Я.Т. КІНИЦЬКИЙ

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

НАУКОВА ДУМКА

ПІДРУЧНИК

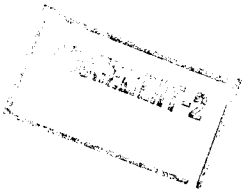
3312-22 621.01(075)
К41

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Я. Т. КІНИЦЬКИЙ

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Підручник



КИЇВ
НАУКОВА ДУМКА
2002

УДК 621.01

У запропонованому підручнику викладено поняття про структуру і класифікацію механізмів, загальні методи кінематичного і динамічного дослідження механізмів. Наведено основні відомості з теорії регулювання ходу машин, тертя та зношування в них, а також аналіз та синтез кулачкових, зубчастих, важільних та крокових механізмів, їхнє зрівноваження, теорію машин. Матеріал подано на основі використання як графічних методів, що краще розкривають фізичний зміст проблеми, так і аналітичних методів, що дають змогу ширше застосовувати сучасні ЕОМ.

Для студентів механічних і машинобудівних спеціальностей втузів. Може бути корисний для аспірантів, наукових працівників та інженерів-конструкторів.

Допущено Міністерством освіти і науки України
(протокол № 7/4-18 від 24.06.98)

Відповідальний редактор
доктор технічних наук професор Є. С. ПЕРЕВЕРЗЄВ
(Інститут технічної механіки НАН України)

Рецензенти:
кандидат технічних наук доцент В. М. ВІННІК,
кандидат технічних наук доцент В. М. ГЕЛЕТІЙ,
доктор технічних наук професор М. С. ВОРОБЙОВ

Редакція фізико-математичної
та технічної літератури

Редактори *Т. С. Мельник, М. К. Пуніна*

К $\frac{2702000000-035}{2002}$ 13-01

ISBN 966-00-0740-X

© Я. Т. Кіницький, 2002

ПЕРЕДМОВА

Теорія механізмів і машин (ТММ) є однією з основних загальноінженерних дисциплін, яку викладають у вищих технічних учбових закладах. ТММ розглядає будову і класифікацію механізмів, методи кінематичного та динамічного дослідження, проектування їхніх схем, які є загальними для механізмів і машин різного призначення. Ці знання необхідні інженерам-механікам для створення сучасних машин, умілого їх використання.

Нині в Україні немає підручника з ТММ, написаного українською мовою, який би повністю відповідав програмі навчання студентів механічних і машинобудівних спеціальностей втузів. У запропонованому підручнику використано все краще, що було закладено у відомих вітчизняних підручниках: сучасні досягнення цієї науки та 35-річний досвід автора щодо викладання ТММ на механічному факультеті Технологічного університету Поділля (м. Хмельницький). У кінці підручника наведено список використаної літератури. Матеріал підручника в дещо більшому обсязі було опубліковано у вигляді лекцій *, які містять у собі всі 15 розділів підручника і апробовані в навчальному процесі.

Звичайно, остаточний зміст і обсяг матеріалу, який викладається, встановлюються кожним втузом залежно від його специфіки. При складанні цього підручника автор намагався задовольнити ці вимоги.

* Теорія механізмів і машин. В 9-ти ч. // Тексти лекцій / Я. Т. Кіницький. — Хмельницький: Технол. ун-т Поділля, 1990—97. — 791 с.

Винятком є лише розділ "Основи теорії коливання і віброзахист машин", який не включено в підручник, оскільки його неможливо подати на належному рівні при такій малій кількості навчальних годин, що відведено на вивчення ТММ. Як показує досвід підготовки інженерів-механіків у Технологічному університеті Поділля, цей розділ слід виділити в окрему дисципліну і читати після вивчення курсів "Деталі машин" і "Гідравліка та гідравлічні машини".

Виклад матеріалу підручника подано з використанням як графічних, так і аналітичних методів. Перші дають змогу глибше зрозуміти будову і принцип роботи механізмів, фізичний зміст того чи іншого методу, їх дослідження і проектування; другі — ширше використовувати можливості сучасних ЕОМ і, тим самим, провести багатоваріантні дослідження, забезпечити оптимальні параметри механізмів.

Автор висловлює глибоку подяку всьому колективу кафедри машинознавства Технологічного університету Поділля за допомогу в підготовці рукопису, а також рецензентам за критичні зауваження та корисні поради.

Зауваження і побажання, направлені на покращення підручника, просимо надсилати за адресою:

29016 м. Хмельницький, вул. Інститутська, 11, Технологічний університет Поділля, кафедра машинознавства.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Значення і зміст курсу теорії механізмів і машин

Машинобудування — основна галузь сучасної промислово розвинутої країни — визначає рівень розвитку продуктивних сил суспільства, становить фундамент технічного прогресу всіх галузей народного господарства. У свою чергу, прогрес машинобудування визначається досконалістю машин, які створюються. Тому від інженера вимагаються глибокі теоретичні знання і досвід, вміння не тільки керувати складною технікою, успішно її використовувати, але й забезпечувати її швидкий прогрес. Сучасний інженер повинен досконало володіти методами розрахунку і конструювання нових швидкохідних, автоматизованих і високопродуктивних машин.

Створення нових машин базується на досягненнях багатьох фундаментальних і прикладних наук, серед яких важливе місце посідає теорія механізмів і машин.

Теорія механізмів і машин (ТММ) — наука про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їхніх схем.

У ТММ обгрунтовується вибір оптимальних параметрів машин і механізмів, визначаються методи їхнього раціонального проектування. Якість машин і механізмів, які створюються, значною мірою визначається повнотою розробки і використання методів ТММ. Чим повніше будуть враховані при побудові механізмів і машин кінематичні і динамічні

властивості окремих механізмів, критерії продуктивності, надійності, тим досконалішими будуть конструкції машин.

Дуже часто підвищення надійності і довговічності машин пов'язують насамперед з переходом на нові високоякісні матеріали, удосконаленням технології обробки деталей, використанням різних засобів, що сприяють зменшенню зношування. Проте основні якості нової машини або механізму закладаються саме на першій стадії їхнього проектування, коли тільки вибирають структурну (принципову) схему й головні кінематичні параметри. Тому доцільніше боротися з першопричинами шкідливих явищ, ніж з їхніми наслідками. Краще усунути великі навантаження, ніж вибирати особливо міцні матеріали, здатні ці перевантаження витримати. Раціональним добором структури і параметрів механізмів або машин можна не тільки підвищити їхню надійність і довговічність, але й значно зменшити габаритні розміри і масу. Досягнуті при цьому результати часто не зв'язані з додатковими матеріальними витратами, для їхнього отримання вимагаються лише глибокі знання конструкторів у галузі теорії механізмів і машин.

Поява нових машин вимагає розробки нових теоретичних положень про їхню механіку. Наука про машини не розвиватиметься, якщо її апарат не буде відповідати реальним потребам промисловості і техніки, так само не може бути прогресу і в машинобудуванні без розвитку методів ТММ. Тому ТММ є однією з основних загальноінженерних дисциплін, що забезпечує необхідну теоретичну підготовку інженерів-механіків.

Знання ТММ необхідні не тільки інженерам-конструкторам, які проектують машини, а й інженерам, що займаються їхнім виготовленням і експлуатацією. Вони повинні добре знати основні механізми, принципи їхньої роботи, найважливіші кінематичні та динамічні властивості. У процесі експлуатації машини завжди можуть виникнути неполадки. Усунути їх, а в деяких випадках дати завдання на проектування нової машини чи вдосконалення існуючої, може тільки інженер, який добре знає властивості механізмів, їхню будову і взаємодію у машині.

Базою ТММ є курси математики, фізики, хімії, теоретичної механіки, електротехніки, електроніки, вміння використовувати в інженерних розрахунках електронно-обчислювальні машини (ЕОМ).

Задача курсу ТММ полягає у тому, щоб підготувати студентів до слухання курсів деталі машин, технології машинобудування, курсів з розрахунку і конструювання тих чи інших спеціальних машин залежно від їхньої майбутньої спеціальності.

Курс ТММ можна поділити на дві частини: ***теорію механізмів і теорію машин.*** Найбільш розвинута перша частина, у якій вивчаються будова, кінематика і динаміка механізмів та методи їхнього проектування.

Проблеми теорії механізмів можна поділити на дві групи: перша — це аналіз, тобто дослідження існуючих механізмів; друга — синтез, тобто проектування нових механізмів, які б виконували задані умови.

Рух механізмів залежить від їхньої будови і сил, що діють на них. Тому зручно при викладанні теорії механізмів проблеми аналізу механізмів, у свою чергу, розбити на три частини:

1) структурний аналіз;
2) кінематичний аналіз;
3) динамічний аналіз.

Структурний аналіз має за мету вивчення теорії будови механізмів, їхнє видозмінення та класифікацію. При ***кінематичному аналізі*** досліджується рух тіл, які утворюють механізми, з геометричної точки зору, тобто без врахування сил, що викликають рух цих тіл. Задача ***динамічного аналізу*** механізмів — вивчення методів визначення сил, що діють на тіла, які утворюють механізм, і встановлення взаємозв'язків між рухом цих тіл силами, що на них діють, і масами, які ці ланки мають.

Задача ***синтезу*** механізмів полягає у розробці методів проектування механізмів наперед вибраної структури за заданими кінематичними і динамічними умовами. Проте поділ проблем теорії механізмів на аналіз і синтез має суто методичне значення, оскільки у практиці проектування (синтезу) механізмів доводиться дуже часто використовувати аналіз механізмів, який дає змогу виявити найбільш вдалий (оптимальний) варіант розв'язку задачі синтезу.

У теорії машин розглядаються загальні методи проектування схем машин як сукупності окремих механізмів, питання автоматичного керування і регулювання машин. Обидві частини теорії механізмів і машин нерозривно зв'язані між собою, оскільки механізми складають, як правило, основу будь-якої машини.

1.2. Деякі відомості з історії розвитку науки про машини

Теорія механізмів і машин як самостійна наука почала формуватися в середині XIX ст., до того часу вона була складовою частиною прикладної механіки — однієї з стародавніх наук, розвиток якої був викликаний життєвою необхідністю: приготуванням їжі, виготовленням тканини і посуду, перекачуванням води, будівництвом тощо. Найстародавня праця про механізми і машини, яка дійшла до нашого часу, — це "Механічні проблеми" *Арістотеля* (384—322 до н. е.), де описано важіль, криничний журавель, кривошип, колесо, коток, поліспаст, гончарний верстат, центрифуги, зубчасті колеса та ваги.

Значна роль у створенні машин відводиться видатному давньогрецькому математику і механіку *Архімеду* (287—212 до н. е.), який на основі своїх знань запропонував конструювання різних машин і споруд. Архімед не тільки пояснив принцип дії простих машин (коловорот, важіль, поліспаст, клин), але й винайшов "п'яту просту машину" — гвинт, на базі якого створив гвинтовий насос для підняття води.

Одним з найвидатніших винахідників свого часу був грек *Ктесібій* (300—230 до н. е.). Він винайшов пожежний насос, створив ряд гідравлічних і пневматичних механізмів, а саме аеротон — військову машину, в якій використав стиснуте повітря, водяний орга́н, удосконалив водяний годинник. Ці та інші винаходи відіграли велику роль у розвитку машин і механізмів, людина замість мускульної сили стала використовувати силу природи: енергію рухомої води та повітря.

Після античного періоду в епоху середньовіччя наука про машини майже не розвивалася. Великим ученим епохи Відродження був *Леонардо да Вінчі* (1452—1519). Він перший експериментально визначив коефіцієнт тертя ковзання, створив багато нових механізмів, різні конструкції ткацьких верстатів, друкарських і деревообробних машин, волочильний верстат, верстат для насічки напилків, розробив ряд проектів вантажопідіймальних машин та інших винаходів.

Одним з перших теоретиків вчення про машини був італійський вчений *Джероламо Кардано* (1506—1576), який описав зубчасті передачі, передачі гнучкою ниткою, сформулював правила побудови годинникових механізмів, дав опис годинникових пружин і балансиру. Інший італійський вчений *Галілео Галілей* (1564—1642) розробив основи сучасної механіки, вперше

сформулював основні кінематичні поняття (швидкість і прискорення), висунув ідею про відносний рух, вивів закон вільного падіння і коливання маятника.

Англійський вчений *Ісаак Ньютон* (1643—1717) сформулював закони механіки, встановив поняття маси та сили. Він фактично створив сучасну класичну механіку, на основі якої розвивається теорія механізмів і машин.

В Росії наука про машини почала розвиватися з часу заснування Російської Академії наук (РАН). Робота РАН з перших днів існування була спрямована на розв'язання практичних задач, пов'язаних із побудовою різних машин і споруд, розвитком кораблебудування, артилерії та іншої техніки. Значний внесок у розвиток практичної механіки у Росії зробив геніальний вчений-енциклопедист *М. В. Ломоносов* (1711—1765), який розробив конструкції машин для виробництва скла і випробування матеріалів.

Геніальний математик і механік *Леонардо Ейлер* (1707—1783), автор 850 наукових праць, розв'язав ряд задач з кінематики і динаміки твердого тіла, дослідив коливання і стійкість пружних тіл, займався питанням теорії плоского зачеплення і запропонував евольвентний профіль зубців. Ці дослідження слугували основою для створення французом *Т. Олів'є* (1793—1858) загальної теорії просторового зачеплення, яка була перероблена і доповнена вченим, професором *Х. І. Гохманом* (1861—1916) — автором фундаментальної праці "Кінематика машин" (1890 р.).

Наукові відкриття М. В. Ломоносова, Л. Ейлера стали джерелом творчості російських винахідників: *І. І. Ползунова* (1728—1766), який уперше розробив проект двоциліндричного парового двигуна, сконструював автоматичний регулятор подачі води у котел, пристрої для подачі води і пари тощо; *І. П. Кулібіна* (1735—1818), який створив протез, годинник-автомат, самохідне судно "самокатку" з педальним приводом. Цікаво зазначити, що конструкція "самокатки" (1791 р.) мала всі риси майбутніх автомобілів, містила пристрої для перемикання зубчастих передач і вільного ходу, гальмо, керуючі колеса, а його годинник був одним із найскладніших механізмів автоматичної дії. Алтайський гідротехнік *К. Д. Фролов* (1726—1800) створив механізований комплекс рудо- і водопідіймальних пристроїв; батько і син *Черепанови* побудували перший у Росії паровоз і запустили першу в Росії залізницю на паровій тязі; у 1712 р. талановитий російський інженер *А. К. Нартов* (1693—1756) побудував токарно-гвинторізний верстат оригінальної конструкції із супортом

замість підручного, пізніше створив серію різних верстатів із складними кінематичними схемами.

Завдяки розвитку машинобудування з'явилась необхідність у розробці загальних наукових методів дослідження і проектування механізмів, які входять до складу машин. Велику роль у дослідженнях різних питань механіки відіграли іспанський інженер *А. Бетанкур* (1758—1824), який 17 років працював у Росії; французький вчений *Г. Коріоліс* (1792—1843); німецький машинознавець *Ф. Рело* (1829—1905) та ін. У 1794 р. видатний французький вчений *Г. Монж* (1746—1818) організував у Парижі першу в світі політехнічну школу, яка стала великим науковим центром у галузі машинобудування.

Якщо у першій половині XIX ст. механіка машин здебільшого розвивалась у Франції, незважаючи на те що рівень розвитку техніки був вищим в Англії, то друга половина XIX — початок XX ст. — період фундаментальних досліджень теорії механізмів і машин, у яких найрезультативнішим були досягнення російських і німецьких вчених.

У середині XIX ст. у Росії з'явилася плеяда талановитих вчених, які разом з вченими Європи заклали основи сучасної теорії механізмів і машин.

Основоположником російської школи ТММ вважається видатний математик і механік *П. Л. Чебишов* (1821—1894), якому належить ряд оригінальних досліджень, присвячених синтезу механізмів, теорії регуляторів і зубчастого зачеплення, структурі плоских механізмів. Він створив понад 40 оригінальних механізмів і багато їхніх модифікацій. Для розв'язання цих задач Чебишов розробив спеціальний математичний апарат.

Велика роль у створенні школи механіки машин належить видатному математику і механіку *М. В. Остроградському* (1801—1861) — одному з основоположників аналітичної механіки. Його учень *І. О. Вишнеградський* (1831—1895) вважається основоположником теорії автоматичного регулювання, він сконструював ряд машин і механізмів (автоматичний прес, підйомні машини, регулятор насоса) і, будучи професором Петербурзького технологічного інституту, створив наукову школу конструювання машин.

Розвитку механіки машин сприяли роботи *М. П. Петрова* (1836—1920), який заклав основи гідродинамічної теорії тертя у підшипниках.

Значний внесок у динаміку машин зробив *М. Є. Жуковський* (1847—1921). Він був не тільки основоположником сучасної

аеродинаміки, але й автором ряду робіт з прикладної механіки і теорії регулювання ходу машин.

Основоположник теорії просторових механізмів *М. І. Мерцалов* (1866—1948) запропонував новий метод розрахунку маховика. Написаний ним курс "Динаміка механізмів" став першим систематизованим курсом у світовій літературі.

У розвитку сільськогосподарської техніки і теорії механізмів і машин велику роль відіграли праці *В. П. Горячкіна* (1868—1935), який першим розробив динаміку робочих машин, заклав теоретичні основи розрахунку і будови сільськогосподарських машин, займався питаннями кінематики та динаміки плоских і просторових механізмів, теорією зрівноваження та стійкості машин і механізмів.

У 1914—1918 рр. з'явилися виняткові за глибиною наукового аналізу механізмів роботи професора Петербурзького політехнічного інституту *Л. В. Ассура* (1878—1920), який створив найраціональнішу класифікацію плоских механізмів залежно від їхньої структури, і тим підвів чітку базу під всю теорію механізмів. Праці Ассура відіграли велику роль у розвитку теорії механізмів.

У розвиток ТММ значний внесок зробили й німецькі вчені, які далі розвили ідеї Рело. *М. Грюблер* (1851—1935), який був професором Ризького політехнічного інституту (1886—1896) опублікував у 1883 р. структурну формулу плоских механізмів. Формула Грюблера була прийнята історично першою структурною формулою, через те що праці Чебишова тоді були мало відомі, хоча сам автор робив посилання на Чебишова. *Ф. Грасгоф* (1826—1893) математично сформулював умови існування кривошипа у плоскому важільному механізмі, використані при їхньому синтезі. Метод планів швидкостей і прискорень розробили *О. Мор* (1835—1918) і *Р. Мемке* (1857—1927). Теоретичні основи геометричного синтезу механізмів розробив видатний німецький вчений *Л. Бурместер* (1840—1927), а основи графічної динаміки — австрійський вчений *Ф. Віттенбауер* (1857—1922).

В Англії математики *Д. Сільвестр* (1814—1897) і *С. Робертс* (1827—1913) розробили теорію важільних механізмів для перетворення кривих (пантографів). *Р. Вілліс* (1800—1875) став автором класичної праці про машини "Принципи механізмів". Він зробив значний внесок у розвиток теорії зубчастих механізмів, класифікацію механізмів.

Значний внесок у розвиток теорії механізмів і машин було зроблено російськими вченими. Важко проаналізувати або навіть

перерахувати їх численні і значні дослідження, які характеризуються високим математичним рівнем і охоплюють всі розділи теорії механізмів і машин. Важливий внесок у становлення механіки машин як цілісної теорії машинобудування зробив *І. І. Артоболевський* (1905—1977) — організатор радянської школи теорії механізмів і машин. Ним написано численні праці з структури, кінематики та синтезу механізмів, динаміки машин і теорії машин-автоматів, а також ціла серія підручників, учбових посібників, довідників, які одержали загальне визнання і перекладені на багато мов світу.

Професор Московського текстильного інституту *А. П. Малишев* (1879—1962) розробив методи структурного аналізу та синтезу механізмів. У 1923 р. він вивів структурну формулу для просторових механізмів, створив першу в колишньому Радянському Союзі лабораторію з теорії механізмів.

Академік *Н. Г. Брусвич* (1896—1987) опублікував ряд праць з теорії точності механізмів і машин — одного з розділів ТММ, який має важливе значення для проектування і конструювання сучасних механізмів точних приладів. Саме йому належать значні праці у галузі розвитку аналітичних методів дослідження плоских і просторових механізмів, а також механізмів із пасивними зв'язками.

Учні і послідовники *І. І. Артоболевського — А. П. Бессонов, Вяч. А. Зінов'єв* (1899—1975), *М. І. Левітський, Н. В. Умнов, С. О. Черкудінов* і багато інших — своїми працями у галузі динаміки машин, оптимального синтезу механізмів, теорії машин-автоматів і в інших галузях ТММ сприяли подальшому її розвитку.

Великий внесок у теорію механізмів і машин зробили *Г. Г. Баранов* (1899—1968) — автор праці із кінематики просторових механізмів, а також *С. М. Кожевников*, який розробив загальні методи динамічного дослідження механізмів з пружними ланками і механізмів важковантажних машин.

У МВТУ учні і послідовники *М. І. Мерцалова* (1866—1948) розробляли і розробляють різні питання з ТММ. Професор *Л. П. Смирнов* (1877—1954) дав розв'язок ряду задач динамічних досліджень машин, його учень *В. А. Гавриленко* (1899—1977) розробив питання теорії евольвентних зубчастих передач.

Учнем М. І. Мерцалова був член-кореспондент Академії наук СРСР *В. В. Добровольський* (1880—1957) — автор фундаментальних праць з ТММ. Він розробив загальні основи структури і класифікації механізмів, розвинув теорію просторових, зокрема

сферичних, механізмів, розв'язав задачі з проектування механізмів, теорії зубчастого зачеплення, механізмів креслення ліній тощо.

Сучасна Санкт-Петербурзька школа ТММ започаткована Л. Ейлером і П. Л. Чебишовим. Великий науковий інтерес становить праця професора *К. Е. Реріха* (1878—1934), присвячена теорії регулювання ходу машин. Професори *Х. Ф. Кетов* (1887—1948) і *М. І. Колчин* (1894—1975) домоглися істотних результатів з питань теорії і розрахунку зубчастих механізмів. Професор *С. В. Вяхірєв* є автором першої в колишньому СРСР монографії, присвяченої теорії машин-автоматів. Питанням теорії зубчастих механізмів присвячені праці *В. М. Кудрявцева*, теорії просторових механізмів — *П. О. Лебедєва,* оптимального синтезу механізмів — *Е. О. Пейсаха*, динаміки механізмів і машин — *Й. І. Вульфсона* і *М. З. Коловського.*

Багато талановитих вчених-дослідників, інженерів і конструкторів працюють у різних галузях теорії механізмів і машин; ця наука набрала широкого розвитку в багатьох містах колишнього СРСР: в Москві і Санкт-Петербурзі; окремі центри з вивчення ТММ створили: у Харкові — *Я. Л. Геронімус*, у Дніпропетровську, а потім у Києві — *С. М. Кожевников* (1906—1979), у Львові — *К. В. Тір*, в Одесі — *В. Я. Белецький*, у Тбілісі — *Д. С. Тавхелідзе,* у Каунасі — *К. М. Рагульскіс*, в Алма-Аті — *У. А. Джолдасбеков*, у Ташкенті — *Х. Х. Усманходжаєв,* в Єревані — *К. Х. Шахбазян* і *Ю. Л. Саркісян* і т. д.

Дослідженням з теорії механізмів і машин присвятили свою наукову діяльність зарубіжні вчені *Х. Альт* (1899—1954), *Р. Бейєр* (1892—1960), *В. Ліхтенхельдт* (1901—1980), *К. Лук, Я. Мюллер* (1857—1939), *І. Фольмер* і багато інших.

У 1969 р. була організована Міжнародна федерація з теорії механізмів і машин (ІФТОММ), яка покликана координувати розвиток науки про машини, планувати міжнародні з'їзди, симпозіуми з тематики машинознавства, підготовку спеціалістів тощо. Першим президентом ІФТОММ було обрано академіка І. І. Артоболевського. Це ще раз стало свідченням того, що радянські вчені одержали світове визнання.

У 1994 р. створено Національний комітет України з ТММ.

Складні і відповідальні задачі стоять перед сучасними вченими, інженерами, винахідниками. Їм необхідно створити нові, досконаліші машини, автоматичні лінії, які б дозволили нашій країні бути на рівні сучасних вимог. У світі постійно здійснюються нові відкриття, винаходи, створюються нові машини, змінюються технології. Сучасному спеціалісту необхідно постійно

удосконалювати свою кваліфікацію, підвищувати рівень знань, навчатися вчитися самому. Без цього неможливо перебувати на передових позиціях науково-технічного прогресу. Постійно цікавитися новинками не тільки за своєю спеціальністю, але й знати основні досягнення у суміжних галузях науки і техніки.

1.3. Основні поняття і визначення курсу теорії механізмів і машин

Кожний механізм або машина складається з окремих деталей. ***Деталлю*** називають ту частину механізму або машини, яка виготовлена без складальних операцій. У стаціонарних машинах і механізмах є нерухомі деталі і деталі, що рухаються відносно нерухомих. У рухомих машинах і механізмах, наприклад у двигуні автомобіля, нерухомими деталями умовно вважаються ті, що постійно зв'язані з корпусом автомобіля. Відповідно до цього у кривошипно-поршневому двигуні (рис. 1.1, *а*): нерухомі деталі — корпус двигуна *4*, підшипник корінного (колінчастого) вала *0*, циліндри *5* тощо; рухомі — корінний вал *1*, шатун *2*, поршні *3*, клапани *6* тощо. На рис. 1.1, *б* зображено кінематичну схему цього механізму (умовне зображення механізму в масштабі).

Кожна рухома деталь або група деталей, які утворюють одну жорстку рухому систему тіл, має назву рухомої ланки механізму або машини.

Наприклад, шатун двигуна (рис. 1.1, *в*) буде однією рухомою ланкою, хоч він може складатися з ряду деталей (тіло шатуна *1*, запресованої в нього втулки *2*, вкладиші *3* і *4*, головка *5*, болти *6* із гайками *7*, шайбами і шплінтами). Деталі, які утворюють одну ланку, іноді не мають жорсткого зв'язку між собою (наприклад, стрічка конвеєра з деталями, які вона переносить); тоді ознакою того, що вони належать до однієї ланки, буде відсутність відносного руху деталей.

Усі нерухомі деталі утворюють одну нерухому систему тіл, яка називається нерухомою ланкою або стояком. Наприклад, корпус двигуна, підшипники корінного вала тощо разом утворюють одну нерухому ланку, або стояк.

Таким чином, у будь-якому механізмі або машині маємо ***одну нерухому ланку і одну або декілька рухомих ланок.***

У механізмах або машинах ланки з'єднуються одна з одною так, що завжди забезпечується можливість їхнього відносного руху. ***Рухоме з'єднання двох ланок, які стикаються, називається кінематичною парою.***

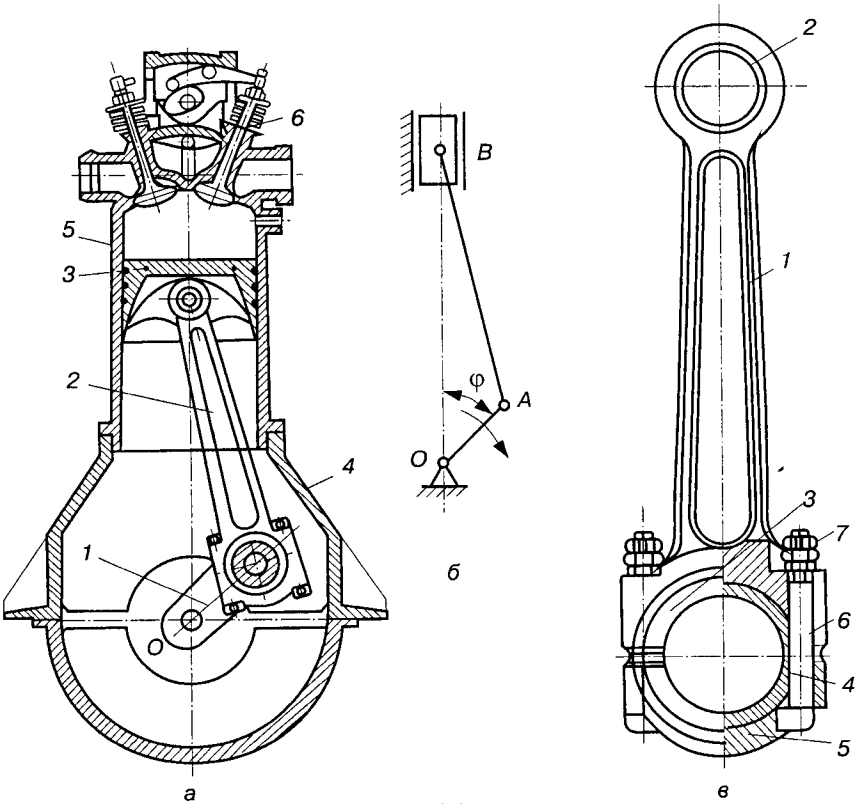


Рис. 1.1.

Рух ланок відносно одна одної визначається формою елементів ланок, якими вони стикаються. ***Сукупність поверхонь, ліній або точок, які належать ланкам і які стикаються при відносному русі ланок, називають елементами кінематичних пар.***

Зв'язана система ланок, що входять у кінематичні пари, утворює кінематичний ланцюг. Таким чином, колінчастий вал кривошипно-поршневого двигуна разом з нерухомим підшипником утворює одну кінематичну пару *O* (рис. 1.1, *б*). Шатун з колінчастим валом утворює другу кінематичну пару *A*, шатун з поршнем — третю (шарнір *B*), поршень з циліндром — четверту, а всі ці ланки і кінематичні пари разом утворюють кінематичний ланцюг.

Механізм. В основі кожного механізму або машини лежить кінематичний ланцюг. Виходячи з цього, механізму можна дати таке визначення.

Механізм є кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, призначений виконувати цілком визначені доцільні рухи.

Визначення терміну "механізм" постійно змінюється, оскільки змінюються наші знання про самі механізми. Механізми, що входять до складу сучасних машин, дуже різноманітні. Одні з них складаються тільки з твердих тіл, другі — з гідравлічних, пневматичних, електричних, магнітних та інших пристроїв. Такі механізми називають гідравлічними, пневматичними, електричними тощо. Тепер дамо більш загальне визначення механізму.

Механізмом називають систему тіл, призначену для перетворення руху одного або кількох тіл у потрібні рухи інших тіл.

З цього визначення випливає, що не можна називати механізмом пристрій, у якому немає перетворення механічного руху. Наприклад, ротор електродвигуна і підшипники, у яких він обертається, не утворюють механізму, оскільки у цьому випадку взаємодія магнітного поля і провідника з електричним струмом надає необхідний рух без будь-якого проміжного перетворення механічного руху.

У кожному механізмі є нерухома ланка (стояк) і рухома ланка або система рухомих ланок. Із рухомих ланок виділяють ***вхідні*** і ***вихідні*** ланки. ***Вхідною*** (входом) називають ланку, якій надається рух, що перетворюється механізмом у потрібний рух інших ланок. ***Вихідною*** (виходом) називають ланку, що здійснює рух, для виконання якого призначений механізм. Решту рухомих ланок механізму називають ***з'єднуючими, або проміжними.***

Як правило, у механізмі є один вхід і один вихід. Вхідна ланка одержує рух від двигуна, а вихідна — зв'язана з робочим (виконавчим) органом машини. Але можуть бути механізми, в яких є кілька вхідних і вихідних ланок. Наприклад, у автомобільному диференціалі є один вхід — рух від двигуна, і два виходи — два колеса.

Терміни "вхідна ланка" і "вихідна ланка" введено в курс ТММ порівняно недавно. Раніше ці ланки називали відповідно ведучими і веденими. Заміна зумовлена тим, що у динаміці механізмів розділення ланок ведеться за іншою ознакою — за знаком елементарних робіт сил, які діють на ланку. ***Ведучою*** називають таку ланку, для якої елементарна робота зовнішніх сил, що прикладаються до неї, додатна. ***Веденою*** називають ланку, для якої елементарна робота зовнішніх сил, що прикладені до неї, від'ємна. Тому вхідна ланка у деяких механізмах може бути

як ведучою, так і веденою. Наприклад, у механізмі кривошипно-поршневого двигуна, колінчастий вал і поршень залежно від співвідношення сил, які діють на ланки механізму, можуть бути або ведучими, або веденими.

З точки зору ***конструкції*** механізми поділяють на: важільні, кулачкові, зубчасті, зірчасті (цівкові), мальтійські, храпові, гвинтові, клинові, фрикційні, пасові, ланцюгові, гідравлічні, пневматичні й електричні. Широко використовуються комбіновані механізми: зубчасто-важільні, кулачково-зубчасті, кулачково-важільні тощо.

За ***функціональним*** призначенням є механізми [4]:

а) двигунів і перетворювачів;

б) передавальні;

в) виконавчі;

г) керування, контролю і регулювання;

д) подачі, транспортування, живлення і сортування об'єктів, які обробляються.

Детальніші відомості про сучасні механізми наведено у працях [3, 29].

Машина. З розвитком машин зміст терміну "машина" також змінювався. Для сучасних машин існує таке визначення [4]. ***Машина є пристрій, який виконує механічний рух для перетворення енергії, матеріалів та інформації з метою заміни або полегшення фізичної або розумової праці людини.***

Залежно від того, які функції виконують машини, їх можна розділити на: а) енергетичні; б) транспортні; в) технологічні; г) контрольно-керуючі; д) математичні; е) кібернетичні.

Енергетичною називають машину, що призначена для перетворення будь-якого виду енергії на механічну або навпаки. У першому випадку — це машина-двигун, у другому — машина-генератор. Прикладом енергетичних машин є електродвигуни, парові машини, двигуни внутрішнього згоряння, турбіни, генератори електричного струму тощо.

Транспортною називають машину, що призначена для зміни положення оброблюваного матеріалу, предметів або людей. До транспортних машин належать крани, транспортери, автокари, автомобілі, тепловози, трактори, ліфти, літаки тощо.

Технологічною називають машину, у якій змінюються властивості, стан, форма оброблюваного матеріалу або об'єкта. Це найрізноманітніший клас машин, до якого належать металорізальні верстати, прокатні стани, металургійні, текстильні, поліграфічні, сільськогосподарські машини, машини легкої та

харчової промисловості та багато інших машин. Часто транспортні і технологічні машини називають ***робочими.***

Контрольно-керуючою називають машину, що перетворює одержану контрольно-вимірювальну інформацію для керування тією чи іншою машиною або технологічним процесом. У сучасних машинах і технологічних лініях широко застосовуються різні контрольно-вимірювальні пристрої або машини. Так, для автоматизації контролю розмірів поршневих кілець, пальців, шариків для шарикопідшипників і багатьох інших об'єктів використовуються контрольно-вимірювальні машини, які здійснюють не тільки контроль розмірів, але й їх сортування за розмірами та іншими показниками.

Математичною називають машину, що перетворює інформацію у вигляді різних математичних образів, які задано у формі чисел і алгоритмів. До цих машин належать лічильно-обчислювальні машини, механічні інтегратори, бухгалтерські та інші машини.

Кібернетичною називають машину, яка замінює або імітує різні механічні, фізіологічні або біологічні процеси, що властиві людині та живій природі, і яка має елементи штучного інтелекту. Прикладом таких машин можуть бути машини, які розпізнають той чи інший образ, наприклад букви, наче здатні читати; машини, які відтворюють людську мову за заданими акустичними спектрами; машини, які виконують різні рухи за усною командою людини; машини, які замінюють окремі органи людини (серце, нирки, кінцівки тощо). У 90-ті роки створено кібернетичні машини, що виконують необхідні механічні рухи за допомогою відповідних систем керування, у яких використовуються ЕОМ, біострум, спеціальні керуючі прилади тощо. Це автооператори, роботи, маніпулятори, крокуючі, повзучі та інші машини. Проте головним у кібернетичних машинах є їхня "чутливість", яка забезпечується відповідними датчиками, штучним баченням за допомогою телевізійних пристроїв тощо. Завдяки спеціальним керуючим машинам маніпулятори, роботи та інші машини можуть виконувати технологічні операції залежно від ситуації, наприклад вибирати необхідні деталі, розрізняти їх за формою, кольором, геометричними параметрами тощо, рухатися по різних поверхнях, обходити перешкоди на своєму шляху або переступати через них.

Машина, в якій перетворення енергії, матеріалів та інформації відбувається без втручання людини, називається машиною-автоматом. Машини-автомати не вимагають участі лю-

дини у технологічному процесі, проте вимагають присутності так званих операторів, тобто людей, які стежать за роботою машини-автомата, визначають програми роботи і коректують у необхідних випадках роботу механізмів.

Із розвитком науки і техніки все ширше використовуються системи машин автоматичної дії. ***Сукупність машин-автоматів, з'єднаних між собою автоматичними транспортними пристроями і призначених для виконання певного технологічного процесу, називається автоматичною лінією.*** Автоматичні лінії лежать в основі цехів-автоматів і заводів-автоматів.

Сучасні розвинуті системи машин є комплексом машин різних класів. Так, автоматичні лінії містять у собі енергетичні машини у вигляді електроприводу, транспортні машини для переміщення деталей або транспортерів, технологічні машини, які змінюють форму, склад або структуру оброблюваних об'єктів, контрольно-керуючі машини, які контролюють якість і розміри виробу і регулюють режими руху двигунів і робочих органів, логічні (математичні) машини, які підраховують кількість виробів. Така сукупність машин називається ***машинним агрегатом.*** Машини, особливо машини-автомати та автоматичні лінії, при вмілому їх використанні полегшують працю людини, сприяють підвищенню продуктивності праці, забезпечують високу якість виконання робочого процесу.

СТРУКТУРА І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ

2.1. Кінематичні пари та їх класифікація

Кінематична пара є рухомим з'єднанням двох ланок, які стикаються. Можливі з'єднання ланок у кінематичні пари дуже різноманітні. Наприклад, на рис. 2.1 зображено так звану ***однорухому обертову (обертальну)*** кінематичну пару, в якій ланки *A* і *B* з'єднані за допомогою двох циліндричних поверхонь. Бурти тіла *A* (вала) обмежують відносний поступальний рух тіл вздовж осі *x* — *x*, але не заважають їхньому відносному обертовому (обертальному) руху. На рис. 2.2 зображено схему іншого способу сполучення елементів ланок *A* і *B*. Ця кінематична пара допускає відносне перекочування, ковзання і вертіння.

Таким чином, на відносний рух кожної ланки кінематичної пари накладаються певні обмеження, які залежать від способу сполучення ланок кінематичної пари. Ці обмеження будемо називати ***умовами зв'язку*** в кінематичних парах.

Які ж умови зв'язку і в якій кількості можуть бути накладені на відносний рух ланок кінематичної пари? Як відомо, у загальному випадку всяке абсолютно тверде тіло *ABC* (рис. 2.3), що вільно рухається у просторі, має ***шість ступенів вільності.*** Рух такого тіла можна розглядати як обертання навколо осей *x, y, z* та ковзання вздовж цих самих осей. Таким чином, тіло *ABC* матиме шість видів незалежних можливих рухів: три обертові і три поступальні рухи.

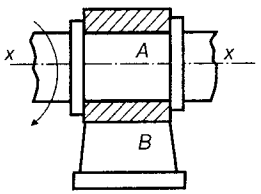


Рис. 2.1.

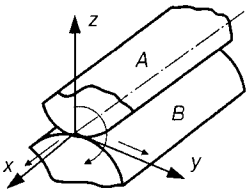


Рис. 2.2.

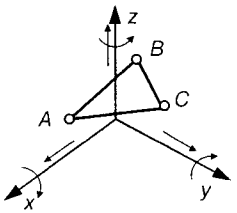


Рис. 2.3.

Входження ланки у кінематичну пару з іншою ланкою накладає на відносні рухи цих ланок певні умови зв'язку. Очевидно, що число цих умов зв'язку може бути тільки цілим і меншим за шість, оскільки, коли число умов зв'язку дорівнює шести, тіло втрачає відносну рухомість. Так само число умов зв'язку не може бути меншим за одиницю, бо у цьому випадку ланки не стикаються, тобто кінематична пара не існує. Маємо два тіла, що вільно рухаються у просторі.

Таким чином, число умов зв'язку, накладених на відносний рух кожної ланки кінематичної пари, змінюється у межах 1—5. Тоді число ступенів вільності H ланки кінематичної пари у відносному русі можна виразити рівнянням

$$H = 6 - S, \tag{2.1}$$

де S — число умов зв'язку, які накладає кінематична пара на відносний рух ланок.

З (2.1) випливає, що число ступенів вільності H ланки кінематичної пари у відносному русі може змінюватися також від 1 до 5.

Можливі рухи, які ще залишились, можуть бути або ***незалежними*** один від одного, або ***зв'язаними*** один з одним будь-якими додатковими геометричними умовами, наприклад умовою, що поворот ланки навколо осі на певний кут зумовлює поступальне переміщення вздовж цієї самої осі на певну відстань (гвинтова пара) і т. ін.

Решта незалежних можливих рухів характеризують ***число ступенів вільності*** ланок кінематичної пари в їх відносному русі.

Класифікація кінематичних пар здійснюється за такими ознаками:

а) число умов зв'язку, які накладаються кінематичною парою на відносний рух ланок;

б) форма елементів ланок, що утворюють кінематичну пару;

в) спосіб замикання ланок.

Залежно від ***числа умов зв'язку*** (класифікація І.І. Артоболевського), що накладаються кінематичною парою на відносний рух ланок, пари діляться на ***п'ять класів***: I, II, III, IV, V.

Клас кінематичної пари визначається залежністю

$$S = 6 - H, \tag{2.2}$$

яка випливає із залежності (2.1).

У багатьох підручниках дається класифікація кінематичних пар, запропонована В. В. Добровольським, згідно з якою кінематичні пари діляться за числом ступенів вільності H на одно-, дво-, три-, чотири- і п'ятирухомі.

У табл. 2.1 наведено приклади кінематичних пар та їхні умовні позначення згідно з ГОСТ 2.770—68 (СТ РЕВ 2519—80).

В обертовій парі (див. рис. 2.1, 2.4) ланка A може повертатися навколо осі ланки B (або B відносно A), а в поступальній парі (рис. 2.5) — переміщатися вздовж пазу ланки B. Число ступенів вільності ланки A в її русі відносно ланки B становить $H = 1$, тому число умов зв'язку $S = 5$, отже, ці кінематичні пари — V класу.

У гвинтовій парі (рис. 2.6), наприклад, при нерухомій гайці, гвинт може повертатися навколо осі x і одночасно переміщатися вздовж цієї самої осі. Проте ці рухи, як зазначено, взаємозв'язані, а тому гвинтова пара є також парою V класу.

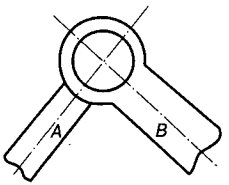
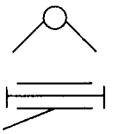
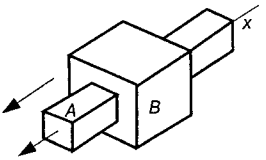
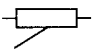
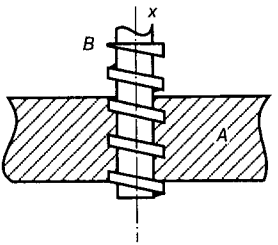
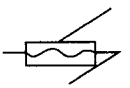
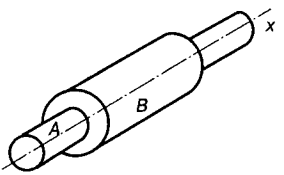
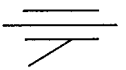
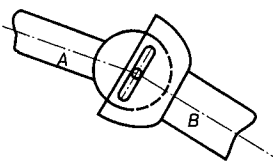
У циліндричній парі (рис. 2.7) втулка B може обертатися навколо осі x циліндра A і переміщатися вздовж неї. Ці рухи незалежні, а тому ця пара відноситься до пари IV класу ($H = 2$, $S = 4$). Це стосується і сферичної пари з пальцем (рис. 2.8). Кінець ланки A має форму сфери з пальцем, вісь якого проходить через центр сфери. Ланка B має також сферичну поверхню і паз для пальця. У відносному русі ланка B може повертатися навколо осі пальця, а також відносно осі, яка перпендикулярна до площини симетрії паза і проходить через центр сфери.

Якщо у парі (рис. 2.8) забрати палець, то одержимо суто сферичну кінематичну пару (рис. 2.9). Тепер ланка A відносно ланки B (або навпаки) може повертатися навколо однієї з трьох взаємно перпендикулярних осей, які проходять через центр сфери. Тому сферична пара відноситься до III класу ($H = 3$, $S = 3$). У площинній кінематичній парі (рис. 2.10) ланка A відносно ланки B (або навпаки) може рухатися вздовж осей x і y та повертатися навколо осі z. Ця пара також III класу ($H = 3$, $S = 3$).

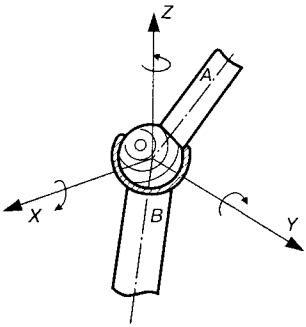
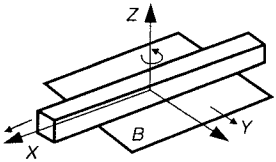
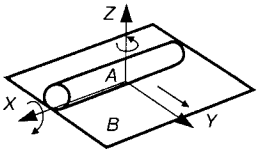
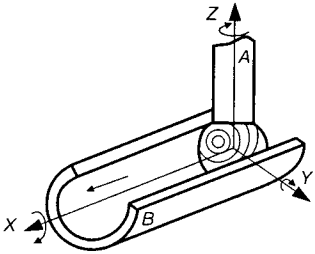
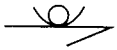
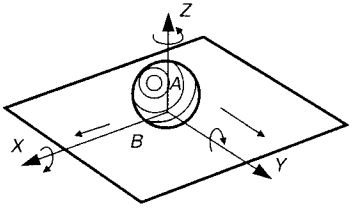
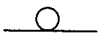
Кінематична пара циліндр—площина (рис. 2.11) допускає обертові рухи тіла A відносно B навколо осей x, z і поступальні вздовж осей x, y. Тому ця пара відноситься до II класу ($H = 4$, $S = 2$).

Таблиця 2.1

ПРИКЛАДИ КІНЕМАТИЧНИХ ПАР

Номер рисунка	Рисунок	Умовні позначення	Назва пари	*H*	*S*	Клас пари
2.4			Обертова	1	5	V
2.5			Поступальна	1	5	V
2.6			Гвинтова	1	5	V
2.7			Циліндрична	2	4	IV
2.8			Сферична з пальцем	2	4	IV

Продовження табл. 2.1

Номер рисунка	Рисунок	Умовні позначення	Назва пари	*H*	*S*	Клас пари
2.9			Сферична	3	3	III
2.10			Площинна	3	3	III
2.11			Циліндр–площина	4	2	II
2.12			Куля–циліндр	4	2	II
2.13			Куля–площина	5	1	I

Так само парою II класу є пара куля—циліндр (рис. 2.12), яка допускає, крім трьох обертових рухів, і поступальний рух уздовж осі циліндра.

Прикладом пари I класу є пара, схема якої зображена на рис. 2.13. Тут куля A відносно площини B має можливість обертатися навколо трьох осей (x, y, z) та рухатися поступально вздовж осей x і y ($H = 5$, $S = 1$). Рух кулі вздовж осі z неможливий, оскільки в один бік він обмежений площиною B, а при русі у зворотний бік порушується контакт ланок, і отже, кінематична пара перестає існувати.

Залежно від ***форми елементів*** кінематичні пари поділяються на нижчі і вищі. ***Нижчими*** кінематичними парами називають такі пари, у яких елементи кінематичних пар стикаються ***поверхнями*** (див. рис. 2.4—2.10). ***Вищими*** кінематичними парами називають такі пари, в яких елементи кінематичних пар стикаються ***по лінії*** або ***в точці*** (див. рис. 2.11—2.13). Слід зазначити, що лінії і точки можуть бути елементами нижчих кінематичних пар. Наприклад, у деяких пристроях елементи обертової пари стикаються окремими лініями і, незважаючи на це, їх не можна назвати вищими, оскільки такий самий відносний рух ланок (обертовий) можна одержати стиканням ланок поверхнями.

Нижчі кінематичні пари характеризуються тим, що можуть передати більше зусилля, ніж вищі, завдяки більшій площі контакту між ланками. Проте витрати на тертя у таких парах більші порівняно з вищими (наприклад, у підшипниках кочення).

Нижчі пари мають властивість ***інверсії (оборотності руху),*** тобто характер відносного руху ланок не змінюється від того, яка ланка рухається (A відносно B, чи B відносно A, див. рис. 2.4—2.10). Вищі пари такої властивості не мають. Так, при перекочуванні без ковзання циліндра по нерухомій площині (рис. 2.14, *а*) траєкторія точки M, яка лежить на поверхні циліндра A, буде циклоїдою, і навпаки, при обкочуванні без ковзання площини B навколо нерухомого циліндра A (рис. 2.14, *б*) точка M площини B буде описувати евольвенту.

У сучасних механізмах найбільш поширені кінематичні пари IV і V класів.

Для того щоб елементи кінематичних пар перебували у постійному контакті, пари повинні бути замкнутими. Замикання може бути ***геометричним*** або ***силовим***. Геометричне замикання здійснюється відповідною геометричною формою елементів ланок кінематичної пари або конструкцією кінематичної пари.

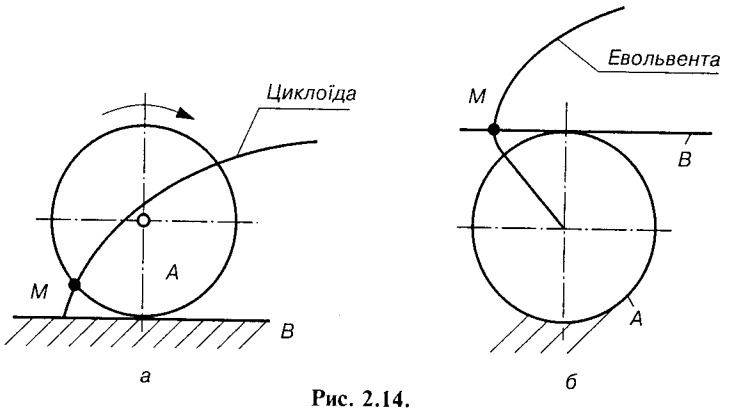


Рис. 2.14.

Наприклад, усі пари, які зображено на рис. 2.4—2.9, 2.12, замкнуті геометрично, оскільки стикання елементів цих пар забезпечується їхніми геометричними формами. Для того щоб пари, зображені на рис. 2.10, 2.11, 2.13, були замкнутими, необхідно тіло *A* притискати до площини *B* будь-якою силою. Силове замикання забезпечується силою ваги, силою пружності пружини тощо.

2.2. Кінематичні ланцюги та їх класифікація

Кінематичним ланцюгом називається система ланок, які зв'язані між собою кінематичними парами. На рис. 2.15 зображено схему кінематичного ланцюга, складену з чотирьох ланок, які утворюють три кінематичні пари. Ланки *1* і *2* належать до обертової пари *A* (V класу), ланки *2, 3* — до поступальної пари *B* (V класу), ланки *3, 4* — до обертової пари *C* (V класу).

Кінематичні ланцюги поділяються на ***прості*** і ***складні.*** ***Простим*** кінематичним називається такий ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше як до двох кінематичних пар (див. рис. 2.15). ***Складним*** кінематичним називається ланцюг, у якому є хоч одна ланка, що входить більше ніж до двох кінематичних пар (рис. 2.16 — ланка *3* входить у три кінематичні пари *B, C, E*).

У свою чергу, прості і складні кінематичні ланцюги поділяються на ***замкнуті*** й ***незамкнуті.*** У ***незамкнутому*** кінематичному ланцюгу є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару (рис. 2.15, 2.16), у ***замкнутому*** кінематичному

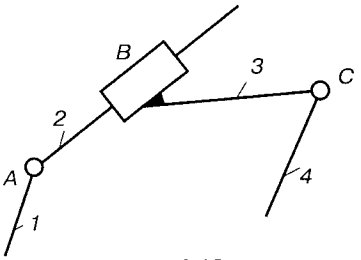


Рис. 2.15.

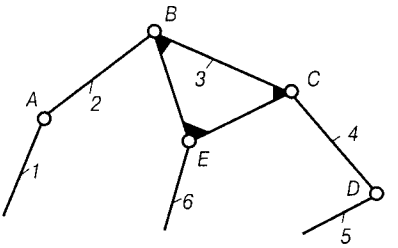


Рис. 2.16.

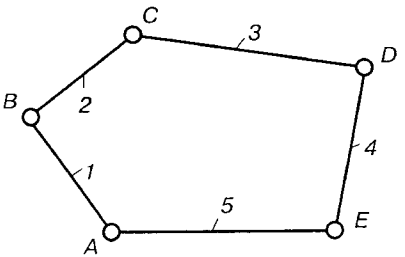


Рис. 2.17.

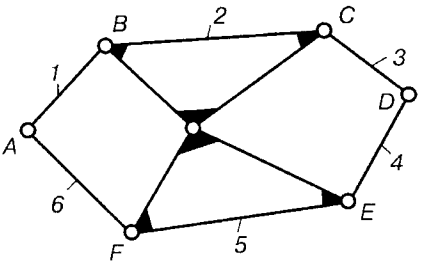


Рис. 2.18.

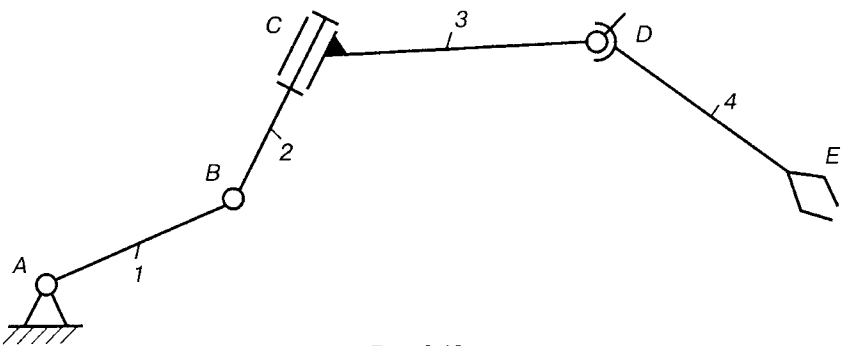


Рис. 2.19.

ланцюгу (рис. 2.17, 2.18) кожна ланка входить не менше як у дві кінематичні пари.

Отже, на рисунках зображено: простий незамкнутий (2.15), складний незамкнутий (2.16), простий замкнутий (2.17), складний замкнутий (2.18) кінематичні ланцюги.

Залежно від форми руху ланок кінематичні ланцюги поділяються на ***плоскі*** і ***просторові. Плоским*** називають ланцюг, у якому всі точки ланок описують траєкторії, що лежать в одній або паралельних площинах. ***Просторовим*** називають ланцюг, у якого точки ланок рухаються у різних непаралельних площинах. Якщо точки ланок описують траєкторії на концентричних сферах, то ланцюг називають ***сферичним.*** Просторові кінематичні ланцюги використовуються при проектуванні механізмів маніпуляторів і роботів. Приклад такого механізму показано на рис. 2.19.

2.3. Кінематичні з'єднання

Кінематичні пари I—IV класів у деяких випадках зручно замінити еквівалентними їм кінематичними ланцюгами, які утворені тільки парами V класу. Такий ланцюг називають ***кінематичним з'єднанням,*** під яким розуміють незамкнутий кінематичний ланцюг, що може за характером відносних рухів ланок замінити кінематичну пару.

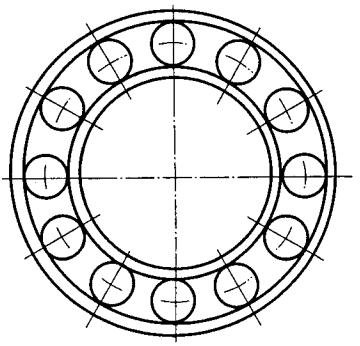
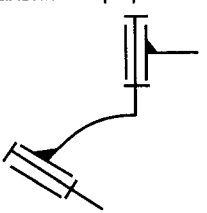
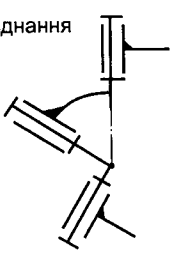
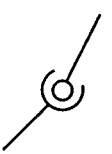
У табл. 2.2 показано приклади кінематичних з'єднань і еквівалентні їм кінематичні пари [41].

Кінематичне з'єднання містить у собі кілька ланок і кінематичних пар, але тільки дві ланки можуть бути з'єднані з іншими ланками машини. Наприклад, у підшипниках кочення (рис. 2.20) тільки внутрішнє або зовнішнє кільце з'єднане з ланками машини, а кульки (ролики), сепаратор і кільця взаємодіють між собою. Таке еквівалентне обертовій парі кінематичне з'єднання зменшує тертя у парі. Аналогічно виконуються роликові напрямні, еквівалентні поступальній парі, і гвинтові напрямні з кульками, еквівалентні гвинтовій парі.

Сферичний шарикопідшипник, який допускає перекоси осей у деяких межах, можна вважати сферичною парою з пальцем. Універсальний карданний шарнір (рис. 2.21) є послідовним з'єднанням трьох ланок двома обертовими парами, осі яких перетинаються. Таке з'єднання простіше у виготовленні і надійніше, ніж сферична пара з пальцем. Послідовне з'єднання чотирьох

Таблиця 2. 2

ПРИКЛАДИ КІНЕМАТИЧНИХ З'ЄДНАНЬ

Номер рисунка	Рисунок (або схема) і назва кінематичного з'єднання	Число ступенів вільності	Схема і назва еквівалентної кінематичної пари
2. 20	Радіально-упорний шарико- або роликопідшипник 	1	Обертова пара
2.21	Універсальний шарнір 	2	Сферична пара з пальцем
2.22	Сферичне з'єднання 	3	 Сферична пара

ланок трьома обертовими парами, осі яких перетинаються в одній точці (рис. 2.22), замінює сферичну пару.

Використання кінематичних з'єднань замість кінематичних пар дає змогу збільшити несучу здатність конструкції машини, зменшити витрати на тертя, спростити технологію виготовлення.

2.4. Структурні формули кінематичних ланцюгів

Основи теорії структури кінематичних ланцюгів закладені у праці видатного російського вченого професора П. І. Сомова, опублікованій у 1887 р., і розвинуті радянськими вченими. Будемо дотримуватися здебільшого методів, розроблених ними [1, 4].

Раніше було встановлено, що коли на рух ланки у просторі не накладено ніяких умов зв'язку, то вона має ***шість*** ступенів вільності. Тоді якщо число ланок кінематичного ланцюга дорівнює k, то загальне число ступенів вільності, які мали k ланок до їхнього з'єднання у кінематичні пари, дорівнюватиме $6k$. Кожна кінематична пара накладає різне число зв'язків на відносний рух ланок, що залежить від класу пари (див. параграф 2.1). Позначимо число пар I класу, що входять до складу ланцюга, через p_1, II — p_2, III — p_3, IV — p_4, V — p_5. Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку, які накладає кожна кінематична пара на відносний рух ланок (див. табл. 2.1). Для визначення загального числа ступенів вільності ланок кінематичного ланцюга треба з $6k$ ступенів вільності, що їх ланки мали до того, як увійшли до кінематичної пари, вилучити ті ступені вільності, які віднімають кінематичні пари. З табл. 2.1 видно, що одна пара I класу накладає на відносний рух ланок одну умову зв'язку ($S = 1$), II класу — дві ($S = 2$) і т. д. Тоді число ступенів вільності H, що їх має кінематичний ланцюг, становить

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (2.3)$$

Оскільки в механізмах одна ланка нерухома, то при вивченні руху всіх ланок механізму їхні абсолютні переміщення розглядаємо як такі, що відбуваються відносно однієї з ланок, прийнятої за нерухому. Якщо одна з ланок кінематичного ланцюга буде нерухомою, то загальне число ступенів вільності ланок ланцюга зменшиться на шість, тобто число ступенів вільності (рухомості) відносно нерухомої ланки

$$W = H - 6. \qquad (2.4)$$

Підставляючи у (2.4) замість H його вираз з (2.3), одержуємо

$$W = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (2.5)$$

Якщо в (2.5) величину $k - 1$ позначити n, то

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \qquad (2.6)$$

де n — число ***рухомих*** ланок кінематичного ланцюга.

Формула (2.6) має назву ***формули рухомості*** або ***структурної формули кінематичного ланцюга загального вигляду.***

Формула (2.6) вперше, у дещо іншому вигляді, була одержана професором П. І. Сомовим і розвинута професором А. П. Малишевим, а тому носить назву ***формули Сомова—Малишева.***

Застосування цієї формули можливе тільки у тому випадку, коли на рухи ланок, які входять до складу механізму, не накладено будь-яких загальних додаткових умов. Ці умови, загальні для всього механізму в цілому, можуть бути дуже різноманітними. Так, можна поставити вимогу, щоб у механізмі, який складається з самих обертових пар V класу, осі всіх цих пар були паралельні, перетиналися в одній точці або перетиналися у двох точках і т. п. Виявляється, що такі додаткові вимоги істотно змінюють характер руху механізму і змінюють відповідно вигляд структурної формули механізму.

Нехай, наприклад, у механізмі, який складається з обертових пар V класу, осі всіх пар паралельні (рис. 2.23).

Виберемо систему координат xyz так, щоб напрямок осі x збігався з напрямком осей пар, а осі y і z лежали у площині, перпендикулярній до осей пар. Тоді неважко переконатися, що в цьому випадку ланки механізму $OABC$ рухатимуться паралельно загальній площині, яка містить осі y і z, тобто маємо так званий ***плоский механізм.***

Які загальні обмеження накладено на рухи всіх ланок механізму умовою паралельності осей усіх кінематичних пар? Ці обмеження будуть такими. Ланки механізму не можуть мати обертового руху навколо осей y і z і поступального руху вздовж осі x, тобто з шести можливих рухів три не можуть бути здійсненими.

Якщо на рух усіх ланок механізму в цілому накладено три загальні обмеження, то, очевидно, цю обставину треба взяти до уваги, підраховуючи ступені вільності окремих ланок і рухомості механізму в цілому. Справді, якщо в загальному випадку число ступенів вільності рухомих ланок механізму дорівнює $6n$, то для плоского механізму — $(6 - 3)n = 3n$, тобто ***тіло в плоскому русі***

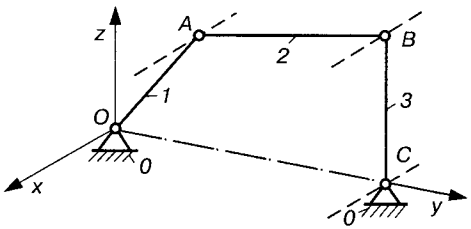


Рис. 2.23.

має три ступеня вільності (два поступальні вздовж осей y і z, один обертовий навколо осі x). Відповідно з п'яти зв'язків, які накладає пара V класу, у цьому механізмі вона накладатиме тільки 5 – 3 = 2, оскільки три зв'язки вже накладено умовою паралельності осей пар і т. п. Тоді структурна формула механізму (2.6) перепишеться так:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3,$$

тобто ***ступені вільності*** (рухомості) плоского механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (2.7)$$

Це є ***структурна формула для плоских механізмів загального вигляду,*** або ***формула Чебишова.***

До складу плоских механізмів можуть входити тільки пари IV і V класів, причому пари IV класу — вищі, V — нижчі.

З наведеного прикладу видно, що коли на рух усіх ланок механізму в цілому накладено якесь загальне для всього механізму число зв'язків, то число цих загальних зв'язків із структурної формули механізму (2.6) треба вилучити, віднявши число цих зв'язків із числа ступенів вільності всіх рухомих ланок механізму і з числа умов зв'язку всіх кінематичних пар, що входять до складу механізму.

Залежно від числа вказаних загальних зв'язків, накладених на рух усіх ланок механізму, всі механізми ділять на ***п'ять сімей. Номер сім'ї*** визначається числом цих загальних зв'язків.

Член-кореспондент АН СРСР В. В. Добровольський у 1943 р. вивів загальну структурну формулу механізмів

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=5}^{m+1}(k - m)p_k \ , \qquad (2.8)$$

де m — кількість загальних зв'язків, накладених на рух ланок механізму ($m = 0...4$); k — клас кінематичної пари ($k = 1...5$).

Тепер з'ясуємо, який зв'язок існує між ступенями вільності W і визначеністю руху ланок механізму. Для цього розглянемо два приклади. На рис. 2.24 зображено схему чотириланкового кінематичного ланцюга, до складу якого входять три рухомі ланки ($n = 3$), чотири обертові кінематичні пари V класу ($p_5 = 4$). Тоді

ступені вільності такого кінематичного ланцюга можна визначити за формулою Чебишова ($p_4 = 0$)

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Якщо будь-якій ланці, наприклад AB, надати закон руху, у даному випадку обертового, то всі інші ланки BC і CD будуть мати також цілком визначений рух.

Як відомо, положення твердого тіла, яке вільно рухається у просторі, визначається шістьома незалежними координатами. Їх прийнято називати ***узагальненими***, оскільки вони визначають положення всього твердого тіла. Аналогічно ***узагальненими координатами механізму*** називають незалежні між собою лінійні або кутові координати, які визначають положення всіх ланок механізму відносно стояка. У даному випадку (рис. 2.24) за узагальнену координату можна прийняти кут повороту кривошипа φ_1, оскільки положення ланки *1* визначає положення всіх інших рухомих ланок шарнірного чотириланкового механізму.

Ланка, якій приписують одну або кілька узагальнених координат, називається ***початковою***. Цей термін пов'язаний з тим, що знаходження положень усіх ланок механізму починають із знаходження положень початкових ланок.

Для кінематичного ланцюга, схему якого зображено на рис. 2.25, ступінь вільності ($n = 4$, $p_5 = 5$, $p_4 = 0$)

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 0 = 2.$$

Якщо у цьому ланцюзі задано лише положення ланки AB, то очевидно, що положення решти рухомих ланок буде невизначеним. Коли ж задати ще положення іншої ланки, наприклад ланки *4*, кутом φ_4, то всі ланки механізму будуть мати цілком визначений рух. Отже, у механізмі, зображеному на рис. 2.25, повинно бути дві початкові ланки.

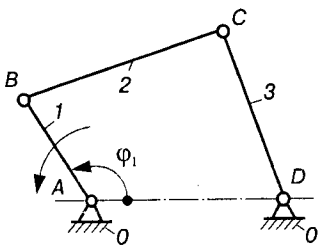


Рис. 2.24.

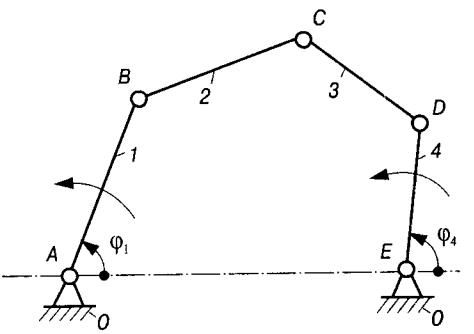


Рис. 2.25.

Таким чином, ступені вільності кінематичного ланцюга відносно стояка визначають кількість початкових ланок механізму. Останні можуть збігатися із вхідними ланками механізму, а можуть і не збігатися. Добір початкової ланки визначається зручністю визначення положень ланок механізму і зручністю його аналізу.

На основі наведеного можна показати, як із кінематичного ланцюга одержати механізм. Для цього необхідно одну з ланок ланцюга зробити нерухомою (стояком), підрахувати ступені вільності і залежно від їхньої кількості одній або кільком ланкам задати закон руху (див. рис. 2.24, 2.25).

Початкові ланки надалі будемо показувати круговими (або прямими) стрілками.

2.5. Зайві ступені вільності і умови зв'язку

Під час дослідження структури механізмів можуть виявитися ступені вільності та умови зв'язку, що не впливають на рухомість механізму в цілому. Такі ступені вільності і умови зв'язку називають ***зайвими.*** Як приклад, на рис. 2.26 зображено схему кулачкового механізму, до складу якого входить стояк *0*, кулачок *1*, штовхач *2*, ролик *3*. Стояк і кулачок утворюють обертову пару V класу, кулачок і ролик — пару IV класу, штовхач і стояк — поступальну пару V класу, штовхач і ролик — обертову пару V класу. Тоді, виходячи з числа рухомих ланок і кінематичних пар, ступінь вільності механізму за формулою Чебишова

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Проте очевидно, що у цьому механізмі досить знати положення одного кулачка, щоб однозначно визначити положення штовхача, тобто досить мати одну початкову ланку, а не дві, як це випливає з формули Чебишова. В цьому механізмі ролик *3* створює зайвий ступінь вільності, він може перекочуватися і ковзати відносно кулачка, що не впливає на характер руху штовхача. Ролик є конструктивним елементом, який введено для заміни тертя ковзання тертям кочення, тобто для зменшення опору сил тертя і зношення ланок. Кінематика механізму не змінюється, якщо ролик забрати і штовхач *2* безпосередньо з'єднати з кулачком *1* у кінематичну пару IV класу (на рис. 2.26 цей випадок показано штриховою лінією).

На рис. 2.27 зображено механізм спарника (паралельних кривошипів), з розмірами ланок: $AB = CD$, $AD = EF = BC$, $AE = DF$ і

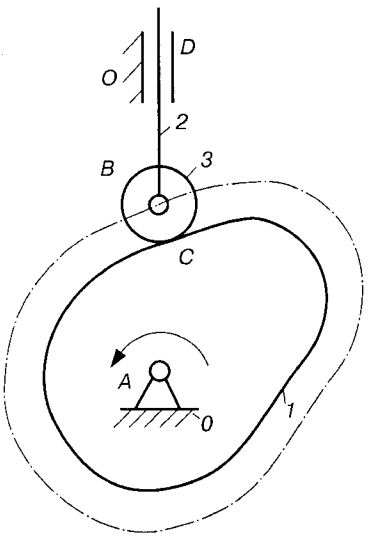


Рис. 2.26.

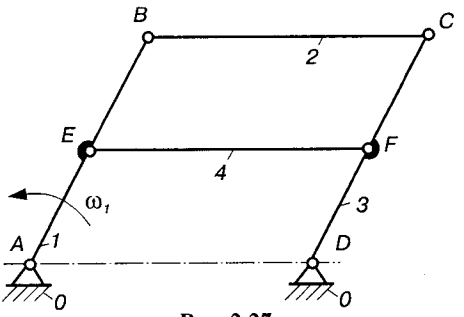


Рис. 2.27.

$BE = CF$. За кількістю рухомих ланок ($n = 4$) і пар V класу ($p_5 = 6$) ступінь вільності механізму $W = 0$, тобто цей кінематичний ланцюг є нерухомою фермою. Проте, коли ланка EF паралельна ланці BC, механізм має один ступінь вільності ($W = 1$), оскільки фігура $ABCD$ завжди утворює паралелограм, і, отже, відстань між точками E і F ніколи не змінюється і дорівнює відстані між точками A і D або B і C. Тоді без усякого порушення характеру руху механізму ланку EF (або BC) можна забрати, оскільки ця ланка накладає на рух механізму зайві (пасивні) зв'язки, тобто нові зв'язки на вже існуючі. На практиці вводять ланку EF для збільшення жорсткості механізму.

Під час проведення структурного аналізу механізму необхідно позбутися зайвих ступенів вільності і пасивних зв'язків.

2.6. Проектування раціональних механізмів

При проектуванні реальних механізмів треба брати до уваги, що формули Сомова—Малишева (2.6) і Чебишова (2.7) одержано для ідеальних механізмів, тобто таких, в яких усі ланки виготовлено абсолютно точно і які можна складати без деформації ланок. У реальних механізмах лінійні і кутові розміри ланок та форма елементів кінематичних пар забезпечуються з певною

точністю, яка визначається можливостями технологічного устаткування, а тому в таких механізмах з'являються додаткові зайві зв'язки q, хоча за кількістю рухомих ланок і кінематичних пар їх не повинно бути. Механізми, які мають зайві зв'язки, називають ***статично невизначеними,*** оскільки їх неможливо зібрати без деформації ланок [62, 72]. З урахуванням числа q зайвих зв'язків формула Сомова—Малишева набуває вигляду

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 - q,$$

або у короткій формі

$$W = 6n - \left[\sum_{i=1}^{5}(6 - i)p_i + q\right], \tag{2.9}$$

де $i = H$ — рухомість кінематичної пари, p_i — кількість пар, рухомість яких дорівнює i; при $q = 0$ механізм — статично визначена система, при $q > 0$ — статично невизначена система.

У загальному вигляді розв'язати рівняння (2.9) відносно q дуже важко, оскільки маємо дві невідомі величини (W і q). Проте у тих випадках, коли W дорівнює числу узагальнених координат механізму, які знайдено з геометричних міркувань, то з формули (2.9) можна знайти число зайвих зв'язків [62]:

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^{5}(6 - i)p_i. \tag{2.10}$$

Таким чином, можна розв'язати питання про статичну визначеність механізму, або, знаючи, що механізм статично визначений, одержати (або перевірити) число ступенів вільності W.

Для плоских механізмів залежності (2.9), (2.10) набувають відповідно вигляду

$$W_{\text{п}} = 3n - 2p_5 - p_4 - q_{\text{п}}, \tag{2.11}$$

тоді

$$q_{\text{п}} = W_{\text{п}} - 3n - 2p_5 - p_4. \tag{2.12}$$

Індекс "п" нагадує про те, що йдеться про ідеально плоский механізм або, точніше, про його плоску схему. Через неточності виготовлення плоский механізм у деякій мірі є просторовим.

Якщо зайвих зв'язків немає ($q = 0$), механізм складається без деформації ланок, останні ніби самоуставлюються, тому такі механізми називають ***самоустановлювані*** або ***раціональні.***

Методику визначення і усунення зайвих зв'язків у кінематичних ланцюгах механізмів розглянемо на прикладах [72].

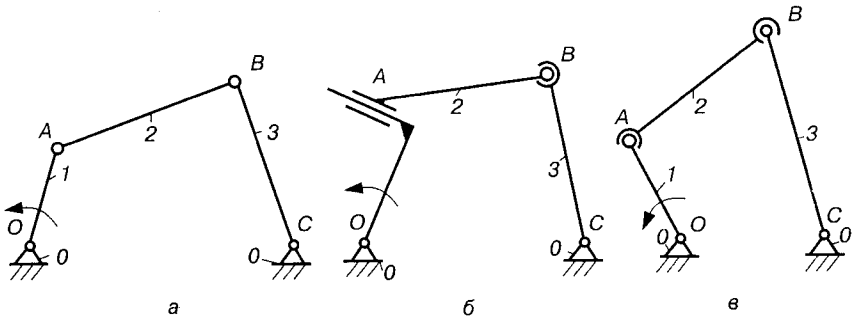


Рис. 2.28.

На рис. 2.28, *а* наведено структурну схему шарнірного чотириланкового механізму, до складу якого входять три рухомі ланки і чотири обертові пари V класу. Механізм належить до плоских механізмів.

Число ступенів вільності плоскої схеми механізму визначається за формулою Чебишова

$$W_{\text{п}} = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Проте при виготовленні деталей механізму неможливо забезпечити ідеальну паралельність осей усіх кінематичних пар через природні неточності обладнання, яке використовується для їхнього виготовлення. Порушення паралельності осей може наступити і при експлуатації механізму (деформація деталей, їхнє зношування). Тому фактично такий механізм слід розглядати як просторовий. Число ступенів вільності за формулою Сомова—Малишева ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$)

$$W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2,$$

тоді число зайвих зв'язків

$$q = W_{\text{п}} - W = 1 + 2 = 3.$$

Щоб даний просторовий механізм був статично визначеним, потрібна інша його структурна схема, наприклад така, що зображена на рис. 2.28, *б*, де $p_5 = 2$, $p_4 = 1$ (пара A), $p_3 = 1$ (пара B). Тоді

$$q = W_{\text{п}} - W = 1 - 1 = 0,$$

де $W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$.

Такий механізм є статично визначеним ($q = 0$) і його складання здійснюється без деформації ланок.

Можливий варіант механізму (рис. 2. 28, *в*) з двома сферичними парами (*A* і *B*). У цьому випадку, крім основної рухомості механізму $W = 1$, з'явиться ще ***місцева рухомість*** $W_м = 1$ — можливість обертання шатуна *2* навколо своєї осі *AB*. Ця рухомість не впливатиме на загальну рухомість механізму.

Інколи доводиться враховувати і так звану ***групову рухомість*** ланок. Наприклад, у механізмі гідроприводу (рис. 2.29) у випадку, коли кінематичні пари *B* і *C* сферичні, ланки *2*, *3* будуть мати додаткову загальну (групову) рухомість у вигляді можливого обертання навколо осі *BC*.

Механізми з незамкнутими кінематичними ланцюгами збираються без натягів, тому вони статично визначені і не мають зайвих зв'язків ($q = 0$).

Крім зайвих зв'язків, які маємо у замкнутих кінематичних ланцюгах (зайві контурні зв'язки), слід розрізняти ще й зайві, або додаткові, зв'язки у кінематичних парах (локальні зв'язки), які викликані введенням додаткових елементів пар з метою підвищення їхньої міцності і жорсткості. Так, вал утворює із стояком (рис. 2.30, *а*) обертову пару *A*, що цілком досить з точки зору руху вала ($W = 1$). Проте для забезпечення необхідної міцності і жорсткості системи, особливо під час передачі великих сил, додають хоча б ще один підшипник *B*. Тоді, якщо пари *A* і *B* V класу, то

$$W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -4,$$

тобто на рух вала буде накладено, крім основних п'яти зв'язків, ще п'ять додаткових (повторних) зв'язків. Для такої системи треба забезпечити високу точність виготовлення, особливо співвісність обох опор, інакше вал буде деформуватися і в матеріалі вала та в підшипниках можуть з'явитися недопустимо великі напруження.

Якщо обидва підшипники виконати сферичними елементами (рис. 2. 30, *б*), причому лівий нерухомий в осьовому напрямку, а правий має осьову рухомість (плаваючий), то вал буде статично визначеним. Причому максимальний прогин від сили *F*, прикладеної посередині вала, буде вдвічі меншим, ніж з консольною опорою (рис. 2.30, *а*).

Зв'язки, які з'являються у кінематичних парах за рахунок введення додаткових елементів пар, крім тих, що зумовлені геометричними міркуваннями існування пари, називають ***зайвими локальними зв'язками.*** За наявності локальних зв'язків відносний

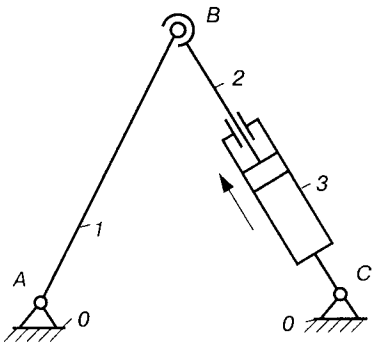


Рис. 2.29.

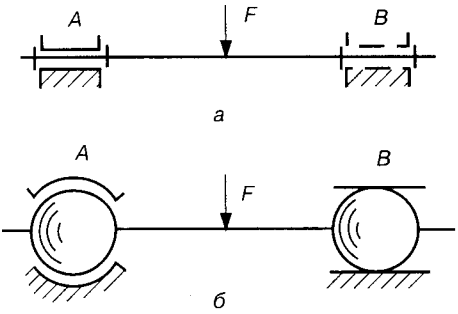


Рис. 2.30.

рух ланок або стає неможливим (заклинювання, защемлення елементів), або здійснюється за рахунок деформації ланок, збільшених зазорів між робочими поверхнями або їхнього зношування.

З наведених прикладів (див. рис. 2.28—2.30) можна зробити такі висновки. Щоб позбутися зайвих зв'язків, необхідно знизити клас відповідних кінематичних пар, перейшовши таким чином від розгляду плоских механізмів до просторових. З урахуванням цього слід проектувати реальний механізм, у якому невеликі зміщення відносного положення ланок і елементів кінематичних пар викликані неточностями виготовлення або деформацією ланок під навантаженням, не впливають на його нормальну роботу. У деяких випадках, навпаки, доцільно вводити зайві зв'язки, наприклад, для збільшення жорсткості механізму або поділу навантаження на кілька потоків.

Зайві ступені вільності, які з'являються при заміні кінематичних пар парами нижчого класу, залежно від конкретних умов можуть бути як корисними, так і шкідливими. Зокрема, при цьому можуть зменшуватися зношування вищих кінематичних пар і поліпшуватися експлуатаційні характеристики механізмів або раціональніше розподілятимуться зусилля між ланками.

Детальніше питання проектування раціональних механізмів розглядається у працях [62, 72].

2.7. Заміна вищих кінематичних пар нижчими

При структурному аналізі механізмів вищі кінематичні пари зручно замінити нижчими. При цьому має задовольнятися ***умова структурної еквівалентності,*** тобто щоб замінний механізм мав таке саме число ступенів вільності і щоб характер миттєвого відносного руху не змінився. На рис. 2.31 зображено схему триланкового плоского механізму з двома обертовими парами (*A* і *B*) та однією вищою парою *C*, утвореною ланками *1*, *2*. Профілями елементів пари *C* є дві дуги кіл з центрами K_1 і K_2. Ступінь вільності такого механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1. \qquad (2.13)$$

Незважаючи на те що точка *C* дотику профілів ланок *2*, *3* під час руху механізму змінює своє положення, відстань $K_1K_2 = r_1 + r_2 = \text{const}$. Тому заданий механізм буде еквівалентний плоскому шарнірному чотириланковому механізму (рис. 2.31, *б*), в якого довжини відрізків AK_1, K_1K_2, BK_2 такі самі, як на рис. 2.31, *а*, і ступінь вільності

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \qquad (2.14)$$

Замінний механізм AK_1K_2B еквівалентний заданому і за законом руху ланок, тобто зберігається відношення швидкостей ω_1/ω_3.

Порівнюючи механізми, зображені на рис. 2.31, *а*, *б*, та залежності (2.13) і (2.14), бачимо, що ***вища пара у плоских механізмах еквівалентна одній умовній ланці і двом кінематичним парам V класу.***

Розглянутий спосіб заміни механізму можна узагальнити й тоді, коли профілями вищих пар є криві змінної кривизни і мають спільну дотичну в точках спряження профілів (рис. 2.31, *в*). Однак у цьому випадку кожному положенню механізму відповідають різні еквівалентні "миттєві" шарнірні чотирила́нкові механізми AK_1K_2B, у яких K_1 і K_2 є миттєвими центрами кривизни профілів, що відповідають точці *C* дотику.

Таким чином, щоб замінити вищу кінематичну пару нижчою, необхідно ввести додатково умовну ланку з двома обертовими кінематичними парами V класу, центри шарнірів яких треба розмістити у центрах кривизни профілів ланок, що утворюють цю вищу пару, і заново введену ланку слід з'єднати нижчими парами з тими ланками, які входили до складу вищої пари.

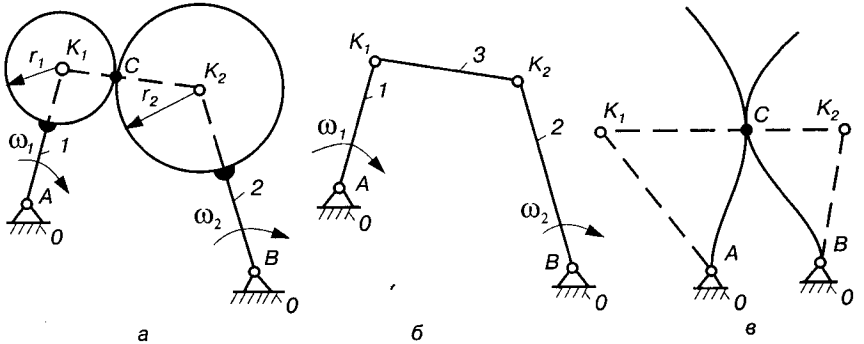


Рис. 2.31.

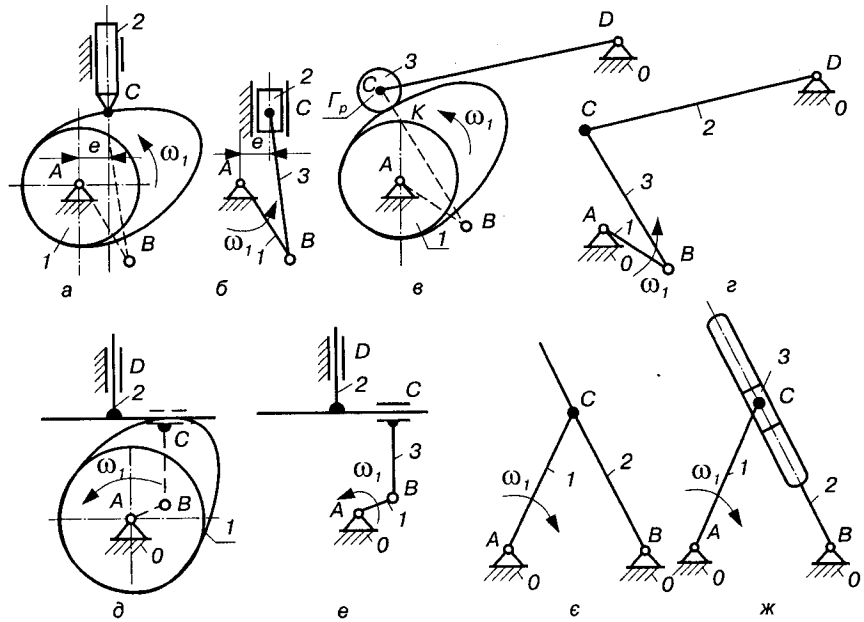


Рис. 2.32.

На рис. 2.32 показано інші приклади побудови замінних механізмів (*а, в, д, є* — дійсні механізми; *б, г, е, ж* — відповідні їм замінні механізми). Якщо профілем будь-якої ланки вищої кінематичної пари є пряма, то обертова пара переходить у поступальну (центр кривизни такого профілю знаходиться у нескінченності).

2.8. Основний принцип утворення механізмів

Основний принцип утворення механізмів, який вперше було сформульовано у 1914 р. російським вченим Л. В. Ассуром, розкриває не тільки методику утворення механізмів шляхом послідовного приєднання кінематичних ланцюгів, але й становить основу найраціональнішої класифікації механізмів. Цей принцип полягає у тому, що ***будь-який механізм можна одержати, якщо до початкової ланки (або початкових ланок) і стояка послідовно приєднувати кінематичні ланцюги з нульовим ступенем вільності.***

Справді, як було показано вище, до складу кожного механізму входять нерухома ланка (стояк), початкові ланки, тобто ланки, закони руху яких задано і від яких залежать закони руху всіх інших ланок. Отже, приступаючи до створення механізму необхідного ступеня вільності, закріпляємо одну з ланок (утворюємо стояк) і вводимо у кінематичні пари з цією ланкою початкові ланки за кількістю ступенів вільності, які повинен мати механізм. При цьому кожна початкова ланка повинна мати тільки один ступінь вільності.

Назвемо умовно ***початкову ланку*** і ***стояк***, які утворюють кінематичну пару V класу, ***механізмом I класу.*** На рис. 2.33 зображено механізми I класу, початкові ланки яких утворюють із стояком обертову (рис. 2.33, *а*) або поступальну (рис. 2.33, *б*) пару. Щоб одержати механізм потрібного ступеня вільності, необхідно до механізму (механізмів) I класу приєднати систему ланок, яка становить один або кілька кінематичних ланцюгів з нульовим ступенем вільності. Остання умова випливає з того, що весь механізм повинен мати ступінь вільності, який дорівнює сумі ступенів вільності механізмів I класу.

Як приклад, розглянемо плоский механізм, зображений на рис. 2.34. Ступінь вільності цього механізму можна визначити за формулою Чебишова:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1,$$

де число рухомих ланок $n = 5$, число пар V класу $p_5 = 7$ і число пар IV класу $p_4 = 0$.

Якщо прийняти стояк *0* і ланку *1* за механізм I класу (рис. 2.34, *б*), то ланки *2*—5 утворюють систему ланок, що мають нульовий ступінь вільності ($n = 4$, $p_5 = 6$).

Неважко побачити, що кінематичний ланцюг з ланок *2—5* можна поділити на два кінематичні ланцюги: один, складений з ланок *2—3* (рис. 2.34, *в*), і другий, складений з ланок *5—6* (рис. 2.34, *г*). Кожний з цих кінематичних ланцюгів, складений з двох ланок і трьох кінематичних пар V класу, має ступінь вільності $W_{гр}$, який дорівнює нулю. Розбити ці ланцюги на простіші кінематичні ланцюги, що мали б нульовий ступінь вільності, неможливо.

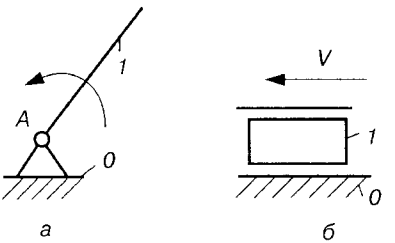


Рис. 2.33.

Кінематичний ланцюг, який після приєднання його вільними елементами пар до інших ланок механізму не змінює його ступінь вільності і який не можна роз'єднати на простіші кінематичні ланцюги нульового ступеня вільності, називається структурною групою, або групою Ассура.

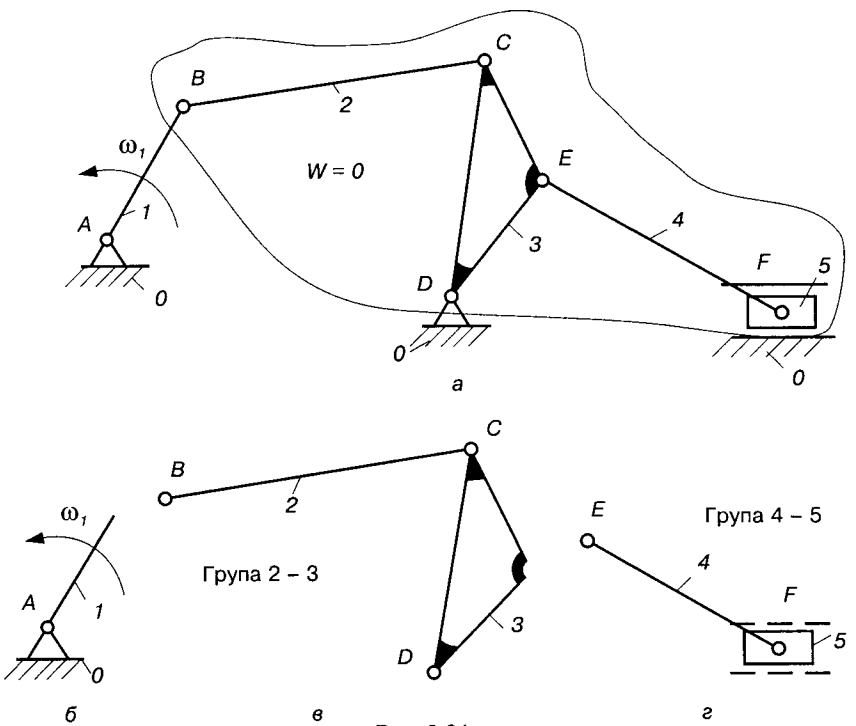


Рис. 2.34.

Таким чином, плоский механізм (див. рис. 2.34, *а*) з одним ступенем вільності можна розглядати як такий, що утворений послідовним приєднанням до механізму I класу двох груп: групи *2—3* і групи *4—5*. Тепер можна дати таке визначення основному принципу утворення механізмів.

Будь-який механізм можна одержати, якщо до механізму (механізмів) I класу послідовно приєднувати структурні групи.

При послідовному приєднанні груп необхідно керуватися певними правилами. При утворенні механізму з одним ступенем вільності перша група приєднується вільними елементами ланок до початкової ланки і стояка. Наступні групи можуть приєднуватися до будь-яких ланок одержаного механізму тільки так, щоб ланки групи могли рухатися відносно одна одної. Не можна групу вільними елементами приєднувати до одної ланки, оскільки у цьому випадку отримаємо нерухомий контур.

Структурні групи плоских механізмів задовольняють умову

$$W_{\text{гр}} = 3n - 2p_5 - p_4 = 0, \qquad (2.15)$$

структурні групи просторових механізмів —

$$W_{\text{гр}} = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 0. \qquad (2.16)$$

Як плоскі, так й просторові структурні групи використовуються не тільки при структурному синтезі, але й при аналізі механізмів.

2.9. Структурна класифікація плоских механізмів

У сучасному машинобудуванні особливо широко поширені плоскі механізми, ланки яких входять до пар IV і V класів. Розглянемо принципи їхньої структурної класифікації.

Структурна класифікація механізмів, основи якої було закладено Л. В. Ассуром і далі розвинуто І. І. Артоболевським, В. В. Добровольським та іншими вченими, є однією з найраціональніших класифікацій плоских механізмів. Перевагою цієї класифікації є те, що вона пов'язана з методами кінематичного, силового та динамічного дослідження механізмів.

В основу структурної класифікації механізмів покладено основний принцип утворення механізмів. Нагадаємо, що будь-який механізм можна одержати шляхом приєднання до ме-

ханізму I класу структурних груп, умовою існування яких є рівність (2.15).

Згідно з параграфом 2.7, усі кінематичні пари IV класу, що входять до складу плоского механізму, можна замінити парами V класу, тому залежність (2.15) можна переписати так:

$$3n - 2p_5 = 0,$$

звідки

$$p_5 = \frac{3}{2}n. \qquad (2.17)$$

Оскільки числа ланок і пар можуть бути тільки цілими, то умову (2.17) задовольнятимуть тільки такі сполучення чисел ланок і кінематичних пар, які входять у групу:

n	2	4	6	8	...
p_5	3	6	9	12	...

Характерно, що до складу структурної групи може входити тільки парне число ланок.

Вибираючи різні сполучення цих чисел, які задовольняють умову (2.17), можна дістати групи різного виду. Усі добуті таким способом групи можна поділити на класи. Як буде показано далі, поділ груп на класи зумовлений методами кінематичного і силового аналізу, властивими групам кожного класу.

Структурні групи і механізми II класу. Як видно з наведеного вище, найпростішою групою буде та група, яка складається з двох ланок і трьох кінематичних пар V класу (рис. 2.35, *а*). Така група дістала назву ***структурної групи (групи Ассура) II класу II порядку,*** або ***двоповідкової групи. Порядок групи*** визначається кількістю елементів пар, якими група приєднується до основного механізму. У групі, зображеній на рис. 2.35, *а*, вільні елементи мають дві пари (*B* і *D*), якими група може приєднуватися до інших ланок.

Групи II класу бувають п'яти видів залежно від кількості обертових і поступальних пар та їхнього взаємного розташування. Назвемо групу, яка має дві ланки і три обертові пари, ***I видом*** групи II класу.

Усі інші види груп II класу можна одержати заміною окремих обертових пар поступальними. Якщо одну з крайніх обертових пар замінити поступальною, одержимо групу ***II виду*** (рис. 2.35, *б, в*). Група, зображена на рис. 2.35, *в*, є окремий ви-

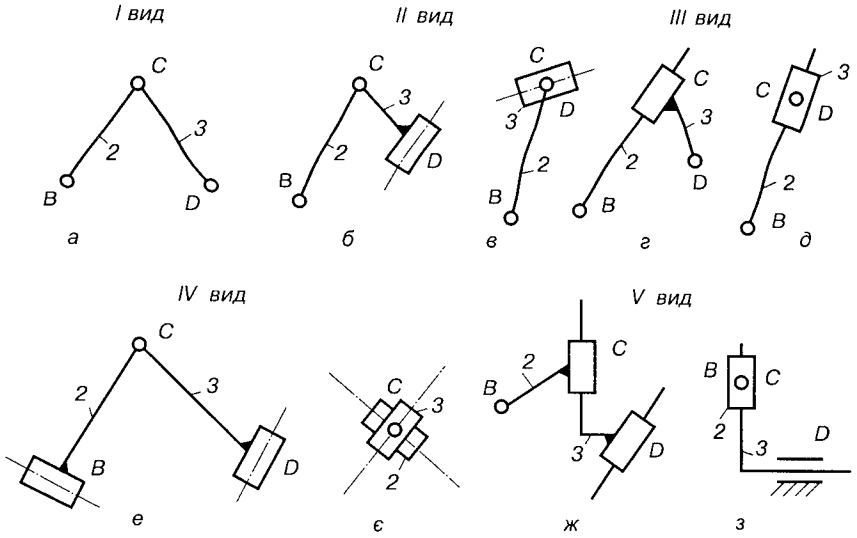


Рис. 2.35.

падок групи, зображеної на рис. 2.35, *б*, у якій довжина відрізка $CD = 0$. ***III вид*** групи II класу зображено на рис. 2.35, *г, д* (на рис. 2.35, *д* $CD = 0$). Тут поступальною замінено середню обертову пару. Якщо замінити дві крайні обертові пари поступальними, то одержимо групу II класу ***IV виду*** (рис. 2.35, *е, є*). На рис. 2.35, *є* відрізки $BC = CD = 0$. І нарешті, у групі ***V виду*** (рис. 2.35, *ж, з*) поступальними замінені крайня і середня обертові пари (на рис. 2.35, *з* $BC = 0$). При заміні всіх обертових пар поступальними одержимо клиновий механізм ($W = 1$).

На рис. 2.36 і 2.37 показано приклади найпростіших механізмів, де використовуються групи II класу всіх п'яти видів.

На рис. 2.36, *а* зображено шарнірний чотириланковий механізм *ABCD* з ланками: *0* – стояк; *1* – кривошип; *2* – шатун; *3* – коромисло. Ланка *1*, яка повертається на 360° навколо нерухомої осі, називається ***кривошипом***; ланка *2*, яка утворює кінематичні пари тільки з рухомими ланками, називається ***шатуном***; ланка *3*, яка здійснює коливальний рух, – ***коромислом***. Шарнірний чотириланковий механізм залежно від розмірів ланок може бути трьох видів: ***кривошипно-коромисловий*** (рис. 2.36, *а*); ***двокривошипний*** (ланки *1*, *3* здійснюють повний поворот, рис. 2.36, *б*); ***двокоромисловий*** (ланки *1*, *3* коливаються, рис. 2.36, *в*).

Прикладом механізму, де використовується група II класу II виду, є кривошипно-повзунковий (або коромислово-повзунковий) механізм (рис. 2.37, *а*); III виду – кривошипно-кулісний механізм (рис. 2.37, *б*); IV виду – тангенсний механізм (рис. 2.37, *в*); V виду – синусний механізм (рис. 2.37, *г*).

Механізми, до складу яких входять тільки групи II класу, називаються ***механізмами II класу.*** Більшість механізмів, які застосовуються у сучасній техніці, належать до механізмів цього класу.

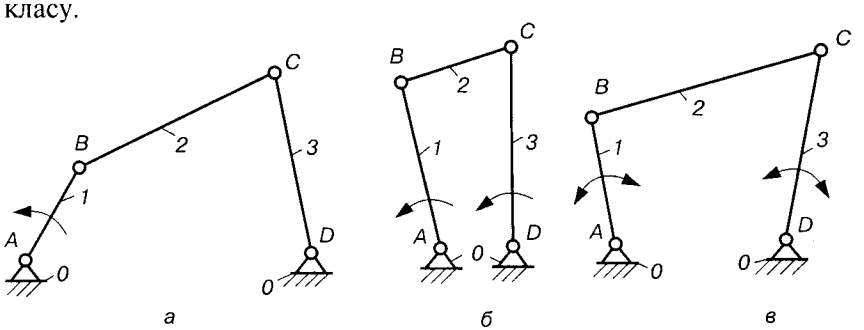


Рис. 2.36.

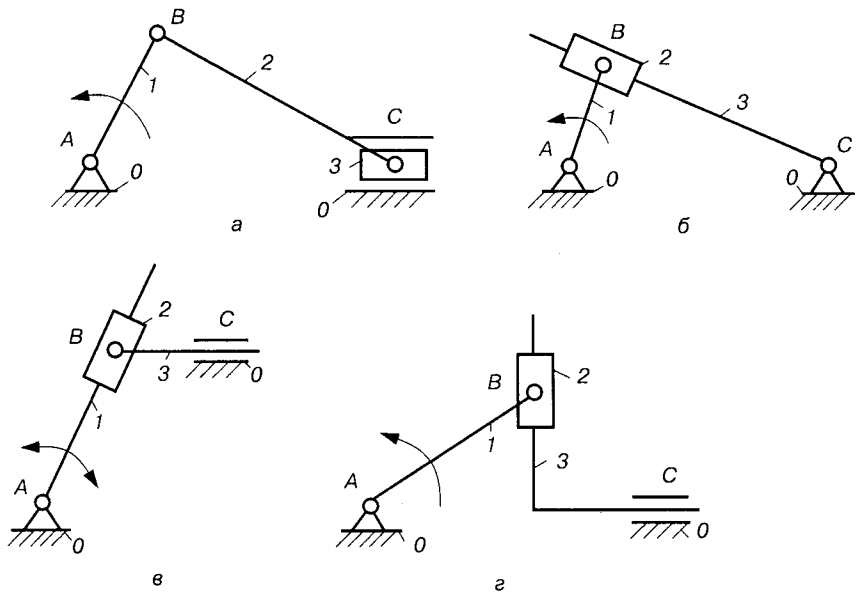


Рис. 2.37.

Структурні групи і механізми III класу. Розглянемо друге можливе сполучення кількостей ланок і кінематичних пар, що утворюють структурну групу ($n = 4$, $p_5 = 6$). Неважко побачити, що для цього сполучення можна дістати три типи кінематичних ланцюгів, структурні принципи утворення яких різні.

Перший кінематичний ланцюг (рис. 2.38, *а*) складається з ланки *3* (базисної), яка входить у три кінематичні пари з ланками *2*, *4*, *5* (повідки). Такий кінематичний ланцюг є ***групою III класу III порядку,*** або ***триповідковою групою.*** Приєднання цієї групи до основного механізму здійснюється за допомогою трьох повідків (елементи кінематичних пар *B*, *F*, *G* вільні).

Особливістю цієї групи є наявність у ній ланки *3*, яка входить у три кінематичні пари і утворює деякий жорсткий трикутний контур, ніби складений з трьох ланок *EC*, *CD*, *DE*, що входять до складу трьох кінематичних пар (рис. 2.38, *б*). Відносна ступінь вільності такого контуру $W = 0$.

Групи III класу можуть бути різних видів, які одержують шляхом заміни обертових пар поступальними. Приклади таких груп показані на рис. 2.38, *в, г.* Очевидно, що кількість видів груп III класу значно більша, ніж II класу.

Групи III класу у своєму складі можуть мати кількість ланок, більше чотирьох, і пар, більше шести (рис. 2.38, *д*).

Механізми, до складу яких входять групи, не вище за групи III класу, називаються ***механізмами III класу.*** Приклади таких механізмів зображено на рис. 2.39.

Структурні групи і механізми IV класу. Другий можливий кінематичний ланцюг з чотирьох ланок і шістьох нижчих пар показано на рис. 2.40, *а.* Характерною особливістю цієї групи є те, що до її складу входить чотирикутний рухомий контур *DEFG* (рис. 2.40, *б*), відносний ступінь вільності якого $W = 1$. Група, до складу якої входить чотирикутний замкнутий рухомий контур, належить до ***групи IV класу.*** Отже, група, зображена на рис. 2.40, *а,* буде групою IV класу II порядку, оскільки вона приєднується до основного механізму вільними елементами кінематичних пар *B*, *C.* На рис. 2.40, *в* зображено приклад механізму, до складу якого входить ця група.

Механізми, до складу яких входять групи не вище IV класу, називаються ***механізмами IV класу.***

Третій можливий вид кінематичного ланцюга з чотирьох ланок і шістьох кінематичних пар показано на рис. 2.41. Бачимо, що цей ланцюг розпадається на дві групи II класу (групу 2—3 і групу 4—5), тобто цей ланцюг не дає нової групи.

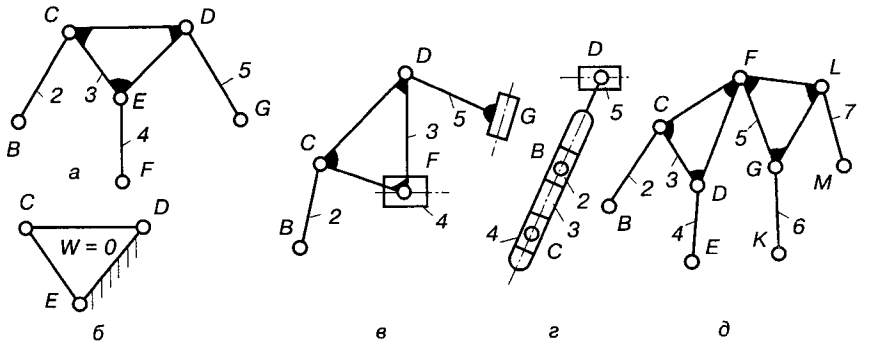


Рис. 2.38.

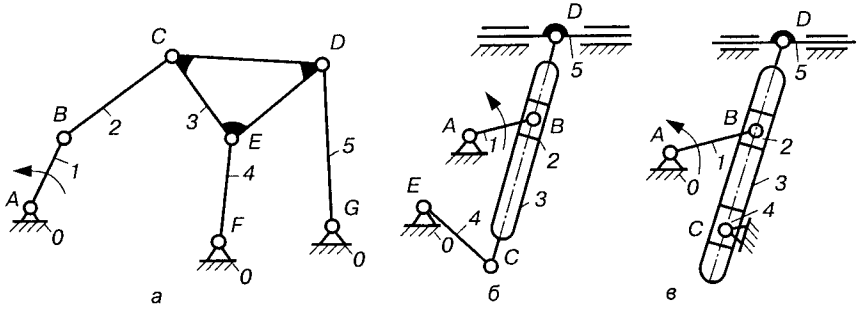


Рис. 2.39.

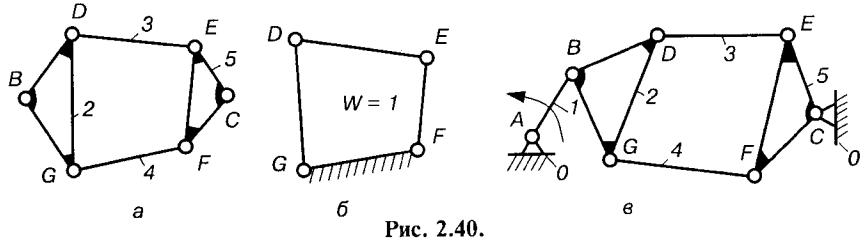


Рис. 2.40.

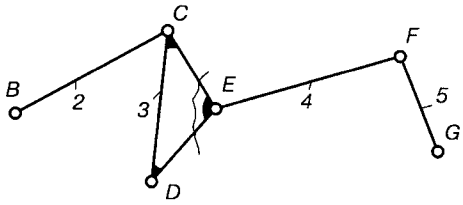


Рис. 2.41.

Якщо перейти до подальших сполучень ланок і пар, що задовольняють умову структурної групи, то до складу груп V класу увійде п'ятикутний контур ($W = 2$), до складу груп VI класу – шестикутний ($W = 3$) і т. д.

На основі зазначеного можна зробити такі висновки: до складу групи III класу входить так званий контур III класу (див. рис. 2.38), групи IV класу – контур IV класу (див. рис. 2.40) тощо. ***Клас контуру*** визначається кількістю кінематичних пар, до складу яких входять ланки, що його утворюють (рис. 2.42). ***Клас групи*** визначається найвищим класом контуру, що входить до її складу.

Клас механізму визначається найвищим класом груп, що входять до його складу. Наприклад, якщо механізм утворений двома групами – групою III класу і групою IV класу, – то він належить до механізмів IV класу.

Визначаючи клас механізму, необхідно вказати, які з ланок є початковими, оскільки залежно від добору початкових ланок можна змінювати клас механізму. Наприклад, якщо у механізмі, схему якого зображено на рис. 2.39, *а*, за початкову ланку прийняти не ланку *1*, а ланку *4* або *5*, то весь механізм буде механізмом II класу, утвореним двома групами II класу (у першому випадку – групами 3—5 і 2—1, у другому – групами 3—4 і 2—1).

Склад і послідовність приєднання структурних груп механізму можна виразити ***формулою будови механізму***, наприклад формули будови для механізмів, які зображені:

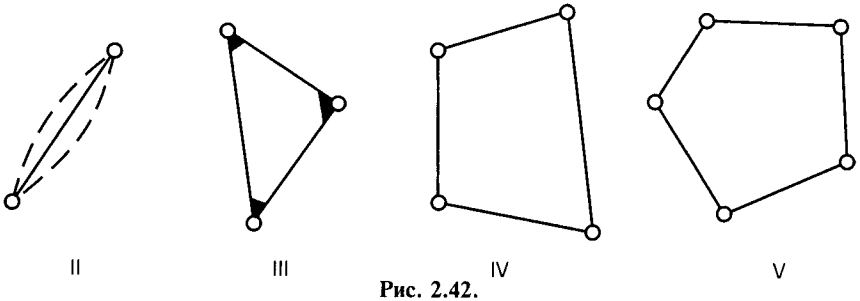


Рис. 2.42.

на рис. 2.37 — I (*1*) → II (*2, 3*);

на рис. 2.39 — I (*1*) → III$\left(\frac{3}{2,4,5}\right)$,

де I — механізм I класу; II, III — класи груп. Номера ланок, що входять до складу механізму I класу або структурних груп, указані в дужках. У групі III класу окремо виділена базисна ланка.

Якщо до складу механізму поряд з нижчими парами входять ще й вищі, то, користуючись методом заміни вищих пар (див. параграф 2.7), замінюють такі пари нижчими, після чого визначають клас механізму.

2.10. Приклади структурного аналізу плоских механізмів

Існує певний порядок проведення структурного аналізу механізмів.

1. Визначають число ступенів вільності механізму (або кінематичного ланцюга). Ланки, які створюють зайві зв'язки і зайві ступені вільності, при структурному аналізі відкидають. Якщо є кінематичні пари IV класу, то їх треба замінити парами V класу (див. параграф 2.7) і окремо викреслити структурну схему замінного механізму.

2. Виділяють початкові ланки, кількість яких визначається числом ступенів вільності механізму (кінематичного ланцюга). Нагадаємо, що початкова ланка і стояк утворюють механізм I класу.

3. Розбивають механізм на структурні групи. Відокремлення структурної групи частіше всього розпочинають з ланок і пар, найвіддаленіших від початкової ланки. Розпочинають із спроби від'єднати від механізму групи II класу. Від'єднуючи структурні групи, треба перевірити число ступенів вільності W тієї частини механізму, яка залишилась, при цьому W змінюватися не повинно. Групи відокремлюються до того часу, поки не залишаться одна початкова ланка і стояк (механізм I класу), якщо $W = 1$, чи кілька початкових ланок, кількість яких дорівнює одержаному числу ступенів вільності. Якщо спроби відокремлення груп II класу не дадуть такого результату, треба переходити до спроб відокремлення груп III класу, потім IV тощо.

4. Визначають клас і порядок структурних груп і клас механізму.

5. Записують формулу будови механізму.

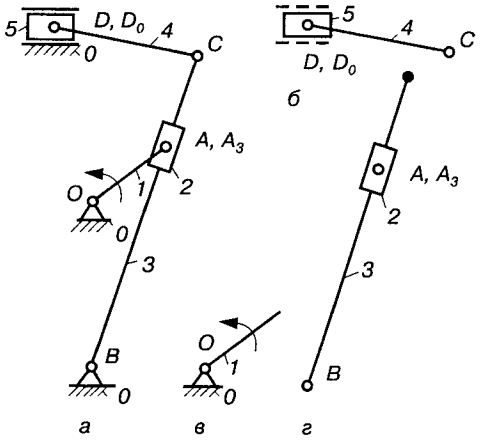


Рис. 2.43.

Приклад 2.1. Виконати структурний аналіз механізму поперечно-стругального верстата (рис. 2.43, *а*), якщо початкова ланка — кривошип *OA*.

Розв'язання. Механізм поперечно-стругального верстата складається з п'яти рухомих ланок ($n = 5$) і семи кінематичних пар V класу ($p_5 = 7$): $O(0, 1)$, $A(1, 2)$, $A_3(2, 3)$, $B(0, 3)$, $C(3, 4)$, $D(4, 5)$, $D_0(0, 5)$. Число ступенів вільності такого механізму визначаємо за формулою Чебишова:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

У такому механізмі має бути одна початкова ланка, пасивних (зайвих) зв'язків і зайвих ступенів вільності, а також пар IV класу немає. Тут і далі розглядаємо ідеальні механізми.

Розкладаємо механізм на групи Ассура. Спочатку відокремлюємо ланцюг, який складається з двох ланок *4*, *5* і трьох кінематичних пар *C*, *D*, D_0 (рис. 2.43, *б*), знаходимо число ступенів вільності для залишкової частини механізму:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Враховуючи, що W не змінилось, виділяємо ланцюг, який складається з ланок *4*, *5*, є групою II класу II порядку.

Далі відокремлюємо ланцюг, який складається з ланок *2*, *3* і трьох пар *A*, A_3, *B* (рис. 2.43, *в*). Після цього залишається одна початкова ланка (рис. 2.43, *г*), в якої $W = 1$. Отже, ланцюг *2—3* є також групою II класу II порядку. Таким чином, механізм поперечно-стругального верстата складається з механізму I класу і двох груп II класу II порядку, тому він належить механізму II класу.

Для такого механізму можна записати формулу будови

$$\text{I}(1) \rightarrow \text{II}(2, 3) \rightarrow \text{II}(4, 5),$$

де цифрою I позначено механізм I класу, цифрою II — клас групи. Номери ланок, що входять до складу механізму I класу та груп, взято у дужки.

Приклад 2.2. Виконати структурний аналіз механізму двигуна (рис 2.44, *а*), якщо початковою ланкою є кривошип *OA*.

Розв'язання. Механізм складається із семи рухомих ланок ($n = 7$) і десяти пар V класу ($p_5 = 10$): $O(0, 1)$, $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $B_0(3, 0)$, $C(2, 4)$, $D(4, 5)$, $E(5, 0)$, $F(5, 6)$, $G(6, 7)$, $G_0(7, 0)$. Знаходимо ступінь вільності механізму за формулою Чебишова

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

У цьому механізмі також повинна бути одна початкова ланка; зайвих зв'язків і ступенів вільності, а також пар IV класу немає.

Розкладаємо механізми на групи Ассура. Якщо початковою ланкою є кривошип *1*, який із стояком *0* утворює механізм I класу (рис. 2.44, *д*), то решта ланок утворюють три структурні групи II класу II порядку (рис. 2.44, *б—д*). Такий механізм належить механізму II класу. Формула його будови має вигляд

$$\text{I}(1) \rightarrow \text{II}(2, 3) \rightarrow \text{II}(4, 5) \rightarrow \text{II}(6, 7).$$

Якщо вибрати початковою ланкою, наприклад, ланку *7*, то механізм треба віднести до III класу, тому що у цьому випадку ланки і пари, до складу яких вони входять, утворюють дві групи, одна з них група III класу (рис. 2.45, *а*), друга — II класу (рис. 2.45, *б*). Повзун *7* (рис. 2.45, *в*) разом із стояком *0* утворює механізм I класу. Формула будови такого механізму має вигляд

$$\text{I}(7) \rightarrow \text{II}(5, 6) \rightarrow \text{III}\left(\frac{2}{1,3,4}\right).$$

Тут у групі III класу окремо виділена базисна ланка *2*.

При початковій ланці *5* механізм також буде III класу, формулу будови якого можна записати так:

$$\text{I}(5) \begin{cases} \nearrow \text{II}(6, 7) \\ \searrow \text{III}\left(\dfrac{2}{1,3,4}\right). \end{cases}$$

Приклад 2.3. Виконати структурний аналіз кулачково-важільного механізму, схему якого зображено на рис. 2.46, *а*. Початковою ланкою вибрати кулачок *1*.

Розв'язання. Механізм складається з п'яти рухомих ланок ($n = 5$), шести кінематичних пар V класу ($p_5 = 6$) — $O(0, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 4)$, $D(4, 0)$, $E(3, 5)$, $F(5, 0)$ — і одної пари IV класу

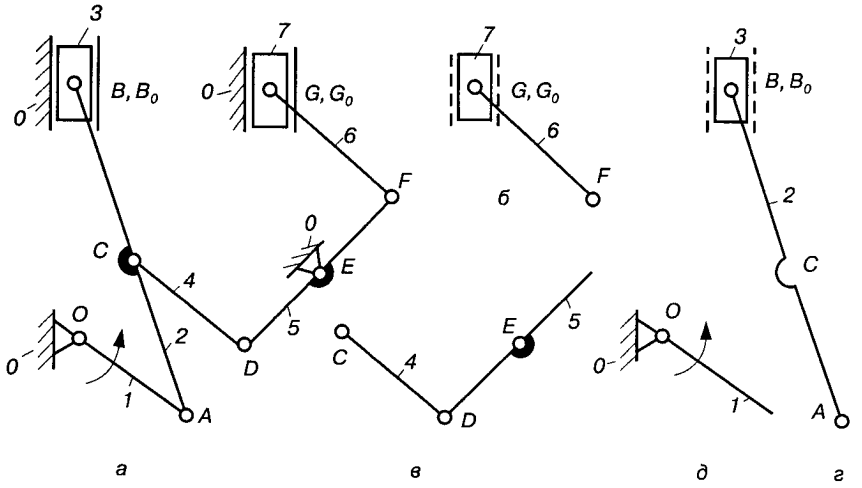


Рис. 2.44.

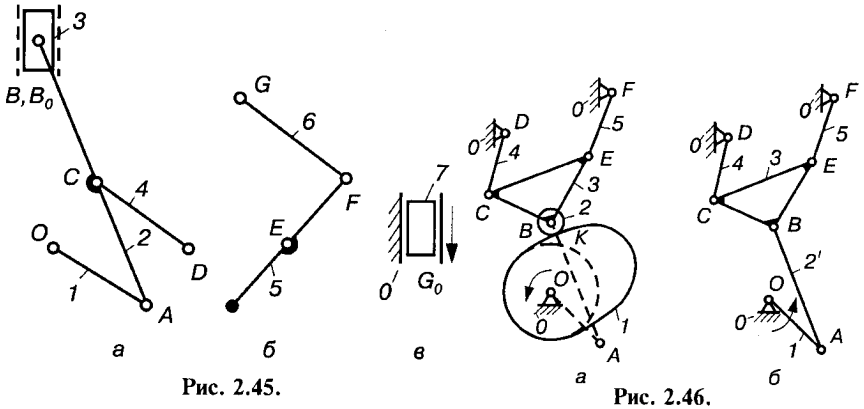


Рис. 2.45.

Рис. 2.46.

($p_4 = 1$)—$K(1, 2)$. Якщо підрахувати число ступенів вільності за цими даними, одержимо

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 1 = 2.$$

Тут ролик *2* створює зайвий ступінь вільності (ролик може ковзати відносно кулачка і перекочуватись по кулачку).

Будуємо замінний механізм, для цього вищу пару K (пару IV класу) замінюємо нижчими парами V класу. Центр кривизни ролика *2* знаходиться у точці B, центр кривизни профілю кулачка *1* — у точці A. У точках A і B розміщуємо центри шарнірів

додаткової умовної ланки *2′* (рис. 2.46, *б*), які з'єднуємо з кулачком *1* (ланка *OA*) і ланкою *3*.

У замінному механізмі маємо $n = 5$, $p_5 = 7$, $p_4 = 0$, тоді

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Отже, у такому механізмі потрібна лише одна початкова ланка. Залишимо такою ланкою кулачок *1* (на рис. 2.46, *б* — кривошип *OA*), який разом зі стояком *O* утворює механізм I класу.

Кінематичний ланцюг, що залишається після відокремлення механізму I класу, не можна розкласти на групи II класу. Ланки *2′*, *3*, *4*, *5* утворюють групу III класу III порядку, причому ланка *3* є базисною, тому механізм, схему якого зображено на рис. 2. 46, *а*, треба віднести до III класу. Формула будови такого механізму має вигляд

$$\text{I}(1) \rightarrow \text{III}\left(\frac{3}{2',4,5}\right).$$

КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

3.1. Задачі і методи кінематичного дослідження механізмів

При кінематичному дослідженні механізму розглядається рух його ланок без урахування сил, які діють на них, тобто розглядається рух ланок з геометричної точки зору, з урахуванням тільки фактора часу.

Як відомо, будь-який рух тіла характеризується ***переміщенням*** його у просторі, ***швидкістю*** і ***прискоренням*** руху його точок. Звідси й випливають основні задачі кінематичного дослідження механізмів:

1) визначення ***положень ланок*** механізму, побудова траєкторій його окремих рухомих точок і знаходження переміщень окремих ланок;

2) визначення ***швидкостей*** окремих точок і ланок механізму;

3) визначення ***прискорень*** окремих точок і ланок механізму.

В результаті такого дослідження встановлюють відповідність кінематичних параметрів (переміщень, швидкостей і прискорень) заданим умовам роботи механізму, а також одержують вихідні дані для подальших розрахунків. Знання кінематичних параметрів потрібні для визначення динамічних сил (сил інерції, моментів сил інерції), кінетичної енергії та потужності механізму. Траєкторії окремих точок допомагають встановити картину взаємного положення ланок під час руху машини і усунути можливість їх співударів. Дані кінематичного дослідження дуже часто використовуються для розв'язання оберненої задачі — синтезу механізмів.

Більшість механізмів і машин має періодичний рух. Під ***періодом (циклом) руху*** розуміють проміжок часу, після закінчення якого механізм повертається у початкове положення, а його кінематичні параметри набувають початкового значення, після цього рух повторюється за тим самим законом. Звідси випливає, що для кінематичного дослідження достатньо одного періоду роботи механізму. При цьому повинні бути задані кінематична схема механізму (розміри всіх його ланок) і закон руху початкової ланки. Якщо початкова ланка здійснює обертовий рух, то закон руху задають у вигляді рівняння $\varphi = \varphi(t)$, яке виражає залежність кута повороту (узагальненої координати) початкової ланки від часу. При поступальному русі цей закон можна виразити рівнянням $s = s(t)$, тобто залежністю лінійних переміщень початкової ланки від часу.

Існують чотири методи кінематичного дослідження механізмів: графічний, графоаналітичний, аналітичний і експериментальний. ***Графічні*** і ***графоаналітичні методи*** дають змогу розв'язувати майже всі основні задачі кінематичного дослідження механізмів. Для більшості практичних задач точність цих методів достатня. При дослідженні деяких механізмів вони значно спрощують розрахунки, економлять час, сприяють зменшенню помилок у результатах завдяки наочності досліджень.

Проте дуже часто ***аналітичний метод*** має не тільки суттєву перевагу над першими, але й є єдиним. Це насамперед стосується широкого класу задач, коли ланки механізму повинні забезпечити рух за певним, наперед заданим законом. Для динамічного розрахунку механізмів, коли необхідно, наприклад, проаналізувати коливання, потрібні аналітичні залежності законів руху ланок механізму. Особливо широкого поширення набув останнім часом аналітичний метод, коли з'явились сучасні ЕОМ, які дають можливість здійснювати багатоваріантні дослідження механізмів і тим самим вибирати такі схеми механізмів і розміри їхніх ланок, що забезпечують найкращі умови роботи, тобто є можливість здійснити оптимальний синтез механізмів.

Найдостовірніші результати дає ***експериментальний метод*** дослідження механізмів. Це пояснюється тим, що для графічних і аналітичних методів розв'язання задач кінематики доводиться приймати ряд допущень (ланки вважаються абсолютно жорсткими, у кінематичних парах відсутні зазори, всі ланки виготов-

лені абсолютно точно, головний вал машини обертається з постійною швидкістю тощо). Теоретичні залежності таких ідеалізованих механізмів інколи значно відрізняються від дійсних. Крім цього, у сучасних машинах здебільшого використовуються механізми з пружними, гідравлічними, пневматичними зв'язками, теоретичні розрахунки яких вимагають експериментальної перевірки. Отже, експериментальні дослідження сучасних швидкохідних машин часто дають єдину можливість одержати дійсні параметри машин. У цьому розділі методи кінематичного дослідження розглядаються на прикладі важільних механізмів.

3.2. Побудова положень ланок механізму і траєкторій окремих точок

Для розв'язання задачі про положення ланок механізму (планів механізму) треба задати кінематичну схему механізму (розміри всіх його ланок) і закон руху початкової (початкових) ланки. У практиці інженерних розрахунків при кінематичному дослідженні механізмів, як правило, приймають рух початкової ланки лінійним, тобто рівномірним ($\omega_1 = \text{const}$ або $s_1 = \text{const}$). Наведений рух, як правило, зумовлюється умовами роботи механізму і приблизно таким він здійснюється на практиці. Це припущення не порушує загальності методів дослідження, оскільки за нерівномірного руху вони залишаються в силі. Крім цього, при кінематичному дослідженні всі ланки механізму умовно вважають ***абсолютно твердими тілами,*** тобто розміри ланок незмінні, а зв'язки між ними ***ідеальні*** (у кінематичних парах відсутні зазори), всі ланки виготовлені абсолютно точно. Такі припущення дають змогу значно спростити методи дослідження механізмів, а одержані при цьому результати у багатьох випадках мало відрізняються від дійсних.

Побудову положень ланок плоских механізмів можна здійснити методами засічок, кругових шаблонів і геометричних місць.

Метод засічок. Побудову положень ланок цим методом розглянемо на прикладі кривошипно-повзункового механізму, кінематична схема і закон руху кривошипа OA ($\omega_1 = \text{const}$) якого задані (рис. 3.1).

Побудову здійснюватимемо у певному масштабі. Для цього скористаємося ***масштабним коефіцієнтом,*** під яким розуміють відношення фізичної величини (шляху, швидкості тощо) до дов-

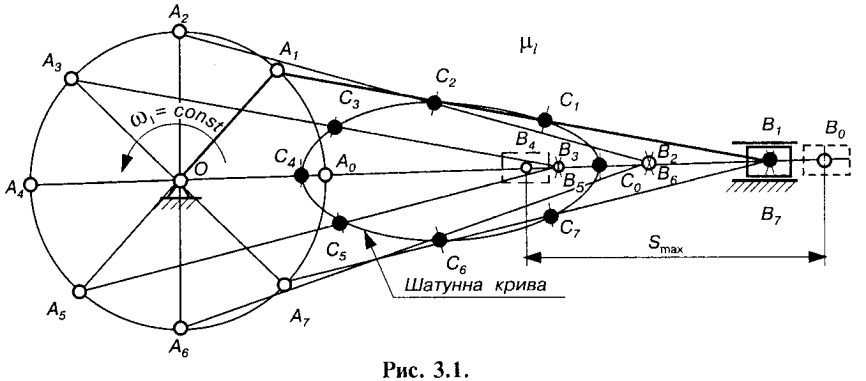


Рис. 3.1.

жини відрізка, який цю величину зображає на рисунку. Масштабний коефіцієнт, який у подальшому будемо називати "масштабом", позначимо літерою μ з індексом тієї величини, яка зображена графічно. Наприклад, при зображенні лінійних розмірів механізму масштаб буде визначатися за формулою

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA} \text{ [м/мм]}, \qquad (3.1)$$

де l_{OA} — дійсна величина кривошипа OA, м; OA — довжина відрізка OA (мм), де $OA = OA_i$ ($i = 0, 1, 2, ..., 7$).

Для знаходження положення всіх точок і ланок механізму методом дугових засічок необхідно послідовно розглянути рух кожної ланки від початкової до вихідної у такому порядку, як вони приєднуються до механізму. Кривошип OA здійснює рівномірний обертовий рух ($\omega_1 = const$) навколо нерухомого центра O. Шатун AB здійснює складний рух: центр шарніра A рухається по колу радіуса OA, центр шарніра B — по прямій разом із повзуном, який зв'язаний із шатуном AB і рухається вздовж нерухомої напрямної.

За початкове положення механізму виберемо таке, за якого кривошип і шатун витягнуться в одну лінію OA_0B_0. У центральному кривошипно-повзунковому механізмі ця лінія збігається з напрямком руху центра шарніра B. Далі, поділимо траєкторію точки A на довільно вибране число рівних частин, наприклад 8, як це показано на рис. 3.1, точки поділу позначимо A_0, A_1, A_2, ..., A_7 у напрямку обертання кривошипа. Тобто перехід з одного положення на друге здійснюється за час $T/8$, де T — період обертання кривошипа ($T = 60/n$, с; n — частота обертання кривошипа, хв$^{-1}$).

Положення точки B знайдемо методом дугових засічок, враховуючи, що довжина шатуна AB протягом руху залишається незмінною. Для цього з одержаних точок A_0, A_1, A_2,... ..., A_7 радіусом AB зробимо дугові засічки на траєкторії точки B, у результаті чого знайдемо положення центрів шарніра B—B_0, B_1, B_2, ..., B_7. З'єднавши точки A_i і B_i відрізками A_iB_i, одержимо положення шатуна AB і повзуна B (i = 0, 1, 2, ..., 7).

Таким самим способом побудуємо траєкторію точки C, яка лежить на шатуні AB (див. рис. 3.1). Для цього з точок A_i зробимо на відповідних положеннях шатуна A_iB_i дугові засічки радіуса A_iC_i. З'єднавши послідовно одержані точки C_i плавною кривою, одержимо траєкторію точки C. Через те, що точка C лежить на шатуні, її траєкторію називають ***шатунною кривою***. На рис. 3.2 показані приклади шатунних кривих, які опишуть різні точки (B, C, E, F, G, K, L) шатуна шарнірного чотириланкового механізму. Шатунні криві широко використовуються у сучасній техніці для виконання певних рухів виконавчими органами різних механізмів і машин, при проектуванні механізмів з вистоями, заданими передаточними функціями тощо.

Якщо до складу механізму входять кілька груп, то їхні плани будуються аналогічно (рис. 3.3).

Спочатку будують ряд положень кривошипа OA, потім — ланок першої приєднаної групи (шатуна AB і повзуна B). Знаходять положення точки під'єднання C_i другої групи (шатуна CD і коромисла DE), потім дуговими засічками — положення точки D, яка лежить на дузі кола, що побудоване радіусом DE з центром у точці E. Довжини ланок CD і DE під час руху також не змінюються. Побудову планів положень механізму закінчують побудовою положень ланок останньої групи. Початковим положенням кривошипа OA вибирають таке положення, за якого одна з вихідних ланок (у нашому випадку повзун B або коромисло DE) займатиме одне з крайніх (мертвих) положень.

Побудова діаграм переміщення. При дослідженні механізмів часто недостатньо знайти тільки форму шляху — траєкторію руху точки; треба ще знати характер зміни довжини пройденого шляху залежно від часу або кута повороту кривошипа (узагальненої координати). Для цього будують діаграми лінійних $s = s(t)$ або кутових $\beta = \beta(t)$ переміщень, якщо ланка здійснює коливальний рух.

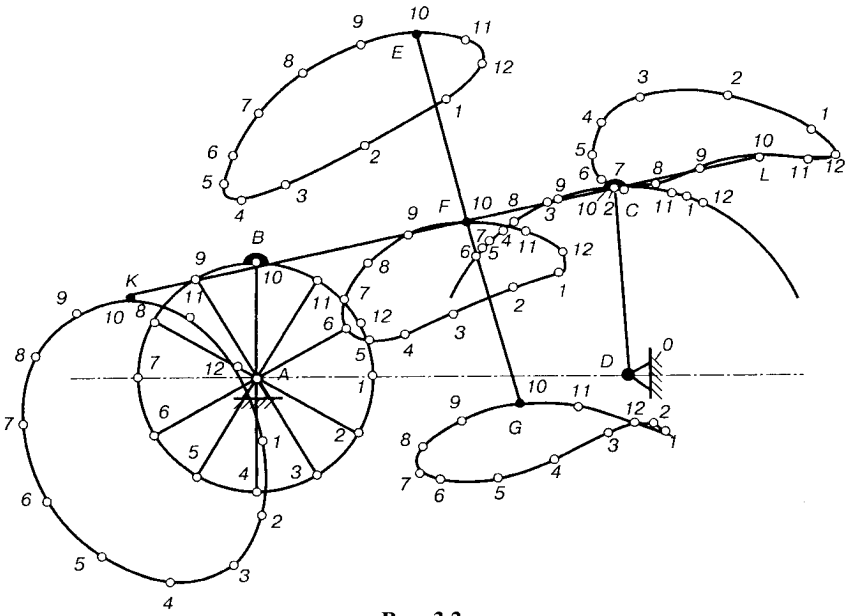

E
F
B
K
A
C
L
D
G
0

Рис. 3.2.

