS_j}, \gamma_{S_i}, \gamma_{S_j}$ (S_i, S_j – точки, які належать відповідно ланкам i або j).

Залежності для визначення кінематичних параметрів ланок тут зручно записати у системі координат x_2Oy_2 , причому вісь x_2 проводимо паралельно напрямній FN . Всі параметри у системі координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2. Для перетворення координат точок і їхніх похідних із основної системи xOy в систему x_2Oy_2 використовуємо залежності (1.40), (1.48).

Складемо векторне рівняння

$$\bar{x}_{F_2} + \bar{y}_{F_2} + \bar{l}_{xN} + \bar{l}_{\hat{e}_i} = \bar{x}_{M_2} + \bar{y}_{M_2} + \bar{l}_j, \quad (1.64)$$

яке у проєкціях на координатні осі x_2 і y_2 має вигляд:

$$x_{F_2} + l_{xN} + l_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i = x_{M_2} + l_j \cos(\alpha_i + \alpha_j); \quad y_{F_2} + l_{\hat{e}_i} \sin \alpha_i = y_{M_2} + l_j \sin(\alpha_i + \alpha_j). \quad (1.65)$$

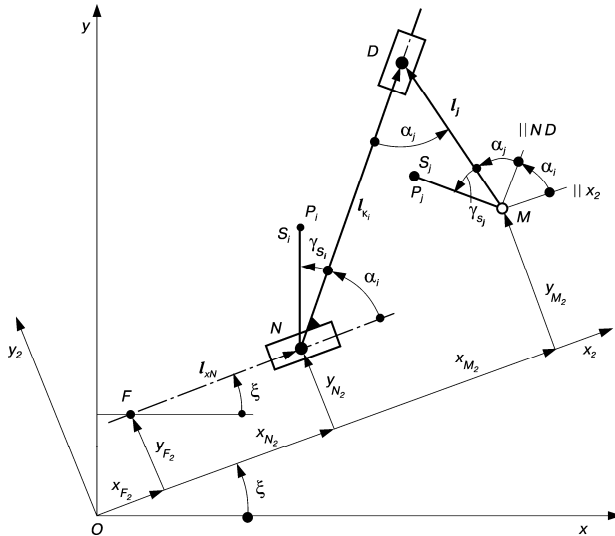


Рис. 1.24. Структурна група II класу V виду

Тоді

$$l_{\hat{e}_i} = \frac{y_{M_2} - y_{F_2} + l_j \sin(\alpha_i - \alpha_j)}{\sin \alpha_i}; \quad l_{x_N} = x_{M_2} - x_{F_2} - l_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i + l_j \cos(\alpha_i + \alpha_j). \quad (1.66)$$

Кут $\alpha_i \neq 0$ або π , оскільки у таких випадках ланки групи одержують додатковий ступінь вільності, тобто з'являється невизначеність у русі.

Шляхом диференціювання рівняння (1.65) одержимо аналоги відносних швидкостей і прискорень:

$$\left. \begin{aligned} l'_{\hat{e}_i} &= \frac{y'_{M_2} - y'_{F_2}}{\sin \alpha_i}; \quad l'_{x_N} = x'_{M_2} - x'_{F_2} - l'_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i; \\ l''_{\hat{e}_i} &= \frac{y''_{M_2} - y''_{F_2}}{\sin \alpha_i}; \quad l''_{x_N} = x''_{M_2} - x''_{F_2} - l''_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Параметри руху точки N у системі координат x_2Oy_2 визначаються залежностями

$$\left. \begin{aligned} x_{N_2} &= x_{F_2} + l_{xN}; \quad x'_{N_2} = x'_{F_2} + l'_{xN}; \quad x''_{N_2} = x''_{F_2} + l''_{xN}; \\ y_{N_2} &= y_{F_2}; \quad y'_{N_2} = y'_{F_2}; \quad y''_{N_2} = y''_{F_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Знаючи координати точок N і M та їхні аналоги швидкостей і прискорень, можна визначити у системі координат x_2Oy_2 координати будь-якої точки (D , S_i , S_j), яка належить ланкам групи, використавши залежності (1.31), (1.38), (1.39).

На практиці найчастіше відрізок $l_j = 0$, тоді залежності (1.64)–(1.66) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{F_2} + \bar{y}_{F_2} + \bar{l}_{xN} + \bar{l}_{\hat{e}_i} &= \bar{x}_{M_2} + \bar{y}_{M_2}; \\ x_{M_2} &= x_{F_2} + l_{xN} + l_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i; \quad y_{M_2} = y_{F_2} + l_{\hat{e}_i} \sin \alpha_i; \\ l_{\hat{e}_i} &= (y_{M_2} - y_{F_2}) / \sin \alpha_i; \quad l_{xN} = x_{M_2} - x_{F_2} - l_{\hat{e}_i} \cos \alpha_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Для аналітичного дослідження кінематики *структурної групи 5-го виду* може бути використана наступна підпрограма:

$$KG5(x_F, y_F, x_M, y_M, \xi, l_j, \alpha_i, \alpha_j) := \left\{ \begin{array}{l} x_{F2} \leftarrow PKT(x_F, y_F, \xi, 0) \\ y_{F2} \leftarrow PKT(x_F, y_F, \xi, 1) \\ x_{M2} \leftarrow PKT(x_M, y_M, \xi, 0) \\ y_{M2} \leftarrow PKT(x_M, y_M, \xi, 1) \\ l_{ki} \leftarrow \frac{y_{M2} - y_{F2} + l_j \cdot \sin(\alpha_i + \alpha_j)}{\sin(\alpha_i)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{xN} \leftarrow x_{M2} - x_{F2} - l_{ki} \cdot \cos(\alpha_i) + l_j \cdot \cos(\alpha_i + \alpha_j) \\ x_{N2} \leftarrow x_{F2} + l_{xN} \\ \text{Result} \leftarrow x_{N2} \end{array} \right.$$

1.5. Приклади аналітичного дослідження кінематики плоских важільних механізмів у системі Mathcad за допомогою погрупного методу

Приклад 1.17. Провести кінематичне дослідження механізму стругального верстату (рис. 1.26) і побудувати діаграми переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки. Розрахунок провести для 24 положень механізму [14].

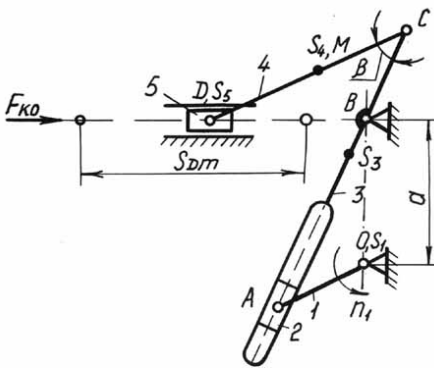


Рис. 1.26. Кінематична схема механізму стругального верстату

Вихідні дані:

$$a = 0,15 \text{ і}; \quad l_{BC} = 0,06 \text{ і};$$

$$l_{OA} = 0,065 \text{ і}; \quad l_{CD} = 0,125 \text{ і}.$$

Частота обертання кривошипа

$$n_1 = 110 \text{ об/хв.}$$

Розв’язання. Для проведення кінематичного дослідження необхідно спочатку провести структурний аналіз заданого механізму. Даний механізм складається з механізму I класу, що утворений стояком та кривошипом 1, структурної групи 2-3 другого класу 3-го виду та структурної групою 4-5 другого класу 2 виду. В цілому, це механізм другого класу.

Кінематичне дослідження цього механізму будемо проводити за допомогою погрупного методу дослідження, використовуючи уніфіковані підпрограми. При складанні головної програми кінематичного аналізу необхідно звернути увагу на правильний вибір параметрів підпрограм (див. п.1.4).

Кінематичне дослідження розпочнемо з *механізму першого класу* (рис. 1.18). За початок системи координат приймемо центр обертання кривошипа, а тому $x_0 = 0; y_0 = 0$. Радіус кривошипа відомий і дорівнює $r = l_{OA}$. Кут φ_1 , що визначає положення кривошипа, буде змінювати своє значення з кроком $2\pi/N$, де N – кількість досліджуваних положень механізму.

Результатами роботи підпрограми *KM1* є кінематичні параметри точки *A*, що є кінцевою точкою кривошипа.

Після розрахунку механізму I класу, необхідно розрахувати *структурну групу 2-3 другого класу 3-го виду*, загальний вигляд якої наведений на рис.

1.22. Якщо зіставити структурну групу 2-3 заданого механізму (рис. 1.26) та структурну групу 3-го виду в загальному вигляді (рис. 1.22), то можна побачити, що точка M групи в загальному вигляді є точкою B заданого механізму, точка N – точкою A , зміщення $l_{MT} = e = 0$.

Точку C механізму необхідно розрахувати як **додаткову точку ланки 3**. Для цього використовується підпрограма KDT , описана у попередньому розділі. В даному випадку базовою є точка B (точка M в загальному випадку), відстань $MS_i = l_{BC}$, кут $\gamma_{S_i} = \pi$, кут, що визначає положення базової ланки – Φ_3 .

Далі необхідно розрахувати **структурну групу 4-5 – групу другого класу 2-го виду**, загальний вигляд якої показано на рис. 1.21. Точкам M та N на загальному вигляді групи будуть відповідати точки C та D механізму. На загальній схемі структурної групи є точка F – нерухома точка, що визначає положення напрямної повзуна. За точку F в нашому випадку можна прийняти точку, що має координати $F(0, a)$, оскільки ця точка буде належати напрямній повзуна 5 і є нерухомою. Кут повороту системи координат ξ в нашому випадку дорівнює $\xi = \pi$, як видно зі схеми механізму, відстань $l_i = l_{CD}$.

Нижче наведено розрахунок заданого механізму у системі $MathCAD$.

Документ $Mathcad$, що наведений нижче, потребує наявності уніфікованих підпрограм $KM1$, $KG3$, KDT та $KG2$, які були описані у попередньому розділі. Підпрограми повинні бути розміщені на початку документа.

Програма PR 1.17

Кінематичне дослідження механізму стругального верстату

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad N := 24 \quad \Phi_0 := 154.336 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Кривошип обертається проти годинникової стрілки

$$\Phi_1 := \Phi_0 + 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \Phi_0$$

Геометричні параметри механізму

$$a := 0.15 \quad BC := 0.06 \quad OA := 0.065 \quad CD := 0.125$$

Частота обертання кривошипа

$$n := 110$$

Розрахунок

$$x_A(\Phi_1) := KM1(0, 0, OA, \Phi_1, 0) \quad y_A(\Phi_1) := KM1(0, 0, OA, \Phi_1, 1)$$

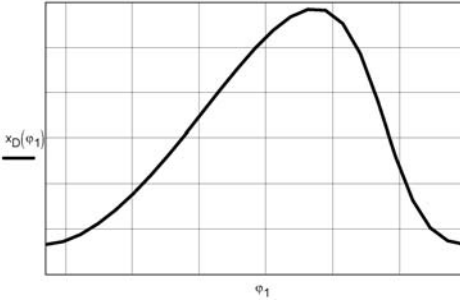
$$\Phi_3(\Phi_1) := KG3(0, a, x_A(\Phi_1), y_A(\Phi_1), 0)$$

$$x_C(\Phi_1) := KDT(0, a, BC, \pi, \Phi_3(\Phi_1), 0) \quad y_C(\Phi_1) := KDT(0, a, BC, \pi, \Phi_3(\Phi_1), 1)$$

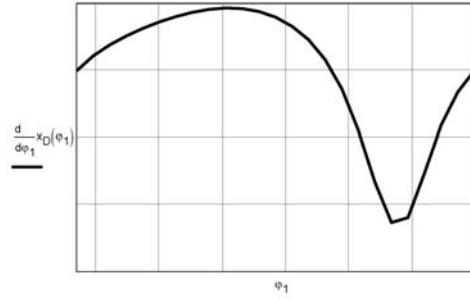
1.5. Приклади аналітичного дослідження кінематики

$$x_D(\varphi_1) := KG2(x_C(\varphi_1), y_C(\varphi_1), 0, a, \pi, CD, 1)$$

Діаграма переміщень точки D



Діаграма швидкостей точки D



Примітка. Для одержання більш точних діаграм можна збільшити кількість досліджуваних положень механізму.

Розрахунок швидкостей і прискорень

$$\omega_1 := \frac{\pi \cdot n}{30} \quad v_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_D(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$a_D(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_D(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

| $x_D(\varphi_1) - x_D(\varphi_0)$ | $v_D(\varphi_1) =$ | $a_D(\varphi_1) =$ |
|-----------------------------------|-------------------------|--------------------|
| 0 | $6.14682 \cdot 10^{-5}$ | 2.65303 |
| $6.11981 \cdot 10^{-4}$ | 0.05097 | 1.90191 |
| $2.22048 \cdot 10^{-3}$ | 0.08901 | 1.48493 |
| $4.60295 \cdot 10^{-3}$ | 0.1197 | 1.23346 |
| $7.62562 \cdot 10^{-3}$ | 0.14563 | 1.0556 |
| 0.01119 | 0.16785 | 0.90063 |
| 0.01523 | 0.18651 | 0.73896 |
| 0.01964 | 0.20125 | 0.55241 |
| 0.02434 | 0.21134 | 0.32947 |
| 0.02921 | 0.21589 | 0.06233 |
| 0.0341 | 0.21379 | -0.25599 |
| 0.03887 | 0.20379 | -0.63584 |
| 0.04329 | 0.18427 | -1.09789 |
| 0.04715 | 0.15295 | -1.68454 |
| 0.05013 | 0.10615 | -2.47783 |
| 0.05181 | 0.03771 | -3.61743 |
| 0.05161 | -0.06216 | -5.26273 |
| 0.04866 | -0.20441 | -7.24367 |
| 0.04203 | -0.38184 | -7.85368 |
| 0.03157 | -0.52148 | -3.35837 |
| 0.01956 | -0.50455 | 4.68068 |
| $9.71655 \cdot 10^{-3}$ | -0.35 | 7.76116 |
| $3.67457 \cdot 10^{-3}$ | -0.1882 | 6.12469 |
| $7.84403 \cdot 10^{-4}$ | -0.07421 | 4.00874 |
| 0 | $6.14682 \cdot 10^{-5}$ | 2.65303 |

Приклад 1.18. Провести кінематичне дослідження механізму зубодовбального верстату (рис. 1.27), провести побудову діаграм переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки [14]. Провести розрахунок для 24 положень механізму.

Розв'язання. Спочатку проведемо структурний аналіз заданого механізму. В цілому, механізм є механізмом другого класу та складається з механізму I класу, що утворений стояком та кривошипом I, містить структурну групу 2-3 другого класу 1-го виду та структурну групу 4-5 другого класу 4-го виду.

Кінематичне дослідження починаємо з механізму I класу, що проводиться аналогічно до попереднього прикладу. Далі необхідно розрахувати *структурну групу 2-3*, що є групою 1-го виду, загальний вигляд якої наведений на рис.

1.6. Як видно, точки M та N структурної групи в загальному вигляді відповідають точкам A та C заданого механізму, довжини l_i та l_j – відповідно довжинам l_{AB} та l_{BC} механізму, кути φ_i та φ_j є відповідно кутами φ_2 та

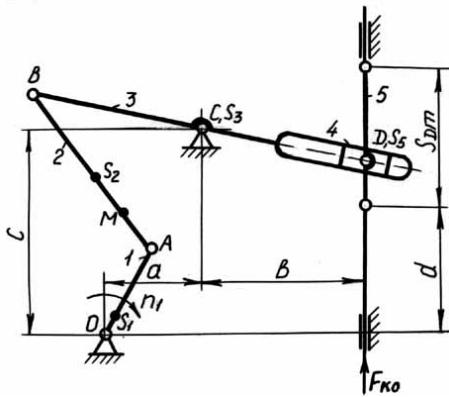


Рис. 1.27. Кінематична схема механізму зубодовбального верстату

Вихідні дані:

$$a = 0,15i ; b = 0,3i ; c = 0,45i ;$$

$$l_{BC} = 0,15i ; l_{OA} = 0,072i ; l_{AB} = 0,485i$$

Частота обертання кривошипа
 $n_1 = 200$ об/хв.

φ_3 . Далі необхідно задати параметри *структурної групи 4-5*, що є групою другого класу 4-го виду, загальний вигляд якої показано на рис. 1.8. Відповідність між параметрами наступна: точки M та N в загальному вигляді групи є відповідно точками C та D заданого механізму, кут φ_k на загальній схемі групи є кутом φ_3 механізму. Напрямна повзуна 5 визначається кутом повороту системи координат а також довільно вибраною точкою E з координатами $\xi = 270^\circ$, $E(a + b, 0)$, яка належить напрямній повзуна та є нерухомою. В результаті розрахунків отримуємо кінематичні параметри точки D у повернутій системі координат.

Нижче наведено документ *Mathcad* з проведеним кінематичним дослідженням заданого механізму.

Програма PR 1.18

**Кінематичне дослідження механізму
зубодовбального верстату**

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad N := 24 \quad \varphi_0 := 269.355 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Кривошип обертається за годинниковою стрілкою

$$\varphi_1 := 2 \cdot \pi + \varphi_0 \cdot 2 \cdot \pi + \varphi_0 - 2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \varphi_0$$

Геометричні параметри механізму

$$a := 0.15 \quad b := 0.3 \quad c := 0.45 \quad BC := 0.15 \quad OA := 0.072 \quad AB := 0.485$$

Частота обертання кривошипа

$$n := 200$$

Розрахунок

$$x_A(\varphi_1) := KM1(0, 0, OA, \varphi_1, 0) \quad y_A(\varphi_1) := KM1(0, 0, OA, \varphi_1, 1)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := KG1(x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), a, c, AB, BC, 0)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := KG1(x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), a, c, AB, BC, 1)$$

$$x_D(\varphi_1) := KG4\left(a, c, a + b, 0, \varphi_3(\varphi_1), 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Розрахунок швидкостей і прискорень

$$\omega_1 := \frac{\pi \cdot n}{30}$$

$$v_D(\varphi_1) := \left(\frac{d}{d\varphi_1} x_D(\varphi_1) \right) \cdot \omega_1$$

$$a_D(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_D(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

$$x_D(\varphi_1) - x_D(\varphi_0) =$$

| |
|--------------------------|
| 0 |
| 4.63894·10 ⁻³ |
| 0.01825 |
| 0.03976 |
| 0.06765 |
| 0.10057 |
| 0.1376 |
| 0.17826 |
| 0.22216 |
| 0.26825 |
| 0.31355 |
| 0.35141 |
| 0.37132 |
| 0.36409 |
| 0.3305 |
| 0.28158 |
| 0.22919 |
| 0.17994 |
| 0.13604 |
| 0.09778 |
| 0.06509 |
| 0.03816 |
| 0.01763 |
| 4.54669·10 ⁻³ |
| 0 |

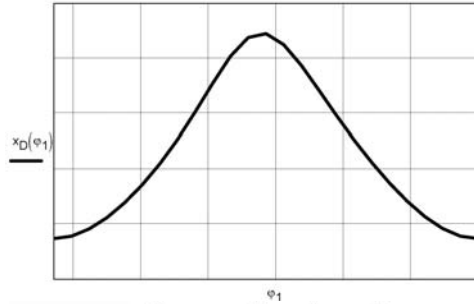
$$v_D(\varphi_1) =$$

| |
|------------------------|
| 5.218·10 ⁻⁵ |
| 0.73937 |
| 1.42352 |
| 1.9964 |
| 2.44802 |
| 2.80664 |
| 3.1121 |
| 3.3893 |
| 3.62223 |
| 3.71581 |
| 3.44524 |
| 2.46536 |
| 0.58293 |
| -1.73077 |
| -3.48061 |
| -4.17948 |
| -4.11744 |
| -3.73711 |
| -3.28498 |
| -2.83764 |
| -2.39064 |
| -1.91033 |
| -1.35975 |
| -0.71823 |
| 5.218·10 ⁻⁵ |

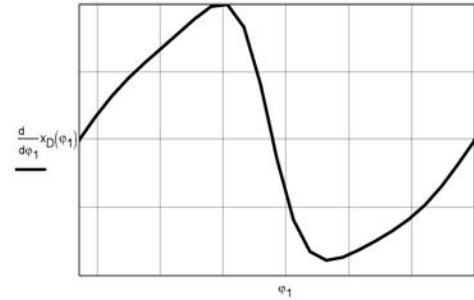
$$a_D(\varphi_1) =$$

| |
|------------|
| 59.2809 |
| 57.93129 |
| 50.7454 |
| 40.79739 |
| 31.87858 |
| 26.0669 |
| 23.16985 |
| 21.01832 |
| 15.05949 |
| -3.05198 |
| -45.16548 |
| -115.08957 |
| -179.80665 |
| -175.183 |
| -97.97222 |
| -18.88726 |
| 22.49345 |
| 35.18093 |
| 36.26743 |
| 35.43023 |
| 36.56904 |
| 40.79834 |
| 47.59659 |
| 54.87162 |
| 59.2809 |

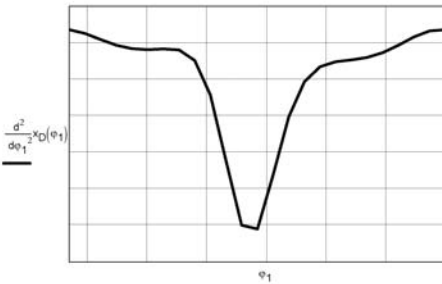
Діаграма переміщень точки D



Діаграма швидкостей точки D



Діаграма прискорень точки D



Приклад 1.19. Провести кінематичне дослідження механізму коливального конвеєра (рис. 1.29), провести побудову діаграм переміщень, швидкостей та прискорень вихідної ланки [14]. Провести розрахунок для 24 положень механізму. Вихідні дані:

$a = 0,19i$; $b = 0,1i$; $c = 0,1i$; $l_{BC} = 0,175i$;
 $l_{OA} = 0,042i$; $l_{AB} = 0,2i$; $l_{CD} = l_{BC}/2$.

Частота обертання кривошипа $n_1 = 100$ об/хв.

Розв'язування. Проведемо спочатку структурний аналіз заданого механізму. Механізм складається з механізму I класу, що утворений стояком та кривошипом l . До механізму послідовно приєднані структурна група 2-3 другого класу 1-го виду та структурна група 4-5 другого класу 5-го виду. В цілому, механізм є механізмом другого класу.

Кінематичне дослідження механізму розпочинаємо з *механізму I класу*, яке проводимо аналогічно до попередніх прикладів. Далі необхідно вказати параметри *структурної групи 2-3*, що є групою другого класу 1-го виду, загальний вигляд якої показано на рис. 1.19.

Як видно, точки M та N на загальній схемі групи відповідають точкам C

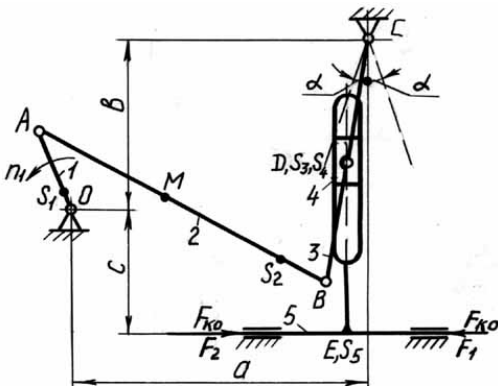


Рис. 1.29. Кінематична схема механізму коливального конвеєра

випадку), відстань $MS_i - l_{CD}$, кут $\gamma_{S_i} = 0$, кут, що визначає положення базової ланки – φ_3 .

Тепер розглянемо *структурну групу 4-5 другого класу 5-го виду*. Загальний вигляд цієї групи показано на рис. 1.25. Як видно, точці M на загальній схемі структурної групи відповідає точка D механізму, координати точки F , що визначає положення напрямної повзуна 5 в даному випадку можуть бути обрані як $F(0, -c)$, оскільки така точка належить напрямній повзуна та є нерухомою. Кут повороту системи координат ξ , як видно з загальної схеми групи, в нашому випадку буде дорівнювати $\xi = 180^\circ$. Кут α_i , що визначає положення напрямної повзуна D механізму, дорівнює $\alpha_i = 270^\circ$. Точки M та D на загальній схемі структурної групи (рис. 1.25) в нашому випадку збігаються у точку D механізму (рис. 1.29), а тому довжина $l_j = 0$, відповідний кут $\alpha_j = 0$.

Нижче наведено документ Mathcad з проведеним кінематичним дослідженням заданого механізму.

Програма PR 1.19

Кінематичне дослідження механізму коливального конвеєра

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad N := 24 \quad \varphi_0 := 343.184 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Кривошип обертається проти годинникової стрілки

$$\varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + 2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

Геометричні параметри механізму

$$a := 0.19 \quad b := 0.1 \quad c := 0.1 \quad BC := 0.175 \quad OA := 0.042 \quad AB := 0.2 \quad CD := \frac{BC}{2}, \quad CD = 0.0875$$

1.5. Приклади аналітичного дослідження кінематики

Частота обертання кривошипа

$$n := 100$$

Розрахунок

$$x_A(\varphi_1) := KM1(0, 0, OA, \varphi_1, 0) \quad y_A(\varphi_1) := KM1(0, 0, OA, \varphi_1, 1)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := KG1(a, b, x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), BC, AB, 0) \quad \varphi_2(\varphi_1) := KG1(a, b, x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), BC, AB, 1)$$

$$x_D(\varphi_1) := KDT(a, b, CD, 0, \varphi_3(\varphi_1), 0) \quad y_D(\varphi_1) := KDT(a, b, CD, 0, \varphi_3(\varphi_1), 1)$$

$$x_D(\varphi_1) := KG5\left(0, -c, x_D(\varphi_1), y_D(\varphi_1), \pi, 0, 3 \cdot \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Розрахунок швидкостей і прискорень

$$\omega_1 := \frac{\pi \cdot n}{30} \quad v_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_D(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$a_D(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_D(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

$$x_D(\varphi_1) - x_D(\varphi_0) =$$

| |
|----------------------------|
| 0 |
| 1.00404 · 10 ⁻³ |
| 4.02535 · 10 ⁻³ |
| 8.83985 · 10 ⁻³ |
| 0.0149 |
| 0.02147 |
| 0.02782 |
| 0.03341 |
| 0.03795 |
| 0.04132 |
| 0.0435 |
| 0.04453 |
| 0.04443 |
| 0.04324 |
| 0.041 |
| 0.03776 |
| 0.03364 |
| 0.02878 |
| 0.02343 |
| 0.01786 |
| 0.01244 |
| 7.54264 · 10 ⁻³ |
| 3.57856 · 10 ⁻³ |
| 9.44821 · 10 ⁻⁴ |
| 0 |

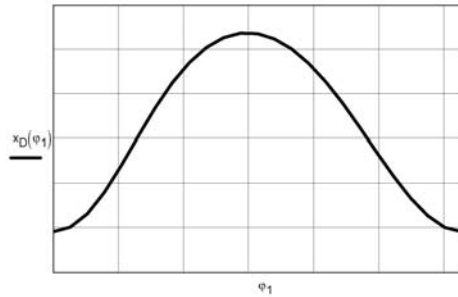
$$v_D(\varphi_1) =$$

| |
|-----------------------------|
| -5.51651 · 10 ⁻⁵ |
| 0.08091 |
| 0.15933 |
| 0.22212 |
| 0.25784 |
| 0.26263 |
| 0.24149 |
| 0.20386 |
| 0.15848 |
| 0.11097 |
| 0.064 |
| 0.01835 |
| -0.02596 |
| -0.06894 |
| -0.11007 |
| -0.14806 |
| -0.18089 |
| -0.20597 |
| -0.22057 |
| -0.22222 |
| -0.20905 |
| -0.17991 |
| -0.13454 |
| -0.07373 |
| -5.51651 · 10 ⁻⁵ |

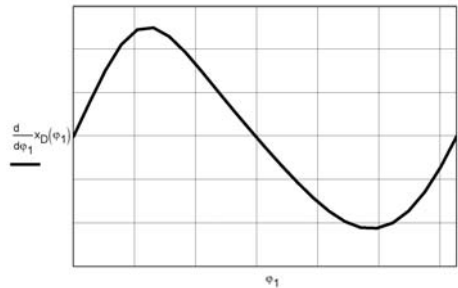
$$a_D(\varphi_1) =$$

| |
|----------|
| 3.14335 |
| 3.26792 |
| 2.91482 |
| 2.02736 |
| 0.80338 |
| -0.38314 |
| -1.24147 |
| -1.70905 |
| -1.88404 |
| -1.89943 |
| -1.85379 |
| -1.79848 |
| -1.74713 |
| -1.68787 |
| -1.5937 |
| -1.43237 |
| -1.17639 |
| -0.81137 |
| -0.3399 |
| 0.22023 |
| 0.84143 |
| 1.49148 |
| 2.13343 |
| 2.71472 |
| 3.14335 |

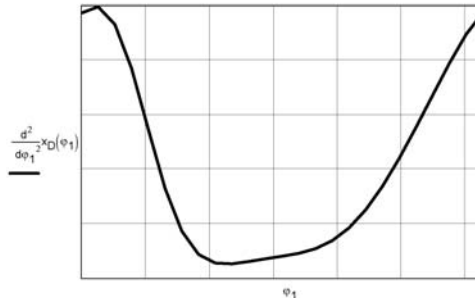
Діаграма переміщень точки D



Діаграма швидкостей точки D



Діаграма прискорень точки D



1.6. Аналітичне дослідження кінематики механізмів III класу

Механізми, клас яких вищий другого, називають механізмами високих класів. Для кінематичного дослідження таких механізмів можна використати метод замкнених векторних контурів. У загальному випадку задача ускладнюється тим, що такі механізми мають різні види, складання і задача зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь, а це вимагає розробки окремої програми для кожного такого механізму. В цій роботі розглянемо методику дослідження кінематики таких механізмів, задавшись початковими значеннями положень ланок на прикладі механізму III класу, кінематична схема якого зображена на рис. 1.30 [17]. До складу механізму входить кривошип OA і стояк θ , які утворюють механізм I класу, та одна група III класу III порядку.

Для визначення кінематичних параметрів руху ланок механізму складемо два рівняння замкнутості векторних контурів – $OADFB$ і $BFEC$:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{a}_1 + \bar{l}_3 + \bar{l}_5; \quad \bar{l}_3 + \bar{l}_{51} = \bar{a}_2 + \bar{l}_5, \quad (1.70)$$

які у проекціях на координатні осі x і y мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= a_1 \cos \varphi_B + l_3 \cos \varphi_3 + l_5 \cos \varphi_5; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= a_1 \sin \varphi_B + l_3 \sin \varphi_3 + l_5 \sin \varphi_5; \\ l_3 \cos \varphi_3 + l_{51} \cos \varphi_5 &= a_2 \cos \varphi_C + l_5 \cos \varphi_5; \\ l_3 \sin \varphi_3 + l_{51} \sin \varphi_5 &= a_2 \sin \varphi_C + l_5 \sin \varphi_5. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

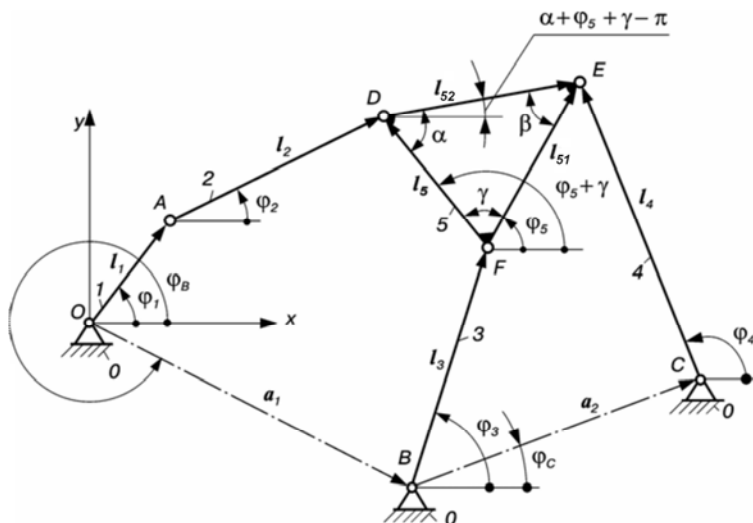


Рис. 1.30. Кінематична схема шестиланкового шарнірного механізму III класу

1.6. Аналітичне дослідження кінематики механізмів III класу

Залежності (1.71) є системою нелінійних рівнянь, розглядаючи які можна знайти кути $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$. Сучасне програмне забезпечення дозволяє розв'язувати такі задачі чисельним способом. Ускладнення викликає тільки визначення початкових положень ланок механізму, тому що такий механізм має декілька варіантів складання. Початкові положення ланок механізму можна знайти графічним способом [2]. В програмі Mathcad ця задача може бути розв'язана за допомогою блоку розв'язування рівнянь Given-Find. Далі наведено приклад такої програми.

Продиференціювавши рівняння (1.71) за узагальненою координатою φ_1 , та розв'язавши одержану систему лінійних рівнянь, отримаємо аналоги кутових швидкостей $\varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4, \varphi'_5$ і кутових прискорень $\varphi''_2, \varphi''_3, \varphi''_4, \varphi''_5$. Проте і в цьому випадку розв'язання задач ускладнюється вибором початкових значень відповідних аналогів. Щоб уникнути цієї трудомісткої процедури використаємо, як це показано в наведеній програмі PR.20, чисельне диференціювання кутових переміщень ланок.

Знаючи аналоги швидкостей і прискорень, знаходимо дійсні фізичні величини за формулами [1,4] ($\omega_1 = \text{const}$): $\omega_i = \varphi'_i \omega_1$, $\varepsilon_i = \varphi''_i \omega_1^2$, де ω_i – кутова швидкість відповідної ланки ($i=2-5$); ε_i – їх кутові прискорення; $\varphi'_i = d\varphi_i/d\varphi_1$ – аналог кутової швидкості i -ої ланки; $\varphi''_i = d\varphi'_i/d\varphi_1 = d^2\varphi_i/d\varphi_1^2$ – аналог кутового прискорення відповідної ланки.

Програма PR.20

Аналітичне дослідження кінематики шестиланкового механізму III класу

Вихідні дані

$$l_1 := 0.03 \quad l_2 := 0.16 \quad l_3 := 0.057 \quad l_4 := 0.1 \quad l_5 := 0.075 \quad l_{51} := 0.087 \quad l_{52} := 0.085$$

$$a_1 := 0.147 \quad a_2 := 0.115 \quad \varphi_0 := 0 \quad \varphi_B := 348\text{deg} \quad \varphi_C := 353\text{deg} \quad N := 360$$

$$\gamma := \arccos\left[\frac{(l_5^2 + l_{51}^2 - l_{52}^2)}{2 \cdot l_5 \cdot l_{51}}\right] \quad \Delta\varphi_1 := \frac{2\pi}{N}$$

Початкові положення ланок

$$\varphi_{1N} := \varphi_0 \quad \varphi_{2N} := 42\text{deg} \quad \varphi_{3N} := 85\text{deg} \quad \varphi_{4N} := 105\text{deg} \quad \varphi_{5N} := 18\text{deg}$$

Розділ 1. Кінематичне дослідження механізмів

Визначення положення ланок

Given

$$l_1 \cdot \cos(\varphi_1) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - a_1 \cdot \cos(\varphi_B) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3) - l_5 \cdot \cos(\varphi_5 + \gamma) = 0$$

$$l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - a_1 \cdot \sin(\varphi_B) - l_3 \cdot \sin(\varphi_3) - l_5 \cdot \sin(\varphi_5 + \gamma) = 0$$

$$l_3 \cdot \cos(\varphi_3) + l_{51} \cdot \cos(\varphi_5) - a_2 \cdot \cos(\varphi_C) - l_4 \cdot \cos(\varphi_4) = 0$$

$$l_3 \cdot \sin(\varphi_3) + l_{51} \cdot \sin(\varphi_5) - a_2 \cdot \sin(\varphi_C) - l_4 \cdot \sin(\varphi_4) = 0$$

$$F_L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) := \text{Find}(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$$

$$\varphi_{1_0} := \varphi_{1N} \quad \begin{pmatrix} \varphi_{2_0} \\ \varphi_{3_0} \\ \varphi_{4_0} \\ \varphi_{5_0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F_L(\varphi_{1N}, \varphi_{2N}, \varphi_{3N}, \varphi_{4N}, \varphi_{5N})0 \\ F_L(\varphi_{1N}, \varphi_{2N}, \varphi_{3N}, \varphi_{4N}, \varphi_{5N})1 \\ F_L(\varphi_{1N}, \varphi_{2N}, \varphi_{3N}, \varphi_{4N}, \varphi_{5N})2 \\ F_L(\varphi_{1N}, \varphi_{2N}, \varphi_{3N}, \varphi_{4N}, \varphi_{5N})3 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..N \quad \varphi_{1_i} := \varphi_{1N} + \Delta\varphi_{1 \cdot i} \quad \begin{pmatrix} \varphi_{2_i} \\ \varphi_{3_i} \\ \varphi_{4_i} \\ \varphi_{5_i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F_L(\varphi_{1_i}, \varphi_{2_{i-1}}, \varphi_{3_{i-1}}, \varphi_{4_{i-1}}, \varphi_{5_{i-1}})0 \\ F_L(\varphi_{1_i}, \varphi_{2_{i-1}}, \varphi_{3_{i-1}}, \varphi_{4_{i-1}}, \varphi_{5_{i-1}})1 \\ F_L(\varphi_{1_i}, \varphi_{2_{i-1}}, \varphi_{3_{i-1}}, \varphi_{4_{i-1}}, \varphi_{5_{i-1}})2 \\ F_L(\varphi_{1_i}, \varphi_{2_{i-1}}, \varphi_{3_{i-1}}, \varphi_{4_{i-1}}, \varphi_{5_{i-1}})3 \end{pmatrix}$$

Визначення аналогів кутових швидкостей ланок

$$\varphi'_2 := \begin{array}{|l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_2) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi_{2_k} - \varphi_{2_{k-1}})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array}$$

$$\varphi'_3 := \begin{array}{|l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_3) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi_{3_k} - \varphi_{3_{k-1}})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array}$$

$$\varphi'_4 := \begin{array}{|l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_4) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi_{4_k} - \varphi_{4_{k-1}})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array}$$

$$\varphi'_5 := \begin{array}{|l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_5) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi_{5_k} - \varphi_{5_{k-1}})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array}$$

1.6. Аналітичне дослідження кінематики механізмів III класу

Визначення аналогів кутових прискорень ланок

$$\varphi'_2 := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_2) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi'_{2k} - \varphi'_{2k-1})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

$$\varphi''_4 := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_4) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi''_{4k} - \varphi''_{4k-1})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

$$\varphi'_3 := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_3) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi'_{3k} - \varphi'_{3k-1})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

$$\varphi'_5 := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } k \in 1.. \text{length}(\varphi_5) - 1 \\ \text{Result}_k \leftarrow \frac{N \cdot (\varphi'_{5k} - \varphi'_{5k-1})}{2\pi} \\ \text{Result}_0 \leftarrow \text{Result}_N \\ \text{Result} \end{array} \right.$$

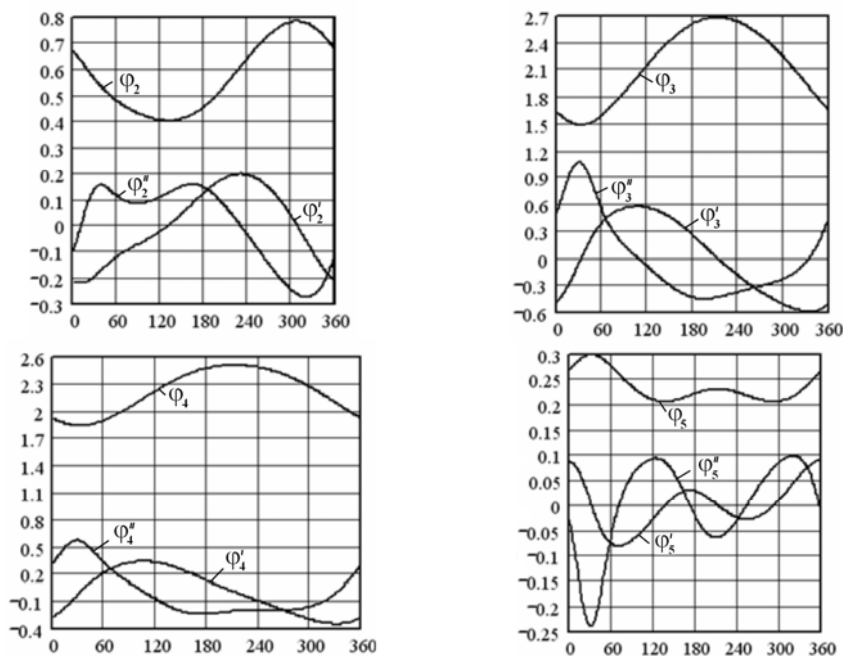


Рис. 1.31. Діаграми кутових переміщень, аналогів швидкостей та прискорень ланок механізму

На основі наведеної методики складено алгоритм і комп'ютерну програму в системі Mathcad, яка дозволила виконати аналітичне дослідження кінематики шестиланкового механізму III класу, побудувати діаграми кутових переміщень, аналогів швидкостей та прискорень всіх його ланок (рис. 1.31). Використання при проведенні розрахунків початкових значень положень ланок механізму дозволило однозначно знайти їх в усіх положеннях кривошипа. Для

знаходження аналогів швидкостей і прискорень, з метою уникнення аналізу виду складання механізму, або визначення їх початкових значень, використано чисельне диференціювання переміщень відповідних ланок.

Приклад 1.20. Провести кінематичне дослідження механізму поперечно-стругального верстату III класу (рис. 1.32) і побудувати діаграми переміщень, аналогів швидкостей та прискорень вихідної ланки, якщо задано: $r = 0,3i$; $a_1 = 0,5i$; $a_2 = 0,9i$; $N = 360$.

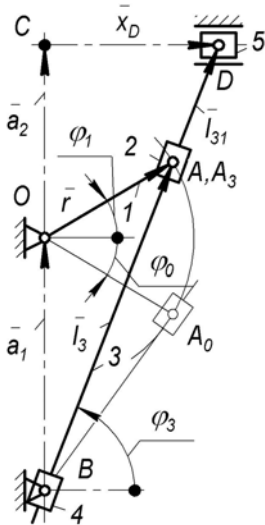


Рис. 1.32 – Кінематична схема механізму поперечно-стругального верстату

Розв’язання. Для визначення кінематичних параметрів руху ланок механізму складемо два рівняння замкнутості векторних контурів – OAB і BCD :

$$\bar{a}_1 + \bar{r}_2 = \bar{l}_3; \quad \bar{a}_2 + \bar{x}_D = \bar{l}_{31}, \quad (1.72)$$

які у проекціях на координатні осі x і y мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varphi_1 = l_3 \cos \varphi_3; \quad a_1 + r \sin \varphi_1 = l_3 \sin \varphi_3; \\ x_D = l_3 \cos \varphi_3; \quad a_2 = l_{31} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Залежності (1.73), на відміну від (1.71), є системою лінійних рівнянь, розглядаючи які можна знайти наступні параметри:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{a_1 + r \sin \varphi_1}{r \cos \varphi_1}; \quad l_3 = \frac{a_1 + r \sin \varphi_1}{\sin \varphi_3}; \\ x_D = l_{31} \cos \varphi_3; \quad l_{31} = \frac{a_2}{\sin \varphi_3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Продиференціювавши рівняння (1.74) за узагальненою координатою φ_1 , та розв’язавши одержану систему лінійних рівнянь, отримаємо аналоги швидкостей

$$\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}, \quad l_3' = \frac{dl_3}{d\varphi_1}, \quad x_D' = \frac{dx_D}{d\varphi_1}, \quad l_{31}' = \frac{dl_{31}}{d\varphi_1} \quad (1.75)$$

і кутових прискорень

$$\varphi_3'' = \frac{d\varphi_3'}{d\varphi_1}, \quad l_3'' = \frac{dl_3'}{d\varphi_1}, \quad x_D'' = \frac{dx_D'}{d\varphi_1}, \quad l_{31}'' = \frac{dl_{31}'}{d\varphi_1}. \quad (1.76)$$

Початкове положення кривошипа OA відповідає крайньому правому положенню куліси 3, яке знаходимо з трикутника OA_0B :

$$\varphi_0 \arcsin \frac{r}{a_1}. \quad (1.77)$$

Переміщення вихідної ланки знаходимо за формулою

$$s_{Di} = x_{Dmax} - x_{Di}. \quad (1.78)$$

На основі наведеної алгоритму складено комп'ютерну програму в системі Mathcad, яка дозволила виконати аналітичне дослідження кінематики шестиланкового кулісного механізму III класу, побудувати діаграми переміщень, аналогів швидкостей та прискорень вихідної ланки 5 (рис. 1.33).

Знаючи аналоги швидкостей і прискорень, знаходимо дійсні фізичні величини за формулами [1,4] при $\omega_1 = const$: $\omega_3 = \varphi'_3 \omega_1$, $\varepsilon_3 = \varphi''_3 \omega_1^2$, $v_D = s'_D \omega_1$, $a_D = s''_D \omega_1^2$, де ω_3 – кутова швидкість куліси 3; ε_3 – її кутове прискорення; $\varphi'_3 = d\varphi_3/d\varphi_1$ – аналог кутової швидкості 3-ої ланки; $\varphi''_3 = d\varphi'_3/d\varphi_1 = d^2\varphi_3/d\varphi_1^2$ – аналог кутового прискорення цієї ж ланки; $s'_D = ds_D/d\varphi_1$, $s''_D = ds'_D/d\varphi_1$ – аналоги швидкості та прискорення вихідної ланки 5.

Програма PR 21

Кулісний механізм III класу

$$r := 0.3 \quad a_1 := 0.5 \quad a_2 := 0.9 \quad N := 360$$

$$\varphi_0 := -\arcsin\left(\frac{r}{a_1}\right) \quad \varphi_0 = -36.87 \text{ deg} \quad \varphi_1 := \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi - \varphi_0$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \operatorname{atan}\left[\frac{(a_1 + r \cdot \sin(\varphi_1))}{(r \cdot \cos(\varphi_1))}\right] \quad \varphi_3(\varphi_0) = 53.13 \text{ deg}$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \begin{cases} R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1) & \text{if } \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1) + \pi & \text{if } \frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leq \frac{3}{2}\pi \\ R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1) & \text{if } \frac{3}{2}\pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi + \varphi_0 \end{cases}$$

$$l_3(\varphi_1) := \frac{(a_1 + r \cdot \sin(\varphi_1))}{\sin(\varphi_3(\varphi_1))} \quad l_{31}(\varphi_1) := \frac{a_2}{\sin(\varphi_3(\varphi_1))}$$

$$x_D(\varphi_1) := l_{31}(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \quad s_D(\varphi_1) := -x_D(\varphi_1) + x_D(\varphi_0)$$

$$\varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d(\varphi_1)} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi''_3(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_3(\varphi_1)$$

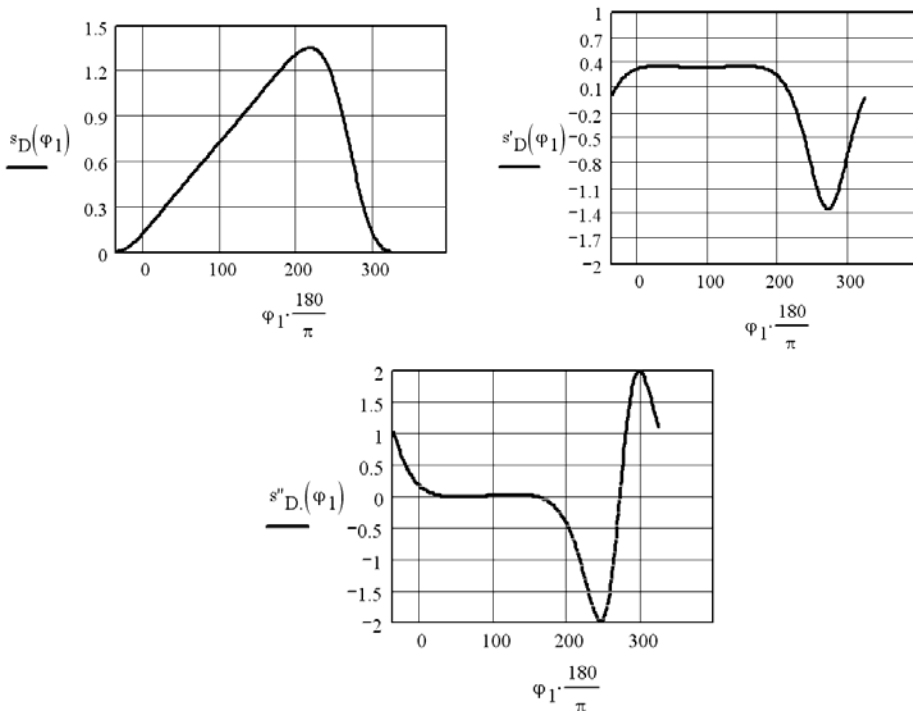


Рис. 1.32. Діаграми переміщень, аналогів швидкостей та прискорень вихідної ланки механізму

СИЛОВИЙ РОЗРАХУНОК ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

2.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів

При кінематичному дослідженні механізмів наперед вважається, що рух початкової ланки заданий, а рух інших ланок вивчається залежно від руху цієї ланки. За цих умов сили, які діють на ланки механізму, не враховувались. При динамічному дослідженні механізмів розглядається рух ланок з урахуванням сил, що діють на них.

Розрізняють *дві основні задачі* динаміки механізмів і машин [3. 12].

1. Задано закон руху початкової ланки механізму; треба визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух.

2. Задано зовнішні сили, що діють на ланки механізму; треба визначити закон руху початкової ланки.

Перша задача має назву *силового аналізу* механізмів, друга – *динаміки механізмів* (машин). Крім цього, як і в інших розділах теорії механізмів і машин, у динаміці можна виділити два класи задач – аналіз і синтез механізмів і машин за заданими динамічними умовами. З цієї причини до розділу динаміки включають ряд інших задач, які мають важливе технічне значення, а саме: розрахунок маховика, регуляторів швидкості, зрівноваження мас у механізмі, визначення його коефіцієнта корисної дії (ККД), дослідження коливань у машинах, їхній віброзахист. У цьому розділі будемо проводити всі дослідження без врахування сил тертя, прийнявши ланки механізмів за абсолютно тверді тіла.

2.2. Сили, що діють у машинах

Як відомо з курсу теоретичної механіки, під силою слід розуміти взаємодію тіл при передачі або перетворенні руху. Л. Ейлер вважав: усе, що спроможне змінити абсолютний стан тіла, називається силою. У динаміці механізмів і машин під *силою слід розуміти як причину змін механічного стану тіла, так і опори, які при цьому виникають*.

Зміну механічного стану тіла можна виразити у *зміні його руху*, тобто в прискоренні; у зміні його *розмірів*, або деформації; у зміні його *форми*, наприклад кування. Кожну дію, яка викликає ці зміни, а також опори, що виникають при цьому, називатимемо *силою*.

Сила не є якоюсь особливою категорією, яка існує незалежно від матерії або поза нею. Сила й матерія неподільні, тому будь-яка сила, безумовно, має матеріальне джерело.

Сили, які діють у машинах, поділяються на дві основні групи.

1. *Рушійні сили* \vec{F}_p , які діють у бік руху тіла, тобто намагаються прискорити його рух.

2. *Сили опору* \vec{F}_o , які діють проти руху тіла, тобто намагаються сповільнити його рух.

У свою чергу сили опору поділяються на сили *корисного* (або виробни-

чого) *опору* $\bar{F}_{к.о.о}$ та сили шкідливого (або невіробоного) *опору* $\bar{F}_{ш.о.}$.

Рушійні сили – це такі сили, які приводять механізм або машину до руху. Рушійними силами можуть бути тиск пари або газу, тиск води, повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сила тяжіння тощо.

Напрямки рушійної сили і швидкості точки, в якій прикладена ця сила, або збігаються, або утворюють гострий кут. Тому проекція вектора сили на напрямком руху тіла завжди додатна, що і визначає **додатну роботу рушійних сил**. До **сил корисного опору** відносять технологічні опори руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто для здійснення якого і призначено машину або механізм. Прикладом може служити опір різанню металів або вага вантажу, який ми підіймаємо. Тут доречно відзначити, що при опусканні вантажу його вага вже буде рушійною силою. Звідси випливає, що в деяких машинах одну й ту саму силу не можна завжди відносити до будь-якої певної категорії.

Сила корисного опору напрямлена в протилежний руху бік або утворює з напрямком швидкості тупий кут. Тому ця робота завжди від'ємна.

До **сил шкідливого опору** належать сили тертя в кінематичних парах, а також опір середовища. Щоправда, є випадки, коли силу тертя не можна віднести до сил шкідливого опору. В гальмах, наприклад, або в місцях стику привідних коліс локомотива з рейками, автомобіля з поверхнею дороги тертя корисне.

Розрізняють також **сили тяжіння** ланок \bar{G} , **сили інерції** $\bar{F}_{ин}$ і **сили реакції** \bar{R} в кінематичних парах. Проте ці сили не утворюють будь-якого нового класу. Залежно від напрямку їх дії ці сили треба віднести до рушійних сил або сил опору.

Сили тяжіння є результатом взаємодії ланок із Землею. У результаті того, що ця сила постійно спрямована в один бік, а в машинах траєкторії точок, як правило, замкнені, робота сил тяжіння за період руху механізму дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Всередині періоду руху ця робота відрізняється від нуля.

Сили інерції з'являються при зміні швидкості за величиною або за напрямком. При періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Це пояснюється тим, що швидкості й прискорення точок рухомих ланок по закінченні кожного періоду набирають початкових значень. Всередині періоду руху ця робота відрізняється від нуля, а самі сили інерції можуть набувати дуже великих значень.

Існують ще **сили реакції**, які виникають при взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто в кінематичних парах. Такі сили є внутрішніми силами для всього механізму в цілому, хоча для кожної окремо взятої ланки вони будуть зовнішніми. Робота сил реакцій ніколи не дорівнює нулю, оскільки не дорівнюють нулю сили тертя в кінематичних парах.

Усе досі сказане про сили стосується і моментів пар сил M , тому що вони характеризують дію сил при обертанні ($M = Fr$, де F – сила, r – плече цієї сили відносно осі обертання).

Рушійні сили і сили корисного опору залежно від їх механічних, фізичних і технологічних характеристик можуть бути або сталими, або функціями різних кінематичних параметрів – переміщень, швидкостей, прискорень і часу. Питання про механічні характеристики машин розглядаються в спеціальних курсах при розв’язанні задач, пов’язаних з конструюванням робочих машин і підбором двигунів до них.

2.3. Визначення сил інерції

Як відомо з теоретичної механіки, у загальному випадку всі сили інерції будь-якої ланки AB (рис. 4.7), яка здійснює плоский складний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, можуть бути зведені до головного вектора сил інерції $\bar{F}_{ин}$, який прикладаємо в центрі мас S (скорочено – сили інерції) і до головного момента сил інерції, $\bar{M}_{ин}$ (скорочено – момент сил інерції).

Сила інерції визначається за формулою

$$\bar{F}_{ин} = -m\bar{a}_S, \quad (2.1)$$

де $\bar{F}_{ин}$ – вектор сили інерції ланки AB ; m – маса ланки, кг; \bar{a}_S – вектор повного прискорення центра мас S , м/с².

Сила інерції ланки $\bar{F}_{ин}$ спрямована протилежно вектору прискорення центра мас \bar{a}_S (рис. 2.1).

Таким чином, для визначення сили інерції $\bar{F}_{ин}$ ланки треба знати її масу й вектор повного прискорення \bar{a}_S центра мас. Як видно з (2.1), сила інерції має одиницю вимірювання кілограм-метр на секунду в квадраті (кг · м/с²), тобто вимірюється у **ньютонax** (Н).

Момент $\bar{M}_{ин}$ сил інерції спрямований протилежно кутовому прискоренню ϵ і може бути визначений за формулою

$$\bar{M}_{ин} = -J_S\bar{\epsilon}, \quad (2.2)$$

де J_S – момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до площини руху ланки; $\bar{\epsilon}$ – кутове прискорення ланки.

Момент інерції J_S має одиницю вимірювання кг · м², кутове прискорення ϵ – рад/с², тому момент $\bar{M}_{ин}$ сил інерції вимірюють у кг · м²/с² = Н · м.

Силу інерції $\bar{F}_{ин}$ і момент сил інерції $\bar{M}_{ин}$ можна замінити однією рівнодіючою силою $\bar{F}'_{ин}$, що дорівнює за величиною силі інерції $\bar{F}_{ин}$ (рис. 2.2), лінія дії якої зміщена відносно центра мас S на відстань $h = M_{ин}/F_{ин}$, тобто момент сил інерції ($M_{ин} = F_{ин}h$) замінюємо парою сил.

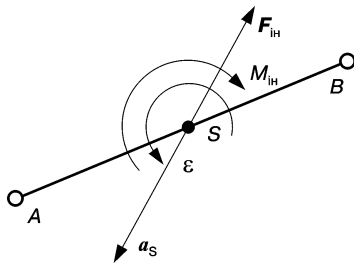


Рис. 2.1. До визначення напрямку сили інерції та моменту сили інерції

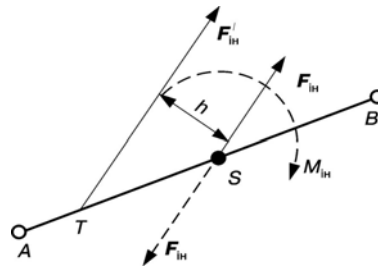


Рис.2.2. Заміна сили інерції та моменту сили інерції однією рівнодіючою силою

Приклад 4.1 [15]. Для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3) знайти аналітичним способом величину та напрямки сил і моментів сил інерції всіх ланок механізму, побудувати їх діаграми та годограф сили інерції шатуна BC, якщо маси ланок $m_1 = 0,2$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 0,5$ кг, а їх центральні моменти інерції $J_{S_1} = 0,01$ кгм², $J_{S_2} = 0,04$ кгм². Розміри ланок: $r = l_{AB} = 50$ мм, $l = l_{BC} = 400$ мм, $e = 0,04$; відстані до центрів мас: $l_{AS_1} = 0,4l_{AB}$, $l_{BS_2} = 0,55l_{BC}$; кутова швидкість кривошипа $\omega_1 = 10$ с⁻¹. Початкове положення кривошипа прийняти, коли повзун 3 знаходиться в крайньому правому положенні.



Рис. 2.3. Кінематична схема кривошипно-повзунного механізму

Розв'язання. Використовуючи метод замкнених векторних контурів, визначаємо (див. приклад 1.2):

1. Початкове положення кривошипа за формулою

$$\varphi_0 = \arctg\left(\frac{e}{l+r}\right). \quad (2.3)$$

2. Координати шатуна 2, повзуна 3, а також точок B і S₂:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{e-r\sin\varphi_1}{l}\right), \quad x_C = r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2, \quad x_B = r\cos\varphi_1, \\ y_B = r\sin\varphi_1, \quad x_{S_2} = x_B + l_{BS_2}\cos\varphi_2, \quad y_{S_2} = y_B + l_{BS_2}\sin\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

3. Аналоги відповідних швидкостей та прискорень:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}, \quad x_C' = \frac{dx_C}{d\varphi_1}, \quad x_{S_2}' = \frac{dx_{S_2}}{d\varphi_1}, \quad y_{S_2}' = \frac{dy_{S_2}}{d\varphi_1}, \\ \varphi_2'' = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}, \quad x_C'' = \frac{d^2x_C}{d\varphi_1^2}, \quad x_{S_2}'' = \frac{d^2x_{S_2}}{d\varphi_1^2}, \quad y_{S_2}'' = \frac{d^2y_{S_2}}{d\varphi_1^2}, \quad s_{S_2}'' = \sqrt{x_{S_2}''^2 + y_{S_2}''^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

4. Прискорення центрів мас ланок і кутове прискорення ланки 2:

$$a_{S_1} = \omega_1^2 l_{AS_1}, \quad a_{S_2} = \omega_1^2 s_{S_2}'', \quad a_{S_2} = \omega_1^2 x_C'', \quad \varepsilon_2 = \omega_1^2 \varphi_2''.$$

5. Кути, що визначають напрямки прискорення центра мас S_2 і сили інерції $F_{ін2}$:

$$\alpha_{S_2} = \arctg \frac{y_{S_2}''}{x_{S_2}''}, \quad \alpha_{F_2} = \alpha_{S_2} - \pi. \quad (2.6)$$

5. Сили та моменти сил інерції, що діють на ланки механізму:

$$F_{ін1} = m_1 a_{S_1}, \quad F_{ін2} = m_2 a_{S_2}, \quad F_{ін3} = m_3 a_C, \quad M_{ін2} = J_{S_2} \varepsilon_2. \quad (2.7)$$

Програма PR 2.1

$$r := 0.05 \quad l := 0.4 \quad e := 0.04 \quad m_1 := 0.2 \quad m_2 := 2 \quad m_3 := 0.5 \quad \omega_1 := 15$$

$$J_{S_1} := 0.01 \quad J_{S_2} := 0.8 \quad l_{AS_1} := 0.4 \cdot r \quad l_{BS_2} := 0.55 \cdot l \quad N := 36$$

$$\varphi_0 := \arcsin\left(\frac{e}{l+r}\right) \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \arcsin\left[\frac{(e - r \cdot \sin(\varphi_1))}{l}\right]$$

$$x_C(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) + l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_{S_2}(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BS_2} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$y_{S_2}(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BS_2} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$\varphi_2'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) \quad x_C'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_C(\varphi_1)$$

$$x_{S_2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S_2}(\varphi_1) \quad y_{S_2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S_2}(\varphi_1)$$

$$\varphi_2''(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_2(\varphi_1) \quad x_C''(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_C(\varphi_1)$$

$$x_{S_2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S_2}'(\varphi_1) \quad y_{S_2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S_2}'(\varphi_1)$$

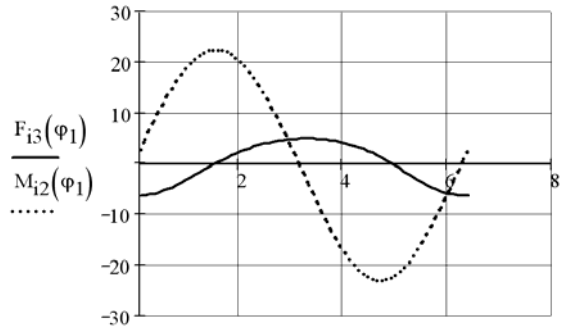
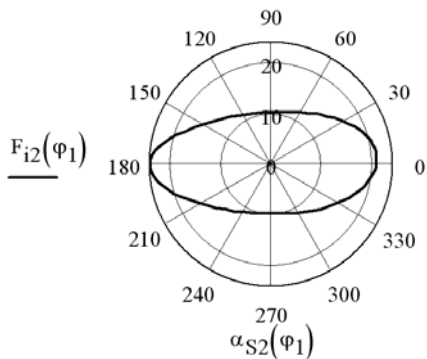
$$s''_{S2}(\varphi_1) := \sqrt{x''_{S2}(\varphi_1)^2 + y''_{S2}(\varphi_1)^2} \quad a_{S1} := \omega_1^2 \cdot l_{AS1}$$

$$a_{S2}(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot s''_{S2}(\varphi_1) \quad a_C(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot x''_C(\varphi_1)$$

$$\varepsilon_2(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot \varphi_2''(\varphi_1) \quad \alpha_{S2}(\varphi_1) := \text{atan2}(x''_{S2}(\varphi_1), y''_{S2}(\varphi_1))$$

$$\alpha_{F2}(\varphi_1) := \alpha_{S2}(\varphi_1) - \pi \quad F_{i1} := m_1 \cdot a_{S1} \quad F_{i2}(\varphi_1) := m_2 \cdot a_{S2}(\varphi_1)$$

$$F_{i3}(\varphi_1) := m_3 \cdot a_C(\varphi_1) \quad M_{i2}(\varphi_1) := J_{S2} \cdot \varepsilon_2(\varphi_1)$$



Приклад 2.2 [15]. Для шарнірного чотириланкового механізму (рис. 2.4) знайти аналітичним способом величину та напрямки сил і моментів сил інерції всіх ланок механізму, побудувати їхні діаграми та годограф сили інерції шатуна BC , якщо маси ланок $m_1 = 0,2$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 0,5$ кг, а їх центральні моменти інерції $J_{S_1} = 0,01$ кгм², $J_{S_2} = 0,04$ кгм², $J_{S_3} = 0,5$ кгм². Розміри ланок: $r = l_{AB} = 0,03$ м, $l = l_{BC} = 0,16$ м, $b = 0,085$ м, $a = l_{AD} = 0,13$ м; відстані до центрів мас: $l_{AS_1} = 0,4 l_{AB}$, $l_{BS_2} = 0,55 l_{BC}$, $l_{CS_3} = 0,5 l_{CD}$; кутова швидкість кривошипа $\omega_1 = 10$ с⁻¹. Початкове положення кривошипа прийняти тоді, коли коромисло 3 знаходиться в крайньому правому положенні.

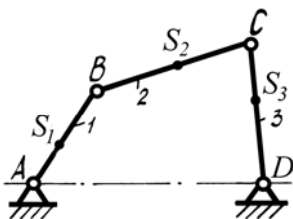


Рис. 2.4. Кінематична схема шарнірного чотириланкового механізму

Інші параметри, що не наведені у вказаних формулах, наступні:

Розв'язування. Для визначення геометричних, кінематичних і силових параметрів механізму використаємо залежності (1.8)–(1.12), (1.13), (1.19), (1.21), (2.4)–(2.8).

Початкове положення кривошипа знаходимо за формулою

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2lb}\right). \quad (2.8)$$

Інші параметри, що не наведені у вказаних формулах, наступні:

$$x_{S3} = a + l_{CS3} \cos \varphi_3, \quad y_{S3} = l_{CS3} \sin \varphi_3, \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3' &= \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}, \quad x_{S3}' = \frac{dx_{S3}}{d\varphi_1}, \quad y_{S3}' = \frac{dy_{S3}}{d\varphi_1}, \quad \varphi_3'' = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}, \quad x_{S3}'' = \frac{d^2x_{S3}}{d\varphi_1^2}, \\ y_{S3}'' &= \frac{d^2y_{S3}}{d\varphi_1^2}, \quad s_{S3}'' = \sqrt{x_{S3}''^2 + y_{S3}''^2}, \quad a_{S3} = \omega_1^2 s_{S3}'', \quad \varepsilon_3 = \omega_1^2 \varphi_3'', \\ \alpha_{S3} &= \arctg \frac{y_{S3}''}{x_{S3}''}, \quad \alpha_{F3} = \alpha_{S3} - \pi, \quad F_{in3} = m_2 a_{S3}, \quad M_{in3} = J_{S3} \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Програма PR 2.2

$r := 0.03$ $l := 0.16$ $b := 0.085$ $a := 0.13$ $m_1 := 0.2$ $m_2 := 2$ $m_3 := 0.5$ $J_{S1} := 0.01$
 $J_{S2} := 0.04$ $J_{S3} := 0.5$ $l_{AS1} := 0.4 \cdot r$ $l_{BS2} := 0.55 \cdot l$ $l_{CS3} := 0.5 \cdot b$ $\omega_1 := 10$
 $N := 360$

$$\varphi_0 := \arccos \left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2(r+l)a} \right] \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)} \quad \mu(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b} \right)$$

$$\delta(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)} \right) \quad \psi(\varphi_1) := \arcsin \left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)} \right)$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) \quad \varphi_2(\varphi_1) := \delta(\varphi_1) + \psi(\varphi_1)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1) \quad \varphi_2'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\varphi_2''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2'(\varphi_1) \quad \varphi_3'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi_3''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3'(\varphi_1)$$

$$\omega_3(\varphi_1) := \varphi_3'(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \varepsilon_3(\varphi_1) := \varphi_3''(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad x_B'(\varphi_1) := -r \cdot \sin(\varphi_1) \quad y_B'(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$x_{S2}(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BS2} \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \quad y_{S2}(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BS2} \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

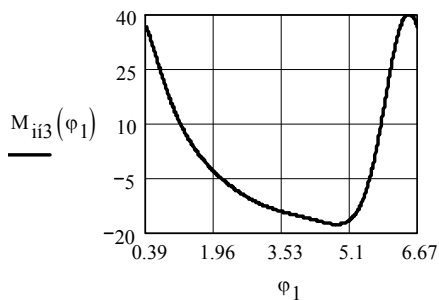
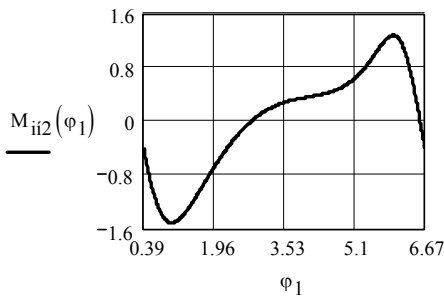
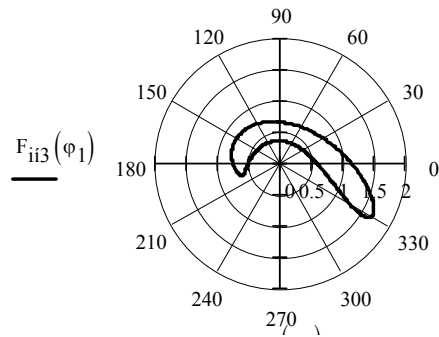
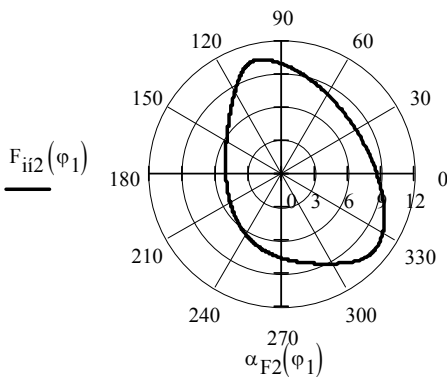
$$x_{S2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S2}(\varphi_1) \quad y_{S2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S2}(\varphi_1) \quad x_{S2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S2}'(\varphi_1)$$

$$y_{S2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S2}'(\varphi_1) \quad s_{S2}''(\varphi_1) := \sqrt{x_{S2}''(\varphi_1)^2 + y_{S2}''(\varphi_1)^2}$$

$$s_{S2}''(\varphi_1) := \sqrt{x_{S2}''(\varphi_1)^2 + y_{S2}''(\varphi_1)^2} \quad x_{S3}(\varphi_1) := a + l_{CS3} \cos(\varphi_3(\varphi_1))$$

$$y_{S3}(\varphi_1) := l_{CS3} \sin(\varphi_3(\varphi_1))$$

$$\begin{aligned}
 x'_{S3}(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} x_{S3}(\varphi_1) & x''_{S3}(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} x'_{S3}(\varphi_1) & y'_{S3}(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} y_{S3}(\varphi_1) \\
 y''_{S3}(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1} y'_{S3}(\varphi_1) & s''_{S3}(\varphi_1) &:= \sqrt{x''_{S3}(\varphi_1)^2 + y''_{S3}(\varphi_1)^2} \\
 s'_{S3}(\varphi_1) &:= \sqrt{x'_{S3}(\varphi_1)^2 + y'_{S3}(\varphi_1)^2} & a_{S1} &:= \omega_1^2 \cdot l_{AS1} \\
 a_{S2}(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot s''_{S2}(\varphi_1) & a_{S3}(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot s''_{S3}(\varphi_1) & \varepsilon_2(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot \varphi''_2(\varphi_1) \\
 \varepsilon_3(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot \varphi''_3(\varphi_1) & \alpha_{S2}(\varphi_1) &:= \text{atan2}(x''_{S2}(\varphi_1), y''_{S2}(\varphi_1)) & \alpha_{F2}(\varphi_1) &:= \alpha_{S2}(\varphi_1) - \pi \\
 \alpha_{S3}(\varphi_1) &:= \text{atan2}(x''_{S3}(\varphi_1), y''_{S3}(\varphi_1)) & \alpha_{F3}(\varphi_1) &:= \alpha_{S3}(\varphi_1) - \pi & F_{ii1} &:= m_1 \cdot a_{S1} \\
 F_{ii2}(\varphi_1) &:= m_2 \cdot a_{S2}(\varphi_1) & F_{ii3}(\varphi_1) &:= m_3 \cdot a_{S3}(\varphi_1) \\
 M_{ii2}(\varphi_1) &:= J_{S2} \cdot \varepsilon_2(\varphi_1) & M_{ii3}(\varphi_1) &:= J_{S3} \cdot \varepsilon_3(\varphi_1)
 \end{aligned}$$



Приклад 2.3 [15]. Для кулісного механізму (рис. 2.5) знайти аналітичним способом величину та напрямок сил і моментів сил інерції всіх ланок механізму, побудувати їхні діаграми та годограф сили інерції шатуна BC , якщо маси ланок $m_1 = 0,25$ кг $m_2 = 0,2$ кг, $m_3 = 1,8$ кг, а їх центральні моменти інерції $J_{S_1} = 0,02$ кгм², $J_{S_2} = 0$, $J_{S_3} = 0,5$ кгм². Розміри ланок: $r = l_{AB} = 0,1$ м, $a = l_{AC} = 0,3$ м; відстані до центрів мас: $l_{AS_1} = 0,3 l_{AB}$, $l_{BS_3} = 0,25$ м; кутова

швидкість кривошипа $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$. Початкове положення кривошипа прийняти тоді, коли куліса 3 знаходиться в крайньому правому положенні.

Розв'язання. Використовуючи метод замкнених векторних контурів, визначаємо (див. приклад 1.3):

1. Початкове положення кривошипа

$$\delta_0 = \arccos \frac{r}{a}, \quad \varphi_0 = \delta_0 - \frac{\pi}{2}.$$

2. Координати точки B:

$$x_B = r \cos \varphi_1, \quad y_B = r \sin \varphi_1.$$

3. Положення куліси 3

$$\varphi_3 = \arctg \frac{a + r \sin \varphi_1}{r \cos \varphi_1},$$

$$\text{якщо } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3}{2}\pi, \text{ то } \varphi_3 = \pi + \arctg \frac{a + r \sin \varphi_1}{r \cos \varphi_1}.$$

4. Решта параметрів визначаються залежностями (2.9), (2.10).

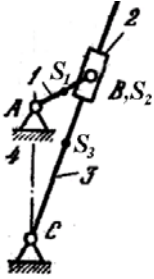


Рис. 2.5. Кінематична схема кулісного механізму

Програма PR 2.3

$$r := 0.1 \quad a := 0.3 \quad l_{AS1} := 0.3r \quad l_{CS3} := 0.25 \quad m_1 := 0.25 \quad m_2 := 0.2$$

$$m_3 := 1.8 \quad J_{S1} := 0.02 \quad J_{S2} := 0 \quad J_{S3} := 0.5 \quad \omega_1 := 10 \quad N := 360$$

$$\delta_0 := a \cos \left(\frac{r}{a} \right) \quad \varphi_0 := \delta_0 - \frac{\pi}{2} \quad \varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + 2 \frac{\pi}{N} .. 2\pi + \varphi_0$$

$$x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_B(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \text{atan} \left[\frac{(a + r \cdot \sin(\varphi_1))}{r \cdot \cos(\varphi_1)} \right]$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \begin{cases} R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1) & \text{if } \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leftarrow \pi + \varphi_3(\varphi_1) & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3}{2}\pi \\ R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1) & \text{if } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq 2\pi + \varphi_0 \end{cases}$$

$$x'_B(\varphi_1) := -r \cdot \sin(\varphi_1) \quad y'_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$\varphi_3'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi_3''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3'(\varphi_1)$$

$$x_{S3}(\varphi_1) := l_{CS3} \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \quad y_{S3}(\varphi_1) := -a + l_{CS3} \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1))$$

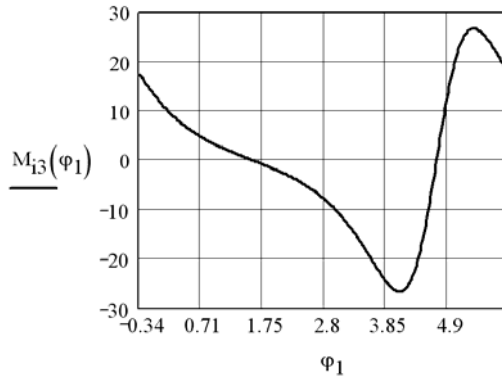
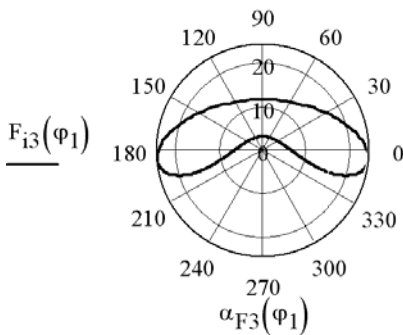
$$\alpha_{S3}(\varphi_1) := \text{atan2}(x''_{S3}(\varphi_1), y''_{S3}(\varphi_1)) \quad \alpha_{F3}(\varphi_1) := \alpha_{S3}(\varphi_1) - \pi$$

$$F_{i1} := m_1 \cdot a_{S1} \quad F_{i2}(\varphi_1) := m_2 \cdot a_B(\varphi_1) \quad F_{i3}(\varphi_1) := m_3 \cdot a_{S3}(\varphi_1)$$

$$\alpha_{S3}(\varphi_1) := \text{atan2}(x''_{S3}(\varphi_1), y''_{S3}(\varphi_1)) \quad \alpha_{F3}(\varphi_1) := \alpha_{S3}(\varphi_1) - \pi$$

$$F_{i1} := m_1 \cdot a_{S1} \quad F_{i2}(\varphi_1) := m_2 \cdot a_B(\varphi_1) \quad F_{i3}(\varphi_1) := m_3 \cdot a_{S3}(\varphi_1)$$

$$M_{i3}(\varphi_1) := J_{S3} \cdot \varepsilon_3(\varphi_1)$$



2.4. Силовий розрахунок плоских механізмів без урахування сил тертя

Основні задачі силового розрахунку. Визначення сил, які діють на ланки механізмів, має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібробійність, зносостійкість, довговічність, для визначення втрат енергії на тертя, а також для підрахунку енергетичного балансу машини та виконання інших подібних розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є: *по-перше*, визначення зовнішніх невідомих сил, що діють на ланки механізмів; *по-друге*, визначення сил взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто реакцій у кінематичних парах; *по-третє*, визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту сил.

При розв'язанні задач силового розрахунку механізмів припускається, що закон руху початкової ланки задано; так само припускається, що маси і моменти інерції ланок відомі. Отже, завжди можна визначити ті сили інерції, які

необхідні для розв'язання задач силового розрахунку. В першому наближенні силовий розрахунок проводять без урахування сил тертя в кінематичних парах.

Найпростішим випадком силового розрахунку механізмів є рівновага, тобто коли ланки механізму перебувають у стані спокою або рівномірному прямолінійному русі. У цих випадках не виникають динамічні сили (сили інерції). Тому для розв'язання такої задачі досить звичайних рівнянь статички. У загальному випадку – при наявності прискорень – виникають сили інерції, і рівнянь статички тут мало. Щоб розв'язати задачу про знаходження сил, використовують *принцип Даламбера*, згідно з яким *рухома система тіл перебуває в кожному моменті часу в рівновазі під дією зовнішніх сил, куди включають і сили інерції*.

Таким чином, користуючись принципом Даламбера, можна задачу динаміки розв'язати методами статички, якщо умовно віднести до зовнішніх сил і сили (моменти сил) інерції, які виникають при русі ланок з прискоренням і діють на елементи кінематичних пар як додаткові сили. Проте треба твердо пам'ятати, що сили інерції, які докладаємо до ланок, умовні. Вони діють на іншу ланку, яка спричиняє прискорений рух даної ланки. Так і розуміють характер сил інерції.

Розв'язання задачі динаміки методами статички називають *кінестатичним* розрахунком.

Статична визначеність структурної групи. Як відомо з курсів теоретичної механіки і опору матеріалів, задача про знаходження сил легко розв'язується для статично визначених систем. *Статично визначеною системою* називають таку систему, в якій кількість невідомих сил дорівнює числу рівнянь рівноваги, які можна скласти для їх знаходження.

Тому, перш ніж приступати до розв'язання задачі знаходження невідомих сил, треба з'ясувати, для яких кінематичних ланцюгів дотримується умова статичної визначеності.

Для прикладу розглянемо плоский механізм, до складу якого входить n рухомих ланок, p_5 пар п'ятого класу і p_4 пар четвертого класу. Нехай будуть відомі всі зовнішні сили (включаючи сили інерції), які діють на ланки механізму. Треба визначити реакції в кінематичних парах. Для кожної ланки плоского механізму можна скласти три рівняння, а для n ланок – $3n$ рівнянь. Будь-яка сила характеризується трьома параметрами: величиною (модулем), напрямком і точкою прикладання. Розглянемо, які з цих параметрів відомі, а які невідомі для сил реакцій у різних кінематичних парах плоских механізмів.

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені нормально до стичних поверхонь. Тому в обертовій кінематичній парі (рис. 2.6, а) реакція \bar{R}_{21} , яка прикладена до ланки 2 зі сторони ланки 1, буде завжди проходити через центр шарніра O . Величина і напрямок дії цієї сили \bar{R}_{21} невідомі, тому що вони залежать від сил, які прикладені до ланок 1 і 2. Сказане повністю стосується і реакції \bar{R}_{12} , яка прикладена до ланки 1 зі сторони ланки 2, тому що сили взає-

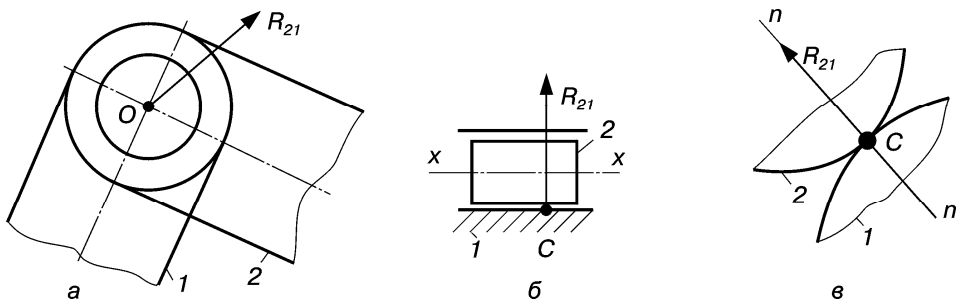


Рис. 2.6. Реакції в кінематичних парах: а) обертова пара; б) поступальна пара; в) вищій парі

модії зв'язані між собою третім законом Ньютона: $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$.

У поступальній парі (рис. 2.6, б) результуюча реакція \bar{R}_{21} буде напрямлена перпендикулярно до осі руху $x-x$ ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її величина і точка прикладання C .

У вищій парі IV класу (рис. 2.6, в) реакція \bar{R}_{21} напрямлена вздовж спільної нормалі $n-n$ (без урахування тертя) і прикладена в точці дотику C . Тому в такій кінематичній парі відомі точка прикладання і напрямок сили реакції. Невідомою є її величина.

Тоді для плоского кінематичного ланцюга кількість невідомих дорівнюватиме $2p_5 + p_4$, де p_5 – кінематичні пари V класу; p_4 – кінематичні пари IV класу.

Кінематичний ланцюг буде статично визначений, коли число невідомих параметрів дорівнює числу рівнянь, тобто в нашому випадку повинна дотримуватись рівність

$$2p_5 + p_4 = 3n$$

або

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (2.10)$$

Вираз, який знаходиться в лівій частині рівності (2.10), вказує на число ступенів вільності плоского кінематичного ланцюга $W=0$ [1, 7].

Значить, **статично визначеними є кінематичні ланцюги з нульовим ступенем вільності**. Такими кінематичними ланцюгами є структурні групи. Звідси випливає, що **структурні групи є статично визначеними**, а тому при силовому розрахунку доцільно розглядати рівновагу окремих структурних груп.

Умова (2.10) справедлива для плоскої системи зовнішніх сил, які діють на ланки механізму. При просторовому розташуванні сил число рівнянь статички і число невідомих складових реакцій мають задовольняти умову (2.16) [7]. Треба зауважити, що для статичної визначеності плоский механізм не повинен мати зайвих зв'язків. Наявність таких зв'язків збільшує число невідомих складових реакцій, і для їх визначення додатково до рівнянь статички треба скласти

рівняння деформацій.

Методика і порядок силового розрахунку механізмів. На підставі сказаного раніше можна викласти методику силового розрахунку механізмів. При силовому розрахунку механізм розбивають на структурні групи, тобто на статично визначені ланцюги, до яких прикладають усі зовнішні сили, включаючи сили (моменти сил) інерції, дію основного механізму на ланки групи замінюють реакціями. Під дією всіх цих сил група перебуває в рівновазі, а тому можна скласти відповідну кількість рівнянь рівноваги, розв'язуючи які відносно невідомих складових реакцій, знаходимо їх. При цьому на відміну від кінематичного дослідження механізмів силовий розрахунок починають з останньої від початкової ланки приєднаної структурної групи і закінчують силовим розрахунком початкової (початкових) ланки.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів зводиться до розрахунку окремих структурних груп. Це ще раз підтверджує значимість структурної класифікації Л. В. Ассура.

Приклад 2.4 [15]. Для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.7) знайти аналітичним способом величину сил і моментів сил інерції всіх ланок механізму, реакції в кінематичних парах та величину зрівноважувальної сили, яку прикласти в точці B перпендикулярно кривошипу і побудувати їх діаграми, якщо маси ланок $m_1 = 2$ кг $m_2 = 12$ кг, $m_3 = 5$ кг, а їх центральні моменти інерції $J_{S_1} = 0,01$ кгм², $J_{S_2} = 0,8$ кгм²; сила корисного опору $F_{ко} = 100$ Н і діє лише при русі повзуна 3 вліво. Розміри ланок: $r = l_{AB} = 50$ мм, $l = l_{BC} = 150$ мм, $e = 20$ мм; відстані до центрів мас: $l_{AS_1} = 0,4l_{AB}$, $l_{BS_2} = 0,55l_{BC}$. Кутова швидкість кривошипа $l \omega_1 = 15$ с⁻¹. Початкове положення кривошипа прийняти, коли повзун 3 знаходиться в крайньому правому положенні.

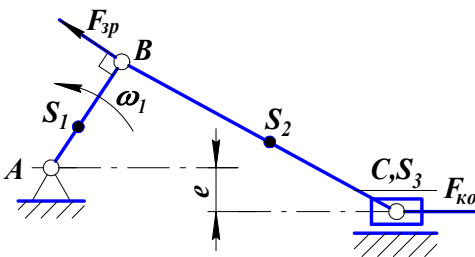


Рис. 2.7. Кінематична схема механізму

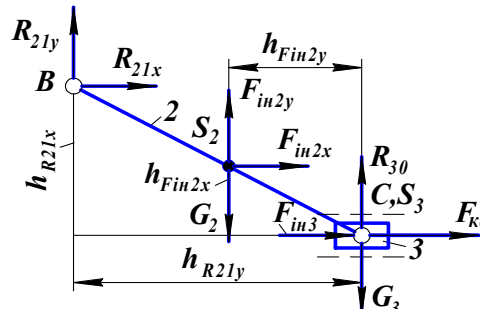


Рис. 2.8. Розрахункова схема структурної групи 2-3

Розв'язування. Перш чим приступити до силового розрахунку вказаного механізму необхідно визначити геометричні і кінематичні параметри руху його ланок, використавши залежності (2.3) – (2.7).

Положення кривошипа в другому крайньому положенні повзуна зна-

димо за формулою

$$\varphi'_0 = \pi + \arctg \frac{e}{l-r}.$$

Сили і момент сили інерції знаходимо за формулами (2.8).

Силовий розрахунок механізму починаємо з структурної групи 2–3 (рис.2.8). Прикладаємо до її ланок всі зовнішні сили, включаючи сили інерції, дію основного механізму замінюємо реакціями \bar{R}_{21} і \bar{R}_{30} .