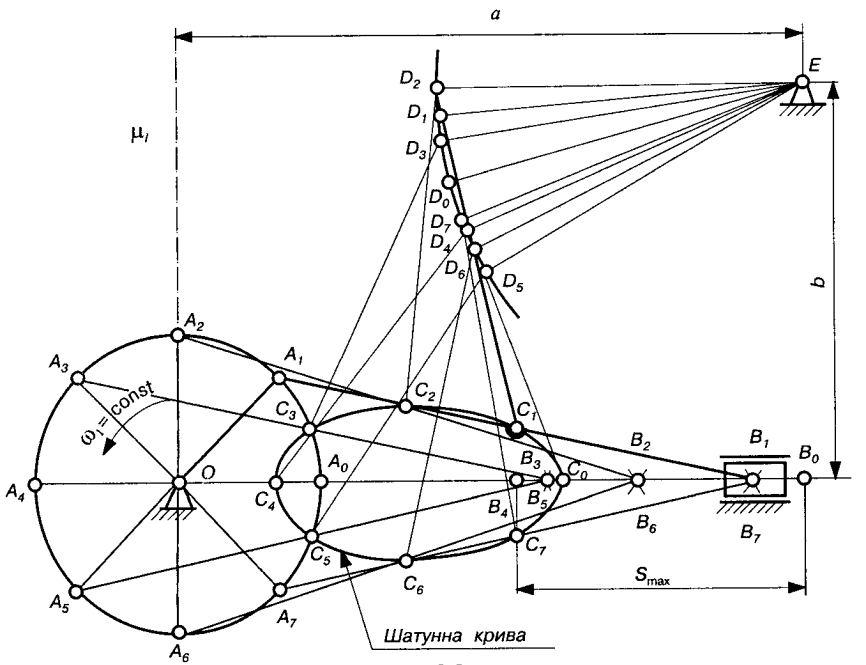

a
b
μ_l
D_2
D_1
D_3
D_0
D_7
D_4
D_6
D_5
E
A_2
A_1
A_3
$\omega_1 = const$
C_2
C_1
C_3
A_0
B_2
B_1
B_0
B_3
C_0
A_4
O
C_4
B_4
B_5
B_6
B_7
C_5
C_7
C_6
S_{max}
A_5
A_7
A_6
Шатунна крива

Рис. 3.3.

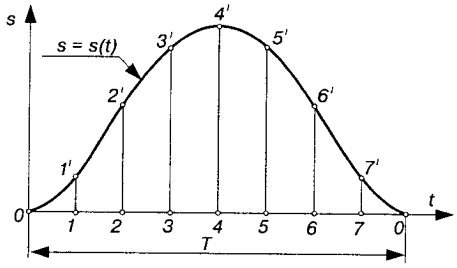


Рис. 3.4.

Розглянемо побудову діаграми переміщень повзуна B (рис. 3.4) для кривошипно-повзункового механізму, схема якого зображена на рис. 3.1.

Якщо рух початкової ланки прийнято рівномірним, то це означає, що за рівні проміжки часу кривошип повертатиметься на однакові кути; переміщення повзуна будуть вимірювати відрізками B_0B_i (i = 0, 1, 2,..., n — положення механізму).

Будують прямокутну систему координат (див. рис. 3.4): на осі абсцис відкладають відрізок $l = \overline{0-0}$, який зображує у масштабі $\mu_l = T/l$ (с/мм), період T, с, одного обороту кривошипа OA (або кут $\varphi_1 = 2\pi$); на осі ординат — лінійні переміщення повзуна B у масштабі $\mu_S = S_{max}/[S_{max}]$, де S_{max} — максимальний хід повзуна B, м; $[S_{max}]$ — відрізок, мм, на діаграмі, який зображує цей хід.

Відрізок l ділять на таку кількість відрізків $0—1$, $1—2$,..., $7—0$, на яку розбита траєкторія точки A (у даному випадку на 8). Точки 0, 1, 2,... відповідають моментам часу, коли механізм займатиме відповідно положення 0, 1, 2,... Тоді на ординатах відкладають у вибраному масштабі μ_S, м/мм, переміщення точки B від крайнього положення B_0 за певні проміжки часу. Якщо масштаби довжини (рис. 3.1) і переміщень (рис. 3.4) рівні, то відрізки $1—1$, $2—2$, ... на діаграмі будуть відповідно рівні відрізкам B_0B_1, B_0B_2,... на плані механізму. Одержані точки 0, $1'$, $2'$,... з'єднують плавною кривою, яка і буде діаграмою переміщень повзуна B — $s = s(t)$.

Якщо ланка здійснює коливальний рух, то, як правило, будують діаграму кутових переміщень, наприклад коромисла DE (див. рис. 3.3), залежно від часу або кута φ_1. Масштаб кутових переміщень виражається аналогічно: $\mu_\beta = \beta_{max}/[\beta_{max}]$, де β_{max} — максимальний кут розмаху коромисла DE, рад або град; $[\beta_{max}]$ — максимальна ордината, мм, яка зображує на діаграмі цей кут.

Метод кругових шаблонів наведено в підручнику [32], метод геометричних місць (фіктивних положень) — в [4].

3.3. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм

Маючи діаграму (графік) переміщень будь-якої точки або ланки механізму як функцію шляху s залежно від часу t, методом графічного диференціювання можна визначити швидкості і прискорення точки (ланки), рух якої визначають.

Для побудови діаграми швидкостей $v = v(t)$ використовують залежність

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{3.2}$$

Як відомо, похідна функції $s = s(t)$ у точці A (рис. 3.5) визначається тангенсом кута нахилу дотичної до цієї кривої $s = s(t)$, проведеної через точку A.

З урахуванням масштабів побудови діаграми $s = s(t)$ можна записати

$$ds = \Delta y \mu_s,\ dt = \Delta x \mu_t.$$

Тоді залежність (3.2) набуде вигляду

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\mu_s}{\mu_t} = \operatorname{tg}\alpha \frac{\mu_s}{\mu_t}, \tag{3.3}$$

де α — кут нахилу дотичної у точці A діаграми $s = s(t)$; μ_s, μ_t — масштаби діаграми по осях ординат і абсцис відповідно.

Із залежності (3.3) видно, що швидкість руху точки в будь-якому положенні пропорційно зв'язана з тангенсом кута нахилу дотичної, оскільки масштаби μ_s і μ_t є величинами сталими.

Таким чином, щоб побудувати діаграму швидкостей $v = v(t)$, беруть ряд точок на діаграмі $s = s(t)$ і через них проводять дотичні. Знайшовши тангенс кутів нахилу цих дотичних у відповідних положеннях, будують діаграму $\operatorname{tg}\alpha_i = f(t)$. Ця діаграма одночасно буде діаграмою швидкостей у деякому масштабі, який можна знайти, використовуючи залежність (3.3).

На практиці для побудови діаграм швидкостей і прискорень використовують два методи — метод дотичних і метод хорд.

Метод дотичних (рис. 3.6). Для побудови діаграми швидкостей будь-якої точки чи ланки необхідно мати діаграму переміщень $s = s(t)$ (рис. 3.6, *а*). Далі описано порядок побудови діаграми швидкостей.

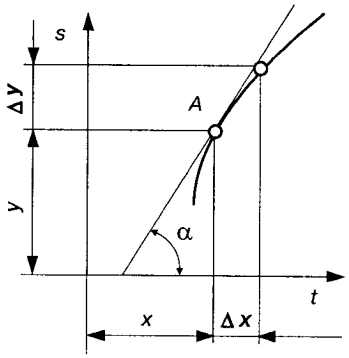


Рис. 3.5.

1. Вибирають прямокутну систему координат (рис. 3.6, *б*), на осі ординат якої відкладають швидкість v, на осі абсцис — час t. Як і на діаграмі $s = s(t)$, ділять період руху T на ряд рівних проміжків часу (у даному випадку 8) і проводять через одержані точки *1*, *2*, *3*,... лінії, паралельні осі ординат.

2. З точки P_1, яку вибирають на продовженні осі абсцис t діаграми $v = v(t)$, проводять промені $P_1—1''$, $P_2—2''$, $P_3—3''$,..., паралельні дотичним, що проведені через точки відповідно *1'*, *2'*, *3'*,... на діаграмі $s = s(t)$. Ці промені відсікають від осі ординат v відрізки *0—1''*, *0—2''*, *0—3''*,..., які пропорційні швидкостям відповідних положень механізму (*1*, *2*, *3*,...). Це видно, наприклад, з трикутників $P_1 01''$ і $P_1 02''$, в яких

$$\frac{0-1''}{H_1} = \operatorname{tg}\alpha_1;\ \frac{0-2''}{H_1} = \operatorname{tg}\alpha_2,\ldots \text{ і т. д.},$$

тобто відрізки *0—1''*, *0—2''*,... прямо пропорційні $\operatorname{tg}\alpha_i$, а звідси й швидкостям у відповідних положеннях.

3. Відкладають одержані відрізки на відповідних ординатах діаграми швидкостей і з'єднують одержані точки (*1'''*, *2'''*,...) плавною кривою, яка і буде діаграмою $v = v(t)$. У даному випадку дотична, проведена через точку *0* на діаграмі $s = s(t)$, збігається з віссю t, а тому швидкість у цьому положенні буде дорівнювати нулю.

Масштаб швидкостей μ_v можна визначити, використавши залежність (3.3), в яку треба підставити $v = y_i'\mu_v$ і $\operatorname{tg}\alpha_i = y_i'/H_1$:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{H_1\mu_t},\ \text{м/(мм·с)}, \qquad (3.4)$$

де y_i' — відрізки *0—1''*, *0—2''*,..., які зображують швидкості точки на діаграмі швидкостей у відповідних положеннях.

Із залежності (3.4) видно, що за допомогою відрізка H_1 можна змінювати масштаб побудови діаграми швидкостей. Дов-

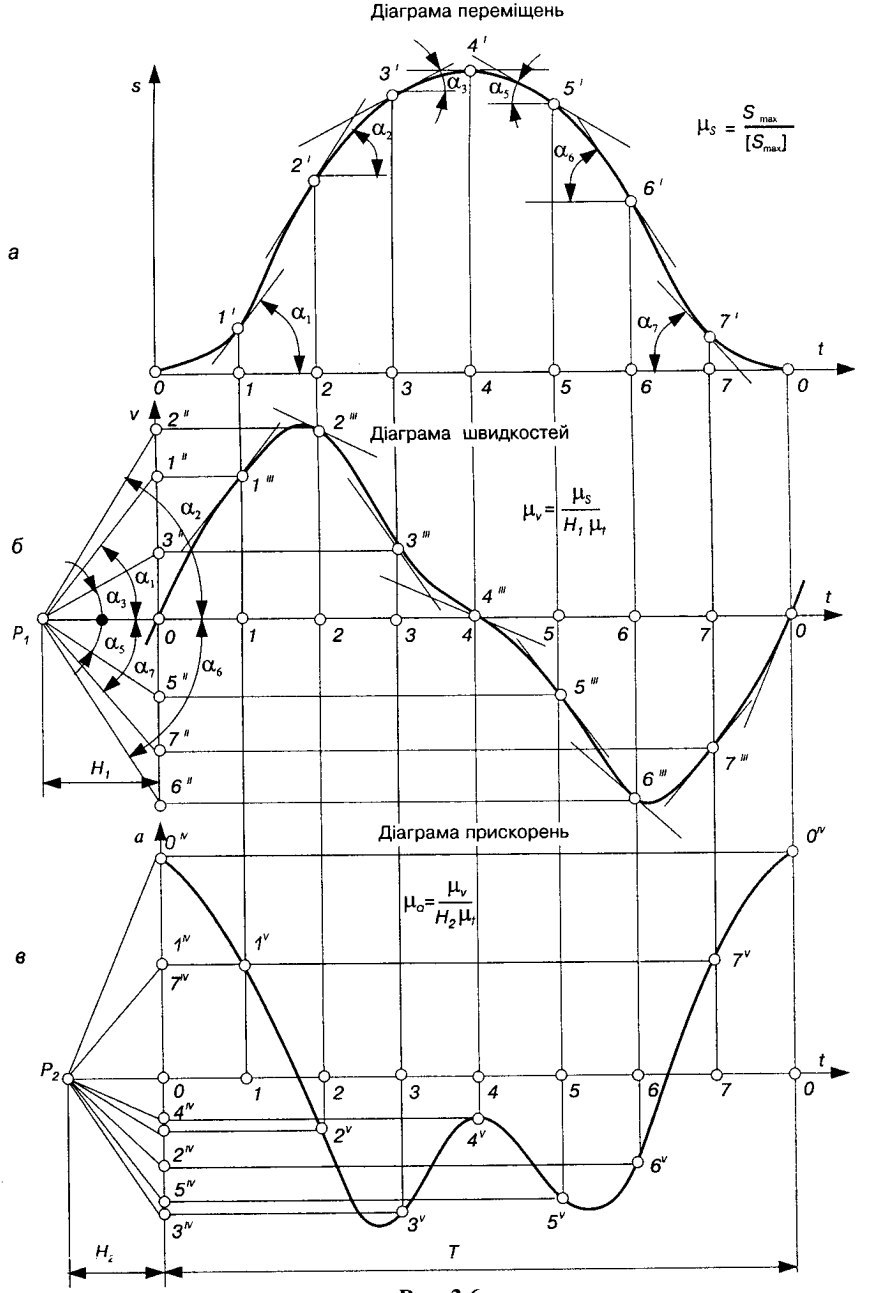

Діаграма переміщень
Діаграма швидкостей
Діаграма прискорень
а
б
в
s
v
a
t
$\mu_S = \frac{S_{max}}{[S_{max}]}$
$\mu_v = \frac{\mu_S}{H_1 \mu_t}$
$\mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \mu_t}$
P_1
P_2
H_1
H_2
T

Рис. 3.6.

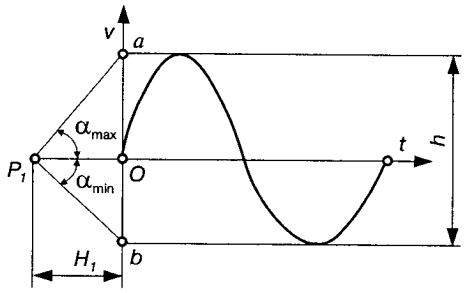


Рис. 3.7.

жину відрізка H_1 можна вибирати, задаючи відповідну висоту h діаграми $v = v(t)$ і знаючи найбільший α_{max} та найменший α_{min} кути нахилу дотичних до кривої $s = s(t)$ (рис. 3.7). Для цього через точки a і b проводять промені під кутом α_{max} і α_{min} до перетину між собою у точці P_1. Тоді відрізок $OP_1 = H_1$, а вісь абсцис повинна проходити через точку P_1.

Маючи діаграму швидкостей $v = v(t)$, аналогічно будують діаграму прискорень $a = a(t)$, оскільки

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{3.5}$$

Отже, щоб побудувати діаграму прискорень, необхідно продиференціювати діаграму швидкостей за часом. Таку діаграму побудовано на рис. 3.6, *в*, де промені P_20^{IV}, P_21^{IV}, P_22^{IV},... паралельні дотичним, що проведені відповідно через точки *0*, *1‴*, *2‴*,... діаграми швидкостей $v = v(t)$. Масштаб прискорень μ_a визначається за формулою

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{H_2\mu_t}, \text{ м/(мм·с}^2\text{)}. \tag{3.6}$$

Так само будують діаграми кутових швидкостей і кутових прискорень при заданих діаграмах кутових переміщень ланок.

Метод хорд. Метод дотичних на практиці досить незручний, оскільки дуже важко проводити дотичні до кривих і досягти стабільних результатів. Тому на практиці більшого поширення набув метод хорд, який ґрунтується на відомій теоремі про кінцевий приріст функції: якщо функція та її перша похідна безперервні, то на будь-якому інтервалі, наприклад *0—1* (рис. 3.8, *а*), хорда *0—1′*, яка стягує дугу, паралельна дотичній до кривої $s = s(t)$ хоча б в одній точці, що лежить у середині цього інтервалу. Тому при цьому методі на діаграмі $s = s(t)$ замість дотичних проводять хорди *0—1′*, *1′—2′*, *2′—3′*,... (рис. 3.8, *а*), а на діаграмі $v = v(t)$ (рис. 3.8, *б*) із точки P_1 — промені P_11'', P_12'', P_13'',..., які паралельні відповідним хордам, до перетину з

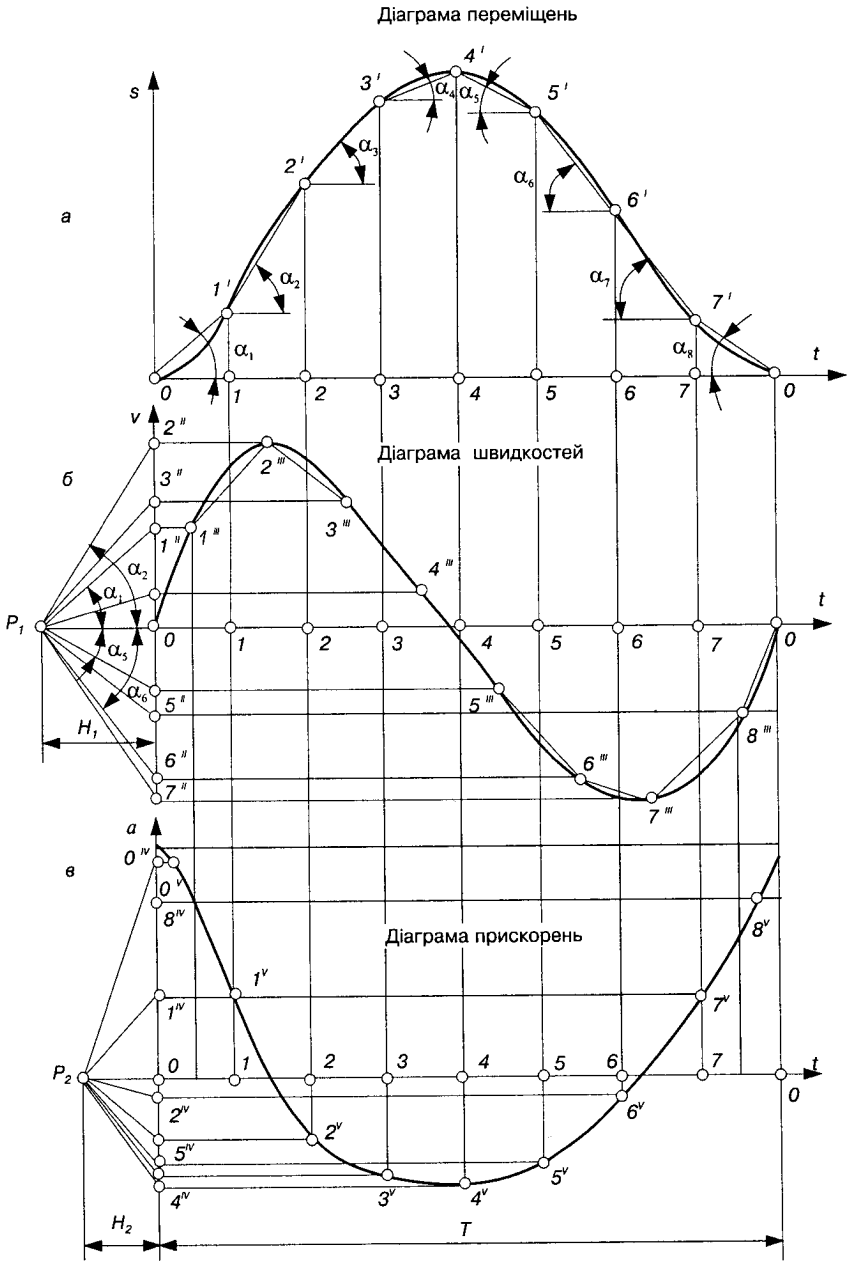

Діаграма переміщень
Діаграма швидкостей
Діаграма прискорень
а
б
в
s
v
a
t
T
H1
H2
P1
P2

Рис. 3.8.

віссю ординат v. Відрізки $0—1''$, $0—2''$, $0—3''$,... у масштабі μ_v, отриманого за (3.4), визначають значення швидкостей посередині відповідних інтервалів часу. Для спрощення побудови діаграм відрізки $0—1''$, $0—2''$, $0—3''$,... відкладають посередині відповідних інтервалів часу. Точки 0, $1'''$, $2'''$, $3'''$,... з'єднують плавною кривою і одержують з певною точністю діаграму швидкостей $v = v(t)$. Чим менший інтервал часу розглядається, тобто чим більше проведено хорд, тим більше наближаються до заданої кривої. Особливу увагу треба звернути на ділянку, де крива, яку диференціюють, має екстремум. У цьому місці криву треба розділити на менші ділянки (проміжки часу).

Аналогічно методом хорд будують діаграму прискорень $a = a(t)$ (рис. 3.8, *в*). Порівнюючи побудовані графіки переміщень, швидкостей і прискорень (рис. 3.6 або 3.8), між ними можна встановити такі залежності:

1) зростанню ординат кривої, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню — від'ємні значення;

2) при максимумі кривої, що диференціюється, диференціальна крива переходить через нуль від додатних значень ординат до від'ємних, а при мінімумі — від від'ємних значень ординат до додатних;

3) точці перегину кривої, що диференціюється, відповідає максимум або мінімум на диференціальній кривій.

3.4. Дослідження руху механізмів методом планів швидкостей і прискорень

Розглянутий метод графічного дослідження механізмів при всій його простоті та наочності не розв'язує цілком питання кінематики точки. Побудовані діаграми переміщень, швидкостей і прискорень дають уявлення лише про скалярні кінематичні величини руху однієї точки (або ланки), напрямки ж векторів цих величин залишаються невідомими. Кінематичні параметри швидкості та прискорення можна визначати за допомогою графічного диференціювання лише після того, як побудовано траєкторію і графік переміщень.

У практичному застосуванні при дослідженні руху механізмів досить точним і зручним є ***графоаналітичний метод***, що ґрунтується на побудові планів швидкостей і прискорень. Пере-

вагою цього методу є те, що в результаті побудови планів одержують не тільки величини, але й напрямки, швидкості та прискорення заданих точок механізму. Теоретичні основи побудови планів швидкостей і прискорень розглядаються в курсі теоретичної механіки. Згадаємо деякі з положень, необхідні для побудови планів швидкостей і прискорень [40].

Плани швидкостей. Візьмемо будь-яке тіло K, що здійснює плоский рух. Положення твердого тіла у загальному випадку визначається трьома точками A, B, C (рис. 3.9, *а*), які незмінно зв'язані з тілом і утворюють жорсткий трикутник ABC.

Нехай відомі швидкості $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ відповідно точок A, B, C і положення миттєвого центра швидкостей P. Вектор швидкості будь-якої точки направлений перпендикулярно до радіуса-вектора, який з'єднує цю точку з точкою P, тобто

$$\boldsymbol{v}_A \perp \boldsymbol{PA},\ \boldsymbol{v}_B \perp \boldsymbol{PB},\ \boldsymbol{v}_C \perp \boldsymbol{PC}.$$

Швидкості точок пропорціональні радіусам-векторам

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_C}{PC},$$

оскільки

$$v_A = \omega\,(PA),\ v_B = \omega\,(PB),\ v_C = \omega\,(PC),$$

де ω — миттєва кутова швидкість тіла K.

Візьмемо тепер будь-яку довільну точку p на площині (рис. 3.9, *б*) і побудуємо в деякому масштабі μ_v з цієї точки вектори швидкостей точок A, B, C. З'єднавши прямими точки a, b і c — кінці векторів швидкостей $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ — одержимо ***план швидкостей*** тіла ABC. Якщо таким чином побудувати вектори швидкостей усіх крайніх точок тіла K і з'єднати їх між собою, на плані швидкостей отримаємо фігуру k, яка буде подібна до тіла K. Отже, ***планом швидкостей будь-якого тіла (ланки) є геометричне місце кінців векторів швидкостей крайніх точок тіла, відкладених з однієї довільної точки, що називається полюсом плану швидкостей*** [40].

У зв'язку з тим, що відрізки pa, pb, pc перпендикулярні до радіусів відповідно PA, PB, PC і пропорціональні їм, вся фігура $pabc$ подібна до фігури $PABC$ і повернута відносно неї на 90° в бік миттєвого обертання. Це характерно для фігури abc, яка подібна до фігури ABC.

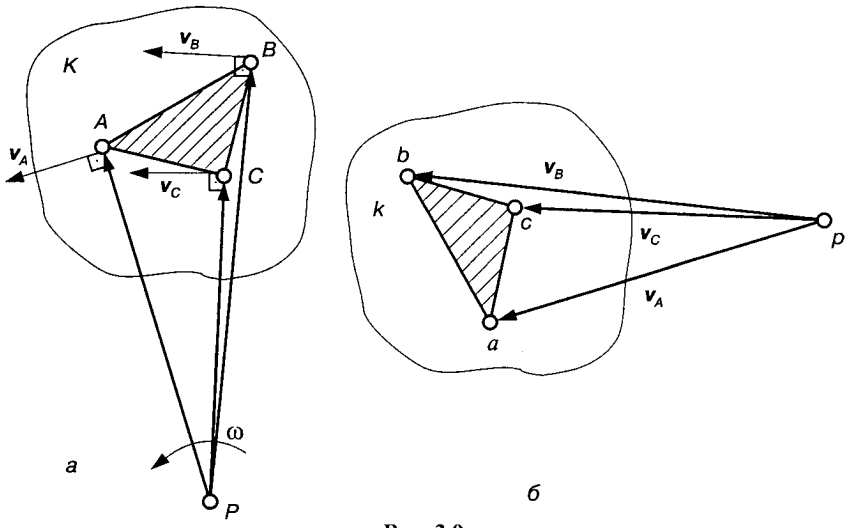


Рис. 3.9.

Звідси одержимо ***теорему подібності*** для планів швидкостей: ***план швидкостей твердого тіла (ланки) подібний до тіла і повернутий відносно нього на 90° у бік миттєвого обертання тіла.***

Теорема подібності справедлива тільки для незмінної системи твердого тіла (ланки) і ні в якому випадку для механізму в цілому, що є змінною системою. Для механізму, який складається з системи ланок і який при русі постійно змінює свою форму, можна лише мати сукупність планів швидкостей окремих ланок, що побудовані з одного полюса, спільного для всіх ланок. Такий рисунок називають ***планом швидкостей механізму.***

План швидкостей *abc* тіла *ABC* (рис. 3.9) розташований однаково з цим тілом, тобто якщо обходити план швидкостей і тіло в одному напрямку, наприклад від точок *a* і *A* за рухом годинникової стрілки, то порядок літер буде однаковим: *abc* і *ABC*. Крім того, якщо вибрати *ab* = *AB* і накласти план швидкостей *abc* на тіло *ABC*, то відповідні точки плану збігаються з точками тіла, а полюс *p* плану швидкостей збігатиметься з точкою *P* — миттєвим центром швидкостей тіла *K*. Тому план швидкостей називають зображенням тіла.

Надалі позначатимемо точки ланок великими літерами (*A, B, C,...*), а їхні зображення на плані швидкостей малими (*a, b, c,...*). Плани швидкостей механізму можна будувати методом подібності, використовуючи теорему подібності, і методом век-

торних рівнянь. Але оскільки плани прискорень можна будувати тільки методом векторних рівнянь, далі детальніше розглянемо останній.

В основі ***методу векторних рівнянь*** лежить теорема про розклад складного руху на два прості: ***переносний*** і ***відносний***.

Для прикладу побудуємо план швидкостей кривошипно-повзункового механізму (рис. 3.10), для якого задано кінематичну схему і закон руху кривошипа OA ($\omega_1 = \text{const}$). Якщо задано частоту обертання n_1, хв$^{-1}$, то для визначення кутової швидкості скористаємося залежністю $\omega = \pi n_1/30$.

Розв'язування задачі розпочнемо з визначення швидкості точки A початкової ланки: $v_A = \omega_1 l_{OA}$ (l_{OA} — дійсна довжина кривошипа OA, м).

Вектор $\boldsymbol{v}_A$ направлений перпендикулярно до кривошипа OA в бік його руху. Зобразимо вектор швидкості $\boldsymbol{v}_A$ відрізком pa (рис. 3.10, *б*), який у масштабі

$$\mu_v = \frac{v_A}{pa}, \quad \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}}, \tag{3.7}$$

визначає цю швидкість: $v_A = (pa)\,\mu_v$.

Щоб знайти швидкість точки B, яка є спільною для шатуна AB і повзуна B, згадаємо теорему про розклад складного руху на переносний і відносний. Шатун AB здійснює складний рух, який можна розкласти на два прості: переносний (поступальний) зі швидкістю $\boldsymbol{v}_A$ точки A і відносний (обертовий) відносно точки A зі швидкістю $\boldsymbol{v}_{BA}$. Справді, якщо надати кривошипу елементарного переміщення $d\varphi_1$, то центр шарніра A переміститься у точку A_1, шарніра B — у точку B_1. При такому русі шатун AB здійснює складний рух: точка A рухається по дузі кола, точка B — по прямій лінії. Нехай спочатку всі точки шатуна AB рухаються, як точка A, зі швидкістю $\boldsymbol{v}_A$, при цьому вісь шатуна займе положення A_1B_1'. Потім, прийнявши точку A_1 за нерухомий центр (полюс), повернемо шатун AB так, щоб точка B_1' потрапила на свою дійсну траєкторію x—x, тобто у точку B_1.

Отже, при заміні дійсного руху шатуна AB двома умовними, що дають такий самий кінцевий результат переміщення, центр шарніра B набув послідовно дві швидкості: при поступальному русі — $\boldsymbol{v}_A$, при обертовому — відносну швидкість $\boldsymbol{v}_{BA}$ точки B відносно точки A, яка невідома нам за величиною, але відома за

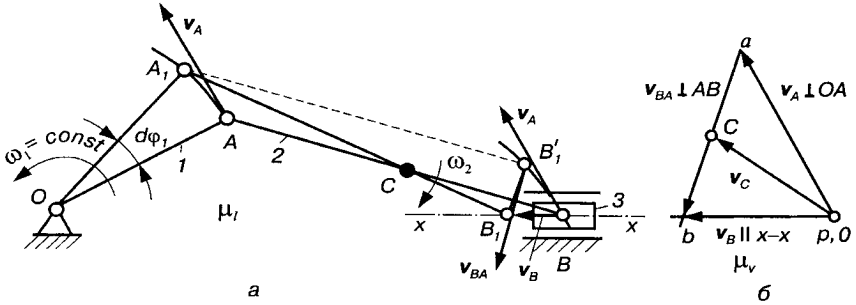


Рис. 3.10.

напрямком ($\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$). На основі цього запишемо векторне рівняння для знаходження швидкості точки B:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}. \tag{3.8}$$

Для визначення векторів швидкостей $\boldsymbol{v}_B$ і $\boldsymbol{v}_{BA}$ проведемо через точку a (рис. 3.10, *б*) лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості, а з полюса p — лінію, паралельну руху повзуна B ($\parallel x–x$). Точка перетину цих ліній визначить точку b — кінець векторів $\boldsymbol{v}_B$ і $\boldsymbol{v}_{BA}$. Відрізок ab не тільки визначає у масштабі величину (модуль) відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{BA} = (ab)\mu_v$, але й одночасно він є планом швидкостей шатуна AB. А тому точка C, яка лежить на ньому, згідно з теоремою подібності, на плані лежатиме на відрізку ab. Склавши пропорцію

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}, \tag{3.9}$$

одержимо довжину відрізка

$$ac = ab\frac{AC}{AB}.$$

Відкладемо відрізок ac на плані швидкостей і, з'єднавши точку c з полюсом p, отримаємо швидкість точки C: $v_C = (pc)\mu_v$.

Планом швидкостей кривошипа OA буде відрізок pa (точка O як нерухома потрапила в полюс p), повзуна B — точка b (всі точки повзуна мають однакову швидкість $\boldsymbol{v}_B$).

Знайшовши лінійні швидкості всіх ланок механізму, можна встановити їхні кутові швидкості. У даному випадку кутова швидкість шатуна AB

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}, \tag{3.10}$$

де $v_{BA} = (ab)\mu_v$.

Для визначення напрямку кутової швидкості ω_2 перенесемо вектор швидкості $\boldsymbol{v}_{BA}$ у точку B (рис. 3.10, *а*) і розглянемо рух точки B відносно точки A у напрямку швидкості. У нашому випадку кутова швидкість ω_2 направлена за рухом годинникової стрілки.

План прискорень. Плани прискорень будують аналогічно планам швидкостей.

Планом прискорень будь-якого твердого тіла (ланки) називають геометричне місце кінців векторів прискорень крайніх його точок, відкладених з однієї довільної точки, що називається полюсом плану прискорень [40].

Теорема подібності для планів прискорень формулюється так.

План прискорень будь-якого тіла (ланки) подібний до тіла і повернутий відносно нього на деякий невизначений кут. А тому плани прискорень можна побудувати тільки методом векторних рівнянь.

Розглянемо методику побудови планів прискорень на прикладі кривошипно-повзункового механізму (див. рис. 3.10). Вихідними даними для побудови плану прискорень є положення ланок механізму (план механізму) і план швидкостей. Рівняння, які використовуються при побудові плану прискорень, різняться тільки тим, що повні прискорення точки розкладають на певні складові. У даному випадку (рис. 3.11, *а*) повне прискорення точки A є геометричною сумою нормального (доцентрового) і дотичного (тангенціального) прискорень:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{AO} = \boldsymbol{a}^n_{AO} + \boldsymbol{a}^\tau_{AO}. \qquad (3.11)$$

Нормальне прискорення $\boldsymbol{a}^n_{AO}$ *напрямлене по лінії* AO до центра обертання кривошипа O, дотичне $\boldsymbol{a}^\tau_{AO}$ — перпендикулярно до AO і направлене в бік напрямку кутового прискорення ε_1 ланки *1*. Модулі цих прискорень находять із співвідношень

$$a^n_{AO} = \omega_1^2 l_{OA} = \frac{v_A^2}{l_{OA}};\ a^\tau_{AO} = \frac{dv_A}{dt} = \varepsilon_1 l_{OA}. \qquad (3.12)$$

Якщо початкова ланка обертається рівномірно ($\omega_1 = \text{const}$), то $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt = 0$, а отже, у даному випадку $a^\tau_{AO} = 0$, тобто прискорення точки $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^n_{AO}$.

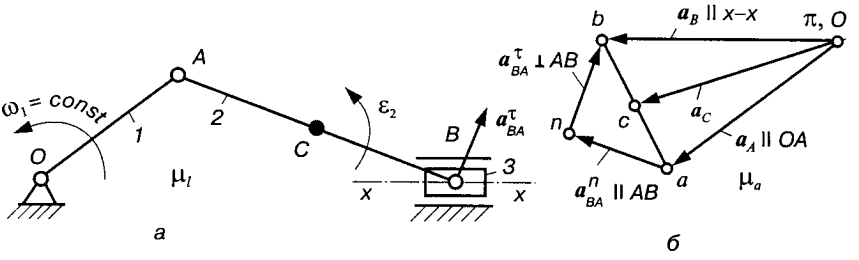


Рис. 3.11.

Прийнявши деяку точку π за полюс плану прискорень (рис. 3.11, *б*), відкладемо вектор, який зображує нормальне прискорення точки *A*, у вигляді відрізка *πa*. Тоді масштаб (масштабний коефіцієнт) прискорень знайдемо зі співвідношення

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}. \qquad (3.13)$$

Прискорення точки *B* знайдемо з рівняння, аналогічного рівнянню (3.8):

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}, \qquad (3.14)$$

де вектор прискорення $\boldsymbol{a}_B$ направлений уздовж напрямної *x—x*. Розкладаємо відносне прискорення $\boldsymbol{a}_{BA}$ на дві складові: $\boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}^n_{BA} + \boldsymbol{a}^\tau_{BA}$. Тоді рівняння (3.14) запишемо у вигляді

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^n_{BA} + \boldsymbol{a}^\tau_{BA}. \qquad (3.15)$$

Вектор нормального прискорення $\boldsymbol{a}^n_{BA}$ направлений уздовж лінії *BA* від точки *B* до *A*, а його модуль

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB} = \frac{v^2_{BA}}{l_{AB}}.$$

На плані прискорень $\boldsymbol{a}^n_{BA}$ зображено відрізком $an = a^n_{BA} / \mu_a$, який прикладено своїм початком у точку *a* (згідно з правилом складання векторів). Через його кінець (точку *n*) проведено лінію дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{BA}$, направленого перпендикулярно до лінії *AB* $\left(\boldsymbol{a}^\tau_{BA} \perp \boldsymbol{a}^n_{BA}\right)$, потім через полюс π — напрямок прискорення точки *B* (∥ *x—x*). Тоді точка перетину напрямків прискорень $\boldsymbol{a}_B$ і $\boldsymbol{a}^\tau_{BA}$ визначить точку *b* — кінець векторів $\boldsymbol{a}_B$ і

$\boldsymbol{a}^{\tau}_{BA}$. З'єднавши точки a і b, знайдемо вектор повного прискорення $\boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}^{n}_{BA} + \boldsymbol{a}^{\tau}_{BA}$, і тим самим побудуємо план прискорень шатуна AB.

Положення точки c на плані прискорень можна визначити методом подібності, склавши пропорцію (3.9), з якої можна визначити відрізок ac. Тоді прискорення точки C становить $a_C = (\pi c)\mu_a$.

Модуль кутового прискорення ланки 2 $\varepsilon_2 = a^{\tau}_{BA} / l_{AB}$. Для визначення напрямку ε_2 перенесемо вектор дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^{\tau}_{BA}$ у точку B (рис. 3.11, *а*) і спостерігатимемо, в який бік цей вектор буде обертати шатун AB відносно вибраного полюса (точка A). У нашому випадку кутове прискорення ε_2 направлене проти руху годинникової стрілки. Отже, рух шатуна AB в цьому положенні сповільнений, оскільки кутова швидкість ω_2 має інший напрямок (див. рис. 3.10, *а*).

3.5. Приклади побудови планів швидкостей і прискорень механізмів II класу

3.5.1. Плани швидкостей і прискорень шарнірного чотириланкового механізму [41]

Як і для кривошипно-повзункового механізму, повинні бути задані кінематична схема механізму (рис. 3.12, *а*) і закон руху початкової ланки — кривошипа *1* (ω_1 = const). Визначимо модуль швидкості точки A ($v_A = \omega_1 l_{OA}$) і відкладемо вектор цієї швидкості у масштабі $\mu_v(\boldsymbol{v}_A \perp OA)$, попередньо вибравши відрізок pa. Масштаб плану швидкостей одержимо за формулою (3.7).

Для визначення швидкості точки B, яка одночасно належить ланкам *2* і *3*, складемо векторні рівняння

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA};\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}. \qquad (3.16)$$

За першим рівнянням (3.16) через кінець вектора $\boldsymbol{v}_A$ (точка a) проведемо лінію відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{BA}$ точки B відносно точки A ($\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$), а через точку p — лінію відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{BC}$ точки B відносно точки C ($\boldsymbol{v}_{BC} \perp BC$). Точка C як нерухома ($\boldsymbol{v}_C = 0$) потрапляє у полюс плану швидкостей, там знаходиться і точка O ($\boldsymbol{v}_O = 0$). Точка перетину ліній-напрямків швидкостей $\boldsymbol{v}_{BA}$ і $\boldsymbol{v}_{BC} = \boldsymbol{v}_B$ визначає точку b, а отже, і величину цих векторів у масштабі μ_v:

$$v_{BA} = (ab)\mu_v,\ v_B = (pb)\mu_v.$$

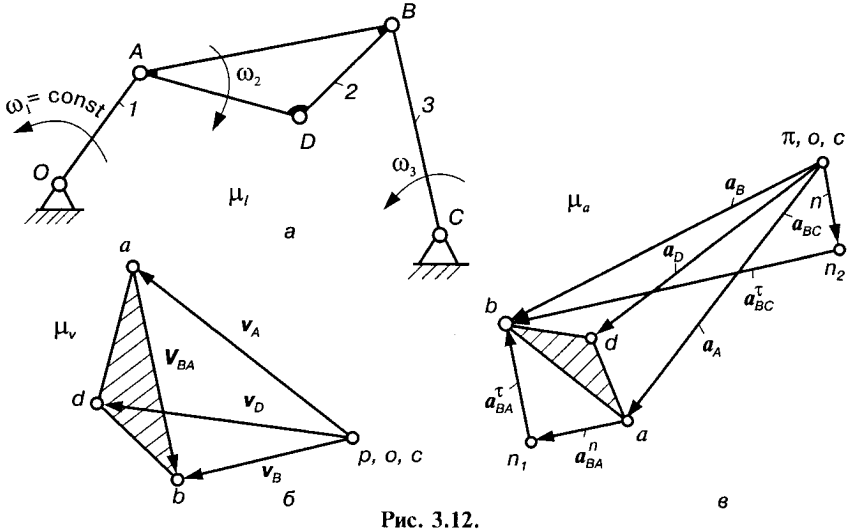


Рис. 3.12.

Швидкість точки D, що належить ланці *2*, можна визначити за допомогою теореми подібності для плану швидкостей, згідно з якою можна записати такі пропорції:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ad}{AD} = \frac{bd}{BD} \ . \tag{3.17}$$

З цих пропорцій знайдемо відрізки:

$$ad = ab\frac{AD}{AB};\ bd = ad\frac{BD}{AD},$$

за допомогою яких побудуємо Δabd, подібний до ΔABD. З'єднавши точку d з полюсом p, отримаємо швидкість точки D: $v_D = (pd)\mu_v$. Її можна визначити також методом векторних рівнянь, розглянувши швидкість точки D через швидкості точок A і B, тобто записавши рівняння

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{DA};\ \boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{DB}, \tag{3.18}$$

де $\boldsymbol{v}_{DA} \perp DA$; $\boldsymbol{v}_{DB} \perp DB$.

Кутові швидкості ланок *2* і *3* знайдемо, використавши відносні швидкості v_{BA} і v_{BC}:

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{AB};\ \omega_3 = v_{BC}/l_{BC} = v_B/l_{BC}.$$

Щоб встановити напрямок кутової швидкості ω_2, перенесемо вектор $\boldsymbol{v}_{BA}$ у точку B і розглянемо рух ланки *2* відносно точки A;

для кутової швидкості ω_3 перенесемо вектор $\boldsymbol{v}_{BC}$ також у точку B і розглянемо рух ланки *3* відносно точки *C*. У даному випадку ω_2 напрямлена за рухом годинникової стрілки, ω_3 — проти руху годинникової стрілки.

Побудову плану прискорень цього механізму також розпочнемо з ланки *1*. Прискорення точки *A* при $\omega_1 = \text{const}$ визначимо за формулою нормального прискорення $a_A = \omega_1^2 l_{OA}$.

Вибравши полюс плану прискорень π (рис. 3.12, *в*), відкладемо від нього відрізок πa, який відповідає прискоренню точки *A* у масштабі μ_a (3.13). Прискорення точки *A* спрямоване по лінії *AO* від точки *A* до точки *O*.

Для знаходження прискорення точки *B* складемо два векторні рівняння:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^n_{BA} + \boldsymbol{a}^\tau_{BA};\ \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{BC} + \boldsymbol{a}^\tau_{BC}. \qquad (3.19)$$

Згідно з першим рівнянням системи (3.19) кінець першого вектора $\boldsymbol{a}_A$ повинен збігатися з початком вектора $\boldsymbol{a}^n_{BA}$ нормального прискорення точки *B* відносно *A*, величина якого визначається за формулою $a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB}$, або $a^n_{BA} = v^2_{BA} / l_{AB}$.

У вибраному масштабі цей вектор буде зображено відрізком $an_1 = a^n_{BA} / \mu_a$, мм. Прискорення $\boldsymbol{a}^n_{BA}$ направлене вздовж осі ланки *AB* від точки *B* до точки *A*. Через точку n_1 згідно з цим самим рівнянням необхідно провести лінію-напрямок дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{BA}$, величина останнього невідома, відомий лише його напрямок — перпендикулярний до лінії *AB*.

Розглянемо друге рівняння (3.19). Прискорення точки *C* дорівнює нулю, тому точка *c* збігається з полюсом плану. Прискорення $a^n_{BC} = \omega_3^2 l_{BC}$ і направлене від точки *B* до точки *C*. Відрізок $\pi n_2 = cn_2 = a^n_{BC} / \mu_a$, який відповідає прискоренню $\boldsymbol{a}^n_{BC}$, на плані відкладаємо від точки π. Через точку n_2 проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{BC} \perp BC$ до перетину з лінією-напрямком прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{BA}$. Точка перетину *b* цих ліній визначить величину і напрямок прискорення точки *B* та величини дотичних прискорень (у масштабі μ_a).

Прискорення точки *D* отримаємо методом подібності, побудувавши подібний до ланки *ABD* трикутник *abd*. Відрізки *ad* і *bd*

визначимо із пропорцій (3.17). Щоб знайти прискорення точки D, можна також записати векторні рівняння, виразивши прискорення точки D через прискорення точок A і B, тобто

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^n_{DA} + \boldsymbol{a}^\tau_{DA};\ \boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{DB} + \boldsymbol{a}^\tau_{DB}\ . \qquad (3.20)$$

Плани прискорень на основі рівнянь (3.20) будуються так само, як і для точки B (3.19).

Модуль кутових прискорень ланок *2* і *3* знайдемо за формулами

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB};\ \varepsilon_3 = a^\tau_{BC} / l_{BC}\ .$$

Для визначення напрямку ε_2 і ε_3 перенесемо вектори $\boldsymbol{a}^\tau_{BA}$ і $\boldsymbol{a}^\tau_{BC}$ у точку B і розглянемо, в який бік ці вектори повертають ланки відповідно AB і BC.

3.5.2. Плани швидкостей і прискорень кулісного механізму

На рис. 3.13, *а* зображено кінематичну схему кривошипно-кулісного механізму. Швидкість обертання кривошипа приймаємо $\omega_1 =$ $=$ const. Тоді швидкість точки A, яка належить кривошипу *1* і повзуну *2*, визначається за формулою $v_A = \omega_1 l_{OA}$ і спрямована перпендикулярно до лінії OA. Відкладаємо вектор цієї швидкості у масштабі μ_v (3.7), попередньо вибравши відрізок pa (рис. 3.13, *б*).

Для визначення швидкості точки A_3, яка належить кулісі *3* і у даний момент збігається з точкою A, можна використати теорему про розклад складного руху повзуна *2* на два прості — переносний (обертовий) разом із кулісою *3* і відносний (поступальний) рух повзуна *2* уздовж куліси *3*. У переносному русі швидкість точки A, яка належить повзуну *2*, буде дорівнювати швидкості точки A_3, у відносному русі — швидкості v_{AA_3} поступального руху повзуна вздовж осі куліси. На основі цього запишемо векторне рівняння:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{A_3} + \boldsymbol{v}_{AA_3}\ . \qquad (3.21)$$

З іншого боку,

$$\boldsymbol{v}_{A_3} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{A_3B}, \qquad (3.22)$$

де $\boldsymbol{v}_B = 0$, тому $\boldsymbol{v}_{A_3} = \boldsymbol{v}_{A_3B}$.

Провівши через полюс p лінію-напрямок вектора $\boldsymbol{v}_{A_3} \perp AB$, а через точку a лінію-напрямок вектора $\boldsymbol{v}_{AA_3}$, знайдемо точку a_3

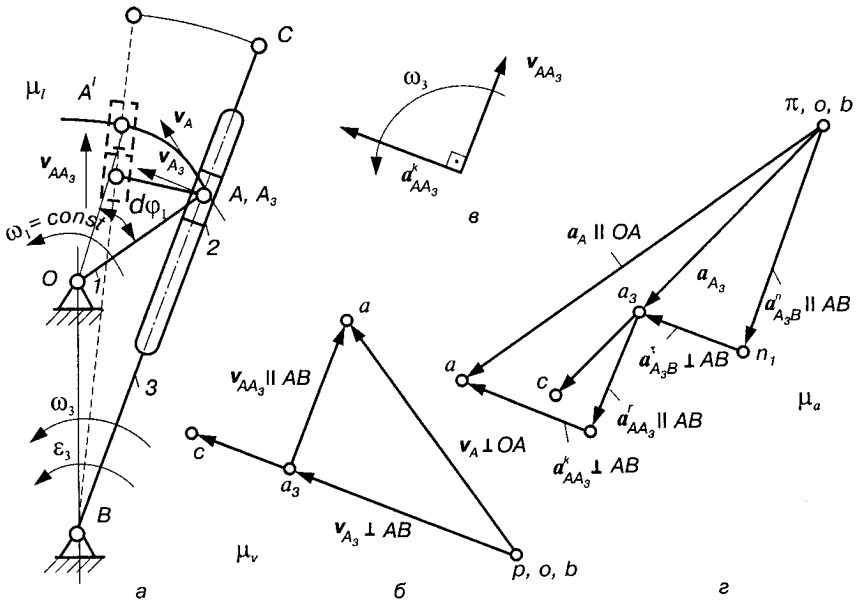


Рис. 3.13.

перетину цих векторів. Тоді $v_{A_3} = (pa_3)\mu_v$, $v_{AA_3} = (aa_3)\mu_v$. Напрямки швидкостей $\boldsymbol{v}_{A_3}$ *і* $\boldsymbol{v}_{AA_3}$ визначаються рівнянням (3.21).

Швидкість точки *C*, яка належить кулісі *3*, можна визначити, скориставшись методом подібності, склавши пропорцію

$$\frac{pc}{pa_3} = \frac{BC}{BA_3},$$

звідки маємо

$$pc = pa_3 \frac{BC}{BA_3}. \qquad (3.23)$$

Тоді швидкість точки *C*

$$v_C = (pc)\mu_v.$$

Знайдемо кутові швидкості ланок. Очевидно, що

$$\omega_3 = v_{A_3} / l_{BA_3}\,;\ \omega_2 = \omega_3\,.$$

Напрямок кутової швидкості ω_3 можна визначити, якщо вектор швидкості точки A_3 (рис. 3.13, *а*) прикласти у точці A_3 і розглянути обертання ланки *3* навколо точки *B*. У даному випадку ω_3 направлена проти руху годинникової стрілки.

Плани прискорень механізму будуються у такому самому порядку. Прискорення точки A визначимо за формулою

$$a_A = \omega_1^2 l_{OA} = v_A^2 / l_{OA}.$$

Вибравши полюс плану прискорень π (рис. 3.13, *г*), відкладемо від нього відрізок πa, який відповідає прискоренню точки A у масштабі μ_a (3.13). Прискорення точки A спрямоване по лінії OA від точки A до точки O.

Для визначення прискорення точки A_3 використаємо теорему Коріоліса, згідно з якою, якщо ***переносний рух тіла обертовий*** (звідси відносний рух — поступальний), то абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень: ***переносного, відносного і коріолісового*** (поворотного). У даному випадку переносний рух (рух куліси *3*) обертовий, тому можна записати

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{A_3} + \boldsymbol{a}^r_{AA_3} + \boldsymbol{a}^k_{AA_3}. \qquad (3.24)$$

Прискорення точки $\boldsymbol{a}_{A_3}$ є прискоренням у переносному русі повзуна *2* разом із точкою A_3, повна його величина

$$\boldsymbol{a}_{A_3} = \boldsymbol{a}_{A_3B} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{A_3B} + \boldsymbol{a}^\tau_{A_3B}, \qquad (3.25)$$

де $a_B = 0$; $a^n_{A_3B} = \omega_3^2 / l_{A_3B}$ — нормальне прискорення точки A_3 при обертанні навколо точки B, вектор якого направлений вздовж лінії A_3B від точки A_3 до точки B; $\boldsymbol{a}^\tau_{A_3B}$ — дотичне прискорення точки A_3 при обертанні куліси *3* навколо точки B.

Відносне (релятивне) прискорення $\boldsymbol{a}^r_{AA_3}$ направлене вздовж осі куліси A_3B. Його величина (модуль) невідома.

Модуль прискорення Коріоліса визначається за формулою (для плоского руху)

$$a^k_{AA_3} = 2\omega_3 v_{AA_3}. \qquad (3.26)$$

Щоб знайти його напрямок, необхідно вектор відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{AA_3}$ (рис. 3.13, *в*) повернути на 90° в бік переносної кутової швидкості ω_3.

Підставивши (3.25) у (3.24), одержимо

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^n_{A_3B} + \boldsymbol{a}^\tau_{A_3B} + \boldsymbol{a}^r_{AA_3} + \boldsymbol{a}^k_{AA_3}. \qquad (3.27)$$

На основі рівняння (3.27) побудуємо план прискорень механізму. З точки π відкладемо відрізок $\pi n_1 = a_{A_3B} / \mu_a$, який у масштабі μ_a ви-

значає вектор прискорення $\boldsymbol{a}^{n}_{A_3B}$, а через точку n_1 проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B} \perp A_3B$. Оскільки величини прискорень $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}$ і $\boldsymbol{a}^{r}_{AA_3}$ невідомі, побудову планів прискорень продовжимо з кінця векторного рівняння, приклавши вектор $\boldsymbol{a}^{k}_{AA_3}$ своїм кінцем у точку a (відрізок $ka = a^{k}_{AA_3}/\mu_a$), а через початок цього вектора проведемо лінію-напрямок вектора $\boldsymbol{a}^{r}_{AA_3}$ до перетину з вектором $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}$, точка a_3 перетину яких визначить величину повного прискорення $\boldsymbol{a}_{A_3}$, а також невідомих складових $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}$ і $\boldsymbol{a}^{r}_{AA_3}$, напрямки яких отримаємо за (3.27). Положення точки c на плані прискорень отримаємо методом подібності, використавши рівняння (3.23), у яке замість точки p підставимо π, тоді $a_c = (\pi c)\mu_a$.

Модуль кутового прискорення ланки *3* $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ знайдемо за формулою $\varepsilon_3 = a^{\tau}_{A_3B} / l_{A_3B}$. Щоб встановити його напрямок, вектор $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}$ перенесемо у точку A_3 і будемо спостерігати обертання ланки *3* навколо точки *B*. У даному випадку кутове прискорення ε_3 буде направлене проти руху годинникової стрілки. Тобто ланка *3* буде рухатись з прискоренням.

При побудові швидкостей і прискорень кулісних механізмів можна вибрати за переносне середовище не тільки кулісу *3*, але й камінь *2*. У такому випадку рівняння (3.21) (3.22), (3.24) і (3.25) набувають вигляду

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{A_3} &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{A_3A}; & \boldsymbol{v}_{A_3} &= \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{A_3B};\\ \boldsymbol{a}_{A_3} &= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{k}_{A_3A} + \boldsymbol{a}^{r}_{A_3A}; & \boldsymbol{a}_{A_3} &= \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^{n}_{A_3B} + \boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}, \end{aligned}\right\}, \qquad (3.28)$$

де $\boldsymbol{v}_B = 0$, $\boldsymbol{a}_B = 0$ — відповідно швидкість і прискорення точки *B*. Зрозуміло, що $\boldsymbol{v}_{A_3A} = -\boldsymbol{v}_{AA_3}$, $\boldsymbol{a}^{k}_{A_3A} = -\boldsymbol{a}^{k}_{AA_3}$, $\boldsymbol{a}^{r}_{A_3A} = -\boldsymbol{a}^{r}_{AA_3}$.

У зміщених (нецентральних) кулісних механізмах (рис. 3.14, *а*) відносна швидкість $\boldsymbol{v}_{AA_3}$ (рис. 3.14, *б*) і відносне прискорення $\boldsymbol{a}^{r}_{AA_3}$ (рис. 3.14, *в*) направлені вздовж осі куліси *AB*, швидкість $\boldsymbol{v}_{A_3}$ і прискорення $\boldsymbol{a}^{\tau}_{A_3B}$ — перпендикулярно до лінії *AD*, $\boldsymbol{a}^{k}_{AA_3}$ — перпендикулярно до *AB*.

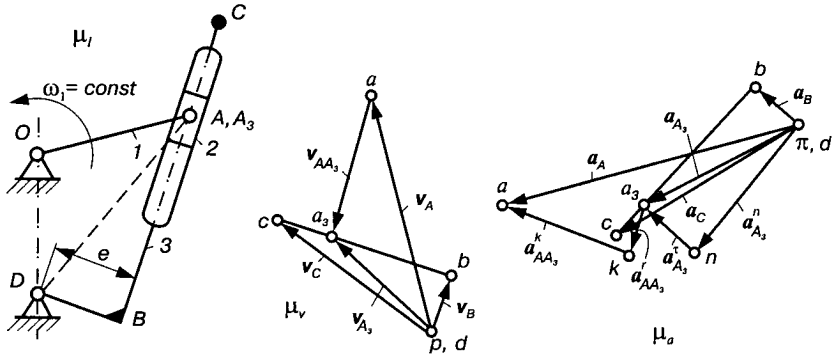


Рис. 3.14.

Швидкість та прискорення точок B і C можна визначити також методом подібності або методом векторних рівнянь.

3.5.3. Плани швидкостей і прискорень синусного механізму

На рис. 3.15, *а* зображено кінематичну схему синусного механізму, до складу якого входить група II класу V виду. Треба методом планів визначити швидкість і прискорення ланок механізму, якщо кутова швидкість кривошипа *1* $\omega_1 = \text{const}$.

Швидкість точки A, яка належить ланкам *1* і *2*, знайдемо за формулою $v_A = \omega_1 l_{OA}$. На плані (рис. 3.15, *б*) це вектор, зображений у масштабі μ_v відрізком pa, який проведено перпендикулярно до кривошипа.

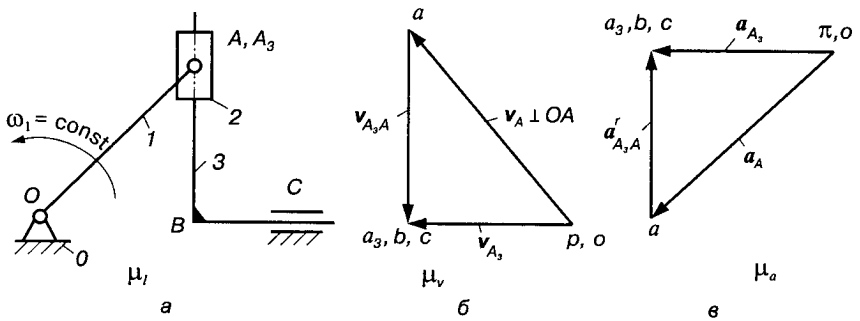


Рис. 3.15.

Швидкість точки A_3, яка належить ланці *3*, виразимо через точку A, яка збігається з нею і належить ланкам *1* і *2*:

$$\boldsymbol{v}_{A_3} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{A_3A}. \qquad (3.29)$$

У цьому рівнянні відомі модуль і напрямок вектора швидкості $\mathbf{v}_A$, напрямки відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{A_3A} \parallel AB$ і швидкості точки A_3 ($\boldsymbol{v}_{A_3} \parallel BC$, оскільки всі точки ланки *3* рухаються паралельно лінії BC). Це дає змогу побудувати план швидкостей механізму (рис. 3.15, *б*). Тут можна записати ще одне рівняння для швидкості точки A_3, виразивши рух цієї точки через точку C_0, яка належить стояку, тобто

$$\boldsymbol{v}_{A_3} = \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{C_0} + \boldsymbol{v}_{CC_0}. \qquad (3.30)$$

Але якщо врахувати, що швидкість точки C_0 дорівнює нулю, то потреба у такому рівнянні відпадає $(\boldsymbol{v}_{A_3} = \boldsymbol{v}_{CC_0})$.

План прискорень механізму (рис. 3.15, *в*) будується аналогічно. Прискорення точки A $a_A = \omega_1^2 l_{OA}$ направлене вздовж кривошипа від точки A до точки O (на плані зображено відрізком πa).

Для визначення прискорення точки A_3 запишемо векторне рівняння:

$$\boldsymbol{a}_{A_3} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^k_{A_3A} + \boldsymbol{a}^r_{A_3A}. \qquad (3.31)$$

У цьому рівнянні невідомими є модулі прискорення точки A_3 і відносного прискорення точки A_3 відносно A. Прискорення $a^k_{A_3A} = 2\omega_2 v_{A_3A} = 0$, тому що ланки *2* і *3* рухаються поступально ($\omega_2 = \omega_3 = 0$). Отже, для побудови плану прискорень проведемо через точку a лінію-напрямок прискорення $\boldsymbol{a}^r_{A_3A}$, через полюс π — лінію-напрямок прискорення $\boldsymbol{a}_{A_3}$. Точка перетину a_3 цих ліній-напрямків визначить величину і напрямок прискорень: $a_{A_3} = (\pi a)\mu_a$, $a^r_{A_3A} = (aa_3)\mu_a$. Всі точки, які належать ланці *3* (A_3, B, C), на плані збігаються, тому що ця ланка здійснює поступальний рух.

3.5.4. Плани швидкостей і прискорень шестиланкового механізму

На рис. 3.16, *а* зображено кінематичну схему шестиланкового механізму II класу (механізм поперечно-стругального верстата). Методом планів треба визначити швидкості і прискорення всіх ланок механізму за умови, що кривошип обертається з кутовою швидкістю ω_1 і кутовим прискоренням ε_1.

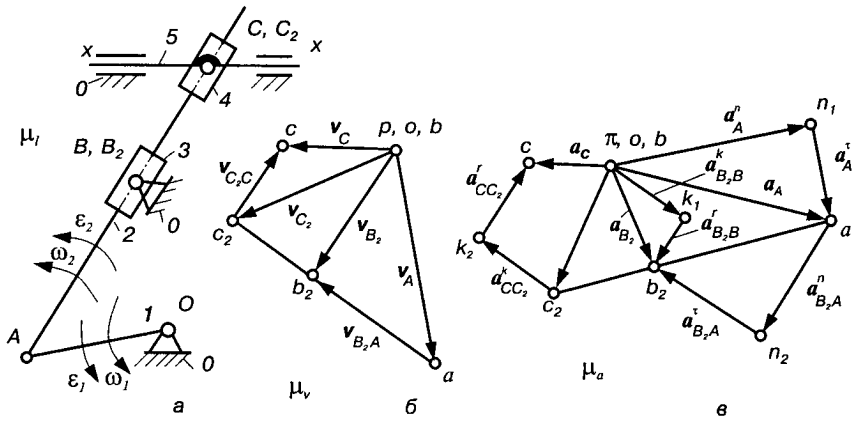


Рис. 3.16.

Механізм утворено приєднанням до механізму I класу (кривошип *1* і стояка *0*) двох груп II класу: групи III виду, складеної з ланок *2* і *3*, і групи IV виду, складеної з ланок *4* і *5* (див. рис. 2.35, *д, є*). Позначимо точки, які збігаються у даний момент, але належать різним ланкам поступальної пари: точки B_2 і C_2 — ланці *2*, точка *B* — ланкам *3* і *0*, точка *C* — ланкам *4* і *5*.

Порядок побудови планів швидкостей і прискорень таких механізмів наступний: спочатку розглядають механізм I класу, потім — першу приєднану групу, яка складається з ланок *2* і *3*; далі — другу приєднану групу і т. д. Закінчують побудову планів швидкостей і прискорень останньою групою, яка у даному випадку складається з ланок *4* і *5*.

Визначимо швидкість точки *A* центра пальця кривошипа *1* та шатуна *2* за формулою $v_A = \omega_1 l_{OA}$ і відкладемо її у масштабі μ_v (3.7), попередньо вибравши відрізок *pa* ($v_A \perp OA$).

Далі знайдемо швидкість точки B_2, склавши векторні рівняння

$$\boldsymbol{v}_{B_2} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{B_2A};\ \boldsymbol{v}_{B_2} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{B_2B}. \qquad (3.32)$$

Вектор швидкості $\boldsymbol{v}_{B_2A}$, направлений перпендикулярно до лінії *AB*, за модулем невідомий; вектор $\boldsymbol{v}_{B_2B}$, направлений уздовж лінії *AB*, за модулем також невідомий; $v_B = 0$.

Тоді згідно з (3.32) через точку *a* (див. рис. 3.16, *б*) проведемо лінію-напрямок відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{B_2A} \perp AB_2$, через *p* —

лінію-напрямок відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{B_2B} \parallel AB_2$, точка перетину b_2 цих ліній визначить величину і напрямок швидкості точки $B_2 - v_{B_2} = (pb_2)\mu_v$, а також величину і напрямок відносних швидкостей $\boldsymbol{v}_{B_2A}$ і $\boldsymbol{v}_{B_2B} = \boldsymbol{v}_{B_2}$, де $v_{B_2A} = (ab_2)\mu_v$.

Кутову швидкість ланки *2* визначаємо за формулою $\omega_2 = v_{B_2A} / l_{AB}$. Щоб знайти її напрямок, перенесемо вектор $\boldsymbol{v}_{B_2A}$ у точку B_2 і спостерігатимемо обертання ланки *2* відносно точки *A* (див. рис. 3.16, *а*). У даному випадку ω_2 направлена проти руху годинникової стрілки.

Швидкість точки C_2, яка належить ланці *2*, можна визначити методом подібності, склавши пропорцію

$$\frac{c_2a}{C_2A} = \frac{b_2a}{B_2A}, \text{ звідки } c_2a = b_2a\frac{C_2A}{B_2A}. \tag{3.33}$$

Відклавши відрізок c_2a (точка c_2 повинна лежати на продовженні відрізка ab_2, оскільки точки B_2 і C_2 належать ланці *2*) і з'єднавши точку c_2 з полюсом *p*, встановимо величину і напрямок швидкості точки $C_2 - v_{C_2} = (pc_2)\mu_v$.

Для визначення швидкості точки *C* складемо векторне рівняння

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{C_2} + \boldsymbol{v}_{CC_2}. \tag{3.34}$$

У цьому рівнянні відомі напрямки векторів швидкостей $\boldsymbol{v}_C$ і $\boldsymbol{v}_{CC_2}$, тому через точку c_2 проводимо лінію, паралельну AC_2, а через полюс *p* — лінію, паралельну напрямній *x—x*. Точка перетину цих ліній визначає точку *c*, тоді $v_C = (pc)\mu_v$.

У такому самому порядку будуємо план прискорень. Прискорення точки *A* має вигляд

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_A^\tau,$$

де

$$\boldsymbol{a}_A^n = \boldsymbol{a}_{AO}^n = \omega_1^2 l_{OA};\ \boldsymbol{a}_A^\tau = \boldsymbol{a}_{AO}^\tau = \varepsilon_1 l_{OA}.$$

Нормальне прискорення $\boldsymbol{a}_A^n$ направлене вздовж кривошипа *OA* від точки *A* до точки *O*, дотичне $\boldsymbol{a}_A^\tau$ — перпендикулярно до кривошипа *OA*. Ці вектори на плані прискорень (див. рис. 3.16, *в*) зображені відповідно відрізками πn_1 і n_1a. Якщо $\varepsilon_1 = 0$, то відрізок $n_1a = 0$.

Для визначення прискорення точки B_2 запишемо два векторні рівняння:

$$\boldsymbol{a}_{B_2} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^n_{B_2A} + \boldsymbol{a}^\tau_{B_2A};\ \boldsymbol{a}_{B_2} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^k_{B_2B} + \boldsymbol{a}^r_{B_2B}, \qquad (3.35)$$

де $\boldsymbol{a}^n_{B_2A} = \omega_2^2 l_{B_2A}$ — нормальне прискорення точки B_2 відносно точки A, вектор якого направлений уздовж ланки *2* від точки B_2 до точки A; $\boldsymbol{a}^\tau_{B_2A}$ — дотичне прискорення точки B_2 відносно точки A, вектор якого направлений перпендикулярно до AB_2; $\boldsymbol{a}_B = 0$ — прискорення точки B, яка належить ланкам *3* і *0*; $\boldsymbol{a}^k_{B_2B} = 2\omega_2 \boldsymbol{v}_{B_2B}$ — коріолісове прискорення, направлене перпендикулярно до лінії AB (вектор $\boldsymbol{v}_{B_2B}$ повертаємо на 90° в бік ω_2); $\boldsymbol{a}^r_{B_2B}$ — відносне (релятивне) прискорення точки B_2 відносно точки B, направлене паралельно лінії AB.

Усі вектори на плані прискорень зображені в одному масштабі μ_a (3.13).

План прискорень побудуємо згідно з (3.35), а саме: до кінця вектора $\boldsymbol{a}_A$ (точка a) прикладемо вектор прискорення $\boldsymbol{a}^n_{B_2A}$ (відрізок an_2), через кінець якого проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{B_2A}$; з другого боку — із точки π (точка b збігається з точкою π) відкладемо вектор коріолісового прискорення (відрізок πk_1), через кінець якого проведемо лінію-напрямок відносного прискорення $\boldsymbol{a}^r_{B_2B}$. Точка перетину b_2 напрямків дотичного $\boldsymbol{a}^\tau_{B_2A}$ і відносного $\boldsymbol{a}^r_{B_2B}$ прискорень визначить напрямок і величину прискорення точки B_2: $\boldsymbol{a}_{B_2} = (\pi b_2)\mu_a$, а також прискорень $\boldsymbol{a}^\tau_{B_2A} = (n_2 b_2)\mu_a$ і $\boldsymbol{a}^r_{B_2B} = (k_1 b_2)\mu_a$.

Модуль кутового прискорення ланки *2* $\varepsilon_2 = a^\tau_{B_2A} / l_{AB_2}$, його напрямок знаходимо, приклавши вектор прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{B_2B}$ до точки B_2. Розглянувши рух ланки *2* відносно точки A, побачимо, що ε_2 направлене проти руху годинникової стрілки.

Прискорення точки C_2 знайдемо методом подібності, скориставшись залежністю (3.33). Тоді $a_{C_2} = (\pi c_2)\mu_a$.

Для визначення прискорення точки C складаємо векторне рівняння:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C_2} + \boldsymbol{a}^k_{CC_2} + \boldsymbol{a}^r_{CC_2}. \qquad (3.36)$$

У цьому рівнянні відомі: напрямок прискорення точки C; величина і напрямок прискорення $\boldsymbol{a}_{C_2}$; напрямок відносного прискорення $\boldsymbol{a}^r_{CC_2}$. Можна визначити коріолісове прискорення $a^k_{CC_2} = 2\omega_2 v_{CC_2}$. Щоб знайти напрямок $\boldsymbol{a}^k_{CC_2}$, повернемо вектор відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{CC_2}$ на 90° в бік ω_2 (див. рис. 3.16, *б*, *в*).

Побудуємо план прискорень згідно з рівнянням (3.36). До кінця вектора прискорення $\boldsymbol{a}_{C_2}$ (точка c_2) прикладемо вектор прискорення $\boldsymbol{a}^k_{CC_2}$ (відрізок c_2k_2), через кінець якого проведемо лінію-напрямок відносного прискорення $\boldsymbol{a}^r_{CC_2} \parallel AC_2$, а через полюс π — лінію-напрямок прискорення $\boldsymbol{a}_C \parallel x{-}x$. Точка перетину c цих ліній визначить величину і напрямок прискорення точки C: $\boldsymbol{a}_C = (\pi c)\mu_a$ і відносного прискорення точки C відносно точки C_2: $\boldsymbol{a}_{CC_2} = (k_2 c)\mu_a$.

3.5.5. Побудова планів швидкостей і прискорень структурних груп II класу з поступальними кінематичними парами

Ми розглянули детально задачі про побудову планів швидкостей і прискорень механізмів II класу, до складу яких входили поступальні кінематичні пари, але при цьому поступальні пари збігалися з обертовими. При розгляді груп II класу II—V видів, коли відрізки $CD \neq 0$ (див. рис. 2.35, *б*, *г*, *е*) або $BC \neq 0$ (див. рис. 2.35, *а*, *ж*), зручно плани цих груп перетворити так, щоб осі поступальних пар проходили через центр обертової пари. Напрямну $x{-}x$ (рис. 3.17, *а*), вздовж якої ковзає ланка *3*, завжди можна перенести паралельно самій собі так, щоб вона проходила через центр обертової пари B (рис. 3.17, *б*). При такому переміщенні швидкості і прискорення ланки *3* не зміняться.

Аналогічні перетворення можна здійснити і для груп II класу III виду (рис. 3.17, *в*). Тут вісь $x{-}x$ ланки *2* проходить через вісь обертання пари C (рис. 3.17, *г*).

На рис. 3.18 показано перетворення групи II класу IV виду. Тут осі $x{-}x$ і $y{-}y$, які належать ланкам *1* і *4* (рис. 3.18, *а*), проходять через центр обертової пари B (рис. 3.18, *б*). На рис. 3.19, *б*

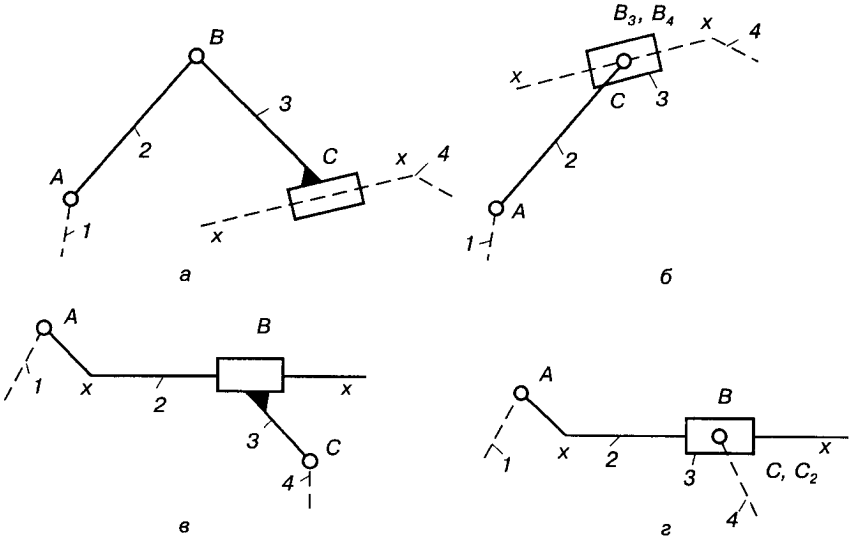


Рис. 3.17.

вісь *x*—*x*, яка належить ланці *3* (рис. 3.19, *а*), проходить через центр обертової пари *A*.

Такі перетворення спрощують складання кінематичних схем і побудову планів швидкостей та прискорень груп, не змінюючи кінематику ланок механізму.

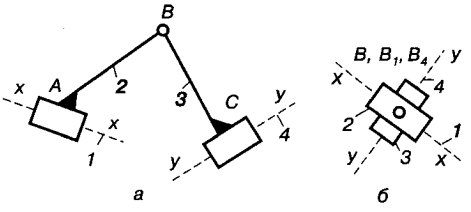


Рис. 3.18.

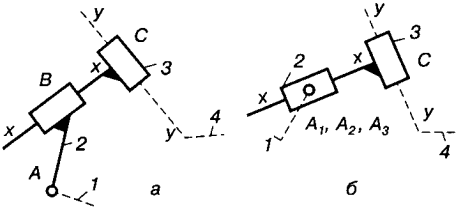


Рис. 3.19.

І нарешті, необхідно підкреслити, що плани швидкостей і прискорень багатоланкових механізмів, як вже розглядалось у п. 3.5.4, будуються у такій послідовності, з якою структурні групи приєднуються до основного механізму. При цьому використовуються лише ***два типи рівнянь***: (3.16), (3.19) для точок, що лежать на одній ланці, і (3.21), (3.24) для точок, що збігаються і належать двом ланкам, які утворюють поступальну пару.

3.6. Аналоги швидкостей і прискорень

Аналітичне дослідження кінематики механізмів зручно вести з використанням ***аналогів швидкостей і прискорень,*** які вперше були використані Ассуром. Це пояснюється тим, що для заданої кінематичної схеми механізму аналоги швидкостей і прискорень залежать тільки від узагальненої координати і не залежать від швидкості руху початкової ланки, тобто кінематичне дослідження можна провадити суто геометричними методами. Крім цього, що дуже важливо, аналоги швидкостей і прискорень дають змогу легко порівнювати закони руху ланок, а звідси й вибрати оптимальний варіант механізму для забезпечення заданих умов роботи.

Узагальненою координатою, як правило, вибирають переміщення початкової ланки (кут φ_1 повороту кривошипа або лінійне переміщення s_1 повзуна).

Як відомо, швидкість будь-якої точки M ланки, що має ***поступальний рух,*** є першою похідною від переміщення цієї точки за часом:

$$\boldsymbol{v}_i = ds_i/dt. \tag{3.37}$$

Якщо помножити і поділити (3.37) на $d\varphi_1$, одержимо

$$v_i = \frac{ds_i}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1}, \tag{3.38}$$

де $d\varphi_1/dt = \omega_1$, а $ds_i/d\varphi_1 = s_i'$ — аналог лінійної швидкості точки M; ω_1 — кутова швидкість початкової ланки (кривошипа).

Тоді рівняння (3.38) можна записати так:

$$v_i = s_i'\omega_1. \tag{3.39}$$

Отже, ***аналогом швидкостей*** називають першу похідну від переміщень за узагальненою координатою (φ_1 або s_1).

Аналогічно запишемо рівняння (3.39) для кутової швидкості ланки i (***обертовий рух***):

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \varphi_i'\omega_1, \tag{3.40}$$

де $\varphi_1' = d\varphi_i / d\varphi_1$ — аналог кутової швидкості ланки.

Як видно з (3.39) і (3.40), аналоги швидкостей чисельно дорівнюють значенням швидкостей відповідних точок або ланок

при $\omega_1 = 1$, а у загальному випадку є відношеннями швидкостей: $s_i' = v_i / \omega_1$, $\varphi_i' = \omega_i / \omega_1$. Тому їх часто ще називають ***передаточними функціями***.

Таким чином, дійсні значення швидкостей v_i або ω_i дорівнюють добутку кутової швидкості кривошипа ω_i на відповідні аналоги швидкостей s_i' або φ_i'.

Прискорення точки M також можна виразити через аналоги прискорень, якщо продиференціювати рівняння (3.39) і (3.40). Тоді

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d(s_i'\omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{ds_i'}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + s_i' \frac{d\omega_1}{dt} = s_i''\omega_1^2 + s_i'\varepsilon_i;$$

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d(\varphi_i'\omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{d\varphi_i'}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + \varphi_i' \frac{d\omega_1}{dt} = \varphi_i''\omega_1^2 + \varphi_i'\varepsilon_i, \quad (3.41)$$

де $s_i'' = \dfrac{ds_i'}{d\varphi_1} = \dfrac{d^2 s_i}{d\varphi_1^2}$ — аналог лінійного прискорення точки M;

$\varphi_i'' = \dfrac{d\varphi_i'}{d\varphi_1} = \dfrac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}$ — аналог кутового прискорення ланки i.

Значить, ***аналогом прискорення*** називають другу похідну від переміщень за узагальненою координатою.

Якщо початкова ланка обертається з постійною швидкістю ($\omega_1 = \text{const}$), то кутове прискорення $\varepsilon = \dfrac{d\omega_1}{dt} = 0$, і залежності (3.41) можна записати так:

$$a_i = s_i''\omega_1^2; \quad \varepsilon_i = \varphi_i''\omega_1^2. \quad (3.42)$$

У загальному випадку рівняння швидкостей і прискорень будь-якої точки M ланки можуть бути одержані таким чином. Нехай $\boldsymbol{r}_M$ є радіусом-вектором, який визначає положення точки M. З теоретичної механіки відомо, що швидкість $\boldsymbol{v}_M$ і прискорення $\boldsymbol{a}_M$ точки M можуть бути одержані послідовним дворазовим диференціюванням радіуса-вектора $\boldsymbol{r}_M$ за часом t. Маємо

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}_M}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \boldsymbol{r}_M', \quad (3.43)$$

де $\boldsymbol{r}_M' = \dfrac{d\boldsymbol{r}_M}{d\varphi_1}$ — аналог швидкостей точки M.

Диференціюючи вираз (3.43) за часом t, одержуємо величину прискорення $\boldsymbol{a}_M$ точки M. Прискорення $\boldsymbol{a}_M$ у загальному випадку складається з чотирьох складових: ***нормального прискорення,*** яке направлене вздовж радіуса-вектора $\boldsymbol{r}_M$ до його початку; ***дотичного прискорення,*** направленого перпендикулярно до $\boldsymbol{r}_M$; ***відносного релятивного прискорення***, направленого вздовж $\boldsymbol{r}_M$; ***коріолісова прискорення***, направленого перпендикулярно до $\boldsymbol{r}_M$.

Користуючись рівністю (3.43), одержуємо

$$\boldsymbol{a}_M = \frac{d\boldsymbol{v}_M}{dt} = \frac{d(\omega_1 \boldsymbol{r}'_M)}{dt^2} = \omega_1 \frac{d\boldsymbol{r}'_M}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} +$$

$$+ \boldsymbol{r}'_M \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1^2 \boldsymbol{r}''_M + \varepsilon_1 \boldsymbol{r}'_M , \qquad (3.44)$$

де $\boldsymbol{r}''_M = \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{d\varphi_1} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{d\varphi_1^2}$ — аналог прискорень точки M.

Аналоги кутових швидкостей і прискорень є безрозмірними величинами, аналоги лінійних швидкостей і прискорень мають розмірність довжини.

Якщо закон початкової ланки задано у вигляді функції $s_1 = s_1(\varphi)$ (s_1 — лінійне переміщення початкової ланки), то знайти аналоги швидкостей і прискорень можна подібним способом.

3.7. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів методом замкнених векторних контурів

У технічній літературі опубліковано велику кількість праць з аналітичного дослідження важільних механізмів. Проте, якщо розглянути загальні методи розв'язку цих задач, універсальні для будь-якого механізму, можна виділити дві їх різновидності [41]:

- метод замкнених векторних контурів, який запропонував В. А. Зінов'єв;
- метод перетворення координат, який запропонував Ю. Ф. Морошкін.

Перший метод зручніший для кінематичного дослідження плоских механізмів, другий — для просторових механізмів.

Розглянемо ***метод замкнених векторних контурів***. При цьому методі аналітичні залежності для визначення основних кінема-

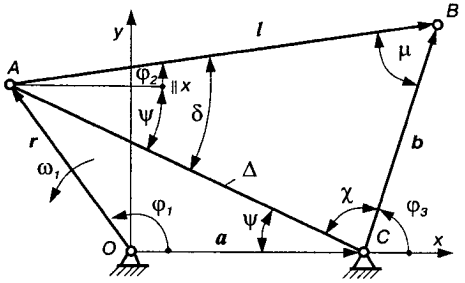


Рис. 3.20.

тичних параметрів можна одержати, якщо умовно уявити механізм замкненим векторним контуром, утвореним ланками цього механізму. Методику одержання розрахункових залежностей розглянемо на практиці шарнірного чотириланкового механізму, кінематичну схему якого зображено на рис. 3.20.

Цей механізм можна зобразити у вигляді замкненого векторного контуру *OABC*, для якого маємо таке векторне рівняння:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \text{ де } r = l_{OA},\ l = l_{AB},\ b = l_{BC},\ a = l_{OC}. \qquad (3.45)$$

Спроектуємо одержаний векторний контур на координатні осі x і y та запишемо рівняння проекцій на них:

$$\begin{aligned} r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 &= a + b\cos\varphi_3; \\ r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 &= a + b\sin\varphi_3, \end{aligned} \qquad (3.46)$$

де φ_1 — узагальнена координата (кут повороту кривошипа).

Всі кути φ_i, які визначають положення ланок, відраховують проти руху годинникової стрілки від лінії, що паралельна осі абсцис x і проведена через початок відповідного вектора; початок відрахунка позначають точкою, напрямок — стрілкою. Можна відраховувати кути від іншої лінії. Кути, які відраховують проти руху годинникової стрілки, будемо вважати додатними, за рухом годинникової стрілки — від'ємними.

Значення кутів φ_2 і φ_3 можна одержати безпосередньо із рівнянь (3.46), проте у цьому випадку необхідно розв'язати квадратне рівняння, в якому іноді важко вірно вибрати його корені. Тому зручніший такий порядок розрахунку.

Проведемо допоміжну лінію AC, довжина якої $l_{AC} = \Delta$, і кут нахилу ψ визначаються із $\Delta\ OAC$:

$$\Delta = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi_1};\ \ \psi = \arcsin\frac{r\sin\varphi_1}{\Delta}. \qquad (3.47)$$

Із $\Delta\ ABC$ знайдемо кути:

$$\mu = \arccos\frac{l^2 + b^2 - \Delta^2}{2lb};$$

$$\delta = \arccos\frac{l^2 + \Delta^2 - b^2}{2l\Delta};\quad \chi = \pi - \mu - \delta. \tag{3.48}$$

Тоді

$$\varphi_2 = \delta - \psi;\quad \varphi_3 = \pi - \psi - \chi. \tag{3.49}$$

Оскільки кути φ_i у загальному випадку мають знак "+" або "–", то це враховується при розрахунках. Кут між напрямком абсолютної швидкості $\boldsymbol{v}_B$ точки B і напрямком відносної швидкості $\boldsymbol{v}_{BA}$ називають ***кутом передачі*** ($\mu = \angle ABC$). Щоб механізм не заклинювало, кут передачі має задовольняти умову $\mu_{min} \le \mu \le \mu_{max}$. Значення кутів μ_{min} і μ_{max} залежать від якості виготовлення механізму, умов тертя. Якщо відсутні такі дані, можна рекомендувати $\mu_{min} = 30°$, $\mu_{max} = 180° - \mu_{min}$. Досліджуючи механізми, треба зважати на величину кутів передачі.

Для визначення аналогів швидкостей продиференціюємо рівняння (3.46) за узагальненою координатою:

$$\begin{aligned} -r\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} - l\sin\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= -b\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1};\\ r\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + l\cos\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= -b\cos\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Врахувавши, що

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = 1,\quad \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \varphi_2',\quad \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \varphi_3'$$

є аналогами кутових швидкостей ланок механізму, одержимо

$$\begin{aligned} r\sin\varphi_1 + l\varphi_2'\sin\varphi_2 &= b\varphi_3'\sin\varphi_3;\\ r\cos\varphi_1 + l\varphi_2'\cos\varphi_2 &= b\varphi_3'\cos\varphi_3. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Для встановлення аналогів швидкостей φ_2' і φ_3' скористаємось першим рівнянням (3.51), у якому від усіх кутів віднімемо спочатку кут φ_3, а потім кут φ_2, що відповідає повороту системи координат xOy спочатку на кут $(-\varphi_3)$, а потім на кут $(-\varphi_2)$. При цьому отримаємо

$$\begin{aligned} r\sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l\varphi_2'\sin(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0;\\ r\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = b\varphi_3'\sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Тоді

$$\varphi_2' = \frac{-r\sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad \varphi_3' = \frac{r\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{b\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \tag{3.53}$$

Для визначення аналогів прискорень продиференціюємо за узагальненою координатою рівняння (3.51) і одержимо

$$r\cos\varphi_1 + l\varphi_2''\sin\varphi_2 + l(\varphi_2')^2\cos\varphi_2 = b\varphi_3\sin\varphi_3 + b(\varphi_3')^2\cos\varphi_3;$$

$$-r\sin\varphi_1 + l\varphi_2''\cos\varphi_2 + l(\varphi_2')^2\sin\varphi_2 =$$

$$= b\varphi_3''\cos\varphi_3 + b(\varphi_3')^2\sin\varphi_3, \tag{3.54}$$

де $\varphi_2'' = d\varphi_2'/d\varphi_1 = d^2\varphi_2/d\varphi_1^2$, $\varphi_3'' = d\varphi_3'/d\varphi_1 = d^2\varphi_3/d\varphi_1^2$ — аналоги кутових прискорень, які дорівнюють похідним за узагальненою координатою φ_1 від відповідних аналогів кутових швидкостей φ_2' і φ_3'.

Величини φ_2'' і φ_3'' можна знайти, якщо повернути систему координат послідовно на кути $(-\varphi_3)$ і $(-\varphi_2)$. При цьому запишемо

$$\varphi_2'' = \frac{b(\varphi_3')^2 - r\cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l(\varphi_2')^2\cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l\sin(\varphi_2 - \varphi_3)};$$

$$\varphi_3'' = \frac{r\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l(\varphi_2')^2 - b(\varphi_3')\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{b\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \tag{3.55}$$

Дійсні кутові швидкості ω_2, ω_3 і прискорення ε_2, ε_3 ланок *2* і *3* згідно з формулами (3.40) і (3.41) при $\omega_1 = \text{const}$ мають вигляд

$$\omega_2 = \varphi_2'\omega_1; \quad \omega_3 = \varphi_3'\omega_1; \quad \varepsilon_2 = \varphi_2''\omega_1^2; \quad \varepsilon_3 = \varphi_3''\omega_1^2.$$

Цей метод можна використати і для складніших механізмів, до яких входять кілька структурних груп II класу. При цьому потрібно розглянути таку саму кількість замкнутих векторних контурів. Для кожного контуру окремо складають векторні рівняння замкнутості, проектують їх на координатні осі і одержують рівняння проекцій, за яким находять положення ланок, потім шляхом диференціювання рівнянь проекцій визначають аналоги швидкостей і прискорень. Проте остаточні залежності для з'ясування кінематичних параметрів у таких механізмах залежать не тільки від кількості та виду груп, які складають меха-

нізм, але й від положення точок приєднання до ланок попередніх груп і варіантів зборки. Це призводить до того, що для кожного механізму одержують свої алгоритми і досить громіздкі програми для ЕОМ, які вимагають значних затрат часу на їх складання і відладку. Скласти бібліотеку індивідуальних програм для всіх механізмів недоцільно і неможливо. Раціональніше створити уніфіковані блоки (підпрограми), використовуючи які можна скласти програму кінематичного дослідження будь-якого важільного механізму [9, 10, 17, 24, 25]. Як показано далі, такими підпрограмами може бути система залежностей для визначення кінематичних параметрів структурної групи, якщо задані кінематичні параметри (положення, швидкість, прискорення) елементів кінематичних пар, якими ці групи приєднуються. Такий метод зводить аналітичне дослідження механізмів до розгляду окремих структурних груп, методика кінематичного дослідження яких не залежить від механізму, у який вона входить. Це дає змогу усунути деякий різнобій, який має місце у теорії механізмів і машин: в одних випадках при дослідженнях механізм розбивають на структурні групи (побудова положень механізмів, плани швидкостей, силовий розрахунок), а в інших (аналітична кінематика) — на замкнуті векторні контури, що залежать не тільки від структурної групи.

3.8. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів

Визначення положення точки і ланки у плоскому русі. Положення будь-якої точки A на координатній площині (рис. 3.21) можна задати координатами x_A і y_A, або радіусом-вектором r_A відносно початку координат O, положення точки B – координатами x_B, y_B і т. д. Модуль радіуса-вектора і напрямний кут φ_i зв'язані з координатами, наприклад точки A (x_A, y_A) залежностями

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}; \quad \varphi_i = \operatorname{arctg}\frac{y_A}{x_A} \tag{3.56}$$

або, навпаки, координати точки A можна виразити через модуль радіуса-вектора і напрямний кут:

$$x_A = r_A \cos\varphi_i; \quad y_A = r_A \sin\varphi_i. \tag{3.57}$$

Положення будь-якої ланки AB на координатній площині можна задати координатами двох точок $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ або координатою однієї точки, наприклад точки A, довжиною ланки AB і значенням напрямного кута φ_{AB}.

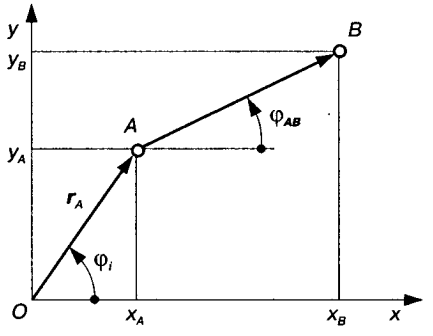


Рис. 3.21.

Кінематика механізму I класу. Як відомо, початкова ланка і стояк утворюють механізм I класу (рис. 3.22). Залежно від того, яку кінематичну пару утворюють ланки механізму – обертову (рис. 3.22, *а*) чи поступальну (рис. 3.22, *б*), – початкова ланка здійснює відносно стояка відповідно обертовий або поступальний рух. При обертовому русі положення кривошипа OA визначаються кутом φ_1, при поступальному – переміщенням повзуна s_1. Параметр φ_1 або s_1 називають узагальненою координатою, яка визначає положення всіх ланок механізму.

Координати точки A кривошипа OA у системі координат xCy мають вигляд

$$x_A = x_O + l_{OA}\cos\varphi_1;\ y_A = y_O + l_{OA}\sin\varphi_1, \qquad (3.58)$$

де x_O, y_O – координати центра обертання кривошипа; l_{OA} – дійсна довжина кривошипа.

Якщо початок координат C і центр обертання ланки збігаються, залежності (3.58) набувають вигляду

$$x_A = l_{OA}\cos\varphi_1;\ y_A = l_{OA}\sin\varphi_1. \qquad (3.59)$$

Тут і далі знаки координат або інших величин визначаються знаками тригонометричних функцій.

Продиференціювавши рівняння (3.58) або (3.59) за узагальненою координатою φ_1, одержимо аналоги проекцій швидкості точки A на координатні осі x і y:

$$x'_A = -l_{OA}\sin\varphi_1;\quad y'_A = l_{OA}\cos\varphi_1, \qquad (3.60)$$

де $$x'_A = \frac{dx_A}{d\varphi_1};\quad y'_A = \frac{dy_A}{d\varphi_1};\quad \varphi'_1 = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = 1.$$

Повторним диференціюванням рівняння (3.59) знаходимо аналоги проекцій прискорень точки A на ці самі осі:

$$x''_A = -l_{OA}\cos\varphi_1 = -y'_A;\quad y''_A = -l_{OA}\sin\varphi_1 = x'_A, \qquad (3.61)$$

де $$x''_A = \frac{d(x'_A)}{d\varphi_1} = \frac{d^2x_A}{d\varphi_1^2};\quad y''_A = \frac{d(y'_A)}{d\varphi_1} = \frac{d^2y_A}{d\varphi_1^2}.$$

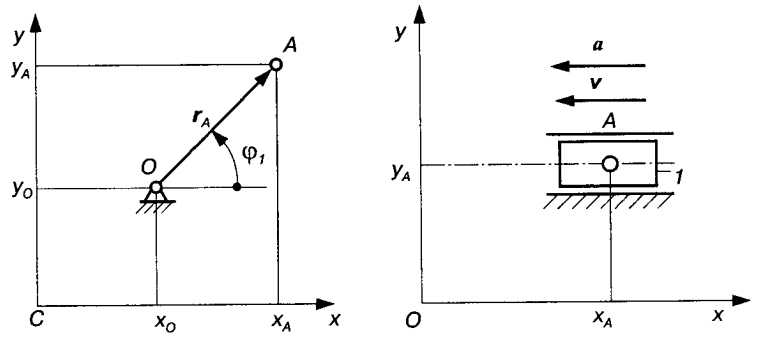


Рис. 3.22.

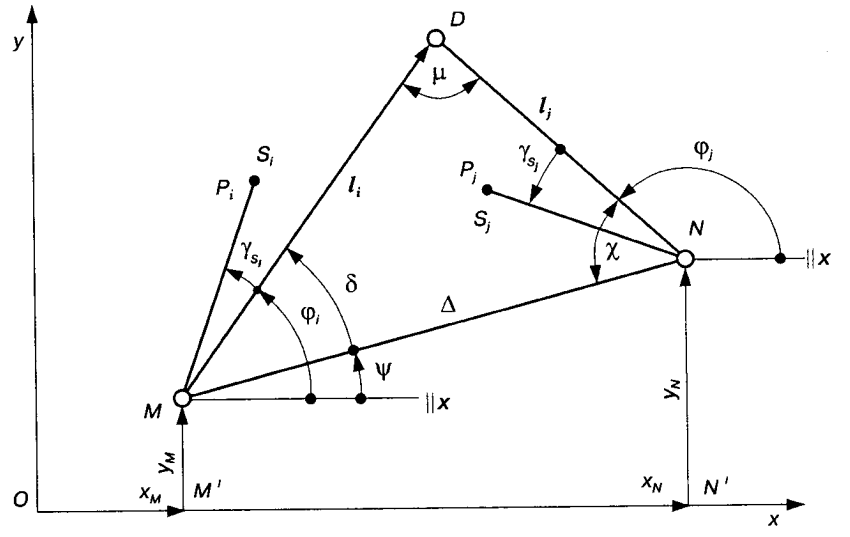


Рис. 3.23.

Для зручності одержання основної (головної) програми кінематичного дослідження за допомогою ЕОМ можна скласти окрему підпрограму, яка дає змогу при заданих координатах його центра обертання (x_O, y_O), довжини кривошипа l_{OA} і значення узагальненої координати φ_1 (у радіанах) визначити кінематичні параметри руху кривошипа (x_A, y_A, x'_A, y'_A, x''_A, y''_A), використовуючи залежності (3.58)–(3.61).

Структурна група I виду. Для кінематичного дослідження цієї групи треба знати такі величини (рис. 3.23):

- координати точок M (x_M, y_M) і N (x_N, y_N), якими група приєднується до основного механізму, аналоги проекцій їхніх швидкостей і прискорень за узагальненою координатою $\varphi_1 - x'_M, y'_M, x'_N, y'_N, x''_M, y''_M, x''_N, y''_N$;
- лінійні та кутові розміри ланок – $l_i = l_{MD}$, $l_j = l_{ND}$, l_{MS_i}, l_{NS_j}, l_{MP_i}, l_{NP_j}, γ_{S_i}, γ_{S_j}, γ_{P_i}, γ_{P_j}, де S_i і S_j – центри мас відповідно ланок i та j $(i \neq j)$; P_i і P_j – точки приєднання наступних структурних груп або інші характерні точки відповідно ланок i та j (на рис. 3.23 точки P і S збігаються, а тому кути $\gamma_{P_i} = \gamma_{S_i}$, $\gamma_{P_j} = \gamma_{S_j}$).

Напрямки координатних осей x і y для цієї групи можуть бути довільними, а тому залишимо їх такими, які вони були в основному механізмі, або виберемо так, щоб це було зручно при розгляді наступних структурних груп.

Положення ланок i та j визначається кутами φ_i і φ_j, а допоміжного вектора Δ – кутом ψ. Модуль вектора Δ та його кут нахилу знаходимо за формулами

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}; \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}. \qquad (3.62)$$

Чверть тригонометричного кола, в якому розміщений кут $\psi(0 \le \psi \le 2\pi)$, цілком визначається знаками чисельника і знаменника виразу (3.62), оскільки $\operatorname{tg}\psi = \sin\psi/\cos\psi$.

Розглянувши ΔMDN, одержимо

$$\mu = \arccos\frac{l_i^2 + l_j^2 - \Delta^2}{2l_i l_j}; \quad \delta = \arccos\frac{l_i^2 + \Delta^2 - l_j^2}{2l_i\Delta};$$

$$\chi = \pi - \delta - \mu. \qquad (3.63)$$

Тоді

$$\varphi_i = \psi + \delta; \quad \varphi_j = \pi + \psi - \chi. \qquad (3.64)$$

Знаючи координати точок M і N, а також кути φ_i і φ_j, можна визначити координати центрів мас S_i і S_j (або точок P_i і P_j):

$$x_{S_i} = x_M + l_{MS_i}\cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}); \quad y_{S_i} = y_M + l_{MS_i}\sin(\varphi_i + \gamma_{S_i});$$

$$x_{Sj} = x_N + l_{NS_j}\cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}); \quad y_{S_j} = x_N + l_{NS_j}\sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}). \qquad (3.65)$$

Для визначення аналогів кутових швидкостей і прискорень складемо векторне рівняння замкнутості контуру $OM'MDNN'$

$$\boldsymbol{x}_M + \boldsymbol{y}_M + \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{y}_N + \boldsymbol{l}_j. \tag{3.66}$$

У проекції на вісь x рівняння (3.66) набуває вигляду

$$x_M \cos 0 + y_M \cos\frac{\pi}{2} + l_i \cos\varphi_i =$$

$$= x_N \cos 0 + y_N \cos\frac{\pi}{2} + l_j \cos\varphi_j . \tag{3.67}$$

Продиференціювавши рівняння (3.67) за узагальненою координатою φ_1, запишемо

$$x'_M \cos 0 + y'_M \cos\frac{\pi}{2} - l_i\varphi'_i \sin\varphi_i =$$

$$= x'_N \cos 0 + y'_N \cos\frac{\pi}{2} - l_j\varphi'_j \sin\varphi_j , \tag{3.68}$$

де

$$x'_M = \frac{dx_M}{d\varphi_1};\quad x'_N = \frac{dx_N}{d\varphi_1};\quad \varphi'_i = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1};\quad \varphi'_j = \frac{d\varphi_j}{d\varphi_1}\ \text{і т. д.}$$

У цьому рівнянні тільки дві величини невідомі — φ'_i і φ'_j. Для їхнього визначення послідовно повертаємо систему координат xOy на кути $(-\varphi_j)$ і $(-\varphi_i)$, після відповідних перетворень (див. параграф 3.7) одержимо

$$\varphi'_i = \frac{(x'_M - x'_N)\cos\varphi_j + (y'_M - y'_N)\sin\varphi_j}{l_i \sin(\varphi_i - \varphi_j)};$$

$$\varphi'_j = \frac{(x'_N - x'_M)\cos\varphi_i + (y'_N - y'_M)\sin\varphi_i}{l_j \sin(\varphi_j - \varphi_i)}. \tag{3.69}$$

Щоб визначити аналоги прискорень $\varphi''_i = \dfrac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}$, $\varphi''_j = \dfrac{d^2\varphi_j}{d\varphi_1^2}$, необхідно продиференціювати за узагальненою координатою рівняння (3.68):

$$x''_M \cos 0 + y''_M \cos\frac{\pi}{2} - l_i\varphi''_i \sin\varphi_i - l_i(\varphi'_i)^2 \cos\varphi_i =$$

$$= x''_N \cos 0 + y''_N \cos\frac{\pi}{2} - l_j\varphi''_j \sin\varphi_j - l_j(\varphi'_j)^2 \cos\varphi_j . \tag{3.70}$$

Здійснивши знову поворот системи координат на кути $(-\varphi_j)$ і $(-\varphi_i)$, знайдемо

$$\varphi_i'' = \frac{(x_M'' - x_N'')\cos\varphi_j + (y_M'' - y_N'')\sin\varphi_j - l_i(\varphi_i')^2\cos(\varphi_i - \varphi_j) + l_j(\varphi_j')^2}{l_i\sin(\varphi_i - \varphi_j)};$$

$$\varphi_j'' = \frac{(x_N'' - x_M'')\cos\varphi_i + (y_N'' - y_M'')\sin\varphi_i - l_j(\varphi_i')^2\cos(\varphi_j - \varphi_i) + l_i(\varphi_i')^2}{l_j\sin(\varphi_j - \varphi_i)}. \qquad (3.71)$$

Використовуючи залежності (3.62)–(3.64), (3.69), (3.71), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах руху точок M і D та розмірів ланок i, j визначити кутові переміщення φ_i і φ_j, їхні аналоги швидкостей φ_i' і φ_j' та прискорень φ_i'' і φ_j''.

Аналоги проекцій швидкостей і прискорень центрів мас S_i і S_j одержимо шляхом диференціювання за узагальненою координатою φ_1 рівнянь (3.65):

$$x_{S_i}' = x_M' - l_{MS_i}\varphi_i'\sin(\varphi_i + \gamma_{S_i});\ y_{S_i}' = y_M' + l_{MS_i}\varphi_i'\cos(\varphi_i + \gamma_{S_i});$$

$$x_{S_j}' = x_N' - l_{NS_j}\varphi_j'\sin(\varphi_j + \gamma_{S_j});$$

$$y_{S_j}' = y_N' + l_{NS_j}\varphi_j'\cos(\varphi_j + \gamma_{S_j});. \qquad (3.72)$$

$$x_{S_i}'' = x_M'' - l_{MS_i}\varphi_i''\sin(\varphi_i + \gamma_{S_i}) - l_{MS_i}(\varphi_i')^2\cos(\varphi_i + \gamma_{S_i});$$

$$y_{S_i}'' = y_M'' + l_{MS_i}\varphi_i''\cos(\varphi_i + \gamma_{S_i}) - l_{MS_i}(\varphi_i')^2\sin(\varphi_i + \gamma_{S_i});$$

$$x_{S_j}'' = x_N'' - l_{NS_j}\varphi_j''\sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}) - l_{NS_j}(\varphi_j')^2\cos(\varphi_j + \gamma_{S_j});$$

$$y_{S_j}'' = y_N'' + l_{NS_j}\varphi_i''\cos(\varphi_j + \gamma_{S_j}) - l_{NS_j}(\varphi_j')^2\sin(\varphi_j + \gamma_{S_j}). \qquad (3.73)$$

Координати будь-якої точки (P_i або P_j), що лежать на ланках групи, та їхні аналоги швидкостей і прискорень визначаються так само, як і координати точок S_i і S_j.

Якщо точки M або N нерухомі, а кути γ_S, γ_P дорівнюють нулю, то залежності (3.62)–(3.73) дещо спрощуються.

Для визначення кінематичних параметрів точок S_i, S_j, P_i, P_j або інших точок, які належать ланкам i або j (див. рис. 3.23),

можна скласти окрему підпрограму, використавши залежності (3.65), (3.72), (3.73), яка дає змогу при заданих кінематичних параметрах руху будь-якої точки M (або N), параметрів руху ланки i, якій належить ця точка, відрізка l_{MS_i} і кута γ_{S_i} визначити координати точки $S_i(x_{S_i}, y_{S_i})$ та їхні аналоги швидкостей і прискорень $x'_{S_i}, y'_{S_i}, x''_{S_i}, y''_{S_i}$.

Залежностями (3.62)–(3.73) можна користуватися при будь-якому розміщенні точки D відносно лінії MN, якщо у цій групі позначати точкою M таку кінематичну пару, яка при обході контуру MDN, наприклад, за рухом годинникової стрілки, дає можливість зберегти такий же порядок позначень. Це видно з рис. 3.24, де показано два можливі варіанти складання групи I виду. Початок векторів l_i і Δ, як і на рис. 3.23, розмістимо у точці M, початок вектора l_j – у точці N, а напрямні кути φ_i, φ_j і ψ будемо відраховувати від лінії, яка проведена через початок відповідного вектора паралельно осі x.

Якщо на рис 3.24, *б* позначення кінематичних пар змінити, то їхній порядок при обході контуру за рухом годинникової стрілки буде відрізнятися від показаного раніше (замість MDN буде MND). В останньому випадку залежності (3.64) набудуть іншого вигляду. Дотримуючись цього правила, при кінематичному дослідженні механізмів немає необхідності окремо записувати залежності і розробляти програми для двох варіантів складання групи; правильність розрахунків забезпечується наведеними залежностями і відповідним позначенням кінематичних пар M, N, ланок i, j та їхніх параметрів.

Структурна група II виду. Ланки цієї групи (рис. 3.25), приєднуючись до основного механізму, утворюють з його ланками обертову M і поступальну N пари. Напрямна повзуна N або центр шарніру M можуть бути рухомі або нерухомі (кожний окремо).

Для кінематичного дослідження цієї групи необхідно знати такі величини:

- координати x_M і y_M точки M шарнірного приєднання групи до основного механізму у системі координат xOy і їхні аналоги швидкостей і прискорень x'_M, y'_M, x''_M, y''_M;
- координати x_F і y_F будь-якої точки F (або F_1) у системі координат xOy, через яку проходить вісь напрямної повзуна N і кут нахилу ξ цієї напрямної до осі x, а також їхні аналоги швидкостей і прискорень x'_F, y'_F, x''_F, y''_F, ξ', ξ'';
- лінійні та кутові розміри ланок MD і DN: l_i, l_j, φ_{j_2}, l_{MS_i}, l_{NS_j}, γ_{S_i}, γ_{S_j}, де S_i і S_j – будь-які точки, які належать відповідно шатуну MD і повзуну ND.

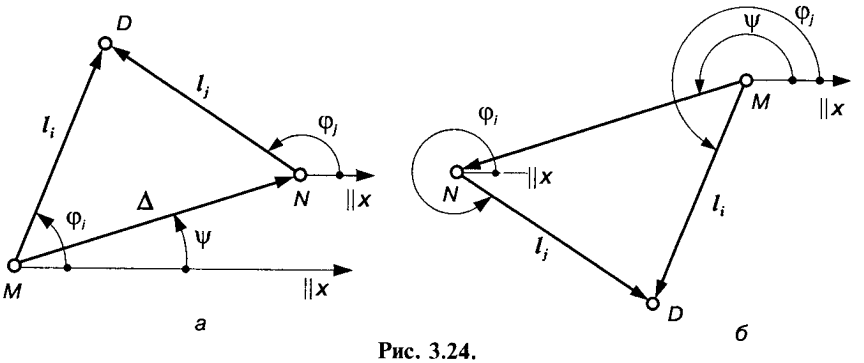


Рис. 3.24.

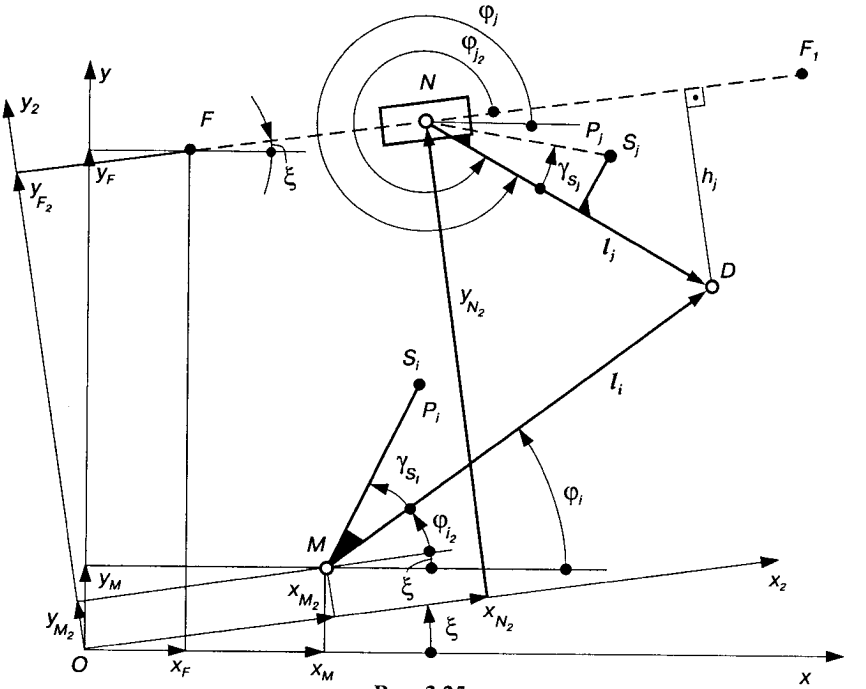


Рис. 3.25.

Залежності для визначення кінематичних параметрів тут зручно записувати у системі x_2Oy_2, причому ***вісь x_2 направляти паралельно напрямній FF_1*** у бік ***додатної проекції вектора l_i*** на цю вісь. Всі вектори і кути відраховуємо так, як показано на рис. 3.25.

Координати точок M, F, N, кути φ_i, φ_j та їхні аналоги швидкостей і прискорень у системі координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2. Тоді, використовуючи рівняння перетворення координат для плоскої системи, записуємо відомі координати точок M і F у другій системі координат:

$$x_{M_2} = x_M \cos\xi + y_M \sin\xi;\ \ y_{M_2} = y_M \cos\xi - x_M \sin\xi;$$

$$x_{F_2} = x_F \cos\xi + y_F \sin\xi;\ \ y_{F_2} = y_F \cos\xi - x_F \sin\xi. \qquad (3.74)$$

Кут, який визначає положення шатуна MD, можна знайти за такою очевидною залежністю (див. рис. 3.25):

$$\varphi_{i_2} = \arcsin\frac{y_{F_2} - y_{M_2} + h_j}{l_i}, \qquad (3.75)$$

де $h_j = l_j \sin\varphi_{j_2}$ – відстань точки D від напрямної FF_1.

У системі координат xOy положення ланок групи визначається кутами

$$\varphi_i = \varphi_{i_2} + \xi;\ \ \varphi_j = \varphi_{j_2} + \xi. \qquad (3.76)$$

Основні залежності для визначення кінематичних параметрів ланок можна одержати, якщо записати векторне рівняння:

$$\boldsymbol{x}_{M_2} + \boldsymbol{y}_{M_2} + \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_{N_2} + \boldsymbol{y}_{N_2} + \boldsymbol{l}_j. \qquad (3.77)$$

Із рівнянь проекцій на осі x_2 і y_2 знайдемо

$$x_{N_2} = x_{M_2} + l_i \cos\varphi_{i_2} - l_j \cos\varphi_{j_2};$$

$$y_{N_2} = y_{M_2} + l_i \sin\varphi_{i_2} - l_j \sin\varphi_{j_2}. \qquad (3.78)$$

Слід зазначити, що у цій групі $y_{N_2} = y_{F_2}$; $\varphi_{j_2} = \text{const}$.

Шляхом диференціювання рівнянь (3.78) за узагальненою координатою φ_1 визначаємо аналоги швидкостей і прискорень (або їхні проекції) для ланок групи

$$x'_{N_2} = x'_{M_2} - l_i\varphi'_{i_2} \sin\varphi_{i_2};\ \ y'_{N_2} = y'_{M_2} + l_i\varphi'_{i_2} \cos\varphi_{i_2}; \qquad (3.79)$$

$$\varphi'_{i_2} = \frac{d\varphi_{i_2}}{d\varphi_1} = \frac{y'_{N_2} - y'_{M_2}}{l_i \cos\varphi_{i_2}};\ \ \varphi'_i = \varphi'_{i_2} + \xi'; \qquad (3.80)$$

$$x''_{N_2} = x''_{M_2} - l_i\varphi''_{i_2}\sin\varphi_{i_2} - l_i(\varphi'_{i_2})^2\cos\varphi_{i_2};$$

$$y''_{N_2} = y''_{M_2} + l_i\varphi''_{i_2}\cos\varphi_{i_2} - l_i(\varphi'_{i_2})^2\sin\varphi_{i_2}; \qquad (3.81)$$

$$\varphi''_{i_2} = \frac{d^2\varphi_{i_2}}{d\varphi_1^2} = \frac{y''_{N_2} - y''_{M_2} + l_i(\varphi'_{i_2})^2\sin\varphi_{i_2}}{l_i\cos\varphi_{i_2}};\ \varphi''_i = \varphi''_{i_2} + \xi'',$$

де

$$x'_{M_2} = x'_M\cos\xi - x_M\xi'\sin\xi + y'_M\sin\xi + y_M\xi'\cos\xi;$$

$$y'_{M_2} = y'_M\cos\xi - y_M\xi'\sin\xi - x'_M\sin\xi - x_M\xi'\cos\xi;$$

$$x''_{M_2} = x''_M\cos\xi - 2x'_M\xi'\sin\xi - x_M\xi''\sin\xi - x_M(\xi')^2\cos\xi + \qquad (3.82)$$

$$+ y''_M\sin\xi + 2y'_M\xi'\cos\xi + y_M\xi''\cos\xi - y_M(\xi')^2\sin\xi;$$

$$y''_{M_2} = y''_M\cos\xi - 2y'_M\xi'\sin\xi - y_M\xi''\sin\xi - y_M(\xi')^2\cos\xi -$$

$$- x''_M\sin\xi - 2x'_M\xi'\cos\xi - x_M\xi''\cos\xi + x_M(\xi')^2\sin\xi.$$

Координати будь-якої з точок S_i чи S_j, що належать ланкам групи, визначаються так само, як і групи I виду.

На практиці найчастіше використовуються механізми, в яких точки D і N збігаються ($l_j = 0$). У цьому випадку залежності (3.75), (3.77) і (3.78) набувають вигляду

$$\varphi_{i_2} = \arcsin\frac{y_{F_2} - y_{M_2}}{l_i};\ \boldsymbol{x}_{M_2} + \boldsymbol{y}_{M_2} + \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_{N_2} + \boldsymbol{y}_{N_2};$$

$$x_{N_2} = x_{M_2} + l_i\cos\varphi_{i_2};\ \ y_{N_2} = y_{M_2} + l_i\sin\varphi_{i_2}. \qquad (3.83)$$

Інші залежності не змінюються.

Якщо напрямна FF_1 повзуна N нерухома, то у цьому випадку залежності (3.82) суттєво спрощуються, оскільки $\xi' = \xi'' = 0$:

$$x'_{M_2} = x'_M\cos\xi + y'_M\sin\xi;\ \ y'_{M_2} = y'_M\cos\xi - x'_M\sin\xi;$$

$$x''_{M_2} = x''_M\cos\xi + y''_M\sin\xi;\ \ y''_{M_2} = y''_M\cos\xi - x''_M\sin\xi. \qquad (3.84)$$

Використовуючи залежності (3.74)–(3.82), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах руху точок

M і F та розмірів ланок i, j визначити їхні переміщення φ_{i_2} і x_{N_2} та аналоги швидкостей φ'_i, x'_{N_2} і прискорень φ''_i, x''_{N_2}. Для визначення параметрів будь-якої точки при повороті системи координат xOy на деякий кут ξ можна скласти окрему підпрограму [24, 25], використавши залежності (3.74)–(3.82).

Якщо необхідно одержати кінематичні параметри будь-якої точки або всіх груп механізму в одній системі координат, наприклад у системі xOy (див. рис. 3.25), систему координат x_2Oy_2 повертають на кут $(-\xi)$. Для цього можна використати також залежності (3.74), (3.82), (3.84), помінявши місцями індекси параметрів в одній системі на індекси в іншій системі, наприклад замість x_{M_2} підставити x_M і, навпаки, замість x_M – x_{M_2}. Тоді рівняння (3.74) набуде вигляду $x_M = x_{M_2}\cos\xi + y_{M_2}\sin(-\xi)$ і т. ін.

Структурна група III виду. Структурна група цього виду складається з двох ланок, які утворюють між собою поступальну кінематичну пару і приєднуються до основного механізму обертовими парами (рис. 3.26).

Для кінематичного дослідження групи III виду необхідно мати такі величини:

- координати точок M і N, якими група приєднується до основного механізму, та їхні аналоги швидкостей і прискорень – x_M, y_M, x_N, y_N, x'_M, y'_M, x'_N, y'_N, x''_M, y''_M, x''_N, y''_N;
- лінійні і кутові розміри ланки MTD – $e = l_{MT}$, γ, l_{TS_K} (тут прийнято $\angle DTM = \pi/2$). Відрізок e слід вважати додатним, якщо порядок позначень ΔMTD за рухом годинникової стрілки буде таким, як це показано контурною лінією на рис. 3.26, тобто MTD, і від'ємним – MDT (штрихова лінія).

Для визначення положень ланок групи використаємо допоміжний вектор $\Delta = \mathbf{MD}$, довжина і положення якого мають вигляд

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2};\ \psi = \operatorname{arctg}\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}. \qquad (3.85)$$

Тоді

$$l_K = \sqrt{\Delta^2 - e^2};\ \delta = \operatorname{arctg}\frac{e}{l_K};\ \varphi_K = \psi - \delta. \qquad (3.86)$$

Складемо рівняння замкнутості векторного контуру MDN з урахуванням положення початку координат основного механізму:

$$\boldsymbol{x}_M + \boldsymbol{y}_M + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{l}_K = \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{y}_N. \qquad (3.87)$$

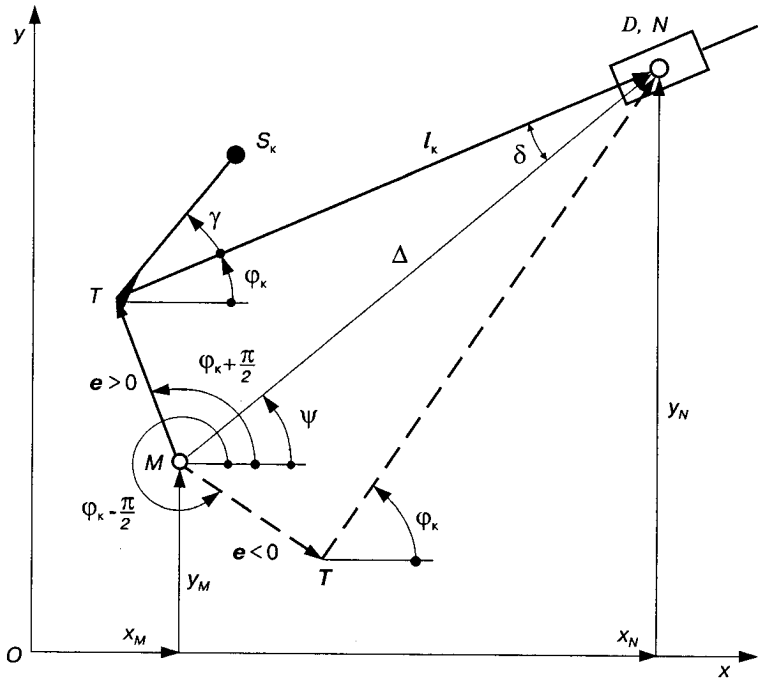


Рис. 3.26.

Записавши рівняння (3.87) у проекціях на координатні осі та продиференціювавши їх за узагальненою координатою φ_1, визначимо аналоги лінійних і кутових швидкостей і прискорень ланок групи:

$$\varphi'_к = \frac{d\varphi_к}{d\varphi_1} = \frac{(x'_M - x'_N)\sin\varphi_к + (y'_N - y'_M)\cos\varphi_к}{l_к};$$

$$l'_к = \frac{dl_к}{d\varphi_1} = (x'_N - x'_M)\cos\varphi_к + (y'_N - y'_M)\sin\varphi_к + e\varphi'_к;$$

$$\varphi''_к = \frac{d^2\varphi_к}{d\varphi_1^2} = \frac{\begin{array}{l}(y''_N - y''_M)\cos\varphi_к + (x''_N - x''_M)\sin\varphi_к + \\ + e(\varphi'_к)^2 - 2l'_к\varphi'_к\end{array}}{l_к};$$

$$l''_к = \frac{d^2l_к}{d\varphi_1^2} = (x''_N - x''_M)\cos\varphi_к + (y''_N - y''_M)\sin\varphi_к + e\varphi''_к + l_к(\varphi'_к)^2, \qquad (3.88)$$

де $l'_к$, $l''_к$ – відповідно аналоги відносних швидкості $\boldsymbol{v}_{ND}$ і прискорення $\boldsymbol{a}_{ND}$ (повзуна відносно куліси).

Використовуючи залежності (3.85)–(3.88), можна скласти підпрограму [24, 25], яка дає змогу при заданих параметрах руху точок M і N та розмірах ланок (e, γ, $l_{TS_к}$) визначити їхні переміщення $l_к$, $\varphi_к$, аналоги швидкостей $l'_к$, $\varphi'_к$ і прискорень $l''_к$, $\varphi''_к$.

Якщо $e = 0$, залежності (3.86)–(3.88) дещо спрощуються:

$$l_к = \Delta;\ \delta = 0;\ \varphi_к = \psi;$$

$$l'_к = (x'_N - x'_M)\cos\varphi_к + (y'_N - y'_M)\sin\varphi_к;$$

$$\varphi''_к = \frac{(y''_N - y''_M)\cos\varphi_к + (x''_N - x''_M)\sin\varphi_к - 2l'_к\varphi'_к}{l_к};$$

$$l''_к = (x''_N - x''_M)\cos\varphi_к + (y''_N - y''_M)\sin\varphi_к + l_к(\varphi'_к)^2.$$

Структурна група IV виду (рис. 3.27) складається з двох ланок, які утворюють між собою обертову пару D, і приєднується до основного механізму поступальними парами M і N.

Для кінематичного дослідження цієї групи повинні бути задані:

- кути нахилу до осі абсцис x напрямних повзунів M і N та їхні аналоги швидкостей та прискорень – ξ_i, ξ_j, ξ'_i, ξ'_j, ξ''_i, ξ''_j;
- координати і аналоги швидкостей та прискорень будь-яких точок (E, F), через які проходять осі напрямних повзунів M і N – x_E, y_E, x_F, y_F, x'_E, y'_E, x'_F, y'_F, x''_E, y''_E, x''_F, y''_F;
- лінійні і кутові розміри ланок MD і ND – l_i, l_j, α_i, α_j, l_{MS_i}, l_{NS_j}, γ_{S_i}, γ_{S_j} (S_i і S_j – точки, які належать відповідно ланкам i і j).

Залежності для визначення кінематичних параметрів у даному випадку можна записати так, як і для групи I виду, у системі координат xOy. Варіант складання ланок групи враховується напрямними кутами α_i і α_j.

Складемо векторне рівняння

$$\boldsymbol{x}_E + \boldsymbol{y}_E + \boldsymbol{l}_{к_i} + \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{y}_F + \boldsymbol{l}_{к_j} + \boldsymbol{l}_j, \qquad (3.89)$$

яке у проекціях на координатні осі x і y має вигляд

$$x_E\cos 0 + y_E\cos\frac{\pi}{2} + l_{к_i}\cos\xi_i + l_i\cos(\alpha_i + \xi_i) =$$

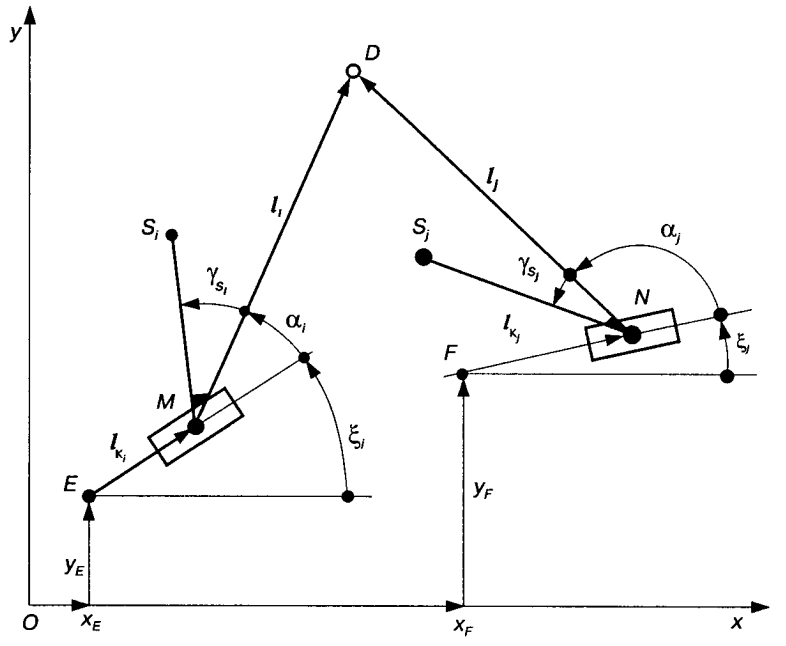


Рис. 3.27.

$$= x_F \cos 0 + y_F \cos\frac{\pi}{2} + l_{к_j} \cos\xi_j + l_j \cos(\alpha_j + \xi_j);$$

$$x_E \sin 0 + y_E \sin\frac{\pi}{2} + l_{к_i} \sin\xi_i + l_i \sin(\alpha_i + \xi_i) =$$

$$= x_F \sin 0 + y_F \sin\frac{\pi}{2} + l_{к_j} \sin\xi_j + l_j \sin(\alpha_j + \xi_j). \qquad (3.90)$$

Із другого рівняння (3.90) знаходимо величини відрізків $l_{к_i}$, $l_{к_j}$, здійснивши поворот системи координат xOy відповідно на кут $(-\xi_j)$ і $(-\xi_i)$:

$$l_{к_i} = [(x_E - x_F)\sin\xi_j + (y_F - y_E)\cos\xi_j -$$

$$-l_i \sin(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + l_j \sin\alpha_j] / \sin(\xi_i - \xi_j);$$

$$l_{к_j} = [(x_F - x_E)\sin\xi_i + (y_E - y_F)\cos\xi_i -$$

$$-l_j \sin(\alpha_j + \xi_j - \xi_i) + l_i \sin\alpha_i] / \sin(\xi_j - \xi_i). \qquad (3.91)$$

При $\xi_i = \xi_j$ група має зайвий ступінь вільності і в ній з'являється невизначеність у русі ланок.

Продиференціювавши рівняння (3.90) за узагальненою координатою φ_1, після відповідних перетворень одержимо

$$
\begin{aligned}
l'_{\kappa_i} &= [(x'_E - x'_F)\sin\xi_j + (y'_F - y'_E)\cos\xi_j - \\
&- l_{\kappa_i}\xi'_i\cos(\xi_i - \xi_j) - l_i\xi'_i\cos(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + \\
&+ l_{\kappa_j}\xi'_j - l_j\xi'_j\cos\alpha_j]/\sin(\xi_i - \xi_j); \\
l'_{\kappa_j} &= [(x'_F - x'_E)\sin\xi_i + (y'_E - y'_F)\cos\xi_i + \\
&+ l'_{\kappa_i}\xi'_i + l_i\xi'_i\cos\alpha_i - l_{\kappa_j}\xi'_j\cos(\xi_j - \xi_i) - \\
&- l_j\xi'_j\cos(\alpha_i + \xi_j - \xi_i)]/\sin(\xi_j - \xi_i); \qquad (3.92) \\
l''_{\kappa_i} &= [(x''_E - x''_F)\sin\xi_j + (y''_F - y''_E)\cos\xi_j - \\
&- 2l'_{\kappa_i}\xi'_i\cos(\xi_i - \xi_j) - l_{\kappa_i}\xi''_i\cos(\xi_i - \xi_j) + \\
&+ l_{\kappa_i}(\xi'_j)^2\sin(\xi_i - \xi_j) - l_i\xi''_i\cos(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + \\
&+ l_i(\xi'_i)^2\sin(\alpha_i + \xi_i - \xi_j) + 2l'_{\kappa_i}\xi'_j + l_{\kappa_j}\xi''_j + \\
&+ l_j\xi''_j\cos\alpha_j - l_j(\xi'_j)^2\sin\alpha_j]/\sin(\xi_i - \xi_j); \\
l''_{\kappa_j} &= [(x''_F - x''_E)\sin\xi_i + (y''_E - y''_F)\cos\xi_i + \qquad (3.93) \\
&+ 2l'_{\kappa_i}\xi'_i + l_{\kappa_i}\xi''_i + l_i\xi''_i\cos\alpha_i - l_i(\xi'_i)^2\sin\alpha_i - \\
&- 2l_{\kappa_j}\xi'_j\cos(\xi_j - \xi_i) - l_{\kappa_j}\xi''_j\cos(\xi_j - \xi_i) + \\
&+ l_{\kappa_j}(\xi'_j)^2\sin(\xi_j - \xi_i) - l_j\xi''_j\cos(\alpha_i + \xi_j - \xi_i) + \\
&+ l_j(\xi'_j)^2\sin(\alpha_i + \xi_j - \xi_i)]/\sin(\xi_j - \xi_i),
\end{aligned}
$$

де l_{κ_i}, l_{κ_j} — відносні переміщення ланок i та j; $l'_{\kappa_i} = dl_{\kappa_i}/d\varphi_1$, $l'_{\kappa_j} = dl_{\kappa_j}/d\varphi_1$ — їхні аналоги швидкостей; $l''_{\kappa_i} = d^2l_{\kappa_i}/d\varphi_1^2$, $l''_{\kappa_j} = d^2l_{\kappa_j}/d\varphi_1^2$ — аналоги прискорень.

У тих випадках, коли довжина ланок i та j дорівнює нулю ($l_i = l_j = 0$) і одна з напрямних нерухома (наприклад, $\xi_j = \text{const}$), залежності (3.89)–(3.93) значно спрощуються.

Якщо відомі координати точки E або F та їхні аналоги швидкостей і прискорень, параметри руху точки D можна визначити, склавши векторне рівняння

$$\boldsymbol{x}_E + \boldsymbol{y}_E + \boldsymbol{l}_{\kappa_i} + \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_D + \boldsymbol{y}_D. \tag{3.94}$$

На основі цього рівняння одержимо

$$\begin{aligned}
x_D &= x_E + l_{\kappa_i}\cos\xi_i + l_i\cos(\xi_i + \alpha_i);\\
y_D &= y_E + l_{\kappa_i}\sin\xi_i + l_i\sin(\xi_i + \alpha_i);\\
x'_D &= x'_E + l'_{\kappa_i}\cos\xi_i - l_{\kappa_i}\xi'_i\sin\xi_i - l_i\xi'_i\sin(\xi_i + \alpha_i);\\
y'_D &= y'_E + l'_{\kappa_i}\sin\xi_i + l_{\kappa_i}\xi'_i\cos\xi_i + l_i\xi'_i\cos(\xi_i + \alpha_i);\qquad (3.95)\\
x''_D &= x''_E + l''_{\kappa_i}\cos\xi_i - 2l'_{\kappa_i}\xi'_i\sin\xi_i - l_{\kappa_i}\xi''_i\sin\xi_i - l_{\kappa_i}(\xi'_i)^2\cos\xi_i -\\
&\quad - l_i\xi''_i\sin(\xi_i + \alpha_i) - l_i(\xi'_i)^2\cos(\xi_i + \alpha_i);\\
y''_D &= y''_E + l''_{\kappa_i}\sin\xi_i + 2l'_{\kappa_i}\xi'_i\cos\xi_i + l_{\kappa_i}\xi''_i\cos\xi_i - l_{\kappa_i}(\xi'_i)^2\sin\xi_i +\\
&\quad + l_i\xi''_i\cos(\xi_i + \alpha_i) - l_i(\xi'_i)^2\sin(\xi_i + \alpha_i).
\end{aligned}$$

Кінематичні параметри руху точок M і N можна знайти, використавши їх координати, які виражаються рівняннями проекцій відповідних векторів на координатні осі x і y:

$$x_M = x_E + l_{\kappa_i}\cos\xi_i;\quad y_M = y_E + l_{\kappa_i}\cos\xi_i;$$

$$x_N = x_F + l_{\kappa_j}\cos\xi_j;\quad y_N = y_F + l_{\kappa_j}\cos\xi_j.$$

Для визначення кінематичних параметрів руху будь-якої точки S_i, S_j, що належать ланкам i або j, можна використати залежності (3.64), (3.72), (3.73).

Використовуючи залежності (3.91)–(3.95), можна скласти підпрограму, яка дає змогу при заданих параметрах, вказаних раніше, визначити переміщення ланок l_{κ_i}, l_{κ_j}, їхні аналоги швидкостей l'_{κ_i}, l'_{κ_j} і прискорень l''_{κ_i}, l''_{κ_j}, а також параметри руху точки D (x_D, y_D, x'_D, y'_D, x''_D, y''_D) або інших точок – M, N тощо.

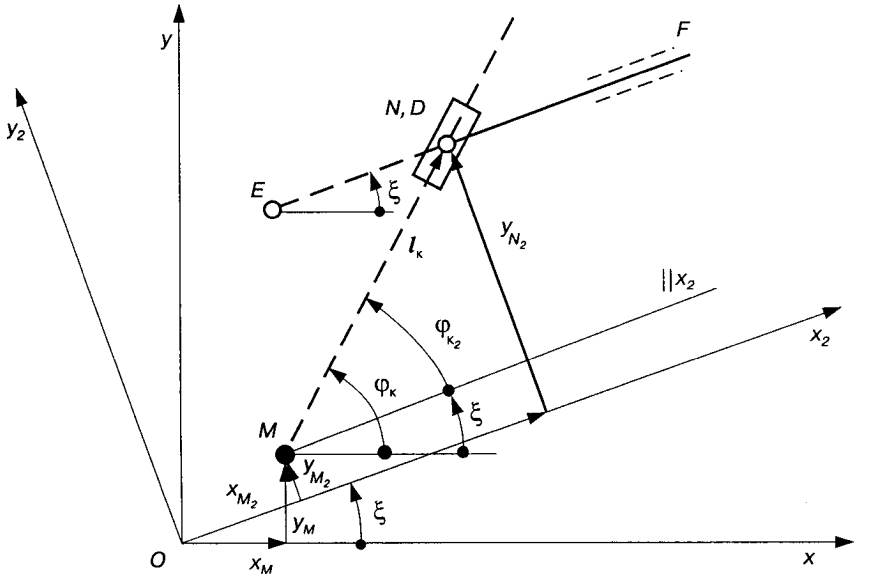


Рис. 3.28.

На практиці найчастіше використовують окремий випадок групи IV виду, при якому $l_i = l_j = 0$ (рис. 3.28). Залежності для визначення кінематичних параметрів тут зручно записувати, як і для груп II виду, у системі координат x_2Oy_2, причому вісь x_2 направити паралельно напрямній EF так, щоб ордината $y_{N_2} \geq 0$ і система координат була правою, тобто найменший кут повороту осі x_2 до осі y_2 здійснювався проти руху годинникової стрілки. Усі параметри у системі координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2.

Складемо векторне рівняння

$$\boldsymbol{x}_{M_2} + \boldsymbol{y}_{M_2} + \boldsymbol{l}_к = \boldsymbol{x}_{N_2} + \boldsymbol{y}_{N_2},$$

яке у проекціях на осі координат x_2 і y_2 має вигляд

$$x_{M_2} + l_к \cos\varphi_{к_2} = x_{N_2};\ y_{M_2} + l_к \sin\varphi_{к_2} = y_{N_2}, \qquad (3.96)$$

де $\varphi_{к_2} = \varphi_к - \xi$, причому $\varphi_к \neq \xi$, $0 < \varphi_{к_2} < \pi$. Між кутами (див. рис. 3.27, 3.28) існує така відповідність:

$\varphi_к = \xi_i$, $\xi = \xi_j$, $\varphi_{к_2} = \xi_i - \xi_j$. Ординати точок E і N у системі координат x_2Oy_2 рівні між собою, тобто $y_{N_2} = y_{E_2}$.

Використавши рівняння (3.96), знайдемо

$$l_{\text{к}} = \frac{y_{E_2} - y_{M_2}}{\sin \varphi_{\text{к}_2}};\ x_{N_2} = x_{M_2} + l_{\text{к}} \cos \varphi_{\text{к}_2}. \qquad (3.97)$$

Продиференціювавши рівняння (3.96) за узагальненою координатою φ_1, одержимо

$$l'_{\text{к}} = \frac{y'_{E_2} - y'_{M_2} - l_{\text{к}} \varphi'_{\text{к}_2} \cos \varphi_{\text{к}_2}}{\sin \varphi_{\text{к}_2}};$$

$$x'_{N_2} = x'_{M_2} + l'_{\text{к}} \cos \varphi_{\text{к}_2} - l_{\text{к}} \varphi'_{\text{к}_2} \sin \varphi_{\text{к}_2};$$

$$l''_{\text{к}} = [y''_{E_2} - y''_{M_2} - 2l'_{\text{к}} \varphi'_{\text{к}_2} \cos \varphi_{\text{к}_2} - l_{\text{к}} \varphi''_{\text{к}_2} \times$$

$$\times \cos \varphi_{\text{к}_2} + l_{\text{к}} (\varphi'_{\text{к}_2})^2 \sin \varphi_{\text{к}_2}] / \sin \varphi_{\text{к}_2};$$

$$x''_{N_2} = x''_{M_2} + l''_{\text{к}} \cos \varphi_{\text{к}_2} - 2l'_{\text{к}} \varphi'_{\text{к}_2} \sin \varphi_{\text{к}_2} -$$

$$- l_{\text{к}} \varphi''_{\text{к}_2} \sin \varphi_{\text{к}_2} - l_{\text{к}} (\varphi'_{\text{к}_2})^2 \cos \varphi_{\text{к}_2}. \qquad (3.98)$$

Отже, при $l_i = l_j = 0$, використовуючи залежності (3.74), (3.82), (3.96)–(3.98), можна скласти простішу підпрограму для кінематичного дослідження групи IV виду.

Структурна група V виду. Ланки групи цього виду (рис. 3.29) утворюють при їх приєднанні до основного механізму поступальну і обертову кінематичні пари, а між собою – поступальну.

Для виконання кінематичного дослідження руху ланок цієї групи повинні бути задані такі величини:

- координати точки M шарнірного приєднання групи та їхні аналоги швидкостей та прискорень в основній системі координат xOy: $x_M, y_M, x'_M, y'_M, x''_M, y''_M$;
- положення напрямної повзуна N у цій системі координат, яке можна задати координатами будь-якої точки F (x_F, y_F), що лежить на осі цієї напрямної, і напрямним кутом ξ, а також їхніми аналогами швидкостей та прискорень: $x'_F, y'_F, x''_F, y''_F, \xi', \xi''$;
- розміри ланок – $l_j, \alpha_i, \alpha_j, l_{NS_i}, l_{MS_j}, \gamma_{S_i}, \gamma_{S_j}$ (S_i, S_j – точки, які належать відповідно ланкам i або j).

Залежності для визначення кінематичних параметрів ланок тут зручно записати у системі координат x_2Oy_2, причому вісь x_2 проводимо паралельно напрямній FN. Всі параметри у системі

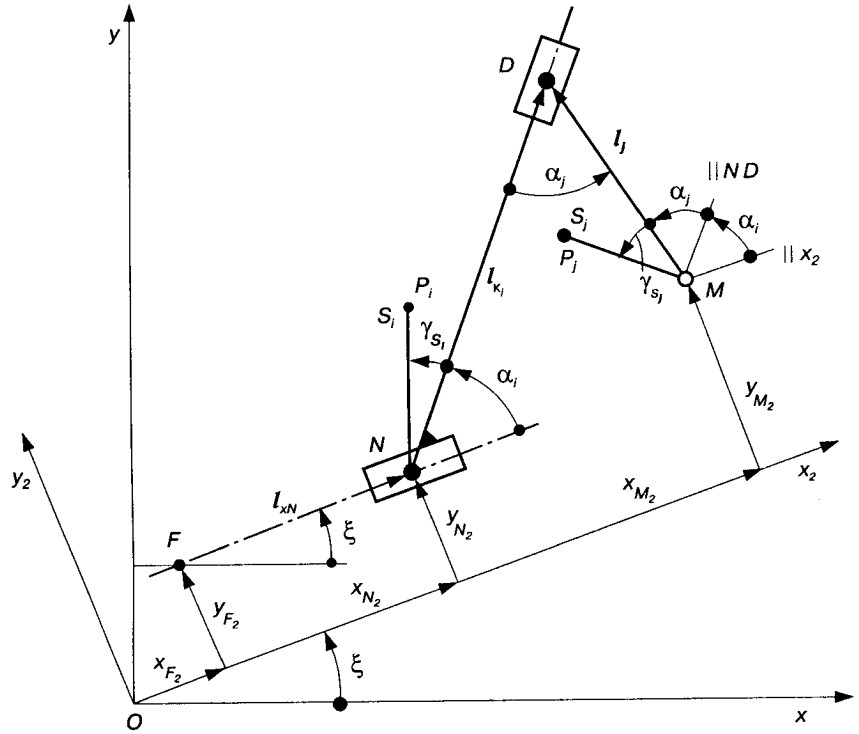


Рис. 3.29.

координат x_2Oy_2 позначимо індексом 2. Для перетворення координат точок і їхніх похідних із основної системи xOy в систему x_2Oy_2 використовуємо залежності (3.74), (3.82).

Складемо векторне рівняння

$$\boldsymbol{x}_{F_2} + \boldsymbol{y}_{F_2} + \boldsymbol{l}_{xN} + \boldsymbol{l}_{K_i} = \boldsymbol{x}_{M_2} + \boldsymbol{y}_{M_2} + \boldsymbol{l}_j, \tag{3.99}$$

яке у проекціях на координатні осі x_2 і y_2 має вигляд

$$x_{F_2} + l_{xN} + l_{K_i}\cos\alpha_i = x_{M_2} + l_j\cos(\alpha_i + \alpha_j); \tag{3.100}$$

$$y_{F_2} + l_{K_i}\sin\alpha_i = y_{M_2} + l_j\sin(\alpha_i + \alpha_j).$$

Тоді

$$l_{K_i} = \frac{y_{M_2} - y_{F_2} + l_j\sin(\alpha_i - \alpha_j)}{\sin\alpha_i};$$

$$l_{x_N} = x_{M_2} - x_{F_2} - l_{K_i}\cos\alpha_i + l_j\cos(\alpha_i + \alpha_j). \tag{3.101}$$

Кут $\alpha_i \neq 0$ або π, оскільки у таких випадках ланки групи одержують додатковий ступінь вільності, тобто з'являється невизначеність у русі.

Шляхом диференціювання рівняння (3.100) одержимо аналоги відносних швидкостей і прискорень:

$$l'_{\kappa_i} = \frac{y'_{M_2} - y'_{F_2}}{\sin\alpha_i}; \quad l'_{x_N} = x'_{M_2} - x'_{F_2} - l'_{\kappa_i}\cos\alpha_i;$$

$$l''_{\kappa_i} = \frac{y''_{M_2} - y''_{F_2}}{\sin\alpha_i}; \quad l''_{xN} = x''_{M_2} - x''_{F_2} - l''_{\kappa_i}\cos\alpha_i. \qquad (3.102)$$

Параметри руху точки N у системі координат x_2Oy_2 визначаються залежностями

$$x_{N_2} = x_{F_2} + l_{xN}; \quad x'_{N_2} = x'_{F_2} + l'_{xN}; \quad x''_{N_2} = x''_{F_2} + l''_{xN};$$

$$y_{N_2} = y_{F_2}; \quad y'_{N_2} = y'_{F_2}; \quad y''_{N_2} = y''_{F_2}. \qquad (3.103)$$

Знаючи координати точок N і M та їхні аналоги швидкостей і прискорень, можна визначити у системі координат x_2Oy_2 координати будь-якої точки (D, S_i, S_j), яка належить ланкам групи, використавши залежності (3.65), (3.72), (3.73).

На практиці найчастіше відрізок $l_j = 0$, тоді залежності (3.99)–(3.101) набувають вигляду

$$\boldsymbol{x}_{F_2} + \boldsymbol{y}_{F_2} + \boldsymbol{l}_{xN} + \boldsymbol{l}_{\kappa_i} = \boldsymbol{x}_{M_2} + \boldsymbol{y}_{M_2};$$

$$x_{M_2} = x_{F_2} + l_{xN} + l_{\kappa_i}\cos\alpha_i; \quad y_{M_2} = y_{F_2} + l_{\kappa_i}\sin\alpha_i;$$

$$l_{\kappa_i} = (y_{M_2} - y_{F_2})/\sin\alpha_i; \quad l_{xN} = x_{M_2} - x_{F_2} - l_{\kappa_i}\cos\alpha_i. \qquad (3.104)$$

Методика і порядок складання програми кінематичного дослідження механізмів. Розглянемо їх на прикладі шестиланкового шарнірного механізму, кінематична схема якого зображена на рис. 3.30, *а*, до складу якого входять механізм I класу (стояк і кривошип *OA*) та дві групи II класу I виду (*2 – 3*, *4 – 5*). Необхідно визначити положення ланок, їхні аналоги швидкостей та прискорень.

Для скорочення позначимо: $l_{OA} = r$; $l_{OC} = a$; $l_{AB} = l_2$; $l_{BC} = l_3$; $l_{DE} = l_4$; $l_{EF} = l_5$; $\angle BAD = \gamma_D$.

При складанні програми для знаходження кінематичних параметрів руху ланок механізму можна використати раніше одержані алгоритми (краще підпрограми, якщо вони складені) відповідно механізму I класу і групи I виду.

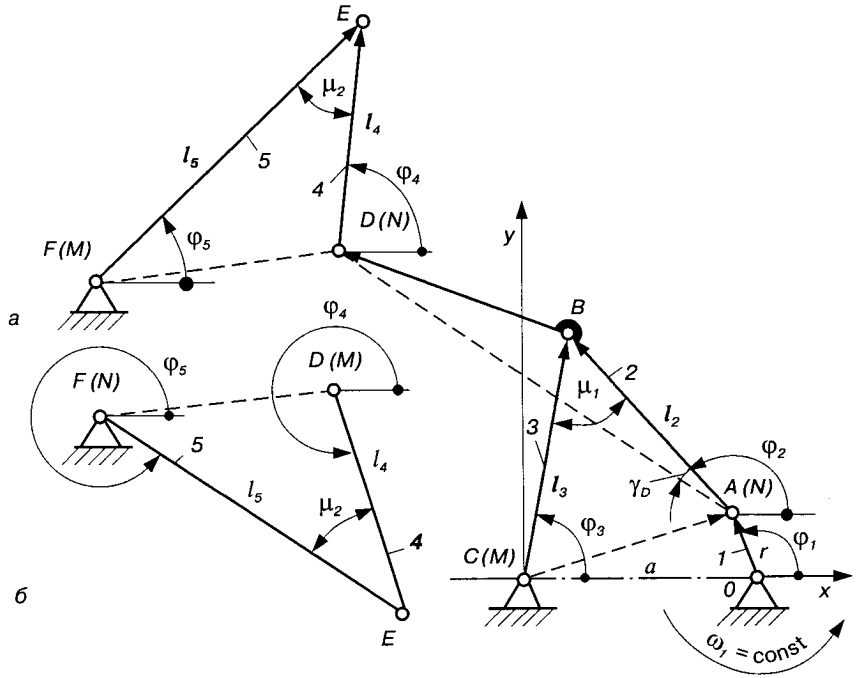


Рис. 3.30.

Порядок складання програми такий.

1. Вибираємо систему координат для кінематичного дослідження цього механізму: нехай початок координат знаходиться в точці C, а осі x і y направлені так, як показано на рис. 3.30, *а*.

2. Вводимо вихідні дані: r, a, l_2, l_3, l_4, l_5, l_{AD}, γ_D, x_F, y_F, N, φ_0, де N – кількість положень механізму, в яких визначаються кінематичні параметри руху ланок; φ_0 – початкове положення кривошипу OA.

3. Для організації циклу обчислення знаходимо кут φ_1 за формулою

$$\varphi_1 = \varphi_0 + T(J - 1),$$

де T – крок зміни кута $\varphi_1 (T = 2\pi/N)$; $J = 1...N$ – положення механізму.

4. Обчислюємо кінематичні параметри руху точки A, яка належить кривошипу A, тобто механізму I класу, використовуючи залежності (3.58), (3.60), (3.61), де $x_0 = a$, $y_0 = 0$.

5. Знаходимо кінематичні параметри ланок групи *2–3*, використовуючи залежності (3.62)–(3.64), (3.69), (3.71). При цьому

треба врахувати, що на рис. 3.23 точка A позначена через N, точка C — через M (на рис. 3.30 точки N і M позначені в дужках, поряд з точками A і C), а також приймаємо $i = 3$, $j = 2$. Враховуючи ці позначення, переписуємо вказані залежності.

6. Оскільки група *4 —5* приєднується до групи *2 —3* у точці D, знаходимо кінематичні параметри її руху, використовуючи залежності (3.65), (3.72), (3.73), замінивши параметри точок S_i і M відповідно на параметри точок D та A.

7. Знаходимо кінематичні параметри ланок групи *4 —5*, використовуючи залежності (3.62)—(3.64), (3.69), (3.71). Так само треба врахувати, що на рис. 3.23 точка D позначена через N, точка F — через M (на рис. 3.30 точки N і M позначені в дужках, поряд з точками D і F), $i = 5$, $j = 4$. Якщо до складу механізму входить, наприклад, група іншого варіанта складання (рис. 3.30, *б*), то, щоб скористуватися вказаними залежностями, потрібно параметри точок N і M змінити відповідно до рис. 3.30, *б*, крім цього, прийняти $i = 4$, $j = 5$. Враховуючи ці позначення, одержуємо остаточні залежності для кінематичного дослідження руху ланок групи *4 —5*.

8. Виводимо отримані в результаті обчислень параметри руху ланок. Для обчислення дійсних швидкостей та прискорень окремих точок або ланок використовуємо залежності (3.39)—(3.42).

3.9. Аналітичне дослідження кінематики механізмів високих класів

Механізми, клас яких вищий другого, називають ***механізмами високих класів.*** Для кінематичного дослідження таких механізмів можна використати метод замкнених векторних контурів. Розглянемо методику визначення переміщень, аналогів швидкостей і прискорень ланок механізмів високих класів на прикладі механізмів III класу, кінематична схема якого зображена на рис. 3.31. До складу механізму входить кривошип OA і стояк O, які утворюють механізм I класу, та одна група III класу III порядку.

Для визначення кінематичних параметрів руху ланок механізму складаємо два рівняння замкнутості векторних контурів, $OADFB$ і $BFEC$:

$$\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}_5;\ \boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}'_5 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{l}_4, \qquad (3.105)$$

які у проекціях на координатні осі x і y мають вигляд

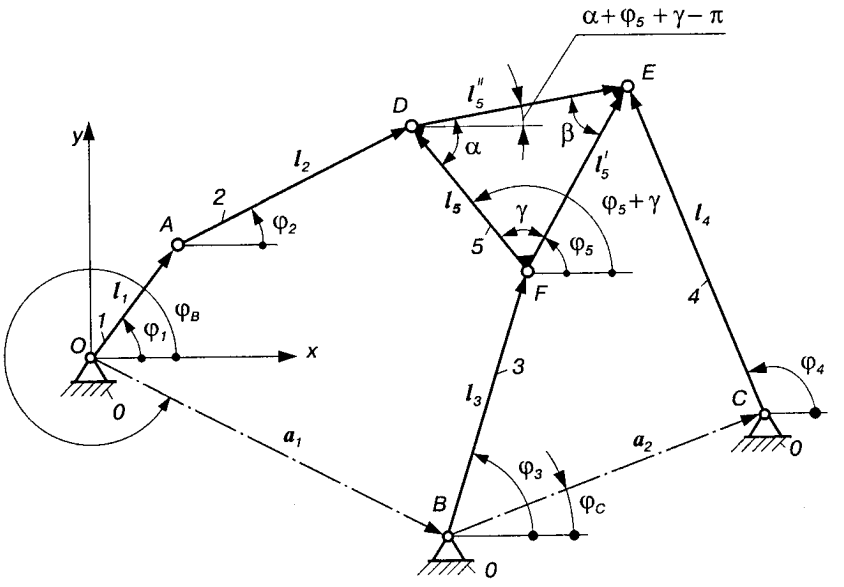


Рис. 3.31.

$$\left.\begin{aligned}
&l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 = a_1\cos\varphi_B + l_3\cos\varphi_3 + l_5\cos(\varphi_5+\gamma);\\
&l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 = a_1\sin\varphi_B + l_3\sin\varphi_3 + l_5\sin(\varphi_5+\gamma);\\
&l_3\cos\varphi_3 + l_5'\sin\varphi_5 = a_2\cos\varphi_C + l_4\cos\varphi_4;\\
&l_3\sin\varphi_3 + l_5'\sin\varphi_5 = a_2\sin\varphi_C + l_4\sin\varphi_4.
\end{aligned}\right\} \quad (3.106)$$

Як видно, (3.106) — система нелінійних рівнянь, розглядаючи які можна знайти кути φ_2, φ_3, φ_4, φ_5. Сучасні ЕОМ дають змогу розв'язати таку задачу. Тут ускладнення викликають тільки визначення початкових положень механізму, тому що кожна група має декілька варіантів складання. Початкові положення ланок механізму можна знайти графічним способом [4, 28].

Продиференціювавши рівняння (3.106) за узагальненою координатою φ_1, та розв'язавши одержану систему лінійних рівнянь, отримаємо аналоги кутових швидкостей φ_2', φ_3', φ_4', φ_5' і кутових прискорень φ_2'', φ_3'', φ_4'', φ_5''.

3.10. Кінематичне дослідження просторових механізмів геометричними методами

Найбільше поширення для визначення кінематичних характеристик просторових важільних механізмів в аналітичній формі знайшли два методи: ***метод перетворення координат і геометричний метод***. Перший метод доцільніше використовувати для дослідження руху незамкнутих кінематичних ланцюгів, які мають багато ступенів вільності, наприклад механізми роботів і маніпуляторів, другий — для простіших механізмів з одним ступенем вільності. Одним з таких механізмів є універсальний шарнір, який використовується для передачі обертового руху від вхідного вала *1* до вихідного вала *2*, осі яких розміщені під кутом α (рис. 3.32, *а, б*). Щоб одержати прості аналітичні залежності для визначення невідомих кінематичних параметрів руху ланок, кінематичну схему механізму проектують на ряд площин [1, 30].

На практиці маємо переважно той окремий випадок, коли кути *AOB, COB* і *COD* дорівнюють 90° (рис. 3.32, *б*). Тут точки *B* і *B′* рухаються по дузі кола β—β, площина якого перпендикулярна до осі *x*, а точки *C* і *C′* — по дузі кола γ—γ, площина якого

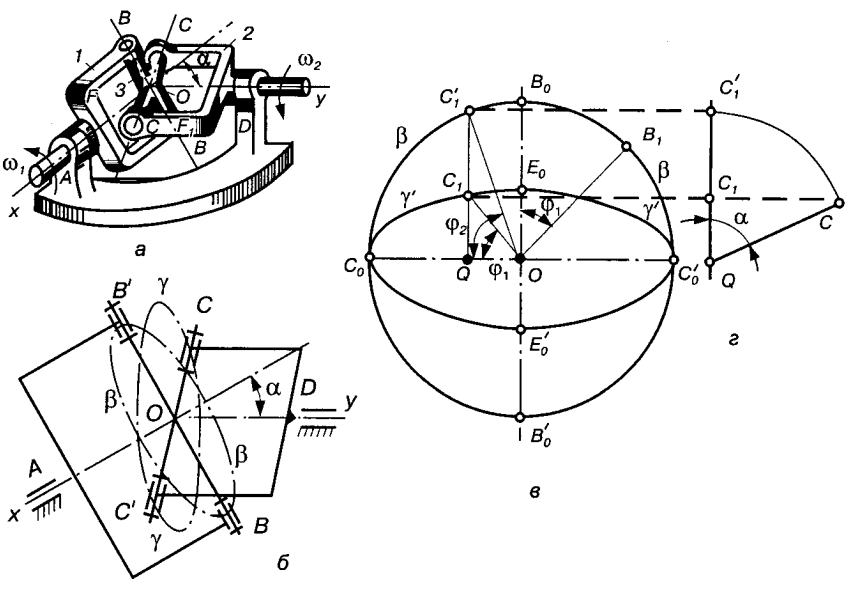


Рис. 3.32.

перпендикулярна до осі y. Кут між цими площинами дорівнює куту α між осями x і y.

Якщо за площину проекцій взяти площину, перпендикулярну до осі x, то коло β—β на цю площину спроектується в натуральну величину (рис. 3.32, *в*), а коло γ—γ — у вигляді еліпса γ'—γ'. Нехай у початковому положенні вісь BB' має положення B_0B_0', тоді очевидно, що вісь CC' має положення C_0C_0', оскільки $\angle\, BOC = 90°$ і проектується в натуральну величину. Нехай, далі, ланка *1* повернеться на кут φ_1. Тоді вісь OB з положення OB_0 перейде у положення OB_1, і кут φ_1 проектуватиметься в натуральну величину. Вісь OC з положення OC_0 перейде у положення OC_1, яке визначиться, якщо до прямої OB_1 у точці O поставити перпендикуляр і знайти точку C_1 перетину цього перпендикуляра з еліпсом γ'—γ'. При цьому ланка *2* повернеться на кут φ_2, натуральну величину якого можна знайти на рисунку, сумістивши площину γ'—γ' з площиною проекцій. Це суміщення можна здійснити як поворот навколо осі C_0C_0'. При цьому точка C_1 переміститься у точку C_1', що лежить на перпендикулярі QC_1 до осі C_0C_0' (рис. 3.32, *в, г*). Кут C_0OC_1' і буде шуканим кутом φ_2, на який повернеться ланка *2*. Оскільки кут між площинами, в яких лежать кола β—β і γ—γ, дорівнює куту α між осями x і y, то завжди справджуватиметься умова

$$QC_1 = (QC_1')\cos\alpha\,. \tag{3.107}$$

Далі видно, що

$$QC_1 = (OQ)\mathrm{tg}\varphi_1;\quad QC_1' = (OQ)\mathrm{tg}\varphi_2. \tag{3.108}$$

Отже, $\dfrac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\mathrm{tg}\varphi_2} = \cos\alpha$, або

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2\cos\alpha. \tag{3.109}$$

Оскільки $\alpha = \mathrm{const}$, то, диференціюючи одержаний вираз за узагальненою координатою φ_1, знаходимо

$$\frac{d\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \cos\alpha\,\frac{d\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}.$$

Поділимо праву і ліву частину на dt:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{dt}\frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_2}.$$

Оскільки $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ і $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$, то

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2\varphi_2}{\cos^2\varphi_1}\frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (3.110)$$

Відношення кутових швидкостей $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \varphi_2'$ є аналогом кутової швидкості вихідного вала *2* (передаточним відношенням).

Далі, оскільки $\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \cos\alpha$ і $\frac{\operatorname{tg}^2\varphi_1}{\operatorname{tg}^2\varphi_2} = \cos^2\alpha$, то

$$\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 = \sin^2\varphi_2\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha,$$

звідки

$$\cos^2\varphi_2 = \frac{\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}. \qquad (3.111)$$

Підставляючи вираз (3.111) у вираз (3.110), знаходимо

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}. \qquad (3.112)$$

Звідси безпосередньо випливає, що при ***рівномірному*** обертанні одного вала другий вал обертається ***нерівномірно.***

При $\varphi_1 = 0$ або $\varphi_1 = 180°$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

при $\varphi_1 = 90°$ або $\varphi_1 = 270°$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos\alpha.$$

Таким чином, передаточне відношення у механізмі універсального шарніра змінюється у межах від $1/\cos\alpha$ до $\cos\alpha$. На рис. 3.33 зображено графіки зміни ω_2/ω_1 залежно від кута повороту вала *1* при різних значеннях кута α перетину валів. Із графіків видно, що чим більший кут α, тим нерівномірніше

обертається вихідний вал. Нерівномірне обертання вала *2* можна усунути за допомогою ***подвійного універсального шарніра*** (рис. 3.34). Цей механізм можна розглядати як два універсальних шарніра, які мають спільну ланку $CC'DD'$. Структурна формула механізму має вигляд (механізм першої сім'ї)

$$W = 4n - 4p_5 =$$

$$= 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1.$$

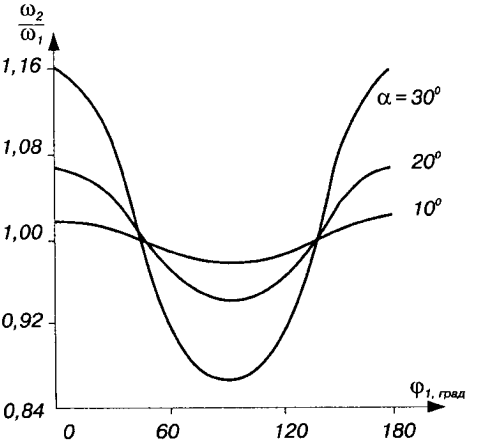


Рис. 3.33.

Таким чином, подвійний універсальний шарнір має один ступінь вільності.

Розглянемо співвідношення кутових швидкостей у механізмі. Нехай у точці O перетинаються осі *1, 2, 3,* у точці O_1 — осі *4, 5, 6.* Нехай кутова швидкість ланки ABC навколо осі *1* дорівнює ω_1, кутова швидкість ланки DEF навколо осі *6* дорівнює ω_2, осі *1* і *6* нахилені до лінії OO_1 відповідно під кутами α_1 і α_2. Вилки CC' і DD' знаходяться в одній площині.

Позначимо кути повороту ланок: CD — φ, ABC — φ_1, DEF — φ_2. Тоді за формулою (3.109) для механізму універсального шарніра дістанемо

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi \cos\alpha_1;\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi \cos\alpha_2.$$

Звідси

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}. \qquad (3.113)$$

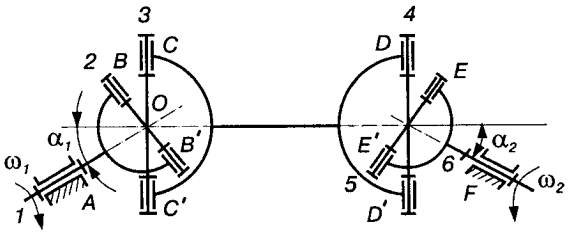


Рис. 3.34.

Відношення кутових швидкостей можна знайти за рівнянням ω_2/ω_1, аналогічним рівнянню (3.110).

Якщо $\alpha_1 = \alpha_1$, то

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2;\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2, \tag{3.114}$$

звідки

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{3.115}$$

а значить,

$$\omega_1 = \omega_2. \tag{3.116}$$

Таким чином, при симетричному розташуванні ланок механізму кутові швидкості ланок *ABC* і *DEF* ***рівні*** між собою.

3.11. Аналітичне дослідження кінематики механізмів методом перетворення координат

Задачу про визначення положень ланок як плоских, так і просторових механізмів можна розв'язати шляхом складання системи рівнянь з використанням методу перетворення координат [41,42]. Особливо зручний цей метод при дослідженні просторових механізмів, оскільки дає змогу значно спростити форму запису рівнянь.

Для прикладу спочатку розглянемо плоский незамкнений кінематичний ланцюг механізму маніпулятора, який складається з чотирьох ланок, кожна з однією обертовою парою V класу. Осі всіх кінематичних пар паралельні (рис. 3.35), тому число ступенів вільності можна визначити за формулою Чебишова

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3.$$

За три узагальнені координати приймаємо кути φ_{10}, φ_{21} і φ_{32}. При кінематичному аналізі ці кути задаються функціями часу. Крім того, з кінематичної схеми відомо довжини ланок l_1, l_2 (відстані між осями обертових пар) і координати x_{E_3}, y_{E_3} деякої точки E_3 на ланці *3* в системі координат $x_3O_3y_3$. Знайти траєкторію точки E_3 відносно стояка *O* (у системі координат $x_0O_1y_0$).

Розглянемо точки E_2, E_1, E_0, які в даний момент збігаються з точкою E_3, але належать відповідно ланкам *2, 1, 0* (стояк). На основі рівнянь перетворення плоских декартових координат при розміщенні їх так, як зображено на рис. 3.35, одержимо

$$x_{E_2} = x_{E_3}\cos\varphi_{32} - \\ -y_{E_3}\sin\varphi_{32} + l_2;$$

$$y_{E_2} = x_{E_3}\sin\varphi_{32} + y_{E_3}\cos\varphi_{32}; \qquad (3.117)$$

$$x_{E_1} = x_{E_2}\cos\varphi_{21} - \\ -y_{E_2}\sin\varphi_{21} + l_1;$$

$$y_{E_1} = x_{E_2}\sin\varphi_{21} + y_{E_2}\cos\varphi_{21}; \qquad (3.118)$$

$$x_{E_0} = x_{E_1}\cos\varphi_{10} - y_{E_1}\sin\varphi_{10};$$

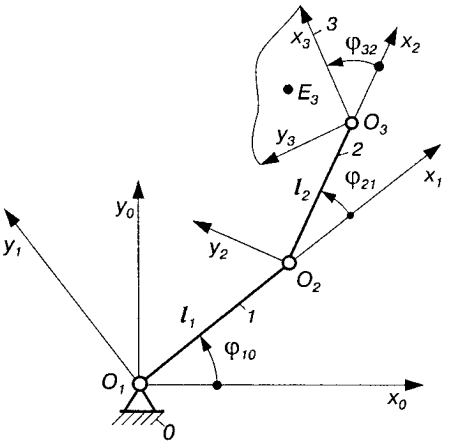


Рис. 3.35.

$$y_{E_0} = x_{E_1}\sin\varphi_{10} + y_{E_1}\cos\varphi_{10}. \qquad (3.119)$$

Розв'язок системи шести лінійних рівнянь з шести невідомими дає можливість знайти положення точки E_3 у системі координат $x_0O_1y_0$, тобто положення точки E_0. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь можна скористуватися ЕОМ. Для встановлення певних правил обчислення і скорочення запису використовують матричну форму запису рівнянь перетворення координат.

Коефіцієнти рівнянь (3.117)—(3.119), які відповідають повороту осей і переносу початку координат, дають матрицю порядку (2×3):

$$M_{32} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & l_2 \\ \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \end{Vmatrix}$$

і т. п.

Щоб мати справу тільки з квадратними матрицями, які можна множити, додаємо до кожних двох рівнянь перетворення координат третє рівняння тотожності 1≡1. Тоді коефіцієнти правих частин рівняння (3.117) з доданням тотожності 1≡1 утворять квадратну матрицю третього порядку:

$$M_{32} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & l_2 \\ \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Аналогічно коефіцієнти правих частин рівнянь (3.118) і (3.119) з доданням тотожності 1≡1 дають матриці:

$$M_{21} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & l_1 \\ \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \; M_{10} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ліві частини рівнянь (3.117) — (3.119) з доданням тотожності 1≡1 дають матриці-стовпці третього порядку:

$$\boldsymbol{r}_{E_2} = \begin{Vmatrix} x_{E_2} \\ y_{E_2} \\ 1 \end{Vmatrix}; \; \boldsymbol{r}_{E_1} = \begin{Vmatrix} x_{E_1} \\ y_{E_1} \\ 1 \end{Vmatrix}; \; \boldsymbol{r}_{E_0} = \begin{Vmatrix} x_{E_0} \\ y_{E_0} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Аналогічно

$$\boldsymbol{r}_{E_3} = \begin{Vmatrix} x_{E_3} \\ y_{E_3} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Тепер рівняння (3.117) — (3.119) з доданням тотожності 1≡1 запишемо у вигляді, який відповідає добутку квадратної матриці третього порядку та матриці-стовпця того самого порядку:

$$\boldsymbol{r}_{E_2} = M_{32}\boldsymbol{r}_{E_3}; \; \boldsymbol{r}_{E_1} = M_{21}\boldsymbol{r}_{E_2}; \; \boldsymbol{r}_{E_0} = M_{10}\boldsymbol{r}_{E_1}. \qquad (3.120)$$

Підставивши значення перших двох рівнянь у третє рівняння системи (3.120), можна визначити координати x_{E_0} і y_{E_0}:

$$\boldsymbol{r}_{E_0} = M_{10}M_{21}M_{32}\boldsymbol{r}_{E_3}. \qquad (3.121)$$

Перемножимо матриці M_{10} і M_{21}. Використовуючи правило множення рядка на стовпець для елемента першого рядка і першого стовпця, одержуємо

$$c_{11} = \cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} - \sin\varphi_{10}\sin\varphi_{21} = \cos\varphi_{20},$$

де $\varphi_{20} = \varphi_{21} + \varphi_{10}$.

Аналогічно визначаємо всі інші елементи матриці M_{10}, M_{21} і, користуючись відомими тригонометричними формулами для суми кутів, записуємо

$$M_{10}M_{21} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{20} & -\sin\varphi_{20} & l_1\cos\varphi_{10} \\ \sin\varphi_{20} & \cos\varphi_{20} & l_1\sin\varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Помножимо одержану матрицю на M_{32}:

$$(M_{10}M_{21})M_{32} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{30} & -\sin\varphi_{30} & l_2\cos\varphi_{20} + l_1\cos\varphi_{10} \\ \sin\varphi_{30} & \cos\varphi_{30} & l_2\sin\varphi_{20} + l_1\sin\varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

де $\varphi_{30} = \varphi_{21} + \varphi_{20}$.

Помноживши квадратну матрицю $M_{10}M_{21}M_{32}$ на стовпцеву матрицю $\boldsymbol{r}_{E_3}$ і повернувшись до звичайної координатної форми, отримаємо

$$\begin{aligned} x_{E_0} &= x_{E_3}\cos\varphi_{30} - y_{E_3}\sin\varphi_{30} + l_2\cos\varphi_{20} + l_1\cos\varphi_{10}; \\ y_{E_0} &= x_{E_3}\sin\varphi_{30} + y_{E_3}\cos\varphi_{30} + l_2\sin\varphi_{20} + l_1\sin\varphi_{10}. \end{aligned} \qquad (3.122)$$

Зрозуміло, що рівняння (3.122) можна було б одержати із системи рівнянь (3.117)—(3.119), використовуючи звичайні алгебраїчні перетворення, але при цьому обчислення були б більш громіздкими. Перевага матричної форми запису полягає головним чином у використанні формули множення матриць, яка дає змогу однаково послідовно виконувати перетворення координат.

Зауважимо, що рівняння (3.122) для визначення координат точки E_3 можна одержати також з рівнянь проекцій контуру $O_1O_2O_3E_3$ на нерухомі осі координат. Це спрощення, проте, можливе лише для плоских механізмів. При кінематичному аналізі просторових механізмів, навпаки, метод перетворення координат простіший за метод проекцій.

Використовуючи рівняння (3.122), можна знайти координати будь-якої точки на ланці *3*, тобто цілком визначити її положення. Аналогічно встановлюють взаємні положення інших ланок механізму, причому для їхнього знаходження завжди одержують систему лінійних рівнянь.

Рівняння перетворення координат. Загальні рівняння перетворення координат систем $x_iy_iz_i$ і $x_jy_jz_j$:

$$\begin{aligned} x_i &= a_{11}x_j + a_{12}y_j + a_{13}z_j + a_i; \\ y_i &= a_{21}x_j + a_{22}y_j + a_{23}z_j + b_i; \\ z_i &= a_{31}x_j + a_{32}y_j + a_{33}z_j + c_i, \end{aligned} \qquad (3.123)$$

де a_i, b_i, c_i — координати початку системи координат $x_jy_jz_j$ у системі координат $x_iy_iz_i$; a_{11}, a_{12},... — коефіцієнти при координатах $x_jy_jz_j$ (напрямні косинуси), тобто

$$a_{11} = \cos\left(x_i \hat{} x_j\right), a_{12} = \cos\left(x_i \hat{} y_j\right) \text{ тощо.}$$

Рівняння (3.123) можна записати у матричній формі:

$$\boldsymbol{r}_i = M_{ji}\boldsymbol{r}_j, \tag{3.124}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \begin{Vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad \boldsymbol{r}_j = \begin{Vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad M_{ji} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_i \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_i \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.125}$$

Напрямні косинуси можна також виразити через кути Ейлера. Нагадаємо, що для відрахунку кутів Ейлера відмічається ***лінія вузлів*** ON, тобто лінія перетину площини x_jOy_j з площиною x_iOy_i (рис. 3.36). Системи координат x_iOy_i і x_jOy_j праві, тобто найкоротший поворот осі Ox_i до осі Oy_i здійснюється проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Oz_i. Додатний напрямок лінії вузлів такий, що найкоротший поворот від осі Oz_i до осі Oz_j здійснюється проти руху годинникової стрілки. Кут між віссю Ox_i і лінією вузлів називають ***кутом прецесії*** ψ_{ji}, кут між лінією вузлів і віссю Ox_j — ***кутом чистого обертання*** φ_{ji}, кут між осями Oz_i і Oz_j — ***кутом нутації*** θ_{ji}. Кути ψ_{ji} і φ_{ji} відраховуються проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі Oz_i або осі Oz_j. Якщо початки координат систем x_iOy_i і x_jOy_j не збігаються з точкою O, то для відрахунку кутів Ейлера треба через O_j провести осі, паралельні осям систем x_iOy_i.

Матриці кінематичних пар. Щоб встановити зв'язок між напрямними косинусами у рівнянні (3.123) і кутами Ейлера, розглянемо окремий випадок перетворення декартової системи координат за умови, що осі Oz_i і Oz_j збігаються (рис. 3.37). У цьому випадку маємо обертання у площині x_iOy_i. Тоді координати точки E у системі x_iOy_i можна записати так:

$$\begin{aligned} x_i &= OE'' - E'E'' = x_j \cos\varphi_{ji} - y_j \sin\varphi_{ji}; \\ y_i &= E''E^{IV} + E'''E = x_j \sin\varphi_{ji} + y_i \cos\varphi_{ji}. \end{aligned} \tag{3.126}$$

За Ейлером, якщо $x_iy_iz_i$ і $x_jy_jz_j$ — дві прямокутні системи координат, що мають однакову орієнтацію, то перетворення однієї системи на іншу можна замінити трьома перетвореннями, кожне з яких є поворотом навколо осей на кути Ейлера (ψ_{ji}, θ_{ji}, φ_{ji}). Перший поворот системи координат $x_iy_iz_i$ здійснимо на кут ψ_{ji}

(рис. 3.38, *а*) навколо осі z_i. При цьому розглянемо систему координат $N\eta_i z_i$, де вісь $O\eta_i$ перпендикулярна до осей Oz_i та ON і направлена так, що системи $x_i y_i z_i$ і $N\eta_i z_i$ мають однакову орієнтацію. Крім цього, ці системи мають спільну вісь Oz_i, тому друга система може бути одержана поворотом першої навколо осі Oz_i на деякий кут ψ_{ji}. Тоді, розглянувши положення обох систем у площині, яка перпендикулярна до осі Oz_i (рис. 3.38, *б*), за аналогією з рівнянням (3.126), запишемо (на рис. 3.38, *б—г* у дужках вказані відповідні осі рис. 3.37):

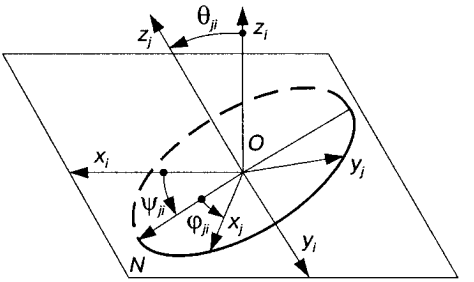


Рис. 3.36.

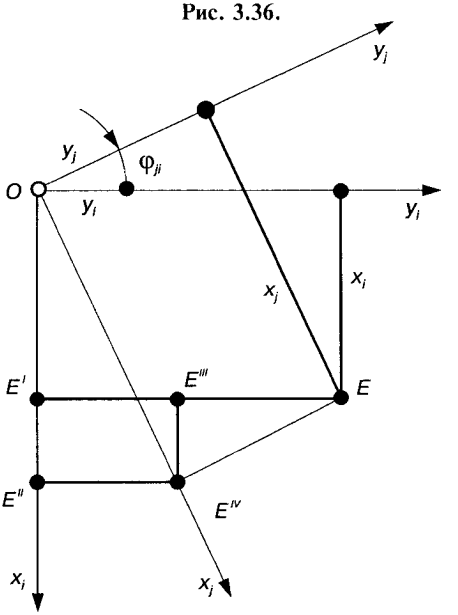


Рис. 3.37.

$$x_i = n\cos\psi_{ji} - \eta_i \sin\psi_{ji};$$

$$y_i = n\sin\psi_{ji} + \eta_i \cos\psi_{ji}, \qquad (3.127)$$

де x_i, y_i — координати точки E у системі координат $x_i O y_i$, а n, η — у системі координат $NO\eta_i$ (рис. 3.38, *б*).

Перейдемо від системи $N\eta_i z_i$ (рис. 3.38, *а*) до прямокутної системи $N\eta_j z_j$ (вісь Oz_j перпендикулярна до осі ON, оскільки вісь ON лежить у площині $x_j O y_j$, вісь $O\eta_j$ перпендикулярна до осей ON і Oz_j і направлена так, щоб обидві системи $N\eta_i z_i$ і $N\eta_j z_j$ мали однакову орієнтацію). Система $N\eta_j z_j$ одержана поворотом системи координат $N\eta_i z_i$ навколо осі N на кут θ_{ji} (рис. 3.38, *в*). За аналогією з рівнянням (3.126) записуємо

$$\eta_i = \eta_j \cos\theta_{ji} - z_j \sin\theta_{ji};\ z_i = \eta_j \sin\theta_{ji} + z_j \cos\theta_{ji}, \qquad (3.128)$$

де η_j, z_j — координати точки E у системі координат $\eta_j O z_j$ (рис. 3.38, *в*).

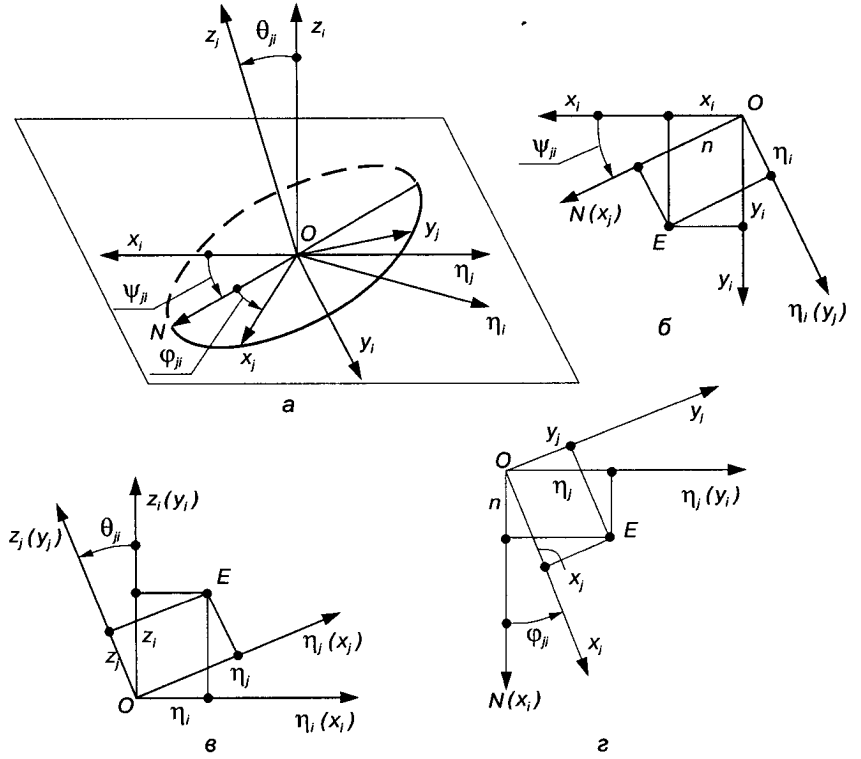


Рис. 3.38.

Система $N\eta_i z_j$ має таку саму орієнтацію, як і система $x_i y_i z_i$, тобто таку саму орієнтацію, як і система $x_j y_j z_j$. Тому систему $x_i y_i z_i$ одержуємо поворотом системи $N\eta_j z_j$ навколо осі Oz_j на кут φ_{ji} (рис. 3.38, *г*). Тоді за аналогією з рівнянням (3.126) маємо

$$n = x_j \cos \varphi_{ji} - y_j \sin \varphi_{ji}; \; z_i = x_j \sin \varphi_{ji} + y_j \cos \varphi_{ji}, \qquad (3.129)$$

де x_j, y_j — координати точки у системі координат $x_j O y_j$.

Вилучимо із співвідношень (3.127) — (3.129) параметри n, η_i, η_j. Для цього підставимо значення η_j у першу залежність системи рівнянь (3.128) і визначимо

$$\eta_i = x_j \cos \varphi_{ji} \cos \theta_{ji} + y_j \cos \varphi_{ji} \cos \theta_{ji} - z_j \sin \theta_{ji},$$

потім підставимо значення n і η_j у залежність (3.127), η_i — у другу залежність системи (3.128) і одержимо рівняння для визначення координат точки E у системі $x_i y_i z_i$:

$$x_i = x_j \cos\varphi_{ji} \cos\psi_{ji} - y_j \sin\varphi_{ji} \cos\psi_{ji} - x_j \sin\varphi_{ji} \sin\psi_{ji} \cos\theta_{ji} +$$

$$+ y_j \cos\varphi_{ji} \sin\psi_{ji} \cos\theta_{ji} + z_j \sin\psi_{ji} \sin\theta_{ji} = x_j(\cos\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} -$$

$$- \sin\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} \cos\theta_{ji}) - y_j(\cos\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} - \sin\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} \cos\theta_{ji}) +$$

$$+ z_j \sin\theta_{ji} \sin\psi_{ji};$$

$$y_i = x_j \cos\varphi_{ji} \sin\psi_{ji} - y_j \sin\varphi_{ji} \sin\psi_{ji} + x_j \sin\varphi_{ji} \cos\psi_{ji} \cos\theta_{ji} +$$

$$+ y_j \cos\varphi_{ji} \cos\psi_{ji} \cos\theta_{ji} - z_j \cos\psi_{ji} \sin\theta_{ji} = x_j(\sin\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} +$$

$$+ \cos\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} \cos\theta_{ji}) - y_j(\sin\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} + \cos\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} \cos\theta_{ji}) -$$

$$- z_j \sin\theta_{ji} \cos\psi_{ji};$$

$$z_i = x_j \sin\varphi_{ji} \sin\theta_{ji} + y_j \cos\varphi_{ji} \sin\theta_{ji} + z_j \cos\theta_{ji}.$$

Порівнюючи одержану систему рівнянь із рівняннями (3.123), можна записати матрицю коефіцієнтів для цих рівнянь:

$$M_{ji} = \begin{Vmatrix} (\cos\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} - & (\cos\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} - & \sin\theta_{ji} \sin\psi_{ji} & a_i \\ -\cos\theta_{ji} \times & -\cos\theta_{ji} \times & & \\ \times \sin\psi_{ji} \sin\varphi_{ji}) & \times \sin\psi_{ji} \cos\varphi_{ji}) & & \\ (\sin\psi_{ji} \cos\varphi_{ji} + & (-\sin\psi_{ji} \sin\varphi_{ji} + & -\sin\theta_{ji} \cos\psi_{ji} & b_i \\ +\cos\theta_{ji} \times & +\cos\theta_{ji} \times & & \\ \times \cos\psi_{ji} \sin\varphi_{ji}) & \times \cos\psi_{ji} \cos\varphi_{ji}) & & \\ \sin\theta_{ji} \sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji} \cos_{ji} & \cos\theta_{ji} & c_i \end{Vmatrix}. \quad (3.130)$$

Матрицю M_{ji} можна назвати ***матрицею кінематичної пари.***

Для сферичної пари III класу кути Ейлера є змінними параметрами, а координати a_i, b_i і c_i — постійними.

Для сферичної пари з пальцем (рис. 3.39) тільки два кути будуть незалежними.

Вісь пальця (рис. 3.39, *б*) зручно прийняти за вісь $O_j z_j$, а вісь пазу (вісь, перпендикулярну до площини пазу) — за вісь $O_i x_i$ (або паралельно осі $O_i x_i$, якщо початки координат O_i і O_j не збігаються). Тоді кут прецесії $\psi_{ji} = 0$, кут чистого обертання φ_{ji}, який вимірюється між осями $x_i y_j$, є кутом повороту осі пальця, кут нутації θ_{ji} — кутом повороту навколо осі пазу. За цих двох умов ***матриця сферичної пари з пальцем*** одержується з матриці (3.130) при $\psi_{ji} = 0$:

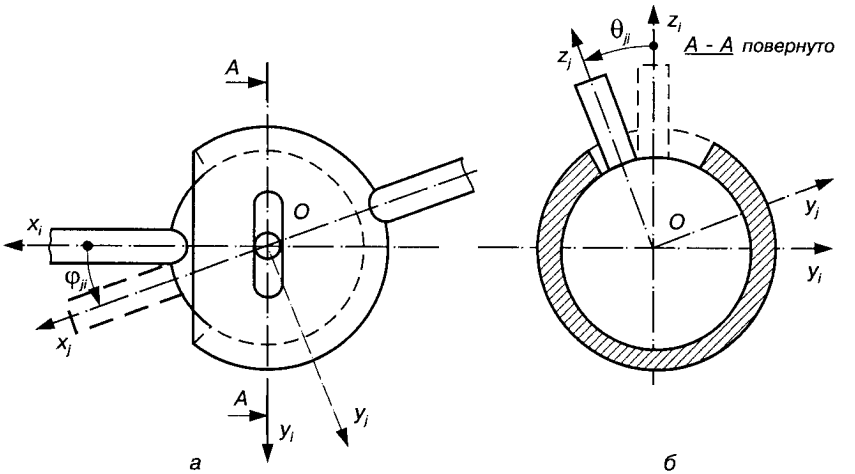


Рис. 3.39.

$$M_{ji} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 & a_i \\ \cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} & b_i \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} & c_i \end{Vmatrix}. \quad (3.131)$$

Для ланок обертової пари (рис. 3.40) вісь O_jz_j направимо вздовж осі цієї пари, найкоротшу відстань l_i між осями O_jz_j і O_iz_i сумістимо з віссю O_ix_i, а початок координат O_j розмістимо на відстані l_{ji} від осі O_ix_i. Тоді кут нутації $\theta_{ji} = \text{const}$, кут прецесії $\psi_{ji} = 0$ і з врахуванням прийнятих позначень отримаємо з (3.130) ***матрицю обертової пари:***

$$M_{ji} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 & l_i \\ \cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} & -l_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} & l_{ji}\cos\theta_{ji} \end{Vmatrix}. \quad (3.132)$$

Матрицю поступальної пари одержимо з матриці (3.132), якщо вважатимемо параметр $l_{ji} = s_{ji}$ змінною величиною, а кут $\varphi_{ji} = 0$. Кут θ_{ji} у цьому випадку є кутом між віссю O_iz_i і віссю поступальної пари, а величина l_i дорівнює найкоротшій відстані між цими осями. Таким чином,

$$M_{ji} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ \cos\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} & -s_{ji}\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} & s_{ji}\cos\theta_{ji} \end{Vmatrix}. \quad (3.133)$$

За цих умов, якщо замість поступальної пари буде ***гвинтова***, відстань $l_{ji} = s_{ji}$ треба вважати змінною величиною, яка зв'язана з кутом повороту φ_{ji} співвідношенням $s_{ji} = h_{ji}\varphi_{ji}/(2\pi)$, де h_{ji} — крок гвинтової лінії.

Нарешті, якщо ланки i та j утворюють циліндричну пару, то в матриці (3.133) треба вважати незалежними дві величини: $l_{ji} = s_{ji}$ та φ_{ji}.

Усі вказані матриці мають порядок (3×4). Якщо необхідно мати тільки квадратні матриці, які можна множити, то до рівнянь перетворення координат (3.123) додають тотожність $1 \equiv 1$ і відповідно у всіх матрицях з'являється четвертий рядок, який містить у собі нулі у перших трьох стовпцях і одиницю у четвертому.

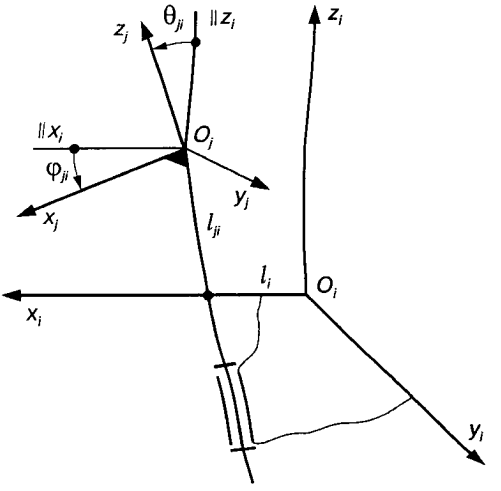


Рис. 3.40.

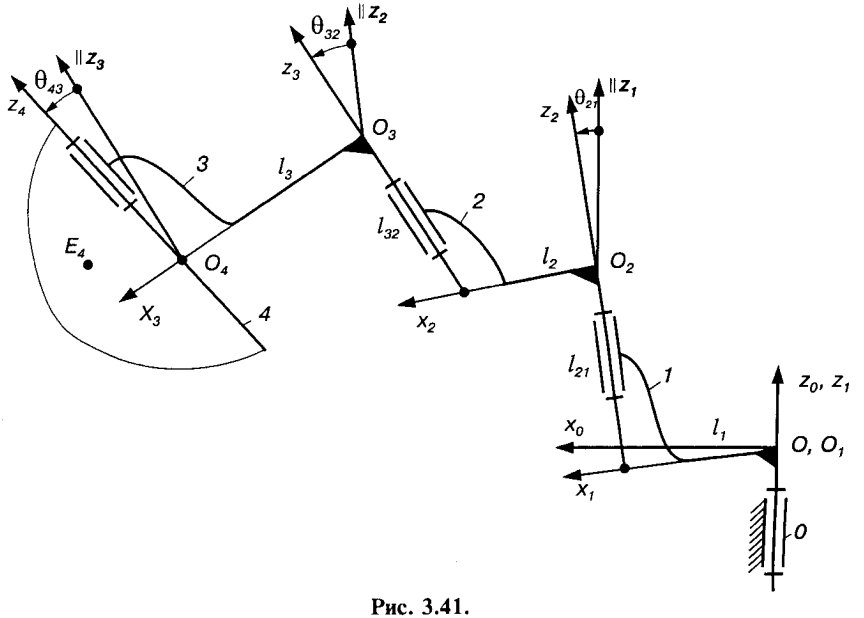


Рис. 3.41.

Визначення положень ланок просторового незамкнутого ланцюга. На рис. 3.41 зображено кінематичну схему механізму просторового маніпулятора, який складається з п'ятиланкового кінематичного ланцюга, кожний з однією обертовою парою. Число ступенів вільності цього механізму $W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$.

З кожною ланкою зв'яжемо праву систему координат, як показано на рис. 3.41, тобто осі z_j направимо вздовж осей обертових пар, осі x_j — по найкоротшій відстані між осями обертових пар, а початки координат O_j розмістимо у точці перетину осі z_j з найкоротшою відстанню між осями z_1 і z_{j+1}. Тоді для визначення положень ланок повинні бути задані такі параметри кінематичної схеми: $l_1, l_2, l_3, l_{21}, l_{32}, \theta_{21}, \theta_{32}, \theta_{43}$; узагальнені координати φ_{10}, φ_{21}, φ_{32}, φ_{43}, за які прийнять кути між осями абсцис. Знайти для деякої точки E_4 $(x_{E_4}, y_{E_4}, z_{E_4})$ на ланці *4* координати у системі, яка зв'язана зі стояком, $x_{E_0}, y_{E_0}, z_{E_0}$.

Рівняння перетворення координат при послідовному переході від ланки *4* до стояка в матричній формі має вигляд

$$\boldsymbol{r}_{E_3} = M_{43}\boldsymbol{r}_{E_4};\ \boldsymbol{r}_{E_2} = M_{32}\boldsymbol{r}_{E_3};\ \boldsymbol{r}_{E_1} = M_{21}\boldsymbol{r}_{E_2};\ \boldsymbol{r}_{E_0} = M_{10}\boldsymbol{r}_{E_1}, \quad (3.134)$$

де матриці $M_{43}, M_{32}, M_{21}, M_{10}$ одержано з матриці (3.133) з додаванням четвертого рядка 0001, а матриці-стовпці складено за формулою

$$\boldsymbol{r}_{E_i} = \begin{Vmatrix} x_{E_i} \\ y_{E_i} \\ z_{E_i} \\ 1 \end{Vmatrix}, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Розв'яжемо систему рівнянь (3.134) відносно матриці-стовпця $\boldsymbol{r}_{E_0}$:

$$\boldsymbol{r}_{E_0} = M_{10}M_{21}M_{32}M_{43}\boldsymbol{r}_{E_4}. \quad (3.135)$$

Таким чином, щоб одержати $\boldsymbol{r}_{E_0}$, треба перемножити чотири матриці четвертого порядку і потім записати матричне рівняння у звичайній формі трьох рівнянь, які виражають залежність координат $x_{E_0}, y_{E_0}, z_{E_0}$ від координат $x_{E_4}, y_{E_4}, z_{E_4}$. Розгорнутий запис таких рівнянь досить громіздкий і наводити його не має сенсу, тому що ЕОМ виконують відповідні обчислення автоматично за допомогою стандартних програм для матриць перетворення координат.

Аналогічно розв'язуються задачі на визначення координат точок на будь-якій ланці просторового незамкненого кінематичного ланцюга, причому розв'язок цієї задачі завжди зводиться до розв'язку системи лінійних рівнянь. Деякі труднощі можуть виникнути лише при складанні матриць вищих пар, які утворюються стиканням поверхонь змінної кривизни.

Визначення положень ланок просторового замкненого кінематичного ланцюга. За методом Ю. Ф. Морошкіна, для визначення положень ланок таких ланцюгів ділимо їх на кілька незамкнених кінематичних ланцюгів шляхом розмикання однієї (або кількох) кінематичних пар. Для кожного незамкненого кінематичного ланцюга з рівнянь перетворення координат знаходимо положення елементів розімкнутої кінематичної пари (точок, ліній, поверхонь). Прирівнюємо потім координати, що визначають ці елементи, для кожного з двох незамкнених кінематичних ланцюгів і одержуємо систему рівнянь для встановлення невідомих величин, яка виявляється, як правило, нелінійною.

Для механізмів, що мають у своєму складі кілька структурних груп, вказані рівняння складають для кожної групи.

Використання методу перетворення координат пояснимо на прикладі визначення положень ланок просторового кривошипно-повзункового механізму (рис. 3.42). У цьому механізмі ланка *1* (кривошип) утворює зі стояком обертову пару, вздовж осі якої направимо вісь Az_0.

Ланка *3* (повзун) здійснює прямолінійний рух; центр сферичної пари *C*, яку вона утворює з ланкою *2* (шатуном), переміщується паралельно осі Ax_0. Із кривошипом шатун утворює сферичну пару з пальцем. Палець належить шатуну і знаходиться у площині, перпендикулярній до лінії *BC*. Вісь кільцевого прорізу (пазу), що належить кривошипу, напрямлена по лінії *AB*, перпендикулярній до осі обертової пари.

Механізм має один ступінь вільності. Треба визначити положення всіх ланок механізму при заданих значеннях узагальненої координати φ_{10} і параметрах кінематичної схеми: $l_{AB} = l_1, l_{BC} = l_2, l_3, l_4$.

Для системи координат, яка зв'язана з ланкою *1*, виберемо початок координат у точці *B*, вісь x_1 направимо по лінії *AB*, а вісь z_1 — паралельно осі обертової пари. Напрямок осі y_1 визначається з умови одержання правої системи координат.

Рівняння перетворення координат для ланок *0* і *1* має вигляд

$$x_0 = x_1 \cos\varphi_{10} - y_1 \sin\varphi_{10} + l_1 \cos\varphi_{10};$$

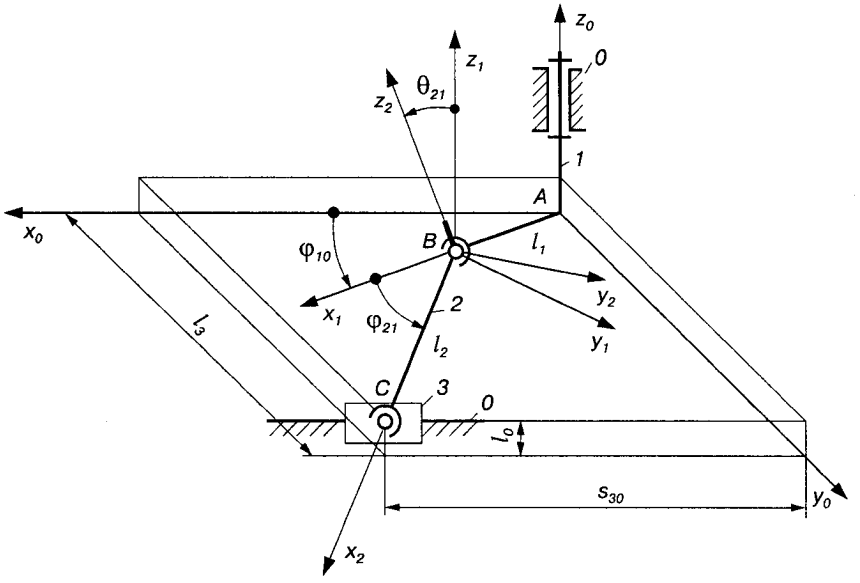


Рис. 3.42.

$$y_0 = x_1 \sin\varphi_{10} - y_1 \cos\varphi_{10} + l_1 \sin\varphi_{10}; \qquad (3.136)$$

$$z_0 = z_1.$$

Для ланки *2* початок координат виберемо також у точці *B*, вісь z_2 направимо по осі пальця, а вісь Bx_2 — по відрізку *BC*. Кут між осями Bz_1 і Bz_2 — кут нутації θ_{21}, лінія вузлів збігається з віссю Bx_1, а кут між осями Bx_1 і Bx_2 — кут чистого обертання φ_{21}.

Рівняння перетворення координат для ланок *1* і *2* у відповідності з матрицею (3.131) набирає вигляду

$$x_1 = x_2 \cos\varphi_{21} - y_2 \sin\varphi_{21};$$

$$y_1 = x_2 \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21} + y_2 \cos\theta_{21} \cos\varphi_{21} - z_2 \sin\theta_{21}; \qquad (3.137)$$

$$z_1 = x_2 \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21} + y_2 \sin\theta_{21} \cos\varphi_{21} + z_2 \cos\theta_{21}.$$

Розімкнемо сферичну пару *C* і одержимо два незамкнуті кінематичні ланцюги: перший складається із ланок *0* і *3*, другий — із ланок *0, 1* і *2*.

Для першого ланцюга координати точки *C* у нерухомій системі координат мають значення $x_{C_0} = s_{30}, y_{C_0} = l_3, z_{C_0} = l_0$. Для другого

ланцюга знаходимо координати точки C у системі координат ланки *2*; $x_{C_2} = l_2, y_{C_2} = 0, z_{C_2} = 0$. Підставляючи ці значення у рівняння (3.137), одержуємо координати точки C у системі ланки *1*:

$$x_{C_1} = l_2 \cos\varphi_{21}; y_{C_1} = l_2 \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21}; z_{C_1} = l_2 \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21}.$$

Потім отримаємо за рівнянням (3.136) координати точки C у нерухомій системі координат для другого ланцюга і прирівняємо їх до значень першого ланцюга:

$$s_{30} = l_2 \cos\varphi_{21} \cos\varphi_{10} + l_2 \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21} \sin\varphi_{10} + l_1 \cos\varphi_{10};$$

$$l_3 = l_2 \cos\varphi_{21} \sin\varphi_{10} + l_2 \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21} \cos\varphi_{10} + l_1 \sin\varphi_{10}; \quad (3.138)$$

$$l_0 = l_2 \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21}.$$

З одержаної системи трьох рівнянь знаходимо три невідомі величини: $s_{30}, \theta_{21}, \varphi_{21}$.

Вилучаючи з двох останніх рівнянь системи (3.138) кут θ_{21}, дістаємо квадратне рівняння відносно $\cos\varphi_{21}$. З розв'язку цього рівняння випливає

$$\cos\varphi_{21} = (A \pm \sqrt{A^2 - B^2}) / l_2, \quad (3.139)$$

де $A = (l_3 - l_1 \sin\varphi_{10}) \sin\varphi_{10}$; $B = (l_3 - l_1 \sin\varphi_{10})^2 + (l_0^2 - l_2^2) \cos^2\varphi_{10}$.

Формула (3.139) дає два значення кута φ_{21}, які відповідають двом можливим положенням ланок *2* і *3* при однаковому положенні ланки *1*. Для вибору чверті, у якій розташований кут φ_{21}, треба знати, хоча б на початку обчислень, знак ще однієї тригонометричної функції, що вимагає додаткового аналізу рівнянь (3.138). Простіше це зробити, побудувавши схему механізму в початковому положенні.

Визначивши кути φ_{21}, знайдемо кут θ_{21} і переміщення повзуна s_{30} (3.138).

Якщо використати матричну форму запису, то рівняння (3.138) одержуються безпосередньо із матричного рівняння

$$\boldsymbol{r}_{C_0} = M_{10} M_{21} \boldsymbol{r}_{C_2}, \quad (3.140)$$

де $\boldsymbol{r}_{C_0} = \begin{Vmatrix} s_{30} \\ l_3 \\ l_0 \\ 1 \end{Vmatrix}$; $\boldsymbol{r}_{C_2} = \begin{Vmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

$$M_{10} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & l\cos\varphi_{10} \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & l_1\sin\varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{21}\sin\varphi_{21} & \cos\theta_{21}\cos\varphi_{21} & -\sin\theta_{21} & 0 \\ \sin\theta_{21}\sin\varphi_{21} & \sin\theta_{21}\cos\varphi_{21} & \cos\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Як видно, матрична форма запису більш компактна.

Для інших комбінацій кінематичних пар у просторових чотириланкових механізмах загальний метод перетворення координат потребує аналогічних обчислень, змінюються лише рівняння перетворення координат відповідно до видів кінематичних пар механізмів.

Визначення швидкостей і прискорень. На відміну від задачі аналітичного визначення положень ланок, яка зводиться у загальному випадку до розв'язку системи нелінійних рівнянь, задачу про знаходження швидкостей і прискорень будь-якої точки на ланках механізмів можна звести до розв'язку системи лінійних рівнянь і тому він не має великих ускладнень. Складання цих рівнянь пояснимо на прикладі просторового кривошипно-повзункового механізму (див. рис. 3.42).

Положення ланок знаходимо із системи трьох нелінійних рівнянь (3.138). Для визначення лінійних і кутових швидкостей ланок диференціюємо за часом ліві і праві частини цих рівнянь і одержимо систему трьох рівнянь, які є лінійними відносно швидкостей $\dot{s}_{30} = ds_0 / dt$; $\dot{\varphi}_{10} = d\varphi_{10} / dt$; $\dot{\theta}_{21} = d\theta_{21} / dt$; $\dot{\varphi}_{21} = d\varphi_{21} / dt$;

$$\dot{s}_{30} = -\dot{\varphi}_{21} l_2(\sin\varphi_{21}\cos\varphi_{10} + \cos\theta_{21}\cos\varphi_{21}\sin\varphi_{10}) -$$

$$-\dot{\varphi}_{10}(l_2\cos\varphi_{21}\sin\varphi_{10} + l_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}\cos\varphi_{10} + l_1\sin\varphi_{10}) +$$

$$+\dot{\theta}_{21} l_2\sin\theta_{21}\sin\varphi_{21}\sin\varphi_{10};$$

$$0 = -\dot{\varphi}_{21} l_2(\sin\varphi_{21}\sin\varphi_{10} - \cos\theta_{21}\cos\varphi_{21}\cos\varphi_{10}) +$$

$$+\dot{\varphi}_{10}(l_2\cos\varphi_{21}\cos\varphi_{10} - l_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}\sin\varphi_{10} + l_1\cos\varphi_{10}) -$$

$$-\dot{\theta}_{21} l_2 \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21} \cos\varphi_{10}; \qquad (3.141)$$

$$0 = \dot{\varphi}_{21} \sin\theta_{21} \cos\varphi_{21} + \dot{\theta}_{21} \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21}.$$

Повторне диференціювання дає систему рівнянь, які є лінійними відносно прискорень

$$\ddot{s}_{30} = d^2 s_{30} / dt^2; \ddot{\varphi}_{10} = d^2\varphi_{10} / dt^2;$$
$$\ddot{\theta}_{21} = d^2\theta_{21} / dt^2; \ddot{\varphi}_{21} = d^2\varphi_{21} / dt^2.$$

Якщо за узагальнену координату механізму прийняти кут φ_{10}, то ланка *1* буде початковою і при розв'язуванні задач кінематичного аналізу закон її руху $\varphi_{10} = \varphi_{10}(t)$ повинен бути заданий. У цьому випадку кутова швидкість $\dot{\varphi}_{10}$ і кутове прискорення $\ddot{\varphi}_{10}$ відомі і розв'язок одержаної системи лінійних рівнянь дає величини $\dot{s}_{30}, \dot{\theta}_{21}, \dot{\varphi}_{21}, \ddot{s}_{30}, \ddot{\theta}_{21}, \ddot{\varphi}_{21}$.

Розв'язки системи лінійних рівнянь для визначення швидкостей (3.141) і прискорень дають значення похідних від кутів Ейлера. Щоб перейти до ***проекцій кутових швидкостей*** ланки *j* у русі відносно ланки *i*, використовуються відомі співвідношення

$$\omega_{ji}^{(x_i)} = \dot{\varphi}_{ji} \sin\psi_{ji} \sin\theta_{ji} + \dot{\theta}_{ji} \cos\psi_{ji};$$
$$\omega_{ji}^{(y_i)} = -\dot{\varphi}_{ji} \cos\psi_{ji} \sin\theta_{ji} + \dot{\theta}_{ji} \sin\psi_{ji}; \qquad (3.142)$$
$$\omega_{ji}^{(z_i)} = \dot{\psi}_{ji} + \dot{\varphi}_{ji} \cos\theta_{ji}.$$

Тут верхні індекси у дужках вказують вісь, на яку проектуються вектори.

Кутова швидкість ланки j відносно стояка визначається за теоремою про складання швидкостей у складному русі:

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{ji}. \qquad (3.143)$$

Якщо ланка *i* є початковою, то для визначення кутової швидкості досить одного рівняння (3.143). Якщо між початковою ланкою і ланкою *j* є проміжні ланки, то рівняння типу (3.143) повторюється послідовно для кожної пари сусідніх ланок, починаючи від ланки *j* і закінчуючи початковою ланкою. При використанні рівнянь проекцій перехід від однієї системи координат до іншої здійснюється за формулами, аналогічними формулам перетворення без переносу початку системи координат.

Проекції кутового прискорення ε_{ji} на осі, які зв'язані з ланкою i, встановлюються диференціюванням співвідношень (3.142). Рівняння для визначення кутового прискорення ланки j відносно стояка має вигляд

$$\varepsilon_j = \varepsilon_i + \varepsilon_{ij} + \omega_i \times \omega_{ij}. \qquad (3.144)$$

Для визначення швидкості і ***прискорення точок*** ланок просторових механізмів враховуємо, що рух будь-якої ланки механізму можна уявити як поступальний з полюсом у довільній точці P з координатами x_P, y_P, z_P і сферичний навколо цієї точки. Відповідно швидкість $\boldsymbol{v}$ і прискорення $\boldsymbol{a}$ будь-якої точки з координатами x, y, z зв'язані зі швидкістю $\boldsymbol{v}_P$ і прискоренням $\boldsymbol{a}_P$ полюса співвідношеннями

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \omega + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_P + \varepsilon + \omega \times (\omega + \boldsymbol{r}),$$

де ω і ε — відповідно кутова швидкість і кутове прискорення ланки; $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор, що визначає положення точки, яку розглядають відносно полюса.

Для отримання швидкостей і прискорень ланок просторових механізмів можна використати матричну форму запису рівнянь. Детальніше питання кінематики просторових механізмів розглядаються у працях [19, 23, 49].

ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

4.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів

При кінематичному дослідженні механізмів наперед вважається, що рух початкової ланки заданий, а рух інших ланок вивчається залежно від руху цієї ланки. За цих умов сили, які діють на ланки механізму, не враховувались. При динамічному дослідженні механізмів розглядається рух ланок з урахуванням сил, що діють на них.

Розрізняють ***дві основні задачі динаміки*** механізмів і машин.

1. Задано закон руху початкової ланки механізму; треба визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух.

2. Задано зовнішні сили, що діють на ланки механізму; треба визначити закон руху початкової ланки.

Перша задача має назву ***силового аналізу механізмів***, друга — ***динаміки механізмів*** (машин). Крім цього, як і в інших розділах теорії механізмів і машин, у динаміці можна виділити два класи задач — аналіз і синтез механізмів і машин за заданими динамічними умовами. З цієї причини до розділу динаміки включають ряд інших задач, які мають важливе технічне значення, а саме: розрахунок маховика, регуляторів швидкості, зрівноваження мас у механізмі, визначення його коефіцієнта корисної дії (ККД), дослідження коливань у машинах, їхній віброзахист. У цьому розділі будемо проводити всі дослідження без вра-

хування сил тертя, прийнявши ланки механізмів за абсолютно тверді тіла.

Але перед тим, як почати розв'язання задач динаміки, необхідно ознайомитися з силами, що діють на ланки механізмів і машин.

4.2. Сили, що діють у машинах

Як відомо з курсу теоретичної механіки, під силою слід розуміти взаємодію тіл при передачі або перетворенні руху. Л. Ейлер вважав: усе, що спроможне змінити абсолютний стан тіла, називається силою. У динаміці механізмів і машин під ***силою слід розуміти як причину змін механічного стану тіла, так і опори, які при цьому виникають.***

Зміну механічного стану тіла можна виразити у ***зміні його руху***, тобто в прискоренні; у зміні його ***розмірів***, або деформації; у зміні його ***форми,*** наприклад кування. Кожну дію, яка викликає ці зміни, а також опори, що виникають при цьому, називатимемо ***силою.***

Сила не є якоюсь особливою категорією, яка існує незалежно від матерії або поза нею. Сила й матерія неподільні, тому будь-яка сила, безумовно, має матеріальне джерело.

Сили, які діють у машинах, поділяються на дві основні групи.

1. ***Рушійні сили*** $F_р$, які діють у бік руху тіла, тобто намагаються прискорити його рух.

2. ***Сили опору*** $F_о$, які діють проти руху тіла, тобто намагаються сповільнити його рух.

У свою чергу сили опору поділяються на сили ***корисного*** (або виробничого) ***опору*** $F_{к.о}$ та сили шкідливого (або невиробничого) ***опору*** $F_{ш.о}$.

Рушійні сили — це такі сили, які приводять механізм або машину до руху. Рушійними силами можуть бути тиск пари або газу, тиск води, повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сила тяжіння тощо.

Напрямки рушійної сили і швидкості точки, в якій прикладена ця сила, або збігаються, або утворюють гострий кут. Тому проекція вектора сили на напрямок руху тіла завжди додатна, що і визначає ***додатну роботу рушійних сил.*** До ***сил корисного опору*** відносять технологічні опори руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто

для здійснення якого і призначено машину або механізм. Прикладом може служити опір різанню металів або вага вантажу, який ми підіймаємо. Тут доречно відзначити, що при опусканні вантажу його вага вже буде рушійною силою. Звідси випливає, що в деяких машинах одну й ту саму силу не можна завжди відносити до якої-небудь певної категорії.

Сила корисного опору направлена в протилежний руху бік або утворює з напрямком швидкості тупий кут. Тому ця робота завжди від'ємна.

До ***сил шкідливого опору*** належать сили тертя в кінематичних парах, а також опір середовища. Щоправда, є випадки, коли силу тертя не можна віднести до сил шкідливого опору. В гальмах, наприклад, або в місцях стику приводних коліс локомотива з рейками, автомобіля з поверхнею дороги тертя корисне.

Розрізняють також ***сили тяжіння*** ланок G, ***сили інерції*** $F_{ін}$ і ***сили реакції*** R в кінематичних парах. Проте ці сили не утворюють будь-якого нового класу. Залежно від напрямку їх дії ці сили треба віднести до рушійних сил або сил опору.

Сили тяжіння є результатом взаємодії ланок із Землею. У результаті того, що ця сила постійно спрямована в один бік, а в машинах траєкторії точок, як правило, замкнені, робота сил тяжіння за період руху механізму дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Всередині періоду руху ця робота відрізняється від нуля.

Сили інерції з'являються при зміні швидкості за величиною або за напрямком. При періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Це пояснюється тим, що швидкості й прискорення точок рухомих ланок по закінченні кожного періоду набирають початкових значень. Всередині періоду руху ця робота відрізняється від нуля, а самі сили інерції можуть набувати дуже великих значень.

Існують ще ***сили реакції***, які виникають при взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто в кінематичних парах. Такі сили є внутрішніми силами для всього механізму в цілому, хоча для кожної окремо взятої ланки вони будуть зовнішніми. Робота сил реакцій ніколи не дорівнює нулю, оскільки не дорівнюють нулю сили тертя в кінематичних парах.

Усе досі сказане про сили стосується і моментів пар сил M, тому що вони характеризують дію сил при обертанні ($M = Fr$, де F — сила, r — плече цієї сили відносно осі обертання).

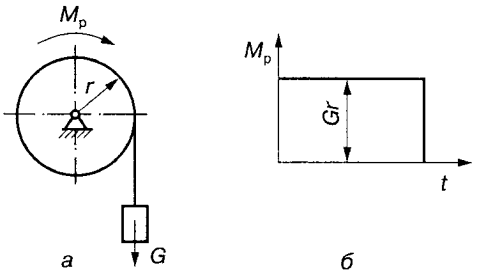


Рис. 4.1.

4.3. Механічні характеристики машин

Рушійні сили і сили корисного опору залежно від їх механічних, фізичних і технологічних характеристик можуть бути або сталими, або функціями різних кінематичних параметрів — переміщень, швидкостей, прискорень і часу. Наприклад, у вантажопідіймальних машинах, прокатних станах сили виробничих опорів залишаються сталими. У машинному агрегаті з двигуном внутрішнього згорання і поршневим насосом рушійні сили й сили виробничих опорів залежать від положення ведучих ланок. Для машинного агрегату, який складається з поршневого двигуна і генератора електричного струму, рушійна сила є функцією положення ведучої ланки, а сила корисного опору — функцією кутової швидкості вала генератора. У каменедробарках, тістомісильних машинах сили виробничого опору є функцією часу і т. д.

Рушійні сили й сили опору, як правило, визначають експериментальним шляхом, застосовуючи відповідні прилади. Здобуті дані відображають у вигляді аналітичних залежностей або діаграм сил, робіт чи потужностей. Ці функціональні залежності мають назву ***механічних характеристик***. У курсі теорії механізмів і машин питання теорії робочих процесів не розгляда-

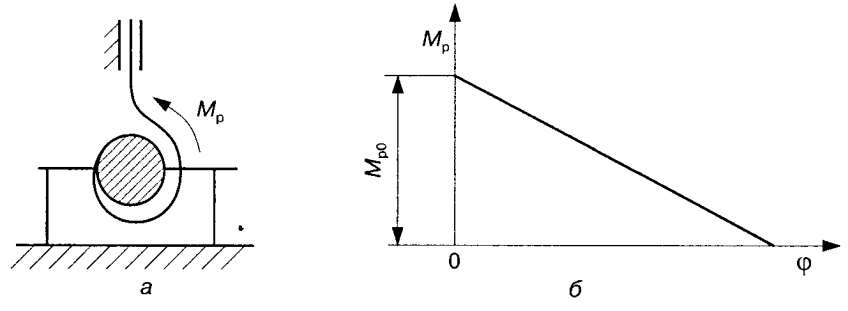


Рис. 4.2.

ються, а тому при розв'язанні задач механічні характеристики двигунів і робочих машин вважаються відомими.

Розглянемо механічні характеристики деяких машин — двигунів і робочих машин. Найпростішим двигуном є гирьовий (рис. 4.1, *а*), механічна характеристика якого показана на рис. 4.1, *б* і виражається формулою $M_р = Gr$, де $M_р$ — момент рушійних сил; G — сила тяжіння гирі; r — радіус ротора (барабана).

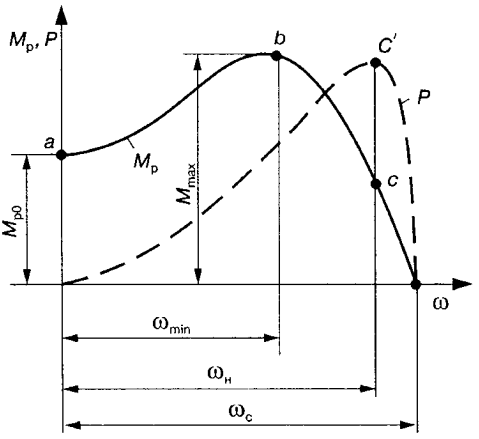


Рис. 4.3.

Пружинний двигун (рис. 4.2, *а*) має механічну характеристику (рис. 4.2, *б*), аналітична залежність якої $M_р = M_{р0} - q\varphi$, де $M_{р0}$ — початкове значення моменту рушійних сил; q — жорсткість пружини; φ — кут закручування пружини.

На рис. 4.3 показано механічну характеристику асинхронного електричного двигуна трифазного струму. Така характеристика складається з двох частин: висхідної, нестійкої, розташованої ліворуч $M_{max}(ab)$; низхідної, стійкої, розташованої праворуч $M_{max}(bc)$. При деякому значенні кутової швидкості ω, що відповідає номінальному моменту $M_н$ двигуна і номінальної швидкості $ω_н$, двигун розвиває максимальну потужність P. На рис. 4.3 діаграму $P = P(ω)$ показано штриховою лінією. Така діаграма будується на основі діаграми $M_р = M_р(ω)$ за допомогою відомого співвідношення

$$P = M_р ω. \qquad (4.1)$$

Залежності $P = P(ω)$ також можна вважати механічними характеристиками машин.

Кутова швидкість $ω_c$, при якій $M_р = 0$, називають синхронною; з цією швидкістю ротор двигуна обертається під час холостого ходу. Точка *b* діаграми $M_р = M_р(ω)$ визначає положення максимального перекидного моменту M_{max} та мінімальної допустимої кутової швидкості $ω_{min}$ робочої частини характеристики, а точ-

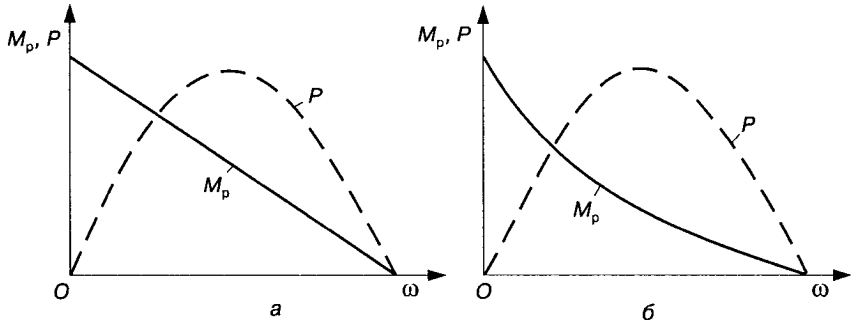


Рис. 4.4.

ка *а* визначає початковий пусковий момент $M_{р0}$ при $\omega = 0$. Умова роботи електродвигунів при низьких швидкостях обертання значно погіршується.

На рис. 4.4 показано механічні характеристики електродвигунів постійного струму з паралельним (рис. 4.4, *а*) і послідовним (рис. 4.4, *б*) збудженням. У першому випадку $M_р = M_р(\omega)$ змінюється лінійно, у другому — за складнішим законом. Криві $P = P(\omega)$ мають параболічний характер.

Механічну характеристику двигуна внутрішнього згорання на рис. 4.5 показано також двома кривими, що виражають залежність рушійного моменту $M_р = M_р(\omega)$ і потужності $P = P(\omega)$ від кутової швидкості ω.

На рис. 4.6 наведено механічні характеристики робочих машин: відцентрового насоса і компресора (рис. 4.6, *а*), які мають вигляд квадратної залежності $M_{к.о}$ на роторі від кутової швидкості обертання і кубічної залежності потужності P, та стругального верстата (рис. 4.6, *б*) у вигляді прямої, що виражає залежність сили $F_{к.о}$ різання, прикладеної до різця, від його переміщення s.

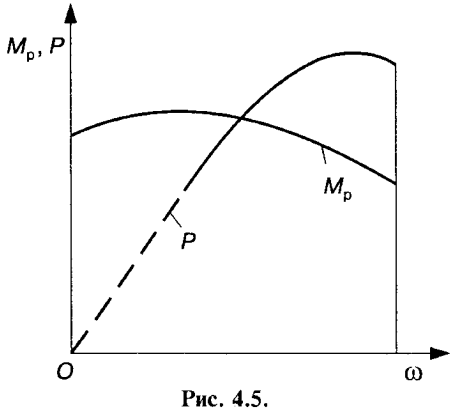


Рис. 4.5.

Детальніше питання про механічні характерис-

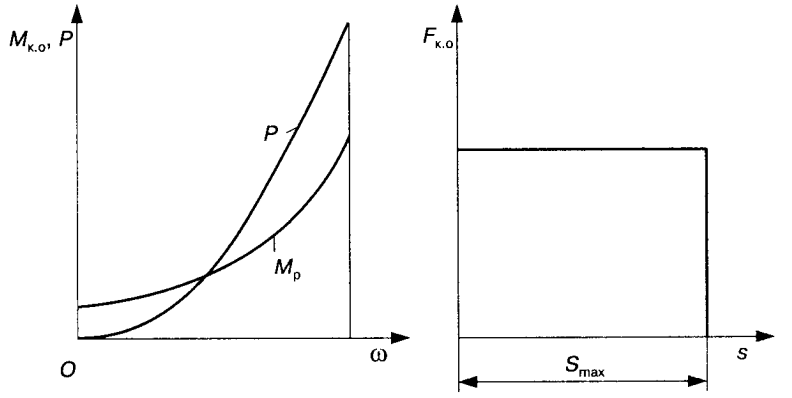


Рис. 4.6.

тики машин розглядаються в спеціальних курсах при розв'язанні задач, пов'язаних з конструюванням робочих машин і підбором двигунів до них.

4.4. Визначення сил інерції

Як відомо з теоретичної механіки, у загальному випадку всі сили інерції будь-якої ланки AB (рис. 4.7), яка здійснює плоский складний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, можуть бути зведені до головного вектора сил інерції $\boldsymbol{F}_{ін}$, який прикладаємо в центрі мас S (скорочено — сили інерції) і до головного момента сил інерції, $\boldsymbol{M}_{ін}$ (скорочено — момент сил інерції).

Сила інерції визначається за формулою

$$\boldsymbol{F}_{ін} = -m\boldsymbol{a}_S, \qquad (4.2)$$

де $\boldsymbol{F}_{ін}$ — вектор сили інерції ланки AB; m — маса ланки, кг; $\boldsymbol{a}_S$ — вектор повного прискорення центра мас S, м/с^2.

Сила інерції ланки $\boldsymbol{F}_{ін}$ спрямована протилежно вектору прискорення центра мас $\boldsymbol{a}_S$.

Таким чином, для визначення сили інерції $\boldsymbol{F}_{ін}$ ланки треба знати її масу й вектор повного прискорення $\boldsymbol{a}_S$ центра мас. Як видно з (4.2), сила інерції має одиницю вимірювання кілограм-метр на секунду в квадраті (кг · м/с^2), тобто вимірюється у ***ньютонах*** (Н).

Момент $\boldsymbol{M}_{ін}$ сил інерції спрямований протилежно кутовому прискоренню ε і може бути визначений за формулою

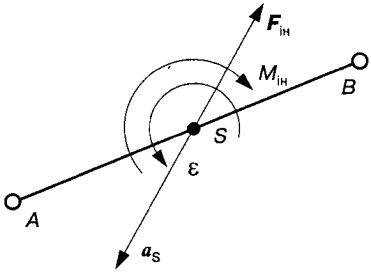


Рис. 4.7.

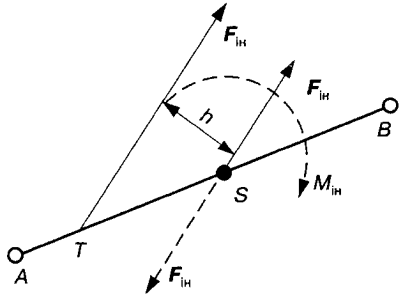


Рис. 4.8.

$$M_{ін} = -J_S \varepsilon, \tag{4.3}$$

де J_S — момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до площини руху ланки; ε — кутове прискорення ланки.

Момент інерції J_S має одиницю вимірювання кг · м^2, кутове прискорення ε — рад/с^2, тому момент $M_{ін}$ сил інерції вимірюють у кг · м^2/с^2 = Н · м.

Силу інерції $F_{ін}$ і момент сил інерції $M_{ін}$ можна замінити однією рівнодіючою силою $F'_{ін}$, що дорівнює за величиною силі інерції $F_{ін}$ (рис. 4.8), лінія дії якої зміщена відносно центра мас S на відстань $h = M_{ін}/F_{ін}$, тобто момент сил інерції ($M_{ін} = F_{ін}h$) замінюємо парою сил.

У деяких випадках усі сили інерції ланки замінюють силами інерції мас, які розміщують у вибраних точках, що мають назву ***точки заміщення***. Це питання буде розглянуто в розділі 14.

4.5. Силовий розрахунок плоских механізмів без урахування сил тертя

Основні задачі силового розрахунку. Визначення сил, які діють на ланки механізмів, має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібростійкість, зносостійкість, довговічність, для визначення втрат енергії на тертя, а також для підрахунку енергетичного балансу машини та виконання інших подібних розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є: ***по-перше***, визначення зовнішніх невідомих сил, що діють на ланки механізмів; ***по-друге***, визначення сил взаємодії ланок у місцях їх

стикання, тобто реакцій у кінематичних парах; ***по-третє***, визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту сил.

При розв'язанні задач силового розрахунку механізмів припускається, що закон руху початкової ланки задано; так само припускається, що маси і моменти інерції ланок відомі. Отже, завжди можна визначити ті сили інерції, які необхідні для розв'язання задач силового розрахунку. В першому наближенні силовий розрахунок проводять без урахування сил тертя в кінематичних парах.

Найпростішим випадком силового розрахунку механізмів є рівновага, тобто коли ланки механізму перебувають у стані спокою або рівномірному прямолінійному русі. У цих випадках не виникають динамічні сили (сили інерції). Тому для розв'язання такої задачі досить звичайних рівнянь статики. У загальному випадку — при наявності прискорень — виникають сили інерції, і рівнянь статики тут мало. Щоб розв'язати задачу про знаходження сил, використовують ***принцип Даламбера***, згідно з яким ***рухома система тіл перебуває в кожний момент часу в рівновазі під дією зовнішніх сил, куди включають і сили інерції.***

Таким чином, користуючись принципом Даламбера, можна задачу динаміки розв'язати методами статики, якщо умовно віднести до зовнішніх сил і сили (моменти сил) інерції, які виникають при русі ланок з прискоренням і діють на елементи кінематичних пар як додаткові сили. Проте треба твердо пам'ятати, що сили інерції, які докладаємо до ланок, умовні. Вони діють на іншу ланку, яка спричиняє прискорений рух даної ланки. Так і розуміють характер сил інерції.

Розв'язання задачі динаміки методами статики називають ***кінетостатичним*** розрахунком.

Статична визначеність структурної групи. Як відомо з курсів теоретичної механіки і опору матеріалів, задача про знаходження сил легко розв'язується для статично визначених систем. ***Статично визначеною системою*** називають таку систему, в якій кількість невідомих сил дорівнює числу рівнянь рівноваги, які можна скласти для їх знаходження.

Тому, перш ніж приступати до розв'язання задачі знаходження невідомих сил, треба з'ясувати, для яких кінематичних ланцюгів дотримується умова статичної визначеності.

Для прикладу розглянемо плоский механізм, до складу якого входить n рухомих ланок, p_5 пар п'ятого класу і p_4 пар четвертого класу. Нехай будуть відомі всі зовнішні сили (вклю-

чаючи сили інерції), які діють на ланки механізму. Треба визначити реакції в кінематичних парах. Для кожної ланки плоского механізму можна скласти три рівняння, а для n ланок — $3n$ рівнянь. Будь-яка сила характеризується трьома параметрами: величиною (модулем), напрямком і точкою прикладання. Розглянемо, які з цих параметрів відомі, а які невідомі для сил реакцій у різних кінематичних парах плоских механізмів.

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені нормально до стичних поверхонь. Тому в обертовій кінематичній парі (рис. 4.9, *а*) реакція $\boldsymbol{R}_{21}$, яка прикладена до ланки *2* зі сторони ланки *1*, буде завжди проходити через центр шарніра *O*. Величина і напрямок дії цієї сили $\boldsymbol{R}_{21}$ невідомі, тому що вони залежать від сил, які прикладені до ланок *1* і *2*.

Сказане повністю стосується і реакції $\boldsymbol{R}_{12}$, яка прикладена до ланки *1* зі сторони ланки *2*, тому що сили взаємодії зв'язані між собою третім законом Ньютона: $\boldsymbol{R}_{21} = -\boldsymbol{R}_{12}$.

У поступальній парі (рис. 4.9, *б*) результуюча реакція $\boldsymbol{R}_{21}$ буде напрямлена перпендикулярно до осі руху x—x ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її величина і точка прикладання *C*.

У вищій парі IV класу (рис. 4.9, *в*) реакція $\boldsymbol{R}_{21}$ напрямлена вздовж спільної нормалі n—n (без урахування тертя) і прикладена в точці дотику *C*. Тому в такій кінематичній парі відомі точка прикладання і напрямок сили реакції. Невідомою є її величина.

Тоді для плоского кінематичного ланцюга кількість невідомих дорівнюватиме $2p_5 + p_4$.

Кінематичний ланцюг буде статично визначений, коли число невідомих параметрів дорівнює числу рівнянь, тобто в нашому випадку повинна дотримуватись рівність

$$2p_5 + p_4 = 3n$$

або

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \qquad (4.4)$$

Вираз, який знаходиться в лівій частині рівності (4.4), вказує на число ступенів вільності плоского кінематичного ланцюга (2.7).

Значить, ***статично визначеними є кінематичні ланцюги з нульовим ступенем вільності.*** Такими кінематичними ланцюгами є структурні групи (2.15). Звідси випливає, що ***структурні групи є статично визначеними,*** а тому при силовому розрахунку доцільно розглядати рівновагу окремих структурних груп.

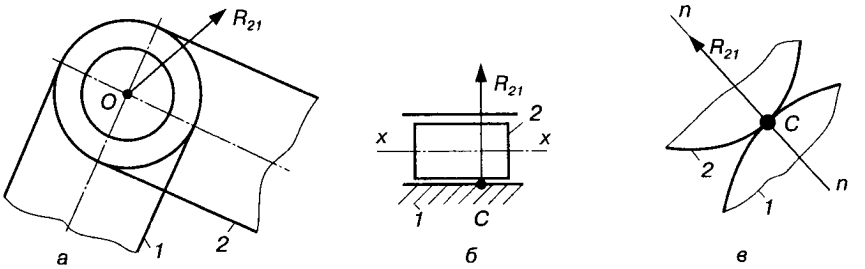


Рис. 4.9.

Умова (4.4) справедлива для плоскої системи зовнішніх сил, які діють на ланки механізму. При просторовому розташуванні сил число рівнянь статики і число невідомих складових реакцій мають задовольняти умову (2.16). Треба зауважити, що для статичної визначеності плоский механізм не повинен мати зайвих зв'язків. Наявність таких зв'язків збільшує число невідомих складових реакцій, і для їх визначення додатково до рівнянь статики треба скласти рівняння деформацій.

Методика і порядок силового розрахунку механізмів. На підставі сказаного раніше можна викласти методику силового розрахунку механізмів. При силовому розрахунку механізм розбивають на структурні групи, тобто на статично визначені ланцюги, до яких прикладають усі зовнішні сили, включаючи сили (моменти сил) інерції, дію основного механізму на ланки групи замінюють реакціями. Під дією всіх цих сил група перебуває в рівновазі, а тому можна скласти відповідну кількість рівнянь рівноваги, розв'язуючи які відносно невідомих складових реакцій, знаходимо їх. При цьому на відміну від кінематичного дослідження механізмів силовий розрахунок починають з останньої від початкової ланки приєднаної структурної групи і закінчують силовим розрахунком початкової (початкових) ланки.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів зводиться до розрахунку окремих структурних груп. Це ще раз підтверджує значимість структурної класифікації Л. В. Ассура.

Перейдемо до силового розрахунку структурних груп II класу. При цьому вважатимемо, що всі зовнішні сили, які діють на ланки груп, відомі, і для кожної ланки зведені до однієї рівнодіючої сили $\boldsymbol{F}_i$ і одного рівнодіючого моменту пари сил $\boldsymbol{M}_i$, де $i = 1, 2, 3, \ldots$ — номери ланок. Таке спрощення не впливає на методику силового розрахунку структурної гру-

пи, проте дозволяє звернути увагу на особливості силового розрахунку груп окремих видів, який не залежить від кількості сил, їхньої величини, від механізму, до складу якого входить ця група.

Силовий розрахунок групи II класу I виду. Така група зображена на рис. 4.10, *а*. Нехай на ланки *2* і *3* діють відповідно сили F_2 і F_3 і моменти сил M_2 і M_3, які включають і сили інерції. Група приєднується до основного механізму елементами кінематичних пар *A* і *C* відповідно до ланок *1* і *4* (на рис. 4.10, *а* вони показані штриховими лініями). Виділяючи з механізму групу або окрему ланку, треба дію цих його частин замінити реакціями, прикладеними до відповідних елементів кінематичних пар *A* і *C*. Позначимо реакцію на ланку *2* з боку ланки *1* через R_{21}, на ланку *3* з боку ланки *4* — через R_{34}. Величина й напрямок цих реакцій невідомі.

Запишемо рівняння рівноваги ланок групи під дією прикладених сил:

$$R_{21} + \underline{\underline{F_2}} + \underline{\underline{F_3}} + R_{34} = 0. \qquad (4.5)$$

Тут відомими є сили F_2 і F_3 (вони підкреслені двома рисками), невідомими — реакції R_{21} і R_{34}, тобто чотири невідомі (невідомими вважаються і величина, і напрямок сили). Моменти M_2 і M_3 в це рівняння не входять, оскільки моменти сил є пара сил, які направлені в протилежні боки. Реакція в кінематичній парі *B* до рівняння (4.5) також не входить, тому що вона для групи в цілому є внутрішня сила: з якою силою ланка *2* діє на ланку *3*, з такою ж силою ланка *3* діє на ланку *2* ($R_{32} = -R_{23}$).

Задача про знаходження сил може розв'язуватися аналітично й графічно. У першому випадку рівняння (4.5) записується у вигляді проекцій на координатні осі. При потребі складають додаткові рівняння з таким розрахунком, щоб кількість усіх рівнянь дорівнювала числу невідомих (у нашому випадку — чотири).

На практиці досить широко використовується графічний спосіб визначення сил шляхом побудови ***планів сил***. Це пояснюється тим, що графічний метод не тільки наочний, але й дає достатню для практики точність досліджень, оскільки зовнішні сили, які діють на ланки, як правило, відомі досить наближено.

Для побудови плану сил у рівнянні рівноваги (4.5) може бути не більше двох невідомих. У нашому випадку необхідно змен-

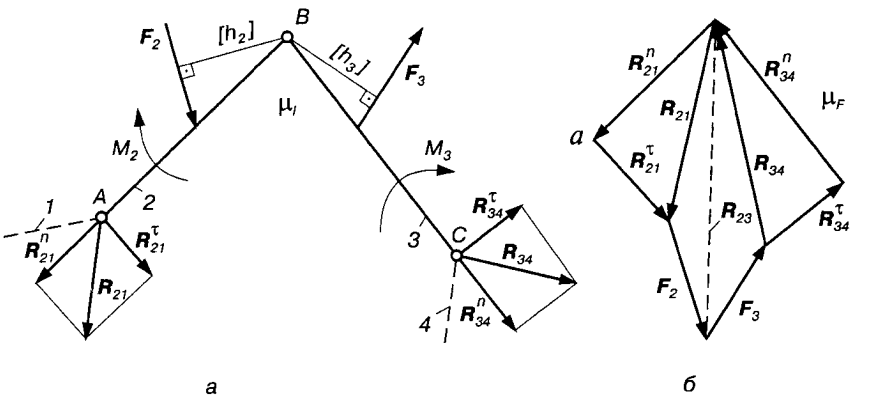


Рис. 4.10.

шити кількість невідомих з 4 до 2. Розкладемо реакції $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ на дві складові, які направлені вздовж відповідних ланок AB і BC та перпендикулярно до них, тобто

$$\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{R}_{21}^{n} + \boldsymbol{R}_{21}^{\tau};\ \boldsymbol{R}_{34} = \boldsymbol{R}_{34}^{n} + \boldsymbol{R}_{34}^{\tau}. \qquad (4.6)$$

Визначаємо величини дотичних складових реакцій. Для цього складаємо для кожної ланки рівняння рівноваги у вигляді моментів сил відносно точки B.

Для ланки *2* маємо

$$\sum M_{B(2)} = R_{21}^{\tau} l_{AB} + F_2 h_2 - M_2 = 0,$$

звідки

$$R_{21}^{\tau} = \frac{M_2 - F_2 h_2}{l_{AB}}. \qquad (4.7)$$

Для ланки *3*

$$\sum M_{B(3)} = R_{34}^{\tau} l_{BC} + F_3 h_3 - M_3 = 0,$$

звідки

$$R_{34}^{\tau} = \frac{M_3 - F_3 h_3}{l_{BC}}. \qquad (4.8)$$

Дійсні величини h_2 і h_3 визначаються за формулами

$$h_2 = [h_2]\mu_l,\ h_3 = [h_3]\mu_l,$$

де $[h_2]$, $[h_3]$ — відрізки на рисунку, які зображують відповідні плечі h_2 і h_3, мм; μ_l — масштаб довжини, м/мм.

У залежностях (4.7), (4.8) і далі цифри 2, 3 і т. п., які вказані в дужках, показують номери ланок, рівновага яких розглядається.

Якщо при обчисленні одержимо дотичні складові від'ємними, то на плані сил їх треба направити в протилежний бік.

Підставивши залежності (4.6) у рівняння рівноваги (4.5), дістанемо

$$\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}^{n}} = 0 . \qquad (4.9)$$

У цьому рівнянні невідомі тільки нормальні складові реакцій (вони підкреслені однією рискою), величини яких можна визначити, побудувавши план сил за рівнянням (4.9). Для цього проводимо пряму, паралельну лінії дії $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ (рис. 4.10, *б*), на якій вибираємо довільну точку *a*, з якої у вибраному масштабі μ_F відкладаємо вектор дотичної складової $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$, до кінця якого прикладаємо вектор $\boldsymbol{F}_2$, і так послідовно відкладаємо $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ (див. рівняння). Через кінець вектора $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ проводимо вектор $\boldsymbol{R}_{34}^{n}$ до перетину з вектором $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$. Точка перетину векторів $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ визначає величини відрізків, які зображують у вибраному масштабі вектори $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$. Напрямки цих векторів мають бути такими, щоб при обході контуру плану всі сили були направлені в напрямку обходу. Додаючи на плані сил вектори $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$, дістанемо повну реакцію $\boldsymbol{R}_{21}$; аналогічно знаходимо повну реакцію $\boldsymbol{R}_{34}$ (4.6).

Масштаб μ_F вибирають, як правило, за найбільшою силою F(Н), що входить у рівняння (4.9), тобто $\mu_F = \dfrac{F}{[F]}$, де $[F]$ — відрізок на плані (мм), що відображає цю силу.

Щоб визначити реакцію $\boldsymbol{R}_{23}$ на ланку *2* з боку ланки *3*, напишемо рівняння рівноваги сил, що діють на ланку *2*:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \boldsymbol{R}_{23} = 0 . \qquad (4.10)$$

У цьому рівнянні маємо два невідомих: величину і напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{23}$. Їх можна визначити, побудувавши план сил для ланки *2* згідно з рівнянням (4.10). Для цього на плані сил (рис. 4.10, *б*) досить сполучити початок вектора $\boldsymbol{R}_{21}$ з кінцем вектора $\boldsymbol{F}_2$, і одержати $\boldsymbol{R}_{23}$ (показана штриховою лінією). Очевидно, що реакція $\boldsymbol{R}_{32} = -\boldsymbol{R}_{23}$ і її можна визначити так само, як і $\boldsymbol{R}_{23}$, розглянувши рівновагу ланки *3*.

Слід відзначити, що для того щоб реакцію $\boldsymbol{R}_{23}$ у внутрішній кінематичній парі B одержати безпосередньо на основному плані сил (рис. 4.10, *б*), треба на плані відкладати спочатку сили, які діють на одну ланку, а потім на другу. Інакше, для знаходження реакції $\boldsymbol{R}_{23}$ треба побудувати додатковий план сил.

Величина сил реакцій після побудови планів сил визначається у звичайний спосіб — множенням величин відповідних відрізків на масштаб сил μ_F. У нашому випадку маємо

$$R_{21} = [R_{21}]\mu_F;\ R_{34} = [R_{34}]\mu_F;\ R_{23} = [R_{23}]\mu_F,$$

де $[R_{21}]$, $[R_{34}]$, $[R_{23}]$ — відрізки на плані сил (мм), які зображують відповідні сили $\boldsymbol{R}_{21}$, $\boldsymbol{R}_{34}$, $\boldsymbol{R}_{23}$ (Н).

Силовий розрахунок групи II класу II виду (рис. 4.11, *а*). На ланки групи діють сили $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$ та моменти сил M_2 і M_3. Група приєднується до основного механізму елементами кінематичних пар A (обертова пара) і C (поступальна пара). Реакцію $\boldsymbol{R}_{21}$ направляємо довільно, $\boldsymbol{R}_{34}$ — перпендикулярно до осі x—x. Точку прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{34}$ вибираємо довільно.

Запишемо рівняння рівноваги ланок групи під дією прикладених сил:

$$\boldsymbol{R}_{21} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}} = 0. \qquad (4.11)$$

У цьому рівнянні маємо три невідомі параметри: величини векторів $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ та напрямок $\boldsymbol{R}_{21}$. Для того щоб скласти додаткове рівняння, розкладаємо реакцію $\boldsymbol{R}_{21}$ на дві складові: одну з них направляємо вздовж ланки AB, другу — перпендикулярно до ланки AB, тобто

$$\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{R}_{21}^{n} + \boldsymbol{R}_{21}^{\tau}. \qquad (4.12)$$

Величину дотичної складової реакції знаходимо з рівняння рівноваги ланки *2* відносно точки B:

$$\sum M_{B(2)} = R_{21}^{\tau} l_{AB} + M_2 - Fh_2 = 0,$$

звідки

$$R_{21}^{\tau} = \frac{M_2 - F_2 h_2}{l_{AB}},$$

де $h_2 = [h_2]\mu_l$ — плече сили $\boldsymbol{F}_2$ відносно точки B; $[h_2]$ — відрізок на рисунку, який зображає це плече (мм).

З врахуванням залежності (4.12) рівняння (4.11) набуває вигляду

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}}} + \underline{\boldsymbol{R}_{21}^{n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}} = 0. \qquad (4.13)$$

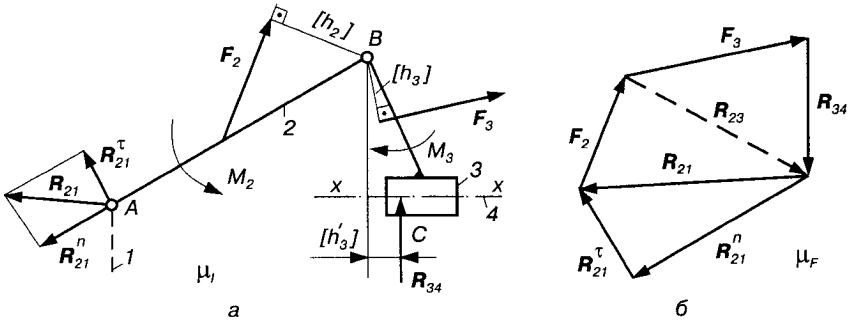


Рис. 4.11.

На основі рівняння (4.13) будуємо план сил групи II виду (рис. 4.11, *б*).

Реакцію $\boldsymbol{R}_{23}$ у внутрішній кінематичній парі знаходимо так само, як і в групі I виду, розглянувши умову рівноваги ланки *2* (4.10).

Для визначення точки прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{34}$ складаємо рівняння моментів усіх сил, які діють на ланку *3*, відносно точки *B*:

$$\sum M_{B(3)} = F_3 h_3 - M_3 - R_{34} h_3' = 0, \qquad (4.14)$$

звідки

$$h_3' = \frac{F_3 h_3 - M_3}{R_{34}}.$$

При складанні рівняння (4.14) треба врахувати, що реакція $\boldsymbol{R}_{34}$ направлена вниз, як це показано на плані сил (на рис. 4.11, *а*, не знаючи дійсного напрямку $\boldsymbol{R}_{34}$, ми довільно вказали її напрямок вгору).

Силовий розрахунок групи II класу III виду (рис. 4.12, *а*). На ланки групи діють сили $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$ та моменти сил $\boldsymbol{M}_2$ і $\boldsymbol{M}_3$. Група приєднується до основного механізму елементами обертових кінематичних пар *A* і *C*, реакції яких $\boldsymbol{R}_{21}$, $\boldsymbol{R}_{34}$ направлено довільно.

Рівняння рівноваги для ланок групи має вигляд

$$\boldsymbol{R}_{21} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \boldsymbol{R}_{34} = 0. \qquad (4.15)$$

У цьому рівнянні маємо чотири невідомі. Для складання додаткових рівнянь не можна використовувати рівняння рівноваги ланок *2* і *3*, тому що точка прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{23}$ невідома. Для визначення величини й напрямку вектора $\boldsymbol{R}_{21}$ розкладемо його на складові $\boldsymbol{R}_{21}^n$ і $\boldsymbol{R}_{21}^\tau$ ($\boldsymbol{R}_{21}^n$ направимо вздовж лінії *AC*, а $\boldsymbol{R}_{21}^\tau$ — пер-

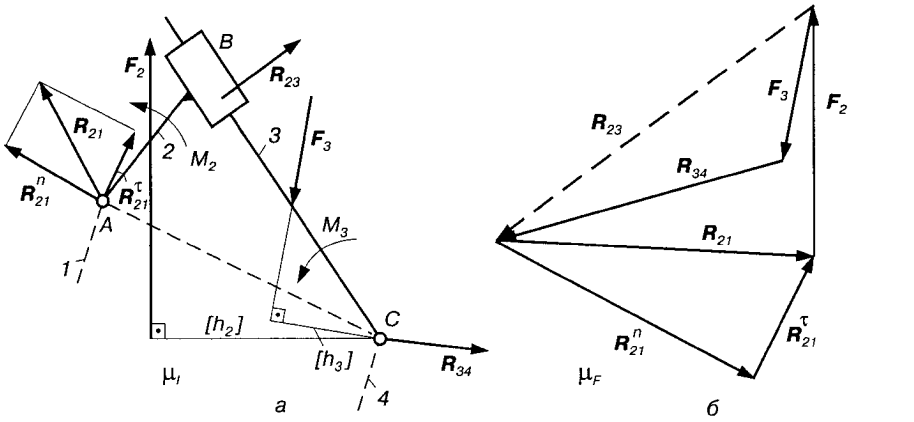


Рис. 4.12.

пендикулярно до лінії AC) і запишемо рівняння моментів усіх зовнішніх сил відносно точки C для всієї групи:

$$\sum M_{C(2,3)} = -R_{21}^{\tau} l_{AC} - F_2 h_2 + M_2 + F_3 h_3 + M_3 = 0,$$

звідки

$$R_{21}^{\tau} = \frac{M_2 - F_2 h_2 + F_3 h_3 + M_3}{l_{AC}},$$

де $h_2 = [h_2]\mu_l$, $h_3 = [h_3]\mu_l$.

Враховуючи, що напрямки реакцій $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{23}$ відомі, можна побудувати план сил для ланки *2*, записавши рівняння рівноваги для цієї ланки (рис. 4.12, *б*):

$$\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\boldsymbol{R}_{23}} = 0.$$

Знайшовши величину і напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{R}_{21}^{n} + \boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$, згідно з рівнянням (4.15) будуємо план сил для всієї групи, з якого знаходимо реакцію в парі C—$\boldsymbol{R}_{34}$. На рис. 4.12, *б* плани сил для ланки *2* і групи 2—3 суміщені.

Для знаходження точки прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{23}$ розглядаємо рівновагу ланки *3*, записавши рівняння моментів сил відносно точки C.

Силовий розрахунок групи II класу IV виду (рис. 4.13, *а*). На ланки групи діють сили $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$ та моменти сил $\boldsymbol{M}_2$ і $\boldsymbol{M}_3$. Група приєднується до основного механізму елементами поступальних пар A і C, реакції в яких направлені відповідно перпендикулярно до лінії x—x і y—y (точки прикладання $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ не відомі).

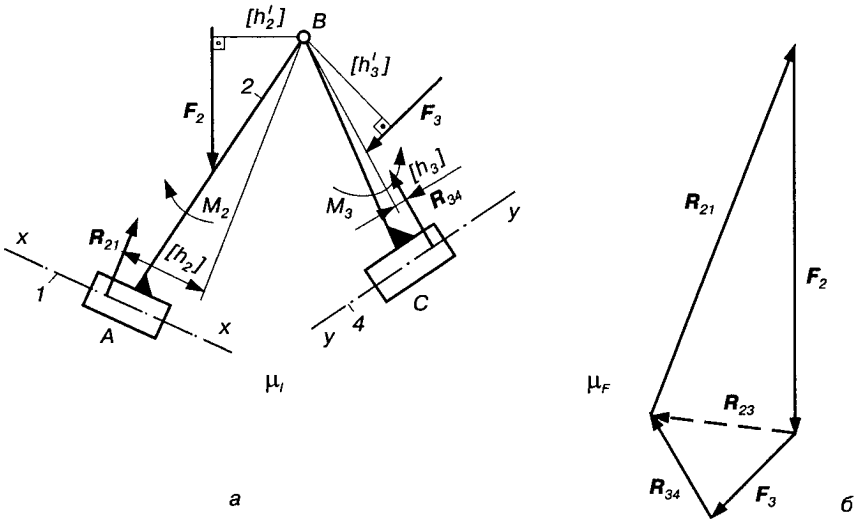


Рис. 4.13.

Рівняння рівноваги для ланок групи має вигляд

$$\underline{\boldsymbol{R}_{21}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}} = 0\,. \qquad (4.16)$$

У цьому рівнянні маємо дві невідомі величини, які можна визначити побудовою плану сил (рис. 4.13, *б*).

Реакцію $\boldsymbol{R}_{23}$ знаходимо з умови рівноваги ланки *2*:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\boldsymbol{R}_{23}} = 0\,.$$

На плані сил (рис. 4.13, *б*) реакція $\boldsymbol{R}_{23}$ показана штриховою лінією. Точки прикладання реакцій $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ знаходимо з умов рівноваги ланок *2* і *3* відносно точки *B*, склавши рівняння моментів сил:

$$\sum M_{B(2)} = -R_{21}h_2 + F_2h'_2 - M_2 = 0\,,$$

$$\sum M_{B(3)} = R_{34}h_3 - F_3h'_3 + M_3 = 0\,,$$

звідки $$h_2 = \frac{F_2h'_2 - M_2}{R_{21}};\; h_3 = \frac{F_3h'_3 - M_3}{R_{34}}\,,$$

де $h_2 = [h_2]\mu_l$; $h_3 = [h_3]\mu_l$, $h'_2 = [h'_2]\mu_l$, $h'_3 = [h'_3]\mu_l$.

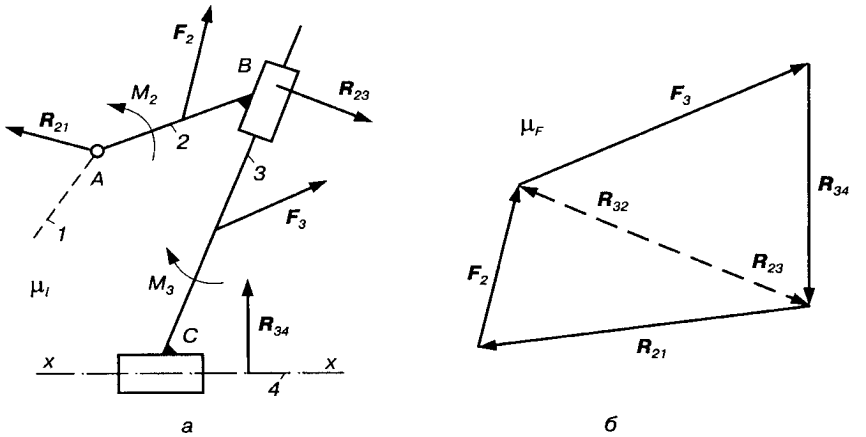


Рис. 4.14.

Силовий розрахунок групи II класу V виду (рис. 4.14). На групу діють сили F_2 і F_3 та моменти сил M_2 і M_3. Група приєднується до основного механізму елементом обертової пари A і поступальної пари C.

Рівняння рівноваги для ланок групи має вигляд

$$\boldsymbol{R}_{21} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}} = 0 .$$

У цьому рівнянні маємо три невідомі: величину й напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{21}$ та величину реакції $\boldsymbol{R}_{34}$. Скласти додаткове рівняння моментів сил для знаходження реакції $\boldsymbol{R}_{34}$ не можна, тому що точка її прикладання не відома. Для визначення реакцій у кінематичних парах розглянемо рівновагу кожної ланки окремо, починаючи з ланки *3*, яка входить у дві поступальні пари B і C з ланками *2* і *4*. Умова рівноваги ланки *3* має вигляд

$$\underline{\boldsymbol{R}_{32}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_3}} + \underline{\boldsymbol{R}_{34}} = 0 ,$$

звідки, побудувавши план сил (рис. 4.14, *б*), знайдемо реакції $\boldsymbol{R}_{32}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$. Потім з графічного розв'язку рівняння рівноваги ланки *2*

$$\boldsymbol{R}_{21} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_2}} + \underline{\boldsymbol{R}_{23}} = 0$$

визначаємо вектор $\boldsymbol{R}_{21}$. На рис. 4.14, *б* плани сил ланок *2* і *3* суміщені ($\boldsymbol{R}_{23} = -\boldsymbol{R}_{32}$).

Точки прикладання реакцій $\boldsymbol{R}_{32}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ визначаємо з рівнянь моментів відносно центра обертової пари A за умови рівноваги ланок групи:

$$\sum M_{A(2,3)} = M_2 + F_2h_2 + F_3h_3 - M_3 - R_{34}h'_3 = 0,$$

$$\sum M_{A(2)} = M_2 + F_2h_2 - R_{23}h'_2 = 0,$$

звідки

$$h'_3 = \frac{M_2 + F_2h_2 + F_3h_3 - M_3}{R_{34}}; \; h'_2 = \frac{M_2 + F_2h_2}{R_{23}}.$$

У цих рівняннях напрямки реакцій $\boldsymbol{R}_{23}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ треба брати із плану сил (рис. 4.14, *б*), $h_2 = [h_2]\mu_l$, $h_3 = [h_3]\mu_l$ і т. п., де $[h_2]$, $[h_3]$ і т. п. — відрізки на рисунку, які визначають плечі відповідних сил відносно точки A (на рис. 4.14, *а* не показані).

Якщо значення відрізків h'_2 і h'_3 дістанемо від'ємними, то точки прикладання реакцій зміщують по другий бік від точки A.

Силовий розрахунок механізму I класу. Після силового розрахунку всіх груп Ассура, які входять до складу механізму, переходимо до силового розрахунку початкової ланки. Ця ланка входить зі стояком до обертової або поступальної пари V класу. Розглянемо перший випадок. Нехай на початкову ланку (рис. 4.15, *а*) діють задані сили $\boldsymbol{F}_1$ і момент $\boldsymbol{M}_1$ (включаючи і сили інерції). Крім цього, на кривошип *1* у точці A діє реакція $\boldsymbol{R}_{12}$ з боку ланки *2* групи Ассура, приєднаної до нього. Ця реакція дорівнює за величиною реакції $\boldsymbol{R}_{21}$, але направлена в протилежний бік. Реакція $\boldsymbol{R}_{21}$ вже визначена при силовому розрахунку приєднаної структурної групи, тобто $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$. Крім цього, у кінематичній парі O на кривошип діє сила реакції $\boldsymbol{R}_{10}$ з боку стояка. Цю реакцію треба визначити. Проте, як випливає з формули (4.4), кривошип *1* під дією прикладених до нього сил, у тому числі й сил інерції, не перебуває в рівновазі, тому що при одній рухомій ланці й одній парі V класу число рівнянь рівноваги, яке можна скласти, буде на одиницю більше числа невідомих, що треба визначити, тобто

$$3n - 5p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Для того щоб була рівновага, необхідно додатково ввести силу або пару сил, які зрівноважують усі сили, прикладені до початкової ланки. Цю силу називають ***зрівноважувальною силою***, а момент пари сил — ***зрівноважувальним моментом***. Умовимось зрівноважувальну силу позначати $\boldsymbol{F}_{зр}$, а зрівноважувальний момент $\boldsymbol{M}_{зр}$. Точка прикладання і напрямок зрівноважувальної сили (моменту) мають бути задані або визначені з конструкції приводу початкової ланки. Наприклад, якщо вал кривошипа *1* зв'яза-

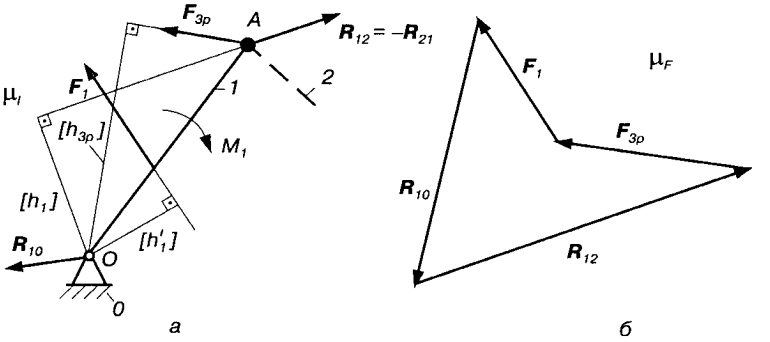


Рис. 4.15.

ний з двигуном за допомогою муфти, то треба прикласти до кривошипа *1* зрівноважувальний момент $M_{зр}$. Якщо цей вал з'єднаний з двигуном за допомогою зубчастої передачі, то до кривошипа треба прикласти зрівноважувальну силу, яка діятиме вздовж нормалі до профілю зубців (вздовж лінії зачеплення, див. розділ 9). Залежно від того, що́ діє — сила $F_{зр}$ (і як вона прикладена) чи момент $M_{зр}$, — реакція R_{10} в кінематичній парі *D* буде різна.

Зрівноважувальна сила або зрівноважувальний момент є такою силою або моментом, який необхідно прикласти до початкової ланки, щоб вона рухалася за заданим законом (як правило, рух початкової ланки приймають рівномірним). У робочих машинах зрівноважувальну силу (момент) можна уявити як якусь ідеальну (умовну) рушійну силу, яку треба прикласти до початкової ланки, щоб дотриматися заданого закону руху; у машинах-двигунах, навпаки, ця сила уявляється як якась ідеальна сила опору. Проте реальні сили, які прикладені до початкової ланки, як правило, відрізняються від зрівноважувальної сили (моменту), а тому дійсний рух початкової ланки відрізнятиметься від заданого, тобто $\omega_1 \neq \text{const}$. Про це йтиметься в розділі 5.

Нехай зрівноважувальна сила $F_{зр}$ буде прикладена в точці *A*, як це показано на рис. 4.15, *а*. Її величину можна знайти з рівноваги кривошипа *1* відносно точки *O*, записавши рівняння моментів усіх сил, що діють на нього:

$$\sum M_{0(1)} = F_{зр}h_{зр} - R_{12}h_1 + F_1h'_1 - M_1 = 0, \qquad (4.17)$$

звідки

$$F_{зр} = \frac{R_{12}h_1 - F_1h'_1 + M_1}{h_{зр}},$$

де $h_{зр} = [h_{зр}]\mu_l$; $h_1 = [h_1]\mu_l$; $h'_1 = [h'_1]\mu_l$.

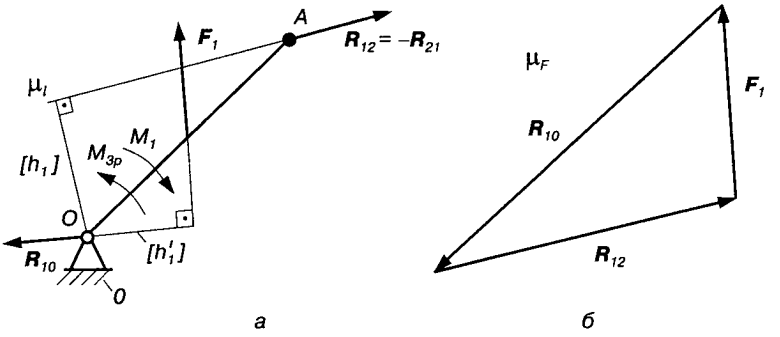


Рис. 4.16.

Якщо величина зрівноважувальної сили, одержана з рівнянь (4.17), буде від'ємною, треба на плані сил змінити її напрямок на протилежний.

Реакцію $\boldsymbol{R}_{10}$ знаходимо з умови рівноваги кривошипа *1*, записаної у вигляді векторного рівняння:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{12}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{зр}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_1}} + \boldsymbol{R}_{10} = 0. \qquad (4.18)$$

У цьому рівнянні не відома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{10}$ (за величиною і напрямком), яку знаходимо за допомогою побудови плану сил (рис. 4.15, *б*).

Якщо до початкової ланки прикласти зрівноважувальний момент (рис. 4.16, *а*), методика силового розрахунку не зміниться. Величину зрівноважувального моменту знаходимо з рівняння рівноваги кривошипа відносно точки *O* (центра обертання), записавши рівняння моментів:

$$\sum M_{0(1)} = M_{зр} - R_{12}h_1 + F_1h'_1 - M_1 = 0, \qquad (4.19)$$

звідки

$$M_{зр} = R_{12}h_1 - F_1h'_1 + M_1.$$

Рівняння (4.18) набуває вигляду

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{12}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_1}} + \boldsymbol{R}_{10} = 0. \qquad (4.20)$$

Побудувавши план сил (рис. 4.16, *б*), знаходимо реакцію $\boldsymbol{R}_{10}$.

4.6. Приклади силового розрахунку плоских механізмів

Приклад 4.1. Виконати силовий розрахунок шестиланкового механізму преса, кінематичну схему якого наведено на рис. 4.17, *а*.

Задано швидкість обертання кривошипа ω_1, маси ланок — m_1, m_2, m_3, m_4, m_5; моменти інерції ланок відносно осей, які проходять через центри мас — J_{S_1}, J_{S_2}, J_{S_3}, J_{S_4}; виробничий опір $F_{к.о}$ (сила корисного опору). Зрівноважувальну силу прикласти до кривошипа *1* в точці *A* перпендикулярно до лінії *OA*.

Розв'язання. Перш ніж розпочати силовий розрахунок, потрібно визначити швидкості й прискорення всіх ланок механізму, а також усіх точок, до яких прикладено сили. Кінематичне дослідження механізму виконуємо методом планів швидкостей і прискорень.

План швидкостей. Швидкість точки A $\boldsymbol{v}_A = \omega_1 l_{OA}$. Вибравши масштаб плану швидкостей μ_v, визначаємо величину відрізка *pa* (рис. 4.17, *б*), який на плані швидкостей показує цей вектор $\boldsymbol{v}_A : pa = v_A/\mu_v$.

Для знаходження швидкості точки *B* записуємо векторні рівняння:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA};\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC},$$

де $\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$, $\boldsymbol{v}_A \perp OA$, $\boldsymbol{v}_C = 0$, $\boldsymbol{v}_{BC} \perp BC$.

На основі цих рівнянь будуємо план швидкостей, з якого знаходимо швидкості $v_B = (pb)\mu_v$, $v_{BA} = (ab)\mu_v$. Швидкість точки *D* знаходимо методом подібності, складаючи пропорцію

$$\frac{pd}{pb} = \frac{CD}{CB}, \tag{4.21}$$

звідки маємо

$$pd = pb\frac{CD}{CB}, \text{ мм}.$$

Тоді швидкість точки *D* буде обчислюватися за формулою $v_D = (pd)\mu_v$.