Розкладаємо реакцію \bar{R}_{21} і силу інерції на дві складові:

$$\bar{R}_{21} = \bar{R}_{21x} + \bar{R}_{21y}, \quad \bar{F}_{in} = \bar{F}_{in2x} + \bar{F}_{in2y}.$$

Запишемо рівняння рівноваги ланок групи під дією прикладених сил:

$$\bar{R}_{21x} + \bar{R}_{21y} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{in2x} + \bar{F}_{in2y} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{in3} + \bar{F}_{ко} + \bar{R}_{30} = 0.$$

Запишемо це рівняння в проекціях на координатні осі x і y :

$$R_{21x} + F_{in2x} + F_{in3} + F_{ко} = 0, \quad R_{21y} - G_2 + F_{in2y} - G_3 + R_{30} = 0. \quad (2.11)$$

З першого рівняння системи (2.11) знаходимо

$$R_{21x} = -F_{in2x} - F_{in3} - \bar{F}_{ко}. \quad (2.12)$$

В другому рівнянні маємо дві невідомі величини – R_{21y} і R_{30} , а тому складаємо додатково рівняння рівноваги шатуна 2 відносно точки C :

$$\sum M_C = -R_{21x}h_{R_{21x}} - R_{21y}h_{R_{21y}} - F_{in2x}h_{F_{in2x}} + (G_2 - F_{in2y})h_{F_{in2y}} + M_{in2} = 0, \quad (2.13)$$

де

$$h_{R_{21x}} = l \sin \varphi_2, \quad h_{R_{21y}} = l \cos \varphi_2, \quad h_{F_{in2x}} = (l - l_{BS_2}) \sin \varphi_2, \quad h_{F_{in2y}} = (l - l_{BS_2}) \cos \varphi_2.$$

Тоді

$$R_{21y} = \frac{-R_{21x}h_{R_{21x}} - F_{in2x}h_{F_{in2x}} + (G_2 - F_{in2y})h_{F_{in2y}} + M_{in2}}{h_{R_{21y}}},$$

$$R_{21} = \sqrt{R_{21x}^2 + R_{21y}^2}, \quad R_{30} = -R_{21y} - F_{in2y} + G_2 + G_3.$$

Напрямки векторів \bar{R}_{21} і \bar{F}_{in2} знаходимо за формулам:

$$\alpha_{R_{21}} = \arctg \frac{R_{21y}}{R_{21x}}, \quad \alpha_{F_{in2}} = \arctg \frac{F_{in2y}}{F_{in2x}}.$$

Реакцію в обертовій парі C знаходимо з рівноваги ланки 2:

$$R_{21x} + F_{in2x} + R_{23x} = 0, \quad R_{21y} - G_2 + F_{in2y} - R_{23y} = 0.$$

Тоді

$$R_{23x} = -F_{in2x} - R_{21x}, \quad R_{23y} = G_2 - F_{in2y} - R_{21y} = 0, \quad R_{23} = \sqrt{R_{23x}^2 + R_{23y}^2}.$$

Напрямок вектора \bar{R}_{23} знаходимо за формулою:

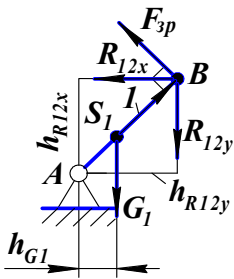


Рис. 2.9. Розрахункова схема механізму I класу

$$\alpha_{R_{23}} = \arctg \frac{R_{23y}}{R_{23x}}$$

Силевий розрахунок механізму закінчують розрахунком механізму I класу (рис. 2.9). Складові реакції в парі B з умов:

$$\bar{R}_{12x} = -\bar{R}_{21x}, \quad \bar{R}_{12y} = -\bar{R}_{21y}.$$

Величину зрівноважувальної сили знаходимо з умови рівноваги кривошипа відносно його центра обертання:

$$\Sigma M_A = F_{3p}r + \bar{R}_{12x}h_{R_{12x}} - \bar{R}_{12y}h_{R_{12y}} - G_1h_{G_1},$$

де

$$h_{G_1} = |l_{AS_1} \cos \varphi_1|, \quad h_{R_{12x}} = |r \sin \varphi_1|, \quad h_{R_{12y}} = |r \cos \varphi_1|.$$

Тоді

$$F_{3p} = (\bar{R}_{12x}h_{R_{12x}} - \bar{R}_{12y}h_{R_{12y}} - G_1h_{G_1})/r.$$

Для знаходження реакції в шарнірі A запишемо рівняння рівноваги кривошипа:

$$\begin{aligned} -R_{12x} + F_{in1x} - F_{3p} \cos(\varphi_1 - \pi/2) + R_{10x} &= 0, \\ -R_{12y} + F_{in1y} - F_{3p} \sin(\varphi_1 - \pi/2) + G_1 + R_{10y} &= 0, \end{aligned}$$

де

$$F_{in1x} = F_{in1} \cos \varphi_1, \quad F_{in1y} = F_{in1} \sin \varphi_1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} R_{10x} &= -R_{12x} + F_{in1x} - F_{3p} \cos(\varphi_1 - \pi/2), \\ R_{10y} &= -R_{12y} + F_{in1y} - F_{3p} \sin(\varphi_1 - \pi/2) + G_1, \\ R_{10} &= \sqrt{R_{10x}^2 + R_{10y}^2}, \quad \alpha_{R_{10}} = \arctg \frac{R_{10y}}{R_{10x}}. \end{aligned}$$

На підставі одержаного алгоритму складаємо програму PR 2.4.

Програма PR 2.4

$$r := 0.05 \quad l := 0.15 \quad e := 0.02 \quad m_1 := 2 \quad m_2 := 12 \quad m_3 := 5 \quad J_{S1} := 0.01$$

$$J_{S2} := 0.8 \quad l_{AS1} := 0.4 \cdot r \quad l_{BS2} := 0.55 \cdot l \quad F_{KO} := 100 \quad \omega_1 := 15 \quad N := 24$$

$$G_1 := \frac{m_1}{9.81} \quad G_2 := \frac{m_2}{9.81} \quad G_3 := \frac{m_3}{9.81} \quad \varphi_0 := \arcsin\left(\frac{e}{1+r}\right) \quad \varphi'_0 := \pi + \arcsin\left(\frac{e}{1-r}\right)$$

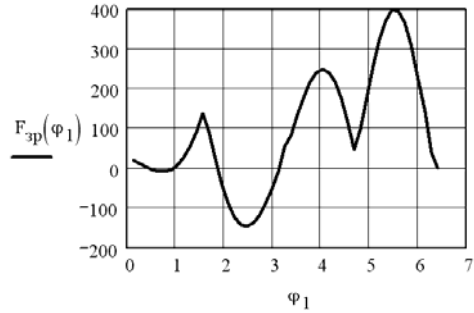
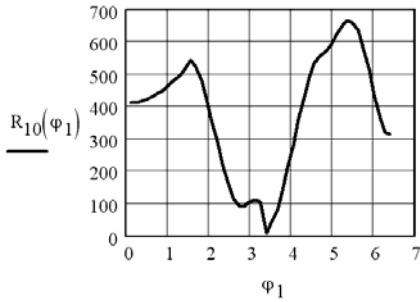
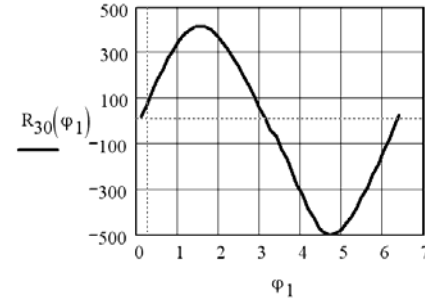
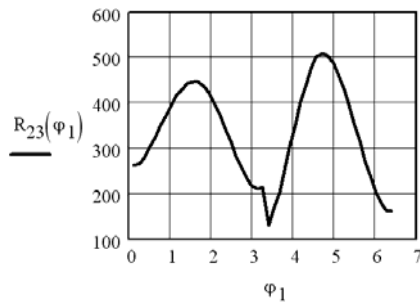
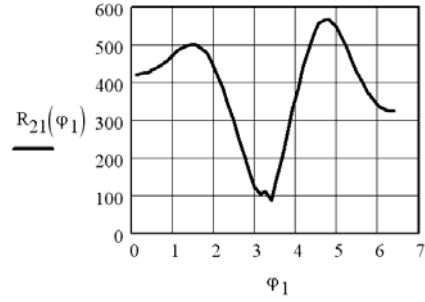
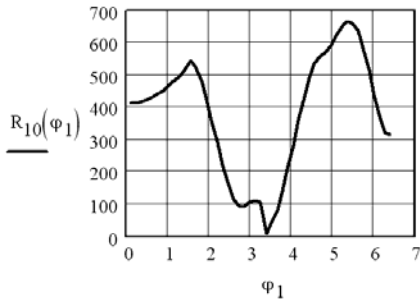
$$\varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \cdot 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$F_3(\varphi_1) := \begin{cases} R \leftarrow F_{KO} & \text{if } \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \varphi'_0 \\ R \leftarrow 0 & \text{if } \varphi'_0 < \varphi_1 \leq 2\pi + \varphi_0 \end{cases} \quad \varphi_2(\varphi_1) := 2\pi + \arcsin\left[\frac{(e - r \cdot \sin(\varphi_1))}{1}\right]$$

$$\begin{aligned} \varphi_2'(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}\varphi_2(\varphi_1) & \varphi_2''(\varphi_1) &:= \frac{d^2}{d\varphi_1^2}\varphi_2(\varphi_1) & x_C(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) + l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \\ x_C'(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}x_C(\varphi_1) & x_C''(\varphi_1) &:= \frac{d^2}{d\varphi_1^2}x_C(\varphi_1) & x_B(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) & y_B(\varphi_1) &:= r \cdot \sin(\varphi_1) \\ x_B'(\varphi_1) &:= -r \cdot \sin(\varphi_1) & y_B'(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) & x_{S2}(\varphi_1) &:= x_B(\varphi_1) + l_{BS2} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \\ y_{S2}(\varphi_1) &:= y_B(\varphi_1) + l_{BS2} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) & x_{S2}'(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}x_{S2}(\varphi_1) & y_{S2}'(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}y_{S2}(\varphi_1) \\ x_{S2}''(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}x_{S2}'(\varphi_1) & y_{S2}''(\varphi_1) &:= \frac{d}{d\varphi_1}y_{S2}'(\varphi_1) & s_{S2}(\varphi_1) &:= \sqrt{x_{S2}'(\varphi_1)^2 + y_{S2}'(\varphi_1)^2} \\ a_{S1} &:= \omega_1^2 \cdot l_{AS1} & a_{S2}(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot s_{S2}(\varphi_1) & a_C(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot x_C(\varphi_1) & \varepsilon_2(\varphi_1) &:= \omega_1^2 \cdot \varphi_2''(\varphi_1) \\ \alpha_{S2}(\varphi_1) &:= \operatorname{atan2}(x_{S2}''(\varphi_1), y_{S2}''(\varphi_1)) & \alpha_{F2}(\varphi_1) &:= \alpha_{S2}(\varphi_1) - \pi & F_{iH1} &:= m_1 \cdot a_{S1} \\ F_{iH2}(\varphi_1) &:= m_2 \cdot a_{S2}(\varphi_1) & F_{iH3}(\varphi_1) &:= m_3 \cdot a_C(\varphi_1) & M_{iH2}(\varphi_1) &:= J_{S2} \cdot \varepsilon_2(\varphi_1) \\ F_{iH2x}(\varphi_1) &:= F_{iH2}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{F2}(\varphi_1)) & F_{iH2y}(\varphi_1) &:= F_{iH2}(\varphi_1) \cdot \sin(\alpha_{F2}(\varphi_1)) \\ R_{21x}(\varphi_1) &:= -F_{iH2x}(\varphi_1) - F_{iH2}(\varphi_1) - F_3(\varphi_1) & h_{Rx}(\varphi_1) &:= l \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) \\ h_{Ry}(\varphi_1) &:= l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) & h_{FiH2x}(\varphi_1) &:= (1 - l_{BS2}) \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) \\ h_{FiH2y}(\varphi_1) &:= (1 - l_{BS2}) \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \\ R_{21y}(\varphi_1) &:= \frac{[-R_{21x}(\varphi_1) \cdot h_{Rx}(\varphi_1) - F_{iH2x}(\varphi_1) \cdot h_{FiH2x}(\varphi_1) + (G_2 - F_{iH2y}(\varphi_1)) \cdot h_{FiH2y}(\varphi_1) - M_{iH2}(\varphi_1)]}{h_{Ry}(\varphi_1)} \\ R_{21}(\varphi_1) &:= \sqrt{R_{21x}(\varphi_1)^2 + R_{21y}(\varphi_1)^2} & \alpha_{R21}(\varphi_1) &:= \operatorname{atan2}(R_{21x}(\varphi_1), R_{21y}(\varphi_1)) \\ R_{30}(\varphi_1) &:= -R_{21y}(\varphi_1) - F_{iH2y}(\varphi_1) + G_2 + G_3 & R_{12x}(\varphi_1) &:= -R_{21x}(\varphi_1) \\ R_{12y}(\varphi_1) &:= -R_{21y}(\varphi_1) & R_{23x}(\varphi_1) &:= -F_{iH2x}(\varphi_1) - R_{21x}(\varphi_1) \\ R_{23y}(\varphi_1) &:= G_2 - F_{iH2y}(\varphi_1) - R_{21y}(\varphi_1) & R_{23}(\varphi_1) &:= \sqrt{R_{23x}(\varphi_1)^2 + R_{23y}(\varphi_1)^2} \\ \alpha_{R23}(\varphi_1) &:= \operatorname{atan2}(R_{23x}(\varphi_1), R_{23y}(\varphi_1)) & h_{1x}(\varphi_1) &:= |r \cdot \sin(\varphi_1)| & h_{1y}(\varphi_1) &:= |r \cdot \cos(\varphi_1)| \\ h_{G1}(\varphi_1) &:= |l_{AS1} \cdot \cos(\varphi_1)| & F_{iH1x}(\varphi_1) &:= F_{iH1} \cdot \cos(\varphi_1) & F_{iH1y}(\varphi_1) &:= F_{iH1} \cdot \sin(\varphi_1) \\ F_{3p}(\varphi_1) &:= \frac{(R_{12x}(\varphi_1) \cdot h_{1x}(\varphi_1) - R_{12y}(\varphi_1) \cdot h_{1y}(\varphi_1) - G_1 \cdot h_{G1}(\varphi_1))}{r} \\ R_{10x}(\varphi_1) &:= -R_{12x}(\varphi_1) + F_{iH1x}(\varphi_1) - F_{3p}(\varphi_1) \cdot \cos\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$R_{10y}(\varphi_1) := -R_{12y}(\varphi_1) + F_{ін1y}(\varphi_1) - F_{зр}(\varphi_1) \cdot \sin\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + G_1$$

$$R_{10}(\varphi_1) := \sqrt{R_{10x}(\varphi_1)^2 + R_{10y}(\varphi_1)^2} \quad \alpha_{R10}(\varphi_1) := \text{atan2}(R_{10x}(\varphi_1), R_{10y}(\varphi_1))$$



2.5. Силовий розрахунок плоских механізмів II класу з використанням уніфікованих підпрограм

Розглядаючи питання кінематичного дослідження механізмів, нами було показано, що використання уніфікованих підпрограм для окремих структурних груп II класу дозволяє значно спростити основну програму та певним чином формалізувати процес проведення розрахунків. Щодо силового аналізу, це питання є не менш актуальним, зважаючи на те, що силовий розрахунок механізм є порівняно складнішим, ніж кінематичний. Питання розробки уніфікованих підпрограм для силового розрахунку плоских механізмів II класу розгляда-

лись, зокрема, у [4] та [21]. При складанні алгоритмів силового розрахунку, нами були використана методика, наведена у [21].

Структурна група 1-го виду. Розрахункова схема для силового розрахунку структурної групи 1-го виду наведена на рис. 2.10. Ланки структурної групи навантажені силами \bar{F}_i та \bar{F}_j , моментами M_i та M_j , силами ваги \bar{G}_i та \bar{G}_j . Сили інерції ланок $\bar{F}_{in_i}, \bar{F}_{in_j}$ та моменти сил інерції ланок M_{in_i}, M_{in_j} будуть розраховані, виходячи з відомих кінематичних характеристик структурної групи:

$$\begin{aligned} F_{in_{ix}} &= -m_i x_{Si}'' \omega_1^2; F_{in_{iy}} = -m_i y_{Si}'' \omega_1^2; \\ F_{in_{jx}} &= -m_j x_{Sj}'' \omega_1^2; F_{in_{jy}} = -m_j y_{Sj}'' \omega_1^2; \\ M_{in_i} &= -J_{Si} \varphi_i'' \omega_1^2; M_{in_j} = -J_{Sj} \varphi_j'' \omega_1^2. \end{aligned}$$

Всі вказані сили розкладаємо на складові, напрямлені вздовж осей координат.

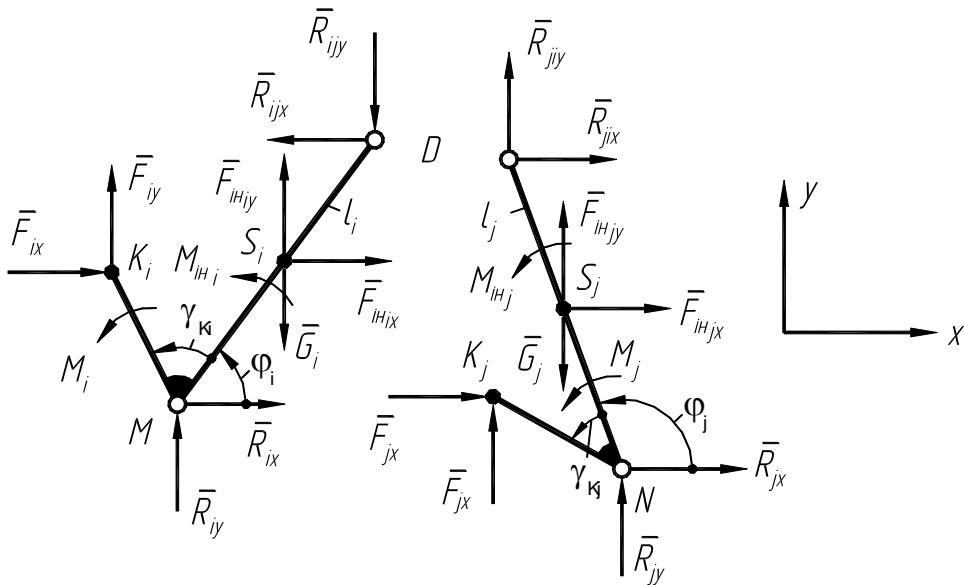


Рис. 2.10. Розрахункова схема структурної групи II класу 1-го виду

Розв'язок задачі починаємо з визначення реакції \bar{R}_{ji} у внутрішній кінематичній парі. Для цього досліджуємо кожен ланку окремо. Запишемо рівняння суми моментів сил відносно зовнішніх кінематичних пар:

для ланки 1:

$$R_{jix} L_i \sin \varphi_i - R_{jy} L_i \sin \varphi_i + \Sigma M_M (F_i) = 0, \quad (2.14)$$

для ланки 2:

$$-R_{jix}l_j \sin \varphi_j + R_{jy}l_j \cos \varphi_j + \Sigma M_N(F_i) = 0, \quad (2.15)$$

де

$$\Sigma M_M(F_i) = M_i + M_{ini} - F_{ix}MK_i \sin(\varphi_i + \gamma_{Ki}) + F_{iy}MK_i \cos(\varphi_i + \gamma_{Ki}) + (F_{inly} - G_i)MS_i \cos \varphi_i - F_{inlx}MS_i \sin \varphi_i. \quad (2.16)$$

$$\Sigma M_N(F_i) = M_j + M_{iny} - F_{jx}NK_j \sin(\varphi_j + \gamma_{Kj}) + F_{jy}NK_j \cos(\varphi_j + \gamma_{Kj}) + (F_{injy} - G_j)NS_j \cos \varphi_j - F_{injx}NS_j \sin \varphi_j. \quad (2.17)$$

Рівняння (2.16) та (2.17) утворюють систему лінійних рівнянь відносно невідомих R_{jix} та R_{jy} . Розв'язуємо цю систему та одержуємо складові реакції:

$$R_{jix} = \frac{\Sigma M_M(F_i)l_j \cos \varphi_j + \Sigma M_N(F_i)l_i \cos \varphi_i}{l_i l_j \sin(\varphi_i - \varphi_j)};$$

$$R_{jy} = \frac{\Sigma M_M(F_i)l_j \sin \varphi_j + \Sigma M_N(F_i)l_i \sin \varphi_i}{l_i l_j \sin(\varphi_i - \varphi_j)}.$$

Повну реакцію обчислюємо за формулою:

$$R_{ji} = \sqrt{R_{jix}^2 + R_{jy}^2}.$$

Для визначення складових реакцій R_i почергово проектуємо всі сили, що відносяться до ланки i на осі координат:

$$R_{ix} = R_{jix} - F_{ix} - F_{inix}; R_{iy} = R_{jy} - F_{iy} - F_{inly} + G_i; R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}.$$

Аналогічно визначаємо складові реакції R_j в другій зовнішній кінематичній парі N :

$$R_{jx} = -R_{jix} - F_{jx} - F_{injx}; R_{jy} = -R_{jy} - F_{jy} - F_{inly} + G_2; R_j = \sqrt{R_{jx}^2 + R_{jy}^2}.$$

При складанні основної програми приймалось до уваги, що:

$$l_j \cos \varphi_j = x_D - x_N; l_j \sin \varphi_j = y_D - y_N;$$

$$l_i \cos \varphi_i = x_D - x_M; l_i \sin \varphi_i = y_D - y_M.$$

Силовий розрахунок структурної групи 1-го виду у Mathcad. Початкові дані для зручності згруповані у матриці: M_1, A, M_2 та F . Крім того, до початкових даних відносяться величини MD (див. рис. 2.10) та ω_1 – кутова швидкість обертання початкової ланки.

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_M & x_N & MS_i & MK_i \\ y_M & y_N & \gamma Si & \gamma Ki \\ x''_M & x''_N & NS_j & NK_j \\ y''_M & y''_N & \gamma Sj & \gamma Kj \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \varphi_i & \varphi_j \\ \varphi'_i & \varphi'_j \\ \varphi''_i & \varphi''_j \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ JS_i \\ JS_j \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} M_i & M_j \\ F_{ix} & F_{jx} \\ F_{iy} & F_{jy} \end{pmatrix}$$

Матриця M_1 включає в себе наступні параметри: x_M, y_M, x_N, y_N – координати відповідних точок на схемі; $x''_M, y''_M, x''_N, y''_N$ – аналоги прискорень (визначаються в результаті проведення кінематичного дослідження); $MS_i, NS_j, \gamma_{Si}, \gamma_{Sj}$ – положення центрів мас ланок структурної групи (див. рис. 2.10); $MK_i, \gamma_{Ki}, NK_j, \gamma_{Kj}$ – параметри, що визначають положення точок K_i та K_j – точки прикладення зовнішнього навантаження до ланок структурної групи.

Матриця A включає в себе кути φ_i, φ_j – визначають положення ланок структурної групи (визначається внаслідок кінематичного дослідження), а також їх аналоги швидкостей та прискорень.

Матриця M_2 включає в себе маси ланок m_i, m_j та їх моменти інерції J_{Si}, J_{Sj} .

Матриця F визначає зовнішнє навантаження на ланки групи – моменти M_i, M_j та сили (в проекціях на осі координат).

Алгоритм кінетостатичного дослідження структурної групи 2-го класу 1-го виду реалізовано у вигляді наступної підпрограми:

$$\text{FG1}(M_1, A, MD, M_2, F, \omega_1) := \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} x_M & x_N & MS_i & MK_i \\ y_M & y_N & \gamma_{Si} & \gamma_{Ki} \\ x''_M & x''_N & NS_j & NK_j \\ y''_M & y''_N & \gamma_{Sj} & \gamma_{Kj} \end{array} \right) \leftarrow \left(\begin{array}{cccc} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} \end{array} \right) \\ (\varphi_i \ \varphi'_i \ \varphi''_i \ \varphi_j \ \varphi'_j \ \varphi''_j) \leftarrow (A_{1,1} \ A_{2,1} \ A_{3,1} \ A_{1,2} \ A_{2,2} \ A_{3,2}) \\ (m_i \ m_j \ J_{Si} \ J_{Sj}) \leftarrow (M_{2,1,1} \ M_{2,2,1} \ M_{2,3,1} \ M_{2,4,1}) \\ (M_i \ F_{ix} \ F_{iy} \ M_j \ F_{jx} \ F_{jy}) \leftarrow (F_{1,1} \ F_{2,1} \ F_{3,1} \ F_{1,2} \ F_{2,2} \ F_{3,2}) \\ S_{iM} \leftarrow \text{KDTw} \left[\begin{array}{c} x_M \ x''_M \\ y_M \ y''_M \end{array}, MS_i, \gamma_{Si}, (\varphi_i \ \varphi'_i \ \varphi''_i) \right] \\ S_{jM} \leftarrow \text{KDTw} \left[\begin{array}{c} x_N \ x''_N \\ y_N \ y''_N \end{array}, NS_j, \gamma_{Sj}, (\varphi_j \ \varphi'_j \ \varphi''_j) \right] \\ (S_i \ S''_i \ S_j \ S''_j) \leftarrow (S_{iM_{1,1}} \ S_{iM_{1,2}} \ S_{jM_{1,1}} \ S_{jM_{1,2}}) \\ D \leftarrow \text{KDTs}(x_M, y_M, MD, 0, \varphi_i) \\ (K_i \ K_j) \leftarrow (\text{KDTs}(x_M, y_M, MK_i, \gamma_{Ki}, \varphi_i) \ \text{KDTs}(x_N, y_N, NK_j, \gamma_{Kj}, \varphi_j)) \\ (F_{ih_ix} \ F_{ih_iy}) \leftarrow \left(-m_i \cdot S''_{ix} \cdot \omega_1^2 \quad -m_i \cdot S''_{iy} \cdot \omega_1^2 \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc} F_{iH_jx} & F_{iH_jy} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} -m_j \cdot S_{jx}'' \cdot \omega_1^2 & -m_j \cdot S_{jy}'' \cdot \omega_1^2 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} M_{iH_i} & M_{iH_j} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} -J_{Si} \cdot \varphi''_i \cdot \omega_1^2 & -J_{Sj} \cdot \varphi''_j \cdot \omega_1^2 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} \Delta_{XDM} & \Delta_{YDM} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} D_1 - x_M & D_2 - y_M \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} \Delta_{XDN} & \Delta_{YDN} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} D_1 - x_N & D_2 - y_N \end{array} \right) \\
 B_i &\leftarrow F_{iH_ix} \cdot (S_{iy} - y_M) - M_{iH_i} - (F_{iH_iy} - 9.81 \cdot m_i) \cdot (S_{ix} - x_M) \dots \\
 &\quad + F_{ix} \cdot (K_{iy} - y_M) - M_i - F_{iy} \cdot (K_{ix} - x_M) \\
 B_j &\leftarrow F_{iH_jx} \cdot (S_{jy} - y_N) - M_{iH_j} - (F_{iH_jy} - 9.81 \cdot m_j) \cdot (S_{jx} - x_N) \dots \\
 &\quad + F_{jx} \cdot (K_{jy} - y_N) - M_j - F_{jy} \cdot (K_{jx} - x_N) \\
 R_{jix} &\leftarrow \frac{B_i \cdot \Delta_{XDN} + B_j \cdot \Delta_{XDM}}{\Delta_{YDM} \cdot \Delta_{XDN} - \Delta_{YDN} \cdot \Delta_{XDM}} \\
 R_{jiy} &\leftarrow \frac{B_j \cdot \Delta_{YDM} + B_i \cdot \Delta_{YDN}}{\Delta_{YDM} \cdot \Delta_{XDN} - \Delta_{YDN} \cdot \Delta_{XDM}} \\
 \left(\begin{array}{cc} R_{ix} & R_{iy} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} -F_{iH_ix} - F_{ix} + R_{jix} & -F_{iH_iy} - F_{iy} + R_{jiy} + 9.81 \cdot m_i \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} R_{jx} & R_{jy} \end{array} \right) &\leftarrow \left(\begin{array}{cc} -F_{iH_jx} - F_{jx} - R_{jix} & -F_{iH_jy} - F_{jy} - R_{jiy} + 9.81 \cdot m_j \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc} R_{ji} & R_i & R_j & F_{iH_i} & F_{iH_j} & M_{iH_i} & M_{iH_j} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

В результаті проведеного розрахунку визначається величини реакцій в кінематичних парах R_{ji}, R_i, R_j , а також сили та моменти сил інерції ланок $F_{ini}, F_{inj}, M_{ini}, M_{inj}$.

В підпрограмі *FG1* (а також в підпрограмах для розрахунку інших структурних груп) використовуються допоміжні функції, а саме:

1. Функція визначення переміщень будь-якої додаткової точки ланки:

$$\text{KDTs}(F_x, F_y, MS_1, \gamma_{Si}, \varphi) := \begin{cases} \text{Result1} \leftarrow F_x + MS_1 \cdot \cos(\varphi + \gamma_{Si}) \\ \text{Result2} \leftarrow F_y + MS_1 \cdot \sin(\varphi + \gamma_{Si}) \\ \text{Result} \end{cases}$$

2. Визначення кута між векторами:

$$\text{FindAngle}(F_x, F_y) := \begin{cases} 0 & \text{if } F_x = 0 \wedge F_y = 0 \\ \text{atan2}(F_x, F_y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. Функція визначення переміщень та аналогів прискорень будь-якої додаткової точки ланки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_M & x''_M \\ y_M & y''_M \end{pmatrix} \quad M_2 = (\varphi_T \quad \varphi'_T \quad \varphi''_T)$$

$$KDTw(M_1, MS_i, \gamma_{Si}, M_2) := \begin{pmatrix} (x_M \quad x''_M \quad y_M \quad y''_M) \leftarrow (M_{1,1,1} \quad M_{1,1,2} \quad M_{1,2,1} \quad M_{1,2,2}) \\ (\varphi_T \quad \varphi'_T \quad \varphi''_T) \leftarrow (M_{2,1,1} \quad M_{2,1,2} \quad M_{2,1,3}) \\ (S_{i_x} \quad S_{i_y}) \leftarrow (x_M + MS_i \cdot \cos(\varphi_T + \gamma_{Si}) \quad y_M + MS_i \cdot \sin(\varphi_T + \gamma_{Si})) \\ S''_{i_x} \leftarrow x''_M - MS_i \cdot \varphi''_T \cdot \sin(\varphi_T + \gamma_{Si}) - MS_i \cdot (\varphi'_T)^2 \cdot \cos(\varphi_T + \gamma_{Si}) \\ S''_{i_y} \leftarrow y''_M + MS_i \cdot \varphi''_T \cdot \cos(\varphi_T + \gamma_{Si}) - MS_i \cdot (\varphi'_T)^2 \cdot \sin(\varphi_T + \gamma_{Si}) \\ (S_i \quad S''_i) \end{pmatrix}$$

4. Функція перетворення системи координат:

$$PKTs(x_{M2}, y_{M2}, x''_{M2}, y''_{M2}, \xi) := \begin{pmatrix} \alpha \leftarrow 2 \cdot \pi - \xi \\ (M_x \quad M_y) \leftarrow \begin{pmatrix} x_{M2} \cdot \cos(\alpha) & \dots & -x_{M2} \cdot \sin(\alpha) & \dots \\ +y_{M2} \cdot \sin(\alpha) & & +y_{M2} \cdot \cos(\alpha) & \end{pmatrix} \\ (M''_x \quad M''_y) \leftarrow \begin{pmatrix} x''_{M2} \cdot \cos(\alpha) & \dots & -x''_{M2} \cdot \sin(\alpha) & \dots \\ +y''_{M2} \cdot \sin(\alpha) & & +y''_{M2} \cdot \cos(\alpha) & \end{pmatrix} \\ (M \quad M'') \end{pmatrix}$$

Структурна група 2-го виду. Структурна група 2-го виду зображена на рис. 2.11. Зовнішні сили \bar{F}_i та \bar{F}_j , прикладені до ланок групи, на схемі зображені проекціями на осі координат, моменти M_i та M_j , а також сили ваги \bar{G}_i та \bar{G}_j . Сили інерції ланок \bar{F}_{ini} , \bar{F}_{inj} та момент сил інерції M_{ini} відносно осі, що проходить через центр мас, будуть розраховані, виходячи з відомих кінематичних характеристик структурної групи.

В кінематичних парах M та N реакції \bar{R}_i та \bar{R}_j замінені складовими, паралельними осям координат xOy . В поступальній кінематичній парі реакцію \bar{R}_j напрямляємо в бік осі y_1 допоміжної системи координат x_1Oy_1 , положення осей якої визначається кутом ξ .

Рівняння суми проекцій сил на осі координат, які відносяться до повзуна:

$$\left. \begin{aligned} R_{jix} + F_{jx} - R_j \sin \xi + F_{inx} &= 0; \\ R_{jy} + F_{jy} + R_j \cos \xi + F_{iny} - G_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Для шатуна використовуємо рівняння суми моментів відносно точки M :

$$R_{jx}l_1 \sin \varphi_{i2} - R_{jy}l_1 \cos \varphi_{i2} - F_{ix}l_2 \sin(\varphi_{j2} + \gamma_K) + F_{iy}l_2 \cos(\varphi_{j2} + \gamma_K) + M_i + (F_{iny} - G_i)l_{MS_i} \cos \varphi_{i2} - F_{inx}l_{MS_i} \sin \varphi_{i2} + M_{inI} = 0.$$

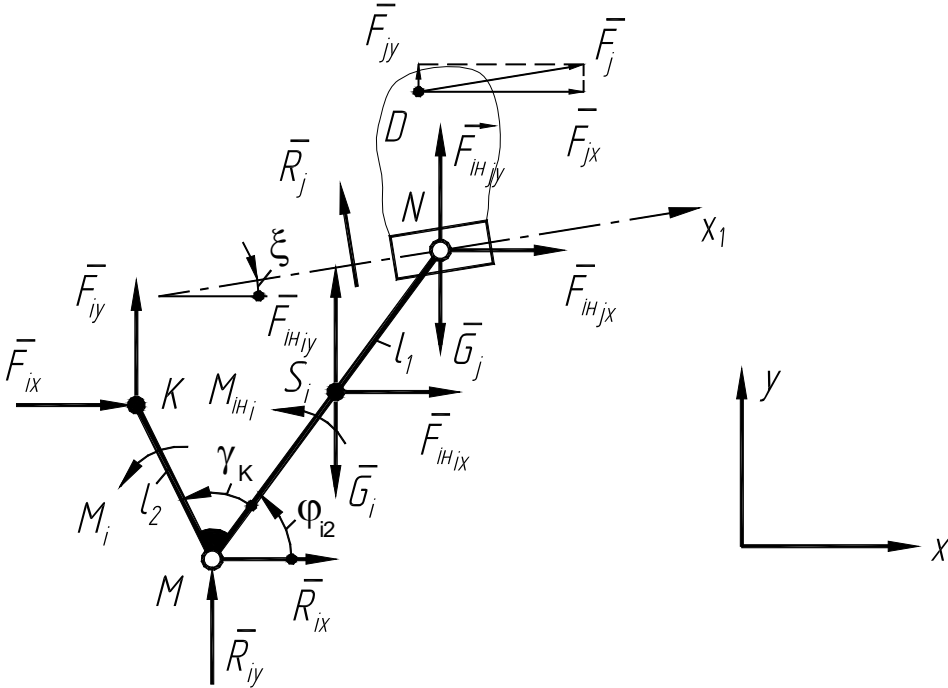


Рис. 2.11. Розрахункова схема структурної групи II класу 2-го виду
З перших двох рівнянь виражаємо складові $\bar{R}_{jix}, \bar{R}_{jy}$ через \bar{R}_j і підставляємо в третє рівняння. В результаті одержимо:

$$R_j = \frac{(F_{inix} + F_{jx})l_1 \sin \varphi_{i2} - (F_{iny} + F_{jy} + G_j)l_1 \cos \varphi_{i2} + b}{l_1 \cos(\varphi_{i2} - \xi)},$$

де

$$b = F_{ix}l_2 \sin(\varphi_{i2} + \gamma_K) - F_{iy}l_2 \cos(\varphi_{i2} + \gamma_K) - M_i - M_{inI} - (F_{iny} - G_i)l_{MS_i} \cos \varphi_{i2} + F_{inx}l_{MS_i} \sin \varphi_{i2}.$$

$$R_{jix} = R_j \sin \xi - F_{jx} - F_{inix}; \quad R_{jy} = -R_j \cos \xi - F_{jy} - F_{iny} + G_j.$$

Для шатуна складаємо два рівняння суми проєкцій сил на осі координат і визначаємо реакцію \bar{R}_i :

$$R_{ix} = R_{jix} - F_{ix} - F_{inix}; \quad R_{iy} = R_{jy} - F_{iy} - F_{iny} + G_i; \quad R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}.$$

Силевий розрахунок структурної групи 2-го виду у Mathcad. Початкові дані згруповані у матриці M_1, M_2, F – аналогічно до початкових даних для силового розрахунку структурної групи 1-го виду (див. вище). Крім того, до

Розділ 2. Силовий розрахунок важільних механізмів

початкових даних відноситься величина MN (рис. 2.11) та ω_1 – кутова швидкість обертання початкової ланки.

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ x''_M \\ y''_M \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{i2} & MK & m_i \\ \varphi'_i & \gamma_K & m_j \\ \varphi''_i & MS_i & JS_i \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} M_i & \xi \\ F_{ix} & F_{jx} \\ F_{iy} & F_{jy} \end{pmatrix}$$

Основна підпрограма $FG2$ кінестатичного розрахунку структурної групи 2-го класу 2-го виду має наступний вигляд:

$$FG2(M_1, M_2, MN, F, \omega_1) := \begin{cases} (x_M \ y_M \ x''_M \ y''_M) \leftarrow (M_{1,1,1} \ M_{1,2,1} \ M_{1,3,1} \ M_{1,4,1}) \\ \begin{pmatrix} \varphi_{i2} & MK & m_i \\ \varphi'_i & \gamma_K & m_j \\ \varphi''_i & MS_i & JS_i \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} M_{2,1,1} & M_{2,1,2} & M_{2,1,3} \\ M_{2,2,1} & M_{2,2,2} & M_{2,2,3} \\ M_{2,3,1} & M_{2,3,2} & M_{2,3,3} \end{pmatrix} \\ (M_i \ F_{ix} \ F_{iy} \ \xi \ F_{jx} \ F_{jy}) \leftarrow (F_{1,1} \ F_{2,1} \ F_{3,1} \ F_{1,2} \ F_{2,2} \ F_{3,2}) \\ \varphi_i \leftarrow \varphi_{i2} + \xi \\ K \leftarrow KDTs(x_M, y_M, MK, \gamma_K, \varphi_i) \\ S_{iM} \leftarrow KDTw \left[\begin{pmatrix} x_M & x''_M \\ y_M & y''_M \end{pmatrix}, MS_i, 0, (\varphi_i \ \varphi'_i \ \varphi''_i) \right] \\ N_M \leftarrow KDTw \left[\begin{pmatrix} x_M & x''_M \\ y_M & y''_M \end{pmatrix}, MN, 0, (\varphi_i \ \varphi'_i \ \varphi''_i) \right] \\ (S_i \ S''_i \ N \ N'') \leftarrow (S_{iM_{1,1}} \ S_{iM_{1,2}} \ N_{M_{1,1}} \ N_{M_{1,2}}) \\ (F_{iH_ix} \ F_{iH_iy} \ M_{iH_i}) \leftarrow (-m_i \cdot S''_{ix} \cdot \omega_1^2 \ -m_i \cdot S''_{iy} \cdot \omega_1^2 \ -JS_i \cdot \varphi''_i \cdot \omega_1^2) \\ (F_{iH_jx} \ F_{iH_jy}) \leftarrow (-m_j \cdot N''_1 \cdot \omega_1^2 \ -m_j \cdot N''_2 \cdot \omega_1^2) \\ B_i \leftarrow -F_{iy} \cdot (K_x - x_M) - M_i - M_{iH_i} - (F_{iH_iy} - 9.81 \cdot m_i) \cdot (S_{ix} - x_M) \cdot \\ \quad + F_{iH_ix} \cdot (S_{iy} - y_M) + F_{ix} \cdot (K_y - y_M) \\ (\Delta_{YNM} \ \Delta_{XNM}) \leftarrow (N_y - y_M \ N_x - x_M) \\ R_j \leftarrow \frac{B_i + (F_{iH_jx} + F_{jx}) \cdot \Delta_{YNM} - (F_{iH_jy} + F_{jy} - 9.81 \cdot m_j) \cdot \Delta_{XNM}}{\Delta_{YNM} \cdot \sin(\xi) + \Delta_{XNM} \cdot \cos(\xi)} \end{cases}$$

$$R_{j2x} = -F_{\text{in}jx} \cos \varphi_i - (F_{\text{in}jy} - G_j) \sin \varphi_i.$$

Тепер з рівняння суми моментів сил, які відносяться до ланок структурної групи, відносно точки M , визначаємо складову R_{j2y} :

$$R_{j2y} = \frac{1}{l_{MN}} (-R_{j2x} h + F_{\text{in}jx} l_{MN} \sin \varphi_i - (F_{\text{in}jy} - G_j) l_{MN} \cos \varphi_i + F_{\text{in}ix} l_{MS_i} \sin(\varphi_i + \gamma_{S_i}) - (F_{\text{in}iy} - G_i) l_{MS_i} \cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}) + F_{ix} l_2 \sin(\varphi_i + \gamma_K) - F_{iy} l_2 \cos(\varphi_i + \gamma_K) - M_{\text{in}I} - M_i).$$

Користуючись формулами переходу від однієї системи координат до іншої, визначаємо складові реакції \bar{R}_j в основній системі координат xOy :

$$R_{jx} = R_{j2x} \cos \varphi_i - R_{j2y} \sin \varphi_i; \quad R_{jy} = R_{j2x} \sin \varphi_i + R_{j2y} \cos \varphi_i.$$

$$\text{Повна реакція: } R_j = \sqrt{R_{jx}^2 + R_{jy}^2}.$$

Розглянемо ланку j . Рівняння суми проекцій сил на вісь y_1 :

$$R_{ji} + R_{j2y} - F_{\text{in}jx} \sin \varphi_i + (F_{\text{in}jy} - G_j) \cos \varphi_i = 0,$$

$$\text{звідси } R_{ji} = F_{\text{in}jx} \sin \varphi_i - R_{j2y} - (F_{\text{in}jy} - G_j) \cos \varphi_i = 0.$$

Проектуючи по черзі на осі координат xOy сили, які відносяться до ланки i , визначаємо складові і повну реакцію \bar{R}_i :

$$R_{ix} = -F_{\text{in}ix} - F_{ix} + R_{ji} \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$R_{iy} = G_i - F_{\text{in}iy} - F_{iy} + R_{ji} \sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}.$$

Силовий розрахунок структурної групи 3-го виду у Mathcad. Початкові дані згруповані у матриці M_1, M_2, A, F – аналогічно до початкових даних для силового розрахунку інших структурних груп (див. вище). Параметри структурної групи позначені на рис. 2.12. Крім того, до початкових даних відноситься ω_1 – кутова швидкість обертання початкової ланки механізму.

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_M & x_N & MK \\ y_M & y_N & \gamma_K \\ x''_M & x''_N & MS_i \\ y''_M & y''_N & \gamma_{S_i} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi'_i \\ \varphi''_i \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ J_{S_i} \\ M_1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix}$$

Основна підпрограма $FG3$ кінестатичного розрахунку структурної групи II класу 3-го виду має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} (R_{ix} \ R_{iy}) \\ (R_i \ R_j \ F_{ih_i} \ F_{ih_j} \ R_{ji} \ M_{ih_i}) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} -F_{ih_ix} - F_{ix} - R_{ji} \sin(\varphi_i) & -F_{ih_iy} - F_{iy} \dots \\ & + R_{ji} \cos(\varphi_i) + 9.81 \cdot m_i \end{pmatrix}$$

В результаті проведеного розрахунку визначаються величини реакцій в кінематичних парах R_i, R_j, R_{ji} а також сили та моменти сил інерції ланок $F_{ih_i}, F_{ih_j}, M_{ih_i}$.

Структурна група 4-го виду. На рис. 2.13. зображена схема структурної групи і вказаний можливий варіант навантаження її ланок. Додатній напрямок реакцій \bar{R}_i, \bar{R}_j збігається з таким же напрямком відповідно осей y_1 та y_2 допоміжних систем координат.

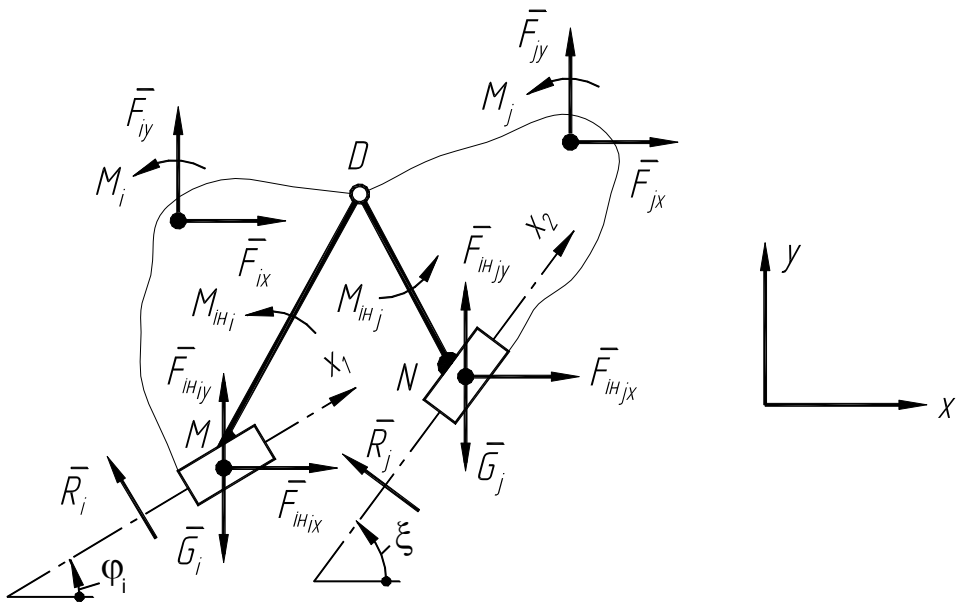


Рис. 2.13. Розрахункова схема структурної групи II класу 4-го виду

Проектуємо всі сили на вісь x_1 і суму проєкцій прирівнюємо до нуля:

$$\Sigma F_{ix} \cos \varphi_i + \Sigma F_{iy} \sin \varphi_i - R_j \sin(\varphi_j - \varphi_i) = 0; \quad (2.20)$$

Звідси визначаємо величину реакції R_j :

$$R_j = \frac{\Sigma F_{ix} \cos \varphi_i + \Sigma F_{iy} \sin \varphi_i}{\sin(\varphi_j - \varphi_i)},$$

де $\Sigma F_{ix} = F_{ih_ix} + F_{ih_jx} + F_{ix} + F_{jx}$; $\Sigma F_{iy} = F_{ih_iy} + F_{ih_jy} + F_{iy} + F_{jy} - G_i - G_j$.

Далі проектуємо всі сили на вісь x_2 :

$$\Sigma F_{ix} \cos \varphi_j + \Sigma F_{iy} \sin \varphi_j - R_i \sin(\varphi_i - \varphi_j) = 0.$$

Визначаємо величину реакції R_i :

$$R_i = \frac{\Sigma F_{ix} \cos \varphi_j + \Sigma F_{iy} \sin \varphi_j}{\sin(\varphi_i - \varphi_j)}.$$

Для визначення складових реакцій \bar{R}_{ji} почергово проектуємо всі сили, які відносяться до ланки j , на осі координат x, y і з отриманих рівнянь визначаємо:

$$R_{jix} = R_j \sin \varphi_j - F_{ix} - F_{jx}; \quad R_{jiv} = -R_j \cos \varphi_j - F_{iy} - F_{jy} + G_j.$$

Повна реакція дорівнює:

$$R_{ji} = \sqrt{R_{jix}^2 + R_{jiv}^2}.$$

Силевий розрахунок структурної групи 4-го виду у Mathcad. Структурна група 4-го виду в загальному виді (рис. 2.13) зустрічається досить рідко, більш розповсюдженим є спрощений її варіант (рис. 1.24), що розглядався нами при складанні формул для кінематичного дослідження. Складаючи Mathcad-програму для силового розрахунку структурної групи 4-го виду, для зручності будемо використовувати її спрощений варіант.

Аналогічно до попередніх підпрограм, початкові дані згруповані у вигляді матриць.

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_{N2} & x''_{N2} & NS_{jx} \\ y_{N2} & y''_{N2} & NS_{jy} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \varphi_i & m_i \\ \xi & m_j \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} F_{ix} & F_{jx} \\ F_{iy} & F_{jy} \end{pmatrix}$$

Параметри структурної групи позначені на рис. 2.13.

Основна підпрограма $FG4$ кінетостатичного розрахунку структурної групи II класу 4-го виду має наступний вигляд:

$$FG4(M_1, A, F, \omega_1) := \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{N2} & x''_{N2} & NS_{jx} \\ y_{N2} & y''_{N2} & NS_{jy} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{1,2,1} & M_{1,2,2} & M_{1,2,3} \end{pmatrix} \\ (\varphi_i \quad \xi \quad m_i \quad m_j) \leftarrow (A_{1,1} \quad A_{2,1} \quad A_{1,2} \quad A_{2,2}) \\ (F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{jx} \quad F_{jy}) \leftarrow (F_{1,1} \quad F_{2,1} \quad F_{1,2} \quad F_{2,2}) \\ N_M \leftarrow PKTs(x_{N2}, y_{N2}, x''_{N2}, y''_{N2}, \xi) \\ (x_N \quad y_N \quad x''_N \quad y''_N) \leftarrow \left[\begin{pmatrix} N_{M1,1} \end{pmatrix}_x \quad \begin{pmatrix} N_{M1,1} \end{pmatrix}_y \quad \begin{pmatrix} N_{M1,2} \end{pmatrix}_x \quad \begin{pmatrix} N_{M1,2} \end{pmatrix}_y \right] \\ (S_{jx} \quad S_{jy}) \leftarrow (x_N + NS_{jx} \quad y_N + NS_{jy}) \\ (F_{ih_ix} \quad F_{ih_iy}) \leftarrow (-m_i \cdot x''_N \cdot \omega_1^2 \quad -m_i \cdot y''_N \cdot \omega_1^2) \\ (F_{ih_jx} \quad F_{ih_jy}) \leftarrow (-m_j \cdot x''_N \cdot \omega_1^2 \quad -m_j \cdot y''_N \cdot \omega_1^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Sigma F_x \leftarrow F_{iH_i_x} + F_{iH_j_x} + F_{ix} + F_{jx} \\
 & \Sigma F_y \leftarrow F_{iH_i_y} + F_{iH_j_y} + F_{iy} - 9.81 \cdot m_i - 9.81 \cdot m_j \\
 & (R_j \ R_{i2}) \leftarrow \left(\frac{\Sigma F_x \cdot \cos(\varphi_i) + \Sigma F_y \cdot \sin(\varphi_i)}{\sin(\xi - \varphi_i)} \quad \frac{\Sigma F_x \cdot \cos(\xi) + \Sigma F_y \cdot \sin(\xi)}{\sin(\varphi_i - \xi)} \right) \\
 & (R_{i_x} \ R_{i_y}) \leftarrow \left(R_{i2} \cdot \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad R_{i2} \cdot \sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 & R_{ji_x} \leftarrow R_j \cdot \sin(\xi) - F_{iH_j_x} - F_{jx} \\
 & R_{ji_y} \leftarrow -R_j \cdot \cos(\xi) - F_{iH_j_y} - F_{jy} + 9.81 \cdot m_j \\
 & h_{Rj} \leftarrow \frac{(F_{jx} + F_{iH_j_x}) \cdot (y_N - S_{jy}) - (F_{jy} + F_{iH_j_y} - 9.81 \cdot m_j) \cdot (x_N - S_{jx})}{R_j} \\
 & (F_{iH_i} \ F_{iH_j} \ R_{ji} \ R_i \ R_j \ h_{Rj})
 \end{aligned}$$

В результаті проведеного розрахунку визначаються величини реакцій в кінематичних парах R_i, R_j, R_{ji} а також сили інерції ланок F_{ini}, F_{inj} та відстань h_{Rj}

Структурна група 5-го виду. Характер навантаження ланок структурної групи найчастіше зустрічається такий, як зображено на схемі (рис. 2.14). Реакцію в обертальній кінематичній парі розкладаємо на складові $\bar{R}_{ix}, \bar{R}_{iy}$. Додатній напрямок реакції \bar{R}_j збігається з додатнім напрямком осі y_1 допоміжної системи координат $x_1 O y_1$. У внутрішній поступальній кінематичній парі додатній напрямок реакції R_{ji} визначається кутом $(\xi + \alpha_1 + \pi/2)$.

Сили, які відносяться до ланки j , проектуємо на вісь x_1 і цю суму проєкцій прирівнюємо до нуля. Одержимо рівняння:

$$R_{ji} \cos(\xi + \alpha_1 + \pi/2) + (F_{jx} + F_{in_{jx}}) \cos \xi + (F_{jy} + F_{in_{jy}} - G_2) \sin \xi = 0, \quad (2.21)$$

з якого визначаємо R_{ji} :

$$R_{ji} = \frac{(F_{jx} + F_{in_{jx}}) \cos \xi + (F_{jy} + F_{in_{jy}} - G_2) \sin \xi}{\cos(\xi + \alpha_1 + \pi/2)}$$

Тепер складаємо суму проєкцій цих же сил на вісь y_1 і визначаємо реакцію R_j :

$$R_j + R_{ji} \sin(\alpha_1 + \pi/2) - (F_{jx} + F_{in_{jx}}) \sin \xi + (F_{jy} + F_{in_{jy}} - G_j) \cos \xi = 0;$$

$$R_j = (F_{jx} + F_{in_{jx}}) \sin \xi - (F_{jy} + F_{in_{jy}} - G_j) \cos \xi - R_{ji} \sin(\alpha_1 + \pi/2).$$

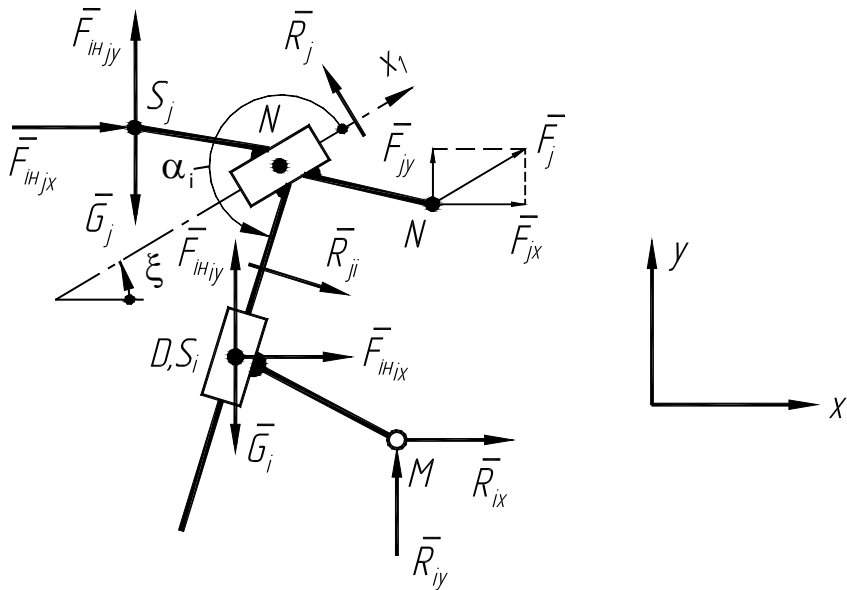


Рис. 2.14. Розрахункова схема структурної групи II класу 5-го виду

Складові реакції в обертальній кінематичній парі визначаємо, склавши почергово рівняння проєкцій сил ланки i на осі x, y :

$$R_{ix} + F_{inix} - R_{ji} \cos(\xi + \alpha_1 + \pi/2) = 0;$$

$$R_{iy} + F_{iniy} - G_i - R_{ji} \sin(\xi + \alpha_1 + \pi/2) = 0.$$

Тоді:

$$R_{ix} = R_{ji} \cos(\xi + \alpha_1 + \pi/2) = 0 - F_{inix};$$

$$R_{iy} = R_{ji} \sin(\xi + \alpha_1 + \pi/2) - F_{iniy} + G_i = 0.$$

Повна реакція дорівнює:

$$R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}.$$

Силевий розрахунок структурної групи 5-го виду у Mathcad. Початкові дані згруповані у матриці M_1, M_2 – аналогічно до початкових даних для силового розрахунку інших структурних груп. Параметри структурної групи позначені на рис. 2.14. Крім того, до початкових даних відноситься ω_1 – кутова швидкість обертання початкової ланки механізму.

$$M_1 = \begin{pmatrix} x''S_i & x''S_j \\ y''S_i & y''S_j \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \xi & m_i & F_{jx} \\ \alpha_1 & m_j & F_{jy} \end{pmatrix}$$

Основна підпрограма $FG5$ кінестатичного розрахунку структурної групи 2-го класу 5-го виду має наступний вигляд:

$$\text{FG5}(M_1, M_2, \omega_1) := \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} x''_{Si} & x''_{Sj} \\ y''_{Si} & y''_{Sj} \end{array} \right) \leftarrow \left(\begin{array}{cc} M_{1,1,1} & M_{1,1,2} \\ M_{1,2,1} & M_{1,2,2} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} \xi & m_i & F_{jx} \\ \alpha_i & m_j & F_{jy} \end{array} \right) \leftarrow \left(\begin{array}{ccc} M_{2,1,1} & M_{2,1,2} & M_{2,1,3} \\ M_{2,2,1} & M_{2,2,2} & M_{2,2,3} \end{array} \right) \\ \left(F_{iH_ix} & F_{iH_iy} \right) \leftarrow \left(-m_i \cdot x''_{Si} \cdot \omega_1^2 & -m_i \cdot y''_{Si} \cdot \omega_1^2 \right) \\ \left(F_{iH_jx} & F_{iH_jy} \right) \leftarrow \left(-m_j \cdot x''_{Sj} \cdot \omega_1^2 & -m_j \cdot y''_{Sj} \cdot \omega_1^2 \right) \\ R_{ji} \leftarrow - \frac{\left(F_{jx} + F_{iH_jx} \right) \cdot \cos(\xi) + \left(F_{jy} + F_{iH_jy} - m_j \cdot 9.81 \right) \cdot \sin(\xi)}{\cos\left(\alpha_i + \frac{\pi}{2}\right)} \\ R_j \leftarrow - \left(F_{jy} + F_{iH_jy} - 9.81 \cdot m_j \right) \cdot \cos(\xi) - R_{ji} \cdot \sin\left(\alpha_i + \frac{\pi}{2}\right) \dots \\ \quad + \left(F_{jx} + F_{iH_jx} \right) \cdot \sin(\xi) \\ R_{ix} \leftarrow R_{ji} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \xi + \alpha_i\right) - F_{iH_ix} \\ R_{iy} \leftarrow R_{ji} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \xi + \alpha_i\right) - F_{iH_iy} + 9.81 \cdot m_j \\ \left(R_i \quad F_{iH_ix} \quad F_{iH_iy} \quad R_{ji} \quad R_j \right) \end{array} \right.$$

В результаті проведеного розрахунку визначаються величини реакцій в кінематичних парах R_i, R_j, R_{ji} а також сили інерції ланок F_{iH_i}, F_{iH_j} .

Механізм I класу. Розглянемо варіант, коли вхідна ланка механізму утворює зі стояком обертальну кінематичну пару (рис. 2.15.)

Для кривошипа невідомими є зрівноважувальний момент $M_{зп}$ та реакції $\bar{R}_{10x}, \bar{R}_{10y}$. З рівняння моментів сил відносно точки A , знаходимо $M_{зп}$.

$$M_{зп} + M_A(R_{12x}) + M_A(R_{12y}) + M_A(F_{iH_{1x}}) + M_A(F_{iH_{1y}}) + M_A(G_1) + M_{iH_1} = 0, \quad (2.22)$$

де

$$M_A(R_{12x}) = -R_{12x} l_{OA} \sin \varphi_1; M_A(R_{12y}) = -R_{12y} l_{OA} \cos \varphi_1; M_A(F_{iH_{1x}}) = F_{iH_{1x}} l_{OS_1} \sin \varphi_1;$$

$$M_A(F_{iH_{1y}}) = F_{iH_{1y}} l_{OS_1} \cos \varphi_1; M_A(G_1) = -G_1 l_{OS_1} \cos \varphi_1; M_{iH_1} = -J_{S_1} \varepsilon_1.$$

З рівняння суми проекцій сил по ланці знаходимо R_{10x} та R_{10y} :

$$R_{10x} = R_{12x} - F_{iH_{1x}}; \quad R_{10y} = -R_{12y} - F_{iH_{1y}} + G_1.$$

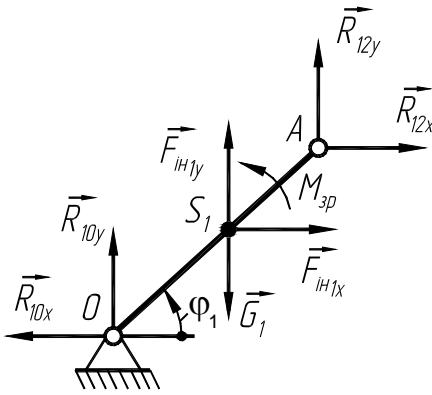


Рис. 2.15. Розрахункова схема механізму I класу

Повна реакція в кінематичній парі O дорівнює:

$$R_{10} = \sqrt{R_{10x}^2 + R_{10y}^2}$$

Напрямок вектора \bar{R}_{10} визначається кутом α_1 :

$$\alpha_1 = \text{arctg} \frac{|R_{10y}|}{|R_{10x}|}$$

Силовий розрахунок механізму I класу у Mathcad. Параметри структурної групи позначені на рис. 2.10. В результаті проведеного розрахунку визначаються величини реакцій

в кінематичних парах R_i, R_j, R_{ji} а також сили інерції ланок F_{inl}, F_{inj} . Основна підпрограма $FM1$ кінетостатичного розрахунку механізму I класу має наступний вигляд:

$$FM1(R_{21x}, R_{21y}, M, x_0, y_0, OA, \varphi_1, OS_1, m_1, \omega_1) :=$$

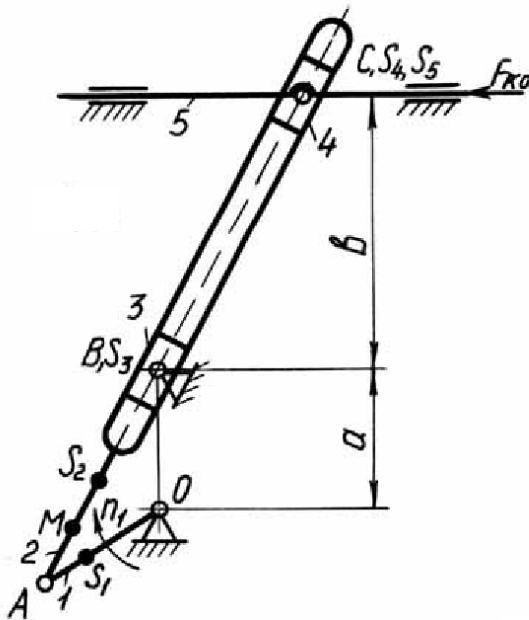
$$\begin{aligned} & \left(R_{12x} \quad R_{12y} \right) \leftarrow \left(-R_{21x} \quad -R_{21y} \right) \\ & \left(x_A \quad y_A \right) \leftarrow \left(OA \cdot \cos(\varphi_1) \quad OA \cdot \sin(\varphi_1) \right) \\ & \left(S_{ix} \quad S_{iy} \right) \leftarrow \left(OS_1 \cdot \cos(\varphi_1) \quad OS_1 \cdot \sin(\varphi_1) \right) \\ & F_{ih_1x} \leftarrow m_1 \cdot OS_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \cos(\varphi_1) \\ & F_{ih_1y} \leftarrow m_1 \cdot OS_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \sin(\varphi_1) \\ & F_{chys} \leftarrow R_{12x} \cdot (y_A - y_0) - R_{12y} \cdot (x_A - x_0) \dots \\ & \quad + F_{ih_1x} \cdot (S_{iy} - y_0) - F_{ih_1y} \cdot (S_{ix} - x_0) \dots \\ & \quad + 9.81 \cdot m_1 \cdot (S_{ix} - x_0) - M \\ & F \leftarrow \frac{F_{chys}}{OA} \\ & R_{10x} \leftarrow F \cdot \sin(\varphi_1) - F_{ih_1x} - R_{12x} \\ & R_{10y} \leftarrow 9.81 \cdot m_1 - F_{ih_1y} - R_{12y} - F \cdot \cos(\varphi_1) \\ & \left(F_{ih_1} \quad R_{10} \quad F \right) \end{aligned}$$

Далі розглянемо приклади практичного використання розроблених підпрограм для проведення силового аналізу механізмів II класу.

Програма PR 2.5. Розрахунок механізму поперечно-стругального верстата

Ссылка: D:\КИНЕТОСТАТИКА\LinkagesCalculation.xmcd ORIGIN := 1

Механізм поперечно-стругального верстата



Розміри ланок a := 0.3 b := 0.25

Коефіцієнт зміни середньої швидкості:

$$K := 1.65$$

$$\Theta := \pi \cdot \frac{K-1}{K+1} \quad OA := a \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$OA = 0.1127$$

Положення центрів мас

$$AS_2 := 0.35 \quad OS_1 := 0$$

Маси ланок

$$m_1 := 18 \quad m_2 := 25 \quad m_3 := 4$$

$$m_4 := 2 \quad m_5 := 40$$

Моменти інерції ланок

$$J_{S1} := 0.785 \quad J_{S2} := 2.435$$

Частота обертання кривошипа $n_1 := 90 \quad \omega_1 := \frac{\pi \cdot n_1}{30}$

Початкове положення кривошипа $\varphi_0 := \frac{\Theta}{2} \quad \varphi_0 = 22.0755 \cdot \text{deg}$

Кількість досліджуваних положень $N = 180$

Кут повороту кривошипа $\varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots \varphi_0 + 2 \cdot \pi$ проти годинникової стрілки

$\varphi_1 := 2 \cdot \pi + \varphi_0, 2 \cdot \pi + \varphi_0 - 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots \varphi_0$ за годинниковою стрілкою

Розрахунок механізму першого класу $KM1_Results(\varphi_1) := KM1(0, 0, OA, \varphi_1)$

$x_A(\varphi_1) := KM1_Results(\varphi_1)_x \quad y_A(\varphi_1) := KM1_Results(\varphi_1)_y$

Розрахунок структурної групи 3-го виду $\varphi_2(\varphi_1) := KG3(x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), 0, a, 0)$

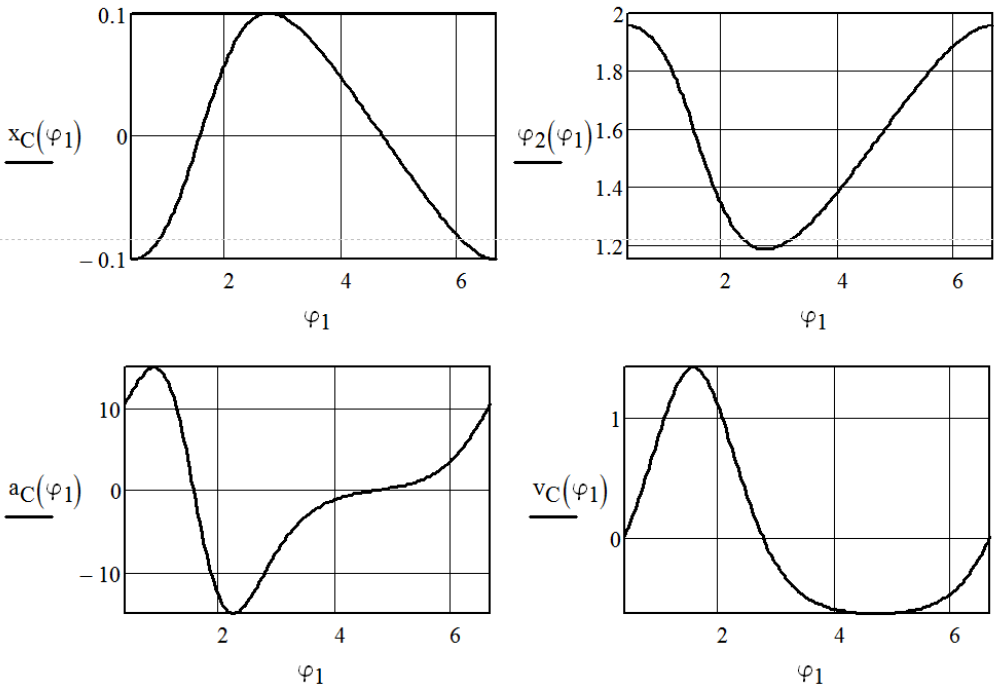
Розрахунок структурної групи 4-го виду

$KG4_Results(\varphi_1) := KG4(x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), 0, a + b, \varphi_2(\varphi_1), 0)$

$l_k(\varphi_1) := KG4_Results(\varphi_1)_1 \quad x_C(\varphi_1) := KG4_Results(\varphi_1)_2$

2.5. Силовий розрахунок плоских механізмів II класу...

Швидкості та прискорення $v_C(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_C(\varphi_1) \cdot \omega_1$ $a_C(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_C(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$



Силовий розрахунок структурної групи 4-го виду

$$FG4_Results(\varphi_1) := FG4 \left[\begin{pmatrix} x_C(\varphi_1) & \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_C(\varphi_1) & 0 \\ a + b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(\varphi_1) & m_4 \\ 0 & m_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega_1 \right]$$

$$\underline{R}(\varphi_1, i) := \begin{cases} \text{if } i \leq 4 \\ \left(\begin{matrix} x & y \end{matrix} \right) \leftarrow \left[\left(FG4_Results(\varphi_1) \right)_{1,i} \right]_x \left(\left(FG4_Results(\varphi_1) \right)_{1,i} \right)_{y} \\ \left(\begin{matrix} Result_F & Result_\alpha \end{matrix} \right) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \quad FindAngle(x, y) \right) \\ Result \leftarrow \left(FG4_Results(\varphi_1) \right)_{1,i} \quad \text{otherwise} \\ Result \end{cases}$$

$$F_{iH4}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_F$$

$$\alpha_{FiH4}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_\alpha$$

$$F_{iH5}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_F$$

$$\alpha_{FiH5}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_\alpha$$

$$R_{54}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)_F$$

$$\alpha_{54}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)_\alpha$$

$$R_{42}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)_F$$

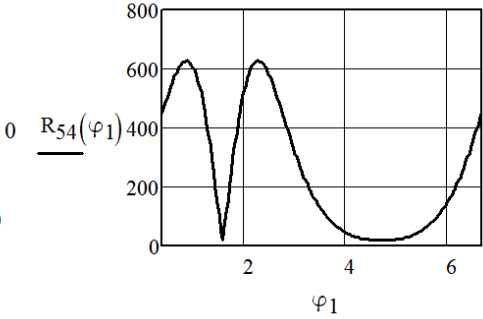
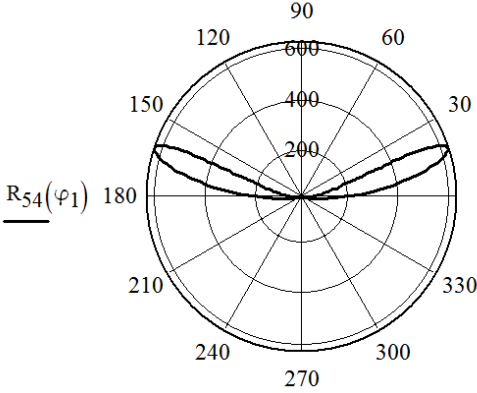
$$\alpha_{42}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)_\alpha$$

Розділ 2. Силовий розрахунок важільних механізмів

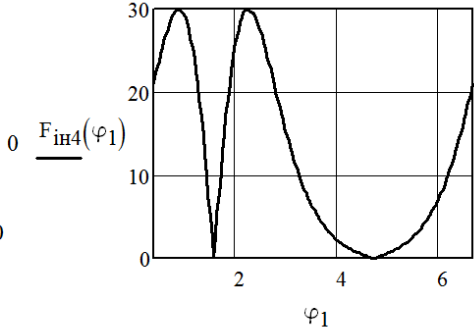
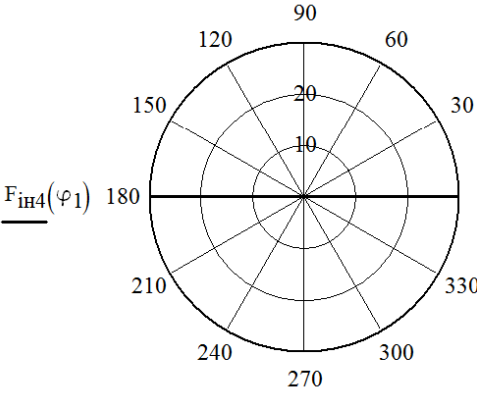
В розроблених програмах тут і далі:

$x := 1$ $y := 2$ Елементи матриць з індексом "1" - x , "2" - y

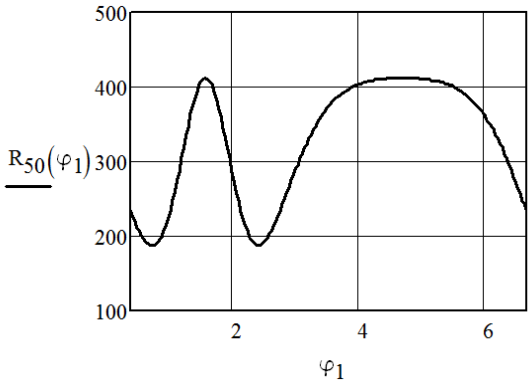
$F_w := 3$ $\alpha := 4$ Елементи матриць з індексом "3" - сила (реакція),
"4" - кут дії сили (реакції)



$\alpha_{54}(\varphi_1)$



$\alpha_{Fih4}(\varphi_1)$



2.5. Силевий розрахунок плоских механізмів II класу...

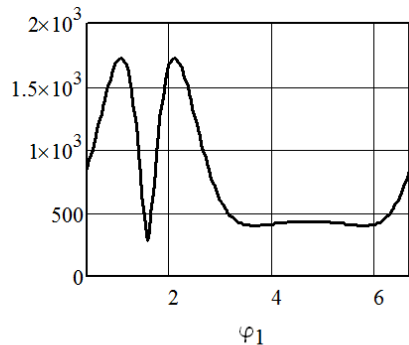
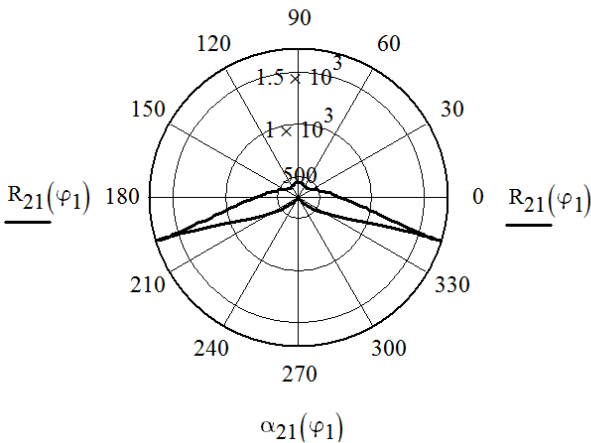
$$R_{24x}(\varphi_1) := -R_{42}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{42}(\varphi_1)) \quad R_{24y}(\varphi_1) := -R_{42}(\varphi_1) \cdot \sin(\alpha_{42}(\varphi_1))$$

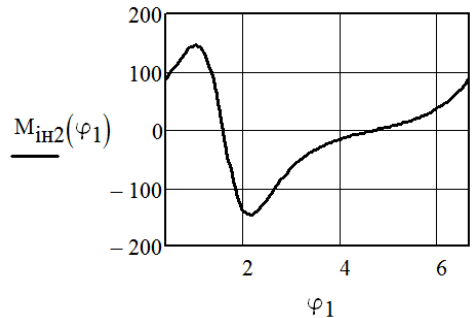
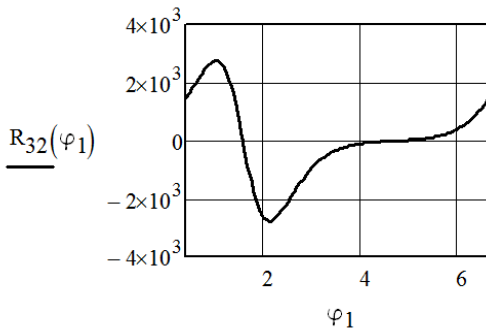
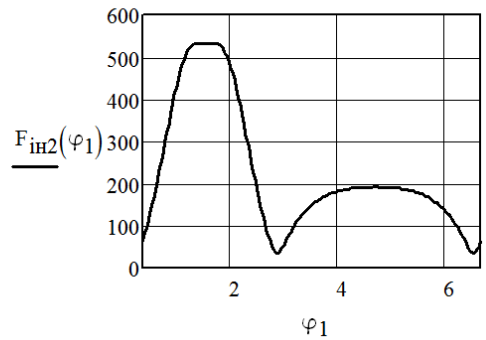
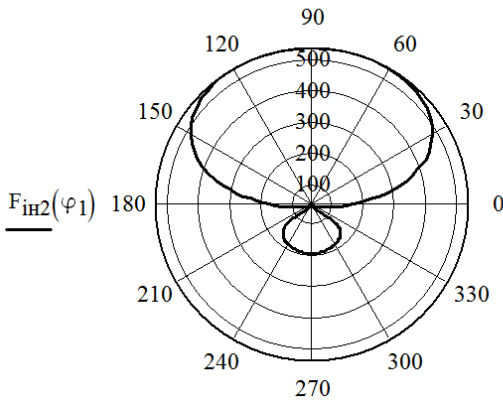
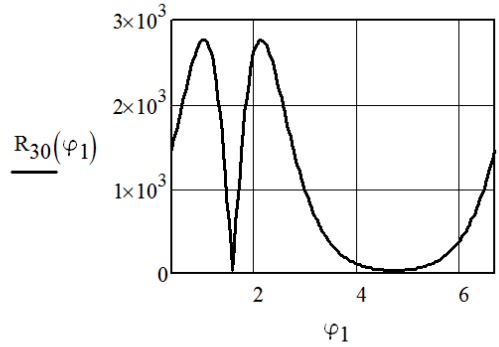
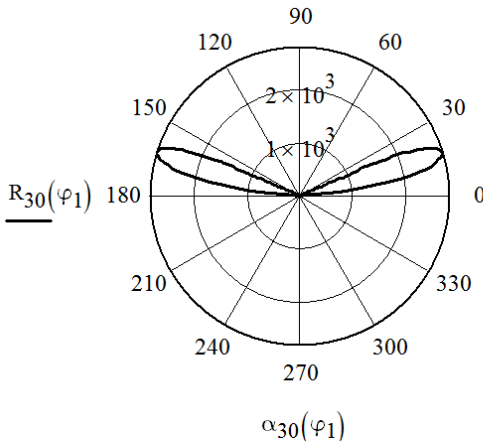
Силевий розрахунок структурної групи 3-го виду

$$FG3_Results(\varphi_1) := FG3 \left[\begin{pmatrix} x_A(\varphi_1) & 0 & l_k(\varphi_1) \\ y_A(\varphi_1) & a & 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi_1} x_A(\varphi_1) & 0 & AS_2 \\ \frac{d^2}{d\varphi_1} y_A(\varphi_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(\varphi_1) \\ \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_2(\varphi_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ JS_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_{24x}(\varphi_1) \\ R_{24y}(\varphi_1) \end{pmatrix}, \omega_1 \right]$$

$$R(\varphi_1, i) := \begin{cases} \text{if } i \leq 4 \\ \left(x \ y \right) \leftarrow \left[(FG3_Results(\varphi_1)_{1,i})_x \ (FG3_Results(\varphi_1)_{1,i})_y \right] \\ \left(Result_F \ Result_\alpha \right) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \ FindAngle(x, y) \right) \\ Result \leftarrow (FG3_Results(\varphi_1)_{1,i}) \text{ otherwise} \\ Result \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{21}(\varphi_1) &:= (R(\varphi_1, 1))_F & \alpha_{21}(\varphi_1) &:= (R(\varphi_1, 1))_\alpha \\ R_{30}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 2)_F & \alpha_{30}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 2)_\alpha \\ F_{iH2}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 3)_F & \alpha_{FiH2}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 3)_\alpha \\ F_{iH3}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 4)_F & \alpha_{FiH3}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 4)_\alpha \\ R_{32}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 5) & \alpha_{32}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 5)_\alpha \\ M_{iH2}(\varphi_1) &:= R(\varphi_1, 6) \end{aligned}$$





$$R_{21x}(\varphi_1) := R_{21}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{21}(\varphi_1))$$

$$R_{21y}(\varphi_1) := R_{21}(\varphi_1) \cdot \sin(\alpha_{21}(\varphi_1))$$

Силовий розрахунок механізму 1-го класу

$$FM1_Results(\varphi_1) := FM1(R_{21x}(\varphi_1), R_{21y}(\varphi_1), 0, 0, 0, OA, \varphi_1, OS_1, m_1, \omega_1)$$

$$R(\varphi_1, i) := \begin{cases} \text{if } i \leq 2 \\ \left(\begin{array}{l} (x \ y) \leftarrow \left[\left(FM1_Results(\varphi_1)1, i \right)_x \ \left(FM1_Results(\varphi_1)1, i \right)_y \right] \\ \left(Result_F \ Result_\alpha \right) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \ FindAngle(x, y) \right) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} Result \leftarrow \left(FM1_Results(\varphi_1)1, i \right) \text{ otherwise} \\ Result \end{array} \right. \end{cases}$$

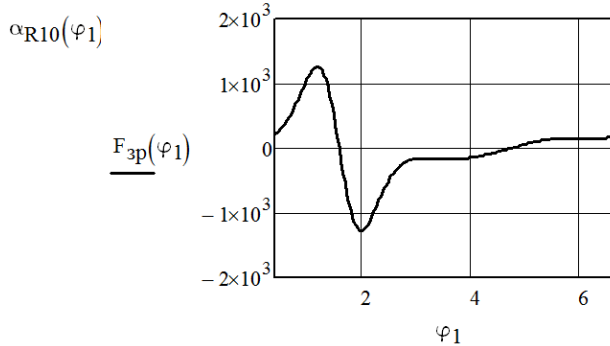
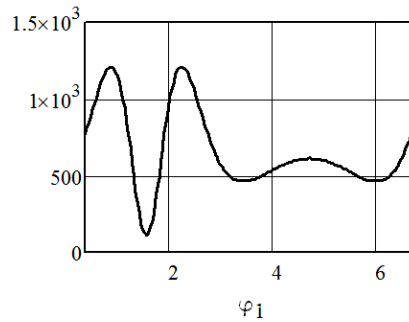
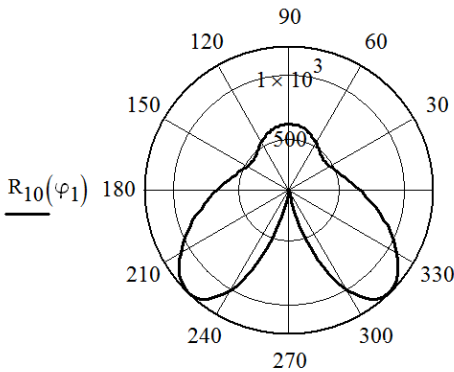
$$F_{iH1}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_F$$

$$\alpha_{FiH1}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_\alpha$$

$$R_{10}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_F$$

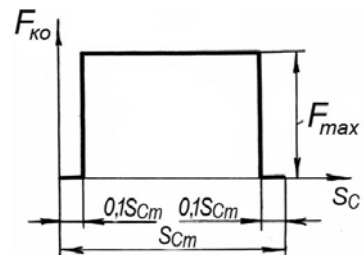
$$\alpha_{R10}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_\alpha$$

$$F_{3p}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)$$



Значимо, що проведені розрахунки показані без врахування дії зовнішніх сил на ланки механізму, зокрема сил корисного опору. В уніфікованих підпрограмах для розрахунку структурних груп передбачена можливість враховувати сили \vec{F}_i та \vec{F}_j та моменти M_i та M_j , якими навантажені ланки груп.

Наприклад, діаграма сил корисного опору має вигляд як показано на рисунку. Тоді, за-



Розділ 2. Силовий розрахунок важільних механізмів

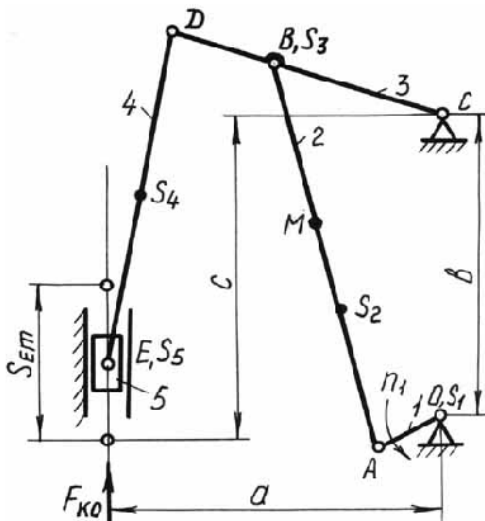
пишемо функцію у Mathcad, яка буде використовуватись для розрахунку значень сили корисного опору:

$$F_{\text{ко}}(v_C, s, s_{Cm}) := \begin{cases} -F_{\text{max}} & \text{if } (v_C > 0) \wedge (0.1 \cdot s_{Cm} < s < 0.9 \cdot s_{Cm}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

де v_C – швидкість точки C , що розрахована вище; s – поточне переміщення точки C , що може бути розраховане як $|x_C - x_{C0}|$ – різниця між поточною координатою x_C та значенням x_{C0} (координатою у нульовому положенні); s_{Cm} – максимальне переміщення вихідної ланки, що розраховується як $\max(x_C) - \min(x_C)$. Далі розраховані значення $F_{\text{ко}}$ підставляються у відповідні параметри уніфікованих підпрограм для проведення силового аналізу – для прикладу, що розглядається, це вектор початкових значень F основної підпрограми $FG4$ кінетостатичного розрахунку структурної групи 2-го класу 4-го виду.

Програма PR 2.6. Розрахунок механізму подачі кришкоробної машини

☐ Ссылка: D:\КИНЕТОСТАТИКА\LinkagesCalculation.xmcd



Розміри ланок

$$a := 0.8 \quad b := 1.3 \quad OA := 0.15 \quad AB := 1.35 \\ BC := 0.5 \quad CD := 0.66 \quad DE := 0.57$$

Положення центрів мас

$$OS_1 := 0.25 \cdot OA \quad AS_2 := 0.5 \cdot AB \quad DS_4 := 0.4 \cdot DE$$

Маси ланок

$$m_1 := \frac{360}{9.81} \quad m_2 := \frac{570}{9.81} \quad m_3 := \frac{600}{9.81} \\ m_4 := m_2 \quad m_5 := \frac{425}{9.81}$$

Моменти інерції ланок

$$J_{S1} := 0.1 \quad J_{S2} := 0.16 \quad J_{S3} := 0.2 \quad J_{S4} := J_{S2}$$

$$\text{Частота обертання кривошипа} \quad n_1 := 100 \quad \omega_1 := \frac{\pi \cdot n_1}{30}$$

$$\text{Початкове положення кривошипа} \quad \varphi_0 := 108.85 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Кількість досліджуваних положень} \quad N \equiv 180$$

Кут повороту кривошипа

$$\varphi_1 := \varphi_0, \varphi_0 + 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots \varphi_0 + 2 \cdot \pi \text{ проти годинникової стрілки}$$

$$\varphi_1 := 2 \cdot \pi + \varphi_0, 2 \cdot \pi + \varphi_0 - 2 \cdot \frac{\pi}{N} .. \varphi_0 \quad \blacksquare \quad \text{за годинниковою стрілкою}$$

Розрахунок механізму першого класу $\text{KM1_Results}(\varphi_1) := \text{KM1}(0, 0, \text{OA}, \varphi_1)$

$$x_A(\varphi_1) := \text{KM1_Results}(\varphi_1)_x \quad y_A(\varphi_1) := \text{KM1_Results}(\varphi_1)_y$$

Розрахунок структурної групи 1-го виду

$$\text{KG1_Results}(\varphi_1) := \text{KG1}(x_A(\varphi_1), y_A(\varphi_1), 0, b, \text{AB}, \text{BC})$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \text{KG1_Results}(\varphi_1)_1 \quad \varphi_3(\varphi_1) := \text{KG1_Results}(\varphi_1)_2$$

Розрахунок параметрів точки D $\text{KDT_D}(\varphi_1) := \text{KDT}(0, b, \text{CD}, 0, \varphi_3(\varphi_1))$

$$x_D(\varphi_1) := \text{KDT_D}(\varphi_1)_x \quad y_D(\varphi_1) := \text{KDT_D}(\varphi_1)_y$$

Розрахунок параметрів точки B $\text{KDT_B}(\varphi_1) := \text{KDT}(0, b, \text{BC}, 0, \varphi_3(\varphi_1))$

$$x_B(\varphi_1) := \text{KDT_B}(\varphi_1)_x \quad y_B(\varphi_1) := \text{KDT_B}(\varphi_1)_y$$

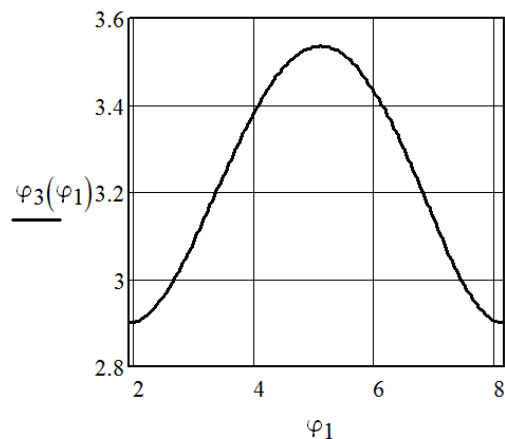
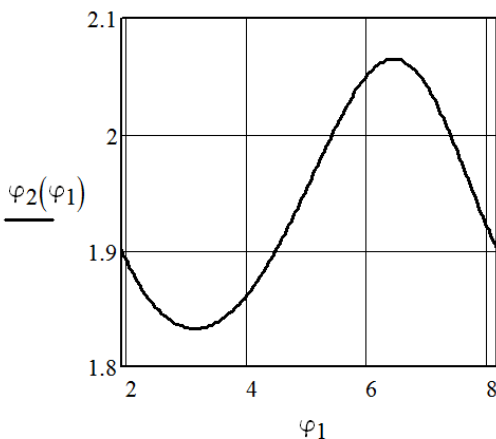
Розрахунок структурної групи 2-го виду

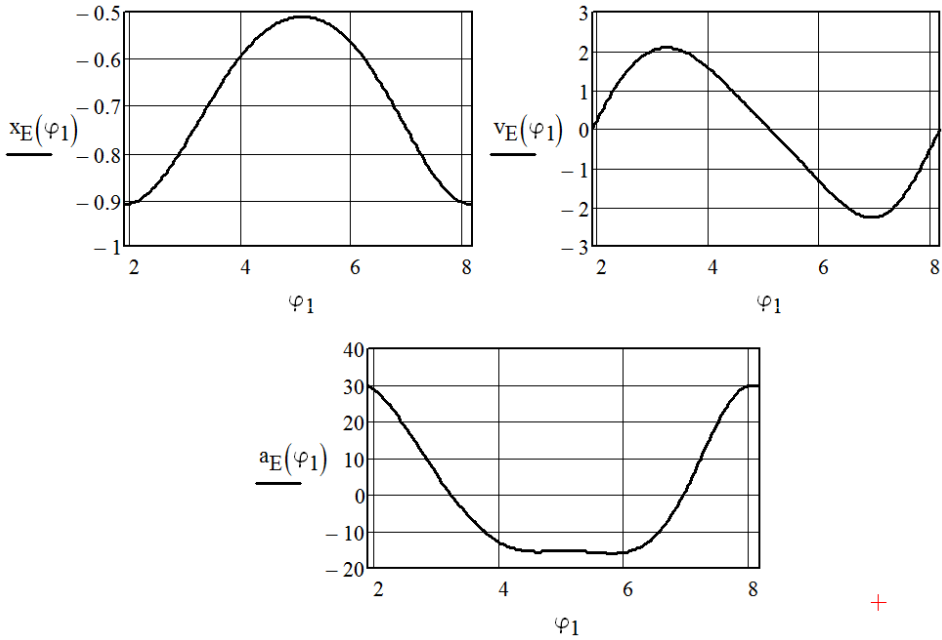
$$\text{KG2_Results}(\varphi_1) := \text{KG2}(x_D(\varphi_1), y_D(\varphi_1), -a, 0, \frac{3 \cdot \pi}{2}, \text{DE}) \quad \varphi_{i2}(\varphi_1) := \text{KG2_Results}(\varphi_1)_1$$

Переміщення вихідної ланки $x_E(\varphi_1) := \text{KG2_Results}(\varphi_1)_2$

Швидкості та прискорення

$$v_E(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_E(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad a_E(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_E(\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$





Силловий розрахунок структурної групи 2-го виду

$$\text{FG2_Results}(\varphi_1) := \text{FG2} \left[\begin{array}{l} x_D(\varphi_1) \\ y_D(\varphi_1) \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_D(\varphi_1) \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} y_D(\varphi_1) \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} \varphi_{i2}(\varphi_1) & 0 & m_4 \\ \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_{i2}(\varphi_1) & 0 & m_5 \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_{i2}(\varphi_1) & DS_4 & JS_4 \end{array} \right], \text{DE}, \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \omega_1$$

$$\underline{R}(\varphi_1, i) := \left\{ \begin{array}{l} \text{if } i \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} (x \ y) \leftarrow \left[(\text{FG2_Results}(\varphi_1)_{1,i})_x \ (\text{FG2_Results}(\varphi_1)_{1,i})_y \right] \\ \left(\text{Result}_F \ \text{Result}_\alpha \right) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \ \text{FindAngle}(x,y) \right) \end{array} \right. \\ \text{Result} \leftarrow (\text{FG2_Results}(\varphi_1)_{1,i}) \ \text{otherwise} \\ \left. \text{Result} \right\}$$

$$R_{43}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_F$$

$$\alpha_{43}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_\alpha$$

$$R_{54}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_F$$

$$\alpha_{54}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_\alpha$$

$$F_{iH4}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)_F$$

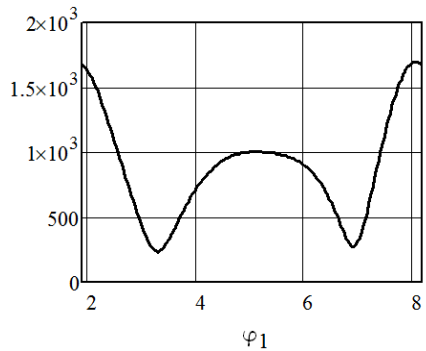
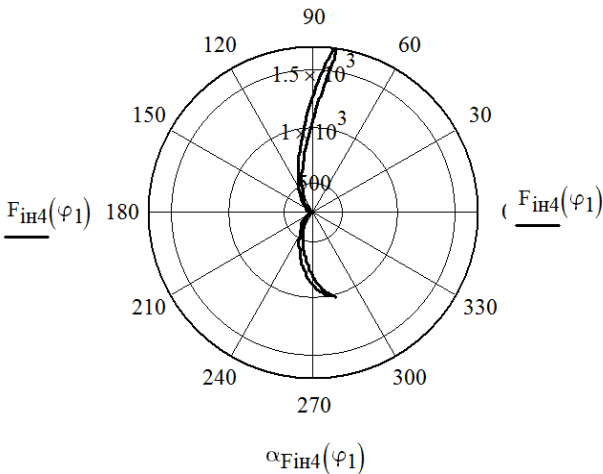
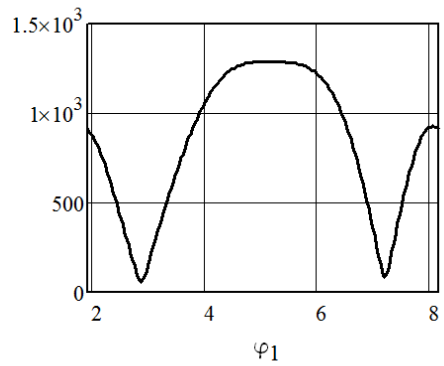
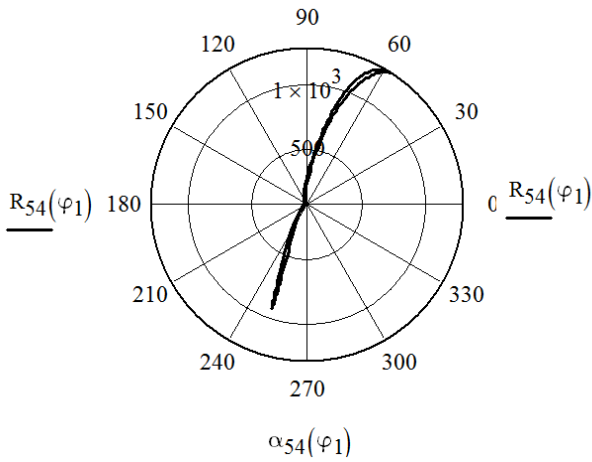
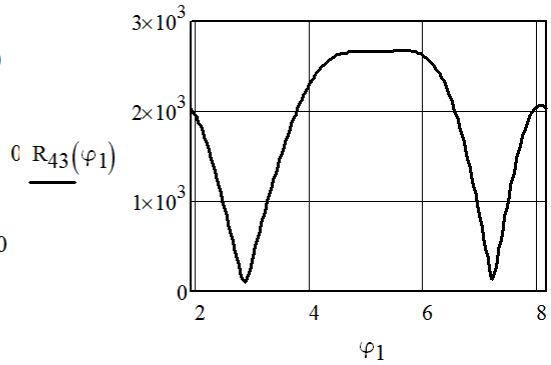
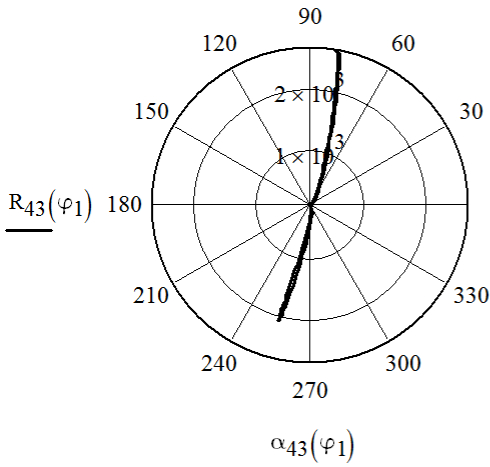
$$\alpha_{FiH4}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)_\alpha$$

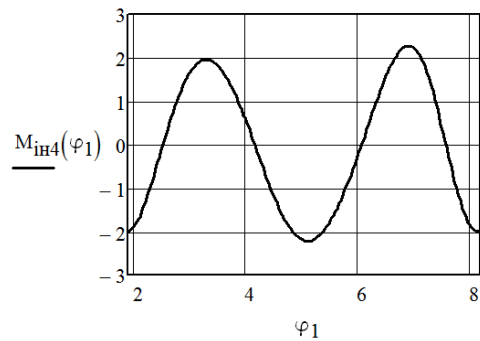
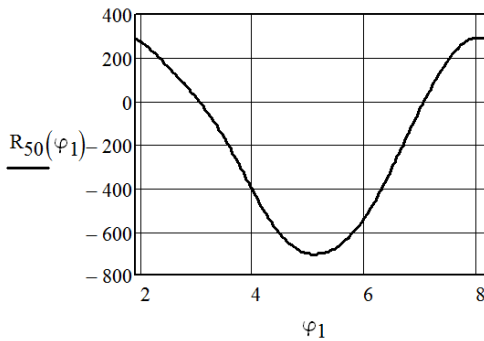
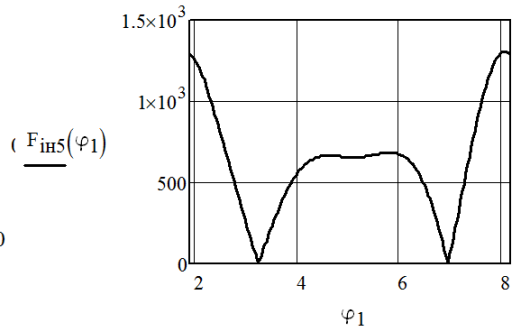
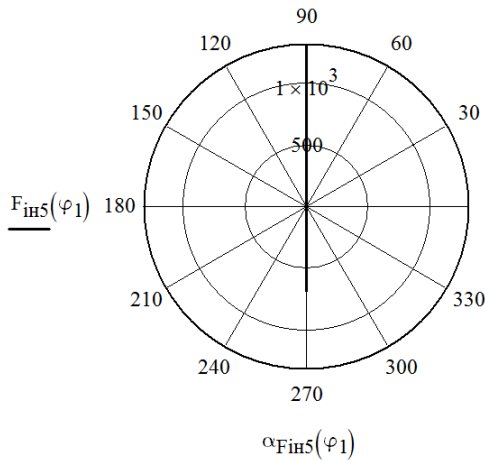
$$F_{iH5}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)_F$$

$$\alpha_{FiH5}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)_\alpha$$

2.5. Силовий розрахунок плоских механізмів II класу...

$$R_{50}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 5) \quad M_{iH4}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 6)$$





$$R_{34x}(\varphi_1) := -R_{43}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{43}(\varphi_1))$$

$$R_{34y}(\varphi_1) := -R_{43}(\varphi_1) \cdot \sin(\alpha_{43}(\varphi_1))$$

Силоний розрахунок структурної групи 1-го виду

$$M_1(\varphi_1) := \begin{pmatrix} x_A(\varphi_1) & 0 & AS_2 & 0 \\ y_A(\varphi_1) & b & 0 & 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_A(\varphi_1) & 0 & BC & CD \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} y_A(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(\varphi_1) := \begin{pmatrix} \varphi_2(\varphi_1) & \varphi_3(\varphi_1) \\ \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) & \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \\ \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_2(\varphi_1) & \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_3(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$FG1_Results(\varphi_1) := FG1 \left[M_1(\varphi_1), A(\varphi_1), AB, \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ J_{S2} \\ J_{S3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{34x}(\varphi_1) \\ 0 & R_{34y}(\varphi_1) \end{pmatrix}, \omega_1 \right]$$

2.5. Силовий розрахунок плоских механізмів II класу...

$$R(\varphi_1, i) := \begin{cases} \text{if } i \leq 5 \\ \left[\begin{array}{l} (x \ y) \leftarrow \left[\left(\text{FG1_Results}(\varphi_1)_{1,i} \right)_x \ \left(\text{FG1_Results}(\varphi_1)_{1,i} \right)_y \right] \\ \left(\text{Result}_F \ \text{Result}_\alpha \right) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \ \text{FindAngle}(x, y) \right) \end{array} \right. \\ \text{Result} \leftarrow \left(\text{FG1_Results}(\varphi_1)_{1,i} \right) \text{ otherwise} \\ \text{Result} \end{cases}$$

$$R_{32}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)F$$

$$\alpha_{32}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)\alpha$$

$$R_{21}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)F$$

$$\alpha_{21}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)\alpha$$

$$R_{30}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)F$$

$$\alpha_{30}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)\alpha$$

$$F_{iH2}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)F$$

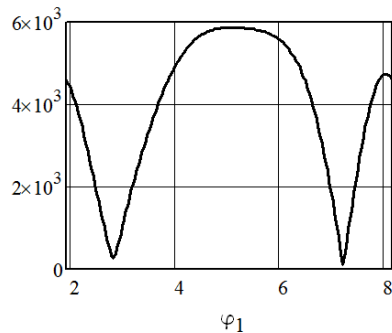
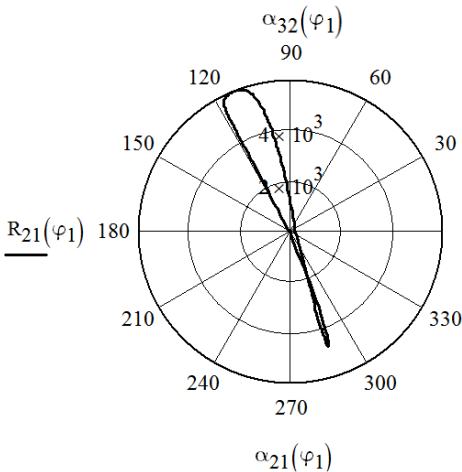
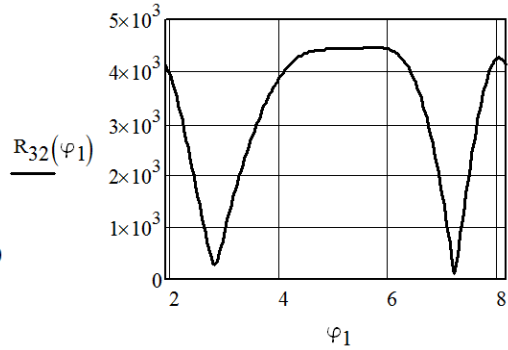
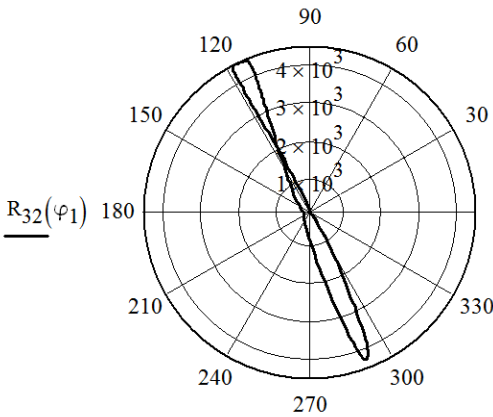
$$\alpha_{FiH2}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 4)\alpha$$

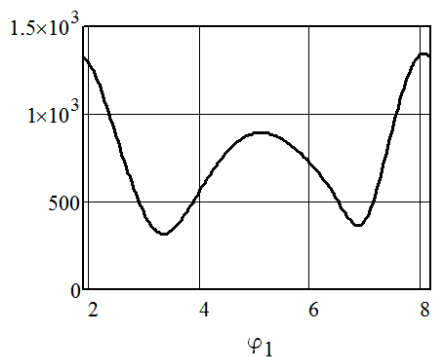
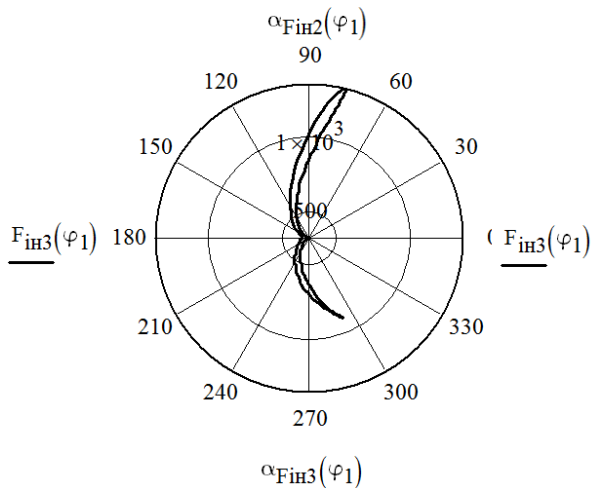
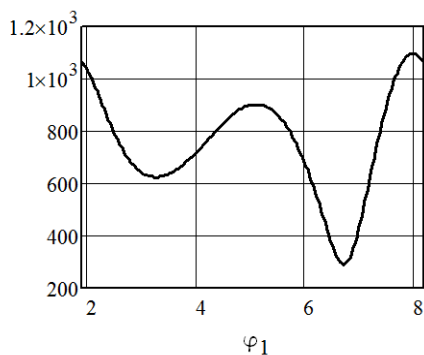
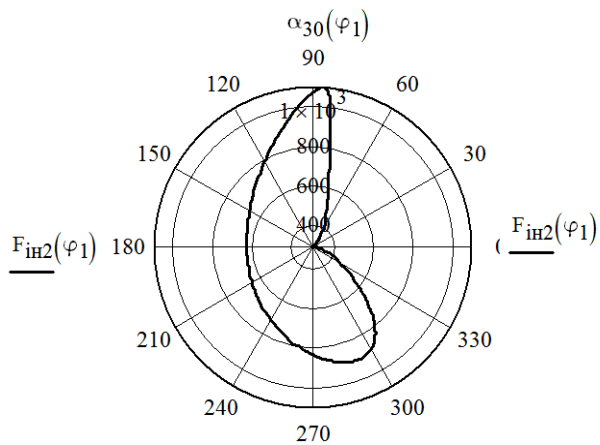
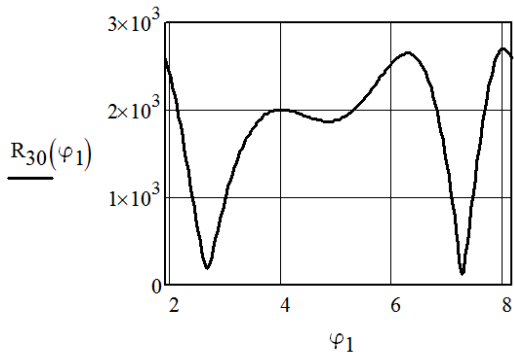
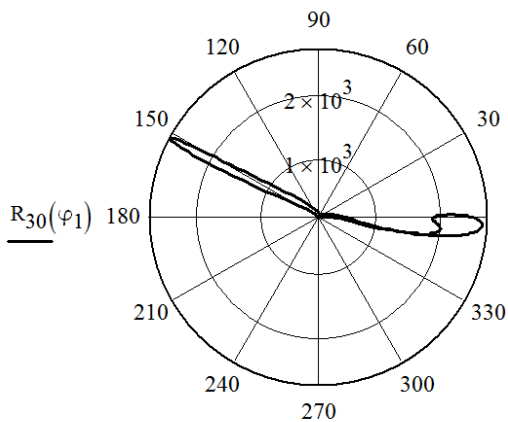
$$F_{iH3}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 5)F$$

$$\alpha_{FiH3}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 5)\alpha$$

$$M_{iH2}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 6)$$

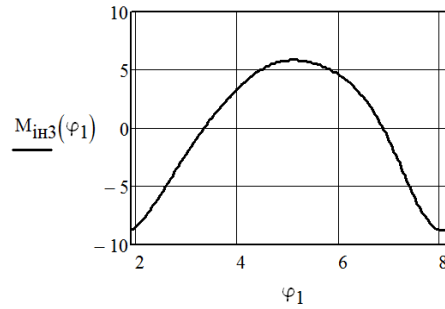
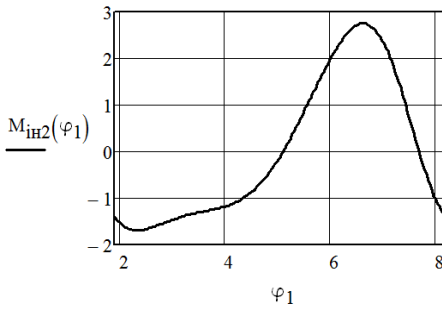
$$M_{iH3}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 7)$$





$$R_{21x}(\varphi_1) := R_{21}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{21}(\varphi_1))$$

$$R_{21y}(\varphi_1) := R_{21}(\varphi_1) \cdot \sin(\alpha_{21}(\varphi_1))$$



Силовий розрахунок механізму 1-го класу

$$FM1_Results(\varphi_1) := FM1(R_{21x}(\varphi_1), R_{21y}(\varphi_1), 0, 0, 0, OA, \varphi_1, OS_1, m_1, \omega_1)$$

$$R(\varphi_1, i) := \begin{cases} \text{if } i \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} (x \ y) \leftarrow \left[(FM1_Results(\varphi_1)1, i)_x \ (FM1_Results(\varphi_1)1, i)_y \right] \\ (Result_F \ Result_\alpha) \leftarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \ FindAngle(x, y) \right) \end{array} \right. \\ \text{Result} \leftarrow (FM1_Results(\varphi_1)1, i) \text{ otherwise} \end{cases}$$

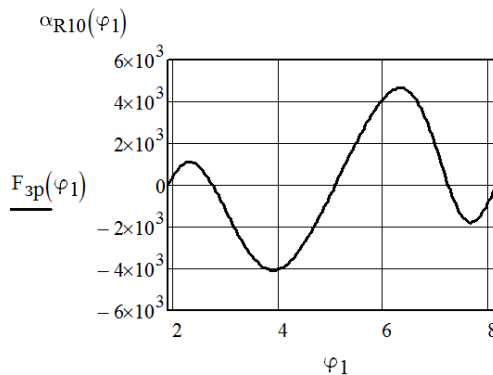
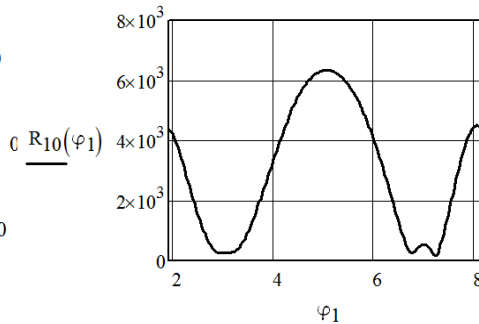
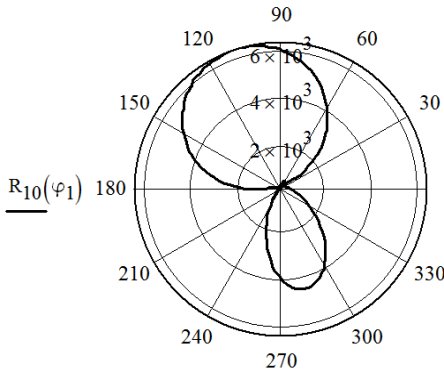
$$F_{iH1}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_F$$

$$\alpha_{FiH1}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 1)_\alpha$$

$$R_{10}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_F$$

$$\alpha_{R10}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 2)_\alpha$$

$$F_{3p}(\varphi_1) := R(\varphi_1, 3)$$



ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

3.1. Зведення сил і моментів сил

Другою (зворотною) задачею динамічного дослідження механізмів (див. п 2.1), яка має назву динаміка механізмів (машин), є визначення закону руху початкової ланки під дією заданих зовнішніх сил.

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно всі сили, що діють на різні ланки механізму, замінити однією силою або моментом сил, які прикладають до однієї з ланок механізму. Силу, що заміняє, називають *зведеною силою*, момент – *зведеним моментом*. Для того щоб така заміна була еквівалентна, необхідно, *щоб робота зведеної сили (моменту сили) на деякому можливому переміщенні її точок прикладання або потужність, яку вона розвиває, мають відповідно дорівнювати сумі робіт, прикладених до механізму сил на тому самому переміщенні їх точок прикладання, або сумі потужностей, що розвиваються цими силами*. Це і є умовою зведення сил або моментів сил.

Ланку механізму, до якої прикладають зведену силу, називають *ланкою зведення*, а точку її прикладання – *точкою зведення* (рис. 3.1). Якщо механізм має один ступінь вільності, то для вивчення його руху досить знати закон руху однієї з його ланок, тобто знати закон зміни узагальненої координати.

Як правило, ланкою зведення вибирають початкову ланку механізму. У робочих машинах ланкою зведення вибирають головний вал, у машинах-двигунах – вихідний вал. Тоді замість того, щоб розглянути всі ланки механізму чи машини, можна розглянути тільки одну ланку, наприклад кривошип OA (рис. 3.1), узагальнена координата якого – кут φ_1 .

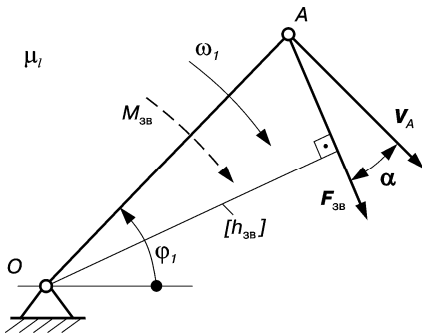


Рис. 3.1. Ланка зведення

Для визначення зведених сил зручно використовувати рівність потужностей:

$$P_{зв} = \sum_{i=1}^n P_i. \quad (3.1)$$

У цій рівності $P_{зв}$ – потужність, яку розвиває зведена сила $F_{зв}$ або зведений момент $M_{зв}$; P_i – потужність, що розвивають сили та моменти пар сил, які прикладені до i -ї ланки та мають бути зведені ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Ці потужності можна записати в такому вигляді:

$$P_{зв} = F_{зв} v_A \cos \alpha = M_{зв} \omega_1; \quad \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i, \quad (3.2)$$

де $F_{зв}$ – зведена до точки A ланки сила; v_A – швидкість точки зведення A ; α – кут між напрямком зведеної сили і швидкістю точки зведення; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення; F_i , M_i – сила або момент сили, які прикладені до i

ланки; v_i – швидкість точки прикладання сили F_i ; ω_i – кутова швидкість цієї ланки; α_i – кут між напрямком векторів F_i і v_i .

Підставивши вирази (3.2) у рівняння (3.1), дістанемо

$$F_{\text{ц\bar{a}}} = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{v_A} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{v_A} \right]; \quad M_{\text{ц\bar{a}}} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}. \quad (3.3)$$

З рівнянь (3.3) видно, що при заданих силах F_i і моментах M_i визначення зведеної сили $F_{\text{зв}}$ або зведеного моменту $M_{\text{зв}}$ не становить значних труднощів і може бути зроблене, якщо для всіх положень, які досліджуються, побудовано плани швидкостей механізму і визначено кутові швидкості ланок.

Для визначення $F_{\text{зв}}$ і $M_{\text{зв}}$ за формулами (3.3) необов'язково знати справжні швидкості точок і ланок, тому що вони входять у вигляді відношення двох швидкостей, яке не залежить від величини швидкості руху механізму, а залежить тільки від положень його ланок і може бути подано через відповідні відрізки плану швидкостей. Цей план можна будувати для довільно вибраної кутової швидкості ланки зведення, тобто в невизначеному масштабі.

Цілком очевидно, що між зведеною силою і зведеним моментом сил існує такий зв'язок:

$$M_{\text{зв}} = F_{\text{зв}} h_{\text{зв}},$$

де $h_{\text{зв}}$ – плече вектора $\bar{F}_{\text{ц\bar{a}}}$ відносно центра обертання кривошипа OA .

Зведену силу можна визначити також за допомогою правила важеля Жуковського, враховуючи, що $\bar{F}_{\text{ц\bar{a}}} = -\bar{F}_{\text{ц\bar{a}}}$. Це пояснюється тим, що зведена сила замінює дію всіх сил, що діють на ланки механізму, а зрівноважувальна сила забезпечує рівновагу механізму під дією цих сил. Тому згідно з третім законом Ньютона існує ця рівність ($\bar{F}_{\text{ц\bar{a}}} = -\bar{F}_{\text{ц\bar{a}}}$).

Приклад 3.1. На ланки кривошипно-повзунного механізму (рис. 3.2, а) діють сили F_1, F_2, F_3 і момент сил M_2 . Визначити зведений момент сил, який прикладено до кривошипа 1. План швидкостей механізму наведено на рис. 3.2, б.

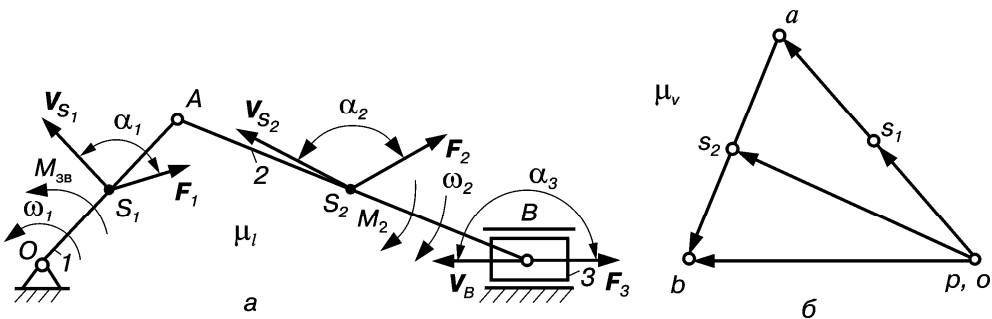


Рис. 3.2. Зведення сил: а) розрахункова схема механізму; б) його план швидкостей

Розв’язання. Для розв’язання цієї задачі використовуватимемо рівність потужностей (3.1). У нашому випадку

$$P_{зв} = M_{зв}\omega_1, \quad \sum_{i=1}^{n=3} P_i = P_1 + P_2 + P_3, \quad (3.4)$$

де P_1, P_2, P_3 – потужності, які розвивають сили, що прикладені відповідно до ланок 1, 2, 3:

$$P_1 = F_1 v_{S_1} \cos\alpha_1; P_2 = F_2 v_{S_2} \cos\alpha_2 + M_2\omega_2; P_3 = F_3 v_{S_3} \cos\alpha_3, \quad (3.5)$$

де v_{S_i} – швидкості точок прикладання S_i сили F_i ($v_{S_3} = v_B$); α_i – кути між векторами F_i і v_{S_i} (рис. 3.2, а).

Підставляючи рівність (3.4) і (3.5) у рівняння (3.1), знаходимо

$$M_{зв} = F_1 \frac{v_{S_1}}{\omega_1} \cos\alpha_1 + F_2 \frac{v_{S_2}}{\omega_1} \cos\alpha_2 + M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} - F_3 \frac{v_B}{\omega_1}. \quad (3.6)$$

Тут $\alpha_3 = \pi$, а тому $\cos\alpha_3 = -1$.

Отже, для визначення зведеної сили $F_{зв}$ або зведеного моменту сил $M_{зв}$, необхідно щоб були задані всі сили F_i (Н), моменти сил M_i (Н·м), швидкості v_{S_i} (м/с) точок прикладання цих сил та кутові швидкості всіх ланок (1/с), а також кути α_i° між векторами F_i і v_{S_i} . При таких даних програма для визначення зведеного моменту сил $M_{зв}$ (3.6) має вигляд.

Програма PR 3.1

$$\omega_1 := 10 \quad l_{OA} := 0.22 \quad l_{AB} := 0.47 \quad F_1 := 20 \quad F_2 := 80 \quad F_3 := 200 \quad M_2 := 1.5$$

$$v_{S1} := 1.5 \quad v_{S2} := 2.2 \quad v_B := 3.0 \quad \omega_2 := 4.5 \quad \alpha_1 := 150\text{deg} \quad \alpha_2 := 120\text{deg}$$

$$M_{зв} := \frac{(F_1 \cdot v_{S1} \cdot \cos(\alpha_1) + F_1 \cdot v_{S1} \cdot \cos(\alpha_1) + M_2 \cdot \omega_2 - F_3 \cdot v_B)}{\omega_1} \quad M_{зв} = -64.521$$

Розглянемо більш загальний випадок визначення зведеної сили $F_{зв}$ або зведеного моменту сил $M_{зв}$, коли параметри $F_i, M_i, v_{S_i}, \alpha_i$ не задані, а їх треба обчислити.

Приклад 3.2. Побудувати діаграму зведеного моменту сил, який прикласти до кривошипа l (рис. 3.3), якщо задано кутову швидкість кривошипа $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$, розміри ланок: $r = l_{OA} = 0,05 \text{ м}$, $l = l_{AB} = 0,15 \text{ м}$, $e = 0,02 \text{ м}$, $l_{OS_1} = 0,4r$, $l_{AS_2} = 0,55 \cdot l$; маси ланок: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 12 \text{ кг}$, $m_3 = 5 \text{ кг}$, момент інерції шатуна AB $J_{S_2} = 0,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; сила корисного опору $F_{\text{вн}} = 100 \text{ Н}$.

При складанні програми використаємо алгоритми для обчислення швидкостей, прискорень та сил інерції, наведених в розділах 1 і 2.

Програма PR 3.2

$$\omega_1 := 15 \quad r := 0.05 \quad l := 0.4 \quad e := 0.04 \quad l_{OS1} := 0.4 \cdot r \quad l_{AS2} := 0.55 \cdot l$$

$$m_1 := 0.2 \quad m_2 := 2 \quad m_3 := 0.5 \quad J_{S1} := 0.01 \quad J_{S2} := 0.8 \quad F_{KO} := 100$$

$$N := 36 \quad G_1 := \frac{m_1}{9.81} \quad G_2 := \frac{m_2}{9.81} \quad G_3 := \frac{m_3}{9.81}$$

$$\varphi_0 := \text{asin}\left(\frac{e}{1-r}\right) \quad a_0 := \sqrt{(1-r)^2 - e^2} \quad \varphi_1 := \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \text{asin}\left[\frac{(e - r \cdot \sin(\varphi_1))}{1}\right] \quad x_B(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) + l \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$\varphi_2'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1) \quad x_B'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_B(\varphi_1) \quad v_B(\varphi_1) := \omega_1 \cdot x_B'(\varphi_1)$$

$$\omega_2(\varphi_1) := \varphi_2'(\varphi_1) \cdot \omega_1 \varphi_2''(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_2(\varphi_1) \quad x_B''(\varphi_1) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} x_B(\varphi_1)$$

$$x_A(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad v_{S1} := \omega_1 \cdot l_{OS1}$$

$$x_{S2}(\varphi_1) := x_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \quad y_{S2}(\varphi_1) := y_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$x_{S2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S2}(\varphi_1) \quad y_{S2}'(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S2}(\varphi_1)$$

$$s_{S2}'(\varphi_1) := \sqrt{x_{S2}'(\varphi_1)^2 + y_{S2}'(\varphi_1)^2} \quad v_{S2}(\varphi_1) := s_{S2}'(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$\alpha_{vS2}(\varphi_1) := \text{atan2}(x_{S2}'(\varphi_1), y_{S2}'(\varphi_1)) \quad x_{S2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S2}'(\varphi_1)$$

$$y_{S2}''(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S2}'(\varphi_1) \quad s_{S2}''(\varphi_1) := \sqrt{x_{S2}''(\varphi_1)^2 + y_{S2}''(\varphi_1)^2}$$

$$a_{S1} := \omega_1^2 \cdot l_{OS1} \quad a_{S2}(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot s_{S2}''(\varphi_1)$$

$$a_B(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot x_B''(\varphi_1) \quad \varepsilon_2(\varphi_1) := \omega_1^2 \cdot \varphi_2''(\varphi_1)$$

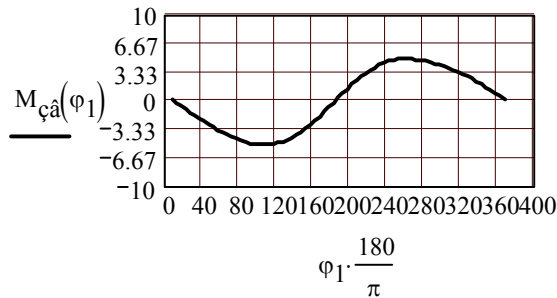
$$\alpha_{aS2}(\varphi_1) := \text{atan2}(x_{S2}''(\varphi_1), y_{S2}''(\varphi_1)) \quad \alpha_{F2}(\varphi_1) := \alpha_{aS2}(\varphi_1) - \pi$$

$$\alpha_2(\varphi_1) := \alpha_{vS2}(\varphi_1) - \alpha_{F2}(\varphi_1) \quad \alpha_{G2}(\varphi_1) := \frac{3}{2} \cdot \pi - \alpha_{vS2}(\varphi_1)$$

$$F_{iH1} := m_1 \cdot a_{S1} \quad F_{iH2}(\varphi_1) := m_2 \cdot a_{S2}(\varphi_1)$$

$$F_{iH3}(\varphi_1) := m_3 \cdot a_B(\varphi_1) \quad M_{iH2}(\varphi_1) := J_{S2} \cdot \varepsilon_2(\varphi_1)$$

$$M_{zB}(\varphi_1) := \frac{1}{\omega_1} \cdot \left(\begin{array}{l} G_1 \cdot v_{S1} \cdot \cos(\pi - \varphi_1) + F_{iH2}(\varphi_1) \cdot v_{S2}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_2(\varphi_1)) \dots \\ + G_2 \cdot v_{S2}(\varphi_1) \cdot \cos(\alpha_{G2}(\varphi_1)) - M_{iH2}(\varphi_1) \cdot \omega_2(\varphi_1) \dots \\ + F_{KO} \cdot v_B(\varphi_1) - F_{iH3}(\varphi_1) \cdot v_B(\varphi_1) \end{array} \right)$$



3.2. Зведення мас і моментів інерції

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно, так само як і сили, маси і моменти інерції всіх ланок замінити одною зведеною масою $m_{зв}$ або одним зведеним моментом інерції $J_{зв}$. При цьому необхідно, щоб кінетична енергія зведеної маси (моменту інерції) у відповідних положеннях механізму дорівнювала сумі кінетичних енергій всіх ланок цього механізму, тобто

$$\dot{O}_{\dot{\varphi}_a} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (3.7)$$

де $T_{зв}$ – кінетична енергія ланки зведення; T_i – кінетична енергія ланки i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Якщо, наприклад, вибрати за ланку зведення кривошип OA (див. рис. 3.1), а за точку зведення – центр шарніра A , то кінетична енергія ланки зведення визначиться за формулою

$$\dot{O}_{\dot{\varphi}_a} = \frac{m_{ca} v_A^2}{2} \quad (3.8)$$

або

$$\dot{O}_{\dot{\varphi}_a} = \frac{J_{ca} \omega_1^2}{2}, \quad (3.9)$$

де $m_{зв}$, $J_{зв}$ – зведена маса або зведений момент інерції механізму; v_A – швидкість точки зведення A ; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення, у нашому випадку кривошипа OA .

Кінетична енергія ланок механізму може бути виражена як сума кінетичних енергій мас, які здійснюють поступальний і обертовий рух, тобто

$$\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_{ca} v_{s_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{ca} \omega_i^2}{2}. \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.8)–(3.10) у загальну рівність (3.7), знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} m_{\text{в}i} &= \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{v_A^2} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v_A} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2; \\ J_{\text{в}i} &= \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega_1} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

У формулах (3.10) і (3.11) m_i і J_{S_i} – це відповідно маса ланки i та її момент інерції відносно осі, що проходить через центр маси; v_{S_i} – швидкість центра мас ланки i ; ω_i – її кутова швидкість.

Звичайно, буде зберігатись залежність $J_{\text{зв}} = m_{\text{зв}} l_{OA}^2$.

Якщо врахувати, що в більшості механізмів маса ланок та їх моменти інерції під час руху не змінюються, то, як видно з формул (3.11), зведені маси і моменти інерції залежать тільки від співвідношень швидкостей, які, у свою чергу, залежать від положень ланок механізму, тобто від положення ланки зведення, і є завжди величинами додатними.

Зведені маси і моменти інерції можуть бути сталими або змінними. У більшості важільних, храпових, мальтійських, кулачкових механізмів зведені маси або зведені моменти інерції залежать від кута φ_1 повороту початкової ланки (узагальненої координати). У механізмах із сталим співвідношенням швидкостей (зубчасті, фрикційні, пасові, гвинтові, шарнірний паралелограм тощо) зведені маси (моменти інерції) стали.

Приклад 3.3. Визначити зведений момент інерції, який прикладено до кривошипа l (рис. 3.3), якщо задано: маси ланок – $m_1=2$ кг, $m_2=5$ кг, $m_3=6$ кг, $m_4=8$ кг, $m_5=12$ кг; їх моменти інерції – $J_{S_1}=0,03$ кг·м/с², $J_{S_2}=0,13$ кг·м/с², $J_{S_3}=0,2$ кг·м/с², $J_{S_4}=0,25$ кг·м/с²; швидкості центрів мас і ланок – $v_{S_1}=0,2$ м/с, $v_{S_2}=0,4$ м/с, $v_{S_3}=0,15$ м/с, $v_{S_4}=0,35$ м/с, $v_D=0,3$ м/с, $\omega_1=10$ с⁻¹, $\omega_2=3,5$ с⁻¹, $\omega_3=2,5$ с⁻¹, $\omega_4=1,5$ с⁻¹, положення центрів мас – $l_{OS_1}=0,02$ м, $l_{CS_3}=0,06$ м.

Програма PR 3.3

$$\begin{aligned} m_1 &:= 2 & m_2 &:= 5 & m_3 &:= 6 & m_4 &:= 8 & m_5 &:= 12 & J_{S1} &:= 0.03 & J_{S2} &:= 0.13 \\ J_{S3} &:= 0.2 & J_{S4} &:= 0.25 & v_{S1} &:= 0.2 & v_{S2} &:= 0.4 & v_{S3} &:= 0.15 & v_{S4} &:= 0.34 \\ v_D &:= 0.3 & \omega_1 &:= 10 & \omega_2 &:= 3.5 & \omega_3 &:= 2.5 & \omega_4 &:= 1.5 & l_{OS1} &:= 0.02 & l_{CS3} &:= 0.06 \end{aligned}$$

$$J_{3B} := \left(J_{S1} + m_1 \cdot l_{OS1}^2 \right) + \left[m_2 \cdot v_{S2}^2 + J_{S2} \cdot \omega_2^2 + \left(J_{S3} + m_3 \cdot l_{CS3}^2 \right) \cdot \omega_3^2 \dots \right] \cdot \left(\omega_1^2 \right)^{-1} \\ + m_4 \cdot v_{S4}^2 + J_{S4} \cdot \omega_4^2 - m_5 \cdot v_D^2$$

$$J_{3B} = 0.073$$

Приклад 3.4. Побудувати діаграму зведеного моменту сил, який прикласти до кривошипа l (рис. 3.3), якщо задано кутову швидкість кривошипа $\omega_1 = 15 \text{ c}^{-1}$, розміри ланок: $r = l_{OA} = 0,1 \text{ м}$, $l = l_{AB} = 0,25 \text{ м}$, $b = l_{BC} = 0,22 \text{ м}$, $a = l_{OC} = 0,25 \text{ м}$, $d = l_{CD} = 0,55 \text{ м}$, $l_{OS1} = 0,06 \text{ м}$, $l_{AS2} = 0,12 \text{ м}$, $l_{CS3} = 0,1 \text{ м}$, $l_{BS4} = 0,25 \text{ м}$; маси ланок: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 5 \text{ кг}$, $m_3 = 6 \text{ кг}$, $m_4 = 8 \text{ кг}$, $m_5 = 12 \text{ кг}$; їх моменти інерції – $J_{S1} = 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{c}^2$, $J_{S2} = 0,13 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{c}^2$, $J_{S3} = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{c}^2$, $J_{S4} = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{c}^2$. Початкове положення механізму, яке визначається кутом φ_0 , вибрати таким, при якому повзун 5 займає крайнє праве положення.

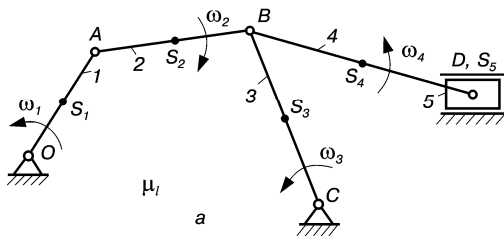


Рис. 3.3. Кінематична схема механізму

Розв’язання. Для розв’язання задачі будемо використовувати умову зведення мас (3.7). У нашому випадку кінетична енергія ланки зведення визначається залежністю (3.11), тобто

$$T_{ca} = \frac{J_{ca} \omega_1^2}{2}$$

Кінетична енергія механізму складатиметься з кінетичної енергії п’яти ланок:

$$\sum_{i=1}^n T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

де

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \left(J_{S1} + m_1 l_{OS1}^2 \right) \frac{\omega_1^2}{2}; & T_2 &= \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} + \frac{J_{S2} \omega_2^2}{2}; \\ T_3 &= \frac{J_C \omega_3^2}{2} = \left(J_{S3} + m_3 l_{CS3}^2 \right) \frac{\omega_3^2}{2}; & T_4 &= \frac{m_4 v_{S4}^2}{2} + \frac{J_{S4} \omega_4^2}{2}; & T_5 &= \frac{m_5 v_D^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Підставляючи вирази (3.9) і (3.12) у залежність (3.7), знаходимо зведений момент інерції механізму:

$$J_{\text{в}} = J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2 + m_2 \left(\frac{v_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(J_{S_3} + m_3 l_{CS_3}^2 \right) \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + \left. \begin{aligned} &+ m_4 \left(\frac{v_{S_4}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S_4} \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + m_5 \left(\frac{v_B}{\omega_1} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Методики визначення положення ланок механізму, у тому числі кута φ_0 , та їх швидкостей наведено в пп. 1.3 (приклади 1.1, 1.11).

Програма PR 3.4

$$\omega_1 := 15 \quad r := 0.05 \quad l := 0.25 \quad b := 0.12 \quad a := 0.25 \quad d := 0.15$$

$$l_{OS1} := 0.02 \quad l_{AS2} := 0.12 \quad l_{CS3} := 0.06 \quad l_{BS4} := 0.15 \quad m_1 := 2$$

$$m_2 := 5 \quad m_3 := 6 \quad m_4 := 8 \quad m_5 := 12 \quad J_{S1} := 0.03 \quad J_{S2} := 0.13$$

$$J_{S3} := 0.2 \quad J_{S4} := 0.25 \quad N := 360$$

$$\varphi_0 := \arccos \left[\frac{(r+1)^2 + a^2 - b^2}{2(r+1)a} \right] \quad \varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \cdot 2 \cdot \pi + \varphi_0$$

$$\Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1)} \quad \psi(\varphi_1) := \arcsin \left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)} \right)$$

$$\mu(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b} \right) \quad \delta(\varphi_1) := \arccos \left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)} \right)$$

$$\chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1) \quad \varphi_2(\varphi_1) := \delta(\varphi_1) + \psi(\varphi_1)$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1) \quad \varphi_4(\varphi_1) := \arcsin \left(\frac{-b \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1))}{d} \right)$$

$$x_D(\varphi_1) := a + b \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + d \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1)) \quad \varphi'_2(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \quad \varphi'_4(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_4(\varphi_1) \quad x'_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_D(\varphi_1)$$

$$\omega_2(\varphi_1) := \varphi'_2(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \omega_3(\varphi_1) := \varphi'_3(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \omega_4(\varphi_1) := \varphi'_4(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$x_A(\varphi_1) := r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad v_{S2}(\varphi_1) := \varphi'_2(\varphi_1) \cdot \omega_1$$

$$x_{S2}(\varphi_1) := x_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$y_{S2}(\varphi_1) := y_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) \quad x'_{S2}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S2}(\varphi_1)$$

$$y'_{S2}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S2}(\varphi_1) \quad v_{S2}(\varphi_1) := \omega_1 \cdot \sqrt{x'_{S2}(\varphi_1)^2 + y'_{S2}(\varphi_1)^2}$$

$$x_B(\varphi_1) := b \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \quad y_B(\varphi_1) := b \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)) \quad v_D(\varphi_1) := \omega_1 \cdot x'_D(\varphi_1)$$

$$v_{S3}(\varphi_1) := \omega_3 \cdot l_{CS3} \quad x_{S4}(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BS4} \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1))$$

$$y_{S4}(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BS4} \cdot \sin(\varphi_4(\varphi_1)) \quad y'_{S4}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_{S4}(\varphi_1)$$

$$x'_{S4}(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_{S4}(\varphi_1) \quad v_{S4}(\varphi_1) := \omega_1 \cdot \sqrt{x'_{S4}(\varphi_1)^2 + y'_{S4}(\varphi_1)^2}$$

$$J_{зв}(\varphi_1) := J_{S1} + m_1 \cdot l_{OS1}^2 + \left[\begin{array}{l} m_2 \cdot v_{S2}(\varphi_1)^2 + J_{S2} \cdot \omega_2(\varphi_1)^2 \dots \\ + (J_{S3} + m_3 \cdot l_{CS3}^2) \cdot \omega_3(\varphi_1)^2 \dots \\ + m_4 \cdot v_{S4}(\varphi_1)^2 + J_{S4} \cdot \omega_4(\varphi_1)^2 \dots \\ + m_5 \cdot v_D(\varphi_1)^2 \end{array} \right] \cdot (\omega_1^2)^{-1}$$

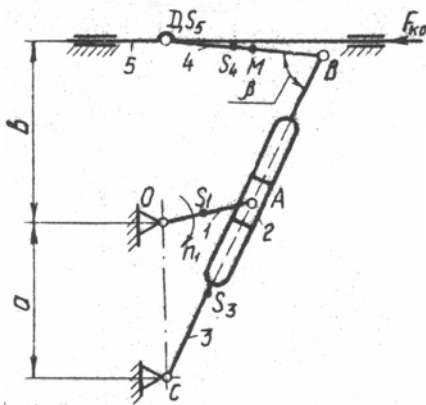
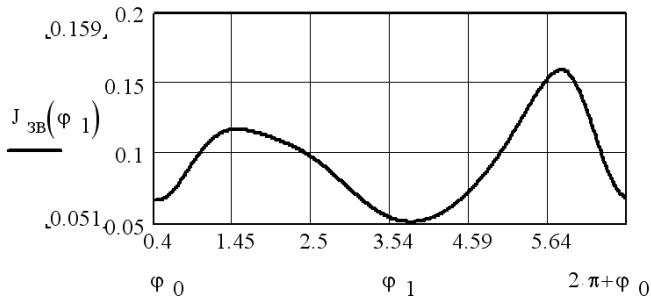


Рис. 3.4. Кінематична схема механізму поперечно-стругального верстату

Приклад 3.5. Побудувати діаграму зведеного моменту інерції механізму поперечно-стругального верстату (рис. 3.4.), який прикласти до кривошипа 1, якщо задано: кутову швидкість кривошипа $\omega_1 = 10 c^{-1}$, розміри ланок: $r = l_{OA} = 0,25$ м, $l_3 = l_{BC} = 1,2$ м, $l_4 = l_{BD} = 0,45$ м, $a = 0,7$ м, $b = 0,375$ м, $l_{OS1} = 0,55r$, $l_{CS3} = 0,3 \cdot l_3$, $l_{BS4} = 0,5 \cdot l_4$; маси ланок: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1,5$ кг, $m_3 = 8$ кг, $m_4 = 5$ кг, $m_5 = 22$ кг; їх моменти інерції – $J_{S1} = 0,03$ кг·м/с², $J_{S3} = 0,65$ кг·м/с², $J_{S4} = 0,35$ кг·м/с².

Програма PR 3.5

$$\omega_1 := 10 \quad r := 0.25 \quad l_3 := 1.2 \quad l_4 := 0.45 \quad a := 0.7 \quad b := 0.375$$

$$l_{OS1} := 0.55 \cdot r \quad l_{CS3} := 0.3 \cdot l_3 \quad l_{BS4} := 0.5 \cdot l_4 \quad m_1 := 2 \quad m_2 := 0.5 \quad m_3 := 8$$

$$m_4 := 5 \quad m_5 := 22 \quad J_{S1} := 0.03 \quad J_{S3} := 0.65 \quad J_{S4} := 0.35 \quad N := 36$$

$$\theta := 2 \cdot \text{asin}\left(\frac{r}{a}\right) \quad \theta = 41.85 \text{ deg} \quad \varphi_0 := \pi + \frac{\theta}{2} \quad \varphi'_0 := \frac{-\theta}{2}$$

$$\varphi'_0 = -20.925 \text{ deg} \quad \varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 - 2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \varphi_0 - 2\pi \quad \varphi_0 = 200.925 \text{ deg}$$

$$\varphi_3(\varphi_1) := \text{atan2}(r \cdot \cos(\varphi_1), a + r \cdot \sin(\varphi_1)) \quad l_{3x}(\varphi_1) := r \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3(\varphi_1))}$$

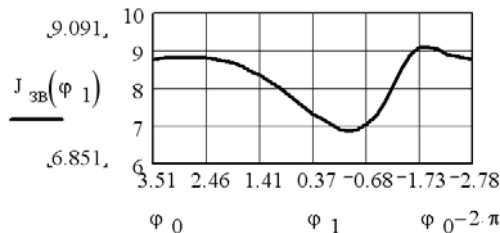
$$v_A(\varphi_1) := \omega_1 \cdot r \quad v_{S1}(\varphi_1) := \omega_1 \cdot l_{OS1} \quad \varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1)$$

$$\omega_3(\varphi_1) := \varphi'_3(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad \varphi_4(\varphi_1) := \pi + \text{asin}\left[\frac{(a + b - l_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)))}{l_4}\right]$$

$$\varphi'_4(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_4(\varphi_1) \quad \omega_4(\varphi_1) := \varphi'_4(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad x_B(\varphi_1) := l_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1))$$

$$y_B(\varphi_1) := l_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)) \quad x'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_B(\varphi_1) \quad y'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_B(\varphi_1)$$

$$J_{zB}(\varphi_1) := J_{S1} + m_1 \cdot l_{OS1}^2 + \left[\begin{array}{l} m_2 \cdot v_A(\varphi_1)^2 \dots \\ + (J_{S3} + m_3 \cdot l_{CS3}^2) \cdot \omega_3(\varphi_1)^2 \dots \\ + m_4 \cdot v_{S4}(\varphi_1)^2 + J_{S4} \cdot \omega_4(\varphi_1)^2 \dots \\ + m_5 \cdot v_D(\varphi_1)^2 \end{array} \right] \cdot [(\omega_1)^2]^{-1}$$



3.3. Рівняння руху механізму

При вивченні руху механізму ми звичайно припускали, що початкова ланка (головний вал машини) обертається із сталою швидкістю ($\omega_1 = \text{const}$). Цей закон руху можна одержати в тих випадках, коли структура механізму проста, наприклад у механізмах, що складаються тільки з обертових ланок. Для

здійснення такого руху потрібні цілком певні співвідношення між силами, що діють на механізм, і масами його ланок. Але закон зміни сил залежить від їх фізичної природи й до структури механізму не має відношення. Тому не можна встановити між силами, що діють на механізм, таке співвідношення, яке б забезпечило заданий закон його руху.

Закон руху будь-якої ланки механізму можна визначити лише тоді, коли відомі всі зовнішні сили або залежність цих сил від різних параметрів. Рушійні сили й сили виробничих опорів можуть залежати одночасно або окремо від положення ланки, яка прийнята за початкову, або від її кутової швидкості. Зведені моменти інерції $J_{зв}$ механізму чи машини можуть бути або сталими, або залежати від положень початкової ланки (п. 3.2).

Визначення закону руху механізму, що перебуває під дією прикладених до його ланок сил, і є задачею динамічного аналізу. Для механізму, що має один ступінь вільності, цю задачу можна вважати розв'язаною, коли буде встановлено закон руху однієї ланки. Звичайно за таку ланку вибирають вхідний вал робочої машини або вихідний вал двигуна. До цієї ланки, що приймається за ланку зведення, доцільно звести всі сили й моменти пар сил, прикладені до механізму, та маси й моменти інерції його ланок. Тоді замість розгляду всього комплексу сил, що діють на ланки механізму, можна розглянути сили, що діють лише на одну ланку – ланку зведення, наприклад кривошип OA (рис. 3.1), що перебуватиме під дією сили $F_{зв}$ або зведеного моменту $M_{зв}$ (у загальному випадку змінних) і матиме зведену масу $m_{зв}$, зосереджену ніби в точці A зведення, або зведений момент інерції $J_{зв}$ всіх ланок, який наданий ланці зведення OA . Закон руху всіх інших ланок механізму можна визначити, якщо відомий закон руху початкової ланки.

Для розв'язання цієї задачі динаміки (знаходження закону руху початкової ланки механізму) використовують рівняння руху, яке може бути записане в енергетичній або диференціальній формі.

Основою для складання рівняння руху механізму служить теорема про зміну кінетичної енергії, згідно з якою зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-який проміжок часу дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему протягом цього ж проміжку часу, тобто

$$\Delta T = T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (3.14)$$

де $T = \frac{m_{\text{св}} v_{\text{св}}^2}{2}$, $T_0 = \frac{m_{\text{св}0} v_{\text{св}0}^2}{2}$ – кінетична енергія механічної системи відповідно в

кінці і на початку проміжного часу, який розглядається; $\sum_{i=1}^n A_i$ – сума робіт усіх прикладених до системи сил; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – кількість сил. Тут $m_{зв}$, $m_{зв0}$ – зведені маси механізму відповідно в кінці і на початку проміжку часу, який розглядається; $v_{зв}$, $v_{зв0}$ – швидкості точки зведення, які відповідають цим положенням механізму.

Розглядаючи механізм чи машину як змінну систему, праву сторону

3.4. Дослідження руху механізмів методом Вітгенбауера

цього рівняння можна виразити через суму робіт рушійних сил A_p , корисних $A_{к.о}$ і шкідливих $A_{ш.о}$ опорів:

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_0 - A_{ei} - \dot{A}_{oi} . \quad (3.15)$$

Крім цього, якщо звести всі сили й маси до вибраної ланки зведення, рівняння (3.14) з урахуванням (3.15) можна записати так:

$$\frac{m_{ca} v_{ca}^2}{2} - \frac{m_{ca0} v_{ca0}^2}{2} = A_0 - A_{ei} - \dot{A}_{oi} . \quad (3.16)$$

При обертovому русі ланки зведення рівняння (3.16) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{J_{ca} \omega^2}{2} - \frac{J_{ca0} \omega_0^2}{2} = A_0 - A_{ei} - \dot{A}_{oi} , \quad (3.17)$$

де $J_{зв}$, $J_{зв0}$ – зведені моменти інерції механізму; ω , ω_0 – кутові швидкості ланки зведення відповідно в кінці і на початку проміжку часу, який розглядається.

Теорема про зміну кінетичної енергії, записана у вигляді рівнянь (3.16) або (3.17), має назву рівняння руху механізму в енергетичній формі (у формі інтеграла енергії).

Враховуючи, що роботу зведених рушійних сил і сил опору можна виразити через зведений момент $M_{зв} = M_p + M_o$ рушійних сил і сил опору, який прикладаємо до ланки зведення,

$$\sum_{i=1}^n A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi , \quad (3.18)$$

рівняння (3.17) набуває вигляду

$$\frac{J_{зв} \omega^2}{2} - \frac{J_{зв0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi , \quad (3.19)$$

де φ – узагальнена координата (кут повороту ланки зведення); φ_0 – значення кута φ на початку руху.

3.4. Дослідження руху механізмів методом Вітгенбауера

Метод Вітгенбауера впливає з відомої залежності кінетичної енергії механізму

$$T = J_{зв} \omega^2 / 2, \quad (3.20)$$

де $J_{зв}$ — зведений момент інерції; ω — кутова швидкість ланки зведення механізму (машини). Залежність (3.20) можна записати так:

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{J_{зв}}} . \quad (3.21)$$

Таким чином, кутову швидкість ланки зведення в кожному положенні механізму можна визначити, якщо відомо відношення його кінетичної енергії

до зведеного моменту інерції, взятих для цього ж положення. Інакше кажучи, треба мати залежність $T=T(J_{зв})$, яка встановлює зв'язок між кінетичною енергією T і зведеним моментом інерції $J_{зв}$. Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Спочатку будують діаграми кінетичної енергії $T=T(\varphi)$ і зведеного моменту інерції $J_{зв}=J_{зв}(\varphi)$ залежно від кута повороту ланки зведення, потім, на основі цих діаграм, будують діаграму $T=T(J_{зв})$, виключивши спільний параметр φ . Якщо побудова діаграми $J_{зв}=J_{зв}(\varphi)$ не становить труднощів – це питання ми розглянули вище (п. 3.2), то для побудови діаграми $T=T(\varphi)$ необхідно мати діаграми зведених моментів рушійних сил $M_p=M_p(\varphi)$ і сил опору $M_o=M_o(\varphi)$. Такі діаграми будують на основі механічних характеристик двигунів і робочих машин. Практично це досить складні задачі, які, як правило, розв'язуються з певним припущенням.

Нехай задано діаграми зведених моментів рушійних сил $M_p=M_p(\varphi)$ і сил опору $M_o=M_o(\varphi)$ як функції кута повороту початкової ланки (рис. 3.5, а). Маючи такі діаграми, можна знайти роботу рушійних сил і сил опору. Робота зведеного моменту M_p на вибраному інтервалі визначається за формулою

$$A_p = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_p d\varphi, \quad (3.22)$$

де кут φ – кут повороту ланки зведення. Величина цієї роботи виражається в масштабі площею, що обмежена кривою $M_p=M_p(\varphi)$, віссю φ і крайніми ординатами вибраного інтервалу $\Delta\varphi$. Робота зведеного моменту M_o виражається фор-

мулою $A_o = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_o d\varphi$ і площею, що обмежена кривою $M_o = M_o(\varphi)$, віссю φ і

крайніми ординатами інтервалу $\Delta\varphi$.

Приріст кінетичної енергії механізму за будь-який проміжок часу, що виражається рівнянням

$$\Delta T = A_p - A_o, \quad (3.23)$$

дорівнює різниці площі кривих $M_p = M_p(\varphi)$ і $M_o = M_o(\varphi)$, помноженій на відповідні масштаби моментів μ_M і кута повороту μ_φ . Наприклад, на ділянці 1–2 (рис. 3.5, а) робота зведеного моменту M_p виражається площею (11'2'2) мм², помноженою на масштаби μ_M і μ_φ , а робота зведеного моменту M_o – площею (11''2''2), помноженою на ці самі масштаби. Приріст кінетичної енергії ΔT_{12} визначається тоді площею (1''1'2'2''), помноженою на ті самі масштаби, тобто

$$\Delta T_{12} = A_p - A_o = \mu_M \mu_\varphi [\text{пл. (11'2'2)} - \text{пл. (11''2''2)}] = \mu_M \mu_\varphi \text{пл. (1'2'2'1'')}.$$

Приріст кінетичної енергії на ділянці 2–3 пропорційний площі (2''2'3'3''), на ділянці 3–4 – площі (3''3'4'4'') і т. д.

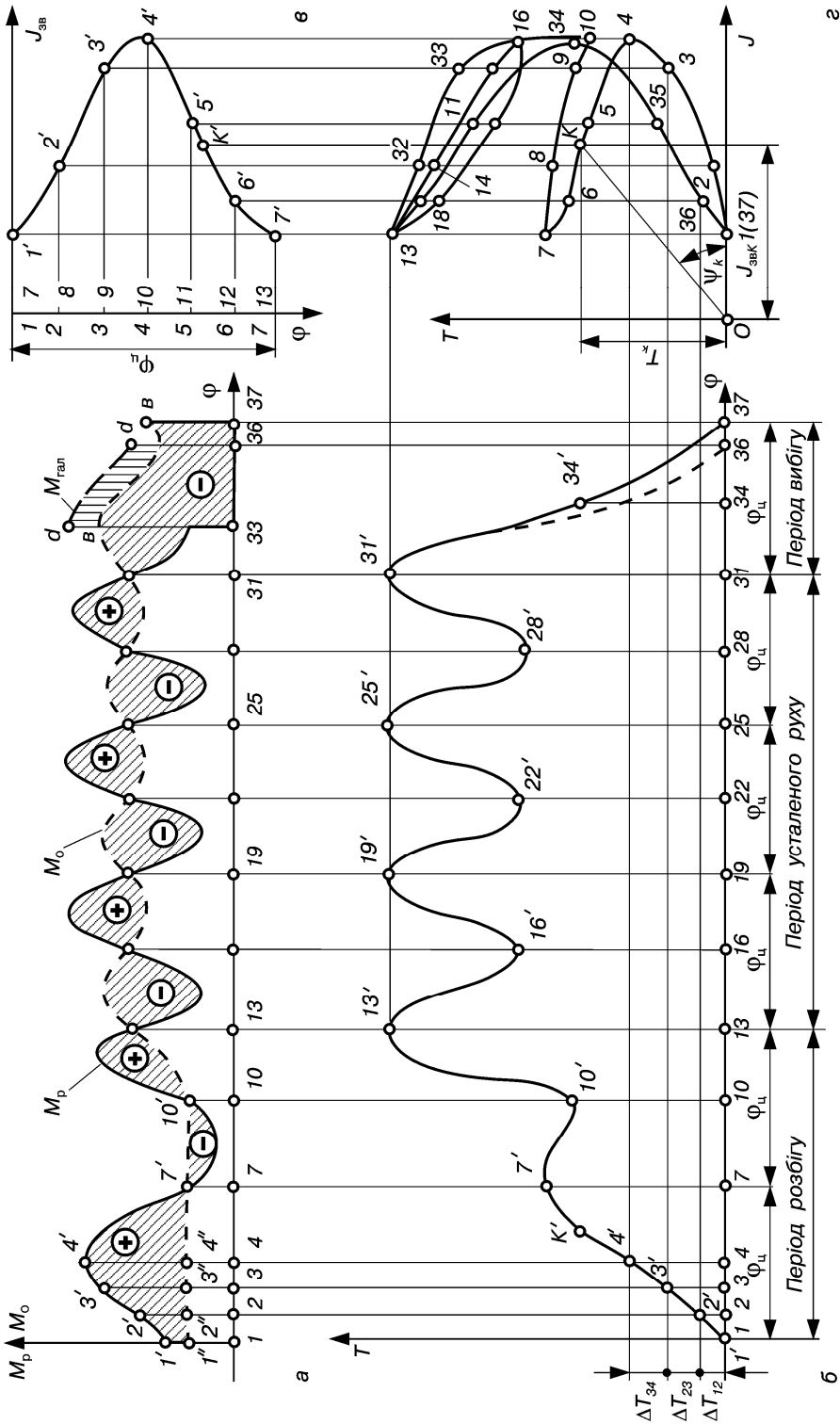


Рис. 3.5. Побудова кривої Віттенбауера

Таким чином, зміна кінетичної енергії завжди пропорційна площі, яка знаходиться між кривими моментів рушійних сил і сил опору (на рис. 3.4, а ці площі заштриховані). Цим площам треба приписувати знак “+” або “-” залежно від того, яка робота буде більша: моменту рушійних сил чи моменту сил опору. Так, на інтервалі 1–7 крива моменту рушійних сил розміщена вище від кривої моментів сил опору, отже, приріст кінетичної енергії додатний і, навпаки, на інтервалі 7–10 приріст кінетичної енергії від’ємний і т. д. За весь час роботи механізму від точки 1 до точки 37 приріст кінетичної енергії дорівнює нулю, тобто сума всіх заштрихованих площадок зі знаком “+” повинна дорівнювати сумі площадок із знаком “-”, оскільки в момент пуску механізму і момент його зупинки швидкість ланки зведення дорівнює нулю. Така сама рівність повинна мати місце і за час усталеного руху (13–31), оскільки в цьому випадку швидкість ланки зведення механізму через кожний цикл повертається до попереднього значення.

На рис. 3.5, а умовно показано три повних цикли $\varphi_{ц}$ усталеного руху. Практично число цих циклів може бути різним залежно від часу безперервної роботи машини.

Підраховавши величини вказаних вище площадок, можна побудувати діаграму $T=T(\varphi)$ зміни кінетичної енергії ланки зведення у функції кута повороту φ (рис. 3.5, б). Побудову почнемо з першого інтервалу 1–2. Обчислюємо площу (1’2’2’’1’’) у квадратних міліметрах. Нехай ця площа дорівнює S_{12} (мм²). Тоді приріст кінетичної енергії на цьому інтервалі визначається за формулою

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_M \mu_\varphi S_{12}.$$

Оскільки механізм почав рухатися з положення, що відповідає точці 1, то очевидно, що початковий запас кінетичної енергії T_1 дорівнює нулю і повний запас кінетичної енергії механізму в положенні 2 виразиться величиною $T_2 = \Delta T_{12}$. Цю величину відкладаємо у вигляді відрізка 2–2’ в масштабі $\mu_T = \mu_M \mu_\varphi$ на ординаті, проведеної у точці 2 (рис. 3.4, б). Маємо

$$T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{12} = \mu_T (2 - 2').$$

Далі обчислюємо наступну площадку $S_{23} = (2''2'3'3'')$, мм². З попереднього маємо

$$\Delta T_{23} = T_3 - T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{23} = \mu_T (3'' - 3'),$$

тобто приріст кінетичної енергії на ділянці 2–3 виражається площею (2''2'3'3'') [мм²], помноженою на добуток масштабів μ_M і μ_φ . Знайдену величину ΔT_{23} відкладаємо на ординаті в точці 3 у вигляді відрізка 3'' – 3' у масштабі μ_T , додаючи його до попереднього відрізка – (3 – 3') = (2 – 2') + (3'' – 3') і т. п. Ординати діаграми кінетичної енергії збільшуються до положення 7, де в точці 7' вона має вершину, що відповідає одному з максимумів кінетичної енергії. Далі на ділянці 7–10 крива опускається, оскільки заштрихована площа, що міститься між цими точками осі абсцис, має знак “-” ($M_o > M_p$). Починаючи з точки 10, крива кінетичної енергії підіймається до положення 13, де ця крива знов має вершину в точці 13' і т. п. На ділянці 13–31, де діаграма описує усталений рух, крива повторюється через

кожний цикл руху механізму, що відповідає куту φ_{Π} , причому ордината її досягає то свого максимуму, то свого мінімуму. У положенні 31 ордината кривої $T=T(\varphi)$ має останній максимум, після чого спадає завдяки наявності на ділянці 33–37 тільки сил опору, а на ділянці 31–33 $M_o > M_p$. Точка 37 відповідає моменту зупинки механізму, тобто повному вичерпанню кінетичної енергії, зібраної в період розгону. Очевидно, що витрати нагромадженої кінетичної енергії можна прискорити, ввівши додаткові опори (гальма). На рис. 3.4, б гальмівний момент $M_{гал}$ зображено штриховою лінією.

Діаграму зведених моментів інерції досить побудувати тільки для одного циклу φ_{Π} роботи механізму (рис. 3.5, в), оскільки $J_{зв}$ є функцією положень механізму φ (див. п. 3.2). Для зручності наступної побудови кривої Віттенбауера діаграму $J_{зв}=J_{зв}(\varphi)$ повернуто на 90° .

Маючи діаграми $T=T(\varphi)$ і, будуємо діаграму $T=T(J_{зв})$ (рис. 3.5, г). Для цього на осі ординат відкладаємо значення кінетичної енергії, що визначаються відрізками 1–1', 2–2', 3–3' і т. п. діаграми $T=T(\varphi)$, а по осі абсцис – значення зведеного моменту інерції, що визначається відрізками 1–1', 2–2', 3–3' і т. п. діаграми $J_{зв}=J_{зв}(\varphi)$. Знайдені точки 1, 2, 3 і т. п. у системі координат $T-J_{зв}$ послідовно з'єднуємо плавною кривою, дістаємо криву кінетичної енергії як функцію зведеного моменту інерції, тобто залежність $T=T(J_{зв})$. Цю криву називають кривою Віттенбауера за ім'ям австрійського вченого, який вперше розглянув цей метод.

За допомогою кривої Віттенбауера легко встановити залежність кутової швидкості ланки зведення у функції кута повороту φ .

Виберемо на кривій $T=T(J_{зв})$, яку-небудь точку K і з'єднаємо цю точку з точкою O – початком координат (рис. 3.5, г). Позначимо кут, утворений прямою OK з віссю абсцис, ψ_K . Оскільки по осі абсцис відкладено зведений момент інерції $J_{звK}$ у масштабі μ_J , що відповідає точці K , по осі ординат – кінетичну енергію T_K , що відповідає тій самій точці K у масштабі μ_T , то очевидно, що відношення цих величин дасть тангенс кута ψ_K нахилу кривої OK до осі $J_{зв}$, тобто

$$\frac{T_K}{J_{звK}} = \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_K . \quad (3.24)$$

Тоді швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається точкою K , знаходимо за формулою (3.21), тобто

$$\omega_K = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_K} . \quad (3.25)$$

Аналогічно визначають швидкості ланки зведення в інших положеннях механізму. Використовуючи ці значення, можна побудувати графік кутової швидкості ω ланки зведення як функції кута φ , тобто графік $\omega = \omega(\varphi)$ (рис. 3.6).

Графік часу t руху як функції кута φ можна побудувати, якщо використати наступну формулу

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} . \quad (3.26)$$

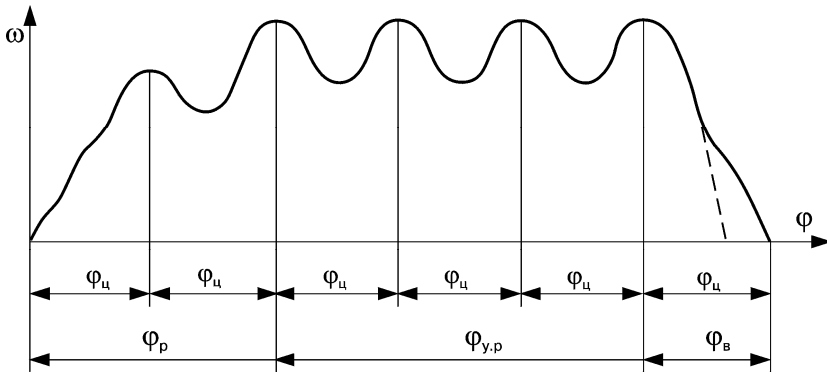


Рис. 3.6. Приклад діаграми кутової швидкості ланки зведення

Інтеграл у правій частині формули (3.26) можна визначити графічно, якщо побудувати графік величини $\omega(\varphi)$ як функцію кута φ , оскільки відома функція $\omega = \omega(\varphi)$. За графіками $\omega = \omega(\varphi)$ і $t = t(\varphi)$ можна побудувати графік $\omega = \omega(t)$. Кутове прискорення ε ланки зведення визначається диференціюванням функції $\omega = \omega(t)$.

Знаючи кутову швидкість ω і кутове прискорення ε ланки зведення, можна визначити швидкості, прискорення і сили інерції окремих ланок, а також виконати повний силовий розрахунок механізму в умовах нерівномірного обертового руху ланки зведення.

3.5. Нерівномірність і регулювання руху механізмів і машин

Одною з важливих задач динаміки механізмів і машин є задача про визначення найвигідніших співвідношень сил, мас і швидкостей ланок механізмів, які забезпечують заданий режим руху механізму або машини.

У загальному випадку швидкості початкової ланки механізму при усталеному русі механізму є змінними величинами. Коливання швидкостей цієї ланки спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують загальний ККД машини і надійність її роботи. Крім цього, такі коливання в ланках механізмів і машин небажані з точки зору як міцності цих ланок, так і втрати потужності, витраченої на ці пружні коливання. Нарешті, коливання швидкостей можуть погіршити той технологічний процес, який виконує машина.

Коливання швидкостей початкової ланки за час усталеного руху бувають двох різних типів. Справді, як було встановлено вище, у більшості машин тільки за повний цикл усталеного руху робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору. В середині ж циклу немає рівності цих робіт і, отже, початкова ланка машини рухається всередині циклу нерівномірно. Оскільки через кожний повний цикл часу усталеного руху кінетична енергія машини набуває початкового значення, то очевидно, що швидкості початкової ланки машини також

3.6. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машини

періодично повторюватимуться з тим самим періодом. Такі коливання швидкостей назвемо періодичними.

Отже, періодичними коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

Крім періодичних коливань швидкостей у машині можуть бути і неперіодичні коливання швидкостей, що залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т. п. Така раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини, і оскільки ці коливання не мають певного циклу, то такі коливання швидкості машини назвемо неперіодичними. У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Колівання швидкості під час усталеного руху можуть досягти такої величини, яка неприпустима з точки зору забезпечення всіх належних умов роботи машини. Тоді може виникнути питання про регулювання у наперед заданих межах величини цих коливань. Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини або механізму має велике значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

3.6. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машини

Для зручності вивчення періодичних коливань під час усталеного руху запровадимо поняття *середньої швидкості ланки зведення* ω_c (або v_c) механізму чи машини і далі розглянемо задачу для цього часу руху.

Позначимо шлях, який проходить точка A , вибрана на ланці зведення, за один цикл її руху від положення i до положення k через s . Назвемо дійсною середньою швидкістю $v_{c,d}$ швидкість такого рівномірного руху, при якому точка A пройшла б шлях s за той самий проміжок часу t , який потрібний і при нерівномірному русі, тобто $v_{c,d} = s/t$.

Оскільки $dt = ds/v$, то

$$t = t_k - t_i = \int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}, \quad (3.27)$$

звідки

$$v_{\text{н.ä}} = \frac{s}{\int_{s_i}^{s_k} ds / dt}. \quad (3.28)$$

Дійсну середню швидкість часто замінюють середньою арифметичною швидкістю

$$v_{\text{н.а}} = \frac{v_{\text{max}} + v_{\text{min}}}{2}, \quad (3.29)$$

де v_{max} і v_{min} – максимальні й мінімальні значення швидкості точки A (рис. 3.6). Для машин з великою рівномірністю ходу різниця між цими значеннями настільки мала, що нею можна знехтувати.

У паспорті двигуна або робочої машини така умовна середня швидкість звичайно вказана; в цьому разі її, як правило, називають номінальною швидкістю (від латинського *nomen*, що означає ім'я, назва).

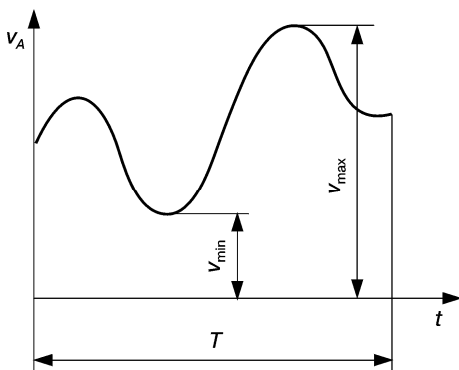


Рис. 3.7. Приклад діаграми швидкості руху ланки

Для механізмів з малою рівномірністю руху краще користуватися дійсною середньою швидкістю. Нерівномірність руху механізму чи машини характеризується так званим коефіцієнтом нерівномірності руху δ , який виражається відношенням різниці максимального і мінімального значення швидкості точки A (рис. 3.7) до її середнього значення, тобто

$$\delta = \frac{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}{v_c} \dots \quad (3.30)$$

Очевидно, що чим менша різниця між v_{max} і v_{min} , тим рівномірніше рухається ланка зведення.

Задача регулювання руху механізмів або машин в період їх усталеного руху зводиться до підбору такого співвідношення мас ланок механізмів і діючих на них сил, при якому коефіцієнт нерівномірності руху δ не перевищував би наперед заданого значення. На практиці величина δ коливається в широких межах.

При обертовому русі ланки зведення зручно середню швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини виражати через кути повороту і кутові швидкості цієї ланки. Тоді за аналогією з рівняннями (3.28)–(3.30) матимемо:

для дійсної середньої кутової швидкості

$$\omega_{\text{н.а}} = \varphi / \int_{s_i}^{s_k} \frac{d\varphi}{\omega}; \quad (3.31)$$

для середньої арифметичної кутової швидкості

$$\omega_{\text{н.а}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2}; \quad (3.32)$$

для коефіцієнта нерівномірності руху

3.6. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машини

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_c} \quad (3.33)$$

Проте треба мати на увазі, що коефіцієнт нерівномірності руху характеризує тільки перепад кутових швидкостей ланки зведення в межах від ω_{\min} до ω_{\max} , але не характеризує динаміки руху цієї ланки всередині одного повного періоду усталеного руху. Так, на рис. 3.8, а, б показано дві діаграми залежності $\omega = \omega(\varphi)$,

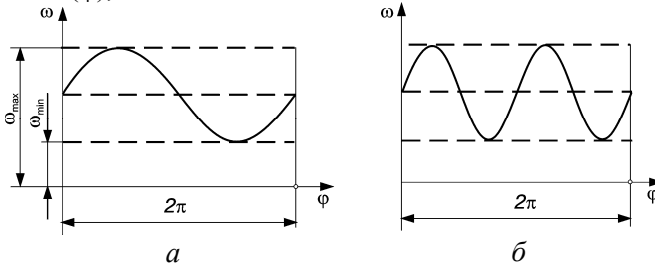


Рис. 3.8. Діаграми кутових швидкостей ланки зведення з різними прискореннями

в яких ω_{\max} і ω_{\min} рівні, але кутові прискорення $\varepsilon = d\omega/dt$ на рис. 3.8, б значно більші, ніж на рис. 3.8, а. Динамічні характеристики механізмів з цими значеннями ε різні. Для характеристики динамічних властивостей механізму або машини може бути ви-

користаний так званий **коефіцієнт динамічності** k_d , під яким розуміють відношення екстремального (найбільшого) значення кутового прискорення ε_{\max} до квадрата середньої кутової швидкості ω_c :

$$k_d = \varepsilon_{\max} / \omega_c^2 \quad (3.34)$$

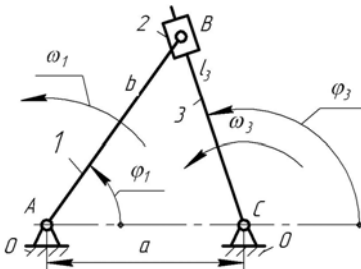


Рис. 3.9. Двокривошипний кулісний механізм

Приклад 3.6. Побудувати діаграми коефіцієнтів нерівномірності та динамічності руху ланки 3 двокривошипного кулісного механізму залежно від зміни міжосьової відстані (рис.3.9). Кутову швидкість кривошипа 1 прийняти $\omega_1 = 1$.

Розв'язання. Для визначення основних кінематичних параметрів механізму використаємо замкнений векторний контур ABC, з якого можна знайти кут φ_3 , який визначає положен-

ня куліси 3:

$$\text{при } 0 < \varphi_1 < \pi \quad \varphi_3 = \arctg \frac{b \sin \varphi_1}{-a + b \cos \varphi_1}; \quad (3.35)$$

$$\text{при } \pi < \varphi_1 < 2\pi \quad \varphi_3 = \arctg \frac{b \sin \varphi_1}{-a + b \cos \varphi_1} + 2\pi. \quad (3.36)$$

Диференціюючи рівняння (3.35) і (3.36) за узагальненою координатою механізму φ_1 , одержимо залежності для визначення аналогів кутової швидкості куліси $\varphi'_3 = d\varphi_3/d\varphi_1$. Повторно диференціюючи ці рівняння за узагальненою координатою механізму φ_1 , одержимо залежності для визначення аналогів кутового прискорення куліси $\varphi''_3 = d\varphi'_3/d\varphi_1 = d^2\varphi_3/d^2\varphi_1$ при різних значення a .

Тоді, визначивши максимальні значення аналогів швидкостей та прискорень і використавши залежності (3.33) і (3.34), знаходимо коефіцієнти нерівномірності та динамічності руху ланки 3 (при $\omega_1 = 1$ $\omega_3 = \varphi'_3$, а $\varepsilon_3 = \varphi''_3$).

Програма PR 3.6

$$b := 1 \quad a := 0.2 \quad \omega_1 := 1 \quad a := 0.1, 0.02 \dots 0.99 \quad N := 360$$

$$\varphi_1 := 0, 0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi \quad \varphi_3(\varphi_1, a) := \text{atan2}(a + b \cdot \cos(\varphi_1), b \cdot \sin(\varphi_1))$$

$$\varphi_3(\varphi_1, a) := \begin{cases} R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1, a) & \text{if } 0 \leq \varphi_1 \leq \pi \\ R \leftarrow \varphi_3(\varphi_1, a) + 2\pi & \text{if } \pi < \varphi_1 \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi'_3(\varphi_1, a) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1, a) \quad \varphi''_3(\varphi_1, a) := \frac{d^2}{d\varphi_1^2} \varphi_3(\varphi_1, a)$$

$$\max_h(a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow \varphi'_3(j, a) \\ \max(h) \end{cases}$$

$$a := 0.01, 0.05 \dots 0.9$$

$\max_h = \text{function}$

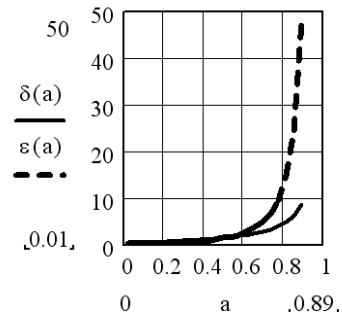
$$\min_h(a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow \varphi'_3(j, a) \\ \min(h) \end{cases}$$

$\min_h = \text{function}$

$$\delta(a) := \max_h(a) - \min_h(a)$$

$$\max_{h'}(a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow |\varphi''_3(j, a)| \\ \max(h) \end{cases}$$

$$\max_{h'} = \text{function} \quad \varepsilon(a) := \max_{h'}(a)$$



Приклад 3.7. Побудувати діаграми коефіцієнтів нерівномірності та ди-

намічності руху ланки 3 зміщеного двокривошипного кулісного механізму залежно від зміни міжосьової відстані та ексцентриситету (зміщення) e (рис.3.10). Кутову швидкість кривошипа 1 прийняти $\omega_1 = 1$.

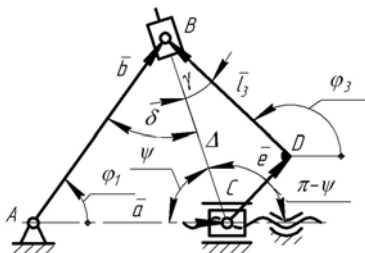


Рис. 3.10. Зміщений двокривошипний кулісний механізм

Розв’язання. Для визначення основних кінематичних параметрів механізму використаємо замкнений векторний контур $ABDC$, з якого можна знайти кут φ_3 , який визначає положення куліси 3.

Алгоритм розрахунків наступний:

1) з $\triangle ABC$ знаходимо довжину допоміжного відрізка $\Delta = BC$

$$\Delta = BC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi_1}; \quad (3.37)$$

2) довжину куліси l_3 можна знайти з $\triangle BCD$:

$$l_3 = \sqrt{\Delta^2 - e^2}; \quad (3.38)$$

3) знаходимо значення кутів:

$$\left. \begin{aligned} \delta = \arccos \frac{b^2 + \Delta^2 - a^2}{2b\Delta}, \quad \gamma = \arcsin \frac{e}{\Delta}, \quad \psi = \pi - \varphi_1 - \delta \quad (0 \leq \varphi_1 \leq \pi), \\ \psi = \pi - \varphi_1 + \delta \quad (\pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi), \quad \varphi_3 = \pi - \psi + \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Диференціюючи останнє рівняння (3.39) за узагальненою координатою механізму φ_1 , одержимо залежності для визначення аналогів кутової швидкості куліси 3 $\varphi'_3 = d\varphi_3/d\varphi_1$. Повторно диференціюючи це рівняння за узагальненою координатою механізму φ_1 , одержимо залежності для визначення аналогів кутового прискорення куліси 3 $\varphi''_3 = d\varphi'_3/d\varphi_1 = d^2\varphi_3/d^2\varphi_1$ при різних значення a і e .

Тоді, визначивши максимальні значення аналогів швидкостей та прискорень і використавши залежності (3.33) і (3.34), знаходимо коефіцієнти нерівномірності та динамічності руху ланки 3 (при $\omega_1 = 1$ $\omega_3 = \varphi'_3$, а $\varepsilon_3 = \varphi''_3$). На основі одержаних даних будемо відповідні діаграми.

Програма PR 3.7

$r := 1$ $a := 0.1, 0.2 \dots 0.99$ $e := 0, 0.1 \dots 0.9$ $\omega_1 := 1$ $N := 36$

$$\varphi_1 := 0, 0 + 2 \frac{\pi}{N} \dots 2\pi \quad \Delta(\varphi_1, a) := \sqrt{a^2 + r^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\delta(\varphi_1, a) := \arccos \left[\frac{\left(r^2 + \Delta(\varphi_1, a)^2 - a^2 \right)}{2 \cdot r \cdot \Delta(\varphi_1, a)} \right] \quad \alpha(\varphi_1) := \frac{\pi}{2} + \varphi_1$$

$$\psi(\varphi_1, a) := \alpha(\varphi_1) - \delta(\varphi_1, a) \quad \Psi(\varphi_1, a) := \begin{cases} R \leftarrow \psi(\varphi_1, a) & \text{if } 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leftarrow \psi(\varphi_1, a) + 2 \cdot \delta(\varphi_1, a) & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3\pi}{2} \\ R \leftarrow \psi(\varphi_1, a) & \text{if } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi_3(\varphi_1, e, a) := \psi(\varphi_1, a) - \gamma(\varphi_1, e, a) \quad \varphi'_3(\varphi_1, e, a) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1, e, a)$$

$$\varphi_3(\varphi_1, e, a) := \psi(\varphi_1, a) - \gamma(\varphi_1, e, a)$$

$$\varphi'_3(\varphi_1, e, a) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1, e, a)$$

$$\varphi''_3(\varphi_1, e, a) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_3(\varphi_1, e, a)$$

$$\max_H(e, a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow \varphi'_3(j, e, a) \\ \max(h) \end{cases}$$

$\max_H = \text{function}$

$$\min_H(e, a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow \varphi'_3(j, e, a) \\ \min(h) \end{cases}$$

$\min_H = \text{function}$

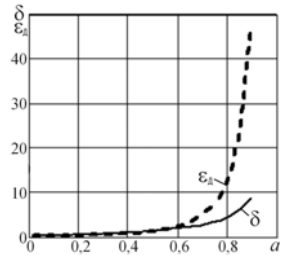
$$\delta(e, a) := \max_H(e, a) - \min_H(e, a)$$

$$\max_H'(e, a) := \begin{cases} \text{for } j \in 0.01, 0.02 \dots 2 \cdot \pi \\ h_{100 \cdot (j-0.01)} \leftarrow 0 \text{ on error } |\varphi''_3(j, e, a)| \\ \max(h) \end{cases}$$

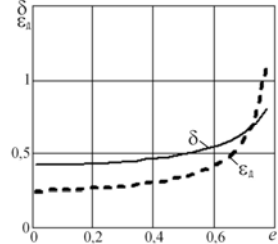
$$\max_H' = \text{function} \quad \varepsilon(e, a) := \max_H'(e, a)$$

$$\varepsilon(0.2, 0.2) = 0.257$$

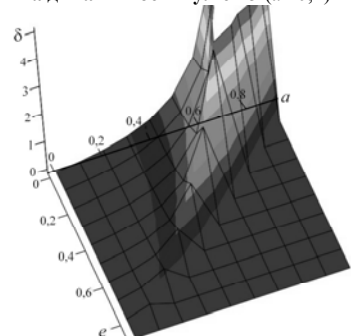
$$e' := \begin{cases} n \leftarrow 10 \\ \text{for } i \in 0 \dots n - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0 \dots n - 1 \\ \quad \quad \left| \text{Result}_{i,j} \leftarrow 0 \text{ on error } \varepsilon \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \text{ if } \frac{i+j}{n} < 1 \right. \\ \quad \quad \left. \text{Result}_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \right. \\ \text{Result} \end{cases}$$



Діаграми зміни коефіцієнтів нерівномірності руху та динамічності кулі 3 ($e=0$)



Діаграми зміни коефіцієнтів нерівномірності руху та динамічності кулі 3 ($a=0,2$)



Залежність коефіцієнтів нерівномірності руху вихідної ланки від величини міжосової відстані a та зміщення e

3.7. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху машини за допомогою кривої Віттенбауера

Якщо побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, неважко визначити значення коефіцієнта нерівномірності руху під час усталеного руху. На ділянці усталеного руху ця крива має бути замкненою, оскільки ті самі значення величин T і $J_{зв}$ періодично повторюються через кожний цикл. На рис. 3.11 зображено частину кривої $T = T(J_{зв})$, що відповідає періоду усталеного руху.