Для знаходження швидкості точки *E* записуємо векторне рівняння:

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{ED}\ (\boldsymbol{v}_{ED} \perp ED,\ \boldsymbol{v}_E \| xx).$$

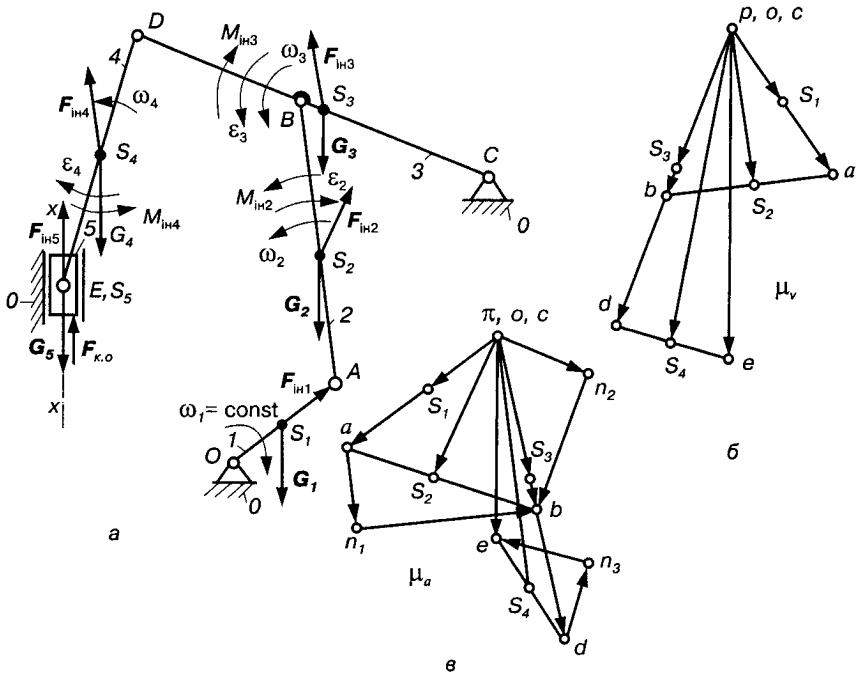


Рис. 4.17.

Побудувавши план швидкостей, знайдемо швидкості

$$\boldsymbol{v}_E = (pe)\mu_v,\ \boldsymbol{v}_{ED} = (ed)\mu_v.$$

Швидкості центрів мас S_1, S_2, S_3, S_4 визначаємо методом подібності, складаючи для кожної ланки та її плану швидкостей пропорції:

$$\frac{ps_1}{pa} = \frac{OS_1}{OA};\ \frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB};\ \frac{ps_3}{pb} = \frac{CS_3}{CB};\ \frac{ds_4}{de} = \frac{DS_4}{DE}. \qquad (4.22)$$

Тоді

$$ps_1 = pa\frac{OS_1}{OA};\ as_2 = ab\frac{AS_2}{AB};\ ps_3 = pb\frac{CS_3}{CB};\ ds_4 = de\frac{DS_4}{DE}.$$

Відкладаючи відповідні відрізки, знаходимо точки S_i на плані швидкостей, а значить, і швидкості центрів мас:

$$v_{s_1} = (ps_1)\mu_v;\ v_{s_2} = (ps_2)\mu_v;\ v_{s_3} = (ps_3)\mu_v;$$

$$v_{s_4} = (ps_4)\mu_v;\ v_{s_5} = v_E.$$

Значення кутових швидкостей ланок визначаємо за формулами

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{AB};\ \omega_3 = v_B/l_{BC};\ \omega_4 = v_{ED}/l_{ED};\ \omega_5 = 0.$$

Для знаходження їхніх напрямків переносимо відносні швидкості $\boldsymbol{v}_{BA}$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_{ED}$ відповідно в точки B і E та розглядаємо відносний рух ланок *2*, *3*, *4* (рис. 4.17, *а*). У нашому випадку кутові швидкості ω_2, ω_3, ω_4 направлені проти руху годинникової стрілки.

План прискорень. При $\omega_1 = \text{const}$ прискорення точки A матиме вигляд $a_A = \omega_1^2 l_{OA}$. Вибравши масштаб плану прискорень μ_a, визначаємо відрізок πa (рис. 4.17, *в*), який на плані прискорень зображує цей вектор $\boldsymbol{a}_A$ — $\pi a = a_A/\mu_a$.

Для знаходження прискорення точки B записуємо векторні рівняння:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^n_{BA} + \boldsymbol{a}^\tau_{BA},\ \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{BC} + \boldsymbol{a}^\tau_{BC}. \qquad (4.23)$$

У цих рівняннях відомі прискорення точки $A\left(\boldsymbol{a}_A \| OA\right)$ і точки $C\ (\boldsymbol{a}_C = 0)$ та напрямки нормальних і дотичних прискорень ($\boldsymbol{a}^n_{BA} \| AB$, $\boldsymbol{a}^\tau_{BA} \perp AB$, $\boldsymbol{a}^n_{BC} \| BC$, $\boldsymbol{a}^\tau_{BC} \perp BC$). Величини нормальних прискорень можна визначити за формулами

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB},\ a^n_{BC} = \omega_3^2 l_{DC}.$$

На плані прискорення $\boldsymbol{a}^n_{BA}$ і $\boldsymbol{a}^n_{BC}$ зображені відповідно відрізками $an_1 = a^n_{BA}/\mu_a$, $\pi n_2 = a^n_{BC}/\mu_a$.

На основі цих даних, використовуючи рівняння (4.23), будуємо план прискорень (рис. 4.17, *в*), з якого одержуємо: $a_B = (\pi b)\mu_a$, $a^\tau_{BA} = (n_1 b)\mu_a$, $a^\tau_{BC} = (\pi n_2)\mu_a$.

Прискорення точки D знайдемо методом подібності, склавши пропорцію

$$\frac{\pi d}{\pi b} = \frac{CD}{CB},$$

звідки

$$\pi d = \pi b \frac{CD}{CB}.$$

Тоді $a_D = (\pi d)\mu_a$.

Для одержання прискорення точки E записуємо векторне рівняння

$$\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{ED} + \boldsymbol{a}^\tau_{ED}. \qquad (4.24)$$

У цьому рівнянні відомі прискорення точки D, напрямки всіх інших векторів ($\boldsymbol{a}_E \parallel xx$, $\boldsymbol{a}^n_{DE} \parallel DE$, $\boldsymbol{a}^\tau_{DE} \perp DE$). Крім цього, знаходимо величину нормального прискорення $a_{DE} = \omega_4^2 l_{DE}$, яке на плані прискорень зображене відрізком $dn_3 = a^n_{DE} / \mu_a$. Будуємо план прискорень згідно з рівнянням (4.24). Тоді $a_E = (\pi e)\mu_a$, $a^\tau_{ED} = (n_3 e)\mu_a$.

Прискорення центрів мас ланок знаходимо також методом подібності, використавши залежності (4.22), в яких замість точки p підставляємо точку π. З плану прискорень маємо

$$a_{S_1} = (\pi s_1)\mu_a, \quad a_{S_2} = (\pi s_2)\mu_a, \quad a_{S_3} = (\pi s_3)\mu_a,$$

$$a_{S_4} = (\pi s_4)\mu_a, \quad a_{S_5} = a_E.$$

Знаходимо значення кутових прискорень ланок:

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB}, \quad \varepsilon_3 = a^\tau_{BC} / l_{BC}, \quad \varepsilon_4 = a^\tau_{ED} / l_{ED}, \quad \varepsilon_5 = 0.$$

Напрямки цих прискорень визначають відомим способом; вони показані на рис. 4.17, *а*.

Визначення сил інерції ланок. Величини сил інерції ланок і їх моменти вивчаємо за формулами (4.2) і (4.3):

$$F_{\text{ін}1} = m_1 a_{S_1}, \quad F_{\text{ін}2} = m_2 a_{S_2}, \quad F_{\text{ін}3} = m_3 a_{S_3},$$

$$F_{\text{ін}4} = m_4 a_{S_4}, \quad F_{\text{ін}5} = m_5 a_{S_5};$$

$$M_{\text{ін}1} = J_{S_1} \varepsilon_1 = 0, \quad M_{\text{ін}2} = J_{S_2} \varepsilon_2,$$

$$M_{\text{ін}3} = J_{S_3} \varepsilon_3, \quad M_{\text{ін}4} = J_{S_4} \varepsilon_4, \quad M_{\text{ін}5} = 0.$$

Вектори сил інерції прикладаємо в центрах мас відповідних ланок і направляємо їх у протилежний бік від прискорень центрів мас. Моменти сил інерції направляємо в протилежний бік від кутових прискорень ланок (рис. 4.17, *а*).

На розрахунковій схемі (рис. 4.17, *а*), крім цього, показані вектори сил тяжіння $\boldsymbol{G}_i$, величини яких $G_i = m_i g$, де g — прискорення вільного падіння.

Визначивши сили інерції ланок механізму, ми в даному разі розв'язали перше завдання силового розрахунку — дістали всі зовнішні сили, які діють на ланки механізму, включаючи сили інерції. Після цього можна розпочати визначення реакцій у кінематичних парах і знаходження зрівноважувальної сили (моменту сили).

Визначення реакцій у кінематичних парах. Для цього розбиваємо механізм на групи Ассура. Механізм преса (рис. 4.17, *а*) складається з механізму I класу (кривошип *1* і стояк 0), двох груп II класу: група 2—3 — I виду, група 4—5 — II виду. Силовий розрахунок починають з останньої приєднаної групи.

Силовий розрахунок групи 4—5 (рис. 4.18). На ланки групи діють сили $\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}$, $\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}$, $\boldsymbol{G}_5$, $\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}$, момент сил інерції $M_{\text{ін}4}$. Дію ланок *3* і *0* замінюємо реакціями $\boldsymbol{R}_{43}$ і $\boldsymbol{R}_{50}$. Рівняння рівноваги ланок групи має вигляд

$$\boldsymbol{R}_{43} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_4}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_5}} + \underline{\boldsymbol{R}_{50}} = 0. \qquad (4.25)$$

У цьому рівнянні маємо три невідомі (величину і напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{43}$ і величину реакції $\boldsymbol{R}_{50}$). Розкладаємо вектор $\boldsymbol{R}_{43}$ на дві складові: нормальну $\boldsymbol{R}^n_{43}$ й дотичну $\boldsymbol{R}^\tau_{43}$, тобто

$$\boldsymbol{R}_{43} = \boldsymbol{R}^n_{43} + \boldsymbol{R}^\tau_{43}. \qquad (4.26)$$

Складаємо рівняння рівноваги моментів усіх сил, що діють на ланку *4*, відносно точки *E* (рис. 4.18, *а*):

$$\sum M_{E(4)} = -R^\tau_{43} l_{DE} + F_{\text{ін}4} h_4 - G_4 h'_4 + M_{\text{ін}4} = 0,$$

звідки

$$R^\tau_{43} = \frac{F_{\text{ін}4} h_4 - G_4 h'_4 + M_{\text{ін}4}}{l_{DE}},$$

де $h_4 = [h_4]\mu_l$, $h'_4 = [h'_4]\mu_l$ — відповідно плечі сил $\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}$ і $\boldsymbol{G}_4$ відносно точки *E*; $[h_4]$, $[h'_4]$ — відрізки, які зображують ці плечі на рисунку; μ_l — масштаб довжини.

Підставивши (4.26) у рівняння (4.25), маємо

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}^n_{43}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}^\tau_{43}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_4}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_5}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{50}}} = 0. \qquad (4.27)$$

На основі такого рівняння можна побудувати план сил групи (рис. 4.18, *б*). Для цього проводимо лінію, паралельну напрямку нормальної реакції $\boldsymbol{R}^n_{43}$. З будь-якої точки, взятої на цій

лінії, відкладаємо послідовно згідно з рівнянням (4.27) у масштабі μ_F вектори $\boldsymbol{R}_{43}^{\tau}$, $\boldsymbol{G}_4$,..., $\boldsymbol{G}_5$ і, провівши через кінець вектора $\boldsymbol{G}_5$ напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{50}$ до перетину з напрямком реакції $\boldsymbol{R}_{43}^{n}$, знайдемо величини й дійсні напрямки цих реакцій:

$$R_{43}^{n} = [R_{43}^{n}]\mu_F, \quad R_{50} = [R_{50}]\mu_F, \quad R_{43} = [R_{43}]\mu_F.$$

Для визначення реакції в обертовій парі E розглянемо умову рівноваги, наприклад, ланки *4*:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{43}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_4}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{45}}} = 0. \qquad (4.28)$$

У цьому рівнянні не відома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{45}$ (за величиною і напрямком). Для її знаходження будуємо план сил, використовуючи (4.28). У нашому випадку досить з'єднати початок вектора $\boldsymbol{R}_{43}$ з кінцем вектора $\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}$ (на рис. 4.18, *б* вектор $\boldsymbol{R}_{45}$ показаний штриховою лінією). Нагадуємо, що така побудова можлива тільки тоді, коли сили, які діють на кожну ланку, згруповані в рівнянні (4.27): сили, які діють на ланку *4* — ліворуч, на ланку *5* — праворуч.

Точку прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{50}$ (рис. 4.18, *а*) знаходимо з рівняння моментів усіх сил, що діють на ланку *5*, відносно точки E, але оскільки всі сили, які діють на ланку *5*, перетинаються в точці E, то й реакція $\boldsymbol{R}_{50}$ також проходитиме через точку E.

Силовий розрахунок групи 2—3. На ланки групи (рис. 4.19, *а*) діють сили $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{F}_{\text{ін}2}$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{F}_{\text{ін}3}$, відома реакція $\boldsymbol{R}_{34}$ на ланку *3* з боку ланки *4* ($\boldsymbol{R}_{34} = -\boldsymbol{R}_{43}$), а також моменти сил інерції $M_{\text{ін}2}$ і $M_{\text{ін}3}$. Не відомі реакції в обертових парах A і C, які розкладаємо на складові: $\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{R}_{21}^{n} + \boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$, $\boldsymbol{R}_{30} = \boldsymbol{R}_{30}^{n} + \boldsymbol{R}_{30}^{\tau}$. Величину дотичних складових знаходимо з рівнянь моментів сил, які діють відповідно на ланки *2* і *3* відносно точки B:

$$\sum M_{B(2)} = R_{21}^{\tau} l_{AB} + F_{\text{ін}2} h_2 - G_2 h_2' + M_2 = 0;$$

$$\sum M_{B(3)} = -R_{30}^{\tau} l_{BC} + F_{\text{ін}3} h_3 - G_3 h_3' - R_{34} h_3'' - M_{\text{ін}3} = 0,$$

звідки

$$R_{21}^{\tau} = \frac{G_2 h_2' - F_{\text{ін}2} h_2 - M_2}{l_{AB}};$$

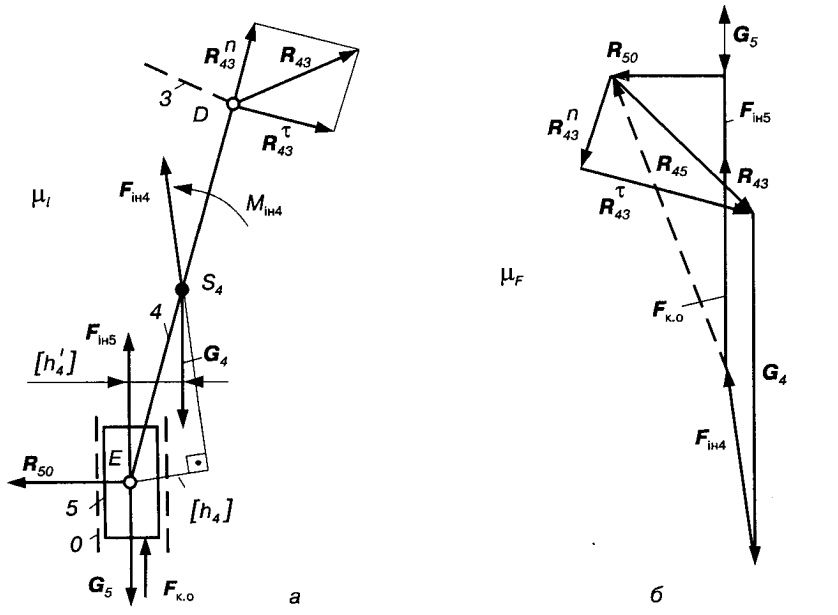


Рис. 4.18.

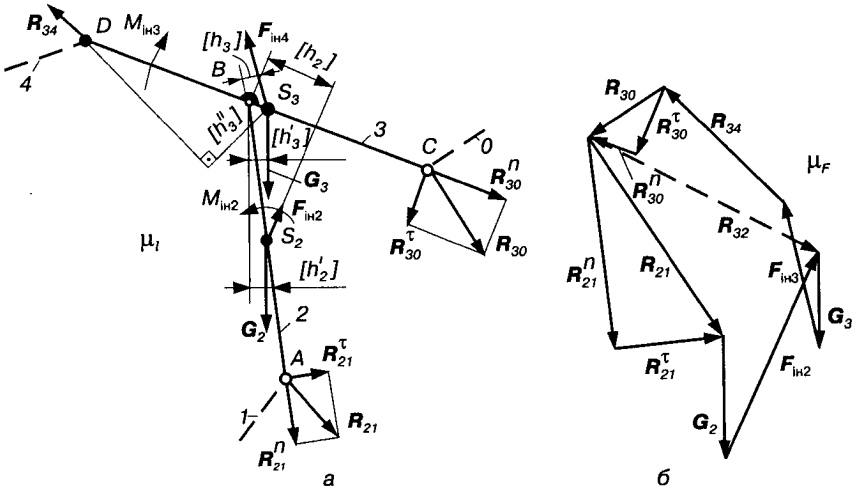


Рис. 4.19.

$$R_{30}^{\tau} = \frac{F_{\text{ін}3} - G_3 h_3' - R_{34} h_3'' - M_{\text{ін}3}}{l_{BC}},$$

де $h_2 = [h_2]\mu_l$, $h_2' = [h_2']\mu_l$ і т. п. — плечі відповідних сил відносно точки *B*.

Складаємо рівняння рівноваги всієї групи під дією прикладених сил:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{n}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}2}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}3}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_3}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{34}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{30}^{\tau}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{30}^{n}}} = 0. \qquad (4.29)$$

Згідно з рівнянням (4.29) будуємо план сил (рис. 4.19, *б*), послідовно відкладаючи у вибраному масштабі всі вектори, точка перетину напрямків $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{30}^{n}$ визначить їхню величину і дійсний напрямок. Тоді

$$R_{21}^{n} = [R_{21}^{n}]\mu_F, \quad R_{21} = [R_{21}]\mu_F, \quad R_{30}^{n} = [R_{30}^{n}]\mu_F, \quad R_{30} = [R_{30}]\mu_F.$$

Реакцію в обертовій парі *B* знаходимо з рівноваги ланки *2*

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{21}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}2}}} + \boldsymbol{R}_{23} = 0. \qquad (4.30)$$

У цьому рівнянні не відома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{23}$, яку можна знайти, побудувавши план сил за рівнянням (4.30). На рис. 4.19, *б* реакція $\boldsymbol{R}_{23}$ показана штриховою лінією.

Силовий розрахунок механізму закінчується силовим розрахунком кривошипа *1*.

Силовий розрахунок кривошипа 1. До кривошипа *1* (рис. 4.20, *а*) прикладаємо всі зовнішні сили, включаючи сили інерції та зрівноважувальну силу $\boldsymbol{F}_{\text{зр}}$. Реакцію $\boldsymbol{R}_{10}$ в обертовій парі *O* направляємо довільно, реакція в обертовій парі *A* $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$.

Величину зрівноважувальної сили $\boldsymbol{F}_{\text{зр}}$ знаходимо з рівняння моментів усіх сил, що діють на кривошип, відносно його центра обертання *O*:

$$\sum M_{0(1)} = -F_{\text{зр}} l_{OA} + R_{12} h_1 - G_1 h_1' = 0,$$

звідки

$$F_{\text{зр}} = \frac{R_{12} h_1 - G_1 h_1'}{l_{OA}},$$

де h_1 і h_2 — плечі сил відносно точки *O*.

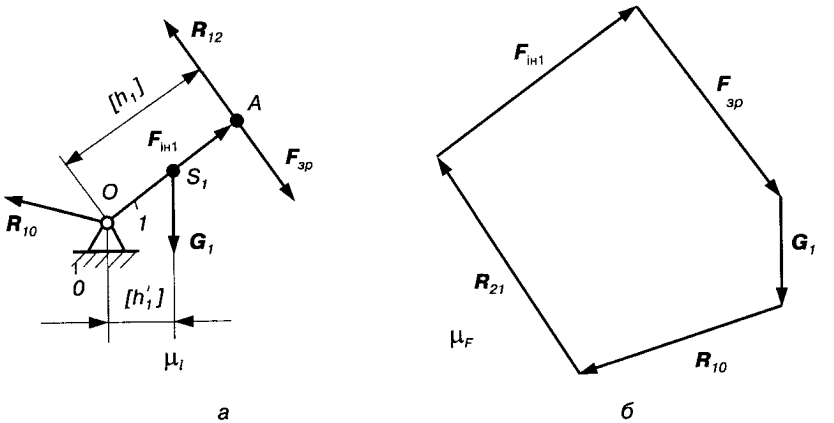


Рис. 4.20.

Для знаходження реакції $\boldsymbol{R}_{10}$ складаємо рівняння рівноваги кривошипа *1*:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{12}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}1}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{зр}}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_1}} + \boldsymbol{R}_{10} = 0. \qquad (4.31)$$

У цьому рівнянні не відома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{10}$, яку знаходимо побудовою плану сил (рис. 4.20, *б*).

Приклад 4.2. Виконати силовий розрахунок шестиланкового механізму поперечно-стругального верстата, кінематична схема якого показана на рис. 4.21, *а*. Задано швидкість обертання кривошипа ω_1, маси ланок — m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, моменти інерції ланок відносно осей, які проходять через центри мас — J_{S_1}, J_{S_2} (моментом інерції ланки *2* відносно її центра мас можна знехтувати), сила різання $F_{\text{к.о}}$ (сила корисного опору). Зрівноважувальний момент $M_{\text{зр}}$ прикласти до кривошипа *1*.

Розв'язання. На рис. 4.21, *б* побудовано план швидкостей, а на рис. 4.21, *в* — план прискорень механізму в заданому положенні початкової ланки *1*. Точка A_3 належить ланці *3* і в даний момент часу збігається з точкою A, точка C_5 належить ланці *5* і в даний момент часу збігається з точкою C. Точка A належить ланками *1* і *2*, точка C — ланкам *3* і *4*.

Визначаємо сили інерції за формулами (4.2) і (4.3):

$$F_{\text{ін}1} = m_1 a_{S_1},\ F_{\text{ін}2} = m_2 a_A,\ F_{\text{ін}3} = m_3 a_{S_3},$$

$$F_{\text{ін}4} = m_4 a_C,\ F_{\text{ін}5} = m_4 a_D;$$

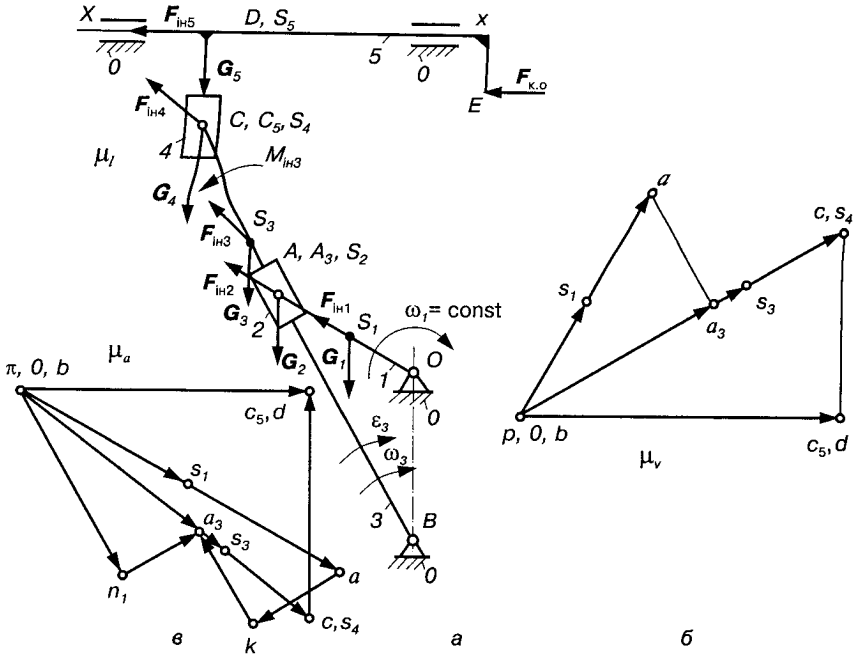


Рис. 4.21.

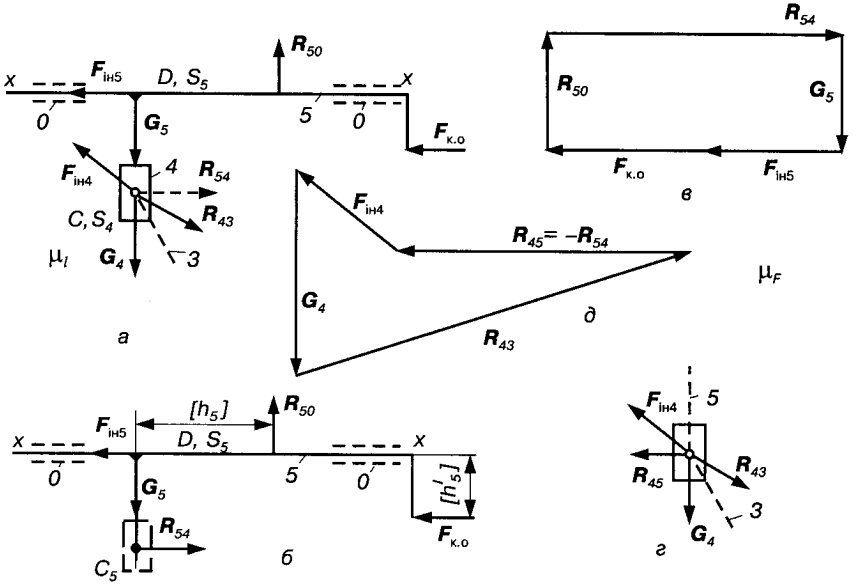


Рис. 4.22.

$$M_{\text{ін}1} = J_{S_1}\varepsilon_1 = 0,\ M_{\text{ін}2} = J_{S_2}\varepsilon_2 = 0,$$

$$M_{\text{ін}3} = J_{S_3}\varepsilon_3,\ M_{\text{ін}4} = J_{S_4}\varepsilon_4 = 0,\ M_{\text{ін}5} = 0.$$

Прикладаємо в центрах мас відповідних ланок сили інерції, спрямувавши їх у протилежний бік від прискорень центрів мас. Момент сил інерції ланки *3* направляємо в протилежний бік від кутового прискорення ε_3 (рис. 4.21, *а*).

На розрахунковій схемі механізму (рис. 4.21, *а*) показано також вектори сил тяжіння $\boldsymbol{G}_i$ (i = 1, 2, 3,...).

Далі розбиваємо механізм на групи Ассура. Механізм, який розглядаємо (рис. 4.21, *а*), складається з механізму I класу (кривошип *1* і стояк *0*) та двох структурних груп II класу; група 2—3 — III виду, група 4—5 — V виду. Силовий розрахунок розпочинаємо з останньої приєднаної групи.

Силовий розрахунок групи 4—5. На ланки групи (рис. 4.22, *а*) діють відомі сили $\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}$, $\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}$, $\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{G}_5$, $\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}$. Група приєднується до основного механізму елементами обертової пари *C* і поступальної пари *D* (стояк *0* і повзун *5*). Дію ланок основного механізму на ланки групи замінюємо реакціями $\boldsymbol{R}_{43}$ і $\boldsymbol{R}_{50}$. Точку прикладання $\boldsymbol{R}_{50}$ вибираємо довільно.

Рівняння рівноваги для ланок групи має вигляд

$$\boldsymbol{R}_{43} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_4}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}4}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_5}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}}} + \underline{\boldsymbol{R}_{50}} = 0. \qquad (4.32)$$

У цьому рівнянні три невідомі: величина й напрямок реакції $\boldsymbol{R}_{43}$ та величина реакції $\boldsymbol{R}_{50}$. Для визначення реакцій у кінематичних парах розглянемо рівновагу кожної ланки окремо. Для ланки *5* (рис. 4.22, *б*) рівняння рівноваги має вигляд

$$\underline{\boldsymbol{R}_{54}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_5}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}5}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}}} + \underline{\boldsymbol{R}_{50}} = 0. \qquad (4.33)$$

Враховуючи, що в (4.33) не відомі тільки величини реакцій $\boldsymbol{R}_{54}$ і $\boldsymbol{R}_{50}$, можна побудувати план сил (рис. 4.22, *в*), з якого знаходимо $R_{54} = [R_{54}]\mu_F$, $R_{50} = [R_{50}]\mu_F$, де μ_F — масштаб плану сил; $[R_{54}]$ і $[R_{50}]$ — відрізки на плані сил (мм), які зображають реакції $\boldsymbol{R}_{54}$ і $\boldsymbol{R}_{50}$.

Точку прикладання реакції $\boldsymbol{R}_{50}$ можна знайти, розглянувши умову рівноваги ланки *5*. Для цього запишемо рівняння моментів сил, що діють на цю ланку, відносно точки *D*:

$$\Sigma M_{D(5)} = R_{50}h_5 - F_{\text{к.о}}h'_5 + R_{54}l_{C_5D} = 0,$$

звідки

$$h_5 = \frac{F_{к.о}h'_5 - R_{54}l_{C_5D}}{R_{50}},$$

де $h_5 = [h_5]\mu_l$, $h'_5 = [h'_5]\mu_l$ — плечі сил $\boldsymbol{R}_{50}$ і $\boldsymbol{F}_{к.о}$ відносно точки D (мм).

Для ланки *4* маємо (рис. 4.22, *г*)

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{45}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{ін4}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_4}} + \boldsymbol{R}_{43} = 0.$$

Реакція $\boldsymbol{R}_{45} = -\boldsymbol{R}_{54}$, а тому в цьому рівнянні не відома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{43}$, яку знаходимо побудовою плану сил (рис. 4.22, *д*), тобто $R_{43} = [R_{43}]\mu_F$.

Можна побудувати для групи об'єднаний план сил, використавши рівняння (4.32), в якому після визначення величини реакції $\boldsymbol{R}_{50}$ залишається невідомою тільки реакція $\boldsymbol{R}_{43}$.

Силовий розрахунок групи 2—3. На ланки групи (рис. 4.23, *а*) діють сили $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{F}_{ін2}$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{F}_{ін3}$, момент $M_{ін3}$, реакція на ланку *3* з боку ланки *4* $\boldsymbol{R}_{34} = -\boldsymbol{R}_{43}$. Група приєднується до основного механізму елементами обертових пар A і B, реакції в яких напрямляємо довільно. Загальне рівняння рівноваги для групи має вигляд

$$\boldsymbol{R}_{21} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{ін2}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_3}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{ін3}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{34}}} + \boldsymbol{R}_{30} = 0. \qquad (4.34)$$

У цьому рівнянні реакції чотири невідомі: величини і напрямки реакцій $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{30}$. Враховуючи те, що всі сили, які діють на ланку *2*, перетинаються в точці A, то реакція $\boldsymbol{R}_{32} = -\boldsymbol{R}_{23}$ проходитиме також через точку A_3, яка збігається з точкою A.

У цьому разі для визначення реакцій у кінематичних парах групи III виду можна розглянути рівновагу кожної ланки окремо. Для ланки *3* маємо (рис. 4.23, *б*)

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{32}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_3}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{ін3}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{R}_{34}}} + \boldsymbol{R}_{30} = 0. \qquad (4.35)$$

Величину реакції $\boldsymbol{R}_{32}$ дістанемо з рівняння моментів усіх сил, що діють на ланку *3*, відносно точки B:

$$\Sigma M_{B(3)} = R_{34}h_3 + F_{ін3}h'_3 + G_3h''_3 - R_{32}l_{BA_3} + M_{ін3} = 0,$$

звідки

$$R_{32} = (R_{34}h_4 + F_{ін3}h'_3 + G_3h''_3 + M_{ін3})/l_{BA_3}.$$

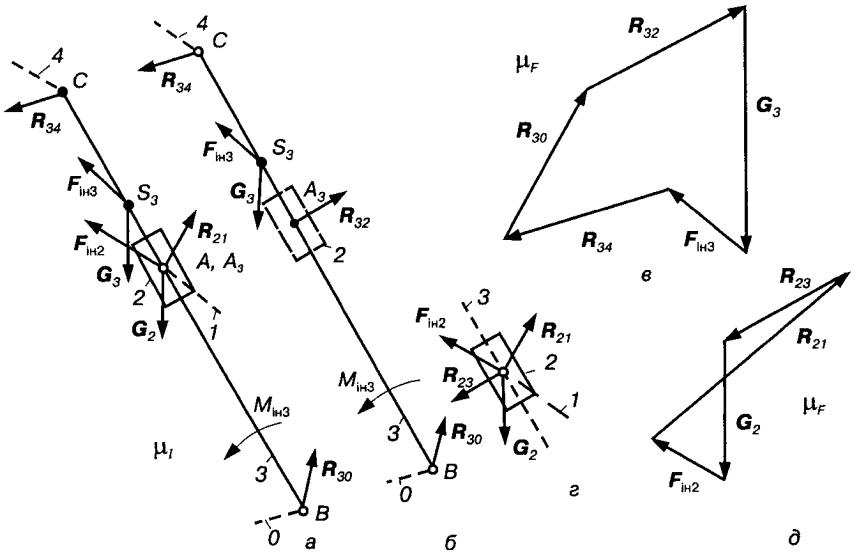


Рис. 4.23.

Визначивши величину реакції $\boldsymbol{R}_{32}$, побудуємо план сил для ланки *3* (рис. 4.23, *в*), користуючись рівнянням (4.35). Плечі h_3, h_3', h_3'' сил $\boldsymbol{R}_{34}$, $\boldsymbol{F}_{\text{ін}3}$, $\boldsymbol{G}_3$ відносно точки *B* знаходимо відомим способом (див. приклад 4.1).

Для знаходження реакції $\boldsymbol{R}_{21}$ розглядаємо рівновагу ланки *2* (рис. 4.23, *г*):

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{23}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_2}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{\text{ін}2}}} + \boldsymbol{R}_{21} = 0.$$

У цьому рівнянні невідома тільки реакція $\boldsymbol{R}_{21}$, оскільки $\boldsymbol{R}_{23} = -\boldsymbol{R}_{32}$ нам уже відома. Будуємо план сил для ланки *2* (рис. 4.23, *д*), з якого дістанемо $\boldsymbol{R}_{21}$.

Силовий розрахунок кривошипа *1*. До кривошипа *1* (рис. 4.24, *а*) прикладаємо всі зовнішні сили, включаючи сили інерції і зрівноважувальний момент $M_{\text{зр}}$. Реакцію $\boldsymbol{R}_{10}$ в обертовій парі *O* направляємо довільно, реакція в обертовій парі *A* $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$.

Величину зрівноважувального моменту $M_{\text{зр}}$ визначаємо з рівняння моментів усіх сил, що діють на кривошип, відносно його центра обертання *O:*

$$\sum M_{O(1)} = R_{12}h_1 + G_1h_1' - M_{\text{зр}} = 0,$$

де $h_1 = [h_1]\mu_l$, $h_1' = [h_1']\mu_l$;

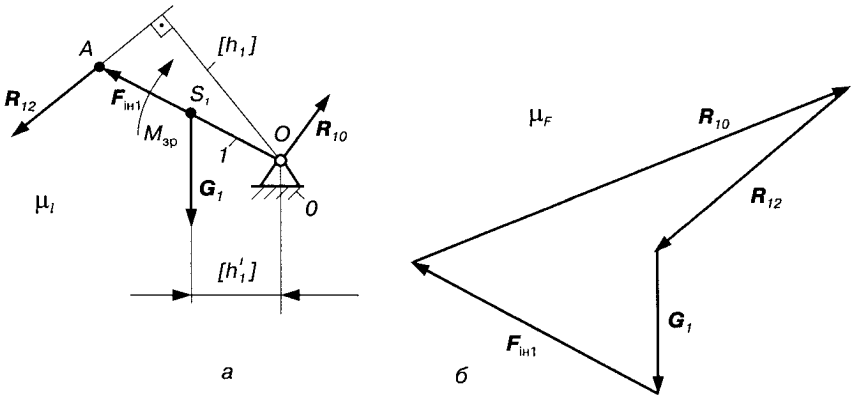


Рис. 4.24.

звідки

$$M_{зр} = R_{12}h_1 + G_1 h'_1.$$

Реакцію $\boldsymbol{R}_{10}$ знаходимо побудовою плану сил кривошипа *1* (рис. 4.24, *б*) на основі рівняння його рівноваги:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}_{12}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{G}_1}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}_{ін1}}} + \boldsymbol{R}_{10} = 0.$$

4.7. Важіль М. Є. Жуковського

У тому разі, коли нема потреби робити повний силовий розрахунок механізму, в результаті якого визначаються реакції в кінематичних парах (наприклад, розрахунок потужності двигуна), задача зводиться тільки до визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту, який прикладають до початкової ланки. Реакції в кінематичних парах можуть залишатися невідомими як внутрішні сили для всього механізму в цілому. У таких випадках для знаходження зрівноважувальної сили користуються методом (правилом) так званого жорсткого ***важеля М. Є. Жуковського.*** Правило М. Є. Жуковського ґрунтується на використанні ***принципу можливих переміщень***: якщо на будь-яку механічну систему діє ряд сил, то, приєднавши до заданих сил сили інерції і надавши всій системі можливих для даного її положення переміщень, дістанемо ряд елементарних робіт, сума яких дорівнює нулю.

Для механізму, в якому ланки здійснюють визначений рух, можливі переміщення стають дійсними переміщеннями. Тоді,

якщо на ланки механізму діє ряд сил F_1, F_2, F_3,..., F_n, принцип можливих переміщень можна виразити в такому вигляді:

$$F_1 ds_1 \cos\alpha_1 + F_2 ds_2 \cos\alpha_2 + ... + F_n ds_n \cos\alpha_n = 0, \qquad (4.36)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} F_i ds_i \cos\alpha_i = 0,$$

де ds_i — дійсне нескінченно мале переміщення точки прикладання сили F_i ($i = 1,2,3,..., n$); α_i — кут між напрямком сили F_i і напрямком переміщення точки прикладання сили.

Поділивши рівняння (4.36) на dt, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} F_i v_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} P_i = 0, \qquad (4.37)$$

де $v_i = ds_i / dt$ — швидкість точки прикладання сили F_i; P_i — миттєва потужність, що розвивається силою F_i.

Рівняння (4.37) показує, що принцип можливих переміщень можна виразити через суму миттєвих потужностей сил, що діють на ланки механізму.

Для окремо взятої ланки AB (рис. 4.25, *а*), на яку діє сила F_i, прикладена в точці C (швидкості точок A і B задані, точка P — миттєвий центр швидкостей), миттєва потужність, що розвиває ця сила,

$$P_i = F_i v_C \cos\alpha_i$$

може бути виражена по-іншому. Для цього побудуємо повернутий на 90° проти миттєвого обертання ланки AB план швидкостей цієї ланки (рис. 4.25, *б*), у точку c якого прикладемо силу F_i, і запишемо момент сили F_i відносно полюса p:

$$M_p = F_i h_i = F_i(pc)\cos\alpha_i, \qquad (4.38)$$

де h_i — плече сили F_i відносно полюса p; pc — відрізок на плані швидкостей, який у масштабі μ_v визначає швидкість точки C, тобто $v_C = (pc)\mu_v$. Тоді, помноживши ліву й праву частини (4.38) на μ_v, дістанемо

$$F_i h_i \mu_v = F_i v_C \cos\alpha_i. \qquad (4.39)$$

Такі самі вирази можна записати і для сил, що діють на інші ланки механізму. Просумувавши їх, дістанемо рівняння, яке буде тотожне рівнянню (4.37), сума членів якого дорівнює нулю, тобто

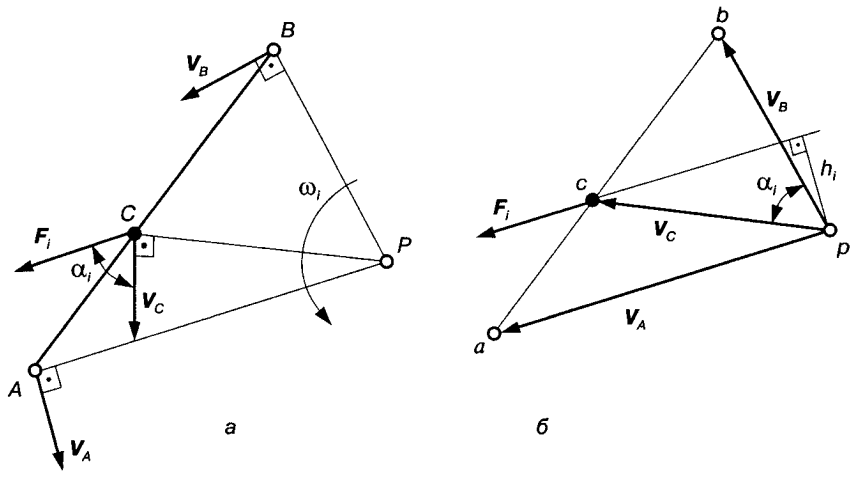


Рис. 4.25.

$$F_1 v_1 \cos\alpha_1 + F_2 v_2 \cos\alpha_2 + \ldots + F_n v_n \cos\alpha_n =$$

$$= F_1 h_1 \mu_v + F_2 h_2 \mu_v + \ldots + F_n h_n \mu_v = 0,$$

або після скорочення на μ_v маємо

$$\sum_{i=1}^{n} F_i h_i = 0. \qquad (4.40)$$

Рівняння (4.40) і є записане в математичній формі ***правило важеля М. Є. Жуковського***, яке можна сформулювати так.

Переносимо всі задані сили, що діють у даний момент часу на ланки механізму, в тому числі й сили інерції, в однойменні точки повернутого плану швидкостей, не змінюючи при цьому величину і напрямок сили. Розглядаємо повернутий план швидкостей як деякий жорсткий важіль, який перебуває в рівновазі відносно полюса плану швидкостей під дією всіх прикладених сил. Тоді сума моментів усіх цих сил, включаючи зрівноважувальну силу, відносно полюса плану швидкостей дорівнює нулю.

Така геометрична інтерпретація принципу можливих переміщень дуже зручна для розв'язування задач динаміки механізмів. Метод цей дістав назву методу М. Є. Жуковського за ім'ям великого російського механіка, який його запропонував, а важіль, яким користуються у цьому методі, названо ***важелем Жуковського***.

Метод Жуковського можна застосувати для знаходження значення будь-якої сили, якщо задано точку прикладання і напрямок цієї сили, а також задано значення, напрямки і точки прикладання всіх інших сил. Справді, у цьому випадку в рівнянні (4.40) буде тільки одне невідоме значення шуканої сили, яка з нього визначається.

Якщо на ланки механізму, крім сил F_i, діють ще пара сил, моментом яких є M_i, то при використанні правила Жуковського кожний момент M_i (рис. 4.26) розкладають на пару сил F_i', які прикладають у дві точки, наприклад A і B. Величину й напрямок кожної сили F_i' визначають за умови, що $M_i = F_i' l_i$, де $F_i' = M_i / l_i$, l_i — плече сил F_i', що дорівнює в нашому випадку (рис. 4.26) довжині ланки $AB (l_i = l_{AB})$. При цьому напрямок моменту пари сил F_i' повинен збігатися з напрямком моменту M_i. Треба мати на увазі, що напрямок цього моменту сил F_i' на важелі Жуковського може не збігатися з напрямком моменту M_i на схемі механізму. Це буває тоді, коли положення точок A і B на ланці та на плані швидкостей (a і b) не збігаються.

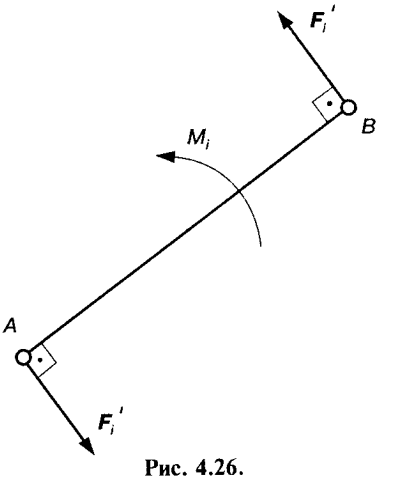
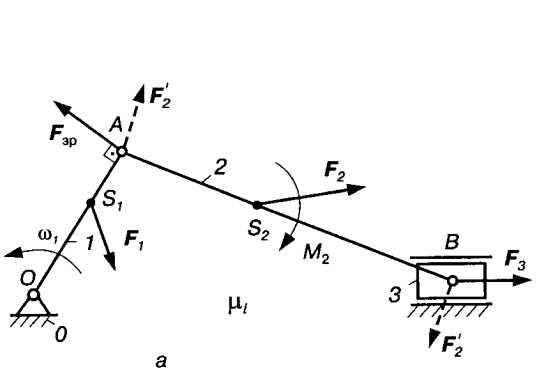


Рис. 4.26.



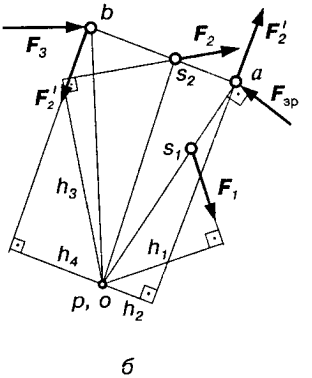


Рис. 4.27.

Розглянемо приклад визначення зрівноважувальної сили $F_{зр}$ за допомогою правила важеля Жуковського.

Приклад 4.3. Нехай задано кінематичну схему кривошипно-повзункового механізму (рис. 4.27, *а*), на ланки якого діють сили F_1, F_2, F_3, момент сил M_2, швидкість обертання кривошипа OA ω_1. Зрівноважувальну силу прикласти до кривошипа OA у точці A і направити перпендикулярно до лінії OA.

Розв'язання. Будуємо для заданого положення механізму повернутий на 90° проти миттєвого обертання кривошипа ω_1 план швидкостей (рис. 4.27, *б*) у відповідних точках якого прикладаємо сили F_1, F_2, F_3, $F_{зр}$; момент M_2 розкладаємо на пару сил $F_2' = M_2 / l_{AB}$ (на рис. 4.27, *а* сили F_2' показано штриховою лінією), які прикладаємо відповідно в точках a і b перпендикулярно до $AB\{ab\|AB\}$.

Враховуючи, що під дією сил, включаючи зрівноважувальну силу, механізм перебуває в рівновазі, можна записати таке рівняння всіх сил, що прикладені до повернутого плану швидкостей, який умовно приймаємо жорстким важелем:

$$\sum M_p = F_{зр}(pa) - F_1 h_1 + F_2' h_2 - F_2 h_2 + F_2' h_4 - F_3(pb) = 0,$$

звідки маємо

$$F_{зр} = \frac{F_1 h_1 - F_2' h_2 + F_2 h_3 - F_2' h_4 + F_3(pb)}{pa}, \qquad (4.41)$$

де h_i — плечі відповідних сил відносно полюса повернутого плану швидкостей, мм.

Напрямок вектора зрівноважувальної сили $F_{зр}$ вибрано правильно, якщо після числового розрахунку (4.41) одержимо $F_{зр}$ зі знаком плюс і, навпаки, якщо знак буде мінус, то треба змінити напрямок вектора сили $F_{зр}$ на протилежний.

Викладений метод є загальним для механізмів будь-якого класу.

4.8. Зведення сил і моментів сил

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно всі сили, що діють на різні ланки механізму, замінити однією силою або моментом сил, які прикладають до однієї з ланок механізму. Силу, що заміняє, називають ***зведеною силою***, момент — ***зведеним моментом***. Для того щоб така заміна була еквівалентна, необхідно, ***щоб робота зведеної сили (моменту сили) на деякому можливому переміщенні її точок прикладання або потужність,***

яку вона розвиває, мають відповідно дорівнювати сумі робіт, прикладених до механізму сил на тому самому переміщенні їх точок прикладання, або сумі потужностей, що розвиваються цими силами. Це і є умовою зведення сил або моментів сил.

Ланку механізму, до якої прикладають зведену силу, називають ***ланкою зведення***, а точку її прикладання — ***точкою зведення***. Якщо механізм має один ступінь вільності, то для вивчення його руху досить знати закон руху однієї з його ланок, тобто знати закон зміни узагальненої координати.

Як правило, ланкою зведення вибирають початкову ланку механізму. У робочих машинах ланкою зведення вибирають головний вал, у машинах-двигунах — вихідний вал. Тоді замість того, щоб розглянути всі ланки механізму чи машини, можна розглянути тільки одну ланку, наприклад кривошип OA (рис. 4.28), узагальнена координата якого — кут φ_1.

Для визначення зведених сил зручно використовувати рівність потужностей:

$$P_{зв} = \sum_{i=1}^{n} P_i. \tag{4.42}$$

У цій рівності $P_{зв}$ — потужність, яку розвиває зведена сила $F_{зв}$ або зведений момент $M_{зв}$; P_i — потужність, що розвивають сили та моменти пар сил, які прикладені до i-ї ланки та мають бути зведені ($i = 1, 2, 3,..., n$). Ці потужності можна записати в такому вигляді:

$$P_{зв} = F_{зв} v_A \cos\alpha = M_{зв}\omega_1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} F_i v_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \omega_i, \tag{4.43}$$

де $F_{зв}$ — зведена до точки A ланки сила; v_A — швидкість точки зведення A; α — кут між напрямком зведеної сили і швидкістю точки зведення; ω_1 — кутова швидкість ланки зведення; F_i, M_i — сила або момент сили, які прикладені до i ланки; v_i —швидкість точки прикладання сили F_i; ω_i — кутова швидкість цієї ж ланки; α_i — кут між напрямком векторів F_i і v_i.

Підставивши вирази (4.43) у рівняння (4.42), дістанемо

$$F_{зв} = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{v_i}{v_A}\cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\omega_i}{v_A}\right];$$
$$M_{зв} = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{v_i}{\omega_1}\cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}. \tag{4.44}$$

З рівнянь (4.44) видно, що при заданих силах F_i і моментах M_i визначення зведеної сили $F_{зв}$ або зведеного моменту $M_{зв}$ не становить значних труднощів і може бути зроблене, якщо для всіх положень, які досліджуються, побудовано плани швидкостей механізму і визначено кутові швидкості ланок.

Для визначення $F_{зв}$ і $M_{зв}$ за формулами (4.45) необов'язково знати справжні швидкості точок і ланок, тому що вони входять у вигляді відношення двох швидкостей, яке не залежить від величини швидкості руху механізму, а залежить тільки від положень його ланок і може бути подано через відповідні відрізки плану швидкостей. Цей план можна будувати для довільно вибраної кутової швидкості ланки зведення, тобто в невизначеному масштабі.

Цілком очевидно, що між зведеною силою і зведеним моментом сил існує такий зв'язок:

$$M_{зв} = F_{зв}\, h_{зв},$$

де $h_{зв}$ — плече вектора $F_{зв}$ відносно центра обертання кривошипа OA.

Зведену силу можна визначити також за допомогою правила важеля Жуковського, враховуючи, що $F_{зр} = -F_{зв}$. Це пояснюється тим, що зведена сила замінює дію всіх сил, що діють на ланки механізму, а зрівноважувальна сила забезпечує рівновагу механізму під дією цих сил. Тому згідно з третім законом Ньютона існує ця рівність ($F_{зр} = -F_{зв}$).

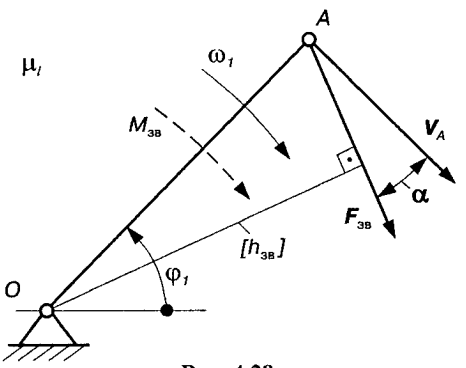


Рис. 4.28.

Приклад 4.4. На ланки кривошипно-повзункового механізму (рис. 4.29, *а*) діють сили F_1, F_2, F_3 і момент сил M_2.

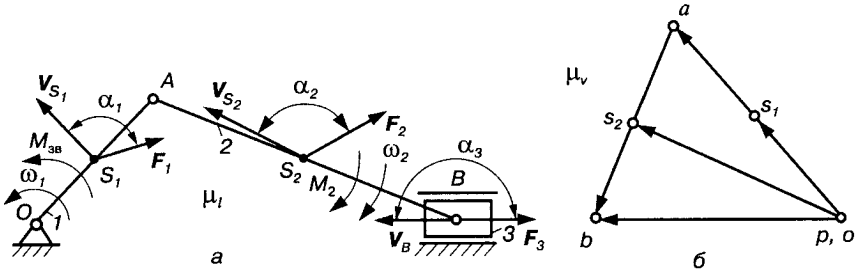


Рис. 4.29.

Визначити зведений момент сил, який прикладено до кривошипа *1*. План швидкостей механізму наведено на рис. 4.29, *б*.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі використовуватимемо рівність потужностей (4.42). У нашому випадку

$$P_{зв} = M_{зв}\omega_1, \ \sum_{i=1}^{n=3} P_i = P_1 + P_2 + P_3, \qquad (4.45)$$

де P_1, P_2, P_3 — потужності, які розвивають сили, що прикладені відповідно до ланок *1*, *2*, *3*:

$$P_1 = F_1 v_{s_1} \cos\alpha_1; \ P_2 = F_2 v_{s_2} \cos\alpha_2 + M_2\omega_2; \ P_3 = F_3 v_{s_3} \cos\alpha_3, \qquad (4.46)$$

де v_{s_i} — швидкості точок прикладання S_i сили F_i; α_i — кути між векторами F_i і v_{s_i} (рис. 4.29, *а*).

Підставляючи рівність (4.45) і (4.46) у рівняння (4.42), знаходимо

$$M_{зв} = F_i \frac{v_{s_1}}{\omega_1} \cos\alpha_i + F_i \frac{v_{s_2}}{\omega_1} \cos\alpha_2 + M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} - F_3 \frac{v_B}{\omega_1}. \qquad (4.47)$$

Тут $\alpha_3 = \pi$, а тому $\cos\alpha_3 = -1$.

4.9. Зведення мас і моментів інерції

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно, так само як і сили, маси і моменти інерції всіх ланок замінити одною зведеною масою $m_{зв}$ або одним зведеним моментом інерції $J_{зв}$. При цьому необхідно, щоб ***кінетична енергія зведеної маси (моменту інерції) у відповідних положеннях механізму дорівнювала сумі кінетичних енергій всіх ланок цього механізму,*** тобто

$$T_{зв} = \sum_{i=1}^{n} T_i, \qquad (4.48)$$

де $T_{зв}$ — кінетична енергія ланки зведення; T_i — кінетична енергія ланки i ($i = 1, 2, 3,..., n$).

Якщо, наприклад, вибрати за ланку зведення кривошип OA (див. рис. 4.28), а за точку зведення — центр шарніра A, то кінетична енергія ланки зведення визначиться за формулою

$$T_{зв} = \frac{m_{зв} v_A^2}{2} \qquad (4.49)$$

або

$$T_{зв} = \frac{J_{зв}\omega_1^2}{2}. \tag{4.50}$$

Тут $m_{зв}$, $J_{зв}$ — зведена маса або зведений момент інерції механізму; v_A — швидкість точки зведення A; ω_1 — кутова швидкість ланки зведення, у нашому випадку кривошипа OA.

Кінетична енергія ланок механізму може бути виражена як сума кінетичних енергій мас, які здійснюють поступальний і обертовий рух, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{зв} v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{J_{зв}\omega_i^2}{2}. \tag{4.51}$$

Підставляючи (4.49)—(4.51) у загальну рівність (4.48), знаходимо

$$m_{зв} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} T_i}{\mathbf{v}_A^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v_A}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} J_{S_i}\left(\frac{\omega_i}{v_A}\right)^2;$$

$$J_{зв} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} T_i}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega_1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} J_{S_i}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2. \tag{4.52}$$

У формулах (4.51) і (4.52) m_i і J_{S_i} — це відповідно маса ланки i та її момент інерції відносно осі, що проходить через центр маси; v_{S_i} — швидкість центра мас ланки i; ω_i — її кутова швидкість.

Звичайно, буде зберігатись залежність $J_{зв} = m_{зв} l_{OA}^2$.

Якщо врахувати, що в більшості механізмів маса ланок і її моменти інерції під час руху не змінюються, то, як видно з формул (4.52), зведені маси і моменти інерції залежать тільки від співвідношень швидкостей, які, у свою чергу, залежать від положень ланок механізму, тобто від положення ланки зведення, і є завжди величинами додатними.

Зведені маси і моменти інерції можуть бути сталими або змінними. У більшості важільних, храпових, мальтійських, кулачкових механізмів зведені маси або зведені моменти інерції залежать від кута φ_1 повороту початкової ланки (узагальненої

координати). У механізмах з постійним співвідношенням швидкостей (зубчасті, фрикційні, пасові, гвинтові, шарнірний паралелограм тощо) зведені маси (моменти інерції) сталі.

Приклад 4.5. Для механізму, кінематична схема якого показана на рис. 4.30, *а*, визначити зведений момент інерції, якщо відомі маси і моменти інерції ланок відносно осей, що проходять через їх центри мас. Швидкості центрів мас і кутові швидкості задані планом швидкостей (рис. 4.30, *б*). Ланкою зведення вибрати кривошип *OA*.

Розв'язання. Для розв'язання задачі будемо використовувати умову зведення мас (4.48). У нашому випадку кінетична енергія ланки зведення визначається залежністю (4.50), тобто

$$T_{зв} = \frac{J_{зв}\omega_1^2}{2}.$$

Кінетична енергія механізму складатиметься з кінетичної енергії п'яти ланок:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

де

$$T_1 = \frac{J_O\omega_1^2}{2} = \left(J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2\right)\frac{\omega_1^2}{2};\quad T_2 = \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2}\omega_2^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{J_C\omega_3^2}{2} = \left(J_{S_3} + m_3 l_{CS_3}^2\right)\frac{\omega_3^2}{2};$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_{S_4}^2}{2} + \frac{J_{S_4}\omega_4^2}{2};\quad T_5 = \frac{m_5 v_D^2}{2}. \qquad (4.53)$$

Підставляючи вирази (4.50) і (4.53) у залежність (4.48), знаходимо зведений момент інерції механізму:

$$J_{зв} = J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2 + m_2\left(\frac{v_{S_2}}{\omega_1}\right)^2 + J_{S_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \left(J_{S_3} + m_3 l_{CS_3}^2\right)\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 +$$

$$+ m_4\left(\frac{v_{S_4}}{\omega_1}\right)^2 + J_{S_4}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2 + m_5\left(\frac{v_D}{\omega_1}\right)^2. \qquad (4.54)$$

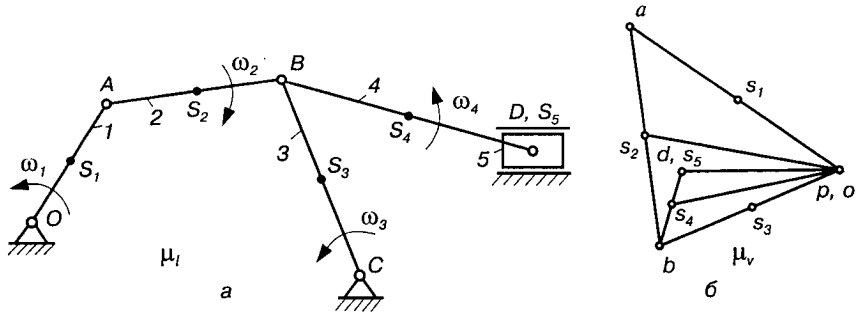


Рис. 4.30.

Величина зведеного моменту інерції $J_{зв}$ може бути виражена через відповідні відрізки плану швидкостей (рис. 4.30, *б*). Для цього виразимо всі лінійні й кутові швидкості через ці відрізки:

$$v_{S_2} = (ps_2)\mu_v,\ v_{S_4} = (ps_4)\mu_v,\ v_D = (pd)\mu_v,\ \omega_1 = \frac{v_A}{l_{OA}} = \frac{(pa)\mu_v}{l_{OA}},$$

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ab)\mu_v}{l_{AB}},\ \omega_3 = \frac{v_B}{l_{BC}} = \frac{(pb)\mu_v}{l_{BC}},\ \omega_4 = \frac{v_{DB}}{l_{BD}} = \frac{(bd)\mu_v}{l_{BD}},$$

де μ_v — масштаб (масштабний коефіцієнт) побудови плану швидкостей.

Підставивши ці вирази у формулу (4.54), дістанемо залежність для визначення зведеного моменту інерції:

$$J_{зв} = J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2 + m_2 l_{OA}^2\left(\frac{ps_2}{pa}\right)^2 + J_{S_2}\left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}}\right)^2\left(\frac{ab}{pa}\right)^2 +$$

$$+ \left(J_{S_3} + m_3 l_{CS_3}^2\right)\left(\frac{l_{OA}}{l_{BC}}\right)^2\left(\frac{pb}{pa}\right)^2 +$$

$$+ m_4 l_{OA}^2\left(\frac{ps_4}{pa}\right)^2 + J_{S_4}\left(\frac{l_{OA}}{l_{BD}}\right)^2\left(\frac{bd}{pa}\right)^2 + m_5 l_{OA}^2\left(\frac{pd}{pa}\right)^2.$$

Величини відрізків, взятих з плану швидкостей, можна брати у міліметрах без множення на масштаб μ_v, тому що при діленні одного відрізка на інший масштаби скорочуються.

4.10. Рівняння руху механізму

При вивченні руху механізму ми звичайно припускали, що початкова ланка (головний вал машини) обертається із сталою швидкістю (ω_1 = const). Цей закон руху можна одержати в тих випадках, коли структура механізму проста, наприклад у механізмах, що складаються тільки з обертових ланок. Для здійснення такого руху потрібні цілком певні співвідношення між силами, що діють на механізм, і масами його ланок. Але закон зміни сил залежить від їх фізичної природи й до структури механізму не має відношення. Тому не можна встановити між силами, що діють на механізм, таке співвідношення, яке б забезпечило заданий закон його руху.

Закон руху будь-якої ланки механізму можна визначити лише тоді, коли відомі всі зовнішні сили або залежність цих сил від різних параметрів. Як було показано раніше (параграф 4.3), рушійні сили й сили виробничих опорів можуть залежати одночасно або окремо від положення ланки, яка прийнята за початкову, або від її кутової швидкості. Зведені моменти інерції $J_{зв}$ механізму чи машини можуть бути або сталими, або залежати від положень початкової ланки (параграф 4.9).

Визначення закону руху механізму, що перебуває під дією прикладених до його ланок сил, і є задачею динамічного аналізу. Для механізму, що має один ступінь вільності, цю задачу можна вважати розв'язаною, коли буде встановлено закон руху однієї ланки. Звичайно за таку ланку вибирають вхідний вал робочої машини або вихідний вал двигуна. До цієї ланки, що приймається за ланку зведення, доцільно звести всі сили й моменти пар сил, прикладені до механізму, та маси й моменти інерції його ланок. Тоді замість розгляду всього комплексу сил, що діють на ланки механізму, можна розглянути сили, що діють лише на одну ланку — ланку зведення, наприклад кривошип OA (рис. 4.28), що перебуватиме під дією сили $F_{зв}$ або зведеного моменту $M_{зв}$ (у загальному випадку змінних) і матиме зведену масу $m_{зв}$, зосереджену ніби в точці A зведення, або зведений момент інерції $J_{зв}$ всіх ланок, який наданий ланці зведення OA. Закон руху всіх інших ланок механізму можна визначити, якщо відомий закон руху початкової ланки.

Для розв'язання цієї задачі динаміки (знаходження закону руху початкової ланки механізму) використовують рівняння руху, яке може бути записане в ***енергетичній*** або ***диференціальній формі***.

Основою для складання рівняння руху механізму служить ***теорема про зміну кінетичної енергії***, згідно з якою ***зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-який проміжок часу дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему протягом цього ж проміжку часу***, тобто

$$\Delta T = T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i \,, \tag{4.55}$$

де $T = \frac{m_{зв} V_{зв}^2}{2}$, $T_0 = \frac{m_{зв0} V_{зв0}^2}{2}$ — кінетична енергія механічної системи відповідно в кінці і на початку проміжного часу, який розглядається; $\sum_{i=1}^{n} A_i$ — сума робіт усіх прикладених до системи сил; $i = 1, 2, 3, ..., n$ — кількість сил. Тут $m_{зв}$, $m_{зв0}$ — зведені маси механізму відповідно в кінці і на початку проміжку часу, який розглядається; $v_{зв}$, $v_{зв0}$ — швидкості точки зведення, які відповідають цим положенням механізму.

Розглядаючи механізм чи машину як змінну систему, праву сторону цього рівняння можна виразити через суму робіт рушійних сил $A_р$, корисних $A_{к.о}$ і шкідливих $A_{ш.о}$ опорів:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_р - A_{к.о} - A_{ш.о} \,. \tag{4.56}$$

Крім цього, якщо звести всі сили й маси до вибраної ланки зведення, рівняння (4.55) з урахуванням (4.56) можна записати так:

$$\frac{m_{зв} V_{зв}^2}{2} - \frac{m_{зв0} V_{зв0}^2}{2} = A_р - A_{к.о} - A_{ш.о} \,. \tag{4.57}$$

При обертовому русі ланки зведення рівняння (4.57) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{J_{зв} \omega^2}{2} - \frac{J_{зв0} \omega_0^2}{2} = A_р - A_{к.о} - A_{ш.о} \,, \tag{4.58}$$

де $J_{зв}$, $J_{зв0}$ — зведені моменти інерції механізму; ω, ω_0 — кутові швидкості ланки зведення відповідно в кінці і на початку проміжку часу, який розглядається.

Теорема про зміну кінетичної енергії, записана у вигляді рівнянь (4.57) або (4.58), має назву рівняння руху механізму в ***енергетичній формі*** (у формі інтеграла енергії).

Враховуючи, що роботу зведених рушійних сил і сил опору можна виразити через зведений момент $M_{зв} = M_р + M_о$ рушійних сил і сил опору, який прикладаємо до ланки зведення,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi, \tag{4.59}$$

рівняння (4.58) записуємо у вигляді

$$\frac{J_{зв}\omega^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi, \tag{4.60}$$

де φ — узагальнена координата (кут повороту ланки зведення); φ_0 — значення кута φ на початку руху.

Рівняння руху механізму може також бути записано в ***диференціальній формі***, яке можна дістати з рівняння кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$dT = dA. \tag{4.61}$$

При обертовому русі початкової ланки після зведення сил і мас маємо

$$dT = d\left(J_{зв}\frac{\omega^2}{2}\right); \quad dA = M_{зв} d\varphi. \tag{4.62}$$

Підставляючи (4.62) в рівняння (4.61), записуємо

$$M_{зв} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_{зв}\omega^2}{2}\right) = J_{зв}\frac{2\omega}{2}\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{dt}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi},$$

або

$$M_{зв} = J_{зв}\varepsilon + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}, \tag{4.63}$$

де $\varepsilon = d\omega/dt$ — кутове прискорення ланки зведення; $\omega = d\varphi/dt$ — кутова швидкість ланки зведення.

Такий самий вигляд має диференціальне рівняння руху механізму при прямолінійному русі початкової ланки:

$$F_{зв} = m_{зв}a + \frac{v^2}{2}\frac{dm_{зв}}{ds}, \tag{4.64}$$

де s, v, a — відповідно переміщення, швидкості і прискорення ланки зведення; $F_{зв}$, $m_{зв}$ — зведені сили і маси механізму.

Рівняння (4.63) можна дістати також з рівняння Лагранжа 2-го роду, яке після зведення сил і мас має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_{зв},$$

де

$$T = \frac{J_{зв}\omega^2}{2}.$$

Після диференціювання дістанемо

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = \frac{\partial (J_{зв}\omega^2 / 2)}{\partial \omega} = J_{зв}\omega; \quad \frac{d}{dt}(J_{зв}\varepsilon) = J_{зв}\varepsilon + \omega^2 \frac{dJ_{зв}}{dt};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial (J_{зв}\omega^2 / 2)}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}.$$

Підставивши значення похідних у рівняння Лагранжа, дістанемо рівняння (4.63). Аналогічно дістанемо диференціальне рівняння руху механізму при прямолінійному русі початкової ланки (4.64).

4.11. Режими руху механізму

Робота механізму (або машини) має три характерні періоди руху:

а) період розбігу;

б) період усталеного руху;

в) період вибігу.

За період ***розбігу*** (пуску машини) швидкість руху початкової ланки зростає від нуля ($v_0 = 0$) до деякої середньої (робочої) швидкості ($v = v_р$). Рівняння руху механізму (4.57) набуває вигляду

$$\frac{m_{зв}v_р^2}{2} = A_р - A_{к.о} - A_{ш.о}.$$

Оскільки $m_{зв}v_р^2 > 0$, то для періоду пуску механізму справедлива така нерівність:

$$A_р > A_{к.о} + A_{ш.о}. \qquad (4.65)$$

З цього випливає, що ***в період пуску механізму робота рушійних сил мас бути більшою за суму робіт сил корисного і шкідливого опору.*** Надлишок роботи $A_р$ витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто збільшення швидкості рухомих мас.

Часто для скорочення часу пуску машини знімають з неї корисне навантаження ($A_{к.о} = 0$). Рух машини без корисного навантаження називають ***холостим ходом*** машини.

При ***усталеному русі*** машини швидкість початкової ланки (головного вала) механізму чи машини коливається навколо середнього значення, яке відповідає робочій швидкості цієї ланки. Проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості й прискорення початкової ланки механізму набувають початкового значення, називають ***періодом*** зміни кінетичної енергії механізму або ***циклом*** $t_ц$ усталеного руху.

Швидкості початкової ланки на початку і в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ($v_0 = v = v_р$). Тоді рівняння руху (4.57) набуває вигляду

$$A_р = A_{к.о} + A_{ш.о}. \qquad (4.66)$$

Отже, ***при усталеному русі механізму (машини) робота рушійних сил за один цикл дорівнює сумі робіт корисного і шкідливого опору.*** У середині циклу ця рівність може не зберігатись, а тому мають місце коливання швидкості початкових ланок механізму. Очевидно, коли $A_р > A_{к.о} + A_{ш.о}$, рух механізму буде прискорений і, навпаки, коли $A_р < A_{к.о} + A_{ш.о}$, рух сповільнений, тому в обох випадках умова $v_р = \text{const}$ буде порушена.

При ***вибігу*** (зупинці) машини насамперед треба зупинити подачу рушійної енергії машини (відключити двигун), тобто $A_р = 0$. Кінцевим станом машини буде спокій, при якому швидкість початкової ланки $v = 0$, а початкова швидкість $v_0 = v_р$. Для цього випадку рівняння руху машини набуває вигляду

$$\frac{m_{зв} v_р^2}{2} = A_{к.о} + A_{ш.о}. \qquad (4.67)$$

З рівняння (4.67) видно, що ***зупинка машини буде досягнута тільки тоді, коли вся нагромаджена машиною кінетична енергія рухомих мас поглинається роботою сил корисного і шкідливого опору.***

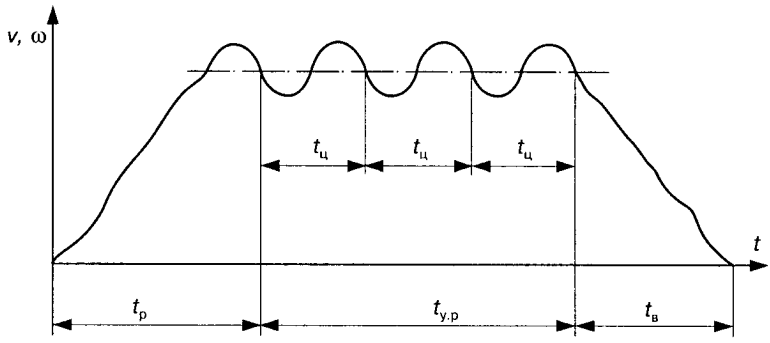


Рис. 4.31.

На практиці для скорочення часу зупинки машини дуже часто штучно збільшують роботу сил шкідливого опору за допомогою установки гальм.

Таким чином, у період розбігу кінетична енергія машини збільшується за рахунок надлишку роботи рушійних сил над роботою сил опору ($A_р > A_о$); у період усталеного руху кінетична енергія на початку і в кінці кожного циклу (періоду) однакова ($A_р = A_о$); нарешті, у період вибігу кінетична енергія повністю поглинається роботою всіх сил опору.

На рис. 4.31 показано приклад залежності швидкості руху початкової ланки механізму від часу t. Час усталеного руху залежить від часу одного циклу $t_ц$ і кількості циклів k ($t_{у.р} = kt_ц$). Кількість циклів визначається технологічним процесом, який виконує машина. Слід зазначити, що цикл роботи механізму (машини) не завжди відповідає одному оберту початкової ланки. Так, наприклад, у чотиритактному двигуні внутрішнього згоряння протягом циклу корінний вал двигуна робить два оберти.

Багато машин, механізмів і приборів (вантажопідіймальні машини, екскаватори, реле, контактори і т. п.) не працюють у режимі усталеного руху, їх рух, як правило, складається з розбігу й вибігу.

4.12. Механічний коефіцієнт корисної дії

З рівняння руху механізму для періоду усталеного руху видно, що $A_р = A_{к.о} + A_{ш.о}$, тобто вся енергія рушійних сил, яка витрачається в машині, поділяється на дві частини: одна частина йде на перемагання сил виробничих (корисних) опорів, друга — на

перемагання шкідливих опорів (сил тертя, опору середовища). Механізм або машина вважається тим досконалішими, чим більша частина енергії (за однакових інших умов), що підводиться до них, й де на перемагання корисних опорів. Ефективність використання енергії в машині характеризується так званим механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД).

Механічним ККД η ***називають відношення роботи сил корисного опору до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху,*** тобто

$$\eta = \frac{A_{к.о}}{A_р} < 1. \qquad (4.68)$$

У реальних машинах механічний ККД завжди менший за одиницю. Це пояснюється тим, що робота сил корисного опору завжди менша за роботу рушійних сил. Дійсно, з рівняння (4.66) видно, що $A_{к.о} = A_р - A_{ш.о}$, а оскільки робота сил шкідливого опору не дорівнює нулю ($A_{ш.о} \neq 0$), то $A_{к.о} < A_р$ і $\eta < 1$.

Залежність (4.68) можна записати також у такому вигляді:

$$\eta = \frac{A_р - A_{ш.о}}{A_р} = 1 - \frac{A_{ш.о}}{A_р}. \qquad (4.69)$$

Відношення роботи сил шкідливого опору до роботи рушійних сил прийнято називати ***механічним коефіцієнтом втрат*** ψ. Відповідно до цього (4.69) можна записати так:

$$\eta = 1 - \psi. \qquad (4.70)$$

З (4.69) випливає, що механічний ККД може дорівнювати нулю, якщо робота рушійних сил дорівнює роботі всіх невиробничих опорів, які є в механізмі. За такої умови рух механізмів можливий, але без виконання будь-якої корисної роботи. Такий рух механізму називають холостим рухом. ККД не може бути меншим від нуля, оскільки для цього необхідно, щоб відношення робіт $A_{ш.о} / A_р$ було більше від одиниці, тобто $A_{ш.о} > A_р$. У таких випадках настає ***самогальмування*** машини або механізму.

Отже, ККД машини або механізму може змінюватися в межах

$$0 \leq \eta < 1. \qquad (4.71)$$

Тоді з рівнянь (4.70) і (4.71) випливає, що коефіцієнт втрат змінюється в межах $0 < \psi \leq 1$.

Слід зауважити, що механічний коефіцієнт корисної дії і коефіцієнт втрат не дають повної характеристики машини, а також інформації про її продуктивність, безпеку праці, вартість,

якість продукції, яку вона випускає. Вони характеризують тільки ефективність використання енергії. ККД і коефіцієнт втрат придатні тільки для порівняння машин і пристроїв однакового призначення. У деяких машинах корисне навантаження дуже мале (наприклад, у поліграфічних і текстильних машинах, машинах швейної промисловості тощо), тому й ККД невеликий.

ККД і коефіцієнт втрат можна виразити і через відношення відповідних потужностей.

Під час руху машини ККД і коефіцієнт втрат не залишаються сталими, тому що під час руху машини змінюються зусилля, які діють на ланки машин, а значить, змінюються сили тертя і робота сил шкідливого опору (робота сил корисного опору також може змінюватися). На практиці, як правило, обмежуються визначенням середнього значення ККД для якого-небудь проміжку часу, найчастіше для одного циклу періоду усталеного руху. Такий ККД називають ***цикловим.*** При обчисленні ККД для даного положення механізму дістаємо ***миттєвий*** коефіцієнт корисної дії.

Для кожної машини існує деяка найвигідніша швидкість, при якій її ККД досягає максимального значення. Вищий ККД мають механізми і машини з чисто обертовим рухом ланок — ротаційні машини. Машини зі зворотно-поступальним рухом ланок — поршневі машини, механізми періодичної дії, мають здебільшого низький ККД через несприятливу дію динамічних сил (сил інерції).

4.13. Коефіцієнт корисної дії машини

Як правило, сучасні машини складаються з багатьох механізмів, ККД яких відомі або його можна порівняно легко знайти. Проте загальний ККД машини залежить не тільки від ККД окремих механізмів, що входять до її складу, але й від способу з'єднання цих механізмів у машині. Відрізняють три способи з'єднання механізмів у машині: послідовне, паралельне і змішане.

Послідовне з'єднання механізмів. Нехай є машина, яка складається з n послідовно з'єднаних механізмів (рис. 4.32), кожен з яких має відповідно ККД $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$.

Загальний ККД такої машини визначається за формулою

$$\eta_{\text{заг}} = \frac{A_{\text{к.о}}}{A_{\text{р}}} = \frac{A_n}{A_{\text{р}}}. \qquad (4.72)$$

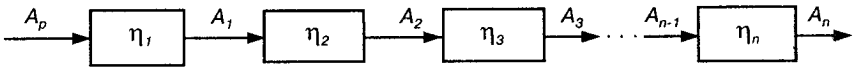


Рис. 4.32.

Перший механізм приводиться в рух рушійними силами, що виконують роботу A_p. Оскільки корисна робота A_1 першого механізму буде роботою рушійних сил для другого механізму і відповідно у всьому ланцюгу механізмів корисна робота кожного попереднього механізму буде роботою рушійних сил для кожного наступного механізму, то коефіцієнт корисної дії кожного механізму обчислюється так:

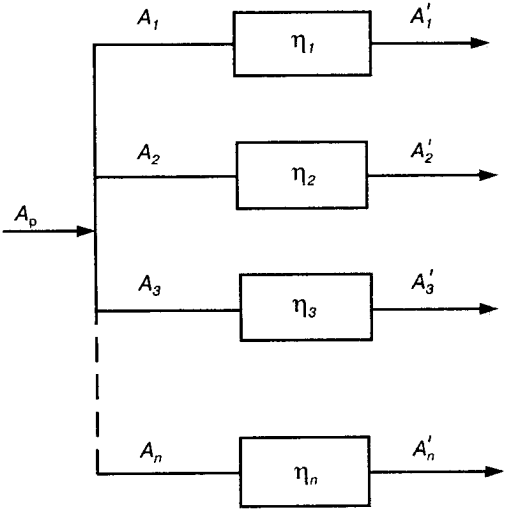


Рис. 4.33.

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \ \ldots, \ \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}. \qquad (4.73)$$

Якщо перемножити між собою ліві та праві частини (4.73), дістанемо

$$\eta_1\eta_2\eta_3\ldots\eta_n = \frac{A_1}{A_p}\frac{A_2}{A_1}\frac{A_3}{A_2}\ldots\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_p} = \eta_{заг}.$$

Отже, ***загальний механічний ККД послідовно сполучених механізмів (або машин) дорівнює добуткові механічних ККД окремих механізмів*** (або машин), що утворюють одну машину (або машинний агрегат), тобто

$$\eta_{заг} = \eta_1\,\eta_2\,\eta_3\ldots\eta_n. \qquad (4.74)$$

З формули (4.74) видно, що чим складніша машина, тим більші втрати енергії і тим менший ККД. Причому загальний ККД машини при послідовному з'єднанні механізмів завжди менший за найменший ККД механізмів, які входять до його складу ($\eta_{заг} < \eta_{min}$). Це свідчить про те, що при послідовному

з'єднанні механізмів необхідно дуже старанно виготовляти кожний механізм, кожний вузол машини, інакше не можна домогтися високого ККД машини.

Паралельне з'єднання механізмів. На рис. 4.33 показано схему машини з паралельним з'єднанням механізмів. Робота рушійних сил $A_р$, яка підводиться до машини, розподіляється між окремими механізмами відповідно A_1, A_2, A_3, ..., A_n, які є для кожного механізму рушійними роботами, а значить,

$$A_р = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i . \qquad (4.75)$$

Кожний механізм відповідно виконує корисну роботу:

$$A_1' = A_1\eta_1, \quad A_2' = A_2\eta_2, \quad A_3' = A_3\eta_3, \quad ..., \quad A_n' = A_n\eta_n, \qquad (4.76)$$

де η_i — ККД i-го механізму.

Загальна корисна робота всієї машини дорівнює сумі робіт усіх механізмів, тобто

$$A_{к.о} = A_1' + A_2' + A_3' + ... + A_n' = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + ... +$$

$$+ A_n\eta_n = \sum_{i=1}^{n} A_i\eta_i . \qquad (4.77)$$

Тоді на основі (4.68) загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів має вигляд

$$\eta_{заг} = \frac{A_{к.о}}{A_р} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\eta_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + ... + A_n\eta_n}{A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n} . \qquad (4.78)$$

З формули (4.78) випливає, що механічний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів залежить не тільки від ККД окремих механізмів, але й від характеру розподілу роботи рушійних сил між механізмами. Очевидно, чим більша частина всієї затраченої роботи поступатиме в механізм з найбільшим ККД, тим значення ККД усієї машини буде більшим, і, навпаки, ККД машини буде тим меншим, чим більша частина $A_р$ надходитиме в механізм з найменшим ККД.

Цікаві окремі випадки ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів. Зокрема, якщо роботу рушійних сил $A_р$ розподілити рівномірно між механізмами ($A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$), то ККД машини (4.78) матиме вигляд

$$\eta_{заг} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + ... + \eta_n}{n}, \qquad (4.79)$$

де n — число механізмів.

З формули (4.79) видно, що загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів дорівнює середньому значенню ККД механізмів, які входять до складу машини. Очевидно, що $\eta_{заг}$ при паралельному з'єднанні механізмів не може бути меншим за найменший і більшим за найбільший ККД складових механізмів ($\eta_{min} \le \eta_{заг} \le \eta_{max}$). При паралельному з'єднанні низький ККД одного механізму менше впливає на значення ККД машини, ніж при послідовному з'єднанні механізмів.

Якщо у випадку, який розглянуто залежністю (4.79), прийняти ККД усіх механізмів однаковими ($\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = ... = \eta_n = \eta_м$), загальний ККД машини дорівнюватиме ККД окремого механізму ($\eta_{заг} = \eta_м$).

При складному (змішаному) з'єднанні механізмів для визначення ККД машини користуються загальною формулою (4.68). Остаточні формули ККД машини залежать від схеми сполучення механізмів, в якій завжди можна виділити послідовні та паралельні ланцюги з'єднаних між собою механізмів.

4.14. Загальні методи дослідження руху механізму

Для визначення закону руху початкової ланки механізму, яка визначає рух усіх інших ланок, використовують рівняння руху (4.57), (4.58) або (4.63), (4.64). Розв'язуючи їх відносно швидкості руху початкової ланки, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу. Для цього здебільшого використовують диференціальні рівняння (4.63), у ліві частини яких входить зведений момент сил $M_{зв}$, що є сумою зведених моментів рушійних сил $M_р$ і сил опору $M_о$, тобто $M_{зв} = M_р + M_о$. Як було показано (див. параграф 4.3), ці моменти можуть бути функціями узагальненої координати φ або її першої похідної $\dot{\varphi} = \omega$, або, нарешті, часу t.

Якщо розглянути можливі комбінації цих функцій, то можна встановити такі види рівнянь, в яких моменти $M_р$ і $M_о$ є функціями однієї й тієї самої змінної [4].

Перший вид рівнянь має вигляд

$$M_{\text{р}}(\varphi) - M_{\text{о}}(\varphi) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; \tag{4.80}$$

$$M_{\text{р}}(\omega) - M_{\text{о}}(\omega) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; \tag{4.81}$$

$$M_{\text{р}}(t) - M_{\text{о}}(t) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}. \tag{4.82}$$

У рівняннях (4.80) — (4.82) моменти $M_{\text{р}}$ рушійних сил і моменти $M_{\text{о}}$ сил опору в кожному з рівнянь є функціями або φ, або ω, або t. Проте часто трапляються випадки, коли $M_{\text{р}}$ і $M_{\text{о}}$ є функціями різних змінних. Тоді дістанемо рівняння другого виду

$$M_{\text{р}}(\varphi) - M_{\text{о}}(t) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; \tag{4.83}$$

$$M_{\text{р}}(\omega) - M_{\text{о}}(\varphi) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; \tag{4.84}$$

$$M_{\text{р}}(t) - M_{\text{о}}(\omega) = J_{\text{зв}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}. \tag{4.85}$$

Рівняння (4.80)—(4.85) у загальному випадку є нелінійними диференціальними рівняннями, розв'язати які можна тільки наближеними методами.

Можна побачити, що тільки рівняння (4.80) може бути розв'язане, і причому в квадратурах, а не в скінченному вигляді.

Дійсно, якщо $M_{\text{р}} = M_{\text{р}}(\varphi)$ і $M_{\text{о}} = M_{\text{о}}(\varphi)$, то згідно з рівнянням (4.62) рівняння (4.80) можна записати в такій формі:

$$(M_{\text{р}} - M_{\text{о}})d\varphi = d\left(\frac{J_{\text{зв}}\omega^2}{2}\right),$$

звідки маємо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i}(M_{\text{р}} - M_{\text{о}})d\varphi = \frac{J_{\text{зв}i}\omega_i^2}{2} - \frac{J_{\text{зв}0}\omega_0^2}{2}, \tag{4.86}$$

де $J_{\text{зв}i}$ і ω_i — зведений момент інерції і кутова швидкість ланки зведення у положенні i; $J_{\text{зв}0}$ і ω_0 — зведений момент інерції і ку-

това швидкість ланки зведення в початковому положенні. Рівняння (4.86) є рівнянням руху механізму у формі рівняння кінетичної енергії.

З рівняння (4.86) визначається кутова швидкість у положенні i:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{\text{зв}i}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_\text{р} - M_\text{о}) d\varphi + \frac{J_{\text{зв}0}}{J_{\text{зв}i}} \omega_0^2} \,. \tag{4.87}$$

З цієї формули випливає, що якщо задані функції $M_\text{р} = M_\text{р}(\varphi)$, $M_\text{о} = M_\text{о}(\varphi)$ і $J_\text{зв} = J_\text{зв}(\varphi)$, то для визначення кутової швидкості ω_i необхідно ще мати задане значення кутової швидкості ω_0. Якщо дослідження руху механізму починаються з моменту пуску його в хід, то кутова швидкість $\omega_0 = 0$ і формула (4.87) набуває вигляду

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{\text{зв}i}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_\text{р} - M_\text{о}) d\varphi} \,. \tag{4.88}$$

З формул (4.87) і (4.88) можна визначити значення кутової швидкості ланки зведення у функції її кута повороту, тобто $\omega = \omega(\varphi)$.

Для визначення часу t руху механізму можна скористатися умовою

$$\omega = d\varphi / dt, \tag{4.89}$$

звідки дістанемо

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}, \tag{4.90}$$

або

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}, \tag{4.91}$$

і далі

$$t_i = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \,. \tag{4.92}$$

Якщо дослідження руху механізму ведеться з початку пуску його в хід, то $t_0 = 0$ і рівняння (4.92) набуває вигляду

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \qquad (4.93)$$

З формул (4.92) або (4.93) можна визначити час t руху механізму як функцію кута φ повороту ланки зведення, тобто $t = t(\varphi)$. Таким чином, маємо дві функції: $\omega = \omega(\varphi)$ і $t = t(\varphi)$. Якщо виключити з них кут φ, можна дістати функцію $\omega = \omega(t)$ — залежність кутової швидкості ω від часу t. Кутове прискорення ε ланки зведення визначається із співвідношення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ або } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega\varphi'',$$

де $\varphi'' = \dfrac{d\omega}{d\varphi}$ — аналог кутових прискорень ланки зведення.

В окремих випадках, коли зведений момент інерції $J_{зв}$ сталий, формули (4.86) і (4.87) набувають вигляду

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_р - M_о)d\varphi = \frac{J_{зв}}{2}(\omega_i^2 - \omega_0^2),$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{зв}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_i}(M_р - M_о)d\varphi + \omega_0^2}. \qquad (4.94)$$

Якщо задано не зведені моменти, а зведені сили $F_р = F_р(s)$, $F_о = F_о(s)$ і зведена маса $m_{зв} = m_{зв}(s)$, де s — переміщення (шлях) точки зведення, то рівності, що здобуті при розв'язанні рівняння руху, будуть аналогічні рівнянням (4.86) і формулам (4.87), (4.92).

В окремих випадках рівняння (4.81) і (4.82) можна розв'язати в квадратурах, якщо зведені моменти інерції сталі ($J_{зв}$ = const). Тоді рівняння (4.81) матиме вигляд

$$M_р(\omega) - M_о(\omega) = J_{зв}\frac{d\omega}{dt}. \qquad (4.95)$$

Оскільки моменти $M_р = M_р(\omega)$ і $M_о = M_о(\omega)$ задані і відомий момент інерції $J_{зв}$, то рівняння (4.95) можна записати в такому вигляді:

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = J_{зв}\int_{\varphi_0}^{\varphi_i}\frac{d\omega}{M_р(\omega) - M_о(\omega)}. \qquad (4.96)$$

З рівняння (4.96) визначаємо час t руху механізму як функцію кутової швидкості, тобто $t = t(\omega)$. Якщо проінтегруємо ліву частину, то дістанемо

$$t_i = t_0 + J_{зв} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\omega}{M_p(\omega) - M_o(\omega)}. \qquad (4.97)$$

Рівняння (4.82) при $J_{зв} = \text{const}$ зводиться до вигляду

$$M_p(t) - M_o(t) = J_{зв} \frac{d\omega}{dt}. \qquad (4.98)$$

Оскільки моменти $M_p = M_p(t)$ і $M_o = M_o(t)$ — задані і відомий момент інерції $J_{зв}$, то з рівняння (4.98) маємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega_i} d\omega = \frac{1}{J_{зв}} \int_{t_0}^{t_i} [M_p(t) - M_o(t)]dt. \qquad (4.99)$$

З цього рівняння визначаємо кутову швидкість ω_i руху ланки зведення у функціях часу t:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{1}{J_{зв}} \int_{t_0}^{t_i} [M_p(t) - M_o(t)]dt. \qquad (4.100)$$

Одержати розв'язок рівнянь (4.83)—(4.85) у скінченному вигляді можна для окремих випадків, коли функції, які знаходяться в лівій частині цих рівнянь, досить прості.

У загальному випадку, як про це вже йшлося вище, рівняння (4.80)—(4.85) можуть бути проінтегровані наближеними методами. Таким методом, зокрема, може бути метод, запропонований Г. Г. Барановим, який полягає в тому, що кут повороту φ ланки зведення розбивається на досить малі інтервали $\Delta\varphi$, які беруться за крок інтегрування. У кожному інтервалі $\Delta\varphi$ задані функції зведених моментів рушійних сил M_p і сил опору M_o вважаються сталими, а зведений момент інерції $J_{зв}$ змінюється лінійно.

Позначимо ліві частини рівнянь (4.80)—(4.85) узагальнено у вигляді $M(\varphi, \omega, t)$, оскільки моменти M_p і M_o можуть бути функціями кута повороту φ, кутової швидкості ω і часу t.

Тоді ці рівняння можна записати в загальному вигляді так:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_{зв} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}. \qquad (4.101)$$

Оскільки

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi},$$

рівняння (4.101) можна записати в такому вигляді:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_{зв}\omega\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi},$$

або

$$\frac{2M(\varphi, \omega, t)}{\omega}d\varphi = 2J_{зв}d\omega + \omega dJ_{зв}. \qquad (4.102)$$

Замінюємо в рівнянні (4.102) $d\varphi$ кроком інтегрування $\Delta\varphi$. Тоді величину $d\omega$ приросту швидкості можна замінити різницею $(\omega_{i+1} - \omega_i)$, а величину $dJ_{зв}$ приросту зведеного моменту інерції — різницею $(J_{зв(i+1)} - J_{звi})$, де i та $i + 1$ — два положення ланки зведення, що відповідають початку і кінцю інтервалу $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

З урахуванням викладеного рівняння (4.102) матиме вигляд

$$\frac{2M(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{\omega_i}\Delta\varphi = 2J_{зв}(\omega_{i+1} - \omega_i) + \omega_i(J_{зв(i+1)} - J_{звi}). \qquad (4.103)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно кутової швидкості ω_{i+1}, дістанемо

$$\omega_{i+1} = \frac{M(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{J_{звi}\omega_i}\Delta\varphi + \frac{3J_{звi} - J_{зв(i+1)}}{2J_{звi}}\omega_i. \qquad (4.104)$$

Знаючи значення для $M(\varphi_i, \omega_i, t_i)$, $J_{звi}$, $J_{зв(i+1)}$ і ω_i з формули (4.104) при вибраному кроці інтегрування $\Delta\varphi$, можна визначити кутову швидкість ω_{i+1}. Виконуючи крок за кроком обчислення кутової швидкості ω_i, дістаємо функцію $\omega = \omega(\varphi)$.

Для визначення часу t руху ланки зведення можна використати умову

$$dt = d\varphi/\omega. \qquad (4.105)$$

Замінимо в цьому рівнянні dt на різницю $t_{i+1} - t_i$, $d\varphi$ — на крок $\Delta\varphi$ інтервалу і кутову швидкість ω — на її середнє значення $(\omega_{i+1} + \omega_i)/2$. У цьому разі можна записати

$$t_{i+1} - t_i = 2\Delta\varphi/(\omega_{i+1} + \omega_i), \qquad (4.106)$$

звідки визначаємо час в положенні $i + 1$:

$$t_{i+1} = t_i + 2\Delta\varphi/(\omega_{i+1} + \omega_i). \qquad (4.107)$$

Такий метод наближеного інтегрування можна використати як при аналітичному, так і при графічному зображенні всіх функцій, що входять у рівняння (4.80)—(4.85).

4.15. Дослідження руху механізмів методом Віттенбауера

Метод Віттенбауера випливає з відомої залежності кінетичної енергії механізму

$$T = J_{зв}\,\omega^2/2, \qquad (4.108)$$

де $J_{зв}$ — зведений момент інерції; ω — кутова швидкість ланки зведення механізму (машини). Залежність (4.108) можна записати так:

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{J_{зв}}}. \qquad (4.109)$$

Таким чином, кутову швидкість ланки зведення в кожному положенні механізму можна визначити, якщо відомо відношення його кінетичної енергії до зведеного моменту інерції, взятих для цього ж положення. Інакше кажучи, треба мати залежність $T = T(J_{зв})$, яка встановлює зв'язок між кінетичною енергією T і зведеним моментом інерції $J_{зв}$. Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Спочатку будують діаграми кінетичної енергії $T = T(\varphi)$ і зведеного моменту інерції $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ залежно від кута повороту ланки зведення, потім, на основі цих діаграм, будують діаграму $T = T(J_{зв})$, виключивши спільний параметр φ. Якщо побудова діаграми $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ не становить труднощів — це питання ми розглянули вище (параграф 4.9), то для побудови діаграми $T = T(\varphi)$ необхідно мати діаграми зведених моментів рушійних сил $M_р = M_р(\varphi)$ і сил опору $M_о = M_о(\varphi)$. Такі діаграми будують на основі механічних характеристик двигунів і робочих машин. Практично це досить складні задачі, які, як правило, розв'язуються з певним припущенням.

Нехай задано діаграми зведених моментів рушійних сил $M_р = M_р(\varphi)$ і сил опору $M_о = M_о(\varphi)$ як функції кута повороту початкової ланки (рис. 4.34, *а*). Маючи такі діаграми, можна знайти

роботу рушійних сил і сил опору. Робота зведеного моменту $M_р$ на вибраному інтервалі визначається за формулою

$$A_р = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_р d\varphi, \qquad (4.110)$$

де кут φ — кут повороту ланки зведення. Величина цієї роботи виражається в масштабі площею, що обмежена кривою $M_р = M_р(\varphi)$, віссю φ і крайніми ординатами вибраного інтервалу $\Delta\varphi$. Робота зведеного моменту $M_о$ виражається формулою $A_о = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_о d\varphi$ і площею, що обмежена кривою $M_о = M_о(\varphi)$, віссю φ і крайніми ординатами інтервалу $\Delta\varphi$.

Приріст кінетичної енергії механізму за будь-який проміжок часу, що виражається рівнянням

$$\Delta T = A_р - A_о, \qquad (4.111)$$

дорівнює різниці площі кривих $M_р = M_р(\varphi)$ і $M_о = M_о(\varphi)$, помноженій на відповідні масштаби моментів μ_M і кута повороту μ_φ. Наприклад, на ділянці *1—2* (рис. 4.34, *а*) робота зведеного моменту $M_р$ виражається площею (11′2′2) мм^2, помноженою на масштаби μ_M і μ_φ, а робота зведеного моменту $M_о$ — площею (11″2″2), помноженою на ці самі масштаби. Приріст кінетичної енергії ΔT_{12} визначається тоді площею (1″1′2′2″), помноженою на ті самі масштаби, тобто

$$\Delta T_{12} = A_р - A_о = \mu_M \mu_\varphi \text{ [пл. (11′2′2) – пл. (11″2″2)]} =$$

$$= \mu_M \mu_\varphi \text{пл. (1′2′2″1″)}.$$

Приріст кінетичної енергії на ділянці *2—3* пропорційний площі (2″2′3′3″), на ділянці *3—4* — площі (3″3′4′4″) і т. д.

Таким чином, зміна кінетичної енергії завжди пропорційна площі, яка знаходиться між кривими моментів рушійних сил і сил опору (на рис. 4.34, *а* ці площі заштриховані). Цим площам треба приписувати знак "+" або "–" залежно від того, яка робота буде більша: моменту рушійних сил чи моменту сил опору. Так, на інтервалі *1—7* крива моменту рушійних сил розміщена вище від кривої моментів сил опору, отже, приріст кінетичної енергії додатний і, навпаки, на інтервалі *7—10* приріст кінетичної енергії від'ємний і т. п. За весь час роботи механізму від точки *1* до точки *37* приріст кінетичної енергії дорівнює нулю,

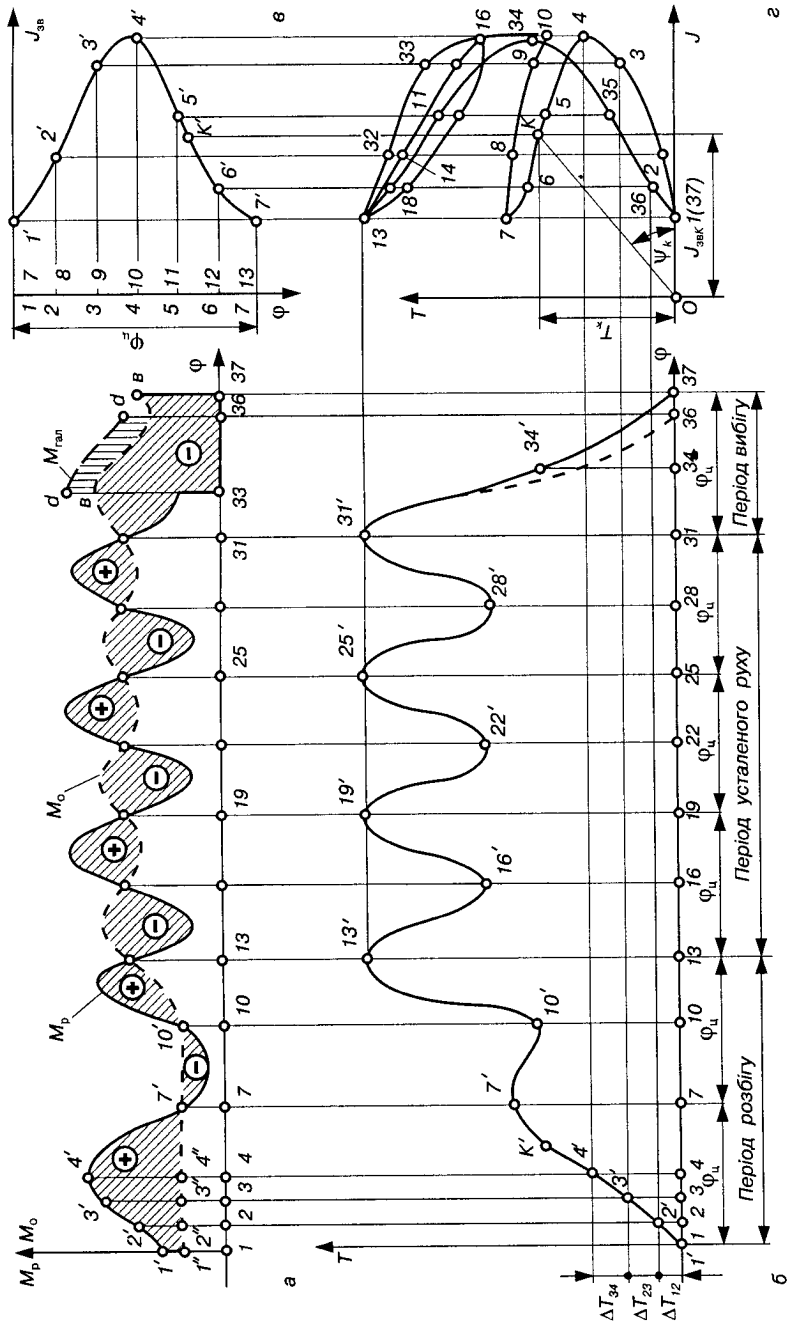


Рис. 4.34.

тобто сума всіх заштрихованих площадок зі знаком "+" повинна дорівнювати сумі площадок із знаком "–", оскільки в момент пуску механізму і момент його зупинки швидкість ланки зведення дорівнює нулю. Така сама рівність повинна мати місце і за час усталеного руху (*13—31*), оскільки в цьому випадку швидкість ланки зведення механізму через кожний цикл повертається до попереднього значення.

На рис. 4.34, *а* умовно показано три повних цикли $\varphi_ц$ усталеного руху. Практично число цих циклів може бути різним залежно від часу безперервної роботи машини.

Підрахувавши величини вказаних вище площадок, можна побудувати діаграму $T = T(\varphi)$ зміни кінетичної енергії ланки зведення у функції кута повороту φ (рис. 4.34, *б*). Побудову почнемо з першого інтервалу *1—2*. Обчислюємо площу (*1′2′2″1″*) у квадратних міліметрах. Нехай ця площа дорівнює S_{12} (мм^2). Тоді приріст кінетичної енергії на цьому інтервалі визначається за формулою

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_M \mu_\varphi S_{12}.$$

Оскільки механізм почав рухатися з положення, що відповідає точці *1*, то очевидно, що початковий запас кінетичної енергії T_1 дорівнює нулю і повний запас кінетичної енергії механізму в положенні *2* виразиться величиною $T_2 = \Delta T_{12}$. Цю величину відкладаємо у вигляді відрізка *2—2′* в масштабі $\mu_T = \mu_M \mu_\varphi$ на ординаті, проведеній у точці *2* (рис. 4.34, *б*). Маємо

$$T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{12} = \mu_T (2 - 2').$$

Далі обчислюємо наступну площадку S_{23} = (*2″2′3′3″*), мм^2. З попереднього маємо

$$\Delta T_{23} = T_3 - T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{23} = \mu_T (3'' - 3'),$$

тобто приріст кінетичної енергії на ділянці *2—3* виражається площею (*2″2′3′3″*) [мм^2], помноженою на добуток масштабів μ_M і μ_φ. Знайдену величину ΔT_{23} відкладаємо на ординаті в точці *3* у вигляді відрізка *3″ – 3′* у масштабі μ_T, додаючи його до попереднього відрізка — (*3 – 3′*) = (*2 – 2′*) + (*3″ –3′*) і т. п. Ординати діаграми кінетичної енергії збільшуються до положення *7*, де в точці *7* вона має вершину, що відповідає одному з максимумів кінетичної енергії. Далі на ділянці *7—10* крива опускається, оскільки заштрихована площа, що міститься між цими точками осі абсцис, має знак "–" ($M_o > M_p$). Починаючи з точки *10*, крива кінетичної енергії підіймається до положення *13*, де ця крива знов має вер-

шину в точці *13′* і т. п. На ділянці *13—31*, де діаграма описує усталений рух, крива повторюється через кожний цикл руху механізму, що відповідає куту $\varphi_ц$, причому ордината її досягає то свого максимуму, то свого мінімуму. У положенні *31* ордината кривої $T = T(\varphi)$ має останній максимум, після чого спадає завдяки наявності на ділянці *33—37* тільки сил опору, а на ділянці *31—33* $M_o > M_р$. Точка *37* відповідає моменту зупинки механізму, тобто повному вичерпанню кінетичної енергії, зібраної в період розгону. Очевидно, що витрати нагромадженої кінетичної енергії можна прискорити, ввівши додаткові опори (гальма). На рис. 4.34, *б* гальмівний момент $M_{гал}$ зображено штриховою лінією.

Діаграму зведених моментів інерції досить побудувати тільки для одного циклу $\varphi_ц$ роботи механізму (рис. 4.34, *в*), оскільки $J_{зв}$ є функцією положень механізму φ (див. параграф 4.9). Для зручності наступної побудови кривої Віттенбауера діаграму $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ повернуто на 90°.

Маючи діаграми $T = T(\varphi)$ і $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$, будуємо діаграму $T = T(J_{зв})$ (рис. 4.34, *г*). Для цього на осі ординат відкладаємо значення кінетичної енергії, що визначаються відрізками *1—1′*, *2 —2′*, *3—3′* і т. п. діаграми $T = T(\varphi)$, а по осі абсцис — значення зведеного моменту інерції, що визначається відрізками *1—1′*, *2 —2′*, *3—3′* і т. п. діаграми $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$. Знайдені точки *1*, *2*, *3* і т. п. у системі координат $T - J_{зв}$ послідовно з'єднуємо плавною кривою, дістаємо криву кінетичної енергії T як функцію зведеного моменту інерції, тобто залежність $T = T(J_{зв})$. Цю криву називають ***кривою Віттенбауера*** за ім'ям австрійського вченого, який вперше розглянув цей метод.

За допомогою кривої Віттенбауера легко встановити залежність кутової швидкості ланки зведення у функції кута повороту φ.

Виберемо на кривій $T = T(J_{зв})$ яку-небудь точку K і з'єднаємо цю точку з точкою O — початком координат (рис. 4.34, *г*). Позначимо кут, утворений прямою OK з віссю абсцис, ψ_K. Оскільки по осі абсцис відкладено зведений момент інерції $J_{звK}$ у масштабі μ_J, що відповідає точці K, по осі ординат — кінетичну енергію T_K, що відповідає тій самій точці K у масштабі μ_T, то очевидно, що відношення цих величин дасть тангенс кута ψ_K нахилу кривої OK до осі $J_{зв}$, тобто

$$\frac{T_K}{J_{звK}} = \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}\psi_K . \qquad (4.112)$$

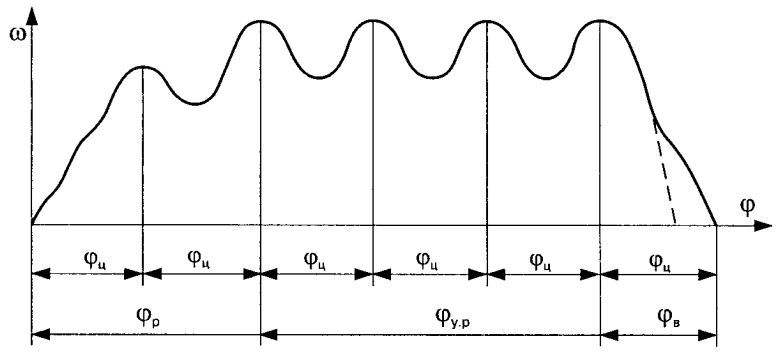


Рис. 4.35.

Тоді швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається точкою K, знаходимо за формулою (4.109), тобто

$$\omega_K = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}\psi_K}. \qquad (4.113)$$

Аналогічно визначають швидкості ланки зведення в інших положеннях механізму. Використовуючи ці значення, можна побудувати графік кутової швидкості ω ланки зведення як функції кута φ, тобто графік ω = ω(φ) (рис. 4.35).

Графік часу t руху як функції кута φ можна побудувати, якщо використати формулу (4.91), оскільки будь-який проміжок часу від початку руху до даного моменту часу t_i визначається за формулою

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \qquad (4.114)$$

Інтеграл у правій частині формули (4.114) можна визначити графічно, якщо побудувати графік величини ω(φ) як функцію кута φ, оскільки відома функція ω = ω(φ). За графіками ω = = ω(φ) і $t = t(\varphi)$ можна побудувати графік ω = ω(t). Кутове прискорення ε ланки зведення визначається графічним диференціюванням функції ω = ω(t).

Знаючи кутову швидкість ω і кутове прискорення ε ланки зведення, можна визначити швидкості, прискорення і сили інерції окремих ланок, а також виконати повний силовий розрахунок механізму в умовах нерівномірного обертового руху ланки зведення.

Таким чином, за допомогою кривої Віттенбауера можна повністю дослідити рух машинного агрегату при силах, що залежать від положення ланки зведення.

4.16. Дослідження руху механізмів методом Жуковського

Рух механізму (машини) можна дослідити методом, запропонованим М. Є. Жуковським.

Напишемо рівняння руху механізму (4.63) в такому вигляді:

$$M_{зв} - J_{зв}\frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{dJ_{зв}}{d\varphi} = 0. \qquad (4.115)$$

Це рівняння є умовою динамічної рівноваги ланки зведення. Цим рівнянням можна скористатися для наближеного дослідження закону руху ланки зведення механізму при його усталеному русі.

Найчастіше при кінематичному дослідженні механізмів припускається, що кутова швидкість ланки зведення стала і дорівнює середній кутовій швидкості, внаслідок чого динамічні навантаження на ланки враховують не досить точно. Для точнішого врахування динамічних навантажень на ланки механізму дійсний рух ланки розкладається на два умовних рухи.

У кожному заданому положенні в загальному випадку ланка зведення має певну кутову швидкість ω і кутове прискорення $\varepsilon = d\omega/dt$.

У рівнянні (4.115) член $-J_{зв}\, d\omega/dt$ перетворюється в нуль при рівномірному обертанні ланки зведення, тобто при $\varepsilon = 0$, член $-\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}$ дорівнює нулю при $\omega = 0$. Тому можна уявити собі дійсний рух ланки зведення як результат накладання двох рухів, з яких перший, що називається ***основним*** або, за термінологією М. Є. Жуковського, ***перманентним,*** відбувається із сталою кутовою швидкістю, що дорівнює дійсній миттєвій кутовій швидкості ω ланки зведення. Другий рух, що називається ***додатковим*** або ***початковим***, відбувається з кутовою швидкістю $\omega = 0$ і з кутовим прискоренням, що дорівнює дійсному кутовому прискоренню ε.

Внаслідок такого умовного розкладу руху обертової ланки дістанемо два динамічні моменти, що визначаються другим і

третім доданками рівняння (4.115). Позначаючи зазначені моменти через $M_{і.д}$ і $M_{і.о}$, маємо

$$M_{зв} + M_{і.д} + M_{і.о} = 0, \tag{4.116}$$

де

$$M_{і.о} = -\frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}, \tag{4.117}$$

$$M_{і.д} = -J_{зв}\frac{d\omega}{dt} \tag{4.118}$$

є зведені моменти інерції відповідно в основному і додатковому русі.

Для визначення динамічного моменту $M_{і.о}$ в основному русі маємо рівняння (4.117), яке можна розв'язати різними способами. Якщо зведений момент інерції $J_{зв}$ задано аналітично у вигляді функції $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$, то легко можна дістати похідну $dJ_{зв}/d\varphi = f(\varphi)$ і далі для сталого заданого значення кутової швидкості ω знайти функцію $M_{і.о} = M_{і.о}(\varphi)$. Якщо функцію $J_з = J_{зв}(\varphi)$ задано у вигляді графіка, то $dJ_{зв}/d\varphi$ можна визначити методом графічного диференціювання, після чого легко побудувати графік $M_{і.о} = M_{і.о}(\varphi)$.

Момент $M_{і.о}$ можна також обчислити, якщо скористатися важелем Жуковського (див. параграф 4.7). Для цього визначаються всі сили інерції ланок за умови, що ланка зведення обертається зі сталою швидкістю ω. Далі будується повернутий план швидкостей – важіль Жуковського, у відповідних точках якого прикладаємо сили інерції. Склавши рівняння рівноваги цих сил відносно полюса повернутого плану швидкостей, знаходимо зрівноважувальну силу або момент. Враховуючи, що зведена і зрівноважувальна сили рівні між собою за величиною і направлені в протилежні боки, знаходимо зведену силу або момент сил інерції, які і будуть визначати момент сил інерції $M_{і.о}$ в основному русі.

Метод Жуковського має особливу цінність при загальному динамічному дослідженні механізмів, включаючи й силовий розрахунок.

Як було показано вище, силовий розрахунок механізмів роблять у припущенні, що кутова швидкість початкової ланки (ланки зведення) стала і дорівнює середній кутовій швидкості усталеного руху. Таким чином, силовий розрахунок проводиться

для основного руху механізму, тобто коли кутове прискорення $\varepsilon = 0$. У цьому русі визначаються всі сили інерції ланок, реакції в кінематичних парах і зусилля, що діють на ланки. Після цього можна, використовуючи рівняння (4.115), визначити кутове прискорення $\varepsilon = d\omega/dt$. Кутове прискорення початкової ланки спричинить появу додаткових прискорень усіх ланок механізму, отже, призведе до появи додаткових сил інерції, які можна визначити, коли будуть відомі додаткові прискорення, що виникають від кутового прискорення ε.

Додаткові прискорення і повні прискорення ланок механізму легко визначити, якщо застосувати метод Жуковського і поділити рух механізму на основний і додатковий.

Покажемо це на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис. 4.36). Розглянемо основний рух механізму при $\omega_1 = \text{const}$ і $\varepsilon_1 = 0$, будуємо плани швидкостей (рис. 4.36, *б*) і прискорень (на рис. 4.36, *в* цей план показано суцільними лініями).

Визначивши за допомогою рівняння (4.115) кутове прискорення $\varepsilon_1 = d\omega/dt$, розглядаємо додатковий рух механізму при $\omega_1 = 0$. Якщо кутова швидкість початкової ланки $\omega_1 = 0$, то нулю дорівнюють і швидкості всіх інших ланок, а значить, і всі нормальні прискорення, тобто точки механізму мають тільки тангенціальне

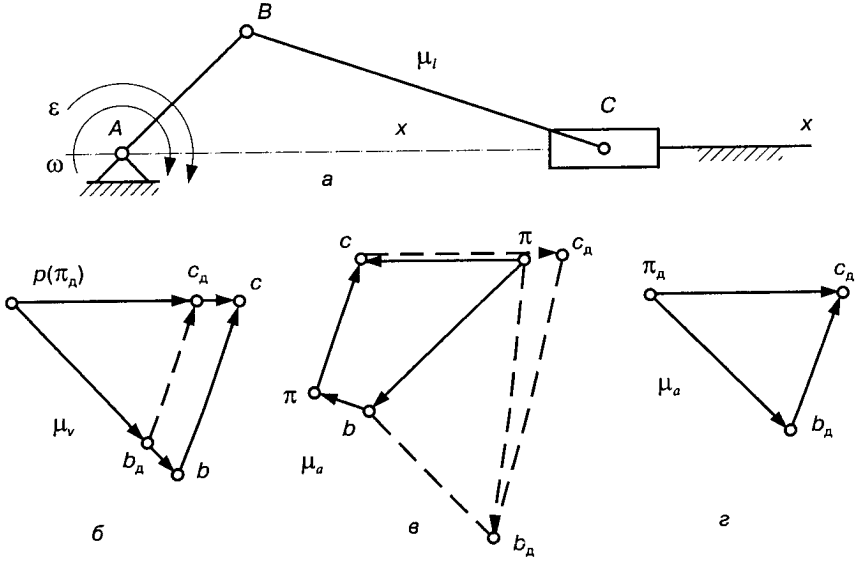


Рис. 4.36.

прискорення. Але вектори тангенціальних прискорень точки B збігаються з векторами її швидкостей (див. рис. 4.36, *а*). Отже, план додаткових прискорень (рис. 4.36, *г*) подібний до плану швидкостей (рис. 4.36, *б*). Відрізок $\pi_д b_д$ зображує в масштабі μ_a додаткове тангенціальне прискорення точки B : $a^{\tau}_{B\,д} = \mu_a(\pi_д b_д)$; відрізок $\pi_д c_д$ – додаткове прискорення точки C : $a_{C\,д} = \mu_a(\pi_д c_д)$ і т. п.

Неважко помітити, що завдяки подібності планів швидкостей (рис. 4.36, *б*) і додаткових прискорень (рис. 4.36, *г*) плани останніх можна окремо не будувати, а скористатися планом швидкостей. Цю побудову показано на рис. 4.36, *б* штриховою лінією.

Визначивши додаткове прискорення, можна знайти повні прискорення ланок механізму, якщо до векторів плану прискорень (рис. 4.36, *б*) основного руху додати відповідні вектори прискорень, взяті з плану додаткових прискорень (рис. 4.36, *г*). На рис. 4.36, *в* це додавання векторів зображено штриховими лініями. Тоді повні прискорення точок B і C відповідно матимуть вигляд

$$a_B = \mu_a(\pi b_д),\ a_C = \mu_a(\pi c_д).$$

Визначивши додаткові прискорення, неважко за ними обчислити всі сили інерції ланок і зробити всі необхідні зміни в початковому силовому розрахунку, виконаному в припущенні, що кутова швидкість початкової ланки стала.

РОЗДІЛ 5

НЕРІВНОМІРНІСТЬ І РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

5.1. Постановка задачі

Одною з важливих задач динаміки механізмів і машин є задача про визначення найвигідніших співвідношень сил, мас і швидкостей ланок механізмів, які забезпечують заданий режим руху механізму або машини.

Як показано у розділі 4, у загальному випадку швидкості початкової ланки механізму при усталеному русі механізму є змінними величинами. Коливання швидкостей цієї ланки спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують загальний ККД машини і надійність її роботи. Крім цього, такі коливання в ланках механізмів і машин небажані з точки зору як міцності цих ланок, так і втрати потужності, витраченої на ці пружні коливання. Нарешті, коливання швидкостей можуть погіршити той технологічний процес, який виконує машина.

Коливання швидкостей початкової ланки за час усталеного руху бувають ***двох різних типів***. Справді, як було встановлено вище, у більшості машин тільки за повний цикл усталеного руху робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору. Всередині ж циклу немає рівності цих робіт і, отже, початкова ланка машини рухається всередині циклу нерівномірно. Оскільки через кожний повний цикл часу усталеного руху кінетична енергія машини набуває початкового значення, то очевидно, що швидкості початкової ланки машини також періодично повто-

рюватимуться з тим самим періодом. Такі коливання швидкостей назвемо ***періодичними.***

Отже, ***періодичними коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.***

Крім періодичних коливань швидкостей у машині можуть бути і ***неперіодичні коливання*** швидкостей, що залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т. п. Така раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини, і оскільки ці коливання не мають певного циклу, то такі коливання швидкості машини назвемо неперіодичними. У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Коливання швидкості під час усталеного руху можуть досягти такої величини, яка неприпустима з точки зору забезпечення всіх належних умов роботи машини. Тоді може виникнути питання про регулювання у наперед заданих межах величини цих коливань. Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини або механізму має велике значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

5.2. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машини

Для зручності вивчення періодичних коливань під час усталеного руху запровадимо поняття ***середньої швидкості ланки зведення*** ω_c (або v_c) механізму чи машини і далі розглянемо задачу для цього часу руху.

Позначимо шлях, який проходить точка A, вибрана на ланці зведення, за один цикл її руху від положення i до положення k через s. Назвемо ***дійсною середньою швидкістю*** $v_{с.д}$ швидкість такого рівномірного руху, при якому точка A пройшла б шлях s за той самий проміжок часу t, який потрібний і при нерівномірному русі, тобто $v_{с.д} = s/t$.

Оскільки $dt = ds/v$, то

$$t = t_k - t_i = \int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}, \tag{5.1}$$

звідки

$$v_{\text{с.д}} = \frac{s}{\int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}}. \tag{5.2}$$

Дійсну середню швидкість часто замінюють середньою арифметичною швидкістю

$$v_{\text{с.а}} = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}, \tag{5.3}$$

де $v_{\max}$ і $v_{\min}$ — максимальні й мінімальні значення швидкості точки A (рис. 5.1). Для машин з великою рівномірністю ходу різниця між цими значеннями настільки мала, що нею можна знехтувати.

У паспорті двигуна або робочої машини така умовна середня швидкість звичайно вказана; в цьому разі її, як правило, називають номінальною швидкістю (від латинського *nomen*, що означає ім'я, назва).

Для механізмів з малою рівномірністю руху краще користуватися дійсною середньою швидкістю. Нерівномірність руху механізму чи машини характеризується так званим ***коефіцієнтом нерівномірності руху*** δ, який виражається відношенням різниці максимального і мінімального значення швидкості точки A (рис. 5.1) до її середнього значення, тобто

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_c}. \tag{5.4}$$

Очевидно, що чим менша різниця між $v_{\max}$ і $v_{\min}$, тим рівномірніше рухається ланка зведення.

Задача регулювання руху механізмів або машин в період їх усталеного руху зводиться до підбору такого співвідношення мас ланок механізмів і діючих на них сил, при якому коефіцієнт нерівномірності руху δ ***не перевищував би наперед заданого значення.***

На практиці величина δ коливається в широких межах.

Нижче наведено допустимі значення коефіцієнтів нерівномірності руху для деяких типів машин (таблиця).

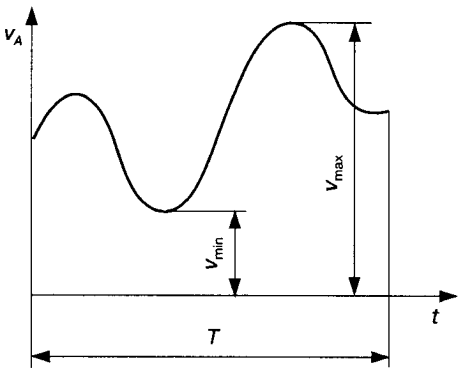


Рис. 5.1.

При обертовому русі ланки зведення зручно середню швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини виражати через кути повороту і кутові швидкості цієї ланки. Тоді за аналогією з рівняннями (5.2)—(5.4) матимемо: для дійсної середньої кутової швидкості

$$\omega_{c.д} = \varphi \Big/ \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega}; \qquad (5.5)$$

для середньої арифметичної кутової швидкості

$$\omega_{c.a} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}; \qquad (5.6)$$

для коефіцієнта нерівномірності руху

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c}. \qquad (5.7)$$

Проте треба мати на увазі, що коефіцієнт нерівномірності руху характеризує тільки перепад кутових швидкостей ланки зведення в межах від ω_{min} до ω_{max}, але не характеризує динаміки руху цієї ланки всередині одного повного періоду усталеного руху. Так, на рис. 5.2, *а, б* показано дві діаграми залежності $\omega = \omega(\varphi)$,

Таблиця

КОЕФІЦІЄНТИ НЕРІВНОМІРНОСТІ РУХУ ДЕЯКИХ МАШИН

Тип машин	Коефіцієнт нерівномірності руху, δ
Насоси	1/5...1/30
Сільськогосподарські машини	1/5...1/50
Металообробні верстати	1/20...1/50
Ткацькі, поліграфічні та борошномельні машини	1/10...1/50
Бавовнопрядильні машини	1/60...1/100
Суднові двигуни	1/20...1/150
Двигуни внутрішнього згоряння	1/80...1/100
Компресори	1/50...1/100
Електричні генератори постійного струму	1/100...1/200
Електричні генератори змінного струму	1/200...1/300
Авіаційні двигуни, турбогенератори	1/200 і менше

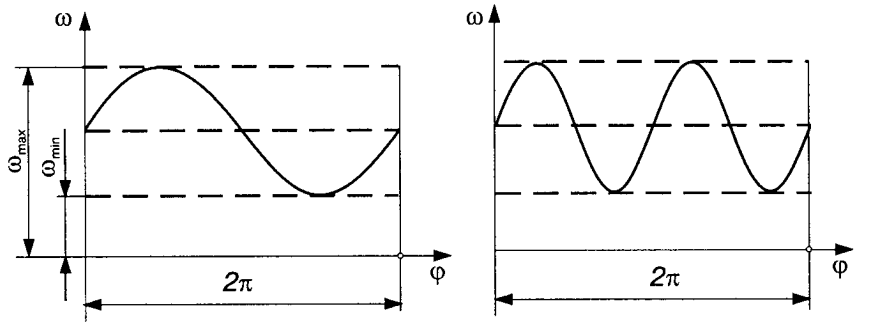


Рис. 5.2.

в яких ω_{max} і ω_{min} рівні, але кутові прискорення $\varepsilon = d\omega/dt$ на рис. 5.2, *б* значно більші, ніж на рис. 5.2, *а*. Динамічні характеристики механізмів з цими значеннями ε різні. Для характеристики динамічних властивостей механізму або машини може бути використаний так званий ***коефіцієнт динамічності*** $k_д$, під яким розуміють відношення екстремального (найбільшого) значення кутового прискорення ε_{max} до квадрата середньої кутової швидкості ω_c:

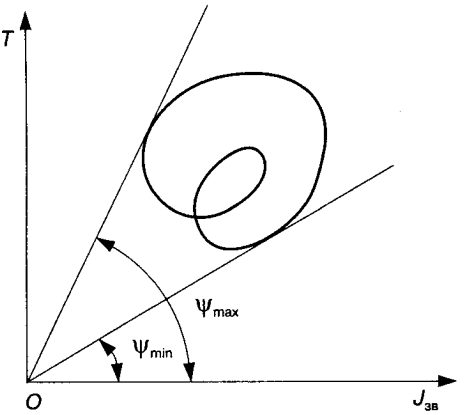


Рис. 5.3.

$$k_д = \varepsilon_{max} / \omega_c^2 .$$

5.3. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху машини за допомогою кривої Віттенбауера

Якщо побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, неважко визначити значення коефіцієнта нерівномірності руху під час усталеного руху. На ділянці усталеного руху ця крива має бути замкненою, оскільки ті самі значення величин T і $J_{зв}$ періодично повторюються через кожний цикл. На рис. 5.3 зображено частину кривої $T = T(J_{зв})$, що відповідає періоду усталеного руху.

Для визначення коефіцієнта δ необхідно мати значення максимальної ω_{max} і мінімальної ω_{min} швидкості ланки зведення (5.5), (5.6). З формули (4.113) випливає, що максимальна кутова швидкість ω_{max} за час усталеного руху відповідає максимальному значенню тангенса кута ψ_{max} (див. рис. 5.3), мінімальна кутова швидкість ω_{min} відповідає мінімальному значенню того самого кута ψ_{min}. Для визначення цих кутів проводимо з точки O до кривої $T = T(J_{зв})$ дві дотичні: під найбільшим ψ_{max} і найменшим ψ_{min} кутами. Тоді згідно з рівнянням (4.113) можна записати

$$\omega_{max}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \operatorname{tg}\psi_{max};\ \omega_{min}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \operatorname{tg}\psi_{min}, \qquad (5.8)$$

де $\mu_T, \mu_{J_{зв}}$ — масштаби кінетичної енергії і зведеного моменту інерції.

Помноживши чисельник і знаменник правої частини формули (5.7) на $(\omega_{max} + \omega_{min})$, матимемо

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c} \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_c^2}, \qquad (5.9)$$

оскільки $\omega_c = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$.

Підставляючи у формулу (5.9) вирази (5.8), маємо

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_{зв}}} \frac{\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min}}{\omega_c^2}. \qquad (5.10)$$

Кути ψ_{max} і ψ_{min} визначаються безпосередньо з рисунка, а величина ω_c — за формулами (5.5) або (5.6).

Коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини можна також визначити за діаграмою швидкостей, побудованою на рис. 4.35. Для цього знаходимо v_{max} і v_{min} і підставляємо їх значення у формулу (5.7).

5.4. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

Як показано вище, за допомогою кривої Віттенбауера $T = T(J_{зв})$ для періоду усталеного руху можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини. Тоді, очевидно, якщо при заданій зведеній масі і кінетичній енергії відома за-

лежність між ними, тобто побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, завжди можна з'ясувати питання, як мають бути змінені ці величини (зведений момент інерції $J_{зв}$ і кінетична енергія T) для забезпечення заданого коефіцієнта нерівномірності δ. Для розв'язання цієї задачі запишемо формули, які дають змогу визначити значення кутів ψ_{max} і ψ_{min} (див. рис. 5.3), що відповідають заданим δ і діаграмі $T = T(J_{зв})$.

Розв'язуючи рівняння (5.6) і (5.7) відносно ω_{min} і ω_{max}, знаходимо

$$\omega_{max} = \omega_c\left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \ \omega_{min} = \omega_c\left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \tag{5.11}$$

Підносячи праві і ліві частини цих рівнянь до квадрата, записуємо

$$\omega_{max}^2 = \omega_c^2\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_c^2(1 + \delta);$$

$$\omega_{min}^2 = \omega_c^2\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_c^2(1 - \delta). \tag{5.12}$$

При малих значеннях коефіцієнтів δ членом $\delta^2/4$ можна знехтувати. Для машин з великою нерівномірністю δ цей член треба враховувати. Підставляючи в рівняння (5.12) вирази для ω_{max}^2 і ω_{min}^2 з формул (5.8), після відповідних перетворень дістаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_{max} &= \frac{\mu_{J_{зв}}}{2\mu_T}\omega_c^2\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{зв}}}{2\mu_T}\omega_c^2(1 + \delta); \\ \operatorname{tg}\psi_{min} &= \frac{\mu_{J_{зв}}}{2\mu_T}\omega_c^2\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{зв}}}{2\mu_T}\omega_c^2(1 - \delta). \end{aligned} \tag{5.13}$$

За допомогою рівнянь (5.13) для заданої кутової швидкості ω_c і для будь-якого значення коефіцієнта нерівномірності руху δ можна визначити відповідні кути ψ_{max} і ψ_{min}.

Покажемо, як на практиці використати ці залежності. Нехай для деякого механізму або машини буде побудовано діаграму $T = T(J_{зв})$, яку в нашому випадку досить побудувати тільки для періоду усталеного руху (рис. 5.4). Провівши з початку координат O до кривої Віттенбауера дотичні під кутами ψ_{max} і ψ_{min}, знай-

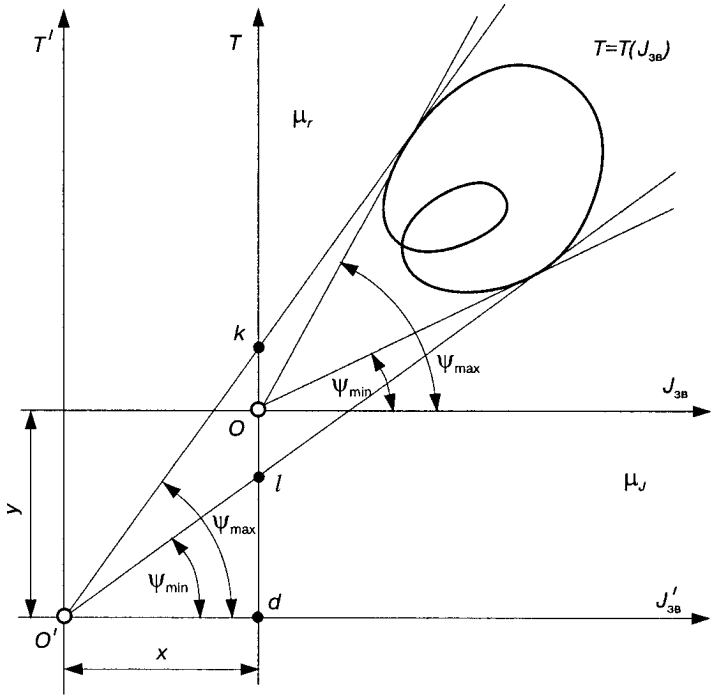


Рис. 5.4.

демо за формулою (5.10) коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини.