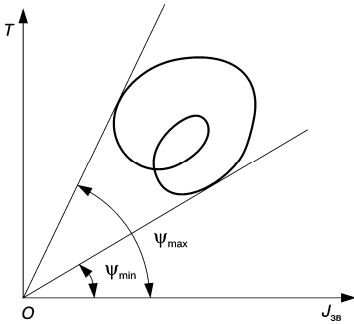


Рис. 3.11. Крива Віттенбауера для одного періоду усталеного руху

Для визначення коефіцієнта δ необхідно мати значення максимальної ω_{max} і мінімальної ω_{min} швидкості ланки зведення (3.31), (3.32). З формули (3.31) випливає, що максимальна кутова швидкість ω_{max} за час усталеного руху відповідає максимальному значенню тангенса кута ψ_{max} (див. рис. 3.11), мінімальна кутова швидкість ω_{min} відповідає мінімальному значенню того самого кута ψ_{min} . Для визначення цих кутів проводимо з точки O до кривої $T=T(J_{зв})$ дві дотичні: під найбільшим ψ_{max} і найменшим ψ_{min} кутами. Тоді згідно з рівнянням (3.31) можна записати

$$\omega_{max}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \operatorname{tg} \psi_{max}; \quad \omega_{min}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \operatorname{tg} \psi_{min}, \quad (3.40)$$

де $\mu_T, \mu_{J_{зв}}$ – масштаби кінетичної енергії і зведеного моменту інерції.

Помноживши чисельник і знаменник правої частини формули (3.33) на $(\omega_{max} + \omega_{min})$, матимемо

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_n} \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_n^2}, \quad (3.41)$$

оскільки $\omega_c = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$.

Підставляючи у формулу (3.41) вирази (3.40), маємо

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \frac{\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}}{\omega_n^2}. \quad (3.42)$$

Кути ψ_{max} і ψ_{min} визначаються безпосередньо з рисунка, а величина ω_c – за формулами (3.31) або (3.32).

Коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини можна також визначити за діаграмою швидкостей, побудованою на рис. 3.6. Для цього знаходимо v_{max} і v_{min} і підставляємо їх значення у формулу (3.30).

3.8. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

Як показано вище, за допомогою кривої Віттенбауера $T = T(J_{зв})$ для періоду усталеного руху можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини. Тоді, очевидно, якщо при заданій зведеній масі і кінетичній енергії відома залежність між ними, тобто побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, завжди можна з'ясувати питання, як мають бути змінені ці величини (зведений момент інерції $J_{зв}$ і кінетична енергія T) для забезпечення заданого коефіцієнта нерівномірності δ . Для розв'язання цієї задачі запишемо формули, які дають змогу визначити значення кутів ψ_{\max} і ψ_{\min} (див. рис. 3.11), що відповідають заданим δ і діаграмі $T = T(J_{зв})$.

Розв'язуючи рівняння (3.32) і (3.33) відносно ω_{\min} і ω_{\max} , знаходимо

$$\omega_{\max} = \omega_{\bar{n}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right); \quad \omega_{\min} = \omega_{\bar{n}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (3.43)$$

Підносячи праві і ліві частини цих рівнянь до квадрата, запишемо

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{\bar{n}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\bar{n}}^2 (1 + \delta); \quad \omega_{\min}^2 = \omega_{\bar{n}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\bar{n}}^2 (1 - \delta). \quad (3.44)$$

При малих значеннях коефіцієнтів δ членом $\delta^2/4$ можна знехтувати. Для машин з великою нерівномірністю δ цей член треба враховувати. Підставляючи в рівняння (3.38) вирази для ω_{\max}^2 і ω_{\min}^2 з формул (3.44), після відповідних перетворень дістаємо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{\max} &= \frac{\mu_{J_{\text{св}}} \omega_{\bar{n}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right)}{2\mu_{\phi}} \approx \frac{\mu_{J_{\text{св}}} \omega_{\bar{n}}^2 (1 + \delta)}{2\mu_{\phi}}; \\ \operatorname{tg} \psi_{\min} &= \frac{\mu_{J_{\text{св}}} \omega_{\bar{n}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right)}{2\mu_{\phi}} \approx \frac{\mu_{J_{\text{св}}} \omega_{\bar{n}}^2 (1 - \delta)}{2\mu_{\phi}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

За допомогою рівнянь (3.45) для заданої кутової швидкості $\omega_{\text{с}}$ і для будь-якого значення коефіцієнта нерівномірності руху δ можна визначити відповідні кути ψ_{\max} і ψ_{\min} .

Покажемо, як на практиці використати ці залежності. Нехай для деякого механізму або машини буде побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, яку в нашому випадку досить побудувати тільки для періоду усталеного руху (рис. 3.11). Провівши з початку координат O до кривої Віттенбауера дотичні під кутами ψ_{\max} і ψ_{\min} , знайдемо за формулою (3.42) коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини.

Припустимо, що коефіцієнт δ буде більшим від допустимого значення $\delta_{\text{доп}}$ для заданого типу машин. Тоді, підставивши в залежність (3.39) замість δ допустиме його значення $\delta_{\text{доп}}$, запишемо значення кутів ψ'_{\max} і ψ'_{\min} , під якими

3.8. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

проводимо дотичні до кривої Віттенбауера (рис. 3.12), і знайдемо їх точку перетину O' . Очевидно, якби початок координат діаграми знаходився в точці O' , то коефіцієнт нерівномірності δ дорівнював би $\delta_{\text{доп}}$, тобто якщо перейти від системи координат $TOJ_{\text{зв}}$ до $T'O'J'_{\text{сд}}$, то задача про регулювання руху механізму або машини була б розв'язана. При цьому переході кінетична енергія збільшується на величину T_0 , а зведений момент інерції – на величину J_0 . Відрізки x і y , виміряні в міліметрах, зображують у вибраних масштабах μ_j μ_δ величини додаткового зведеного моменту інерції J_0 і додаткової кінетичної енергії T_0 , які необхідні для того, щоб машина працювала з вибраним коефіцієнтом нерівномірності $\delta_{\text{доп}}$. Отже,

$$J_0 = x\mu_j; \dot{O}_0 = y\mu_T. \quad (3.46)$$

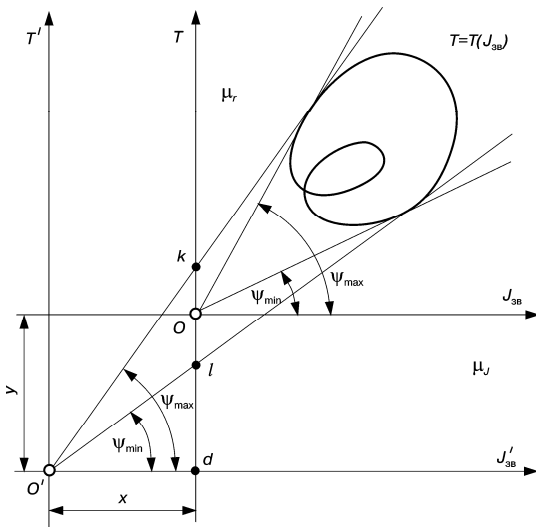


Рис. 3.12. До визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

З побудови безпосередньо випливає, що чим менший коефіцієнт нерівномірності δ , тим менша різниця між кутами Ψ_{max} і Ψ_{min} і тим далі від кривої $T=T(J_{\text{зв}})$, що відповідає часові усталеного руху, буде початок координат. Тобто при зменшенні δ зростає зведена маса машини та її кінетична енергія, потрібна для надання руху машині із заданою середньою швидкістю ω_c . Отже, збільшення рівномірності руху ланки зведення можна досягти, збільшивши зведений момент інерції механізму чи машини. Збільшити зведені маси або зведений момент інерції можна за рахунок збільшення мас

окремих ланок механізму. Практично це збільшення мас здійснюється за допомогою посадки на один з валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь називається маховим колесом, або маховиком. Як показано вище, для забезпечення заданого коефіцієнта нерівномірності $\delta_{\text{доп}}$ треба збільшити зведений момент інерції механізму або машини на величину J_0 (3.46). Величина цього додаткового моменту і визначає момент інерції маховика, тобто

$$J_i = J_0 = \mu_j \delta. \quad (3.47)$$

Завданням маховика є регулювання періодичних коливань швидкості початкової ланки, які зумовлені властивостями самих механізмів або періодичною зміною співвідношень величин рушійних сил і сил опору. Підбором мо-

менту інерції маховика можна змусити початкову ланку механізму рухатись з наперед заданим відхиленням від деякої її середньої швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії механізмів або машини, що нагромаджує її в моменти прискорення руху механізмів і віддає назад у моменти сповільнення руху машини. Для кращого розуміння дії маховика як гасителя коливань швидкості обертання тіла біля його середнього значення на рис. 3.13 показано дві діаграми $\omega = \omega(t)$: 1 – машини без маховика, 2 – машини з маховиком. Введення маховика в машину дає змогу зменшити коливання відносно її середнього значення ω_c , тому при збільшенні швидкості обертання ланки зведення (на рис. 3.12 ділянки ab , cd) частина кінетичної енергії машини йде на збільшення кінетичної енергії маховика ($\omega'_{\max} < \omega_{\max}$), і, навпаки, коли швидкість обертання зменшується, маховик віддає частину нагромадженої кінетичної енергії машині, завдяки чому зміна швидкості буде менша. Крива $\omega = \omega(t)$ попаде не в точку c , а в точку c' . У деяких робочих машинах, в яких корисне навантаження періодично змінюється в широких межах (дробарки, прокатні стани і т. п.), маховик акумулює дуже значні запаси кінетичної енергії в моменти прискорення руху, тобто в моменти зниження корисних навантажень. Така акумулююча роль маховика дає можливість використати нагромаджену ним енергію для подолання підвищення корисних навантажень без збільшення потужності двигуна. Цю властивість маховика інколи використовують у транспортних машинах.

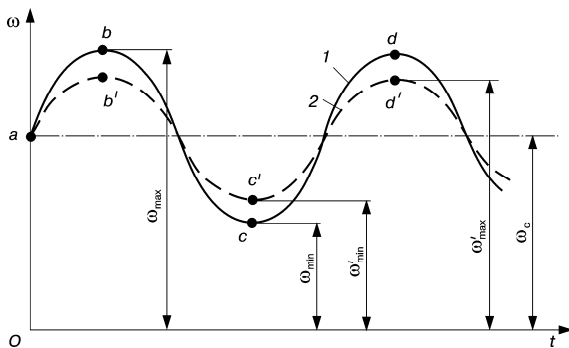


Рис. 3.13. Діаграми швидкості ланки зведення: 1 – машини без маховика, 2 – машини з маховиком

Для зменшення коливань швидкості маховик повинен мати відповідний момент інерції. Згідно з формулою $M_{зв} = M_p - M_o = J\varepsilon$

$$\varepsilon = M_{зв} / J. \tag{3.48}$$

Отже, чим більший момент інерції J обертових мас (включаючи маховик) при тому самому зведеному (надлишковому) моменту сил, тим менше кутове прискорення ε ланки зведення, а значить, тим менша зміна кутової швидкості. На основі того, що $\varepsilon = d\omega/dt$, залежність (3.48) можна записати у вигляді

$$d\omega = \frac{M_{зв}}{J} dt. \tag{3.49}$$

Звідси видно, що при всіх інших однакових умовах зміна кутової швидкості $d\omega$ прямо пропорційна часу дії надлишкового моменту $M_{зв}$. Це показує, що результуюча дія маховика найефективніша при короткочасних коливаннях обертового моменту $M_{зв}$, а також при різних (миттєвих) змінах опору. Маховик

не допоможе, якщо, наприклад, при тому ж навантаженні на паровий двигун упаде тиск пари в котлі або при цьому ж тиску значно збільшилось на тривалий час навантаження. У таких випадках використовуються *регулятори швидкості*.

Для більшої ефективності дії маховика, зменшення маси, габаритів доцільно його ставити на швидкохідний вал, оскільки кінетична енергія маховика, в результаті зміни якої здійснюється регулювання швидкості машини, виражається формулою

$$\dot{O} = \frac{J_1 \omega^2}{2}. \quad (3.50)$$

Звідси видно, що ця енергія прямо пропорційна ω^2 . Цим дуже часто користуються на практиці, встановлюючи маховик на швидкохідному валу, наприклад в інерційному стартері. Проте інколи маховик встановлюють і на тихохідних валах, ближче до тих частин машини (джерела коливання швидкості), нерівномірність руху яких треба зменшити, щоб ці коливання швидкості не передавались на інші ланки передавального механізму (зубчасті колеса, муфти тощо).

Якщо маховик встановлюється не на ланці зведення, а на будь-якій i -й ланці машини, то завжди повинна задовольнятися умова рівності кінетичної енергії

$$\frac{J_i \omega^2}{2} = \frac{J_s \omega_s^2}{2}, \quad (3.51)$$

де J_i – момент інерції маховика, встановленого на i -й ланці; ω_i – кутова швидкість цієї ланки.

З рівняння (3.51) випливає

$$J_i = J_s \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2. \quad (3.52)$$

Отже, чим більша кутова швидкість i -ї ланки, тим менший момент інерції маховика. Тому з точки зору зменшення ваги або діаметра маховика вигідно встановлювати його на ланках, що мають великі швидкості.

Як видно з рівняння (3.52), для забезпечення умови сталості моменту інерції J_i необхідно, щоб передаточне відношення ω/ω_i було сталим. Це вимагає встановлення маховика на ланках, які зв'язані з ведучим валом механізму передаточним відношенням сталої величини (механізми круглих зубчастих коліс, черв'ячні механізми і т. д.).

При встановленні маховика не на ланці зведення слід врахувати жорсткість проміжного кінематичного ланцюга. При малій жорсткості кінематичного ланцюга пружні коливання можуть бути такими великими, що махове колесо не виконуватиме свого призначення.

Далі треба зазначити, що при малих значеннях коефіцієнта δ внаслідок невеликої різниці між кутами ψ_{\max} і ψ_{\min} точка перетину O' дотичних (див. рис. 3.12) дуже часто знаходиться за межами рисунка. У цьому випадку можна використати точки перетину k і l , дотичних з віссю T першої системи координат. Тоді, очевидно,

$$\operatorname{tg} \psi'_{\max} = \frac{kd}{\hat{l}'d}, \quad \operatorname{tg} \psi'_{\min} = \frac{ld}{\hat{l}'d}$$

і, далі,

$$\operatorname{tg} \psi'_{\max} - \operatorname{tg} \psi'_{\min} = \frac{kd}{\hat{l}'d} - \frac{ld}{\hat{l}'d} = \frac{kl}{\hat{l}'d}. \quad (3.53)$$

Підставляючи (3.53) у рівняння (3.42), знаходимо

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_J} \frac{kl}{\hat{l}'d} \frac{1}{\omega_n^2},$$

звідки, враховуючи, що $\mu_J(\hat{l}'d) = J_i$, дістаємо

$$J_i = \frac{\mu_T(kl)}{\omega_n^2 \delta}. \quad (3.54)$$

Аналогічно можна одержати формулу для визначення моменту інерції маховика через точки перетину дотичних з віссю абсцис $J_{\text{зв}}$ першої системи координат.

Визначення розмірів маховика. Оскільки маховик звичайно роблять у вигляді колеса (рис. 3.14), який має масивний обід l , сполучений з втулкою 2 спицями 3 (або тонким диском), то моментами інерції з'єднуючих частин часто нехтують і наближено вважають, що маса маховика рівномірно розподілена по колу радіуса $R = D/2$ – геометричному місцю центрів ваги поперечних перерізів обода. Тоді момент інерції маховика можна виразити так:

$$J_M = mR^2 = \frac{mD^2}{4}, \quad (3.55)$$

де m – маса маховика.

Добуток маси обода маховика на квадрат його діаметра mD^2 називається маховим моментом, або характеристикою маховика. Для багатьох деталей машин, що здійснюють обертовий рух (муфти, ротори електродвигунів тощо), ця характеристика наводиться у довідниках. Характеристика маховика має одиницю виміру $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. За цією характеристикою можна легко визначити необхідну масу маховика, якщо задано або вибрано його діаметр, значення якого визначається з суто конструктивних міркувань.

Для запобігання небезпеці можливого розриву маховика його діаметр D вибирають таким, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустиму для матеріалу маховика величину. Для перевірки діаметра маховика можна рекомендувати таку залежність:

$$D \leq \frac{60v_{\text{дiп}}}{\pi n}, \quad (3.56)$$

де $v_{\text{дiп}}$ – допустима колова швидкість обода маховика, яка не повинна перевищувати для сталевих маховиків 70–120 м/с, для чавунних – 30–45 м/с; n – частота обертання маховика, хв^{-1} .

Якщо маса обода маховика практично може бути взята як $m_{\text{об}} = 0,9m$, де $m_{\text{об}}$ – маса обода маховика, то ширина b обода маховика визначається з виразу

$$m_{\text{об}} = \pi D b c \rho. \quad (3.57)$$

Тут ρ – густина матеріалу, кг/м^3 ; $c \approx 0,4b$. Тоді, якщо взяти $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, матимемо

$$b \approx 0,01 \sqrt{m / D} [\text{м}]. \quad (3.58)$$

Наближений метод побудови кривої Вітгенбауера. З попереднього випливає, що з побудованої діаграми $T=T(J_{\text{зв}})$ при заданих коефіцієнті нерівномірності руху δ і середній кутовій швидкості обертання ω_c ланки зведення можна знайти момент інерції маховика i , тим самим, визначити його масу й розміри.

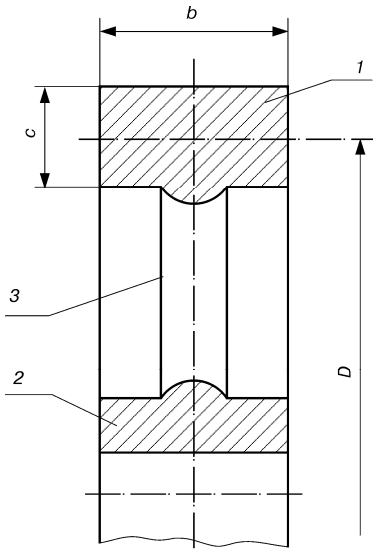


Рис. 3.14. Ескіз маховика

Проте на практиці ця задача ускладнюється тим, що для побудови діаграми $T=T(\varphi)$ необхідно мати діаграми зведених моментів рушійних сил $M_p=M_p$ і сил опору $M_o=M_o(\varphi)$. Причому для робочих машин, якщо відомі технологічні опори, можна знайти значення зведених моментів сил опору (див. п. 3.1), тобто побудувати діаграму $M_o=M_o(\varphi)$. Приклад такої діаграми показано на рис. 3.15, а. Зведений момент рушійних сил, як правило, для таких машин важко знайти, а тому його беруть сталим, тобто $M_p=\text{const}$. Його величину можна визначити, виходячи з рівності робіт рушійних сил A_p і сил опору A_o за один цикл руху механізму або машини.

Діаграму роботи сил опору $A_o=A_o(\varphi)$ можна одержати графічним інтегруванням діаграми $M_o=M_o(\varphi)$ (рис. 3.15, б), оскільки робота визначається залежністю

$$A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_i d\varphi. \quad (3.59)$$

Як відомо, графічна інтерпретація інтеграла є площею, яка обмежена кривою $M_o=M_o(\varphi)$, віссю φ і крайніми ординатами, ділянки кривої, що відповідають кутам φ_1 і φ_2 . Наприклад, на ділянці а–2 робота сил опору знаходиться за

формулою

$$A_{02} = \text{пл.}(\dot{a}\dot{a}'2'2) \mu_M \mu_\varphi;$$

на ділянці 2–3 – у вигляді

$$A_{03} = \text{пл.}(22'3'3) \mu_M \mu_\varphi$$

і т. д.

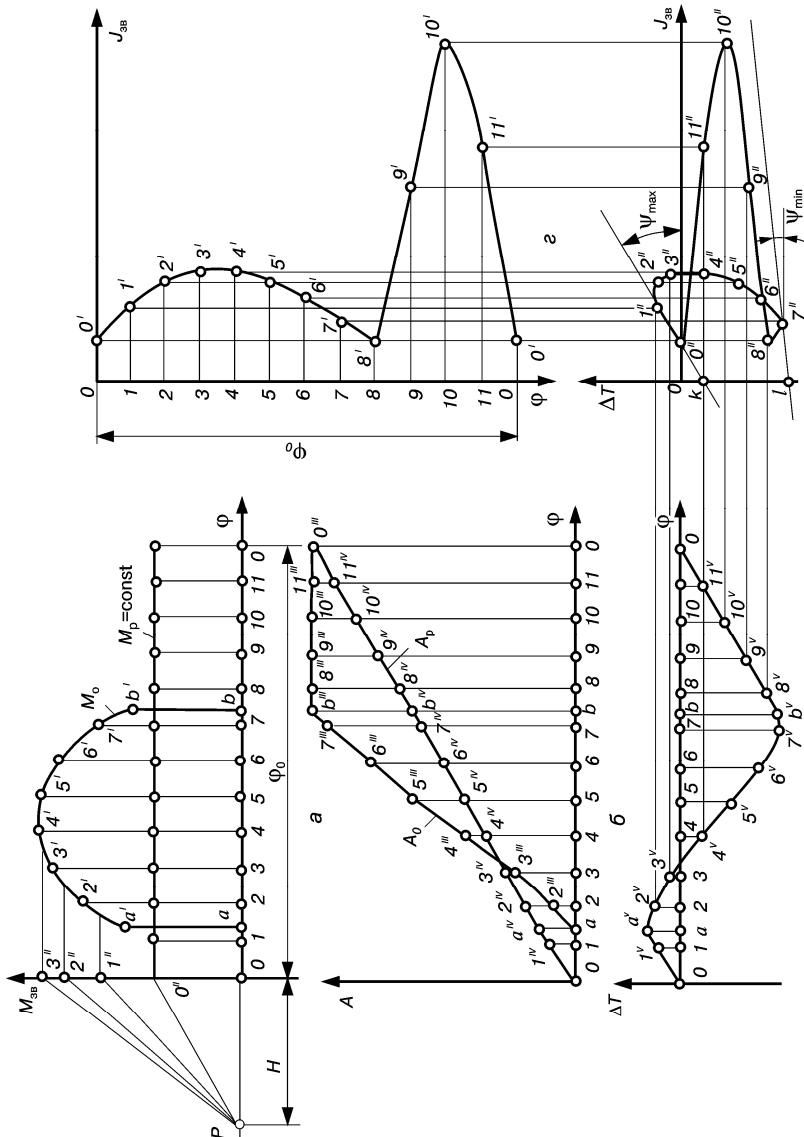


Рис. 3.15. Наближений метод побудови кривої Віттенбауера робочої машини

Відклавши на відповідних ординатах ці роботи в масштабі μ_A , одержимо діаграму $A_0 = A_0(\varphi)$. Практично цих розрахунків не роблять, а виконують побудову, обернену до тієї, яку ми робили при графічному диференціюванні (методом хорд). Тобто площу криволінійної трапеції $\dot{a}\dot{a}'2'2$ замінюємо площею

прямокутника, висоту якого переносимо на вісь координат $M_{зв}$, а одержану точку $1''$ з'єднуємо з точкою P . Відрізок $OP = H$ визначає масштаб побудови діаграми робіт

$$\mu_A = \mu_M \mu_\Phi H. \quad (3.60)$$

У нашому випадку робота сил опору на ділянці $0-a$ дорівнює нулю, оскільки $M_0 = 0$. Тоді з точки a на діаграмі $A_0 = A_0(\varphi)$ (рис. 3.15, б) проводимо на ділянці $a-2$ паралельну $P1''$, дістанемо точку $2'''$.

Аналогічно здійснюємо побудову на інших ділянках ($2-3$, $3-4$ і т. п.), що дає змогу одержати точки $3'''$, $4'''$ і т. д. З'єднавши ці точки плавною кривою, дістанемо діаграму $A_0 = A_0(\varphi)$. На ділянці $b-0$ ($b'''-0'''$) робота $A_0 = \text{const}$, оскільки $M_0 = 0$, і робота сил опору не змінюється.

Діаграма робіт рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$ при такому припущенні ($M_p = \text{const}$) зображатиметься прямою лінією ($A_p = M_p \varphi$), яка проходитиме через точки 0 і $0'''$ діаграми $A_0 = A_0(\varphi)$. Це пояснюється тим, що зміна кінетичної енергії $\Delta T = A_p - A_0$ за один цикл усталеного руху дорівнює нулю, тобто на початку і в кінці циклу $A_p = A_0$. Провівши через точку P лінію (рис. 3.15, а), паралельну лінії $0-0'''$ на діаграмі робіт (рис. 3.15, б), дістанемо точку $0''$, яка визначить зведений момент рушійних сил: $M_p = (0-0'') \mu_M$.

На основі діаграм робіт рушійних сил і сил опору будуємо діаграму зміни кінетичної енергії механізму або машин без маховика за формулою

$$\Delta T = A_p - A_0. \quad (3.61)$$

Якщо діаграма $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ будується в тому ж масштабі, що і діаграми робіт, досить на відповідних ординатах (рис. 3.15, в) відкласти відрізки, які знаходяться між кривими $A_p = A_p(\varphi)$ і $A_0 = A_0(\varphi)$, тобто $1-1^V = 1'-1^{IV}$, $a-a^V = a-a^{IV}$, $2-2^V = 2'''-2^{IV}$ і т. п. Якщо $A_p > A_0$, то $\Delta T > 0$, і навпаки, якщо $A_p < A_0$, то $\Delta T < 0$.

Діаграми зведених момен-тів інерції $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ (рис. 3.15, г) і крива Віттенбауера $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ (рис. 3.12, д) будуються так, як це описано в п. 3.4.

Для машини-двигуна, як правило, неважко побудувати діаграми зведених рушійних сил $M_p = M_p(\varphi)$, маючи індикаторну діаграму. У таких машинах зведений момент сил опору береться сталим ($M_0 = \text{const}$). Всі інші побудови виконуються аналогічно [7].

У технічній і навчальній літературі наводяться інші методи визначення моменту інерції маховика. Заслуговують на особливу увагу методи, які враховують механічні характеристики двигунів.

Приклад 3.8. Для механізму поперечного стругального верстату (рис. 3.4) побудувати діаграму криву Віттенбауера та визначити момент інерції маховика, якщо задано діаграму сил опору $F_{ei}(S_D)$ (див. програму PR 3.8), кутову швидкість кривошипа $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$, розміри ланок: $r = l_{0A} = 0,25 \text{ м}$,

$l_3 = l_{BC} = 1,2$ м, $l_4 = l_{BD} = 0,45$ м, $a = 0,7$ м, $b = 0,375$ м, $l_{OS_1} = 0,55 \cdot r$, $l_{CS_3} = 0,3 \cdot l_3$,
 $l_{BS_4} = 0,5 \cdot l_4$; маси ланок та їх моменти інерції: $m_1 = 2$ êã, $m_2 = 0,5$ êã,
 $m_3 = 8$ êã, $m_4 = 5$ êã, $m_5 = 22$ êã, $J_{S_1} = 0,03$ êã·ì², $J_{S_3} = 0,65$ êã·ì², $J_{S_4} = 0,35$ êã·ì²;
 коефіцієнт нерівномірності руху $\delta = 1/20$; максимальна сила корисного опору
 $F_m = 800$ Í. Момент рушійних сил прийняти сталим.

Програма PR 3.8

Вихідні дані

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= 10 \quad r := 0.25 \quad l_3 := 1.2 \quad l_4 := 0.45 \quad a := 0.7 \quad b := 0.375 \\ l_{OS1} &:= 0.55 \cdot r \quad l_{CS3} := 0.3 \cdot l_3 \quad l_{BS4} := 0.5 \cdot l_4 \quad F_m := 800 \quad m_1 := 2 \quad m_2 := 0.5 \\ m_3 &:= 8 \quad m_4 := 5 \quad m_5 := 22 \quad J_{S1} := 0.03 \quad J_{S3} := 0.65 \quad J_{S4} := 0.35 \quad N := 36 \quad \delta := \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Кінематичний аналіз

$$\begin{aligned} \theta &:= 2 \cdot \text{asin}\left(\frac{r}{a}\right) \quad \theta = 41.85 \text{ deg} \quad \varphi_0 := \pi + \frac{\theta}{2} \quad \varphi'_0 := \frac{-\theta}{2} \\ \varphi'_0 &= -20.925 \text{ deg} \quad \varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 - 2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \varphi_0 - 2\pi \quad \varphi_0 = 200.925 \text{ deg} \\ \varphi_3(\varphi_1) &:= \text{atan2}(r \cdot \cos(\varphi_1), a + r \cdot \sin(\varphi_1)) \quad l_{3x}(\varphi_1) := r \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3(\varphi_1))} \\ x_A(\varphi_1) &:= r \cdot \cos(\varphi_1) \quad v_A(\varphi_1) := \omega_1 \cdot r \quad y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1) \quad \varphi'_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_3(\varphi_1) \\ \omega_3(\varphi_1) &:= \varphi'_3(\varphi_1) \cdot \omega_1 \quad v_{S1}(\varphi_1) := \omega_1 \cdot l_{OS1} \quad y_B(\varphi_1) := l_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)) \end{aligned}$$

3.8. Визначення моменту інерції маховика методом Вітгенбауера

$$x_B(\varphi_1) := l_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \quad x'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} x_B(\varphi_1) \quad y'_B(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} y_B(\varphi_1)$$

$$\varphi''_3(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi'_3(\varphi_1) \quad \varphi_4(\varphi_1) := \pi + \arcsin\left[\frac{(a + b - l_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)))}{l_4}\right]$$

$$\varphi'_4(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} \varphi_4(\varphi_1) \quad \omega_4(\varphi_1) := \varphi'_4(\varphi_1) \cdot \omega \quad \varphi_4(\varphi_1) := \pi + \arcsin\left[\frac{(a + b - l_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1)))}{l_4}\right]$$

$$x_{S4}(\varphi_1) := x_B(\varphi_1) + l_{BS4} \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1)) \quad y_{S4}(\varphi_1) := y_B(\varphi_1) + l_{BS4} \cdot \sin(\varphi_4(\varphi_1))$$

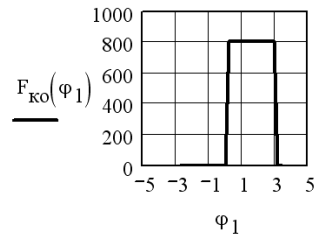
$$v_{S4}(\varphi_1) := \omega_1 \cdot \sqrt{x_{S4}(\varphi_1)^2 + y_{S4}(\varphi_1)^2} \quad x_D(\varphi_1) := l_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) + l_4 \cdot \cos(\varphi_4(\varphi_1))$$

$$S_D(\varphi_1) := x_D(\varphi_1) - x_D(\varphi_0) \quad S_{\max} := x_D(\varphi'_0) - x_D(\varphi_0) \quad S_{\max} = 0.857$$

$$S_D(\varphi_0) = 0 \quad v_D(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} S_D(\varphi_1)$$

Побудова діаграми сил корисного опору

$$F_{\text{ко}}(\varphi_1) := \begin{cases} \text{if } v_D(\varphi_1) < 0 \\ \left| \begin{array}{l} R \leftarrow F_m \text{ if } 0.05 \leq \frac{S_D(\varphi_1)}{S_{\max}} \wedge \frac{S_D(\varphi_1)}{S_{\max}} \leq 0.95 \\ R \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ R \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ R \end{cases}$$



Побудова діаграми робіт

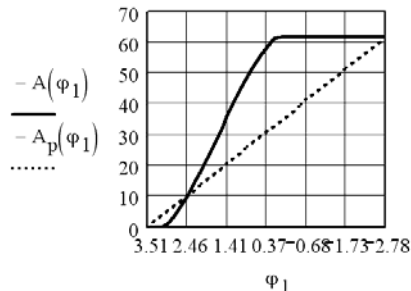
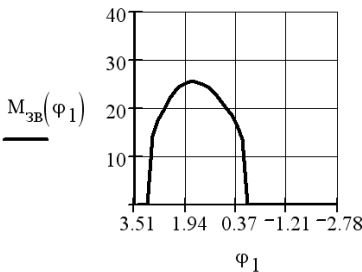
Побудова діаграми зведеного моменту сил корисного опору

$$M_{\text{зв}}(\varphi_1) := F_{\text{ко}}(\varphi_1) \cdot \frac{v_D(\varphi_1) \cdot \cos(\pi)}{\omega_1}$$

$$A(\varphi_1) := \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{\text{зв}}(\varphi_1) d\varphi_1 \quad A(\varphi_0 - 2\pi) = -61.707$$

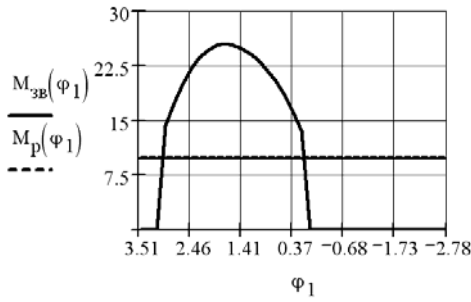
$$A_{\max} := -A(\varphi_0 - 2\pi) \quad A_{\max} = 61.707$$

$$A_p(\varphi_1) := \frac{A_{\max}}{2\pi} \cdot (\varphi_1 - \varphi_0)$$



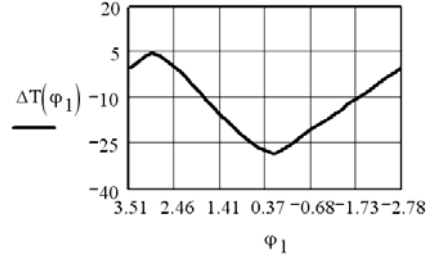
Побудова діаграми моментів рушійних сил

$$M_p(\varphi_1) := \frac{d}{d\varphi_1} (A_p(\varphi_1))$$



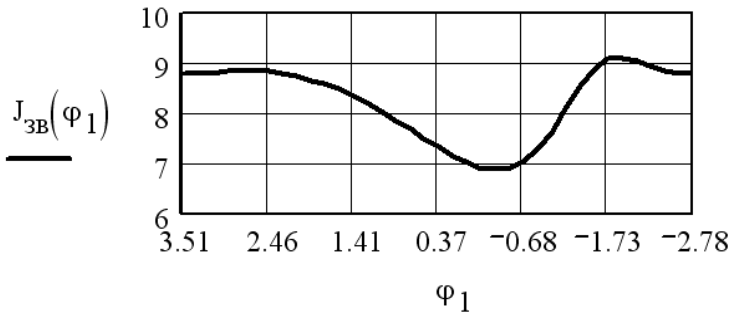
Побудова діаграми зміни кінетичної енергії

$$\Delta T(\varphi_1) := -A_p(\varphi_1) + A(\varphi_1)$$

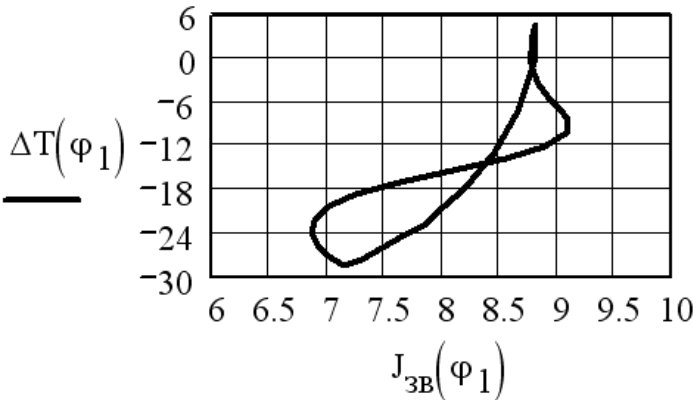


Побудова діаграми зведеного моменту інерції механізму

$$J_{zB}(\varphi_1) := J_{S1} + m_1 \cdot l_{OS1}^2 + \left[m_2 \cdot v_A(\varphi_1)^2 + (J_{S3} + m_3 \cdot l_{CS3}^2) \cdot \omega_3(\varphi_1)^2 \dots \right] \cdot [(\omega_1)^2]^{-1} \\ + m_4 \cdot v_{S4}(\varphi_1)^2 + J_{S4} \cdot \omega_4(\varphi_1)^2 + m_5 \cdot v_D(\varphi_1)^2$$



Побудова кривої Вітгенбауера



3.8. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

Визначення моменту інерції маховика

$$\psi_{\max} := \operatorname{atan}\left[\frac{(\omega_1)^2}{2}\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right)\right] \quad \psi_{\max} = 88.909 \text{ deg}$$

$$\psi_{\min} := \operatorname{atan}\left[\frac{(\omega_1)^2}{2}\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right)\right] \quad \psi_{\min} = 88.795 \text{ deg}$$

$$\tan(\psi_{\max}) = 52.531 \quad \tan(\psi_{\min}) = 47.531$$

Формування вектор-стовпців координат точок кривої Віттенбауера

$$J := \begin{cases} \text{for } i \in 0..359 \\ J_i \leftarrow J_{\text{зв}}(i\text{-deg}) \\ J \end{cases} \quad \Delta T' := \begin{cases} \text{for } i \in 0..359 \\ \Delta T'_i \leftarrow \Delta T(i\text{-deg}) \\ \Delta T' \end{cases}$$

Функція перетворення координат

$$\text{TCS}(x_K, y_K, x, y, \psi) := \begin{cases} \text{Result}_0 \leftarrow (x_K - x) \cdot \cos(\psi) + (y_K - y) \cdot \sin(\psi) \\ \text{Result}_1 \leftarrow (y_K - y) \cdot \cos(\psi) - (x_K - x) \cdot \sin(\psi) \\ \text{Result} \end{cases}$$

Знаходження положень дотичних до кривої Віттенбауера

$$\Phi_{\min} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..359 \\ \text{flag} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..359 \\ \text{flag} \leftarrow 1 \text{ if } \text{TCS}(J_j, \Delta T'_j, J_i, \Delta T'_i, \psi_{\min})_1 < 0 \\ \text{Result} \leftarrow i \text{ if } \text{flag} = 0 \\ \text{Result} \cdot \frac{\pi}{180} \end{cases} \quad \Phi_{\min} = 258 \text{ deg}$$

$$\Phi_{\max} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..359 \\ \text{flag} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..359 \\ \text{flag} \leftarrow 1 \text{ if } \text{TCS}(J_j, \Delta T'_j, J_i, \Delta T'_i, \psi_{\max})_1 > 0 \\ \text{Result} \leftarrow i \text{ if } \text{flag} = 0 \\ \text{Result} \cdot \frac{\pi}{180} \end{cases} \quad \Phi_{\max} = 335 \text{ deg}$$

Побудова дотичних до кривої Вігтенбауера

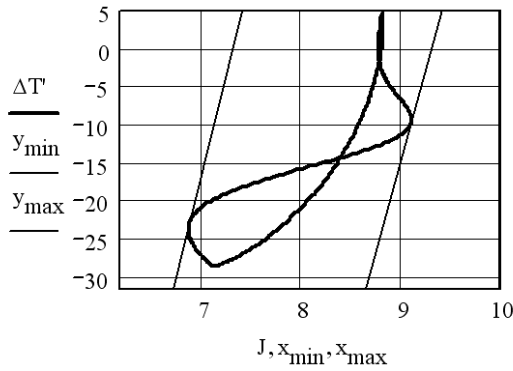
$$b_1 := \Delta T(\varphi_{\min}) - \tan(\psi_{\min}) \cdot J_{зв}(\varphi_{\min}) \quad b_1 = -442.124$$

$$b_2 := \Delta T(\varphi_{\max}) - \tan(\psi_{\max}) \cdot J_{зв}(\varphi_{\max}) \quad b_2 = -383.179$$

$$KL := b_2 - b_1 \quad KL = 58.945$$

$$y_{\min} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 + \tan(\psi_{\min}) \cdot 10 \end{pmatrix} \quad y_{\max} := \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 + \tan(\psi_{\max}) \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$x_{\min} := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad x_{\max} := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$



Момент інерції маховика

$$J_M := \frac{KL}{(\omega_1)^2 \cdot \delta} \quad J_M = 11.789$$

КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

4.1. Загальні зауваження

Кулачкові механізми (КМ) широко застосовуються у різних машинах, особливо в машинах-автоматах. Це пояснюється перш за все тим, що вони дозволяють забезпечити практично майже будь-який закон руху вихідної ланки. Крім цього, методи синтезу КМ значно простіші, чим, наприклад, важільних, які в деяких випадках можуть їх замінити.

На теперішній час методи синтезу КМ, які застосовуються в навчальній практиці (курсове та дипломне проектування), не відповідають методам їх синтезу на виробництві. В першому випадку широко використовуються графічні методи, які забезпечують високу наочність; в другому – аналітичні, які забезпечують високу точність обчислень. В курсовому та дипломному проектуванні треба поєднувати обидва методи. Це дозволяє виробити у студентів чітке розуміння роботи КМ і засвоїти сучасні методи їх синтезу, яким сприяють сучасні ЕОМ.

Методи аналітичного синтезу КМ досить повно викладені різних підручниках та навчальних посібниках з ТММ [2, 7–10, 12–14, 17] та спеціальній літературі [11, 16]. В даних методичних вказівках розглядаються аналітичні методи найбільш простих КМ [9], які одержали широке розповсюдження в техніці, із застосуванням програмного продукту Mathcad.

4.2. Основні параметри кулачкових механізмів

Незважаючи на те що профіль кулачка можна обкреслити по-різному, в більшості випадків на ньому можна знайти чотири характерні ділянки, які накреслені (рис. 4.1, *a*): на ділянці ab – зростаючим радіусом-вектором, bc – дугою максимального радіуса r_{\max} , cd – спадним радіусом-вектором, da – дугою кола мінімального радіуса r_0 , яке називають **основним**. Кожній з цих ділянок відповідає центральний **кут профілю кулачка** ($\varphi'_a, \varphi'_{a,n}, \varphi'_i, \varphi'_{a,n}$), а при обертанні кулачка в напрямку, показаному на рис. 4.1, *a* – певний період руху штовхача 2: ділянці ab відповідає період віддалення t_b ; bc – період дальнього (верхнього) стояння $t_{д.с}$; cd – період наближення t_n ; da – період ближнього (нижнього) стояння $t_{б.с}$.

Положення радіуса-вектора профілю кулачка на початку віддалення вихідної ланки (лінія Aa) визначає положення так званої **початкової лінії кулачка**, яка є базою для установки кулачка на валу. Кути повороту кулачка, що визначають відповідні періоди руху штовхача, називають **фазовими кутами**. На рис. 4.1 вони позначені: φ_b – кут віддалення, $\varphi_{д.с}$ – кут дальнього стояння, φ_n – кут наближення, $\varphi_{б.с}$ – кут ближнього стояння. У центральних кулачкових механізмах (рис. 4.1, *a*) фазові кути та кути профілю кулачка відповідно рівні між собою ($\varphi_b = \varphi'_a$, $\varphi_{д.с} = \varphi'_{a,n}$, $\varphi_n = \varphi'_i$, $\varphi_{б.с} = \varphi'_{a,n}$). У кулачкових механізмах зі зміщенням такі рівності не

4. Кулачкові механізми

зберігаються, тобто фазові кути й кути профілю кулачка не рівні між собою. Це можна побачити, розглянувши роботу зміщеного кулачкового механізму, зображеного на рис. 4.1, б, в якому, наприклад, кут aAb є кутом профілю φ'_b , а кут $a'Ab$ – фазовим кутом віддалення φ_b , оскільки за час переміщення вістря штовхача вздовж ділянки ab трикутник $Aa''b$, жорстко зв'язаний з кулачком, повернеться на кут φ_b і суміститься в кінці періоду віддалення з трикутником $Aa'''a'$. Отже, у даному випадку $\varphi_b \gg \varphi'_a$, $\varphi_n < \varphi'_i$. Якщо траєкторія руху штовхача зміщена вліво від осі обертання кулачка, то матимуть місце зворотні нерівності ($\varphi_b < \varphi'_a$, $\varphi_n > \varphi'_i$).

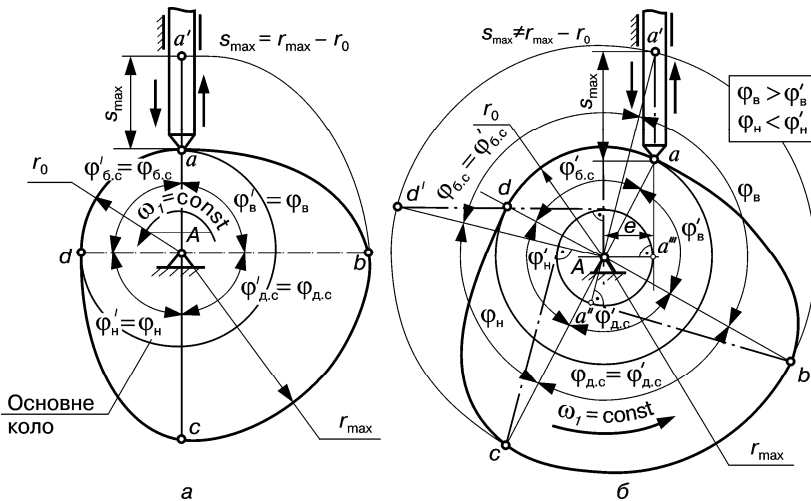


Рис. 4.1. Основні параметри кулачкових механізмів

Тривалість періодів руху штовхача, яка визначається технологічними умовами роботи кулачкового механізму, а відповідно і значення фазових кутів можуть бути різними, причому періодів ближнього і дальнього стояння може не бути, проте в будь-якому кулачковому механізмі обов'язково мають бути періоди віддалення та наближення. Очевидно, що сума періодів руху вихідної ланки (штовхача або коромисла) дорівнює періоду обертання кулачка T , тобто

$$t_b + t_{d,c} + t_n + t_{b,c} = T, \quad (4.1)$$

а сума фазових кутів дорівнює 360° :

$$\varphi_b + \varphi_{d,c} + \varphi_n + \varphi_{b,c} = 360^\circ. \quad (4.2)$$

Максимальний хід штовхача для центрального кулачкового механізму визначається різницею найбільшого і найменшого радіусів кулачка:

$$S_{\max} = r_{\max} - r_0. \quad (4.3)$$

У зміщених кулачкових механізмах ($e \neq 0$) ця рівність не зберігається ($S_{\max} > r_{\max} - r_0$).

У техніці використовуються і складніші кулачки, які можуть забезпечувати за один оберт кулачка кілька подвійних ходів вихідної ланки однакової або різної величини [7].

4.3. Якісні характеристики законів руху вихідної ланки

Аналоги швидкостей та прискорень зручні для характеристики руху ланок передаточних механізмів (зубчастих, фрикційних, пасових тощо), у тому числі важільних механізмів, які забезпечують обертовий рух вихідної ланки. Для порівняння законів руху вихідних ланок циклових (періодичної дії) механізмів (кулачкових, важільних зі зворотно-поступальним або коливальним рухом вихідної ланки) зручнішими характеристиками є **безрозмірні коефіцієнти** або, як їх ще називають, **інваріанти переміщень** a_k , **швидкості** b_k , **прискорення** c_k , **кінетичної (динамічної) потужності** d_k та їх константи піків (максимальні значення): швидкості $B = |b_k|_{\max}$, прискорення $C = |c_k|_{\max}$, кінетичної потужності $D = |d_k|_{\max}$ і т. д. У працях [2, 11, 12] інваріанти називають безрозмірними коефіцієнтами і відповідно позначають $a_k = \zeta$, $b_k = \delta$, $c_k = \xi$. Далі користуватимемося позначеннями, які прийняті в працях [7–9, 16, 17].

Фізичний зміст інваріантів можна зрозуміти з такого прикладу (рис. 4.2). Розглянемо системи діаграм переміщень різних вихідних ланок (1, 2, 3), побудованих у системі координат $s-t$ (рис. 4.2, а). Ці діаграми розрізняються між собою значеннями максимального переміщення S_j (у даному випадку $j = 1, 2, 3$) і періодом руху ланки в одному напрямку T_j (наприклад, періодом віддалення t_b) та відображають кількісний бік руху (S_j, T_j). Про якісні зміни закону руху з них судити неможливо.

Для порівняння (якісної оцінки) цих законів руху будемо діаграми відносних переміщень (рис. 4.2, б)

$$a_k = s_{ij} / S_j \quad (4.4)$$

як функції відносного часу $k = t_{ij} / T_j$, $0 \leq k \leq 1$, де a_k – позиційний інваріант переміщення ($0 \leq a_k \leq 1$); s_{ij} – змінне переміщення ланки j ; S_j – максимальний хід цієї ланки; t_{ij} – час, який відраховуємо від початку періоду руху ланки j в одному напрямку (віддалення чи наближення); T_j – період переміщення ланки у вибраному напрямку руху. Надалі, для скорочення запису індекси i, j у параметрах s, S та t, T опускатимемо.

Як видно із наведених діаграм $a_k = a_k(k)$ (рис. 4.2, б), інваріанти переміщень a_k при відповідних значеннях k не збігаються, тобто при однакових умовах ($S_1 = S_2 = S_3$ і $T_1 = T_2 = T_3$) закони, зображені на рис. 4.2, а, неоднакові.

Продиференціювавши залежність переміщення $s = s(t)$ за часом, одержимо залежність для швидкості:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dk} \frac{dk}{dt} = f'(k) \frac{S}{T} = b_k \frac{S}{T}, \quad (4.5)$$

4. Кулачкові механізми

де $dk = d(t/T) = dt/T$ або $dk/dt = 1/T$; $b_k = f'(k) = v / ST^{-1}$ – позиційний інваріант швидкості, який дорівнює відношенню фактичної швидкості ланки v до її середньої швидкості $v_c = S/T$. Отже,

$$b_k = \frac{da_k}{dk} = \frac{v}{v_c}. \quad (4.6)$$

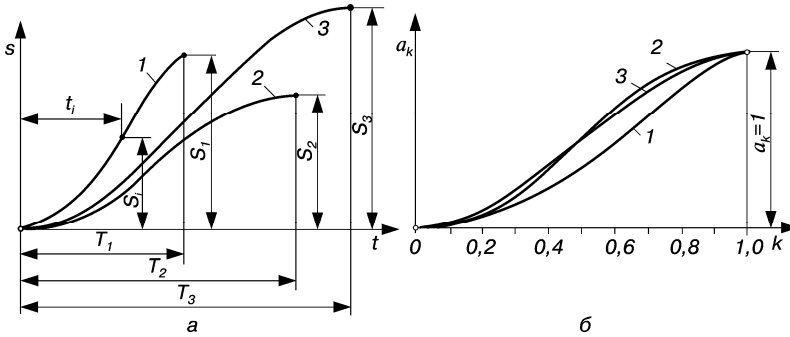


Рис. 4.2. Діаграми дійсних (а) і відносних (б) переміщень

Параметри S і T є модулями вимірювання швидкості. Отже, при порівнянні законів руху одиницею довжини є максимальний хід штовхача, одиницею часу – період руху в одному напрямку (віддалення або наближення).

Відповідно диференціюючи (4.5), знаходимо прискорення ланки:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dk} \frac{dk}{dt} = \frac{d(b_k S / T)}{dk} \frac{dk}{dt} = \frac{d(b_k)}{dk} \frac{S}{T^2} = f''(k) \frac{S}{T^2} = c_k \frac{S}{T^2}, \quad (4.7)$$

де $c_k = f''(k) = \frac{db_k}{dk} = \frac{d^2 a_k}{dk^2} = a / ST^{-2}$ – позиційний інваріант прискорення, який дорівнює при $S = 1$ і $T = 1$ прискоренню a .

Позиційний інваріант кінетичної (динамічної) потужності визначається за формулою

$$d_k = b_k c_k. \quad (4.8)$$

При коливальному русі ланки модулями вимірювання параметрів зручно вибирати: для переміщень – кут розмаху коромисла β_{\max} ; для часу – період T переміщення коромисла в одному напрямку (віддаленні чи наближенні); для маси – момент інерції ланки J . Тоді

$$a_k = \frac{\beta_i}{\beta_{\max}}; b_k = \frac{\omega_i}{\beta_{\max} T}; c_k = \frac{\varepsilon_i}{\beta_{\max} T^{-2}}; d_k = b_k c_k, \quad (4.9)$$

де β_i , ω_i , ε_i – відповідно кутові переміщення, швидкості та прискорення коромисла кулачкового механізму або іншої ланки, рух якої розглядають.

Перехід від аналогів швидкостей і прискорень до інваріантів подібності можна здійснити за допомогою залежностей:

при зворотно-поступальному русі ланки

$$b_k = \frac{\varphi_{\dot{a}}}{S_{\max}} s'_i, c_k = \frac{\varphi_{\ddot{a}}}{S_{\max}} s''_i, d_k = b_k c_k = \frac{\varphi_{\dot{a}}^3}{S_{\max}^2} s'_i s''_i, \quad (4.10)$$

при коливальному русі ланки

$$b_k = \frac{\varphi_{\dot{a}}}{\beta_{\max}} \beta'_i, c_k = \frac{\varphi_{\ddot{a}}}{\beta_{\max}} \beta''_i, d_k = \frac{\varphi_{\dot{a}}^3}{\beta_{\max}^2} \beta'_i \beta''_i, \quad (4.11)$$

де $\varphi_{\dot{a}}$ – кут повороту кулачка (в рад) за період віддалення штовхача (для періоду наближення в залежностях (4.10) і (4.11) замість кута віддалення необхідно підставляти $\varphi_{\dot{n}}$ – кут наближення); $s'_i, s''_i, \beta'_i, \beta''_i$ – відповідно аналоги лінійних або кутових швидкостей і прискорень ланки, рух якої розглядають.

Використовуючи розглянуті позиційні інваріанти подібності, можна визначити динамічні параметри. Наведемо деякі приклади.

1. Сила інерції та момент сил інерції:

$$F_{\dot{s}_i} = ma = c_k \frac{mS}{T^2}, M_{\dot{s}_i} = J\varepsilon = c_k \frac{J\beta_{\max}}{T^2}. \quad (4.12)$$

2. Кінетична (динамічна) потужність

$$N_{\dot{s}_i} = F_{\dot{s}_i} v = c_k \frac{mS}{T^2} b_k \frac{S}{T} = d_k \frac{mS^2}{T^3}, \quad (4.13)$$

де v – швидкість точки прикладання сили $F_{\text{ін}}$, $S = S_{\max}$.

4.4. Синтез кулачкових механізмів

4.4.1. Методи синтезу та вихідні дані. Синтез кулачкових механізмів можна розділити на два етапи. На першому етапі, який називають **динамічним синтезом**, необхідно визначити основні розміри механізму, зокрема мінімальний радіус кулачка, міжосьову відстань (для коромислових кулачкових механізмів). На другому етапі, який називають **кінематичним синтезом**, необхідно за заданими законами руху вхідної (кулачка) і вихідної (штовхача або коромисла) ланок побудувати профіль кулачка.

При синтезі кулачкових механізмів повинні бути задані або вибрані з технологічних і конструктивних міркувань такі вихідні дані:

1) закон руху кулачка (як правило, приймають, що кулачок обертається рівномірно, тобто $\omega_1 = \text{const}$);

2) закон руху вихідної ланки (див. табл. 7.1 [7] та дод. А);

3) максимальний хід штовхача S_{\max} або максимальний кут розмаху коромисла β_{\max} ;

4) фазові кути $\varphi_{\dot{a}}$, $\varphi_{\dot{n}}$, φ_i ;

5) допустимий ϑ_a кут тиску або мінімальний кут передачі μ_{\min} ;

6) інші розміри (ексцентриситет e , довжина коромисла l_k тощо).

Мінімальний радіус кулачка r_i , радіус ролика $r_{\delta i e}$, міжосьова відстань a (в коромислових КМ) визначається в процесі динамічного синтезу.

4.4.2. Синтез кулачкового механізму з роликівим штовхачем.

Алгоритм розрахунку профілю кулачка наступний [8, 9].

1. Вводимо вихідні розрахункові дані.

2. Визначаємо залежність коефіцієнта k від кута повороту кулачка φ_i :

– для періоду віддалення ($0 \leq \varphi \leq \varphi_a$) $k = \varphi_i / \varphi_a$;

– для періоду дальнього стояння ($\varphi_a < \varphi \leq \varphi_a + \varphi_{a.n}$) $k=1$;

– для періоду наближення ($\varphi_a + \varphi_{a.n} < \varphi \leq \varphi_a + \varphi_{a.n} + \varphi_i$)

$$k = 1 - \frac{\varphi - (\varphi_a + \varphi_{a.n})}{\varphi_i};$$

– для періоду ближнього стояння ($\varphi_a + \varphi_{a.n} + \varphi_i < \varphi < 2 \cdot \pi$) $k=0$.

3. Обчислюємо інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k та прискорення c_k штовхача за формулами, що наведені в дод. А;

4. Обчислюємо аналоги переміщення s_i , швидкості s_i' та прискорення s_i'' штовхача за наступними формулами:

$$s_i = a_k \cdot S_{\max}; \quad s_i' = \frac{d}{d\varphi} s_i; \quad s_i'' = \frac{d^2}{d\varphi^2} s_i. \quad (4.14)$$

5. Будуємо діаграми аналогів переміщення, швидкості та прискорення штовхача залежно від кута φ .

6. Визначаємо мінімальний радіус кулачка теоретичного профілю (динамічний синтез) за формулою

$$r_0 = \left[\left[\frac{s_i' \pm e}{\operatorname{tg} \vartheta_a} - s_i \right]^2 + e^2 \right]_{\max}, \quad (4.15)$$

де $\vartheta_a = \frac{\pi}{2} - \mu$ – допустимий кут тиску.

Знак „+” у формулі (4.15) перед ексцентриситетом e відповідає лівому його розташуванню від осі штовхача, знак „-” – правому при умові, що штовхач віддаляється від осі кулачка, а кулачок обертається проти руху годинникової стрілки.

7. Визначаємо координати теоретичного профілю кулачка (в полярній системі координат) за такими формулами (рис. 4.3):

$$R_i = \sqrt{e^2 + (s_0 + s_i)^2}; \quad \delta_i = \varphi_i - \alpha + \chi_i, \quad (4.16)$$

де

$$s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{e}{s_0}, \quad \chi_i = \arctg \left(\frac{e}{\sqrt{R_i^2 - e^2}} \right). \quad (4.17)$$

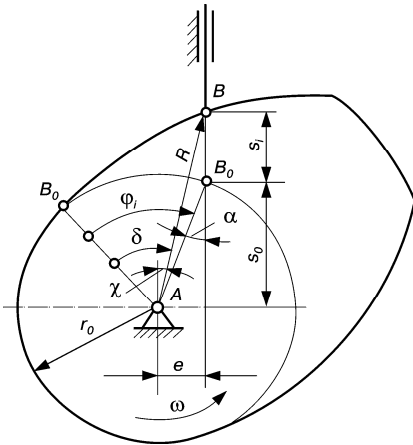


Рис. 4.3. Кулачковий механізм з роликівим штовхачем

Знак зміщення e вважається додатним, якщо напрямок швидкості при його віддаленні утворює гострий кут з напрямком швидкості точки контакту на кулачку.

8. Вибираємо радіус ролика r_p з умови обмеження контактних напружень на верхні ролика і кулачка.

Рекомендується приймати

$$r_p \leq 0.4r_0 \quad (4.18)$$

і перевіряти його значення з умови усунення самоперетину профілю кулачка, тобто вибрати радіус ролика r_p меншим мінімального радіуса кривизни ρ_{\min} теоретичного профілю кулачка. На практиці звичайно беруть

$$r_p \leq 0,7\rho_{\min}, \quad (4.19)$$

де

$$\rho_{\min} = \left| \frac{(r_0 + s_i)^2}{(r_0 + s_i) \cdot \cos \vartheta_i + s_i' \cdot \sin \vartheta_i \cdot \cos^2 \vartheta_i - s'' \cdot \cos \vartheta_i} \right|_{\min}. \quad (4.20)$$

Кут тиску ϑ_i визначаємо за формулою

$$\vartheta_i = \arctg \frac{s_i - e}{s_0 + s_i}. \quad (4.21)$$

9. Визначаємо координати практичного профілю кулачка (в полярній системі координат) за такими формулами:

$$R_{li} = \sqrt{R_i^2 + r_{\delta i \epsilon}^2 + 2 \cdot R_i \cdot r_{\delta i \epsilon} \cdot \cos(\vartheta_i + \gamma_{0i})}; \quad \delta_i = \varphi_i - \alpha + \gamma_i, \quad (4.22)$$

де

$$\gamma_{0i} = \arcsin \left(\frac{e}{R_i} \right), \quad \gamma_i = \arcsin \left(\frac{r \sin(\vartheta_i + \gamma_{0i})}{R_{li}} \right). \quad (4.23)$$

10. Будуємо теоретичний та практичний профілі кулачка.

4. Кулачкові механізми

Приклад 4.1. Спроекувати кулачковий механізм з роликівим штовхачем (рис. 4.3), якщо задані:

- закон руху кулачка – $\omega_1 = \text{const}$;
- закон руху штовхача – косинусоїдний;
- фазові кути $\varphi_{\hat{a}} = 120^\circ$, $\varphi_{\hat{a}\hat{n}} = 40^\circ$, $\varphi_i = 90^\circ$;
- максимальний хід штовхача $S_{\max} = 40$ мм;
- мінімальний кут передачі $\mu = 40^\circ$;
- ексцентриситет $e = 10$ мм.

Розв'язання. Порядок розв'язання задач наступний, використавши наведені залежності (4.14) – (4.23):

- а) обчислимо переміщення, аналоги швидкостей і прискорень вихідної ланки механізму та будуємо їх діаграми;
- б) знаходимо мінімальний радіус кулачка;
- в) будуємо теоретичний профіль кулачка;
- г) вибираємо радіус ролика, при якому забезпечується допустима контактна міцність кулачка і усувається самоперетин його профілю;
- д) будуємо практичний профіль кулачка.

Програма PR 4.1

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_{\hat{a}} := 120\text{deg} \quad \varphi_{\hat{a}\hat{n}} := 40\text{deg} \quad \varphi_i := 90\text{deg} \\ \mu := 40\text{deg} \quad e := 10 \quad N := 360$$

Закон руху штовхача - косинусоїдний

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} .. 2 \cdot \pi$$

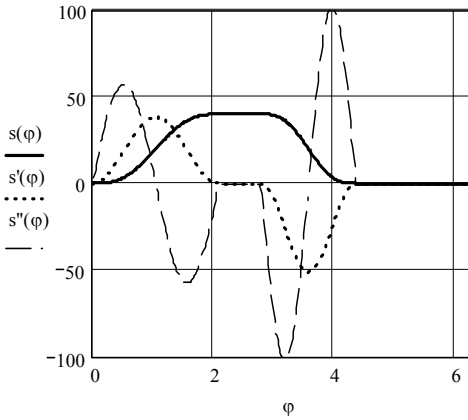
$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_{\hat{a}}} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_{\hat{a}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_{\hat{a}} < \varphi \leq \varphi_{\hat{a}} + \varphi_{\hat{a}\hat{n}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_{\hat{a}} + \varphi_{\hat{a}\hat{n}})}{\varphi_i} & \text{if } \varphi_{\hat{a}} + \varphi_{\hat{a}\hat{n}} < \varphi < \varphi_{\hat{a}} + \varphi_{\hat{a}\hat{n}} + \varphi_i \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_{\hat{a}} + \varphi_{\hat{a}\hat{n}} + \varphi_i \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := \left(\frac{1 - \cos(\pi k(\varphi))}{2} \right) \quad b_k(\varphi) := \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\pi k(\varphi)) \quad c_k(\varphi) := \frac{\pi^2}{2} \cdot \cos(\pi \cdot k(\varphi))$$

Переміщення, аналоги швидкості і прискорення штовхача:

$$s(\varphi) := a_k(\varphi) \cdot S_{\max} \quad s'(\varphi) := \frac{d}{d\varphi} s(\varphi) \quad s''(\varphi) := \frac{d^2}{d\varphi^2} s(\varphi)$$

Визначення мінімального радіуса кулачка



$$\nu_D := \frac{\pi}{2} - \mu$$

$$r_o(\varphi) := \sqrt{\left[\frac{s'(\varphi) + e}{\tan(\nu_D)} - s(\varphi) \right]^2 + e^2}$$

$$i := 1..249 \quad R_{0_i} := r_o\left(i \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\max(R_0) = 51.654$$

Приймаємо $R_0 := 52$

Побудова теоретичного профілю кулачка

$$s_o := \sqrt{R_o^2 - e^2} \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{e}{s_o}\right)$$

$$R(\varphi) := \sqrt{e^2 + (s_o + s(\varphi))^2}$$

$$\chi(\varphi) := \text{atan}\left(\frac{e}{\sqrt{R(\varphi)^2 - e^2}}\right)$$

$$\delta(\varphi) := \varphi - \alpha + \chi(\varphi)$$

Розрахунок радіуса ролика

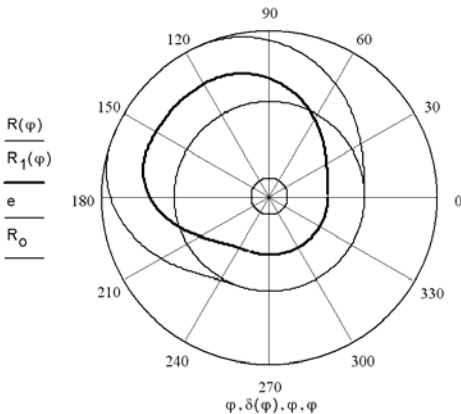
$$\nu(\varphi) := \text{atan}\left[\frac{s'(\varphi) - e}{\sqrt{R_o^2 - e^2} + s(\varphi)}\right]$$

$$\rho(\varphi) := \left| \frac{(R_o + s(\varphi))^2}{(R_o + s(\varphi)) \cdot \cos(\nu(\varphi)) + (s'(\varphi) \cdot \sin(\nu(\varphi)) \cdot \cos(\nu(\varphi))^2 - s''(\varphi) \cdot \cos(\nu(\varphi)))} \right|$$

$j := 0..359$

$$\rho_{1_j} := 10^{10} \text{ on error } \rho\left(j \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad \rho_{\min} := \min(\rho_1) \quad \rho_{\min} = 47.682 \quad r_{\delta 1} := 0.7 \cdot \rho_{\min}$$

$$r_{\delta 1} = 33.377 \quad r_{\delta} := 0.4 R_o \quad r_{\delta} = 24 \quad \text{Приймаємо} \quad r := 20$$



Побудова практичного профілю кулачка

$$\gamma_0(\varphi) := \text{asin}\left(\frac{e}{R(\varphi)}\right)$$

$$R_1(\varphi) := \sqrt{R(\varphi)^2 + r^2 - 2 \cdot R(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\nu(\varphi) + \gamma_0(\varphi))}$$

$$\gamma(\varphi) := \text{asin}\left(\frac{r \cdot \sin(\nu(\varphi) + \gamma_0(\varphi))}{R_1(\varphi)}\right)$$

$$\delta(\varphi) := \varphi + \gamma(\varphi)$$

4.4.3. Синтез коромислового кулачкового механізму

Алгоритм розрахунку профілю кулачка наступний.

1. Вводимо вихідні розрахункові дані.
2. Визначаємо залежність коефіцієнта k від кута повороту кулачка φ_i :

– для періоду віддалення ($0 \leq \varphi \leq \varphi_{\dot{a}}$) $k = \varphi_i / \varphi_{\dot{a}}$;

– для періоду дальнього стояння ($\varphi_{\dot{a}} < \varphi \leq \varphi_{\dot{a}} + \varphi_{\ddot{a}\ddot{n}}$) $k=1$;

– для періоду наближення ($\varphi_{\dot{a}} + \varphi_{\ddot{a}\ddot{n}} < \varphi \leq \varphi_{\dot{a}} + \varphi_{\ddot{a}\ddot{n}} + \varphi_i$)

$$k = 1 - \frac{\varphi - (\varphi_{\dot{a}} + \varphi_{\ddot{a}\ddot{n}})}{\varphi_i}; \quad (4.24)$$

– для періоду ближнього стояння ($\varphi_{\dot{a}} + \varphi_{\ddot{a}\ddot{n}} + \varphi_i < \varphi < 2 \cdot \pi$) $k=0$.

3. Обчислюємо інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k та прискорення c_k штовхача за формулами, що наведені в дод. А.

4. Обчислюємо аналоги кутових переміщень β_i , швидкостей β'_i та прискорень β''_i штовхача за наступними формулами:

$$\beta_i = a_k \cdot \beta_{\max}; \quad \beta'_i = \frac{d}{d\varphi} \beta_i; \quad \beta''_i = \frac{d}{d\varphi} \beta'_i. \quad (4.25)$$

5. Будуємо діаграми кутових переміщень, швидкостей та прискорень штовхача залежно від кута φ .

6. Визначаємо мінімальний радіус кулачка теоретичного профілю (динамічний синтез).

Щоб вивести формули для аналітичного обчислення найменших розмірів коромислового кулачкового механізму, скористаємося методикою графічного розв'язування цієї задачі [13]. Розмістимо початок прямокутної системи координат на осі обертання коромисла DC (рис. 4.4, а) [5], а вісь абсцис сумістимо з бісектрисою кута β_m розмаху коромисла. На практиці застосовуються коромислові кулачкові механізми з однаковим напрямом обертання кулачка і коромисла на фазі віддалення $\dot{A} = \text{sign}(\omega_1/\omega_3) = +1$ і протилежним. $\dot{A} = \text{sign}(\omega_1/\omega_3) = -1$, де ω_1, ω_3 – кутові швидкості відповідно кулачка і коромисла.

Розглянемо випадок, коли кутові швидкості кулачка і коромисла на фазі віддалення мають однаковий напрям. Припустимо, що необхідно відшукати координати x_0, y_0 такої точки O , яка дозволить при суміщенні з нею центра обертання кулачка одержати кути тиску ϑ , що дорівнюють допустимим в положеннях коромисла DC_1 на фазі віддалення і в положенні DC_2 – на фазі наближення. Графічним способом поставлена задача вирішується в такому порядку: від точки C_1 відкладають відрізок (C_1A) , який дорівнює в масштабі μ_l аналогу швидкості $s' = ds/d\varphi$ точки C в даному положенні, і через точку A проводять пряму I-I під кутом передачі руху $\mu_{\min} = 90 - \vartheta_a$ до лінії коромисла DC_1 ; від точки C_2 відкладають відрізок (C_2B) , який в масштабі μ_l дорівнює

аналогу швидкості s' точки C_2 і через точку B проводять пряму II-II під кутом передачі руху μ_{\min} до напрямку коромисла DC_2 . Точка перетину прямих I-I і II-II є шуканою.

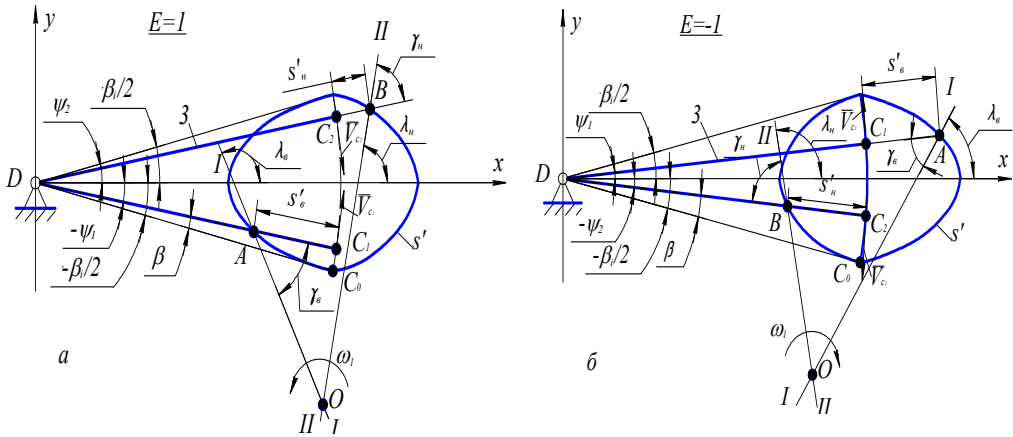


Рис. 4.4. До знаходження найменших розмірів коромислового кулачкового механізму

Формули для обчислення координат x_0, y_0 точки перетину прямих I-I і II-II можуть бути одержані внаслідок сумісного розв'язання рівнянь цих прямих у системі координат xDu :

$$y - y_A = K_A(x - x_A); \quad y - y_B = K_B(x - x_B), \quad (4.26)$$

де x_A, y_A, x_B, y_B – координати точок A і B , які можна визначити за співвідношеннями, що безпосередньо випливають з рис. 4.4; K_A і K_B – кутові коефіцієнти, що дорівнюють тангенсу кута, створеного прямими I-I і II-II з віссю x .

Якщо за початок відліку кута β повороту коромисла приймемо положення DC_0 коромисла і позначимо довжину коромисла DC через l_ϵ , а кут між лінією коромисла і віссю x через ψ_i , то одержимо:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \left(l_\epsilon - \frac{ds}{d\varphi} \right) \cos \psi_1 = l_\epsilon \left(1 - \delta \frac{\beta_i}{\varphi_a} \right) \cos \psi_1, \quad y_A = \left(l_\epsilon - \frac{ds}{d\varphi} \right) \sin \psi_1 = l_\epsilon \left(1 - \delta \frac{\beta_i}{\varphi_a} \right) \sin \psi_1, \\ x_B &= \left(l_\epsilon + \frac{ds}{d\varphi} \right) \cos \psi_2 = l_\epsilon \left(1 + \delta \frac{\beta_i}{\varphi_i} \right) \cos \psi_2, \quad y_B = \left(l_\epsilon + \frac{ds}{d\varphi} \right) \sin \psi_2 = l_\epsilon \left(1 + \delta \frac{\beta_i}{\varphi_i} \right) \sin \psi_2; \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

$$\hat{E}_A = \operatorname{tg} \lambda_a = \operatorname{tg} (90^\circ + \vartheta_a + \psi_a) = -\tilde{n} \operatorname{tg} (\vartheta_a + \psi_a), \quad (4.28)$$

$$\hat{E}_A = \operatorname{tg} \lambda_i = \operatorname{tg} (90^\circ - \vartheta_i + \psi_i) = \tilde{n} \operatorname{tg} (\vartheta_i - \psi_i); \quad \left. \right\}$$

$$\psi_s = -\frac{\beta_m}{2} + \beta'_i \beta_m = \beta_m (\beta'_i - 0,5).$$

Спільне розв'язання рівнянь (4.26) дає:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\delta}_0 &= \frac{\hat{E}_A \tilde{\delta}_A - \hat{E}_A \tilde{\delta}_A + \acute{o}_A - \acute{o}_A}{\hat{E}_A - \hat{E}_A}, \\ \acute{o}_0 &= \frac{\hat{E}_A \hat{E}_A (\tilde{\delta}_A - \tilde{\delta}_A) + \hat{E}_A \acute{o}_A - \hat{E}_A \acute{o}_A}{\hat{E}_A - \hat{E}_A}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Для кулачкового механізму з протилежним напрямом кутових швидкостей на фазі віддалення координат точок A і B (рис.4.4,б) будуть:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\delta}_A &= l_\varepsilon \left(1 + \delta \frac{\beta_o}{\Phi_a} \right) \cos \Psi_1, & y_A &= l_\varepsilon \left(1 + \delta \frac{\beta_o}{\Phi_a} \right) \sin \Psi_1, \\ \tilde{\delta}_A &= l_\varepsilon \left(1 - \delta \frac{\beta_o}{\Phi_i} \right) \cos \Psi_1, & y_A &= l_\varepsilon \left(1 - \delta \frac{\beta_o}{\Phi_i} \right) \sin \Psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Кутові коефіцієнти

$$K_A = \tilde{n} \operatorname{tg}(\vartheta_a - \Psi_1), \quad \hat{E}_A = -\tilde{n} \operatorname{tg}(\vartheta_i + \Psi_2). \quad (4.31)$$

Алгоритм обчислення положення осі обертання кулачка (координат точки O), яке забезпечить найменші розміри коромислового кулачкового механізму при виконанні умови, що кут тиску в будь-якому положенні не більше допустимого, аналогічний викладеному раніше.

Найменший радіус кулачка R_o і відстань l_o між осями обертання кулачка і коромисла обчислюється за формулою:

$$R_o = r_{0\max} = \sqrt{(\tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_i)^2 + (\acute{o}_n - \acute{o}_i)^2}; \quad l_o = l_{0\max} = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}, \quad (4.32)$$

де

$$x_c = l_\varepsilon \cos\left(\frac{\beta_m}{2}\right), \quad y_c = l_\varepsilon \sin\left(\frac{\beta_m}{2}\right). \quad (4.33)$$

7. Визначаємо координати теоретичного профілю кулачка (в полярній системі координат) за такими формулами:

$$R_i = \sqrt{l_\varepsilon^2 + a^2 - 2l_\varepsilon a \cos(\beta_0 + \beta_i)}; \quad \delta_i = \Phi_i - \gamma_0 + \gamma_i, \quad (4.34)$$

де

$$\beta_0 = a \cos\left(\frac{l_\varepsilon^2 + a^2 - R_0^2}{2l_\varepsilon a}\right), \quad \gamma_0 = a \cos\left(\frac{r_0^2 + a^2 - l_\varepsilon^2}{2r_0 l_\varepsilon a}\right), \quad \gamma_i = a \cos\left(\frac{R_i^2 + a^2 - l_\varepsilon^2}{2R_i l_\varepsilon a}\right). \quad (4.35)$$

8. Вибираємо радіус ролика r_p з умови обмеження контактних напружень на поверхні ролика і кулачка. Рекомендується приймати

$$r_\delta \leq 0.4r_0 \quad (4.36)$$

і перевіряти його значення з умови усунення самоперетину профілю кулачка, тобто вибрати радіус ролика r_p меншим мінімального радіуса кривизни ρ_{\min} теоретичного профілю кулачка. На практиці звичайно беруть

$$r_p \leq 0,7\rho_{\min}, \quad (4.37)$$

де

$$\rho_{i\min} = \frac{\left[a^2 + l_{\varepsilon}^2 \cdot (1 + \beta'_i)^2 - 2al_{\varepsilon} \left[(1 + \beta'_i) \cdot \cos(\beta_0 + \beta_i) \right] \right]^2}{a^2 + l_{\varepsilon}^2 \cdot (1 + \beta'_i)^3 - 2al_{\varepsilon} \left[(1 + \beta'_i)(2 + \beta'_i) \right] \cdot \cos(\beta_0 + \beta_i) + \beta''_i \cdot \sin(\beta_0 + \beta_i)},$$

9. Визначаємо координати теоретичного профілю кулачка (в полярній системі координат) за такими формулами [7]:

$$R_{li} = \sqrt{R_i^2 + r^2 - 2R_i r \cos(\theta_i)}, \quad \delta_{ni} = \delta_i + \theta_{ni} - \theta_i, \quad (4.38)$$

де

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{l_{\varepsilon} \beta'_i \cos \nu_{\partial}}{R_i}\right), \quad \vartheta_a = \frac{\left[(-l_{\varepsilon} s'_i + a \cos(\beta_i + \beta_0)) - l_{\varepsilon} \right]}{a \sin(\beta_i + \beta_0)}, \quad (4.39)$$

$$\theta_{ni} = \arcsin\left(\frac{l_{\varepsilon} \beta'_i \cos \vartheta_a}{R_{li}}\right).$$

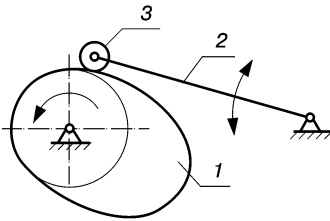


Рис. 4.5. Коромисловий кулачковий механізм

10. Будуємо теоретичний і практичний профілі кулачка.

Приклад 4.2 [9, 10]. Спроекувати коромисловий кулачковий механізм з роликом (рис.4.5), якщо задані:

- закон руху кулачка – $\omega_1 = \text{const}$;
- закон руху штовхача – синусоїдний;
- фазові кути $\varphi_a = 120^\circ$, $\varphi_{an} = 40^\circ$, $\varphi_i = 120^\circ$;
- максимальний кут розмаху коромисла $\beta_{\max} = 25^\circ$;

- мінімальний кут передачі $\mu = 40^\circ$;
- довжина коромисла $l_{\varepsilon} = 100$ мм

Розв’язання. Порядок розв’язання задач наступний, використавши наведені залежності (4.26)-(4.39):

- а) обчислимо кутові переміщення та аналоги кутових швидкостей і прискорень коромисла та будуємо їх діаграми;
- б) знаходимо мінімальний радіус кулачка і міжосьову відстань;
- в) будуємо теоретичний профіль кулачка;
- г) вибираємо радіус ролика, при якому забезпечується допустима контактна міцність кулачка і усувається самоперетин його профілю;
- д) будуємо практичний профіль кулачка.

Програма PR 4.2

Вихідні дані:

$$\beta_{\max} := 25\text{deg} \quad \varphi_B := 100\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 60\text{deg} \quad \varphi_H := 120\text{deg}$$

$$\mu := 40\text{deg} \quad l_k := 100 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості v_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

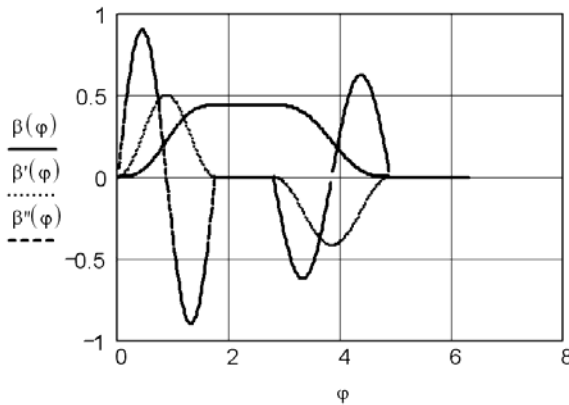
$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := k(\varphi) - \frac{\sin(2\pi \cdot k(\varphi))}{2 \cdot \pi} \quad b_k(\varphi) := 1 - \cos(2\pi \cdot k(\varphi))$$

$$c_k(\varphi) := 2 \cdot \pi \sin(2\pi \cdot k(\varphi))$$

Переміщення, аналоги швидкості і прискорення штовхача:

$$\beta(\varphi) := a_k(\varphi) \cdot \beta_{\text{max}} \quad \beta'(\varphi) := \frac{d}{d\varphi} \beta(\varphi) \quad \beta''(\varphi) := \frac{d}{d\varphi} \beta'(\varphi)$$



Визначення мінімального радіуса кулачка

$$\psi_1(\varphi) := \beta_{\text{max}} \cdot (a_k(\varphi) - 0.5) \quad \psi_2(\varphi) := \beta_{\text{max}} \cdot (a_k(\varphi) - 0.5) \quad \nu_D := \frac{\pi}{2} - \mu$$

$$x_A(\varphi) := l_k \cdot (1 - \beta(\varphi)) \cdot \cos(\psi_1(\varphi)) \quad y_A(\varphi) := l_k \cdot (1 - \beta(\varphi)) \cdot \sin(\psi_1(\varphi))$$

$$x_B(\varphi) := l_k \cdot (1 - \beta(\varphi)) \cdot \cos(\psi_2(\varphi)) \quad y_B(\varphi) := l_k \cdot (1 - \beta(\varphi)) \cdot \sin(\psi_2(\varphi))$$

$$K_A(\varphi) := \tan\left(\frac{\pi}{2} + \nu_D + \beta(\varphi)\right) \quad K_B(\varphi) := \tan\left(\frac{\pi}{2} - \nu_D + \beta(\varphi)\right)$$

$$x_0(\varphi) := \frac{(K_A(\varphi) \cdot x_A(\varphi) - K_B(\varphi) \cdot x_B(\varphi) + y_B(\varphi) - y_A(\varphi))}{K_A(\varphi) - K_B(\varphi)}$$

$$y_0(\varphi) := \frac{\left[\begin{array}{l} K_A(\varphi) \cdot K_B(\varphi) \cdot [(x_B(\varphi) - x_A(\varphi)) + K_B(\varphi) \cdot y_A(\varphi) \dots] \\ + K_A(\varphi) \cdot y_B(\varphi) \end{array} \right]}{K_B(\varphi) - K_A(\varphi)}$$

$$x_C := l_k \cdot \cos\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) \quad y_C := l_k \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right)$$

$$r_o(\varphi) := \sqrt{(x_C - x_0(\varphi))^2 + (y_C - y_0(\varphi))^2}$$

$$i := 1..359 \quad R_{0_i} := r_o\left(i \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad \max(R_0) = 44.299$$

Приймаємо $R_0 := 45$

Визначення міжосьової відстані кулачкового механізму

$$l_0(\varphi) := \sqrt{x_0(\varphi)^2 + y_0(\varphi)^2} \quad t := 1..359 \quad l_{0_t} := l_0\left(t \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$\max(l_0) = 97.63$ Приймаємо $a := 100$

Побудова теоретичного профілю кулачка

$$\beta_0 := \arccos\left[\frac{(l_k^2 + a^2 - R_0^2)}{2 \cdot l_k \cdot a}\right] \quad \gamma_0 := \arccos\left[\frac{(R_0^2 + a^2 - l_k^2)}{2 \cdot R_0 \cdot a}\right]$$

$$R(\varphi) := \sqrt{l_k^2 + a^2 - 2 \cdot l_k \cdot a \cdot \cos(\beta_0 + \beta(\varphi))}$$

$$\gamma(\varphi) := \arccos\left[\frac{(R(\varphi)^2 + a^2 - l_k^2)}{2 \cdot R(\varphi) \cdot a}\right] \quad \delta(\varphi) := \varphi - \gamma_0 - \gamma(\varphi)$$

Розрахунок радіуса ролика

$r_p := 0.4 \cdot R_0$ $r_p = 18$

$$\rho(\varphi) := \frac{\left[\begin{array}{l} a^2 + l_k^2 \cdot (1 + \beta'(\varphi))^2 \dots \\ + 2 \cdot a \cdot l_k \cdot [(1 + \beta'(\varphi)) \cdot \cos(\beta_0 + \beta(\varphi))] \end{array} \right]^{\frac{3}{2}}}{a^2 + l_k^2 \cdot (1 + \beta'(\varphi))^3 - a \cdot l_k \cdot (1 + \beta'(\varphi))(2 + \beta'(\varphi)) \cdot \cos(\beta_0 + \beta(\varphi)) \dots + \beta''(\varphi) \cdot \sin(\beta_0 + \beta(\varphi))}$$

$j := 1..290$ $\rho_{1_j} := 10^{10}$ on error $\rho\left(j \cdot \frac{\pi}{180}\right)$ $\rho_{\min} := \min(\rho_1)$

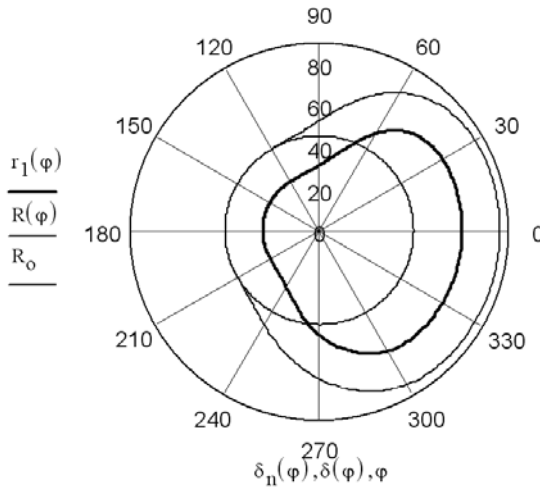
$\rho_{\min} = 679.466$ $r_{p1} := 0.7 \cdot \rho_{\min}$ $r_{p1} = 475.626$ Приймаємо $r := 18$

Побудова практичного профілю кулачка

$$\nu(\varphi) := \frac{[(-l_k \cdot \beta'(\varphi) + a \cdot \cos(\beta(\varphi) + \beta_0)) - l_k]}{a \cdot \sin(\beta(\varphi) + \beta_0)} \quad \theta(\varphi) := \operatorname{asin}\left(\frac{l_k \cdot \beta'(\varphi) \cdot \cos(\nu(\varphi))}{R(\varphi)}\right)$$

$$r_1(\varphi) := \sqrt{(R(\varphi))^2 + r^2 - 2 \cdot R(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\theta(\varphi))} \quad \theta_n(\varphi) := \operatorname{asin}\left(\frac{l_k \cdot \beta'(\varphi) \cdot \cos(\nu(\varphi))}{r_1(\varphi)}\right)$$

$$\delta_n(\varphi) := \delta(\varphi) + \theta_n(\varphi) - \theta(\varphi)$$



4.4.4. Синтез кулачкового механізму з плоским штовхачем

Алгоритм розрахунку профілю кулачка наступний.

1. Вводимо вихідні розрахункові дані.
2. Визначаємо залежність коефіцієнта k від кута повороту кулачка φ_i :
 - для періоду віддалення ($0 \leq \varphi \leq \varphi_a$) $k = \varphi_i / \varphi_a$;
 - для періоду дальнього стояння ($\varphi_a < \varphi \leq \varphi_a + \varphi_{an}$) $k=1$;
 - для періоду наближення ($\varphi_a + \varphi_{an} < \varphi \leq \varphi_a + \varphi_{an} + \varphi_i$)

$$k = 1 - \frac{\varphi - (\varphi_a + \varphi_{an})}{\varphi_i}; \quad (4.40)$$

- для періоду ближнього стояння ($\varphi_a + \varphi_{an} + \varphi_i < \varphi < 2 \cdot \pi$) $k=0$.

3. Обчислюємо інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k та прискорення c_k штовхача за формулами, що наведені в дод. А.

4. Обчислюємо аналоги переміщення s_i , швидкості s'_i та прискорення s''_i штовхача за наступними формулами:

$$s_i = a_k \cdot S_{\max}; \quad s'_i = \frac{d}{d\varphi} s_i; \quad s''_i = \frac{d^2}{d\varphi^2} s_i. \quad (4.41)$$

5. Будуємо діаграми аналогів переміщення, швидкості та прискорення штовхача залежно від кута φ .

6. Визначаємо мінімальний радіус кулачка теоретичного профілю (динамічний синтез) за формулою

$$r_0 = |-s_i''|_{\max}, \quad (4.42)$$

7. Визначаємо координати практичного профілю кулачка (в полярній системі координат) за такими формулами [3]:

$$R_i = \sqrt{(r_0 + s_i)^2 + (s_i')^2}; \quad \delta_i = \varphi_i + \arcsin(s_i'/R_i), \quad (4.43)$$

8. Будуємо практичний профіль кулачка.

Приклад 4.3 [9,10]. Спроекувати кулачковий

механізм з плоским штовхачем (рис.4.6), якщо задані:

- закон руху кулачка – $\omega_1 = \text{const}$;
- закон руху штовхача – синусоїдний;
- фазові кути $\varphi_a = 120^\circ$, $\varphi_{an} = 40^\circ$, $\varphi_i = 90^\circ$;
- максимальний хід штовхача $S_{\max} = 40$ мм;
- мінімальний кут передачі $\mu = 80^\circ$.

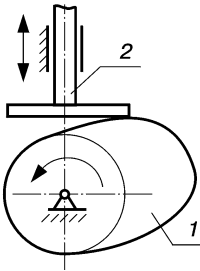


Рис. 4.6. Кулачковий механізм з плоским штовхачем

Розв'язання. Порядок розв'язання задач наступний, використавши наведені залежності (4.40) – (4.43):

- а) обчислимо кутові переміщення та аналоги швидкостей і прискорень штовхача та будуємо їх діаграми;
- б) знаходимо мінімальний радіус кулачка;
- в) будуємо практичний профіль кулачка.

Програма PR 4.3

Вихідні дані:

$$h_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad \mu := 80\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} .. 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := \frac{1 - \cos(\pi \cdot k(\varphi))}{2} \quad b_k(\varphi) := \frac{\pi \cdot \sin(\pi \cdot k(\varphi))}{2} \quad c_k(\varphi) := \frac{\pi^2 \cos(\pi \cdot k(\varphi))}{2}$$

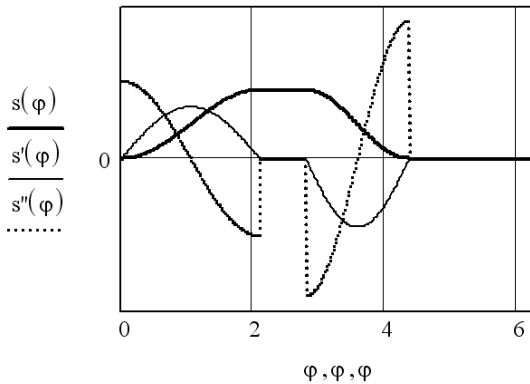
Переміщення, аналоги швидкості і прискорення штовхача:

$$S_{\max} := \frac{h_{\max}}{\sin(\mu)} \quad s(\varphi) := a_k(\varphi) \cdot S_{\max}$$

$$s'(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{b_k(\varphi) \cdot S_{\max}}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow \frac{-b_k(\varphi) \cdot S_{\max}}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$s''(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{c_k(\varphi) \cdot S_{\max}}{\varphi_B^2} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow \frac{c_k(\varphi) \cdot S_{\max}}{\varphi_H^2} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$h(\varphi) := s(\varphi) \cdot \sin(\mu) \quad h_v(\varphi) := s'(\varphi) \cdot \sin(\mu) \quad h_a(\varphi) := s''(\varphi) \cdot \sin(\mu)$$



Визначення мінімального радіуса кулачка

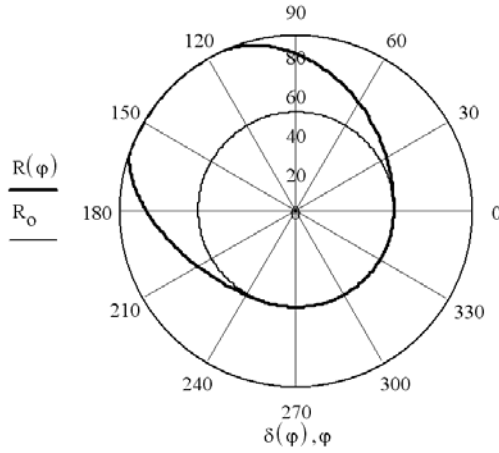
$$r_0(\varphi) := |s''(\varphi)| - h(\varphi) \quad i := 1..250 \quad R_{0_i} := r_0\left(i \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\min(R_0) = -40 \quad \text{Приймаємо} \quad R_0 := 50$$

Побудова профілю кулачка

$$R(\varphi) := \sqrt{(R_0 + h(\varphi))^2 + h_v(\varphi)^2}$$

$$\delta(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \varphi + \text{asin}\left(\frac{h_V(\varphi)}{R(\varphi)}\right) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow \varphi & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow \varphi + \text{asin}\left(\frac{h_V(\varphi)}{R(\varphi)}\right) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow \varphi & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$



ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

5.1. Загальні відомості

Зубчасті передачі дуже широко використовуються в техніці. Вони є важливим елементом більшості машин і приладів. Тому велике значення набуває їх грамотне проектування. Дослідження та проектування зубчастих механізмів є частиною курсового проекту з теорії механізмів і машин для студентів машинобудівних і механічних спеціальностей.

Залежно від розміщення осей валів, між якими здійснюється передача обертового руху, зубчасті передачі поділяються на три типи [2, 7]:

1. Передачі циліндричними зубчастими колесами між паралельними валами. Такі передачі бувають прямозубі, косозубі та шевронні.

2. Передачі конічними зубчастими колесами між валами, осі яких перетинаються. Такі передачі бувають прямозубі, косозубі та з криволінійним зубом.

3. Передачі гіперболоїдними зубчастими колесами між валами, осі яких схрещуються. У зв'язку з тим, що такі зубчасті колеса важко виготовляти, на практиці розповсюджені їх спрощені варіанти, одержані вирізанням різних ділянок гіперболоїдів: гіпоїдні (у тому числі – черв'ячні) та гелікоїдні.

Різновидами передач циліндричними зубчастими колесами зовнішнього зачеплення є внутрішнє та рейкове зачеплення. У першому випадку зуби одного колеса нарізані на внутрішній поверхні циліндричного тіла, у другому – колесо перетворилось у рейку. При цьому рейку можна розглядати як зубчасте колесо діаметром, що прямує до нескінченності. Рейкове зачеплення використовують для перетворення обертового руху в поступальний або навпаки.

Терміни, визначення та позначення в зубчастих передачах регламентуються ГОСТ 16530-83 і ГОСТ 16531-83, а розрахунок геометричних параметрів здійснюється за ГОСТ 16532-70.

5.2. Геометричні параметри циліндричних евольвентних зубчастих передач

Зубчастою передачею називають триланковий механізм, у якому два рухомі зубчасті (зубчаті) колеса (або рухоме колесо і рейка) утворюють із нерухомою ланкою обертову (або обертову і поступальну) пару, а між собою – вищу пару. У таких механізмах передача руху здійснюється механічним зачепленням – зубів вхідного колеса за зуби вихідного колеса замість сил тертя, як це має місце у фрикційних передачах. Обидва колеса (рис. 5.1) мають виступи (зуби) і западини такої форми, що зуби одного колеса входять у западини другого, утворюючи при цьому вищу кінематичну пару. Кожний зуб колеса можна розглядати як окремі кулачки.

Зубчасте колесо передачі з меншим числом зубів (при їх рівності – вхідне зубчасте колесо) називають **шестірнею**, друге зубчасте колесо передачі – **колесом**.

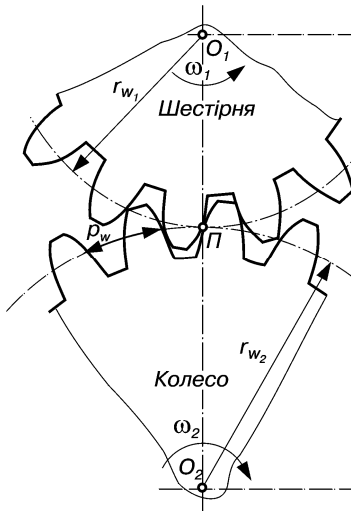


Рис. 5.1. Зубчаста передача

У найпростішому випадку зубчасту передачу можна уявити собі як два циліндричні котки (поверхні) з радіусами r_{w1} і r_{w2} , що котяться один по одному без ковзання, маючи точку дотику Π . Поверхні, що перекочуються відносно одна одної без ковзання, називаються **початковими**, відповідно й кола радіусами r_{w1} і r_{w2} називають так само.

Точку Π дотику цих кіл називають **полюсом зубчастого зачеплення**, а лінію, що проходить через точку Π паралельно осям обертання коліс і яка є миттєвою віссю відносних швидкостей зубчастих коліс, називають **полюсною лінією**. Початкові поверхні зубчастих коліс є аксоїдами у відносному русі (аксоїдами

називають поверхні, які описує миттєва вісь відносного руху коліс передачі у системі координат кожного з коліс).

Відстань між осями обертання двох зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні, називають **міжосьовою відстанню**. Як видно з рис. 5.1,

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}. \quad (5.1)$$

Передаточне відношення зубчастої передачі виражається відношенням кутових швидкостей зубчастих коліс формулою

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (5.2)$$

Якщо виразити довжину початкового кола через початковий крок p_w , тобто $2\pi r_{wi} = p_w z_i$, і підставити значення радіусів початкових кіл $r_{wi} = \frac{p_w z_i}{2\pi}$ у залежність (5.2), то можна записати передаточне відношення через числа зубів коліс:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \pm \frac{2\pi p_w z_2}{2\pi p_w z_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.3)$$

Знак “+” приймають для внутрішнього зачеплення, а “-” – для зовнішнього.

Коловим кроком зубчастого зачеплення p називають відстань між однойменними точками профілів двох сусідніх зубів (рис. 5.1), виміряних по будь-якому колу. Коловий крок

5. Зубчасті передачі

$$p = \pi d/z, \quad (5.4)$$

де d – діаметр кола, на якому виміряний крок; z – число зубів колеса.

Значення кроку p залежить від діаметра (радіуса) кола, на якому його виміряють, а тому, щоб відрізнити значення кроку на різних колах, вказують нижні індекси, як це, наприклад, виконано для початкового кроку p_w .

Основні параметри зубчастих коліс розглянемо на прикладі циліндричного зубчастого колеса (рис. 5.2) [7. 22].

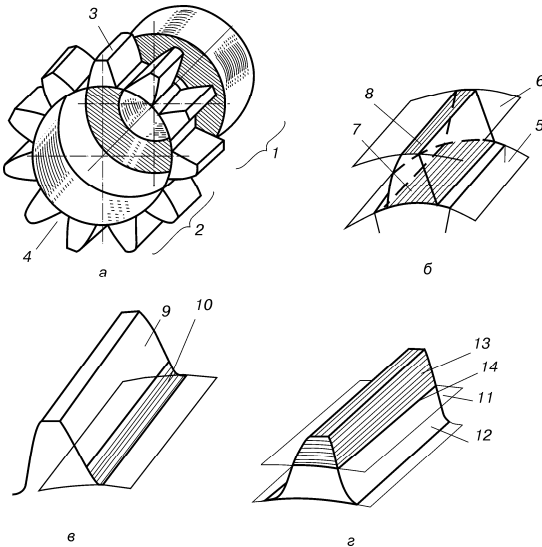


Рис. 5.2. Геометричні параметри циліндричного прямозубого колеса

Зубчасте колесо складається з *тіла* зубчастого колеса 1 і *зубчастого вінця* 2. Зубчастий вінець складається із зубів 3 і западин 4. Циліндрична поверхня, що відокремлює зуби від тіла зубчастого колеса, називається *поверхнею западин* 5. Поверхня, що обмежує зуби з протилежного від тіла зубчастого колеса боку, називається *поверхнею вершин* 6. Частина поверхні западин зубчастого колеса, що належить зубу, носить назву *основи зуба* 7, а частина поверхні вершин, що належить зубу, – *вершини зуба* 8.

Поверхня, яка обмежує зуб із боку западин, називається *бічною*. Вона складається з *головної* 9 (рис. 5.2, в) і *перехідної* 10 поверхонь. *Головною* будемо на-

зивати частину бічної поверхні, яка при взаємодії з такою самою поверхнею зуба іншого колеса може передавати рух із заданими швидкостями. Поверхні елементів вищої кінематичної пари, що забезпечують заданий рух, називаються *спряженими поверхнями*. *Перехідна поверхня* з'єднує головну поверхню з поверхнею западин. Частина головної поверхні, що взаємодіє з поверхнею зуба спряженого зубчастого колеса, називається *активною* поверхнею зуба.

Враховуючи те, що зубчасті передачі циліндричними колесами плоскі, всі її геометричні параметри можна розглядати в торцевому перетині (перпендикулярному до осі колеса). Тому замість поверхні западин розглядають коло западин, поверхні вершин – коло вершин, головної та перехідної поверхонь зуба – головний і перехідний профілі зуба, активної поверхні зуба – активний профіль зуба.

Розміри зубчастих коліс зручно задавати в частках певної лінійної величини, що пов'язана із зубом. Коловий крок для цієї функції не підходить, оскільки є ірраціональним числом. Такою величиною вибрано *модуль m* зубчастого колеса, який є відношенням колового

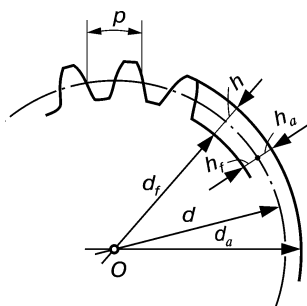


Рис. 5.3. До визначення геометричних параметрів циліндричного прямозубого колеса

або з урахуванням (5.5) маємо

кроку p до числа π . Отже,

$$m = p/\pi. \quad (5.5)$$

Модуль вимірюється у міліметрах і є величиною стандартною. Щоб пояснити вибір цієї величини, виразимо довжину деякого кола діаметром d (рис. 5.3) через число зубів колеса z :

$$\pi d = pz,$$

звідки

$$d = \frac{p}{\pi} z,$$

$$d = mz, \text{ або } r = \frac{d}{2} = \frac{mz}{2}. \quad (5.6)$$

Модуль m для одного й того самого колеса, так само як і крок p , залежить від діаметра кола, до якого він належить. Прийнято коло, для якого знаходять стандартне значення модуля, називати **ділильним**. З урахуванням (5.5) можна сказати, що ділильним називається коло, діаметр якого визначають добутком модуля на число його зубів.

Ділильна поверхня 11 ділить зуб на дві частини (рис. 5.2, г): ділильну ніжку 12 і ділильну головку 13 .

Висота ділильної ніжки

$$h_f = r - r_f = \frac{d}{2} - \frac{d_f}{2}, \quad (5.7)$$

ділильної головки

$$h_a = r_a - r = \frac{d_a}{2} - \frac{d}{2}; \quad (5.8)$$

повна висота зуба

$$h = h_f + h_a = r_a - r_f = \frac{d_a - d_f}{2}, \quad (5.9)$$

де r , d – відповідно радіус і діаметр ділильного кола; r_a , d_a – радіус і діаметр кола вершин; r_f , d_f – радіус і діаметр кола западин.

Лінія 14 перетину бічної поверхні зуба з ділильною поверхнею рис. 5.2, г) називається **лінією зуба**. Залежно від розташування лінії зуба відносно осі колеса, як уже зазначалось, розрізняють прямий зуб (прямозубі колеса), лінія якого лежить в осьовій площині зубчастого колеса, і косий зуб (косозубі або шевронні колеса), лінія якого є гвинтовою лінією сталого кроку.

Залежно від напрямку гвинтової лінії косозубі колеса можуть бути правими або лівими.

5. Зубчасті передачі

Зубчаста рейка 2 (рис. 5.4) це сектор циліндричного зубчастого колеса, ділильний радіус якого нескінченно великий. В результаті цього ділильна поверхня (коло), поверхні вершин і западин, відповідно головні бічні поверхні є паралельними площинами, тобто головний бічний профіль прямолінійний.

Для зубчастого колеса 2 із внутрішніми зубами (рис. 5.5) формули (5.4), (5.5) набувають вигляду

$$h_f = r_f - r = \frac{d_f}{2} - \frac{d}{2}; \quad h_a = r - r_a = \frac{d}{2} - \frac{d_a}{2}; \quad h = r_f - r_a = \frac{d_f}{2} - \frac{d_a}{2}.$$

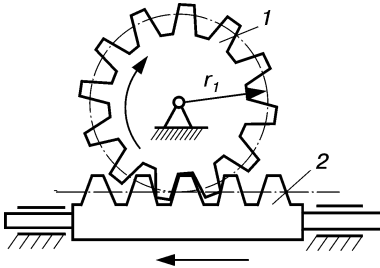


Рис. 5.4. Рейкове зачеплення

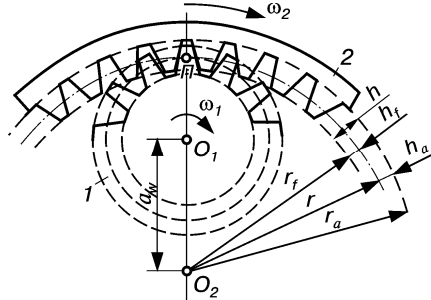


Рис. 5.5. Внутрішнє зачеплення

Для позначення геометричних і кінематичних параметрів зубчастих коліс і зубчастої передачі використовується система цифрових і літерних індексів, які відносяться до:

- 0 – зуборізного інструмента та верстатного зачеплення;
- 1 – шестірні, черв'яка;
- 2 – колеса, черв'ячного колеса;
- a* – поверхні або кола вершин і головки зуба;
- f* – поверхні або кола западин і ніжки зуба;
- b* – основної поверхні (кола);
- w* – початкової поверхні, початкового кола або загального випадку передачі;
- e* – зовнішнього торцевого перерізу кіничного зубчастого колеса;
- i* – внутрішнього торцевого перерізу кіничного зубчастого колеса;
- m* – середнього перерізу кіничного зубчастого колеса;
- x* – основного перерізу або довільно назначеного перерізу;
- y* – довільно назначеного концентричного кола;
- c* – плоского колеса;
- v* – еквівалентного циліндричного колеса;
- n* – нормального перетину;
- t* – торцевого перетину;
- l* – граничної точки профілю зубів;
- p* – нижньої точки активного профілю;
- Δ – кола загострення вершин та западин.

Примітка: Якщо параметр належить до ділильної поверхні або ділильного кола, літерний індекс не ставиться. Встановлено такий порядок проставлення складних індексів: на першому місці індекси n, t, x , на другому – y, w, a, f , на третьому – e, i, m для конічних передач, на четвертому – $0, 1, 2$.

У випадках, які виключають непорозуміння, допускається опускати деякі індекси. Так, для прямозубих коліс виключають індекси t і n , для конічних – m . Якщо які-небудь індекси пропускаються, то залишені переміщуються вперед. Якщо параметри належать взагалі до зубчастого колеса, то індекси 1 або 2 опускають.

Верхній індекс * означає коефіцієнт, який характеризує відповідний параметр. Верхня риска означає, що даний параметр характеризує розмір зубів за хордою або відстань до хорди, яку вимірюють.

5.3. Основна теорема зубчастого зачеплення

Однією з найважливіших умов роботи зубчастого зачеплення є збереження за час контакту пари зубів заданого передаточного відношення, тобто щоб початкові кола котились одне по одному без ковзання. Необхідно встановити, яким вимогам повинні задовольняти спряжені профілі зубів, щоб забезпечити цю умову.

Розглянемо пару зубчастих коліс (рис. 5.6), що перебувають у зачепленні. Нехай перше колесо є вхідним і обертається навколо нерухомої осі O_1 зі сталою швидкістю ω_1 , а друге – вихідне, його кутова швидкість ω_2 , вісь обертання – O_2 . Точку контакту зубів позначимо через K , а її відстані від осей обертання – відповідно R_1 і R_2 . При таких параметрах швидкість точки K першого колеса $v_{K_1} = \omega_1 R_1$ і спрямована перпендикулярно до радіуса R_1 ; другого колеса $v_{K_2} = \omega_2 R_2$ і перпендикулярна до радіуса R_2 .

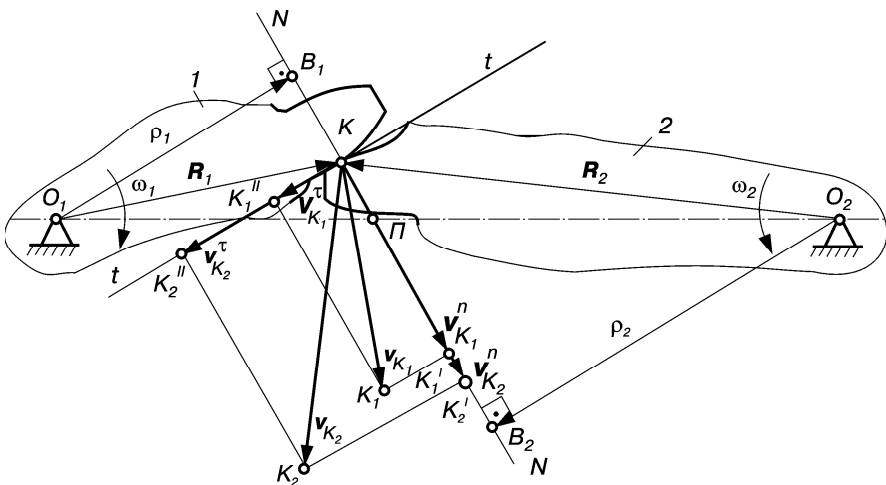


Рис. 5.6. До виводу основної теореми зубчастого зачеплення

5. Зубчасті передачі

Розкладаємо вектори цих швидкостей на дві складові, які спрямуємо вздовж спільної нормалі $N-N$, проведеної до профілів зубів через точку K , і вздовж спільної дотичної $t-t$, що також проходить через точку K .

Розглянемо складові швидкості точки K на спільну нормаль $v_{K_1}^n$ і $v_{K_2}^n$ та встановимо зв'язок між ними. Ці складові повинні бути рівними між собою ($v_{K_1}^n = v_{K_2}^n$); в інших випадках, якщо $v_{K_1}^n > v_{K_2}^n$, зуб першого колеса повинен проникнути в зуб іншого колеса, що неможливо; якщо $v_{K_1}^n < v_{K_2}^n$, зуб першого колеса повинен відставати від зуба другого колеса і тим самим повинен порушуватися контакт, але цьому заважають зовнішні сили. Отже, **для забезпечення безперервного контакту пари зубів необхідно, щоб проекції швидкостей точки контакту зубів на спільну нормаль були рівні між собою.**

Із подібності трикутників O_1B_1K і KK'_1K_1 та O_2B_2K і KK'_2K_2 складемо пропорції

$$\frac{\rho_1}{R_1} = \frac{v_{K_1}^n}{v_{K_1}}, \quad \frac{\rho_2}{R_2} = \frac{v_{K_2}^n}{v_{K_2}},$$

звідки

$$v_{K_1}^n = \frac{\rho_1 v_{K_1}}{R_1} = \omega_1 \rho_1; \quad v_{K_2}^n = \frac{\rho_2 v_{K_2}}{R_2} = \omega_2 \rho_2. \quad (5.10)$$

Враховуючи, що в цих рівностях ліві сторони тотожні, справедлива рівність

$$\omega_1 \rho_1 = \omega_2 \rho_2,$$

звідки можна записати залежність для передаточного відношення:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (5.11)$$

Нормаль $N-N$ перетинає лінію центрів O_1O_2 точці Π , яка називається полюсом зубчастого зачеплення. Із подібності трикутників $O_1B_1\Pi$ і $O_2B_2\Pi$ маємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\hat{I}_2 \check{I}}{\hat{I}_1 \check{I}} \quad (5.12)$$

Тоді рівняння (5.11) можна записати у вигляді

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\hat{I}_2 \check{I}}{\hat{I}_1 \check{I}}. \quad (5.13)$$

Рівність (5.13) виражає зміст основної теореми зачеплення (теореми Вілліса), яка формулюється так: **активні профілі зубів двох коліс повинні бути побудовані так, щоб нормаль у точці їх дотику в будь-який момент зачеплення проходила через точку Π (полюс зачеплення), що ділить лінію центрів у відношенні, обернено пропорційному передаточному відношенню.**

Відстань між точками O_1 і O_2 визначає міжосьову відстань

$$a_w = O_1P + O_2P.$$

При змінному значенні передаточного відношення i_{12} полюс зачеплення P займає на лінії центрів O_1O_2 змінне положення, що спостерігається в зубчастих механізмах із некруглими колесами. При сталому значенні i_{12} полюс зачеплення завжди знаходиться в одній і тій самій точці P на лінії O_1O_2 .

Якщо кутові швидкості ω_1 і ω_2 мають різні знаки, то $i_{12} < 0$ і полюс зачеплення P лежить між точками O_1 і O_2 . Цей вид зачеплення називається **зовнішнім**. Якщо кутові швидкості ω_1 і ω_2 мають один знак, то $i_{12} > 0$ і полюс зачеплення P лежить за межами відрізка O_1O_2 (див. рис. 5.5). Такий вид зачеплення називають **внутрішнім**.

Якщо при передачі обертового руху між осями O_1 і O_2 (див. рис. 5.6) передаточне відношення стає ($i_{12} = \text{const}$), то полюс зачеплення займає постійне положення, яке задовольняє умову (5.13). Відрізки O_1P і O_2P є радіусами початкових кіл r_{ω_1} і r_{ω_2} , а ρ_1 і ρ_2 – радіусами основних кіл.

Теоретично для того, щоб забезпечити основну теорему зачеплення, профілі зубів можна побудувати різними кривими. У техніці (особливо в машинобудуванні) найбільше поширені евольвентний профіль зубів, рідше використовується циклоїдне зачеплення (в основному в приладобудуванні та годинниковій промисловості) або зачеплення Новикова М.Л.

5.4. Ковзання профілів зубів

Розглянемо тепер інші складові швидкості точки контакту – $v_{K_1}^r$ і $v_{K_2}^r$. Ці складові не рівні між собою, інакше повинні бути рівні між собою швидкості v_{K_1} і v_{K_2} як за величиною, так і за напрямком. Як видно з рис. 5.6, така рівність можлива лише в одному положенні механізму, коли точка K контакту зубів буде збігатися з полюсом P . Для всіх інших положень ланок передачі $v_{K_1}^r \neq v_{K_2}^r$. В результаті цього має місце відносне ковзання профілів зубів у напрямку їх спільної дотичної $t-t$. Причому, чим далі знаходиться точка K від полюса зачеплення, тим більша швидкість ковзання. Ковзання зубів є основною причиною втрат енергії на тертя спрацювання.

Швидкість ковзання профілів зубів (див. рис. 5.6) дорівнює

$$v_S = v_{K_2}^r - v_{K_1}^r. \quad (5.14)$$

Можна показати, що для зовнішнього зачеплення

$$v_S = PK(\omega_1 + \omega_2); \quad (5.15)$$

для внутрішнього зачеплення

$$v_S = PK(\omega_1 - \omega_2); \quad (5.16)$$

5. Зубчасті передачі

Отже, чим далі розташована точка контакту K відносно полюса зачеплення Π , тим більша швидкість ковзання.

При одній і тій самій швидкості ковзання спрацювання у спряжених профілях може бути різним. Для кількісної оцінки спрацювання вводиться поняття **питомого ковзання зубів**, під яким розуміють відношення швидкості ковзання v_S точки контакту зубів до дотичної складової $v_{K_i}^t$ швидкості точки контакту відповідного колеса ($i = 1; 2$), тобто

$$\vartheta_i = \frac{v_S}{v_{K_i}^t}. \quad (5.17)$$

Для побудови діаграм питомого ковзання можна використати такі формули [7]:

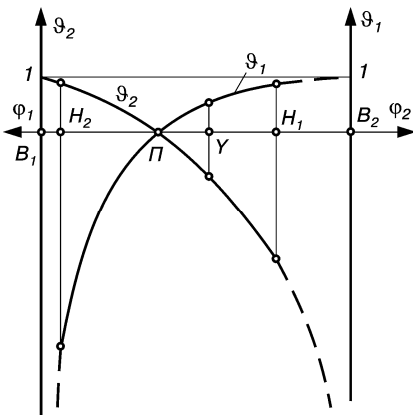


Рис. 5.7. Діаграми питомого ковзання зубів

$$\vartheta_1 = 1 + i_{21} - \frac{e}{x} i_{21}; \quad \vartheta_2 = 1 + i_{12} - \frac{e}{e-x} i_{12}, \quad (5.18)$$

де $e = B_1 B_2$ – довжина теоретичної лінії зачеплення (див. рис. 5.6); $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1$; $i_{21} = \omega_2 / \omega_1 = z_1 / z_2$; x – відстань від точки B_1 дотику лінії зачеплення з основним колом першого колеса, яку відряхуємо у напрямку до точки B_2 .

На рис. 5.7 показано приклади діаграм питомого ковзання $\vartheta_i = \vartheta_i(\varphi_i)$. При цьому треба враховувати, що кут повороту зубчастого колеса пропорційний відрізкам лінії $B_1 B_2$.

У полюсі зачеплення питома ковзання дорівнює нулю, отже, профілі перекочуються один по одному без ковзання.

На початкових головках зубів, що розташовані між колом вершин і початковим колом, питома ковзання невелике; на початкових ніжках (між початковим колом і колом западин) питома ковзання значно більше, ніж на початкових головках. На початковій ніжці першого колеса (шестірні) питома ковзання ϑ_1 значно більше, ніж на початковій ніжці іншого колеса. Це означає, що спрацювання ніжки зуба шестірні при роботі передачі буде значно більшим, ніж спрацювання початкової ніжки зуба колеса.

5.5. Властивості й рівняння евольвенти кола

Для побудови головного профілю зубів циліндричних зубчастих коліс, що використовуються в машинобудуванні, найперше застосовується евольвентний профіль. Плоскою **евольвентною кола** називають траєкторію будь-якої точки, наприклад A (рис. 5.8), прямої лінії, яка перекочується без ковзання по колу радіуса r_b ; таке коло називають **еволутою**, або **основним колом**, а пряму – **твірною прямою**.

Побудова евольвенти кола зображена на рис. 5.8. Проводимо до основного кола твірну пряму, яка дотикається до нього у точці A_0 . Потім перекочуємо твірну пряму по основному колу без ковзання. Для цього від точки A_0 відкладаємо на твірній прямій ряд однакових відрізків A_0-1 , $1-2$, $2-3$ і т. д. На основному колі від цієї ж точки відкладаємо дуги $A_0=1$, $1'=2'$, $2'=3'$ і т. д., що дорівнюють цим відрізкам.

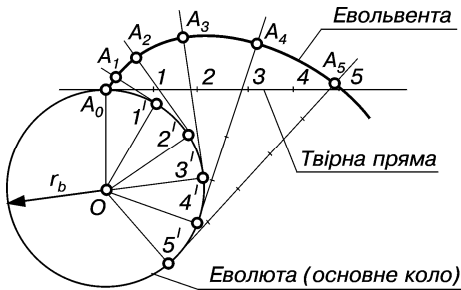


Рис. 5.8. Побудова евольвенти кола

При перекочуванні прямої по колу без ковзання точка 1 збігається з точкою $1'$, точка 2 – з точкою $2'$ і т. д. Проведемо через точки $1'$, $2'$, $3'$ і т. д. дотичні до кола (для точної побудови дотичної слід спочатку провести радіус у відповідну точку, а потім провести до нього перпендикуляр) і відкладаємо на них з точок дотику відрізки $1'-A_1$, $2'-A_2$, $3'-A_3$ і т. д., що дорівнюють відповідно відрізкам прямої A_0-1 , A_0-2 , A_0-3 і т. д. З'єднуючи точки A_0 , A_1 , A_2 і т. д. плавною кривою, одержуємо

евольвенту.

Широке використання евольвенти при проектуванні профілів зубів пояснюється низкою важливих властивостей. Відмітимо основні властивості евольвенти.

1. Твірна пряма завжди нормальна до евольвенти. Дійсно, точка дотику твірної прямої з основним колом є при утворенні евольвенти миттєвим центром обертання твірної прямої, а тому відповідні відрізки ($1'-A_1$, $2'-A_2$, $3'-A_3$ і т. д.) є миттєвими радіусами кривизни евольвенти. Оскільки радіус кривизни завжди розміщений нормально до кривої, то твірна пряма завжди нормальна до евольвенти.

2. Евольвента є кривою без перегинів, що дуже важливо при виготовленні різального інструмента.

3. Форма евольвенти залежить тільки від радіуса основного кола, тобто не залежить від параметрів спряженого колеса – це дає змогу використовувати евольвентні зубчасті колеса в коробках передач, тобто у механізмах зі змінними зубчастими колесами, у яких з одним колесом можуть входити у зачеплення колеса з різним числом зубів.

4. Евольвента починається на основному колі і завжди розташована за його межами.

5. Радіус кривизни на початку евольвенти (на основному колі) дорівнює нулю, а радіус основного кола, проведений через початок евольвенти, є плавним продовженням евольвенти всередині основного кола.

6. Дві евольвенти одного основного кола є еквідистантними (рівновіддаленими) кривими, а відстань між ними по спільній нормалі є евольвентним кроком p_α і дорівнює довжині дуги кола між початками кривих, тобто дорівнює основному кроку p_b .

5. Зубчасті передачі

Евольвента має дві гілки. Додатну гілку одержуємо при перекочуванні твірної прямої проти руху годинникової стрілки, від'ємну – при перекочуванні за рухом годинникової стрілки.

Рівняння евольвенти одержуємо з умови перекочування твірної прямої по основному колу без ковзання. Для цього розглянемо деяке довільне положення твірної прямої (рис. 5.9), яке відповідає точці Y евольвенти. Нехай

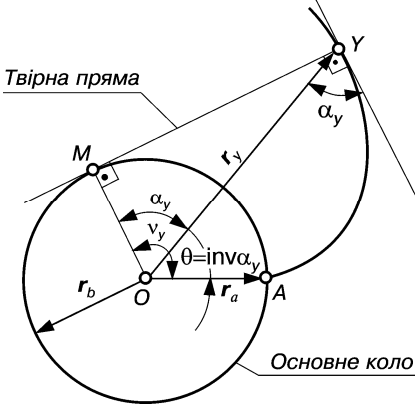


Рис. 5.9. До виводу рівняння евольвенти кола

координатами точки Y евольвенти будуть: r_y – радіус-вектор і θ – кут відхилення радіуса-вектора r_y від радіуса r_a , проведеного через початок евольвенти A . Проводимо через точку Y дотичну до основного кола радіуса r_b . Точка дотику M є для евольвенти у точці Y центром кривизни, а відрізок MU – її миттєвим радіусом кривизни. Точку дотику M з'єднаємо з центром основного кола O , і позначимо кут між променями OM і OY через α_y . Цей кут називається **кутом профілю** – гострий кут між дотичною до профілю у відповідній точці Y і радіусом-вектором цієї точки r_y . Очевидно, що цей кут дорівнює куту MOY , оскільки лінія OM

і дотична у точці Y паралельні одна одній.

Із трикутника OMU маємо

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y. \quad (5.19)$$

Оскільки евольвента одержана перекочуванням твірної прямої відносно основного кола без ковзання, то $MU = \cup MA$. Враховуючи, що

$$MU = r_b \operatorname{tg} \alpha_y \quad \text{і}$$

$\cup MA = r_b (\alpha_y + \theta)$, отримуємо

$$r_b \operatorname{tg} \alpha_y = r_b (\alpha_y + \theta),$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \alpha_y + \theta.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно θ , маємо

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

Вираз $\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$ скорочено позначають знаком $\operatorname{inv} \alpha_y$, і читають “інволюта альфа-ігрек”:

$$\operatorname{inv} \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y. \quad (5.20)$$

Кут $\operatorname{inv} \alpha_y = \theta$ називається евольвентним кутом; він позначає кут між радіусами, проведеними через початок евольвенти A і точку Y . Для інволютної функції складено таблиці, з яких за значеннями кута α_y можна визначити функцію $\operatorname{inv} \alpha_y$ або навпаки.

Рівняння (5.19) і (5.20) є рівняннями евольвенти кола у параметричному вигляді.

Значимо, що положення точки Y на евольвенті можна задати будь-яким кутом із кутів α_y , $v_y = \alpha_y + \text{inv}\alpha_y$, $\text{inv}\alpha_y$ або радіусом-вектором r_y , що проходить через початок евольвенти A , і радіусом $\rho_y = MY$, проведеним через центр кривизни M евольвенти у точці Y .

Радіус кривизни евольвенти у точці Y

$$\rho_y = MY = r_b \text{tg} \alpha_y = r_b v_y. \quad (5.21)$$

5.6. Теоретичний вихідний і твірний контури

Одним із багатьох важливих факторів, які лежать в основі досягнень сучасної техніки, є **взаємозамінність**, тобто здатність спряжених деталей з'єднуватись одна з одною без спеціальної пригонки або підбору. Взаємозамінність можлива лише на базі стандартизації, тобто при суворій регламентації форми, розмірів, якості й точності різних деталей та виробів.

Зубчасте колесо – одна із найскладніших і точних деталей машин; для його виготовлення вимагається спеціальне дороге обладнання, різальний та вимірювальний інструмент. Тому стандартизація параметрів зубчастого зачеплення важлива як з технічної, так і з економічної точки зору.

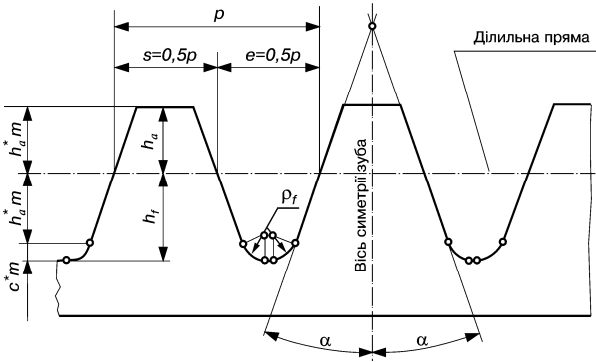


Рис. 9.10. Теоретичний вихідний контур

За базу при стандартизації зубчастих коліс можна прийняти різні параметри. На основі багаторічної практики при стандартизації коліс і зуборізного інструменту в усіх країнах світу приймають параметри зубчастої рейки з прямолінійним профілем (рис. 9.10). Рейковий профіль, який покладено в основу стандарту, називається **теоретичним вихідним контуром** (ТВК) або коротко – вихідним конту-

ром. Параметри вихідного контуру стандартизовані (ГОСТ 13755–68). Це прямобічний рейковий контур із рівномірно розташованими симетричними зубами трапецієподібної форми; перехід від профілю зуба до лінії западин викреслений дугою кола. За базу для визначення елементів зубів та їх розмірів вибирають ділильну пряму (площину), яка перпендикулярна до осей симетрії зубів рейки, і товщина зуба на ній дорівнює ширині западини ($s=e=p/2$). Частина зуба, що знаходиться між ділильною поверхнею і поверхнею вершин, називається ділильною головою зуба, а частина зуба між ділильною поверхнею і поверхнею западин – ділильною ніжкою зуба.

5. Зубчасті передачі

Відстань між однойменними профілями сусідніх зубів по ділильній або будь-якій іншій паралельній прямій називають кроком p вихідного контуру:

$$p = \pi m. \quad (5.22)$$

Висота ділильної головки зуба вихідного контуру

$$h_a = h_a^* m, \quad (5.23)$$

де h_a^* – коефіцієнт висоти головки зуба (відношення висоти головки зуба до модуля: $h_a^* = h_a / m$).

Ділильна ніжка зуба $h_f = h_f^* m$ вища від головки на величину $c = c^* m$ – радіальний зазор, де c^* – коефіцієнт радіального зазору ($c^* = c/m$). Отже, коефіцієнт висоти ніжки зуба $h_f^* = h_a^* + \tilde{n}^*$, а висота ділильної ніжки зуба

$$h_f = (h_a^* + c^*) m. \quad (5.24)$$

Кут α між бічною стороною та віссю зуба називається кутом профілю вихідного контуру.

ГОСТ 13755–68 регламентує параметри вихідного контуру: $h_a^* = 1,0$; $c^* = 0,24$; $\alpha = 20^\circ$. При цьому висота зуба

$$h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*) m = 2,25 m. \quad (5.25)$$

Прямолинійний профіль вихідного контуру плавно спряжений з лінією його западин дугою радіуса

$$\rho_f = \rho_f^* m \approx 0,384 m, \quad (5.26)$$

де ρ_f^* – коефіцієнт радіуса перехідної кривої ($\rho_f^* = \rho_f / m$).

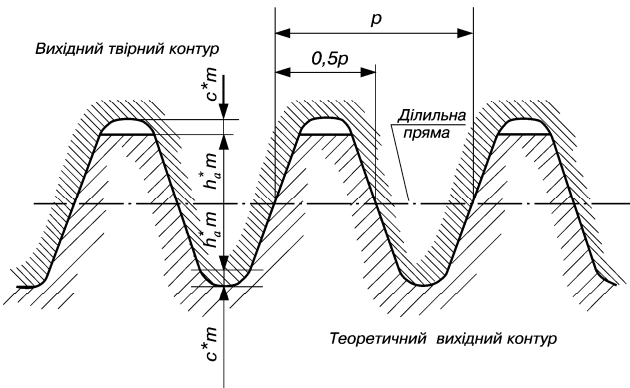


Рис. 5.11 Вихідний твірний контур

Геометричні параметри різального інструменту визначаються вихідним твірним (виробничим) контуром (ВТК), або коротко – твірним контуром (рис. 5.11). **Вихідним твірним рейковим контуром** називають контур зубів рейки, який ніби заповнює западини теоретичного вихідного профілю, як відливка заповнює форму.

При цьому між лінією западин твірного контуру й лінією вершин вихідного зберігається радіальний зазор $c = c^* m$ для того, щоб поверхня западин

різального інструменту не брала участі в процесі різання. У межах цього зазору зберігається також перехід по дузі кола від профілю зуба до лінії западин ВТК.

Отже, вихідний твірний контур має ділильну ніжку такої самої форми і розмірів, як і вихідний контур.

Для одержання радіального зазору в зубчастому зачепленні ділильна головка твірного контуру виготовляється вищою за головку вихідного контуру на величину c . Отже, ділильна пряма твірного контуру ділить зуб по висоті на дві рівні частини, а повна висота зуба

$$h = 2(h_a^* + c^*)m. \quad (5.27)$$

Колесо із зовнішніми зубами, нарізане твірним рейковим контуром при збереженні на ділильному колі теоретичної товщини зуба $s = \pi m / 2$ і теоретичного радіального зазору c^*m у западині рейки, називають твірним зубчастим колесом. Таке колесо є різальним інструментом при зубодовбанні.

5.7. Розрахунок геометричних параметрів циліндричних прямозубих зубчастих коліс з умови верстатного зачеплення

Розглянемо зачеплення зубчастого колеса, що нарізається, з прямозубою твірною рейкою, в процесі якого на заготовці формуються зуби відповідної геометрії та розмірів [7, 22]. Картину зачеплення будемо розглядати в торцевому перетині (рис. 5.12, а).

У рейковому зачепленні рейка здійснює поступальний рух, а колесо – обертний. Такі ж рухи повинні виконувати ланки верстатного зачеплення. Необхідну швидкість v_0 руху твірної рейки, яка спрямована паралельно ділильній прямій, визначають із співвідношення

$$v_0 = \omega_i r_i, \quad (5.28)$$

де ω_i – кутова швидкість заготовки; r_i – радіус ділильного кола зубчастого колеса, що нарізається. У цій формулі й далі індекс 0 позначає параметри ріжучого інструменту, а індекс $i = 1$ або $i = 2$ – відповідно шестірні або колеса. Індекс i можна опустити, коли його значення неістотне.

Із формули (5.28) випливає, що при нарізанні зубчастого колеса рейковим інструментом ділильне коло є центроїдою у відносному русі твірного контуру і торцевого перетину заготовки. Інакше кажучи, в процесі нарізання деяка лінія твірного контуру, що дотикається ділильного кола, перекочується по ньому без ковзання. Така пряма твірного контуру називається початковою. На рис. 5.12, а ділильна пряма 1 знаходиться на відстані $x_i m$ від ділильного кола, а значить, від початкової прямої 2. Ця відстань називається **зміщенням вихідного твірного контуру**, де $x_i = x_i m / m$ – **коефіцієнт зміщення**. Зміщення вважається додатним, якщо ділильна пряма і ділильне коло не перетинаються (рис. 5.12, а).

Зубчасті колеса, зуби яких утворені при $x = 0$, тобто коли початкова пряма твірного контуру є його ділильною прямою, називаються зубчастими колесами без зміщення (інколи – нульовими). При $x \neq 0$ одержуємо зубчасті колеса із зміщенням.

5. Зубчасті передачі

Практично нарізання коліс із зміщенням ніяких ускладнень не викликає і досягається встановленням інструменту на відповідній відстані від осі заготовки. Можливість вибору зміщення при нарізанні зубчастих коліс дає змогу керувати у широких межах геометричними та якісними характеристиками передач.

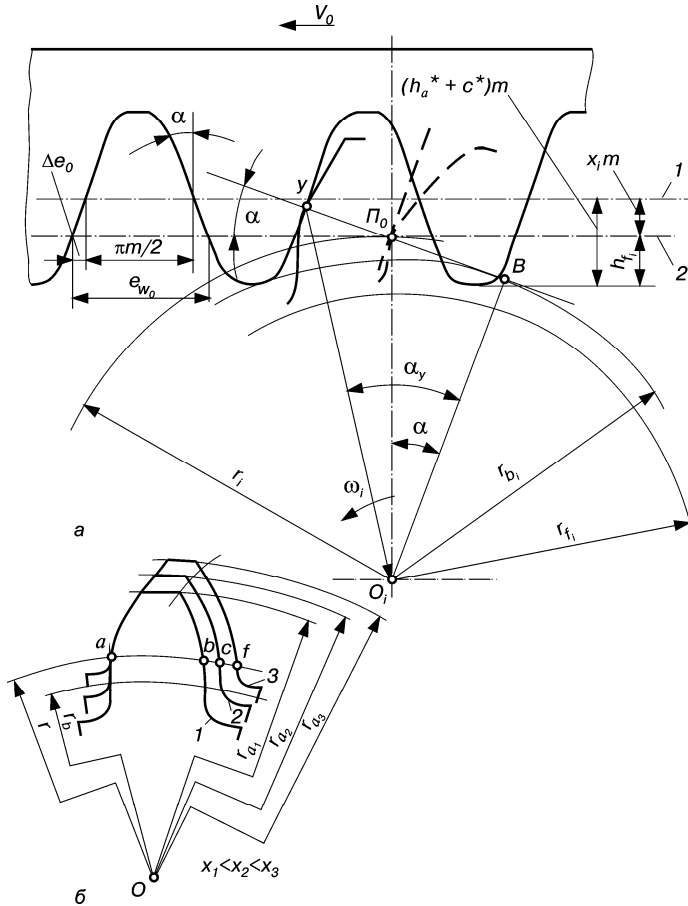


Рис. 9.12. Верстатне зачеплення

На рис. 5.12, б зображено профілі зубів трьох коліс, що мають однакову кількість зубів, нарізані одним і тим самим інструментом, але з різним зміщенням: $x_1 < x_2 < x_3$. Колеса мають однакові радіуси діляльного й основного кіл, а значить, профілі зубів усіх трьох коліс окреслені однією й тою самою евольвентою, але товщини зубів $s_1 = \cup ab$, $s_2 = \cup ac$, $s_3 = \cup af$ і радіуси кіл вершин r_{a_1} , r_{a_2} , r_{a_3} у коліс будуть різними. Із збільшенням коефіцієнта зміщення x товщина зуба біля основи збільшується, а біля вершини зменшується, тобто коефіцієнт зміщення суттєво впливає на форму зуба. Отже, з трьох зубів, що розглядаються, зуб третього колеса буде найміцнішим. Крім цього, для евольвентної частини профілю зуба третього колеса

використовується ділянка евольвенти, яка найвіддаленіша від її основного кола і має більший радіус кривизни, що сприяє зменшенню спрацювання і контактних напружень бічної поверхні зуба. Таким чином, вибираючи при проектуванні той чи інший коефіцієнт зміщення, можна впливати на форму зубів і на якість зубчастої передачі, наділяючи її необхідними властивостями. Проте слід зауважити, що така залежність форми зубів і властивостей передачі від коефіцієнта зміщення x суттєво відчутна при малих числах зубів і послаблюється в міру збільшення z .

Враховуючи, що початкова пряма інструменту обкочується без ковзання по ділильному колу заготовки, крок зубів твірною контуру слід відкласти z_i разів на ділильному колі зубчастого колеса, яке нарізується. Причому зміщення інструменту відносно заготовки не змінює кроку по дузі ділильного кола (ділильного колового кроку), оскільки крок рейки по будь-якій прямій, паралельній ділильній, залишається сталим (див. рис. 5.10) – $p = \pi m$, змінюється лише співвідношення між товщиною зуба s_i і шириною западини e_i зубчастого колеса ($p = s_i + e_i$).

При обкатці зубчастого колеса рейковим інструментом зуб рейки профілює западину, а западина – зуб колеса, що нарізається. Оскільки всі розміри початкової прямої твірної рейки переносяться без зміни на дугу ділильного кола, товщина зуба колеса по цій дузі s_i (ділильна колова товщина зуба) дорівнює ширині западини e_{w_0} рейки на початковій прямій. При зміщенні $x_i m$ (рис. 5.12, а) ширина западини рейки на початковій прямій

$$e_{w_0} = \frac{p}{2} + 2\Delta e_0 = \frac{\pi m}{2} + 2mx_i \operatorname{tg} \alpha.$$

Тому при нарізанні зубчастого колеса із зміщенням $x_i m$ ділильна колова товщина його зуба

$$s_i = e_{w_0} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right), \quad (5.29)$$

а ширина його западини (*ділильна колова ширина западини*)

$$e_i = m \left(\frac{\pi}{2} - 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (5.30)$$

Дно западини зубчастого колеса профілюється вершиною зуба твірної рейки. Тому розмір ділильної ніжки зубчастого колеса визначається глибиною проникнення зуба рейки у заготовку. Згідно з рис. 5.12, а

$$h_{f_i} = m(h_a^* + c^*) - x_i m = m(h_a^* + c^* - x_i). \quad (5.31)$$

Тоді радіус кола западин

$$r_{f_i} = r_i - h_{f_i} = r_i - m(h_a^* + c^* - x_i), \quad (5.32)$$

де $r_i = d_i / 2$ – радіус ділильного кола зубчастого колеса ($d_i = mz_i$).

5. Зубчасті передачі

Для знаходження радіуса основного кола r_{b_i} використаємо основну теорему зачеплення, згідно з якою спільна нормаль у точці дотику Y спряжених профілів (рейки і колеса) повинна проходити через полюс верстатного зачеплення і бути дотичною до основного кола (див. параграф 5.5). Тому перпендикуляр O_iB до нормалі YP_0 буде радіусом r_{b_i} основного кола зубчастого колеса, яке нарізається. Враховуючи, що перпендикуляр O_iB і профіль рейки паралельні, кут Π_0O_iB дорівнює куту профілю α вихідного твірного контуру. Тоді з трикутника $O_i\Pi_0B$ знаходимо

$$r_{b_i} = r_i \cos \alpha. \quad (5.33)$$

Необхідно зазначити, що в момент збігання профілю рейки з полюсом Π_0 (штрихова лінія) буде профілюватися точка евольвенти, що лежить на ділільному колі. Як видно з рисунка, кут профілю зуба колеса у точці, що лежить на ділільному колі, дорівнює куту α твірного контуру. Кут профілю у точці Y позначимо α_y .

5.8. Розрахунок геометричних параметрів циліндричної прямозубої зубчастої передачі з умови щільного зачеплення двох коліс

При щільному зачепленні зубчастих коліс (без бічного зазору між зубами), що нарізані зі зміщенням твірного контуру mx_i , центроїдами у відносному русі будуть початкові кола радіусів r_{w_1} і r_{w_2} [7, 22]. Радіуси цих кіл можна визначити з трикутників $O_1B_1\Pi$ і $O_2B_2\Pi$ (рис. 5.13):

$$r_{w_1} = \frac{r_{b_1}}{\cos \alpha_w}; \quad r_{w_2} = \frac{r_{b_2}}{\cos \alpha_w}, \quad (5.34)$$

де α_w – кут зачеплення.

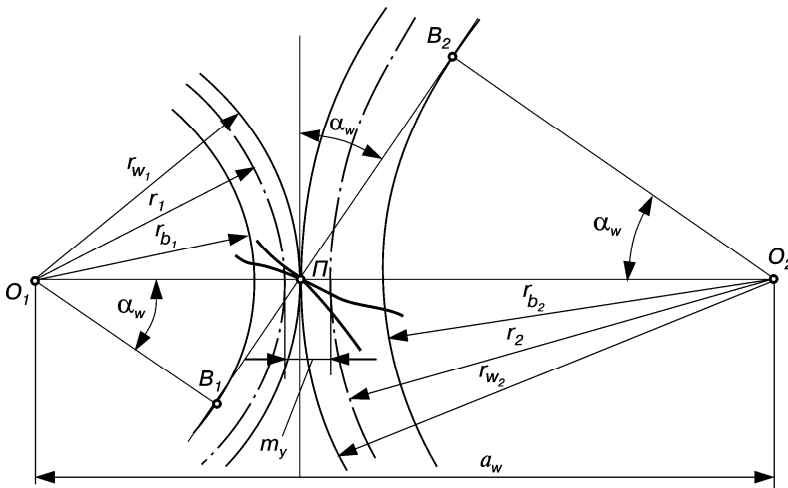


Рис. 5.13. Щільне зачеплення двох коліс

Кутом зачеплення називають кут між лінією зачеплення B_1B_2 і прямою, перпендикулярною до лінії центрів. Цей кут чисельно дорівнює куту профілю зубів кожного з коліс передачі у точці, що лежить на початковому колі.

Маючи на увазі, що $a_w = r_{w_1} + r_{w_2}$, та враховуючи формули (5.6) і (9.33), запишемо

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (5.35)$$

або

$$a_w = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (5.36)$$

де

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = r_1 + r_2. \quad (5.37)$$

Тут a – **ділительна міжосьова відстань**, що дорівнює сумі радіусів ділительних кіл зубчастих коліс.

Різниця міжосьової a_w і ділительної a відстаней називається сприймальним (видимим) зміщенням і позначається

$$m y = a_w - a, \quad (5.38)$$

де y – коефіцієнт сприймального зміщення, що виражається залежністю

$$y = \frac{m y}{m} = \frac{a_w - a}{m}. \quad (5.39)$$

На рис. 5.13 сприймальне зміщення $m y$ визначається найменшою відстанню між ділительними колами. Зокрема, якщо $x_1 = x_2 = 0$ або $x_1 = -x_2$, то $a_w = a$.

Виразами (5.35) або (5.36) можна скористатися лише після того, як буде знайдено кут зачеплення α_w передачі, який можна визначити з умови, що початкові кола перекочуються одне відносно одного без ковзання, а значить, товщина зуба по дузі початкового кола одного зубчастого колеса повинна дорівнювати ширині западини іншого по дузі його початкового кола, тобто

$$s_{w_1} = e_{w_2}, \quad e_{w_1} = s_{w_2}. \quad (5.40)$$

Попередньо знайдемо залежність для визначення товщини зуба і ширини западини на дузі довільного радіуса r_y (рис. 5.14), якщо зубчасте колесо нарізане зі зміщенням рейки $x m$. На основі побудованого рисунка можна записати

$$\psi_y + \operatorname{inv} \alpha_y = y + \operatorname{inv} \alpha,$$

де ψ – половина кута товщини зуба на ділительному колі (**ділительна кутова товщина**); ψ_y – половина кутової товщини зуба на дузі кола радіуса r_y .

5. Зубчасті передачі

Замінюючи кутову товщину зуба коловою ($s = 2r\psi$), одержуємо

$$\frac{s_y}{2r_y} + \text{inv}\alpha_y = \frac{s}{2r} + \text{inv}\alpha.$$

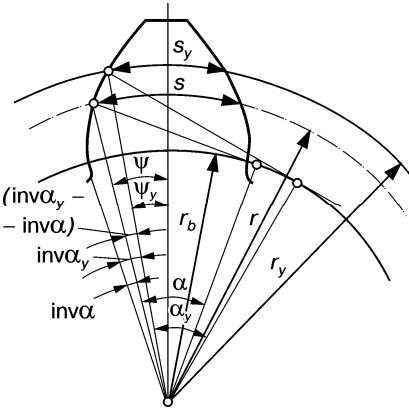


Рис. 5.14. До виводу товщини зуба

Після нескладних перетворень і з урахуванням залежностей (5.6), (5.29), маємо формулу для визначення товщини зуба

$$s_y = 2r_y \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \text{tg}\alpha}{z} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y \right). \quad (5.41)$$

Аналогічно отримуємо формулу для визначення ширини западини:

$$a_y = 2r_y \left(\frac{\pi}{2z} - \frac{2x \text{tg}\alpha}{z} - \text{inv}\alpha + \text{inv}\alpha_y \right). \quad (5.42)$$

Використовуючи залежність (5.41) і (5.42), записуємо товщину зуба шестірни на початковому колі ($r_y = r_{w1}$, $x = x_1$, $z = z_1$,

$\alpha_y = \alpha_w$) і ширину западини колеса ($r_y = r_{w2}$, $x = x_2$, $z = z_2$, $\alpha_y = \alpha_w$) та підставимо у залежність (5.40). Після перетворень з урахуванням формули (5.34) одержимо рівняння зачеплення циліндричної евольвентної передачі, яке зв'язує кут зачеплення α_w з коефіцієнтом суми зміщень $x_2 = x_1 + x_2$ і числами зубів зубчастих коліс z_1 і z_2 :

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{2(x_1 + x_2) \text{tg}\alpha}{z_1 + z_2}. \quad (5.43)$$

Діаметри кіл вершин, а значить, і висота ділительних головок розраховуються з умови одержання бажаного радіального зазору c у зачепленні зубчастих коліс. Стандарт не регламентує строго величину c . Найбільше розповсюдження одержали передачі, в яких радіальний зазор дорівнює c^*m , де $c^* = 0,25$. Для таких передач визначимо величину ділительної головки h_a зуба (рис. 5.15).

Як видно з рис. 5.15, відстань між колами западин можна уявити як суму

$$h_{fi} + ym + h_{fj} = h + c^*m.$$

Тут і далі, як і раніше, індекси i і j можуть набувати тільки два незбігаючі значення: 1 або 2.

Тоді повна висота зуба

$$h = h_{fi} + h_{fj} + o\delta - c^*m. \quad (5.44)$$

Висота ділительної головки зуба (за умови $h_1 = h_2 = h$)

5.9. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач

$$h_{a_i} = h - h_{f_i}, \quad (5.45)$$

або з урахуванням залежності (5.31)

$$h_{a_i} = m(h_a^* + y - x_j), \quad (5.46)$$

де x_j – коефіцієнт зміщення при нарізанні j -го зубчастого колеса; y – коефіцієнт сприймального зміщення.

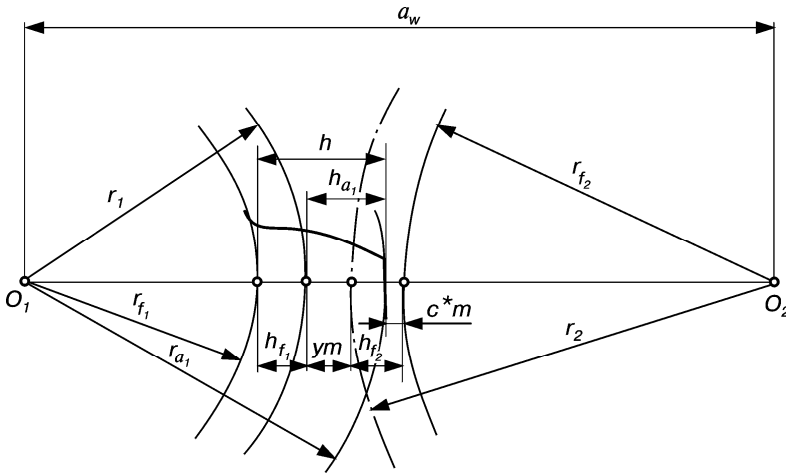


Рис. 5.15. До визначення висоти ділильної головки зуба

Отже, радіус кола вершин

$$r_{a_i} = r_i + m(h_a^* + y - x_j). \quad (5.47)$$

У ГОСТ 16532–70 розрахунок геометрії зубчастої передачі наведений з використанням коефіцієнта зрівняльного зміщення

$$\Delta_y = x_\Sigma - y. \quad (9.48)$$

У такому випадку формула для визначення радіуса кола вершин має вигляд

$$r_{a_i} = r_i + m(h_a^* + x_i - \Delta_y). \quad (5.49)$$

5.9. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач

Раніше розглядалися здебільшого зачеплення прямозубими циліндричними колесами. У таких передачах контакт між зубами проходить по прямій, паралельній осям обертання, причому зуби одночасно по всій довжині входять у зачеплення й одночасно виходять із нього. Картина зачеплення у будь-якій площині, перпендикулярній до осі обертання коліс, однакова за геометрією і часом. Тому неточності, які завжди мають місце при виготовленні зубчастих коліс (наприклад, неточність профілю, несталість кроку та ін.), а також деформації та спрацювання деталей

5. Зубчасті передачі

погіршують їх роботу (збільшується шум, зменшується довговічність передачі тощо). Крім цього, плавність роботи у прямозубих передачах порівняно невелика.

Для усунення вказаних недоліків, як уже зазначалось, на практиці часто використовують косозубі або шевронні циліндричні передачі. Бічну поверхню косої зуба утворює пряма AB_1 поверхні N (рис. 5.16, а), яка обкочується без ковзання відносно основного циліндра радіуса r_b . Пряма AB_1 утворює з твірною AB основного циліндра кут β . Цей кут називають кутом нахилу зубів. Кожна точка прямої AB_1 описує таку ж евольвенту, як і точка A , утворюючи при цьому не циліндричну, а гвинтову лінійчасту евольвентну поверхню зуба.

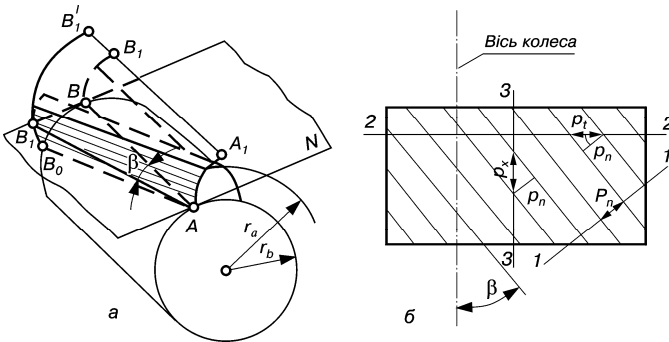


Рис. 5.16. До геометрії косозубих циліндричних передач

Косозубі циліндричні зубчасті колеса нарізаються рейками, лінії зубів яких складають з віссю колеса, що нарізається, кут β . На рис. 5.16, б зображено план косозубої вихідної твірної рейки, на якій нанесені лінії зубів. При такому розташуванні ліній зубів їх крок можна вимірювати у трьох плоских перетинах рейки:

а) перетин 1–1, нормальний до теоретичної лінії зубів, у якому вимірюють нормальний крок p_n ;

б) перетин 2–2, перпендикулярний до осі зубчастого колеса, що нарізається рейкою (торцевий перетин), у якому вимірюють торцевий крок p_t ;

в) перетин 3–3 (осьовий перетин) площиною, паралельною осі зубчастого колеса, що нарізається рейкою, у якому вимірюють осьовий крок p_x .

Контур зубчастої рейки в нормальному перетині і є тим вихідним твірним контуром, розміри якого залежать від розрахункового модуля m .

Тому

$$p_n = p = \pi m. \quad (5.50)$$

Із рис. 9.21, б легко одержати значення торцевого і осьового кроків зубів залежно від нормального:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \pi \frac{m}{\cos \beta} = \pi m_t; \quad (5.51)$$

$$p_x = \frac{p_n}{\sin \beta} = \pi \frac{m}{\sin \beta} = \pi m_x, \quad (5.52)$$

де m_t і m_x – відповідно торцевий і осьовий модулі, які визначаються формулами

$$m_t = m / \cos \beta; \quad m_x = m / \sin \beta. \quad (5.53)$$

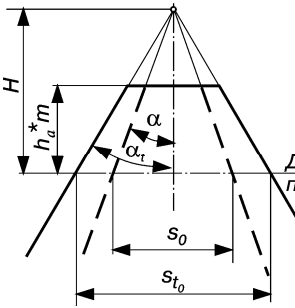


Рис. 5.17. До визначення параметрів торцевого контуру косозубої рейки

Для розрахунку геометричних параметрів косозубих зубчастих коліс важливо визначити параметри торцевого контуру косозубої рейки, оскільки цей контур профілює евольвенту зубчастого колеса.

На рис. 5.17 накладено профілі зуба косозубої рейки в торцевому (контурна лінія) і нормальному (штрихова лінія) перетинах. Товщина зуба і ширина западини рейки у її ділильній площині рівні між собою, причому в торцевому перетині

$$s_{t0} = e_{t0} = \pi \frac{m}{2 \cos \beta}. \quad (5.54)$$

Кут профілю α_t торцевого перетину рейки визначається з умови, що розмір H від ділильної прямої до точки перетину бічних профілів зуба у будь-якому перетині один і той самий. Тоді можна записати

$$\frac{s_0}{2H} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{і} \quad \frac{s_{t0}}{2H} = \operatorname{tg} \alpha_t,$$

або

$$H = \frac{s_0}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{s_{t0}}{2 \operatorname{tg} \alpha_t}.$$

З урахуванням (5.54)

$$\frac{\pi m}{4 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\pi m}{4 \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta},$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}. \quad (5.55)$$

Коефіцієнт зміщення x_t , віднесений до торцевого модуля m_t , визначається з рівності зміщень у нормальному і торцевому перетинах:

$$m x = m_t x_t = \frac{m}{\cos \beta} x_t,$$

або

$$x_t = x \cos \beta. \quad (5.56)$$

5. Зубчасті передачі

Доведення формул для розрахунку косозубих передач спеціально можна не виконувати, а використати аналітичні формули для прямозубої передачі, переписавши останні з урахуванням того, що в торцевому перетині необхідно використовувати торцевий модуль m_t , торцевий кут профілю α_t і торцевий коефіцієнт зміщення x_t . Виняток складають розміри зубів за висотою, при обчисленні яких треба використовувати розрахунковий модуль m , оскільки відповідні розміри рейки однакові у всіх перетинах. У табл. 5.1 наведено деякі розрахункові формули для прямозубих і косозубих зубчастих передач.

Таблиця 5.1

Геометричні параметри циліндричних зубчастих передач

| Параметр | Прямозубі передачі | Косозубі передачі |
|--------------------------|---|--|
| Радіус ділильного кола | $r_i = \frac{mz_i}{2}$ | $r_i = \frac{m_t z_i}{2} = \frac{mz_i}{2 \cos \beta}$ (5.57) |
| Радіус основного кола | $r_b = r_i \cos \alpha$ | $r_b = r_i \cos \alpha_t$ (5.58) |
| Ділильна товщина зуба | $s_i = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right)$ | $s_{t_i} = m_t \left(\frac{\pi}{2} + 2x_{t_i} \operatorname{tg} \alpha_t \right)$, або з урахуванням (5.55), (5.56) $s_{t_i} = \frac{m}{\cos \beta} \left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right)$ (5.59) |
| Ділильна ширина западини | $e_i = m \left(\frac{\pi}{2} - 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right)$ | $e_{t_i} = \frac{m}{\cos \beta} \left(\frac{\pi}{2} - 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right)$ (5.60) |
| Міжосьова відстань | $a_w = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$ | $a_w = a \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{tw}}$ (5.61) |
| Інволютна функція | $\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{inv} \alpha_{tw} = \operatorname{inv} \alpha_t + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha$ (5.62) |

Інші параметри (ділильна висота ніжки і головки зуба h_f і h_a , ділильна міжосьова відстань a , сприймальне зміщення um , радіус кола вершин) визначаються за формулами, одержаними для прямозубих передач.

Формули розрахунку геометрії косозубих циліндричних передач загальні, і з них легко одержати формули для розрахунку прямозубих передач, прийнявши кут $\beta = 0$ (див. табл. 5.1).

5.10. Геометричні та кінематичні умови існування передачі

Профілі зубів, їх розташування відносно ділильного кола, розміри зубів за висотою та їх товщина на кожному зубчастому колесі, а отже, і властивості самої передачі, однозначно визначаються сукупністю значень трьох величин: коефіцієнтів змішень x_1, x_2 і кута нахилу лінії зуба β . Вибір потрібних значень цих величин для конкретної зубчастої передачі (z_1, z_2, m) – один із перших і важливих етапів її проектування. Невдалий вибір цих параметрів (x_1, x_2, β) може призвести до погіршення кінематичних і міцнісних характеристик передачі або навіть до неможливості перетворення руху за заданим законом. Розглянемо явища, при яких неможлива реалізація запланованих кінематичних функцій передачі, і виведемо залежності, які описують їх [7, 22]. Ці залежності дозволяють сформулювати умови, які повинні задовольняти вибрані значення x_1, x_2 і β , щоб вказані явища були відсутні, тобто сформулювати умови існування передачі. До таких умов належать:

- 1) забезпечення плавності роботи зубчастої передачі;
- 2) усунення підрізання зубів;
- 3) усунення загострення зубів;
- 4) усунення інтерференції зубів.

5.10.1. Коефіцієнт перекриття

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується коефіцієнтом перекриття. Для його визначення розглянемо пару зубчастих коліс, які перебувають у зачепленні. Нехай зубчасті колеса обертаються так, як показано на рис. 5.18. Зуби при цьому будуть стикатися між собою по загальній нормалі NN , проведеній через точки контакту зубів. Причому зуби входять у контакт у точці H_2 , а виходять з контакту у точці H_1 . Ці два положення бічних профілів зубів зображено на рисунку: для шестірні – лініями 1, для колеса – лініями 2. Лінія NN називається лінією зачеплення. Частину цієї лінії між точками дотику B_1 і B_2 з основними колами, як уже відомо, називають теоретичною лінією зачеплення, а відрізок $q_\alpha = H_1H_2$, що відсікається від лінії зачеплення колами виступів, активною лінією зачеплення. **Активна лінія зачеплення** є геометричним місцем точок контакту двох спряжених профілів. За межами лінії H_1H_2 контакт між зубами відсутній, оскільки він лежить за межами габаритів зубчастих коліс. Чим більша довжина активної лінії зачеплення відносно кроку евольвентного зачеплення p_α , тим вища плавність роботи передачі.

Під **кроком евольвентного зачеплення** розуміють відстань між двома контактними точками однойменних головних профілів двох сусідніх зубів. Оскільки однойменні профілі двох сусідніх зубів є еквідистантними кривими, відстань між якими визначається основним коловим кроком p_b , маємо

$$p_\alpha = p_b = \frac{2\pi r_b}{z} = \frac{2\pi r \cos \alpha_t}{z} = \frac{2\pi m_t z \cos \alpha_t}{2z}; \quad p_\alpha = m_t \pi \cos \alpha_t. \quad (5.63)$$

5. Зубчасті передачі

Точки H_1 і H_2 визначають також величину активного (робочого) профілю зубів. Оскільки за межами лінії H_1H_2 контакту між зубами коліс немає, точка H_2 є найближчою до центра обертання O_1 точкою контакту профілю зуба шестірні, а найвіддаленішою від центра O_1 є точка H_1 . Отже, частина бічного профілю зуба шестірні $H_2H'_1 = H'_2H_1$ є активною, у колеса активним є профіль $H_1H''_2 = H_2H''_1$ (на рис. 5.18 активні профілі зубів позначені подвійними лініями). Характерно, що довжина активного профілю на головці зуба більша, ніж на спряженій ніжці зуба ($H'_1e > H'_2f$, $H_2f > H_2e$). Нерівності ділянок профілів, які проходять контактні точки ніжки та головки зуба за однакові проміжки часу (у полюсі зачеплення Π точки e і f збігаються), вказує на наявність відносного ковзання зубів, причому ніжка зуба перебуває у більш напруженому стані і більше спрацьовується.

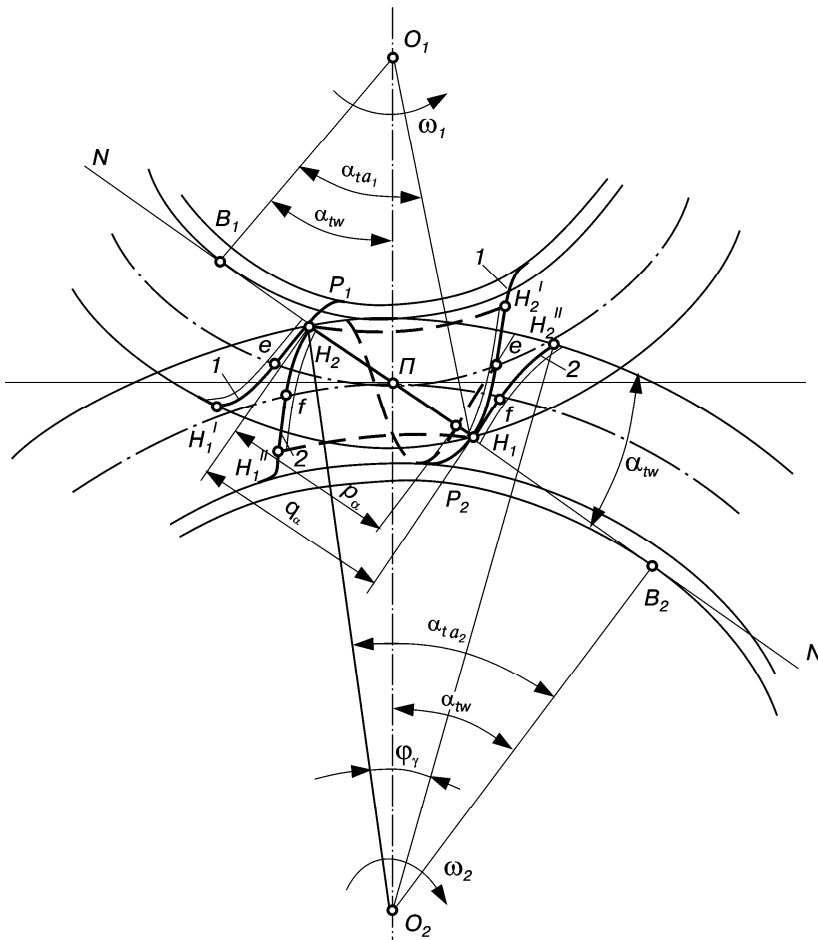


Рис. 5.18. Картина зубчастого зачеплення

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується **повним коефіцієнтом перекриття**, під яким розуміють відношення кута перекриття φ_γ до кутового кроку τ , тобто

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varphi_\gamma}{\tau}, \quad (5.64)$$

де φ_γ – кут перекриття; $\tau = 2\pi/z$ – центральний кут зубчастого колеса, що відповідає кроку зубчастого колеса.

Кутом перекриття називають кут повороту зубчастого колеса від положення входу зуба у зачеплення до його виходу із зачеплення. Для колеса прямозубої циліндричної передачі (рис. 5.18) $\varphi_\gamma = \angle H_2 O_2 H_2''$, у косозубих передачах цей кут буде більшим від $\angle H_2 O_2 H_2''$ за рахунок нахилу зубів на кут β .

Практично коефіцієнт перекриття показує число пар зубів, що перебувають одночасно у зачепленні. Наприклад, якщо $\varepsilon_\gamma = 1,57$, то зачеплені між собою одночасно одна або дві пари зубів, причому дві пари ($\varepsilon_\gamma > 1$) – 57 % часу, одна пара – 43 %.

Коефіцієнт перекриття повинен бути більшим від одиниці, інакше порушується плавність роботи передачі (співудари зубів, контакт кромками вершин). Чим вищий коефіцієнт перекриття, тим плавніше працює зубчаста передача, тим більша її несуча здатність. Внаслідок можливої неточності монтажу та спрацювання зубів коефіцієнт перекриття може виявитися меншим за розрахунковий, тому рекомендується вибирати мінімальним коефіцієнт перекриття $\varepsilon_\gamma \geq 1,2$.

Коефіцієнт перекриття ε_γ можна також виразити як відношення дуги зачеплення $l_w = \cup cc = \cup ff$ до колового кроку p_w [2], тобто $\varepsilon_\gamma = l_w / p_w$. Зрозуміло, що для забезпечення плавної роботи передачі дуга зачеплення повинна бути більша від кроку ($l_w > p_w$).

Дугами зачеплення називають частину початкових кіл, які перекочуються одна по одній за час контакту пари зубів. Взагалі кажучи, дугу зачеплення і коловий крок можна знаходити на будь-якому іншому колі зубчастих коліс (вершин, ділильному, основному тощо).

Картину зачеплення у рейковому та внутрішньому зачепленнях зображено на рис. 5.19. На рис. 5.18 і 5.19 дуги зачеплення позначені для шестірні літерами ee , колеса (рейки) – $f-f$. Дуга перекриття у косозубих зубчастих передачах більша, ніж у прямозубих, на величину $e_2 e_2' = b / \sin \beta$. Це видно з розгортки початкової поверхні косозубого колеса (рис. 5.19, в), на якій зображені лінії зубів на початку $e_1 e_1'$ і в кінці $e_2 e_2'$ контакту пари зубів.

Повний коефіцієнт перекриття ε_γ є сумою торцевого коефіцієнта перекриття ε_α й осьового коефіцієнта перекриття ε_β , тобто

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \quad (5.65)$$

5. Зубчасті передачі

Торцевим коефіцієнтом перекриття називають відношення довжини активної лінії зачеплення до кроку евольвентного зачеплення, тобто

$$\varepsilon_\alpha = q_\alpha / p_\alpha. \quad (5.66)$$

Довжина активної лінії зачеплення визначається з рис. 5.18:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= H_2 H_1 = H_2 \Pi + \Pi H_1 = (H_2 B_2 - \Pi B_2) + (B_1 H_1 - B_1 \Pi) = \\ &= r_{b_2} \operatorname{tg} \alpha_{ia_2} - r_{b_2} \operatorname{tg} \alpha_{rw} + r_{b_1} \operatorname{tg} \alpha_{ia_1} - r_{b_1} \operatorname{tg} \alpha_{rw} = \\ &= \frac{m_1 z_2}{2} \cos \alpha_t (\operatorname{tg} \alpha_{ia_2} - \operatorname{tg} \alpha_{rw}) + \frac{m_1 z_1}{2} \cos \alpha_t (\operatorname{tg} \alpha_{ia_1} - \operatorname{tg} \alpha_{rw}). \end{aligned}$$

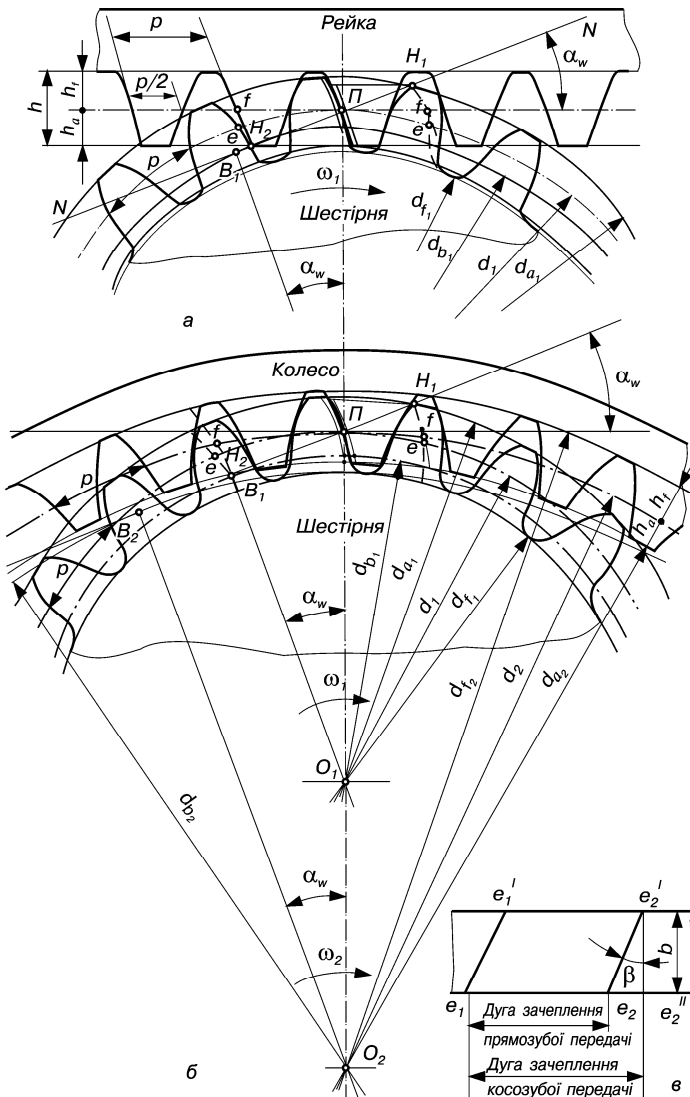


Рис. 5.19. Картина зачеплення у рейковому та внутрішньому зачепленнях

Остаточно

$$q_\alpha = \frac{m_t \cos \alpha_t}{2} [z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_2} - \operatorname{tg} \alpha_{tw}) + z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_1} - \operatorname{tg} \alpha_{tw})]. \quad (5.67)$$

Підставивши значення q_α (5.67), p_α (5.63) у відношення (5.66), одержимо залежність для визначення коефіцієнта торцевого перекриття:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_1} - \operatorname{tg} \alpha_{tw}) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_2} - \operatorname{tg} \alpha_{tw})}{2\pi}. \quad (5.68)$$

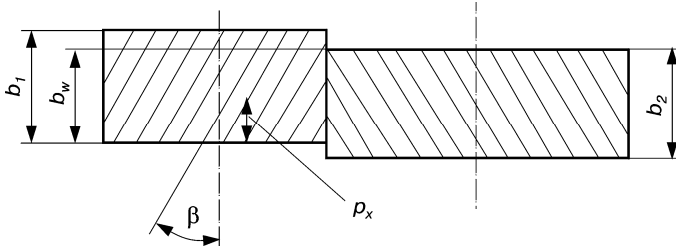


Рис. 5.20. Визначення робочої ширини зубчастого вінця

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_1} - \operatorname{tg} \alpha_{tw}) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{ta_2} - \operatorname{tg} \alpha_{tw})}{2\pi}. \quad (5.68)$$

Коефіцієнтом осевого перекриття називається відношення робочої ширини зубчастого вінця b_w до осевого кроку p_x (рис. 5.20):

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w}{p_x} = \frac{b_w \sin \beta}{\pi m}. \quad (5.69)$$

У прямозубій циліндричній передачі коефіцієнт $\varepsilon_\beta = 0$, оскільки кут нахилу зубів β дорівнює нулю і в цьому випадку повний коефіцієнт перекриття дорівнює лише торцевому коефіцієнту перекриття ($\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha$). У зачепленні М. Л. Новикова, навпаки, $\varepsilon_\alpha = 0$, а $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\beta$. Це свідчить про те, що у зачепленні М. Л. Новикова активна лінія зачеплення H_1H_2 відсутня, коефіцієнт перекриття досягається лише за рахунок нахилу зубів.

Аналіз формул (5.68), (5.69) для визначення коефіцієнтів перекриття ε_α і ε_β показує, що зі збільшенням чисел зубів z_1 і z_2 , радіусів кіл вершин r_{a_1} і r_{a_2} (чим більші радіуси r_{a_i} , тим більші кути профілю вершин α_{ta_i}), робочої ширини вінця b_w і кута нахилу лінії зуба β коефіцієнт перекриття ε_γ збільшується; збільшення кута зачеплення α_{tw} призводить до зменшення ε_γ .

5.10.2. Підрізання зубів

При нарізанні зубчастого колеса можливе **підрізання зубів** (рис. 5.21, а), яке проявляється у зменшенні товщини ділильної ніжки зуба. Це призводить

5. Зубчасті передачі

до зрізання головного (евольвентного) профілю зубів і зменшення їх міцності на згин. Підрізання зубів настає в тому випадку, коли активна лінія зачеплення H_1H_2 виходить за межі теоретичної лінії зачеплення B_1B_2 (рис. 5.21, б), оскільки будь-яка точка профілю зуба (шестірні), що лежить за межами цієї лінії, не відповідає основній теоремі зачеплення (нормаль NN' , проведена до такого профілю в точці контакту, не буде проходити через полюс зачеплення). Як видно з рис. 5.18, небезпека підрізання більша у меншого колеса, оскільки $B_1H_2 < B_2H_1$.

Для визначення мінімального коефіцієнта зміщення x_{\min} і мінімального числа зубів z_{\min} , при яких не спостерігається підрізання, можна використати залежність для радіуса кривизни граничної точки L головного бічного профілю зубів (рис. 5.21, б). Нагадаємо, що точка, яка розділяє евольвенту і перехідну частину бічного профілю, називається **граничною**. Як відомо, для побудови головного профілю евольвентного зуба використовується евольвента, радіус кривизни якої завжди задовольняє умову $\rho \geq 0$. Причому евольвента завжди буде за межами основного кола і на своєму початку, що збігається з основним колом, матиме радіус кривизни $\rho = 0$. Це і є граничний випадок, при якому профіль зуба колеса може знаходитись на лінії зачеплення NN (рис. 5.18) і мати радіус кривизни $\rho = 0$.

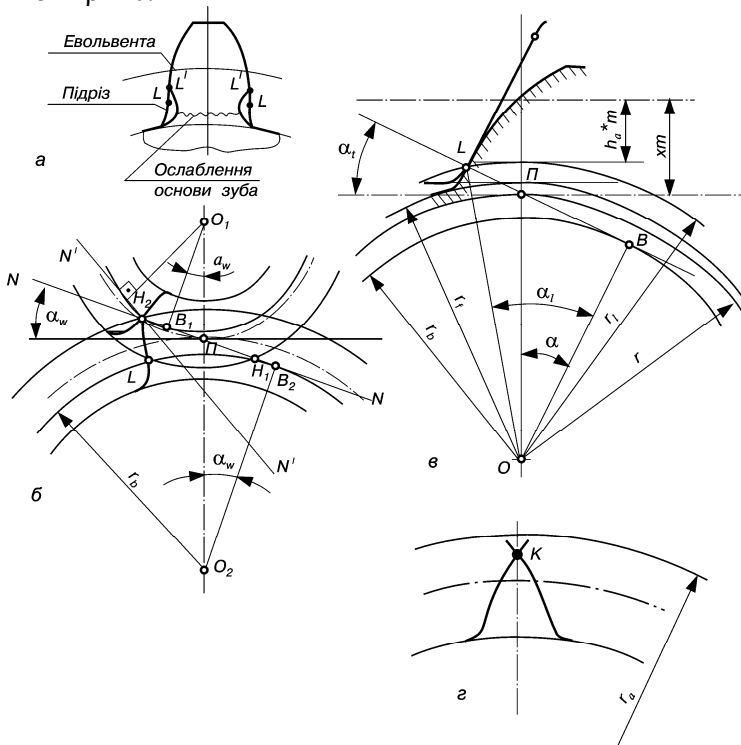


Рис. 5.21. До підрізання (а, б, в) та загострення (z) зубів

Розглянемо верстатне зачеплення у момент, коли формується профіль у граничній точці L , і визначимо радіус кривизни профілю у цій точці (рис. . 5.21, в):

$$\rho_L = BL = \Pi_0B + \Pi_0L = r_b \operatorname{tg} \alpha_t + \frac{xm - h_a^* m}{\sin \alpha_t}.$$

Враховуючи, що $r_b = r \cos \alpha_t = \frac{mz}{2 \cos \beta} \cos \alpha$ одержуємо

$$\rho_L = m \left(\frac{z \sin \alpha_t}{2 \cos \beta} - \frac{h_a^* - x}{\sin \alpha_t} \right). \quad (5.70)$$

Рівняння (5.70) показує, що із зменшенням числа зубів і коефіцієнта зміщення x радіус кривизни ρ_L зменшується, тобто точка L наближається до основного кола. Для кожного числа зубів z існує таке зміщення коефіцієнта x , при якому $\rho_L = 0$, тобто гранична точка лежить на основному колі, а вся перехідна крива лежить всередині основного кола. Такий коефіцієнт зміщення називаємо коефіцієнтом найменшого зміщення x_{\min} . Приймаючи $\rho_L = 0$, з рівняння (5.70) знаходимо

$$x_{\min} = h_a^* - \frac{z \sin^2 \alpha_t}{2 \cos \beta}. \quad (5.71)$$

Якщо рівняння (5.70) розв'язати відносно z при $\rho_L = 0$, одержимо найменше число зубів колеса, вільне від підрізання при заданому коефіцієнті зміщення x :

$$z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x) \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t}. \quad (5.72)$$

Так, при $h_a^* = 1$, $x = 0$ і $\beta = 0$ $z_{\min} \approx 17$.

Якщо $x > x_{\min}$, то при будь-якому числі зубів перехідна крива дотикається до евольвенти і плавно спрягається з нею у точці L , радіус кола на якому вона лежить $r_L > r_b$. При $x = x_{\min}$ перехідна крива плавно спрягається з евольвентою на основному колі. Якщо ж $x < x_{\min}$ ($\rho_L < 0$), то перехідна крива перетне евольвентний профіль у деякій точці L' (рис. 5.21, а), при цьому частина головного профілю біля основного кола зріжеться, і зуб у цьому місці буде ослаблений. Це явище називається **підрізанням зубів**.

У деяких випадках невелике ослаблення зуба цілком допустиме; це робиться для поліпшення умов контакту зубів на початку (або в кінці) зачеплення.

5.10.3. Загострення зубів

Загострення зубів виникає тоді, коли точка К перетину різнойменних теоретичних профілів зуба потрапляє всередину кола вершин (рис. 5.21, г). Таке явище небажане як з чисто кінематичної точки зору, оскільки скорочується активний профіль зуба і тим самим зменшується коефіцієнт перекриття, так і з міркувань міцності – вершина загостреного зуба зовсім не здатна передавати навантаження.