Припустимо, що коефіцієнт δ буде більшим від допустимого значення $\delta_{доп}$ для заданого типу машин. Тоді, підставивши в залежність (5.13) замість δ допустиме його значення $\delta_{доп}$, запишемо значення кутів ψ'_{max} і ψ'_{min}, під якими проводимо дотичні до кривої Віттенбауера (рис. 5.4), і знайдемо їх точку перетину O'. Очевидно, якби початок координат діаграми $T = T(J_{зв})$ знаходився в точці O', то коефіцієнт нерівномірності δ дорівнював би $\delta_{доп}$, тобто якщо перейти від системи координат $TOJ_{зв}$ до $T'O'J'_{зв}$, то задача про регулювання руху механізму або машини була б розв'язана. При цьому переході кінетична енергія збільшується на величину T_0, а зведений момент інерції — на величину J_0. Відрізки x і y, виміряні в міліметрах, зображують у вибраних масштабах μ_J і μ_T величини додаткового зведеного моменту інерції J_0 і додаткової кінетичної енергії T_0, які не-

обхідні для того, щоб машина працювала з вибраним коефіцієнтом нерівномірності $\delta_{доп}$. Отже,

$$J_0 = x\mu_J;\ T_0 = y\mu_T. \qquad (5.14)$$

З побудови безпосередньо випливає, що чим менший коефіцієнт нерівномірності δ, тим менша різниця між кутами ψ_{max} і ψ_{min} і тим далі від кривої $T = T(J_{зв})$, що відповідає часові усталеного руху, буде початок координат. Тобто при зменшенні δ зростає зведена маса машини та її кінетична енергія, потрібна для надання руху машині із заданою середньою швидкістю ω_c. Отже, збільшення рівномірності руху ланки зведення можна досягти, збільшивши зведений момент інерції механізму чи машини. Збільшити зведені маси або зведений момент інерції можна за рахунок збільшення мас окремих ланок механізму. Практично це збільшення мас здійснюється за допомогою посадки на один з валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь називається ***маховим колесом,*** або ***маховиком***. Як показано вище, для забезпечення заданого коефіцієнта нерівномірності $\delta_{доп}$ треба збільшити зведений момент інерції механізму або машини на величину J_0 (5.14). Величина цього додаткового моменту і визначає момент інерції маховика, тобто

$$J_м = J_0 = \mu_J x. \qquad (5.15)$$

Завданням маховика є регулювання періодичних коливань швидкості початкової ланки, які зумовлені властивостями самих механізмів або періодичною зміною співвідношень величин рушійних сил і сил опору. Підбором моменту інерції маховика можна змусити початкову ланку механізму рухатись з наперед заданим відхиленням від деякої її середньої швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії механізмів або машини, що нагромаджує її в моменти прискорення руху механізмів і віддає назад у моменти сповільнення руху машини. Для кращого розуміння дії маховика як гасителя коливань швидкості обертання тіла біля його середнього значення на рис. 5.5 показано дві діаграми $\omega = \omega(t)$: *1* — машини без маховика, *2* — машини з маховиком. Введення маховика в машину дає змогу зменшити коливання швидкості відносно її середнього значення ω_c, тому при збільшенні швидкості обертання ланки зведення (на рис. 5.5 ділянки *ab*, *cd*) частина кінетичної енергії машини йде на збільшення кінетичної енергії маховика ($\omega'_{max} < \omega_{max}$), і, навпаки, коли швидкість обертання зменшується, маховик від-

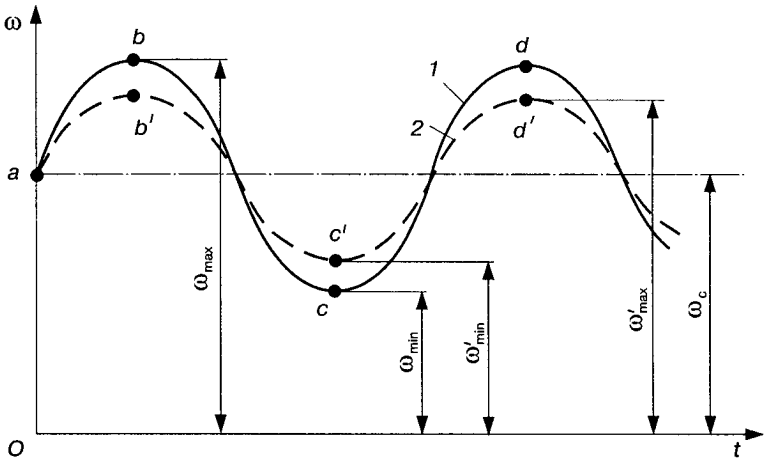


Рис. 5.5.

дає частину нагромадженої кінетичної енергії машині, завдяки чому зміна швидкості буде менша ($\omega'_{max} - \omega'_{min} < \omega_{max} - \omega_{min}$). Крива $\omega = \omega(t)$ попаде не в точку c, а в точку c'. У деяких робочих машинах, в яких корисне навантаження періодично змінюється в широких межах (дробарки, прокатні стани і т. п.), маховик акумулює дуже значні запаси кінетичної енергії в моменти прискорення руху, тобто в моменти зниження корисних навантажень. Така акумулююча роль маховика дає можливість використати нагромаджену ним енергію для подолання підвищення корисних навантажень без збільшення потужності двигуна. Цю властивість маховика інколи використовують у транспортних машинах.

Для зменшення коливань швидкості маховик повинен мати відповідний момент інерції. Згідно з формулою $M_{зв} = M_р - M_0 = J\varepsilon$

$$\varepsilon = M_{зв} / J. \qquad (5.16)$$

Отже, чим більший момент інерції J обертових мас (включаючи маховик) при тому самому зведеному (надлишковому) моменту сил, тим менше кутове прискорення ε ланки зведення, а значить, тим менша зміна кутової швидкості. На основі того, що $\varepsilon = d\omega/dt$, залежність (5.16) можна записати у вигляді

$$d\omega = \frac{M_{зв}}{J} dt . \qquad (5.17)$$

Звідси видно, що при всіх інших однакових умовах зміна кутової швидкості $d\omega$ прямо пропорційна часу дії надлишкового моменту $M_{зв}$. Це показує, що результуюча дія маховика найефективніша при короткочасних коливаннях обертового моменту $M_{зв}$, а також при різних (миттєвих) змінах опору. Маховик не допоможе, якщо, наприклад, при тому ж навантаженні на паровий двигун упаде тиск пари в котлі або при цьому ж тиску значно збільшилось на тривалий час навантаження. У таких випадках використовуються ***регулятори швидкості***, мова про які буде далі (параграф 5.5).

Для більшої ефективності дії маховика, зменшення маси, габаритів доцільно його ставити на швидкохідний вал, оскільки кінетична енергія маховика, в результаті зміни якої здійснюється регулювання швидкості машини, виражається формулою

$$T = \frac{J_м \omega^2}{2}. \tag{5.18}$$

Звідси видно, що ця енергія прямо пропорційна ω^2. Цим дуже часто користуються на практиці, встановлюючи маховик на швидкохідному валу, наприклад в інерційному стартері. Проте інколи маховик встановлюють і на тихохідних валах, ближче до тих частин машини (джерела коливання швидкості), нерівномірність руху яких треба зменшити, щоб ці коливання швидкості не передавались на інші ланки передавального механізму (зубчасті колеса, муфти тощо).

Якщо маховик встановлюється не на ланці зведення, а на якій-небудь i-й ланці машини, то завжди повинна задовольнятися умова рівності кінетичної енергії

$$\frac{J_м \omega^2}{2} = \frac{J_i \omega_i^2}{2}, \tag{5.19}$$

де J_i — момент інерції маховика, встановленого на i-й ланці; ω_i — кутова швидкість цієї ланки.

З рівняння (5.19) випливає

$$J_i = J_м \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2. \tag{5.20}$$

Отже, чим більша кутова швидкість i-ї ланки, тим менший момент інерції маховика. Тому з точки зору зменшення ваги або

діаметра маховика вигідно встановлювати його на ланках, що мають великі швидкості.

Як видно з рівняння (5.20), для забезпечення умови сталості моменту інерції J_i необхідно, щоб передаточне відношення ω/ω_i було сталим. Це вимагає встановлення маховика на ланках, які зв'язані з ведучим валом механізму передаточним відношенням сталої величини (механізми круглих зубчастих коліс, черв'ячні механізми і т. д.).

При встановленні маховика не на ланці зведення слід враховувати жорсткість проміжного кінематичного ланцюга. При малій жорсткості кінематичного ланцюга пружні коливання можуть бути такими великими, що махове колесо не виконуватиме свого призначення.

Далі треба зазначити, що при малих значеннях коефіцієнта δ внаслідок невеликої різниці між кутами ψ_{max} і ψ_{min} точка перетину O' дотичних (див. рис. 5.4) дуже часто знаходиться за межами рисунка. У цьому випадку можна використати точки перетину k і l, дотичних з віссю T першої системи координат. Тоді, очевидно,

$$\operatorname{tg}\psi'_{max} = \frac{kd}{O'd},\ \operatorname{tg}\psi'_{min} = \frac{ld}{O'd}$$

і, далі,

$$\operatorname{tg}\psi'_{max} - \operatorname{tg}\psi'_{min} = \frac{kd}{O'd} - \frac{ld}{O'd} = \frac{kl}{O'd}. \qquad (5.21)$$

Підставляючи (5.21) у рівняння (5.10), знаходимо

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_J}\frac{kl}{O'd}\frac{1}{\omega_c^2},$$

звідки, враховуючи, що $\mu_J(O'd) = J_м$, дістаємо

$$J_м = \frac{\mu_T(kl)}{\omega_c^2\delta}. \qquad (5.22)$$

Аналогічно можна одержати формулу для визначення моменту інерції маховика через точки перетину дотичних з віссю абсцис $J_{зв}$ першої системи координат.

Визначення розмірів маховика. Оскільки маховик звичайно роблять у вигляді колеса (рис. 5.6), який має масивний обід *1*, сполучений з втулкою *2* спицями *3* (або тонким диском), то моментами інерції з'єднуючих частин часто нехтують і наближено вважають, що маса маховика рівномірно розподілена по

колу радіуса $R = D/2$ — геометричному місцю центрів ваги поперечних перерізів обода. Тоді момент інерції маховика можна виразити так:

$$J_м = mR^2 = \frac{mD^2}{4}, \quad (5.23)$$

де m — маса маховика.

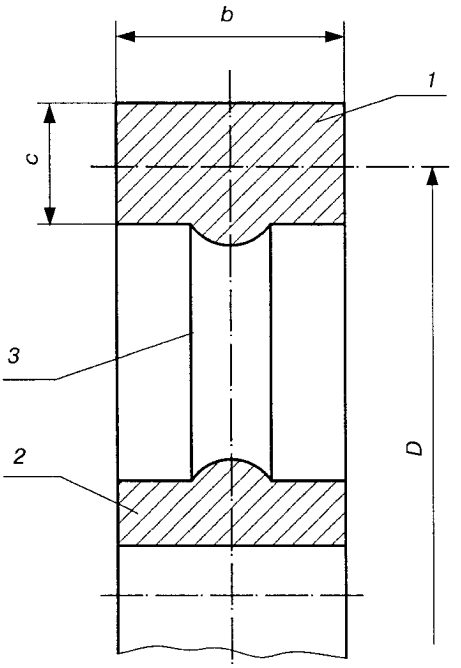


Рис. 5.6.

Добуток маси обода маховика на квадрат його діаметра mD^2 називається ***маховим моментом***, або ***характеристикою маховика***. Для багатьох деталей машин, що здійснюють обертовий рух (муфти, ротори електродвигунів тощо), ця характеристика наводиться у довідниках. Характеристика маховика має одиницю виміру кг · м^2. За цією характеристикою можна легко визначити необхідну масу маховика, якщо задано або вибрано його діаметр, значення якого визначається з суто конструктивних міркувань. Для запобігання небезпеці можливого розриву маховика його діаметр D вибирають таким, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустиму для матеріалу маховика величину. Для перевірки діаметра маховика можна рекомендувати таку залежність:

$$D \le \frac{60v_{доп}}{\pi n}, \quad (5.24)$$

де $v_{доп}$ — допустима колова швидкість обода маховика, яка не повинна перевищувати для стальних маховиків 70—120 м/с, для чавунних — 30—45 м/с; n — частота обертання маховика, хв$^{-1}$.

Якщо маса обода маховика практично може бути взята як

$$m_{об} = 0{,}9m,$$

де $m_{об}$ — маса обода маховика, то ширина b обода маховика визначається з виразу

$$m_{об} = \pi Dbc\rho. \tag{5.25}$$

Тут ρ — густина матеріалу, кг/м^3; $c \approx 0{,}4b$. Тоді, якщо взяти ρ = 7800 кг/м^3, матимемо

$$b \approx 0{,}01\sqrt{m/D}\ [\text{м}]. \tag{5.26}$$

Наближений метод побудови кривої Віттенбауера. З попереднього випливає, що з побудованої діаграми $T = T(J_{зв})$ при заданих коефіцієнті нерівномірності руху δ і середній кутовій швидкості обертання ω_c ланки зведення можна знайти момент інерції маховика і, тим самим, визначити його масу й розміри. Проте на практиці ця задача ускладнюється тим, що для побудови діаграми $T = T(\varphi)$ необхідно мати діаграми зведених моментів рушійних сил $M_р = M_р(\varphi)$ і сил опору $M_о = M_о(\varphi)$. Причому для *робочих машин*, якщо відомі технологічні опори, можна знайти значення зведених моментів сил опору (див. параграф 4.8), тобто побудувати діаграму $M_о = M_о(\varphi)$. Приклад такої діаграми показано на рис. 5.7, *а*. Зведений момент рушійних сил, як правило, для таких машин важко знайти, а тому його беруть сталим, тобто $M_р$ = const. Його величину можна визначити, виходячи з рівності робіт рушійних сил $A_р$ і сил опору $A_о$ за один цикл руху механізму або машини.

Діаграму роботи сил опору $A_о = A_о(\varphi)$ можна одержати графічним інтегруванням діаграми $M_о = M_о(\varphi)$ (рис. 5.7, *б*), оскільки робота визначається залежністю

$$A_о = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_о d\varphi. \tag{5.27}$$

Як відомо, графічна інтерпретація інтеграла є площею, яка обмежена кривою $M_о = M_о(\varphi)$, віссю φ і крайніми ординатами, ділянки кривої, що відповідають кутам φ_1 і φ_2. Наприклад, на ділянці *а—2* робота сил опору знаходиться за формулою

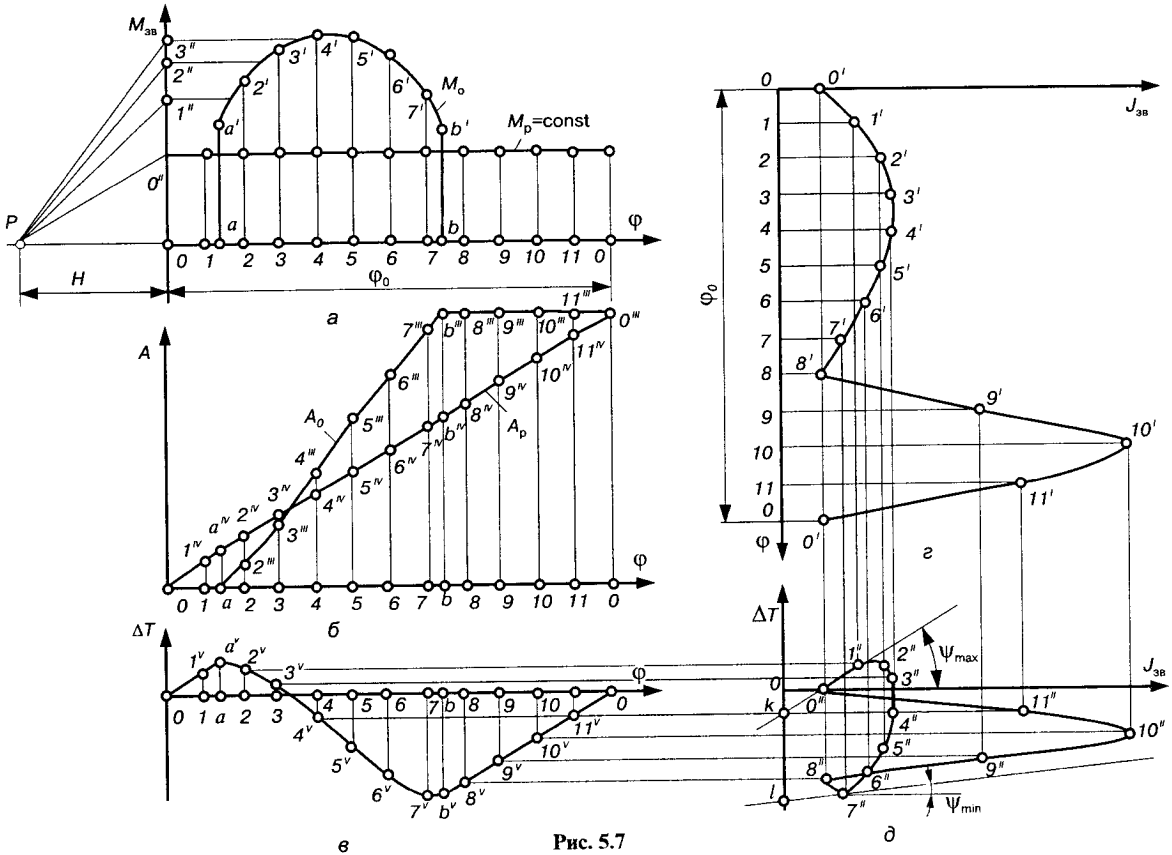
$$A_{о2} = \text{пл.}(aa^I2^I2)\mu_M\mu_\varphi;$$

на ділянці *2—3* — у вигляді

$$A_{о3} = \text{пл.}(22^I3^I3)\mu_M\mu_\varphi$$

і т. п.

Відклавши на відповідних ординатах ці роботи в масштабі μ_A, одержимо діаграму $A_о = A_о(\varphi)$. Практично цих розрахунків не



$M_{зв}$
M_o
M_p=const
P
H
φ_0
φ
а
A
A_0
A_p
б
ΔT
в
$J_{зв}$
г
ψ_{max}
ψ_{min}
д

Рис. 5.7

роблять, а виконують побудову, обернену до тієї, яку ми робили при графічному диференціюванні (методом хорд). Тобто площу криволінійної трапеції $aa^1 2^1 2$ замінюємо площею прямокутника, висоту якого переносимо на вісь координат $M_{зв}$, а одержану точку 1^{II} з'єднуємо з точкою P. Відрізок $OP = H$ визначає масштаб побудови діаграми робіт

$$\mu_A = \mu_M \mu_\varphi H. \tag{5.28}$$

У нашому випадку робота сил опору на ділянці *0—a* дорівнює нулю, оскільки $M_o = 0$. Тоді з точки *a* на діаграмі $A_o = A_o(\varphi)$ (рис. 5.7, *б*) проводимо на ділянці *a—2* паралельну $P1^{II}$, дістанемо точку 2^{III}.

Аналогічно здійснюємо побудову на інших ділянках (*2—3*, *3—4* і т. п.), що дає змогу одержати точки 3^{III}, 4^{III} і т. п. З'єднавши ці точки плавною кривою, дістанемо діаграму $A_o = A_o(\varphi)$. На ділянці $b—0$ ($b^{III}—0^{III}$) робота $A_o = \text{const}$, оскільки $M_o = 0$, і робота сил опору не змінюється.

Діаграма робіт рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$ при такому припущенні ($M_p = \text{const}$) зображатиметься прямою лінією ($A_p = M_p\varphi$), яка проходитиме через точки *0* і 0^{III} діаграми $A_o = A_o(\varphi)$. Це пояснюється тим, що зміна кінетичної енергії $\Delta T = A_p - A_o$ за один цикл усталеного руху дорівнює нулю, тобто на початку і в кінці циклу $A_p = A_o$. Провівши через точку P лінію (рис. 5.7, *а*), паралельну лінії $0—0^{III}$ на діаграмі робіт (рис. 5.7, *б*), дістанемо точку 0^{II}, яка визначить зведений момент рушійних сил: $M_p = (0—0^{II})\mu_M$.

На основі діаграм робіт рушійних сил і сил опору будуємо діаграму зміни кінетичної енергії механізму або машин без маховика за формулою

$$\Delta T = A_p - A_o. \tag{5.29}$$

Якщо діаграма $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ будується в тому ж масштабі, що і діаграми робіт, досить на відповідних ординатах (рис. 5.7, *в*) відкласти відрізки, які знаходяться між кривими $A_p = A_p(\varphi)$ і $A_o = A_o(\varphi)$, тобто $1 - 1^V = 1^I - 1^{IV}$, $a - a^V = a - a^{IV}$, $2 - 2^V = 2^{III} - 2^{IV}$ і т. п. Якщо $A_p > A_o$, то $\Delta T > 0$, і навпаки, якщо $A_p < A_o$, то $\Delta T < 0$.

Діаграми зведених моментів інерції $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ (рис. 5.7, *г*) і крива Віттенбауера $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ (рис. 5.7, *д*) будуються так, як це описано в параграфі 4.15.

Для ***машини-двигуна***, як правило, неважко побудувати діаграми зведених рушійних сил $M_p = M_p(\varphi)$, маючи індикаторну діа-

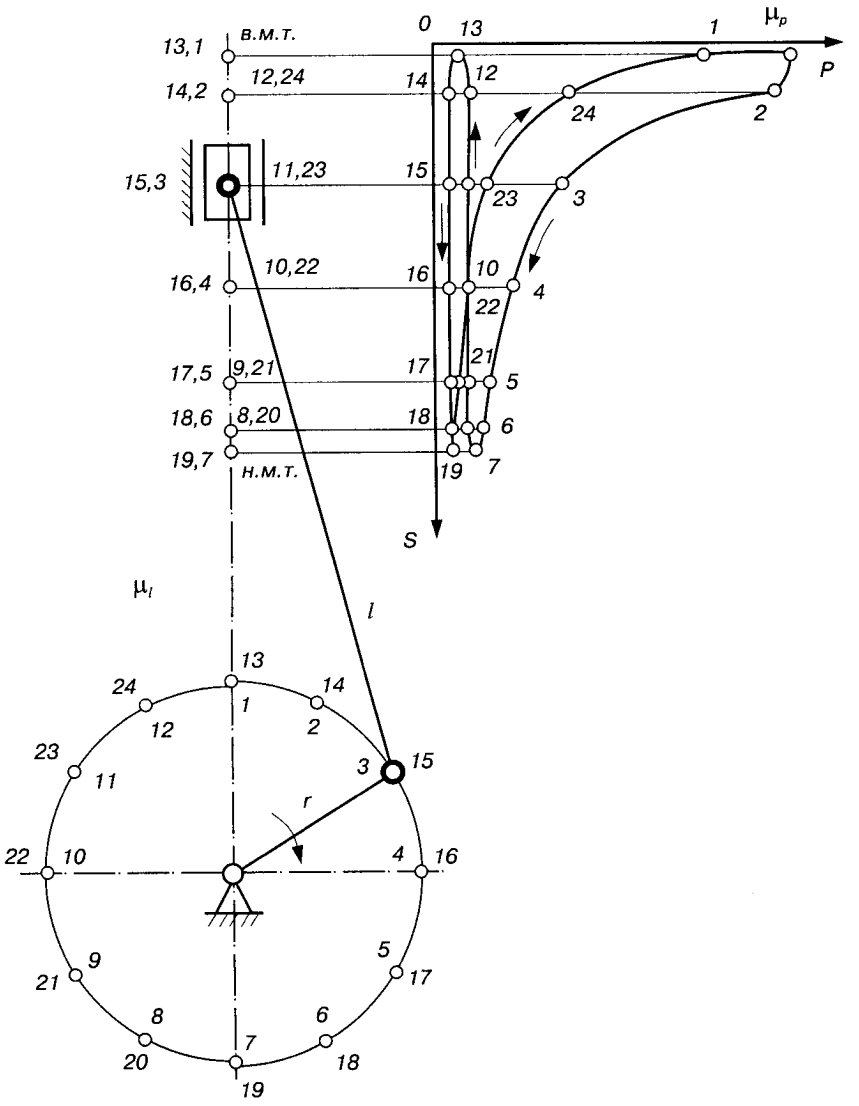


Рис. 5.8.

граму (рис. 5.8), тобто знаючи тиск p на робочий поршень залежно від переміщення поршня s. Приклад такої діаграми $M_p = M_p(\varphi)$ зображено на рис. 5.9, *а*. Тоді методом графічного інтегрування цієї діаграми будуємо діаграму робіт рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$. У та-

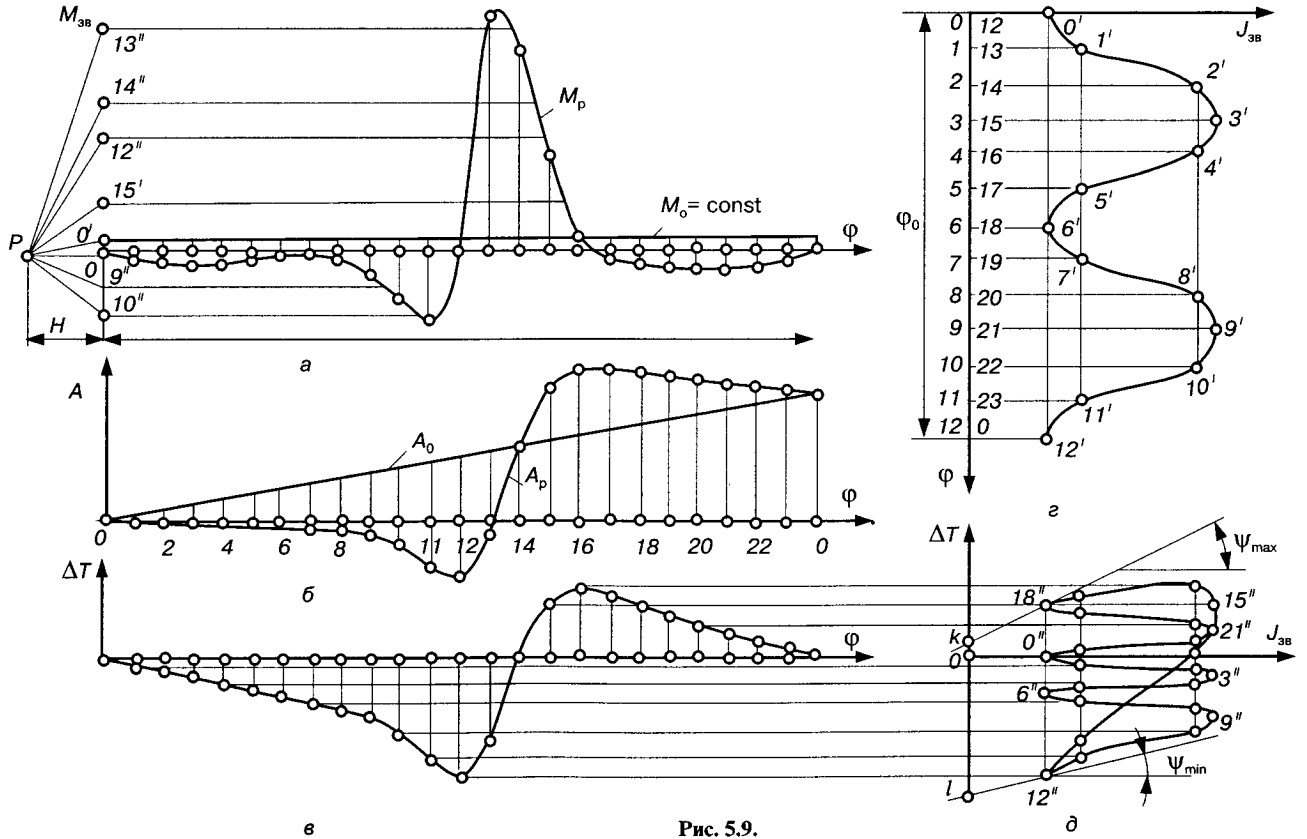

$M_{зв}$
13″
14″
12″
15′
0′
9″
10″
P
H
$M_р$
M_o= const
φ
а
A
A_0
$A_р$
φ
0 2 4 6 8 11 12 14 16 18 20 22 0
б
ΔT
φ
в
$J_{зв}$
φ_0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 0
0′ 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ 7′ 8′ 9′ 10′ 11′ 12′
φ
г
ΔT
ψ_{max}
ψ_{min}
18″ 15″ 21″ 3″ 6″ 9″ 12″
k
l
0″
0
$J_{зв}$
д

Рис. 5.9.

ких машинах зведений момент сил опору береться сталим (M_0 = = const). Всі інші побудови виконуються аналогічно.

У технічній і навчальній літературі наводяться інші методи визначення моменту інерції маховика. Заслуговують на особливу увагу методи, які враховують механічні характеристики двигунів.

5.5. Регулятори швидкості

За допомогою маховика можна регулювати швидкість руху ланки зведення механізму або машини лише для періодичних і короткочасних неперіодичних коливань швидкості, тобто коли рушійні сили і сили опору, як правило, змінюються протягом циклу за певним законом і робота рушійних сил за повний цикл дорівнює роботі сил опору. Крива Віттенбауера при такому русі замкнута і має цілком визначену форму.

Проте маховик не може регулювати довгочасні і неперіодичні коливання швидкості, коли робота рушійних сил не дорівнює роботі сил опору. Наприклад, навантаження на двигун внутрішнього згоряння автомобіля значно зростає внаслідок крутого підйому дороги. Це викликає значну зміну моменту сил опору на валу двигуна, у результаті чого порушується рівновага між роботами рушійних сил двигуна і сил опору руху автомобіля, що викликає зменшення його швидкості. І навпаки, при крутому спуску швидкість автомобіля може значно зростати до значення, яке буде більшим за встановлене з точки зору безпеки руху. Водій автомобіля здійснює регулювання швидкості руху за рахунок зміни роботи рушійних сил (додатковою подачею палива в двигун) або включення додаткової роботи сил опору (гальмуванням). Це дає змогу зберігати відповідний баланс робіт.

Таким чином, для забезпечення коливання швидкості — ланки зведення в заданих межах — треба, щоб у машині за один цикл підтримувалась рівність робіт рушійних сил і сил опору ($A_р = A_0$). Для цього, як правило, встановлюють спеціальні механізми, — пристрої, які називають ***регуляторами швидкості***. Завдання регулятора полягає в тому, щоб встановити стійкий (стаціонарний) за законом зміни значення швидкості режим руху початкового вала механізму або машини, чого можна досягти вирівнюванням різниці між рушійними силами і силами опору. Так, якщо внаслідок якихось причин зменшився опір і машина починає прискорювати свій рух, то регулятор ***автоматично*** зменшує рушійні сили. Навпаки, якщо сили опору збільшилися

і машина починає сповільнювати рух, то регулятор збільшує рушійні сили. Отже, як тільки порушується рівновага між рушійними силами і силами опору, регулятор повинен знов їх збалансувати і змусити машину працювати з попередніми або близькими до попередніх швидкостями. У деяких машинах, зокрема в транспортних, регулювання руху досягається зміною не тільки рушійних сил, а й сил опору (гальмуванням).

Конструкції регуляторів і схеми регулювання бувають різними. Наприклад, у практиці застосовуються: так звані ***відцентрові регулятори*** (плоскі й просторові), в яких використовується відцентрова сила інерції; ***інерційні регулятори***, в яких використовують тангенціальні (дотичні) сили інерції; ***регулятори електричного типу*** та ін.

Хоча конструкції механізмів регуляторів і схем регулювання різні, проте частіше автоматичне регулювання виконується за схемою замкненого контуру [4]. Принципова схема такого автоматичного регулювання зображена на рис. 5.10. Об'єкт регулювання *1* знаходиться під дією зовнішнього джерела збудження коливань *2*, в результаті чого здійснюється відхилення параметра, що регулюється, від заданого. Ці зміни сприймаються чутливим елементом *3*, який передає необхідну інформацію регулювальному органу *4*, останній відновлює заданий параметр у об'єкта регулювання *1*, тобто в схемі регулювання є зворотний зв'язок (*1—3—4—1*).

На рис. 5.10 зображено найпростішу схему системи автоматичного регулювання, в яку входять різні додаткові пристрої, що забезпечують надійність роботи цієї системи.

У машинному агрегаті об'єктом регулювання, звичайно, є двигун, а джерелом збудження — робоча машина, яка приводиться в рух цим двигуном. Чутливим елементом може бути механічний пристрій, частіше механізм регулятора відцентрового типу, або електричний типу тахогенератора, який є електричним генератором, що розвиває напругу пропорційно кутовій швидкості. Ця напруга діє на регулювальний орган. Такі органи можуть бути різними залежно від технологічного призначення машини і типу двигуна.

Розглянемо деякі схеми автоматичного регулювання кутової швидкості початкової ланки машинного агрегату [4]. На рис. 5.11 зображено машинний агрегат, який складається з робочої машини *2* і теплового двигуна *1*. Чутливим елементом є відцентровий регулятор *3*. Регулятор складається з двох важких куль *K*, що розміщені на ланках *AC* і *BD*. Ці ланки шарнірно зв'язані з

ланками *CE* і *DF*, які, у свою чергу, шарнірно зв'язані з муфтою *N*, що може вільно ковзати вздовж напрямної *z—z*. Ланки *AC* і *BD* зв'язані пружиною *L*, яка намагається зблизити кулі *K*. Регулятор приводиться в рух від початкової ланки машини парою конічних коліс *H* і *G*. При обертанні початкової ланки двигуна з кутовою швидкістю ω_1 регулятор обертається зі швидкістю ω_p, причому $\omega_1 / \omega_p = \text{const}$.

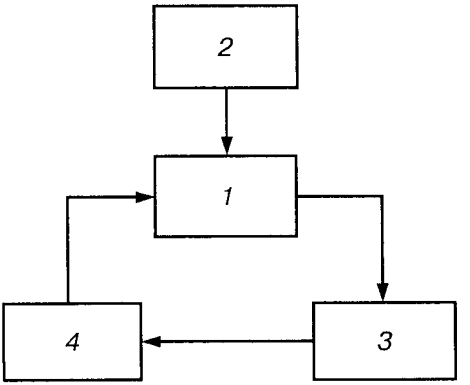


Рис. 5.10.

При різних кутових швидкостях ω_1 початкової ланки муфта *N* має різні положення, які визначаються величиною відцентрової сили інерції, що діє на кулі *K*. Чим більше швидкість обертання вала регулятора, тим більші сили інерції діють на кулі, тим вище піднімається муфта *N*, і навпаки, чим менша швидкість ω_p, тим менші сили інерції діють на кулі, а значить, нижче знаходиться муфта *N*. З муфтою *N* з'єднано механізм, що збіль-

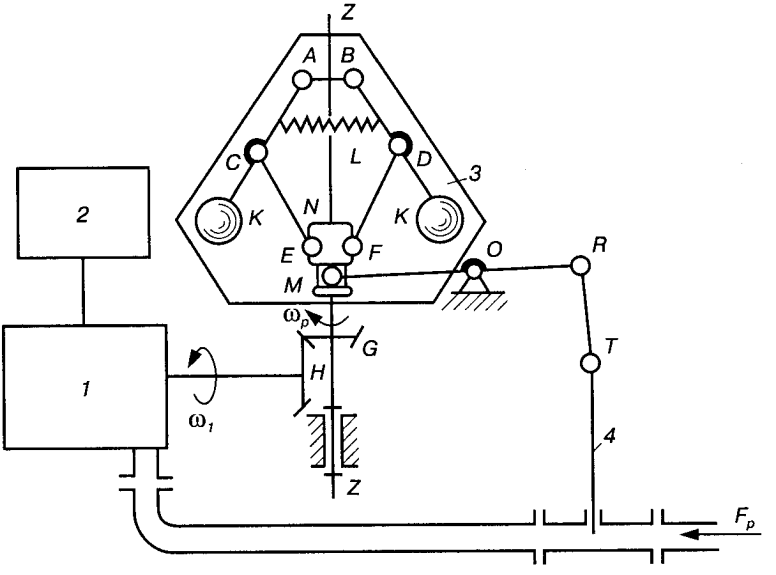


Рис. 5.11.

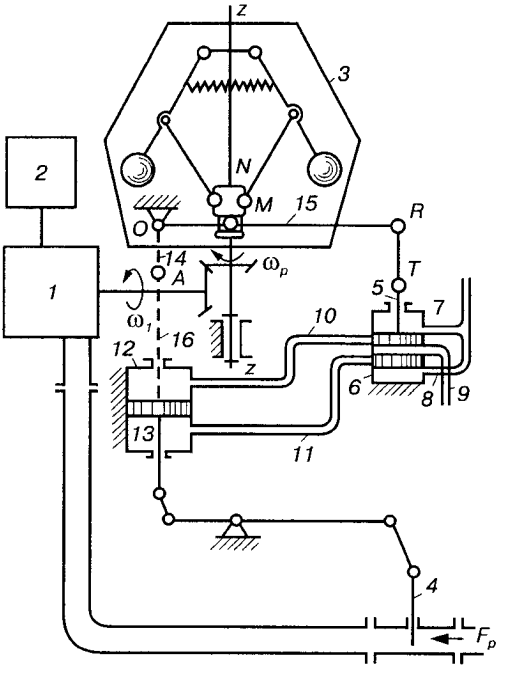


Рис. 5.12.

шує або зменшує подачу рушійної енергії в машину. Цей механізм складається з важелів *OR* і *RT* і заслінки *4*. Палець *M*, який належить важелю *OR*, ковзає по напрямних, що належать муфті *N*. Припустимо, що внаслідок зменшення сил опору кутова швидкість ω_p регулятора збільшилась. Тоді тягарі *K* під дією відцентрових сил віддалятимуться від осі обертання *z—z* регулятора, і муфта *N* переміщатиметься вгору. При цьому важіль *RT* діятиме на заслінку *4*, яка, опускаючись донизу, зменшить переріз каналу, по якому надходить у двигун робоча речовина (пара, вода, газ тощо). Тоді рушійні сили зменшаться, кутова швидкість також зменшиться, і муфта *N* почне переміщатися вниз. Отже, заслінка *4* переміщатиметься вгору, збільшуючи переріз каналу. Після збільшення подачі рушійної енергії процес може знову повторитися. Отже, робота регулятора — деякий ***коливальний процес***. Регулятор автоматично реагує на зміну кутової швидкості початкової ланки двигуна і забезпечує подачу необхідної енергії для пересування регулювального органа. Треба зазначити, що описаний спосіб регулювання має той недолік, що після зниження навантаження кутова швидкість буде трохи вищою від тієї, яку мала машина до зниження навантаження, хоч рух машини і буде усталеним, але швидкості цього руху будуть вже іншими і дещо більшими, ніж на початку процесу регулювання. Щоб уникнути зазначеної зміни швидкості, у техніці часто застосовують складніші схеми регулювання.

Описаний тип регулятора називається ***регулятором прямої*** дії, оскільки в ньому регулятор безпосередньо з'єднаний з механізмом, що регулює подачу рушійної енергії. У розглянутому прикладі заслінка переміщується за рахунок відцентрових сил

куль регулятора. У деяких випадках цих сил може бути не досить для переміщення заслінки, тоді слід включити в схему регулювання допоміжне джерело енергії, яке називають ***сервомотором***. Такі регулятори називаються ***регуляторами непрямої дії***.

На рис. 5.12 показано схему непрямого регулювання. Ця система має ті самі основні елементи, що й схема прямої дії (див. рис. 5.11). Тільки тут переміщення регулювального органа *4* (заслінки) здійснюється за допомогою гідравлічних сервомоторів. Рух регулюється так. При збільшенні кутової швидкості ω_1 початкової ланки машини муфта *N* почне підніматися і через систему важелів підніме золотник *5*; масло по трубопроводах *8* і *11* надходить у нижню порожнину циліндра *12* сервомотора, поршень *13* переміститься вгору і системою важелів опустить заслінку *4*, зменшуючи доступ рушійної енергії F_p. При русі поршня *13* уверх масло, яке знаходиться у верхній порожнині циліндра *12*, по трубопроводах *9* і *10* подається в маслоприймач. Після того як заслінка *4* опуститься, кутова швидкість ω_1 зменшиться, муфта почне опускатися вниз, золотник *5* перекриє трубопроводи *10*, *11* і доступ масла в циліндр *12* сервомотора припиниться. Після повернення золотника *5* в таке положення процес регулювання має закінчитися.

Чутливість регулятора до зміни швидкості початкової ланки і коефіцієнт нерівномірності руху δ (див. параграф 5.6) визначаються відповідним підбором мас куль *K*, силою пружності пружини *L*, масами і розмірами ланок механізму регулятора. Детальніше це питання розглядається в спеціальній літературі з теорії автоматичного регулювання, частково у підручнику [4].

ТЕРТЯ І ЗНОС У МАШИНАХ

Під час руху одного тіла відносно іншого між поверхнями, що стикаються, виникає взаємодія, яка перешкоджає переміщенню цього тіла, а якщо воно знаходиться в стані спокою, — його відносному зміщенню. Це явище називається ***тертям***, а сили опору — ***силами тертя***. Отже, ***тертям називають опір, що виникає при переміщенні одного тіла відносно іншого***. Поверхні, якими стикаються між собою тіла, називаються ***тертьовими***.

Виникнення тертя пояснюється двома основними причинами. По-перше, поверхні тертя не абсолютно гладкі, а мають нерівності, які при стиканні поверхонь створюють опір руху F_f (рис. 6.1). По-друге, між тілами, які стикаються поверхнями, виникають сили молекулярної взаємодії, для подолання яких також необхідно прикласти силу. Як показують експериментальні дослідження, тертя є складний комплекс механічних, фізичних і хімічних явищ, причому ті чи інші явища переважають залежно від умов, за яких проходить процес тертя.

Тертя є одним із найпоширеніших явищ природи і відіграє дуже важливу роль у техніці. Цілий ряд задач механіки, деталей машин, спеціальних технічних дисциплін не можна розв'язати без знань законів тертя. На використанні сил тертя ґрунтується робота багатьох машин і механізмів (пасової і фрикційної передач, транспортних машин, прокатних станів,

фрикційних муфт, гальм тощо). Великі сили тертя виникають при обробці металів різанням.

Тертя відіграє в машинах як корисну, так і шкідливу роль. З одного боку, завдяки тертю рухаються тіла; з другого — тертя є причиною зношування деталей машин і приладів, значних витрат енергії. Підраховано, що близько 1/3 світових енергетичних ресурсів даремно витрачаються на роботу, пов'язану з тертям.

Відомо, що перші дослідження явища тертя проводив ще Леонардо да Вінчі. Детальне дослідження законів тертя почав французький механік і фізик Г. Амонтон (1663—1705) і протягом усього століття ці дослідження поглиблювалися. В 1781 р. Ш. Кулон опублікував працю "Теорія простих машин з точки зору їх частин...", в якій розвинув теорію тертя, сформулював основні закони тертя. Експериментальне дослідження тертя продовжували і послідовники Кулона. Проте треба зауважити, що ця складна наукова проблема і до нашого часу повністю не розв'язана. Тому на практиці все ще користуються наближеними емпіричними законами, які були відкриті Амонтоном і Кулоном. Якщо треба мати більшу точність розрахунків, то доводиться визначати силу тертя експериментально для кожної пари тертьових поверхонь і конкретних умов тертя.

Власне кажучи, вивчення всіх особливостей теорії тертя виходить за межі курсу теорії механізмів і машин. Тут розглядатимемо лише ті елементи цієї теорії, які необхідні, щоб точніше визначити вплив тертя на реальні значення сил, що діють на тіла, встановити умови їх рівноваги, врахувати сили тертя при розв'язанні тих чи інших інженерних задач, в яких неможливо ними знехтувати.

6.1. Види тертя

Залежно від характеру відносного переміщення тіл, що стикаються, відрізняють ***два види тертя: ковзання*** і ***кочення***. Інколи розглядають ще один вид тертя — так зване ***тертя вертіння***. При ***терті ковзання*** одні і ті самі поверхні одного тіла стикаються з різними поверхнями іншого тіла. При ***терті кочення*** різні поверхні одного тіла послідовно стикаються з різними поверхнями іншого тіла.

Прикладами тертя ковзання можуть бути тертя лиж по снігу, пили по дереву, різця по металу, підошви взуття по землі, цапфи вала по втулці підшипника тощо. Тертя кочення має місце при перекочуванні коліс автомобіля по землі або вагона по рейках, у шарикових або роликових підшипниках, фрикційних передачах тощо.

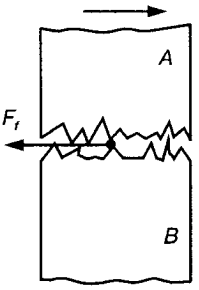


Рис. 6.1.

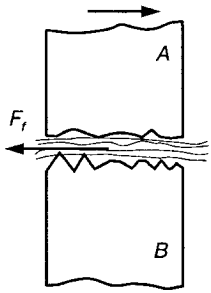


Рис. 6.2.

Для зменшення сил тертя використовують різні мастила. Залежно від їх наявності між тертьовими поверхнями розрізняють два основних види тертя: ***сухе тертя*** (без мастильних матеріалів) і ***рідинне тертя*** (з мастильними матеріалами). При ***сухому терті*** між тертьовими поверхнями тіл відсутнє будь-яке мастило. При ***рідинному терті*** тертьові поверхні тіл повністю розділені шаром мастила (рис. 6.2) і тертя твердих частин тіла замінено тертям окремих шарів мастила. Мастило може бути твердим, рідким або газоподібним.

Крім цього, інколи ще розрізняють проміжні види тертя: ***граничне, напівсухе*** і ***напіврідинне.*** При ***граничному терті*** на тертьових поверхнях є тонкі адсорбовані маслянисті плівки. ***Напівсухе*** і ***напіврідинне*** тертя не мають між собою чіткої границі: якщо перевершує сухе тертя (більша частина поверхні контакту не покрита мастилом), то вважають, що тертя напівсухе, і навпаки, якщо перевершує рідинне тертя, то маємо напіврідинне тертя.

6.2. Тертя ковзання

Щоб виявити основні закономірності тертя ковзання, можна провести ряд дослідів на досить простому приладі (трибометрі), який схематично зображений на рис. 6.3. На пластину *1*, розташовану в заглибленні горизонтального стола, ставимо тіло *2* вагою G. Силу тиску тіла *2* на пластину можна змінювати шляхом зміни його ваги (за допомогою установки гир). Нормальна реакція пластини: $N = -G$. До тіла *2* прив'яжемо нитку і, перекинувши її через блок *3*, підвісимо на її кінці чашку з гирями вагою Q. Щоб зменшити можливість перевертання тіла, нитку прив'яжемо ближче до його основи, і тоді тіло *2* залишається в стані спокою доти, доки модуль сили $F = Q$ не досягне деякого значення, яке цілком визначене для даної пари тертьових поверхонь і даної сили тиску між ними. Це свідчить про те, що на тіло *2*, крім нормальної реакції N, з боку пластини *1* діє ще інша реакція F_f, яка за модулем дорівнює горизонтальній силі F і направлена в протилежний від неї бік. Ця реакція, що лежить у дотичній площині, і є сила тертя.

Максимального значення сила тертя F_{max} досягає в той момент, коли тіло почне рухатись.

Звідси можна зробити такі висновки:

а) сила тертя ковзання виникає тільки при наявності зсувної сили;

б) модуль сили тертя ковзання при рівновазі тіла може набувати різних значень, які не перевищують максимальні, тобто $F_f \leq F_{max}$. Цю найбільшу силу тертя називають ***статичною*** або ***силою тертя спокою.***

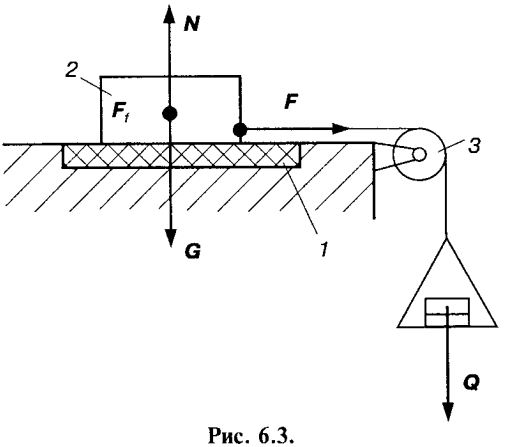


Рис. 6.3.

Сила тертя, яка перешкоджає ковзанню тіла під час його руху, називається ***силою тертя руху,*** або ***динамічною силою тертя.*** Як показують досліди, сила тертя руху менша від статичної сили тертя. З практики відомо, що легше підтримувати початий рух, ніж зрушити тіло з місця.

На основі численних дослідів Амонтоном і Кулоном встановлено такі (наближені) закони [4].

1. ***Сила тертя при однакових інших умовах не залежить від розмірів тертьових поверхонь.*** Цей закон можна обгрунтувати за допомогою таких міркувань. Якщо, наприклад, площа тертьових поверхонь збільшується, то збільшується і кількість нерівностей поверхонь, які зчіплюються, але зменшується тиск на одиницю площі, і сила опору рухові залишається попередньою. Проте треба мати на увазі, що цей закон наближено справедливий лише до деяких значень тиску тіла на площину, поки тертьові поверхні не дуже малі.

2. ***Максимальне значення сили тертя спокою прямо пропорційне нормальному тиску (нормальній реакції) одного тіла на інше в момент початку їх відносного руху,*** тобто

$$F_f = F_{max} = f_0 N, \tag{6.1}$$

де f_0 — коефіцієнт тертя спокою, який можна виразити відношенням

$$f_0 = \frac{F_{max}}{N}. \tag{6.2}$$

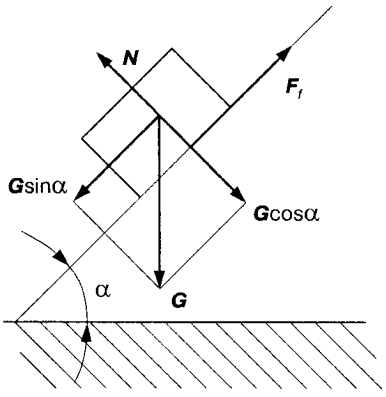


Рис. 6.4.

Коефіцієнт тертя спокою f_0 — величина безрозмірна і є відношенням максимальної сили тертя F_{max} до нормальної реакції N.

Сила нормального тиску дорівнює вазі тіла тільки тоді, коли поверхня ковзання — горизонтальна площина і на тіло не діють інші сили, крім сили його ваги. Якщо тіло лежить на похилій площині (рис. 6.4), то нормальна реакція $N = G \cos \alpha$, де α — кут нахилу площини. Якщо ж на тіло крім сили тяжіння діють ще інші сили, то за силу нормального тиску на поверхню треба брати нормальну складову рівнодіючої всіх прикладених до нього сил.

3. ***Модуль сили тертя в стані рівноваги (спокою) не більший від максимальної сили тертя спокою***, тобто

$$0 \le F_f \le F_{max} = f_0 N. \qquad (6.3)$$

4. ***Коефіцієнт тертя спокою залежить від матеріалу тіл, що стикаються, і фізичного стану тертьових поверхонь***, тобто від величини і характеру шорсткості, наявності мастила, вологості, температури та інших умов. Наближені значення коефіцієнтів тертя спокою наведено в таблиці [76]. Детальніші відомості про коефіцієнти тертя можна знайти в різних технічних довідниках. Матеріали, які мають високий коефіцієнт тертя, називають ***фрикційними*** (шкіра, гума, текстоліт, азбест тощо) і, навпаки, низький коефіцієнт тертя, — ***антифрикційними*** (бронза, бабіт, сірий чавун, капрон і деякі інші види пластмас).

5. ***Сила тертя під час руху менша сили тертя в спокої.*** Досліди показують, що для того щоб вивести тіло зі стану спокою, треба при інших однакових умовах прикласти іншу силу, ніж для підтримки руху. Для більшості матеріалів сила тертя в русі залежить від швидкості одного тіла відносно іншого і, як правило, зменшується зі збільшенням цієї швидкості, прямуючи до певної межі. У деяких випадках, як наприклад, при терті шкіри по сталі або чавуну, коефіцієнт тертя зростає із збільшенням швидкості.

6. ***Сила тертя зростає із збільшенням часу попереднього контакту тертьових поверхонь.*** Це, напевно, слід пояснити дефор-

Таблиця

НАБЛИЖЕНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕРТЯ

Матеріали тертьових тіл	Коефіцієнт тертя			
	спокою f_0		руху f	
	насухо	з мастилом	насухо	з мастилом
Сталь — сталь	0,15	0,1...0,12	0,15	0,05...0,1
Сталь — м'яка сталь	—	—	0,2	0,1...0,2
Сталь — чавун	0,3	—	0,18	0,05...0,15
М'яка сталь — чавун	0,2	—	0,18	0,05...0,15
Сталь — бронза	0,15	0,1...0,15	0,15	0,1...0,15
М'яка сталь — бронза	0,2	—	0,18	0,07...0,15
Чавун — чавун	—	0,18	0,15	0,07...0,12
Чавун — бронза	—	—	0,2	0,07...0,15
Бронза — бронза	—	0,1	0,15...0,2	0,07...0,1
М'яка сталь — дуб	0,6	0,12	0,4...0,6	0,1
М'яка сталь — в'яз	—	—	0,25	—
Чавун — дуб	0,65	—	0,3...0,5	0,2
Чавун — в'яз або тополя	—	—	0,4	0,1
Бронза — дуб	0,6	—	0,3	—
Дерево — дерево	0,4...0,6	0,1	0,2...0,5	0,07...0,15
Шкіра лицьовою стороною — дуб	0,6	—	0,3...0,5	—
Шкіра бахтармою — дуб	0,4	—	0,3...0,4	—
Шкіра — чавун	0,3...0,5	0,15	0,6	0,15
Гума — чавун	—	—	0,8	0,5

мацією стичних поверхонь, деякою дифузією молекул тертьових тіл, а значить, збільшенням їх молекулярних зв'язків.

Модуль сили тертя під час руху можна визначити за формулою, аналогічною (6.1), підставивши в неї замість коефіцієнта тертя спокою f_0 коефіцієнт тертя руху f, тобто

$$F_f = fN. \qquad (6.4)$$

Значення коефіцієнта тертя руху наведено також у таблиці.

При наближених інженерних розрахунках часто не роблять різниці між коефіцієнтами тертя спокою і руху, а користуються значеннями коефіцієнтів тертя руху.

Аналіз висунутих Амонтоном і Кулоном положень, зроблений іншими дослідниками, показав, що ці положення можна вважати вірними тільки для певних тертьових матеріалів і деяких границь швидкості і навантажень. Так, на основі ряду експериментів було встановлено [4], що залежність сили тертя від нормального тиску виражається рівністю

$$F_f = A + f_c N. \qquad (6.5)$$

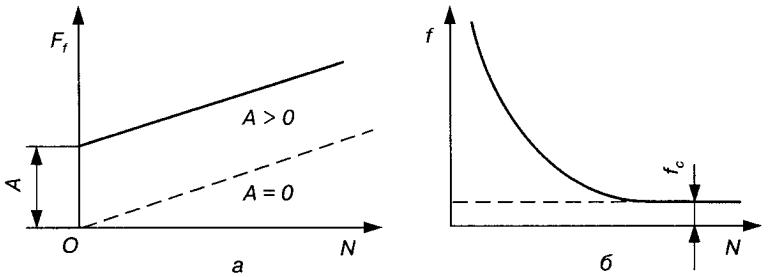


Рис. 6.5.

У цьому рівнянні f_c є коефіцієнт тертя руху, який для розглядуваних тіл вважаємо сталим, і A — деяка стала сила тертя, яка залежить не від тиску N, а від схильності стичних поверхонь до попереднього зчеплення. Отже, хоч залежність сили тертя від нормального тиску лінійна, закон зміни сили тертя і функції нормального тиску виражається у вигляді прямої, що не проходить через початок координат (рис. 6.5, *а*).

Стала A характеризує зчіплюваність стикових поверхонь і вказує на необхідність прикладання додаткової сили для подолання попереднього зчеплення стикових поверхонь.

Розділивши обидві частини рівності (6.5) на N, дістанемо

$$f = \frac{A}{N} + f_c \ . \qquad (6.6)$$

Тут $f = F_f / N$ коефіцієнт тертя, графічне зображення якого показано на рис. 6.5, *б*, має вигляд гіперболи. Отже, коефіцієнт тертя, взагалі кажучи, залежить від нормального тиску. У технічних розрахунках, як правило, користуються рівнянням Амонтона—Кулона в найпростішій його формі (6.4), нехтуючи зчіплюваністю поверхонь, де під коефіцієнтом тертя розуміють деяке його середнє значення, яке визначається експериментально і береться сталим. У цьому випадку залежність сили тертя від нормального тиску графічно виражається прямою лінією, що проходить через початок координат (на рис. 6.5, *б* — штрихова лінія).

Досліди також вказують, що коефіцієнт тертя f змінюється при зміні навантаження на одиницю площі дотику. Отже, ***основні положення про сили сухого тертя*** в уточненій формі можна сформулювати так [1, 4]:

а) коефіцієнт тертя можна вважати сталим, а сили тертя — прямо пропорційними нормальному тиску тільки в певному діапазоні швидкостей і навантажень;

б) сили тертя завжди направлені в бік, протилежний відносним швидкостям;

в) тертя спокою в початковий момент руху в більшості випадків дещо більше за тертя руху;

г) із збільшенням швидкості руху сила тертя здебільшого зменшується, наближаючись до деякого сталого значення;

д) із зростанням питомого тиску сила тертя переважно збільшується;

е) із збільшенням часу попереднього контакту сила тертя збільшується.

6.3. Кут і конус тертя

Розглянемо ще раз взаємодію тіла, що спирається на негладку поверхню (рис. 6.6, *а*). Якби поверхні тіл були абсолютно гладкі, то це була б ідеальна в'язь (зв'язок), дія якої на тіло зводилась би лише до нормальної реакції N. Якщо ж опорна поверхня шорстка, то при дії рушійної (активної) сили F з'являється ще й сила тертя, яка лежить у дотичній площині і напрямлена в протилежний силі F бік, яка намагається зсунути тіло. Найбільша сила тертя має знаходиться на грані між спокоєм та рухом і дорівнює за модулем $F_f = F_{max} = fN$. Отже, на тіло з боку опорної поверхні діють дві реакції: нормальна N і дотична (сила тертя F_f). Додавши ці реакції за правилом паралелограма, дістанемо повну опорну реакцію R, яка утворює з нормальною реакцією N деякий кут φ.

Найбільший кут φ, ***на який через тертя відхиляється від нормалі повна реакція*** R ***опорної поверхні, називається кутом тертя.***

З рис. 6.6 маємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_f}{N}.$$

Але, як видно з формули (6.4),

$$\frac{F_f}{N} = f.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi = f \text{ або } \varphi = \operatorname{arctg} f. \qquad (6.7)$$

Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання. Інакше кажучи, ***кутом тертя називається кут, тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.***

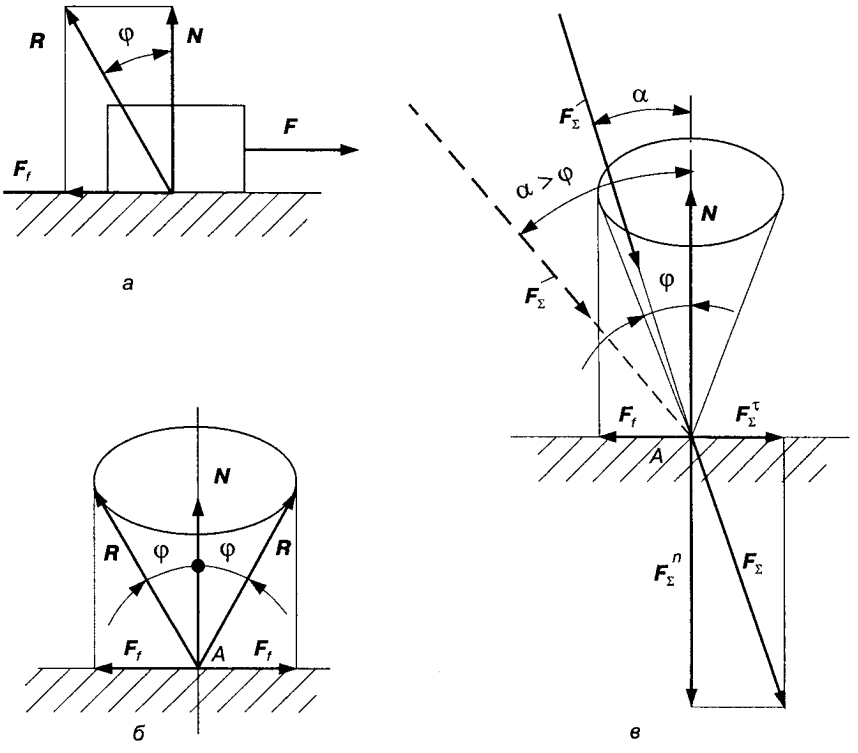


Рис. 6.6.

Якщо тіло будемо переміщати відносно опорної поверхні в різні боки, то лінія дії реакції ***R*** опише конічну поверхню (рис. 6.6, *б*), яка називається конусом тертя. ***Отже, конусом тертя називають поверхню, яку описує повна реакція в разі її обертання навколо нормальної реакції.*** Якщо коефіцієнт тертя під час руху тіла в різних напрямках однаковий, то повна реакція поверхні відхиляється від нормальної в усіх напрямках на однаковий кут тертя φ і конус тертя буде круглим з кутом при вершині *A*, який дорівнює 2φ. Коли ж коефіцієнт тертя в різних напрямках різний (наприклад, у разі руху по дереву вздовж і поперек волокон), то конус тертя буде некруглим.

Для руху тіла необхідно, щоб рівнодіюча зовнішніх сил, що прикладені до нього, проходила за межами конуса тертя. Якщо ж рівнодіюча зовнішніх сил розташована всередині конуса тертя, то якою б вона великою не була, рух тіла неможливий, оскільки рушійна сила в цьому випадку завжди буде менша від сили тертя.

Нехай усі зовнішні сили, що діють на тіло, включаючи і його вагу, зводяться до однієї рівнодіючої сили F_Σ, яка проходить через точку A дотику тіла з поверхнею і утворює з нормаллю до поверхні кут α (рис. 6.6, *в*). Перенесемо цю силу по лінії дії в точку A і розкладемо її на дві складові: F_Σ^τ, яка лежить у дотичній площині, і F_Σ^n, направлену по нормалі до поверхні. Тоді згідно з формулами (6.4) і (6.1) максимальне значення сили тертя запишеться так:

$$F_f = F_{\max} = fN = N \operatorname{tg}\varphi,$$

де φ — кут тертя; N — модуль нормальної реакції, який, очевидно, дорівнює модулю нормального тиску ($N = F_\Sigma^n$). Модуль сили F_Σ^τ, яка намагається рухати тіло на поверхні, виразиться формулою $F_\Sigma^\tau = F_\Sigma^n \operatorname{tg}\alpha$.

Для того щоб тіло залишалось на поверхні в рівновазі, необхідно витримати умови $F_\Sigma^\tau \le F_f$. Підставивши в цю умову значення F_Σ^τ і F_f, дістанемо $F_\Sigma^n \operatorname{tg}\alpha = F_\Sigma^n \operatorname{tg}\varphi$. Звідси остаточно знайдемо умову рівноваги тіла на площині:

$$\alpha \le \varphi. \qquad (6.8)$$

Якщо збільшувати модуль сили F_Σ, залишаючи той же напрямок, то пропорційно збільшуватиметься не тільки модуль F_Σ^τ рушійної сили, а й модуль сили тертя F_f, бо збільшується нормальний тиск F_Σ^n. Тіло стане рухатися лише тоді, коли рушійна складова F_Σ^τ рівнодіючої зовнішніх сил буде більшою від сили тертя, а для цього необхідно так змінити напрямок сили F_Σ, щоб кут α був більшим від кута φ, тобто сила F_Σ проходила за межами конуса тертя (на рис. 6.6, *в* показано штриховою лінією). Отже, ***конус тертя визначає деяку область рівноваги спокою тіла під дією прикладених сил.***

6.4. Тертя в поступальних кінематичних парах

За своєю конструкцією поступальні кінематичні пари бувають плоскі (рис. 6.7, *а*), клинові (рис. 6.7, *б*) та циліндричні (рис. 6.7, *в*). У свою чергу, вони поділяються на горизонтальні та похилі.

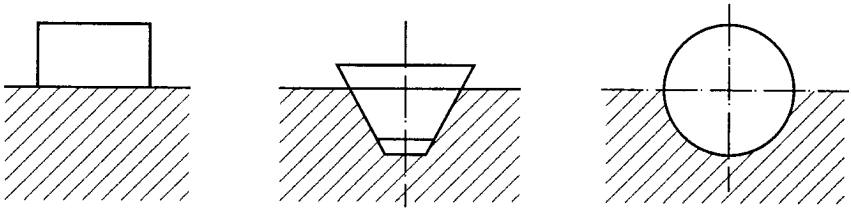


Рис. 6.7.

Основні закономірності тертя ковзання в плоских горизонтальних поступальних кінематичних парах ми вже розглянули. Надалі розглядатимемо тертя ковзання в інших випадках.

Тертя на похилій площині. Розглянемо загальний випадок рівномірного руху тіла вгору по похилій площині (рис. 6.8, *а*), яка утворює кут α з горизонтом. Тіло вагою $\boldsymbol{G}$ приводиться в рух силою $\boldsymbol{F}$, яка утворює з нормаллю n—n до похилої площини кут β.

При рівномірному русі тіла вгору по похилій площині на нього, крім сил $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{G}$, діятиме нормальна реакція площини $\boldsymbol{N}$ і сила тертя $\boldsymbol{F}_f$, яка напрямлена в протилежний від руху тіла бік. Замінимо сили $\boldsymbol{N}$ і $\boldsymbol{F}_f$ рівнодіючою $\boldsymbol{R}$, що утворює з нормальною реакцією кут тертя φ (6.7).

Розглянемо умову рівноваги тіла під дією прикладених сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$), на основі якої можна записати векторне рівняння

$$\underline{\underline{\boldsymbol{G}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + \boldsymbol{R} = 0\,. \tag{6.9}$$

Тоді, побудувавши згідно з рівнянням (6.9) план сил (рис. 6.8, *б*), запишемо пропорцію

$$\frac{F}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{G}{\sin(\pi-\beta-\varphi)} = \frac{G}{\sin(\beta+\varphi)}\,,$$

з якої знаходимо силу $\boldsymbol{F}$, яка забезпечує рівномірний рух тіла по похилій площині та напрямлена під кутом β до нормалі n—n,

$$F = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}\,. \tag{6.10}$$

Якщо сила $\boldsymbol{F}$ паралельна похилій площині ($\beta = \pi/2$), то $\sin(\pi/2 - \varphi) = \cos\varphi$, а значить,

$$F = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}\,. \tag{6.11}$$

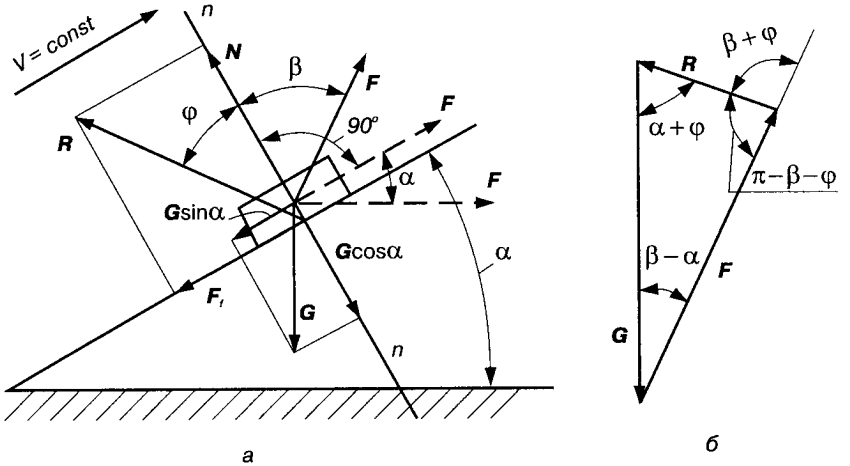


Рис. 6.8.

Коли ж сила F горизонтальна ($\beta = \pi/2 + \alpha$), то дістанемо

$$F = G\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi). \qquad (6.12)$$

Остання формула широко використовується в інженерних розрахунках.

Якщо тіло рухається рівномірно вниз по похилій площині, то сила тертя F_f буде направлена в протилежний бік (вгору), а значить, повна реакція $R = F_f + N$ буде відхилена від нормалі n—n на кут ($-\varphi$). Тоді залежності (6.10)—(6.12) набувають вигляду

$$F = G\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)};\quad F = G\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi};\quad F = G\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi). \qquad (6.13)$$

Характерно, що якщо кут нахилу площини менший від кута тертя ($\alpha < \varphi$), то сила F (6.13) має знак мінус. Отже, у цьому разі для рівномірного руху тіла вниз по похилій площині треба замінити напрямок сили: сила F має "стягувати" тіло з похилої площини, бо інакше тіло перебуватиме в стані спокою. Площина, в якої кут нахилу α менший від кута тертя φ, називається ***самогальмівною.***

Якщо $\alpha = \varphi$, то сила F дорівнює нулеві. Це і є граничний випадок самогальмування.

Питання про рух повзуна по похилій площині з прискоренням можна вивчити на підставі аналогічних міркувань, коли до всіх діючих сил приєднати силу інерції тіла.

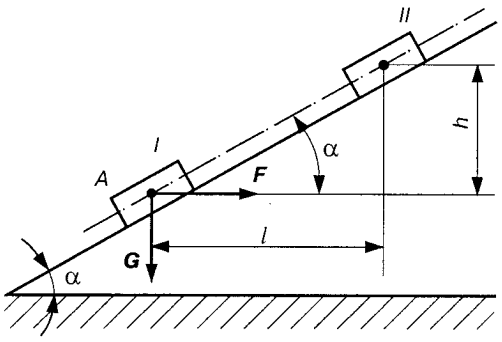


Рис. 6.9.

ККД похилої площини. Нехай тіло A під дією горизонтальної сили F переміститься вгору по похилій площині з положення I в положення II (рис. 6.9).

ККД, як відомо, визначається за формулою

$$\eta = \frac{A_{к.о}}{A_р},$$

де $A_{к.о}$ — робота сил корисного опору; $A_р$ — робота рушійних сил.

Якщо тіло рухається вгору по похилій площині, сила F напрямлена в бік руху і є рушійною силою, а значить, $A_р = Fl$, сила G буде силою опору, а тому $A_{к.о} = Gh$. Тоді $\eta = \frac{Gh}{Fl}$.

Враховуючи, що $h/l = \operatorname{tg}\alpha$, де кут α — кут підйому похилої площини, а $F = G\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$, дістанемо

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \qquad (6.14)$$

Якщо тіло рухається вниз по похилій площині, сила G буде рушійною силою, а F — силою опору, а тому $A_р = Gh$; $A_{к.о} = Fl$. Тоді $\eta = \frac{Fl}{Gh}$, або, взявши до уваги, що $F = G\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, маємо

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (6.15)$$

Із залежності (6.14) видно, що якщо $\alpha \le \varphi$, то $\eta \le 0$.

Похила площина, в якої ККД $\eta \le 0$, є ***самогальмівною***. Самогальмування можливе і при русі тіла вгору по похилій площині. Для визначення кута нахилу самогальмування площини необхідно покласти $\eta = 0$. З формули (6.13) випливає, що $\eta = 0$ при $\operatorname{tg}\alpha = 0$ або $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0$. Перший розв'язок не має змісту, оскільки при $\operatorname{tg}\alpha = 0$ при $\alpha = 0$, а значить, сила F ніякої корисної роботи не виконує ($Gh = 0$) — вона тільки долає силу тертя. Якщо $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \infty$, то дістаємо $\alpha + \varphi = \pi / 2$, або $\alpha = \pi / 2 - \varphi$.

Таким чином, похила площина при підійманні тіла вгору самогальмівна, якщо кут підйому α дорівнює $\pi/2 - \varphi$.

ККД є функція кута підйому площини $\eta = \eta(\alpha)$. З умови, що ККД дорівнює нулю при $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi/2 - \varphi$, треба припускати, що в проміжку між вказаними значеннями кута α ККД має найбільше значення.

Значення α_m, при якому η максимальний, можна знайти відомим способом, дослідивши залежності (6.14) або (6.15) на екстремум. Якщо ці рівняння продиференціювати і прирівняти нулю: $d\eta/d\alpha = 0$, то одержимо рівняння, з яких легко визначити α_m.

При русі тіла вгору по похилій площині маємо

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\cos^{-2}\alpha\ \mathrm{tg}(\alpha+\varphi) - \mathrm{tg}\alpha\cos^{-2}(\alpha+\varphi)}{\mathrm{tg}^2(\alpha+\varphi)} = 0,$$

або

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos^2(\alpha+\varphi)} = 0.$$

Замінивши тангенси відношенням sin і cos та привівши складові до спільного знаменника, після відповідних перетворень дістанемо

$$\sin 2(\alpha+\varphi) - \sin 2\alpha = 0.$$

Це рівняння задовольняється тільки за умови, що $2(\alpha+\varphi) = \pi - 2\alpha$, оскільки $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$.

Отже, максимальний ККД відповідає куту підйому

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \qquad (6.16)$$

Якщо тіло рухається вниз по похилій площині, аналогічно дістаємо максимальне значення ККД при

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \qquad (6.17)$$

Можна показати, що в разі піднімання повзуна по похилій площині, в якої кут підйому менший від кута φ, ККД завжди менший від 0,5. Справді, вже при $\alpha = \varphi$ рівняння (6.14) набуває такого вигляду:

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\mathrm{tg}2\varphi} = \mathrm{tg}\varphi\frac{1-\mathrm{tg}^2\varphi}{2\mathrm{tg}\varphi} = 0{,}5 - 0{,}5\ \mathrm{tg}^2\varphi.$$

Отже, у цьому випадку η завжди менше від 0,5.

Виведені формули застосовуються для наближеного визначення ККД гвинтових та черв'ячних механізмів (передач). У разі передачі руху від черв'яка до колеса застосовується формула (6.14), а при передачі від колеса до черв'яка — формула (6.15). Усі наслідки, що випливають з цих формул для похилої площини, залишаються в силі для гвинтових і черв'ячних механізмів.

Тертя в клиновій поступальній парі. У деяких випадках поверхня стикання повзуна і напрямної має в поперечному перерізі вигляд двогранного кута, або жолоба (рис. 6.10, *а*). Таку пару називають ***клиновою***.

Нехай тіло *1*, на яке діє вертикальна сила $\boldsymbol{Q}$, під дією сили $\boldsymbol{F}$ рухається рівномірно вздовж горизонтальної напрямної *2*. Повзун притискається до напрямної боковими поверхнями, на яких виникає сила тертя, що перешкоджає руху. Для того щоб тіло рухалось рівномірно в напрямній, повинна дотримуватися умова $F = 2F_f$, де F_f — величина сили тертя F_{f_1} і F_{f_2}, що виникає на кожній грані повзуна, причому $F_{f_1} = F_{f_2} = F_f$, оскільки $N_1 = N_2 = N, f_1 = f_2 = f$. Тоді

$$F = 2F_f = 2fN. \tag{6.18}$$

Реакції N_1, N_2 визначають з трикутника сил (рис. 6.10, *б*), якщо скористатися рівнянням $\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = 0$. Враховуючи, що $N_1 = N_2 = N$, з плану сил маємо

$$N = \frac{Q}{2\sin\gamma}.$$

Отже,

$$F = \frac{f}{\sin\gamma}Q = f'Q, \tag{6.19}$$

звідки

$$f' = \frac{f}{\sin\gamma}, \tag{6.20}$$

де f' — зведений (умовний) коефіцієнт тертя клинової пари. Оскільки завжди кут γ менший 90°, то $f' > f$ — коефіцієнта тертя плоскої поступальної пари. Цю властивість клинової пари широко використовують у техніці для збільшення сили тертя при передачі руху (наприклад, у пасових і фрикційних передачах, гвинтових з'єднаннях).

У всіх випадках, коли має місце тертя в клиновій парі, можна користуватися формулами для плоскої поступальної пари, в

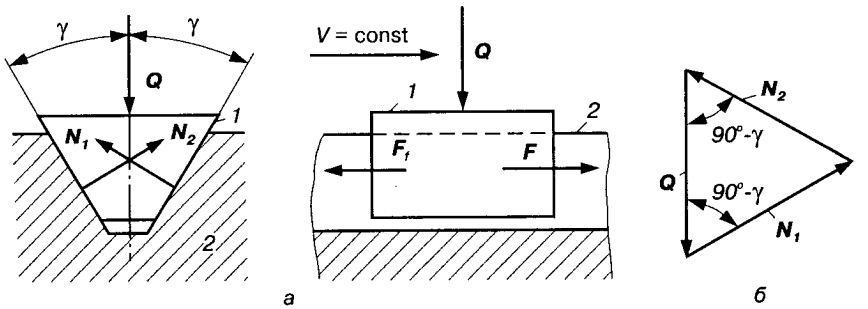


Рис. 6.10.

які замість коефіцієнта тертя f і кута тертя φ підставляємо зведений коефіцієнт f' і зведений кут тертя $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$.

Циліндрична поступальна пара. Для визначення сили тертя F_f в такій парі (рис. 6.11) розглянемо елементарну частину $ab = ds = rd\beta$ циліндричної поверхні циліндра *1* (повзуна). Тоді елементарна сила тертя для цієї частини визначається так: $dF_f = fpds = fplrd\beta$, де p — питомий тиск на виділеному елементі напрямної; l — довжина повзуна; r — радіус циліндричної напрямної.

Повна величина сили тертя визначається за формулою

$$F_f = frl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} pd\beta .$$

Досліди показують, що зміна тиску p підкоряється закону косинуса, тобто $p = p_0 \cos\beta$, де p_0 — тиск (нормальна реакція) на лінії дії сили Q. Тоді

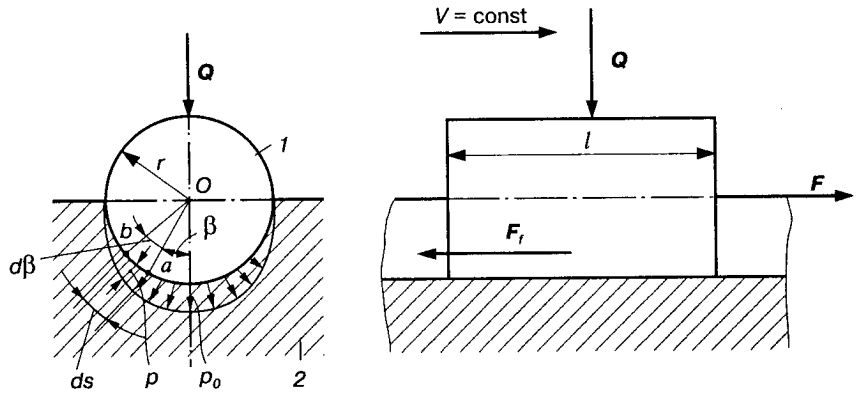


Рис. 6.11.

$$F_f = frl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p_0 \cos\beta d\beta = 2frlp_0 . \qquad (6.21)$$

Зв'язок питомого тиску p_0 з величиною зовнішнього навантаження Q можна одержати, записавши рівняння проекцій на вертикаль:

$$Q = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} plds \cos\beta = lrp_0 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 d\beta = \frac{\pi}{2} lrp_0 .$$

Звідси

$$p_0 = \frac{2}{\pi}\frac{Q}{lr} .$$

Підставляючи це значення у формулу (6.21), знаходимо силу тертя

$$F_f = \frac{4}{\pi} fQ .$$

Позначивши $\frac{4}{\pi} f = f'$, зведений коефіцієнт тертя в циліндричній поступальній парі, остаточно одержимо

$$F_f = f'Q \approx 1{,}27fQ. \qquad (6.22)$$

Із формули (6.22) видно, що сила тертя повзуна в циліндричній напрямній на 27 % більша від сили тертя в плоскій поступальній парі, але, враховуючи простоту виготовлення, циліндричні поступальні пари досить широко використовуються в техніці.

6.5. Тертя у гвинтових кінематичних парах

При розгляді тертя у гвинтових кінематичних парах, звичайно, роблять цілий ряд припущень. По-перше, оскільки закон розподілу тисків по гвинтовій нарізці невідомий, то умовно вважають, що тиск гайки на гвинт або, навпаки, гвинта на гайку прикладений по середній лінії нарізки, розміщеної на відстані r від осі гвинта (рис. 6.12, *а*). По-друге, припускають, що дію сил у гвинтовій парі можна звести до дії сил на повзун, який знаходиться на похилій площині (рис. 6.12, *б*), тобто, розгортаючи середню лінію гвинтової нарізки на площину, зводять просторову задачу до плоскої, для чого поступають так.

Нехай на гайку A, яку зображаємо у вигляді елементарного кубика, діє деяка осьова сила Q і деяка пара сил у площині, перпендикулярній до осі гвинта z. Момент цієї пари можна вважати моментом сили $F_к$, що прикладена на відстані R від осі z. $M = F_к R$.

Для того щоб елемент гайки A рухався рівномірно вгору по гвинтовій поверхні, необхідно, щоб момент M дорівнював моменту сили F відносно цієї ж осі z, тобто

$$F_к R = Fr. \qquad (6.23)$$

В останньому рівнянні F є сила, яка необхідна для рівномірного переміщення тіла A (гайки) по похилій площині B, кут підйому α якої дорівнює кутові підйому гвинтової нарізки по середньому радіусу (див. рис. 6.12, *б*). З рівняння (6.12) випливає, що сила F визначається за формулою

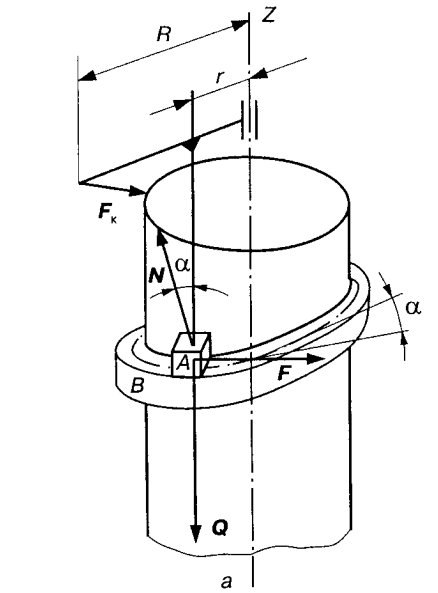


Рис. 6.12.

$$F = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \qquad (6.24)$$

отже, з урахуванням (6.23) і (6.24) маємо

$$F_к = Q\frac{r}{R}\operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \qquad (6.25)$$

У випадку руху гайки A у напрямку, що збігається з напрямком сили Q (рух вниз), формула (6.25) набуває вигляду

$$F_к = Q\frac{r}{R}\operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \qquad (6.26)$$

При $\alpha < \varphi$ в гвинтовій парі буде самогальмування. ККД гвинтової пари визначається, як і для похилої площини, формулами (6.14), (6.15).

Виведеними формулами можна користуватися при дослідженні гвинтових пар з прямокутною нарізкою. Якщо нарізка ***трикутна*** або ***трапецоїдна***, то таку кінематичну пару можна розглядати як похилу площину з клиновим повзуном (рис. 6.13), в якого кут між вертикаллю і стінками жолоба дорівнює 90° — β, де кут 2β — кут профілю різьби. Тоді зведений коефіцієнт тертя f' на основі (6.20) матиме вираз

$$f' = \frac{f}{\sin(90° - \beta)} = \frac{f}{\cos\beta}. \qquad (6.27)$$

Оскільки в гвинтовій парі з гострокутною нарізкою кут $\beta > 0°$, то зведений коефіцієнт тертя f', а відповідно і сила тертя у такій парі більші, ніж у гвинтовій парі з прямокутною нарізкою. З цієї ж причини всі деталі нарізних з'єднань (болти, гвинти, шпильки, гайки), де треба усунути самовідгвинчування деталей, роблять з трикутною нарізкою, а в гвинтових передачах, де треба зменшити сили тертя, — з прямокутною, інколи з трапецоїдною нарізкою.

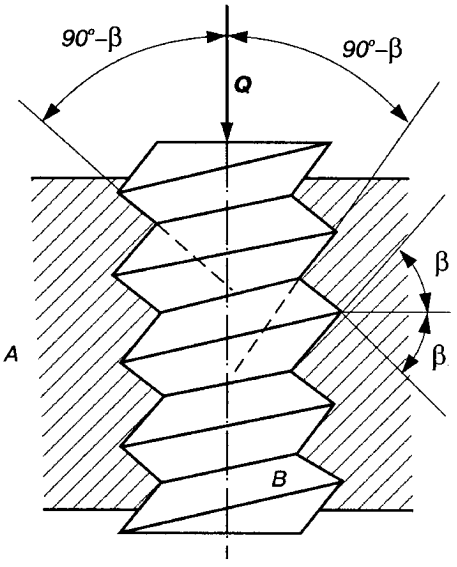


Рис. 6.13.

Силу $F_к$, яку необхідно прикласти на кінці плеча радіуса R (рис. 6.12), визначають за формулами, аналогічними (6.25) і (6.26), в які замість кута тертя φ підставляють зведений кут тертя $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$:

$$F_к = Q\frac{r}{R}\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi'). \qquad (6.28)$$

Знак "+" беруть тоді, коли напрямок переміщення гайки не збігається з напрямком осьової сили Q, і, навпаки, знак "—" — коли ці напрямки збігаються.

6.6. Тертя в обертових кінематичних парах

Обертові пари одержали надзвичайно широке поширення в машинах. Найхарактернішим прикладом такої пари може служити пара, утворена цапфою вала або осі та їх опорами. ***Цапфою*** називається та частина вала або осі, якою вони спираються на опори. Якщо цапфа передає на опори радіальні сили та розміщена на кінці вала, то її називають ***шипом*** (рис. 6.14), а якщо всередині вала, — ***шийкою.*** Опори в таких випадках називаються ***підшипниками.*** Якщо цапфа передає силу в осьовому напрямку, то її називають ***п'ятою***, а опори — ***підп'ятниками.***

Тертя цапф у підшипниках. При виводі розрахункових формул у такій кінематичній парі використовують, як правило, дві гіпотези. Згідно з ***першою гіпотезою*** вважають, що питомий тиск p розподіляється рівномірно на проекції поверхні цапфи на горизонтальну площину (рис. 6.15), тобто

$$p = \frac{Q}{ld} = \text{const}, \tag{6.29}$$

де l — довжина цапфи; $d = 2r$ — її діаметр.

Для забезпечення рівномірного обертання вала *1*, який притискається до підшипника *2* силою Q, необхідно прикласти рушійний момент $M_р$, що дорівнює моменту тертя, який виникає між ланками *1* і *2*.

Для визначення цього моменту розглянемо елементарну ділянку $ds = \breve{a}b$ поверхні цапфи, на яку діє нормальний тиск

$$dN = pds, \tag{6.30}$$

де $ds = rl\,d\alpha$; l — довжина цапфи.

Внаслідок дії сили dN на ділянці ds виникає елементарна сила тертя, яка за законом Амонтона—Кулона записується у вигляді

$$dF_f = fdN. \tag{6.31}$$

Ця сила створює при обертанні вала протидійний момент тертя $dM_f = dF_f r$, або з урахуванням (6.30) та (6.31) маємо

$$dM_f = fr^2 pld\alpha,$$

де кут $d\alpha$ змінюється від $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

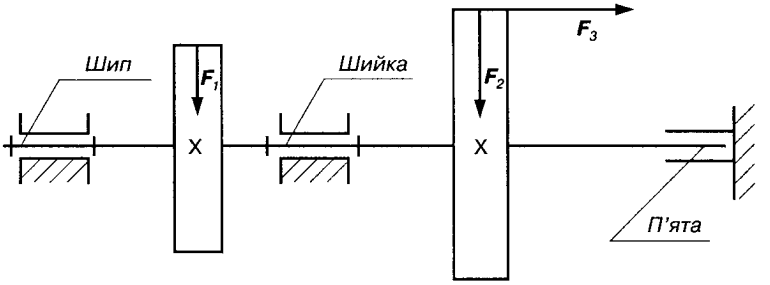


Рис. 6.14.

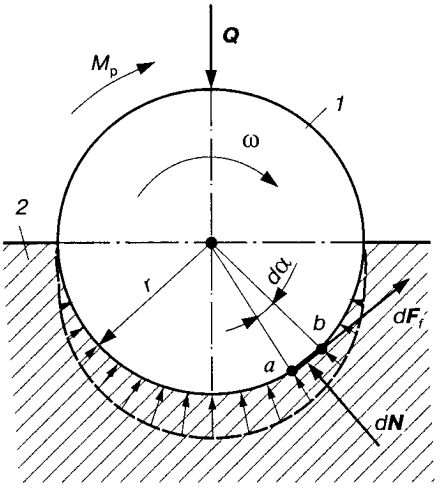


Рис. 6.15.

Тоді момент тертя в обертовій парі має вигляд

$$M_f = fr^2 pl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\pi}{2} fQr.$$

Якщо позначити $(\pi/2)f \approx \approx 1{,}57f = f'$ — зведений коефіцієнт тертя в обертовій парі, то остаточно дістанемо

$$M_f = f'Qr. \qquad (6.32)$$

Одержана за цим припущенням ($p = \text{const}$) величина моменту тертя добре узгоджується з експериментальними даними для неприпрацьованих (нових) обертових пар.

Для припрацьованих (старих) обертових пар більше відповідає ***друга гіпотеза***, згідно з якою знос у напрямку дії сили однаковий. Звичайно, цапфа виготовляється з твердішого матеріалу, ніж підшипник, тому можна вважати, що під час роботи зношується тільки підшипник, а цапфа переміщається в глибину підшипника (на величину зносу) в напрямку дії сили ***Q***. На початку роботи (до зносу) центр цапфи знаходився в точці O (рис. 6.16), через деякий час роботи він перемістився на значення зносу $\delta = OO_1$, на стільки ж перемістилися точки, які лежать на поверхні цапфи, тобто

$$ab = a'b' = a''b'' = \text{const}.$$

Виділимо біля точки a нескінченно вузьку смужку поверхні цапфи, площа якої $ds = lr\,d\alpha$, де l — довжина цапфи.

Нормальний тиск на цю смужку $dN = plrd\alpha$, де p — змінний нормальний питомий тиск.

Сила тертя смужки $dF_f = fplrd\alpha$. Момент тертя смужки $dM_f = fplr^2 d\alpha$. Повний момент тертя визначається за формулою

$$M_f = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} fplr^2 d\alpha = flr^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} pd\alpha. \qquad (6.33)$$

Оскільки p — змінна величина, то вона залишилась під знаком інтегралу. Виразимо p через кут α. Постійний знос $\delta = ab$ у напрямку сили $\boldsymbol{Q}$ і змінний радіальний знос $\delta_n = ac$ зв'язані між собою співвідношенням $\delta_n = \delta \cos\alpha$.

З іншого боку, радіальний знос δ_n буде прямо пропорційний питомому тиску p і відносній швидкості ковзання $v_S = \omega r$: $\delta_n = kp\omega r$, де k — невідомий коефіцієнт пропорційності. Отже, $\delta \cos\alpha = kp\omega r$, звідки

$$p = \frac{\delta}{k\omega r}\cos\alpha = c\cos\alpha,$$

де $c = \dfrac{\delta}{k\omega r}$ — стала.

Підставивши значення p у вираз (6.33) і проінтегрувавши, знайдемо

$$M_f = flr^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} c\cos\alpha d\alpha = 2flr^2 c. \qquad (6.34)$$

У формулі (6.34) стала c невідома. Щоб визначити її, візьмемо суму проекцій усіх сил на вертикаль: $N_y - Q = 0$, де N_y — сума проекцій елементарних реакцій dN на вертикальну вісь:

$$N_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\alpha dN.$$

Підставивши в цей вираз значення $dN = plrd\alpha$ і $p = c\cos\alpha$, візьмемо інтеграл

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} lrc\cos^2\alpha d\alpha = lrc \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) d\alpha =$$

$$= lrc\left(\left|\frac{\alpha}{2}\right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \left|\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right|_{-\pi/2}^{+\pi/2}\right) = \frac{\pi}{2} lrc = Q,$$

звідки $c = \dfrac{2Q}{\pi lr}$.

Підставивши c у вираз для моменту тертя (6.34), одержимо

$$M_f = \frac{4}{\pi} fQr,$$

або

$$M_f = f'Qr, \qquad (6.35)$$

де f' — зведений коефіцієнт тертя: $f' = \dfrac{4}{\pi} f \approx 1{,}27f$.

Круг тертя. Якщо цапфа нерухома, нормальна реакція N підшипника проходитиме через цапфи O (рис. 6.17). Коли ж до цапфи прикласти рушійний момент $M_р$, вона почне обертатися в підшипнику, і при цьому виникає сила тертя, момент якої і є моментом тертя $M_f = F_f r$. Склавши силу тертя $\boldsymbol{F}_f$ з нормальною реакцією N, дістанемо повну реакцію $\boldsymbol{R}$, яка відхилена від нормальної реакції на кут тертя φ. Момент сили тертя відносно осі цапфи можна виразити також через момент реакції $\boldsymbol{R}$:

$$M_f = R\rho, \qquad (6.36)$$

де $\rho = r\sin\varphi$.

Круг радіуса ρ називають ***кругом тертя***. Повна реакція $\boldsymbol{R}$ завжди дотикається до круга тертя. Круг тертя має всі властивості конуса тертя, а саме: якщо рівнодіюча сил, прикладених до вала, проходить поза цим кругом, то вал рухається прискорено; коли рівнодіюча сил — дотична, то вал рухається рівномірно або знаходиться в стані спокою, тобто в рівновазі; якщо ж рівнодіюча проходить усередині круга тертя, то вал рухається сповільнено або перебуває в стані спокою.

Тертя п'яти в підп'ятнику. Одним із різновидів обертових пар є п'ята, яка при роботі взаємодіє з підп'ятником в умовах тертя ковзання. Опорну поверхню вала можна виготовити у вигляді суцільного круга або кільця, як показано на рис. 6.18, *а*.

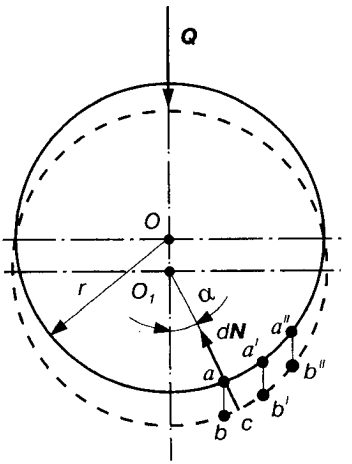


Рис. 6.16.

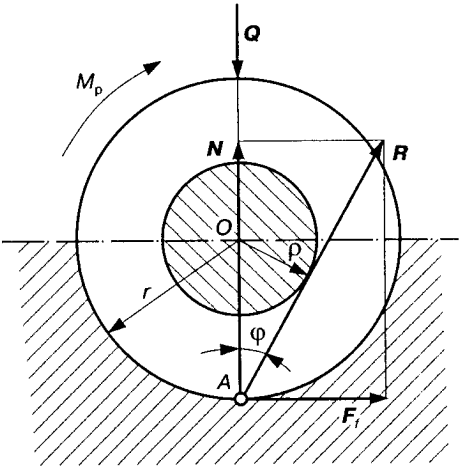


Рис. 6.17.

Для визначення моменту тертя в плоскій кільцевій п'яті також користуються двома гіпотезами. Згідно з ***першою гіпотезою*** вважають, що питомий тиск p розподіляється рівномірно по поверхні п'яти, тобто

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)} = \text{const}. \tag{6.37}$$

Це буде ближче до істини для неприпрацьованих кінематичних пар та для вужчого кільця, тобто чим менша різниця $R - r$. Елементарний момент сил тертя dM_f на нескінченно вузькому кільці шириною $d\rho$ (рис. 6.18, *б*) визначається за формулою

$$dM_f = dF_f \rho\,, \tag{6.38}$$

де dF_f — сила тертя, що виникає при обертанні вала в зоні елементарного кільця. Згідно з формулою Амонтона—Кулона маємо

$$dF_f = f dN. \tag{6.39}$$

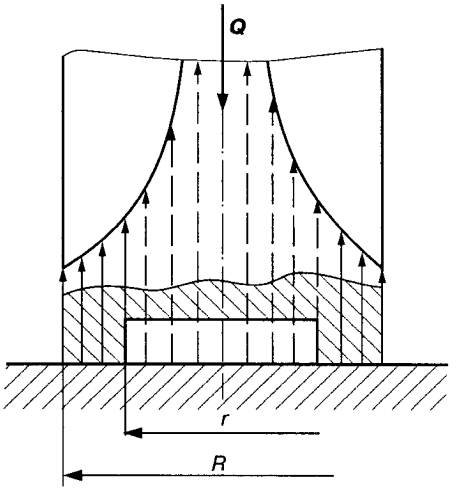
Нормальний тиск, що припадає на це кільце,

$$dN = p ds, \tag{6.40}$$

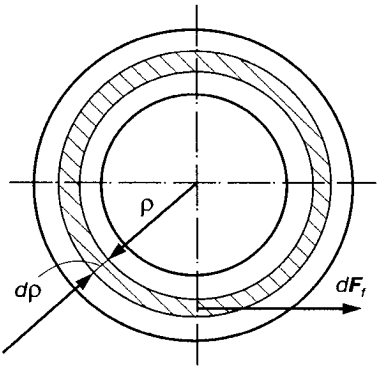
де $ds = 2\pi\rho d\rho$ — площа кільця.

Підставивши (6.39), (6.40) у формулу (6.38), маємо

$$dM_f = 2\pi f p \rho^2 d\rho\,. \tag{6.41}$$



а



б

Рис. 6.18.

Повний момент тертя кільцевої поверхні має вигляд

$$M_f = \int_r^R dM_f =$$

$$= 2\pi fp \int_r^R \rho^2 d\rho = 2\pi fp \frac{R^3 - r^3}{3}.$$

Якщо врахувати (6.37), то остаточно дістанемо

$$M_f = \frac{2}{3} fQ \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (6.42)$$

Величина $\rho = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ — радіус тертя. Тоді

$$M_f = f\rho Q.$$

Якщо п'ята буде суцільною, то $r = 0$, а тому момент тертя має вигляд

$$M_f = \frac{2}{3} fQR. \quad (6.43)$$

Відповідно до другої гіпотези, яка справедливіша для припрацьованих пар, знос у напрямку дії сили $\boldsymbol{Q}$ однаковий. У цьому випадку, перш ніж брати інтеграл з функції (6.41), треба виразити p як функцію від ρ, оскільки $p \neq \text{const}$.

Позначимо знос у напрямку сили $\boldsymbol{Q}$ через δ, який у кожній точці кільцевої поверхні буде прямо пропорційний питомому тиску і швидкості ковзання $v_S = \omega\rho$, тобто $\delta = cpv_S = cp\rho\omega = \text{const}$, де c — невідомий коефіцієнт пропорційності, звідки

$$p = \frac{\delta}{c\omega} \frac{1}{\rho}.$$

Введемо позначення $\frac{\delta}{c\omega} = k$. Тоді

$$p = \frac{k}{\rho}. \tag{6.44}$$

Підставивши p у вираз (6.41), після інтегрування дістанемо

$$M_f = \int_r^R 2\pi f p \rho^2 d\rho = 2\pi f k \int_r^R \rho d\rho = \pi f k (R^2 - r^2). \tag{6.45}$$

Щоб визначити невідому сталу k, візьмемо суму проекцій усіх сил на вісь вала:

$$\int_r^R dN - Q = 0.$$

Враховуючи (6.40), одержуємо

$$Q = \int_r^R dN = \int_r^R 2\pi p \rho d\rho = 2\pi k \int_r^R d\rho = 2\pi k (R - r),$$

звідки

$$k = \frac{Q}{2\pi(R - r)}.$$

Підставивши k у вираз (6.45), знайдемо момент тертя за другою гіпотезою

$$M_f = \frac{1}{2} f Q (R - r). \tag{6.46}$$

Для суцільної п'яти при $r = 0$ момент тертя $M_f = \frac{1}{2} f Q R$.

Як показує досвід, суцільна п'ята і підп'ятник зношуються нерівномірно, причому більший знос має місце на більшому радіусі. З умови (6.44) видно, що для суцільної п'яти питомий тиск розподіляється за законом рівнобічної гіперболи (див. рис. 6.18). Очевидно, що при $\rho = 0$ теоретично повинно бути $p = \infty$. Практика підтверджує, що тиск у центрі п'яти дійсно досягає досить великих значень. Це викликає зчеплення металу і відокремлення окремих частинок від більш м'якої поверхні. У результаті цього перерозподіляються питомі тиски і вони не

досягають тих значень, на які вказує (6.44). Але значні нерівномірності тисків приводять до того, що з часом роботи тертьові поверхні втрачають свою початкову плоску форму.

У кільцевій п'яті знос рівномірніший, що робить її більш вигідною і зручною в експлуатації.

6.7. Тертя гнучкої ланки

У техніці широко застосовуються механізми з гнучкими ланками (пасові та канатні передачі, стрічкові гальма та транспортери тощо). У таких механізмах передача руху можлива лише при наявності достатньої сили тертя між гнучкою ланкою і шківом.

Формулу, що зв'язує основні параметри передачі гнучкою ниткою, вивів у 1765 р. Л. Ейлер [1, 4].

Для виведення цієї формули розглянемо ковзання гнучкої нитки по нерухомому шківу (рис. 6.19, *а*). Тоді кінець гнучкої нитки, який при своєму русі набігатиме на шків, назвемо ***набіжним*** кінцем, а той кінець, який збігатиме зі шківа, — ***збіжним***. Дуга $\overset{\cup}{ab}$, по довжині якої нитка прилягає до шківа, називається ***дугою обхвату***, а центральний кут α, що їй відповідає, — ***кутом обхвату***. Нехай натяг набіжного кінця буде F_1, а збіжного F_2. Знайдемо зв'язок між цими натягами. При цьому зробимо такі спрощення. Вважатимемо, що нитка не розтягується і не чинить опору згину при набіганні і збіганні нитки. Далі припустимо, що нитка рухається зі сталою швидкістю v. Масою нитки та її відцентровими силами інерції знехтуємо.

Щоб надати гнучкій ланці рівномірного руху в бік сили F_2, необхідно подолати не тільки опір сили F_1, але й силу тертя F_f між ниткою і шківом, тобто

$$F_2 = F_1 + F_f, \tag{6.47}$$

звідки

$$F_f = F_2 - F_1. \tag{6.48}$$

Отже, при $F_f > 0$ завжди $F_2 > F_1$, а це значить, що при переході від точки a до точки b, де нитка набігає і збігає зі шківа, сила тертя постійно збільшується від F_1 до F_2. Для встановлення залежності між цими величинами виділимо на дузі обхвату нескінченно малий елемент нитки $ds = \overset{\cup}{cd}$. Якщо на початку цього елемента — в точці c — натяг має деяке значення F, то в

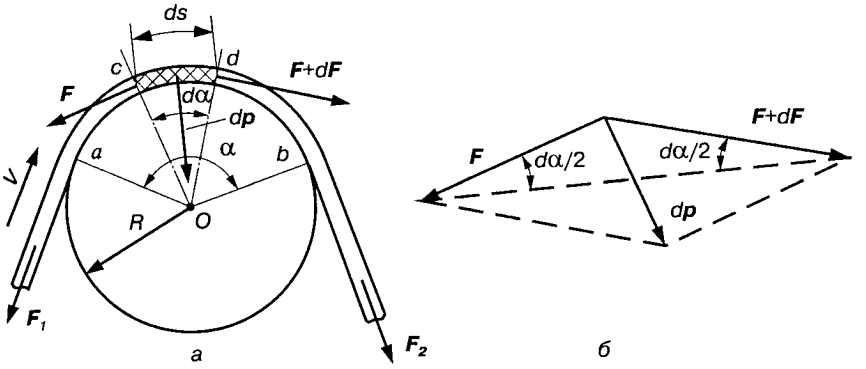


Рис. 6.19.

кінці його, як вказано раніше, він збільшується на dF і дорівнюватиме $F + dF$. Нерівномірність натягу зумовлюється наявністю сил тертя між елементом нитки і шківом. Лінії дії сил F і $F + dF$ будуть дотичними до шківа і перпендикулярними до радіусів, проведених з точки O в точки дотику c і d.

Елементарна сила тертя dF_f згідно з рівнянням (6.48) має вигляд

$$dF_f = (F + dF) - F = dF\,. \tag{6.49}$$

Згідно з формулою Амонтона—Кулона, сила тертя визначається за формулою

$$dF_f = f dp\,, \tag{6.50}$$

де dp — елементарна сила тиску елемента ds на шків; f — коефіцієнт тертя.

Із співвідношення (6.49) і (6.50) випливає

$$dF = f dp. \tag{6.51}$$

Позначивши через $d\alpha$ кут, який стягується дугою cd, знаходимо суму проекцій сил, прикладених до елемента cd, на радіус, проведений через середину дуги cd. У результаті дістанемо

$$dp = F\sin\frac{d\alpha}{2} + (F + dF)\sin\frac{d\alpha}{2} = 2F\sin\frac{d\alpha}{2} + dF\sin\frac{d\alpha}{2}.$$

Нехтуючи нескінченно малими величинами другого порядку $\left(dF\sin\dfrac{d\alpha}{2}\right)$ і враховуючи, що для малих кутів $\sin\dfrac{d\alpha}{2} \approx \dfrac{d\alpha}{2}$, одержуємо

$$dp = Fd\alpha. \tag{6.52}$$

Підставивши знайдене значення для сили dp в рівняння (6.51), дістанемо

$$dF = fFd\alpha\,, \tag{6.53}$$

звідки, розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dF}{F} = fd\alpha\,. \tag{6.54}$$

Інтегруючи ліву і праву частини цього рівняння, дістаємо

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^{\alpha} fd\alpha\,, \tag{6.55}$$

або

$$\ln F_2 - \ln F_1 = f\alpha\,.$$

Потенціюючи цей вираз, одержуємо відому формулу Ейлера

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha}\,, \tag{6.56}$$

з якої випливає, що сила натягу зростає із зростанням кута обхвату α і коефіцієнта тертя f. Легко побачити, що при сталому коефіцієнті тертя збільшення кута обхвату дає дуже швидке зростання сили F_2.

Підставивши в рівняння (6.48) значення F_2 (6.56), дістанемо для сили тертя вираз

$$F_f = F_1(e^{f\alpha} - 1)\,. \tag{6.57}$$

Сила F_f є тією найбільшою коловою силою, яку можна передати шківу. Якщо коловий опір на веденому шківі дорівнює або менший від сили F_f, то гнучка нитка змусить шків обертатися. Коли ж коловий опір більший від сили F_f, то гнучка ланка ковзатиме по шківу, не обертаючи його. Таким чином, натягнена силами F_1 і F_2 гнучка ланка при $F_2 > F_1$ може передавати веденому шківу обертовий момент

$$M = (F_2 - F_1)R = F_1R(e^{f\alpha} - 1)\,, \tag{6.58}$$

де R — радіус шківа.

Формула Ейлера дає тільки наближений зв'язок між натягами гілок гнучкої ланки. Тому останнім часом у технічній літературі рекомендуються також і інші методи розрахунку, які тут не наводяться.

6.8. Тертя ковзання змащених тіл

Як було зазначено в параграфі 6.1 при рідинному терті безпосереднього стикання між двома поверхнями, що рухаються відносно одна одної, не буває, оскільки між цими поверхнями є проміжний мастильний шар рідини. При відносному русі поверхонь окремі шари рідини зсуваються відносно один одного. Отже, тертя в рідинному шарі зводиться до в'язкого зсуву.

Для зручності технічних розрахунків при вивченні рідинного тертя запроваджують поняття коефіцієнта тертя [4], але на відміну від коефіцієнта сухого тертя коефіцієнт рідинного тертя f залежить від швидкості v руху шарів мастила відносно один одного, від навантаження p і від коефіцієнта в'язкості μ, тобто

$$f = f(v, p, \mu).$$

Коефіцієнт в'язкості μ називають звичайно абсолютним коефіцієнтом, він характеризує величину опору мастила зсуваючим зусиллям, його одиниця — $Н \cdot с/м^2$.

Досліджуючи плоский рух в'язкої рідини, Ньютон знайшов, що сила, необхідна для переміщення одного шару рідини паралельно другому, має вигляд

$$F = s\mu \frac{dv}{dy}, \tag{6.59}$$

де F — сила в'язкого зсуву; s — площа поверхні ковзання; μ — коефіцієнт абсолютної в'язкості; dv/dy — зміна швидкості за висотою шару (градієнт швидкості).

Основоположник гідродинамічної теорії тертя М. П. Петров сформулював основні вимоги, необхідні для заміни сухого тертя рідинним:

1) ***мастильна рідина,*** що займає зазор між ковзними поверхнями, ***повинна затримуватися в зазорах;***

2) у шарі мастила при відносному ковзанні змащуваних поверхонь повинен ***виникати і підтримуватися внутрішній тиск***, який врівноважує зовнішнє навантаження, що притискує ковзні поверхні одну до одної;

3) мастильна рідина повинна повністю ***відокремлювати*** ковзні поверхні;

4) шар рідини між ковзними поверхнями повинен мати ***товщину***, не меншу від певної мінімальної границі, яка визначається найвищими елементами поверхонь тертьових тіл.

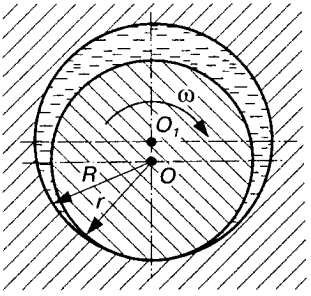


Рис. 6.20.

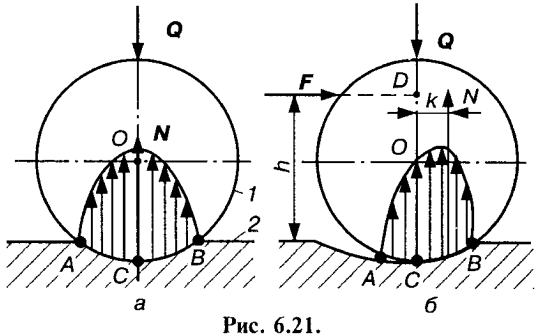


Рис. 6.21.

Для здійснення ***першої*** вимоги необхідно, щоб при змочуванні твердих тіл мастильною рідиною сили зчеплення між поверхнями твердих тіл і прилеглим шаром рідини були більші, ніж сили зчеплення між частинами мастильної рідини. Тоді при відносному русі змочених твердих поверхонь виникає ковзання шарів мастильної рідини відносно один одного і не буде ковзання рідини відносно твердих тіл.

Для задоволення ***другої*** вимоги необхідно, щоб між ковзними поверхнями безперервно нагніталась мастильна рідина, або щоб між ними був клиновий зазор. Стосовно цапфи, що лежить у підшипнику (рис. 6.20), це досягається тим, що радіуси R підшипника і r цапфи різні. Завдяки цьому між цапфою і підшипником створюється клиноподібний зазор, в який при обертанні цапфи нагнітається мастильна рідина. При цьому в мастильному шарі виникають сили, що зрівноважують зовнішнє навантаження на цапфу, і цапфа ніби "спливає" на шарі мастильної рідини. При цьому з підвищенням кутової швидкості центральна вісь O цапфи намагається збігтися з центральною віссю підшипника O_1. ***Третя*** і ***четверта*** вимоги належать до забезпечення такої обробки поверхні цапфи і підшипника, за якої зменшилися б можливі нерівності і шорсткість на їх поверхнях; крім того, необхідно прагнути до якомога менших деформацій цапфи і по можливості старанніше очищати мастильну рідину від сторонніх твердих домішок.

Питання про розрахунок кінематичних пар при наявності рідинного тертя докладно буде висвітлено в курсі "Деталі машин" і в спеціальних курсах — "Металорізальні верстати", "Машини та апарати легкої промисловості" тощо.

6.9. Тертя кочення

Як уже зазначалося, ***тертям кочення називають опір, який виникає при перекочуванні одного тіла по поверхні іншого.*** Цей опір виникає головним чином від того, що тіла не абсолютно тверді і завжди дещо деформуються в місцях їх стикання. Досвід показує, що опір перекочуванню тіл залежить від ***пружних властивостей тіл***, які стикаються, їх ***кривизни*** та ***сили притискання***.

Фізичні явища, які викликають тертя кочення, так само, як і при терті ковзання, вивчені мало. В технічних розрахунках користуються переважно даними, одержаними при експериментальних дослідженнях, які проводились над різними конкретними об'єктами: котками, колесами, роликами і шариками в підшипниках кочення тощо.

На перемагання опору під час перекочування тіл витрачається якась робота, яка йде переважно на деформацію стичних поверхонь. Якщо на коток *1*, який лежить на горизонтальній площині *2* (рис. 6.21, *а*), діє тільки сила Q, то деформація котка і опорної поверхні симетричні відносно лінії дії Q. В результаті деформації коток і опорна поверхня дотикаються не в одній точці (лінії), а деякою площиною контакту, ширина якої AB. Реакція з боку опорної поверхні розподіляється по всій площині контакту. Згідно з положенням теорії пружності напруження в зоні контакту розподіляються за еліптичним законом. При цьому крива напружень симетрична, а значить, напрямок рівнодіючої N цих напружень збігається з напрямком сили Q. За модулем нормальна реакція N дорівнює силі Q і напрямлена в протилежний від неї бік.

Якщо на коток діє на деякій висоті h ще й горизонтальна сила F (рис. 6.21, *б*), то деформація котка і опорної поверхні вже несиметричні відносно лінії дії сили Q. Це пояснюється тим, що ділянка BC буде знаходитися в зоні зростання деформації, а ділянка AC — у зоні спадання деформації ($BC > AC$). Завдяки внутрішньому тертю в матеріалі тіл, що деформуються, криві навантаження і розвантаження матеріалу не збігаються (явище пружної післядії і гістерезису). Тому крива напружень у зоні CB буде вища від кривої в зоні AC, а значить, розподіл напружень відносно лінії дії сили Q буде несиметричним з максимумом, зсунутим у бік руху котка. Отже, рівнодіюча N напружень буде зміщена в бік руху від точки C на величину k, яка називається ***плечем сили,*** або ***коефіцієнтом тертя кочення***.

Враховуючи, що деформація тіл при коченні незначна порівняно з розмірами тертьових тіл, приймаємо, що $CD = h$. Тоді, записуючи рівняння моментів сил, що діють на коток, відносно точки C, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\boldsymbol{F}) = Nk - Fh = 0 ,$$

або

$$Fh = Nk . \tag{6.60}$$

Величина $M_к = Nk$ називається моментом тертя кочення, а Fh — обертальним (рушійним) моментом. Якщо врахувати, що $N = \boldsymbol{Q}$, то момент тертя кочення матиме вигляд

$$M_к = Qk , \tag{6.61}$$

де роль коефіцієнта пропорційності відіграє плече тертя k. Як видно з рис. 6.21 і формули (6.61), коефіцієнт тертя кочення k вимірюється одиницею довжини (мм або см), в той час коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірна величина, і визначає максимальне значення зміщення нормальної реакції $\boldsymbol{N}$ відносно лінії дії сили $\boldsymbol{Q}$.

Коефіцієнт тертя кочення залежить від пружних властивостей матеріалів тертьових тіл, стану їх поверхні та радіусів кривизни. На практиці, як правило, користуються значеннями, знайденими експериментальним шляхом. Наприклад, для стального колеса і рейки $k \approx 0{,}05$ мм, для гартованих стальних шариків і роликів — 0,01 мм, чавуну по чавуну — 0,05 мм, дерева по сталі — 0,3—0,4 мм, дерева по дереву — 0,5—0,8 мм.

З рівнянь (6.60) і (6.61) знаходимо силу $\boldsymbol{F}$, яку необхідно прикласти до котка, щоб він рівномірно перекочувався по площині:

$$F = \frac{k}{h} Q . \tag{6.62}$$

На практиці інколи користуються умовною безрозмірною величиною

$$f' = \frac{k}{h} , \tag{6.63}$$

яка називається ***зведеним (умовним) коефіцієнтом тертя кочення.*** Тоді залежність (6.62) набуває такого ж вигляду, як і при терті ковзання:

$$F = f'Q . \tag{6.64}$$

Втрати енергії при терті кочення, як правило, значно менші, ніж при терті ковзання. Ось чому в техніці намагаються якомога більше замінити тертя ковзання тертям кочення. Для цього широко використовується колісний транспорт, підшипники кочення, шарикові або роликові напрямні тощо.

Оскільки на практиці, звичайно, тертя кочення супроводжується тертям ковзання, то важливо розглянути, за яких умов яке тертя має місце. Тут можливі три випадки.

1. Якщо $\frac{k}{h}Q < F$, а $fQ > F$, де f — коефіцієнт тертя ковзання, то коток буде тільки котитися. Об'єднавши ці нерівності, одержимо ***умову чистого кочення***:

$$\frac{k}{h} < f . \tag{6.65}$$

Отже, при чистому коченні необхідно, щоб зведений коефіцієнт тертя кочення (k/h) був меншим від коефіцієнта тертя ковзання.

2. Якщо ж $fQ < F$, а $\frac{k}{h}Q > F$, то циліндр буде тільки ковзати. Тоді ***умова чистого ковзання*** зображується так:

$$\frac{k}{h} > f . \tag{6.66}$$

При ***чистому ковзанні*** необхідно, щоб коефіцієнт тертя ковзання був меншим за зведений коефіцієнт тертя кочення.

3. Якщо ж $\frac{k}{h} = f$, то можливе спільне кочення і ковзання, тобто з'являється невизначеність у русі.

Розглянемо деякі приклади з техніки, де використовується тертя кочення.

Переміщення тіл на котках. Для переміщення важких тіл (машин, верстатів, споруд тощо) на невеликі відстані часто використовують котки у вигляді циліндричних стержнів чи труб, на які спираються ці тіла або платформа з вантажем, як це зображено на рис. 6.22.

Визначимо силу F, яку необхідно прикласти до платформи *1* для рівномірного переміщення її з вантажем у горизонтальному напрямку. Позначимо через Q вагу платформи і вантажу, G — сумарну вагу котків *2*, k_1 і k_2 — коефіцієнти тертя кочення відповідно по платформі і площині (настилу). Якщо умовно при-

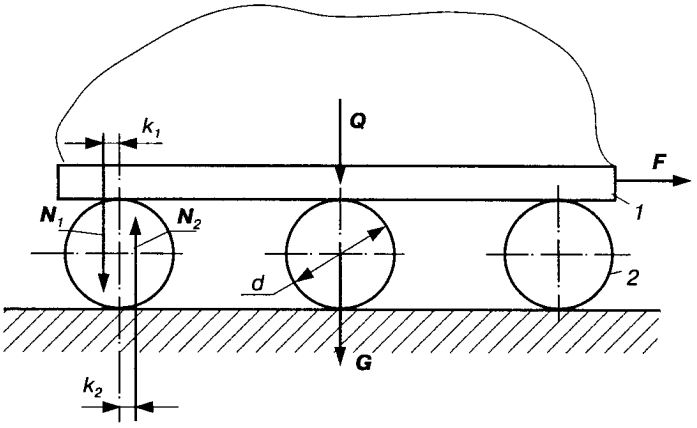


Рис. 6.22.

класти всі сили до одного котка і скласти рівняння рівноваги сил, то дістанемо

$$M_F = M_{k_1} + M_{k_2}, \tag{6.67}$$

де $M_F = Fd$ — рушійний момент від сили F; $M_{k_1} = N_1 k_1 = Qk_1$ — момент тертя кочення між котком і платформою $(N_1 = Q)$; $M_{k_2} = N_2 k_2 = (Q + G)k_2$ — момент тертя між котком і площиною $(N_2 = Q + G)$.

Підставивши значення моментів у рівняння (6.67), одержимо

$$F = \frac{k_1 Q + k_2 (Q + G)}{d}. \tag{6.68}$$

Оскільки вага котків порівняно з вагою вантажу, звичайно, мала, то нею можна знехтувати. У такому випадку

$$F = \frac{k_1 + k_2}{d} Q, \tag{6.69}$$

або

$$F = f'Q, \tag{6.70}$$

де $f' = (k_1 + k_2)/d$ — зведений (умовний) коефіцієнт тертя кочення при переміщенні вантажу на котках.

Переміщення вантажів на колесах. Для переміщення вантажів на значні відстані користуються платформами або візками, які обладнані колесами (рис. 6.23), що служать для них рухомими

опорами (автомобілі, вагони та інший колісний транспорт). У цьому випадку при переміщенні вантажу з платформою треба перемогти не тільки сили тертя кочення між колесами і опорною поверхнею (дорогою), але і сили тертя ковзання в буксових вузлах, тобто між шипами і підшипниками, через які навантаження передається від платформи до коліс.

Розглянемо випадок рівномірного руху навантаженого візка з однаковими колесами (рис. 6.23). Для знаходження сили F, що забезпечує цей рух, знову умовно прикладемо всі сили і моменти сил до одного колеса та складемо рівняння його руху за один оберт (рівняння робіт):

$$2\pi RF = 2\pi M_k + 2\pi M_f,$$

де $2\pi RF$ — робота сили F; $M_k = kN_1 = k(Q + G)$ — момент тертя кочення; $M_f = fN_2 = fQr$ — момент сил тертя ковзання в буксі.

Підставивши значення моментів, після відповідних перетворень дістанемо

$$F = \frac{k(Q + G) + fQr}{R}. \qquad (6.71)$$

Якщо знехтувати вагою коліс, то залежність (6.71) набуває вигляду

$$F = \frac{k + fr}{R} Q = f'Q, \qquad (6.72)$$

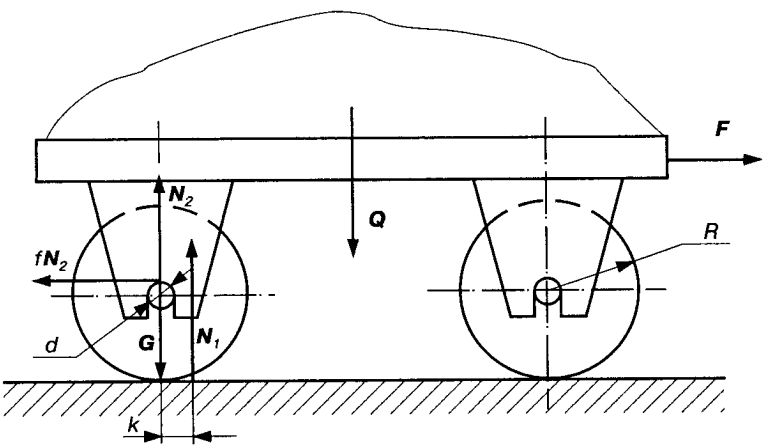


Рис. 6.23.

де $f' = (k + fr) / R$ — зведений (умовний) коефіцієнт тертя при переміщенні тіл на колесах.

Якщо замість підшипників ковзання використовуються підшипники кочення, то коефіцієнт тертя f' визначається з урахуванням зведеного коефіцієнта тертя кочення [46]:
для роликових підшипників кочення

$$f' = 1{,}27k\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right); \tag{6.73}$$

для шарикових підшипників кочення

$$f' = 1{,}22k\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right), \tag{6.74}$$

де k — коефіцієнт тертя кочення для гартованих стальних шариків і роликів; R — зовнішній радіус внутрішнього кільця підшипника; r — радіус ролика або шарика.

6.10. Силовий розрахунок механізмів з урахуванням сил тертя

Цей розрахунок розглянемо на прикладі важільних механізмів [1,4]. У розділі 4 такий розрахунок було проведено без урахування сил тертя. Розглянемо тепер, які зміни можна внести в методику викладених розрахунків, врахувавши сили тертя, що виникають у кінематичних парах. Почнемо з розв'язування задачі про визначення реакцій у кінематичних парах окремих структурних груп, з яких утворено механізм. Нехай задано групу II класу I виду (рис. 6.24, *а*), навантажену силами $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$. Оскільки до складу групи входять три обертові кінематичні пари, то в цих парах виникатимуть моменти M_{21}^f, M_{32}^f, M_{23}^f і M_{34}^f від сил тертя. Значення цих моментів згідно з формулою (6.35) мають вигляд

$$M_{21}^f = R_{21} f_B r_B,\ M_{32}^f = M_{23}^f = R_{32} f_C r_C,\ M_{34}^f = R_{34} f'_D r_D, \tag{6.75}$$

де $\boldsymbol{R}_{21}$, $\boldsymbol{R}_{32}$, $\boldsymbol{R}_{34}$ — реакції в кінематичних парах B, C, D; f'_B, f'_C, f'_D — коефіцієнти тертя в цих парах; r_B, r_C, r_D — радіуси відповідних цапф. Напрямки цих моментів залежатимуть від напрямків відповідних кутових швидкостей відносно руху ланок групи. Так, якщо кутова швидкість ω_{21} ланки *2* відносно ланки *1*

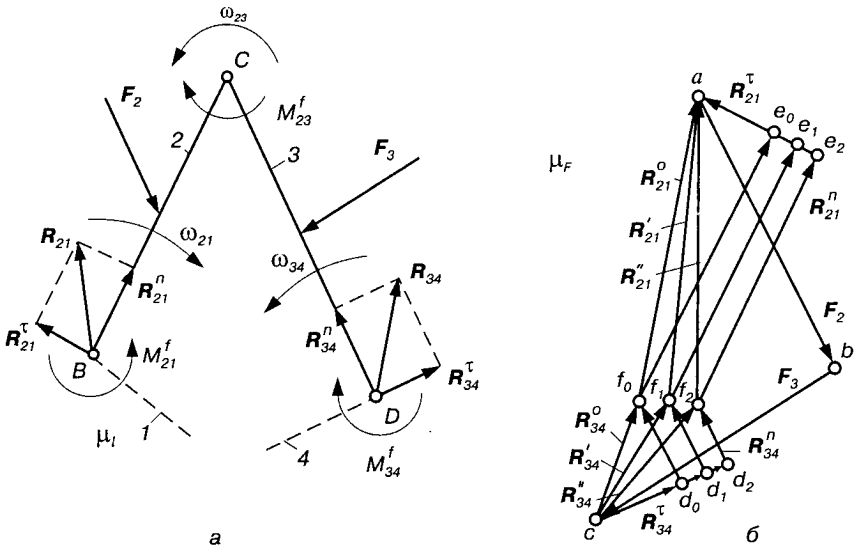


Рис. 6.24.

має напрямок руху годинникової стрілки (рис. 6.24, *а*), то момент M_{21}^f при розгляді рівноваги ланки *2* має бути направлений протилежно руху годинникової стрілки. Якщо кутова швидкість ω_{23} ланки *2* відносно ланки *3* має напрямок, протилежний руху годинникової стрілки, то знак моменту M_{23}^f при розгляді рівноваги ланки *2* повинен відповідати напрямку руху годинникової стрілки і т. д. Зазначимо, що при розгляді рівноваги ланки *3* знак моменту M_{32}^f протилежний знаку того самого моменту при розгляді ланки *2*, оскільки $\omega_{23} = -\omega_{32}$ і $M_{32}^f = -M_{23}^f$.

Відносна кутова швидкість двох ланок визначається через абсолютні кутові швидкості цих ланок. Наприклад, кутова швидкість ω_{21} відносного руху ланки *2* щодо ланки *1* (рис. 6.25, *б*) визначиться, якщо надати обом ланкам спільної додаткової швидкості $-\omega_1$ (рис. 6.25, *а*), а ланка *2* обертатиметься з кутовою швидкістю ω_{21}, абсолютне значення якої $|\omega_{21}| = |\omega_2| + |\omega_1|$.

Взагалі відносну кутову швидкість двох ланок з номерами *i* та *k* визначають за формулою

$$\omega_{ik} = \omega_k - \omega_i, \qquad (6.76)$$

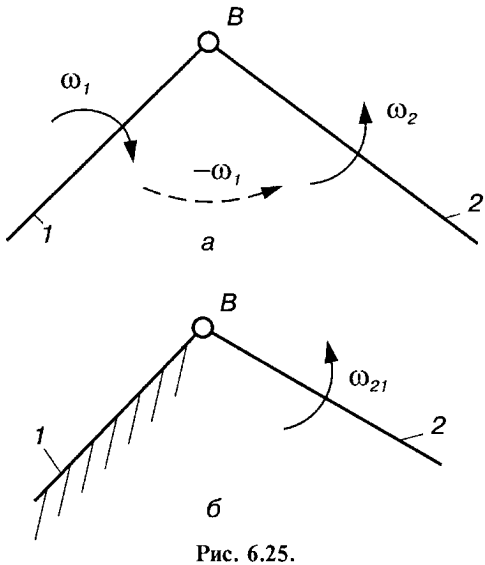


Рис. 6.25.

що у випадку кутових швидкостей різних знаків зводиться до додавання їх абсолютних величин, а при кутових швидкостях одного знака — до віднімання меншої абсолютної величини від більшої.

Векторне рівняння рівноваги сил, що діють на групу, має такий вигляд:

$$\boldsymbol{R}_{21}^{n} + \boldsymbol{R}_{21}^{\tau} + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \\ + \boldsymbol{R}_{34}^{\tau} + \boldsymbol{R}_{34}^{n} = 0,$$

де $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$, $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$, $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$, $\boldsymbol{R}_{34}^{n}$ — відповідні складові реакції $\boldsymbol{R}_{21}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ (див. рис. 6.24, *а*).

Для визначення величин складових $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ запишемо рівняння моментів усіх сил, що діють на ланки *2* і *3*:

$$\begin{aligned} M_C\left(\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}\right) + M_C\left(\boldsymbol{F}_2\right) + M_{21}^{f} + M_{23}^{f} = 0; \\ M_C\left(\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}\right) + M_C\left(\boldsymbol{F}_3\right) + M_{34}^{f} + M_{32}^{f} = 0. \end{aligned} \qquad (6.77)$$

До рівнянь (6.77) входять моменти тертя, що визначаються з рівнянь (6.75), але оскільки реакції $\boldsymbol{R}_{21}$, $\boldsymbol{R}_{32}$ і $\boldsymbol{R}_{34}$ невідомі і їх треба визначити, то з рівнянь (6.77) не можна безпосередньо визначити і складові $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ та $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$. Отже, задача зводиться до сумісного розв'язування шести рівнянь рівноваги, які в загальному випадку можна скласти для ланок *2* і *3*. Сумісне розв'язання системи рівнянь призводить до надзвичайно громіздких обчислень, які зручно виконувати за допомогою ЕОМ, використовуючи типову програму для розв'язання лінійних рівнянь. Для практичних розрахунків можна застосувати спосіб послідовних наближень, до викладу суті якого ми й перейдемо.

Припустимо в першому наближенні, що моменти від сили тертя дорівнюють нулеві: $M_{21}^{f} = 0$, $M_{32}^{f} = 0$, $M_{34}^{f} = 0$. Тоді задача

зводиться до раніше розглянутого у розділі 4 випадку силового розрахунку групи без врахування сил тертя в кінематичних парах. Зазначеними методами знаходимо складові $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ та $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ і будуємо план сил (рис. 6.24, *б*). Нехай на цьому плані сил знайдені реакції в парах *B*, *C* і *D* будуть відповідно $\boldsymbol{R}_{21}^{0}$, $\boldsymbol{R}_{32}^{0}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{0}$. На рис. 6.24, *б* реакцію $\boldsymbol{R}_{32}^{0}$ не показано, щоб не завантажувати рисунок. Знайдені значення реакцій $\boldsymbol{R}_{21}^{0}$, $\boldsymbol{R}_{32}^{0}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{0}$ підставляємо в рівняння (6.75). Маємо

$$\left(M_{21}^{f}\right)' = R_{21}^{0} f_B' r_B, \left(M_{32}^{f}\right)' = -\left(M_{23}^{f}\right)' = R_{32}^{0} f_C' r_C, \left(M_{34}^{f}\right)' = R_{34}^{0} f_D' r_D.$$

Ці значення моментів тертя підставимо в рівняння (6.77) і визначимо з них величини складових $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$. Одержані величини цих складових, очевидно, відрізняються від тих, які були знайдені в припущенні, що моменти тертя дорівнюють нулеві. Тому, якщо і в першому випадку кінець вектора сили $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ був у точці d_0, то тепер він буде в деякій точці d_1. Так само початок вектора сили $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ буде не в точці e_0, а в точці e_1. Провівши прямі в напрямках складових $\boldsymbol{R}_{21}^{n}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{n}$, знайдемо, що кінець вектора сили $\boldsymbol{R}_{34}$, початок вектора сили $\boldsymbol{R}_{21}$ і початок вектора сили $\boldsymbol{R}_{32}$ будуть не в точці f_0, а в точці f_1. У такий спосіб буде побудовано другий план сил, з якого знаходять нові значення $\boldsymbol{R}_{21}'$, $\boldsymbol{R}_{32}'$ і $\boldsymbol{R}_{34}'$ реакцій у парах *B*, *C* і *D*.

Для більшого уточнення величин реакцій у парах можна знов повторити зроблений розрахунок, для чого знайдені значення $\boldsymbol{R}_{21}'$, $\boldsymbol{R}_{32}'$ і $\boldsymbol{R}_{34}'$ треба знову підставити в рівняння (6.75), визначити нові значення моментів тертя $\left(M_{21}^{f}\right)''$, $\left(M_{32}^{f}\right)''$ та $\left(M_{34}^{f}\right)''$ і їх, у свою чергу, підставити в рівняння (6.77). Тоді будуть обчислені нові значення складових $\boldsymbol{R}_{21}^{\tau}$ і $\boldsymbol{R}_{34}^{\tau}$ і можна буде побудувати новий план сил (рис. 6.24, *б*), в якому дістанемо відповідно точки d_2, e_2, f_2 і, отже, визначимо нові реакції $\boldsymbol{R}_{21}''$, $\boldsymbol{R}_{32}''$ і $\boldsymbol{R}_{34}''$. Зазначений процес можна продовжити і далі, але практично цілком досить буває обмежитися другим або навіть

першим наближенням і знайти сили $\boldsymbol{R}''_{21}$, $\boldsymbol{R}''_{32}$ і $\boldsymbol{R}''_{34}$ або тільки $\boldsymbol{R}'_{21}$, $\boldsymbol{R}'_{32}$ і $\boldsymbol{R}'_{34}$.