Небезпека загострення збільшується із збільшенням коефіцієнта зміщення. Максимальний коефіцієнт зміщення можна знайти з виразу (9.41) для товщини зуба на колі радіуса $r_y = r_{ta}$ у торцевому перетині:

$$s_{ta} = 2r_a \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2xtg\alpha}{z} + inv\alpha_t - inv\alpha_{ta} \right). \quad (5.73)$$

Прийнявши $s_{ta} = 0$, знайдемо

$$x_{\max} = \frac{z(inv\alpha_{ta} - inv\alpha_t) - \frac{\pi}{2}}{2tg\alpha}. \quad (5.74)$$

Звичайно приймають товщину зуба на дузі кола вершин $s_{ta} \geq 0,25m$ для кінематичних передач і $s_{ta} \geq 0,4m$ – для силових. Відповідні максимальні коефіцієнти зміщення можна знайти за цими умовами із залежності (5.73).

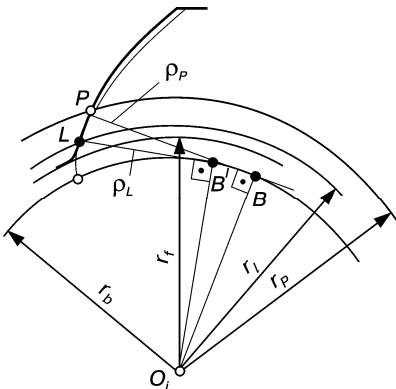


Рис. 5.22. До визначення радіуса нижньої точки активного профілю

Для цього необхідно, щоб радіус r_L граничної точки L був менший за радіус r_P нижньої точки активного профілю (рис. 5.22):

$$r_L \leq r_P. \quad (5.75)$$

Нерівність (5.75) з урахуванням виразу (5.21) набуває вигляду

$$r_P \geq r_L. \quad (5.76)$$

Забезпечення нерівності (5.76) для обох зубчастих коліс є умовою усунення інтерференції у зубчастій передачі.

5.10.4. Інтерференція зубів

Явище інтерференції зубів полягає в тому, що при розгляді теоретичної картини зачеплення зубів головний профіль головки зуба одного із зубчастих коліс спрягається з перехідним профілем ніжки зуба іншого колеса і проникає у нього (профілі “накладаються” один на одній). Таке явище при зачепленні зубчастих коліс недопустиме, оскільки воно не дає їм можливості прокручуватися або призводить до поломки зубів. Інтерференція відсутня, якщо евольвентний профіль зуба одного колеса спрягається тільки з евольвентним

Радіус кривизни евольвенти у граничній точці L обчислюється за формулою (5.70), а в нижній точці активного профілю (див. рис. 5.18) для зуба шестірні – відрізком B_1H_2 , колеса – B_2H_1 . Тоді для зуба шестірні

$$\rho_{P_1} = B_1H_2 = B_1B_2 - H_2B_2 = a_w \sin \alpha_{tw} - r_{b_2} \operatorname{tg} \alpha_{ta_2},$$

де

$$B_1H_2 = B_1\Pi + \Pi B_2 = r_{w_1} \sin \alpha_{tw} + r_{w_2} \sin \alpha_{tw} = a_w \sin \alpha_{tw}.$$

У загальному випадку маємо

$$\rho_{P_i} = a_w \sin \alpha_{tw} - r_{b_j} \operatorname{tg} \alpha_{ta_j}. \quad (5.77)$$

Для вибору коефіцієнтів зміщення можна використовувати табличні методи і метод “блокувальних контурів” [8].

Приклад 5.1. Розрахувати геометричні параметри евольвентної циліндричної передачі зовнішнього зачеплення, якщо $z_1 = 15$, $z_2 = 42$, $m = 2$, мм, $\beta = 10^\circ$, $x_1 = 0,9$, $x_2 = 0,3$.

Програма PR 5.1

РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

Вихідні дані:

$$z_1 := 15 \quad z_2 := 42 \quad m := 2 \quad \beta := 10 \operatorname{deg} \quad x_1 := 0.9 \quad x_2 := 0.3 \quad \alpha := 20 \operatorname{deg}$$

1. Коефіцієнт суми зміщення

$$x_\Sigma := x_1 + x_2 \quad x_\Sigma = 1.2$$

2. Кут профілю інструмента в торцевому перерізі

$$\alpha_t := \operatorname{atan}\left(\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\beta)}\right) \quad \alpha_t = 20.284 \operatorname{deg}$$

3. Кут зачеплення в торцевому перерізі

$$\operatorname{inv} \alpha := \tan(\alpha) - \alpha \quad \operatorname{inv} \alpha = 0.015$$

$$\operatorname{inv}(\alpha_t) := \tan(\alpha_t) - \alpha_t \quad \operatorname{inv}(\alpha_t) = 0.016$$

4. Міжосьова відстань

$$\alpha_{tw} := 0$$

Given

$$\operatorname{inv}(\alpha_{tw}) = \frac{(2 \cdot x_\Sigma \cdot \tan(\alpha))}{(z_1 + z_2)} + \operatorname{inv}(\alpha_t) \quad \alpha_{tw} := \operatorname{Find}(\alpha_{tw}) \quad \alpha_{tw} = 25.24 \operatorname{deg}$$

5. Зубчасті передачі

$$a_w := \frac{(z_1 + z_2) \cdot m}{2 \cdot \cos(\beta)} \frac{\cos(\alpha_t)}{\cos(\alpha_{tw})} \quad a_w = 60.02$$

5. Ділильна міжосьова відстань

$$a := \frac{(z_1 + z_2) \cdot m}{2 \cdot \cos(\beta)} \quad a = 57.879$$

6. Ділильний діаметр шестерні

$$d_1 := \frac{z_1 \cdot m}{\cos(\beta)} \quad d_1 = 30.463 \quad z_1 = 15$$

7. Ділильний діаметер колеса

$$d_2 := \frac{z_2 \cdot m}{\cos(\beta)} \quad d_2 = 85.296$$

8. Передаточне відношення

$$i := \frac{z_2}{z_1} \quad i = 2.8$$

9. Початковий діаметр шестерні

$$d_{w1} := 2 \cdot \frac{a_w}{i + 1} \quad d_{w1} = 31.59$$

10. Початковий діаметр колеса

$$d_{w2} := 2 \cdot \frac{a_w \cdot i}{i + 1} \quad d_{w2} = 88.451$$

11. Коефіцієнт сприймального зміщення

$$y := \frac{a_w - a}{m} \quad y = 1.07$$

12. Коефіцієнт зрівнювального зміщення

$$\Delta y := x_\Sigma - y \quad \Delta y = 0.13$$

13. Діаметр вершин шестерні

$$h' := 1 \quad d_{a1} := d_1 + 2(h' + x_1 - \Delta y) \cdot m \quad d_{a1} = 37.545$$

5.10. Геометричні та кінематичні умови існування передачі

12. Коефіцієнт зрівнювального зміщення

$$\Delta y := x_{\Sigma} - y \quad \Delta y = 0.13$$

13. Діаметр вершин шестерні

$$h' := 1 \quad d_{a1} := d_1 + 2(h' + x_1 - \Delta y) \cdot m \quad d_{a1} = 37.545$$

14. Діаметр вершин колеса

$$d_{a2} := d_2 + 2(h' + x_2 - \Delta y) \cdot m \quad d_{a2} = 89.978$$

15. Діаметр западин шестерні

$$d_{f1} := d_1 - 2(h' + 0.25 - x_1) \cdot m \quad d_{f1} = 29.063$$

16. Діаметр западин колеса

$$d_{f2} := d_2 - 2(h' + 0.25 - x_2) \cdot m \quad d_{f2} = 81.496$$

17. Діаметр основного кола шестерні

$$d_{b1} := d_1 \cdot \cos(\alpha_t) \quad d_{b1} = 28.574$$

18. Діаметр основного кола колеса

$$d_{b2} := d_2 \cdot \cos(\alpha_t) \quad d_{b2} = 80.007$$

$$\alpha_{ta1} := \arccos\left(\frac{d_{b1}}{d_{a1}}\right) \quad \alpha_{ta1} = 40.442 \text{ deg}$$

$$\alpha_{ta2} := \arccos\left(\frac{d_{b2}}{d_{a2}}\right) \quad \alpha_{ta2} = 27.229 \text{ deg}$$

19. Товщина зуба по дузі ділильного кола

$$s_{t1} := \frac{m}{\cos(\beta)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot \tan(\alpha)\right) \quad s_{t1} = 4.521$$

$$s_{t2} := \frac{m}{\cos(\beta)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot \tan(\alpha)\right) \quad s_{t2} = 3.634$$

20. Перевірка коефіцієнта перекриття

$$\varepsilon_{\alpha} := \frac{z_1 \cdot (\tan(\alpha_{ta1}) - \tan(\alpha_{tw})) + z_2 \cdot (\tan(\alpha_{ta2}) - \tan(\alpha_{tw}))}{2 \cdot \pi}$$

$$\varepsilon_{\alpha} = 1.198 \quad b_w := 10m \quad \varepsilon_{\beta} := b_w \cdot \frac{\sin(\beta)}{\pi m} \quad \varepsilon_{\beta} = 0.553$$

$$\varepsilon_{\gamma} := \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \quad \varepsilon_{\gamma} = 1.751 \quad \varepsilon_{\gamma} > 1.2$$

Приклад 5.2. Розрахувати геометричні параметри евольвентної конічної передачі, якщо $z_1 = 18$, $z_2 = 20$, $m_e = 5$ мм.

5. Зубчасті передачі

Розв'язання: Для розрахунку геометричних параметрів передачі використаємо залежності, які наведені в довіднику [19].

Програма PR 5.2

РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КОНІЧНОЇ ПЕРЕДАЧІ З ПРЯМИМИ ЗУБАМИ ($\chi=0$)

Вихідні дані:

$$z_1 := 18 \quad z_2 := 20 \quad m_e := 5$$

1. Число зубів плоского колеса

$$z_c := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad z_c = 26.907$$

2. Зовнішня конусна відстань

$$R_e := 0.5 \cdot m_e \cdot z_c \quad R_e = 67.26812$$

3. Ширина зубчатого вінця

$$b_1 := 0.3 \cdot R_e \quad b_1 = 20.18 \quad b_2 := 10 \cdot m_e \quad b_2 = 50$$

$$b := \text{floor}(\min(b_1, b_2)) \quad b = 20$$

4. Середня конусна відстань

$$R_m := R_e - 0.5 \cdot b \quad R_m = 57.268$$

5. Середній коловий модуль

$$m_m := \frac{R_m \cdot m_e}{R_e} \quad m_m = 4.257$$

6. Середній ділительний діаметр

$$d_{m1} := m_m \cdot z_1 \quad d_{m1} = 76.621 \quad d_{m2} := m_m \cdot z_2 \quad d_{m2} = 85.134$$

7. Кут ділительного конуса

$$\delta_1 := \text{atan}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \quad \delta_1 = 41.987 \text{ deg} \quad \delta_2 := \text{atan}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad \delta_2 = 48.013 \text{ deg}$$

8. Передаточне число

$$i := \frac{z_2}{z_1} \quad i = 1.111$$

9. Зовнішня висота головки зуба

$$h_{ae} := m_e \quad h_{ae} = 5$$

10. Зовнішня висота ніжки зуба

5.10. Геометричні та кінематичні умови існування передачі

$$h_f := h_{ae} + 0.2 \cdot m_e \quad h_f = 6$$

11. Зовнішня висота зуба

$$h_e := h_{ae} + h_f \quad h_e = 11$$

12. Зовнішня колова товщина зуба

$$s_e := 0.5 \cdot \pi \cdot m_e \quad s_e = 7.854$$

13. Кут ніжки зуба

$$\theta_f := \operatorname{atan}\left(\frac{h_f}{R_e}\right) \quad \theta_f = 5.097 \text{ deg}$$

14. Кут головки зуба

$$\theta_a := \theta_f \quad \theta_a = 5.097 \text{ deg}$$

15. Кут конуса вершин

$$\delta_{a1} := \delta_1 + \theta_a \quad \delta_{a1} = 47.084 \text{ deg} \quad \delta_{a2} := \delta_2 + \theta_a \quad \delta_{a2} = 53.11 \text{ deg}$$

16. Кут конуса западин

$$\delta_{f1} := \delta_1 - \theta_f \quad \delta_{f1} = 36.89 \text{ deg} \quad \delta_{f2} := \delta_2 - \theta_f \quad \delta_{f2} = 42.916 \text{ deg}$$

17. Зовнішній ділительний діаметр

$$d_{e1} := m_e \cdot z_1 \quad d_{e1} = 90 \quad d_{e2} := m_e \cdot z_2 \quad d_{e2} = 100$$

18. Зовнішній діаметр вершин зубів

$$d_{ae1} := d_{e1} + 2 \cdot h_{ae} \cdot \cos(\delta_1) \quad d_{ae1} = 97.433$$

$$d_{ae2} := d_{e2} + 2 \cdot h_{ae} \cdot \cos(\delta_2) \quad d_{ae2} = 106.69$$

19. Відстань від вершини до площини зовнішнього кола вершин зубів

$$B_1 := 0.5 \cdot d_{e2} - h_{ae} \cdot \sin(\delta_1) \quad B_1 = 46.655 \quad B_2 := 0.5 \cdot d_{e1} - h_{ae} \cdot \sin(\delta_2) \quad B_2 = 41.284$$

20. Зовнішня стала хорда зуба

$$s_{ce} := 0.883 \cdot s_e \quad s_{ce} = 6.935$$

21. Висота до зовнішньої сталої хорди

$$h_{ce} := h_{ae} - 0.1607 \cdot s_e \quad h_{ce} = 3.738$$

22. Половина зовнішньої куткової товщини

$$\psi_{e1} := s_e \cdot \frac{\cos(\delta_1)}{d_{e1}} \quad \psi_{e1} = 3.716 \text{ deg} \quad \psi_{e2} := s_e \cdot \frac{\cos(\delta_2)}{d_{e2}} \quad \psi_{e2} = 3.01 \text{ deg}$$

23. Зовнішній ділительна товщина зуба по хорді

$$s_{e1} := d_{e1} \cdot \frac{\sin(\psi_{e1})}{\cos(\delta_1)} \quad s_{e1} = 7.848 \quad s_{e2} := d_{e2} \cdot \frac{\sin(\psi_{e2})}{\cos(\delta_2)} \quad s_{e2} = 7.85$$

24. Висота по зовнішній ділительній хорді зуба

$$h_{ae1} := h_{ae} + 0.25 \cdot s_{e1} \cdot \psi_{e1} \quad h_{ae1} = 5.127 \quad h_{ae2} := h_{ae} + 0.25 \cdot s_{e2} \cdot \psi_{e2} \quad h_{ae2} = 5.103$$

Приклад 5.3. Розрахувати геометричні параметри черв'ячної передачі, якщо $z_1 = 2$, $z_2 = 39$, $m = 6$ мм, $q = 10$, $a_w = 160$ мм, $\alpha = 20^\circ$.

Розв'язання: Для розрахунку геометричних параметрів передачі використаємо залежності, які наведені в довіднику [1].

Программа 5.3

Вихідні дані:

$$z_1 := 2 \quad z_2 := 39 \quad m := 6 \quad q := 10 \quad a_w := 160 \quad \alpha := 20\text{deg}$$

1. Передаточне число

$$u := \frac{z_2}{z_1} \quad u = 19.5$$

2. Коефіцієнт зміщення черв'яка

$$x := \frac{a_w}{m} - 0.5(z_2 + q) \quad x = 2.167$$

3. Розрахунковий крок черв'яка

$$p_1 := \pi \cdot m \quad p_1 = 18.85$$

4. Хід витка черв'яка

$$p_{z1} := p_1 \cdot z_1 \quad p_{z1} = 37.699$$

5. Дільний діаметр

$$d_1 := q \cdot m \quad d_1 = 60 \quad d_2 := z_2 \cdot m \quad d_2 = 234$$

6. Початковий діаметр черв'яка

$$d_{w1} := (q + 2 \cdot x) \cdot m \quad d_{w1} = 86$$

7. Дільний кут підйому

$$\gamma := \text{atan}\left(\frac{z_1}{q}\right) \quad \gamma = 11.31 \text{ deg}$$

8. Початковий кут підйому

$$\gamma_w := \text{atan}\left(z_1 \cdot \frac{m}{d_{w1}}\right) \quad \gamma_w = 7.943 \text{ deg}$$

9. Основний кут підйому

$$\gamma_b := \text{acos}(\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \quad \gamma_b = 22.862 \text{ deg}$$

10. Основний діаметр черв'яка

$$d_b := z_1 \cdot \frac{m}{\tan(\gamma_b)} \quad d_b = 28.461$$

11. Висота витка черв'яка

5.10. Геометричні та кінематичні умови існування передачі

$$h_1 := m \cdot (2 + 0.2 \cdot \cos(\gamma)) \quad h_1 = 13.177$$

12. Висота головки витка черв'яка

$$h_f := 1 \cdot m \quad h_f = 6$$

13. Діаметр вершин витків черв'яка

$$d_{a1} := d_1 + 2 \cdot 1 \cdot m \quad d_{a1} = 72$$

14. Діаметр вершин зубів колеса

$$d_{a2} := d_2 + 2 \cdot [(1 + x)m] \quad d_{a2} = 272$$

15. Найбільший діаметр черв'ячного колеса

$$d_{aM2} := d_{a2} + 6 \cdot \frac{m}{(z_1 + 2)} \quad d_{aM2} = 281$$

СИНТЕЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

У цьому розділі розглядається синтез плоских важільних механізмів, які досить широко використовуються у багатьох машинах, приладах і пристроях. **Переваги** важільних механізмів визначаються здебільшого властивостями нижчих пар, які утворюють ланки механізму. У таких парах стичними елементами ланок є поверхні, а тому питомий тиск і ступінь зносу в них менші, ніж у вищих кінематичних парах. Елементи ланок, які утворюють ці пари, виготовляються досить просто й точно, оскільки технологія обробки площин і циліндричних поверхонь ретельно і повно розроблена. Крім цього, у механізмах з нижчими кінематичними парами забезпечується стале замикання пар і на відміну, наприклад, від кулачкових механізмів, не треба використовувати пружини та інші пристрої.

Теоретично за допомогою плоских важільних механізмів можна точно відтворити будь-яку плоску алгебраїчну криву. Проте практичне використання цих механізмів обмежується тим, що їх виготовляють, як правило, багатоланковими. Із збільшенням кількості ланок у механізмі зростає ймовірність одержання недопустимих кутів передачі, збільшуються втрати потужності на тертя, відхилення від заданої залежності в результаті нагромадження похибок, викликаних неточністю виготовлення, наявністю зазорів у кінематичних парах і пружними деформаціями ланок. Тому деякі закони руху вихідної ланки практично не вдається відтворити за допомогою плоских механізмів із нижчими парами. У цьому полягає їх основний недолік. У той самий час кулачкові та зубчасті механізми завдяки різноманітності елементів вищих пар практично універсальніші, ніж важільні. Проте треба зауважити, що з розвитком методів проектування межі використання важільних механізмів розширюються.

6.1. Основні задачі синтезу та методи їх розв'язування

Якщо при аналізі механізмів розміри їх ланок вважаються заданими й необхідно знайти ті чи інші кінематичні (переміщення, швидкості, прискорення) або силові (сили, моменти сил, роботу, потужність, ККД тощо) характеристики руху, то в процесі створення механізмів і машин виникає інша (зворотна) задача: побудувати такий механізм, який би відповідав необхідним функціональним або технологічним вимогам. Ці вимоги у кінцевому підсумку зводяться до виконання деяких геометричних або механічних умов. Така задача ТММ, зворотна до задачі аналізу, називається синтезом механізмів. Отже, **під синтезом механізму розуміють проектування його схеми за заданими властивостями**. При цьому розрізняють три основні етапи синтезу.

Перший етап називається **структурним синтезом** і полягає у виборі структурної схеми механізму, що має потрібну кількість ступенів вільності, кількість та вид ланок і кінематичних пар, які забезпечують необхідні рухи ланок та їх взаємне розташування. Цей етап синтезу здійснюють на підставі довідкових даних про окремі види механізмів шляхом порівняння властивостей усіх механізмів, які можуть виконувати задані функції [20, 21].

Другий етап називається *кінематичним синтезом*, задача якого – визначити геометричні розміри ланок, що забезпечують задані кінематичні умови роботи механізму (положення ланок, траєкторії окремих точок, швидкості та прискорення ланок і точок механізму тощо). Кінематичний синтез – один з найвідповідальніших етапів у процесі проектування механізму, оскільки якраз на цьому етапі формуються основні кінематичні властивості, необхідні для виконання механізмом покладених на нього функцій.

Якщо потрібно врахувати також динамічні властивості механізму, розв'язується більш загальна задача *динамічного синтезу*, під якою розуміють проектування кінематичної схеми механізму з визначенням параметрів, що характеризують розміри та розподіл мас ланок. Динамічний синтез містить у собі два попередні види синтезу.

Отже, синтез кінематичної схеми полягає у визначенні деяких сталих параметрів, які задовольняють задані структурні, кінематичні й динамічні умови, при цьому одна частина цих параметрів може бути задана, інша – підлягає визначенню. До таких параметрів, зокрема, належить довжина ланок, положення точок їх траєкторій, значення швидкостей і прискорень, маси та моменти інерції ланок. Незалежні один від одного сталі параметри схеми механізму називають *параметрами синтезу*.

Параметри синтезу бувають вхідними та вихідними. *Вхідні параметри* задані або відомі до проведення синтезу, а вихідні визначають під час синтезу. Прикладами вхідних параметрів можуть бути наперед задана (потрібна) траєкторія руху точки механізму або необхідна продуктивність машини, а *вихідними параметрами* є геометричні розміри ланок (у першому випадку), а також маси ланок, закони їх розподілу, моменти інерції ланок, жорсткість пружних ланок, потужність двигуна, швидкість обертання ланок тощо.

Умови перетворення рухів, для виконання яких проектується механізм, досить різноманітні, що визначається надзвичайно широким спектром робочих функцій, які накладаються на механізми в різних машинах, приладах і пристроях сучасної техніки. Назвемо деякі вимоги, які найчастіше ставляться до механізмів:

1) необхідно спроектувати механізм *за кількома дискретними положеннями ланок*, зокрема крайніми положеннями вихідної ланки; при цьому закон руху ланок між заданими положеннями не регламентується;

2) забезпечити *відповідний закон руху вихідної ланки* при заданому законі вхідної, тобто швидкості та прискорення вихідної ланки повинні змінюватися за деяким законом або не бути більшими заданої величини; можуть бути задані окремі кінематичні параметри, наприклад, середня швидкість руху, відношення середніх швидкостей при прямому та зворотному ході, коефіцієнт нерівномірності руху тощо;

3) забезпечити задані *передаточні відношення* двох або більше ланок, що входять до складу механізму;

4) деяка точка робочої ланки механізму повинна точно або наближено описувати *задану траєкторію* або деяку її частину.

Крім цього, при проектуванні механізмів треба врахувати такі фактори:

прокручування ланок, тобто можливість неперервного переходу ланки з одного заданого положення в інше, оскільки між двома заданими положеннями може виявитися проміжне, в якому рух ланок неможливий;

максимально **допустимі кути тиску** $\vartheta_{\text{доп}}$, оскільки геометрично спроектований механізм може виявитися нераціональним унаслідок недопустимо великих сил, які виникають у кінематичних парах, низького ККД або навіть непрацездатним із-за явища заклинювання;

конструктивні **обмеження довжин ланок** механізму, оскільки при проектуванні можуть бути варіанти з недопустимо великими або дуже малими розмірами деяких ланок;

допустимі відхилення від заданого закону руху, оскільки задачу синтезу важільних механізмів за заданим законом руху найчастіше можна розв'язати лише наближено.

Серед задач, які має розв'язувати синтезований механізм, можна виділити одну або кілька найважливіших – **основних задач** (наприклад, отримання необхідної траєкторії руху, досягнення заданої швидкості тощо), інші вважаються другорядними – **додатковими** (наприклад, мінімальна вага або мінімальні габаритні розміри).

Основна задача синтезу визначає також і вид синтезу, за допомогою якого може бути розв'язана ця задача (кінематичний або динамічний синтез). Основну умову синтезу можна подати у вигляді деякої функції вихідних параметрів, яку прийнято називати **цільовою функцією**, або **критерієм оптимізації**. Додаткові умови синтезу також повинні бути відображені у математичній формі, як правило, у вигляді нерівностей.

Отже, розв'язання основної задачі синтезу здебільшого є багатопараметричним, що визначає існування багатьох розв'язків. Природно, що в такому випадку з'являється прагнення отримати кращий (оптимальний) або максимально наближений до оптимального розв'язок з урахуванням існуючих реальних обмежень (додаткових умов). Такі задачі найчастіше розв'язуються за допомогою ЕОМ.

Задачі синтезу механізмів можна розв'язати чотирма основними методами:

- **графічним**, який засновано на використанні кінематичних схем механізмів, зображених на рисунку, на якому параметри довжини побудовано у певному масштабі. Цей метод досить часто застосовується на попередніх стадіях проектування завдяки своїй простоті та наочності й переважно для плоских механізмів;

- **аналітичним**, заснованим на різних математичних методах, які широко використовуються завдяки повсюдній комп'ютеризації інженерної та наукової праці. Аналітичні методи, які можна застосувати в будь-яких механізмах, дають високу точність розв'язків, дають змогу отримувати оптимальні (за заданими цільовими функціями) значення параметрів синтезу. До їх недоліків слід віднести трудомісткість підготовки та налагодження програм і не завжди достатню наочність;

- *графоаналітичним*, що поєднує два вказані вище методи. Цей метод дуже часто поєднує в собі високу точність обчислень з наочністю розв'язання;
- *експериментальним*, що використовує натуральні зразки або моделі механізмів, які проектуються. Цей метод дає результати, найбільш наближені до реальних, але вимагає великих матеріальних витрат і слабо піддається оптимізації.

Вибір того чи іншого методу значною мірою залежить від умов, поставлених при проектуванні. Наприклад, якщо поставлена умова, щоб при наближеному виконанні заданого руху оцінити відхилення потрібного руху від фактично отриманого, то необхідно використовувати аналітичні методи, оскільки графічні методи не можуть дати повної відповіді на поставлені питання.

Далі розглядатимемо лише перші три методи, які здебільшого будуть викладені в тому вигляді, який запропоновано І. І. Артоболевським, М. І. Левитським [2, 12].

6.2. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах

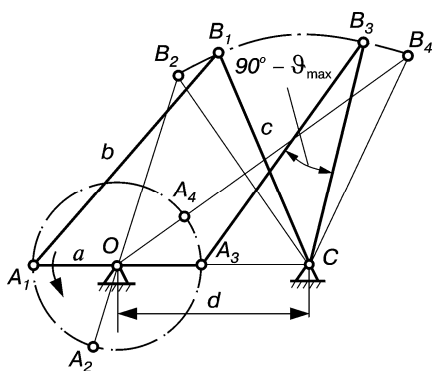


Рис. 6.1. До умови існування кривошипа в чотириланкових механізмах

До найпростіших механізмів, які широко використовуються у техніці, належать шарнірні чотириланкові механізми. Основна характеристика таких механізмів – прокручування їх ланок (наявність у них одного або двох кривошипів), яке залежить від співвідношення довжин ланок. Для встановлення цієї умови розглянемо шарнірний чотириланковий механізм (рис. 6.1), в якого довжини ланок відповідно становлять $l_{OA} = a$, $l_{AB} = b$, $l_{BC} = c$, $l_{OC} = d$.

Для того щоб ланка OA могла стати кривошипом, вона повинна при обертанні послідовно пройти через крайнє ліве OA_1 і праве OA_3 положення. Тоді, прийнявши, що a – довжина найкоротшої ланки, d – найдовшої, та використавши відомі співвідношення між довжинами сторін трикутника (довжина сторони трикутника менша суми довжин двох інших сторін), запишемо такі нерівності:

з ΔA_1B_1C

$$a + d \leq b + c; \quad (6.1)$$

з ΔA_3B_3C (або ΔOB_4C)

$$d - a \leq b + c. \quad (6.2)$$

Незалежно від співвідношення довжин b і c нерівність (6.1) завжди забезпечує виконання нерівності (6.2). Якщо ж найдовшою ланкою буде ланка

AB або BC ($b > c > d$ або $c > b > d$), то нерівність (6.1) тільки підсилюється.

Нерівність (6.1) дає змогу дати загальне формулювання умови прокручування ланок шарнірного чотириланкового механізму, тобто існування кривошипа, а саме – найкоротша ланка шарнірного чотириланкового механізму може бути кривошипом, якщо сума довжин найкоротшої і найдовшої ланок менша суми довжин решти ланок. Це положення носить назву правила Грасгофа.

Використовуючи це правило, шарнірні чотириланкові механізми поділяють на три групи:

- механізм буде **кривошипно-коромисловим** (див. рис. 6.1), якщо розміри його ланок задовольняють правило Грасгофа (6.1) і за стояк прийнято ланку b або d , розташовану біля найкоротшої ланки a ;
- механізм буде **двокривошипним**, якщо його розміри відповідають правилу Грасгофа і за стояк прийнято найкоротшу ланку a (рис. 6.2, а). Це впливає з того, що якщо кривошип при виконанні правила Грасгофа виконує повний оборот відносно стояка OC і шатуна AB (див. рис. 6.1), то й ці ланки здійснюють повний оборот відносно стояка;

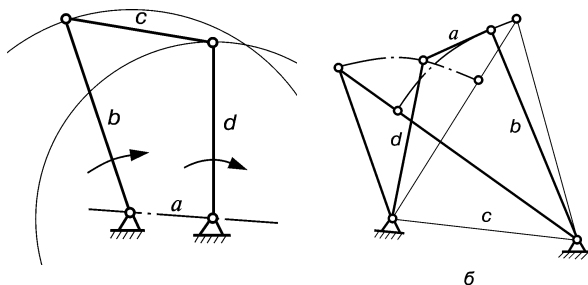


Рис. 6.2. Шарнірні чотириланкові механізми:
а) двокривошипний; б) двокоромисловий

- механізм буде **двокоромисловим**, якщо його розміри не задовольняють правило Грасгофа, а також у випадку, коли задовольняють це правило, але найкоротша ланка є шатуном (рис. 6, б). Тому можливість цієї ланки бути кривошипом зникає, розташованою біля стояка.

У граничному випадку, коли нерівність (6.1) перетворюється у рівність, усі ланки механізму в одному з крайніх положень розташовано вздовж однієї прямої. Внаслідок цього з'явиться невизначеність руху відповідної ланки (вона може рухатися або в одному, або в іншому напрямку).

У **кривошипно-повзунному механізмі** (рис. 6.3, а) ланка 1 буде кривошипом, якщо при обертанні вона пройде положення $\varphi = 90^\circ$ і 270° , що можливо, коли виконується умова

$$r < l - |e|, \quad (6.3)$$

де r – довжина ланки OA ; l – ланки AB ; e – зміщення (дезаксіал).

Штриховою лінією зображена схема механізму, коли $e < 0$. Якщо $r > l - |e|$, то ланка 1 буде коромислом, і такий механізм правильніше називати коромислово-повзунним.

У **кулісному механізмі** (рис. 6.3, б) ланка 1 може бути кривошипом; ланка 3 (куліса) буде кривошипом, якщо при обертанні перейде положення $\varphi = 270^\circ$, що можливо при виконанні умови

$$r > a + e, \quad (6.4)$$

де r – довжина кривошипа OA ; $a = l_{OC}$ – міжосьова відстань; e – зміщення куліси; $e = l_{BC}$. У цьому випадку маємо механізм з обертовою кулісою. Якщо $r < a + e$, то куліса 3 буде коромислом (механізм з коливальною кулісою). Найбільш розповсюджені кулісні механізми, в яких зміщення $e = 0$.

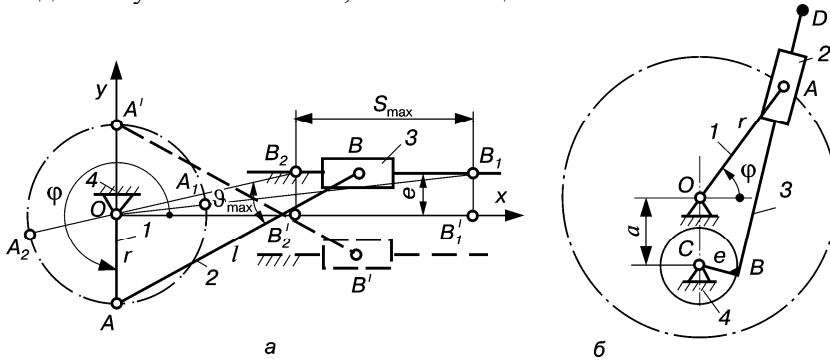


Рис. 6.3. Важільні чотириланкові механізми: а) кривошипно-повзунний; б) кулісний

6.3. Синтез чотириланкових механізмів за двома крайніми положеннями вихідної ланки

В інженерній практиці широко застосовують синтез механізмів за двома крайніми заданими положеннями вихідної ланки. Надалі детальніше розглянемо методи синтезу чотириланкових і деяких шестиланкових механізмів за певних умов.

Кривошипно-коромисловий механізм. На рис. 6.4 зображено кривошипно-коромисловий механізм $OABC$, в якому кривошип OA здійснює обертовий рух навколо точки O ; коромисло BC – зворотно-коливальний рух навколо точки C ; максимальний кут розмаху коромисла β_{\max} .

При безперервному обертанні кривошипа коромисло BC займатиме крайнє праве положення CB_1 , коли кривошип OA і шатун AB витягнуться в одну лінію OA_1B_1 і, навпаки, крайнє ліве положення CB_2 , коли кривошип і шатун складаються в одну лінію OA_2B_2 . Положення механізму, при яких вихідна ланка займає одне з крайніх положень, називають крайніми, або “мертвими”. Для цих положень механізму можна записати такі рівняння:

$$r + l = l_{OB_1}, \quad l - r = l_{OB_2}, \quad (6.5)$$

де $r = l_{OA}$; $l = l_{AB}$.

Розв’язуючи (6.5) відносно r і l , знаходимо

$$r = (l_{OB_1} - l_{OB_2}) / 2; \quad l = (l_{OB_1} + l_{OB_2}) / 2, \quad (6.6)$$

де довжини відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} можна знаходити як графічним, так і аналітичним методом. Якщо кут $\beta_0 > \pi + \xi$ або $\beta_0 < \xi$, то $l_{OB_1} < l_{OB_2}$, а тому у

6. Синтез важільних механізмів

першій залежності системи рівнянь (6.6) вираз $(l_{OB_1} - l_{OB_2})$ треба брати за абсолютним значенням.

За графічним методом будемо два крайні положення коромисла BC (див. рис. 6.4). Відклавши задані кути β_0 і β_{\max} , дістанемо точки B_1 і B_2 , які з'єднуємо з центром обертання кривошипа OA . Тобто будемо крайні положення механізму, з яких знаходимо довжину відрізків OB_1 і OB_2 , які в масштабі довжини μ_l визначають дійсну відстань точок B_1 і B_2 від точки O : $l_{OB_1} = (OB_1)\mu_l$, $l_{OB_2} = (OB_2)\mu_l$. Тоді, використавши (6.6), знайдемо довжину кривошипа $r = l_{OA}$ і довжину шатуна $l = l_{AB}$. Кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях механізму, визначають безпосередньо з рисунка.

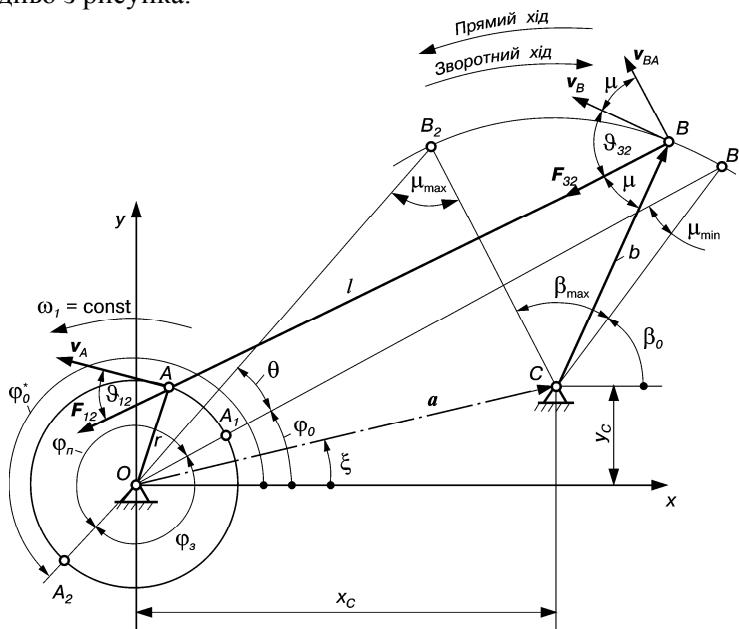


Рис. 6.4. До синтезу кривошипно-коромислового механізму за двома крайніми положеннями вихідної ланки

Якщо положення центра обертання O (відрізки x_C , y_C) не задане, то задача має нескінченну кількість розв'язків.

За **аналітичним методом** необхідно насамперед отримати залежності для визначення відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} . Для розв'язання поставленої задачі можна рекомендувати такий алгоритм:

- 1) визначаємо величину і напрямок вектора \bar{a} (див. рис. 6.4):

$$a = l_{OC} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}, \quad \xi = \arctg(y_C / x_C), \quad a \leq \xi \leq 2\pi; \quad (6.7)$$

- 2) знаходимо координати точок B_1 і B_2 :

$$\begin{aligned}x_{B_1} &= x_C + b \cos \beta_0, \quad y_{B_1} = y_C + b \sin \beta_0; \\x_{B_2} &= x_C + b \cos(\beta_0 + \beta_{\max}), \quad y_{B_2} = y_C + b \sin(\beta_0 + \beta_{\max});\end{aligned}\quad (6.8)$$

3) використовуючи залежності (6.6), знаходимо довжину r кривошипа OA і довжину l шатуна AB , попередньо визначивши довжину відрізків:

$$l_{OB_1} = \sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}, \quad l_{OB_2} = \sqrt{x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2}; \quad (6.9)$$

4) знаючи координати точок B_1 і B_2 (6.8), знаходимо кути φ_0 і φ_0^* , які характеризують положення кривошипа у крайніх положеннях коромисла:

$$\varphi_0 = \arctg(y_{B_1} / x_{B_1}), \quad \varphi_0^* = \pi + \arctg(y_{B_2} / x_{B_2}). \quad (6.10)$$

Визначаємо кути повороту кривошипа за період прямого $\varphi_{\text{п}}$ і зворотного $\varphi_{\text{з}}$ ходу механізму:

$$\varphi_{\text{п}} = \varphi_0^* - \varphi_0, \quad \varphi_{\text{з}} = 2\pi - \varphi_{\text{п}}.$$

На основі такого алгоритму можна скласти програму на ЕОМ, яка дає змогу обчислити параметри синтезу (r , l , φ_0 , φ_0^* , $\varphi_{\text{п}}$, $\varphi_{\text{з}}$) при заданих x_C , y_C , b , β_0 , β_{\max} .

Як зазначалось раніше, при проектуванні механізмів треба враховувати досить важливий параметр, що характеризує умови передавання сил і працездатність механізму – **кут тиску** ϑ , під яким розуміють гострий кут між вектором сили, прикладеної до веденої ланки, і вектором швидкості точки прикладання рушійної сили (див. рис. 6.4). Тертя і сили інерції при цьому поки що не враховують. Максимальний кут тиску не повинен бути більшим від допустимого значення: $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_{\text{доп}}$. Кут ϑ при передачі зусиль на ведену ланку відмічають на схемі механізму залежно від того, яка його ланка є ведучою. Якщо нею буде коромисло 3, то сила F_{32} передається на нього під кутом ϑ_{32} , а якщо – кривошип 1, то вектор сили F_{12} складає з вектором швидкості v_A кут ϑ_{12} .

При ведучому кривошипі кут тиску ϑ_{12} двічі за цикл (коли кривошип і шатун розташовано на одній прямій) дістає максимальне значення, яке дорівнює 90° . Це положення кривошипа, як правило, проходить завдяки інерції обертових мас деталей, які жорстко зв'язані з кривошипом 1. У зв'язку з цим при проектуванні механізму необхідно більше уваги звертати на значення кута ϑ_{32} , найбільшу величину якого визначають шляхом дослідження функції $\vartheta_{32} = \vartheta_{32}(\varphi)$ на максимум. У більшості випадків при інженерних розрахунках вважають, що рушійна сила F_{32} діє вздовж шатуна AB , тоді кут тиску ϑ можна виразити через кут передачі μ , під яким розуміють кут між напрямком абсолютної швидкості v_B точки B і відносної швидкості v_{BA} точки B у відносному русі навколо точки A . Напрямки цих швидкостей визначаються положеннями шатуна AB і коромисла BC ($v_B \perp BC$, $v_{BA} \perp AB$), а отже, кут передачі $\mu = \angle ABC$. Кут передачі може змінюватись в межах $0 - 180^\circ$. Тоді кут тиску $\vartheta = 90^\circ - \mu$ (якщо $\mu \leq 90^\circ$) або $\vartheta = 180^\circ - \mu$ (якщо $\mu \geq 90^\circ$).

При таких припущеннях кут тиску, а відповідно й кут передачі, досягає екстремальних значень у положеннях, коли центр шарніра A розташовано на лінії стояка OC . Для спрощення задачі синтезу вважають, що екстремуми кута передачі отримують у крайніх положеннях механізму, як це показано на рис. 6.4. Щоб усунути заклинювання механізму, повинна виконуватись умова

$$\mu_{д.min} \leq \mu \leq \mu_{д.max}, \quad (6.11)$$

де $\mu_{д.min}$, $\mu_{д.max}$ – відповідно найменші й найбільші допустимі значення кута передачі.

Нині відсутні які-небудь нормативи на допустимі значення кутів передачі. Звичайно, приймають $\mu_{д.min} = 30^\circ$, тоді $\mu_{д.max} = 180^\circ - \mu_{д.min} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Тому умову (6.11) можна записати так:

$$30^\circ \leq \mu \leq 150^\circ. \quad (6.12)$$

Приклад 6.1. Скласти в системі Mathcad програму синтезу шарнірного чотириланкового механізму (рис. 6.4), якщо задані довжина l_{BC} і максимальний кут розмаху β_{max} коромисла BC та його одне положення, яке визначається кутом β_0 , координати центра шарніра C – x_C, y_C .

Необхідно визначити довжину кривошипа l_{OA} та шатуна l_{AB} , кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях коромисла, та кути повороту кривошипа за час прямого φ_1 і зворотного φ_c руху коромисла.

Програма PR 6.1

$$\begin{aligned} x_C &:= 1.2 & y_C &:= 0.03 & l_{BC} &:= 0.18 & \beta_{max} &:= 60\text{deg} & \beta_0 &:= 60\text{deg} \\ \xi &:= \text{atan2}(x_C, y_C) & \xi &= 1.432 \text{ deg} \\ x_{B1} &:= x_C + l_{BC} \cdot \cos(\beta_0) & y_{B1} &:= y_C + l_{BC} \cdot \sin(\beta_0) \\ x_{B2} &:= x_C + l_{BC} \cdot \cos(\beta_0 + \beta_{max}) & y_{B2} &:= y_C + l_{BC} \cdot \sin(\beta_0 + \beta_{max}) \\ l_{OB1} &:= \sqrt{x_{B1}^2 + y_{B1}^2} & l_{OB2} &:= \sqrt{x_{B2}^2 + y_{B2}^2} \\ l_{OA} &:= \frac{|l_{OB1} - l_{OB2}|}{2} & l_{AB} &:= \frac{l_{OB1} + l_{OB2}}{2} & l_{OA} &= 0.089 & l_{AB} &= 1.214 \\ \varphi_0 &:= \text{atan}\left(\frac{y_{B1}}{x_{B1}}\right) & \varphi'_0 &:= \pi + \text{atan2}(x_{B2}, y_{B2}) & \varphi_0 &= 8.2 \text{ deg} & \varphi'_0 &= 189.507 \text{ deg} \\ \varphi_{II} &:= \varphi'_0 - \varphi_0 & \varphi_3 &:= 2\pi - \varphi_{II} & \varphi_{II} &= 181.307 \text{ deg} & \varphi_3 &= 178.693 \text{ deg} \end{aligned}$$

Кривошипно-повзунний механізм. Синтез такого механізму здійснюють аналогічно розглянутому раніше. Повзун B (рис. 6.5) займає крайні положення у тих випадках, коли напрямки кривошипа OA і шатуна AB збігаються. Тобто повзун B займає крайнє праве положення тоді, коли кривошип і шатун витягуються в одну лінію OA_1B_1 , крайнє ліве, коли вони

6.3. Синтез чотириланкових механізмів за двома крайніми положеннями...

складаються в лінію A_2OB_2 . А тому залежності (6.5), (6.6) залишаються справедливими і для цього механізму.

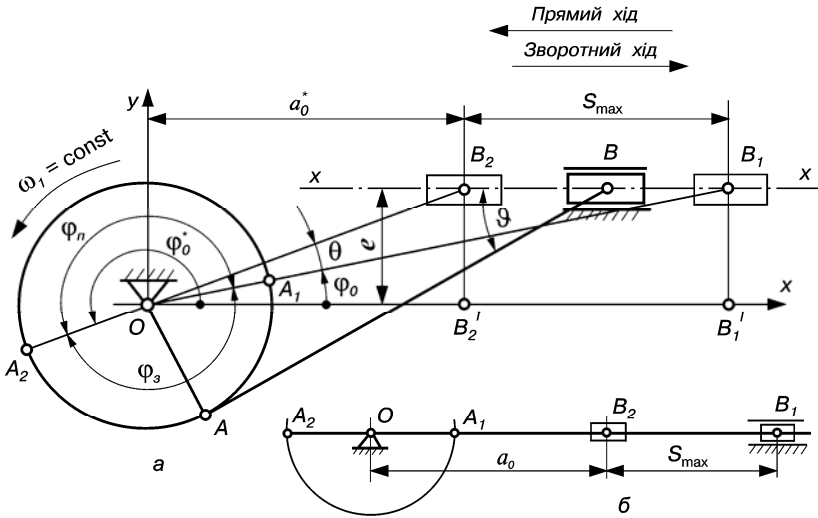


Рис. 6.5. До синтезу кривошипно-повзунного механізму за двома крайніми положеннями вихідної ланки

Для визначення відрізків l_{OB_1} , l_{OB_2} розглянемо трикутники OB_1B_1' і OB_2B_2' (рис. 7.5, а), з яких маємо

$$l_{OB_1} = \sqrt{e^2 + (a_0 + S_{\max})^2}, \quad l_{OB_2} = \sqrt{e^2 + a_0^2}, \quad (6.13)$$

де e – зміщення напрямку руху повзуна відносно осі обертання кривошипа; a_0 – відрізок, який визначає найближче положення повзуна відносно центра обертання кривошипа; S_{\max} – максимальний хід повзуна.

Положення кривошипа в крайніх положеннях повзуна B (у системі координат xOy) визначається кутами

$$\varphi_0 = \arctg \frac{e}{a_0 + S_m}, \quad \varphi'_0 = \pi + \arctg \frac{e}{a_0}. \quad (6.14)$$

Максимальний хід повзуна знайдемо з $\Delta OB_1B_1'$ і $\Delta OB_2B_2'$:

$$S_{\max} = \sqrt{l_{OB_1}^2 - e^2} - \sqrt{l_{OB_2}^2 - e^2}. \quad (6.15)$$

Враховуючи, що $l_{OB_1} = r + l$, $l_{OB_2} = l - r$, залежність (6.15) запишемо у вигляді

$$S_{\max} = \sqrt{(r + l)^2 - e^2} - \sqrt{(l - r)^2 - e^2}. \quad (6.16)$$

У центральному кривошипно-повзунному механізмі ($e = 0$, рис. 6.5, б) $S_{\max} = 2r$, тоді $r = S_{\max}/2$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $\varphi'_0 = 180^\circ$, $\varphi_n = \varphi_s = 180^\circ$.

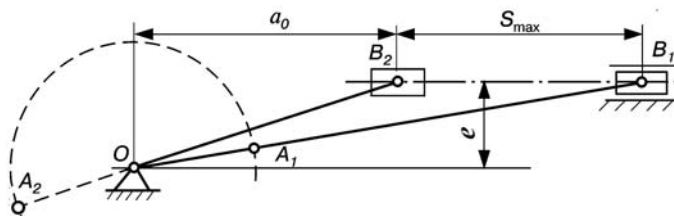


Рис. 6.6. Визначення крайніх положень кривошипно-повзунного механізму

Приклад 6.2. Визначити невідомі розміри ланок кривошипно-повзунного механізму (див. рис. 6.5, а), якщо задані такі параметри: S_{\max} , e , a_0 .

Розв'язання. 1. На будь-якій лінії $x-x$ в масштабі відкладаємо максимальний хід S_{\max} повзуна B (рис. 6.6).

2. Відкладаємо відрізки e і a_0 , які визначають положення центра обертання кривошипа OA .

3. З'єднуємо точку O з точками B_1 і B_2 , тобто будуємо плани механізму в крайніх положеннях.

4. Вимірюємо або обчислюємо за формулами (6.13) довжини відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} .

5. Знаходимо параметри синтезу r , l , φ_0 , φ'_0 , використовуючи залежності (6.6) і (6.14).

Якщо при синтезі механізму не буде задано положення центра обертання кривошипа OA (параметри e , a_0), задача має нескінченне число розв'язків.

На основі наведеного алгоритму неважко скласти програму розрахунку розмірів механізму на ЕОМ.

Програма PR 6.2

$$S_{\max} := 0.35 \quad a_0 := 0.4 \quad e := 0.15$$

$$l_{OB1} := \sqrt{e^2 + (a_0 + S_{\max})^2} \quad l_{OB2} := \sqrt{e^2 + (a_0)^2} \quad l_{OB1} = 0.765 \quad l_{OB2} = 0.427$$

$$l_{OA} := \frac{|l_{OB1} - l_{OB2}|}{2} \quad l_{AB} := \frac{l_{OB1} + l_{OB2}}{2} \quad l_{OA} = 0.169 \quad l_{AB} = 0.596$$

$$\varphi_0 := \operatorname{atan}\left(\frac{e}{a_0 + S_{\max}}\right) \quad \varphi'_0 := \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{e}{a_0}\right) \quad \varphi_0 = 11.31 \text{ deg} \quad \varphi'_0 = 200.556 \text{ deg}$$

$$\varphi_{II} := \varphi'_0 - \varphi_0 \quad \varphi_3 := 2\pi - \varphi_{II} \quad \varphi_{II} = 189.246 \text{ deg} \quad \varphi_3 = 170.754 \text{ deg}$$

Кривошипно-кулісний механізм. На рис. 6.7 зображено кривошипно-кулісний механізм. При обертанні кривошипа OA куліса BC здійснює коливальний рух. Положення куліси BC_1 і BC_2 будуть крайніми у тих випадках, коли її геометрична вісь – дотична до траєкторії точки A . Отже, в цих положеннях кривошип OA розташований перпендикулярно до куліси. Тоді,

якщо відомі максимальний кут розмаху β_{\max} куліси і міжосьова відстань $a = l_{OB}$, то з $\triangle OA_1B$ або $\triangle OA_2B$ знаходимо довжину кривошипа

$$r = a \sin(\beta_{\max}/2). \quad (6.17)$$

Якщо при синтезі механізму не буде задано положення центра обертання кривошипа OA (параметр $a=l_{OB}$), то задача буде мати нескінченне число розв'язків.

Положення кривошипа в системі координат xOy , коли куліса займає крайні положення, визначається кутами

$$\varphi_0 = -\beta_{\max} / 2, \quad \varphi'_0 = \pi + \beta_{\max} / 2.$$

Необхідно зазначити, що максимальний кут розмаху β_{\max} куліси BC (рис. 6.7) дорівнює гострому куту θ між положеннями кривошипа в крайніх положеннях механізму. Ця рівність кутів ($\beta_{\max} = \theta$) далі використовуватиметься при синтезі механізмів.

Приклад 6.3. Визначити довжину кривошипа l_{OA} кулісного механізму (див. рис. 6.7) і кути φ_0 і φ'_0 , які визначають

положення кривошипа в крайніх положеннях куліси, та кути повороту кривошипа за час прямого φ_I і зворотного φ_C руху, якщо задані такі параметри: $\beta_{\max} = 25^\circ$, $a = 0.5$ м.

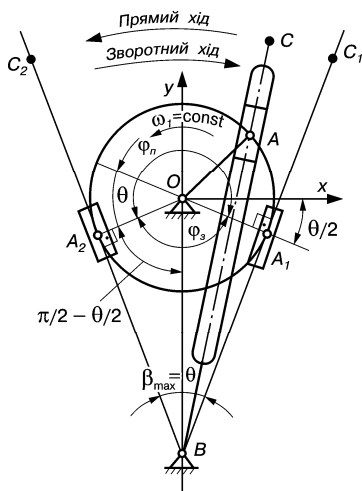


Рис. 6.7. До синтезу кулісного механізму за двома крайніми положеннями вихідної ланки

Програма PR 7.3

$$\beta_{\max} := 25 \text{ deg} \quad a := 0.5$$

$$r := a \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) \quad \varphi_0 := -\frac{\beta_{\max}}{2} \quad \varphi'_0 := \pi + \frac{\beta_{\max}}{2}$$

$$r = 0.108 \quad \varphi_0 = -12.5 \text{ deg} \quad \varphi'_0 = 192.5 \text{ deg}$$

$$\varphi_{II} := \varphi'_0 - \varphi_0 \quad \varphi_3 := 2\pi - \varphi_{II} \quad \varphi_{II} = 205 \text{ deg} \quad \varphi_3 = 155 \text{ deg}$$

6.4. Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

Кривошипно-коромисловий механізм. Важливою характеристикою роботи механізму є *коефіцієнт k зміни середньої швидкості вихідної ланки*, під яким розуміють відношення середньої швидкості руху

6. Синтез важільних механізмів

ланки під час зворотного (холостого ходу) ходу v_3 до її середньої швидкості під час прямого (робочого) ходу v_n .

Нехай рух коромисла BC (див. рис. 6.4) проти руху годинникової стрілки буде прямим (робочим) ходом, за рухом годинникової стрілки – зворотним (холостим). Середню швидкість ланки визначають як відношення максимального переміщення до часу $v_n = S_{\max}/t_n$, $v_3 = S_{\max}/t_3$ або при обертовому русі $\omega_n = \beta_{\max}/t_n$, $\omega_3 = \beta_{\max}/t_3$, де β_{\max} – максимальний кут розмаху коромисла BC ; t_n , t_3 – час (період) відповідно прямого і зворотного ходів вихідної ланки.

Тоді можна записати коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки (коромисла BC)

$$k = \frac{v_3}{v_n} = \frac{\omega_3}{\omega_n} = \frac{t_n}{t_3}. \quad (6.18)$$

Отже, коефіцієнтом k можна вважати відношення періоду (часу) прямого ходу ланки до періоду її зворотного ходу.

Коефіцієнт k дуже часто визначає продуктивність роботи механізму, а тому його інколи називають коефіцієнтом продуктивності.

Якщо кутова швидкість обертання кривошипа OA стала ($\omega_1 = \text{const}$), залежність (6.18) можна виразити через кути повороту кривошипа OA ($\varphi_1 = \omega_1 t$):

$$k = \varphi_n / \varphi_3, \quad (6.19)$$

де φ_n , φ_3 – кут повороту кривошипа за період відповідно прямого і зворотного ходу коромисла.

Якщо позначити через θ кут між положеннями кривошипа OA і шатуна AB у крайніх положеннях коромисла BC (див. рис. 6.4), можна записати

$$\varphi_n = \pi + \theta, \text{ а } \varphi_3 = \pi - \theta. \quad (6.20)$$

Тоді

$$k = (\pi + \theta) / (\pi - \theta), \quad (6.21)$$

звідки

$$\theta = \pi (k - 1) / (k + 1). \quad (6.22)$$

З (6.21) видно, що коефіцієнт k однозначно визначається кутом θ , а тому, забезпечивши кут θ , який обчислюється за формулою (6.22), можна синтезувати механізм за заданим коефіцієнтом k .

При синтезі кривошипно-коромислового механізму, як правило, задаються коефіцієнтом k , максимальним кутом розмаху β_{\max} коромисла BC і його довжиною $b = l_{BC}$, інші параметри синтезу ($r = l_{OA}$, $l = l_{AB}$, координати центра обертання куліси x_C , y_C) знаходять у процесі синтезу. Задачу можна розв'язати графічним або аналітичним методом.

За графічним методом порядок синтезу такий (рис. 6.8).

1. Із довільної точки C , вибраної за початок координат системи, будуюмо крайні положення коромисла B_1C і B_2C симетрично відносно осі y , відклавши кут β_{\max} .

2. Використовуючи (6.22), знаходимо кут θ .

3. Через точку B_1 (або B_2) проводимо лінію B_1K під кутом $\delta = \pi/2 - \theta$ до лінії B_1B_2 , а через точку M (середину хорди B_1B_2) – перпендикуляр MK до перетину з лінією B_1K . При цьому отримуємо при вершині K кут $\theta = \angle B_1KM$, центральний кут $B_1KB_2 = 2\theta$.

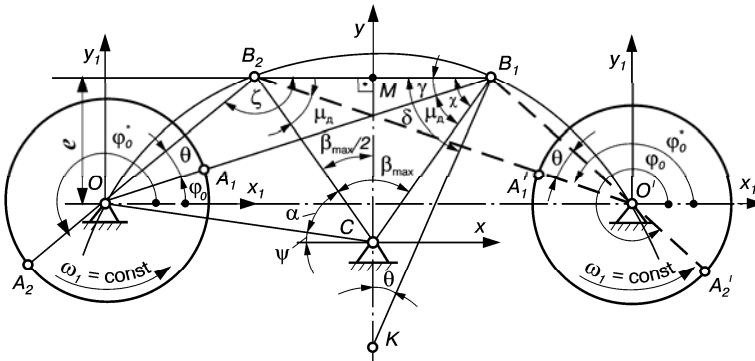


Рис. 6.8. Синтез кривошипно-коромислового механізму за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

4. Проводимо через точки B_1 і B_2 коло з центром у точці K . Будь-яку точку цього кола можна вибрати за центр обертання кривошипа OA , оскільки будь-який вписаний кут B_1OB_2 , що спирається на дугу B_1B_2 , дорівнює куту θ , тобто забезпечує заданий коефіцієнт k (6.21). Проте не всі ці положення точки O забезпечують сприятливі значення кутів тиску ϑ або передачі μ .

5. Для забезпечення сприятливих кутів передачі, які обмежуються умовою (6.11), через точку B_1 (або B_2) під кутом $\mu_d = \mu_{d,\min}$ до лінії B_1C (або B_2C) проводимо лінію OB_1 (OB_2). Тоді дуга B_2O (або B_1O') буде геометричним місцем положень центра обертання кривошипа OA , при якому кути передачі μ будуть більше $\mu_{d,\min}$ і менше $\mu_{d,\max}$. У цьому випадку задача має багато розв'язків. Для однозначного розв'язку потрібні додаткові умови. Такими умовами можуть бути ексцентриситет e (найкоротша відстань між напрямком лінії, що проходить через крайні положення точки B , і центром обертання кривошипа), міжосьова відстань $a = l_{OC}$, довжина кривошипа OA або шатуна AB .

6. Визначивши положення центра обертання кривошипа (точку O або O' і вимірявши відрізки l_{OB_1} і l_{OB_2} , визначимо довжину кривошипа OA і шатуна AB за формулою (6.6), де $l_{OB_1} = (OB_1)\mu_l$; $l_{OB_2} = (OB_2)\mu_l$ (μ_l – масштаб побудови на рис. 6.8). Положення кривошипа OA в крайніх положеннях коромисла BC визначаються кутами φ_0 і φ'_0 (6.10).

Порядок аналітичного синтезу.

1. За формулою (6.22) знаходимо величину кута θ .

2. Знаючи довжину коромисла BC і його кут розмаху β_{\max} , визначаємо довжину хорди B_1B_2 :

$$l_{B_1B_2} = 2b \sin(\beta_{\max} / 2). \quad (6.23)$$

3. Із ΔB_1MK визначаємо радіус кола, яке проведено через точки B_1 і B_2 з центром у точці K :

$$l_{KB_1} = l_{B_1M} / \sin \theta, \quad (6.24)$$

де $l_{B_1M} = l_{B_1B_2} / 2$.

4. Вибираємо положення центра обертання кривошипа OA_1 . Тоді використовуючи теорему синусів, з ΔOB_1B_2 маємо

$$l_{OB_1} = l_{B_1B_2} \sin \zeta / \sin \theta, \quad l_{OB_2} = l_{B_1B_2} \sin \gamma / \sin \theta, \quad (6.25)$$

де

$$\zeta = \pi - \theta - \gamma; \quad \gamma = \chi - \mu_a; \quad \chi = (\pi - \beta_{\max}) / 2. \quad (6.26)$$

Тут положення центра обертання кривошипа вибрано так, що кут $\mu_{\min} = \mu_d$, тобто знаходиться на лінії B_1O (або B_2O').

5. Визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB за формулами (6.6).

6. Координати точки O у системі координат xOy мають вигляд

$$x_0 = \pm a \cdot \cos \psi, \quad y_0 = a \cdot \sin \psi, \quad (6.27)$$

де

$$a = l_{OC} = \sqrt{l_{OB_1}^2 + b^2 - 2l_{OB_1}b \cos \mu_a}; \quad \psi = \frac{\pi - \beta_{\max}}{2} - \alpha. \quad (6.28)$$

З ΔOCB_2 знаходимо кут

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + b^2 - l_{OB_2}}{2ab}. \quad (6.29)$$

У залежності (6.27) знак “+” приймають у тому випадку, коли точка O знаходиться справа, знак “-” – зліва від осі y .

7. Для визначення положень кривошипа OA у крайніх положеннях механізму використаємо координати точок $B_1(x_{B_1}, y_{B_1})$ і $B_2(x_{B_2}, y_{B_2})$ у системі координат x_1Oy_1 , початок якої розмістимо в центрі обертання кривошипа OA , тобто в точці O . Тоді, використовуючи (6.10), маємо

$$\varphi_0 = \arctg(y_{B_1} / x_{B_1}), \quad \varphi_0 = \pi + \arctg(y_{B_2} / x_{B_2}), \quad (6.30)$$

де

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= b \sin(\beta_{\max} / 2) - x_0; & y_{B_1} &= b \cos(\beta_{\max} / 2) - y_0; \\ x_{B_2} &= -b \sin(\beta_{\max} / 2) - x_0; & y_{B_2} &= y_{B_1}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Якщо центр обертання кривошипа OA збігається з точкою O' , залежності (6.30) набувають вигляду

$$\varphi_0 = \pi + \operatorname{arctg}(y_{B_{11}} / x_{B_{11}}), \quad \varphi_0^* = \operatorname{arctg}(y_{B_{21}} / x_{B_{21}}). \quad (6.32)$$

8. Знаходимо кути повороту кривошипа за періоди прямого і зворотного ходів механізму, які визначаються (6.20).

У тому випадку, коли задано зміщення e , задача синтезу розв'язується так.

1. Визначаємо координати точки O у системі координат xOy :

$$y_i = l_{MC} - e, \quad x_i = \pm \sqrt{l_{BK}^2 - (y_0 - l_{KC})^2}, \quad (6.33)$$

де $l_{MC} = b \cos(\beta_{\max} / 2)$; $l_{KC} = b \sin(\beta_{\max} / 2 - \theta) / \sin \theta$.

У (6.33) знак “+” приймають, якщо точка O знаходиться справа, а знак “-” – зліва від осі y .

2. Визначаємо відстань точок B_1 і B_2 від центра обертання кривошипа:

$$l_{OB_1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta_{\max})}, \quad l_{OB_2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}, \quad (6.34)$$

де $\alpha = \operatorname{arctg}(y_i / x_i)$; $a = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

3. Використовуючи залежності (6.6), визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB .

4. Знаходимо кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в “мертвих” положеннях механізму:

$$\varphi_0 = \arcsin(e / l_{OB_1}), \quad \varphi'_0 = \varphi_0 + \theta + \pi.$$

Якщо центр обертання кривошипа збігається з точкою O' , маємо

$$\varphi_0 = \pi - \arcsin(e / l_{OB_2}), \quad \varphi'_0 = 2\pi - \varphi_0.$$

5. Визначаємо кути повороту кривошипа за періоди прямого і зворотного ходів механізму, використовуючи (6.20).

Приклад 6.4. Скласти в системі Mathcad програму синтезу шарнірного чотириланкового механізму (рис. 6.8), якщо задані коефіцієнт k , довжина l_{BC} і максимальний кут розмаху β_{\max} коромисла BC , допустимий кут передачі μ_a .

Необхідно визначити довжину кривошипа l_{OA} та шатуна l_{AB} , координати центра шарніра кривошипа x_C, y_C , прийнявши $\mu_{23 \min} = \mu_a$, кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях коромисла, та кути повороту кривошипа за час прямого φ_1 і зворотного φ_c руху коромисла.

Програма PR 6.4

$$\begin{aligned}
 k &:= 1.2 & l_{BC} &:= 0.2 & \beta_{\max} &:= 60\text{deg} & \mu_d &:= 60\text{deg} \\
 \theta &:= \pi \cdot \frac{(k-1)}{k+1} & l_{B1B2} &:= 2 \cdot l_{BC} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) & l_{B1M} &:= \frac{l_{B1B2}}{2} \\
 l_{KB1} &:= \frac{l_{B1M}}{\sin(\theta)} & \chi &:= \frac{\pi - \beta_{\max}}{2} & \gamma &:= \chi - \mu_d & \zeta &:= \pi - \theta - \gamma \\
 l_{OB1} &:= l_{B1B2} \cdot \frac{\sin(\zeta)}{\sin(\theta)} & l_{OB2} &:= l_{B1B2} \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\theta)} & a &:= \sqrt{l_{OB1}^2 + l_{BC}^2 - 2 \cdot l_{OB1} \cdot l_{BC} \cdot \cos(\mu_d)} \\
 \alpha &:= \arccos\left(\frac{a^2 + l_{BC}^2 - l_{OB2}^2}{2 \cdot a \cdot l_{BC}}\right) & \psi &:= \frac{(\pi - \beta_{\max})}{2} - \alpha & x_0 &:= a \cdot \cos(\psi) & y_0 &:= -a \cdot \sin(\psi) \\
 x_{B11} &:= l_{BC} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) - x_0 & y_{B11} &:= l_{BC} \cdot \cos\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) - y_0 & x_{B21} &:= -l_{BC} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) - x_0 \\
 y_{B21} &:= y_{B11} & \varphi_0 &:= \arctan\left(\frac{y_{B11}}{x_{B11}}\right) & \varphi'_0 &:= \pi + \arctan\left(\frac{y_{B21}}{x_{B21}}\right) & \varphi_0 &:= -9.97\text{deg} & \varphi'_0 &:= 177.108\text{deg} \\
 \varphi_{II} &:= \varphi'_0 - \varphi_0 & \varphi_3 &:= 2\pi - \varphi_{II} & \varphi_{II} &:= 187.078\text{deg} & \varphi_3 &:= 172.922\text{deg}
 \end{aligned}$$

Кривошипно-повзунний механізм (див. рис. 6.5, а). Методика синтезу такого механізму майже не відрізняється від синтезу кривошипно-коромислового механізму (див. рис. 6.7). Для цього механізму справедливі залежності (6.5), (6.6), (6.18)–(6.22).

Графічний метод синтезу зображено на рис. 6.9. Нехай будуть задані такі параметри: максимальний хід S_{\max} , зміщення e і коефіцієнт k .

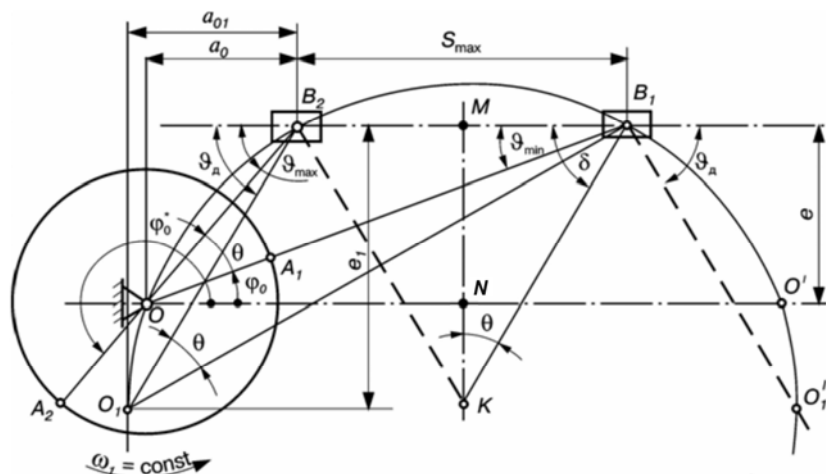


Рис. 6.9. Синтез кривошипно-повзунного механізму за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

Розглянемо порядок синтезу.

1. На будь-якій лінії відкладаємо в масштабі максимальний хід повзуна B ($S_{\max} = l_{B_1 B_2}$).

2. Визначаємо за формулою (6.22) кут θ .

3. Через точку B_1 або B_2 проводимо лінію $B_1 K$ або $B_2 K$ під кутом $\delta = \pi/2 - \theta$ до відрізка $B_1 B_2$, а через точку M (середину відрізка $B_1 B_2$) – лінію MK , яка перпендикулярна до цього самого відрізка $B_1 B_2$. При цьому дістанемо $\angle MKB_1 = \theta$, а $\angle B_1 K B_2 = 2\theta$.

4. Через точки B_1 і B_2 проводимо коло з центром у точці K , будь-яку точку якого можна вибрати за центр обертання O кривошипа, оскільки довільно вписаний кут $B_1 O B_2$ дорівнює куту θ , тобто забезпечується заданий коефіцієнт k .

5. Проводимо лінію OO' , паралельну лінії $B_1 B_2$ і віддалену від неї на величину e . Точка O або O' може бути вибрана за центр обертання кривошипа.

6. З'єднавши точку O або O' з точками B_1 і B_2 , знайдемо положення ланок механізму в крайніх положеннях повзуна B , а отже, і довжину відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} .

7. Використавши (6.6), визначимо довжину кривошипа і шатуна. Якщо в умові задачі не буде задане або вибране зміщення, то задача матиме багато розв'язків. Для однозначного розв'язку задачі необхідні додаткові умови, якими можуть бути: найбільше або найменше віддалення повзуна B відносно осі обертання кривошипа, зокрема відрізки a_0 або $a_0 + S_{\max}$; довжина кривошипа OA або шатуна AB .

При синтезі таких механізмів необхідно також врахувати кути передачі μ або кути тиску ϑ . Тут зручніше користуватися кутом ϑ . Для попередження заклинювання механізму слід задовольнити умову $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_d$ або (6.11), оскільки $\vartheta_d = \pi/2 - \mu_d$, де ϑ_d – допустиме значення кута тиску.

Граничне положення центра O_1 обертання кривошипа OA на дузі кола, що проходить через точки B_1 і B_2 з центром у точці K , знайдемо, якщо через точки B_1 і B_2 проведемо під кутом ϑ_d до лінії $B_1 B_2$ промені $B_2 O_1$ (або $B_1 \hat{I}'$) до перетину з цим колом. Дуги $B_2 O_1$ і $B_1 \hat{I}'$ є геометричними місцями положень кривошипа OA , які забезпечують умову $\vartheta \leq \vartheta_d$ і заданий коефіцієнт k . Вибравши центр обертання кривошипа, можна визначити параметри синтезу $r, l, e, \varphi_0, \varphi'_0, \varphi_n, \varphi_3$ (див. п. 6.3).

Порядок **аналітичного синтезу**.

1. За формулою (6.22) знаходимо величину кута θ .

2. З $\Delta B_1 M K$ визначаємо радіус кола, яке проведено через точки B_1 і B_2 з центром у точці K :

$$l_{KB_1} = l_{B_1 M} / \sin \theta,$$

де $l_{B_1 M} = S_{\max} / 2$.

3. З ΔONK визначаємо положення центра обертання кривошипа OA

$$l_{ON} = \sqrt{l_{KB_1}^2 - l_{KN}^2},$$

де $l_{KN} = l_{MK} - \dot{a}$, $l_{MK} = \sqrt{l_{KB_1}^2 - l_{B_1M}^2}$, $l_{OK} = l_{KB_1}$.

4. Визначаємо довжину відрізків:

$$l_{OB_1} = \sqrt{\dot{a}^2 + (l_{ON} + S_{\max} / 2)^2}, \quad l_{OB_2} = \sqrt{\dot{a}^2 + (l_{ON} - S_{\max} / 2)^2},$$

5. Визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB за формулами (6.6).

6. Визначаємо кути φ_0 , φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях повзуна:

$$\varphi_0 = \arcsin(e / l_{OB_1}), \quad \varphi'_0 = \varphi_0 + \theta + \pi$$

7. Визначаємо кути повороту кривошипа за час прямого φ_i і зворотного φ_c руху повзуна, використавши формули (6.20).

$$a = l_{OC} = \sqrt{l_{OB_1}^2 + b^2 - 2l_{OB_1}b \cos \mu_a}; \quad \psi = \frac{\pi - \beta_{\max}}{2} - \alpha. \quad (6.28)$$

З $\triangle OCB_2$ маємо

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + b^2 - l_{OB_2}^2}{2ab}. \quad (6.29)$$

У залежності (6.26) знак “+” приймають у тому випадку, коли точка O знаходиться справа, знак “-” – зліва від осі y .

У тому випадку, коли задано зміщення e , задача синтезу розв’язується наступним чином.

1. Визначаємо координати точки O у системі координат xOy :

$$y_i = l_{MC} - e, \quad x_i = \pm \sqrt{l_{B_1K}^2 - (y_0 - l_{KC})^2}, \quad (6.30)$$

де $l_{MC} = b \cos(\beta_{\max} / 2)$; $l_{KC} = b \sin(\beta_{\max} / 2 - \theta) / \sin \theta$.

У (6.30) знак “+” приймають, якщо точка O знаходиться справа, а знак “-” – зліва від осі y .

2. Визначаємо відстань точок B_1 і B_2 від центра обертання кривошипа:

$$l_{OB_1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta_{\max})},$$

$$l_{OB_2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}, \quad (6.31)$$

де $\alpha = \arctg(y_i / x_i)$; $a = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

3. Використовуючи залежності (6.6), визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB .

4. Знаходимо кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в “мертвих” положеннях механізму:

$$\varphi_0 = \arcsin(e/l_{OB_1}), \quad \varphi'_0 = \varphi_0 + \theta + \pi.$$

5. Визначаємо кути повороту кривошипа за періоди прямого і зворотного ходів механізму, використовуючи (6.20).

Приклад 6.5. Скласти в системі Mathcad програму синтезу кривошипноповзунного механізму (рис. 6.9), якщо задані коефіцієнт k , довжина l_{BC} , зміщення e і максимальний хід повзуна S_{\max} . Необхідно визначити довжину кривошипа $r=l_{OA}$ та шатуна $l=l_{AB}$, координати центра шарніра кривошипа x_O, y_O , кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях коромисла, та кути повороту кривошипа за час прямого φ_1 і зворотного φ_c руху коромисла.

Програма PR 6.5

$$\begin{aligned}
 k &:= 1.2 & e &:= 0.05 & S_{\max} &:= 0.18 \\
 \theta &:= \pi \cdot \frac{(k-1)}{k+1} & l_{B1M} &:= \frac{S_{\max}}{2} & l_{KB1} &:= \frac{l_{B1M}}{\sin(\theta)} & l_{MK} &:= \sqrt{l_{KB1}^2 - l_{B1M}^2} \\
 l_{KN} &:= l_{MK} - e & l_{ON} &:= \sqrt{l_{KB1}^2 - l_{KN}^2} & l_{ON} &= 0.19 \\
 l_{OB1} &:= \sqrt{e^2 + \left(l_{ON} + \frac{S_{\max}}{2}\right)^2} & l_{OB2} &:= \sqrt{e^2 + \left(l_{ON} - \frac{S_{\max}}{2}\right)^2} \\
 r &:= \frac{l_{OB1} - l_{OB2}}{2} & l &:= \frac{l_{OB1} + l_{OB2}}{2} & r &= 0.086 & l &= 0.198 \\
 \varphi_0 &:= \arcsin\left(\frac{e}{l_{OB1}}\right) & \varphi'_0 &:= \varphi_0 + \theta + \pi & \varphi_0 &= 10.111 \text{ deg} & \varphi'_0 &= 206.474 \text{ deg} \\
 \varphi_{II} &:= \varphi'_0 - \varphi_0 & \varphi_3 &:= 2\pi - \varphi_{II} & \varphi_{II} &= 196.364 \text{ deg} & \varphi_3 &= 163.636 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

Механізм з коливальною кулісою. Синтез центрального чотириланкового кулісного механізму за коефіцієнтом k аналогічний його синтезу за заданими його крайніми положеннями (див. рис. 6.7), оскільки кут розмаху куліси $\beta_{\max}=\theta$ визначає коефіцієнт k (6.21). Для цих механізмів залишаються справедливими формули (6.18)–(6.22). Тому, щоб не повторюватись, розглянемо синтез зміщеного кулісного механізму, який зображений на рис. 6.10. Вихідними даними, звичайно, бувають коефіцієнт k , міжосьова відстань $a = l_{OC}$ і зміщення $e = l_{BC}$. Тобто в цьому механізмі вісь паза куліси AB у крайніх положеннях буде дотичною до кола радіуса e , а їх напрямки (A_1B_1 і A_2B_2) перетинаються у точці S . Лінія CS є бісектрисою кута B_1CB_2 , а її довжина

$$l_{CS} = l_{BC}/\cos(\theta/2). \quad (6.32)$$

6. Синтез важільних механізмів

Отже, для синтезу цього механізму за заданим коефіцієнтом k необхідно з точки O провести дотичну до цього кола (радіуса l_{CS}) і знайти точку дотику S (для точнішого визначення точки дотику S провести перпендикуляр із точки C до лінії OS). Потім із точки S відкласти кути $\theta/2$ до лінії OS , які визна-

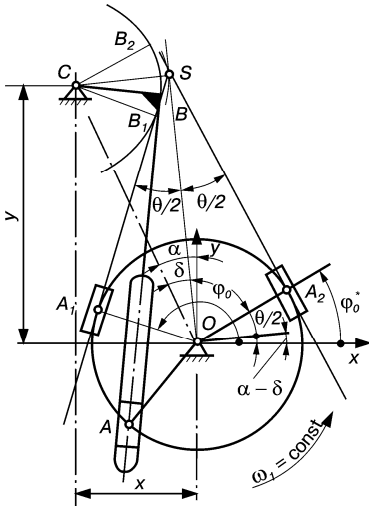


Рис. 6.10. До синтезу зміщеного кулісного механізму

чають крайні положення куліси A_1B_1 і A_2B_2 . Кут θ визначають за (6.22). Відрізки OA_1 ($OA_1 \perp A_1S$) або OA_2 ($OA_2 \perp A_2S$) визначають довжину кривошипа в масштабі μ_s , тобто

$$r = l_{OS} \sin(\theta/2), \tag{6.33}$$

де $l_{OS} = \sqrt{l_{OC}^2 - l_{CS}^2}$, або враховуючи, що $a = l_{OC} = \sqrt{x^2 + y^2}$, запишемо

$$l_{OS} = \sqrt{x^2 + y^2 - l_{CS}^2}. \tag{6.34}$$

Положення кривошипа OA у крайніх положеннях куліси (система координат xOy) визначається залежностями

$$\phi'_0 = \alpha - \delta + \theta/2, \quad \phi_0 = \phi'_0 + \phi_c, \tag{6.35}$$

де

$$\alpha = \text{arctg}(x/y); \quad \delta = \arcsin(l_{CS}/a). \tag{6.36}$$

Кути ϕ_n, ϕ_z обчислюють за формулами (6.20).

Задачу можна розв'язати як графічно, так і аналітично, застосувавши вказаний порядок синтезу.

Приклад 6.6. Скласти в системі Mathcad програму синтезу зміщеного кулісного механізму, який зображений на рис. 6.10, якщо задані коефіцієнт k , довжина l_{BC} і координати центра шарніра $C - x, y$.

Необхідно визначити довжину кривошипа l_{OA} , кути ϕ_0 і ϕ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях куліси, та кути повороту кривошипа за час прямого ϕ_i і зворотного ϕ_c руху куліси.

Програма PR 6.6

$$k := 1.3 \quad l_{BC} := 0.03 \quad x := -0.02 \quad y := 0.3$$

$$\theta := \pi \cdot \frac{(k-1)}{k+1} \quad l_{CS} := \frac{l_{BC}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad a := \sqrt{x^2 + y^2} \quad l_{OS} := \sqrt{a^2 - l_{CS}^2} \quad \theta = 23.478 \text{ deg}$$

$$r := l_{OS} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad r = 0.05 \quad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \delta := \operatorname{asin}\left(\frac{l_{CS}}{a}\right)$$

$$\varphi'_0 := \alpha - \delta + \frac{\theta}{2} \quad \varphi_0 := \varphi'_0 + \pi - \theta \quad \varphi'_0 = 2.076 \text{ deg} \quad \varphi_0 = 158.598 \text{ deg}$$

$$\varphi_{II} := \pi + \theta \quad \varphi_3 := \pi - \theta \quad \varphi_{II} = 203.478 \text{ deg} \quad \varphi_3 = 156.522 \text{ deg}$$

6.5. Приклади синтезу шестиланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та максимальним ходом вихідної ланки

Методи синтезу чотириланкових механізмів за коефіцієнтом k і ходом S_{\max} або β_{\max} вихідної ланки можна використати для синтезу шестиланкових механізмів. Розглянемо деякі приклади синтезу таких механізмів.

Шестиланковий механізм з коливальною кулісою (рис. 6.11, а, б). Такий механізм широко використовують у різних машинах, зокрема в металорізальних верстатах, де потрібно забезпечити високі коефіцієнти k , регулювати хід вихідної ланки. Він перетворює обертовий рух кривошипа 1 у зворотно-поступальний рух повзуна 5. При цьому середня швидкість v_3 повзуна при зворотному русі більша в k разів за середню швидкість v_{II} прямого ходу. Вихідними даними, звичайно, бувають максимальний хід S_{\max} вихідної ланки 5 і коефіцієнт зміни його середньої швидкості $k = v_3/v_{II}$. Наприклад, у стругальних і довбальних верстатах деталь оброблюється в одному напрямку із заданою швидкістю різання, а холостий (зворотний) хід різального інструменту здійснюється з більшою середньою швидкістю; у цьому випадку коефіцієнт $k > 1$.

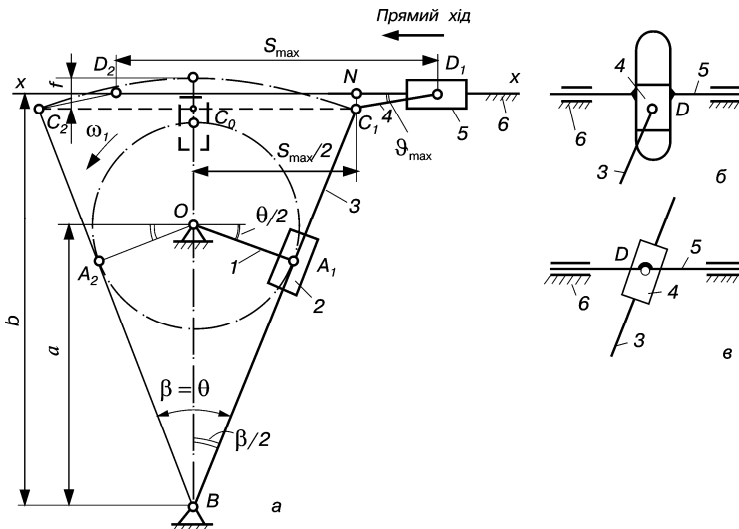


Рис. 6.11. До синтезу шестиланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та максимальним ходом вихідної ланки

Рекомендується такий порядок синтезу.

1. Визначаємо кут θ за (6.22).
2. Із довільної точки B проводимо два промені під кутом $\theta/2$ до лінії OB , які визначатимуть два крайні положення куліси 3.
3. Вибравши міжосьову відстань $a = l_{OB}$, з точки O проводимо перпендикуляри OA_1 і OA_2 до крайніх положень куліси.
4. З $\triangle OA_1B$ визначаємо за (6.17) довжину кривошипа OA .
5. Оскільки довжина хорди C_1C_2 дорівнює максимальному ходу повзуна 5 (як протилежні сторони паралелограма $C_1C_2D_2D_1$), довжину куліси можна визначити з $\triangle BC_0C_1$:

$$l_{BC} = \frac{S_{\max}}{2\sin(\theta/2)}. \quad (6.37)$$

6. Обчислюємо довжину шатуна 4. Для забезпечення найменших кутів тиску при передачі зусиль від ланки 4 до повзуна 5 доцільно вибрати таке положення осі xx , щоб вона ділила стрілку сегмента f навпіл. Тоді з прямокутного $\triangle C_1ND_1$ довжина шатуна 4

$$l_{CD} \geq f/(2\sin\vartheta_d), \quad (6.38)$$

де $f = l_{BC} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)$. У цьому випадку буде забезпечена умова $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_d$, оскільки кут передачі сили від повзуна 2 до куліси 3 $\vartheta_{32} = 0$, що є перевагою кулісних механізмів.

7. Визначаємо відстань b між центром обертання куліси і напрямною повзуна 5 (рис. 6.10, а) за формулою

$$b = l_{BC} - f/2. \quad (6.39)$$

Використовують також інші варіанти приєднаної групи, наприклад, групи II класу IV виду (рис. 6.11, в) або V виду (рис. 6.11, б). За кутами тиску другий варіант кращий від інших, оскільки $\vartheta_{54} = 0$.

Приклад 6.7. Скласти в системі Mathcad програму синтезу зміщеного кулісного механізму, який зображений на рис. 6.11, а, якщо задані коефіцієнт k , міжосьова відстань a та максимальний хід S_{\max} повзуна 5.

Необхідно визначити довжину кривошипа l_{OA} і шатуна l_{CD} , положення напрямної повзуна 5 (відрізок b) та кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях куліси, та кути повороту кривошипа за час прямого φ_i і зворотного φ_c руху куліси. Положення осі xx вибрати таке, щоб вона ділила стрілку сегмента f навпіл.

Програма PR 6.7

$$\begin{aligned}
 k &:= 2 & a &:= 0.4 & S_{\max} &:= 0.45 & v_{\max} &:= 30 \text{deg} \\
 \theta &:= \pi \cdot \frac{(k-1)}{k+1} & r &:= a \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & r &= 0.2 \\
 \varphi_0 &:= -\frac{\theta}{2} & \varphi'_0 &:= \pi + \frac{\theta}{2} & \varphi_0 &= -30 \text{deg} & \varphi'_0 &= 210 \text{deg} \\
 \varphi_{\text{II}} &:= \varphi'_0 - \varphi_0 & \varphi_3 &:= 2\pi - \varphi_{\text{II}} & \varphi_{\text{II}} &= 240 \text{deg} & \varphi_3 &= 120 \text{deg} \\
 l_{BC} &:= \frac{S_{\max}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & f &:= l_{BC} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) & l_{CD} &:= \frac{f}{2 \cdot \sin(v_{\max})} & l_{CD} &= 0.06 \\
 b &:= l_{BC} - \frac{f}{2} & b &= 0.42
 \end{aligned}$$

Шестиланковий механізм з обертовою кулісою. На рис. 6.12 зображено схему розповсюджененого варіанта такого механізму. Вихідними даними можуть бути: довжина r кривошипа OA , максимальний хід S_{\max} повзуна 5 і коефіцієнт зміни середньої швидкості $k > 1$.

Прямий хід повзуна 5 здійснюється при повороті кривошипа 1 на кут $\varphi_{\text{II}} = \pi + \theta$, зворотний – на кут $\varphi_3 = \pi - \theta$. Тому при $\omega_1 = \text{const}$, маючи заданий коефіцієнт k , можна визначити за формулою (6.22) кут θ . Тоді, розглянувши $\triangle BOA_1$, знайдемо міжосьову відстань $a = r \sin(\theta/2)$, звичайно, для механізмів даного типу $r/a \geq 2$.

Крайні положення точки D_1 і D_2 повзуна D визначаються положеннями точок A_1 і A_2 , коли напрямки куліси 3 і шатуна 4 збігаються. Тому довжина кривошипа BC $l_{BC} = S_{\max}/2$.

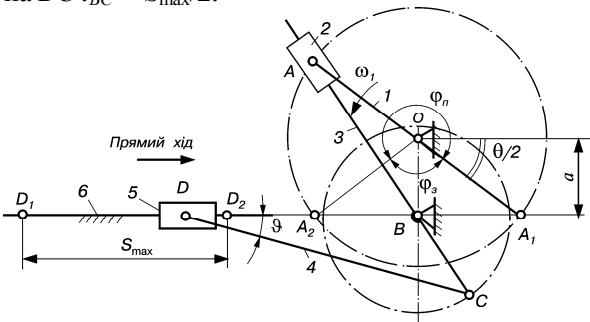


Рис. 6.12. До синтезу шестиланкового механізму з обертовою кулісою

Довжина шатуна 4 має бути такою, щоб максимальний кут тиску $\vartheta = \vartheta_{54}$ не перевищував допустиме значення $\vartheta_{\text{д}}$. Максимальний кут тиску ϑ буде в тому випадку, коли куліса 3 займе вертикальне положення, тоді $l_{CD} \geq l_{BC}/\sin\vartheta_{\text{д}}$.

Не варто збільшувати довжину шатуна l_{CD} , оскільки це призводить до збільшення габаритів усього механізму. Щоб дістати найменших зу-

силь у кулісній парі 2–3 (повзун–куліса) бажано вибирати довжину кривошипа 1 найбільшою, проте треба мати на увазі, що це також веде до збільшення габаритів механізму.

Приклад 6.8. Скласти в системі Mathcad програму синтезу шестиланкового механізму з обертовою кулісою, який зображений на рис. 6.12,

6. Синтез важільних механізмів

якщо задані коефіцієнт k , довжина кривошипа l_{OA} , максимальний хід S_{\max} повзуна 5 , допустимий кут тиску ϑ_d .

Необхідно визначити довжину шатуна l_{CD} та кути φ_0 і φ'_0 , які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях повзуна 5 , та кути повороту кривошипа за час прямого φ_i і зворотного φ_c руху куліси.