Аналогічно розв'язуються задачі визначення реакцій у кінематичних парах, коли одна або дві пари — поступальні. На відміну від обертових пар у поступальних парах треба прикласти не момент тертя, а силу тертя $F_f = fR$, де R — реакція у відповідній поступальній парі.

Зазначений вище метод можна поширити на групи всіх класів з будь-якими комбінаціями обертових, поступальних, а також вищих пар. Цей метод є наближеним. У технічній літературі [1, 4] рекомендуються точніші методи, але більш трудомісткі.

6.11. Визначення коефіцієнтів корисної дії механізмів

Для визначення ККД окремих механізмів треба щоразу обчислювати роботу або потужність (див. 4.12), які витрачаються на подолання всіх сил опорів за один повний цикл часу усталеного руху.

Тоді спочатку визначають для ряду положень механізму відповідні сили шкідливих (невиробничих) і корисних (виробничих) опорів, а далі, за відомими швидкостями руху окремих ланок механізму, визначають потужності, що витрачаються на подолання цих сил опорів. За знайденими значеннями потужностей визначають середню потужність, що витрачається протягом одного циклу усталеного руху на подолання цих опорів. Тоді ККД визначають за формулами

$$\eta = \frac{P_{\text{к.о}}}{P_{\text{р}}}, \tag{6.78}$$

або

$$\eta = 1 - \frac{P_{\text{ш.о}}}{P_{\text{р}}}, \tag{6.79}$$

де $P_{\text{к.о}}$ — середня потужність, що поглинається силами корисних опорів; $P_{\text{ш.о}}$ — середня потужність, що поглинається силами шкідливих опорів (як правило, сил тертя); $P_{\text{р}} = P_{\text{к.о}} + P_{\text{ш.о}}$ — середня потужність, яку розвивають рушійні сили.

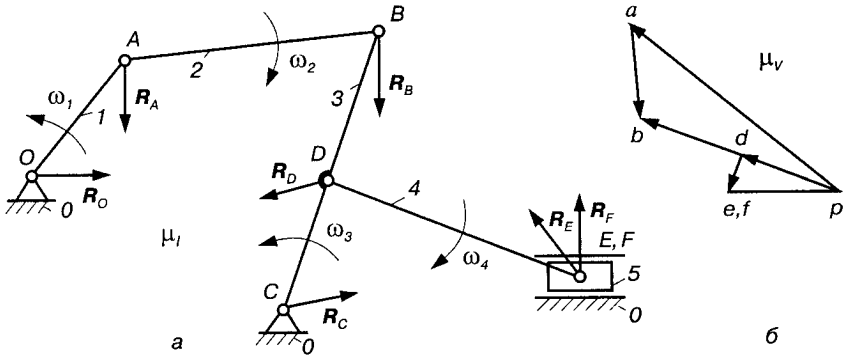


Рис. 6.26.

ККД механізму завжди залежить від характеру сил тертя, які виникають у кінематичних парах, від виду мастила тощо. Тому не можна точно вказати ККД для тих чи інших механізмів. У кожному окремому випадку це питання треба піддавати теоретичному і експериментальному аналізові. Надалі розглядатимемо тільки деякі розрахункові прийоми, які можна використати для розв'язання цих задач.

Визначення ККД розглянемо на прикладі важільного механізму, кінематична схема (*а*) та план швидкостей (*б*) якого зображено на рис. 6.26.

Припустимо, що всі шкідливі опори в механізмі зводяться до опору тертя. Коефіцієнт тертя в кінематичних парах задано, а реакції $\boldsymbol{R}_O$, $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_C$, $\boldsymbol{R}_D$, $\boldsymbol{R}_E$, $\boldsymbol{R}_F$ у кінематичних парах для кожного положення також відомі (знайдені в результаті силового розрахунку механізму).

Сили тертя відповідно визначаються за формулами

$$F_O^f = f_O R_O,\ F_A^f = f_A R_A,\ F_B^f = f_B R_B,\ F_C^f = f_C R_C,$$

$$F_D^f = f_D R_D,\ F_E^f = f_E R_E,\ F_F^f = f_F R_F,$$

де f_O, f_A, f_B і т. д. — коефіцієнти тертя у відповідних шарнірах і напрямній повзуна *5*.

Для визначення миттєвих потужностей, що витрачаються на тертя в різних кінематичних парах, необхідно знайти відносні кутові швидкості ω_{ik} у шарнірах (6.76) і відносну швидкість повзуна по напрямній. Тоді потужності, що витрачаються на тертя в кінематичних парах, виражаються так:

$$P_O = R_O r_O \mid \omega_{10} \mid, \quad P_A = R_A r_A \mid \omega_{21} \mid, \quad P_B = R_B r_B \mid \omega_{32} \mid,$$

$$P_C = R_C r_C \mid \omega_{30} \mid, \quad P_D = R_D r_D \mid \omega_{43} \mid, \quad P_E = R_E r_E \mid \omega_{45} \mid,$$

$$P_F = R_F f_F v_F,$$

де r_O, r_A, r_B, r_C, r_D, r_E — радіуси цапф відповідних шарнірів; $|\omega_{32}| = |\omega_3 - \omega_2|$, $|\omega_{30}| = |\omega_3|$, $|\omega_{34}| = |\omega_4 - \omega_3|$, $|\omega_{45}| = |\omega_4|$ — відносні швидкості ланок; v_F — швидкість повзуна E.

Тут кутові швидкості ω_i несуть у собі знак.

Загальна потужність $P_{\text{ш.о}}$ сил тертя в кожний момент часу дорівнює сумі всіх потужностей:

$$P_{\text{ш.о}} = P_O + P_A + P_B + P_C + P_D + P_E + P_F.$$

Побудувавши графік зміни потужності $P_{\text{ш.о}}$ за один повний цикл, можна визначити середнє значення $P_{\text{ш.о.с}}$ потужності, що витрачається на тертя. Далі за заданими силами корисних (виробничих) опорів визначають потужність $P_{\text{к.о}}$, що витрачається на подолання цих опорів у кожний даний момент часу, і за графіком зміни цієї потужності знаходять середнє значення $P_{\text{к.о.с}}$ потужності сил корисних опорів.

Середня потужність рушійних сил дорівнює сумі середніх потужностей корисного і шкідливого опору: $P_{\text{р.с}} = P_{\text{к.о.с}} + P_{\text{ш.о.с}}$, а загальний коефіцієнт корисної дії всього механізму згідно з формулою (6.79) визначається так:

$$\eta = \frac{P_{\text{к.о.с}}}{P_{\text{р.с}}}.$$

Аналогічно визначають ККД інших механізмів.

6.12. Розрахунок зносу елементів у кінематичних парах

Під час експлуатації механізмів машин і приладів неминуче зношуються елементи кінематичних пар [72]. Зношення (спрацювання) зменшує міцність деталей і точність механізмів, підвищує навантаження на підшипники, збільшує вібрацію і шум. Значне спрацювання часто буває причиною порушення працездатності механізмів і може призвести навіть до поломки деталей і виходу машин з ладу. Тому при проектуванні ме-

ханізмів важливо знати форму та величину поверхні тертя, розрахувати епюру зносу, для того щоб правильно вибрати конструктивні та мастильні матеріали. Важливо також виявити деталі і вузли, які треба заміняти або ремонтувати раніше від інших. Отже, розрахунок зносу, який очікується, має своєю метою забезпечити необхідні довговічність і надійність роботи механізмів машин або приладів.

Види зношування. Зношування — процес руйнування та відокремлення матеріалу від поверхні твердого тіла, який проявляється в поступовій зміні розмірів і форми тіла, при цьому можуть змінюватися і властивості поверхневих шарів металу.

Основні види зношування такі: ***механічне*** — результат механічної взаємодії тіл; ***корозійно-механічне*** — механічна взаємодія тіл супроводжується хімічною або електричною взаємодіями; ***абразивне*** — результат різання або дряпання твердих частинок, які знаходяться в зоні тертя у вільному або закріпленому стані; ***ерозійне*** — результат дії потоку рідини або газу; ***зношування від втомленості*** — викришування частин матеріалу поверхневого шару при періодично змінних навантаженнях (цей вид зношування особливо характерний для вищих кінематичних пар); ***зношування при заїданні*** — результат схоплення, глибинного виривання матеріалу, переносу його з однієї поверхні тертя на іншу. Заїдання або схоплення характеризується сильним місцевим нагрівом через високі швидкості ковзання і великі питомі тиски. Такому виду зношування частіше за все піддаються негартовані тертьові поверхні кінематичної пари з однорідних матеріалів.

Зношування відрізняють і за характером деформації поверхневого шару: зношування при пружному контакті, пластичному контакті і при мікрорізанні.

Фізична модель зношування така: при ковзанні мікронерівності попереду неї виникає лобовий валик матеріалу, що деформується і знаходиться під дією стискальних напружень (рис. 6.27, *а*). Слідом за мікронерівністю через сили тертя матеріал розтягується. Отже, матеріал тертьових тіл зазнає знакозмінних деформацій, багаторазове повторення яких призводить до нагромадження в них пошкоджень мікроструктури і відокремлення частинок матеріалу. Досліди показують, що матеріал руйнується не відразу, а лише після кількох циклів роботи ($n_ц$).

. Стадії зношування. Звичайно мають місце дві стадії зношування: 1) ***припрацювання поверхні тертя;*** 2) ***нормальний (експлуатаційний) знос,*** коли після припрацювання замість вихідної шорсткості поверхні, яку одержали при виготовленні, утворю-

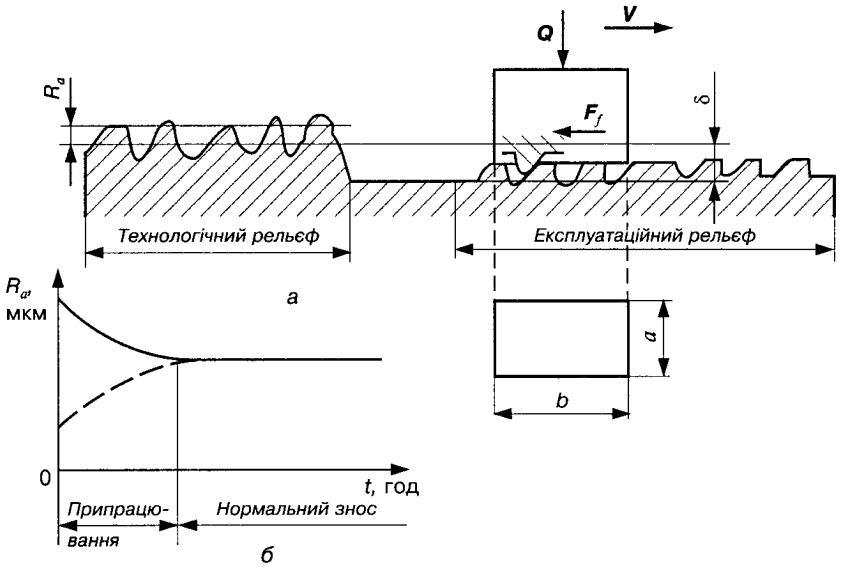


Рис. 6.27.

ється деяка нова рівноважна шорсткість, яка надалі суттєво не змінюється [61]. Іншими словами: в процесі зношування вихідний (технологічний) мікрорельєф перетвориться в експлуатаційний із зміненими параметрами шорсткості, наприклад середнього арифметичного відхилення профілю R_a (рис. 6.27, *б*).

Для зменшення часу припрацювання слід за дослідними даними визначити параметри рівноважної шорсткості і вибрати вид технологічної обробки поверхні тертя, найближчий до такої шорсткості. Використання більш гладкої вихідної поверхні, ніж експлуатаційна (з меншим значенням R_a на стадії припрацювання, штрихова лінія на рис. 6.27, *б*), як правило, невигідне, оскільки підвищується вартість виготовлення; при цьому може збільшитися і час припрацювання.

Кількісна оцінка зносу. Результат зношування в одиницях довжини, об'єму або маси називають ***зносом***. Існують граничний і допустимий зноси. ***Граничний знос*** — знос, який відповідає граничному стану виробу або його частині, що зношується. ***Допустимий знос*** — знос, при якому виріб зберігає працездатність.

Граничний знос елементів пар визначається рядом критеріїв, з яких основними є:

а) порушення внаслідок зносу працездатності механізму — поломка деталей, тобто втрата міцності, заклинювання, втрата необхідної точності;

б) недопустиме погіршення експлуатаційних характеристик машини (зниження якості виробів, збільшення вібрації та шуму через зазори, що з'явились у кінематичних парах тощо).

Під час рідинного тертя, коли товщина шару мастильного матеріалу, що розділяє тертьові поверхні, більша від суми їх найбільших нерівностей, знос виявиться незначним.

Графічне зображення розподілення зносу по поверхні тертя або по певному її розрізу називається ***епюрою*** зносу.

Знос оцінюється товщиною шару зруйнованого матеріалу δ (лінійний знос, рис. 6.27, *а*) або його масою.

Швидкість зношування визначається величиною зносу за одиницю часу:

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = kp^m v_S^n, \tag{6.80}$$

де k — коефіцієнт зносу (чисельно дорівнює γ при $p = v_S = 1$); p — питомий тиск у відповідній точці поверхні тертя; v_S — швидкість ковзання (відносна швидкість) у цій же точці; m — показник степеня, який залежить від виду взаємодії поверхонь контакту (пружний чи пластичний контакт, мікрорізання) і коливається в межах 1—3; n — показник степеня, який залежить від виду зношування. Для припрацьованих елементів кінематичних пар покладають $m = 1$, $n = 1$, і тоді

$$\gamma = kpv_S. \tag{6.81}$$

Фізичний зміст формули (6.81) можна пояснити на такому прикладі (рис. 6.28). Нехай повзун *1* розмірами $a \times b$ притискається до напрямної силою F_N з коефіцієнтом тертя f, питомий тиск при цьому в будь-якій точці поверхні тертя сталий: $p = F_N/ab = \text{const}$.

Робота сили тертя F_f витрачається на руйнування і відокремлення матеріалу та виділення теплоти. Тому наближено можна вважати, що швидкість зношування протилежна роботі сили тертя в одиницях часу, тобто потужності P_f:

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = \frac{k}{abf} F_N v_S = cF_N v_S = cP_f,$$

де $c = k/(abf)$ — коефіцієнт пропорційності.

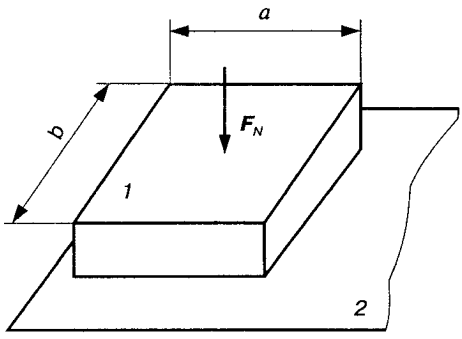


Рис. 6.28.

У загальному випадку питомий тиск p у різних точках поверхні тертя різний, але таке тлумачення формули (6.81) можна дати для будь-якої елементарної площадки з центром у заданій точці поверхні тертя.

Інтенсивність зношування — зношування, яке припадає на одиницю шляху тертя: $\gamma_s = d\delta/ds$, де s — відносне переміщення, або шлях тертя. Тоді

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = \frac{ds}{ds}\gamma_s v_s.$$

Значення γ і γ_s визначають експериментально за середніми значеннями p і v_s, а потім, використовуючи формулу (6.81), підраховують коефіцієнт зносу k. У праці [76] наведено значення γ і γ_s, одержані експериментальним шляхом (там γ_s позначено J).

Інтенсивність зношування γ_s може змінюватися в досить широких межах, приблизно від $\gamma_s = 10^{-12}$ (знос 0,001 мкм на 1 км шляху тертя) до $\gamma_s = 10^{-3}$ (знос 1 мм на 1 м шляху тертя).

Властивість матеріалу чинити опір зношуванню за певних умов тертя, яка оцінюється величиною, оберненою швидкості або інтенсивності зношування, називається ***зносостійкістю***. На зносостійкість впливають твердість матеріалів, їх природні властивості, режим роботи (навантаження, швидкість, температура), зовнішні умови (мастило, навколишнє середовище), конструктивні особливості вузла тертя.

У загальному випадку (при змінних p і v_s) знос визначається за формулою

$$\delta = k\int_0^{t_p} pv_s dt, \qquad (6.82)$$

де t_p — час роботи.

Для зручності розрахунку в механізмах з одним ступенем вільності формулу (6.82) доцільно перетворити, ввівши узагаль-

нену координату φ і узагальнену кутову швидкість ω = $d\varphi/dt$. Тоді знос за один цикл роботи, для якого φ = $\varphi_ц$, визначається за формулою

$$\delta_ц = k \int_0^{\varphi_ц} p \left(\frac{v_s}{\omega} \right) d\varphi, \tag{6.83}$$

де $\frac{v_s}{\omega}$ — аналог швидкості ковзання або передаточна функція $\frac{ds}{d\varphi}$ у відповідній точці елемента кінематичної пари.

Якщо взяти число циклів роботи $n_ц$, то знос δ виразиться так:

$$\delta = \delta_ц n. \tag{6.84}$$

Використовуючи формулу (6.84), можна знайти число циклів роботи за заданим значенням граничного зносу, що необхідно для визначення ресурсу роботи машини.

Останнім часом велику увагу приділяють матеріалам деталей машин, механізмів та приладів, які дають змогу працювати вузлам тертя без спеціального мастильного середовища. До таких матеріалів належать: матеріали на основі полімерів (підшипники, зубчасті колеса, кулачки тощо), вуглеграфітні матеріали (елементи ущільнення, вкладиші гідронасосів, деталі вузлів тертя в авіаційній і хімічній промисловості), металокерамічні матеріали (деталі вузлів тертя, що працюють при високих температурах) та ін.

Для підвищення зносостійкості тертьових поверхонь широко застосовуються різні хіміко-термічні покриття і обробка деталей машин. З цією ж метою використовується пластична деформація поверхневих шарів, при якій підвищується твердість і клас шорсткості поверхні (обкатка та розкатка циліндричних і плоских поверхонь, прошивання, калібровка тощо).

Часто для відновлення і збільшення строку роботи деталей машин застосовують нарощення зношених поверхонь тертя газовим або електродуговим наплавленням, газовою або електричною металізацією, плазмовим напиленням (для нанесення тугоплавких сполук) та іншими способами.

Детальніше питання тертя і зношування деталей машин розглядається в працях [15, 16, 34, 36, 57, 61, 76].

КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

У сучасних машинах, особливо в машинах-автоматах, широко використовуються механізми, які дають змогу в межах робочого циклу мати вистій (зупинку) вихідної ланки заданої тривалості при неперервному русі вхідної ланки. Такі механізми дістали назву ***механізмів переривчастого руху, або механізмів з вистоєм (зупинкою)***. Для цього використовуються різні механізми: кулачкові, мальтійські, храпові, з неповнозубими колесами, важільні та комбіновані (зубчасто-важільні, кулачково-важільні тощо). Найбільше поширення дістали кулачкові механізми, а тому розглянемо їх у першу чергу, інші механізми переривчастого руху розглядаються в розділі 13.

7.1. Загальні відомості

Кулачковими називають механізми, до складу яких входить вища кінематична пара, одним з елементів якої є поверхня змінної кривизни. Ланку, якій належить елемент вищої кінематичної пари, що виконаний у вигляді поверхні змінної кривизни, називають ***кулачком***.

На рис. 7.1, *а* показано схему найпростішого триланкового кулачкового механізму, який складається з кулачка *1*, штовхача *2* і стояка *0*. Як правило, вхідною ланкою кулачкового механізму є кулачок *1*, вихідною — штовхач *2*. При обертанні кулачка штовхач здійснює зворотно-поступальний

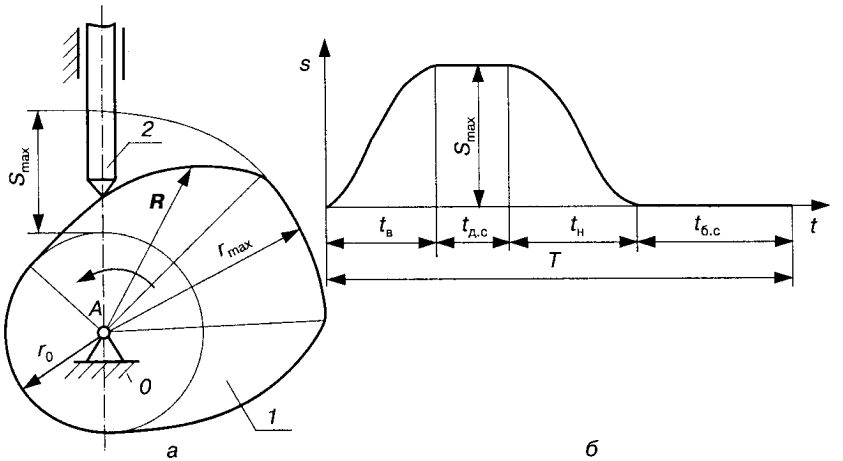


Рис. 7.1.

рух. Якщо вихідна ланка здійснює коливальний рух, то її називають коромислом, інколи, для простоти викладу, — штовхачем. Коли радіус-вектор $\boldsymbol{R}$, що утворює профіль кулачка, зростає, то штовхач *2* віддаляється від центра обертання *A*, і навпаки, коли зменшується, — штовхач наближається до центра обертання. Якщо ж профіль кулачка накреслений дугою кола (радіусами r_0 або r_{max}), то штовхач буде нерухомим і одержимо його дальній (верхній) або ближній (нижній) вистій. Приклад діаграми переміщень штовхача *S* залежно від часу повороту кулачка *t* зображено на рис. 7.1, *б*, де періоди руху штовхача позначені так: $t_в$ — період віддалення; $t_{д.с}$ — період дальнього стояння; $t_н$ — період наближення; $t_{б.с}$ — період ближнього стояння; T — період руху кулачка. Діаграму $s = s(t)$, а також діаграми швидкостей $v = v(t)$ або прискорень $a = a(t)$ називають ***законом руху штовхача*** (вихідної ланки) кулачкового механізму (рис. 7.10).

Закон руху штовхача визначається профілем кулачка, який є своєрідною програмою роботи виконавчого органу механізму. Оскільки цей профіль може бути різним, то за допомогою кулачкових механізмів можна забезпечити майже будь-який закон руху вихідної ланки. Це основна ***позитивна якість*** кулачкових механізмів, яка пояснює широке використання цих механізмів у техніці, особливо в складних машинах-автоматах, де треба забезпечити узгоджений рух багатьох виконавчих органів.

Водночас кулачкові механізми мають суттєві ***недоліки***, основним з яких є наявність у них вищої кінематичної пари, в якій

дотик між ланками відбувається в точці або по лінії. Тут виникають великі питомі тиски, що призводить до швидкого зносу стичних деталей, особливо небезпечний знос кулачка, оскільки він забезпечує закон руху вихідної ланки і є більш складнішою ланкою механізму. Іншим недоліком таких механізмів є необхідність забезпечувати постійне замикання ланок, які утворюють кінематичну пару. Але, незважаючи на ці недоліки, кулачкові механізми (після зубчастих) є найбільш поширеними, оскільки немає інших механізмів, які б давали такий великий практичний різновид законів руху вихідної ланки.

7.2. Основні типи кулачкових механізмів

Кулачкові механізми, так само як і важільні або зубчасті, можуть бути ***плоскими*** і ***просторовими***. На рис. 7.2 показано основні типи плоских кулачкових механізмів, на рис. 7.3 — просторових. У плоских механізмах усі точки їх ланок рухаються в паралельних площинах, у просторових — в різних площинах. Найбільше поширення дістали плоскі кулачкові механізми, хоча і просторові, особливо з кулачком у вигляді барабана (рис. 7.3, *а*, *б*), використовуються досить часто в різних машинах-автоматах як виконавчі механізми.

За ***видом руху кулачка*** та ***вихідної ланки*** кулачкові механізми поділяють в основному на такі види:

а) механізми, в яких обертовий рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух вихідної ланки — штовхача (рис. 7.2, *а—д*, рис. 7.3, *а—г*);

б) механізми, в яких обертовий рух кулачка перетворюється в зворотно-обертовий (коливальний) рух вихідної ланки — коромисла (рис. 7.2, *е, є, з,* рис. 7.3, *б, д*);

в) механізми, в яких зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух (рис. 7.2, *і*) вихідної ланки;

г) механізми, в яких коливальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний (рис. 7.2, *ї*) або коливальний (рис. 7.2, *й*) рух вихідної ланки;

д) механізми, в яких обертовий рух кулачка перетворюється в складний рух вихідної ланки *2* (рис. 7.2, *ж*);

е) механізми, в яких обертовий рух кулачка перетворюється в односторонній обертовий рух вихідної ланки (рис. 7.3, *е*);

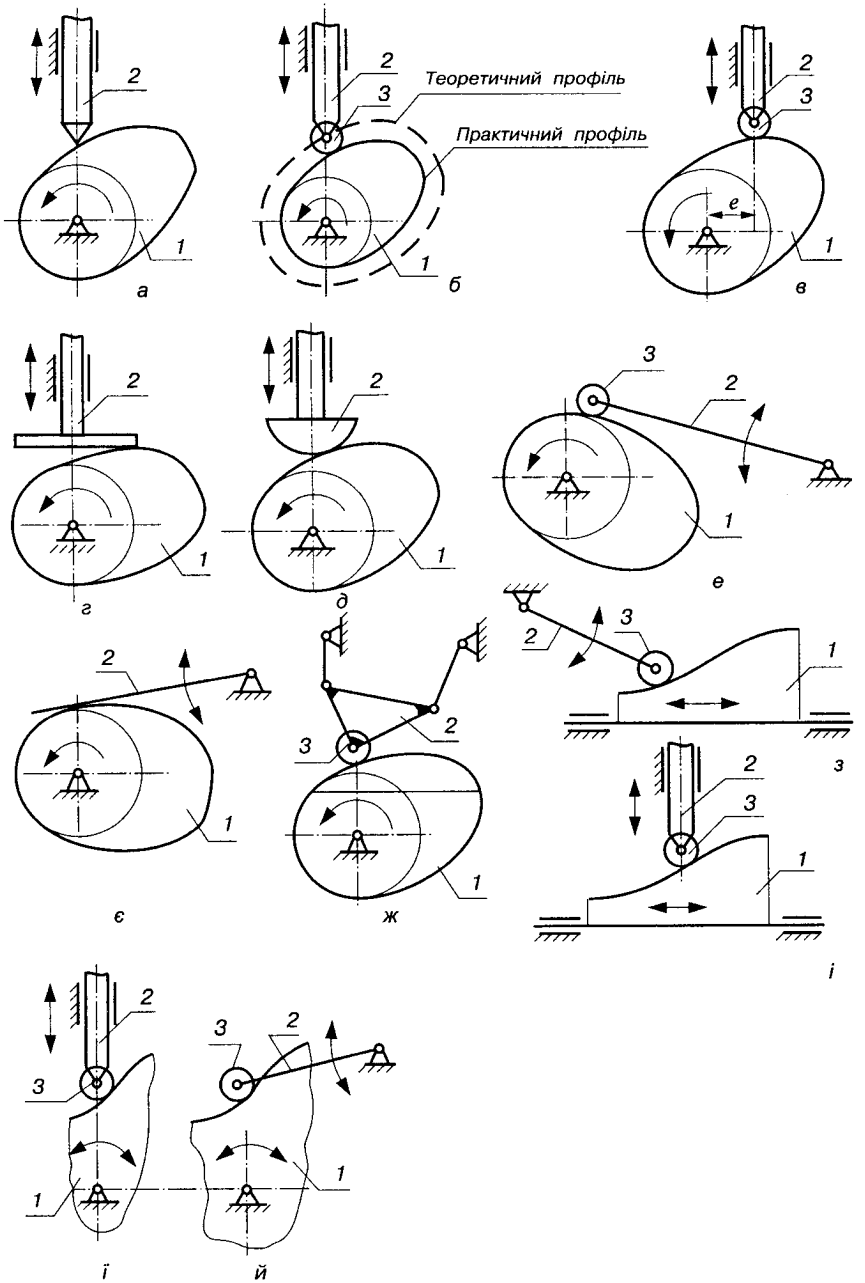

2
1
а
2
3
Теоретичний профіль
Практичний профіль
1
б
2
3
e
1
в
2
1
г
2
1
д
3
2
1
е
2
1
є
3
2
3
1
ж
2
3
1
з
2
3
1
і
3
2
1
1
ї
3
2
1
й

Рис. 7.2.

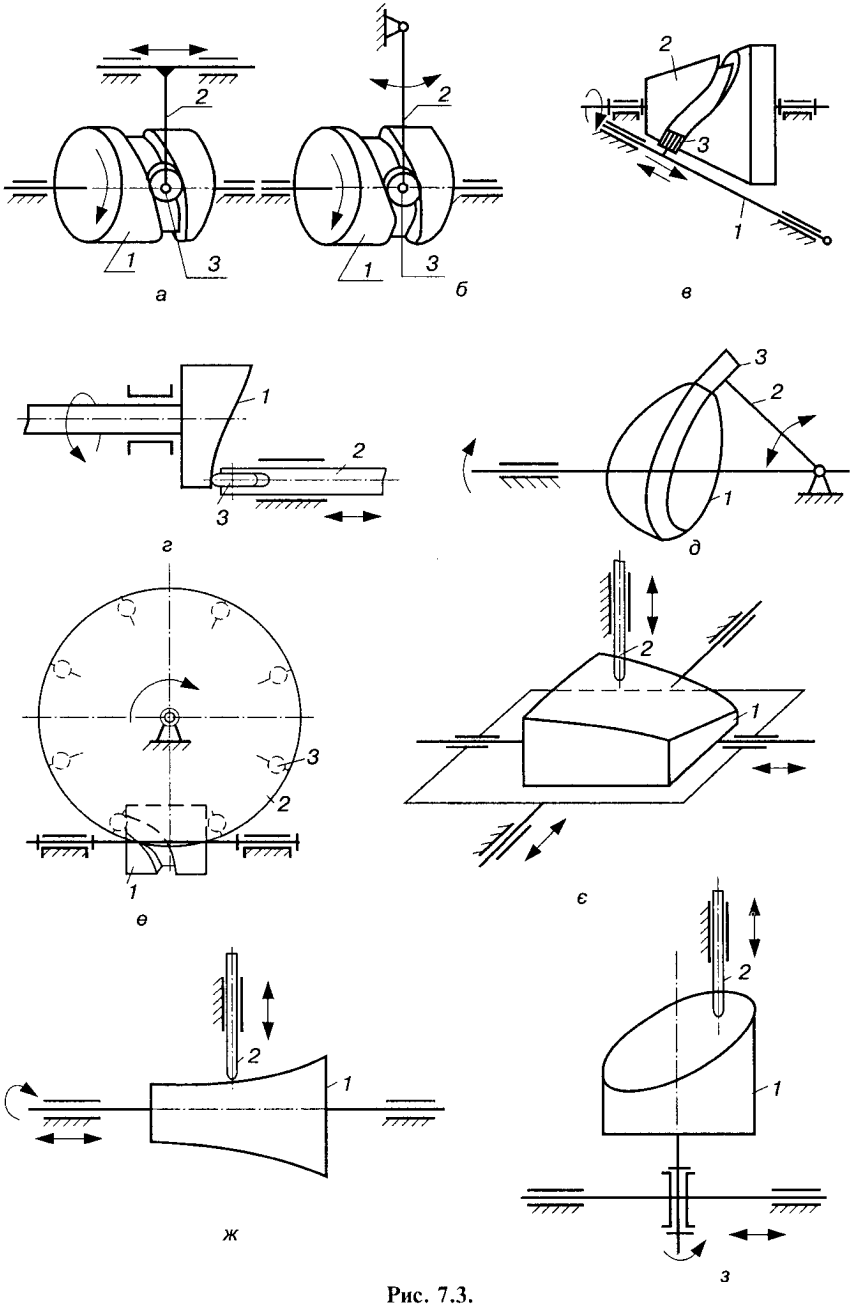


Рис. 7.3.

є) механізми, в яких складний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний або коливальний рух вихідної ланки (рис. 7.3, *є, ж, з*).

Вихідні ланки в кулачкових механізмах можуть мати різні форми елементів вищої пари, тобто тих частин ланок, якими вони стикаються з кулачком. Форма цих частин може бути ***загостреною*** (рис. 7.2, *а*), ***плоскою*** (рис. 7.2, *г, є*), ***циліндричною*** або ***сферичною*** (рис. 7.2, *д*). Кулачкові механізми із загостреним штовхачем (коромислом) використовуються дуже рідко, оскільки вони мають малу зносостійкість. Їх можна застосовувати лише при малих швидкостях і незначних навантаженнях. Вищу несучу здатність мають циліндричні (сферичні) та плоскі штовхачі, але вони також не забезпечують високої зносостійкості через наявність тертя ковзання у вищій парі (парі кулачок—штовхач). На практиці для усунення тертя ковзання у вищій парі вводять проміжну ланку — ролик *3* (див. рис. 7.2, *б, в, е, ж—й*). Оскільки обертання ролика навколо своєї осі не впливає на кінематику передачі руху від кулачка до вихідної ланки, то кулачкові механізми, які складаються зі стояка, кулачка, ролика і вихідної ланки, називають триланковими (а не чотириланковими). При структурному аналізі таких механізмів ролик можна не враховувати, оскільки він створює зайвий ступінь вільності.

При дослідженні кулачкового механізму з роликовим штовхачем (коромислом) можна завжди ***дійсний (практичний)*** профіль кулачка замінити ***теоретичним (центровим)***, який віддалений від дійсного профілю кулачка на радіус ролика (рис. 7.2, *б*). Теоретичний профіль кулачка можна уявити як траєкторію центра ролика *3* при його обкочуванні навколо кулачка *1*. Будь-які точки цих двох профілів рівновіддалені одна від одної вздовж спільної нормалі до кривих, які називають ***еквідистантними***. Заміна дійсного профілю кулачка на теоретичний не змінює кінематичного змісту кулачкового механізму, тобто не змінює характеру відносного руху основних ланок механізму (кулачка і штовхача), але дуже зручна при аналізі та синтезі кулачкових механізмів.

У деяких випадках вісь штовхача необхідно змістити в той чи інший бік відносно осі обертання кулачка (рис. 7.2, *в*) на величину *е*, яку називають ***зміщенням***, або ***ексцентриситетом***. Кулачковий механізм у такому разі називають зміщеним кулачковим механізмом. Зміщення штовхача *е* дещо впливає на закон руху вихідної ланки, дає змогу при однакових інших умовах

зменшити розміри кулачка та боковий тиск штовхача на напрямну.

Просторові кулачкові механізми частіше бувають з циліндричним пазовим (рис. 7.3, *а, б, е*) або торцевим (рис. 7.3, *г, з*) кулачком, рідше — з конічним пазовим (рис. 7.3, *в*) або торцевим сферичним (рис. 7.3, *д*) кулачком. Для одержання переривчастого обертового руху може використовуватися просторовий кулачковий механізм з пазовим циліндричним кулачком *1*, який по черзі взаємодіє з роликами *3* вихідної ланки *2* (рис. 7.3, *е*).

На рис. 7.3, *є—з* зображені приклади кулачкових механізмів, які мають два ступені вільності. Такі механізми використовуються переважно в обчислювальних пристроях для механічного знаходження функцій двох змінних. У кулачковому механізмі, зображеному на рис. 7.3, *є*, вхідна ланка (кулачок) має два незалежних поступальних рухи. Вихідну ланку в таких механізмах іноді називають щупом. Проте більшого поширення дістали механізми, в яких кулачок може обертатися навколо своєї осі і переміщатися вздовж неї. Такі кулачки називаються коноїдними (рис. 7.3, *ж*). Іноді для одержання руху з двома ступенями вільності використовується просторовий механізм з торцевим кулачком (рис. 7.3, *з*).

Тип кулачкового механізму вибирають залежно від задачі синтезу, яка, звичайно, містить у собі дані про бажаний вид руху вихідної ланки (поступальний, коливальний, складний), закони руху кулачка, а також деякі розміри ланок кулачкового механізму.

Детальніше класифікацію кулачкових механізмів наведено в роботах [43, 58, 74, 75], а їх конструкцію — в довідниках [3, 29].

7.3. Замикання ланок кулачкового механізму

Для забезпечення постійного дотику вихідної ланки і кулачка використовується ***силове*** або ***геометричне*** замикання. При силовому замиканні постійний контакт ланок забезпечується, як правило, дією пружини *4* (рис. 7.4, *а, б*), рідше для цієї мети застосовуються сили тяжіння, тиск рідини тощо. Силове замикання конструктивно виконується досить просто. Проте воно має ряд недоліків, зокрема: а) сили пружності пружини створюють додаткові навантаження на ланки механізму; б) швидкість обертання кулачка повинна бути не більшою від розрахун-

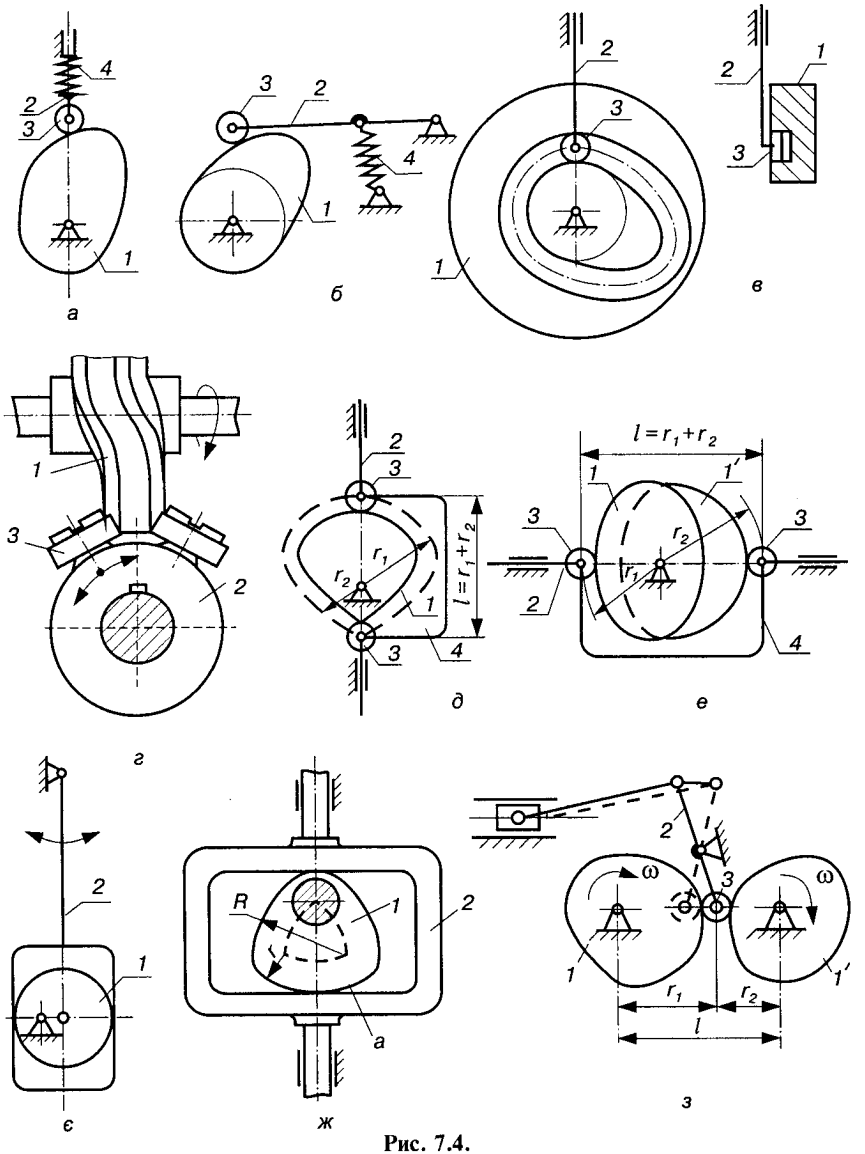


Рис. 7.4.

кової, оскільки сила пружності пружини в будь-який період руху повинна бути більша від сили інерції, що діє на штовхач, а сила інерції залежить від швидкості руху кулачка і не залежить від пружності пружини.

Для усунення недоліків силового замикання в кулачкових механізмах використовується геометричне замикання ланок. На рис. 7.4, *в* показано кулачковий механізм, в якому ролик *3* рухається в пазу кулачка *1*, що забезпечує постійний контакт кулачка і ролика. Але і такий вид замикання має суттєвий недолік, оскільки під час роботи механізму в результаті зміни напрямку сил інерції, що діють на штовхач, ролик стикається то з зовнішньою, то з внутрішньою поверхнею паза, що призводить до зносу (розбивання) паза та до збільшення зазорів, а значить, і до появи ударів у кулачковому механізмі. Профіль кулачка може бути виготовлений також як виступ. У даному випадку використовуються два ролики, які охоплюють цей виступ (рис. 7.4, *г*).

Два ролики використовуються також в механізмах, зображених на рис. 7.4, *д, е*: у першому випадку — один кулачок, у другому — два кулачки. Ролики *3* шарнірно зв'язані зі штовхачем *2* і рамкою *4*, які можуть утворювати одну ланку. Геометричне замикання механізмів досягається тим, що сума радіусів $r_1 + r_2 = l$, де l — відстань між центрами роликів, стала. У першому випадку (рис. 7.4, *д*) це створює певні незручності при проектуванні кулачкового механізму, оскільки закон руху вільно можна задавати тільки на одній половині кулачка, наприклад, вибирати радіус r_1. Профіль на другій половині кулачка визначається радіусом $r_2 = l - r_1$. Щоб усунути цей недолік, використовують механізми з двома кулачками (рис. 7.4, *е*). Тоді, наприклад, радіус r_1 кулачка *1* вибирають відповідно до вибраного законом руху штовхача, а радіус r_2 кулачка *1'* визначається різницею $l - r_1$. Аналогічно, тільки за допомогою рамки без роликів, здійснюється замикання в ексцентриковому (рис. 7.4, *є*) та кулачковому (рис. 7.4, *ж*) механізмах; в останньому трикутний кулачок зображений дугами кола.

Геометричне замикання вищої пари можна здійснити, якщо застосувати систему двох кулачків (рис. 7.4, *з*), з яких один надає ролику рух вперед, а другий повертає його в початкове положення. Тут також повинна виконуватись умова $l = r_1 + r_2$. Така конструкція має назву спряжених кулачків.

7.4. Основні параметри кулачкових механізмів

Незважаючи на те що профіль кулачка можна обкреслити порізному, в більшості випадків на ньому можна знайти чотири характерні ділянки, які накреслені (рис. 7.5, *а*): на ділянці *ab* — зростаючим радіусом-вектором, *bc* — дугою максимального радіуса r_{max}, *cd* — спадним радіусом-вектором, *da* — дугою кола мінімального радіуса r_0, яке називають ***основним***. Кожній з цих ділянок відповідає центральний ***кут профілю кулачка*** ($\varphi'_в$, $\varphi'_{д.с}$, $\varphi'_н$, $\varphi'_{б.с}$), а при обертанні кулачка в напрямку, показаному на рис. 7.5, *а* — певний період руху штовхача *2*: ділянці *ab* відповідає період віддалення $t_в$; *bc* — період дальнього (верхнього) стояння $t_{д.с}$; *cd* — період наближення $t_н$; *da* — період ближнього (нижнього) стояння $t_{б.с}$.

Положення радіуса-вектора профілю кулачка на початку віддалення вихідної ланки (лінія *Aa*) визначає положення так званої ***початкової лінії кулачка***, яка є базою для установки кулачка на валу.

Кути повороту кулачка, що визначають відповідні періоди руху штовхача, називають ***фазовими кутами***. На рис. 7.5 вони позначені: $\varphi_в$ — кут віддалення, $\varphi_{д.с}$ — кут дальнього стояння, $\varphi_н$ — кут наближення, $\varphi_{б.с}$ — кут ближнього стояння. У центральних кулачкових механізмах (рис. 7.5, *а*) фазові кути та кути профілю кулачка відповідно рівні між собою ($\varphi_в = \varphi'_в$, $\varphi_{д.с} = \varphi'_{д.с}$, $\varphi_н = \varphi'_н$, $\varphi_{б.с} = \varphi'_{б.с}$). У кулачкових механізмах зі зміщенням такі рівності не зберігаються, тобто фазові кути й кути профілю кулачка не рівні між собою. Це можна побачити, розглянувши роботу зміщеного кулачкового механізму, зображеного на рис. 7.5, *б*, в якому, наприклад, кут *aAb* є кутом профілю $\varphi'_в$, а кут *a'Ab* — фазовим кутом віддалення $\varphi_в$, оскільки за час переміщення вістря штовхача вздовж ділянки *ab* трикутник *Aa''b*, жорстко зв'язаний з кулачком, повернеться на кут $\varphi_в$ і суміститься в кінці періоду віддалення з трикутником *Aa'''a'*. Отже, у даному випадку $\varphi_в > \varphi'_в$, $\varphi_н < \varphi'_н$. Якщо траєкторія руху штовхача зміщена вліво від осі обертання кулачка, то матимуть місце зворотні нерівності ($\varphi_в < \varphi'_в$, $\varphi_н > \varphi'_н$).

Тривалість періодів руху штовхача, яка визначається технологічними умовами роботи кулачкового механізму, а відповідно

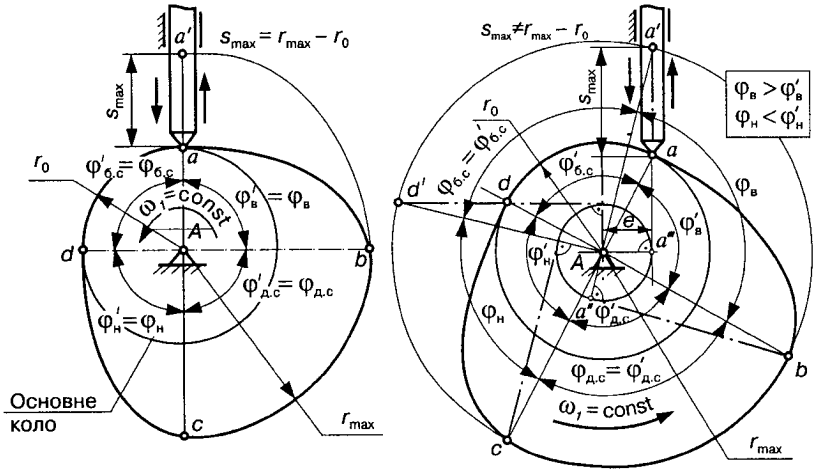

$s_{max} = r_{max} - r_0$
s_{max}
r_0
$\varphi'_{б.с} = \varphi_{б.с}$
$\omega_1 = const$
$\varphi'_в = \varphi_в$
$\varphi'_{д.с} = \varphi_{д.с}$
$\varphi'_н = \varphi_н$
Основне коло
r_{max}
$s_{max} \neq r_{max} - r_0$
$\varphi_в > \varphi'_в$
$\varphi_н < \varphi'_н$
$\varphi_{д.с} = \varphi'_{д.с}$
$\omega_1 = const$
а
б

Рис. 7.5.

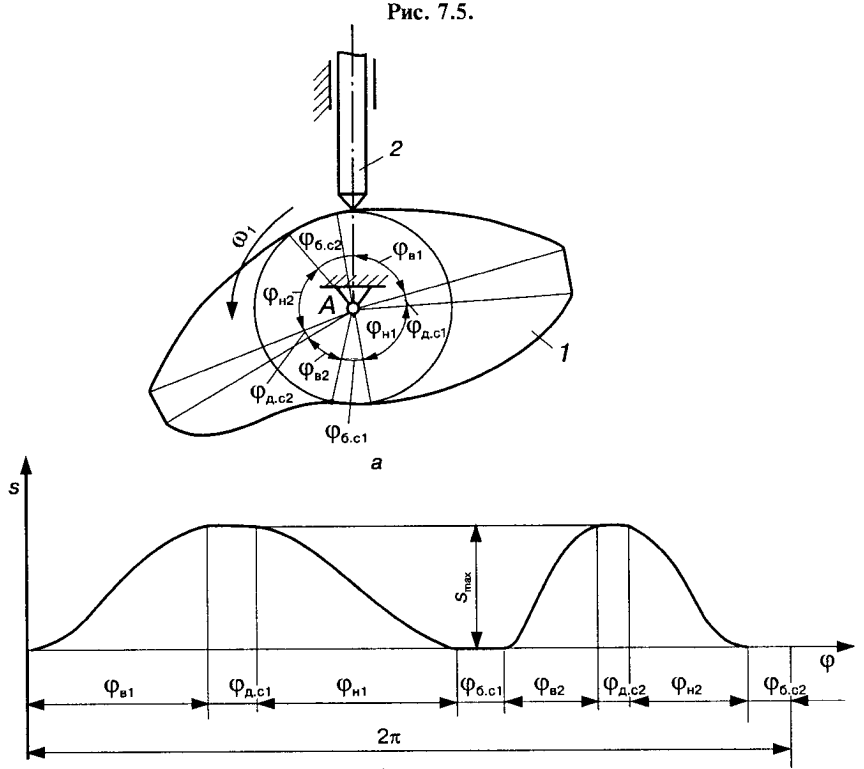

2
1
ω_1
$\varphi_{б.с2}$
$\varphi_{в1}$
$\varphi_{н2}$
$\varphi_{н1}$
$\varphi_{д.с1}$
$\varphi_{в2}$
$\varphi_{д.с2}$
$\varphi_{б.с1}$
а
s
s_{max}
φ
$\varphi_{в1}$
$\varphi_{д.с1}$
$\varphi_{н1}$
$\varphi_{б.с1}$
$\varphi_{в2}$
$\varphi_{д.с2}$
$\varphi_{н2}$
$\varphi_{б.с2}$
2π
б

Рис. 7.6.

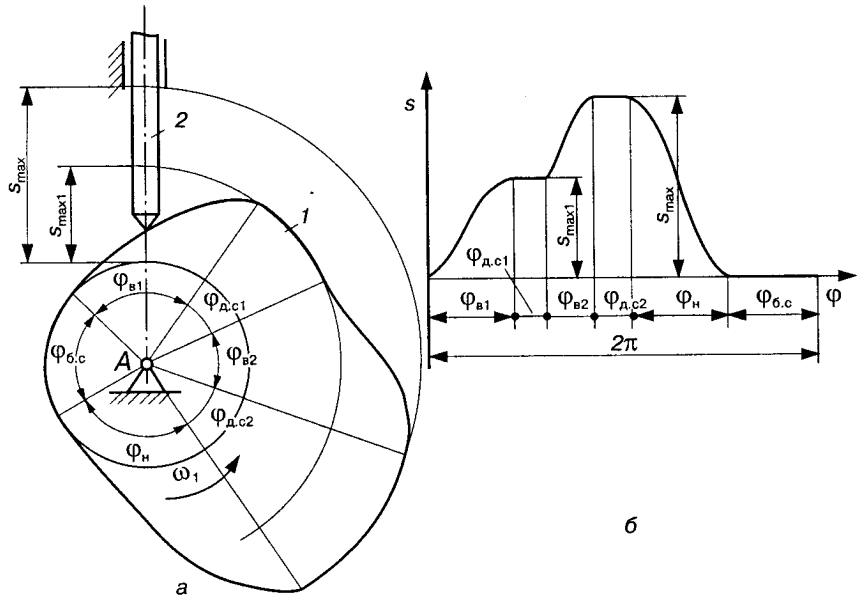


Рис. 7.7.

і значення фазових кутів можуть бути різними, причому періодів ближнього і дальнього стояння може не бути, проте в будь-якому кулачковому механізмі обов'язково мають бути періоди віддалення та наближення. Очевидно, що сума періодів руху вихідної ланки (штовхача або коромисла) дорівнює періоду обертання кулачка T, тобто

$$t_в + t_{д.с} + t_н + t_{б.с} = T, \tag{7.1}$$

а сума фазових кутів дорівнює 360°:

$$\varphi_в + \varphi_{д.с} + \varphi_н + \varphi_{б.с} = 360°. \tag{7.2}$$

Максимальний хід штовхача для центрального кулачкового механізму визначається різницею найбільшого і найменшого радіусів кулачка:

$$S_{max} = r_{max} - r_0. \tag{7.3}$$

У зміщених кулачкових механізмах ($e \neq 0$) ця рівність не зберігається ($S_{max} > r_{max} - r_0$).

У техніці використовуються і складніші кулачки, які можуть забезпечувати за один оберт кулачка кілька подвійних ходів вихідної ланки однакової або різної величини. Для ілюстрації

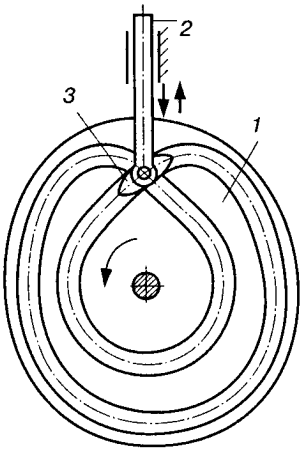


Рис. 7.8.

цього на рис. 7.6, *а* показано кулачковий механізм дворазової дії, в якому за час одного оберту кулачка штовхач здійснює два ходи однакової величини. Діаграма руху штовхача такого механізму зображена на рис. 7.6, *б*.

На рис. 7.7 показано кулачковий механізм і діаграму руху штовхача, в якому повний хід S_{max} штовхача здійснюється в два прийоми, і, навпаки, кулачковий механізм, зображений на рис. 7.8, забезпечує повний період руху T вихідної ланки (штовхача *2*) за два оберти кулачка. Теоретичний профіль кулачка виконано замкнутою кривою, яка перетинається, а замість ролика встановлено "човник" *3*, накреслений двома дугами кола.

7.5. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів

Задача кінематичного дослідження полягає в тому, щоб при заданих профілю кулачка та розмірах інших ланок механізму встановити закон руху вихідної ланки (штовхача або коромисла), тобто знайти залежність переміщень, швидкостей і прискорень вихідної ланки від часу або кута повороту кулачка. При цьому можуть використовуватись графічні, аналітичні або експериментальні методи. Цю задачу можна розв'язати також графоаналітичним методом — побудовою планів швидкостей і прискорень з використанням замінних механізмів (див. параграф 2.7). Але це дуже трудомісткий процес. Найпростішим є графічний метод, який розглянемо далі.

На рис. 7.9 зображено в масштабі μ_l центральний кулачковий механізм із загостреним штовхачем, який встановлено так, що вістря штовхача знаходиться на початку профілю віддалення (точка B_0). Для визначення переміщення штовхача залежно від положення кулачка можна було б скористатися звичайним способом, як це робили при дослідженні важільних механізмів, тобто повернути кулачок на заданий кут φ (таке положення кулачка зображено штриховою лінією) і знайти точку перетину лінії руху штовхача з профілем кулачка (точка B_1), яка визначає нове по-

ложення кінця штовхача. Відрізок $s_1 = B_0B_1$ є переміщенням штовхача при повороті кулачка на кут φ. Проте така побудова складна й неточна, оскільки вимагає додаткової побудови складного профілю кулачка. Особливо це важливо, коли треба вести дослідження за весь цикл руху. У цьому разі довелось би будувати цілий ряд профілів кулачка.

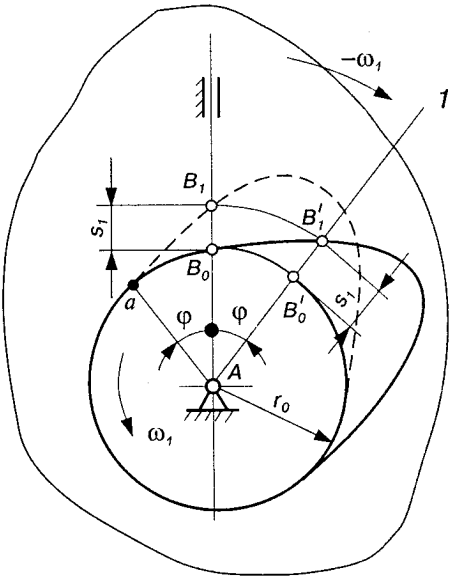


Рис. 7.9.

Задача значно спрощується, якщо використати так званий ***метод оберненого руху (метод інверсії)***, який дає змогу досить просто визначити відносне переміщення ланок механізму без додаткового накреслення кулачка. Для цього всьому кулачковому механізму разом зі стояком (рис. 7.9) умовно надаємо обертання навколо осі A з кутовою швидкістю ω_1 кулачка *1* тільки в напрямку, протилежному його власному обертанню, тобто зі швидкістю $-\omega_1$. Відносний рух ланок від цього не зміниться, але тоді кулачок відносно нерухомих осей координат стане нерухомим, а штовхач здійснить два рухи: 1) разом зі стояком (напрямними штовхача) обертатиметься навколо осі обертання кулачка A; 2) поступальний зі своїми напрямними за характером такий самий, як і був у дійсному русі, оскільки вістря штовхача рухається за цим самим профілем кулачка. Тому замість того, щоб повертати кулачок на заданий кут $\varphi = \angle B_0AB_1'$, слід повернути штовхач на цей самий кут φ, але в протилежному напрямку. Лінія руху штовхача (рис. 7.9) займе положення AB_1'. Точки перетину B_1' цієї лінії з профілем кулачка визначають положення вістря штовхача в оберненому русі.

Для визначення дійсного положення кінця штовхача досить радіусом AB_1' зробити засічку на дійсній лінії руху штовхача. Одержана точка B_1 визначає дійсне положення кінця штовхача, а відрізок B_0B_1 — його переміщення, яке можна виміряти і на

лінії AB_1' положення осі штовхача в оберненому русі, віднявши від її довжини мінімальний радіус кулачка, тобто

$$s_i = \rho_i - r_0, \tag{7.4}$$

де $\rho_i = AB_1'$ — відстань точки B_1' дотику вістря штовхача з профілем кулачка в оберненому русі від центра обертання кулачка.

Для побудови діаграми переміщень (рис. 7.10, *б*) покладаємо швидкість обертання кулачка $\omega_1 = \text{const}$ і будуємо ряд положень штовхача в оберненому русі (на рис. 7.10, *а* — це шість положень для періоду віддалення і шість — для періоду наближення), поділивши фазові кути $\varphi_в$ і $\varphi_н$ на рівні частини, у даному випадку на шість рівних частин, одержуємо точки 1, 2, 3 і т. д. Провівши через ці точки з центра обертання кулачка прямі до перетину з профілем кулачка, одержимо положення осі штовхача (*A*1″, *A*2″, *A*3″ і т. д.) та його вістря (точки 1″, 2″, 3″ і т. д.) у відповідних положеннях оберненого руху, а тоді, користуючись залежністю (7.4), знайдемо дійсні переміщення штовхача. Це можна зробити графічно, провівши дуги $1''\breve{1}'$, $2''\breve{2}'$, $3''\breve{3}'$ і т. д. Залишається перенести ці переміщення на відповідні ординати діаграми переміщень $s = s(t)$ або $s = s(\varphi)$ (рис. 7.10, *б*). При побудові цієї діаграми на осі ординат відкладають у масштабі переміщення s_i, на осі абсцис — час t або кут повороту кулачка φ. Для простоти побудови можна зберегти масштаб довжини μ_l і на діаграмі переміщень, прийнявши $\mu_S = \mu_l$. Тоді ординати 1′1′, 2′2′, 3′3′ і т. д. будуть відповідно дорівнювати відрізкам 01′, 02′, 03′ і т. д. на схемі кулачкового механізму. Відрізки на осі абсцис, які відображають періоди віддалення та наближення, так само як на кулачку, ділять на шість рівних частин. Для зручності побудови вісь абсцис діаграми $s = s(t)$ проводять так, щоб її напрямок проходив через початкове положення 0 вістря штовхача. Відрізок 0—14, який позначимо L, відображає період руху кулачка T або 360°. Тоді масштаб діаграм буде таким:
переміщень (м/мм)

$$\mu_s = \frac{S_{\max}}{y_{\max}}; \tag{7.5}$$

часу (с/мм)

$$\mu_t = \frac{T}{L}; \tag{7.6}$$

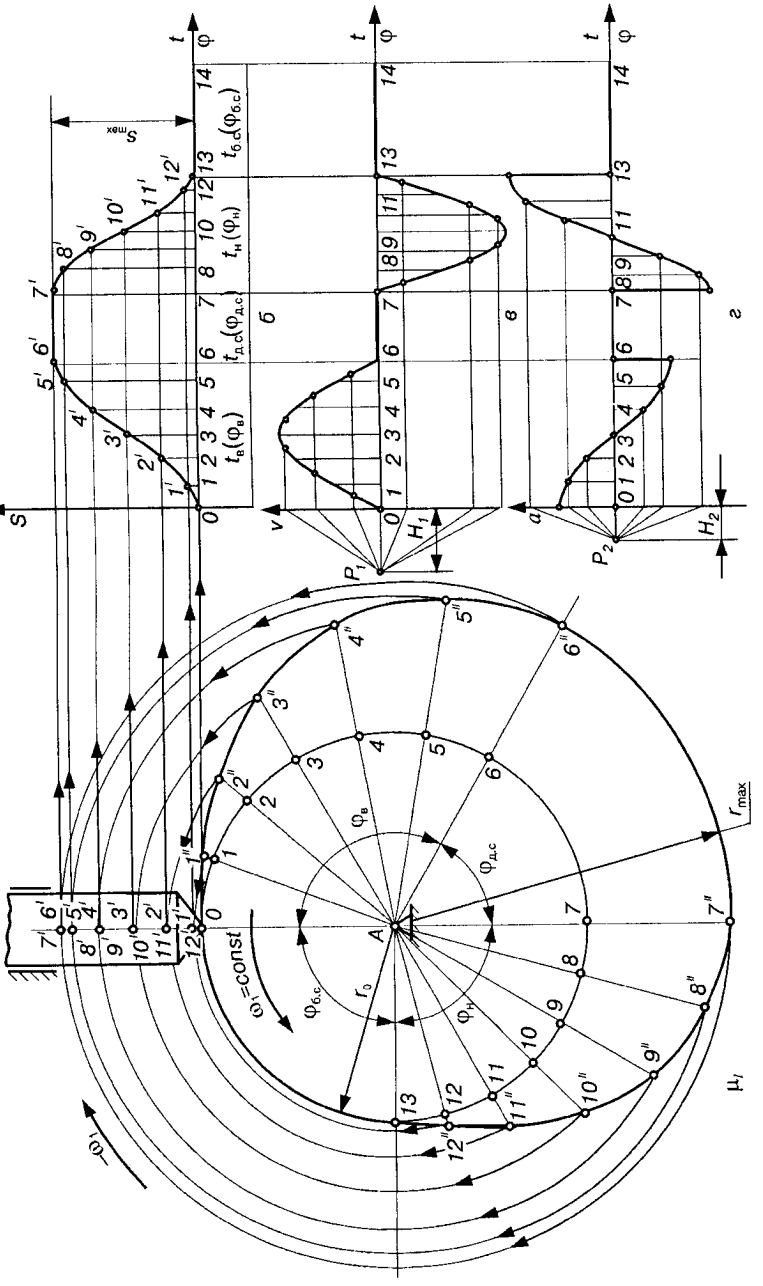

s
t
φ
s_{max}
$t_в(φ_в)$
$t_д.с(φ_д.с)$
$t_н(φ_н)$
$t_б.д(φ_б.с)$
б
в
г
v
a
P_1
P_2
H_1
H_2
$ω_1$=const
$ω_1$
$φ_в$
$φ_д.с$
$φ_н$
$φ_б.с$
r_0
r_{max}
A
$μ_l$
а

Рис. 7.10.

кута (рад/мм)

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L}, \qquad (7.7)$$

де S_{max} — максимальний хід штовхача: $S_{max} = (06')\mu_l$; y_{max} — максимальна ордината на діаграмі переміщень.

З'єднавши неперервною плавною кривою лінією кінці всіх ординат, одержимо діаграму переміщень $s = s(\varphi)$ або $s = s(t)$. Перша частина кривої 0—6′, яка зростає, характеризує період віддалення, друга — 6′—7′, паралельна осі абсцис, — період дальнього стояння, третя — 7′—13′, яка спадає, — період наближення і нарешті четверта 13—14, що збігається з віссю абсцис, — період ближнього стояння. Як уже відзначалось, існування другої і четвертої ділянок на профілі кулачка не обов'язкове.

Діаграми швидкостей $v(t)$ чи $v(\varphi)$ (рис. 7.10, *в*), прискорень $a = a(t)$ чи $a = a(\varphi)$ (рис. 7.10, *г*) можна одержати методом графічного диференціювання (див. параграф 3.3). Для аналітичного визначення швидкості та прискорення руху штовхача треба мати аналітичну залежність переміщень $s = s(t)$ $s = s(\varphi)$.

У кулачкових механізмах зі зміщенням напрямок траєкторії руху штовхача зміщений відносно осі на величину e (див. рис. 7.2, *в*). Побудову положень штовхача в оберненому русі такого механізму розглянемо далі, при синтезі кулачкових механізмів. Це стосується й інших типів кулачкових механізмів.

З аналізу рис. 7.10, *а, б* можна сформулювати порядок розв'язання оберненої задачі — синтезу кулачкового механізму за заданим законом руху кулачка. Очевидно, що побудова профілю кулачка — а це основна задача кінематичного синтезу механізму — буде виконуватись у зворотному напрямку.

7.6. Закони руху вихідної ланки

Під законом руху вихідної ланки кулачкового механізму розуміють залежність між переміщеннями вихідної ланки та часом. Інколи закон руху вихідної ланки задають залежностями швидкості або прискоренням цієї ланки від часу. Тоді, інтегруючи останні, можна перейти до залежності переміщень від часу.

Якщо кулачок обертається рівномірно ($\omega_1 = \text{const}$), то закон руху вихідної ланки можна записати як функцію кута φ пово-

роту кулачка, оскільки $\varphi = \omega_1 t$. Надалі, для простоти викладу, вважатимемо $\omega_1 = \text{const}$, хоч це не впливає на спільність методів синтезу.

Вибір закону руху вихідної ланки є одним із найвідповідальніших і, як правило, найскладніших етапів при проектуванні кулачкових механізмів, оскільки закон руху визначає динаміку роботи механізму (а інколи і всієї машини) та якість виконання технологічного процесу. Теоретично кулачкові механізми можуть забезпечувати різноманітні закони руху, але на практиці користуються лише тими, які забезпечують просту технологію обробки профілю кулачка та задовольняють кінематичні і динамічні вимоги до кулачкових механізмів.

На рис. 7.11 показано приклади діаграм найхарактерніших законів руху вихідної ланки кулачкових механізмів: переміщень $s = s(t)$ або $s = s(\varphi)$; швидкості $v = v(t)$ або $v = v(\varphi)$; прискорень $a = a(t)$ або $a = a(\varphi)$. Усі діаграми зображено тільки для періоду віддалення, оскільки для інших періодів їх легко собі уявити: для періодів вистою — це прямі, паралельні осі абсцис; для періоду наближення — переміщення спадає від S_{max} до нуля (рис. 7.10, *б*), швидкість і прискорення змінюються, як і для періоду віддалення, мають протилежні знаки (рис. 7.10, *в, г*). Крім цього, при дослідженні різних законів руху наводимо діаграми, формули та залежності переважно для кулачкових механізмів з вихідною ланкою, яка рухається прямолінійно. Очевидно, що при обертовому (коливальному) русі вихідної ланки лінійні переміщення s, швидкості v і прискорення a слід замінити відповідно на кутові (β, ω, ε).

Найпростішим законом зміни переміщень $s = s(t)$ є ***лінійний закон руху***, при якому штовхач здійснює рівномірний рух ($v = \text{const}$, $a = 0$). Діаграма переміщень штовхача є функцією кута φ повороту кулачка і побудована по прямій лінії. Дисковий кулачок з центральним штовхачем забезпечує цей закон на ділянці центрового профілю, який описаний спіраллю Архімеда, а барабанний кулачок — ділянкою, яка описана гвинтовою поверхнею. Отже, такий закон руху штовхача можна здійснити кулачком нескладного профілю. Проте для швидкохідних кулачкових механізмів цей закон руху непридатний, оскільки він пов'язаний із стрибками швидкості штовхача, тобто з ударами. На початку і в кінці руху прискорення штовхача, а значить, і сили інерції ($F_{ін} = -ma$) досягають нескінченності, що приводить до так званих ***жорстких ударів***. Практично значення швид-

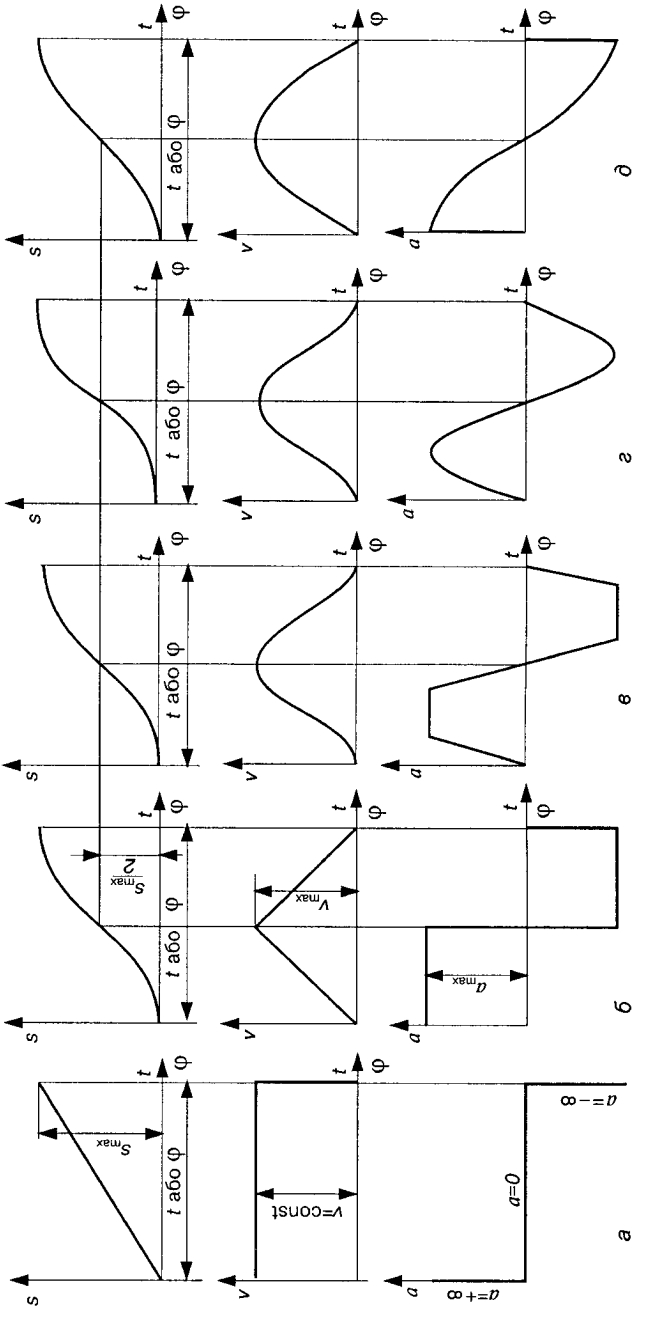

s
v
a
t
φ
t або φ
S_{max}
V=const
a=0
$a=+\infty$
$a=-\infty$
V_{max}
a_{max}
$\frac{S_{max}}{2}$
а
б
в
г
д

Рис. 7.11.

костей і сил інерції не досягають нескінченності завдяки пружності ланок механізму, але, незважаючи на це, все ж у крайніх положеннях штовхача виникають значні сили, які можуть призвести до розмикання ланок механізму, що утворюють вищу кінематичну пару, або привести до ударів кулачка та штовхача. Тому такий закон руху рекомендується використовувати лише в тихохідних кулачкових механізмах при невеликих навантаженнях.

Лінійний закон руху можна застосовувати і в більш відповідальних випадках, усунувши причину жорстких ударів. Для цього рівномірним рухом користуються лише на частині періоду руху (віддалення чи наближення) штовхача, а для плавного переходу від вистою до рівномірного руху вводять перехідні криві, якими можуть бути дуги кола, ділянки параболи, синусоїди тощо. На рис. 7.12 зображено лінійний закон руху з перехідними ділянками $\varphi_в^*$, накресленими дугами кола радіуса r. Із цих діаграм видно, що швидкість штовхача наростає поступово (нема розривів), прискорення на початку і в кінці періоду руху (віддалення або наближення) змінюються миттєво на скінченну величину. Отже, в точках *a, e, f, b* виникають удари, але менші, ніж ті, що були раніше (рис. 7.11, *а*). Удари, які з'являються при миттєвій зміні прискорень на скінченну величину, називають ***м'якими ударами***. Такі удари менш небезпечні для роботи кулачкових механізмів, тому багато тихохідних кулачкових механізмів працюють в умовах м'яких ударів.

З рис. 7.12, *а* видно, що кут нахилу β прямої *km* більший кута α нахилу прямої *an*, тобто при заданих одних і тих самих значеннях S_{max} і $\varphi_в$ швидкості на ділянці віддалення (наближення) будуть більші, ніж у законі, зображеному на рис. 7.11, *а*.

Більш сприятливі умови роботи кулачкового механізму бувають при ***простому параболічному законі руху*** штовхача (рис. 7.11, *б*), при якому переміщення виражається формулою параболи 2-го порядку $s = 2S_{max}\varphi_в^2 / \varphi^2$, швидкість спочатку рівномірно зростає, а потім рівномірно спадає до нуля. Прискорення протягом обох ділянок руху стале, тому такий закон ще називається ***законом сталого прискорення***. Проте і при такій діаграмі прискорень виникають м'які удари, оскільки прискорення штовхача змінюються миттєво на скінченну величину.

Щоб усунути недоліки простого параболічного закону, можна використати ***складний параболічний закон*** (див. рис. 7.11, *в*) або,

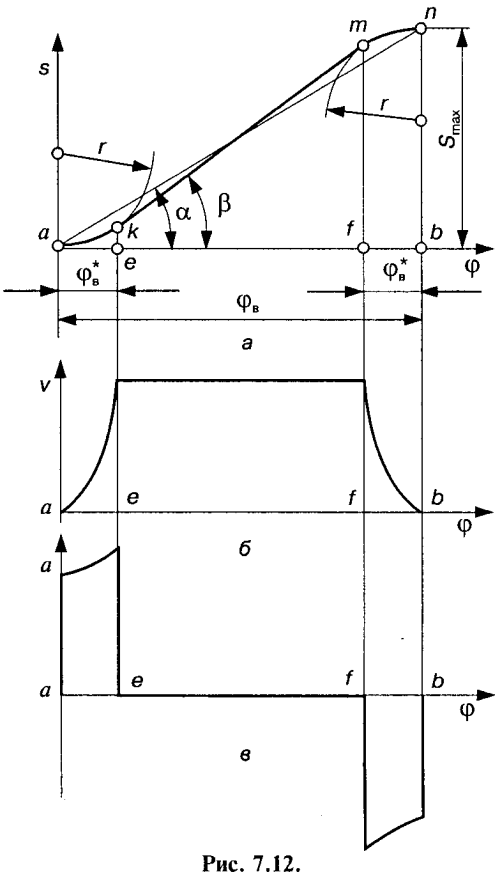


Рис. 7.12.

як його ще називають, ***закон трапецоїдного прискорення***. При такому законі прискорення на початку і в кінці періоду руху (віддалення чи наближення) змінюється рівномірно. Це дає можливість усунути удари в роботі кулачкового механізму. Такий закон може використовуватися у швидкохідних механізмах.

Найвигіднішим з цієї точки зору є ***синусоїдний закон*** (див. рис. 7.11, *г*) зміни прискорень, при якому переміщення, швидкості, прискорення та їх похідні змінюються плавно. Недоліком синусоїдного закону є повільне наростання переміщень у період розбігу та вибігу, що ускладнює, наприклад, пропускання пари або газу через вузьку щілину між сідлом і клапаном у поршневих двигунах і веде до збільшення витрат пального.

Широкого розповсюдження в машинах набув ***косинусоїдний закон*** зміни прискорень (див. рис. 7.11, *д*), коли прискорення змінюється раптово на початку і в кінці періоду руху штовхача, що є його недоліком, оскільки виникають м'які удари. Перевагою є те, що на всіх проміжках між точками набігання та збігання штовхача прискорення та відповідні сили інерції змінюються дуже плавно. Крім цього, зіставлення максимальних прискорень простого параболічного $a^{п.п}_{max}$, косинусоїдного $a^{к}_{max}$ і синусоїдного $a^{с}_{max}$ законів має вигляд

$$a^{п.п}_{max} : a^{к}_{max} : a^{с}_{max} = 1 : \frac{\pi^2}{8} : \frac{\pi}{2} \text{ або } 1 : 1{,}23 : 1{,}57,$$

тобто максимальне прискорення при косинусоїдному законі при інших однакових умовах менше, ніж при синусоїдному, а тому дійсні сили інерції, які, як правило, відрізняються від теоретично обчислених, можуть бути порівняні.

Як видно з наведених прикладів законів руху вихідної ланки, при виборі того чи іншого закону необхідно знати швидкості та прискорення вихідної ланки. Особливо важливі останні, оскільки вони визначають сили інерції, що діють на ланки механізму. Тому при проектуванні кулачкових механізмів, як правило, задаються аналогами прискорень вихідної ланки ($s'' = d^2s/d\varphi^2$). За заданими аналогами прискорень і початковими умовами (максимальний хід, фазові кути тощо) визначають аналоги швидкостей ($s' = ds/d\varphi$) і закон руху вихідної ланки (залежність переміщень s від кута φ повороту кулачка).

У практиці проектування кулачкових механізмів досить широке розповсюдження набули ***комбіновані закони*** руху вихідної ланки [43, 74, 75], для яких на різних ділянках періоду віддалення чи наближення прискорення можуть бути описані різними функціональними залежностями. Це дозволяє синтезувати такі закони руху, які мають значно кращі кінематичні та динамічні характеристики, ніж вихідні, описані однією функцією.

7.7. Якісні характеристики законів руху вихідної ланки

Аналоги швидкостей та прискорень зручні для характеристики руху ланок передаточних механізмів (зубчастих, фрикційних, пасових тощо), у тому числі важільних механізмів, які забезпечують обертовий рух вихідної ланки. Для порівняння законів руху вихідних ланок циклових (періодичної дії) механізмів (кулачкових, важільних зі зворотно-поступальним або коливальним рухом вихідної ланки) зручнішими характеристиками є ***безрозмірні коефіцієнти*** або, як їх ще називають, ***інваріанти переміщень a_k, швидкості b_k, прискорення c_k, кінетичної (динамічної) потужності d_k*** та їх константи піків (максимальні значення): швидкості $B = |b_k|_{max}$, прискорення $C = |c_k|_{max}$, кінетичної потужності $D = |d_k|_{max}$ і т. д. У працях [5, 43] інваріанти називають безрозмірними коефіцієнтами і відповідно позначають $a_k = \zeta$, $b_k = \delta$, $c_k = \xi$. Далі користуватимемося позначеннями, які прийняті в працях [74, 75].

Фізичний зміст інваріантів можна зрозуміти, якщо врахувати, що будь-яку фізичну величину A (переміщення, швидкість, прискорення, сила тощо) можна виразити у відповідних модулях вимірювання довжини l, часу t і маси m у вигляді степеневого добутку [74, 75]:

$$A = \frac{A}{l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}} l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma} = ql^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}, \qquad (7.8)$$

де α, β, γ — дійсні числа, які, зокрема, можуть дорівнювати нулю і вибиратися залежно від розмірності величини A; q — безрозмірний коефіцієнт (інваріант), який чисельно виражає величину в заданих фізичних модулях вимірювання (l, t, m) і визначається за формулою

$$q = \frac{A}{l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}} . \qquad (7.9)$$

Для геометричних величин (довжина, переміщення, площа, об'єм) $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$; для кінематичних (швидкість, прискорення) $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$; для динамічних (сила, момент сили, робота, потужність) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 1$.

У подібних системах закони зміни коефіцієнта q протягом циклу збігаються, тобто зміна інваріантів підкоряється одному і тому самому закону.

Для прикладу розглянемо системи діаграм переміщень різних вихідних ланок (*1*, *2*, *3*), побудованих у системі координат s—t (рис. 7.13, *а*). Ці діаграми розрізняються між собою значеннями максимального переміщення S_j (у даному випадку $j = 1, 2, 3$) і періодом руху ланки в одному напрямку T_j (наприклад, періодом віддалення $t_в$) та відображають кількісний бік руху (S_j, T_j). Про якісні зміни закону руху з них судити неможливо.

Для порівняння (якісної оцінки) цих законів руху будуємо діаграми відносних переміщень (рис. 7.13, *б*)

$$a_k = s_{ij} / S_j \qquad (7.10)$$

як функції відносного часу $k = t_{ij} / T_j$, $0 \le k \le 1$, де a_k — позиційний інваріант переміщення ($0 \le a_k \le 1$); s_{ij} — змінне переміщення ланки j; S_j — максимальний хід цієї ланки; t_{ij} — час, який відраховуємо від початку періоду руху ланки j в одному напрямку (віддалення чи наближення); T_j — період переміщення ланки у вибраному напрямку руху. Надалі, для скорочення запису індекси i, j у параметрах s, S та t, T опускатимемо.

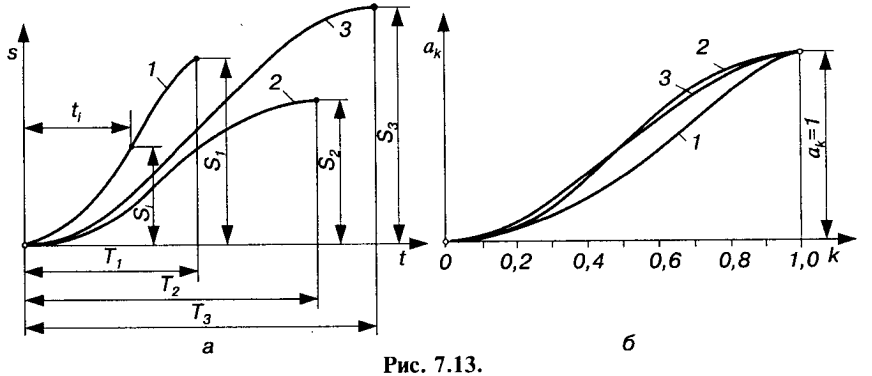


Рис. 7.13.

Як видно із наведених діаграм $a_k = a_k(k)$ (рис. 7.13, *б*), інваріанти переміщень a_k при відповідних значеннях k не збігаються, тобто при однакових умовах ($S_1 = S_2 = S_3$ і $T_1 = T_2 = T_3$) закони, зображені на рис. 7.13, *а*, неоднакові.

Продиференціювавши залежність переміщення $s = s(t)$ за часом, одержимо залежність для швидкості:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dk}\frac{dk}{dt} = f'(k)\frac{S}{T} = b_k\frac{S}{T}, \qquad (7.11)$$

де $dk = d(t/T) = dt/T$ або $dk/dt = 1/T$; $b_k = f'(k) = v / ST^{-1}$ — позиційний інваріант швидкості, який дорівнює відношенню фактичної швидкості ланки v до її середньої швидкості $v_c = S/T$. Отже,

$$b_k = \frac{v}{v_c}. \qquad (7.12)$$

Параметри S і T є модулями вимірювання швидкості. Отже, при порівнянні законів руху одиницею довжини є максимальний хід штовхача, одиницею часу — період руху в одному напрямку (віддалення або наближення).

Відповідно диференціюючи (7.11), знаходимо прискорення ланки:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dk}\frac{dk}{dt} = \frac{d(b_k S/T)}{dk}\frac{dk}{dt} = \frac{d(b_k)}{dk}\frac{S}{T^2} = f''(k)\frac{S}{T^2} = c_k\frac{S}{T^2}, \qquad (7.13)$$

де $c_k = f''(k) = a/ST^{-2}$ — позиційний інваріант прискорення, який дорівнює при $S = 1$ і $T = 1$ прискоренню a.

Позиційний інваріант кінетичної (динамічної) потужності визначається за формулою

$$d_k = b_k c_k. \tag{7.14}$$

При коливальному русі ланки модулями вимірювання параметрів зручно вибирати: для переміщень — кут розмаху коромисла β_{max}; для часу — період T переміщення коромисла в одному напрямку (віддаленні чи наближенні); для маси — момент інерції ланки J. Тоді

$$a_k = \frac{\beta_i}{\beta_{max}};\ b_k = \frac{\omega_i}{\beta_{max} T};\ c_k = \frac{\varepsilon_i}{\beta_{max} T^{-2}};\ d_k = b_k c_k, \tag{7.15}$$

де β_i, ω_i, ε_i — відповідно кутові переміщення, швидкості та прискорення коромисла кулачкового механізму або іншої ланки, рух якої розглядають.

Перехід від аналогів швидкостей і прискорень до інваріантів подібності можна здійснити за допомогою залежностей:
при зворотно-поступальному русі ланки

$$b_k = \frac{\varphi_в}{S_{max}} s_i',\ c_k = \frac{\varphi_в}{S_{max}^2} s_i'',\ d_k = b_k c_k = \frac{\varphi_в^2}{S_{max}^3} s_i' s_i'', \tag{7.16}$$

при коливальному русі ланки

$$b_k = \frac{\varphi_в}{\beta_{max}} \beta_i',\ c_k = \frac{\varphi_в}{\beta_{max}^2} \beta_i'',\ d_k = \frac{\varphi_в^2}{\beta_{max}^3} \beta_i' \beta_i'', \tag{7.17}$$

де $\varphi_в$ — кут повороту кулачка (в рад) за період віддалення штовхача (для періоду наближення в залежностях (7.16) і (7.17) замість кута віддалення необхідно підставляти $\varphi_н$ — кут наближення); s_i', s_i'', β_i', β_i'' — відповідно аналоги лінійних або кутових швидкостей і прискорень ланки, рух якої розглядають.

Використовуючи розглянуті позиційні інваріанти подібності, можна визначити динамічні параметри. Наведемо деякі приклади.

1. Сила інерції та момент сил інерції:

$$F_{ін} = ma = c_k \frac{mS}{T^2},\ M_{ін} = J\varepsilon = c_k \frac{J\beta_{max}}{T^2}. \tag{7.18}$$

2. Кінетична (динамічна) потужність

$$N_{кін} = F_{ін} v = c_k \frac{mS}{T^2} b_k \frac{S}{T} = d_k \frac{mS^2}{T^3}, \tag{7.19}$$

де v — швидкість точки прикладання сили $F_{ін}$, $S = S_{max}$.

Використання інваріантів a_k, b_k, c_k, d_k та їх констант піків $B = |b_k|_{\max}$, $C = |c_k|_{\max}$, $D = |d_k|_{\max}$ дає можливість порівнювати між собою закони руху не тільки кулачкових механізмів, але й інших механізмів, які забезпечують циклічний рух ланок, зокрема важільних [25]. Без таких даних важко говорити про властивості тих чи інших законів у величезній сім'ї різноманітних законів руху вихідної ланки кулачкових механізмів. Це пояснюється тим, що константи піків є об'єктивними критеріями якісної оцінки законів циклічного руху [75]. Так, константи піка швидкості B часто обмежують продуктивність машин через обмеження швидкості виконання технологічного процесу, визначають найбільші значення кінетичної енергії T, а при малих динамічних навантаженнях — сумарну потужність N_Σ і т. д. Константи піка прискорень визначають найбільші сили інерції $F_{ін}$ та їх моменти (7.19), а константи піків кінетичної потужності D — максимальні значення відповідних складових розрахункових динамічних навантажень на всі ланки передаточних механізмів.

У табл. 7.1 для деяких законів руху вихідної ланки подано діаграми інваріантів прискорень $a = a(k)$, умовні позначення цих законів та формули для визначення інваріантів переміщення $a_k = a_k(k)$, швидкості $b_k = b(k)$ і прискорень $c_k = c_k(k)$; у табл. 7.2 — деякі значення констант піків B, C і D для законів, які наведені в табл. 7.1. За цими даними можна досить об'єктивно оцінити закони руху вихідної ланки. Детальніші відомості про закони руху вихідної ланки і методи проектування кулачкових механізмів наведено в спеціальній літературі [43, 58, 74, 75].

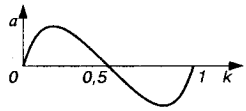
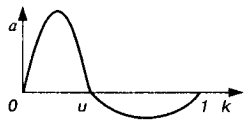
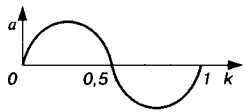
7.8. Кінематичний синтез кулачкових механізмів

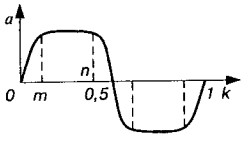
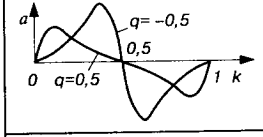
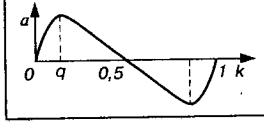
Синтез кулачкових механізмів можна розділити на два етапи. На першому етапі, який називають ***динамічним синтезом***, необхідно визначити основні розміри механізму, зокрема мінімальний радіус кулачка, міжосьову відстань (для коромислових кулачкових механізмів). На другому етапі, який називають ***кінематичним синтезом***, необхідно за заданими законами руху вхідної (кулачка) і вихідної (штовхача або коромисла) ланок побудувати профіль кулачка.

Проте для кращого розуміння кулачкових механізмів, у тому числі методики динамічного синтезу, спочатку розглянемо ***кінематичний синтез*** деяких кулачкових механізмів. Тут, так са-

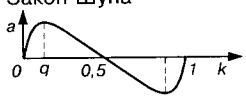
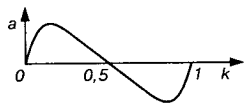
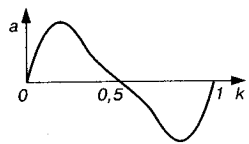
ЗАКОНИ РУХУ ВИХІДНОЇ ЛАНКИ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

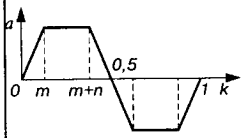
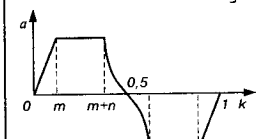
Таблиця 7.1

Назва закону і діаграма прискорень	Позначення	Межі для k		a_k	b_k	c_k
		від	до			
А. Безударні закони руху						
Синусоїдне прискорення (симетрична тахограма) 	C_0	0	0,5	$k-\frac{\sin 2\pi k}{2\pi}$	$1-\cos 2\pi k$	$2\pi\sin 2\pi k$
Синусоїдне прискорення (несиметрична тахограма) 	HC_u^*	0	u	$k-\frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi k}{u}$	$1-\cos\frac{\pi k}{u}$	$\frac{\pi}{u}\sin\frac{\pi k}{u}$
		u	1	$k+\frac{1-u}{\pi}\sin\frac{\pi(1-k)}{1-u}$	$1-\cos\frac{\pi(1-k)}{1-u}$	$-\frac{\pi}{1-u}\sin\frac{\pi(1-k)}{1-u}$
Діаграма прискорень – симетрична гілка оберненої квадратної параболи 	$СП_0$	0	0,5	$8(k^3-k^4)$	$24k^2-32k^3$	$48k-96k^2$

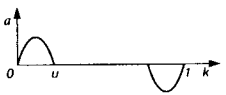
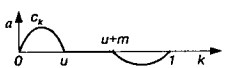
Закон Неклютіна $C = \dfrac{4\pi}{\pi - 4m\pi + 8m}$ 	*mn*M	0 *m* 0,5–*m*	*m* 0,5–*m* 0,5	$C\dfrac{2m}{\pi}\left(k - \dfrac{2m}{\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2m}\right)$ $C\left(\dfrac{(\pi^2-8)m^2}{2\pi^2} + \dfrac{2-\pi}{\pi}mk + \dfrac{k^2}{2}\right)$ $C\left(-\dfrac{1}{8} + \dfrac{m}{2} + \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{2m}{\pi}(\pi-1)\right]k - \left(\dfrac{2m}{\pi}\right)^2 \times \sin\dfrac{0,5-k}{2m}\pi\right)$	$C\dfrac{2m}{\pi}\left(1 - \cos\dfrac{k\pi}{2m}\right)$ $C\left(\dfrac{2-\pi}{\pi}m + k\right)$ $C\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{2m(\pi-1)}{\pi} + \dfrac{2m}{\pi}\cos\dfrac{0,5-k}{2m}\pi\right]$	$C\sin\dfrac{k\pi}{2m}$ C $C\sin\dfrac{0,5-k}{2m}\pi$
Діаграма переміщень – похила синусоїда 	C_q	0	1	$k_1 - \dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi k_1$, тоді $k = k_1 - (k_1 - a_k)q \times$ $\times (-1 \le q \le 1; \quad 0 \le k_1 < 1)\gamma$	$\dfrac{1 - \cos 2\pi k_1}{1 - q\cos 2\pi k_1}$	$\dfrac{2\pi(1-q)\sin 2\pi k_1}{(1 - q\cos 2\pi k_1)^3}$
Тригонометричний закон Тіра $C = (0,17566 - 0,06978q - 0,1079q^2)^{-1}$ 	KC_q	0	*q*	$C\dfrac{2q}{\pi}\left(k - \dfrac{2q}{\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2q}\right)$	$C\dfrac{2q}{\pi}\left(1 - \cos\dfrac{k\pi}{2q}\right)$	$C\sin\dfrac{k\pi}{2q}$

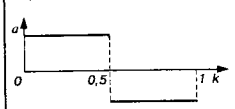
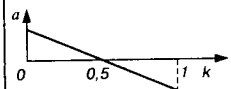
Продовження табл. 7.1

Назва закону і діаграма прискорень	Позначення	Межі для k		a_k	b_k	c_k
		від	до			
		q	1	$C\left[0{,}13662\,qk - 0{,}15529\,q^2 + \frac{k^2}{4} + 0{,}05066 \times (0{,}5-q)^2 \times \left(1 - \cos\frac{k-q}{0{,}5-q}\pi\right)\right]$	$C\left(\frac{2q}{\pi} + \frac{k-q}{2} + \frac{0{,}5-q}{2\pi} \times \sin\frac{k-q}{0{,}5-q}\pi\right)$	$\frac{C}{2}\left(1 + \cos\frac{k-q}{0{,}5-q}\pi\right)$
Закон Шуна 	Ш	0	1	$10k^3 - 15k^4 + 6k^5$	$30(k^2 - 2k^3 + k^4)$	$60(k - 3k^2 - 2k^3)$
Степеневий закон Саввіна 	2,9	0	0,5	$18k^3 - 55k^4 + 78k^5 - 56k^6 + 16k^7$	$54k^2 - 220k^3 + 390k^4 - 336k^5 + 112k^6$	$108k - 660k^2 + 1560k^3 - 1680k^4 + 672k^5$
Степеневий закон Саввіна 	2,12	0	0,5	$23k^3 - 80k^4 + 123k^5 - 91k^6 + 26k^7$	$69k^2 - 320k^3 + 615k^4 - 546k^5 + 182k^6$	$138k - 960k^2 + 2460k^3 - 2730k^4 + 1092k^5$

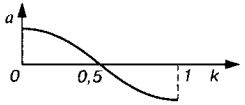
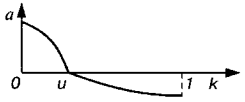
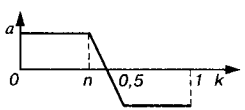
Трапецоїдне прискорення $C = \frac{3}{0{,}5(1-m)+m-2mn-n^2}$ 	mn	0 m $m+n$	m $m+n$ 0,5	$\frac{Ck^3}{6m}$ $C\left[\frac{m^2}{6}+k+\frac{k-m}{2}\right]$ $\frac{C}{6}\left[-2n^2+mn+m+n-\right.$ $-0{,}25+(1{,}5+3n)(k-m-$ $\left.-n)+\frac{(0{,}5-k)^3}{0{,}5-m-n}\right]$	$\frac{Ck^2}{2m}$ $C\left[k-\frac{m}{2}\right]$ $\frac{C}{2}\left[-0{,}5+n-\right.$ $\left.-\frac{(0{,}5-k)^3}{0{,}5-m-n}\right]$	$\frac{Ck}{m}$ C $C\left(\frac{0{,}5-k}{0{,}5-m-n}\right)$
Степеневий закон Тіра $C = (u+2)/$ $\left[2(0{,}5-m-n)^2+(n+0{,}5m-\right.$ $\left.-2mn-\frac{2}{3}m^2-n^2)\times(u+2)\right]$ 	$mn(u)$	0 m $m+n$	m $m+n$ 0,5	$\frac{Ck^3}{6m}$ $C\left[\frac{m^2}{6}+\frac{k(k-m)}{2}\right]$ $C\left[\frac{m^2}{6}+\frac{(m+n)n}{2}+\right.$ $\left(\frac{m}{2}+n+\frac{0{,}5-m-n}{u+1}\right)\times$ $\times(k-n-m)-$ $\left.+\frac{-(0{,}5-m-n)^{u+2}-(0{,}5-k)^{u+2}}{(0{,}5-m-n)^u(u+1)(u+2)}\right]$	$\frac{Ck^2}{2m}$ $C\left[k-\frac{m}{2}\right]$ $C\left[\frac{m}{2}+n+\right.$ $\left.+\frac{(0{,}5-m-n)^{u+1}-(0{,}5-k)^{u+1}}{(0{,}5-m-n)^u\times(u+1)}\right]$	$\frac{Ck}{m}$ C $C\left(\frac{0{,}5-k}{0{,}5-m-n}\right)$

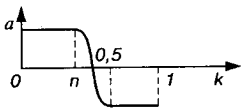
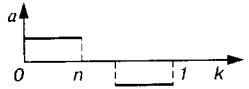
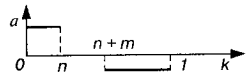
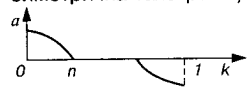
Продовження табл. 7.1

Назва закону і діаграма прискорень	Позначення	Межі для k		a_k	b_k	c_k
		від	до			
Синусоїдне прискорення (триділянкова симетрична тахограма) $C = \frac{\pi}{2u(1-u)}$ 	$3C_u^*$	0	u	$C\frac{u}{\pi}\left(k - \frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi k}{u}\right)$	$C\frac{u}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi k}{u}\right)$	$C\sin\frac{\pi k}{u}$
		u	0,5	$\frac{2k-u}{2(1-u)}$	$\frac{1}{1-u}$	0
Синусоїдне прискорення (триділянкова несиметрична тахограма) $C_1 = \frac{\pi}{u(1+m)}, C_4 = \frac{\pi}{(1-u-m)(1+m)}$ 	$3C_{um}$	0	u	$C_1\frac{u}{\pi}\left(k - \frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi k}{u}\right)$	$C_1\frac{u}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi k}{u}\right)$	$C_1\sin\frac{\pi k}{u}$
		u	m	$\frac{2k-u}{1+m}$	$\frac{2}{1+m}$	0
		$u+m$	1	$1 + C_2\frac{1-u-m}{\pi}\times$ $\times\left[1 - k - \frac{1-u-m}{\pi}\sin\frac{\pi(1-k)}{1-u-m}\right]$	$C_2\frac{1-u-m}{\pi}\times$ $\times\left[1 - \cos\frac{\pi(1-k)}{1-u-m}\right]$	$-C_2\sin\frac{\pi(1-k)}{1-u-m}$

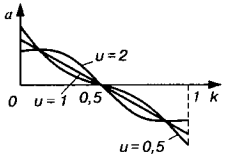
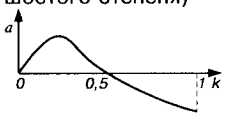
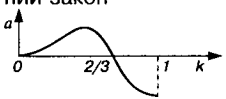
Б. Закони руху з м'якими ударами						
Стале прискорення (симетрична тахограма) 	0050	0	0,5	$2k^2$	$4k$	4
Стале прискорення (несиметрична тахограма)	СП$^*_u$	0 u	u 1	$\frac{k^2}{u}$ $1-\frac{(1-k)^2}{1-u}$	$\frac{2k}{u}$ $\frac{2(1-k)}{1-u}$	$\frac{2}{u}$ $-\frac{2}{1-u}$
Рівноспадне прискорення (симетрична тахограма) 	0000	0	1	$3k^2-2k^3$	$6k(1-k)$	$6k\,(1-2k)$
Рівноспадне прискорення (несиметрична тахограма)	РС$^*_u$	1 u	u 1	$\frac{3k^2}{2u}-\frac{k^3}{2u^2}$ $1-\frac{3(1-k)^2}{2(1-u)}+\frac{(1-k)^3}{2(1-u)}$	$\frac{3k}{u}-\frac{3k}{u^2}$ $\frac{3(1-k)}{1-u}-\frac{3(1-k)^2}{2(1-u)^2}$	$\frac{3}{u}-\frac{3k}{u^2}$ $-\frac{3(k-u)}{(1-u)^2}$

Продовження табл. 7.1

Назва закону і діаграма прискорень	Позначення	Межі для k		a_k	b_k	c_k
		від	до			
Косинусоїдне прискорення (симетрична тахограма) 	K	0	1	$1-\frac{\cos \pi k}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sin \pi k$	$\frac{\pi^2}{2}\cos \pi k$
Косинусоїдне прискорення (несиметрична тахограма) 	K_u	1	u	$u\left(1-\cos\frac{\pi k}{2u}\right)$	$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi k}{2u}$	$\frac{\pi^2}{4u}\cos\frac{\pi k}{2u}$
		u	1	$u+(1-u)\cos\frac{\pi(1-k)}{2(1-u)}$	$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi(1-k)}{2(1-u)}$	$-\frac{\pi^2}{4(1-u)}\cos\frac{\pi(1-k)}{2(1-u)}$
Прискорення за прямокутною трапецією $C=\frac{3}{0{,}5+n-n^2}$ 	00n	0	n	$C\frac{k^2}{2}$	Ck	C
		n	0,5	$C\left[-\frac{1+2n+4n^2}{24}+\frac{0{,}5+n}{2}k+\frac{(0{,}5-k)^3}{6(0{,}5-n)}\right]$	$C\left[\frac{0{,}5+n}{2}-\frac{(0{,}5-k)^2}{2(0{,}5-n)}\right]$	$C\frac{0{,}5-k}{0{,}5-n}$
Закон Неклютіна для руху без вистоїв $C=\frac{1}{0{,}184(n-n^2)+0{,}204}$	nM	0	n	$C\frac{k^2}{2}$	Ck	C

		n	0,5	$C\left\{nk - \frac{n^2}{2} + 4\left(\frac{0,5-n}{\pi}\right)^2 \times \left[1 - \sin\frac{\pi}{2}\frac{0,5-k}{0,5-n}\right]\right\}$	$C\left[n + \frac{1-2n}{\pi} \times \cos\frac{\pi}{2}\frac{0,5-k}{0,5-n}\right]$	$C\sin\frac{\pi}{2}\frac{0,5-k}{0,5-n}$
Стале прискорення (триділянкова симетрична тахограма) $C = \frac{1}{n(1-n)}$ 	3Пn*	0	n	$C\frac{k^2}{2}$	Ck	C
		n	0,5	$Cn\left(k - \frac{n}{2}\right)$	$\frac{1}{1-n}$	0
Стале прискорення (триділянкова несиметрична тахограма) $C_1 = \frac{2}{n(1+m)}$, $C_2 = \frac{2}{(1-n-m)(1+m)}$ 	3Пnm*	0	n	$C_1\frac{k^2}{2}$	C_1k	C_1
		n	$n+m$	$C_1n\left(k - \frac{n}{2}\right)$	$\frac{2}{1+m}$	0
		$n+m$	1	$1 - C_2\frac{(1-k)^2}{2}$	$C_2(1-k)$	$-C_2$
Косинусоїдне прискорення (триділянкова симетрична тахограма) 	3Кn*	0	n	$2nB\left(1 - \cos\frac{\pi k}{2n}\right)$	$B\sin\frac{\pi k}{2n}$	$C\cos\frac{\pi k}{2n}$
		n	0,5	$B\left(\frac{2n}{\pi} - n + k\right)$, де $B = \frac{\pi}{4n + \pi - 2n\pi}$	B	0, де $C = \frac{\pi B}{2n}$

Закінчення табл. 7.1

Назва закону і діаграма прискорень	Позначення	Межі для k		a_k	b_k	c_k
		від	до			
Прискорення, описане безперервною функцією типу $c_k = C[1-(2k)^u]$ 	$ОП_u$	0	0,5	$C\left[\frac{k^2}{2} - \frac{2^u k^{u+2}}{(u+1)(u+2)}\right]$, де $C = 4\frac{u^2+3u+2}{u^2+3u}$	$C\left[k - \frac{2^u k^{u+1}}{u+1}\right]$	$C[1-(2k)^u]$
В. Безударні закони при відсутності дальнього вистою						
Закон Стоддарта (степенева функція шостого степеня) 	$П_6$	0	1	$6{,}098k^3 - 20{,}780k^5 + 26{,}731k^6 - 13{,}610k^7 + 2{,}561k^8$	$18{,}294k^2 - 103{,}9k^4 + 160{,}386k^5 - 95{,}27k^6 + 20{,}488k^7$	$36{,}582k - 415{,}6k^3 + 801{,}93k^4 - 571{,}62k^5 + 143{,}416k^6$
Подвійний гармонійний закон 	ПГ*	0	1	$\frac{1}{2}(1-\cos\pi k) - \frac{1}{8}(1-\cos\pi k)$	$\frac{\pi}{2}\left(\sin\pi k - \frac{1}{2}\sin 2\pi k\right)$	$\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi k - \cos 2\pi k)$

Примітки. 1. Позначення законів руху прийнято за К. В. Тіром [74, 75], крім відмічених зіркою, які введені нами. 2. Якщо в таблиці вказані залежності для визначення інваріантів лише для періоду розбігу ($0 \le k \le 0{,}5$), то на ділянці вибігу їх можна визначити з умови симетрії: $a_k(k) = 1 - a_k(1-k)$, $b_k(k) = 1 - b_k(1-k)$, $c_k = -c_k(1-k)$. 3. Числові значення параметрів m, n, u, q в умовних позначеннях законів необхідно вказувати в сотих долях одиниці, крім: а) $mn(u)$ і $ОП_u$, для яких вказується дійсне значення степені параболи; б) для закону mnM – m вказується в тисячних долях одиниці (перші три цифри; останні дві цифри означають 0,5 — $2m$ в сотих долях).

Таблиця 7.2

ЗНАЧЕННЯ КОНСТАНТ ПІКІВ ШВИДКОСТІ, ПРИСКОРЕННЯ ТА КІНЕТИЧНОЇ ПОТУЖНОСТІ

Закон руху	*B*	*C*	*D*	Закон руху	*B*	*C*	*D*
ЗК10	1,078	16,94 !	9,13	$ОП_2$	1,600	4,80	3,99
ЗП10	1,111	11,11 !	12,35	0510	1,620	5,40	4,40
$С_{80}$	1,111	13,97	8,25	2,9	1,625	5,86	4,97
$ЗС_{10}$	1,111	17,45	12,60	ЗП40	1,667	4,17 !	6,94
$С_{60}$	1,250	11,36	5,05	$ОП_3$	1,667	4,56	4,41
$ЗС_{20}$	1,250	9,82	7,97	$С_{20}$	1,667	5,98	5,17
ЗС2050	1,330	10,47	9,07	$ЗС_{40}$	1,667	6,54	7,09
ЗП1060	1,250	12,50 !	15,58	ЗС1020	1,667	26,18	28,34
$ЗК_{40}$	1,410	5,54 !	3,90	0030	1,690	4,22 !	5,34
КС00	1,423	5,69 !	3,73	$ОП_5$	1,728	4,20 !	5,01
$С_{40}$	1,428	7,20	4,17	$П_6$	1,774	5,27	5,77
$ЗС_{30}$	1,429	7,48	6,94	0040	1,825	4,05 !	6,56
КС03	1,464	5,76	4,04	$ОП_{10}$	1,847	4,06 !	5,83
2,12	1,468	6,46	4,92	40М	1,868	4,03 !	6,58
0307 (1,5)	1,469	6,00	4,05	Ш	1,875	5,77	6,69
0312 (1,75)	1,479	5,63	4,42	0050	2,000	4,00	8,00
КС05	1,492	5,81	4,26	07535 М	2,000	4,49	8,15
0000	1,500	6,00 !	3,46	12525 М	2,000	4,89	8,12
$С_{33}$	1,500	6,52	4,25 !	17515 М	2,000	5,36	7,80
$РС_{40}$	1,500	7,50	4,33	$С_0$	2,000	6,28	8,15
$РС_{30}$	1,500	10,00	5,77	$СП_0$	2,000	6,00	8,00
0317 (1,75)	1,521	5,17	4,95	0540	2,000	4,44	8,40
0010	1,525	5,08 !	3,65	1030	2,000	5,00	8,75
0317 (1,5)	1,550	5,08	4,78	$СП_{40}$	2,000	5,00	10,00
$ОП_{1,5}$	1,555	5,19 !	3,78	$СП_{20}$	2,000	10,00	20,00
К	1,571	4,94 !	3,88	$СП_{30}$	2,000	6,67	13,33
КС10	1,570	5,95	4,88	$НС_{40}$	2,000	7,85	10,20
$К_{40}$	1,571	6,17	4,84	$НС_{30}$	2,000	10,47	13,60
$К_{30}$	1,571	8,22	6,46	ПГ	2,040	9,87	9,88
0020	1,591	4,44 !	4,55	5000	3,000	12,00	36,00

Примітки. 1. Знаком "!" позначено закони руху, які мають прискорення при $k = 0$ більші нуля, тобто рух штовхача супроводжується м'якими ударами. 2. Позначення законів руху наведено в табл. 7.1, класифікація законів — детальніше в [74, 75].

мо, як і при аналізі кулачкових механізмів, використовують метод оберненого руху.

При кінематичному синтезі кулачкових механізмів мають бути задані або вибрані з технологічних і конструктивних міркувань такі вихідні дані:

1) закон руху кулачка (як правило, вважають, що кулачок обертається рівномірно, тобто $\omega_1 = \text{const}$);

2) закон руху вихідної ланки (див. п. 7.6, 7.7);

3) максимальний хід штовхача S_{max} або максимальний кут розмаху коромисла β_{max};

4) фазові кути $\varphi_в$, $\varphi_{д.с}$, $\varphi_н$;

5) мінімальний радіус кулачка r_0;

6) радіус ролика $r_{рол}$;

7) інші розміри (ексцентриситет e, довжина коромисла $l_к$ тощо).

Задачу можна розв'язувати графічним або аналітичним способом. За допомогою аналітичних методів при використанні ЕОМ досить швидко і з високою точністю можна здійснити громіздкі обчислення параметрів кулачкових механізмів, підготовляючи необхідні дані для складання програм для верстатів з числовим програмним керуванням (ЧПК). Методика складання програм розрахунків кулачкових механізмів за допомогою ЕОМ розглядається в навчальних посібниках з курсового проектування з ТММ [10].

7.8.1. Центральний кулачковий механізм з роликовим штовхачем

Графічний спосіб. Побудова профілю кулачка здійснюється в такій послідовності (рис. 7.14).

1. З центра обертання кулачка A проводимо основне коло радіусом r_0.

2. З точки *0* перетину основного кола з лінією руху штовхача відкладаємо вгору максимальний хід штовхача S_{max}. У даному випадку S_{max} визначається в масштабі побудови μ_l відрізком *06′*.

3. Радіусом $r_{max} = A6'$ проводимо коло максимального радіуса теоретичного профілю.

4. Від лінії *A0* відкладаємо проти руху кулачка фазові кути: $\varphi_в = \angle 0A6$, $\varphi_{д.с} = \angle 0A7$, $\varphi_н = \angle 7A13$, $\varphi_{б.с} = \angle\ 13A0$.

5. Згідно із заданим законом руху штовхача будуємо в масштабі $\mu_s = \mu_l$ діаграму переміщень штовхача $s = s(\varphi)$. Для зручності побудови профілю кулачка бажано, щоб вісь абсцис φ проходила через точку *0*, яка визначає положення вістря штовхача на початку періоду віддалення. Тоді ординати *11′*, *22′*, *33′* і т. д. безпосередньо визначають положення вістря штовхача у відповідних положеннях кулачкового механізму (*01′*, *02′*, *03′* і т. д.). Залежно від необхідної точності побудови кулачка періоди віддалення і

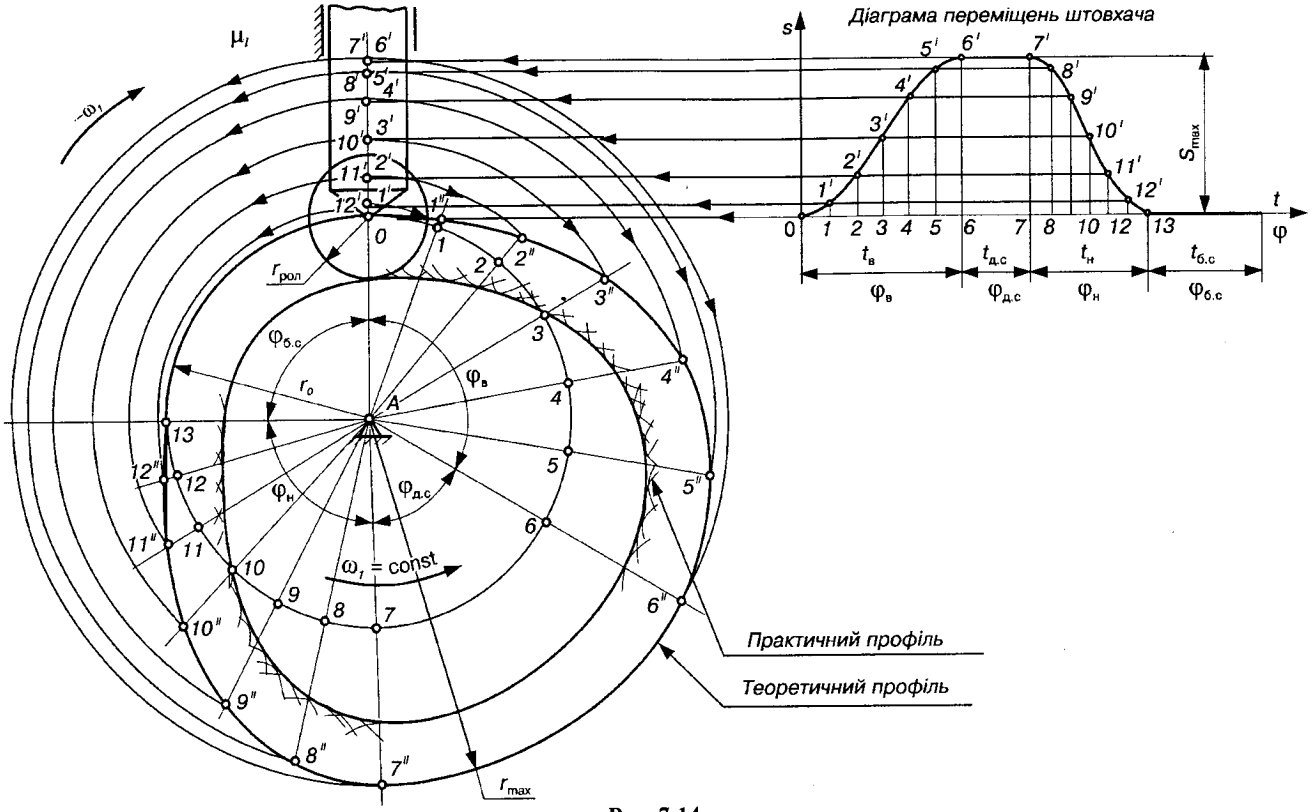

Діаграма переміщень штовхача
s
t
φ
S_{max}
$t_в$
$t_{д.с}$
$t_н$
$t_{б.с}$
$φ_в$
$φ_{д.с}$
$φ_н$
$φ_{б.с}$
$μ_l$
$-ω_1$
$r_{рол}$
r_o
r_{max}
A
$ω_1$ = const
Практичний профіль
Теоретичний профіль

Рис. 7.14.

наближення на діаграмі $s = s(\varphi)$ ділять на відповідну кількість проміжків часу (на рис. 7.14 ці періоди розділено на шість однакових частин).

6. Ділимо кути віддалення $\varphi_в$ і наближення $\varphi_н$ на таку кількість однакових частин, як і на діаграмі $s = s(\varphi)$. Через одержані точки *1*, *2*, *3* і т. д. проводимо промені, які в оберненому русі визначатимуть положення осі штовхача.

7. Знаючи дійсні положення вістря штовхача (точки *0*, *1′*, *2′* і т. д.), дуговими засічками з центра *A* обертання кулачка знаходимо відповідні положення вістря штовхача в оберненому русі (точки *0*, *1″*, *2″*, *3″* і т. д.). З'єднавши ці точки плавною кривою, одержимо теоретичний (центровий) профіль кулачка для періодів віддалення і наближення. Профілі кулачка для періодів дальнього і ближнього стояння будуються дугами кола відповідно радіусами r_{max} і r_0.

8. Для побудови практичного (дійсного) профілю кулачка з різних точок теоретичного профілю кулачка (чим більше точок, тим точніше побудуємо профіль) проводимо дуги кола радіусом ролика $r_{рол}$. Ці дуги показують положення ролика в оберненому русі. Тоді, провівши огинаючу дотичну криву до цих положень ролика, дістанемо практичний профіль кулачка. Для періодів вистою практичний профіль кулачка описується дугами кола, радіуси яких: $(r_{max} - r_{рол})$ — для періоду дальнього стояння і $(r_0 - r_{рол})$ — для періоду ближнього стояння.

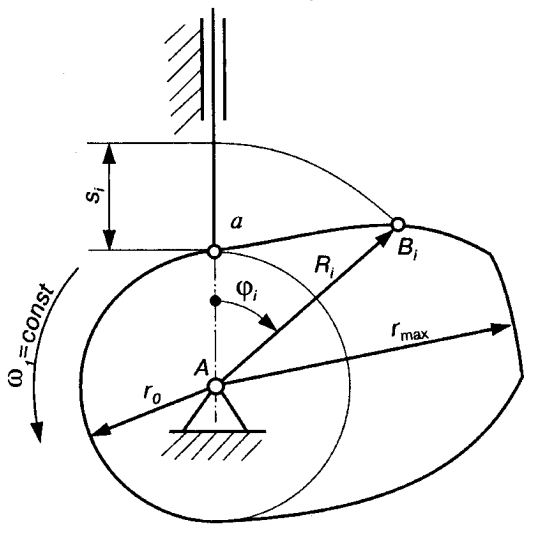


Рис. 7.15.

Аналітичний спосіб. Для побудови теоретичного профілю кулачка аналітичним способом необхідно визначити полярні координати точки *B* профілю кулачка (рис. 7.15), тобто радіус $R_i = AB_i$ і кут φ_i. Кут φ_i задають, а радіус R_i обчислюють за такою очевидною формулою:

$$R_i = r_0 + s_i, \quad (7.20)$$

де $s_i = a_{ki}S_{max}$ визначається законом руху

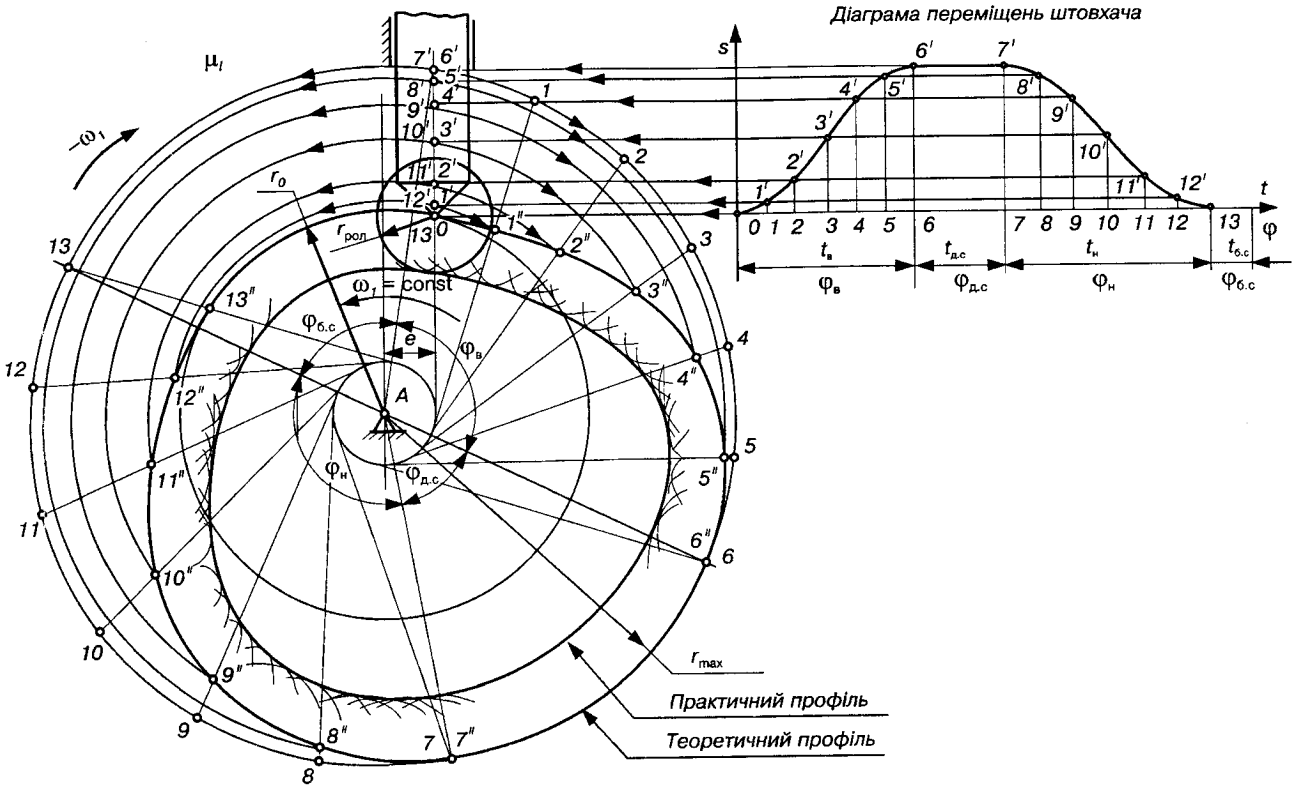

Діаграма переміщень штовхача
s
t
φ
$t_в$
$t_{д.с}$
$t_н$
$t_{б.с}$
$\varphi_в$
$\varphi_{д.с}$
$\varphi_н$
$\varphi_{б.с}$
μ_l
$-\omega_1$
r_0
$r_{рол}$
ω_1 = const
e
A
r_{max}
Практичний профіль
Теоретичний профіль

Рис. 7.16.

штовхача; для знаходження інваріантів переміщень використовують залежності, наведені в табл. 7.1.

При обробці профілю кулачка часто беруть радіус ріжучого інструмента (фрези чи шліфувального круга) таким, що дорівнює радіусу ролика. Тоді для виготовлення кулачка досить знати координати теоретичного (центрового) профілю кулачка. Якщо ж радіуси ролика та ріжучого інструмента не збігаються, то за звичайними правилами обчислення координат огинаючої кривої визначаємо траєкторію центра інструмента, яка знаходиться від центрового профілю на відстані, що дорівнює різниці радіуса ролика і інструмента.

7.8.2. Зміщений кулачковий механізм з роликовим штовхачем

Графічний спосіб. Послідовність побудови теоретичного профілю кулачка таких механізмів аналогічна. Різниця лише в тому, що:

1) лінія руху штовхача (рис. 7.16) зміщена відносно центра обертання кулачка на e, а тому всі положення штовхача в оберненому русі дотичні до кола радіуса e;

2) фазові кути треба відкладати від лінії $A6'$, оскільки вони не дорівнюють кутам профілю ($\varphi_в = \angle 6'A6''$, $\varphi_н = \angle 7A13$, а $\varphi'_в = \angle 0A6''$ і $\varphi''_н = \angle 7A13''$).

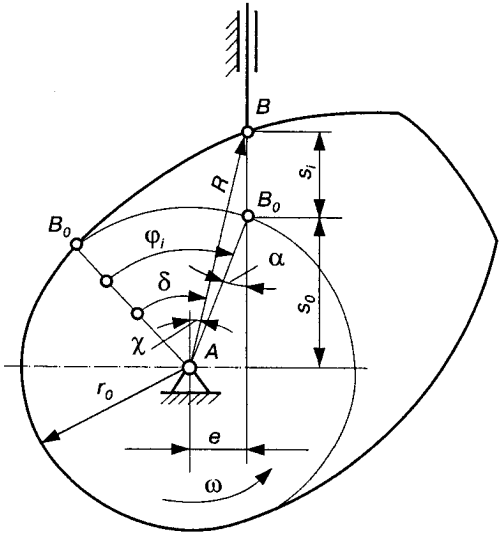


Рис. 7.17.

Аналітичний спосіб. Полярні координати теоретичного (центрового) профілю кулачка обчислюються за формулами, які випливають з рис. 7.17:

$$R = \sqrt{e^2 + (s_0 + s_i)^2}\ ; \quad (7.21)$$

$$\delta = \varphi_i - \alpha + \chi, \quad (7.22)$$

де

$$s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}\ , \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{e}{s_0},$$

$$\chi = \operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{R^2 - e^2}}\ .$$

Знак зміщення e вважається додатним, якщо

напрямок швидкості штовхача при його віддаленні утворює гострий кут з напрямком швидкості точки контакту на кулачку.

7.8.3. Кулачковий механізм з роликовим коромислом

Графічний спосіб. Побудова теоретичного (центрового) профілю такого механізму здійснюється, як і в попередніх випадках, на основі методу оберненого руху. Послідовність побудови така (рис. 7.18, *в*).

1. Будуємо ΔAC_0B_0, сторони якого задані ($l_{AB_0} = r_0$ — мінімальний радіус теоретичного профілю кулачка; l_{AC_0} — міжосьова відстань; $l_{B_0C_0} = l_к$ — довжина коромисла).

2. З центра A будуємо мінімальним радіусом r_0 основне коло, а радіусом AC_0 — траєкторію точки C в оберненому русі.

3. Від лінії AC_0 в протилежному напрямку обертання кулачка відкладаємо фазові кути руху коромисла: $\varphi_в = \angle C_0AC_6$, $\varphi_{д.с} = \angle C_6AC_7$, $\varphi_н = \angle C_7AC_{13}$, $\varphi_{б.с} = \angle C_{13}AC_0$.

4. Від лінії B_0C_0 відкладаємо максимальний кут розмаху β_{max} коромисла і проводимо траєкторію точки B у дійсному русі.

5. Розмічаємо дугу $\overset{\smile}{B_0C_6}$ відповідно до заданої діаграми кутових переміщень $\beta = \beta(\varphi)$ (рис. 7.18, *а*), тобто ділимо її на шість частин, пропорційно значенням кутів $\beta_1 = 11' \cdot \mu_\beta$, $\beta_2 = 22' \cdot \mu_\beta$, $\beta_3 = 33' \cdot \mu_\beta$ і т. д., де відрізки $11'$, $22'$, $33'$ і т. д. — ординати на діаграмі переміщень $\beta = \beta(\varphi)$; μ_β — масштаб, в якому відкладено на діаграмі $\beta = \beta(\varphi)$ кути повороту коромисла. Такий спосіб знаходження положення точки B досить незручний, оскільки, по-перше, треба обчислити всі кути β_i, а по-друге, малі кути важко відкладати.

Для спрощення розмітки траєкторії точки B зручно виконати таку побудову. На продовженні лінії C_0B_0 (рис. 7.18, *б*) беремо довільну точку K_0, через яку проводимо перпендикуляр до лінії B_0C_0. Відклавши кут β_{max}, продовжуємо лінію CB_6 до перетину з перпендикуляром, проведеним через точку K_0, і одержимо точку K_6.

На лінії K_0K_6 можна відкласти відрізки K_0K_i, які будуть пропорційні відповідним кутам повороту коромисла BC, оскільки $K_0K_i = CK_0\text{tg}\beta_i$, де $CK_0 = \text{const}$, $\beta_i = y_i\mu_\beta$, а y_i — ордината діаграми переміщень ($i = 0, 1, 2, ...$).

Промені CK_i зображують миттєві положення коромисла, які відповідають заданому закону руху, а точка перетину B_i цих про-

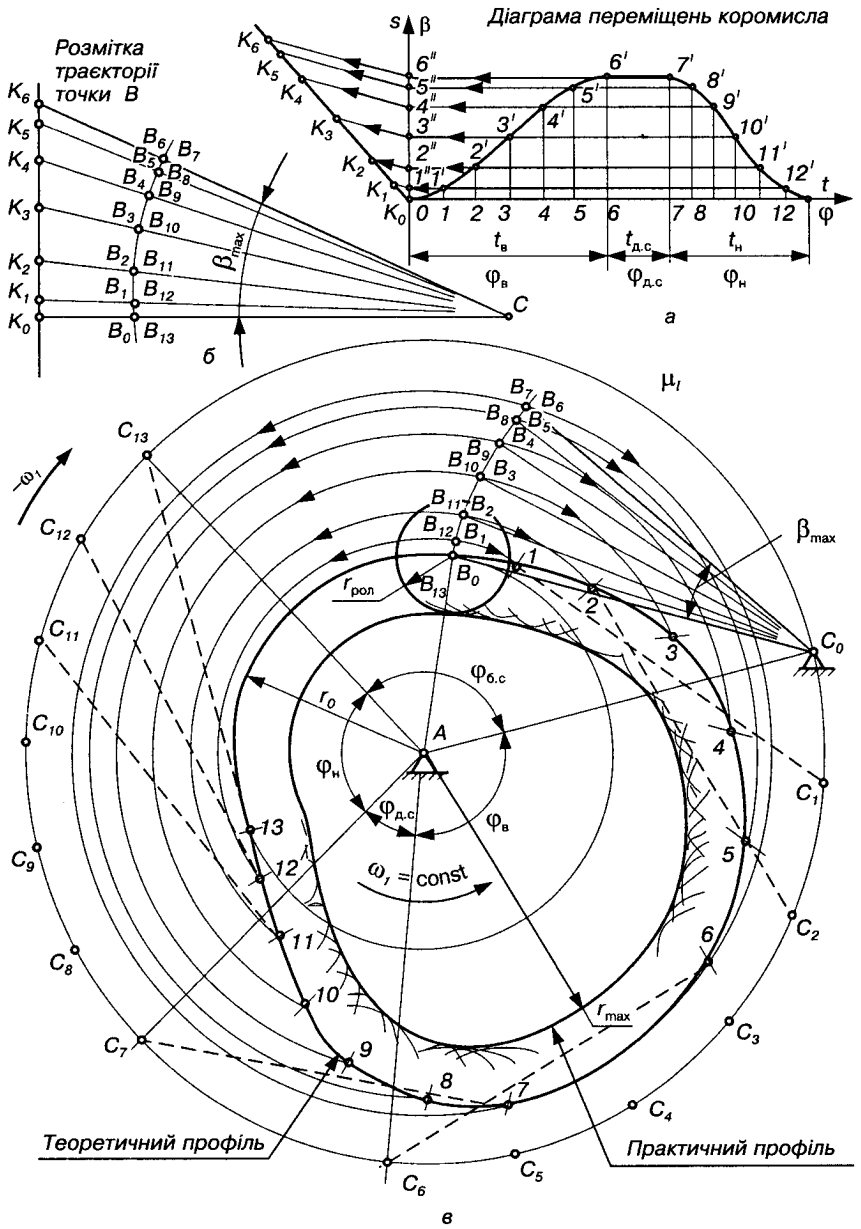

Розмітка траєкторії точки B
Діаграма переміщень коромисла
s
β
t
φ
$t_в$
$t_{д.с}$
$t_н$
$φ_в$
$φ_{д.с}$
$φ_н$
$β_{max}$
а
б
в
$μ_l$
$ω_1$
$r_{рол}$
r_0
r_{max}
$φ_{б.с}$
$ω_1 = const$
Теоретичний профіль
Практичний профіль

Рис. 7.18.

менів з дугою B_0B_6 визначають положення центра ролика. Довжину відрізків K_0K_i можна визначити також графічно методом пропорційного ділення, як це зображено на рис. 7.18, *а*.

6. Будуємо положення коромисла BC в оберненому русі. Для цього надаємо всьому кулачковому механізму кутову швидкість $(-\omega_1)$, при цьому кулачок стане нерухомим, а коромисло BC разом із стояком буде обертатися навколо кулачка. Щоб знайти положення коромисла в цьому русі, ділимо кути віддалення і наближення на стільки частин, на скільки вони поділені на діаграмі $\beta = \beta(\varphi)$ (на рис. 7.18, *в* поділено на шість частин кожний). Центр обертання коромисла в оберненому русі займатиме відповідно положення C_1, C_2, C_3 і т. д.

7. Знаходимо положення центра ролика B в оберненому русі методом засічок, оскільки відстані від точки B до центрів обертання кулачка і коромисла визначаються відповідно відрізками AB_i і B_iC_i = const. Отже, з центра обертання кулачка A проводи-

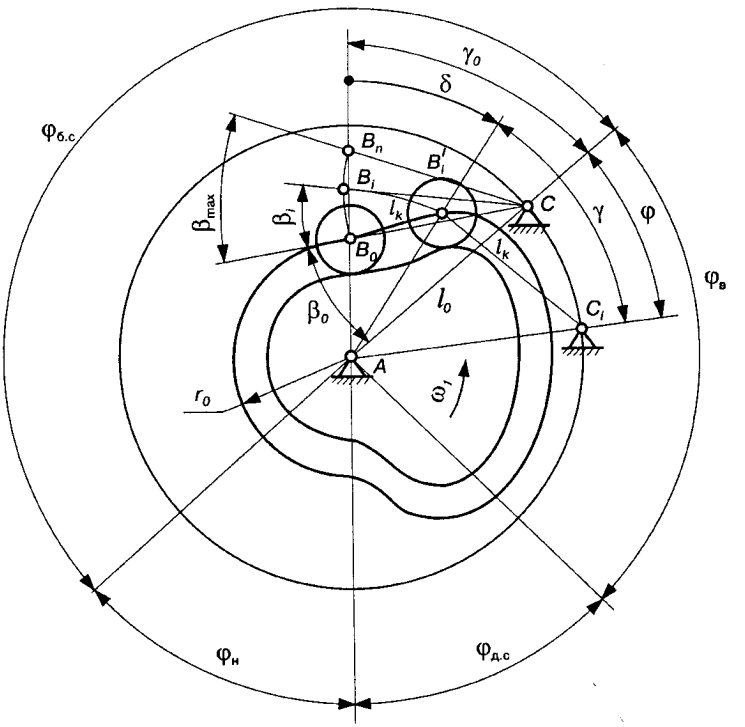


Рис. 7.19.

мо дугу, наприклад, радіусом AB_1, а з точки C_1 — дугу радіусом $C_1 1 = BC$. Тоді точка *1* визначатиме положення центра ролика *B* у першому положенні оберненого руху. Аналогічно знаходимо положення точки *B* в інших положеннях механізму. Деякі положення коромисла в оберненому русі зображені штриховими лініями. Максимальний радіус r_{max} центрового профілю кулачка визначається радіусом AB_6.

8. Так само, як і раніше, будуємо практичний профіль кулачка, побудувавши положення ролика в оберненому русі.

Аналітичний спосіб. Полярні координати центрового профілю кулачка (рис. 7.19) обчислюються за формулами

$$\delta = \varphi_i \pm (\gamma_0 - \gamma); \tag{7.23}$$

$$R = AB_i' = \sqrt{l_к^2 + l_0^2 - 2l_к l_0 \cos(\beta_0 + \beta_i)}, \tag{7.24}$$

де $\beta_0 = \arccos\dfrac{l_к^2 + l_0^2 - r_0^2}{2l_к l_0}$; $\gamma_0 = \arccos\dfrac{r_0^2 + l_0^2 - l_к^2}{2r_0 l_0}$;

$\gamma = \arccos\dfrac{R^2 + l_0^2 - l_к^2}{2Rl_0}$.

У формулі (7.23) береться знак "+", якщо на фазі віддалення напрямки обертання кулачка й коромисла протилежні, а знак "–", якщо ці напрямки однакові.

7.8.4. Кулачковий механізм з плоским штовхачем

Графічний спосіб. При побудові профілю кулачка використовується метод оберненого руху. Послідовність побудови така (рис. 7.20).

1. Радіусом r_0 будуємо основне коло.

2. Від точки *0′* відкладаємо максимальний хід штовхача S_{max}.

3. Від лінії *A0′* в протилежний бік обертання кулачка відкладаємо фазові кути $\varphi_в$, $\varphi_{д.с}$, $\varphi_н$.

4. Ділимо кути $\varphi_в$ і $\varphi_н$ на кілька частин відповідно до заданої діаграми $s = s(\varphi)$; одержуємо точки *1*, *2*, *3* і т. д., які будуть визначати положення осі штовхача в оберненому русі. Відзначимо, що положення напрямку руху штовхача може не збігатися з лінією *A0′*, проте це не впливає на положення площини тарілки штовхача. При русі площина тарілки штовхача в будь-якому положенні повинна торкатися профілю кулачка. Отже, відстань від центра кулачка до площини тарілки визначається відстанню

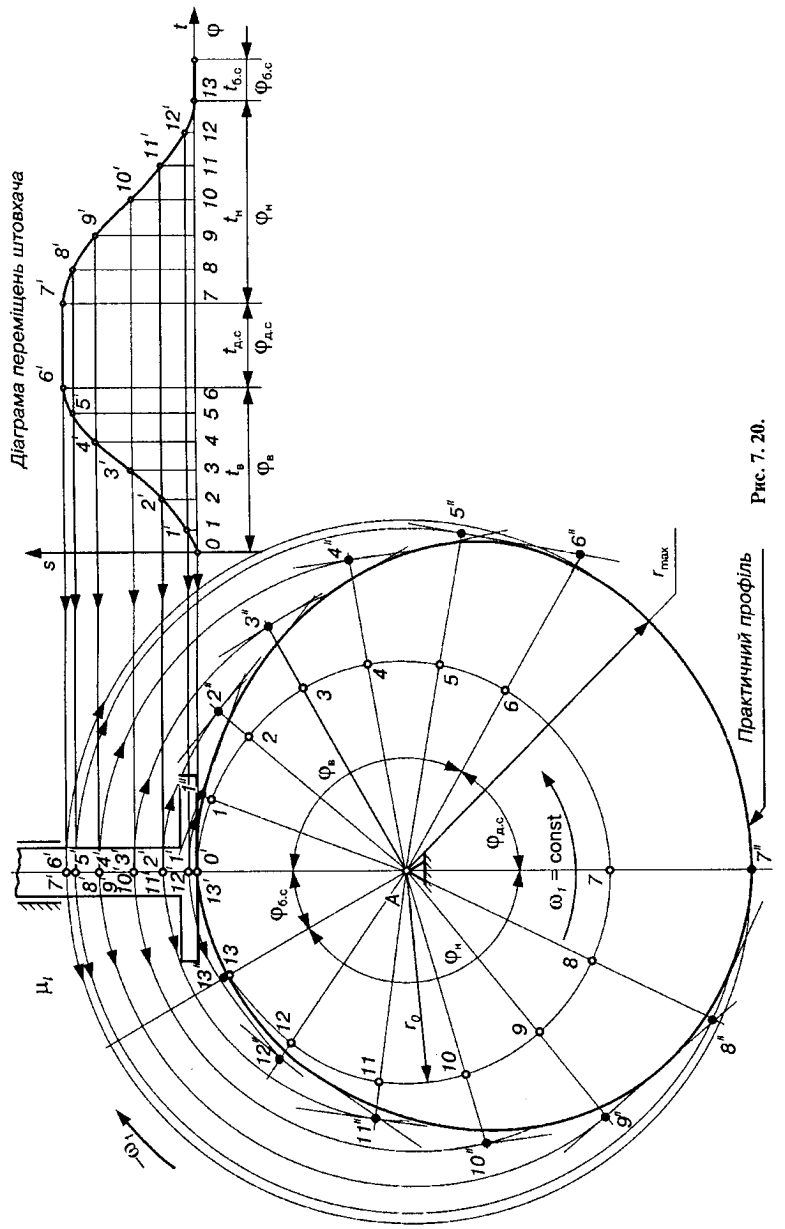

Діаграма переміщень штовхача
Практичний профіль
$\omega_1 = \text{const}$
ω_1
μ_l
r_0
r_{max}
$\varphi_в$
$\varphi_{д.с}$
$\varphi_{б.с}$
$\varphi_н$
$t_в$
$t_{д.с}$
$t_{б.с}$
$t_н$
A

Рис. 7.20.

$r_0 + s_i$, де s_i — переміщення тарілки штовхача. Сам же штовхач матиме переміщення $s_{ui} = s_i/\sin\gamma$ (рис. 7.21). Така сама картина має місце і в оберненому русі. Звідси випливає подальше розв'язування задачі.

5. Радіусами $A1'$, $A2'$, $A3'$ і т. д. з центра обертання кулачка проводимо дуги до перетину з променями $A1$, $A2$, $A3$ і т. д., одержимо точки $1''$, $2''$, $3''$ і т. д., які показують віддалення площини тарілки від центра кулачка в оберненому русі.

6. Через одержані точки $1''$, $2''$, $3''$ і т. д. проводимо перпендикуляри відповідно до променів $A1''$, $A2''$, $A3''$ і т. д. Ці перпендикуляри визначають положення площини тарілки в оберненому русі. Огинаюча дотична крива до цих положень тарілки і буде практичним профілем кулачка.

Аналітичний спосіб. Для знаходження координат профілю кулачка побудуємо повернутий на 90° план швидкостей механізму (рис. 7.21), вибравши відрізок pb_1, який дорівнює радіусу $R = AB$. Цей відрізок зображує швидкість точки B_1, що належить кулачку *1* і в даний момент збігається з точкою B. Тоді масштаб плану швидкостей визначається

$$\mu_l = \frac{v_{B_1}}{R} = \frac{\omega_1 l_{AB}}{R} = \frac{\omega_1 R \mu_l}{R} = \omega_1 \mu_l, \qquad (7.25)$$

де $\mu_l = l_{AB} / R$ — масштаб побудови схеми механізму (масштаб довжини).

Для знаходження швидкості точки B_2, яка належить площині тарілки *2* і в даний момент збігається з точкою B, запишемо векторне рівняння

$$\boldsymbol{v}_{B_2} = \boldsymbol{v}_{B_1} + \boldsymbol{v}_{B_2B_1}.$$

Відносна швидкість $\boldsymbol{v}_{B_2B_1}$ у дійсному русі направлена вздовж площини тарілки (лінії BC), абсолютна швидкість $\boldsymbol{v}_{B_2B_1}$ — перпендикулярно до BC, а тому на повернутому плані вони будуть відповідно направлені: $\boldsymbol{v}_{B_2B_1} \perp BC, \boldsymbol{v}_{B_2} \| BC$. Отже, трикутник pb_1b_2, який дорівнює трикутнику ABC, повернутий на 90°, є планом швидкостей механізму. Відрізок $b_1b_2 = AC$ зображує в масштабі μ_v вектор відносної швидкості $v_{B_2B_1} = (b_1b_2)\mu_v$, а відрізок pb_2 — вектор абсолютної швидкості штовхача

$$v_{B_2} = (pb_2)\mu_v = (pb_2)\omega_1\mu_l. \qquad (7.26)$$

У масштабі довжини μ_l відрізок pb_2 визначає величину аналога швидкості цієї точки (штовхача), оскільки з (7.26) маємо

$$pb_2 = \frac{v_{B_2}}{\omega_1 \mu_l} = \frac{ds_{B_2}}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi}\frac{1}{\mu_l} = \frac{s_i'}{\mu_l}, \qquad (7.27)$$

де $v_{B_2} = ds_2 / dt; \omega_1 = d\varphi / dt; s_i' = ds_{B_2} / d\varphi$.

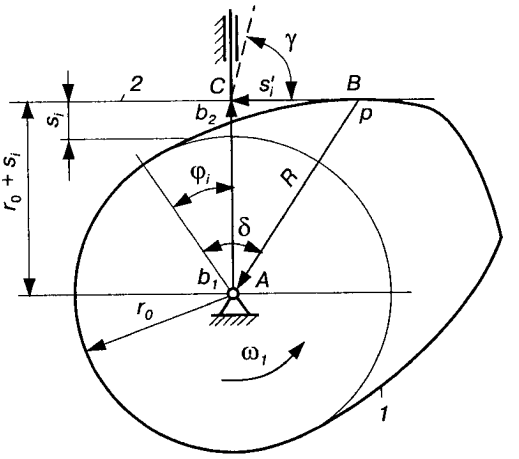


Рис. 7.21.

З трикутника ABC можна знайти полярні координати точки B профілю кулачка:

$$R = \sqrt{(r_0 + s_i)^2 + (s_i')^2}, \quad \delta = \varphi_i + \arcsin(s_i' / R), \qquad (7.28)$$

де φ_i — кут, який визначає відповідне положення осі AC штовхача в оберненому русі; s_i' — аналог швидкостей штовхача в цьому положенні.

Як видно з рис. 7.21, точка B контакту площини тарілки і кулачка під час руху змінює своє положення. Очевидно, що найбільше значення відрізка BC визначатиме мінімальний радіус тарілки, а оскільки відрізок $BC = pb_2 = s_i' / \mu_l$, то діаметр $d_т$ або довжина $l_т$ тарілки мають бути більшими подвійного максимального зміщення точки контакту від осі штовхача, тобто

$$d_т = 2l_{BC_{max}} = 2\left|BC \cdot \mu_l\right|_{max} = 2\left|s_i'\right|_{max}. \qquad (7.29)$$

7.8.5. Просторові кулачкові механізми

У даному пункті розглянемо тільки такі типи просторових кулачкових механізмів, які найчастіше зустрічаються в сучасному машинобудуванні.

Задачу проектування центрового профілю кулачка розв'язують за допомогою його розгортки, використовуючи метод оберненого руху. Почнемо з розгляду механізму, в якому кулачок має вигляд барабана з пазом (рис. 7.22, *г*) і здійснює обертовий

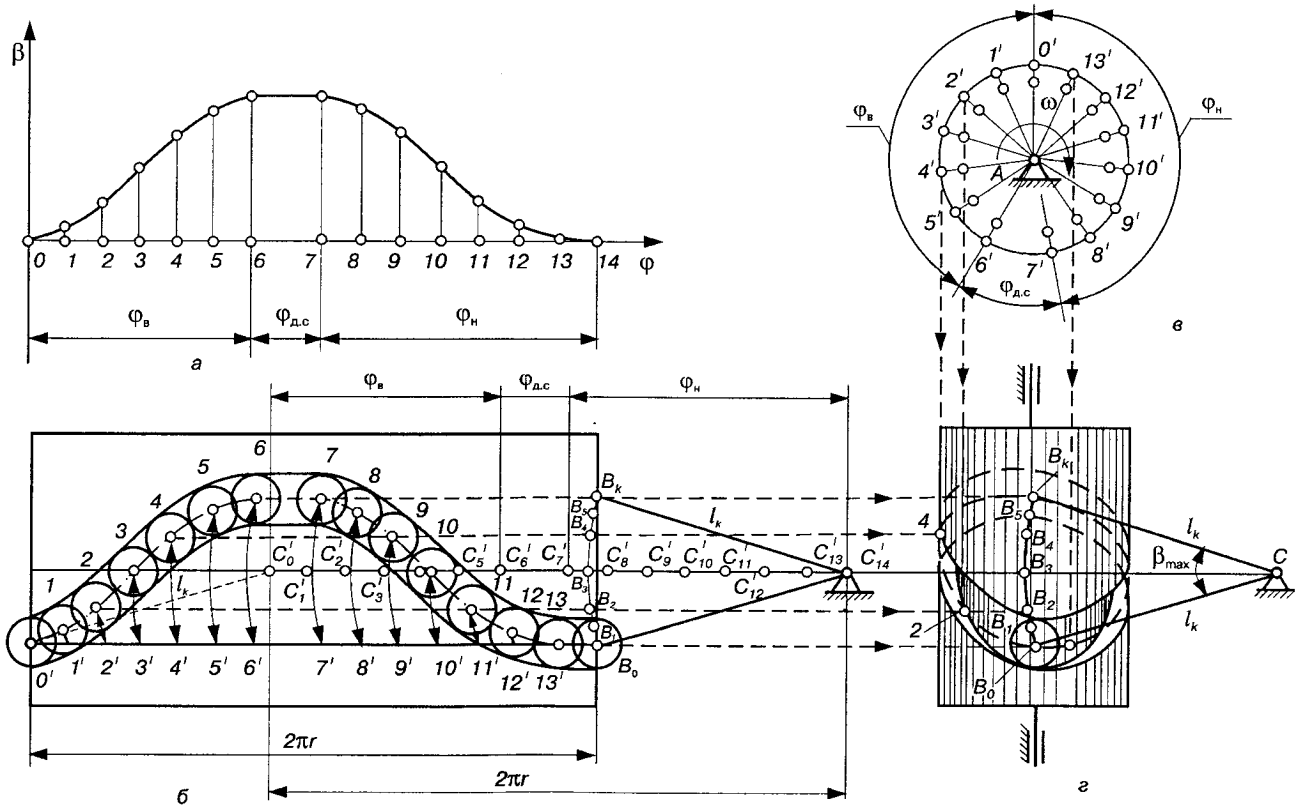


Рис. 7.22.

рух із сталою кутовою швидкістю (ω_1 = const), а вихідна ланка (коромисло *BC*) здійснює коливальний рух, закон руху якої заданий діаграмою переміщень $\beta = \beta(\varphi)$ (рис. 7.22, *а*). Послідовність побудови профілю кулачка така.

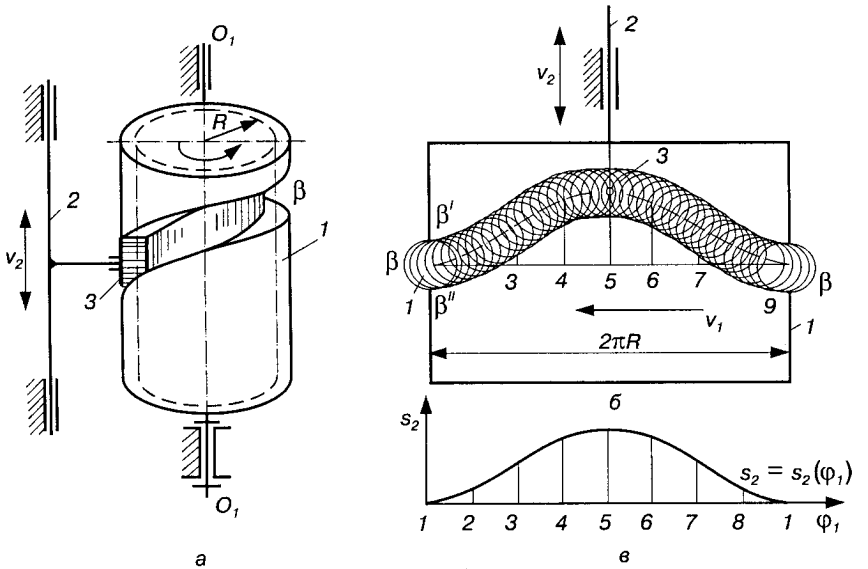


Рис. 7.23.

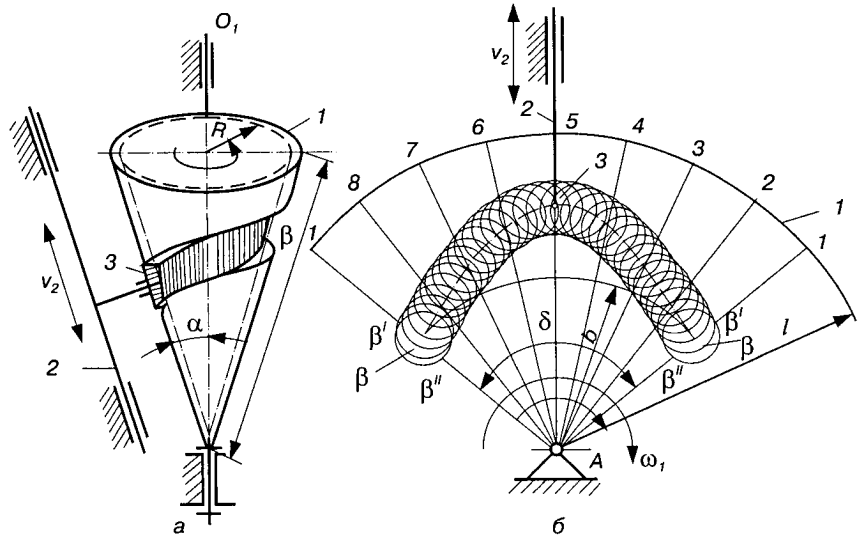


Рис. 7.24.

1. Згідно із заданим законом руху коромисла розмічаємо траєкторію точки B (рис. 7.22, *б*), як це показано на рис. 7.18, *а, б.*

2. Будуємо розгортку циліндричного колеса (рис. 7.22, *б*), довжина якої дорівнює $2\pi r$, де r — середній радіус паза циліндричного кулачка.

3. Використовуючи метод оберненого руху до розгортки кулачка, вважаємо її нерухомою, а центр шарніра C буде рухатися в зворотному напрямку колової швидкості кулачка. Повна довжина траєкторії точки C в оберненому русі також дорівнюватиме $2\pi r$. Цю траєкторію ділять подібно до того, як була розбита вісь абсцис діаграми переміщень $\beta = \beta(\varphi)$. Одержуємо на лінії, що проходить через центр обертання коромисла C, точки C'_0, C'_1, C'_2 і т. д.

4. Знаходимо положення центра ролика B на розгортці кулачка. Для цього через точки B_0, B_1, B_2 і т. д. проводимо лінії, паралельні осі абсцис розгортки, а з точок C'_0, C'_1, C'_2 і т. д. — дугові засічки радіусом $l_к = l_{BC}$ на відповідних лініях, що проходять через точки B_0, B_1, B_2 і т. д. З'єднавши плавною кривою одержані точки *0, 1, 2, 3* і т. д., побудуємо центровий профіль кулачка. Для періодів вистою центровий профіль на розгортці буде паралельний осі абсцис розгортки.

Побудова пазу на розгортці циліндричного кулачка при вибраному радіусі ролика виконується звичайним способом (рис. 7.22, *б*). Загальна побудова пазу на циліндричній поверхні здійснюється методом проекцій (рис. 7.22, *в*).

Для циліндричного (рис. 7.23) і конічного (рис. 7.24) кулачків з поступальним рухом вихідної ланки діаграма лінійних переміщень $s = s(\varphi)$ (рис. 7.23, *в*) характеризує розгортку профілю кулачка.

7.9. Кути тиску і передачі, коефіцієнти зростання сил і корисної дії

При проектуванні механізмів треба враховувати можливість їх руху під дією прикладених сил з можливо більшим ККД. Використання цих умов значною мірою залежить від вибраних розмірів та форм ланок механізму. Працездатність кулачкового механізму залежить від мінімального радіуса кулачка. Так, при досить малому радіусі r_0 кулачка може настати заклинювання штовхача в напрямній або на кулачку. Це пояснюється невигідними співвідношеннями

сил, що діють між кулачком і штовхачем. При іншій крайності, тобто при занадто великих розмірах кулачка, може цього не бути, але весь механізм матиме більші габарити і вагу, ніж це викликається необхідністю. Тому слід у всіх випадках поєднувати кінематичний синтез механізмів з динамічним, тобто з урахуванням сил, що діють на ланки.

Розглянемо кулачковий механізм із загостреним штовхачем (рис. 7.25, *а*). Якщо не враховувати тертя у вищій парі *B*, то під час роботи з боку кулачка *1* на штовхач *2* діє сила (реакція) $\boldsymbol{R}_{21}$, яка буде збігатися з нормаллю *n—n*, проведеною до профілю кулачка в точці *B*. Ця сила має подолати всі зовнішні сили $\boldsymbol{F}_\Sigma$, що діють на штовхач, включаючи сили тертя, які виникають у напрямних штовхача. Розкладемо силу $\boldsymbol{R}_{21}$ на дві складові: $\boldsymbol{R}'_{21}$ — напрямлену вздовж осі штовхача, $\boldsymbol{R}''_{21}$ — перпендикулярно до цієї осі. Складова $\boldsymbol{R}'_{21}$ приводить штовхач у рух, складова $\boldsymbol{R}''_{21}$ відхиляє штовхач від його осі і притискає до напрямних, викликаючи сили тертя F_{f_C} і F_{f_D}, які будуть також напрямлені проти руху штовхача.

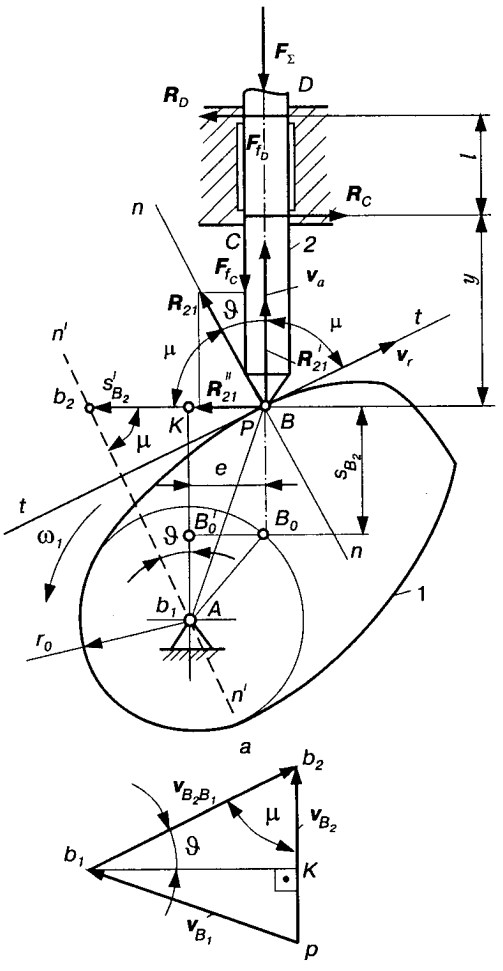


Рис. 7.25.

Як відомо, робота рушійної сили $F_р$ на деякому шляху s_i становитиме

$$A = \int_0^3 F_p ds_i \cos\vartheta, \qquad (7.30)$$

де ϑ — кут між напрямком сили F_p і напрямком переміщення точки прикладання цієї сили.

З рівняння (7.30) випливає, що чим менший кут ϑ, тим більша робота виконується силою $F_p = R_{21}$, яка, очевидно, буде максимальною при $\vartheta = 0$. Звичайно, в механізмах кут ϑ не дорівнює нулю, внаслідок чого тільки одна складова $R'_{21} = R_{21}\cos\vartheta$ використовується для надання руху штовхачу. При великих значеннях кута ϑ друга складова $R''_{21} = R_{21}\sin\vartheta$ може викликати такі сили тертя в напрямній, що настане заклинювання.

Гострий кут ϑ між напрямком дії сили і напрямком переміщення штовхача називають ***кутом тиску.*** Для забезпечення нормальної роботи кулачкового механізму необхідно, щоб кут тиску в будь-якому положенні механізму був меншим допустимого значення $\upsilon_{доп}$, тобто витримувалась умова

$$\vartheta_{max} \le \vartheta_{доп}. \qquad (7.31)$$

Дуже часто користуються іншим поняттям — ***кутом передачі руху***, або просто ***кутом передачі***. В кулачкових механізмах під ***кутом передачі*** μ розуміють гострий кут між напрямком абсолютної v_a і відносної v_r швидкості штовхача. Абсолютна швидкість штовхача напрямлена вздовж лінії його руху, відносна — по дотичній *tt*, що проведена до профілю кулачка в точці дотику *B*. Легко переконатися, що цей кут μ дорівнює куту, який утворюють між собою сила R_{21} та її складова R''_{21}. Отже, кут передачі

$$\mu = 90° - \vartheta, \qquad (7.32)$$

оскільки $\mu + \vartheta = 90°$ (див. рис. 7.25, *а*).

Для виведення залежності кута тиску ϑ від геометричних параметрів кулачкового механізму побудуємо повернутий на 90° у бік обертання кулачка план швидкостей механізму в заданому положенні. Швидкість точки B_1, яка належить кулачку *1* і в даний момент збігається з точкою *B*, обчислюється за формулою $v_{B_1} = \omega_1 l_{AB}$ і напрямлена перпендикулярно до радіуса *AB*. Швидкість точки B_2, яка належить штовхачу *2* і в даний момент

також збігається з точкою B, напрямлена вздовж осі штовхача і визначається з такого векторного рівняння:

$$\boldsymbol{v}_{B_2} = \boldsymbol{v}_{B_1} + \boldsymbol{v}_{B_2B_1}, \tag{7.33}$$

де $\boldsymbol{v}_{B_2B_1}$ — відносна швидкість вістря штовхача відносно профілю кулачка, напрямлена вздовж дотичної $t—t$.

Повернутий план швидкостей будуємо безпосередньо на схемі механізму (рис. 7.25, *а*), сумістивши полюс плану p з точкою B, а точку b_1 плану — з центром обертання кулачка A (дійсний план швидкостей зображено на рис. 7.25, *б*). Тоді масштаб плану швидкостей визначається за формулою

$$\mu_v = \frac{v_{B_1}}{pb_1} = \frac{\omega_1 l_{AB}}{AB} = \frac{\omega_1 (AB)\mu_l}{AB} = \omega_1 \mu_l,$$

де μ_l — масштаб довжини; ω_1 — кутова швидкість кулачка.

З точки b_1 проводимо напрямок вектора $\boldsymbol{v}_{B_2B_1}$ (на повернутому плані паралельно нормалі $n—n$) до перетину з повернутим напрямком швидкості $\boldsymbol{v}_{B_2}$. Одержаний відрізок pb_2 дає величину швидкості $v_{B_2} = (pb_2)\mu_v$. Підставляючи в цю формулу значення масштабу μ_v і враховуючи, що

$$v_{s_2} = \frac{ds_{B_2}}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = s'_{B_2}\omega_1,$$

де $s'_{B_2} = ds_{B_2} / d\varphi$ — аналог швидкості штовхача, одержуємо $pb_2 = s'_{B_2} / \mu_l$, тобто відрізок pb_2 в масштабі схеми механізму зображує аналог швидкості.

З трикутника $b_1Kb_2 (\angle Kb_1b_2 = \vartheta)$ маємо

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{Kb_2}{Kb_1} = \frac{Bb_2 - BK}{AB'_0 + BB_0}, \tag{7.34}$$

де в масштабі рисунка відрізки: $Bb_2 = pb_2$ зображають аналог швидкості точки B_2; $BK = e / \mu_l$ — найменшу відстань від осі A кулачка до осі штовхача; $AB'_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2} / \mu_l$, $BB_0 = s_{B_2} / \mu_l$ — переміщення штовхача *2*, яке задається його законом руху.

Підставляючи вказані параметри в рівняння (7.34), дістанемо

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{s'_{B_2} \pm e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_{B_2}}. \qquad (7.35)$$

Знак "+" перед ексцентриситетом e відповідає лівому його розташуванню від осі A, знак "—" — правому (рис. 7.25, *а*) при умові, що штовхач рухається вгору, а кулачок обертається проти годинникової стрілки.

Отже, для визначення кута тиску ϑ графічним способом необхідно у відповідних положеннях вістря штовхача (або центра ролика) побудувати в масштабі схеми μ_l повернутий на 90° вектор аналога швидкості штовхача і його кінець b_2 з'єднати з центром обертання кулачка A. Тоді кут між лінією Ab_2 і віссю штовхача визначає кут тиску ϑ.

З рівності (7.35) випливає, що при вибраному законі руху штовхача і розмірі e габарити кулачка визначаються мінімальним радіусом r_0. Збільшуючи r_0, одержуємо менші кути тиску ϑ, але більші габарити кулачкового механізму. І навпаки, якщо зменшувати r_0, то зростають кути тиску ϑ.

Якщо вісь штовхача проходить через вісь обертання кулачка ($e = 0$), то рівність (7.35) набуває вигляду

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{s'_{B_2}}{r_0 + s_{B_2}}. \qquad (7.36)$$

Для оцінки впливу кута тиску на умови передачі сил у кулачкових механізмах Л. М. Решетов [62] запропонував так званий ***коефіцієнт зростання сил,*** який виражається відношенням реакції $\boldsymbol{R}_{21}$ до сумарного навантаження на штовхач $\boldsymbol{F}_\Sigma$, тобто

$$\nu_F = \boldsymbol{R}_{21} / \boldsymbol{F}_\Sigma, \qquad (7.37)$$

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_{\text{к.о}} + \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{F}_{\text{п}} + \boldsymbol{F}_{\text{ін}2}. \qquad (7.38)$$

У рівняння (7.38) входять: $\boldsymbol{F}_{\text{к.о}}$ — сила корисного опору; $\boldsymbol{G}_2$ — вага штовхача; $\boldsymbol{F}_{\text{п}}$ — сила пружності пружини (при силовому замиканні); $\boldsymbol{F}_{\text{ін}2}$ — сила інерції штовхача.

Реакцію кулачка на штовхач можна визначити, склавши рівняння рівноваги штовхача (рис. 7.25):

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = R_C - R_D - R_{21}\sin\vartheta = 0; \sum_{i=1}^{n} F_y = R_{21}\cos\vartheta - F_{f_C} - F_{f_D} - F_\Sigma = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(F_i) = -R_C y + R_D(y + l) + fF_{f_C}\frac{d}{2} - fF_{f_D}\frac{d}{2} = 0, \qquad (7.39)$$

де R_C, R_D — реакції з боку напрямної на штовхач відповідно в точках C і D; F_{f_C}, F_{f_D} — сили тертя відповідно від реакцій R_C і R_D; d — діаметр (або ширина) штовхача; y — консольний виліт штовхача; l — відстань між точками контакту штовхача з напрямними.

Розв'язуючи сумісно два перших рівняння системи (7.39) відносно R_C і R_D, одержуємо

$$R_C = (R_{21}\cos\vartheta - fR_{21}\sin\vartheta - F_\Sigma)/(2f);$$

$$R_D = (R_{21}\cos\vartheta + fR_{21}\sin\vartheta - F_\Sigma)/(2f).$$

Підставляючи вирази R_C і R_D в третє рівняння системи (7.39) і розв'язуючи одержану після цього рівність відносно R_{21}, маємо

$$R_{21} = \frac{F_\Sigma}{\cos\vartheta + f\left(1 + \dfrac{2y - fd}{l}\right)\sin\vartheta}. \qquad (7.40)$$

Співвідношення (7.40) встановлює залежність рушійної сили R_{21} від сили опору F_Σ, яка прикладена до повзуна. В практичних розрахунках можна в залежності (7.40) знехтувати членом fd, оскільки він значно менший від члена $2y$. Отже, остаточно маємо

$$R_{21} = \frac{F_\Sigma}{\cos\vartheta + f(1 + 2y/l)\sin\vartheta}. \qquad (7.41)$$

Миттєвий коефіцієнт корисної дії η механізму без урахування тертя у вищій парі і підшипниках вала кулачка можна визначити за формулою

$$\eta = 1 - \frac{P_f}{P_p}, \qquad (7.42)$$

де P_f — потужність, яка витрачається на перемагання сил тертя; P_p — потужність рушійних сил, $P_p = R_{21}v_{B_2}\cos\vartheta$.

Для визначення потужності P_f використаємо друге рівняння системи (7.39), згідно з яким, врахувавши (7.41), запишемо

$$F_f = F_{f_C} + F_{f_D} = R_{21}\cos\vartheta - F_\Sigma = fR_{21}\sin\vartheta\left(1 - \frac{2y}{l}\right). \qquad (7.43)$$

Тоді

$$\eta = 1 - \frac{F_f v_{B_2}}{R_{21} v_{B_2} \cos\vartheta} = 1 - f\ \mathrm{tg}\vartheta\left(1 + 2\frac{y}{l}\right). \qquad (7.44)$$

З рівності (7.44) видно, що ККД зменшується із збільшенням кута тиску ϑ. Кулачковий механізм заклиниться, якщо сила $R'_{21} = R_{21}\cos\vartheta$ (рис. 7.25, *а*) буде менша від сили тертя $F_f = F_{f_C} + F_{f_D}$. Тоді ККД механізму буде дорівнювати нулю. У цьому випадку з рівності (7.44) одержимо

$$\mathrm{tg}\vartheta_к = \frac{1}{f(1 + 2y/l)}, \qquad (7.45)$$

де $\vartheta_к$ — критичний кут тиску, при якому виникає заклинювання механізму.

З рівності (7.45) випливає, що критичний кут тиску $\vartheta_к$ зменшується із збільшенням відстані y, тобто із збільшенням розмірів кулачкового механізму.

Треба мати на увазі, що заклинювання механізму звичайно є тільки на фазі віддалення, коли, як правило, діють сили корисного опору, сили інерції і сили пружності пружини. На фазі наближення явище заклинювання не виникає.

Для усунення можливості заклинювання механізмів при проектуванні закладають умову, щоб кут тиску ϑ у всіх положеннях механізму був меншим від критичного кута $\vartheta_к$. Якщо максимально допустимий кут тиску позначити через $\vartheta_{доп}$, то цей кут повинен завжди задовольняти умову

$$\vartheta_{доп} < \vartheta_к. \qquad (7.46)$$

На практиці для допустимого кута тиску $\vartheta_{доп}$ для кулачкових механізмів з штовхачем покладають $\vartheta_{доп} = 30 - 40°$, для коромислових — $\vartheta_{доп} = 45 - 50°$. Методика більш точного визначення $\vartheta_{доп}$ наводиться в спеціальній літературі [43, 59, 74, 75].

7.10. Динамічний синтез кулачкових механізмів

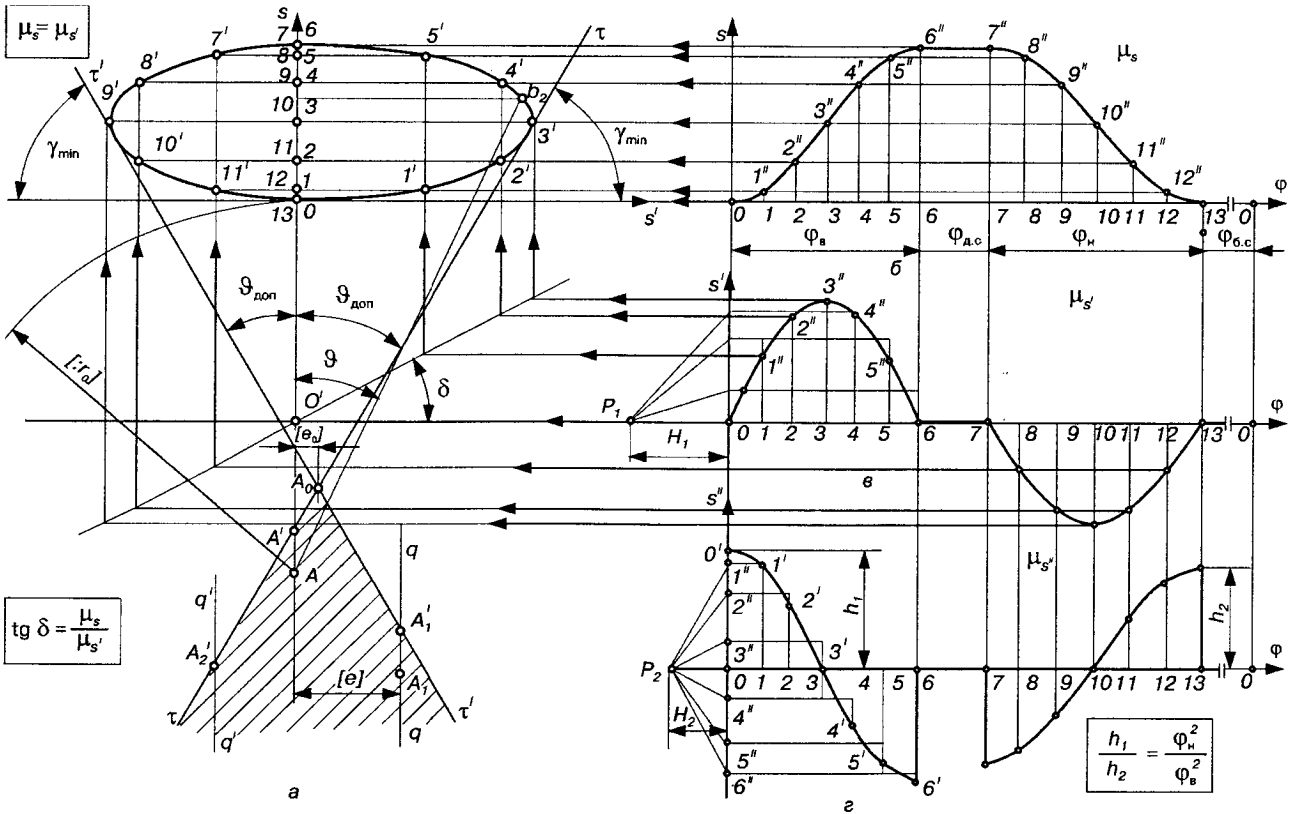
Основною задачею динамічного синтезу кулачкових механізмів є визначення мінімального радіуса кулачка. Розглянемо методику динамічного синтезу для найбільш розповсюджених кулачкових механізмів.

7.10.1. Кулачковий механізм із загостреним або роликовим штовхачем

Як видно із формул (7.35) і (7.36), для усунення заклинювання в кулачкових механізмах необхідно забезпечити відповідну залежність між їх геометричними і кінематичними параметрами. Такими параметрами, з одного боку, є мінімальний радіус кулачка r_0 і зміщення e; з іншого — переміщення s_{B_2}, аналоги швидкостей s'_{B_2} штовхача та кути тиску ϑ. Останні три параметри (s_{B_2}, s'_{B_2}, $\vartheta_{\text{доп}}$), як правило, визначаються за технологічними умовами роботи кулачкового механізму і за вибраним законом руху штовхача, а тому для забезпечення умови (7.31) необхідно відповідним чином вибрати мінімальні радіуси кулачка r_0 і зміщення e. Інколи і зміщення e визначається умовами компоновки кулачкового механізму і не може бути змінене конструктором. Цю задачу синтезу можна розв'язувати графічним або аналітичним способом.

Графічним способом мінімальний радіус кулачка можна визначити, якщо побудувати криву $s' = s'(s)$ залежності аналогів швидкостей штовхача $s' = s'_{B_2}$ від його переміщень $s = s_{B_2}$ (рис. 7.26, *а*). Осі діаграми розташовують відповідно з повернутим планом швидкостей (див. рис. 7.25, *а*), тобто вісь s напрямляємо вгору, значення s' відкладаємо вздовж осі абсцис, причому якщо кулачок обертається проти руху годинникової стрілки, то s' відкладають вліво на фазі віддалення ($s' > 0$) і вправо — на фазі наближення. Масштабні коефіцієнти μ_s і $\mu_{s'}$ повинні бути рівні між собою і дорівнювати масштабному коефіцієнту довжини μ_l.

Для визначення значень переміщень штовхача та їх аналогів швидкостей і прискорень можна використати безрозмірні коефіцієнти (інваріанти) переміщень a_k, швидкості b_k і прискорення c_k,



$\mu_s = \mu_{s'}$
μ_s
$\mu_{s'}$
$\mu_{s''}$
γ_{min}
$\vartheta_{доп}$
ϑ
δ
$[:r_0]$
$[e_0]$
$[e]$
$\varphi_в$
$\varphi_{д.с}$
$\varphi_н$
$\varphi_{б.с}$
H_1
H_2
h_1
h_2
$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\mu_s}{\mu_{s'}}$
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varphi_н^2}{\varphi_в^2}$
а
б
в
г

Рис. 7.26.

аналітичні залежності для яких наведено в табл. 7.1. Тоді на основі формул (7.10), (7.16) або (7.17) маємо для періоду віддалення:
штовхача

$$s_i = a_k S_{\max},\quad s'_i = \frac{b_k S_{\max}}{\varphi_в},\quad s''_i = \frac{c_k S_{\max}}{\varphi_в^2}; \tag{7.47}$$

коромисла

$$\beta_i = a_k \beta_{\max},\quad \beta'_i = \frac{b_k \beta_{\max}}{\varphi_в},\quad \beta''_i = \frac{c_k \beta_{\max}}{\varphi_в^2}. \tag{7.48}$$

Для періоду наближення також користуються формулами (7.47), (7.48), в які замість кута віддалення $\varphi_в$ підставляють кут наближення $\varphi_н$ та змінюють знак аналогів швидкостей на протилежний. При цьому безрозмірні коефіцієнти k за період віддалення ($k = \varphi_i / \varphi_в$) змінюються від 0 до 1, за період наближення ($k = \varphi_i / \varphi_н$), навпаки, — від 1 до 0, де φ_i – кути повороту кулачка, які відраховують від початку відповідного періоду руху (віддалення або наближення).

На рис. 7.26, *б, в, г* наведено приклад діаграм переміщень $s = s(\varphi)$, аналогів швидкостей $s' = s'(\varphi)$ та прискорень $s'' = s''(\varphi)$ при косинусоїдному законі руху штовхача. Ці діаграми можна побудувати, використавши залежності (7.47), (7.48), або графічним інтегруванням діаграми $s' = s'(\varphi)$, як це зображено на рис. 7.26, *в, г*. Крок відносного часу k прийнято $\Delta k = 1/6$, що відповідає кроку кута φ для періоду віддалення $\Delta\varphi_в = \varphi_в /6$, для періоду наближення – $\Delta\varphi_н = \varphi_н /6$.

Масштаби побудови визначаються звичайним способом:
для штовхача (м/мм)

$$\mu_s = \frac{S_{\max}}{[S_{\max}]};\quad \mu_{s'} = \frac{S'_{\max}}{[S'_{\max}]};\quad \mu_{s''} = \frac{S''_{\max}}{[S''_{\max}]}; \tag{7.49}$$

для коромисла (рад/мм)

$$\mu_\beta = \frac{\beta_{\max}}{[\beta_{\max}]};\quad \mu_{\beta'} = \frac{\beta'_{\max}}{[\beta'_{\max}]};\quad \mu_{\beta''} = \frac{\beta''_{\max}}{[\beta''_{\max}]}, \tag{7.50}$$

де всі параметри в квадратних дужках позначають на діаграмах відрізки (в мм), які зображають відповідні дійсні параметри (переміщення або аналоги швидкостей і прискорень).

На підставі одержаних діаграм $s = s(\varphi)$ і $s' = s'(\varphi)$ побудовано діаграму $s' = s'(s)$. Коли масштаби діаграм переміщень μ_s і аналогів швидкостей $\mu_{s'}$ не збігаються, то можна використати допоміжну лінію, яку проводять через точку $0'$ під кутом $\delta = \operatorname{arctg}(\mu_s / \mu_{s'})$. Коли кулачок обертається проти руху годинникової стрілки, то знак кута δ треба змінити на протилежний.

Виберемо центр обертання кулачка A на продовженні осі s діаграми $s' = s'(s)$. Тоді для будь-якої точки b_2 цієї діаграми пряма Ab_2 утворює з віссю s кут тиску ϑ, оскільки тангенс цього кута задовольняє формулу (7.36). Максимальне значення кута тиску дістанемо в тому випадку, коли пряма Ab_2 буде дотичною до діаграми $s' = s'(s)$. Проводимо під кутом $\vartheta_{\text{доп}}$ дотичні $\tau - \tau$ і $\tau' - \tau'$, які визначають зону (на рисунку заштрихована), в якій, вибравши центр обертання кулачка, забезпечимо в будь-якому положенні умову (7.31), тобто усунемо заклинювання кулачка. Точка A_0 перетину цих дотичних визначає положення осі обертання кулачка, який має найменший допустимий мінімальний радіус-вектор r_0:

$$r_0 = (A_0 0)\mu_l,$$

де μ_l — масштаб довжини ($\mu_l = \mu_s = \mu_{s'}$).

При виборі осі обертання в точці A_0 одержимо цілком визначене зміщення $e_0 = [e_0]\mu_l$. Якщо зміщення задане, то, провівши пряму $q—q$ або $q'—q'$ на відстані $e_0 = [e_0]\mu_l$ від осі s діаграми $s' = s'(s)$, знайдемо точку A_1' або A_2' перетину цих прямих з дотичними $\tau - \tau$ або $\tau' - \tau'$. Якщо вибрати точки A_1' або A_2' за центр обертання кулачка, то дістанемо найменші мінімальні радіуси кулачка відповідно $r_0 = (A_1' 0)\mu_l$ або $r_0 = (A_2' 0)\mu_l$.

Для центрального кулачкового механізму ($e = 0$) центр обертання кулачка треба вибрати на осі s у заштрихованій зоні (не вище точки A'). Як правило, центр обертання кулачка вибирають дещо нижче граничних точок A', A_1', A_2', щоб забезпечити нерівність $\vartheta_{\max} < \vartheta_{\text{доп}}$.

При силовому замиканні вказані побудови виконують лише для періоду віддалення, коли, як правило, треба перемагати лише дію сил корисного опору, пружини, інерції.

У період наближення штовхач стає ведучою ланкою і під дією пружини повертається в найближче до центра кулачка положення, тобто в період наближення заклинювання кулачкового механізму не буває.

Аналітичний спосіб. Аналітичний спосіб визначення розмірів такого кулачкового механізму полягає в розв'язанні рівняння (7.35) або (7.36) відносно r_0 (інколи відносно e) при $\vartheta_i \le \vartheta_{доп}$ на фазі віддалення при силовому замиканні або на фазі віддалення й наближення при геометричному замиканні. Тоді маємо:
для центрального кулачкового механізму

$$r_0 = \left| \frac{s'_{B_2}}{\mathrm{tg}\vartheta_{доп}} - s_{B_2} \right|_{\max}; \qquad (7.51)$$

для зміщеного кулачкового механізму

$$r_0 = \left| \sqrt{\left[\frac{s'_{B_2} \pm e}{\mathrm{tg}\vartheta_{доп}} - s_{B_2} \right]^2 + e^2} \right|_{\max}. \qquad (7.52)$$

Отже, для знаходження мінімального радіуса кулачка необхідно дослідити залежності (7.51) і (7.52) на максимум значень r_0, прийнявши, що $\vartheta = \vartheta_{доп}$.

Для багатьох законів радіус r_0, визначений за формулами (7.51) або (7.52), буде при $s'_{B_2} = \left| s'_{B_2} \right|_{\max}$; тоді $s_{B_2} = S_{\max} / 2$ (див. рис. 7.11). Підставивши ці значення, отримаємо формули для визначення мінімального радіуса кулачка:
центрального кулачкового механізму

$$r_0 = \frac{\left| s'_{B_2} \right|_{\max}}{\mathrm{tg}\vartheta_{доп}} - \frac{S_{\max}}{2}; \qquad (7.53)$$

зміщеного кулачкового механізму

$$r_0 = \sqrt{\left[\frac{\left| s'_{B_2} \right|_{\max} \pm e}{\mathrm{tg}\vartheta_{доп}} - \frac{S_{\max}}{2} \right]^2 + e^2}. \qquad (7.54)$$

Правило визначення знака параметра e наведено в параграфі 7.9.

7.10.2. Кулачковий механізм із загостреним або роликовим коромислом

У такому механізмі (рис. 7.27, *а*) кут тиску ϑ (без врахування сил тертя у вищій парі *B*) утворений нормаллю *n—n*, вздовж якої напрямлена реакція $\boldsymbol{R}_{21}$ кулачка на коромисло, і напрямком переміщення (швидкості) точки B_2, що належить коромислу *2* ($\boldsymbol{v}_{B_2} \perp BC$). Для виведення залежності кута тиску від геометричних параметрів механізму будуємо повернутий на 90° у бік обертання кулачка план швидкостей у заданому положенні механізму, як це було виконано для кулачкового механізму з роликовим або загостреним штовхачем (див. рис. 7.25, *а*). Тоді відрізок $pb_1 = AB$ (рис. 7.27) зображує в масштабі μ_v швидкість точки B_1; b_1, b_2 — відносну швидкість $\boldsymbol{v}_{B_2B_1}$; $pb_2 = Bb_2$ — швидкість $\boldsymbol{v}_{B_2}$ точки B_2; у масштабі μ_l ці відрізки визначають аналоги швидкостей, зокрема $pb_2 = s'_{B_2} / \mu_l$.

Тоді з трикутника $Kb_1b_2 (AK \perp Bb_2)$ маємо

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{Kb_2}{AK} = \frac{Bb_2 - BK}{AK} = \frac{s'_{B_2} \pm e}{y}. \qquad (7.55)$$

Відрізок $BK = e$ можна розглядати як змінне зміщення вихідної ланки (коромисла), під яким розуміють довжину перпендикуляра, поставленого з центра обертання кулачка на напрямок швидкості точки контакту коромисла *B* з профілем кулачка:

$$e = l_0 \cos(\beta_i + \beta_0) - l_к. \qquad (7.56)$$

Для визначення відрізка $y = AK$ розглянемо прямокутний трикутник *ABC*, з якого маємо

$$y = l_0 \sin(\beta_i + \beta_0). \qquad (7.57)$$

Підставивши значення *e* і *y* в залежність (7.56), дістанемо

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{s'_{B_2} \pm |l_0 \cos(\beta_i + \beta_0) + l_к|}{l_0 \sin(\beta_i + \beta_0)}. \qquad (7.58)$$

Правило знаків у (7.55) і (7.58) таке саме, як і для зміщених кулачкових механізмів (7.35).

У рівність (7.58) не входить мінімальний радіус кулачка. Для його визначення можна скористатися умовою

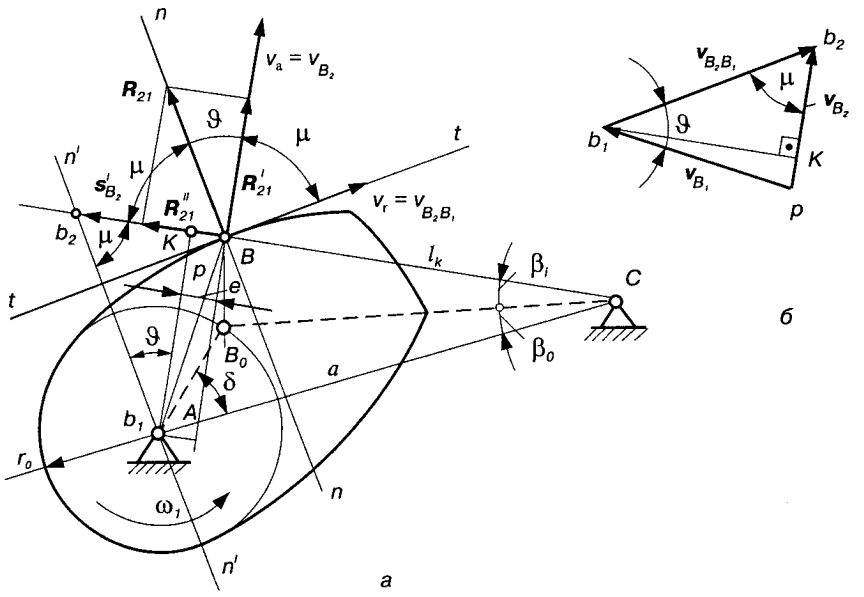


Рис. 7.27.

$$r_0 = \sqrt{l_0^2 + l_к^2 - 2l_0 l_к \cos\beta_0}. \qquad (7.59)$$

З рівності (7.58) випливає, що при заданому законі руху коромисла BC, початковому куті β_0 і довжині коромисла $l_к$ збільшення міжосьової відстані l_0 призводить до зменшення кута тиску і збільшення габаритів механізму.

Отже, для визначення графічним способом кута тиску ϑ або передачі μ у коромислових механізмах необхідно у відповідних положеннях коромисла з центра ролика B (або з точки контакту коромисла та профілю кулачка) відкласти вздовж лінії коромисла BC у масштабі μ_l повернутий на 90° вектор аналога швидкостей s'_{B_2} і його кінець (точку b_2) з'єднати з центром обертання кулачка. Тоді гострий кут між лінією Ab_2 і положенням коромисла BC визначає кут передачі μ (кут тиску ϑ визначається лінією Ab_2 і перпендикуляром AK, поставленим з центра обертання кулачка на положення коромисла BC). Ця властивість повернутого аналога швидкостей коромисла використовується при динамічному синтезі коромислових кулачкових механізмів.

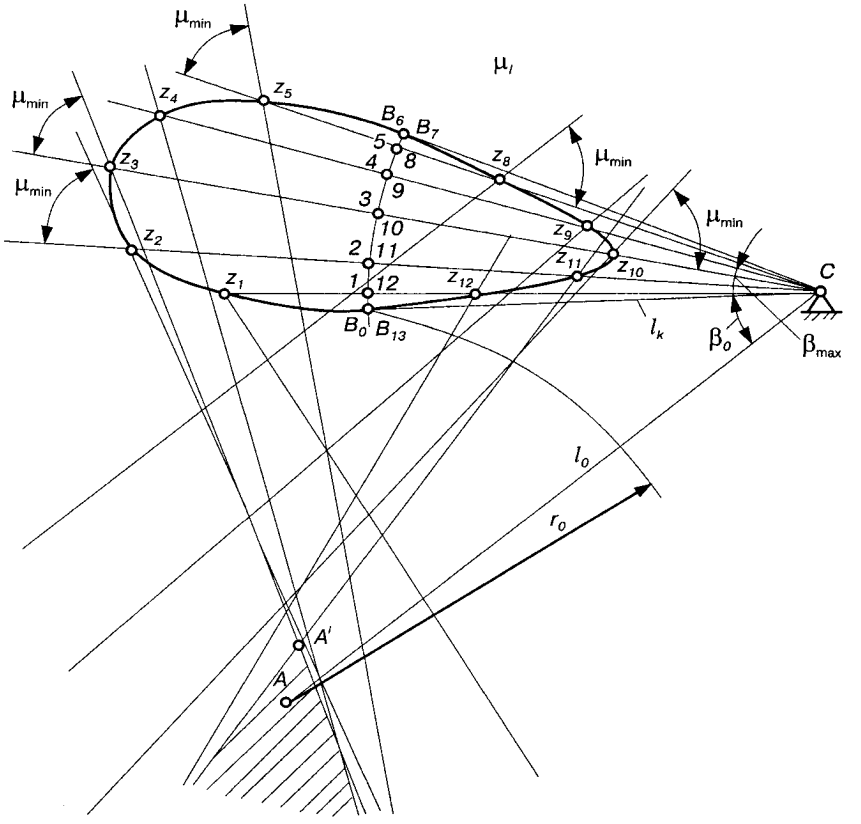


Рис. 7.28.

Для визначення мінімального радіуса кулачка і положення осі обертання кулачка (рис. 7.28) необхідно, щоб було задано: закони руху кулачка і коромисла $\beta = \beta(\varphi)$, його довжина $l_к$ і максимально допустимий кут тиску $\vartheta_{доп}$ (або мінімально допустимий кут передачі: $\mu_{min} = 90° - \vartheta_{доп}$). Порядок побудови такий.

1. Вибираємо центр обертання коромисла C і будуємо його крайні положення, маючи заданим кут β_{max} і траєкторію точки B.

2. Згідно з діаграмою переміщення розмічаємо траєкторію точки B коромисла BC, як показано на рис. 7.18, *а, б*. Нехай це будуть точки B_1, B_2, B_3 і т. д. Далі, на променях CB_1, CB_2, CB_3 і т. д. відкладаємо в масштабі довжини μ_l аналоги швидкостей точки B_2 $s'_{B_2} = \beta' l_к$, де β' — аналоги кутових швидкостей, тобто відрізки $B_i z_i = s'_{B_2} / \mu_l$.

3. Значення s'_{B_2} відкладаємо на фазі віддалення від точки B на продовженні коромисла BC, якщо кулачок і коромисло обертаються в протилежних напрямках, і до центра C, якщо вони обертаються в один бік. Така побудова дає геометричне місце точок z_i повернутих планів швидкостей точки B_2.

4. Через одержані точки z_i проводимо прямі під кутом $\mu_{min} = 90° - \vartheta_{доп}$ до напрямку коромисла у всіх його положеннях, як показано на рис. 7.28. Проведені лінії відділяють зону (на рисунку заштрихована), в якій можна вибрати центр обертання кулачка A і буде забезпечена умова $\vartheta_{max} \le \vartheta_{доп}$ або $\mu \ge \mu_{min}$.

Механізм матиме найменші габарити, якщо вибрати центр обертання кулачка в точці A'. Звичайно, центр обертання вибирають дещо нижче, наприклад у точці A. Тоді, з'єднавши точку A з точками C і B_0, визначимо мінімальний радіус кулачка r_0, міжосьову відстань l_0 і початковий кут β_0:

$$r_0 = (AB_0)\mu_l, \quad l_0 = (AC)\mu_l, \quad \beta_0 = \arccos\frac{l_0^2 + l_к^2 - r_0^2}{2l_0 l_к}.$$

7.10.3. Кулачковий механізм з плоским штовхачем

Для кулачкових механізмів з плоским штовхачем кут передачі руху завжди сталий ($\mu = \text{const}$). Це стосується і кута тиску, оскільки $\vartheta = 90° - \mu$. Отже, умова $\mu \ge \mu_{min}$ виконується незалежно від розмірів кулачка. Проте при проектуванні таких механізмів необхідно, щоб профіль кулачка був завжди ***випуклим***, тобто радіус кривизни в будь-якій точці профілю був більший від нуля ($\rho > 0$). З цієї умови і визначають мінімальний радіус кулачка r_0.

Нехай центр кривизни профілю кулачка *1* в точці контакту C (рис. 7.29) із штовхачем *2* знаходиться у точці B. Будуємо замінюючий механізм $ABCD$ і для нього план прискорень, вибравши полюс у точці B, а довжину відрізка πb, який відображає на плані прискорення $a_B = a^n_{BA}$ точки B ($\omega_1 = \text{const}$), вибравши такою, що дорівнює довжині кривошипа AB. Тоді масштаб плану прискорень обчислюється за формулою

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{\omega_1^2 l_{AB}}{AB} = \frac{\omega_1^2 AB\mu_l}{AB} = \omega_1^2\mu_l, \qquad (7.60)$$

де ω_1 – кутова швидкість кулачка; μ_l – масштаб довжини; $l_{AB} = (AB)\mu_l$.

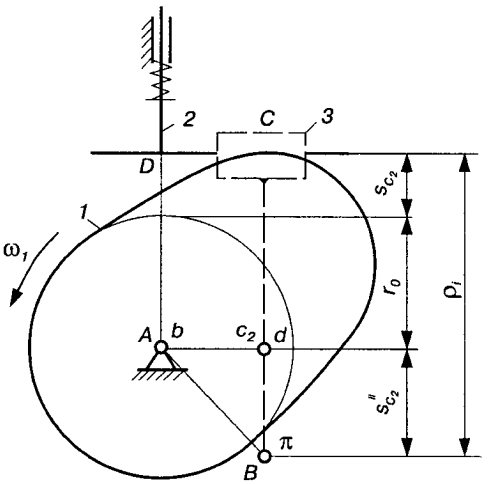


Рис. 7.29.

Для визначення прискорення точки C_2, яка належить штовхачу *2* і збігається з точкою *C*, запишемо векторне рівняння:

$$\boldsymbol{a}_{C_2} = \boldsymbol{a}_{C_3} + \boldsymbol{a}^k_{C_2C_3} + \boldsymbol{a}^r_{C_2C_3}. \tag{7.61}$$

Оскільки додаткова ланка *3* рухається тільки поступально, то прискорення точки C_3 $\boldsymbol{a}_{C_3}$ дорівнює $\boldsymbol{a}_B$, коріолісове прискорення $\boldsymbol{a}^k_{C_2C_3}$ дорівнює нулю, відносне прискорення $\boldsymbol{a}^r_{C_2C_3}$ напрямлене паралельно площині тарілки, а прискорення точки C_2, що належить штовхачу *2*, — вздовж осі штовхача. Провівши у відповідності з рівнянням (7.61) через кінці прискорення $\boldsymbol{a}_B$ напрямки прискорення $\boldsymbol{a}^r_{C_2C_3}$ і $\boldsymbol{a}_{C_2}$, дістанемо точку c_2, яка і визначить прискорення штовхача:

$$a_{C_2} = a_D = (\pi c_2)\mu_a = (\pi c_2)\omega_1^2\mu_l, \tag{7.62}$$

звідки

$$\pi c_2 = \frac{a_{C_2}}{\omega_1^2\mu_l} = \frac{\dfrac{d^2 s_{C_2}}{dt^2}\dfrac{d\varphi^2}{d\varphi^2}}{\omega_1^2\mu_l} = \frac{s''_{C_2}\omega_1^2}{\omega_1^2\mu_l} = s''_{C_2}/\mu_l, \tag{7.63}$$

де $s_{C_2} = d^2 s_{C_2}/d\varphi^2$ — аналог прискорень штовхача.

Отже, відрізок πc_2 визначає в масштабі довжин аналог прискорень штовхача.

Радіус кривизни ρ_i профілю кулачка в точці контакту *C* можна записати у вигляді

$$\rho_i = r_0 + s_{C_2} + s''_{C_2}, \tag{7.64}$$

де $\rho_i = (BC)\mu_l, r_0 = |r_0|\mu_l, s''_{C_2} = (\pi c_2)\mu_l$.

Тоді умову випуклості профілю кулачка можна виразити так:

$$\rho_i = r_0 + s_{C_2} + s''_{C_2} > 0 \tag{7.65}$$

або

$$r_0 + s_{C_2} > -s''_{C_2}. \tag{7.66}$$

Поділивши ліву і праву частини нерівності (7.66) на $r_0 + s_{C_2}$, дістанемо

$$\frac{-s''_{C_2}}{r_0 + s_{C_2}} < 1 \tag{7.67}$$

або

$$\frac{-s''_{C_2}}{r_0 + s_{C_2}} < \text{tg}45^\circ. \tag{7.68}$$

Умова (7.68) дає можливість виконати таку графічну побудову. За заданими діаграмами переміщень $s = s(\varphi)$ і аналогів прискорень штовхача $s'' = s''(\varphi)$ (див. рис. 7.26) будуємо діаграму $s = s(s'')$ (рис. 7.30). Відрізки на осі абсцис $s'' = s''_{C_2}$ і ординат $s = s_{C_2}$ відкладаємо в одному масштабі $\mu_s = \mu_{s''}$. Далі, під кутом 45° до осі s проводимо дотичну $\tau - \dot{\tau}$ до одержаної кривої $s = s(s'')$

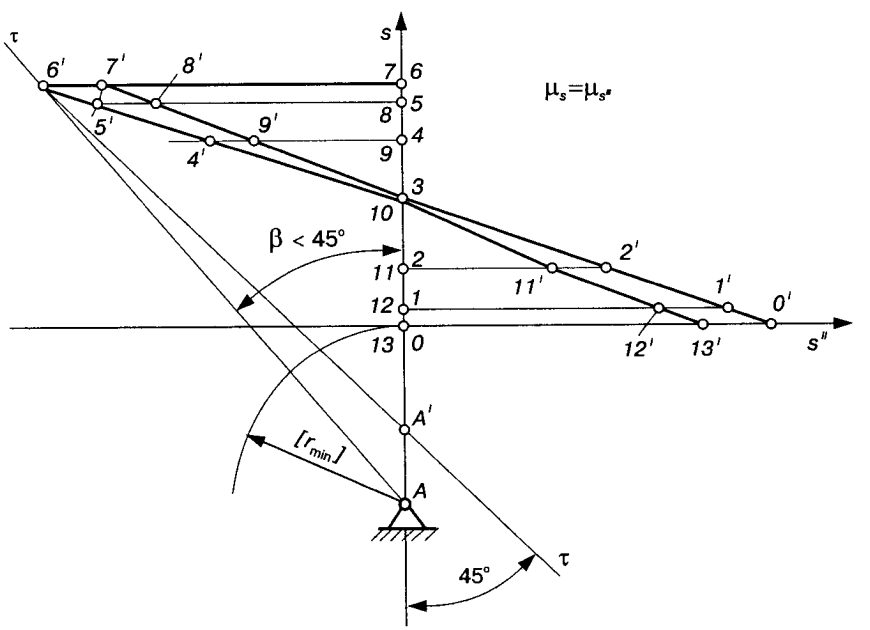


Рис. 7.30.

в тому місці, де аналог прискорення штовхача має найбільше від'ємне значення.

Згідно з рівнянням (7.68) центр обертання кулачка має бути розташований нижче від точки A'. Якщо центр обертання вибрати в точці A, то ця умова виконуватиметься, оскільки $\beta < 45°$ (рис. 7.30). Дійсно, склавши відношення

$$\frac{66'}{A6} = \frac{-s''_{C_2}}{r_0 + s_{C_2}},$$

дістанемо $\mathrm{tg}\beta < \mathrm{tg}45°$.

Викладений метод проектування розробив харківський вчений Я. Л. Геронімус.

При **аналітичному розрахунку** мінімального радіуса кулачка використовується нерівність (7.65), записана в такому вигляді:

$$r_0 \geq -(s_{C_2} + s''_{C_2}) + \rho_{\min}, \qquad (7.69)$$

де $\rho_{\min}$ – мінімально допустимий радіус кривизни профілю кулачка.

Якщо прийняти $\rho_{\min} = s_{C_2}$, то формула (7.69) набуде вигляду

$$r_0 \geq \left|- s''_{C_2}\right|_{\max}, \qquad (7.70)$$

де $\left|- s''_{C_2}\right|_{\max}$ – максимальний за модулем аналог від'ємного прискорення штовхача.

7.11. Визначення параметрів елементів вищої пари

Для забезпечення високої працездатності кулачкового механізму необхідно при його проектуванні підібрати відповідні значення параметрів поверхні кулачка і вихідної ланки (штовхача або коромисла), зокрема кривизни профілю кулачка і ролика. Якщо радіус кривизни профілю кулачка малий, то при експлуатації він швидко виходить із ладу через втрати контактної міцності або швидкого зношування, оскільки контактні напруження і інтенсивність зношування обернено пропорційні зведеному радіусу кривизни. При неправильному виборі радіуса ролика може статися, що він не буде обертатися і введення його в кінематичний ланцюг не призведе до зниження втрат на тертя.

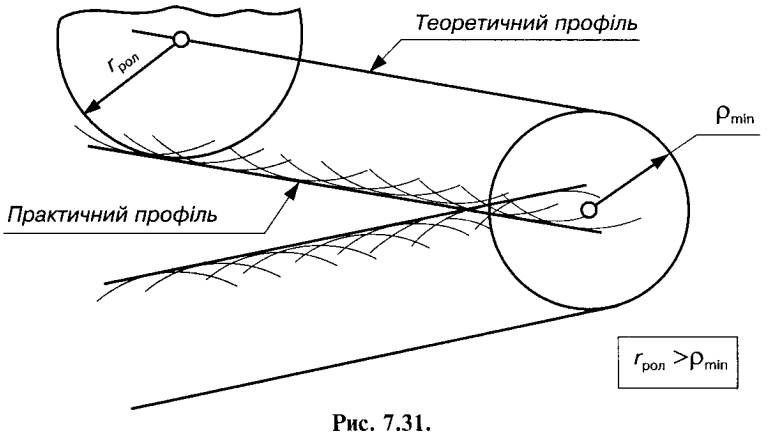


Рис. 7.31.

Методика розрахунку радіуса ролика подається в спеціальній літературі [43, 58, 74, 75]. Вона враховує чотири основні умови: 1) усунення самоперетину профілю кулачка; 2) можливість розміщення осі ролика; 3) обмеження контактних напружень у парі кулачок—ролик; 4) забезпечення кочення ролика по профілю кулачка.

Для того щоб забезпечити ***першу умову*** — усунення самоперетину профілю кулачка, необхідно вибрати радіус ролика $r_{рол}$ меншим мінімального радіуса кривизни ρ_{min} теоретичного *профілю кулачка, тобто*

$$r_{рол} < \rho_{min}. \qquad (7.71)$$

На практиці звичайно беруть $r_{рол} \le (0{,}5—0{,}7)\rho_{min}$.

Якщо не витримати умову (7.71), то настає так зване ***явище самоперетину профілю кулачка***. На рис. 7.31 показано побудову практичного профілю кулачка при умові $r_{рол} > \rho_{min}$. З рисунка видно, що це призводить, по-перше, до порушення закону руху вихідної ланки, оскільки зрізається частина профілю; по-друге, загострюється профіль кулачка, що небажано з точки його міцності та зносостійкості.

Друга умова пов'язана з тим, що при малих радіусах ролика, які визначаються (7.71), не вдається розмістити цапфу осі ролика, розміри якої визначаються з умови міцності на згин. Визначивши радіус цапфи $r_ц$ ролика, беруть з конструктивних міркувань радіус ролика:

$$r_{рол} = (1{,}6—2{,}0)r_ц.$$

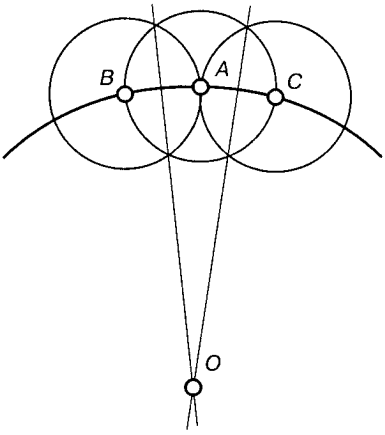


Рис. 7.32.

Третя умова пов'язана з обмеженням контактних напружень на поверхні ролика і кулачка. Ці напруження на випуклій ділянці профілю з деяким наближенням можна визначити за допомогою формули Герца:

$$\sigma_{н} = 0{,}418\sqrt{\frac{R_{21}E_{зв}}{b}\left(\frac{1}{r_{рол}} + \frac{1}{\rho_{п}}\right)}, \qquad (7.72)$$

де R_{21} — величина реакції кулачка на ролик; $E_{зв}$ — зведений модуль пружності матеріалу кулачка і ролика; b — ширина ролика; $\rho_{п}$ — радіус кривизни профілю кулачка.

На практиці часто рекомендують брати $r_{рол} \le 0{,}4r_0$, проте у відповідальних випадках треба користуватись залежністю (7.72).

Четверта умова полягає в тому, щоб забезпечити при роботі кулачкового механізму кочення ролика по профілю кулачка, оскільки ковзання приводить до підвищеного зносу кулачка. Умову кочення ролика можна одержати, розглянувши з урахуванням сил інерції рівновагу ролика і вихідної ланки [43].

Радіус кривизни профілю кулачка можна визначити графічним або аналітичним способом. При графічному методі треба мати заданий профіль кулачка. Тоді, використовуючи звичайний геометричний спосіб проведення кола через три точки *A, B, C* (рис. 7.32), які лежать на профілі кулачка, знаходять центр *O* вписаного в профіль кола, радіус *OA* якого буде наближено визначати радіус кривизни кулачка на ділянці профілю *BC*. У тому випадку, коли задано закон руху вихідної ланки і основні розміри ланок механізму, залежність для визначення радіуса кривизни для профілю кулачка можна одержати, використавши швидкості і прискорення вихідної ланки, зокрема побудувавши плани швидкостей і прискорень безпосередньо на схемі механізму [43].

Мінімальний радіус кривизни профілю кулачка треба знати для розрахунку на міцність кулачка та ролика, для вибору діаметра ролика, а також для виявлення можливості використання плоских штовхача або коромисла.

7.12. Розрахунок пружини для силового замикання ланок

При силовому замиканні вищої пари кулачкового механізму неперервність контакту штовхача коромисла з кулачком здійснюється за допомогою сил пружності попередньо деформованої пружини, а робочий хід відповідає фазі віддалення штовхача і здійснюється в результаті дії кулачка на штовхач. Назад штовхач рухається під дією сил пружності пружини. Ця фаза руху штовхача майже завжди відповідає фазі холостого ходу.

З конструктивної та технологічної точок зору (мається на увазі виготовлення кулачка) система силового замикання виявляється простішою. Проте з тим, що в кінематичний ланцюг кулачкового механізму вводиться деформована пружна ланка (пружина), динаміка його значно погіршується (зменшується надійність), збільшуються втрати на тертя, навантаження на кінематичні пари, збільшується їх зношування.

Для забезпечення силового замикання ланок необхідно вибрати таку пружину, щоб у процесі роботи вихідна ланка механізму не відривалась від профілю кулачка. Відриву не буде, коли сила пружності пружини в будь-який момент часу більша сили інерції вихідної ланки в зоні, де можливий її відрив від поверхні кулачка.

Розрахунок можна вести графічним способом (рис. 7.33) [42]. Спочатку будують діаграму $F_{ін}(s)$ зміни сили інерції вихідної ланки як функції переміщень. За додатний напрямок $F_{ін}(s)$ беруть такий, при якому вона намагається відірвати вихідну ланку від профілю кулачка. Для гарантії неперервного притискання вихідної ланки до кулачка необхідно забезпечити деяку мінімальну реакцію $F_{зап}$ (запас сил) між ними. Це забезпечується попереднім натягом s_0 пружини, який становить 20–40 % його найбільшого значення S_{max}.

Сила пружності гвинтової пружини $F_{п_i}$ лінійно залежить від деформації:

$$F_{п_i} = F_0 + cs_i, \tag{7.73}$$

де F_0 – початкове значення пружності пружини або натяг пружини при $s_i = 0$; c – коефіцієнт жорсткості пружини, який є відношенням пружності пружини $F_{п_i}$ до її деформації $s_0 + s_i$, тобто

$$c = F_{п_i} /(s_0 + s_i) = \text{tg}\Omega.$$

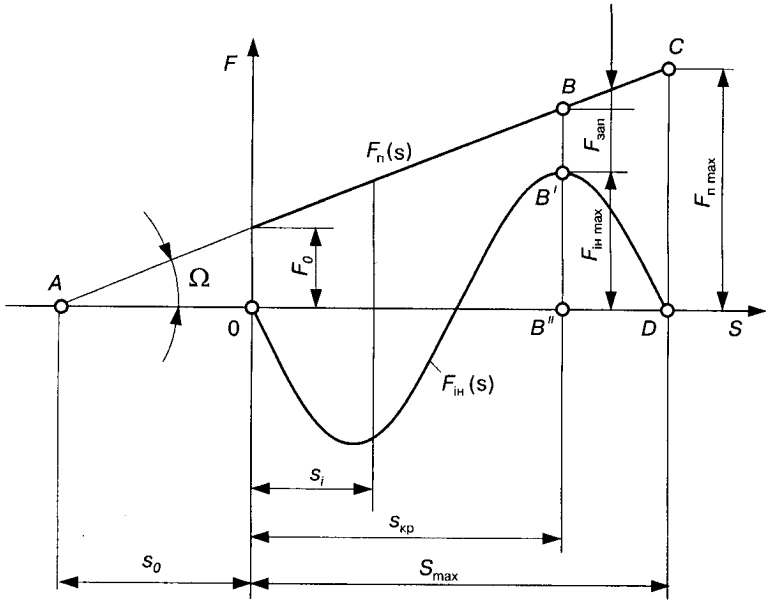


Рис. 7.33.

Як випливає з формули (7.73), пружина характеризується двома параметрами – попереднім натягом F_0 і жорсткістю c, з яких один може бути вибраний довільно. Збільшуючи F_0, одержуємо м'якшу пружину, але збільшуємо роботу, яка витрачається на стиск пружини. Ця робота пропорційна площі трапеції, що знаходиться під кривою $F_п(s)$. Але вона не втрачається, оскільки на ділянці наближення сила пружності діє як рушійна сила.

Отже, з'єднавши точки A і B, які визначаються значеннями сил F_0 і $F_{зап}$, одержимо залежність $F_п(s)$. Відрізок CD у масштабі μ_F визначає найбільшу силу пружності пружини $F_{п\,max} = (CD)\mu_F$, або

$$F_{п\,max} = (F_{заг} + F_{ін\,max})\frac{s_0 + S_{max}}{s_0 + s_{кр}},$$

де $s_{кр}$ – переміщення штовхача, яке відповідає максимальному (критичному) значенню сили інерції $F_{ін\,max}$.

Розрахунки ведуться для періоду, в якому від'ємні значення аналогів прискорення більші за своїми абсолютними значеннями.

Аналогічно визначають параметри пружності для коромислових кулачкових механізмів.

7.13. Врахування пружності ланок при проектуванні кулачкових механізмів

Раніше при аналізі і синтезі кулачкових механізмів всі ланки розглядались як абсолютно тверді тіла. Проте при великих навантаженнях і високих швидкостях руху деформації ланок значно впливають на кінематичні та динамічні характеристики руху механізмів, а тому при проектуванні таких механізмів необхідно враховувати пружність ланок, яку можна виявити, лише розглянувши динаміку механізму. Задачі динамічного синтезу, як правило, складніші порівняно із задачами кінематичного синтезу, а тому при їх розв'язуванні доводиться робити деякі спрощення. Наприклад, вважають масу кожної ланки зосередженою в одній або в двох точках, пружність ланки подається у вигляді пружини, що не має маси, тощо. У результаті таких спрощень одержуємо ***динамічну модель***, яка в деякому наближенні має такі самі динамічні характеристики, як і реальний механізм.

На рис. 7.34 зображено динамічну модель кулачкового механізму з пружним штовхачем [42]. Пружність кулачкового валу не береться до уваги, тобто розглядається механізм, в якому жорсткість вала значно більша жорсткості штовхача. Маса штовхача m вважається зосередженою в одній (верхній) точці. На масу діє зовнішня сила F. Дія сил пружності штовхача втілена в пружині, яка розташована між масою m і кулачком. Нижній кінець штовхача (пружини) рухається в контакті з кулачком, і закон його руху визначається профілем кулачка. Переміщення верхнього кінця штовхача y внаслідок пружності штовхача відрізняється від переміщень s нижнього кінця.

Зв'язок між переміщеннями y і s можна знайти з диференціального рівняння руху маси m, яке для динамічної моделі, зображеної на рис. 7.34, має вигляд

$$-F + c_2(s - y) = my, \tag{7.74}$$

де c_2 – коефіцієнт жорсткості штовхача, тобто відношення сили, прикладеної до якогось кінця штовхача, до величини його деформації (другий кінець штовхача вважається закріпленим).

При силовому замиканні силу F можна представити у вигляді суми сили зовнішнього навантаження $F_н$, сили пружини замикання $F_п$ і сили тертя F_f:

$$F = F_н + F_п + F_f. \tag{7.75}$$

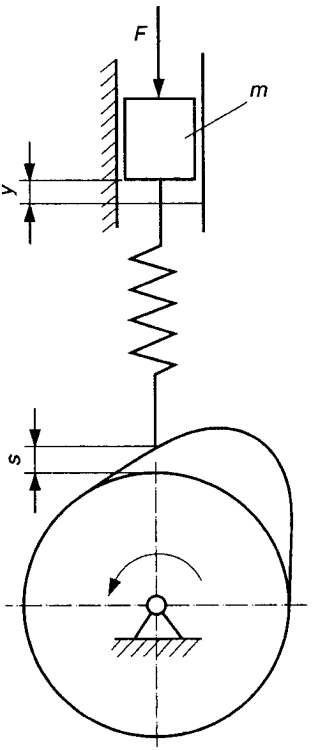


Рис. 7.34.

Модуль сили пружини замикання (на рисунку не показано) можна визначити з рівняння

$$F_{\text{п}} = F_0 + c_1 y, \qquad (7.76)$$

де F_0 — сила попереднього натягу пружини; c_1 — коефіцієнт жорсткості пружини.

З урахуванням співвідношень (7.74)–(7.76) рівняння руху пружного штовхача (7.74) можна записати так

$$\ddot{y} + \frac{c_1 + c_2}{m} y = \frac{-F_{\text{н}} - F_0 - F_f + c_2 s}{m}, \qquad (7.77)$$

звідки отримуємо залежність переміщення нижнього кінця штовхача s від переміщень верхнього кінця штовхача:

$$s = \frac{F_{\text{н}} + F_0 + F_f}{c_2} + \frac{c_1 + c_2}{c_2} y + \frac{m}{c_2} \ddot{y}. \qquad (7.78)$$

Допустимість використання того чи іншого закону руху з урахуванням пружності ланок оцінюється ***коефіцієнтом динамічності*** $k_{\text{д}}$, яким називають відношення максимального модуля прискорення вихідної ланки $|\ddot{y}_{\max}|$ з врахуванням пружності ланок до максимального модуля прискорення $|\ddot{S}_{\max}|$ цієї самої ланки без урахування пружності ланок, тобто

$$k_{\text{д}} = |\ddot{y}_{\max}| / |\ddot{S}_{\max}|. \qquad (7.79)$$

Коефіцієнт динамічності залежить від відношення циклової частоти p ударів і циклової частоти власних коливань механізму, які визначаються за формулою

$$k = \sqrt{(c_1 + c_2)/m}. \qquad (7.80)$$

Чим більший коефіцієнт динамічності, тим більше рух $y(t)$ верхнього кінця штовхача відрізняється від руху $s(t)$ нижнього

кінця. Відповідно до результатів досліджень [43] при $p \leq k$ маємо, що $k_д \approx 1$ для безударних законів, $k_д \approx 2$ – для законів з м'якими ударами, в яких миттєво змінюється тільки величина прискорення, і $k_д \approx 3$ – для законів з м'якими ударами, в яких змінюється не тільки величина, але й напрямок прискорення (наприклад, закон постійного прискорення). Проте в районі резонансу коефіцієнт динамічності у всіх випадках значно зростає.

Все викладене раніше про синтез кулачкового механізму з пружним штовхачем повністю поширюється на синтез кулачкового механізму з пружним коромислом. Для таких механізмів залежність (7.78) можна записати в такому вигляді:

$$\beta = \frac{J_B}{c}\ddot{\beta} + \beta_{пр} + \frac{M_0}{c}, \qquad (7.81)$$

де β – кут повороту жорсткого коромисла, за яким будується профіль кулачка; J_B – момент інерції коромисла відносно осі обертання C; c – коефіцієнт крутильної жорсткості вала коромисла; $\beta_{пр}$ – кут повороту пружного коромисла; M_0 – модуль моменту сил опору руху коромисла.

ПЕРЕДАЧІ

8.1. Загальні відомості

Передачами в машинах називають пристрої, які служать для передачі або перетворення механічного руху. У загальному випадку передачі можуть виконувати ряд функцій: а) розподіляти енергію між механізмами; б) знижувати або підвищувати швидкість ланок; в) перетворювати рух (наприклад, обертовий у поступальний або навпаки); г) регулювати швидкість; д) здійснювати пуск, зупинку і реверсування машини; е) захищати деталі машин від перевантаження.

Використання передач зумовлено здебільшого різницею швидкостей виконавчих (робочих) органів машин і приводних двигунів, інколи необхідністю одним двигуном приводити у рух декілька механізмів, змінювати швидкість машини при сталій швидкості вибраного двигуна, передавати рух на значну відстань.

Для передачі руху від двигуна до виконавчого механізму використовують різні передаточні механізми: електричні, механічні, гідравлічні й пневматичні. Далі розглядаємо здебільшого механічні передачі і в першу чергу передачі обертового руху, які найпоширеніші в техніці, оскільки обертовий рух можна здійснити найпростішими способами.

Механічні передачі класифікують так:

а) за фізичними умовами передачі руху: ***передачі тертям*** (фрикційні, пасові, канатні); ***передачі зачепленням*** однієї ланки з іншою (зубчасті, гвинтові, цівкові, ланцюгові, важільні тощо);

б) за способом з'єднання вхідної та вихідної ланок: ***передачі з безпосереднім дотиком*** вхідної та вихідної ланок (фрикційні, зубчасті, гвинтові тощо); ***передачі з проміжною гнучкою ланкою***, яка з'єднує вхідну та вихідну ланки (пасові, канатні, ланцюгові).

У сучасних машинах поряд з механічними передачами широко використовують інші види передач — електричні, гідравлічні та пневматичні. Електричні, гідравлічні, а також фрикційні передачі дають змогу здійснювати безступінчасте регулювання швидкості, яке набуває все більшого значення у сучасній техніці. Такі передачі дозволяють використовувати робочі машини при оптимальних значеннях швидкостей руху в точній відповідності до вимог технологічного процесу, спрощують і полегшують керування машиною.

При проектуванні машин і приладів вибір виду передач залежить від конкретних умов проектування та вимог до приводу машини чи приладу. ***Основні вимоги до передач:*** надійність і необхідна довговічність; простота конструкції; компактність і невеликі габаритні розміри; малий опір руху, особливо в момент пуску двигуна; порівняно висока точність перетворення руху; можливість одержання найменшого зведеного до вала двигуна моменту інерції обертових ланок (при частих пусках і реверсах приводу зменшення зведеного моменту інерції дає можливість прискорити перехідні процеси розбігу, що має важливе значення); безшумність дії і висока вібростійкість, а також простота керування (у тому числі автоматичного і дистанційного). При виборі передачі враховуються технологічні вимоги, що ставляться до машини, наприклад, сталість передаточного відношення, безступінчастість регулювання швидкості, коефіцієнт корисної дії (ККД), маса, можлива точність і вартість виготовлення передачі.

Виходячи з конкретних вимог до приводу машини, нерідко виявляється доцільним, використовуючи позитивні властивості різних передач, створювати передачі комбінованого типу (гідромеханічні, електропневматичні, електрогідравлічні тощо). *Особливістю гідравлічних і пневматичних передач* є їхня здатність розвивати великі зусилля при відносно малих значеннях питомого тиску рідини або повітря. Недолік цих видів передач — відносно мала швидкість рідини або повітря у трубопроводах.

8.2. Основні характеристики передач

Основними характеристиками передач є передаточне відношення, міжосьова відстань та ін.

Передаточним відношенням називають відношення кутових швидкостей двох ланок (як правило, вхідної й вихідної):

$$i_{kl} = \pm\frac{\omega_k}{\omega_l}, \tag{8.1}$$

де ω_k, ω_l — кутова швидкість ланки відповідно k (наприклад, вхідної) і l (наприклад, вихідної).

Знак "+" передаточного відношення приймають при однакових напрямках обертання ланок k і l (рис. 8.1, *а*), а знак "–" — при різних їх напрямках обертання (рис. 8.1, *б*). Індекс kl передаточного відношення показує напрямок, в якому воно визначається. Зрозуміло, що справедлива і обернена залежність

$$i_{lk} = \frac{1}{i_{kl}} = \pm\frac{\omega_l}{\omega_k}. \tag{8.2}$$

Передаточне відношення можна виразити через діаметри фрикційних котків, зубчастих коліс, шківів, число зубців.

Так, для фрикційних передач (див. рис. 8.1), якщо не врахувати ковзання котків, можна вважати, що колові швидкості обох ланок рівні між собою ($v_1 = v_2$), де $v_1 = \omega_1 d_1/2$; $v_2 = \omega_2 d_2/2$. Тоді $\omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2$, або якщо врахувати, що $\omega = \pi n/30$, то $\pi d_1 n_1/30 = \pi d_2 n_2/30$. Звідси

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{n_1}{n_2} = \pm\frac{d_2}{d_1}, \tag{8.3}$$

де n_1, n_2 — частота обертання вхідного і вихідного котків, об/хв; d_1 і d_2 — їх діаметри.

Якщо позначити потужність на вхідному валу через P_1, а на вихідному валу через P_2, то ***ККД передачі*** визначають співвідношенням

$$\eta = P_2 / P_1.$$

Тоді, знаючи потужність на вході (наприклад, потужність двигуна) і ККД передачі, можна визначити ***потужність на виході***:

$$P_2 = P_1\eta. \tag{8.4}$$

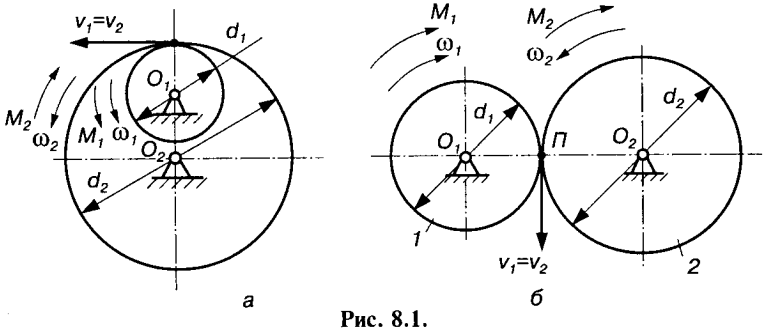


Рис. 8.1.

Відомо, що потужність $P = M\omega$, де M — обертовий момент; ω — кутова швидкість. Тоді можна записати $M_2\omega_2 = M_1\omega_1\eta$, звідки ***обертовий момент на вихідному валу***

$$M_2 = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}\eta = M_1 i_{12}\eta. \tag{8.5}$$

Значення ККД окремих передач наведено в довідниках.

Важливою характеристикою передач є ***міжосьова відстань*** $a_w = O_1O_2$.

Для передачі, зображеної на рис. 8.1, *а*, можна записати

$$a_w = \frac{d_1 - d_2}{2} = r_1 - r_2; \tag{8.6}$$

на рис. 8.1, *б* —

$$a_w = \frac{d_2 + d_1}{2} = r_2 + r_1, \tag{8.7}$$

де r_1, r_2 — радіуси котків ($r = d/2$).

Інші формули для визначення передаточного відношення і міжосьової відстані буде наведено при розгляді відповідних передач.

8.3. Фрикційні передачі

Механізми, в яких рух між ланками передається за рахунок сил тертя, називають ***фрикційними механізмами, або фрикційними передачами.*** На рис. 8.2 зображено основні види фрикційних механізмів. Передача руху від вхідної ланки (котка) *1* і до вихідної ланки (котка) *2* (рис. 8.2, *а*) здійснюється силою тертя F_f, що створюється притисканням однієї ланки до іншої деякою силою Q.

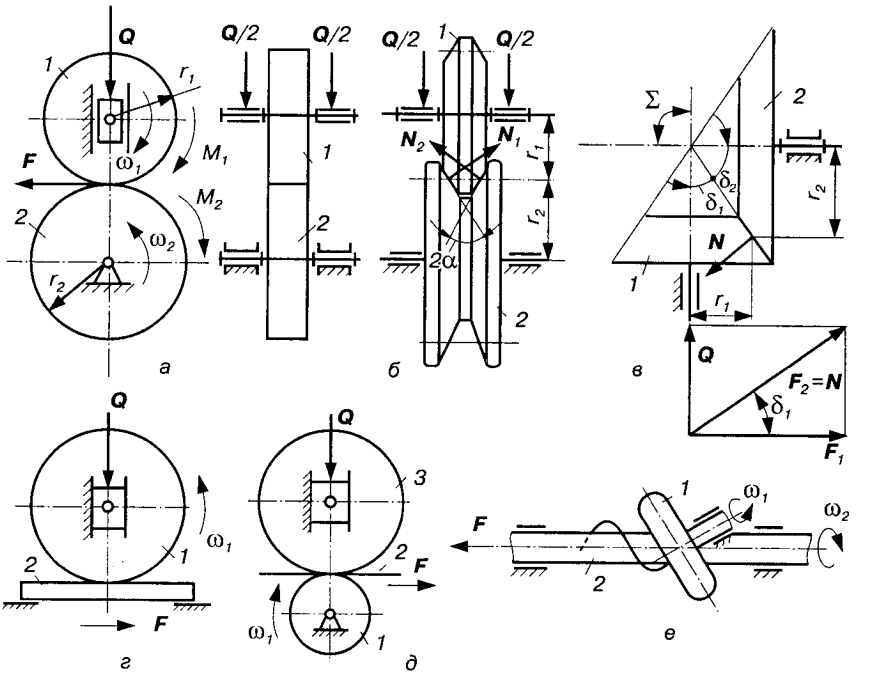


Рис. 8.2.

За характером руху вхідної й вихідної ланок фрикційні передачі поділяють на передачі для перетворення: обертового руху в обертовий (рис. 8.2, *а—в*); обертового в поступальний і навпаки (рис. 8.2, *г—е*).

Позитивними якостями фрикційних передач є простота конструкції, безшумність роботи, можливість здійснення передач із плавною (безступінчастою) зміною передаточного відношення, можливість проковзування фрикційних котків при перевантаженнях, що запобігає поломкам деталей механізмів, які приводяться в рух.

Недоліками фрикційних передач є: несталість передаточного відношення в результаті проковзування котків; необхідність у великих зусиллях притискання котків для забезпечення достатньої сили тертя, що викликає великі навантаження на вали та їх опори; обмежена потужність, яка передається (для циліндричної фрикційної передачі — до 10 кВт); підвищене спрацювання котків, в результаті якого виникає значний шум, порівняно низький ККД (для передач звичайного типу $\eta = 0{,}8—0{,}9$).

За відсутності проковзування між котками передаточне відношення передачі визначають за формулами (8.1)—(8.3). Проте при роботі фрикційної передачі завжди має місце проковзування, що виражається деяким зменшенням швидкості вихідного котка відносно значення ω_2, одержаного із співвідношення (8.3). Величина ковзання залежить від конструкції передачі, навантаження, інших факторів і враховується коефіцієнтом

$$\varepsilon = (\omega_2' - \omega_2) / \omega_2' = (n_2' - n_2) / n_2', \qquad (8.8)$$

де ω_2', ω_2 і n_2', n_2 — відповідно теоретичні та фактичні кутові швидкості та частоти обертання вихідного котка.

З урахуванням ковзання передаточне відношення

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}. \qquad (8.9)$$

Для гарантії передачі руху сила тертя F_f повинна бути не менша за колове зусилля F (рис. 8.2, *а*). Оскільки силу тертя у зоні контакту визначають загальною формулою $F_f = fQ$, сила натиску котків

$$Q \geq \frac{F}{f}. \qquad (8.10)$$

Сила натиску Q передається на опори котків і спричинює їхнє спрацювання. Тому намагаються отримати необхідну силу F при меншому натиску. Для цього застосовують клинові фрикційні колеса (рис. 8.2, *б*). У цих передачах для визначення колового зусилля можна наближено скористатись коефіцієнтом тертя для клинових повзунів $f' = f/\sin\alpha$, де α — кут нахилу бічних стінок котка. Тоді колове зусилля

$$F \leq F_f, \text{ або } F \leq \frac{Qf}{\sin\alpha}.$$

При непаралельних валах (але таких, що перетинаються) застосовують конічні фрикційні колеса (рис. 8.2, *в*). У цих передачах колесо *1* притискається до колеса *2* силою Q. Розкладаючи силу Q на два напрямки (перпендикулярний до осі підшипника і перпендикулярний до спільної твірної конусів), дістаємо $F_1 = Q/\text{tg}\,\delta_1$, $F_2 = Q/\sin\delta_1$. Тоді колове зусилля

$$F \leq F_f = Nf = \frac{Qf}{\sin\alpha}, \text{ або } F \leq Qf',$$

де $N = -F_2$; $f' = f/\sin\alpha$.

Отже, колове зусилля у конічних фрикційних передачах визначають за формулою для клинових фрикційних коліс.

8.4. Фрикційні варіатори швидкості

Передачі, що забезпечують плавну (безступінчасту) зміну кутової швидкості вихідної ланки при сталій швидкості вхідної, називають ***варіаторами швидкості***, або просто ***варіаторами***. Широко розповсюджені фрикційні варіатори, які використовуються у металорізальних верстатах, ковальсько-пресовому обладнанні, машинах текстильної, паперової, хімічної, харчової промисловості, на транспорті, у механізмах приладів тощо. Зокрема, деякі типи варіаторів використовують у приладобудуванні для виконання математичних операцій (інтегрування, логарифмування, піднесення до квадрата, диференціювання тощо).

Використання варіаторів як безступінчастих регуляторів швидкості (за необхідності — з програмним керуванням) значно зростає у зв'язку з можливістю їх використання для автоматизації керування виробничими процесами, оскільки вони легко вписуються у сучасні системи автоматичного керування.

На рис. 8.3 показано основні кінематичні схеми фрикційних варіаторів швидкості. Робота варіаторів характеризується тим, що при сталій кутовій швидкості ω_1 вхідної ланки кутова швидкість ω_2 вихідної ланки змінюється в межах $\omega_{2max}/\omega_{2min}$. Тоді передаточне відношення змінюється у діапазоні від $i_{max} = \omega_1/\omega_{2min}$ до $i_{min} = \omega_1/\omega_{2max}$.

Основною характеристикою будь-якого варіатора є ***діапазон регулювання*** $D = \omega_{2max}/\omega_{2min} = i_{max}/i_{min}$. Для більшої частини варіаторів $D \le 6$, для деяких може бути $D = 10—12$.

Розглянемо роботу деяких варіаторів швидкості. У ***лобовому*** фрикційному варіаторі (рис. 8.3, *а*) диск *2*, жорстко зв'язаний з віссю O_2, обертається у нерухомому підшипнику, ролик *1* може переміщатися вздовж осі O_1. Точка M контакту може займати різні положення, які визначаються положеннями ролика *1*, тобто відстанню r_2. Передаточне відношення такої передачі

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{r_2}{r_1}. \qquad (8.11)$$

У зв'язку з тим, що r_2 можна плавно змінювати, передаточне відношення (8.11) також змінюється плавно.

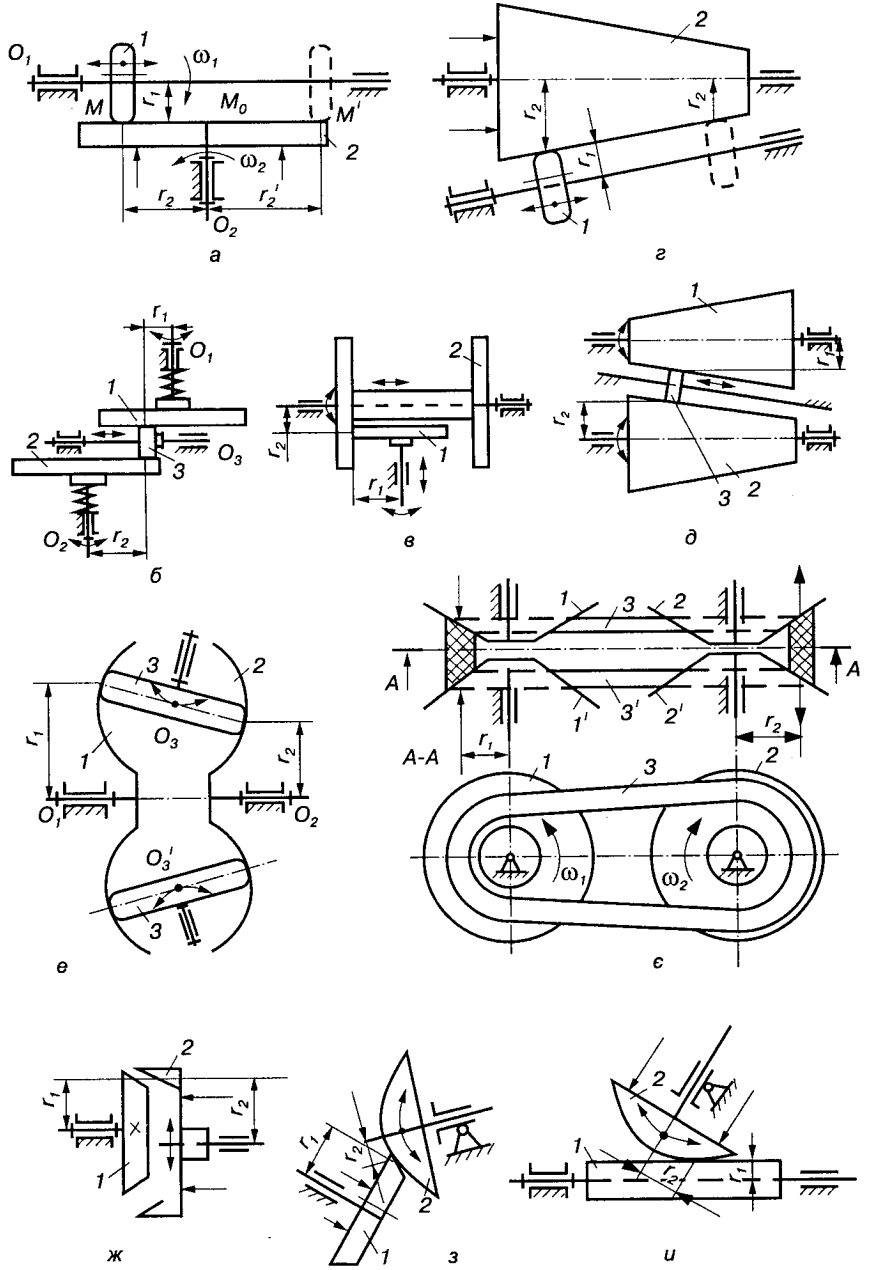


Рис. 8.3.

Якщо точка контакту M потрапляє у точку M_0, яка лежить на осі O_2, диск *2* буде нерухомим ($r_2 = 0$). При переміщенні точки контакту M за точку M_0 (наприклад, у положення M') диск *2* змінює напрямок обертання. Отже, передаточне відношення може змінюватися у таких межах:

$$0 \le i_{12} \le \left| \frac{r_{2\max}}{r_1} \right|, \tag{8.12}$$

де r_{2max} — найбільший радіус диска *2*.

На рис. 8.3, *б* зображено лобовий варіатор швидкості з двома дисками *1* і *2* та проміжним роликом *3*. Передаточне відношення між паралельними осями O_1 і O_2

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_3}{r_1}\frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{8.13}$$

Отже, передаточне відношення такого варіатора не залежить від радіуса ролика *3*. Його передаточне відношення можна змінювати в межах

$$\frac{r_{2\min}}{r_{1\max}} \le i_{12} \le \frac{r_{2\max}}{r_{1\min}}. \tag{8.14}$$

У фрикційних передачах застосовують ***реверсивні лобові*** варіатори (рис. 8.3, *в*), в яких швидкість обертання регулюється положенням диска *1*, а реверсування (зміна напряму обертання) досягається переключенням блока дисків *2*.

На рис. 8.3, *г* зображено варіатор швидкості ***з конічним барабаном*** *2*, вздовж твірної якого може пересуватися ролик *1*. Передаточне відношення

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} \tag{8.15}$$

і може змінюватися в межах

$$\frac{r_{2\min}}{r_1} \le i_{12} \le \frac{r_{2\max}}{r_1}. \tag{8.16}$$

Для передачі руху між паралельними осями використовують фрикційні варіатори з конічними барабанами *1* і *2* (рис. 8.3, *д*), що мають однакові кути конусності, і проміжним роликом *3*. Передаточне відношення такої передачі визначається за формулою (8.13) і може змінюватися в межах, що визначені залежністю (8.14).

Плавну зміну швидкості вихідної ланки можна досягнути за допомогою ***торового варіатора*** (рис. 8.3, *е*), розробленого у ЦНДІТМаші В. А. Світозаровим. На кінцях валів O_1 і O_2 закріплено диски *1* і *2*, що мають профіль тора (поверхня обкреслена кривими сталої кривизни). Між цими дисками розташовано диски *3*, які взаємодіють з ними. Силове замикання для утворення дотичної сили тертя здійснюється спеціальним пристроєм (на рисунку не показано). Регулювання швидкості вихідної ланки досягається узгодженим поворотом дисків навколо осей, що проходять через точки O_3 і O_3'. Передаточне відношення торового варіатора визначають залежностями (8.13), (8.14).

Широко використовується варіатор, зображений на рис. 8.3,*є*, так званий ***клинопасовий варіатор***, основу якого складають дві пари дисків *1—1′* і *2—2′* та клиновий пас *3*. Відстань між дисками синхронно регулюється так, що при збільшенні відстані між дисками *1—1′* відстань між дисками *2—2′* відповідно зменшується. Це дає змогу при сталій довжині паса змінювати радіуси r_1 та r_2 і тим самим плавно змінювати передаточне відношення, яке визначають за формулами (8.13), (8.14).

Принцип роботи ***конічного*** та ***сферичного*** варіаторів швидкості (рис. 8.4, *ж, з, і*) зрозумілий з їхніх кінематичних схем. При регулюванні може змінюватися як положення вихідної ланки, так і радіус r_2. Передаточне відношення визначається за формулою (8.11).

8.5. Фрикційні передачі з гнучкими ланками

У таких передачах рух між вхідною та вихідною ланками здійснюється за рахунок тертя проміжної гнучкої ланки зі шківом (рис. 8.4). Гнучка ланка, як правило, виконується у вигляді нескінченного (замкнутого) паса, стрічки, каната або нитки. Відповідно такі передачі називають пасовими, стрічковими, канатними тощо.

У машинах і приладах поширені пасові передачі зі сталим передаточним відношенням (рис. 8.4, *а*), рідше — з регульованим безступінчасто (рис. 8.4, *б*) або ступінчасто (рис. 8.4, *в*) передаточними відношеннями. Передаточне відношення таких передач визначають за формулами, наведеними для фрикційних передач (8.9), де d_1, d_2 — діаметри шківів; ε — коефіцієнт відносного ковзання паса ($\varepsilon = 0{,}005—0{,}020$). Рекомендується брати для силових передач $i < 5$, для малонавантажених $i = 8—10$;

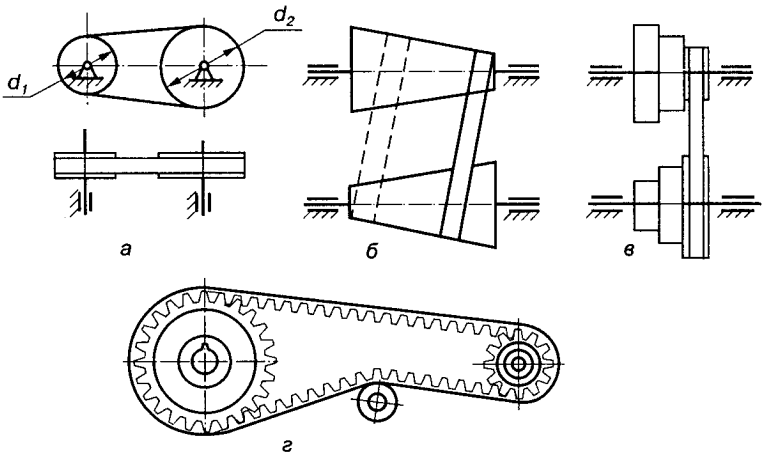


Рис. 8.4.

для механізмів приладів $i \leq 16$. Для підвищення точності передаточного відношення в передачах можна використовувати зубчасті паси (рис. 8.4, *г*).

Позитивними якостями пасових передач, що визначають галузі їхнього використання, є: а) можливість передачі руху на значні відстані; б) плавність і безшумність роботи; в) здатність полегшувати ударні навантаження і захищати інші механізми від перевантаження; г) можливість роботи завдяки еластичному зв'язку і проковзуванню паса на високих швидкостях; д) мала вартість.

Недоліками пасових передач є: а) значні габарити (в кілька разів більші, ніж у зубчастих); б) відносне ковзання паса; в) підвищені сили, що діють на вали та опори, оскільки для передачі руху за рахунок сил тертя треба створити значні сили натягу паса; г) як правило, необхідність оснащення пристроями для натягу паса; д) необхідність оберігати пас від попадання на нього мастила; е) мала довговічність пасів у швидкохідних передачах.

ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

9.1. Загальні відомості

Зубчастою (зубчатою) передачею називають триланковий механізм, у якому два рухомі зубчасті (зубчаті) колеса (або рухоме колесо і рейка) утворюють із нерухомою ланкою обертову (або обертову і поступальну) пару, а між собою — вищу пару. У таких механізмах передача руху здійснюється механічним зачепленням — зубів вхідного колеса за зуби вихідного колеса замість сил тертя, як це має місце у фрикційних передачах. Обидва колеса (рис. 9.1) мають виступи (зуби) і западини такої форми, що зуби одного колеса входять у западини другого, утворюючи при цьому вищу кінематичну пару. Кожний зуб колеса можна розглядати як окремі кулачки.

Зубчасте колесо передачі з меншим числом зубів (при їх рівності — вхідне зубчасте колесо) називають шестірнею, друге зубчасте колесо передачі — колесом.

У найпростішому випадку зубчасту передачу можна уявити собі як два циліндричні котки (поверхні) з радіусами r_{w_1} і r_{w_2}, що котяться один по одному без ковзання, маючи точку дотику $П$. Поверхні, що перекочуються відносно одна одної без ковзання, називаються ***початковими,*** відповідно й кола радіусами r_{w_1} і r_{w_2} називають так само.

Точку $П$ дотику цих кіл називають ***полюсом зубчастого зачеплення,*** а лінію, що проходить через точку $П$ паралельно осям обертання коліс і яка є миттєвою

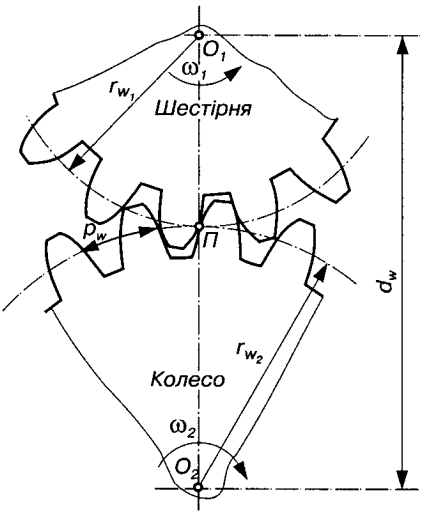


Рис. 9.1.

віссю відносних швидкостей зубчастих коліс, називають ***полюсною лінією.*** Початкові поверхні зубчастих коліс є аксоїдами у відносному русі (аксоїдами називають поверхні, які описує миттєва вісь відносного руху коліс передачі у системі координат кожного з коліс).

Відстань між осями обертання двох зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні, називають ***міжосьовою відстанню.*** Як видно з рис. 9.1,

$$\alpha_w = r_{w_1} + r_{w_2}. \qquad (9.1)$$

Передаточне відношення кутових швидкостей зубчастих коліс виражається, як і у фрикційних передачах, формулою

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{r_{w_2}}{r_{w_1}}. \qquad (9.2)$$

Якщо виразити довжину початкового кола через ***початковий крок*** p_w, тобто $2\pi r_{w_i} = p_w z_i$, і підставити значення радіусів початкових кіл $r_{w_i} = \frac{p_w z_i}{2\pi}$ у залежність (9.2), то можна записати передаточне відношення через числа зубів коліс:

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \pm\frac{2\pi p_w z_2}{2\pi p_w z_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}. \qquad (9.3)$$

Знак "+" приймають для внутрішнього зачеплення, а "–" — для зовнішнього.

Коловим кроком зубчастого зачеплення p називають відстань між однойменними точками профілів двох сусідніх зубів (рис. 9.1), виміряних по будь-якому колу. Коловий крок

$$p = \pi d/z, \qquad (9.4)$$

де d — діаметр кола, на якому виміряний крок; z — число зубів колеса.

Значення кроку p залежить від діаметра (радіуса) кола, на якому його виміряють, а тому, щоб розрізняти значення кроку на різних колах, вказують нижні індекси, як це, наприклад, виконано для початкового кроку p_w.

Зубчасті передачі складають найбільш розповсюджену й важливу групу механічних передач. Їх використовують у багатьох галузях і за різних умов роботи: від годинників і приладів до найскладніших машин, для передачі колових сил від мілініьютонів до кількох меганьютонів, для моментів до 10^7 Н · м і потужностей від безмежно малих до десятків тисяч кіловат, з коловими швидкостями від 2 м/хв до 140 м/с, з діаметрами від частки міліметра до 10 м і більше. Особливо доцільне використання зубчастих передач, коли необхідно забезпечити стале передаточне відношення або передати великі потужності. Отже, зубчасті передачі порівняно з іншими механічними передачами мають важливі ***переваги***: а) малі габарити; б) високий ККД; в) високу надійність у роботі та простоту в обслуговуванні; г) сталість передаточного відношення через відсутність проковзування; д) можливість використання у широкому діапазоні моментів, швидкостей і передаточних відношень.

До ***недоліків*** зубчастих передач можна віднести: вимоги високої точності виготовлення, шум при роботі з великими швидкостями обертання коліс і можливість появи вібрацій та ударних навантажень при недостатній точності виготовлення, неможливість плавного регулювання передаточного відношення.

9.2. Типи зубчастих передач

Залежно від розміщення осей валів, між якими здійснюється передача обертового руху, зубчасті передачі поділяються на три типи:

- передачі циліндричними зубчастими колесами між паралельними валами;
- передачі конічними зубчастими колесами між валами, осі яких перетинаються;
- передачі гіперболоїдними зубчастими колесами між валами, осі яких схрещуються.

1. При ***паралельних осях*** зубчастих коліс маємо плоский зубчастий механізм. Якщо зуби в циліндричних колесах розміщені паралельно осі колеса, то такі зуби називають ***прямими,*** а саме колесо — ***прямозубим*** (рис. 9.2, *а*). Це найпростіший і найпоши-

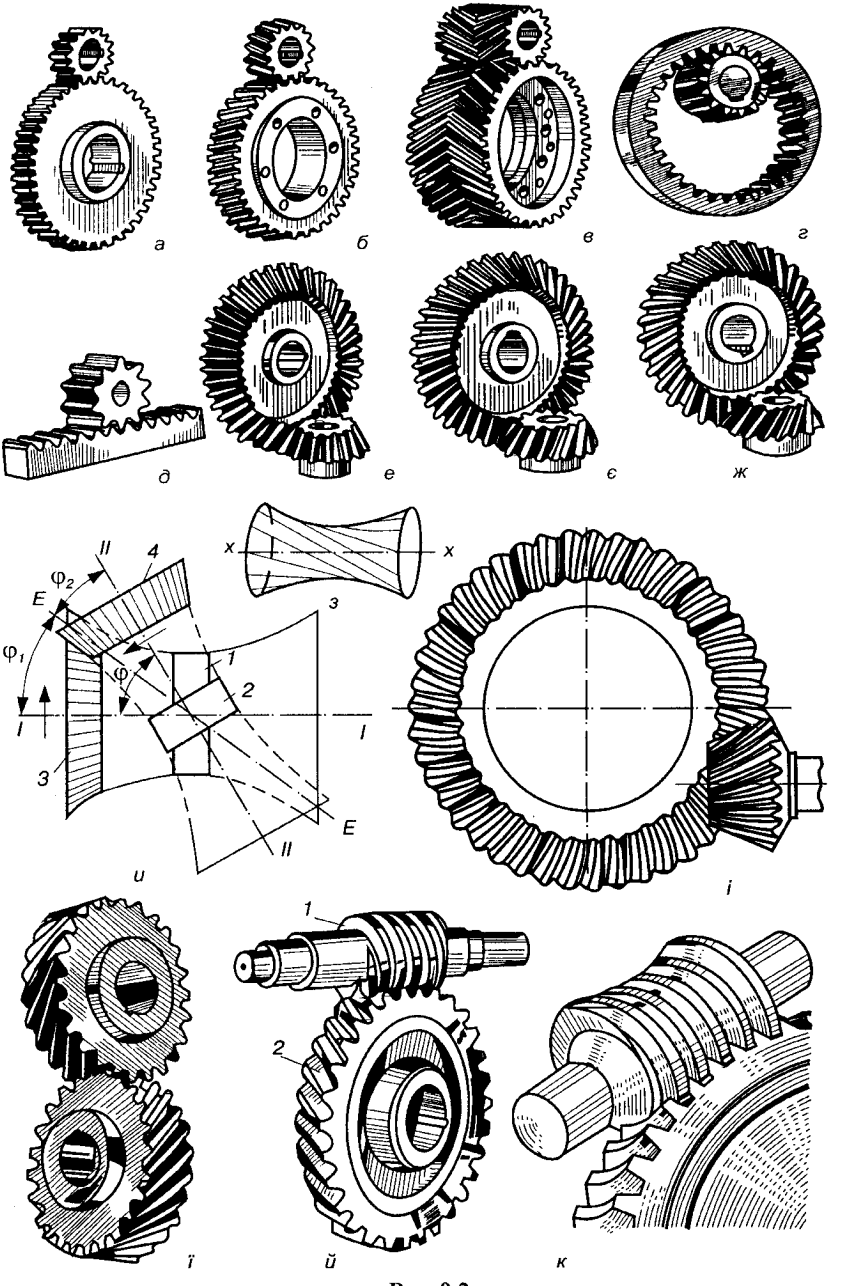


Рис. 9.2.

реніший вид зубчастих коліс. Проте їх слід використовувати при малих колових швидкостях коліс ($v < 3$—6 м/с) і не дуже великих навантаженнях. Це пояснюється тим, що зуби в такій передачі входять у контакт відразу по всій своїй довжині. Тому незначні помилки при виготовленні коліс та деформації деталей передачі супроводжуються шумом, що часто призводить до порушення рівномірного лінійного контакту і погіршення плавності роботи передачі. Отже, такі передачі працюють із шумом, мають невисоку плавність роботи і малу несучу здатність.

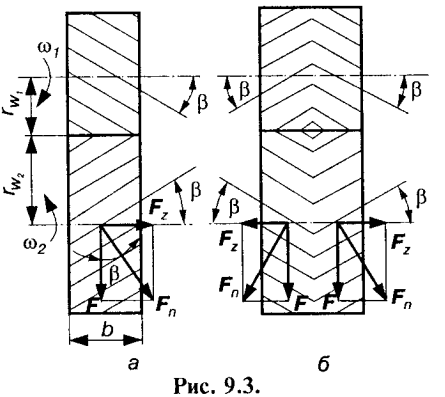


Рис. 9.3.

При великих колових швидкостях ($v > 3$ м/с) і великих навантаженнях використовують ***косозубі (тангенціальні)*** колеса (рис. 9.2, *б*), в яких зуби розміщені по гвинтовій лінії, тобто під кутом до твірної початкового циліндра. Передачі з косозубими колесами характеризуються високою плавністю зачеплення і меншим шумом при роботі, мають високу несучу здатність. Це пояснюється тим, що зубці входять у зачеплення поступово, і в зачепленні перебуває кілька пар зубів. Основним недоліком косозубих передач є наявність осьових сил, які діють як на самі колеса, так і на опори їхніх валів або осей. Як видно з рис. 9.3, *а*, величина осьової F_z залежить від кута нахилу зуба β($F_z = F\,\mathrm{tg}\beta$, де F — колова сила — складова нормальної сили F_n, що діє на зуб при передачі руху).

Для того, щоб позбутися осьових навантажень на зубчасті колеса, використовують ***шевронні*** зубчасті колеса (рис. 9.2, *в*), в яких гвинтові лінії зубів спрямовано в протилежні боки симетрично середині колеса. При такому розміщенні зубів осьові сили F_z взаємно зрівноважуються всередині колеса (рис. 9.3, *б*). Проте треба зазначити, що виробництво шевронних коліс значно складніше та дорожче, ніж простих косозубих, а тому їх використовують лише в дуже відповідальних випадках.

Внутрішнє та рейкове зачеплення (див. рис. 9,2, *г, д*) — це різновиди передач циліндричними зубчастими колесами. У першому випадку зуби одного колеса нарізані на внутрішній

поверхні циліндричного тіла, у другому — колесо перетворилось у рейку. При цьому рейку можна розглядати як зубчасте колесо діаметром, що прямує до нескінченності. Рейкове зачеплення використовують для перетворення обертового руху в поступальний або навпаки.

2. Для передачі обертання між валами, осі яких перетинаються, використовують ***конічні колеса*** (рис. 9.2, *е—ж*). Найчастіше їх використовують із кутом перетину між осями валів (міжосьовим кутом) $\Sigma = 90°$. Таку передачу називають ***ортогональною.*** Якщо поверхні зубців паралельні твірним початкових конусів, то такі зубчасті колеса називають ***прямозубими*** (рис. 9.2, *е*). Вони мають усі переваги та недоліки, властиві прямозубим циліндричним зубчастим передачам. Для забезпечення кращих умов роботи за великих швидкостей і навантажень у конічних колесах доцільно використовувати ***гвинтові*** або ***косі зуби*** (рис. 9.2, *є*). Такі передачі працюють більш плавно і безшумно. Шевронні конічні зубчасті колеса не використовують через їх нетехнологічність. На практиці широке розповсюдження одержали конічні колеса з ***криволінійним зубом*** (рис. 9.2, *ж*), лінії зуба яких — дуга кола, евольвента, циклоїдні криві. Такі колеса нарізати простіше, ніж косозубі.

3. Для передачі обертання між валами, осі яких схрещуються, можна використовувати ***гіперболоїдні зубчасті колеса,*** в основу цих коліс покладені гіперболоїди обертання (рис. 9.2, *з*), твірні яких — прямі лінії. Якщо уздовж твірних *ЕЕ* (рис. 9.2, *и*) нарізати зуби, матимемо гіперболоїдні зубчасті колеса, які дають змогу передавати обертовий рух між осями, що схрещуються. Внаслідок того, що такі зубчасті колеса важко виготовляти, на практиці розповсюджені їх спрощені варіанти, одержані вирізанням різних ділянок гіперболоїдів. Якщо вирізати з гіперболоїда частину його горловини, дістанемо циліндричні зубчасті колеса *1—2*, на віддаленні від горловини — конічні зубчасті колеса *3—4*. Такі зубчасті передачі називають у першому випадку ***гелікоїдними*** або ***гвинтовими*** (рис. 9.2, *ї*), у другому — ***гіпоїдними*** (рис. 9.2, *і*). Окремим випадком передач гвинтовими колесами є ***черв'ячна передача*** (рис. 9.2, *й*). На черв'яку *1* кут нахилу зубів дуже великий, тому зуб встигає кілька разів обвити тіло черв'яка; на черв'ячному колесі *2* цей кут відповідно малий, і таке колесо нагадує звичайне косозубе колесо. Черв'як може бути циліндричним (рис. 9.2, *й*) або глобоїдним (рис. 9.2, *к*).

9.3. Геометричні параметри циліндричного зубчастого колеса

Основні параметри зубчастих коліс розглянемо на прикладі циліндричного зубчастого колеса (рис. 9.4, *а*).

Зубчасте колесо складається з ***тіла*** зубчастого колеса *1* і ***зубчастого вінця*** *2*. Зубчастий вінець складається із ***зубів*** *3* і ***западин*** *4*. Циліндрична поверхня, що відокремлює зуби від тіла зубчастого колеса, називається ***поверхнею западин*** *5* (рис. 9.4, *б*). Поверхня, що обмежує зуби з протилежного від тіла зубчастого колеса боку, називається ***поверхнею вершин*** *6*. Частина поверхні западин зубчастого колеса, що належить зубу, має назву ***основи зуба*** *7*, а частина поверхні вершин, що належить зубу, — ***вершини зуба*** *8*.

Поверхня, яка обмежує зуб із боку западин, називається ***бічною***. Вона складається з ***головної*** *9* (рис. 9.4, *в*) і ***перехідної*** *10*

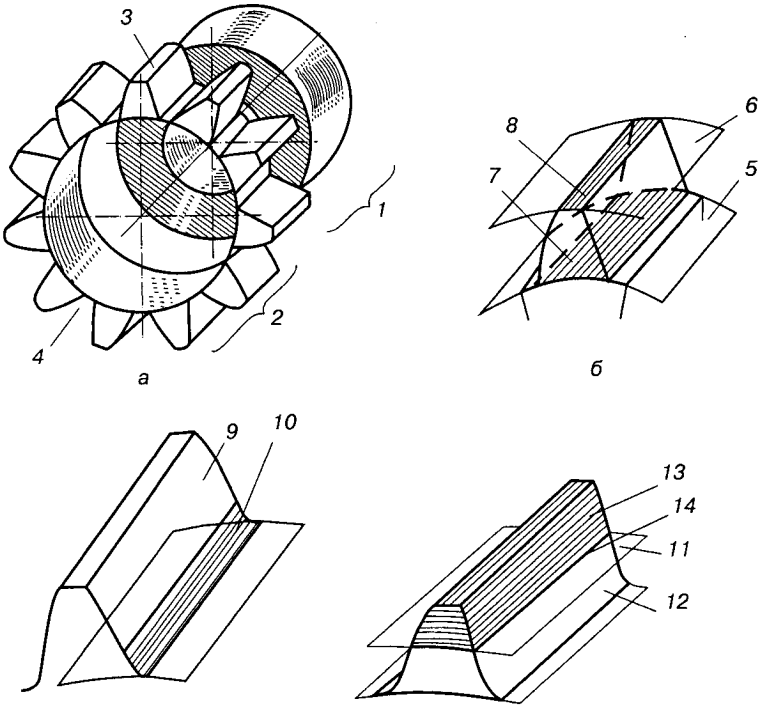


Рис. 9.4.

поверхонь. ***Головною*** будемо називати частину бічної поверхні, яка при взаємодії з такою самою поверхнею зуба іншого колеса може передавати рух із заданими швидкостями. Поверхні елементів вищої кінематичної пари, що забезпечують заданий рух, називаються ***спряженими поверхнями. Перехідна поверхня*** з'єднує головну поверхню з поверхнею западин. Частина головної поверхні, що взаємодіє з поверхнею зуба спряженого зубчастого колеса, називається ***активною*** поверхнею зуба.

Враховуючи те, що зубчасті передачі циліндричними колесами плоскі, всі її геометричні параметри можна розглядати в торцевому перетині (перпендикулярному до осі колеса). Тому замість поверхні западин розглядають коло западин, поверхні вершин — коло вершин, головної та перехідної поверхонь зуба — головний і перехідний профілі зуба, активної поверхні зуба — активний профіль зуба.

Розміри зубчастих коліс зручно задавати в частках певної лінійної величини, що пов'язана із зубом. Коловий крок для цієї функції не підходить, оскільки є ірраціональним числом. Такою величиною вибрано ***модуль m*** зубчастого колеса, який є відношенням колового кроку p до числа π. Отже,

$$m = p/\pi. \tag{9.5}$$

Модуль вимірюється у міліметрах і є величиною стандартною. Щоб пояснити вибір цієї величини, виразимо довжину деякого кола діаметром d (рис. 9.5) через число зубів колеса z:

$$\pi d = pz,$$

звідки

$$d = \frac{p}{\pi} z,$$

або з урахуванням (9.5) маємо

$$d = mz, \text{ або } r = \frac{d}{2} = \frac{mz}{2}. \tag{9.6}$$

Модуль m для одного й того самого колеса, так само як і крок p, залежить від діаметра кола, до якого він належить. Прийнято коло, для якого знаходять стандартне значення модуля, називати ***ділильним.*** З урахуванням (9.5) можна сказати, що ділильним називається коло, діаметр якого визначають добутком модуля на число його зубів.

У країнах з дюймовою системою одиниць вимірювання замість модуля m використовується пітч $п = z/d''$, де діаметр d ділильного (пітчевого) кола виражається в дюймах. За пітчем можна розраховувати модуль, мм: $m = 25{,}4\ п$. Зубчасті колеса метричної та пітчевої систем невзаємозамінні, оскільки стандартним модулям відповідають нестандартні пітчі і навпаки.

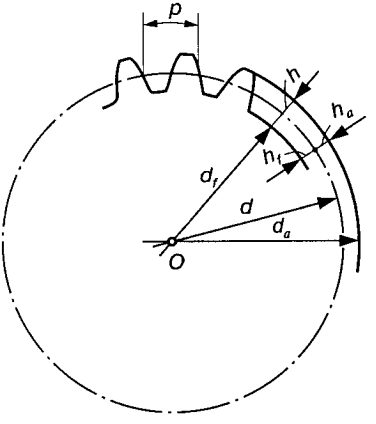


Рис. 9.5.

Ділильна поверхня *11* ділить зуб на дві частини (рис. 9.4, *г*): ***ділильну ніжку*** *12* і ***ділильну головку*** *13*.

Висота ділильної ніжки

$$h_f = r - r_f = \frac{d}{2} - \frac{d_f}{2}, \tag{9.7}$$

ділильної головки

$$h_a = r_a - r = \frac{d_a}{2} - \frac{d}{2}; \tag{9.8}$$

повна висота зуба

$$h = h_f + h_a = r_a - r_f = \frac{d_a - d_f}{2}, \tag{9.9}$$

де r, d — відповідно радіус і діаметр ділильного кола; r_a, d_a — радіус і діаметр кола вершин; r_f, d_f — радіус і діаметр кола западин.

Лінія *14* перетину бічної поверхні зуба з ділильною поверхнею (рис. 9.4, *г*) називається ***лінією зуба***. Залежно від розташування лінії зуба відносно осі колеса, як уже зазначалось, розрізняють ***прямий зуб*** (прямозубі колеса), лінія якого лежить в осьовій площині зубчастого колеса, і ***косий зуб*** (косозубі або шевронні колеса), лінія якого є гвинтовою лінією сталого кроку. Залежно від напрямку гвинтової лінії косозубі колеса можуть бути правими або лівими.

Зубчаста рейка *2* (рис. 9.6) — це сектор циліндричного зубчастого колеса, ділильний радіус якого нескінченно великий. В результаті цього ділильна поверхня (коло), поверхні вершин і запа-

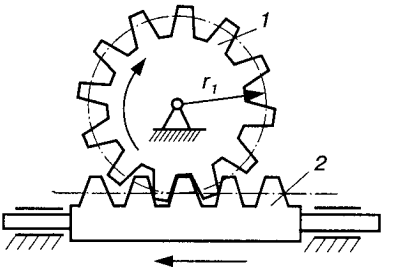


Рис. 9.6.

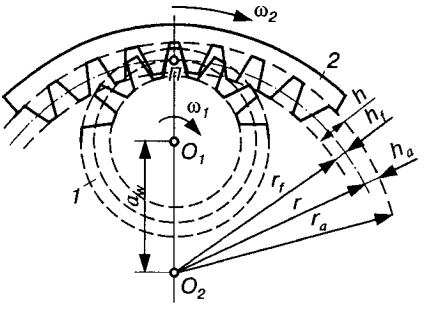


Рис. 9.7.

дин, відповідно головні бічні поверхні є паралельними площинами, тобто головний бічний профіль прямолінійний.

Для зубчастого колеса *2* із ***внутрішніми зубами*** (рис. 9.7) формули (9.4), (9.5) набувають вигляду

$$h_f = r_f - r = \frac{d_f}{2} - \frac{d}{2};\quad h_a = r - r_a = \frac{d}{2} - \frac{d_a}{2};\quad h = r_f - r_a = \frac{d_f}{2} - \frac{d_a}{2}.$$

Для позначення геометричних і кінематичних параметрів зубчастих коліс і зубчастої передачі використовується система цифрових і літерних індексів, які відносяться до:

0 — зуборізного інструмента та верстатного зачеплення;

1 — шестірні, черв'яка;

2 — колеса, черв'ячного колеса;

a — поверхні або кола вершин і головки зуба;

f — поверхні або кола западин і ніжки зуба;

b — основної поверхні (кола);

w — початкової поверхні, початкового кола або загального випадку передачі;

e — зовнішнього торцевого перерізу конічного зубчастого колеса;

i — внутрішнього торцевого перерізу конічного зубчастого колеса;

m — середнього перерізу конічного зубчастого колеса;

x — основного перерізу або довільно назначеного перерізу;

y — довільно назначеного концентричного кола;

c — плоского колеса;

v — еквівалентного циліндричного колеса;

n — нормального перетину;

t — торцевого перетину;

l — граничної точки профілю зубів;

p — нижньої точки активного профілю;

Δ — кола загострення вершин та западин.