Програма PR 6.8

$$\begin{aligned}
 r &:= 0.2 & k &:= 2 & S_{\max} &:= 0.35 & v_{\max} &:= 25 \text{ deg} \\
 \theta &:= \pi \cdot \frac{(k-1)}{k+1} & l_{BC} &:= \frac{S_{\max}}{2} & l_{CD} &:= \frac{l_{BC}}{\sin(v_{\max})} & l_{CD} &= 0.414 \\
 a &:= r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & a &= 0.1 \\
 \varphi_0 &:= -\frac{\theta}{2} & \varphi'_0 &:= \pi + \frac{\theta}{2} & \varphi_0 &= -30 \text{ deg} & \varphi'_0 &= 210 \text{ deg} \\
 \varphi_{II} &:= \varphi'_0 - \varphi_0 & \varphi_3 &:= 2\pi - \varphi_{II} & \varphi_{II} &= 240 \text{ deg} & \varphi_3 &= 120 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

Наведемо ще деякі приклади складання в системі Mathcad програми аналітичного синтезу механізмів (приклади 6.9 – 6.14), які використовуються в курсовому проектуванні з теорії механізмів і машин [8, 10]. Нижче задані схеми та вихідні параметри механізмів, необхідно знайти невідомі розміри ланок та положення кривошипа l в крайніх положеннях механізму.

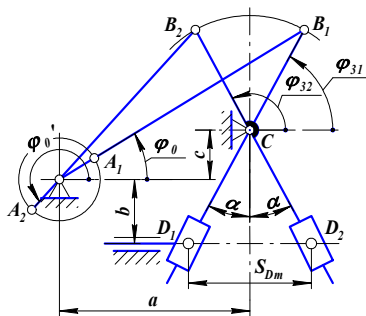


Рис. 7.13. До синтезу механізму подачі

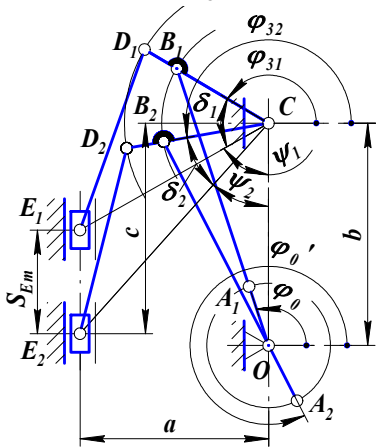
Приклад 6.9. Механізм подачі (рис. 6.13). Задано максимальний хід повзуна D $S_{Dm}=0,065$ м; довжина відрізків: $a=0,25$ м, $b=0,02$ м, $c=0,03$ м; довжина коромисла BC $l_{BC}=0,1$ м. В середньому положенні коромисло BC збігається з вертикаллю.

Програма PR 6.9

$$\begin{aligned}
 a &:= 0.25 & b &:= 0.02 & c &:= 0.03 \\
 S_{Dm} &:= 0.065 & l_{BC} &:= 0.1 \\
 \alpha &:= \text{atan}\left[\frac{S_{Dm}}{2 \cdot (b+c)}\right] & \varphi_{31} &:= \frac{\pi}{2} - \alpha \\
 \varphi_{32} &:= \frac{\pi}{2} + \alpha & \alpha &= 33.024 \text{ deg} & \varphi_{31} &= 56.976 \text{ deg} & \varphi_{32} &= 123.024 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{B1} &:= a + l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{31}) & y_{B1} &:= c + l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{31}) \\
 x_{B2} &:= a + l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{32}) & y_{B2} &:= c + l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{32}) \\
 l_{OB1} &:= \sqrt{(x_{B1})^2 + (y_{B1})^2} & l_{OB2} &:= \sqrt{(x_{B2})^2 + (y_{B2})^2} \\
 r &:= \frac{|l_{OB1} - l_{OB2}|}{2} & l &:= \frac{l_{OB1} + l_{OB2}}{2} & r &= 0.049 & l &= 0.276 \\
 \varphi_0 &:= \text{atan2}(x_{B1}, y_{B1}) & \varphi'_0 &:= \pi + \text{atan2}(x_{B2}, y_{B2}) \\
 \varphi_0 &= 20.499 \text{ deg} & \varphi'_0 &= 210.213 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

Приклад 6.10. Механізм преса (рис. 6.14). Задано максимальний хід повзуна E $S_{Em} = 0,175$ м; довжина відрізків: $a = 0,51$ м, $b = 1,2$ м, $c = 0,6$ м; довжина коромисла BC $l_{BC} = 0,4$ м, шатуна DE $l_{DE} = 0,5$ м, $l_{DC} = l_{DE}$.



Програма PR 6.10

$$\begin{aligned}
 a &:= 0.51 & b &:= 1.2 & c &:= 0.6 & S_{Em} &:= 0.175 & l_{DE} &:= 0.5 \\
 l_{DC} &:= l_{DE} & l_{BC} &:= 0.4 \\
 l_{CE2} &:= \sqrt{a^2 + c^2} & l_{CE1} &:= \sqrt{a^2 + (c - S_{Em})^2} \\
 \psi_1 &:= \text{atan}\left(\frac{a}{c - S_{Em}}\right) & \psi_2 &:= \text{atan}\left(\frac{a}{c}\right) \\
 \delta_1 &:= \text{acos}\left(\frac{l_{CE1}}{2 \cdot l_{DC}}\right) & \delta_2 &:= \text{acos}\left(\frac{l_{CE2}}{2 \cdot l_{DC}}\right) \\
 \varphi_{31} &:= \frac{3}{2}\pi - \delta_1 - \psi_1 & \varphi_{32} &:= \frac{3}{2}\pi - \delta_2 - \psi_2 \\
 x_{B2} &:= l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{32}) & y_{B2} &:= b + l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{32})
 \end{aligned}$$

Рис. 6.14. До синтезу механізму преса

$$\begin{aligned}
 x_{B1} &:= l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{31}) & y_{B1} &:= b + l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{31}) \\
 l_{OB2} &:= \sqrt{(x_{B2})^2 + (y_{B2})^2} & l_{OB1} &:= \sqrt{(x_{B1})^2 + (y_{B1})^2} & r &:= \frac{|l_{OB2} - l_{OB1}|}{2} \\
 l &:= \frac{l_{OB2} + l_{OB1}}{2} & \varphi_0 &:= \text{atan2}(x_{B1}, y_{B1}) & \varphi'_0 &:= \text{atan2}(x_{B2}, y_{B2}) + \pi \\
 r &= 0.067 & l &= 1.253 & \varphi_0 &= 107.429 \text{ deg} & \varphi'_0 &= 289.288 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

Приклад 6.11. Механізм кисневого компресора (рис. 6.15). Задано: довжина відрізків: $a = 0,2$ м, $b = 0,14$ м, $c = 0,19$ м; довжина коромисла BC $l_{BC} = 0,13$ м, $l_{DC} = l_{BC}$; кут $\beta = 190^\circ$. В середньому положенні відрізок DC

6. Синтез важільних механізмів

коромисла 3 збігається з вертикаллю, а його крайні положення визначаються кутом $\alpha = 25^\circ$. В правому крайньому положенні ланки 5 кут $CDE = \eta = 90^\circ$.

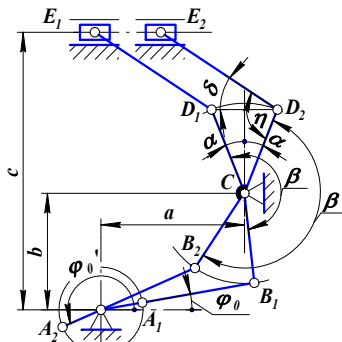


Рис. 6.15. До синтезу механізму кисневого компресора

Програма PR 6.11

$$a := 0.2 \quad b := 0.14 \quad c := 0.19 \quad l_{BC} := 0.13$$

$$l_{DC} := l_{BC} \quad \beta := 190 \text{deg} \quad \eta := 90 \text{deg} \quad \alpha := 25 \text{deg}$$

$$x_{D1} := a + l_{DC} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad y_{D1} := b + l_{DC} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$x_{D2} := a + l_{DC} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad y_{D2} := b + l_{DC} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\delta := \eta - \frac{\pi}{2} + \alpha \quad l_{DE} := \frac{(c - y_{D1})}{\sin(\delta)}$$

$$x_{B2} := a + l_{BC} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) \quad y_{B2} := b + l_{BC} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right)$$

$$x_{B1} := a + l_{BC} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \quad y_{B1} := b + l_{BC} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$$

$$l_{OB1} := \sqrt{(x_{B1})^2 + (y_{B1})^2} \quad l_{OB2} := \sqrt{(x_{B2})^2 + (y_{B2})^2} := \frac{|l_{OB2} - l_{OB1}|}{2}$$

$$l := \frac{(l_{OB2} + l_{OB1})}{2} \quad \varphi_0 := \pi + \text{atan}\left(\frac{y_{B2}}{x_{B2}}\right) \quad \varphi'_0 := \text{atan}\left(\frac{y_{B2}}{x_{B2}}\right)$$

$$r = 0.052 \quad l = 0.182 \quad \varphi_0 = 183.534 \text{deg} \quad \varphi'_0 = 3.534 \text{deg}$$

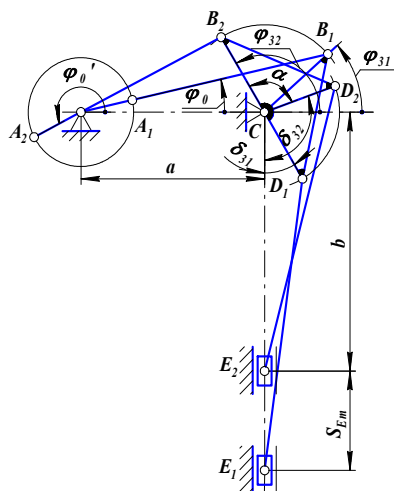


Рис. 6.16. До синтезу механізму преса

Приклад 6.12. Механізм преса

(рис. 6.16). Задано: максимальний хід повзуна E $S_{Em} = 0,11$ м; довжина відрізків: $a = 0,5$ м, $b = 0,3$ м; довжина коромисла BC $l_{BC} = 0,15$ м, шатуна DE $l_{DE} = 0,35$ м, $l_{DC} = 0,7l_{BC}$, кут $\alpha = 120^\circ$.

Програма PR 6.12

$$a := 0.5 \quad b := 0.3 \quad S_{Em} := 0.11 \quad l_{DE} := 0.35$$

$$l_{BC} := 0.15 \quad l_{DC} := 0.7 \cdot l_{BC} \quad \alpha := 120 \text{deg}$$

$$\delta_{31} := \arccos\left[\frac{(b + S_{Em})^2 + l_{DC}^2 - l_{DE}^2}{2 \cdot (b + S_{Em}) \cdot l_{DC}}\right]$$

$$\delta_{32} := \arccos\left[\frac{(b^2 + l_{DC}^2 - l_{DE}^2)}{2 \cdot b \cdot l_{DC}}\right] \quad \varphi_{31} := \delta_{31} + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \varphi_{32} := \delta_{32} + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$x_{B1} := a + l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{31}) \quad y_{B1} := l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{31}) \quad x_{B2} := a + l_{BC} \cdot \cos(\varphi_{32})$$

$$y_{B2} := l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{32}) \quad l_{OB1} := \sqrt{(x_{B1})^2 + (y_{B1})^2} \quad l_{OB2} := \sqrt{(x_{B2})^2 + (y_{B2})^2}$$

$$r := \frac{|l_{OB2} - l_{OB1}|}{2} \quad l := \frac{(l_{OB2} + l_{OB1})}{2} \quad \varphi_0 := \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y_{B2}}{x_{B2}}\right) \quad \varphi'_0 := \operatorname{atan}\left(\frac{y_{B2}}{x_{B2}}\right)$$

$$r = 0.076 \quad l = 0.473 \quad \varphi_0 = 194.072 \text{ deg} \quad \varphi'_0 = 14.072 \text{ deg}$$

Приклад 6.13. Механізм поперечно-стругального верстата (рис. 6.17). Задано: максимальний хід повзуна D $S_{Dm}=0,11$ м; довжина відрізків: $a=0,65$ м, $b=0,425$ м; коефіцієнт $k=1,5$; кут передачі в крайньому правому положенні повзуна D $\beta=95^\circ$.

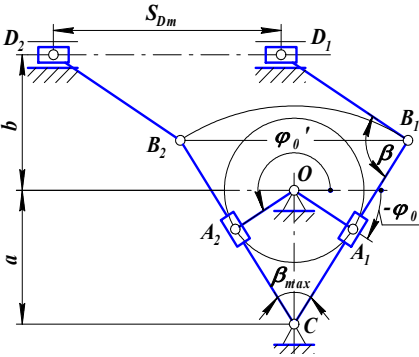


Рис. 6.17. До синтезу механізму поперечно-стругального верстата

Програма PR 6.13

$$a := 0.65 \quad b := 0.425 \quad k := 1.5$$

$$S_{Dm} := 0.64 \quad \beta := 95 \text{ deg}$$

$$\theta := \pi \frac{(k-1)}{k+1} \quad r := a \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad l_{BC} := \frac{S_{Dm}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$y_{B1} := l_{BC} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \delta := \beta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$l_{BD} := \frac{(y_{B1} - b)}{\sin(\delta)} \quad \varphi_0 := \frac{-\theta}{2} \quad \varphi'_0 := \pi + \frac{\theta}{2}$$

$$r = 0.201 \quad l_{BC} = 1.036 \quad l_{BD} = 1.433 \quad \varphi_0 = -18 \text{ deg} \quad \varphi'_0 = 198 \text{ deg}$$

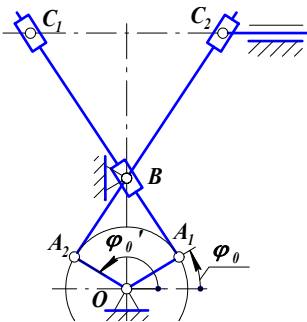


Рис. 6.18. До синтезу механізму поперечно-стругального верстата

Приклад 6.14. Механізм поперечно-стругального верстата (рис. 6.18). Задано: довжина відрізків: $a=0,65$ м, $b=0,425$ м; коефіцієнт $k=1,7$.

Програма PR 6.14

$$a := 0.65 \quad b := 0.425 \quad k := 1.7$$

$$\theta := \pi \frac{(k-1)}{k+1} \quad r := a \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad r = 0.257$$

$$\varphi_0 := \frac{\theta}{2} \quad \varphi'_0 := \pi - \frac{\theta}{2} \quad \varphi_0 = 23.333 \text{ deg}$$

$$\varphi'_0 = 156.667 \text{ deg}$$

ЗРІВНОВАЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

7.1. Задача про зрівноваження механізмів

Однією з найважливіших задач сучасного машинобудування є зрівноваження динамічних сил (сил інерції), які виникають при русі механізмів і машин. Це викликано тим, що під час роботи машин ланки їх механізмів рухаються з прискореннями, в результаті чого виникають сили інерції, які викликають додаткові, часом дуже великі, навантаження у кінематичних парах, збільшують тертя і знос їх елементів, створюють додаткові напруження в окремих частинах машин. Це неминуче веде до зменшення витривалості металу та його руйнування. Особливо це стосується швидкохідних машин, оскільки динамічні сили, змінні як за величиною, так і за напрямком, передаються станині (корпусу) машини, фундаменту, викликають їх вібрацію, коливання та розхитування. Надто небезпечні вібрації у зоні, близькій до резонансу, що може викликати руйнування не тільки деталей машин, але і приміщень і навколишніх споруд. Тому в процесі проектування та виготовлення машин ставиться завдання про повне або часткове погашення динамічних сил. Необхідно добитися, щоб на корпус і фундамент передавались якнайменші знакозмінні сили або діяли сили сталі за величиною та напрямком. Ця задача називається *задачею про зрівноваження рухомих мас механізмів, або задачею про зрівноваження сил інерції*. Розв'язати її можна шляхом раціонального розміщення та підбору мас ланок механізму.

Задачу про зрівноваження сил інерції в машинах можна поділити на дві: про зрівноваження тисків машин або механізмів на фундамент і про зрівноваження тисків у кінематичних парах механізму. Але, перш ніж приступити до розгляду вказаних задач, розглянемо деякі методи, які використовуються при розв'язуванні задач зрівноваження механізмів.

7.2. Визначення положення центра мас плоского механізму

Окремі способи розв'язання задач про зрівноваження механізмів пов'язані з використанням розрахункових формул для знаходження *положення центра мас S механізму* (рис. 7.1, *a*), яке визначається вектором \bar{r}_S [2, 7]. Для виводу цієї формули за основу беруть відому з теоретичної механіки залежність

$$\bar{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_{S_i}}{m}, \quad (7.1)$$

де $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – загальна маса механізму; m_i – маса i -ї ланки; \bar{r}_{S_i} – радіус-вектор, який визначає положення центра мас S_i i -ї ланки відносно вибраного початку координат.

7.2. Визначення положення центра мас плоского механізму

Користуючись формулою (7.1), для будь-якого механізму можна визначити положення його центра мас. Нехай, наприклад, задано кінематичну схему шарнірного чотириланкового механізму (рис. 7.1, а). Центрами мас ланок є точки S_1, S_2, S_3 . Довжини ланок позначимо відповідно через l_1, l_2, l_3 , а відстані центрів мас S_1, S_2, S_3 від початкових шарнірів при обході механізму за рухом годинникової стрілки – через $l_{OS_1}, l_{AS_2}, l_{BS_3}$.

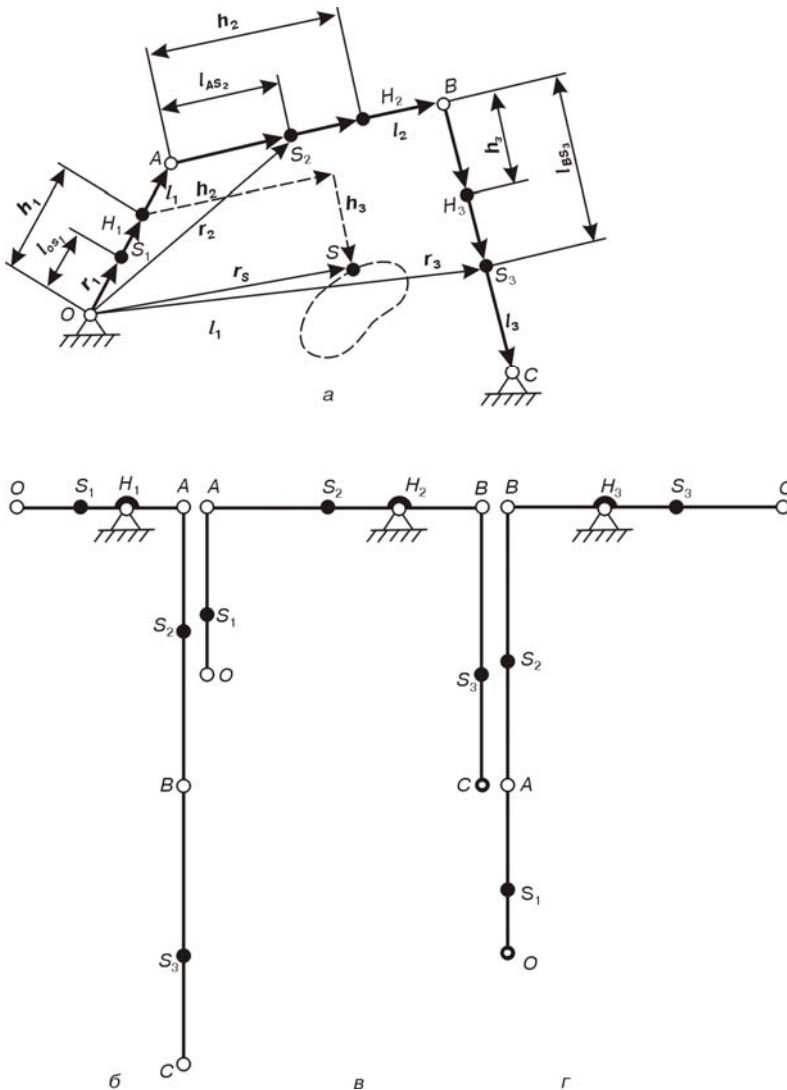


Рис. 7.1. Знаходження положення центра мас S механізму

З точки O проводимо вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, що визначають положення центрів мас S_1, S_2, S_3 . За формулою (7.1) положення центра мас механізму визначається вектором

$$\bar{r}_S = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (7.2)$$

де вектори $\bar{r}_1 = l_{OS_1}$; $\bar{r}_2 = \bar{l}_1 + \bar{l}_{AS_2}$; $\bar{r}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{BS_3}$.

Тоді

$$\bar{r}_S = \frac{m_1 \bar{l}_{OS_1} + m_2 (\bar{l}_1 + \bar{l}_{AS_2}) + m_3 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{BS_3})}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (7.3)$$

Розкриваючи дужки і групуємо члени, дістаємо

$$\bar{r}_S = \frac{m_1 \bar{l}_{OS_1} + (m_2 + m_3) \bar{l}_1}{m} + \frac{m_2 \bar{l}_{AS_2} + m_3 \bar{l}_2}{m} + \frac{m_3 \bar{l}_{BS_3}}{m}, \quad (7.4)$$

де $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Якщо позначити для простоти кожний із трьох складових залежності (7.4) через \bar{h}_i , то одержимо

$$\bar{r}_S = \sum_{i=1}^3 \bar{h}_i = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3. \quad (7.5)$$

Як видно з рівняння (7.4), вектори \bar{h}_i сталі за модулем і паралельні відповідним прямим векторного контуру, тобто $\bar{h}_1 \parallel \bar{l}_1$, $\bar{h}_2 \parallel \bar{l}_2$, $\bar{h}_3 \parallel \bar{l}_3$

Отже, вектор загального центра мас \bar{r}_S можна знайти як геометричну суму векторів \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 , що визначаються рівняннями (7.4), тобто

$$\bar{h}_1 = \frac{m_1 \bar{l}_{OS_1} + (m_2 + m_3) \bar{l}_1}{m}, \quad \bar{h}_2 = \frac{m_2 \bar{l}_{AS_2} + m_3 \bar{l}_2}{m}, \quad \bar{h}_3 = \frac{m_3 \bar{l}_{BS_3}}{m}. \quad (7.6)$$

Вектори \bar{h}_i визначають центри H_i умовного розміщення мас відповідних ланок (див. рис. 7.1). Точки H_i називають **головними точками**, а вектори \bar{h}_i – **векторами головних точок**. Модулі векторів головних точок можна визначити аналітично, використавши залежності (7.6), або експериментально, встановивши кінематичний ланцюг $OABC$ на призмах відповідно в точках H_1 , H_2 , H_3 (рис. 7.1, б–г). У цих випадках кінематичний ланцюг буде знаходитись у рівновазі. Легко переконалися, що сума статичних моментів мас відносно точок підвісу H_1 , H_2 , H_3 буде зведена до рівнянь (7.6). Наприклад, у першому випадку (рис. 7.1,б) рівняння статичних моментів мас ланок відносно точки H_1 $m_1 l_{S_1 H_1} = (m_2 + m_3) l_{AH_1}$ можна переписати, враховуючи, що $l_{S_1 H_1} = h_1 - l_{OS_1}$, $l_{AH_1} = l_1 - h_1$, у вигляді

$$m_1 h_1 - m_1 l_{OS_1} = (m_2 + m_3) l_1 - (m_2 + m_3) h_1.$$

Звідси, визначивши відрізок h_1 , одержимо першу залежність системи (7.6).

Побудувавши з точки O вектори головних точок ланок згідно з рівнянням (7.5) (на рис. 7.1, а – штрихові лінії), знайдемо величину та положення вектора \bar{r}_S , який визначає положення загального центра мас S механізму.

Вектор \bar{r}_S для механізмів з числом n рухомих ланок визначається за формулою, аналогічною (7.5),

$$\bar{r}_S = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 + \dots + \bar{h}_n, \quad (7.7)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_1 &= \frac{m_1 \bar{l}_{OS_1} + (m_2 + m_3 + \dots + m_n) \bar{l}_1}{m}; \\ \bar{h}_2 &= \frac{m_2 \bar{l}_{AS_2} + (m_3 + m_4 + \dots + m_n) \bar{l}_2}{m}; \\ \bar{h}_3 &= \frac{m_3 \bar{l}_{BS_3} + (m_4 + m_5 + \dots + m_n) \bar{l}_3}{m}; \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{h}_n &= \frac{m_n \bar{l}_{NS_n}}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Тут m_i – маса i -ї ланки ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); $\bar{l}_{OS_1}, \bar{l}_{AS_2}, \bar{l}_{BS_3}, \dots, \bar{l}_{NS_n}$ – вектори, які визначають положення центрів мас m_i на відповідних ланках.

У загальному випадку центр мас S механізму змінює своє положення і описує деяку замкнуту траєкторію (див. рис. 7.1, а), що приводить до появи деякої незрівноваженої сили інерції $F_{\text{ін}} = -m \bar{a}_S$. Для усунення цієї сили необхідно так підібрати маси ланок, щоб прискорення загального центра мас механізму $\bar{a}_S = 0$, а це можливо лише тоді, коли цей центр мас буде нерухомим.

Приклад 7.1. Визначити положення центра мас шарнірного чотириланкового механізму (рис. 7.1, а), якщо задані: маси ланок $m_1=0,2$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=0,5$ кг, а їхні центральні момент інерції $J_{S_1} = 0,01$ кгм², $J_{S_2} = 0,04$ кгм², $J_{S_3} = 0,5$ кгм²; розміри ланок: $r = l_{OA} = 0,03$ м, $l = l_{AB} = 0,16$ м, $b = 0,085$ м, $x_{OC} = 0,13$ м, $y_{OC} = 0,25$ м; відстані до центрів мас: $l_{OS_1} = 0,4 l_{OA}$, $l_{AS_2} = 0,55 l_{AB}$, $l_{BS_3} = 0,5 l_{BC}$. Початкове положення кривошипа прийняти тоді, коли коромисло 3 знаходиться в крайньому правому положенні.

Розв'язання. Використовуючи залежності (7.1)–(7.6), складаємо програму в системі Mathcad (PR 7.1) і знаходимо координати центра мас механізму (див. рис. 7.1, а).

Програма PR 7.1

Визначення положення центра мас механізму

Вихідні дані

$$\begin{aligned} r &:= 0.03 & l &:= 0.1 & b &:= 0.1 & x_{OC} &:= 0.098 & y_{OC} &:= -0.05 \\ m_1 &:= 0.2 & m_2 &:= 2 & m_3 &:= 0.5 & J_{S1} &:= 0.01 & J_{S2} &:= 0.04 \\ J_{S3} &:= 0.5 & l_{OS1} &:= 0.4 \cdot r & l_{AS2} &:= 0.55 \cdot l & l_{BS3} &:= 0.5 \cdot b & N &:= 360 \end{aligned}$$

Визначення положення ланок та їхніх центрів мас

$$a := \sqrt{x_{OC}^2 + y_{OC}^2} \quad l_{CS3} := b - l_{BS3} \quad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{y_{OC}}{x_{OC}}\right) \quad \alpha = -27.031 \text{ deg}$$

$$\varphi_0 := \operatorname{acos}\left[\frac{(r+l)^2 + a^2 - b^2}{2(r+l)a}\right] + \alpha \quad \varphi_0 = 21.335 \text{ deg} \quad a = 0.11$$

$$\varphi_1 := \varphi_0 \cdot \varphi_0 + \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi + \varphi_0 \quad \Delta(\varphi_1) := \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos(\varphi_1 + |\alpha|)}$$

$$\psi(\varphi_1) := \operatorname{asin}\left(r \cdot \frac{\sin(\varphi_1 + |\alpha|)}{\Delta(\varphi_1)}\right) \quad \mu(\varphi_1) := \operatorname{acos}\left(\frac{l^2 + b^2 - \Delta(\varphi_1)^2}{2l \cdot b}\right)$$

$$\delta(\varphi_1) := \operatorname{acos}\left(\frac{l^2 + \Delta(\varphi_1)^2 - b^2}{2l \cdot \Delta(\varphi_1)}\right) \quad \chi(\varphi_1) := \pi - \mu(\varphi_1) - \delta(\varphi_1)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) := \delta(\varphi_1) - \psi(\varphi_1) - |\alpha| \quad \varphi_3(\varphi_1) := \pi - \psi(\varphi_1) - \chi(\varphi_1)$$

$$x_{S1}(\varphi_1) := l_{OS1} \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_{S1}(\varphi_1) := l_{OS1} \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_A(\varphi_1) := r \cdot (\cos(\varphi_1)) \quad y_A(\varphi_1) := r \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_{S2}(\varphi_1) := x_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) \quad y_{S2}(\varphi_1) := y_A(\varphi_1) + l_{AS2} \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1))$$

$$x_{S3}(\varphi_1) := x_{OC} + l_{CS3} \cdot \cos(\varphi_3(\varphi_1)) \quad y_{S3}(\varphi_1) := y_{OC} + l_{CS3} \cdot \sin(\varphi_3(\varphi_1))$$

Визначення положення центра мас механізму

$$m := m_1 + m_2 + m_3 \quad h_1 := \frac{[m_1 \cdot l_{OS1} + (m_2 + m_3) \cdot r]}{m} \quad h_1 = 0.029$$

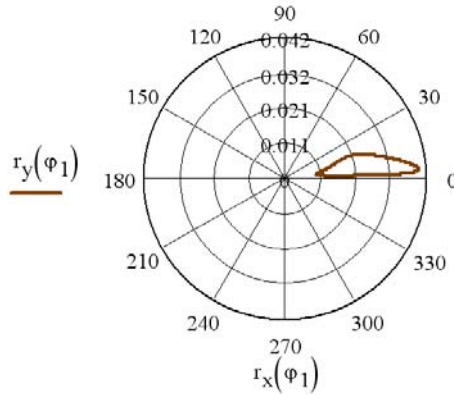
$$h_2 := \frac{m_2 \cdot l_{AS2} + m_3 \cdot l}{m} \quad h_3 := \frac{m_3 \cdot l_{BS3}}{m} \quad h_2 = 0.059 \quad h_3 = 9.259 \times 10^{-3}$$

$$x(\varphi_1) := h_1 \cdot \cos(\varphi_1) + h_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi_1)) + h_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi - \varphi_3(\varphi_1))$$

$$y(\varphi_1) := h_1 \cdot \sin(\varphi_1) + h_2 \cdot \sin(\varphi_2(\varphi_1)) + h_3 \cdot \sin(2 \cdot \pi - \varphi_3(\varphi_1))$$

$$\alpha_S(\varphi_1) := \operatorname{atan2}(y(\varphi_1), x(\varphi_1))$$

$$r_x(\varphi_1) := \frac{x(\varphi_1)}{\cos(\alpha_S(\varphi_1))} \quad r_y(\varphi_1) := \frac{y(\varphi_1)}{\sin(\alpha_S(\varphi_1))} \quad r_S(\varphi_1) := \sqrt{r_x(\varphi_1)^2 + r_y(\varphi_1)^2}$$



7.3. Метод замінювальних мас

При зрівноваженні механізмів досить широко використовується метод, коли масу будь-якої ланки замінюють окремими зосередженими масами m_i , які жорстко зв'язані між собою [2, 7]. Для того, щоб ця заміна була динамічно еквівалентна, необхідно витримати такі умови:

1) сума замінювальних мас повинна дорівнювати масі розглянутої ланки, тобто

$$\sum_{i=1}^n m_i = m, \quad (7.9)$$

де n – кількість замінювальних мас;

2) сума статичних моментів замінювальних мас відносно центра мас S ланки повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_{s=1}^i \delta_s \rho_s = 0, \quad (7.10)$$

де ρ_i – відстань від центра мас ланки до положення i -ї замінювальної маси; умову (8.10) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$\sum_{s=1}^i \delta_s \delta_s = 0, \quad \sum_{s=1}^i \delta_s y_s = 0, \quad (7.11)$$

в яких x_i, y_i – координати i -ї точки відносно осі, що проходить через центр мас S ;

3) сума моментів інерції замінювальних мас відносно центра мас ланки S повинна дорівнювати моменту інерції J_S розглянутої ланки:

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 = J_S, \quad (7.12)$$

де J_S – момент інерції ланки відносно осі, що проходить через її центр мас S .

Якщо виконуються перші дві умови (7.9) і (7.10) або (7.9) і (7.11), то таку заміну мас називають *статичним розміщенням мас*. Для того щоб результуюча пара сил інерції замінювальних мас була еквівалентною парі сил

7. Зрівноваження механізмів

інерції ланки, необхідно, щоб, крім зазначених двох умов, задовольнялась ще третя (7.12). У такому випадку одержимо так зване *динамічне розміщення маси* ланки.

Розглянемо число параметрів, які можна задавати при розв'язуванні рівнянь (7.9)–(7.12). Шуканими є положення кожної замінювальної маси, яке визначається двома координатами, і величина самої маси, зосередженої у цій точці. Отже, для однієї замінювальної маси маємо три невідомі, які треба визначити. Число рівнянь для визначення невідомих дорівнює чотирьом – рівняння (7.9), (7.11), (7.12). Якщо позначити число вибраних точок через n , то число параметрів p , якими ми можемо задаватись, виразиться так:

$$p = 3n - 4. \quad (7.13)$$

При завданні $n = 1$ рівняння (7.13) не задовольняється. При завданні $n = 2$ дістаємо $p = 2$, тобто можна задати, наприклад, дві координати однієї з точок, або одну координату і одну масу. При $n = 3$ дістаємо $p = 5$, тобто можна задати довільно, наприклад, положення двох точок і одну з координат третьої точки, або ж положення двох точок і масу однієї з точок. При $n = 4$ дістаємо $p = 8$, тобто в цьому випадку можна задати положення чотирьох точок, або положення трьох точок і мас двох точок і т. д.

7.4. Зрівноваження механізмів відносно фундаменту

7.4.1. Умови зрівноваження механізмів

З теоретичної механіки відомо, що будь-яка система сил, прикладених до твердого тіла або системи тіл, зводиться до головного вектора \bar{F} і головного моменту \bar{I} даної системи сил відносно вибраного центра зведення. Користуючись цим методом, сили інерції можна також звести до головного вектора сили інерції \bar{F}_{Σ} і головного моменту сил інерції \bar{I}_{Σ} . Тоді умови зрівноваження динамічних сил (сил інерції) рухомих ланок механізму мають вигляд

$$\bar{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{\Sigma_i} = 0; \quad (7.14)$$

$$\bar{M}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{\Sigma_i} = 0, \quad (7.15)$$

де $\bar{F}_{\Sigma_i} = -m_i \bar{a}_{S_i}$ – головний вектор сил інерції i -ї ланки механізму, яка має масу m_i ; \bar{a}_{S_i} – прискорення центра мас цієї самої ланки; $\bar{M}_{\Sigma_i} = -J_{S_i} \varepsilon_i$ – головний момент інерції i -ї ланки, момент інерції якої відносно центра мас J_{S_i} і яка рухається з кутовим прискоренням ε_i .

Якщо буде виконано ці обидві умови, то матимемо повне зрівноваження сил інерції. У практиці машинобудування зазначені умови, звичайно, виконуються частково, залежно від типу механізмів і поставленої задачі.

Обидві умови порівняно легко виконуються для механізмів зі сталими передаточними відношеннями (зубчасті, фрикційні, пасові та ін.). Для інших механізмів (важільних, кулачкових тощо), як правило, вдається забезпечити лише першу умову (7.14), яку можна записати у вигляді

$$\bar{F}_{3_i} = -m_i \bar{a}_S = 0, \quad (7.16)$$

де $m = \sum_{s=1}^r \delta_s$ – загальна маса механізму; \bar{a}_S – прискорення загального центра мас механізму (див. параграф 7.2).

Умова (7.16) виконується тоді, коли прискорення загального центра мас механізму $a_S = 0$, оскільки маса ланок механізму ніколи не дорівнює нулю. Це можливо в двох випадках: загальний центр мас механізму рухається рівномірно та прямолінійно; загальний центр мас механізму нерухомий. Очевидно, що перша умова, як правило, не може бути виконана, оскільки центр мас ланки механізму рухається по замкнутій кривій. Отже, для повного зрівноваження головного вектора сил інерції механізму необхідно і достатньо так підібрати маси, щоб спільний центр мас усіх ланок механізму залишався нерухомим. Це досягається установами на ланках додаткових мас-противаг, положення та величину яких вибирають так, щоб зробити загальний центр мас механізму нерухомим.

Повне зрівноваження головного вектора сил інерції механізму часто називають статичним зрівноваженням механізмів, хоча цей термін не зовсім вдалий. Він з'явився внаслідок того, що статичну незрівноваженість можна виявити без руху механізму, тобто в статичному стані. Проте за своєю фізичною природою так звана статична незрівноваженість (як і моментна) є явище в повному змісті динамічне.

7.4.2. Повне зрівноваження сил інерції механізму

Розглянемо методику зрівноваження головного вектора сил інерції на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 7.3, а). Вихідними даними є розміри, маси m_1, m_2, m_3 та положення центрів мас S_1, S_2, S_3 ланок механізму.

Для зрівноваження цього механізму використаємо метод головних точок ланок (див. параграф 7.2), згідно з яким положення центра мас S механізму визначається векторним рівнянням:

$$\bar{r}_S = \sum_{i=1}^3 \bar{h}_i = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3, \quad (7.17)$$

де $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ – вектори головних точок відповідних ланок, величину яких знаходимо за формулами (7.6), (7.8), а напрямки визначаємо положеннями відповідних ланок, причому вектор \bar{h}_3 – сталий за модулем і напрямком.

Оскільки він поступально рухається при русі механізму, то його точка F має за формою таку ж траєкторію, як точка S .

Отже, для виконання умови (7.15) досить забезпечити нерухомість точки F , тоді й центр мас механізму S буде нерухомим. Для цього точку F

7. Зрівноваження механізмів

суміщають з центром O , прирівнюючи до нуля векторну суму (7.17):

$$\bar{h}_1 + \bar{h}_2 = 0, \quad (7.18)$$

тоді

$$\bar{r}_S = \bar{h}_3 = \text{const}. \quad (7.19)$$

Якщо точка S_3 збігається з шарніром B , значення $l_{BS_3} = 0$ і $h_3 = 0$. Тоді і $r_S = 0$, тобто точка S збігається з точкою O .

Забезпечивши в механізмі рівність (7.19), одержимо повне зрівноваження сил інерції.

Рівність (7.19) можлива лише при виконанні умови (7.18), з якої випливає

$$h_1 = 0, h_2 = 0. \quad (7.20)$$

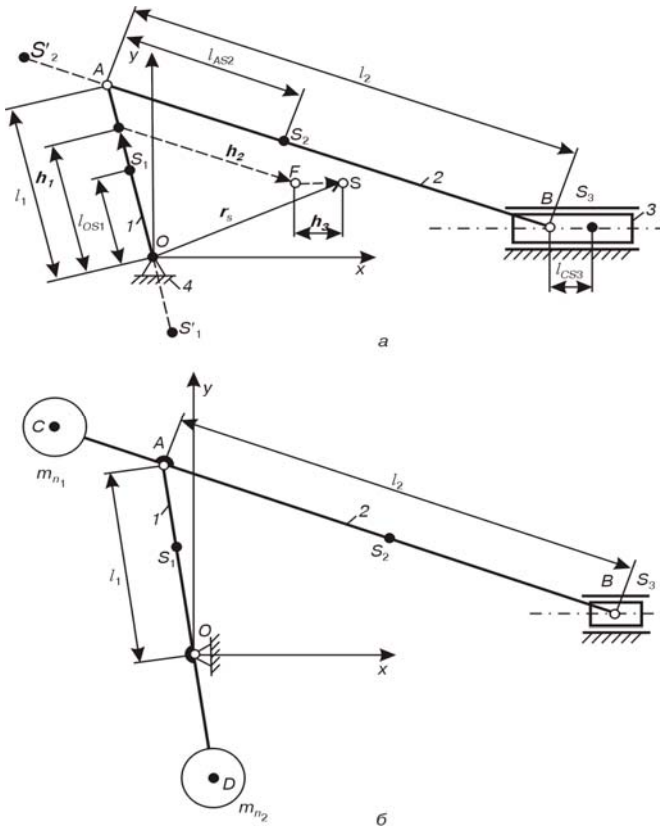


Рис. 7.3. Зрівноваження головного вектора сил інерції кривошипно-повзунного механізму

Тут відпадає варіант $\bar{h}_1 = -\bar{h}_2$, оскільки ці вектори не паралельні один одному. Сукупність двох співвідношень (7.20) приводить безпосередньо до розв'язку масогеометричної задачі статичного зрівноваження кривошипно-повзунного механізму як центрального, так і зміщеного. Розкриваючи

7.4. Зрівноваження механізмів відносно фундаменту

співвідношення (7.20) з врахуванням значень \bar{h}_1 і \bar{h}_2 з формул (7.6), одержуємо статичні моменти мас ланок 1 і 2 відносно точок O і A :

$$m_1 l_{OS_1} = -(m_2 + m_3) l_1, \quad m_2 l_{AS_2} = -m_3 l_2. \quad (7.21)$$

Формули (7.21) дають можливість вибору різних числових варіантів розв'язку задачі, але всі такі рішення не можуть змінити загальної картини розміщення центрів мас S_1 і S_2 ланок 1 і 2:

$$l_{OS_1} < 0, \quad l_{AS_2} < 0, \quad (7.22)$$

тобто центри мас S_1 і S_2 вийшли за межі відповідно ланок OA і AB .

На рис. 7.3, б показано схему зрівноваження кривошипно-повзунного механізму (для простоти прийнято $l_{BS_3} = 0$). Для більш конструктивного виконання, при якому довжини ланок 1 і 2 за межами OA і AB були б не дуже великими, їх продовження виконують у вигляді противаг. Відповідні розрахунки щодо оформлення ланок 1 і 2 зводяться до рівнянь статичних моментів мас. При будь-яких варіантах обчислень не повинні порушуватись умови (7.20).

Отже, для повного зрівноваження сил інерції цього механізму необхідно встановити противаги, які розмістимо в точках C і D . Масу δ_{i_1} противаги 1 виберемо за умови, що спільний центр мас противаги 1, шатуна 2 і повзуна 3 знаходиться у точці A . Тоді можна записати рівняння статичних моментів мас відносно точки A :

$$\delta_{i_1} l_{AC} = m_2 l_{AS_2} + m_3 l_{AB},$$

звідки

$$\delta_{i_1} = (m_2 l_{AS_2} + m_3 l_{AB}) / l_{AC}. \quad (7.23)$$

Встановлюючи противагу в точці C , зміщуємо центр мас системи шатун–повзун у точку A , і надалі масу противаги 1, шатуна 2 та повзуна 3 можна замінити однією еквівалентною масою $\delta_{i_1} = \delta_{i_1} + \delta_2 + \delta_3$ та розмістити її у точці A .

Масу противаги δ_{i_2} виберемо за умови, що центр мас усього механізму буде знаходитися у точці O , тобто противага 2 зрівноважить масу кривошипа 1 і масу m_A . Рівняння рівноваги статичних моментів мас відносно точки O має вигляд

$$\delta_{i_2} l_{OD} = m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}. \quad (7.24)$$

Тоді

$$\delta_{i_2} = (m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}) / l_{OD}. \quad (7.25)$$

Отже, спільний центр мас ланок механізму у будь-якому положенні буде нерухомим і при $l_{BS_3} = 0$ збігатиметься з точкою O .

7. Зрівноваження механізмів

Приклад 7.2. Визначити маси противаг δ_{i_1} і δ_{i_2} , які необхідно встановити на кривошипі OA і шатуні AB (рис. 7.3, б) для повного зрівноваження головного вектора сил інерції всіх ланок кривошипно-повзунного механізму, якщо координати центрів мас C і D цих противаг $l_{OD} = 500$ мм, $l_{AC} = 200$ мм, $l_{OA} = 100$ мм, $l_{AB} = 300$ мм; координати центрів мас S_1 , S_2 і S_3 ланок $l_{OS_1} = 75$ мм, $l_{AS_2} = 200$ мм, $l_{BS_3} = 0$ мм, маси ланок $m_1 = 0,1$ кг, $m_2 = 0,7$ кг, $m_3 = 0,8$ кг.

Розв'язання. Використовуючи залежності (7.23) і (7.25), знаходимо маси противаг δ_{i_1} і δ_{i_2} . Програма в системі Mathcad має наступний вигляд.

Програма PR 7.2

Зрівноваження сил інерції кривошипно-повзунного механізму

Вихідні дані

$$\begin{aligned} l_{OD} &:= 500 & l_{AC} &:= 200 & l_{OA} &:= 100 & l_{AB} &:= 300 & l_{OS_1} &:= 75 \\ l_{AS_2} &:= 200 & m_1 &:= 0.1 & m_2 &:= 0.7 & m_3 &:= 0.8 \\ m_{\Pi_1} &:= \frac{(m_2 \cdot l_{AS_2} + m_3 \cdot l_{OA})}{l_{AC}} & m_{\Pi_1} &= 1.1 & m_A &:= m_{\Pi_1} + m_2 + m_3 \\ m_{\Pi_2} &:= \frac{(m_1 \cdot l_{OS_1} + m_A \cdot l_{OA})}{l_{OD}} & m_{\Pi_2} &= 0.535 \end{aligned}$$

За допомогою двох противаг можна також зрівноважити сили інерції у шарнірному чотириланковому механізмі (рис. 7.4), розмістивши їх на продовженнях кривошипа OA і коромисла BC .

Для цього замінимо масу m_2 шатуна AB на дві маси m_A і m_B , які розмістимо відповідно у точках A і B . У цьому випадку при розміщенні маси ланки по двох точках можемо обмежитися рівняннями

$$m_A + m_B = m, \quad m_A \dot{a} - m_B b = 0, \quad (7.26)$$

де $\dot{a} = l_{AS_2}$; $b = l_{BS_2}$.

З цих рівнянь випливає, що точки A , B і S повинні лежати на одній прямій і положення точок A і B можна вибирати на цій прямій довільно.

Величини мас дорівнюють:

$$m_A = m \frac{b}{l}, \quad m_B = m \frac{a}{l}. \quad (7.27)$$

Тоді згідно з (7.27) маємо

$$m_A/m_B = b/\dot{a}. \quad (7.28)$$

Отже, замінювальні маси в точках A і B обернено пропорційні їх відстані від центра мас S ланки:

$$m_B = m_2 l_{AS_2} / l_{AB}. \quad (7.29)$$

Масу m_{i_1} протизваги D вибирають так, щоб сума статичних моментів мас відносно точки O дорівнювала нулю, тобто

$$m_{i_1} l_{OD} = m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}, \quad (7.30)$$

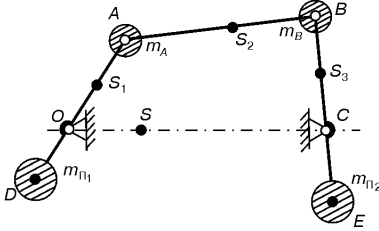


Рис. 7.4. Зрівноваження головного вектора сил інерції шарнірного чотириланкового механізму

звідки

$$m_{i_1} = (m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}) / l_{OD}. \quad (7.31)$$

Аналогічно знаходимо масу m_{i_2} протизваги E , записуючи рівняння

$$m_{i_2} l_{\tilde{N}A} = m_A l_{A\tilde{N}} + m_3 l_{\tilde{N}S_3}, \quad (7.32)$$

де

$$m_{i_2} = (m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3}) / l_{CE}. \quad (7.33)$$

Отже, і в цьому випадку загальний центр мас S механізму нерухомиий і знаходиться на осі OC , оскільки центр мас системи мас m_1, m_A і m_{i_1} розташований у точці O , а системи мас m_3, m_B і m_{i_2} , які є нерухомими, перебувають у точці C .

Приклад 7.3. Визначити маси протизваг δ_{i_1} і δ_{i_2} , які необхідно встановити на кривошипі OA і коромислі BC (рис. 7.4) для повного зрівноваження головного вектора сил інерції всіх ланок шарнірного чотириланкового механізму, якщо $l_{OA} = 120$ мм, $l_{AB} = 400$ мм, $l_{BC} = 280$ мм, координати центрів мас S_1, S_2 і S_3 ланок дорівнюють $l_{OS_1} = 75$ мм, $l_{AS_2} = 200$ мм, $l_{CS_3} = 150$ мм, маси ланок $m_1 = 0,1$ кг, $m_2 = 0,8$ кг, $m_3 = 0,4$ кг, координати центрів мас D і E протизваг $l_{OD} = 100$ мм, $l_{CE} = 200$ мм.

Розв'язання. Використовуючи залежності (7.27) і (7.33), знаходимо маси протизваг δ_{i_1} і δ_{i_2} . Програма в системі Mathcad має наступний вигляд.

Програма PR 7.3

Зрівноваження сил інерції шарнірного чотириланкового механізму

Вихідні дані

$$l_{OA} := 120 \quad l_{AB} := 400 \quad l_{BC} := 280 \quad l_{OS_1} := 75 \quad l_{AS_2} := 200 \quad l_{CS_3} := 150$$

$$m_1 := 0.1 \quad m_2 := 0.8 \quad m_3 := 0.4 \quad l_{OD} := 100 \quad l_{CE} := 200$$

$$l_{BS_2} := l_{AB} - l_{AS_2} \quad m_A := m_2 \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{AB}} \quad m_B := m_2 \cdot \frac{l_{AS_2}}{l_{AB}}$$

$$m_{\Pi_1} := \frac{(m_1 \cdot l_{OS_1} + m_A \cdot l_{OA})}{l_{OD}} \quad m_{\Pi_1} = 0.555$$

$$m_{\Pi_2} := \frac{(m_B \cdot l_{BC} + m_3 \cdot l_{CS_3})}{l_{CE}} \quad m_{\Pi_2} = 0.86$$

7.5. Зрівноваження обертових мас

Оскільки розв'язання задачі про зрівноваження тисків у кінематичних парах механізмів у загальному випадку становить значні труднощі, то цю задачу розглянемо на деталях або вузлах, які здійснюють лише обертовий рух. Як відомо з курсу теоретичної механіки, при обертанні твердого тіла не виникає ніяких додаткових тисків на опори (підшипники) лише в тому випадку, коли вісь обертання тіла O є однією із трьох головних центральних осей інерції ($x-x$, $y-y$ або $z-z$), які для круглого диску, показаного на рис. 7.5, а, є взаємно перпендикулярними і проходять через центр мас S . При обертанні диска навколо будь-якої з цих осей не буде жодних додаткових тисків на підшипники від сил інерції, тобто матимемо повне зрівноваження усіх сил інерції і всіх моментів сил інерції.

У всіх інших випадках обов'язково з'являються незрівноважені сили або моменти сил інерції, або перші та другі разом.

Статична незрівноваженість. Незрівноважені сили інерції з'являються тоді, коли центр мас S обертового тіла (рис. 7.5, б) не лежить на осі обертання O , тобто коли остання не збігається з головною центральною віссю інерції, а зміщена на величину e , яку називають ексцентриситетом маси. При обертанні диска на нього буде діяти крім сил ваги G ще сила інерції $F_{ин}$, модуль якої визначається формулою:

$$F_{ин} = m a_s = m \omega^2 e, \quad (7.34)$$

та напрямлена по радіусу OS і обертається разом з диском. Таку незрівноваженість обертової маси можна встановити в стані спокою, а тому її називають **статичною незрівноваженістю**. Статична незрівноваженість характеризується **статичним дисбалансом**

$$D_{ст} = m e. \quad (7.35)$$

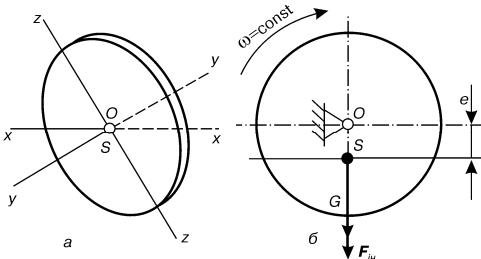


Рис. 7.5. До статичної незрівноваженості обертових мас

Незрівноважені сили інерції (7.34) можуть досягати значних розмірів і в багато разів перевищують вагу самої обертової деталі. Так, при незрівноваженій масі $m = 0,1$ кг, яка обертається з швидкістю $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$ ($n \approx 9550$ об/хв) при $e = 0,01$ м, виникає відцентрова сила $F_{ин} = 0,1 \cdot 1000^2 \cdot 0,01 =$

= 1000 Н, що в 1020 разів більша від ваги самої деталі. Відомо немало прикладів, коли незрівноважені сили інерції викликали руйнування роторів турбін і компресорів, підймальних кранів, мостів, абразивних кругів тощо. Тому необхідно зрівноважувати всі швидкохідні частини машин і механізмів, починаючи від маятників ручних годинників і закінчуючи роторами турбін.

Характерно, що при умові $F_{\text{ін}} \geq G$ має місце підкидання вверх обертової деталі при кожному її обертанні, тобто деталь буде “бити”. Згідно з (7.34), прийнявши $F_{\text{ін}} \geq G$, одержимо величину ексцентриситету, при якому наступить підкидання вала:

$$\ddot{a} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81}{1000^2} \approx 0,00001 \text{ м} = 0,01 \text{ мм.}$$

Отже, вже при $e = 0,01$ мм маса, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, почне “бити”.

Для усунення статичної незрівноваженості треба так підібрати обертові маси, щоб виконувалася умова

$$F_{\text{ін}} = m\omega^2 e = 0. \quad (7.36)$$

А це можливо лише тоді, коли центр ваги обертової маси збігатиметься з віссю обертання ($e = 0$), оскільки в механізмах $m \neq 0$ і $\omega \neq 0$.

Динамічна незрівноваженість. Для повного зрівноваження обертових мас недостатньо, щоб була забезпечена статична зрівноваженість, хоч центр мас може збігатися з віссю обертання. Для цього розглянемо вертикальний вал з двома однаковими масами m , які знаходяться на однаковій відстані від осі обертання вала AB (рис. 7.6).

Очевидно, що центр мас S такої системи знаходиться на осі обертання, і вона статично зрівноважена. У стані спокою вал буде займати так зване байдуже положення. Проте при обертанні на кожен масу m діятимуть відцентрові сили інерції $F_{\text{ін}} = m\omega^2 y$, що створюють момент пари сил інерції

$$M(F_{\text{ін}}) = F_{\text{ін}} m \omega^2 y z. \quad (7.37)$$

Цей момент намагається повернути систему так, щоб лінія $S'S''$, яка проходить через центри мас, стала перпендикулярною до осі обертання. Така незрівноваженість називається динамічною, і її можна виявити тільки при швидкому обертанні, але не в стані спокою: вона характеризується динамічним дисбалансом

$$D_{\text{д}} = m y z. \quad (7.38)$$

Для усунення динамічної нерівноваженості треба, щоб одна з головних центральних осей інерції обертового тіла збігалася з віссю обертання, тоді $M(F_{\text{ін}}) = 0$. Практично це досягається установленням двох вантажів у двох різних площинах (на рис. 7.6 показані штриховими лініями). Положення та маси цих вантажів вибираються так, щоб додатковий момент пари сил інерції $M_{\text{д}}(F_{\text{ін,д}})$ був рівним, але напрямленим у протилежний бік відносно незрівноваженого моменту, тобто

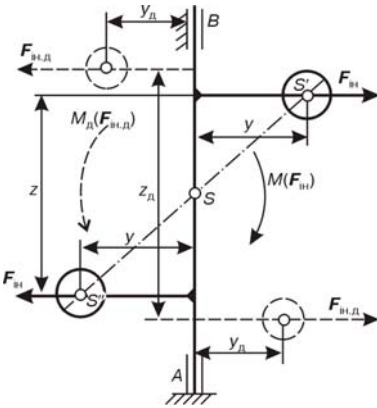


Рис. 7.6. До динамічної незрівноваженості обертових мас

вище (див. рис. 7.6), динамічного – лише двома масами, встановленими у двох різних площинах.

Для прикладу розглянемо обертовий ротор (рис. 7.7), у площинах якого 1, 2, 3, що перпендикулярні до осі обертання, знаходяться незрівноважені маси m_1, m_2, m_3 . Положення незрівноважених мас у цих площинах задані радіусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Положення площин 1, 2, 3 відносно площини зведення I визначаються відповідно координатами z_1, z_2, z_3 . Протизаги встановлюються у площинах I і II, відстань між якими l . Позначимо масу протизаги при статичному радіус-вектор, який визначає положення центра мас через \vec{r}_i . Тоді умовою зрівноваженості ротора буде такою: зрівноваженні через m_{II} , а

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i + m_{II} r_i = 0, \quad (7.41)$$

тобто для статичного зрівноваження обертових мас необхідно забезпечити суму статичних дисбалансів рівною нулю.

Як відомо з викладеного вище, для повного зрівноваження ротора необхідно встановити дві протизаги, які розміщують у двох площинах I і II. Позначимо маси цих протизаг m_I і m_{II} , а радіуси-вектори, що визначають їх положення відносно їх осі обертання, через \vec{r}_I і \vec{r}_{II} . Тоді умовами повного зрівноваження будуть

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i + m_I \vec{r}_I + m_{II} \vec{r}_{II} = 0, \quad (7.42)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i z_i + m_{II} \vec{r}_{II} l = 0. \quad (7.43)$$

$$M_d(F_{ін.д}) = M(F_{ін}), \quad (7.39)$$

або з врахуванням (7.37)

$$m_d y_d z_d = m y z. \quad (7.40)$$

На практиці статична та динамічна незрівноваженості усуваються відповідним балансуванням обертових мас, які здійснюються на спеціальних балансувальних верстатах.

Динамічне балансування роторів при відомому розташуванні незрівноважених мас. Задачею динамічного балансування обертових мас є не тільки зведення центра мас до осі обертання, але і те, щоб головна центральна вісь інерції збігалася з віссю обертання. Якщо статичного зрівноваження обертових мас можна досягти за допомогою однієї протизаги, то, як показано

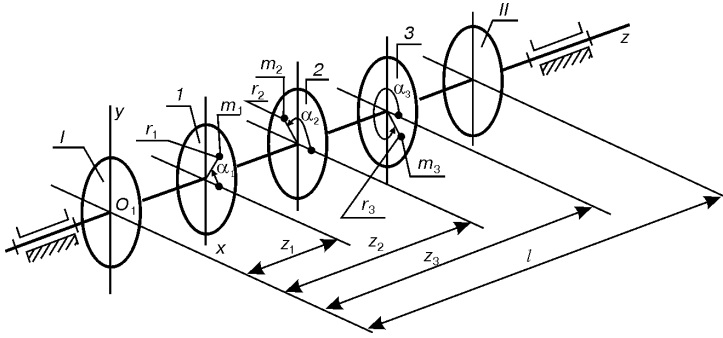


Рис. 7.7. Динамічне балансування роторів при відомому розташуванні незрівноважених мас

Отже, для динамічного зрівноваження обертових мас необхідно, щоб суми статичних і динамічних дисбалансів дорівнювали нулю.

При аналітичному розв'язанні цієї задачі рівняння (7.41) розгортається у два рівняння проєкцій

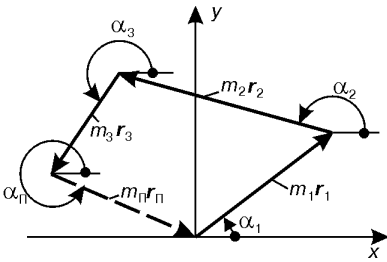


Рис. 7.8. Статичне рівноваження обертових мас

на осі координат, а рівняння (7.42) і (7.43) – у чотири рівняння проєкцій на осі координат. Дуже зручним і наочним є графічний спосіб розв'язання цих рівнянь. Визначення величини і розміщення противаги графічним способом при статичному зрівноваженні досягається побудовою векторного багатокутника (рис. 7.8) за рівнянням (7.41). У вибраному масштабі будують багатокутник, який складається з векторів $m_1 \vec{r}_1$, $m_2 \vec{r}_2$, $m_3 \vec{r}_3$ і $m_n \vec{r}_n$. Положення цих

векторів визначається відповідно кутами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_n$. Усі кути відраховуються проти годинникової стрілки від горизонтальної лінії, що проходить через початок відповідного вектора. Замикаючий вектор $m_n \vec{r}_n$ багатокутника виражає добуток маси противаги на радіус її розташування. Тоді задають одну величину (наприклад, масою) і визначають іншу величину (радіус). Напрямок радіуса-вектора r_n противаги визначається кутом α_n , який вимірюють безпосередньо на кресленні.

При повному (динамічному) зрівноваженні спочатку будують векторний багатокутник динамічних дисбалансів за рівнянням (7.43). При цьому вектори динамічних дисбалансів зручно повернути на 90° так, щоб вони збігалися з напрямками відповідних сил інерції. Модуль замикаючого вектора багатокутника дорівнює добутку $m_n r_n$ (рис. 7.9, а), де координата l відома і дорівнює відстані між площинами зрівноваження. З цього добутку легко визначити радіус r_n (або масу противаги m_n), якщо задати масу противаги (або радіусом). Кут α_n , який визначає напрямок радіуса-вектора, вимірюється на кресленні.

Потім будуємо багатокутник (рис. 7.9, б) за рівнянням (7.42). У цьому багатокутнику невідомою величиною буде замикаючий вектор, модуль якого дорівнює добутку $m_1 r_1$. Задав один із співмножників у цьому добутку

7. Зрівноваження механізмів

(наприклад, масу m_1), знайдемо другий. Кут α_1 , який визначає напрямок радіуса-вектора противаги, знаходимо з рисунка.

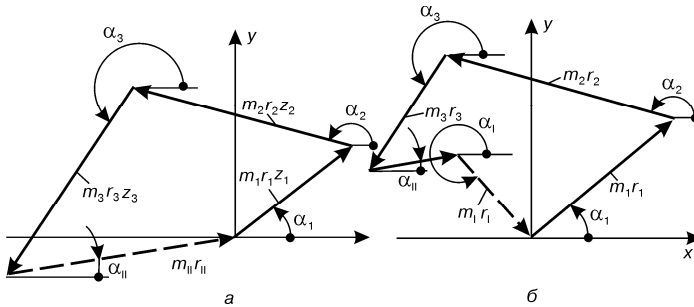


Рис. 7.9. Динамічне зрівноваження обертових мас

Цю задачу можна розв'язати аналітичним способом, використавши залежності (7.34) – (7.43) та склавши відповідну програму (див. PR 7.4).

Приклад 8.4. Виконати повне зрівноваження ротора при відомому розташуванні незрівноважених мас (рис. 7.7, якщо маси ланок $m_1=45$ г, $m_2=60$ г, $m_3=5$ г, $l_{OA}=120$ мм, $l_{AB}=400$ мм, $l_{BC}=280$ мм, координати центрів мас: $r_1=90$ мм, $r_2=55$ мм, $r_3=55$ мм, $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_2=90^\circ$, $\alpha_3=210^\circ$, $z_1=80$ мм, $z_2=160$ мм, $z_3=240$ мм, $l=320$ мм.

Розв'язання. Використовуючи залежності (7.34) – (7.43), знаходимо маси противаг при статичному та динамічному зрівноваженні. Програма в системі Mathcad має наступний вигляд.

Програма PR 7.4

Динамічне балансування роторів при відомому розташуванні незрівноважених мас

Вихідні дані

$$m_1 := 45 \quad m_2 := 60 \quad m_3 := 50 \quad r_1 := 90 \quad r_2 := 55 \quad r_3 := 60 \quad \alpha_1 := 60 \text{ deg}$$

$$\alpha_2 := 90 \text{ deg} \quad \alpha_3 := 210 \text{ deg} \quad z_1 := 80 \quad z_2 := 160 \quad z_3 := 240 \quad l := 320$$

Статичне балансування

$$C_1 = m_1 \cdot r_1 \quad C_2 := m_2 \cdot r_2 \quad C_3 := m_3 \cdot r_3$$

$$D_1 := m_1 \cdot r_1 \cdot z_1 \quad D_2 := m_2 \cdot r_2 \cdot z_2 \quad D_3 := m_3 \cdot r_3 \cdot z_3$$

$$x_1 := C_1 \cdot \sin(\alpha_1) + C_2 \cdot \sin(\alpha_2) + C_3 \cdot \sin(\alpha_3)$$

$$y_1 := C_1 \cdot \cos(\alpha_1) + C_2 \cdot \cos(\alpha_2) + C_3 \cdot \cos(\alpha_3)$$

$$\alpha_n := 2\pi - \text{atan2}(y_1, x_1) \quad \alpha_n = 263.837 \text{ deg}$$

$$C_n := \frac{y_1}{\cos(\alpha_n)} \quad C_n = 5.338 \times 10^3$$

$$\text{Приймаємо} \quad m_{\text{II}} := 70 \quad r_{\text{II}} := \frac{C_{\text{II}}}{m_{\text{II}}} \quad r_{\text{II}} = 76.261$$

Динамічне балансування

$$x_2 := D_1 \cdot \sin(\alpha_1) + D_2 \cdot \sin(\alpha_2) + D_3 \cdot \sin(\alpha_3)$$

$$y_2 := D_1 \cdot \cos(\alpha_1) + D_2 \cdot \cos(\alpha_2) + D_3 \cdot \cos(\alpha_3)$$

$$\alpha_{\text{II}} := 2\pi - \text{atan2}(y_2, x_2) \quad \alpha_{\text{II}} = 224.185 \text{ deg} \quad D_{\text{II}} := \frac{y_2}{\cos(\alpha_{\text{II}})}$$

$$\text{Приймаємо} \quad m_{\text{I}} := 50 \quad r_{\text{I}} := \frac{D_{\text{II}}}{m_{\text{I}} \cdot 1} \quad r_{\text{I}} = 40.227$$

$$x_3 := x_1 + m_{\text{I}} \cdot r_{\text{I}} \cdot \sin(\alpha_{\text{I}}) \quad y_3 := y_1 + m_{\text{I}} \cdot r_{\text{I}} \cdot \cos(\alpha_{\text{I}})$$

$$\alpha_{\text{I}} := 2\pi - \text{atan2}(y_3, x_3) \quad \alpha_{\text{I}} = 242.705 \text{ deg} \quad D_{\text{I}} := \frac{y_3}{\cos(\alpha_{\text{I}})}$$

$$\text{Приймаємо} \quad m_{\text{I}} := 70 \quad r_{\text{I}} := \frac{D_{\text{I}}}{m_{\text{I}}} \quad r_{\text{I}} = 87.898$$

8. MATHCAD В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Спеціалізовані математичні пакети для обробки даних останнім часом усе більше розширюють свою нішу на ринку комп'ютерних програм. Це обґрунтовано в першу чергу тим, що фахівці в різних областях починають розуміти, що за допомогою комп'ютерів математика може використовуватись більш ефективно. Зокрема, це стосується й науки ТММ, де математичні розрахунки грають провідну роль.

Сьогодні для автоматизації математичних розрахунків розроблена велика кількість програмних засобів, які можуть, з одного боку, полегшити отримання вмінь і навичок при роботі з пакетами математичного профілю, з іншого боку – сприяють більш глибокому розумінню матеріалу, його візуалізації за допомогою графічних образів.

Володіння роботою з одним зі спеціалізованих математичних пакетів дозволяє не тільки закріпити математичні знання, але й сприяє більш глибокому самостійному вивченню, як предмета ТММ, так і функцій математичного пакета.

8.1. Загальна характеристика пакету Mathcad

Пакет Mathcad – продукт компанії PTC – являє собою універсальний математичний пакет, призначений для виконання інженерних і наукових розрахунків. Основна перевага пакета – природна математична мова, на якій формуються розв'язувані задачі. До того ж у пакета потужна графічна складова. Об'єднання текстового редактора з можливістю використання загальноприйнятої математичної мови та графічних засобів дозволяє користувачеві одержати готовий підсумковий документ у візуально прийнятному вигляді. Тому застосування подібного програмного забезпечення суттєво підвищує ефективність інтелектуальної праці.

У цей час розроблено та функціонує цілий ряд різних математичних систем: Maple, Matlab, Mathematica тощо. Кожна з них має свої переваги і недоліки, а також свої області застосування. У чому ж головна відмінність системи Mathcad від аналогічних?

По-перше, у більшості математичних систем в основному використовуються цілочисельне представлення та символна обробка даних. Система ж Mathcad створювалася перед усім для числового розв'язання математичних задач, хоча в 1994 році до її складу були додані інструменти символної математики із системи Maple, що поступово перетворило Mathcad в *універсальну систему*.

По-друге, *запис умови задач в Mathcad найбільш наближений до звичного математичного запису*, що суттєво спрощує застосування цього пакета. Запис математичних виразів виконується із застосуванням загальноприйнятих знаків: квадратний корінь, знак ділення – у вигляді горизонтальної риси, знаки інтеграла, диференціала, суми і т.д.

По-третє, за допомогою Mathcad можна вводити вихідні дані, як у звичайному текстовому процесорі, традиційно описувати розв'язання задачі та одержувати *результати обчислень в аналітичному та числовому вигляді*, з

можливістю використання засобів графічного представлення результатів. Тобто однією з переваг пакета Mathcad є те, що він не тільки дозволяє зробити необхідні розрахунки, але й оформити їх за допомогою графіків, рисунків, таблиць і математичних формул у візуально привабливому вигляді.

В останніх версіях Mathcad допускається також імпортувати будь-які графічні зображення (від простих графіків функцій до спеціалізованих креслень САПР) і використовувати засоби анімації, звукові та стереофонічні ефекти.

По-четверте, від інших продуктів аналогічного профілю пакет Mathcad відрізняє орієнтація на *створення високоякісних документів* (доповідей, звітів, статей) у режимі *WYSIWYG* (what you see is what you get). Це означає, що користувач, вносячи зміни, відразу бачить результати обчислень та у будь-який момент може роздрукувати відформатований документ. Робота з пакетом на комп'ютері практично збігається з роботою на папері, але водночас є більш ефективною.

По-п'яте, система Mathcad *оснащена додатками* Smartsketch, Autodesk's Volo View, Mathcad add-in for Excel. Smartsketch дозволяє анотувати робочі документи з рисунками, діаграмами, зображеннями. Даний додаток забезпечує параметричне керування, як рисунками, так і обчисленнями. Autodesk's Volo View забезпечує перегляд зображень Autocad в Mathcad. За допомогою Mathcad add-in for Excel можна працювати з таблицями Microsoft Excel.

І, нарешті, система Mathcad більш доступна для масового користувача, оскільки вона *в кілька разів дешевша* своїх аналогів.

У цілому можна сказати, що для фахівця-математика високого класу функціональних можливостей пакета Mathcad може виявитися не досить, але для фахівців з інших областей, зокрема технічного напрямку – цих можливостей цілком достатньо. Більш того, можливість виконувати практично будь-які операції з дійсними та комплексними числами і великий набір векторних і матричних операцій роблять Mathcad хорошим інструментом у руках студентів усіх спеціальностей при виконанні контрольних робіт, курсових і дипломних проектів.

Резюмуючи вищесказане, можна відзначити наступні переваги пакета Mathcad.

1. Універсальність. Mathcad здатний розв'язувати практично всі задачі з різних областей застосування математики. У ньому є потужний математичний апарат, що дозволяє вирішувати задачі без виклику зовнішніх процедур. Перелік обчислювальних інструментів, доступних у середовищі Mathcad наступний:

- робота з векторами та матрицями (лінійна алгебра);
- розв'язання алгебраїчних рівнянь та їх систем (лінійних і нелінійних);
- розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і систем;
- обчислення похідних та інтегралів;
- розкладання функцій в ряди;
- розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних;
- пошук мінімумів і максимумів функціональних залежностей;

– статистична обробка даних, інтерполяція, екстраполяція, апроксимація.

Таким чином, Mathcad – це потужне, просте та універсальне середовище для розв’язання задач у різних галузях науки і техніки, фінансів і економіки, фізики та астрономії, будівництва й архітектури, математики та статистики, організації виробництва та управління. Воно має у своєму розпорядженні широкий набір інструментальних, інформаційних і графічних засобів. Mathcad – одна з найвідоміших математичних систем, яка користується популярністю в інженерів, економістів, менеджерів, науковців і всіх тих, чия діяльність пов’язана з кількісними методами розрахунків.

2. Наочність. Принцип побудови інтерфейсу Mathcad визначається формулою “*what you see is what you get*” – що ви бачите, те й одержите. Тобто математичні вирази в середовищі Mathcad записуються в їхній загальноприйнятій нотації: чисельник знаходиться зверху, а знаменник унизу; інтеграл або похідна – це звичні математичні знаки, а не спеціальним чином записані символи, що знижують наочність розв’язку, в інтегралі границі інтегрування також розташовані на звичних місцях. Усе це робить запис зрозумілим для користувача, що читає роздруковку чи дивиться на екран. Цю особливість цінують ті, кому доводилося вирішувати задачі за допомогою мов програмування, де зрозуміти суть розв’язку може лише фахівець, що володіє подібними навичками.

У середовищі Mathcad процес створення моделі йде паралельно з її відлагодженням. Користувач, ввівши в Mathcad-документ новий вираз, може не тільки відразу підрахувати, чому він дорівнює при певних значеннях змінних, але й побудувати графік або поверхню та побачити, де має місце помилка, яка була допущена при введенні формул або при створенні самої математичної моделі.

У систему Mathcad інтегровані *засоби символічної математики*, що не тільки поліпшує візуальне сприйняття перетворень на екрані, але й дозволяє вирішувати задачі або їх етапи як чисельно, так і аналітично.

Вирішуючи поставлену задачу, користувач може вводити числові значення змінних і *доповнювати їх розмірностями*. При цьому можна вибирати систему одиниць і конкретні розмірності фізичних величин – Mathcad має вбудовану систему автоматичного перерахування та контролю одиниць вимірювання в процесі обчислень. Так, якщо визначається відстань від одного об’єкта до іншого як сума окремих відстаней з використанням різних одиниць вимірювання (мили, фути, ярди, сантиметри), то система Mathcad автоматично зробить перерахунок усіх відстаней і видасть результат із заздалегідь установленною одиницею вимірювання.

Крім цього, система Mathcad обладнана *засобами анімації*, що дозволяє реалізовувати створені моделі не тільки в статистиці, але й у динаміці (анімаційні кліпи), а це значно підвищує наочність досліджуваної моделі.

3. Інтегрованість. Mathcad – це програма, що дозволяє працювати в тісній інтеграції як з іншими системами (Microsoft Word, Excel), так і ефективно використовувати Web-технології. Підтримуються всі можливості інтерфейсу Windows: OLE-Технологія, клієнт-сервер, доступ до пошукових програм за до-

помогою Internet Explorer у середовищі пакета, приєднання до Collaborator – загальнодоступного Internet-форуму, що поєднує всесвітнє співтовариство користувачів Mathcad.

Вирішуючи поставлену задачу, можна в статистиці (через буфер обміну) або в динаміці (OLE-Технологія) передати дані в середовище іншої програми, наприклад, у середовище мови C#, і там вирішувати частину задачі. Не виходячи із середовища Mathcad, можна відкривати нові документи на інших серверах і користуватися всіма перевагами інформаційних технологій, що надаються мережею Internet.

Mathcad може взаємодіяти з іншими додатками, наприклад, дані програм Microsoft Excel або Matlab можуть безпосередньо включатися в обчислювальний потік системи Mathcad: тут допускається управляти кресленнями, виконаними в Autocad чи SolidWorks, використовувати мови програмування високого рівня і OLE Automation для створення комерційних додатків тощо.

4. Останні версії Mathcad мають *власну мову програмування*, яка дає можливість програмістові ефективно застосовувати програмний код у документах Mathcad. Простота та інтуїтивність цієї мови дозволяє швидко їй навчитися. Програмні модулі усередині документа Mathcad поєднують у собі як відособленість (тому їх легко відрізнити від інших формул), так і простоту значення сприйняття. Незважаючи на невелику кількість операторів, мова програмування Mathcad дозволяє вирішувати досить складні задачі.

5. Mathcad містить важливі для інженерів *тригонометричні функції, функції роботи з векторами та матрицями*.

6. В Mathcad вбудована *потужна довідкова база* із рядом прикладів, підказок і зручною системою пошуку. Якщо ж якась проблема освітлена недостатньо повно в довідковій системі, то потрібну відповідь можна знайти на сайті компанії PTC, посилання на який є в довідковій системі Mathcad.

Пакет Mathcad доповнений довідником по основних математичних і фізико-хімічних формулах і константах, які можна автоматично переносити в документ, не набираючи їх вручну.

7. До пакета Mathcad можна придбати *електронні підручники* з різних дисциплін: розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, статистика, термодинаміка, теорія керування, опір матеріалів і т.д. Перш ніж почати вирішувати задачу, користувач може вивчити електронний підручник і перенести з нього у свій документ потрібні фрагменти, окремі формули та константи.

У цілому, можна сказати, що Mathcad – це середовище для виконання за допомогою комп'ютера різноманітних математичних і інженерно-технічних розрахунків, що надає користувачеві великий набір інструментів для реалізації графічних, аналітичних і числових методів розв'язання задач різної складності в будь-якій області, де застосовуються математичні методи.

8.2. Структура пакету Mathcad

Система Mathcad містить обчислювальний, графічний і символний процесори, а також текстовий редактор.

Обчислювальний процесор дозволяє:

- обчислювати математичні формули;
- обчислювати ряди, інтеграли, похідні;
- оперувати комплексними числами;
- розв'язувати лінійні та нелінійні рівняння;
- знаходити екстремуми функції;
- виконувати векторні та матричні операції;
- розв'язувати диференціальні рівняння та рівняння, записані в частинних похідних;
- виконання великої кількості вбудованих функцій.

Обчислювальний процесор проводить обчислення із плаваючою точкою з точністю до 15-ти значущих цифр. Він дозволяє легко змінювати розрядність чисел і похибку ітераційних методів. Для введення формул використовуються шаблони, що вводяться певними комбінаціями клавіш. Є можливість зміни формату представлення чисел, наприклад, кількості знаків після десяткової точки, похибки обчислень і позначення уявної одиниці при операціях з комплексними числами.

Графічний процесор служить для побудови графіків. Він має у своєму розпорядженні великі можливості при роботі із графічними засобами. Графіка орієнтована на розв'язок типових математичних задач. У ньому можлива зміна розмірів графіків, накладення їх на текстові написи та переміщення в будь-яке місце документа.

Графічний процесор дозволяє будувати двовимірні графіки в декартовій і полярній системі координат, з масштабною сіткою та без неї, з лінійним і логарифмічним масштабом і т.д., тривимірні графіки поверхонь, точкові графіки та графіки векторних полів, вводити в графіки елементи анімації, здійснювати трасування.

Текстовий редактор служить для введення та редагування текстів. Текст може складатися зі слів, математичних виразів, формул, спеціальних знаків. Тексти – це коментарі, а тому, якщо в них входять математичні вирази, то вони не виконуються.

Крім потужного текстового редактора, що служить для введення та редагування формул, і обчислювального процесора, що служить для проведення розрахунків по введених формулах, в Mathcad входить ще *символьний процесор*, що є по суті системою штучного інтелекту. Комбінація цих компонентів створює зручне обчислювальне середовище для різноманітних математичних розрахунків і документування результатів.

Символьні обчислення в Mathcad можна здійснювати у двох різних варіантах:

- за допомогою команд меню;
- за допомогою оператора символьного виведення, ключових слів символьного процесора та звичайних формул (цей спосіб називається символьними обчисленнями в реальному часі).

Перший спосіб більш зручний, коли потрібно швидко одержати певний аналітичний результат для однократного використання, не зберігаючи сам хід

обчислень. Другий спосіб більш наочний, оскільки дозволяє записувати вираз в традиційній математичній формі та зберігати символічні обчислення в документах Mathcad. Крім того, аналітичні перетворення, проведені через меню, стосуються тільки одного, виділеного в цей момент, виразу. Відповідно, на них не впливають формули, що знаходяться в документі Mathcad вище цього виділеного виразу (наприклад, оператори присвоювання значень певним змінним). Оператор символічного виведення, навпаки, враховує весь попередній вміст документа та видає результат з його розрахунком.

Символьний процесор може виконувати основні алгебраїчні перетворення, такі як: спрощення виразів, розкладання їх на множники, символічне підсумовування та перемножування. Найбільш показовим проявом можливостей символічного процесора в Mathcad є аналітичні обчислення границь, похідних, інтегралів і розкладань у ряд, а також розв'язок алгебраїчних рівнянь.

8.3. Інтерфейс пакету Mathcad

Інтерфейс пакета Mathcad аналогічний інтерфейсу більшості додатків Microsoft Windows (рис. 8.1).

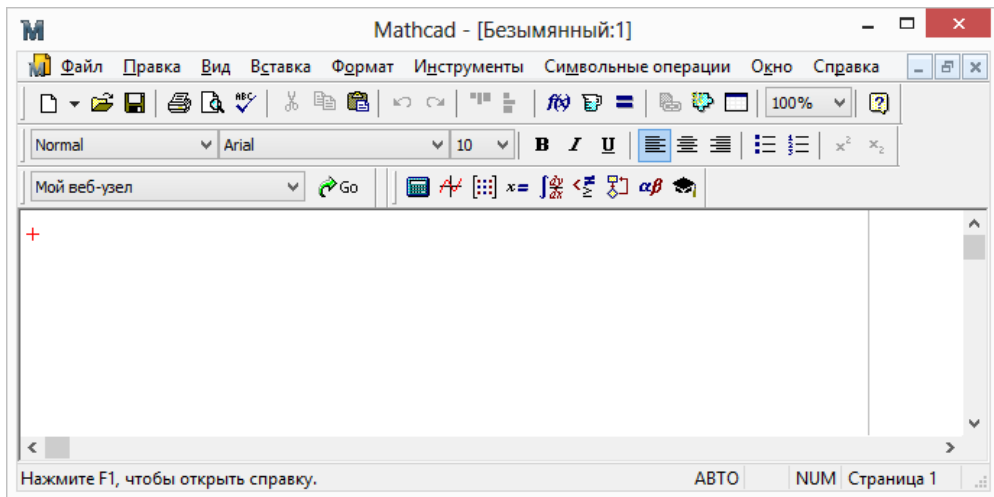


Рис. 8.1. Інтерфейс пакету Mathcad

У верхній частині вікна розташована смужка з назвою програми та іменем завантаженого документа, під нею знаходиться рядок головного меню. Нижче розміщені панелі інструментів: **Стандартная**, що містить кнопки найбільш загальних команд і опцій, і **Форматирование**, команди якої призначені для зміни виду текстової інформації, що вводиться. Знизу вікна розташовується смужка стану, у якій відображаються різного роду службові повідомлення.

Більшу частину вікна програми займає *робоча область*, яка для зручності роботи розбита на листи. Листи Mathcad – це логічно активна зона, читання інформації в якій здійснюється зверху вниз і зліва направо. Тобто, щоб одержати

8. Mathcad в інженерних розрахунках

ти значення функції при деякому значенні аргументу, значення аргументу повинне бути визначене вище або лівіше самої функції. Інакше буде видане повідомлення про помилку: «*Variable or function is not defined above*» – змінна або функція не визначена вище.

Меню в Mathcad містить наступні пункти (табл. 8.1).

Таблиця 8.1. – Пункти меню програми Mathcad

| Пункт меню | Опис команд |
|---------------------------|---|
| <i>Файл</i> | Команди для роботи з файлами, сторінками тощо. |
| <i>Правка</i> | Команди, що стосуються операцій копіювання, вирізування, вставлення, пошуку та заміни текстових фрагментів, перевірки орфографії тощо |
| <i>Вид</i> | Команди керування панелями інструментів, лінійками та областями, настроювання анімації, зміни масштабу відображення робочого документу |
| <i>Вставка</i> | Команди створення графіків, матриць, функцій, рисунків, областей та інших об'єктів |
| <i>Формат</i> | Команди зміни шрифту, кольору, вирівнювання, інтервалів тексту, зміни формату графіка, області колонтитулів |
| <i>Інструменти</i> | Команди перемикання між автоматичним і ручним обчисленням, автоматичної оптимізації, зміни математичних параметрів, створення та запису анімації |
| <i>Символьні операції</i> | Команди обчислення виразів різними шляхами, спрощення, розширення, знаходження коефіцієнтів полінома, роботи зі змінними та матрицями, перетворення змінних |
| <i>Окно</i> | Команди для роботи з вікнами |
| <i>Справка</i> | Довідкова система пакета Mathcad |

8.4. Налаштування робочого середовища

Для початку роботи з пакетом Mathcad рекомендується відповідним чином налаштувати інтерфейс програми. Для цього треба, насамперед, відкрити необхідні панелі інструментів. При першому завантаженні пакета в робочій області вікна програми відображається панель **Математичские**.

Ця панель (рис. 8.2) містить посилання на всі інші панелі Mathcad: **Калькулятор**, **Графіки** тощо.

Панель **Калькулятор** (рис. 8.3) містить різні арифметичні оператори: піднесення до степені, добування кореня, знаходження факторіала; найбільш часто використовувані функції: логарифмічні (натуральний і десятковий логарифм), тригонометричні (sin, cos і ін.), а також цифри, знаки арифметичних операцій та інші спеціальні символи.

Панель **График** (рис. 8.4) містить команди, призначені для побудови різних типів графіків і діаграм: графіки в декартовій та полярній системі координат, графіки поверхні, гістограми тощо.

На панелі **Матрица** (рис. 8.5) знаходяться оператори роботи з матрицями і векторами, такі як: одержання зворотної матриці, транспонування матриці, скалярний і векторний добуток векторів тощо.

Панель **Вычисление** (рис. 8.6) містить знаки рівності, присвоювання, тотожності, а також префіксні, постфіксні оператори, оператор символічного обчислення.

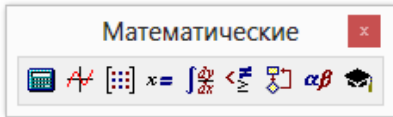


Рис. 8.2 – Панель «Математические»

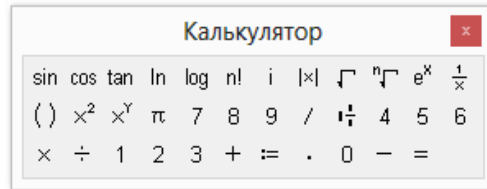


Рис. 8.3 – Панель «Калькулятор»

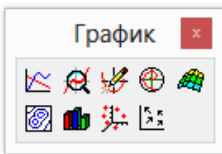


Рис. 8.4 – Панель «График»

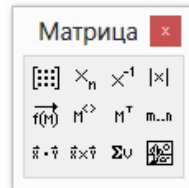


Рис. 8.5 – Панель «Матрица»

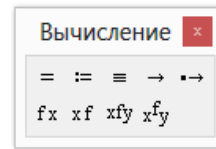


Рис. 8.6 – Панель «Вычисление»

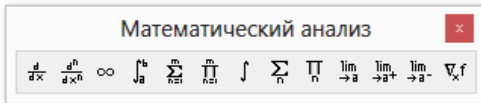


Рис. 8.7 – Панель «Математический анализ»

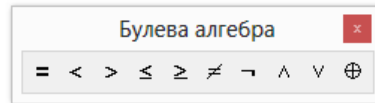


Рис. 8.8 – Панель «Булева алгебра»

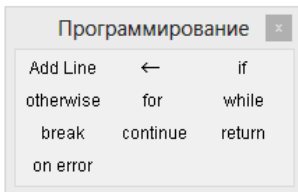


Рис. 8.9 – Панель «Программирование»

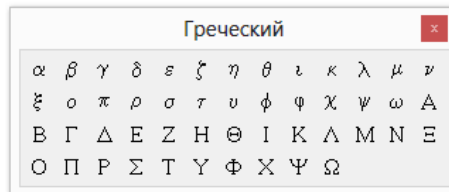


Рис. 8.10 – Панель «Греческий»



Рис. 8.11 – Панель «Символьные»

Панель **Математический анализ** (рис. 8.7) містить різні оператори математичного аналізу: команди інтеграла та похідної, знаки підсумовування та множення, знаки границі, а також символ нескінченності.

На панелі **Булева алгебра** (рис. 8.8) знаходяться логічні оператори: «і», «або», «ні», а також операції порівняння, такі як: $=$, $>$, $<$ тощо.

На панелі **Программирование** (рис. 8.9) розташовані елементи мови програмування Mathcad, наприклад, умовні оператори: `if`, `otherwise`; ітераційні оператори `for`, `while`, `return` тощо.

Панель **Греческий** (рис. 8.10) містить строчні та прописні букви грецького алфавіту.

Панель **Символьные** (рис. 8.11) містить оператори різного роду символних перетворень і обчислень, такі як: символне транспонування, інвертування матриці, знаходження символного визначника матриці тощо.

При бажанні, проводячи налаштування інтерфейсу, користувач може поміняти колір листів документів. Для цього слід виконати команду **Вид** → **Регионы**. Якщо ж треба вибрати колір заливки, то в меню **Формат** треба вибрати пункт **Цвет**, підпункт **Фон**, і в палітрі, що з'явилася, визначити необхідний колір. Після проведення попередніх налаштувань можна приступати до роботи з пакетом.

8.5. Робота з текстом

Часто при розв'язуванні задач потрібно написати заголовок, вставити коментар чи примітку. У цьому випадку перед набором математичних виразів рекомендується попередньо створити спеціальну область – *текстовий регіон*. Це можна зробити або з меню **Вставка**, або скориставшись комбінацією клавіш «**Shift** + **+**». Після виконаних дій з'явиться чорна рамка, що визначає текстову область.

Mathcad дозволяє налаштувати тип, розмір, нахил шрифту. Змінити колір шрифту, а також використовувати деякі ефекти (наприклад, індекси) можна, вибравши в контекстному меню команду **Шрифт** (попередньо виділивши відповідний фрагмент у текстовому регіоні). За допомогою пункту **Абзац** того ж меню можна налаштувати відступи, а також визначити вирівнювання та задати список, вибравши відповідну опцію. Ці ж дії можна здійснити, виконавши команду **Формат** → **Текст**. Для установки відступів зручно вивести лінійку командою **Вид** → **Линейка**.

8.6. Обчислення значень арифметичних виразів

Щоб підрахувати значення виразу, треба задати значення змінних, що входять до його складу. Для цього слід використовувати оператор присвоювання «**:**=», а не знак рівності. Знак рівності в Mathcad використовується для виведення числового значення. Ввести знак присвоювання можна як з панелі **Калькулятор**, так і з клавіатури натисканням комбінації клавіш «**Shift** + **;**» в англійській розкладці клавіатури. При першому використанні імені змінної

можна натиснути знак рівності на клавіатурі, наприклад $y := 2$ – і автоматично буде введений оператор присвоювання. Після введення виразу необхідно набрати знак « $=$ » (дорівнює), наприклад $y + 2 =$, і на екрані з'явиться значення підрахованого виразу, у нашому випадку $y + 2 = 4$. У випадку внесення змін у формулу або початкові умови, результат буде перерахований. Слід мати на увазі, що для відділення цілої частини від дробової використовується символ «.» (точка).

В системі Mathcad слід розрізняти поняття операторів присвоювання (локального та глобального), тотожності та оператора виведення результату. Вони можуть бути викликані з панелі інструментів **Вычисление** (рис. 8.6.), а також за допомогою комбінацій клавіш.

Так, оператор виведення результату лише виводить значення змінної чи виразу на екран, в той час, як оператор присвоювання визначає кількісне значення цієї змінної, тобто присвоює їй певну величину. Оператор локального присвоювання \leftarrow викликається з панелі інструментів **Программирование** або за допомогою комбінації клавіш «**Shift** + **[**». Він використовується лише в окремих частинах документа – так званих підпрограмах, і їхня дія розповсюджується лише на даний фрагмент.

Суть глобального оператора присвоювання \equiv наступна: при запуску документа на розрахунок в першу чергу відбувається присвоювання значень всіх змінних зі знаком глобального присвоювання, при чому така дія відбувається від початку до кінця документа, а вирази, що містять інші оператори, ігноруються. Коли ж прийде черга до розрахунку математичних виразів чи побудови графіків, всі змінні, значення яких присвоєні оператором глобального присвоєння, будуть вже визначені. Викликається цей оператор за допомогою комбінації клавіш «**Shift** + **~**», або вибором відповідної кнопки з панелі **Вычисление**.

Оператор визначення тотожності \equiv використовується здебільшого при розв'язанні рівнянь та їх систем. Викликається він з панелі інструментів Булева алгебра, або клавішною комбінацією «**Ctrl** + **=**».

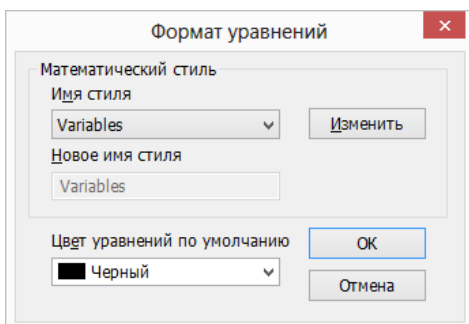


Рис. 8.12. Діалогове вікно «Формат уравнений»

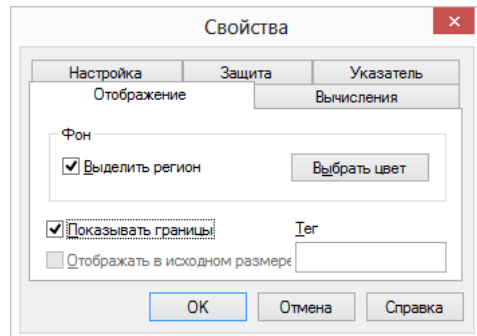


Рис.8.13. Діалогове вікно «Свойства»

Параметри введеного виразу, установлені за замовчуванням, не завжди задовольняють користувача. Для того щоб відрегулювати вид виразу, потрібно за допомогою команди **Формат** → **Уравнение...** викликати вікно **Формат уравнения** (рис. 8.12), що дозволяє визначити колір шрифту формул, вибрати стиль. За допомогою кнопки **Изменить** можна змінити стиль тексту формул: вибрати тип, розмір, нахил шрифту.

Щоб змінити параметри самої математичної області, слід виконати клікання мишею по будь-якій точці формули, що редагується, і в контекстному меню вибрати команду **Свойства**. Відкриється вікно властивостей **Свойства** (рис. 8.13), де зазначені засоби, що дозволяють виділити формулу рамкою (установити опцію **Выделить регион**), зробити область кольоровою за допомогою команди **Фон** → **Выделить регион** → **Выбрать цвет**.

Області формул можна переміщати по екрану за допомогою миші. Редагуючи формули, можна вирізати та копіювати їхні фрагменти так само, як в інших додатках Windows.

При необхідності в іменах змінних можна використовувати позначення нижнього індексу. Вести його можна, натиснувши після основної частини імені символ «.» (крапка). Маркер введення тексту при цьому зменшується в розмірах і приймає положення нижнього індексу. Таке представлення візуально подібне до запису, що використовується при запису індексів матриць та векторів, однак між ними існує принципова відмінність (див. п.).

8.7. Вбудовані функції та функції, визначені користувачем

Система Mathcad містить бібліотеку готових вбудованих функцій, які діляться на категорії: *тригонометричні*, наприклад: \sin , \cos , \tan ; *статистичні*, наприклад: corr , hist і ін. (рис. 8.14).

Функцію можна викликати як шляхом вибору команди **Вставка** → **Функция**, так і набравши її назву на клавіатурі. У другому випадку потрібно пам'ятати, що в Mathcad аргумент функції необхідно в дужках після її імені.

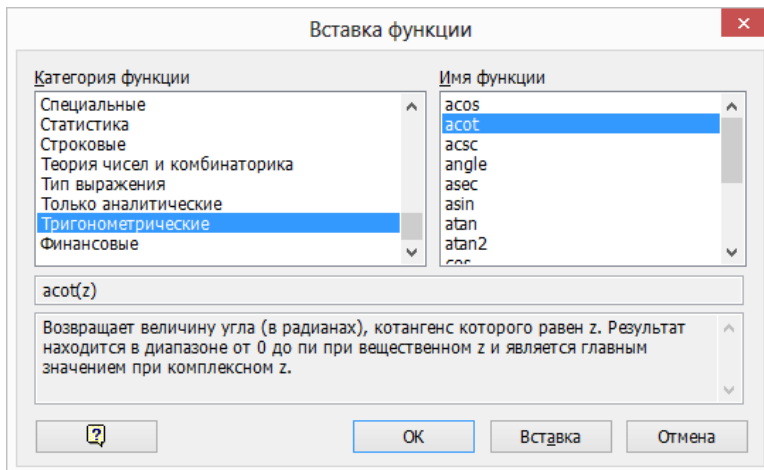


Рис. 8.14. Діалогове вікно «Вставка функции»

8.8. Представлення ранжованих змінних в Mathcad

Функції, які не зазначені в переліку вбудованих функцій, користувач може визначити самостійно на початку документу і використовувати при необхідності, зветраючись до них. Формат запису функції користувача наступний:

$$f(x_1, x_2, \dots) := \langle \text{математичний вираз} \rangle,$$

де f – ім'я функції, x_1, x_2, \dots – перелік змінних, що входять в математичний вираз. Приклад функції користувача, що визначає довжину катета при відомій довжині гіпотенузи і іншого катета, наведений на рис. 8.15.

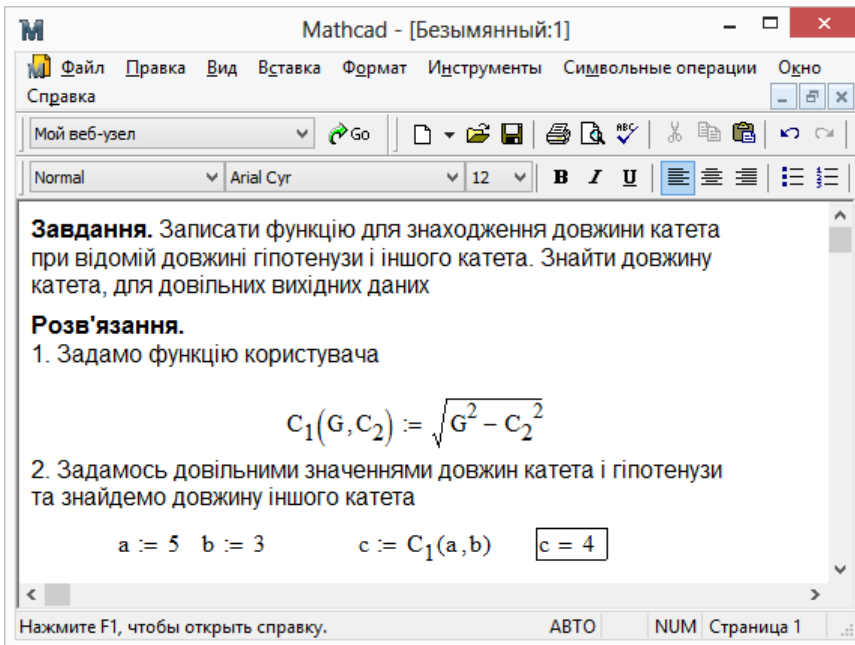


Рис. 8.15. Приклад використання функції користувача

Якщо певна сукупність математичних та логічних дій в документі повторюється декілька разів, то раціонально також використовувати функції користувача, де математичні та логічні вирази записані у вигляді програмного блоку (див. п.)

8.8. Представлення ранжованих змінних в Mathcad

В інженерних розрахунках досить часто необхідно задавати значення аргументу у вигляді деякої дискретної величини, яка набуває значень в певному діапазоні з певним кроком. В Mathcad це можна зробити, призначивши аргументу значення вектора – матриці, що складається з одного стовпця. Проте при великій кількості елементів дискретної змінної раціональніше скористати-

8. Mathcad в інженерних розрахунках

ся іншим типом даних Mathcad – ранжованою змінною. Синтаксис запису ранжованої змінної наступний

$$x := x_1, x_2 .. x_n;$$

$$N := 12$$

$$x := 0, \frac{2\pi}{N} .. 2\pi$$


x =

| |
|-------|
| 0 |
| 0.524 |
| 1.047 |

Рис. 8.16.
Ранжована
змінна в
Mathcad

де x_1 – перше значення ранжованої змінної; x_2 – друге значення ранжованої змінної; x_n – останнє значення ранжованої змінної.




Якщо в ранжованій змінній крок змінної дорівнює одиниці, то величину x_2 можна не вказувати при описі змінної.

Шаблон для створення ранжованої змінної можна викликати, натиснувши кнопку  (**Переменная-диапазон**) на панелі **Матрица**, або за допомогою комбінації клавіші «;».

Наприклад, послідовність визначення дискретного аргументу, що набуває значень від 0 до 2π для N значень, представлена на рис. 8.16.

8.9. Побудова графіків

Результати розв'язання задач з ТММ у більшості випадків представляють у вигляді таблиць, діаграм та графіків. Останній спосіб є найбільш наочним, оскільки дозволяє одним поглядом оцінити характер залежності розрахункових параметрів від вихідних, знайти максимуми чи мінімуми функцій тощо. Mathcad дозволяє здійснювати побудову графіків та діаграм просто та швидко.

Усі типи графіків в Mathcad можна побудувати, використовуючи панель **График** (рис. 8.4). На ній розташовані кнопки семи типів графічних областей, з яких в ТММ найбільш часто використовуються три: декартовий графік , графік у полярній системі координат  та просторова поверхня .

На одну графічну область можна помістити кілька кривих. Для цього після імені першої функції треба ввести кому, при цьому курсор опускається на рядок нижче, після чого необхідно написати ім'я наступної залежності. У цілому на одному листі можна побудувати до 16 кривих. Якщо ж побудови ведуться по різних змінних, то через кому ці змінні вводяться в маркер осі x .

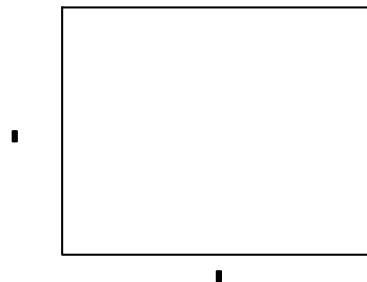


Рис. 8.17. Шаблон графіка Mathcad

Існує кілька способів побудови двовимірних залежностей. Перший спосіб побудови не вимагає введення значень аргументу. Послідовність дій у цьому випадку буде такою.

Необхідно помістити курсор у потрібну точку робочої області екрана і вставити графічну область, використовуючи кнопку **График X-Y** на панелі **График**. Ці ж дії можна здійснити за допомогою комбінації клавіш «**Shift + 2**», а також за допомогою меню **Вставка**.

Вставлена графічна область за замовчуванням являє собою прямокутну рамку, усередині якої знаходиться зона відображення залежності (рис. 8.17).

Під нижньою межею рамки розташований чорний маркер-шаблон. На його місце необхідно ввести змінну, по якій буде будуватись залежність на графіку. Ліворуч від внутрішньої графічної області знаходиться маркер, на місце якого треба ввести назву функції та аргумента (наприклад, $\sin(x)$) (рис. 8.18). Графік буде побудований після клацання мишею на робочій області поза зображенням графіка.

При такому способі задання графіка система Mathcad за замовчуванням визначає область побудови для аргументу від -10 до 10 . Крок при цьому автоматично встановлюється рівним $0,1$. Крок при вибраному способі побудови змінити не можна, але можна змінювати границі області відображення графіка. Для цього слід виділити графік, а потім змінити значення крайніх маркерів, що з'явилися з низу осі x . Величину області по y у цьому випадку система визначить сама. Змінюючи область відображення графіка, зробивши її, наприклад, у межах від $-\pi$ до π , одержимо більш деталізований варіант побудованого графіка.

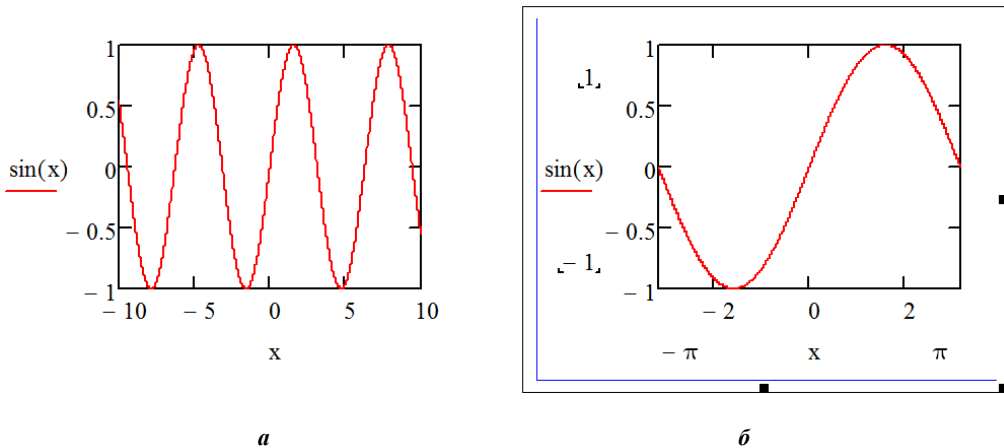


Рис. 8.18. Побудова графіка в декартовій системі координат

Розглянутий спосіб зручний швидкістю побудови графіка, але редагування при його використанні ускладнене. Він також не дозволяє довільно визначати величину кроку. Інший спосіб побудови графіка передбачає використання аргументу у вигляді ранжованої змінної або вектор-стовпця, отриманого з таблиці.

Даний спосіб має перевагу перед першим не тільки тим, що можна довільно задавати крок побудови, але й тим, що при заданні змінної можна автоматично визначати область її зміни. Це значно підвищує наочність розв'язку задачі та полегшує редагування.

Редагування графіка проводиться шляхом подвійного клацання мишею в будь-якій точці області кривої, або вибором команди **Формат** з контекстного меню. При цьому відкривається вікно **Форматирование выбранного графика X-Y**, що містить кілька закладок з різними опціями відображення кривих (рис. 8.19).

Закладка **Оси X-Y** містить різні опції форматування осей. У ній знаходяться три області: **Ось X**, **Ось Y** і **Отображение осей**.

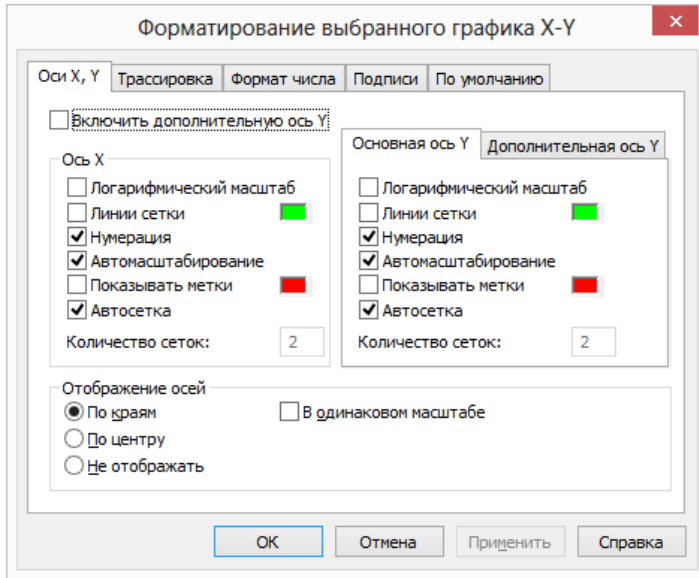


Рис. 8.19. Вікно «Форматирование выбранного графика X-Y»

У верхній частині вкладки розташований елемент вибору **Включить дополнительную ось**, який дозволяє визначити додаткову вісь при відображенні декількох графіків в одній графічній області.

Області **Ось X** і **Ось Y** – це дві області, що містять список параметрів налаштування осей:

– **Логарифмический масштаб**. Замість звичайної нумерації осі вводиться логарифмічна шкала. Це зручно, якщо дані, які містить залежність, відрізняються на кілька порядків. Очевидно, що використовувати логарифмічну шкалу можна для рядів даних, що містять тільки додатні елементи.

– **Линии сетки**. При увімкненні цього параметра буде відображена сітка з допоміжних ліній.

– **Нумерация**. Параметр відповідає за відображення нумерації осі. При його активації на ній будуть підписані значення з певним кроком.

– **Автомасштабирование**. При включеному параметрі вибір діапазону осі буде виконуватися автоматично.

– **Показывать метки**. При увімкненні параметра біля осі, що редагується, з'являється два маркери, у які можна ввести важливі для даної задачі значення змінної або функції. При цьому відобразяться допоміжні лінії, проведені на рівні введених значень.

– **Автосетка**. Активуючи цей параметр, можна самостійно визначити кількість допоміжних ліній відповідної осі.

Область **Отображение осей**:

– **По краям.** При увімкненні цього параметра межі графіка будуть перетинатися в точках своїх найменших значень (цей параметр визначений за замовчуванням).

– **По центру.** Осі перетинаються в точці (0; 0), тобто осі графіка мають стандартний для декартової системи координат вигляд.

– **Не отображать** – графік відображається без осей.

– **В одинаковом масштабе.** Осі відображаються з рівною ціною поділки (відрізки осей, рівні по модулю, будуть рівні й по довжині). Цей параметр зручно використовувати, коли вид кривої є принциповим, наприклад, при побудові кіл, профілів кулачків, шатунних кривих.

Вкладка **Трассировка** містить опції настроювання відображення ліній і точок, що візуалізують залежність: *Частота символів*, *Символ*, *Ширина символа*, *Линия*, *Толщина линии*, *Цвет*, *Тип* (рис. 8.20). Для редагування потрібної кривої (якщо графік містить їх декілька) слід вибрати зі списку опції **Значение в легенде** відповідний ряд даних (вони розташовані в тому ж порядку, що й імена функцій).

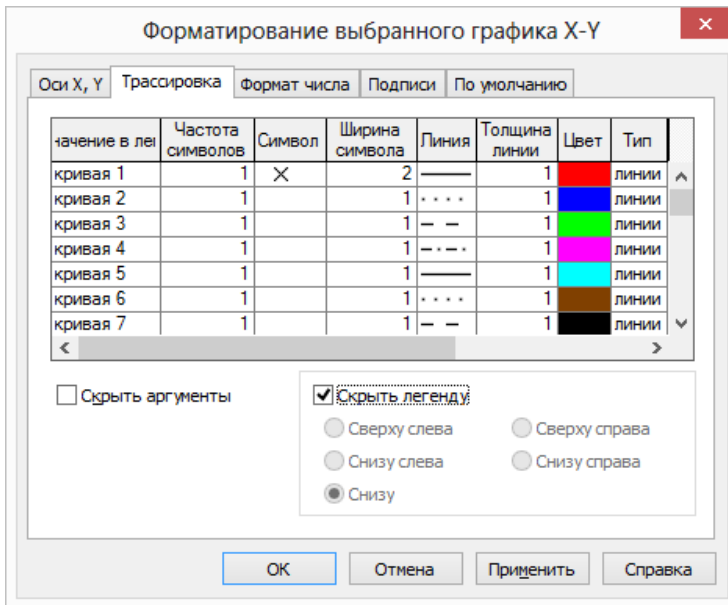




Рис. 8.20. Вкладка «Трассировка»

На панелі **График** знаходяться два інструменти: **Масштаб**  і **Трассировка** , що допомагають більш ефективно досліджувати побудовані криві.

Інструмент **Масштаб** служить для збільшення окремого фрагмента побудованої кривої. Викликається або з панелі **График**, або за допомогою однієїменної команди контекстного меню. Для того, щоб збільшити певну ділянку графіка, треба його виділити в спеціальний штрихований прямокутник, що

8. Mathcad в інженерних розрахунках

з'являється при русі курсору миші по графічній області з натиснутою лівою кнопкою. Після чого натиснути кнопку **ОК** діалогового вікна, що з'явилося.

Інструмент **Трассировка** (рис. 8.21) дозволяє визначати координати довільної точки на графіку. При його активізації в області кривої з'являється дві штрихові лінії, що перетинаються. Переміщати їх можна або мишею, або клавішами керування курсором. При цьому у полях зі значеннями x і y з'являються координати точки перетину ліній. Їх можна скопіювати в буфер обміну за допомогою кнопок: **Копировать X** та **Копировать Y** вікна **Трассировка графика X-Y**.

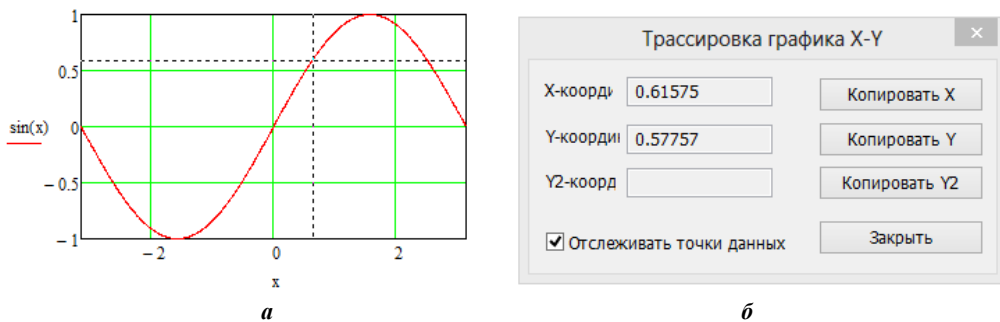



Рис. 8.21. Робота команди «Трассировка»

Для побудови в Mathcad профілів кулачкових механізмів, зубчастих коліс, годографів швидкостей та сил зручно використовувати графічні відображення в полярній системі координат.

Вибравши пункт **Полярный график**  відповідної панелі інструментів, з'явиться графічний шаблон з макерами, що зображений на рис. 8.22.

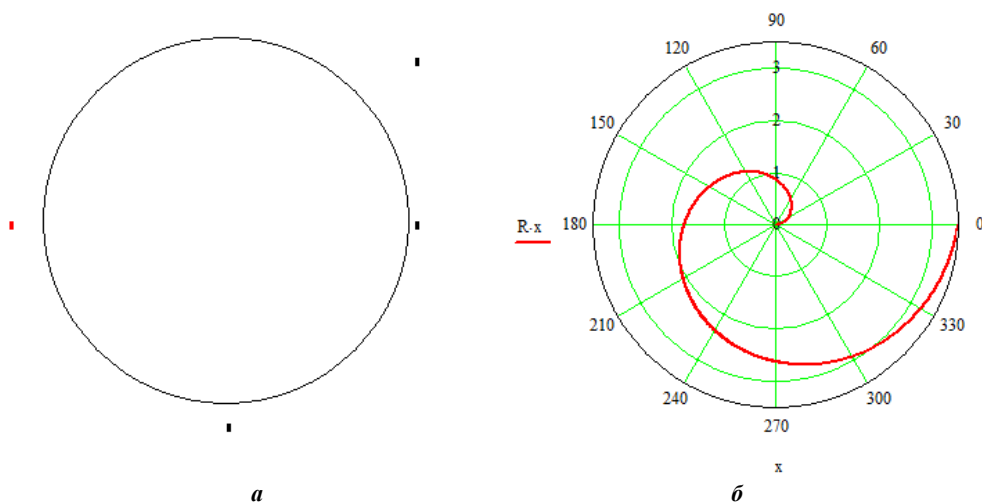


Рис. 8.22. Побудова графіків у полярній системі координат

У нижньому маркері необхідно ввести імя аргумента, у лівому – ім'я функції. При необхідності можна визначити максимальне значення функції, що відображається графіком, ввівши у маркер, що знаходиться у верхньому правому куті, відповідне числове значення. Приклад графічного представлення кривої Архімеда у полярній системі координат наведений на рис. 8.22, б.

Слід зазначити, що графіки, побудовані у полярній системі координат мають інструменти редагування, подібні до інструментів редагування декартових графіків.

8.10. Побудова графіків поверхонь та просторових кривих

Пакет Mathcad має широкі можливості представлення даних у вигляді просторових графіків, які можуть використовуватись при дослідженні функцій декількох змінних, побудові кінематичних схем просторових важільних механізмів та їх шатунних кривих, а також в багатьох інших випадках.

Найбільш поширеним і простим способом побудови просторових графіків є представлення функції двох змінних у прийнятному для Mathcad вигляді з подальшим внесенням імені цієї функції у відповідний маркер графічної області зазначеного просторового графіка (рис. 8.23, а).

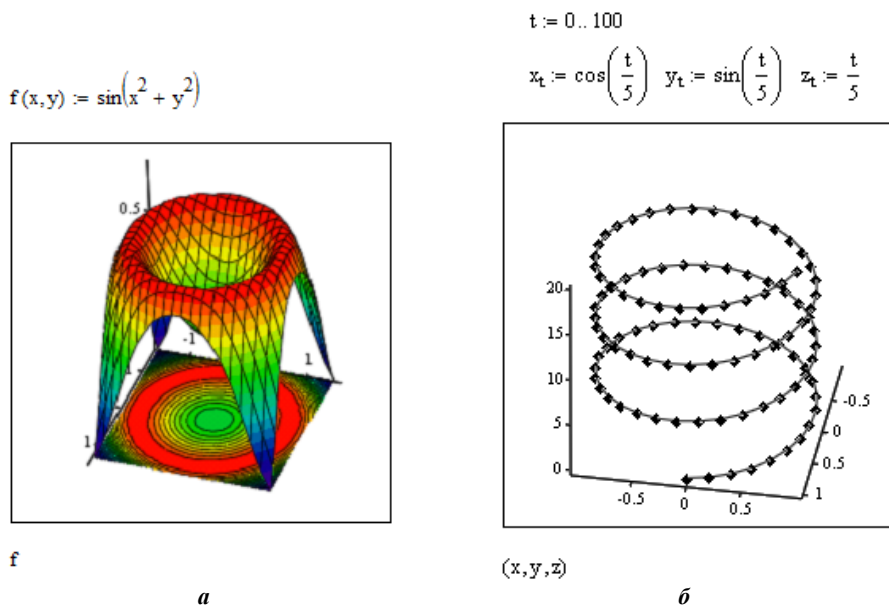


Рис. 8.23. Просторові побудови в Mathcad: поверхня (а) та просторова крива (б)

У випадку необхідності побудови просторових кривих, наприклад, шатунних кривих просторових важільних механізмів, можна скористатись способом, представленим на рис. 8.23, б.

8.11. Вектори та матриці

Одним із типів даних в Mathcad є масиви – сукупність певної кількості числових або символьних елементів, що впорядковані певним чином, яка має певне унікальне ім'я. В пакеті Mathcad використовуються масиви двох найбільш розповсюджених типів:

- одномірні (вектори);
- двомірні (матриці).

Порядковий номер елемента називається *індексом*. Індокси можуть мати тільки цілочисельні значення. Вони можуть починатись з нуля, одиниці або іншого цілочисельного значення, відповідно до значення системної змінної ORIGIN, значення якої можна змінювати, присвоївши їй відповідне ціле число.

Вектори та матриці можна задавати різними способами:

- за допомогою команди **Вставка** → **Матриця**, за допомогою комбінації клавіш «**Ctrl + M**», або кліком на відповідній кнопці панелі **Матриця**, заповнивши масив порожніх полів для не дуже великих масивів (рис. 8.24);
- з використанням дискретного аргументу, коли маємо певну явну залежність для обчислення елементів через їх індекси.

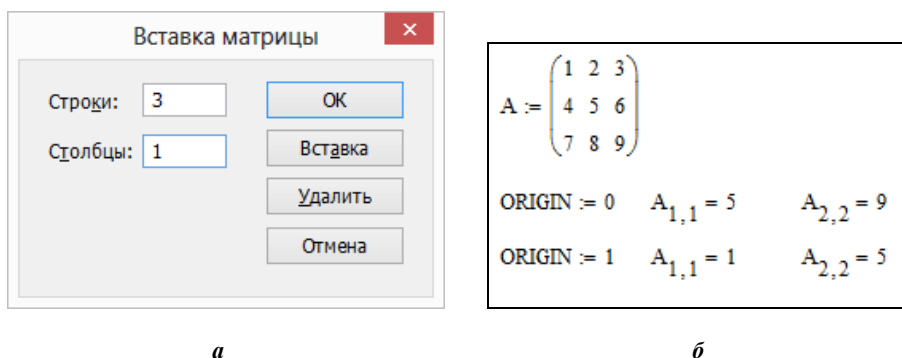


Рис. 8.24. Матриці в Mathcad: *a* – діалогове вікно «Вставка матриць»; *б* – звертання до елементів матриці

На панелі інструментів **Матриця** (рис. 8.5) розташовані основні команди, що стосуються дій над векторами та матрицями – векторний та скалярний добуток, транспонування та інвертування тощо.

Щоб звернутися до конкретного елемента вектора чи матриці, можна скористатися кнопкою x_n , або за допомогою клавіші «[».

За замовчуванням нумерація елементів матриці в документі починається з нуля. При необхідності можна змінити номер першого елемента. Для цього, як вже було сказано, необхідно системній змінній ORIGIN присвоїти відповідне значення. Приклад матриці, звертання до її елементів та суть системної змінної ORIGIN наведені на рис. 8.24, *б*.

8.12. Лінійні рівняння та системи

Широке поширення в дослідженнях механізмів і машин одержали лінійні моделі. Більшість лінійних моделей зводяться до лінійних алгебраїчних рівнянь (нерівностей) або їх систем. Їх зручно вирішувати засобами пакета Mathcad.

У пакеті Mathcad є ряд функцій для розв'язку рівнянь та систем рівнянь:

- **root(f(x),x,a,b)** – розв'язок одного рівняння з одним невідомим;
- **lsolve(M, V)** – розв'язок системи лінійних рівнянь;
- **find(x,y,...)** – розв'язок лінійних та нелінійних рівнянь або їх систем;
- **minerr(x,y,...)** – наближений розв'язок системи рівнянь;
- **polyroots(V)** – наближений розв'язок одного рівняння, що представлене у вигляді поліному.

Функція **lsolve(M, V)** – повертає вектор **x** розв'язку системи лінійних рівнянь $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{V}$, де **M** – матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; **V** – вектор-стовбець вільних членів системи рівнянь. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою функції **lsolve** представлений на рис. 8.25.

The screenshot shows the Mathcad software window titled "Mathcad - [Безымянный:1]". The interface includes a menu bar with options like "Файл", "Правка", "Вид", "Вставка", "Формат", "Инструменты", "Символьные операции", "Окно", and "Справка". Below the menu is a toolbar with various icons for file operations and editing. The main workspace contains the following text and mathematical expressions:

Завдання. Розв'язати систему, що складається з наступних рівнянь:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Розв'язання

Формуємо матрицю **A** коефіцієнтів та вектор-стовбець **B** вільних членів системи

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Знаходимо корені системи за допомогою функції **lsolve**

$$x := \text{lsolve}(A, B) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

At the bottom of the window, there is a status bar with the text "Нажмите F1, чтобы открыть справку." and "АВТО NUM Страница 1".

Рис. 8.25. Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою функції **LSOLVE**

8. Mathcad в інженерних розрахунках

Нелінійні рівняння та системи часто не мають аналітичних розв'язків і вирішуються графічними або чисельними методами із заданою точністю обчислень.

Функція **root**($f(x), x, a, b$) знаходить корінь рівняння з одним невідомим. Вона повертає значення x , при якому функція $f(x)$, дорівнює нулю. Використання функції **root** вимагає попереднього задання початкового значення кореня (наближення). Якщо досліджувана функція має кілька коренів, то кожен з них буде залежати від початкового наближення. Якщо воно розташоване близько до локального екстремуму функції $f(x)$, то функція **root** може не знайти кореня, або знайдений корінь буде далекий від початкового наближення. Параметри a, b є опційними і визначають діапазон значень, в якому буде проводитись пошук коренів. Приклад застосування цієї функції наведений на рис. 8.26.

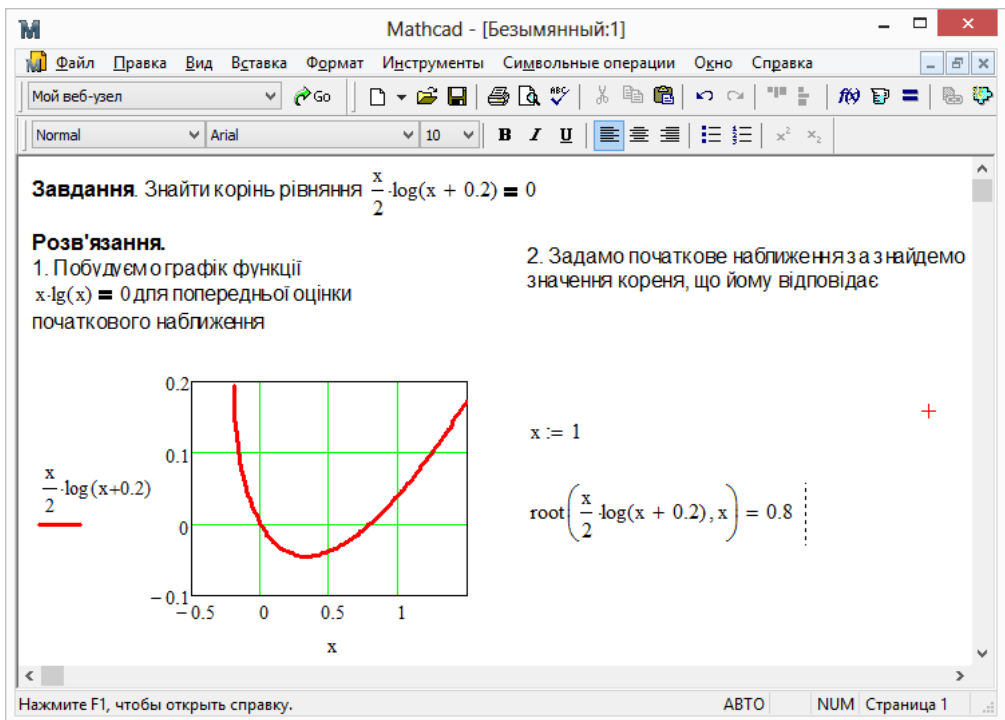


Рис. 8.26. Розв'язання нелінійних рівнянь за допомогою функції **ROOT**

Якщо в Mathcad необхідно знайти розв'язок системи рівнянь, то слід задати блок рівнянь, який повинен мати наступну структуру:

given – службове слово, яке визначає початок блоку системи рівнянь;
<перелік рівнянь системи> (записується через знак тотожності, див. п. 8.6.);

find(x_1, x_2, \dots) або **minerr**(x_1, x_2, \dots) – функції для розв'язку системи рівнянь.

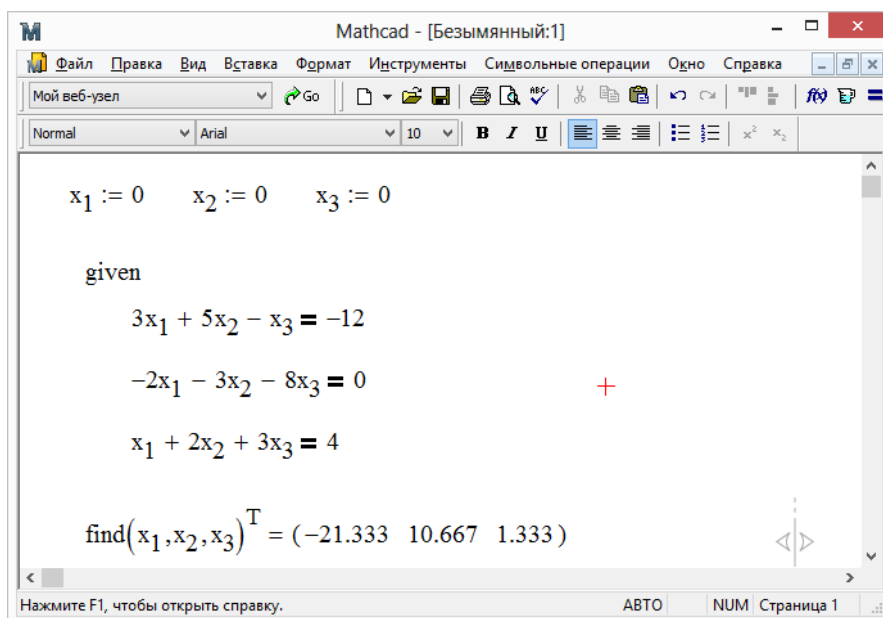


Рис. 8.27. Розв'язання системи рівнянь за допомогою блоку GIVEN-FIND

Функція **find**(x_1, x_2, \dots) – повертає значення однієї або декількох змінних, що відповідають точному розв'язку системи (рис. 8.27).

Функція **minerr**(x_1, x_2, \dots) – повертає значення однієї або декількох змінних, що відповідають наближеному розв'язку з мінімальною середньоквадратичною похибкою, навіть у тому випадку, коли функція **find** не знаходить розв'язку. При використанні функції **minerr** рекомендується проводити перевірку знайдених розв'язків.

8.13. Знаходження похідних та інтегралів

Операція диференціювання реалізована в Mathcad як в числовій, так і в аналітичній формах. На відміну від всіх інших операцій, символічне диференціювання виконується успішно для більшості аналітично заданих функцій.

Для того, щоб аналітично знайти похідну функції $f(x)$ в Mathcad, необхідно:

1. Задати функцію $f(x)$.
2. Ввести оператор диференціювання за допомогою натискання кнопки

Производная (Derivative) на панелі **Вычисления (Calculus)** або ввести з клавіатури знак запитання $\langle ? \rangle$.

3. В маркер оператора диференціювання ввести функцію $f(x)$ та ім'я аргумента x .

4. Ввести оператор символічного обчислення \rightarrow , або виконати операцію **simplify**, вибравши її на математичній панелі **Symbolic**, та натиснути клавішу **«Enter»**. Наведемо приклад символічного диференціювання.

$$f(x) := \sin(x) \cdot \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$$

Для того, щоб обчислити похідну в точці, потрібно попередньо задати значення аргумента. Результатом диференціювання в цьому випадку буде число – значення похідної в цій точці. Якщо результат вдалося відшукати аналітично, то він приводиться у вигляді числового виразу, а для того, щоб отримати його у формі числа, достатньо ввести після отриманого виразу символ чисельної рівності « \Rightarrow ». Приклад обчислення похідної в точці матиме наступний вигляд.

$$f(x) := \sin(x) \cdot \ln(x)$$

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \cos(2) \cdot \ln(2) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2) = 0.166$$

Щоб аналітично продиференціювати вираз за деякою змінною за допомогою меню, необхідно виділити у виразі цю змінну та вибрати команду **Символика** \rightarrow **Перемінная** \rightarrow **Дифференцировать**.

Для того, щоб чисельно продиференціювати функцію $f(x)$ в точці, потрібно використати оператор чисельного виводу:

1. Визначити точку x , в якій буде обчислена похідна, наприклад $x:=2$.
2. Ввести оператор диференціювання і звичним чином заповнити маркери.
3. Ввести оператор чисельного виводу результату $\Leftarrow \Rightarrow$.

Приклад чисельного диференціювання наведеної функції матиме наступний вигляд.

$$f(x) := \sin(x) \cdot \ln(x)$$

$$x := 0.1$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -1.293$$

Інтегрування, як і диференціювання, а також як і більшість інших математичних дій, організовано в Mathcad за принципом “як пишеться, так і вводиться”. Щоб обчислити визначений інтеграл, необхідно ввести звичну математичну форму в документ за допомогою панелі **Вычисления**, на якій натиснути кнопку зі значком інтеграла або введенням з клавіатури комбінації клавіш «**Shift + 7**». В результаті з’явиться символ інтеграла з декількома місцезаповнювачами, в які необхідно ввести нижню та верхню межі інтегрування, підінтегральну функцію та змінну інтегрування. Щоб отримати результат інтегруван-

ня, необхідно ввести знак рівності або символічної рівності. В першому випадку інтегрування буде виконано числовим методом, а в другому – у випадку успішного результату, буде знайдено точне значення інтегралу за допомогою символічного процесора Mathcad. Нижче наведено приклад чисельного та символічного обчислення визначеного інтегралу

$$\int_0^{\pi} \exp(-x^2) dx = 0.886$$

$$\int_0^{\pi} \exp(-x^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erf}(\pi) \cdot \pi^{\frac{1}{2}} = 0.886$$

Задача знаходження первісної пов'язана з пошуком функції, похідна від якої дорівнює підінтегральній функції. Розв'язок цієї задачі повністю покладено на символічний процесор Mathcad.

Для того, щоб аналітично проінтегрувати деяку функцію, необхідно ввести з панелі **Вычисления** символ неозначеного інтегралу, заповнити місця-заповнювачі та ввести знак символічної рівності \rightarrow . Справа від введеного виразу з'явиться його аналітичний результат. Якщо ж функцію не вдалося проінтегрувати, то буде продубльовано введений вираз. Приклад аналітичного обчислення неозначеного інтегралу матиме вигляд

$$\int \exp(-a \cdot x^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

Для обчислення неозначеного інтегралу від деякого виразу за визначеною змінною за допомогою меню, необхідно виділити у виразі цю змінну та вибрати команду **Символика** \rightarrow **Переменная** \rightarrow **Интегрировать**.

8.14. Знаходження екстремумів функції та ряду

У системі Mathcad є ряд засобів для знаходження екстремумів як послідовностей, так і функцій: **max**, **min**, **maximize**, **minimize** (рис.).

Функції **max** і **min** використовуються для знаходження відповідно максимального та мінімального значення ряду, заданого у вигляді вектора. Приклад виконання цих функцій наведений на рис.

Якщо ж виникає необхідність знайти мінімуми та максимуми функції, заданої аналітично, слід користуватися функціями **minimize** та **maximize**. Формат їх запису наступний:

minimize(f,x), **maximize**(f,x), де f – функція, що досліджується на екстремум, x – аргумент відповідної функції. Наприклад (рис.)

Mathcad - [Безымянный:1]

Мой веб-узел | Go | [Icons] | Normal | Arial | 10 | B I U [Icons] | x² x₂

Завдання. Знайти мінімальний та максимальний елемент заданого вектора A

Розв'язання.

1. Задамо вектор A довільних значень

$$A := \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.5 \\ 12.7 \\ -9.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

2. Визначимо значення мінімального і максимального елемента вектора A

$$\min(A) = -9.6 \quad \max(A) = 12.7$$

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО NUM Страница 1

Рис. 8.28. Знаходження мінімального та максимального елемента ряду

Mathcad - [Безымянный:1]

Мой веб-узел | Go | [Icons] | Normal | Arial | 10 | B I U [Icons] | x² x₂

Завдання. Знайти максимум функції $f(x) := -x^2 - x - 1$

Розв'язання.

1. Побудуємо графік зазначеної функції щоб оцінити початкове наближення

2. Задамо початкове наближення та визначимо максимум за допомогою функції **maximize**

$$x := 0$$

$$\text{maximize}(f, x) = -0.5$$

The graph shows a downward-opening parabola $f(x) = -x^2 - x - 1$ plotted on a grid. The x-axis ranges from -10 to 10, and the y-axis ranges from -150 to 0. The curve peaks at approximately $x = -0.5$ and $f(x) = -0.5$.

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО NUM Страница 1

Рис. 8.29. Знаходження максимуму функції

8.15. Програмування в системі Mathcad

Пакет Mathcad надає користувачу можливість створювати невеликі програмні блоки у документі. У більшості випадків цих можливостей достатньо для розв'язання типових інженерних задач, зокрема задач теорії механізмів і машин.

Реалізувати той чи інший алгоритм обчислення в пакеті Mathcad можна двома способами:

- вставляючи відповідні оператори чи функції в текст документа Mathcad. Такий спосіб називається програмуванням у тексті документа;

- використовуючи так звані програми-функції, що містять конструкції, багато в чому подібні до конструкцій таких мов як C# чи VisualBasic: оператори присвоєння, оператори циклів, умовні оператори і т.д. Написання програм-функцій у Mathcad дозволяє розв'язати задачі, що неможливо розв'язати, використовуючи тільки оператори і функції Mathcad. Такий спосіб називається програмуванням за допомогою програми-функції.

Кожна програма-функція Mathcad має *оригінальне ім'я*, використовуючи яке здійснюється звернення до неї. Через це ж ім'я “повертається” у робочий документ результат виконання програми-функції.

Після імені програми-функції записується *список формальних параметрів*, взятий у круглі дужки. Через формальні параметри “всередину” програми-функції передаються дані, необхідні для виконання обчислень всередині програми. Як формальні параметри можуть використовуватися імена простих змінних, масивів і функцій. Формальні параметри відокремлюються один від одного комами.

Тіло програми-функції включає будь-яке число операторів локальних операторів присвоєння, умовних операторів і операторів циклу, а також виклик інших програм-функцій і функцій користувача.

Алгоритм опису програми-функції Mathcad наступний:

- ввести ім'я програми-функції і список формальних параметрів (якщо такі є), взятий у круглі дужки;

- ввести оператор присвоєння на екрані відображається як “:=”;

- відкрити панель інструментів **Программирование** і натиснути на кнопку «**Add line**». На екрані з'явиться вертикальна лінія і вертикальний стовпець із двома полями вводу для введення операторів, що створюють тіло програми-функції.

Для присвоєння всередині програми значення якій-небудь змінній, використовується так називаний локальний оператор присвоєння, що має вигляд:

< ім'я - змінної > ← < вираз >

Для виконання програми-функції необхідно звернутися до імені програми-функції з зазначенням *списку фактичних параметрів* (якщо в описі програми присутній список формальних параметрів), тобто

<ім'я програми> (список фактичних параметрів)

Фактичні параметри вказують, при яких конкретних значеннях здійснюються обчислення в тілі програми. Фактичні параметри відокремлюються один від одного комами. Очевидно, що між фактичними і формальними параметрами повинна бути *відповідність за кількістю, порядком і типом*.

Якщо формальним параметром є проста змінна, то в якості фактичного може використовуватися константа, змінна, арифметичний вираз. Якщо формальним параметром є вектор чи матриця, то фактичним повинен бути вектор чи матриця. Якщо формальним параметром є ім'я вбудованої функції чи іншої програми, то і фактичним параметром повинний бути той самий об'єкт.

Звернення до програми-функції повинне знаходитися після опису програми-функції, *до моменту звернення фактичні параметри повинні бути визначені*.

У блоці програмування можуть використовуватися різноманітні умовні та ітераційні оператори, оператори виходу з циклів, обробки помилок тощо. Наведемо деякі з них.

Умовний оператор **if** дозволяє проводити в блоці обчислення при виконанні умови, що записується після оператора. Формат запису цього оператора наступний

<вираз (сукупність виразів)> if <умова>

Оператор **otherwise** використовується в поєднанні з оператором **if** і дозволяє записувати в програмному блоці сукупність виразів, що виконуватимуться при невиконанні умови, яка записана після оператора **if**.

Оператор циклу з передумовою **while** виконує певну послідовність операцій до тих пір, поки виконуватиметься умова, що записана після слова **while**. Синтаксис цього оператора такий

<вираз (сукупність виразів)> while <умова>

Оператор циклу **for** з параметром призначений для виконання ітерацій, кількість яких наперед відома. Змінюваний параметр циклу задається у вигляді ранжованої змінної, а цикл виконуватиметься стільки разів, скільки дискретних значень має ця змінна.

В рядку після **for** в першому маркері задається ім'я параметра, а в другому – діапазон його зміни. В прямокутнику під **for** треба задати дії, які необхідно циклічно повторювати.

Деколи при виконанні циклів виникає необхідність пропустити деяку ітерацію, чи вийти з оператора циклу взагалі. Для таких випадків передбачені оператори **break** та **continue**. Оператор **break** перериває виконання циклу **while** чи **for** і дає можливість продовжити виконання програмного блоку з наступних після перерваного циклу операторів. Оператор **continue** перериває виконання дій в поточній ітерації і переходить до початку наступної.

Якщо ж під час виконання програмного блоку передбачається виникнення помилки (наприклад, ділення на нуль, вихід за межі діапазону ранжованої змінної тощо) варто скористатись оператором **on error**. В лівому від оператора маркері вказується величина, що повертається з програмного блоку при виникненні помилки, а в правому – величина, що повертається при успішному обчисленні.

При створенні програмних блоків в Mathcad слід мати на увазі, що:

- з програмного блоку в документ повертається значення лише тієї величини, що стоїть останньою, тому при необхідності виведення декількох величин з програмного блоку треба формувати вектор чи матрицю, які містять необхідні параметри, і записувати їх ім'я в останньому маркері програмного блоку;

- програмні оператори треба викликати шляхом натискання необхідної клавіші на панелі інструментів, а не набираючи їх з клавіатури;

- всі зміні, що вводяться в тілі програмного блоку, є локальними, тому використовувати їх значення можна лише всередині програмного блоку, а не в основному Mathcad-документі.

Закони руху вихідної ланки (штовхача) кулачкових механізмів

1. Синусоїдний закон S_0

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_K , швидкості b_K , прискорення c_K :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_K(\varphi) := k(\varphi) - \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot k(\varphi))}{2 \cdot \pi} \quad b_K(\varphi) := 1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot k(\varphi))$$

$$b_K(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_K(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_K(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_K(\varphi) := 2 \cdot \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k(\varphi))$$

2. Несиметричне синусоїдне прискорення HCu ($0 < u < 1$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad u := 0.3 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_K , швидкості b_K , прискорення c_K :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi_B - \varphi}{\varphi_B} & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_B < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := 1 - \cos\left(\pi \frac{k(\varphi)}{u}\right) \qquad b_{k2}(\varphi) := 1 - \cos\left(\pi \frac{1 - k(\varphi)}{1 - u}\right)$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases}
 \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := \frac{\pi}{u} \cdot \sin\left(\pi \frac{k(\varphi)}{u}\right) \qquad c_{k2}(\varphi) := \frac{-\pi}{1 - u} \cdot \sin\left(\pi \frac{1 - k(\varphi)}{1 - u}\right)$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases}
 \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{cases}$$

**3. Діаграма прискорень - симетрична гілка
оберненої квадратної параболи СП₀**

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \qquad \varphi_B := 120\text{deg} \qquad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \qquad \varphi_H := 90\text{deg} \qquad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi_B - \varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_{\text{Н}}} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_{\text{Н}}} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_B}{2} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$a_{k1}(\varphi) := 8(k(\varphi)^3 - k(\varphi)^4) \quad a_{k2}(\varphi) := 8[(1 - k(\varphi))^3 - (1 - k(\varphi))^4]$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := 24k(\varphi)^2 - 32k(\varphi)^3 \quad b_{k2}(\varphi) := 24(1 - k(\varphi))^2 - 32(1 - k(\varphi))^3$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_{k1}(\varphi) := 48k(\varphi)^2 - 96k(\varphi)^3 \quad c_{k2}(\varphi) := 48(1 - k(\varphi))^2 - 96(1 - k(\varphi))^3$$

$$c_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

4. Закон Неклютіна mпM (0 < m < n, m < n < 0,5)

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120 \text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40 \text{deg} \quad \varphi_H := 90 \text{deg} \quad m := 0.125 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := 4 \frac{\pi}{\pi - 4m \cdot \pi + 8m} \quad C = 4.888$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq (0.5 - m) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } (0.5 - m) \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (0.5 + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k6}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k6}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + m \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + m \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + (0.5 + m) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (0.5 + m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - m) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := 2C \cdot \frac{m}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot k(\varphi)}{2m}\right) \right) \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{[(2 - \pi) \cdot m]}{\pi} + k(\varphi) \right]$$

$$b_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{m}{\pi} \cdot (\pi - 1) + 2 \cdot \frac{m}{\pi} \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot (0.5 - k(\varphi))}{2m}\right] \right]$$

$$b_{k4}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{m}{\pi} \cdot (\pi - 1) + 2 \cdot \frac{m}{\pi} \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot [0.5 - (1 - k(\varphi))]}{2m}\right] \right]$$

$$b_{k5}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{[(2 - \pi) \cdot m]}{\pi} + (1 - k(\varphi)) \right] \quad b_{k6}(\varphi) := 2C \cdot \frac{m}{\pi} \cdot \left[1 - \cos\left[\frac{\pi \cdot (1 - k(\varphi))}{2m}\right] \right]$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq (0.5 - m) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) & \text{if } (0.5 - m) \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \end{cases}$$

Result $\leftarrow b_{k4}(\varphi)$ if $\frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m)$
 Result $\leftarrow b_{k5}(\varphi)$ if $\varphi_B \cdot (0.5 + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m)$
 Result $\leftarrow b_{k6}(\varphi)$ if $\varphi_B \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B$
 Result $\leftarrow 0$ if $\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc}$
 Result $\leftarrow -b_{k6}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + m \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow -b_{k5}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + m \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow -b_{k4}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + [1 - (0.5 - m)] \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow -b_{k2}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + [1 - (0.5 - m)] \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + (1 - m) \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow -b_{k1}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + (1 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + \varphi_H$
 Result $\leftarrow 0$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2 \cdot m}\right) \quad c_{k2}(\varphi) := C \quad c_{k3}(\varphi) := C \cdot \sin\left[\frac{\pi \cdot (0.5 - k(\varphi))}{2m}\right]$$

$c_k(\varphi) :=$ Result $\leftarrow c_{k1}(\varphi)$ if $0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B$
 Result $\leftarrow c_{k2}(\varphi)$ if $m \cdot \varphi_B < \varphi \leq (0.5 - m) \cdot \varphi_B$
 Result $\leftarrow c_{k3}(\varphi)$ if $(0.5 - m) \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2}$
 Result $\leftarrow c_{k3}(\varphi)$ if $\frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m)$
 Result $\leftarrow -c_{k2}(\varphi)$ if $\varphi_B \cdot (0.5 + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m)$
 Result $\leftarrow c_{k1}(\varphi)$ if $\varphi_B \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B$
 Result $\leftarrow 0$ if $\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc}$
 Result $\leftarrow c_{k1}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + m \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow -c_{k2}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + m \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow c_{k3}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + \frac{\varphi_H}{2}$
 Result $\leftarrow c_{k3}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 + m) \cdot \varphi_H$
 Result $\leftarrow c_{k2}(\varphi)$ if $\varphi_B + \varphi_{dc} + (0.5 + m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{dc} + (1 - m) \cdot \varphi_H$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - m) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

5. Похила синусоїда C_q ($-0,5 < q < 0,0 < \varphi < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120 \text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40 \text{deg} \quad \varphi_H := 90 \text{deg} \quad q := 0.2 \quad x := 0 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості v_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$k_1(\varphi) := \text{root} \left(x - k(\varphi) - \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot x), x \right)$$

$$a_k(\varphi) := k_1(\varphi) - \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot k_1(\varphi))}{2 \cdot \pi}$$

$$B(\varphi) := \frac{1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot k_1(\varphi))}{1 - q \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k_1(\varphi))}$$

$$b_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow B(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -B(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_k(\varphi) := \frac{2 \cdot \pi \cdot (1 - q) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k_1(\varphi))}{[1 - q \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot k_1(\varphi)))]^3}$$

6. Тригонометричний закон Тіра KS_q ($0 < q < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120 \text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40 \text{deg} \quad \varphi_H := 90 \text{deg} \quad q := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості v_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$C := (0.17566 - 0.06978 \cdot q - 0.10794q^2)^{-1}$$

$$a_{k1}(\varphi) := \frac{C}{\pi} \cdot 2q \cdot \left(k(\varphi) - 2 \frac{q}{\pi} \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2q} \right) \right)$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\begin{array}{l} 0.13662 \cdot k(\varphi) \cdot q - 0.15529 \cdot q^2 + \frac{k(\varphi)^2}{4} \dots \\ + 0.05066 \cdot (0.5 - q)^2 \cdot \left[1 - \cos \left[\pi \cdot \frac{(k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right] \end{array} \right]$$

$$a_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\begin{array}{l} 0.13662 \cdot (1 - k(\varphi)) \cdot q - 0.15529 \cdot q^2 + \frac{(1 - k(\varphi))^2}{4} \dots \\ + 0.05066 \cdot (0.5 - q)^2 \cdot \left[1 - \cos \left[\pi \cdot \frac{(1 - k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right] \end{array} \right]$$

$$a_{k4}(\varphi) := \frac{C}{\pi} \cdot 2q \cdot \left(1 - k(\varphi) - 2 \frac{q}{\pi} \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2q} \right) \right)$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq q \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } q \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - q) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1 - q) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + q \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + q \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - q) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - q) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := \frac{C}{\pi} \cdot 2q \cdot \left(1 - \cos \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2q} \right) \right)$$

$$b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[2 \cdot \frac{q}{\pi} + \frac{k(\varphi) - q}{2} + \frac{(0.5 - q)}{2\pi} \cdot \sin \left[\pi \cdot \frac{(k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right]$$

$$b_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[2 \cdot \frac{q}{\pi} + \frac{1 - k(\varphi) - q}{2} + \frac{(0.5 - q)}{2\pi} \cdot \sin \left[\pi \cdot \frac{(1 - k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right]$$

$$b_{k4}(\varphi) := \frac{C}{\pi} \cdot 2q \cdot \left(1 - \cos \left(\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2q} \right) \right)$$

$$b_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq q \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \text{ if } q \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - q) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1 - q) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + q \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + q \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - q) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - q) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2q} \right) \quad c_{k3}(\varphi) := \frac{C}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi \cdot (1 - k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right]$$

$$c_{k2}(\varphi) := \frac{C}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi \cdot (k(\varphi) - q)}{0.5 - q} \right] \right] \quad c_{k4}(\varphi) := C \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2q} \right)$$

$$c_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq q \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } q \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k3}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - q) \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1 - q) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} + q \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} + q \cdot \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} + \varphi_H \cdot (1 - q) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} + (1 - q) \cdot \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

7. Закон Шуна Ш

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{ДС} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k швидкості b_k прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{ДС} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{ДС})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{ДС} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{ДС} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$a_k(\varphi) := 10k(\varphi)^3 - 15k(\varphi)^4 + 6k(\varphi)^5 \quad b_k(\varphi) := 30(k(\varphi)^2 - 2k(\varphi)^3 + k(\varphi)^4)$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := 60(k(\varphi) - 3k(\varphi)^2 + 2k(\varphi)^3)$$

8. Закон Саввіна 2.9

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := 18k(\varphi)^3 - 55k(\varphi)^4 + 78k(\varphi)^5 - 56k(\varphi)^6 + 16k(\varphi)^7$$

$$b_k(\varphi) := 54 \cdot k(\varphi)^2 - 220 \cdot k(\varphi)^3 + 390 \cdot k(\varphi)^4 - 336 \cdot k(\varphi)^5 + 112 \cdot k(\varphi)^6$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := 108 \cdot k(\varphi) - 660 \cdot k(\varphi)^2 + 1560 \cdot k(\varphi)^3 - 1680 \cdot k(\varphi)^4 + 672 \cdot k(\varphi)^5$$

9. Закон Саввіна 2.12

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$a_{k1}(\varphi) := 23k(\varphi)^3 - 80k(\varphi)^4 + 123k(\varphi)^5 - 91k(\varphi)^6 + 26k(\varphi)^7$$

$$a_{k2}(\varphi) := 23(1 - k(\varphi))^3 - 80(1 - k(\varphi))^4 + 123(1 - k(\varphi))^5 - 91(1 - k(\varphi))^6 + 26(1 - k(\varphi))^7$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \end{array} \right.$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_k(\varphi) := 138 \cdot k(\varphi) - 960 \cdot k(\varphi)^2 + 2460 \cdot k(\varphi)^3 - 2730 \cdot k(\varphi)^4 + 1092 \cdot k(\varphi)^5$$

10. Трапецідне прискорення mn ($0 < m < m+n, m < m+n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad m := 0.1 \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} , швидкості b_{k1} , прискорення c_{k1} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$C := \frac{3}{0.5(1-m) + n - 2m \cdot n - n^2} \quad C = 5.263$$

$$a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^3}{6 \cdot m} \quad a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(k(\varphi) - m)}{2} \cdot k(\varphi) \right]$$

$$a_{k3}(\varphi) := \frac{C}{6} \cdot \left[2n^2 + m \cdot n + m + n - 0.25 + (1.5 + 3n) \cdot (k(\varphi) - m - n) + \frac{(0.5 - k(\varphi))^3}{0.5 - m - n} \right]$$

$$a_{k4}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^3}{6 \cdot m} \quad a_{k5}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(1 - k(\varphi) - m)}{2} \cdot (1 - k(\varphi)) \right]$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m+n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (m+n) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m-n) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1-m-n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1-m) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot m \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (m+n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (m+n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-m-n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-m-n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2 \cdot m} \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left(k(\varphi) - \frac{m}{2} \right) \quad b_{k3}(\varphi) := \frac{C}{2} \cdot \left[0.5 + n - \frac{(0.5 - k(\varphi))^2}{0.5 - m - n} \right]$$

$$b_{k4}(\varphi) := C \cdot \left(1 - k(\varphi) - \frac{m}{2} \right) \quad b_{k5}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^2}{2 \cdot m}$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m - n) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - b_{k2}[\varphi - \varphi_B \cdot (1 - m - n)] & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m - n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot m \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)}{m} \quad c_{k2}(\varphi) := C \quad c_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{(0.5 - k(\varphi))}{0.5 - m - n} \right] \quad c_{k4}(\varphi) := C \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{m}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m - n) \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m - n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot m \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

11. Степеневий закон Тіра $mn(u)$ ($0 < m < m+n, m < m+n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad m := 0.1 \quad n := 0.2 \quad u := 1.75 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення $a_{k\cdot}$ швидкості $b_{k\cdot}$ прискорення $c_{k\cdot}$:

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{u + 2}{2 \cdot (0.5 - m - n)^2 + \left(n + 0.5m - 2m \cdot n - \frac{2}{3}m^2 - n^2 \right) \cdot (u + 2)}$$

$$a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^3}{6 \cdot m} \quad a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(k(\varphi) - m)}{2} \cdot k(\varphi) \right]$$

$$A(\varphi) := \frac{[(0.5 - m - n)^{u+2} - (0.5 - k(\varphi))^{u+2}]}{(0.5 - m - n)^u \cdot (u + 1) \cdot (u + 2)}$$

$$a_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(m+n) \cdot n}{2} + \left[\frac{m}{2} + n + \frac{(0.5 - m - n)}{u + 1} \right] \cdot (k(\varphi) - m - n) - A(\varphi) \right]$$

$$B(\varphi) := \frac{[(0.5 - m - n)^{u+2} - [0.5 - (1 - k(\varphi))]^{u+2}]}{(0.5 - m - n)^u \cdot (u + 1) \cdot (u + 2)}$$

$$a_{k4}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(m+n) \cdot n}{2} + \left[\frac{m}{2} + n + \frac{(0.5 - m - n)}{u + 1} \right] \cdot (1 - k(\varphi) - m - n) - B(\varphi) \right]$$

$$a_{k5}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m^2}{6} + \frac{(1 - k(\varphi) - m)}{2} \cdot (1 - k(\varphi)) \right] \quad a_{k6}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^3}{6 \cdot m}$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m - n) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m - n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k6}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (1 - m) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k6}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot m \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k5}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (m + n) \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k4}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2 \cdot m} \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left(k(\varphi) - \frac{m}{2} \right)$$

$$b_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m}{2} + n + \frac{(0.5 - m - n)^{u+1} - (0.5 - k(\varphi))^{u+1}}{(0.5 - m - n)^u \cdot (u + 1)} \right]$$

$$b_{k4}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{m}{2} + n + \frac{(0.5 - m - n)^{u+1} - (-0.5 + k(\varphi))^{u+1}}{(0.5 - m - n)^u \cdot (u + 1)} \right]$$

$$b_{k5}(\varphi) := C \cdot \left(1 - k(\varphi) - \frac{m}{2} \right) \quad b_{k6}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^2}{2 \cdot m}$$

$$\begin{aligned}
 b_k(\varphi) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \text{ if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m+n) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (m+n) \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k4}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m-n) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k5}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1-m-n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k6}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1-m) < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k6}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot m \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k5}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (m+n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (m+n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-m) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-m-n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-m) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)}{m} \quad c_{k2}(\varphi) := C \quad c_{k3}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{(0.5 - k(\varphi))}{0.5 - m - n} \right]^u$$

$$c_{k4}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{[0.5 - (1 - k(\varphi))]}{0.5 - m - n} \right]^u \quad c_{k5}(\varphi) := -C \quad c_{k6}(\varphi) := C \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{m}$$

$$\begin{aligned}
 c_k(\varphi) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq m \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } m \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (m+n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (m+n) \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m-n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k5}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1-m-n) < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1-m) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow -c_{k6}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (1 - m) < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow -c_{k6}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot m \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k5}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot m < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (m + n) \\
 \text{Result} \leftarrow -c_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (m + n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - m - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \\
 \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - m) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{array}$$

12. Синусоїдне триділянкове прискорення ЗСп ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k^*} швидкості b_{k^*} прискорення c_{k^*} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} .. 2\pi$$

$$k(\varphi) := \begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi
 \end{array}$$

$$C := \frac{\pi}{2n \cdot (1 - n)} \quad a_{k1}(\varphi) := n \cdot \frac{C}{\pi} \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{\pi} \cdot \sin\left(\pi \frac{k(\varphi)}{n}\right) \right)$$

$$a_{k2}(\varphi) := \frac{2k(\varphi) - n}{2(1 - n)} \quad a_{k3}(\varphi) := n \cdot \frac{C}{\pi} \cdot \left(1 - k(\varphi) - \frac{n}{\pi} \cdot \sin\left(\pi \frac{1 - k(\varphi)}{n}\right) \right)$$

$$a_k(\varphi) := \begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\
 & \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \quad \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\
 & \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\
 & \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\
 & \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\
 & \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\
 & \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\
 & \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned}$$

$$b_{k1}(\varphi) := n \cdot \frac{C}{\pi} \cdot \left(1 - \cos \left(\pi \frac{k(\varphi)}{n} \right) \right) \quad b_{k2}(\varphi) := \frac{1}{1 - n}$$

$$\begin{aligned}
 b_k(\varphi) := & \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\
 & \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\
 & \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\
 & \text{Result} \leftarrow b_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \quad \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\
 & \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\
 & \text{Result} \leftarrow -b_{k1}[\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})] \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\
 & \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\
 & \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\
 & \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\
 & \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot \sin \left(\pi \frac{k(\varphi)}{n} \right) \quad c_{k2}(\varphi) := 0$$

$$c_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

13. Несиметричне триділянкове синусоїдне прискорення ЗСпм

Вихідні дані:

$$\varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad m := 0.5 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} швидкості b_{k1} прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C_1 := \frac{\pi}{n \cdot (1 + m)} \quad C_1 = 10.472 \quad C_2 := \frac{\pi}{(1 - n - m) \cdot (1 + m)} \quad C_2 = 6.981$$

$$a_{k1}(\varphi) := C_1 \cdot \frac{n}{\pi} \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{\pi} \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{n} \right) \right) \quad a_{k2}(\varphi) := \frac{2k(\varphi) - n}{1 + m}$$

$$a_{k3}(\varphi) := 1 + C_2 \cdot \frac{1 - n - m}{\pi} \cdot \left[1 - k(\varphi) - \frac{1 - n - m}{\pi} \cdot \sin \left[\pi \frac{(1 - k(\varphi))}{(1 - n - m)} \right] \right]$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n + m) \\ \text{Result} \leftarrow 2 - a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (n + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 2 - a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C_1 \cdot \frac{n}{\pi} \cdot \left(1 - \cos \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{n} \right) \right) \quad b_{k2}(\varphi) := \frac{2}{1 + m}$$

$$b_{k3}(\varphi) := C_2 \cdot \frac{1 - n - m}{\pi} \cdot \left[1 - \cos \left[\pi \frac{(1 - k(\varphi))}{(1 - n - m)} \right] \right]$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n + m) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (n + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C_1 \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{n} \right) \quad c_{k3}(\varphi) := -C_2 \cdot \sin \left[\pi \frac{(1 - k(\varphi))}{(1 - n - m)} \right]$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n + m) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (n + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

14. Стале прискорення 0050

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k швидкості b_k прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi_B - \varphi}{\varphi_B} \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

$$a_k(\varphi) := \left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

$$b_{k1}(\varphi) := 4k(\varphi) \quad b_{k2}(\varphi) := 4(1 - k(\varphi)) \quad c_k(\varphi) := 4$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow 4 \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -4 \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -4 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 4 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

15. Несиметричне стале прискорення СПи ($0 < u < 1$)

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad u := 0.3 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi_B - \varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_{\text{Н}}} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_{\text{Н}}} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_B < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} < \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{array}$$

$$a_{k1}(\varphi) := \frac{k(\varphi)^2}{u} \qquad a_{k2}(\varphi) := 1 - \frac{(1 - k(\varphi))^2}{1 - u}$$

$$a_k(\varphi) := \begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_{\text{Н}} \\
 \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_{\text{Н}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} < \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{array}$$

$$b_{k1}(\varphi) := 2 \frac{k(\varphi)}{u} \qquad b_{k2}(\varphi) := \frac{2(1 - k(\varphi))}{1 - u}$$

$$b_k(\varphi) := \begin{array}{l}
 \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\
 \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_{\text{Н}} \\
 \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_{\text{Н}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \\
 \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_{\text{Н}} \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi
 \end{array}$$

$$c_{k1}(\varphi) := \frac{2}{u} \qquad c_{k2}(\varphi) := \frac{2}{1 - u}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

16. Рівноспадне прискорення 0000

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k швидкості b_k прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} .. 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := 3k(\varphi)^2 - 2k(\varphi)^3 \quad b_k(\varphi) := 6k(\varphi) \cdot (1 - k(\varphi)) \quad c_k(\varphi) := 6 \cdot (1 - 2k(\varphi))$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

17. Несиметричне рівноспадне прискорення РСu ($0 < u < 1$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad u := 0.3 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} , швидкості b_{k1} , прискорення c_{k1} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_{k1}(\varphi) := 3 \frac{k(\varphi)^2}{2u} - \frac{k(\varphi)^3}{2u^2} \quad a_{k2}(\varphi) := 1 - 3 \frac{(1 - k(\varphi))^2}{[2(1 - u)]} + \frac{(1 - k(\varphi))^3}{[2(1 - u)^2]}$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := 3 \frac{k(\varphi)}{u} - \frac{3k(\varphi)^2}{2u^2} \quad b_{k2}(\varphi) := 3 \cdot \frac{(1 - k(\varphi))}{1 - u} - \frac{3 \cdot (1 - k(\varphi))^2}{[2 \cdot (1 - u)^2]}$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := \frac{3}{u} - 3 \cdot \frac{k(\varphi)}{u^2} \quad c_{k2}(\varphi) := -3 \frac{(k(\varphi) - u)}{1 - u^2}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1 - u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

18. Косинусоїдне прискорення К

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := \left(\frac{1 - \cos(\pi k(\varphi))}{2} \right) \quad b_k(\varphi) := \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\pi k(\varphi)) \quad c_k(\varphi) := \frac{\pi^2}{2} \cdot \cos(\pi \cdot k(\varphi))$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

19. Несиметричне косинусоїдне прискорення K_u ($0 < u < 1$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad u := 0.3 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} , швидкості b_{k1} , прискорення c_{k1} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_{k1}(\varphi) := u \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2 \cdot u}\right) \right) \quad a_{k2}(\varphi) := u + (1 - u) \cdot \cos\left[\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2 \cdot (1 - u)}\right]$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + (1 - u) \cdot \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{k(\varphi)}{2u}\right) \quad b_{k2}(\varphi) := \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left[\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2 \cdot (1 - u)}\right]$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_{k1}(\varphi) := \frac{\pi^2}{4u} \cdot \cos\left(\pi \frac{k(\varphi)}{2u}\right) \quad c_{k2}(\varphi) := \frac{-\pi^2}{4(1-u)} \cdot \cos\left[\pi \frac{1-k(\varphi)}{2(1-u)}\right]$$

$$c_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq u \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } u \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + (1-u) \cdot \varphi_H < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

20. Прискорення за прямокутною трапецією 00n ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{kj} швидкості b_{kj} прискорення c_{kj} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{3}{0.5 + n - n^2} \quad C = 4.545 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2} \quad a_{k3}(\varphi) := C \cdot \frac{(1-k(\varphi))^2}{2}$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{-(1 + 2n + 4n^2)}{24} + \frac{(0.5 + n)}{2} \cdot k(\varphi) + \frac{(0.5 - k(\varphi))^3}{6 \cdot (0.5 - n)} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot k(\varphi) \quad b_{k3}(\varphi) := C \cdot (1 - k(\varphi)) \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{(0.5 + n)}{2} - \frac{(0.5 - k(\varphi))^2}{2 \cdot (0.5 - n)} \right]$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \quad c_{k2}(\varphi) := C \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДC}} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi - \varphi_B - \varphi_{DC}) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

21. Закон Неклютіна для руху без вистую nM (0 < n < 0,5)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 240\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 0\text{deg} \quad \varphi_H := 120\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} швидкості b_k прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{1}{0.184 \cdot (n - n^2) + 0.204} \quad C = 4.284 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2}$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[n \cdot k(\varphi) - \frac{n^2}{2} + 4 \left[\frac{(0.5 - n)}{\pi} \right]^2 \cdot \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right) \right) \right]$$

$$a_{k3}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^2}{2}$$

$$a_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(\varphi_B - \varphi) \text{ if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot k(\varphi) \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left(n + \frac{1 - 2n}{\pi} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right) \right)$$

$$b_{k3}(\varphi) := C \cdot (1 - k(\varphi))$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi_B - \varphi) \text{ if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \quad c_{k2}(\varphi) := C \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right) \quad +$$

$$c_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi_B - \varphi) \text{ if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi - \varphi_B - \varphi_{\text{дс}}) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{дс}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

20. Прискорення за прямокутною трапецією 00n ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{дс}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{3}{0.5 + n - n^2} \quad C = 4.545 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2} \quad a_{k3}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^2}{2}$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{-(1 + 2n + 4n^2)}{24} + \frac{(0.5 + n)}{2} \cdot k(\varphi) + \frac{(0.5 - k(\varphi))^3}{6 \cdot (0.5 - n)} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(\varphi_B - \varphi) \quad \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot k(\varphi) \quad b_{k3}(\varphi) := C \cdot (1 - k(\varphi)) \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{(0.5 + n)}{2} - \frac{(0.5 - k(\varphi))^2}{2 \cdot (0.5 - n)} \right]$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi_B - \varphi) \quad \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \quad c_{k2}(\varphi) := C \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n}$$

$$c_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi_B - \varphi) \text{ if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi - \varphi_B - \varphi_{DC}) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

21. Закон Неклютіна для руху без вистою nM (0 < n < 0,5)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 240 \text{deg} \quad \varphi_{DC} := 0 \text{deg} \quad \varphi_H := 120 \text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{1}{0.184 \cdot (n - n^2) + 0.204} \quad C = 4.284 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2}$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[n \cdot k(\varphi) - \frac{n^2}{2} + 4 \left[\frac{(0.5 - n)^2}{\pi} \right] \cdot \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right) \right) \right]$$

$$a_{k3}(\varphi) := C \cdot \frac{(1 - k(\varphi))^2}{2}$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot k(\varphi) \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left(n + \frac{1 - 2n}{\pi} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right) \right)$$

$$b_{k3}(\varphi) := C \cdot (1 - k(\varphi))$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \quad c_{k2}(\varphi) := C \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.5 - k(\varphi)}{0.5 - n} \right)$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq (1 - n) \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi_B - \varphi) & \text{if } (1 - n) \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow -c_{k1}(\varphi - \varphi_B - \varphi_{DC}) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

22. Стале триділянкове прискорення ЗПн ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_{k1} швидкості b_{k1} прискорення c_{k1} :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{1}{n - n^2} \quad C = 6.25 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \left(\frac{k(\varphi)^2}{2} \right) \quad a_{k2}(\varphi) := C \cdot n \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{2} \right)$$

$$a_{k3}(\varphi) := 1 - C \cdot \left[\frac{(1 - k(\varphi))^2}{2} \right] \quad a_{k4}(\varphi) := 1 - C \cdot n \cdot \left[(1 - k(\varphi)) - \frac{n}{2} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \text{ if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

22. Стале триділянкове прискорення ЗПп ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення $a_{k\varphi}$ швидкості $b_{k\varphi}$ прискорення $c_{k\varphi}$:

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{1}{n - n^2} \quad C = 6.25 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \left(\frac{k(\varphi)^2}{2} \right) \quad a_{k2}(\varphi) := C \cdot n \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{2} \right)$$

$$a_{k3}(\varphi) := 1 - C \cdot \left[\frac{(1 - k(\varphi))^2}{2} \right] \quad a_{k4}(\varphi) := 1 - C \cdot n \cdot \left[\left(1 - k(\varphi) \right) - \frac{n}{2} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \left| \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \text{ if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k4}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \end{array} \right.$$

22. Стале триділянкове прискорення ЗПп ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення $a_{k\text{}}$ швидкості $b_{k\text{}}$ прискорення $c_{k\text{}}$:

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$C := \frac{1}{n - n^2} \quad C = 6.25 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \left(\frac{k(\varphi)^2}{2} \right) \quad a_{k2}(\varphi) := C \cdot n \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{2} \right)$$

$$a_{k3}(\varphi) := 1 - C \cdot \left[\frac{(1 - k(\varphi))^2}{2} \right] \quad a_{k4}(\varphi) := 1 - C \cdot n \cdot \left[(1 - k(\varphi)) - \frac{n}{2} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \quad \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k4}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k4}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot k(\varphi) \quad b_{k2}(\varphi) := \frac{1}{1-n} \quad b_{k3}(\varphi) := C \cdot (1 - k(\varphi))$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(-\varphi + \varphi_B) & \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow C & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -C & \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -C & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-n) \\ \text{Result} \leftarrow C & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1-n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

23. Несиметричне триділянкове стале прискорення ЗПпт

$$(0 < n < n + m, n < n + m < 1)$$

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad m := 0.5 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$B := \frac{2}{1+m} \quad B = 1.333 \quad C_1 := \frac{2}{n \cdot (1+m)} \quad C_2 := \frac{2}{(1-n-m) \cdot (1+m)}$$

$$a_{k1}(\varphi) := C_1 \cdot \frac{k(\varphi)^2}{2} \quad a_{k2}(\varphi) := C_1 \cdot n \cdot \left(k(\varphi) - \frac{n}{2} \right) \quad a_{k3}(\varphi) := 1 - C_2 \cdot \frac{(1-k(\varphi))^2}{2}$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n+m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B \cdot (n+m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-n-m) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-n-m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1-n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C_1 \cdot k(\varphi) \quad b_{k2}(\varphi) := B \quad b_{k3}(\varphi) := C_2 \cdot (1 - k(\varphi))$$

$$\begin{aligned}
 b_k(\varphi) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n + m) \\ \text{Result} \leftarrow b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B \cdot (n + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k3}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right. \\
 c_k(\varphi) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow C_1 \text{ if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B \cdot (n + m) \\ \text{Result} \leftarrow -C_2 \text{ if } \varphi_B \cdot (n + m) \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow -C_2 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n - m) < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow C_1 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

24. Косинусоїдне триділянкове прискорення ЗКп ($0 < n < 0,5$)

Вихідні дані:

$$S_{\text{max}} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad n := 0.2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення $a_{\text{К}}$ швидкості $b_{\text{К}}$ прискорення $c_{\text{К}}$:

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 k(\varphi) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$B := \frac{\pi}{4n + \pi - 2n \cdot \pi} \quad B = 1.17 \quad C := \frac{\pi \cdot B}{2n} \quad C = 9.19$$

$$a_{k1}(\varphi) := 2n \cdot \frac{B}{\pi} \cdot \left(1 - \cos \left(\pi \frac{k(\varphi)}{2n} \right) \right) \quad a_{k2}(\varphi) := B \cdot \left(2 \frac{n}{\pi} - n + k(\varphi) \right)$$

$$a_{k4}(\varphi) := 1 - B \cdot \left(2 \frac{n}{\pi} - n + -1 + k(\varphi) \right)$$

$$a_{k3}(\varphi) := 1 - 2 \cdot n \cdot \frac{B}{\pi} \cdot \left[1 - \cos \left[\pi \cdot \frac{(1 - k(\varphi))}{2 \cdot n} \right] \right]$$

$$a_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \quad \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \quad \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k3}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \quad \text{if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$b_{k1}(\varphi) := B \cdot \sin \left(\pi \frac{k(\varphi)}{2n} \right) \quad b_{k2}(\varphi) := B \quad b_{k3}(\varphi) := B \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2 \cdot n} \right)$$

$$b_k(\varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) \quad \text{if } 0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) \quad \text{if } \frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow b_{k1}(-\varphi + \varphi_B) \quad \text{if } \varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B \end{array} \right.$$

```

Result ← 0 if  $\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC}$ 
Result ←  $-b_{k3}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n$ 
Result ←  $-b_{k2}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2}$ 
Result ←  $-b_{k2}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n)$ 
Result ←  $-b_{k1}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H$ 
Result ← 0 if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$ 

```

$$c_{k1}(\varphi) := C \cos\left(\pi \frac{k(\varphi)}{2n}\right) \quad c_{k2}(\varphi) := 0 \quad c_{k3}(\varphi) := C \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{1 - k(\varphi)}{2 \cdot n}\right)$$

```

c_k(\varphi) := Result ← c_{k1}(\varphi) if  $0 \leq \varphi \leq n \cdot \varphi_B$ 
Result ← 0 if  $n \cdot \varphi_B < \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2}$ 
Result ← 0 if  $\frac{\varphi_B}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B - n \cdot \varphi_B$ 
Result ←  $-c_{k3}(\varphi)$  if  $\varphi_B - n \cdot \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B$ 
Result ← 0 if  $\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC}$ 
Result ←  $-c_{k3}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n$ 
Result ← 0 if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot n \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2}$ 
Result ← 0 if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n)$ 
Result ←  $c_{k1}(\varphi)$  if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \cdot (1 - n) \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H$ 
Result ← 0 if  $\varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$ 

```

25. Прискорення, описана безперервною функцією $c_k = C[1 - (2k)^u]$

$$(0 < u < 0,5) \quad +$$

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 40\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad u := 2 \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$C := 4 \frac{u^2 + 3u + 2}{u^2 + 3u} \quad C = 4.8 \quad a_{k1}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{k(\varphi)^2}{2} - \frac{2^u \cdot k(\varphi)^{(u+2)}}{(1+u) \cdot (u+2)} \right]$$

$$a_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[\frac{(1 - k(\varphi))^2}{2} - \frac{2^u \cdot (1 - k(\varphi))^{(u+2)}}{(1+u) \cdot (u+2)} \right]$$

$$a_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - a_{k2}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow a_{k1}(\varphi) & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$b_{k1}(\varphi) := C \cdot \left[k(\varphi) - \frac{2^u \cdot k(\varphi)^{(u+1)}}{1+u} \right] \quad b_{k2}(\varphi) := C \cdot \left[1 - k(\varphi) - \frac{2^u \cdot (1 - k(\varphi))^{u+1}}{1+u} \right]$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_{k1}(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow b_{k2}(\varphi) & \text{if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow -b_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -b_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

$$c_{k1}(\varphi) := C \cdot [1 - (2k(\varphi))^u] \quad c_{k2}(\varphi) := C \cdot [1 - [2(1 - k(\varphi))]^u]$$

$$c_k(\varphi) := \left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_B}{2} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) \text{ if } \frac{\varphi_B}{2} < \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow -c_{k2}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi < \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \\ \text{Result} \leftarrow c_{k1}(\varphi) \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \frac{\varphi_H}{2} \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H < \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

26. Закон Стоддарта Π_6

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{DC} := 0\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \left. \begin{array}{l} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} \text{ if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 \text{ if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{DC})}{\varphi_H} \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 \text{ if } \varphi_B + \varphi_{DC} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{array} \right\}$$

$$a_k(\varphi) := 6.098 k(\varphi)^3 - 20.780 k(\varphi)^5 + 26.731 k(\varphi)^6 - 13.610 k(\varphi)^7 + 2.561 k(\varphi)^8$$

$$b_k(\varphi) := 18.294 \cdot k(\varphi)^2 - 103.9 \cdot k(\varphi)^4 + 160.386 \cdot k(\varphi)^5 - 95.27 \cdot k(\varphi)^6 + 20.488 \cdot k(\varphi)^7$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := 36.588 \cdot k(\varphi) - 415.6 \cdot k(\varphi)^3 + 801.93 \cdot k(\varphi)^4 - 571.62 \cdot k(\varphi)^5 + 143.416 \cdot k(\varphi)^6$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

27. Подвійний гармонійний закон ПГ

Вихідні дані:

$$S_{\max} := 40 \quad \varphi_B := 120\text{deg} \quad \varphi_{\text{ДС}} := 0\text{deg} \quad \varphi_H := 90\text{deg} \quad N := 360$$

Інваріанти переміщення a_k , швидкості b_k , прискорення c_k :

$$\varphi := 0, 2 \cdot \frac{\pi}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow \frac{\varphi}{\varphi_B} & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow 1 & \text{if } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} \\ \text{Result} \leftarrow 1 - \frac{\varphi - (\varphi_B + \varphi_{\text{ДС}})}{\varphi_H} & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} < \varphi \leq \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_{\text{ДС}} + \varphi_H \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$a_k(\varphi) := \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot k(\varphi))) - \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot k(\varphi)))$$

$$b_k(\varphi) := \frac{\pi}{2} \cdot (\sin(\pi \cdot k(\varphi))) - \frac{1}{2} \cdot (\sin(2\pi \cdot k(\varphi)))$$

$$b_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow b_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow -b_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$c_k(\varphi) := \frac{2}{2} \cdot (\cos(\pi \cdot k(\varphi)) - \cos(2\pi \cdot k(\varphi)))$$

$$c_k(\varphi) := \begin{cases} \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } 0 \leq \varphi \leq \varphi_B \\ \text{Result} \leftarrow c_k(\varphi) & \text{if } \varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_B + \varphi_H \\ \text{Result} \leftarrow 0 & \text{if } \varphi_B + \varphi_H \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Література

1. Ануриев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3-х т. Т. 2.–5-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. –559 с.
2. Аргоболевский И. И. Механизмы в современной технике: Пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей. – В 7 т. – М.: Наука, 1979–1981.
3. Аргоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988.– 640 с.
4. Белоконев И.М.. Теория механизмов и машин. Методы автоматизированного проектирования: Учеб. пособие / Под ред. К.И. Заблонского. – К.: Вища шк., 1990. – 208 с.
5. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad: Практикум.–СПб.:БХВ – Петербург, 2005. – 762 с.
6. Бородин А.И. Специализированный пакет MathCAD: учебно-методическое пособие. Минск: БГЭУ, 2007. – 120 с.
7. Гуляев К. И. и др. Расчет геометрии эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления. – Л.: Машиностроение, 1975. – 66 с.
8. Дьяконов В. Mathcad 2001. Специальный справочник. Питер. 2001. - 832 с.
9. Дьяконов В., Абраменкова И. Mathcad 2000 в математике, в физике и в Internet. Нолидж. 2001 – 592 с.
10. Зубчатые передачи: Справочник / Под ред. Е. Г. Гинзбурга. – Л.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
11. Киницкий Я. Т. Унифицированные алгоритмы расчета механизмов на ЭВМ. – К.: УМК ВО, 1988. – 116 с.
12. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наукова думка, 2002.–660 с.
13. Кіницький Я.Т. Практикум із теорії механізмів і машин. – Львів: Афіша, 2002 – 455 с.
14. Кіницький Я.Т., Харжевський В.О. Аналітичні методи аналізу та синтезу механізмів. – Хмельницький: ХНУ, 2006 – 88 с.
15. Кіницький Я.Т. Збірник задач і тестів із теорії механізмів і машин. – Львів: Афіша, 2008 – 228 с.
16. Кіницький Я. Т., Головка О.В, Марченко М.В. Аналіз і синтез двокривошипного кулісного механізму з регульованою амплітудою коливання кутової швидкості вихідної ланки. – Хмельницький: Вісник ХНУ, №2, 2013. – С. 18–22.
17. Кіницький Я. Т., Марченко М.В., Харжевський В.О.. Аналітичне дослідження кінематики механізмів III класу з використанням системи Mathcad. – Хмельницький: Вісник ХНУ, №6, 2013. – С.7-10.
18. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 13. С-Пб: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с
19. Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1976. – 784 с.
20. Кудрявцев Е. Mathcad 11. Полное руководство по русской версии. М: ДМК Пресс, 2005. – 592 с.
21. Курсове проектування з теорії механізмів і машин/ Крижанівський Є.І., Малько Б.Д., Сенчішак В.М. та ін. – Івано-Франківськ: 1996 – 357 с.
22. Левитский Н.И. Кулачковые механизмы. – М.: Машиностроение, 1964. – 288 с.
23. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. – М.: Виш. Шк., 1985. – 279 с.
24. Мохнатюк А.І. Синтез кулачкових механізмів на ЕОМ. – К.: НМК ВО, 1992. – 188 с.
25. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. СПб: БХВ-Петербург, 2007. – 368с.
26. Розрахунок важільних і кулачкових механізмів за допомогою ПЕОМ/ Златопольський Ф.Й. та ін. – Кіровоград: КОД, 2000. 147 с.
27. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / Под ред. И. А. Болотовского. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
28. Тир К. В. Механика полиграфических машин. – М.: Книга, 1965. – 496 с.
29. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1977. – 527 с.