Примітка: Якщо параметр належить до ділильної поверхні або ділильного кола, літерний індекс не ставиться. Встановлено такий порядок проставлення складних індексів: на першому місці індекси n, t, x, на другому — y, w, a, f, на третьому — e, i, m для конічних передач, на четвертому — 0, 1, 2.

У випадках, які виключають непорозуміння, допускається опускати деякі індекси. Так, для прямозубих коліс виключають індекси t і n, для конічних — m. Якщо які-небудь індекси пропускаються, то залишені переміщаються вперед. Якщо параметри належать взагалі до зубчастого колеса, то індекси 1 або 2 опускають.

Верхній індекс * означає коефіцієнт, який характеризує відповідний параметр. Верхня риска означає, що даний параметр характеризує розмір зубів за хордою або відстань до хорди, яку вимірюють.

9.4. Основна теорема зубчастого зачеплення

Однією з найважливіших умов роботи зубчастого зачеплення є збереження за час контакту пари зубів заданого передаточного відношення, тобто щоб початкові кола котились одне по одному без ковзання. Необхідно встановити, яким вимогам повинні задовольняти спряжені профілі зубів, щоб забезпечити цю умову.

Розглянемо пару зубчастих коліс (рис. 9.8), що перебувають у зачепленні. Нехай перше колесо є вхідним і обертається навколо нерухомої осі O_1 зі сталою швидкістю ω_1, а друге — вихідне, його кутова швидкість ω_2, вісь обертання — O_2. Точку контакту зубів позначимо через K, а її відстані від осей обертання — відповідно R_1 і R_2. При таких параметрах швидкість точки K першого колеса $v_{K_1} = \omega_1 R_1$ і спрямована перпендикулярно до радіуса R_1; другого колеса $v_{K_2} = \omega_2 R_2$ і перпендикулярна до радіуса R_2.

Розкладаємо вектори цих швидкостей на дві складові, які спрямуємо вздовж спільної нормалі $N—N$, проведеної до профілів зубів через точку K, і вздовж спільної дотичної $t—t$, що також проходить через точку K.

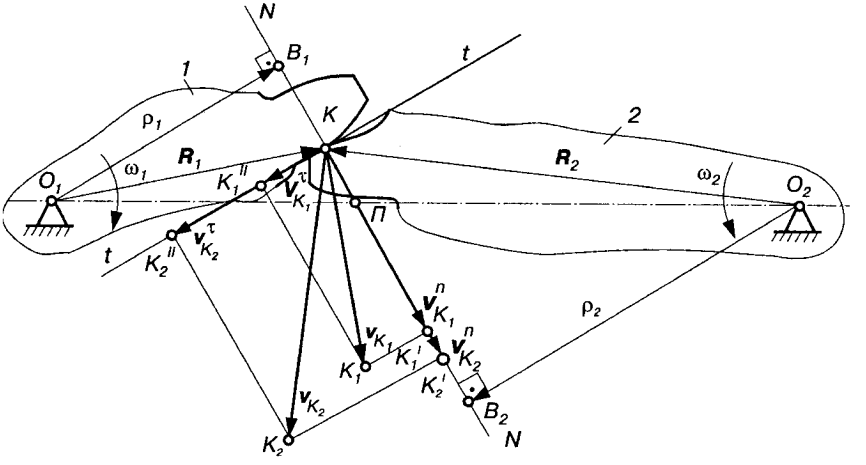


Рис. 9.8.

Розглянемо складові швидкості точки K на спільну нормаль $v_{K_1}^{n}$ і $v_{K_2}^{n}$ та встановимо зв'язок між ними. Ці складові повинні бути рівними між собою ($v_{K_1}^{n} = v_{K_2}^{n}$); в інших випадках, якщо $v_{K_1}^{n} > v_{K_2}^{n}$, зуб першого колеса повинен проникнути в зуб іншого колеса, що неможливо; якщо $v_{K_1}^{n} < v_{K_2}^{n}$, зуб першого колеса повинен відставати від зуба другого колеса і тим самим повинен порушуватися контакт, але цьому заважають зовнішні сили. Отже, ***для забезпечення безперервного контакту пари зубів необхідно, щоб проекції швидкостей точки контакту зубів на спільну нормаль були рівні між собою.***

Із подібності трикутників O_1B_1K і $KK_1'K_1$ та O_2B_2K і $KK_2'K_2$ складемо пропорції

$$\frac{\rho_1}{R_1} = \frac{v_{K_1}^{n}}{v_{K_2}}; \quad \frac{\rho_2}{R_2} = \frac{v_{K_2}^{n}}{v_{K_2}},$$

звідки

$$v_{K_1}^{n} = \frac{\rho_1 v_{K_1}}{R_1} = \omega_1 \rho_1; \quad v_{K_2}^{n} = \frac{\rho_2 v_{K_2}}{R_2} = \omega_2 \rho_2. \qquad (9.10)$$

Враховуючи, що в цих рівностях ліві сторони тотожні, справедлива рівність

$$\omega_1\rho_1 = \omega_2\rho_2,$$

звідки можна записати залежність для передаточного відношення:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (9.11)$$

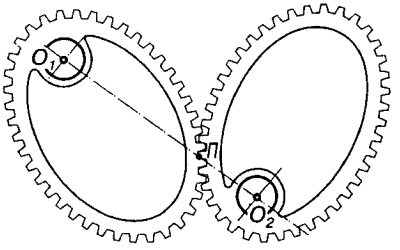


Рис. 9.9.

Нормаль $N—N$ перетинає лінію центрів O_1O_2 у точці $П$, яка називається ***полюсом зубчастого зачеплення.*** Із подібності трикутників $O_1B_1П$ і $O_2B_2П$ маємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2П}{O_1П}. \quad (9.12)$$

Тоді рівняння (9.11) можна записати у вигляді

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2П}{O_1П}. \quad (9.13)$$

Рівність (9.13) виражає зміст ***основної теореми зачеплення*** (теореми Вілліса), яка формулюється так: ***активні профілі зубів двох коліс повинні бути побудовані так, щоб нормаль у точці їх дотику в будь-який момент зачеплення проходила через точку П (полюс зачеплення), що ділить лінію центрів у відношенні, обернено пропорційному передаточному відношенню.***

Відстань між точками O_1 і O_2 визначає міжосьову відстань

$$a_w = O_1П + O_2П.$$

При змінному значенні передаточного відношення i_{12} полюс зачеплення $П$ займає на лінії центрів O_1O_2 змінне положення, що спостерігається в зубчастих механізмах із некруглими колесами (рис. 9.9). При сталому значенні i_{12} полюс зачеплення завжди знаходиться в одній і тій самій точці $П$ на лінії O_1O_2.

Якщо кутові швидкості ω_1 і ω_2 мають різні знаки, то $i_{12} < 0$ і полюс зачеплення $П$ лежить між точками O_1 і O_2. Цей вид зачеплення називається ***зовнішнім.*** Якщо кутові швидкості ω_1 і ω_2 мають один знак, то $i_{12} > 0$ і полюс зачеплення $П$ лежить за межами відрізка O_1O_2 (див. рис. 9.7). Такий вид зачеплення називають ***внутрішнім.***

Якщо при передачі обертового руху між осями O_1 і O_2 (див. рис. 9.8) передаточне відношення стале ($i_{12} = \text{const}$), то полюс зачеплення займає постійне положення, яке задовольняє

умову (9.13). Відрізки $O_1П$ і $O_2П$ є радіусами початкових кіл r_{w_1} і r_{w_2}, а ρ_1 і ρ_2 — радіусами основних кіл.

Теоретично для забезпечення основної теореми зачеплення профілі зубів можна побудувати різними кривими. У техніці (особливо в машинобудуванні) найбільш поширений евольвентний профіль зубів, рідше використовується циклоїдне зачеплення (здебільшого в приладобудуванні та годинниковій промисловості).

9.5. Ковзання профілів зубів

Розглянемо тепер інші складові швидкості точки контакту — $v^{\tau}_{K_1}$ і $v^{\tau}_{K_2}$. Ці складові не рівні між собою, інакше повинні бути рівні між собою швидкості v_{K_1} і v_{K_2} як за величиною, так і за напрямком. Як видно з рис. 9.8, така рівність можлива лише в одному положенні механізму, коли точка K контакту зубів буде збігатися з полюсом $П$. Для всіх інших положень ланок передачі $v^{\tau}_{K_1} \neq v^{\tau}_{K_2}$. В результаті цього має місце відносне ковзання профілів зубів у напрямку їх спільної дотичної $t—t$. Причому, чим далі знаходиться точка K від полюса зачеплення, тим більша швидкість ковзання. Ковзання зубів є основною причиною втрат енергії на тертя спрацювання.

Як видно з рис. 9.8, швидкість ковзання профілів зубів

$$v_S = v^{\tau}_{K_2} - v^{\tau}_{K_1}. \tag{9.14}$$

Можна показати, що для зовнішнього зачеплення

$$v_S = ПК(\omega_1 + \omega_2); \tag{9.15}$$

для внутрішнього зачеплення

$$v_S = ПК(\omega_1 - \omega_2). \tag{9.16}$$

Отже, чим далі розташована точка контакту K відносно полюса зачеплення $П$, тим більша швидкість ковзання.

При одній і тій самій швидкості ковзання спрацювання у спряжених профілях може бути різним. Для кількісної оцінки спрацювання вводиться поняття ***питомого ковзання зубів, під яким розуміють відношення швидкості ковзання*** v_S ***точки контакту зубів до дотичної складової*** $v^{\tau}_{K_i}$ ***швидкості точки контакту відповідного колеса*** ($i = 1; 2$), тобто

$$\vartheta_i = \frac{v_S}{v^{\tau}_{K_i}}. \qquad (9.17)$$

Для побудови діаграм питомого тиску можна використати такі формули [39]:

$$\vartheta_1 = 1 + i_{21} - \frac{e}{x} i_{21};$$

$$\vartheta_2 = 1 + i_{12} - \frac{e}{e - x} i_{12}, \qquad (9.18)$$

де $e = B_1B_2$ — довжина теоретичної лінії зачеплення (див. рис. 9.8); $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1$; $i_{21} = \omega_2 / \omega_1 = z_1 / z_2$; x — відстань від точки B_1 дотику лінії зачеплення з основним колом першого колеса, яку відраховуємо у напрямку до точки B_2.

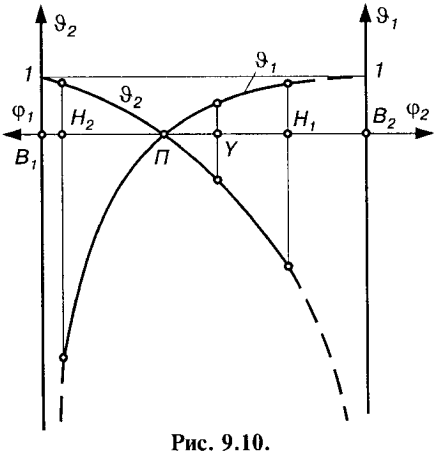


Рис. 9.10.

На рис. 9.10 показано приклади діаграм питомого ковзання $\vartheta_i = \vartheta_i(\varphi_i)$. При цьому треба враховувати, що кут повороту зубчастого колеса пропорційний відрізкам лінії B_1B_2.

У полюсі зачеплення питоме ковзання дорівнює нулю, отже, профілі перекочуються один по одному без ковзання.

На початкових головках зубів, що розташовані між колом вершин і початковим колом, питоме ковзання невелике; на початкових ніжках (між початковим колом і колом западин) питоме ковзання значно більше, ніж на початкових головках. На початковій ніжці першого колеса (шестірні) питоме ковзання ϑ_1 значно більше, ніж на початковій ніжці іншого колеса. Це означає, що спрацювання ніжки зуба шестірні при роботі передачі буде значно більшим, ніж спрацювання початкової ніжки зуба колеса.

9.6. Властивості й рівняння евольвенти кола

Для побудови головного профілю зубів циліндричних зубчастих коліс, що використовуються в машинобудуванні, найперше застосовується евольвентний профіль. Плоскою ***евольвентою кола*** називають траєкторію будь-якої точки, наприклад A (рис. 9.11),

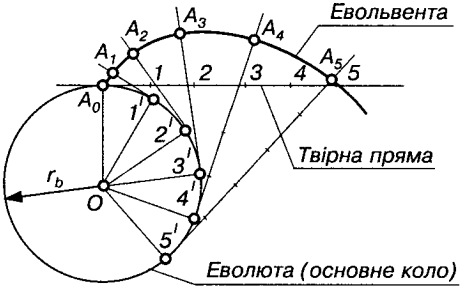


Рис. 9.11.

прямої лінії, яка перекочується без ковзання по колу радіуса r_b; таке коло називають ***евольютою,*** або ***основним колом,*** а пряму — ***твірною прямою.***

Побудова евольвенти кола зображена на рис. 9.11. Проводимо до основного кола твірну пряму, яка дотикається до нього у точці A_0. Потім перекочуємо твірну пряму по основному колу без ковзання. Для цього від точки A_0 відкладаємо на твірній прямій ряд однакових відрізків $A_0 - 1$, $1 - 2$, $2 - 3$ і т. д. На основному колі від цієї ж точки відкладаємо дуги $\overset{\smile}{A_0 - 1}$, $\overset{\smile}{1' - 2'}$, $\overset{\smile}{2' - 3'}$ і т. д., що дорівнюють цим відрізкам.

При перекочуванні прямої по колу без ковзання точка *1* збігається з точкою *1′*, точка *2* — з точкою *2′* і т. д. Проведемо через точки *1′*, *2′*, *3′* і т. д. дотичні до кола (для точної побудови дотичної слід спочатку провести радіус у відповідну точку, а потім провести до нього перпендикуляр) і відкладаємо на них з точок дотику відрізки $1'—A_1$, $2'—A_2$, $3'—A_3$ і т. д., що дорівнюють відповідно відрізкам прямої $A_0—1$, $A_0—2$, $A_0—3$ і т. д. (або дугам $\overset{\smile}{A_0 - 1'}$, $\overset{\smile}{A_0 - 2'}$, $\overset{\smile}{A_0 - 3'}$ і т. д.). З'єднуючи точки A_0, A_1, A_2 і т. д. плавною кривою, одержуємо евольвенту.

Широке використання евольвенти при проектуванні профілів зубів пояснюється низкою важливих властивостей. Відмітимо ***основні властивості евольвенти.***

1. *Твірна пряма завжди нормальна до евольвенти.* Дійсно, точка дотику твірної прямої з основним колом є при утворенні евольвенти миттєвим центром обертання твірної прямої, а тому відповідні відрізки ($1'—A_1$, $2'—A_2$, $3'—A_3$ і т. д.) є *миттєвими радіусами кривизни* евольвенти. Оскільки радіус кривизни завжди розміщений нормально до кривої, то твірна пряма завжди нормальна до евольвенти.

2. *Евольвента є кривою без перегинів,* що дуже важливо при виготовленні різального інструмента.

3. *Форма евольвенти залежить тільки від радіуса основного кола,* тобто не залежить від параметрів спряженого колеса — це дає змогу використовувати евольвентні зубчасті колеса в коробо-

ках передач, тобто у механізмах зі змінними зубчастими колесами, у яких з одним колесом можуть входити у зачеплення колеса з різним числом зубів.

4. *Евольвента починається на основному колі і завжди розташована за його межами.*

5. *Радіус кривизни на початку евольвенти (на основному колі) дорівнює нулю,* а радіус основного кола, проведений через початок евольвенти, є плавним продовженням евольвенти всередині основного кола.

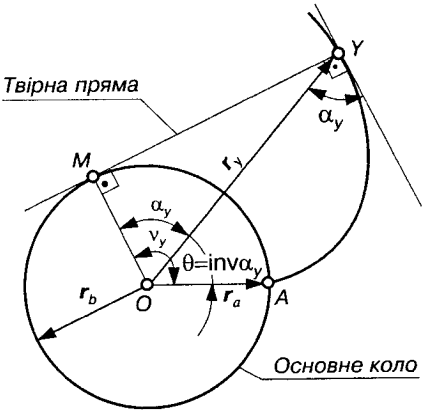


Рис. 9.12.

6. *Дві евольвенти одного основного кола є еквідистантними (рівновіддаленими) кривими,* а відстань між ними по спільній нормалі є евольвентним кроком p_α і дорівнює довжині дуги кола між початками кривих, тобто дорівнює основному кроку p_b.

Евольвента має дві гілки. Додатну гілку одержуємо при перекочуванні твірної прямої проти руху годинникової стрілки, від'ємну — при перекочуванні за рухом годинникової стрілки.

Рівняння евольвенти одержуємо з умови перекочування твірної прямої по основному колу без ковзання. Для цього розглянемо деяке довільне положення твірної прямої (рис. 9.12), яке відповідає точці Y евольвенти. Нехай координатами точки Y евольвенти будуть: $\boldsymbol{r}_y$ — радіус-вектор і θ — кут відхилення радіуса-вектора $\boldsymbol{r}_y$ від радіуса $\boldsymbol{r}_A$, проведеного через початок евольвенти A. Проводимо через точку Y дотичну до основного кола радіуса $\boldsymbol{r}_b$. Точка дотику M є для евольвенти у точці Y центром кривизни, а відрізок MY — її миттєвим радіусом кривизни. Точку дотику M з'єднаємо з центром основного кола O, і позначимо кут між променями OM і OY через α_y. Цей кут називається ***кутом профілю*** — гострий кут між дотичною до профілю у відповідній точці Y і радіусом-вектором цієї точки $\boldsymbol{r}_y$. Очевидно, що цей кут дорівнює куту MOY, оскільки лінія OM і дотична у точці Y паралельні одна одній.

Із трикутника OMY маємо

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y. \qquad (9.19)$$

Оскільки евольвента одержана перекочуванням твірної прямої відносно основного кола без ковзання, то $MY = \overset{\cup}{MA}$. Враховуючи, що $MY = r_b \mathrm{tg}\alpha_y$ і $\overset{\cup}{MA} = r_b(\alpha_y + \theta)$, отримуємо

$$r_b \mathrm{tg}\alpha_y = r_b(\alpha_y + \theta),$$

або

$$\mathrm{tg}\alpha_y = \alpha_y + \theta.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно θ, маємо

$$\theta = \mathrm{tg}\alpha_y - \alpha_y.$$

Вираз $\mathrm{tg}\alpha_y - \alpha_y$ скорочено позначають знаком $\mathrm{inv}\alpha_y$ і читають "інволюта альфа-ігрек":

$$\mathrm{inv}\alpha_y = \mathrm{tg}\alpha_y - \alpha_y. \qquad (9.20)$$

Кут $\mathrm{inv}\alpha_y = \theta$ називається ***евольвентним кутом;*** він позначає кут між радіусами, проведеними через початок евольвенти A і точку Y. Для інволютної функції складено таблиці, з яких за значеннями кута α_y можна визначити функцію $\mathrm{inv}\alpha_y$ або навпаки.

Рівняння (9.19) і (9.20) є рівняннями евольвенти кола у параметричному вигляді.

Зазначимо, що положення точки Y на евольвенті можна задати будь-яким кутом із кутів α_y, $\nu_y = \alpha_y + \mathrm{inv}\alpha_y$, $\mathrm{inv}\alpha_y$ або радіусом-вектором $\boldsymbol{r}_y$, що проходить через початок евольвенти A, і радіусом $\rho_y = MY$, проведеним через центр кривизни M евольвенти у точці Y.

Радіус кривизни евольвенти у точці Y

$$\rho_y = MY = r_b \mathrm{tg}\alpha_y = r_b \nu_y. \qquad (9.21)$$

9.7. Теоретичні вихідний і твірний контури

Одним із багатьох важливих факторів, які лежать в основі досягнень сучасної техніки, є ***взаємозамінність,*** тобто здатність спряжених деталей з'єднуватись одна з одною без спеціальної пригонки або підбору. Взаємозамінність можлива лише на базі стандартизації, тобто при суворій регламентації форми, розмірів, якості й точності різних деталей та виробів.

Зубчасте колесо — одна із найскладніших і точних деталей машин; для його виготовлення вимагається спеціальне дороге обладнання, різальний та вимірювальний інструмент. Тому стандар-

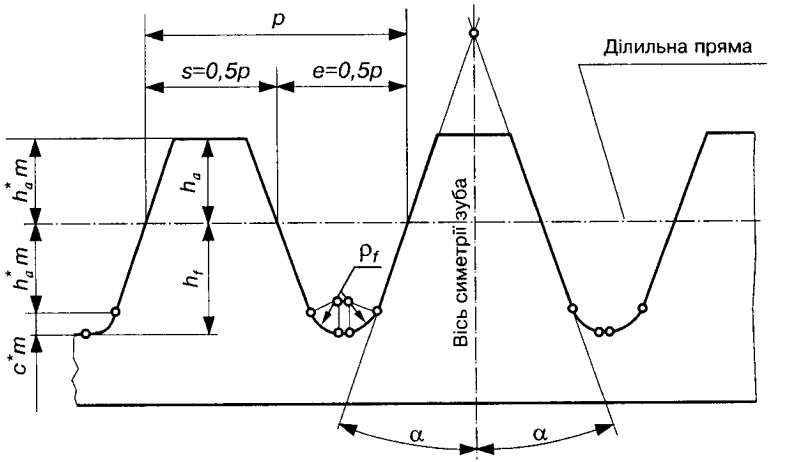


Рис. 9.13.

тизація параметрів зубчастого зачеплення важлива як з технічної, так і з економічної точки зору.

За базу при стандартизації зубчастих коліс можна прийняти різні параметри. На основі багаторічної практики при стандартизації коліс і зуборізного інструменту в усіх країнах світу приймають параметри зубчастої рейки з прямолінійним профілем (рис. 9.13).Рейковий профіль, який покладено в основу стандарту, називається ***теоретичним вихідним контуром*** (ТВК) або коротко — ***вихідним контуром***. Параметри вихідного контуру стандартизовані (ГОСТ 13755—68). Це прямобічний рейковий контур із рівномірно розташованими симетричними зубами трапецієподібної форми; перехід від профіля зуба до лінії западин викреслений дугою кола. За базу для визначення елементів зубів та їх розмірів вибирають ***ділильну пряму*** (площину), яка перпендикулярна до осей симетрії зубів рейки, і товщина зуба на ній дорівнює ширині западини ($s = e = p/2$). Частина зуба, що знаходиться між ділильною поверхнею і поверхнею вершин, називається ***ділильною головкою зуба;*** а частина зуба між ділильною поверхнею і поверхнею западин — ***ділильною ніжкою зуба.***

Відстань між однойменними профілями сусідніх зубів по ділильній або будь-якій іншій паралельній прямій називають ***кроком p вихідного контуру***:

$$p = \pi m. \tag{9.22}$$

Висота ділильної головки зуба вихідного контуру

$$h_a = h_a^* m, \tag{9.23}$$

де h_a^* — коефіцієнт висоти головки зуба (відношення висоти головки зуба до модуля: $h_a^* = h_a / m$).

Ділильна ніжка зуба $h_f = h_f^* m$ вища від головки на величину $c = c^* m$ — радіальний зазор, де c^* — коефіцієнт радіального зазору ($c^* = c/m$). Отже, коефіцієнт висоти ніжки зуба $h_f^* = h_a^* + c^*$, а висота ділильної ніжки зуба

$$h_f = (h_a^* + c^*)m. \tag{9.24}$$

Кут α між бічною стороною та віссю зуба називається ***кутом профілю вихідного контуру.***

ГОСТ 13755—68 регламентує параметри вихідного контуру: $h_a^* = 1{,}0$; $c^* = 0{,}24$; $\alpha = 20°$. При цьому висота зуба

$$h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*)m = 2{,}25m. \tag{9.25}$$

Прямолінійний профіль вихідного контуру плавно спряжений з лінією його западин дугою радіуса

$$\rho_f = \rho_f^* m \approx 0{,}384m, \tag{9.26}$$

де ρ_f^* — коефіцієнт радіуса перехідної кривої ($\rho_f^* = \rho_f / m$).

Геометричні параметри різального інструменту визначаються ***вихідним твірним (виробничим) контуром*** (ВТК), або коротко — ***твірним контуром*** (рис. 9.14). Вихідним твірним рейковим контуром називають контур зубів рейки, який ніби заповнює западини теоретичного вихідного профілю, як відливка заповнює форму. При цьому між лінією западин твірного контуру й лінією вершин вихідного зберігається радіальний зазор $c = c^* m$ для того, щоб поверхня западин різального інструменту не брала участі в процесі різання. У межах цього зазору зберігається також перехід по дузі кола від профілю зуба до лінії западин ВТК.

Отже, вихідний твірний контур має ділильну ніжку такої самої форми і розмірів, як і вихідний контур. Для одержання радіального зазору в зубчастому зачепленні ділильна головка твірного контуру виготовляється вищою за головку вихідного контуру на величину c. Отже, ділильна пряма твірного контуру ділить зуб по висоті на дві рівні частини, а повна висота зуба

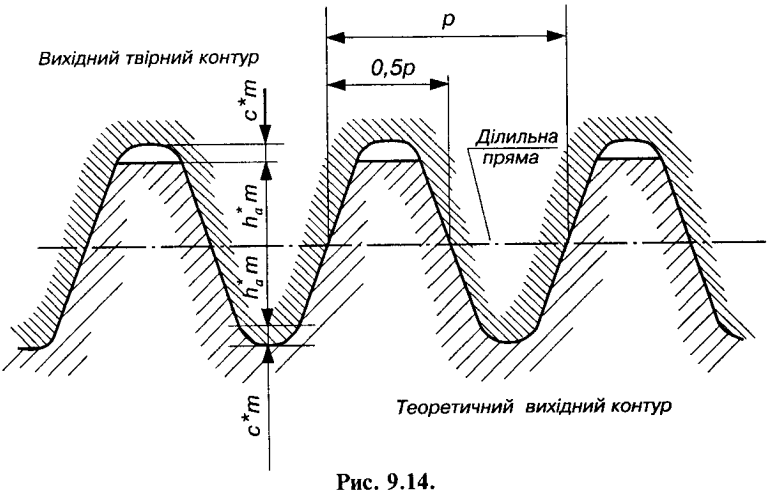


Рис. 9.14.

$$h = (2h_a^* + c^*)m\,. \qquad (9.27)$$

Колесо із зовнішніми зубами, нарізане твірним рейковим контуром при збереженні на ділильному колі теоретичної товщини зуба $s = \pi m/2$ і теоретичного радіального зазору c^*m у западині рейки, називають ***твірним зубчастим колесом***. Таке колесо є різальним інструментом при зубодовбанні.

9.8. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс

Зубчасті колеса можна виготовляти різними способами: різанням, литвом, пластичною деформацією (штамповка або накатка). Найточніші зубчасті колеса одержують різанням із використанням доводкових операцій.

Існують два принципово різні способи нарізання зубів: ***копіювання*** та ***обкатка***.

Спосіб копіювання. При цьому способі зубчасті колеса нарізають інструментом, профіль якого точно збігається з профілем западин колеса, що нарізається, тобто профіль інструмента копіюється на колесі (рис. 9.15, *а, б, в*). Інструментом може бути модульна (дискова або пальцьова) фреза. Обертаючись, фреза пересувається вздовж зуба. За кожний хід фрези нарізається одна западина. Після цього заготовка повертається на кутовий крок

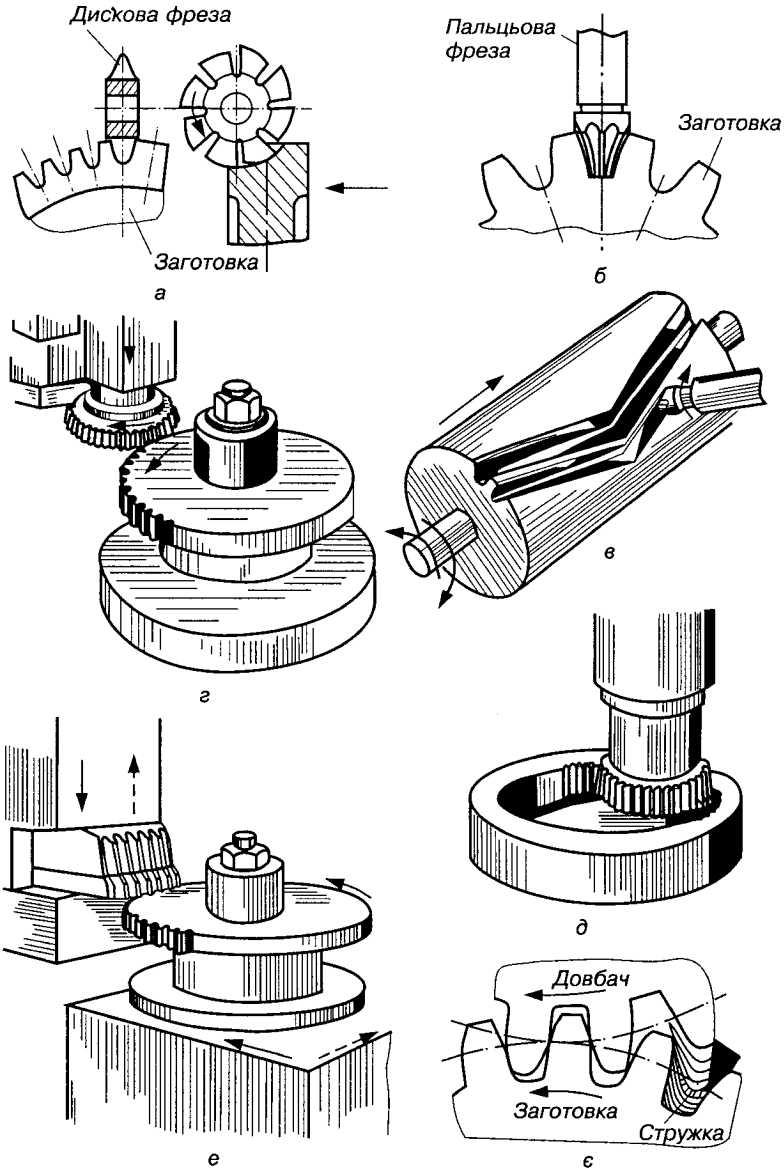

Дискова фреза
Заготовка
а
Пальцьова фреза
Заготовка
б
в
г
д
Довбач
Заготовка
Стружка
е
є

Рис. 9.15.

$\tau = 2\pi/z$. За допомогою цього методу можна нарізати прямозубі, косозубі та шевронні зубчасті колеса, для останніх заготовка в процесі нарізання повертається на відповідний кут.

Використовують також інструмент, що обробляє всі западини одночасно — протяжки, зубодовбальні головки тощо.

Основний недолік способу копіювання полягає в тому, що різальний інструмент є фасонним, тобто має криволінійні різальні кромки і при його виготовленні неминучі похибки, які передаються колесу, що нарізається. Крім цього, при використанні набору модульних фрез доводиться навмисно вносити ще й додаткові похибки за таких причин: діаметр основного кола, за евольвентою якого обкреслений профіль зубів, визначається модулем m і числом зубів z колеса, що нарізується. Очевидно, що для кожного сполучення m і z треба мати окрему фрезу; оскільки в стандарті більше 50 модулів, а число зубів, які використовуються, перевищує 100, то в універсальному комплекті повинно бути понад 5000 фрез. Для скорочення номенклатури інструменту діапазон чисел z розбивають на інтервали і в межах кожного інтервалу використовують одну і ту саму фрезу для нарізання коліс із різними числами зубів. Для кожного модуля комплект складається із 8—15 фрез.

Через низьку точність коліс і малу продуктивність процесу нарізання методом копіювання доцільно цей метод використовувати лише в індивідуальному або дрібносерійному виробництві для виготовлення малонавантажених і тихохідних передач.

Шліфувальні круги, різці й протяжки профілюють для кожного конкретного колеса, і похибки, викликані невідповідністю інструменту числу зубів колеса, що нарізаються, у цьому випадку відсутні.

Недоліком методу копіювання є також те, що для реалізації будь-якої зміни в геометрії зубів необхідно виготовляти спеціальний інструмент, що пов'язано зі значними трудовими і матеріальними затратами.

Процес нарізання зубів протяжками та зубодовбальними головками продуктивний, але через складність і високу вартість інструменту доцільно такий процес використовувати лише в масовому виробництві.

Спосіб обкатки (огинання). При цьому способі в основу геометрії інструменту покладено так зване твірне колесо або рейку, бічні поверхні зубів яких мають різальні кромки.

При нарізанні зубів твірному колесу (інструменту) і колесу (заготовці), що нарізається, надають такого відносного руху, який би мали ці колеса, перебуваючи в зачепленні один з од-

ним. Зачеплення твірного колеса з оброблюваним колесом називають ***верстатним зачепленням***. Отже, у верстатному зачепленні відтворюється перекочування без ковзання початкових поверхонь інструменту й колеса, що нарізається, — чим і пояснюється назва способу обкатки.

На рис. 9.15, *г* зображено нарізання зубів евольвентним твірним колесом (зуборізним довбачем). Довбач здійснює поступальний рух паралельно осі колеса (заготовки), що нарізається. Одночасно довбачу та заготовці надають обертового руху з тим самим відношенням швидкостей, які б мали довбач і колесо, знаходячись у зачепленні. Тоді профіль зуба виходить як огинаюча всіх положень різальної кромки довбача (рис. 9.15, *є*). Особливість цього методу полягає в тому, що він дає можливість нарізати колеса з внутрішніми зубами (рис. 9.15, *д*).

Оскільки для будь-якого зубчастого колеса можна спроектувати спряжену з колесом зубчасту рейку, то замість колеса-інструмента може бути інструментом також рейка, яка називається ***інструментальною рейкою, або гребінкою.*** У процесі нарізання рейка здійснює вздовж осі заготовки зворотно-поступальний рух (рис. 9.15, *е*). Заготовка має подвійний рух у горизонтальній площині: обертовий навколо своєї осі і поступальний вздовж рейки. Отже, заготовка здійснює рух колеса відносно рейки, і профілі зубів колеса одержують процесом обкатки. Весь цей процес здійснюється на спеціальних зубодовбальних верстатах.

Гребінка — найпростіший, а тому найточніший інструмент рейкового типу. Проте число зубів гребінки обмежене, оскільки довгі гребінки важко виготовляти, а число зубів коліс, що нарізаються, частіше всього більше від числа зубів гребінки, то процес обкатки не може бути безперервним. Після того, як заготовка перекотилась по всій довжині гребінки, процес обкатки припиняється, заготовку повертають у вихідне положення і продовжують обкатку. Таке періодичне переривання зменшує точність і продуктивність зубонарізання, ускладнює верстат.

Для того, щоб зробити процес обкатки безперервним, використовують ***черв'ячні фрези***. Черв'ячна фреза (рис. 9.16, *б*) — це гвинт із трапеціеподібною нарізкою (рис. 9.16, *в*), профіль якої у нормальному перетині такий самий, як і профіль твірної рейки. Для утворення різальних кромок уздовж осі прорізані канавки (рис. 9.16, *б*). Зачеплення фрези з колесом, що нарізається, аналогічне зачепленню черв'яка з черв'ячним колесом (рис. 9.16, *а*). При цьому фреза та заготовка одержують обертовий рух, який би

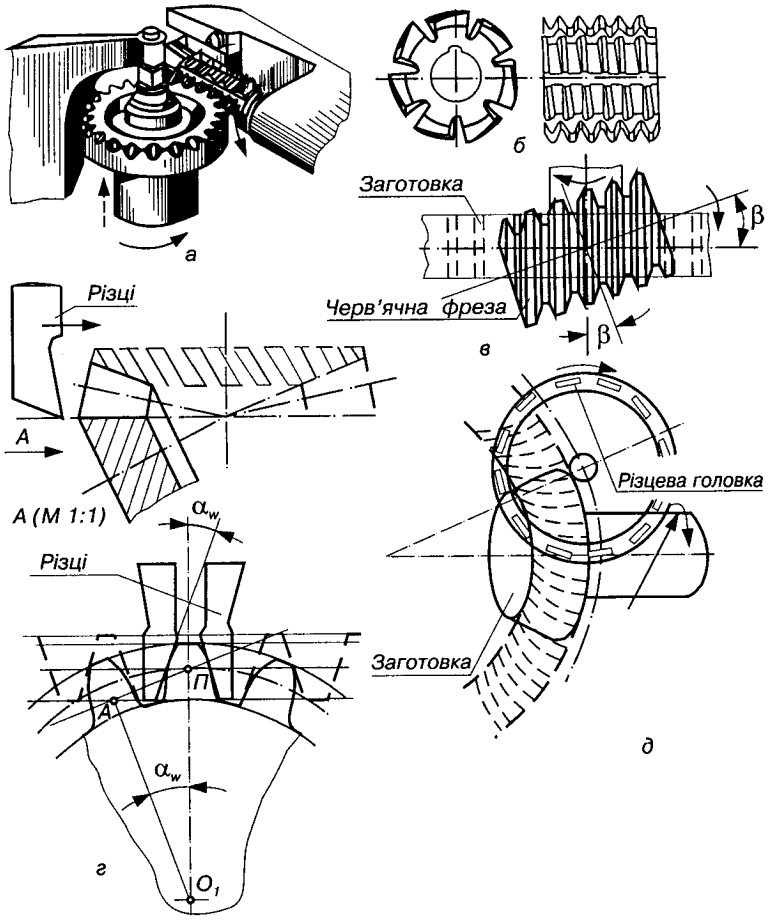


Рис. 9.16.

вони мали, перебуваючи в зачепленні. Щоб нарізати зуб по всій ширині зубчастого вінця, фреза (або заготовка), крім обертання, одержує подачу вздовж осі колеса. Фреза встановлюється відносно заготовки так, щоб її витки у місці знімання стружки були паралельні твірній циліндра-заготовки (рис. 9.16, *в*), тобто вісь фрези повинна утворювати з торцевою поверхнею заготовки кут β, який дорівнює куту підйому середньої лінії гвинтової поверхні витків фрези.

Останніми роками поширився новий метод обкатки — накатка зубчастих коліс у холодному (для дрібномодульних коліс,

$m \leq 2$ мм), або гарячому стані, який полягає у наступному. Інструменту у вигляді зубчастого колеса і заготовці надають на верстаті такі відносні рухи, ніби вони перебувають у дійсному зачепленні. При цьому завдяки пластичній деформації інструмент формує на заготовці зуби евольвентного профілю.

Значною перевагою всіх методів обкатки є висока продуктивність, велика точність і мала кількість інструменту. Одним інструментом (даного модуля) можна нарізати зубчасті колеса з будь-яким числом зубів та змінювати геометрію зубчастих коліс.

На рис. 9.16, *г, д* зображені схеми нарізання конічних зубчастих коліс. У першому випадку (рис. 9.16, *г*) показано нарізання коліс на зубострогальному верстаті, у другому — на фрезерних верстатах за допомогою обертової різцевої головки.

При зубострогальні різальний інструмент відносно колеса, що нарізується, здійснює два основні рухи: ***технологічний,*** який забезпечує зрізання й виведення матеріалу з об'єму, що займає западина, і рух ***огинання,*** який забезпечує відповідне профілювання бічних поверхонь зубів. Для нарізання використовують два різці, які здійснюють зворотно-поступальний рух вздовж твірних конуса западин. Кожний із різців обробляє одну бічну поверхню зуба. Сформувавши один зуб, різці відводять, заготовка повертається на кутовий крок, і процес нарізання повторюється.

9.9. Розрахунок геометричних параметрів циліндричних прямозубих зубчастих коліс з умови верстатного зачеплення

Розгля́немо зачеплення зубчастого колеса, що нарізається, з прямозубою твірною рейкою, в процесі якого на заготовці формуються зуби відповідної геометрії та розмірів [18]. Картину зачеплення будемо розглядати в торцевому перетині (рис. 9.17, *а*).

У рейковому зачепленні рейка здійснює поступальний рух, а колесо — обертовий. Такі ж рухи повинні виконувати ланки верстатного зачеплення. Необхідну швидкість $\boldsymbol{v}_0$ руху твірної рейки, яка спрямована паралельно ділильній прямій, визначають із співвідношення

$$v_0 = \omega_i r_i, \tag{9.28}$$

де ω_i — кутова швидкість заготовки; r_i — радіус ділильного кола зубчастого колеса, що нарізається. У цій формулі й далі індекс 0

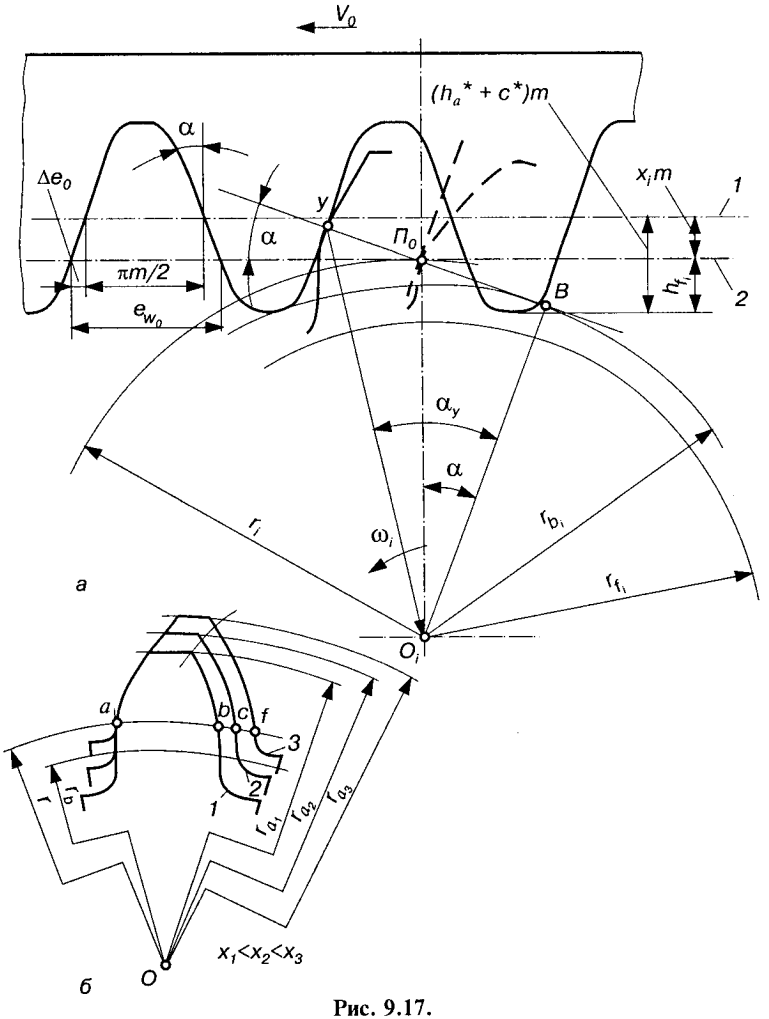


Рис. 9.17.

позначає параметри ріжучого інструменту, а індекс $i = 1$ або $i = 2$ — відповідно шестірні або колеса. Індекс i можна опустити, коли його значення неістотне.

Із формули (9.28) випливає, що при нарізанні зубчастого колеса рейковим інструментом ділильне коло є центроїдою у відносному русі твірного контуру і торцевого перетину заготовки. Інакше кажучи, в процесі нарізання деяка лінія твірного контуру, що дотикається ділильного кола, перекочується по

ньому без ковзання. Така пряма твірного контуру називається ***початковою***. На рис. 9.17, *а* ділильна пряма 1 знаходиться на відстані $x_i m$ від ділильного кола, а значить, від початкової прямої 2. Ця відстань називається ***зміщенням вихідного твірного контуру,*** де $x_i = x_i m/m$ — ***коефіцієнт зміщення.*** Зміщення вважається додатним, якщо ділильна пряма і ділильне коло не перетинаються (рис. 9.17, *а*).

Зубчасті колеса, зуби яких утворені при $x = 0$, тобто коли початкова пряма твірного контуру є його ділильною прямою, називаються ***зубчастими колесами без зміщення*** (інколи — нульовими). При $x \neq 0$ одержуємо ***зубчасті колеса із зміщенням.***

Практично нарізання коліс із зміщенням ніяких ускладнень не викликає і досягається встановленням інструменту на відповідній відстані від осі заготовки. Можливість вибору зміщення при нарізанні зубчастих коліс дає змогу керувати у широких межах геометричними та якісними характеристиками передач.

На рис. 9.17, *б* зображено профілі зубів трьох коліс, що мають однакову кількість зубів, нарізані одним і тим самим інструментом, але з різним зміщенням: $x_1 < x_2 < x_3$. Колеса мають однакові радіуси ділильного й основного кіл, а значить, профілі зубів усіх трьох коліс окреслені однією й тою самою евольвентою, але товщини зубів $s_1 = \overset{\cup}{ab}$, $s_2 = \overset{\cup}{ac}$, $s_3 = \overset{\cup}{af}$ і радіуси кіл вершин r_{a_1}, r_{a_2}, r_{a_3} у коліс будуть різними. Із збільшенням коефіцієнта зміщення x товщина зуба біля основи збільшується, а біля вершини зменшується, тобто коефіцієнт зміщення суттєво впливає на форму зуба. Отже, з трьох зубів, що розглядаються, зуб третього колеса буде найміцнішим. Крім цього, для евольвентної частини профілю зуба третього колеса використовується ділянка евольвенти, яка найвіддаленіша від її основного кола і має більший радіус кривизни, що сприяє зменшенню спрацювання і контактних напружень бічної поверхні зуба. Таким чином, вибираючи при проектуванні той чи інший коефіцієнт зміщення, можна впливати на ***форму зубів*** і на якість зубчастої передачі, наділяючи її необхідними властивостями. Проте слід зауважити, що така залежність форми зубів і властивостей передачі від коефіцієнта зміщення x суттєво відчутна при малих числах зубів і послаблюється в міру збільшення z.

Враховуючи, що початкова пряма інструменту обкочується без ковзання по ділильному колу заготовки, крок зубів твірного контуру слід відкласти z_i разів на ділильному колі зубчастого

колеса, яке нарізується. Причому зміщення інструменту відносно заготовки не змінює кроку по дузі ділильного кола (***ділильного колового кроку***), оскільки крок рейки по будь-якій прямій, паралельній ділильній, залишається сталим (див. рис. 9.13) — $p = \pi m$, змінюється лише співвідношення між товщиною зуба s_i і шириною западини e_i зубчастого колеса ($p = s_i + e_i$).

При обкатці зубчастого колеса рейковим інструментом зуб рейки профілює западину, а западина — зуб колеса, що нарізається. Оскільки всі розміри початкової прямої твірної рейки переносяться без зміни на дугу ділильного кола, товщина зуба колеса по цій дузі s_i (***ділильна колова товщина зуба***) дорівнює ширині западини e_{w_0} рейки на початковій прямій. При зміщенні $x_i m$ (рис. 9.17, *а*) ширина западини рейки на початковій прямій

$$e_{w_0} = \frac{p}{2} + 2\Delta e_0 = \frac{\pi m}{2} + 2mx_i \operatorname{tg}\alpha .$$

Тому при нарізанні зубчастого колеса із зміщенням $x_i m$ ділильна колова товщина його зуба

$$s_i = e_{w_0} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg}\alpha\right), \tag{9.29}$$

а ширина його западини (***ділильна колова ширина западини***)

$$e_i = m\left(\frac{\pi}{2} - 2x_i \operatorname{tg}\alpha\right). \tag{9.30}$$

Дно западини зубчастого колеса профілюється вершиною зуба твірної рейки. Тому розмір ділильної ніжки зубчастого колеса визначається глибиною проникнення зуба рейки у заготовку. Згідно з рис. 9.17, *а*

$$h_{f_i} = m(h_a^* + c^*) - x_i m = m(h_a^* + c^* - x_i). \tag{9.31}$$

Тоді радіус кола западин

$$r_{f_i} = r_i - h_{f_i} = r_i - m(h_a^* + c^* - x_i), \tag{9.32}$$

де $r_i = d_i/2$ — радіус ділильного кола зубчастого колеса ($d_i = mz_i$).

Для знаходження радіуса основного кола r_{b_i} використаємо основну теорему зачеплення, згідно з якою спільна нормаль у точці дотику Y спряжених профілів (рейки і колеса) повинна

проходити через полюс верстатного зачеплення і бути дотичною до основного кола (див. параграф 9.6). Тому перпендикуляр O_iB до нормалі $УП_0$ буде радіусом r_{b_i} основного кола зубчастого колеса, яке нарізається. Враховуючи, що перпендикуляр O_iB і профіль рейки паралельні, кут $П_0O_iB$ дорівнює куту профілю α вихідного твірного контуру. Тоді з трикутника $O_iП_0B$ знаходимо

$$r_{b_i} = r_i\cos\alpha. \tag{9.33}$$

Необхідно зазначити, що в момент збігання профілю рейки з полюсом $П_0$ (штрихова лінія) буде профілюватися точка евольвенти, що лежить на ділильному колі. Як видно з рисунка, кут профілю зуба колеса у точці, що лежить на ділильному колі, дорівнює куту α твірного контуру. Кут профілю у точці Y позначимо α_y.

9.10. Розрахунок геометричних параметрів циліндричної прямозубої зубчастої передачі з умови щільного зачеплення двох коліс

При щільному зачепленні зубчастих коліс (без бічного зазору між зубами), що нарізані зі зміщенням твірного контуру mx_i, центроїдами у відносному русі будуть початкові кола радіусів r_{w_1} і r_{w_2} [18]. Радіуси цих кіл можна визначити з трикутників $O_1B_1П$ і $O_2B_2П$ (рис. 9.18):

$$r_{w_1} = \frac{r_{b_1}}{\cos\alpha_w};\quad r_{w_2} = \frac{r_{b_2}}{\cos\alpha_w}, \tag{9.34}$$

де α_w — кут зачеплення.

Кутом зачеплення називають кут між лінією зачеплення B_1B_2 і прямою, перпендикулярною до лінії центрів. Цей кут чисельно дорівнює куту профілю зубів кожного з коліс передачі у точці, що лежить на початковому колі.

Маючи на увазі, що $a_w = r_{w_1} + r_{w_2}$, та враховуючи формули (9.6) і (9.33), записуємо

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}, \tag{9.35}$$

або

$$a_w = a\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}, \tag{9.36}$$

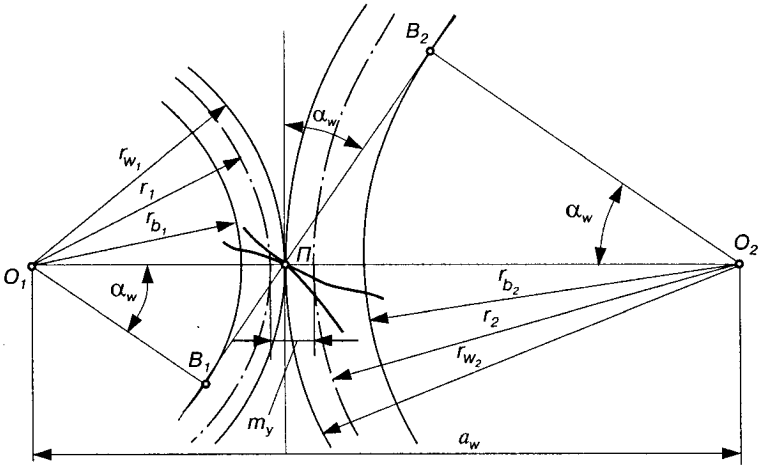


Рис. 9.18.

де

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = r_1 + r_2. \tag{9.37}$$

Тут a — ***ділильна міжосьова відстань***, що дорівнює сумі радіусів ділильних кіл зубчастих коліс.

Різниця міжосьової a_w і ділильної a відстаней називається ***сприймальним (видимим) зміщенням*** і позначається

$$my = a_w - a, \tag{9.38}$$

де y — коефіцієнт сприймального зміщення, що виражається залежністю

$$y = \frac{my}{m} = \frac{a_w - a}{m}. \tag{9.39}$$

На рис. 9.18 сприймальне зміщення my визначається найменшою відстанню між ділильними колами. Зокрема, якщо $x_1 = x_2 = 0$ або $x_1 = -x_2$, то $a_w = a$.

Виразами (9.35) або (9.36) можна скористатися лише після того, як буде знайдено кут зачеплення α_w передачі, який можна визначити з умови, що початкові кола перекочуються один відносно одного без ковзання, а значить, товщина зуба по дузі початкового кола одного зубчастого колеса повинна дорівнювати ширині западини іншого по дузі його початкового кола,

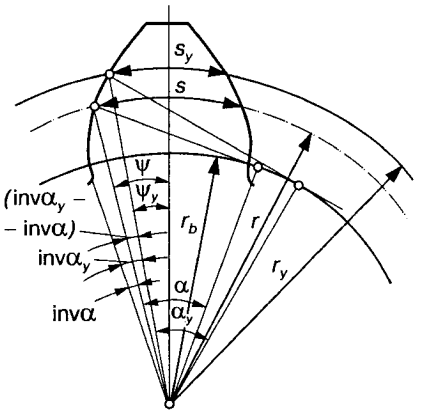


Рис. 9.19.

тобто

$$s_{w_1} = e_{w_2}, \quad e_{w_1} = s_{w_2}. \qquad (9.40)$$

Попередньо знайдемо залежність для визначення товщини зуба і ширини западини на дузі довільного радіуса r_y (рис. 9.19), якщо зубчасте колесо нарізане зі зміщенням рейки xm. На основі побудованого рисунка можна записати

$$\psi_y + \text{inv}\alpha_y = y + \text{inv}\alpha,$$

де ψ — половина кута товщини зуба на ділильному колі (***ділильна кутова товщина***); ψ_y — половина кутової товщини зуба на дузі кола радіуса r_y.

Замінюючи кутову товщину зуба коловою ($s = 2r\psi$), одержуємо

$$\frac{s_y}{2r_y} + \text{inv}\alpha_y = \frac{s}{2r} + \text{inv}\alpha.$$

Після нескладних перетворень і з урахуванням залежностей (9.6), (9.29), маємо формулу для визначення товщини зуба

$$s_y = 2r_y\left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x\text{tg}\alpha}{z} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y\right). \qquad (9.41)$$

Аналогічно отримуємо формулу для визначення ширини западини:

$$e_y = 2r_y\left(\frac{\pi}{2z} - \frac{2x\text{tg}\alpha}{z} - \text{inv}\alpha + \text{inv}\alpha_y\right). \qquad (9.42)$$

Використовуючи залежність (9.41) і (9.42), записуємо товщину зуба шестірні на початковому колі ($r_y = r_{w_1}$, $x = x_1$, $z = z_1$, $\alpha_y = \alpha_w$) і ширину западини колеса ($r_y = r_{w_2}$, $x = x_2$, $z = z_2$, $\alpha_y = \alpha_w$) та підставимо у залежність (9.40). Після перетворень з урахуванням формули (9.34) одержимо рівняння зачеплення циліндричної евольвентної передачі, яке зв'язує кут зачеплення α_w з коефіцієнтом суми зміщень $x_\Sigma = x_1 + x_2$ і числами зубів зубчастих коліс z_1 і z_2:

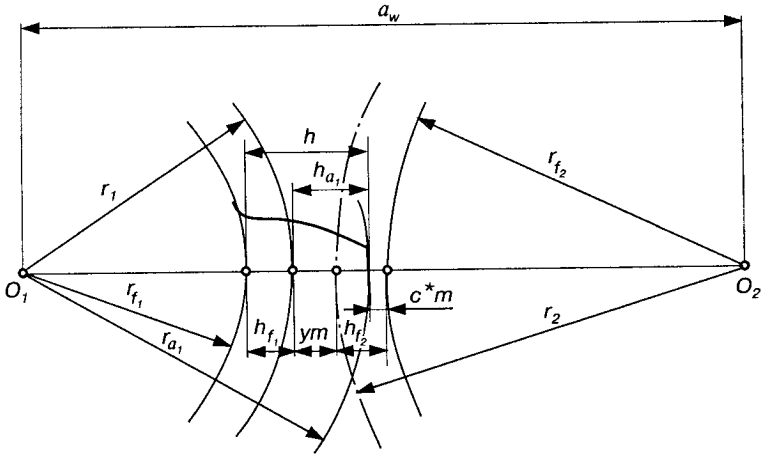


Рис. 9.20.

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{2(x_1 + x_2)\text{tg}\alpha}{z_1 + z_2}. \qquad (9.43)$$

Діаметри кіл вершин, а значить, і висота ділильних головок розраховуються з умови одержання бажаного радіального зазору c у зачепленні зубчастих коліс. Стандарт не регламентує строго величину c. Найбільше розповсюдження одержали передачі, в яких радіальний зазор дорівнює c^*m, де c^*=0,25. Для таких передач визначимо величину ділильної головки h_a зуба (рис. 9.20).

Як видно з рис. 9.20, відстань між колами западин можна уявити як суму

$$h_{f_i} + ym + h_{f_j} = h + c^*m.$$

Тут і далі, як і раніше, індекси i і j можуть набувати тільки два незбігаючі значення: 1 або 2.

Тоді повна висота зуба

$$h = h_{f_i} + h_{f_j} + ym - c^*m. \qquad (9.44)$$

Висота ділильної головки зуба (за умови $h_1 = h_2 = h$)

$$h_{a_i} = h - h_{f_i}, \qquad (9.45)$$

або з урахуванням залежності (9.31)

$$h_{a_i} = m(h_a^* + y - x_j), \qquad (9.46)$$

де x_j — коефіцієнт зміщення при нарізанні j-го зубчастого колеса; y — коефіцієнт сприймального зміщення.

Отже, радіус кола вершин

$$r_{a_i} = r_i + m(h_a^* + y - x_j). \tag{9.47}$$

У ГОСТ 16532—70 розрахунок геометрії зубчастої передачі наведений з використанням ***коефіцієнта зрівняльного зміщення***

$$\Delta y = x_\Sigma - y. \tag{9.48}$$

У такому випадку формула для визначення радіуса кола вершин має вигляд

$$r_{a_i} = r_i + m(h_a^* + x_i - \Delta y). \tag{9.49}$$

9.11. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач

Раніше розглядались здебільшого зачеплення прямозубими циліндричними колесами. У таких передачах контакт між зубами проходить по прямій, паралельній осям обертання, причому зуби одночасно по всій довжині входять у зачеплення й одночасно виходять із нього. Картина зачеплення у будь-якій площині, перпендикулярній до осі обертання коліс, однакова за геометрією і часом. Тому неточності, які завжди мають місце при виготовленні зубчастих коліс (наприклад, неточність профілю, несталість кроку та ін.), а також деформації та спрацювання деталей погіршують їх роботу (збільшується шум, зменшується довговічність передачі тощо). Крім цього, плавність роботи у прямозубих передач порівняно невелика.

Для усунення вказаних недоліків, як уже зазначалось, на практиці часто використовують косозубі або шевронні циліндричні передачі (рис. 9.2, *б, в*). Бічну поверхню косого зуба утворює пряма AB_1 поверхні N (рис. 9.21, *а*), яка обкочується без ковзання відносно основного циліндра радіуса r_b. Пряма AB_1 утворює з твірною AB основного циліндра кут β. Цей кут називають ***кутом нахилу зубів***. Кожна точка прямої AB_1 описує таку ж евольвенту, як і точка A, утворюючи при цьому не циліндричну, а гвинтову лінійчату евольвентну поверхню зуба.

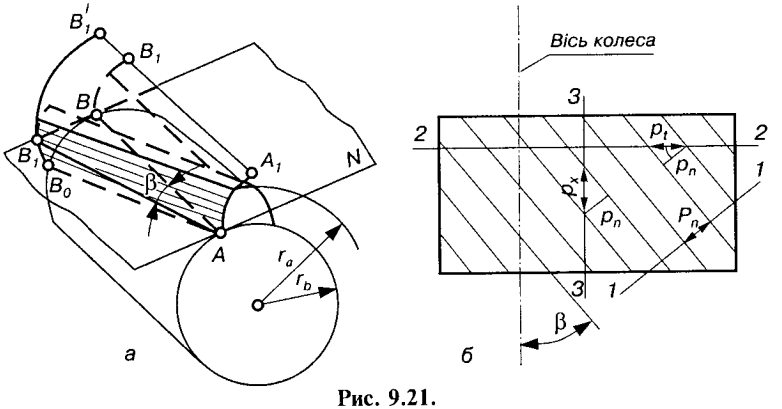


Рис. 9.21.

Картина зачеплення зубів у косозубій передачі в будь-якому перетині, як і в прямозубій передачі, однакова. Проте на відміну від прямозубої передачі зачеплення у всіх перетинах відбувається несинхронно у часі, тобто зуби входять у зачеплення не зразу по всій довжині, а поступово.

Косозубі циліндричні зубчасті колеса нарізаються рейками, лінії зубів яких складають з віссю колеса, що нарізається, кут β. На рис. 9.21, *б* зображено план косозубої вихідної твірної рейки, на якій нанесені лінії зубів. При такому розташуванні ліній зубів їх крок можна вимірювати у трьох плоских перетинах рейки:

а) перетин *1—1*, нормальний до теоретичної лінії зубів, у якому вимірюють ***нормальний крок*** p_n;

б) перетин *2—2*, перпендикулярний до осі зубчастого колеса, що нарізається рейкою (торцевий перетин), у якому вимірюють ***торцевий крок*** p_t;

в) перетин *3—3* (осьовий перетин) площиною, паралельною осі зубчастого колеса, що нарізається рейкою, у якому вимірюють ***осьовий крок*** p_x.

Контур зубчастої рейки в нормальному перетині і є тим вихідним твірним контуром, розміри якого залежать від розрахункового модуля m. Тому

$$p_n = p = \pi m. \tag{9.50}$$

Із рис. 9.21, *б* легко одержати значення торцевого і осьового кроків зубів залежно від нормального:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos\beta} = \pi\frac{m}{\cos\beta} = \pi m_t; \tag{9.51}$$

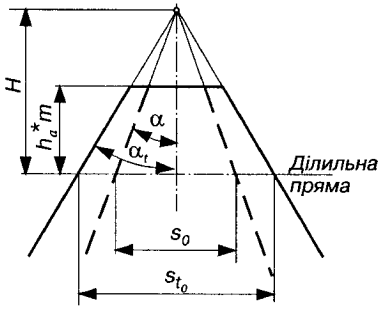


Рис. 9.22.

$$p_x = \frac{p_n}{\sin\beta} = \pi\frac{m}{\sin\beta} = \pi m_x, \quad (9.52)$$

де m_t і m_x — відповідно торцевий і осьовий модулі, які визначаються формулами

$$m_t = m/\cos\beta;\ m_x = m/\sin\beta. \quad (9.53)$$

Для розрахунку геометричних параметрів косозубих зубчастих коліс важливо визначити параметри торцевого контуру косозубої рейки, оскільки цей контур профілює евольвенту зубчастого колеса.

На рис. 9.22 накладено профілі зуба косозубої рейки в торцевому (контурна лінія) і нормальному (штрихова лінія) перетинах. Товщина зуба і ширина западини рейки у її ділильній площині рівні між собою, причому в торцевому перетині

$$s_{t0} = e_{t0} = \pi\frac{m}{2\cos\beta}. \quad (9.54)$$

Кут профілю α_t торцевого перетину рейки визначається з умови, що розмір H від ділильної прямої до точки перетину бічних профілів зуба у будь-якому перетині один і той самий. Тоді можна записати

$$\frac{s_0}{2H} = \mathrm{tg}\alpha \ \text{ і } \ \frac{s_{t0}}{2H} = \mathrm{tg}\alpha_t,$$

або

$$H = \frac{s_0}{2\mathrm{tg}\alpha} = \frac{s_{t0}}{2\mathrm{tg}\alpha_t}.$$

З урахуванням (9.54)

$$\frac{\pi m}{4\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\pi m}{4\mathrm{tg}\alpha_t\cos\beta},$$

звідки

$$\mathrm{tg}\alpha_t = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos\beta}. \quad (9.55)$$

Коефіцієнт зміщення x_t, віднесений до торцевого модуля m_t, визначається з рівності зміщень у нормальному і торцевому перетинах:

$$mx = m_t x_t = \frac{m}{\cos\beta} x_t,$$

або

$$x_t = x\cos\beta. \qquad (9.56)$$

Доведення формул для розрахунку косозубих передач спеціально можна не виконувати, а використати аналітичні формули для прямозубої передачі, переписавши останні з урахуванням того, що в торцевому перетині необхідно використовувати торцевий модуль m_t, торцевий кут профілю a_t і торцевий коефіцієнт зміщення x_t. Виняток складають розміри зубів за висотою, при обчисленні яких треба використовувати розрахунковий модуль m, оскільки відповідні розміри рейки однакові у всіх перетинах. У табл. 9.1 наведено деякі розрахункові формули для прямозубих і косозубих зубчастих передач.

Інші параметри (ділильна висота ніжки і головки зуба h_{f_t} і h_{a_t}, ділильна міжосьова відстань a, сприймальне зміщення ym,

Таблиця 9.1

ГЕОМЕТРИЧНІ ПАРАМЕТРИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

Параметр	Прямозубі передачі	Косозубі передачі
Радіус ділильного кола	$r_i = \frac{mz_i}{2}$	$r_i = \frac{m_t z_i}{2} = \frac{mz_i}{2\cos\beta}$ (9.57)
Радіус основного кола	$r_{b_i} = r_i\cos\alpha$	$r_{b_i} = r_i\cos\alpha_t$ (9.58)
Ділильна товщина зуба	$s_{t_i} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_i\mathrm{tg}\alpha\right)$	$s_{t_i} = m_t\left(\frac{\pi}{2} + 2x_{t_i}\mathrm{tg}\alpha_t\right)$, або з урахуванням (9.55), (9.56) $s_{t_i} = \frac{m}{\cos\beta}\left(\frac{\pi}{2} + 2x_i\mathrm{tg}\alpha\right)$ (9.59)
Ділильна ширина западини	$e_{t_i} = m\left(\frac{\pi}{2} - 2x_i\mathrm{tg}\alpha\right)$	$e_{t_i} = \frac{m}{\cos\beta}\left(\frac{\pi}{2} - 2x_i\mathrm{tg}\alpha\right)$ (9.60)
Міжосьова відстань	$a_w = a\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$	$a_w = a\frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{tw}}$ (9.61)
Інволютна функція	$\mathrm{inv}\alpha_w = \mathrm{inv}\alpha + + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2}\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{inv}\alpha_{tw} = \mathrm{inv}\alpha_t + + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2}\mathrm{tg}\alpha$ (9.62)

радіус кола вершин) визначаються за формулами, одержаними для прямозубих передач.

Формули розрахунку геометрії косозубих циліндричних передач загальні, і з них легко одержати формули для розрахунку прямозубих передач, прийнявши кут $\beta = 0$ (див. табл. 9.1).

9.12. Геометричні та кінематичні умови існування передачі

Профілі зубів, їх розташування відносно ділильного кола, розміри зубів за висотою та їх товщина на кожному зубчастому колесі, а отже, і властивості самої передачі, однозначно визначаються сукупністю значень трьох величин: коефіцієнтів зміщень x_1, x_2 і кута нахилу лінії зуба β. Вибір потрібних значень цих величин для конкретної зубчастої передачі (z_1, z_2, m) — один із перших і важливих етапів її проектування. Невдалий вибір цих параметрів (x_1, x_2, β) може призвести до погіршення кінематичних і міцністних характеристик передачі або навіть до неможливості перетворення руху за заданим законом.

Розглянемо явища, при яких неможлива реалізація запланованих кінематичних функцій передачі, і виведемо залежності, які описують їх [18]. Ці залежності дозволяють сформулювати умови, які повинні задовольняти вибрані значення x_1, x_2 і β, щоб вказані явища були відсутні, тобто сформулювати ***умови існування передачі.*** До таких умов належать:

1) забезпечення плавності роботи зубчастої передачі;
2) усунення підрізання зубів;
3) усунення загострення зубів;
4) усунення інтерференції зубів.

9.12.1. Коефіцієнт перекриття

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується коефіцієнтом перекриття. Для його визначення розглянемо пару зубчастих коліс, які перебувають у зачепленні. Нехай зубчасті колеса обертаються так, як показано на рис. 9.23. Зуби при цьому будуть стикатися між собою по загальній нормалі NN, проведеній через точки контакту зубів. Причому зуби входять у контакт у точці H_2, а виходять з контакту у точці H_1. Ці два положення бічних профілів зубів зображено на рисунку: для шестірні — лініями *1*, для колеса — лініями *2*. Лінія NN називається

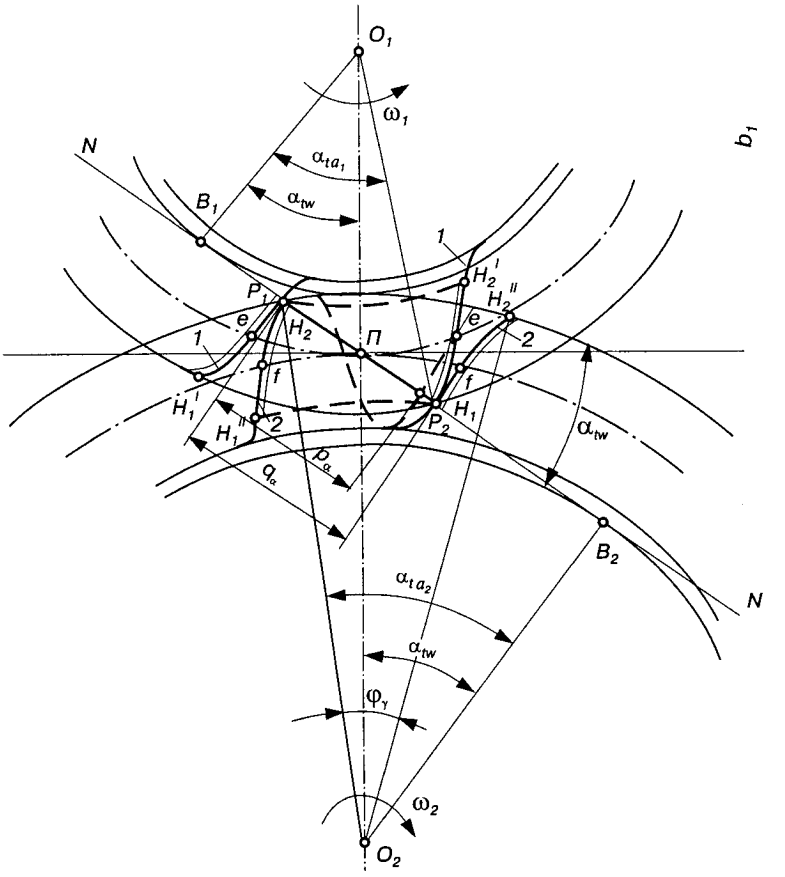


Рис. 9.23.

лінією зачеплення. Частину цієї лінії між точками дотику B_1 і B_2 з основними колами, як уже відомо, називають теоретичною лінією зачеплення, а відрізок $q_\alpha = H_1H_2$, що відсікається від лінії зачеплення колами виступів, активною лінією зачеплення. ***Активна лінія зачеплення*** є геометричним місцем точок контакту двох спряжених профілів. За межами лінії H_1H_2 контакт між зубами відсутній, оскільки він лежить за межами габаритів зубчастих коліс. Чим більша довжина активної лінії зачеплення відносно кроку евольвентного зачеплення p_α, тим вища плавність роботи передачі.

Під ***кроком евольвентного зачеплення*** розуміють відстань між двома контактними точками однойменних головних профілів

двох сусідніх зубів. Оскільки однойменні профілі двох сусідніх зубів є еквідистантними кривими, відстань між якими визначається основним коловим кроком p_b, маємо

$$p_\alpha = p_b = \frac{2\pi r_b}{z} = \frac{2\pi r\cos\alpha_t}{z} = \frac{2\pi m_t z\cos\alpha_t}{2z};\ p_\alpha = m_t\pi\cos\alpha_t. \quad (9.63)$$

Точки H_1 і H_2 визначають також величину ***активного (робочого) профілю зубів.*** Оскільки за межами лінії H_1H_2 контакту між зубами коліс немає, точка H_2 є найближчою до центра обертання O_1 точкою контакту профілю зуба шестірні, а найвіддаленішою від центра O_1 є точка H_1. Отже, частина бічного профілю зуба шестірні $H_2H_1' = H_2'H_1$ є ***активною***, у колеса активним є профіль $H_1H_2'' = H_2H_1''$ (на рис. 9.23 активні профілі зубів позначені подвійними лініями). Характерно, що довжина активного профілю на головці зуба більша, ніж на спряженій ніжці зуба ($H_1'e > H_2''f$, $H_2f > H_2e$). Нерівності ділянок профілів, які проходять контактні точки ніжки та головки зуба за однакові проміжки часу (у полюсі зачеплення $П$ точки e і f збігаються), вказує на наявність відносного ковзання зубів, причому ніжка зуба перебуває у більш напруженому стані і більше спрацьовується.

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується ***повним коефіцієнтом перекриття***, під яким розуміють відношення кута перекриття φ_γ до кутового кроку τ, тобто

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varphi_\gamma}{\tau}, \quad (9.64)$$

де φ_γ — кут перекриття; $\tau = 2\pi/z$ — центральний кут зубчастого колеса, що відповідає кроку зубчастого колеса.

Кутом перекриття називають кут повороту зубчастого колеса від положення входу зуба у зачеплення до його виходу із зачеплення. Для колеса прямозубої циліндричної передачі (рис. 9.23) $\varphi_\gamma = \angle H_2O_2H_2''$,. у косозубих передачах цей кут буде більшим від $\angle H_2O_2H_2''$ за рахунок нахилу зубів на кут β.

Практично коефіцієнт перекриття показує ***число пар зубів***, що перебувають одночасно у зачепленні. Наприклад, якщо $\varepsilon_\gamma = 1{,}57$, то зачеплені між собою одночасно одна або дві пари зубів, причому дві пари ($\varepsilon_\gamma > 1$) — 57 % часу, одна пара — 43 %.

Коефіцієнт перекриття повинен бути більшим від одиниці, інакше порушується плавність роботи передачі (співудари зубів,

контакт кромками вершин). Чим вищий коефіцієнт перекриття, тим плавніше працює зубчаста передача, тим більша її несуча здатність. Внаслідок можливої неточності монтажу та спрацювання зубів коефіцієнт перекриття може виявитися меншим за розрахунковий, тому рекомендується вибирати мінімальним коефіцієнт перекриття $\varepsilon_\gamma \geq 1{,}2$.

Коефіцієнт перекриття ε_γ можна також виразити як відношення дуги зачеплення $l_w = \overset{\cup}{ee} = \overset{\cup}{ff}$ до колового кроку p_w [4], тобто $\varepsilon_\gamma = l_w / p_w$. Зрозуміло, що для забезпечення плавної роботи передачі дуга зачеплення повинна бути більша від кроку ($l_w > p_w$).

Дугами зачеплення називають частину початкових кіл, які перекочуються одна по одній за час контакту пари зубів. Взагалі кажучи, дугу зачеплення і коловий крок можна знаходити на будь-якому іншому колі зубчастих коліс (вершин, ділильному, основному тощо).

Картину зачеплення у рейковому та внутрішньому зачепленнях зображено на рис. 9.24. На рис. 9.23 і 9.24 дуги зачеплення позначені для шестірні літерами *ee*, колеса (рейки) — *f—f*. Дуга перекриття у косозубих зубчастих передачах більша, ніж у прямозубих, на величину $e_2e_2'' = b / \sin\beta$. Це видно з розгортки початкової поверхні косозубого колеса (рис. 9.24, *в*), на якій зображені лінії зубів на початку e_1e_1' і в кінці e_2e_2' контакту пари зубів.

Повний коефіцієнт перекриття ε_γ є сумою торцевого коефіцієнта перекриття ε_α й осьового коефіцієнта перекриття ε_β, тобто

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \tag{9.65}$$

Торцевим коефіцієнтом перекриття називають відношення довжини активної лінії зачеплення до кроку евольвентного зачеплення, тобто

$$\varepsilon_\alpha = q_\alpha / p_\alpha. \tag{9.66}$$

Довжина активної лінії зачеплення визначається з рис. 9.23:

$$q_\alpha = H_2H_1 = H_2\Pi + \Pi H_1 = (H_2B_2 - \Pi B_2) + (B_1H_1 - B_1\Pi) =$$

$$= r_{b_2}\operatorname{tg}\alpha_{ta_2} - r_{b_2}\operatorname{tg}\alpha_{tw} + r_{b_1}\operatorname{tg}\alpha_{ta_1} - r_{b_1}\operatorname{tg}\alpha_{tw} =$$

$$= \frac{m_t z_2}{2}\cos\alpha_t(\operatorname{tg}\alpha_{ta_2} - \operatorname{tg}\alpha_{tw}) + \frac{m_t z_1}{2}\cos\alpha_t(\operatorname{tg}\alpha_{ta_1} - \operatorname{tg}\alpha_{tw}).$$

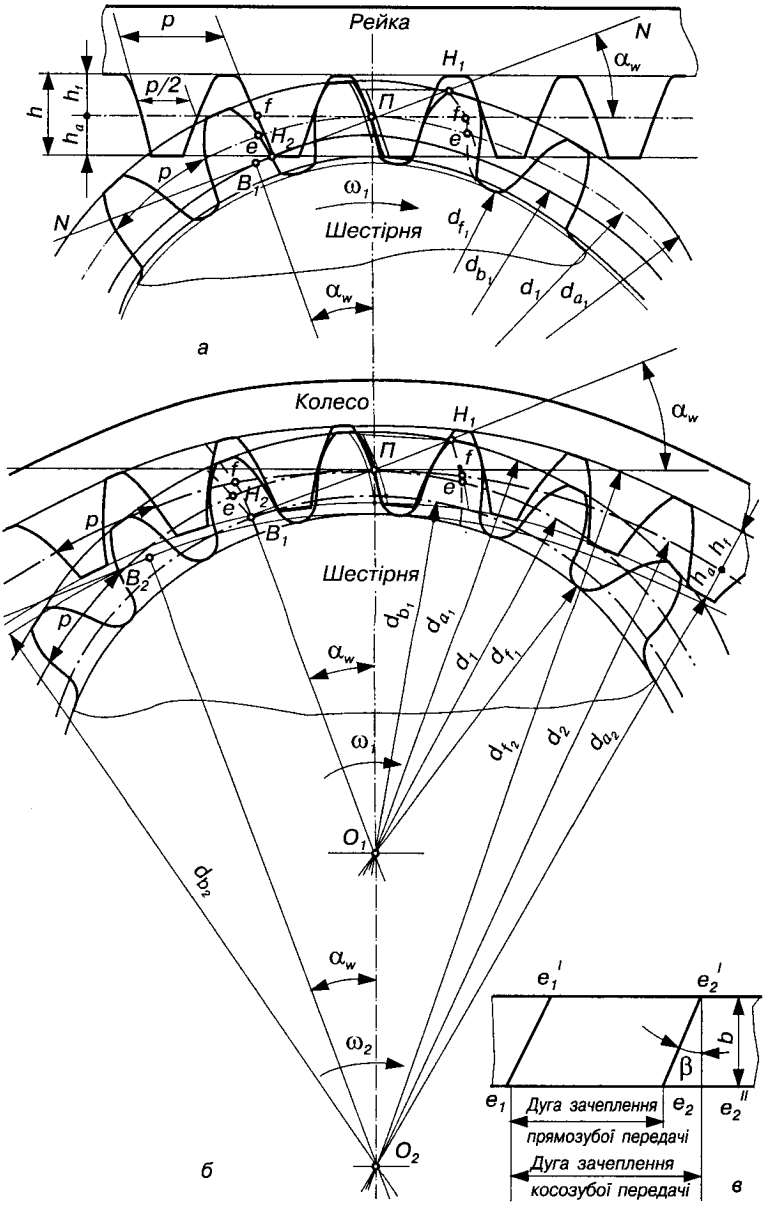

Рейка
Шестірня
Колесо
Шестірня
Дуга зачеплення
прямозубої передачі
Дуга зачеплення
косозубої передачі
а
б
в

Рис. 9.24.

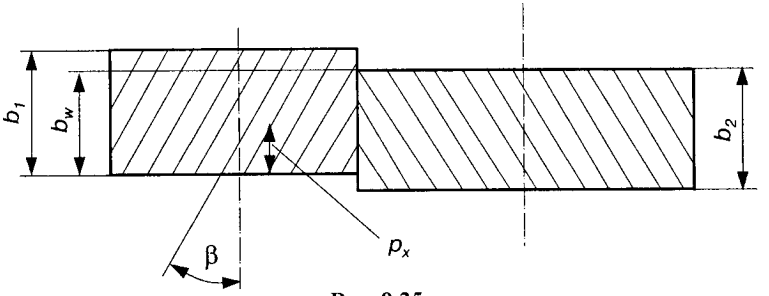


Рис. 9.25.

Остаточно

$$q_\alpha = \frac{m_t \cos\alpha_t}{2}[z_2(\mathrm{tg}\alpha_{ta_2} - \mathrm{tg}\alpha_{tw}) + z_1(\mathrm{tg}\alpha_{ta_1} - \mathrm{tg}\alpha_{tw})]. \quad (9.67)$$

Підставивши значення q_α (9.67), p_α (9.63) у відношення (9.66), одержимо залежність для визначення коефіцієнта торцевого перекриття:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1(\mathrm{tg}\alpha_{ta_1} - \mathrm{tg}\alpha_{tw}) + z_2(\mathrm{tg}\alpha_{ta_2} - \mathrm{tg}\alpha_{tw})}{2\pi}. \quad (9.68)$$

Коефіцієнтом осьового перекриття називається відношення робочої ширини зубчастого вінця b_w до осьового кроку p_x (рис. 9.25):

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w}{p_x} = \frac{b_w \sin\beta}{\pi m}. \quad (9.69)$$

У прямозубій циліндричній передачі коефіцієнт $\varepsilon_\beta = 0$, оскільки кут нахилу зубів β дорівнює нулю і в цьому випадку повний коефіцієнт перекриття дорівнює лише торцевому коефіцієнту перекриття ($\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha$). У зачепленні М. Л. Новикова, навпаки, $\varepsilon_\alpha = 0$, а $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\beta$. Це свідчить про те, що у зачепленні М. Л. Новикова активна лінія зачеплення H_1H_2 відсутня, коефіцієнт перекриття досягається лише за рахунок нахилу зубів.

Аналіз формул (9.68), (9.69) для визначення коефіцієнтів перекриття ε_α і ε_β показує, що зі збільшенням чисел зубів z_1 і z_2, радіусів кіл вершин r_{a_1} і r_{a_2} (чим більші радіуси r_{a_i}, тим більші кути профілю вершин α_{ta_i}), робочої ширини вінця b_w і кута нахилу лінії зуба β коефіцієнт перекриття ε_γ збільшується; збільшення кута зачеплення α_{tw} призводить до зменшення ε_γ.

9.12.2. Підрізання зубів

При нарізанні зубчастого колеса можливе ***підрізання зубів*** (рис. 9.26, *а*), яке проявляється у зменшенні товщини ділильної ніжки зуба. Це призводить до зрізання головного (евольвентного) профілю зубів і зменшення їх міцності на згин. Підрізання зубів настає в тому випадку, коли активна лінія зачеплення H_1H_2 виходить за межі теоретичної лінії зачеплення B_1B_2 (рис. 9.26, *б*), оскільки будь-яка точка профілю зуба (шестірні), що лежить за межами цієї лінії, не відповідає основній теоремі зачеплення (нормаль $N'N'$, проведена до такого профілю в точці контакту, не буде проходити через полюс зачеплення). Як видно з рис. 9.23, небезпека підрізання більша у меншого колеса, оскільки $B_1H_2 < B_2H_1$.

Для визначення мінімального коефіцієнта зміщення $x_{\min}$ і мінімального числа зубів $z_{\min}$, при яких не спостерігається підрізання, можна використати залежність для радіуса кривизни граничної точки L головного бічного профілю зубів (рис. 9.26, *б*). Нагадаємо, що точка, яка розділяє евольвенту і перехідну частини бічного профілю, називається граничною. Як відомо, для побудови головного профілю евольвентного зуба використовується евольвента, радіус кривизни якої завжди задовольняє умову $\rho \geq 0$. Причому евольвента завжди буде за межами основного кола і на своєму початку, що збігається з основним колом, матиме радіус кривизни $\rho = 0$. Це і є граничний випадок, при якому профіль зуба колеса може знаходитись на лінії зачеплення NN (рис. 9.23) і мати радіус кривизни $\rho = 0$.

Розглянемо верстатне зачеплення у момент, коли формується профіль у граничній точці L, і визначимо радіус кривизни профілю у цій точці (рис. 9.26, *в*):

$$\rho_L = BL = \Pi_0 B + \Pi_0 L = r_b \operatorname{tg}\alpha_t + \frac{xm - h_a^* m}{\sin \alpha_t}.$$

Враховуючи, що $r_b = r\cos\alpha_t = \dfrac{mz}{2\cos\beta}\cos\alpha$, одержуємо

$$\rho_L = m\left(\frac{z\sin\alpha_t}{2\cos\beta} - \frac{h_a^* - x}{\sin\alpha_t}\right). \qquad (9.70)$$

Рівняння (9.70) показує, що із зменшенням числа зубів і коефіцієнта зміщення x радіус кривизни ρ_L зменшується, тобто точка L

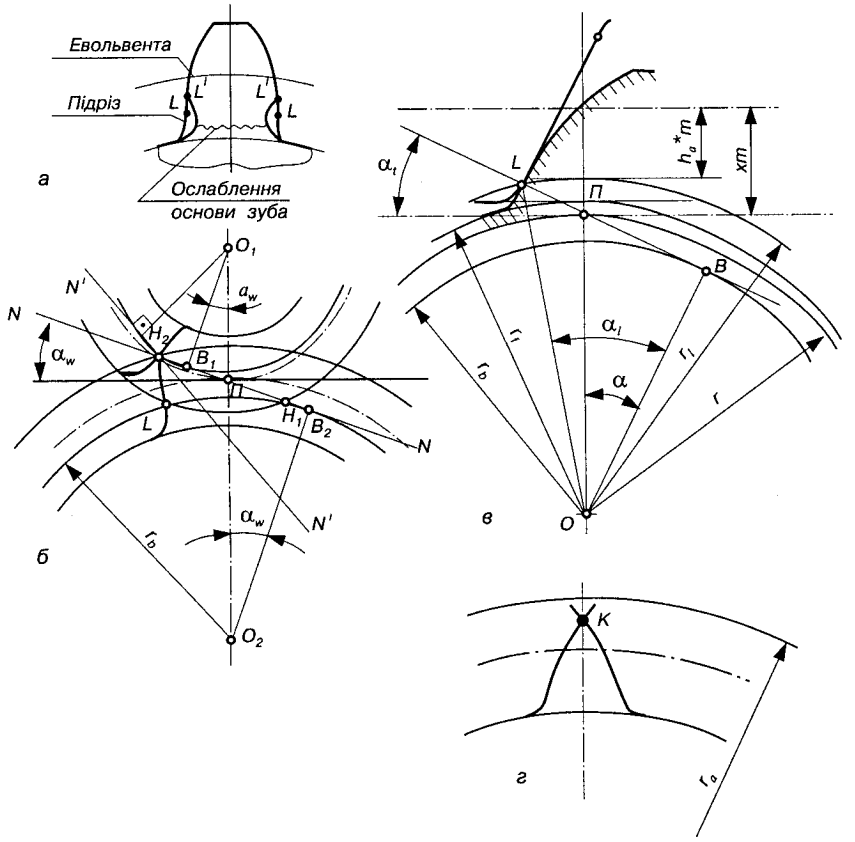


Рис. 9.26.

наближається до основного кола. Для кожного числа зубів z існує таке зміщення коефіцієнта x, при якому $\rho_L = 0$, тобто гранична точка лежить на основному колі, а вся перехідна крива лежить всередині основного кола. Такий коефіцієнт зміщення називаємо ***коефіцієнтом найменшого зміщення*** $x_{\min}$. Прийнявши $\rho_L = 0$, з рівняння (9.70) знаходимо

$$x_{\min} = h_a^* - \frac{z \sin^2 \alpha_t}{2 \cos \beta}. \qquad (9.71)$$

Якщо рівняння (9.70) розв'язати відносно z при $\rho_L = 0$, одержимо ***найменше число зубів колеса***, вільне від підрізання при заданому коефіцієнті зміщення x:

$$z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x)\cos\beta}{\sin^2 \alpha_t}. \qquad (9.72)$$

Так, при $h_a^* = 1$, $x = 0$ і $\beta = 0$ $z_{\min} \approx 17$.

Якщо $x > x_{\min}$, то при будь-якому числі зубів перехідна крива дотикається до евольвенти і плавно спрягається з нею у точці L, радіус кривизни в якій $r_L > r_b$. При $x = x_{\min}$ перехідна крива плавно спрягається з евольвентою на основному колі. Якщо ж $x < x_{\min}$ ($\rho_L < 0$), то перехідна крива перетне евольвентний профіль у деякій точці L' (рис. 9.26, *а*), при цьому частина головного профілю біля основного кола зріжеться, і зуб у цьому місці буде ослаблений. Це явище називається ***підрізання зубів***.

У деяких випадках невелике ослаблення зуба цілком допустиме; це робиться для поліпшення умов контакту зубів на початку (або в кінці) зачеплення.

9.12.3. Загострення зубів

Загострення зубів виникає тоді, коли точка K перетину різнойменних теоретичних профілів зуба потрапляє всередину кола вершин (рис. 9.26, *г*). Таке явище небажане як з чисто кінематичної точки зору, оскільки скорочується активний профіль зуба і тим самим зменшується коефіцієнт перекриття, так і з міркувань міцності – вершина загостреного зуба зовсім не здатна передавати навантаження.

Небезпека загострення збільшується із збільшенням коефіцієнта зміщення. Максимальний коефіцієнт зміщення можна знайти з виразу (9.41) для товщини зуба на колі радіуса $r_y = r_{ta}$ у торцевому перетині:

$$s_{ta} = 2r_a\left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x\mathrm{tg}\alpha}{z} + \mathrm{inv}\alpha_t - \mathrm{inv}\alpha_{ta}\right). \qquad (9.73)$$

Прийнявши $s_{ta} = 0$, знайдемо

$$x_{\max} = \frac{z(\mathrm{inv}\alpha_{ta} - \mathrm{inv}\alpha_t) - \dfrac{\pi}{2}}{2\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (9.74)$$

Звичайно приймають товщину зуба на дузі кола вершин $s_{ta} \geq 0{,}25m$ для кінематичних передач і $s_{ta} \geq 0{,}4m$ – для силових. Відповідні максимальні коефіцієнти зміщення можна знайти за цими умовами із залежності (9.73).

9.12.4. Інтерференція зубів

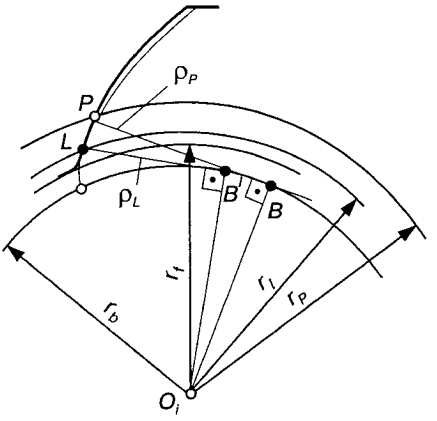


Рис. 9.27.

Явище інтерференції зубів полягає в тому, що при розгляді теоретичної картини зачеплення зубів головний профіль головки зуба одного із зубчастих коліс спрягається з перехідним профілем ніжки зуба іншого колеса і проникає у нього (профілі "накладаються" один на одний). Таке явище при зачепленні зубчастих коліс недопустиме, оскільки воно не дає їм можливості прокручуватися або призводить до поломки зубів. Інтерференція відсутня, якщо евольвентний профіль зуба одного колеса спрягається тільки з евольвентним профілем зуба іншого. Для цього необхідно, щоб радіус r_L граничної точки L був менший за радіус r_P нижньої точки активного профілю (рис. 9.27):

$$r_L \le r_P. \tag{9.75}$$

Нерівність (9.75) з урахуванням виразу (9.21) набуває вигляду

$$\rho_P \ge \rho_L. \tag{9.76}$$

Забезпечення нерівності (9.76) для обох зубчастих коліс є умовою усунення інтерференції у зубчастій передачі.

Радіус кривизни евольвенти у граничній точці L обчислюється за формулою (9.70), а в нижній точці активного профілю (див. рис. 9.23) для зуба шестірні – відрізком B_1H_2, колеса – B_2H_1. Тоді для зуба шестірні

$$\rho_{P_1} = B_1H_2 = B_1B_2 - H_2B_2 = a_w \sin\alpha_{tw} - r_{b_2}\,\mathrm{tg}\alpha_{ta_2},$$

де

$$B_1B_2 = B_1\Pi + \Pi B_2 = r_{w_1}\sin\alpha_{tw} + r_{w_2}\sin\alpha_{tw} = a_w \sin\alpha_{tw}.$$

У загальному випадку маємо

$$\rho_{P_i} = a_w \sin\alpha_{tw} - r_{b_j}\,\mathrm{tg}\alpha_{ta_j}. \tag{9.77}$$

9.13. Вибір коефіцієнтів зміщення

Вибір коефіцієнтів зміщення значною мірою визначає геометрію і якісні показники зубчастої передачі (контактну міцність, міцність на згин, стійкість проти спрацювання, плавність роботи). Зручність вибору зміщення за своїми міркуваннями, без ускладнення виробництва зубчастих коліс, дає конструктору можливість керувати геометрією і якісними показниками зубчастої передачі, зберігаючи її габарити, передаточне відношення (незначна зміна міжосьової відстані порівняно з ділильною може, навіть, виявитися потрібною, причому досягається вона у прямозубій передачі лише вибором відповідних коефіцієнтів зміщення). Проте коефіцієнти зміщення найвигідніші, наприклад, при згині або при абразивному спрацюванні, і можуть не бути такими при розрахунку передачі на контактну міцність, а тим більше мати найвигідніший коефіцієнт перекриття. Не слід забувати й про те, що вибрані коефіцієнти зміщення повинні задавати передачу в межах її існування, тобто у передачі мають бути відсутні підрізання, загострення, інтерференція зубів і повинна забезпечуватись плавність її роботи.

Суперечливість впливу зміщення на геометрію і якісні показники приводять до висновку, що універсальних рекомендацій для їх визначення не може бути. У кожному конкретному випадку коефіцієнти зміщення треба призначати з урахуванням умов роботи зубчастої передачі.

Для вибору коефіцієнтів зміщення можна використовувати табличні методи і метод "блокувальних контурів". Найзручніший метод ***блокувальних контурів,*** за яким для кожного конкретного сполучення чисел зубів z_1 і z_2 будують у прямокутній системі x_1, x_2 криві, що визначають межі існування передачі, тих чи інших її властивостей. У такій системі координат (рис. 9.28) кожна зубчаста передача з відповідним значенням коефіцієнтів зміщення відображається єдиною точкою (O, M, N тощо).

Передача, складена із зубчастих коліс без зміщення ($x_1 = x_2 = 0$), відповідає початку координат — точці O. Точка M відповідає передачі з додатним зміщенням обох коліс ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$), точка N — з від'ємним зміщенням ($x_1 < 0$, $x_2 < 0$). Пряма a—a, проведена під кутом $-45°$ до осей координат, відповідає передачі, в якій $x_1 = -x_2$, і називається ***рівнозміщеною.*** Вище прямої a—a знаходиться зона передач із додатною сумою зміщення

$x_\Sigma = x_1 + x_2 > 0$, а нижче — з від'ємною сумою зміщення ($x_\Sigma < 0$). Наприклад, сума координат будь-якої точки на прямій $m—m$, паралельній прямій $a—a$, стала і від'ємна. Звідси ясно, що кожному значенню міжосьової відстані a_w відповідає єдина пряма, що перетинає осі координат під кутом 45°.

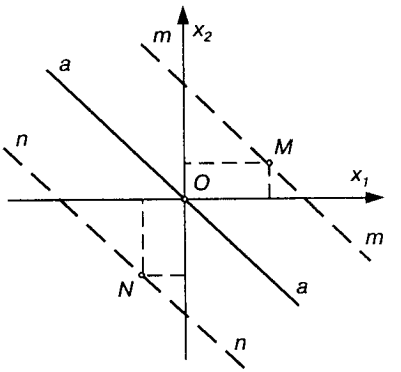


Рис. 9.28.

Нескінченна кількість точок координатного поля системи x_1, x_2 відповідає нескінченній кількості варіантів передачі, які можна одержати при одних і тих самих числах зубів, але різних коефіцієнтах зміщення. Ці передачі нерівноцінні за своїми якісними характеристиками, мають різну геометрію; з них треба вибрати найвигідніші для заданих умов роботи. При цьому необхідно мати на увазі, що деякі точки поля не можна використати, оскільки при відповідних їм значеннях x_1 і x_2 можуть відбуватись підрізання, інтерференція, загострення зубів, зниження коефіцієнта перекриття за межі гранично допустимого значення ($\varepsilon_\gamma < 1$) тощо, тобто ті значення коефіцієнтів зміщення не забезпечують умови існування зубчастої передачі.

Граничному значенню кожного з обмежуючих факторів у системі x_1, x_2 відповідає певна лінія (або лінії), що відокремлюють зону допустимих значень x_1 і x_2 від зони недопустимих, де передача без вказаних раніше небажаних явищ не існує. Сукупність таких ліній називається ***блокувальним контуром***. Блокувальні контури складені групою радянських учених під керівництвом І. А. Болотовського [70]. Форма та розміщення ліній блокувального контуру залежать від числа зубів зубчастих коліс і різального інструменту, який використовується.

На рис. 9.29 наведено приклад блокувального контуру. Лінії *1* і *2* обмежують (безумовно) межі існування передачі, за якими виникає інтерференція на ніжці зуба колеса; *3* і *4* — на ніжці зуба шестірні; *5* — лінія коефіцієнта $\varepsilon_\alpha = 1$. Заборонені зони заштриховані. Всередині контуру нанесено лінії умовних меж, за які виходити не дозволяється. Ці умовні межі назначаються конструктором у кожному конкретному випадку, з урахуванням

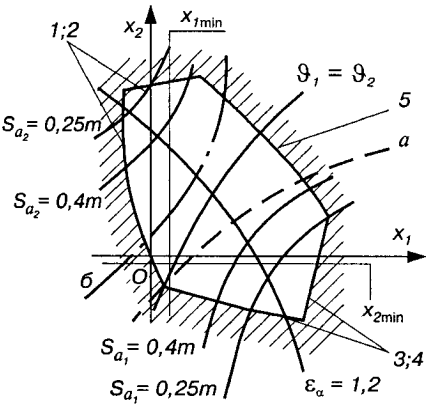


Рис. 9.29.

умов роботи передачі. До таких ліній належать, наприклад, відповідні значення коефіцієнта перекриття $\varepsilon_\alpha = 1{,}2$; товщину вершин зубів $s_a = 0{,}25m$, $s_a = 0{,}4m$, а також лінії початку підрізання рейковим інструментом $x_{1\min}$ і $x_{2\min}$.

Крім цього, всередині контуру нанесено лінії якісних показників передачі.

1. Лінії коефіцієнтів зміщення, при яких забезпечується рівноміцність зубів на згин, якщо матеріали й термічна обробка обох зубчастих коліс однакові. Лінія, позначена літерою *а*, відповідає випадку, коли ведучою є шестірня, а лінія, позначена літерою *б* — випадку, коли ведучим є колесо.

2. Лінія коефіцієнтів зміщення, при яких вирівняні максимальні питомі ковзання на початкових колах обох зубчастих коліс. Ця лінія позначена $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Блокувальних контурів для косозубих передач не побудовано. Коефіцієнти зміщення для косозубих циліндричних передач визначаються із блокувальних контурів прямозубих передач з використанням так званих ***еквівалентних зубчастих коліс***. Під ними розуміють прямозубі циліндричні колеса, які мають такий самий профіль зубів, що й косозубі колеса у нормальному перетині. Число зубів еквівалентного колеса визначається за формулою

$$z_{vi} = z_i / \cos^3 \beta, \qquad (9.78)$$

де z_i — число зубів i-го колеса косозубої циліндричної передачі; β — кут нахилу лінії зуба на ділильній поверхні.

Проектуючи косозубі передачі, треба мати на увазі, що повний коефіцієнт перекриття ε_γ такої передачі практично завжди можна виконати більшим від одиниці за рахунок осьового коефіцієнта перекриття ε_β, а тому безумовна межа контуру по $\varepsilon_\alpha = 1$ не повинна братися до уваги.

Приклади вибору коефіцієнтів зміщення. Приступаючи до вибору коефіцієнтів зміщення, необхідно встановити найбільш

імовірний вид руйнування зубів передачі, що проектується, гранично допустимі значення коефіцієнта перекриття ε_α, товщину зуба на колі виступів s_a, допустиме підрізання зубів і т. д. На основі цих вимог можна всередині блокувального контуру, що дає безумовні теоретичні границі значень коефіцієнтів зміщення, виділити більш вузький контур, складений із ліній інтерференції, гранично допустимого підрізання та граничних значень ε_α і s_a. Цей більш вузький контур, що обмежує практично сприятливі для конкретного випадку значення x_i, будемо надалі, на відміну від теоретичного, називати ***практичним блокувальним контуром.***

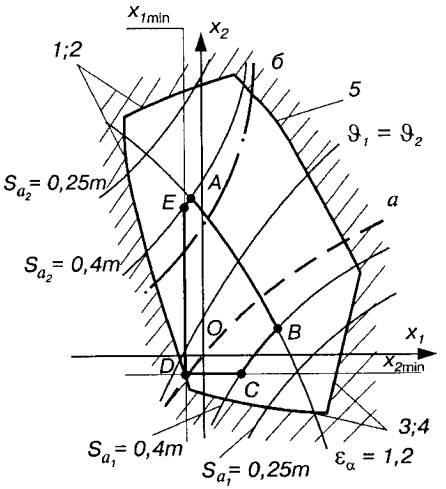


Рис. 9.30.

Для прикладу розглянемо практичний блокувальний контур для передачі з такими параметрами: $\varepsilon_\alpha \geq 1{,}2$; $s_a \geq 0{,}4m$ і $x_i \geq x_{\min}$. На рис. 9.30 побудовано такий контур $ABCDE$, який визначається: справа — кривою $\varepsilon_\alpha = 1{,}2$, зліва — лінією $x_{1\min}$, зверху — $s_{a_2} = 0{,}4m$, знизу $x_{2\min}$ і $s_{a_1} = 0{,}4m$.

Розглянемо деякі способи визначення коефіцієнтів зміщення, які забезпечують різні якісні показники зубчастої передачі.

Передача з максимальною контактною міцністю. Як відомо з курсу опору матеріалів, контактні напруження на поверхні зубів визначають за формулою Герца

$$\sigma_H = z_E \sqrt{\frac{w_n}{\rho_{зв}}}, \qquad (9.79)$$

де σ_H — найбільші контактні напруження при стиску двох циліндрів уздовж твірних; z_E — коефіцієнт, що враховує механічні властивості матеріалів шестірні й колеса; w_n — нормальне навантаження на одиницю довжини контактних ліній; $\rho_{зв}$ — зведений радіус кривизни спряжених профілів зубів у полюсі зачеплення, що визначається з формули

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{1}{\rho_{w_1}} + \frac{1}{\rho_{w_2}}, \text{ або } \rho_{зв} = \frac{\rho_{w_1}\rho_{w_2}}{\rho_{w_1} + \rho_{w_2}}, \qquad (9.80)$$

де ρ_{w_i} — радіус кривизни евольвентного профілю зуба у точці, що є на початковому колі i-го зубчастого колеса.

Отже, при обраних матеріалах зубчастих коліс та їх навантаженнях контактні напруження будуть тим менші, чим більший зведений радіус кривизни спряжених профілів зубів, який, у свою чергу, залежить від радіусів кривизни профілів зуба шестірні й колеса (9.80). Із властивостей евольвенти маємо, що її радіус кривизни збільшується при віддаленні від основного кола; на практиці це забезпечується додатним зміщенням твірного контуру. Таким чином, задача зводиться до знаходження максимально можливих значень коефіцієнта суми зміщень x_Σ у зоні додатних значень x_1 і x_2. Для цього необхідно провести дотичну до лінії практичного блокувального контуру під кутом 45° до осей координат у зоні максимальної суми значень x_Σ (рис. 9.31, *а*), у даному випадку до лінії $\varepsilon_\alpha = 1{,}2$. Ця дотична визначає найбільші граничні значення x_Σ, а точка дотику E відповідає значенням x_1 і x_2.

Передача з максимальною міцністю на згин. Під дією прикладених навантажень зуб працює на згин як консольна балка. Для зменшення напружень згину за інших однакових умов необхідно збільшити товщину ніжки зуба, чого можна досягти при збільшенні до відповідного значення коефіцієнта суми зміщень x_Σ.

Для вибору коефіцієнтів зміщення, що забезпечують міцність зубів на згин, близьку до максимальної, необхідно при ведучій шестірні рухатися по кривій *а* (рис. 9.31, *б*), а при ведучому колесі — по кривій *б* вправо уверх до перетину з межею практичного контуру (у даному випадку з кривою $\varepsilon_\alpha = 1{,}2$). На рис. 9.31, *б* точка F відповідає коефіцієнтам зміщення з максимальною міцністю зубів на згин при ведучій шестірні, а точка T — при ведучому колесі.

Передача з найменшим спрацюванням. Спрацювання зубів виникає внаслідок відносного ковзання їх активних поверхонь та наявності абразивних частинок між ними. Це призводить до спотворення поверхонь, а отже, до появи додаткових динамічних навантажень і шуму. Як показує практика, спрацювання поверхонь зубів буде найменшим, якщо зробити однаковими максимальні питомі ковзання на початкових ніжках зубів

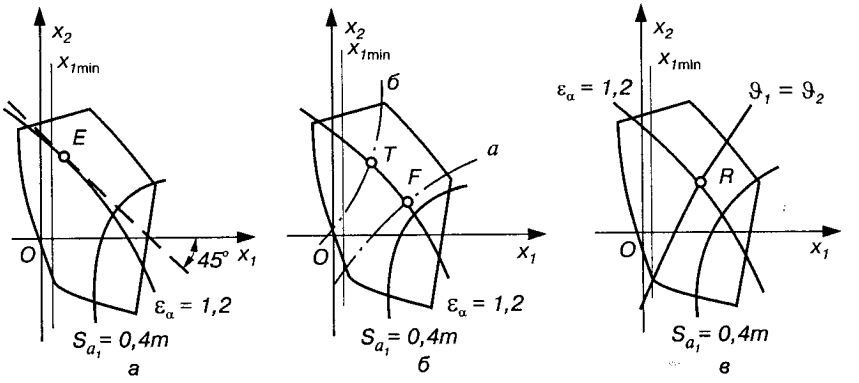


Рис. 9.31.

обох коліс. Це забезпечується відповідним підбором коефіцієнтів зміщення.

Для вибору коефіцієнтів зміщення, що забезпечують найменші значення питомого ковзання, слід рухатися по кривій $\vartheta_1 = \vartheta_2$ вправо і вгору (рис. 9.31, *в*) до перетину з межею практичного контуру, в даному випадку з кривою $\varepsilon_\alpha = 1,2$. Точка R відповідає цій умові.

Передача з максимальним коефіцієнтом перекриття. Коефіцієнт перекриття за інших однакових умов збільшується зі зменшенням кута зачеплення α_w (9.68), тому точка, що відповідає передачі з $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha max}$, повинна мати найменший коефіцієнт суми зміщень (9.43), тобто буде міститися в лівому нижньому куті практичного блокувального контуру (у точці D, див. рис. 9.30).

Передача із заданою міжосьовою відстанню. Коефіцієнт суми зміщень x_Σ розраховують за перетвореними формулами (9.35) і (9.43) відповідно

$$\cos\alpha_{tw} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2a_w}\cos\alpha_t; \qquad (9.81)$$

$$x_\Sigma = \frac{(\text{inv}\alpha_{tw} - \text{inv}\alpha_t)(z_1 + z_2)}{2\text{tg}\alpha}. \qquad (9.82)$$

Тоді на блокувальному контурі проводять лінію, що відповідає знайденому значенню x_Σ. Значення x_1 і x_2 вибирають на прямій x_Σ з урахуванням якісних показників передачі.

Передача, яка задовольняє спеціальні геометричні вимоги. Коефіцієнти зміщення підбирають за допомогою блокувальних контурів з урахуванням поставлених вимог. Наприклад, треба спроектувати зубчасті колеса так, щоб шестірня мала максимально можливий діаметр кола западин. Поставлена задача зводиться до знаходження на практичному контурі найбільш можливого значення коефіцієнта x_1.

9.14. Побудова торцевого профілю зубів зубчастої передачі

Вихідними даними для побудови є величини z_1, z_2, m, β і коефіцієнти зміщення x_1 і x_2, вибрані з блокувального контуру. Використовуючи раніше наведені формули, розраховуємо геометричні параметри зубчастих коліс і зубчастої передачі, а саме: $a_w, r_i, r_{b_i}, r_{w_i}, r_{a_i}, r_{f_i}, \alpha_{tw}, s_{ti}, e_{ti}$ і т. д.

Побудову зубчастої передачі зручно виконувати у такій послідовності.

1. Проводять лінію центрів O_1O_2 і відкладають на ній міжосьову відстань $a_w = O_1O_2$ (рис. 9.32).

2. Викреслюють початкові кола, які повинні дотикатись у полюсі зачеплення, а потім — ділильні, основні кола, кола вершин і западин обох зубчастих коліс.

3. Проводять лінію зачеплення $N—N$, яка є дотичною до основних кіл і проходить через полюс зачеплення $П$, утворюючи із загальною дотичною, проведеною до початкових кіл через полюс зачеплення, кут зачеплення α_{tw}.

4. Будують евольвенти спряжених профілів зубів, які описує точка $П$ прямої $N—N$ при перекочуванні її по основному колу без ковзання. Для цього можна скористатись рівнянням евольвенти у полярній системі координат (9.19) і (9.20). Задаючи ряд значень кута профілю α_{ty}, одержують відповідні значення евольвентного кута $\text{inv}\,\alpha_{ty}$ і радіус-вектора $\mathbf{r}_y$. Напрямок полярної осі OA (рис. 9.12) визначають за допомогою відомих кутів α_{tw} і $\text{inv}\,\alpha_{tw}$.

Евольвентний профіль зубів можна побудувати графічним способом. Для цього через полюс $П$ проводять дотичну до основного

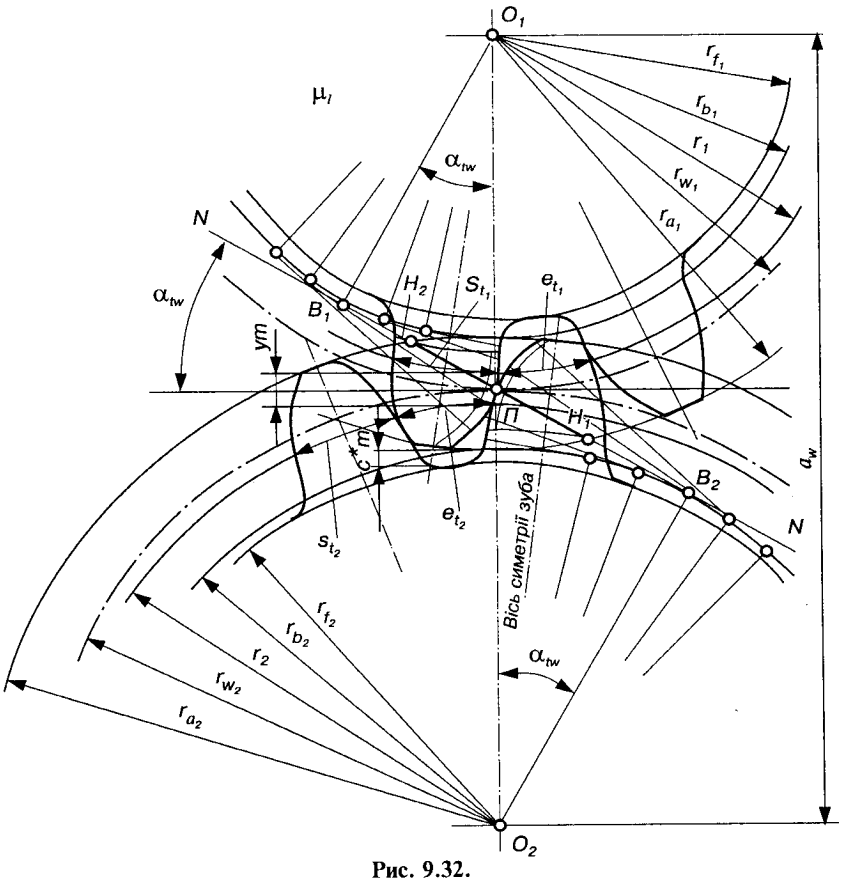


Рис. 9.32.

кола радіуса r_b (рис. 9.33) у точці B. Потім на основному колі відмічають ряд точок з однаковим інтервалом: B_1, B_2, B_3 і т. д. Враховуючи властивість евольвенти, згідно з якою радіус її кривизни, наприклад, у точці $П$, дорівнює відрізку $ПВ$, з точки B проводять дугу $\overset{\smile}{K_1K_4}$. Потім радіусом K_1B_1 з центра B_1 проводять дугу $\overset{\smile}{K_1K_2}$ і т. д. Так, послідовно використовуючи точки B_1, B_2, B_3 і т. д. як центри відповідних дуг, будують наближений профіль евольвенти. Очевидно, точність побудови буде підвищуватись із зменшенням довжини дуг $\overset{\smile}{K_1K_2}, \overset{\smile}{K_2K_3}$ і т. д., тобто із збільшенням їх кількості.

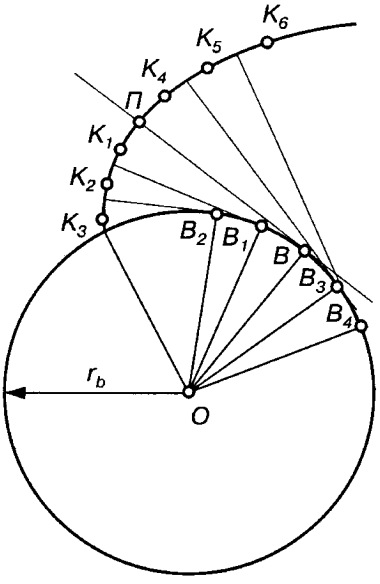


Рис. 9.33.

5. На дузі ділильного кола відкладають товщину зуба s_{t_i} і ширину западини e_{t_i} для першого і другого колеса і будують профілі зубів, різнойменні до одержаних раніше. Ці профілі будують симетрично відносно осі симетрії зуба.

6. На кожному колесі обмежують профілі зубів зовні колом вершин, всередині — колом западин. Слід зазначити, що радіус кола западин може бути більшим, меншим від радіуса r_b основного кола або дорівнювати йому. Це залежить від числа зубів колеса і коефіцієнта зміщення x даного колеса. Але незалежно від цього повний профіль складається з евольвентної частини та перехідної кривої, що з'єднує евольвентну частину з колом западин. Перехідна крива утворюється в процесі виготовлення автоматично закругленою частиною різальної кромки рейки радіусом $\rho_{L_0} = 0{,}384\ m$.

Для побудови перехідної кривої необхідно спочатку, задаючи ряд положень рейки при русі відносно зубчастого колеса, що нарізається, визначити траєкторію центра закруглення різальної кромки рейки, а потім з точок цієї траєкторії як із центрів описати кола радіусом $\rho_L = 0{,}384\ m$. Огинаюча такої сім'ї кіл і є перехідною кривою.

Часто профіль ніжки основи зуба будують спрощено, дугою радіуса $\rho_L = 0{,}4\ m$, спряженою з евольвентою або, коли $r_b - r_f > 0{,}4\ m$, з продовжуючою її радіальною прямою.

7. Контролюють правильність побудови зубів обох коліс, порівнюючи товщини зуба на дузі кола вершин, одержані графічно, з показником, розрахованим аналітично. Для його визначення користуються формулою (9.41), прийнявши у ній $r_y = r_a$ і $\text{inv}\alpha_y = \text{inv}\alpha_{ta}$.

8. На бічних профілях зубів виділяють їх активні частини (рис. 9.34). Для цього треба знайти положення нижніх точок P_i

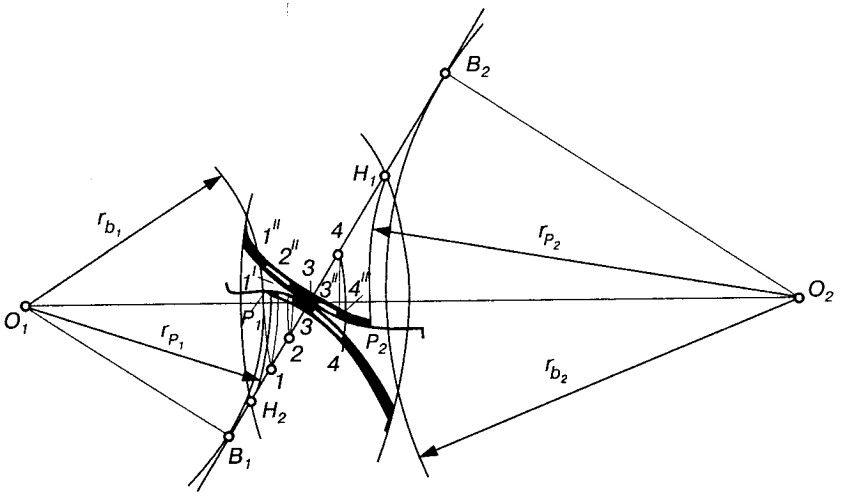


Рис. 9.34.

активних профілів зубів. Верхні точки активних профілів розміщені на колах вершин зубчастих коліс.

Для знаходження нижніх точок з точок H_i активної лінії зачеплення необхідно провести радіусом r_{P_i} дуги до перетину з головним профілем зубів шестерні та колеса. Точки перетину і є нижніми точками активних профілів. Деколи на активних профілях виділяють ділянки, що працюють сумісно. Границі цих ділянок знаходять побудовами, аналогічними описаним раніше для верхніх і нижніх точок активних профілів. Ділянки виділяють по черзі штриховкою.

9. Перевіряють коефіцієнти перекриття передачі ε_γ за формулами (9.65), (9.68), (9.69).

10. Будують графіки питомого ковзання, розрахувавши їх значення за формулою (9.18).

9.15. Зачеплення Новикова

Евольвентне зачеплення, що завдяки своїм перевагам надзвичайно широко використовується у техніці, має, проте, деякі недоліки: а) малі зведені радіуси кривизни робочих поверхонь; б) підвищену через лінійний контакт зубів чутливість до перекосів; в) втрати енергії на тертя у зачепленні в результаті наявності відносного ковзання профілів. Ці недоліки зменшені у зачепленні Новикова.

Принципова можливість такого зачеплення випливає з формули коефіцієнта перекриття для косозубої передачі (9.35), згідно з якою коефіцієнт перекриття є сумою коефіцієнта перекриття у поперечному перетині (торцевого коефіцієнта перекриття ε_α) і коефіцієнта перекриття від нахилу зубів (осьового коефіцієнта перекриття ε_β), тобто

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta.$$

У прямозубій передачі з осьовим коефіцієнтом перекриття $\varepsilon_\beta = 0$ перекриття досягається за рахунок коефіцієнта ε_α. Логічний також інший випадок, коли $\varepsilon_\alpha = 0$, а $\varepsilon_\beta > 1$, тобто $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\beta$. Це досягається, як видно з формули (9.69), відповідним вибором робочої ширини зубчастих коліс b_w і кутом нахилу зубів β. Але, якщо $\varepsilon_\alpha = 0$, то з формули (9.66) випливає, що довжина активної лінії зачеплення $q_\alpha = H_1H_2 = 0$ (рис. 9.23), тобто вона зникає і перетворюється в точку, яка в торцевому перетині не змінює свого положення і переміщується вздовж лінії зубів. Тоді форма профілів зубів більше не зв'язує основну теорему зачеплення, і їх можна вибрати довільніше, керуючись лише міркуваннями міцності та довговічності. Таке зачеплення нового типу в 1955 р. запропонував радянський учений М. Л. Новиков. Він показав можливість використання цього зачеплення як для зубчастих коліс з паралельними осями (рис. 9.35, *а*), так і для зубчастих коліс, осі яких перетинаються або схрещуються (рис. 9.35, *в*).

Отже, в зачепленні Новикова відсутня площина зачеплення, оскільки лінія $H_1H_2 = 0$, залишається лише лінія зачеплення, паралельна осям коліс (для циліндричних коліс); перекриття досягається лише за рахунок нахилу зубів, тобто таке зачеплення не може бути прямозубим. Замість лінії контакту зубів маємо точку контакту. Через це зачеплення Новикова називають ще ***точковим зачепленням***, або, враховуючи форму зубів, ***круглогвинтовим.*** Взагалі профілі зубів зачеплення Новикова можуть бути утворені різними кривими. Найпростішими, як показали дослідження, є профілі, окреслені у торцевому перетині дугами кола. Як правило, зуби одного колеса (частіше всього шестірні) мають випуклий профіль, а зуби іншого (більшого) колеса — увігнутий (рис. 9.35, *а, б*).

Побудова профілів зубів здійснюється у такому порядку (рис. 9.35, *б*). За заданими міжосьовою відстанню a_w і передаточним відношенням $i_{12} = z_2 / z_1$ визначаємо радіуси початкових кіл r_{w_1} і r_{w_2}. Проводимо через полюс $П$ пряму $N—N$, що утворює з

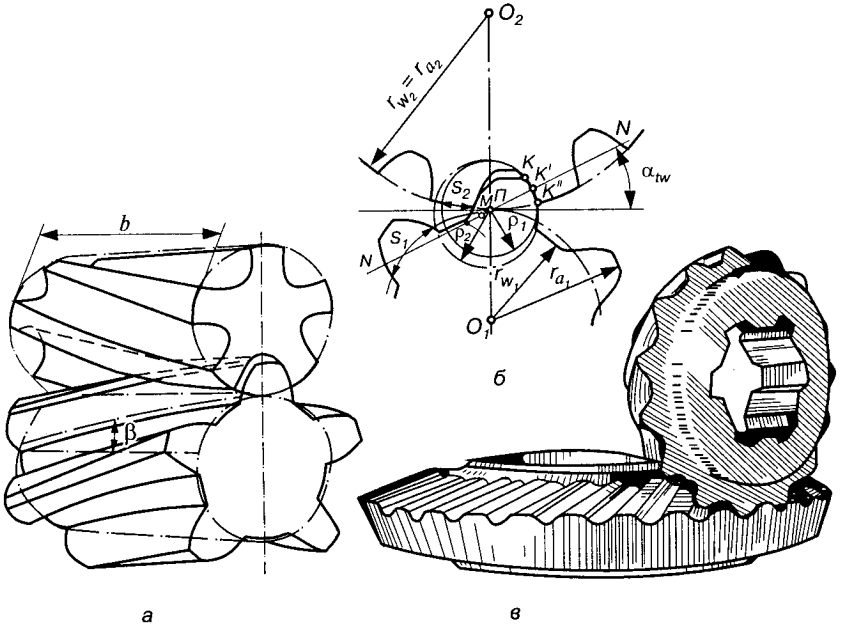


Рис. 9.35.

прямою t—t, перпендикулярною до лінії центрів, кут зачеплення α_{tw}. Випуклі профілі зубів меншого колеса викреслюються з центра, що збігається з полюсом $П$, дугою кола радіуса $\rho_1 \approx 1{,}5\, m_t$, де m_t — модуль зачеплення у торцевому перетині. Угнуті профілі зубів більшого колеса викреслюються дугою кола радіуса $\rho_2 = (1{,}03 - 1{,}10)\, \rho_1$ з точки M, яка також міститься на прямій N—N. При малій різниці радіусів ρ_1 і ρ_2 профілі зубів на деякій їх частині майже збігаються, що, не зважаючи на теоретичний точковий контакт, дає можливість створити значну площу контакту і тим самим зменшити контактні напруження у зубчастому зачепленні. Радіус r_{a_2} кола вершин більшого колеса дорівнює радіусу r_{w_2} початкового кола цього колеса. Радіус кола вершин меншого колеса

$$r_{a_1} = r_{w_1} + (0{,}8 - 0{,}9)\, \rho_1 . \tag{9.83}$$

Радіус кола западин більшого колеса

$$r_{f_2} = a_w - r_{a_1} - c, \tag{9.84}$$

де c — радіальний зазор, $c = (0{,}1 \div 0{,}2)\, \rho_1$.

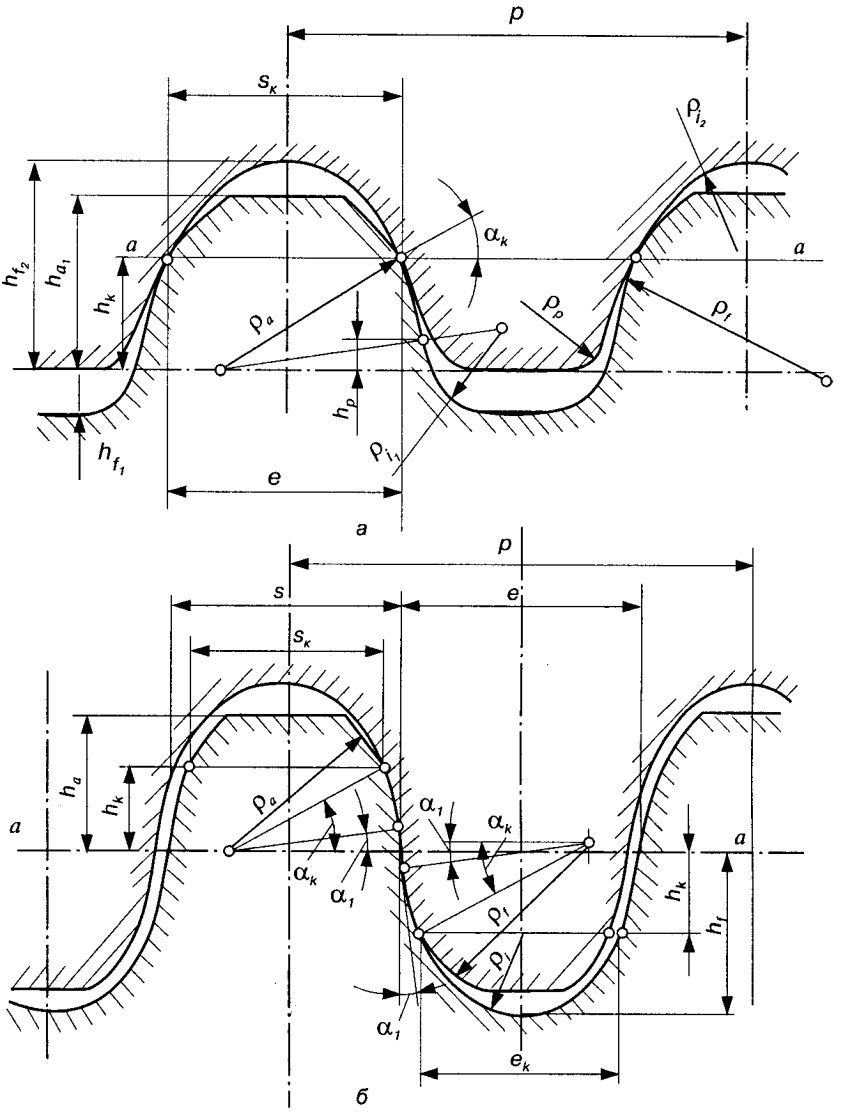


Рис. 9.36.

Радіус кола западин меншого колеса

$$r_{f_1} = r_{w_1} - (0{,}2 \div 0{,}4)\,\rho_1. \qquad (9.85)$$

Товщину зуба одного з коліс можна вибрати довільно, а товщину другого визначають побудовою, і вони пов'язані між собою умовою $s_1 = (1{,}3 \div 1{,}5)\, s_2$; сума $s_1 + s_2$ дещо менша від кроку p. При проектуванні зачеплення Новикова рекомендується кут зачеплення $\alpha_{tw} = 20 \div 30°$, кут нахилу зубів $\beta = 5 \div 40°$.

Оскільки зубці стикаються в одній точці, висота їх теоретично може дорівнювати нулю; практично ж вона може бути невеликою, що сприяє міцності зубів на згин.

Розглянута передача має одну лінію зачеплення і її несуча здатність приблизно у 1,5 раза більша, ніж у евольвентної косозубої передачі. Якщо головки зубів обох коліс виконати випуклими, а ніжки увігнутими, матимемо ***передачу Новикова з двома лініями зачеплення***, у якої зуби стикаються у двох точках (на ніжці й головці), зміщених відносно одна одної. Несуча здатність такої передачі вища, ніж передачі з однією лінією зачеплення, а шум менший.

Для нарізання випуклих та угнутих зубів необхідно мати різний інструмент. Зуби передач із двома лініями зачеплення нарізаються одним інструментом. На рис. 9.36 наведено вихідні контури для нарізання зачеплення: а) з однією лінією зачеплення; б) із двома лініями зачеплення. Останнім часом ширше використовують передачі Новикова з двома лініями зачеплення, проте такі передачі чутливіші до перекосу осей.

Отже, передача Новикова завдяки меншим контактним напруженням і згинальним моментам мають в 1,5—2 рази вищу несучу здатність, ніж аналогічні евольвентні передачі, і завдяки кращим умовам змащення, меншому відносному ковзанню мають дещо вищий ККД. У зв'язку з тим що мінімальне число зубів шестерні може бути малим (теоретично може дорівнювати навіть одиниці), такі передачі дають змогу забезпечувати високі передаточні відношення.

До недоліків зачеплення Новикова треба віднести: 1) складніший різальний інструмент, для кожної пари зубів коліс треба мати свій комплект фрез; 2) нижчий коефіцієнт перекриття ε_γ, оскільки $\varepsilon_\alpha = 0$; 3) для забезпечення високого коефіцієнта ε_γ треба брати широкі зубчасті колеса. Незважаючи на ці недоліки, зачеплення Новикова одержало досить широке розповсюдження, особливо в редукторах загального призначення, кораблебудуванні та в інших галузях машинобудування.

ПРОСТОРОВІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

У багатьох машинах для забезпечення роботи механізмів необхідно передавати обертовий рух з одного вала на інший за умови, що осі цих валів або перетинаються, або схрещуються. У таких випадках використовують просторові зубчасті механізми, до яких належать конічні зубчасті передачі або різновиди гіперболоїдних зубчастих передач (гвинтові зубчасті передачі, черв'ячні, гіпоїдні).

10.1. Конічні зубчасті передачі

Конічні зубчасті колеса, як і конічні фрикційні котки, застосовуються для передачі обертового руху між валами, осі яких перетинаються. Міжосьовий кут Σ (рис. 10.1) визначається конструктивною необхідністю і може змінюватись у межах 10—170°. Найчастіше зустрічаються конічні передачі при перетині осей під кутом $\Sigma = 90°$. Такі конічні передачі називають ***ортогональними.***

Конічну зубчасту передачу (рис. 10.1, *а*) можна уявити собі як передачу двома конічними котками, на поверхні яких для усунення проковзування нарізані зубці. Аксоїдами у відносному русі таких коліс є два конуси з кутами конусності і

які в сумі дорівнюють міжосьовому куту, тобто

(10.1)

За аналогією з циліндричними зубчастими передачами ці конуси називають ***початковими***, оскільки вони перекочуються один по одному без ковзання, а кути δ_{w_1} і δ_{w_2} — кутами початкових конусів конічних коліс. На практиці найчастіше використовують конічні колеса без зміщення. Тоді початкові та ділильні конуси збігаються, а кути початкових конусів дорівнюють кутам ділильних конусів ($\delta_{w_1} = \delta_1, \delta_{w_2} = \delta_2$).

Передаточне відношення конічної передачі i_{12} визначається з припущення, що початкові конуси котяться один по одному без ковзання. При цьому швидкості точок стикання, що належать обом конусам (рис. 10.1, *а*), будуть дорівнювати одна одній. Наприклад, для точки $П$ можна записати

$$v_{П_1} = v_{П_2} = \omega_1 П_1 O' = \omega_2 П_2 O'',$$

де $П_1$, $П_2$ — точки, що належать відповідно шестерні та колесу і в даний момент збігаються з точкою $П$.

Тоді передаточне відношення можна виразити через радіуси початкових кіл або числа зубів (нагадуємо, що ми прийняли $r_{w_1} = r_i = mz_i / 2$):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (10.2)$$

У формулі (10.2) $r_{w_1} = П_1 O'$, $r_{w_2} = П_2 O''$ — радіуси початкових кіл шестірні й колеса в точці $П$.

Розглядаючи трикутники $ОПО'$ і $ОПО''$, можна записати

$$i_{12} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}. \qquad (10.3)$$

Для ортогональних конічних передач залежність (10.3) має вигляд

$$i_{12} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \operatorname{tg}\delta_2 = \operatorname{ctg}\delta_1. \qquad (10.4)$$

Профілі зубів конічних коліс утворюються прямою OA площини N, яка обкочується без ковзання по основному конусу (рис. 10.1, *б*). При цьому будь-яка точка A_i прямої OA описує евольвенту A_iB_i, а пряма OA — евольвентну поверхню, яка вибирається головною бічною поверхнею конічного зубчастого колеса.

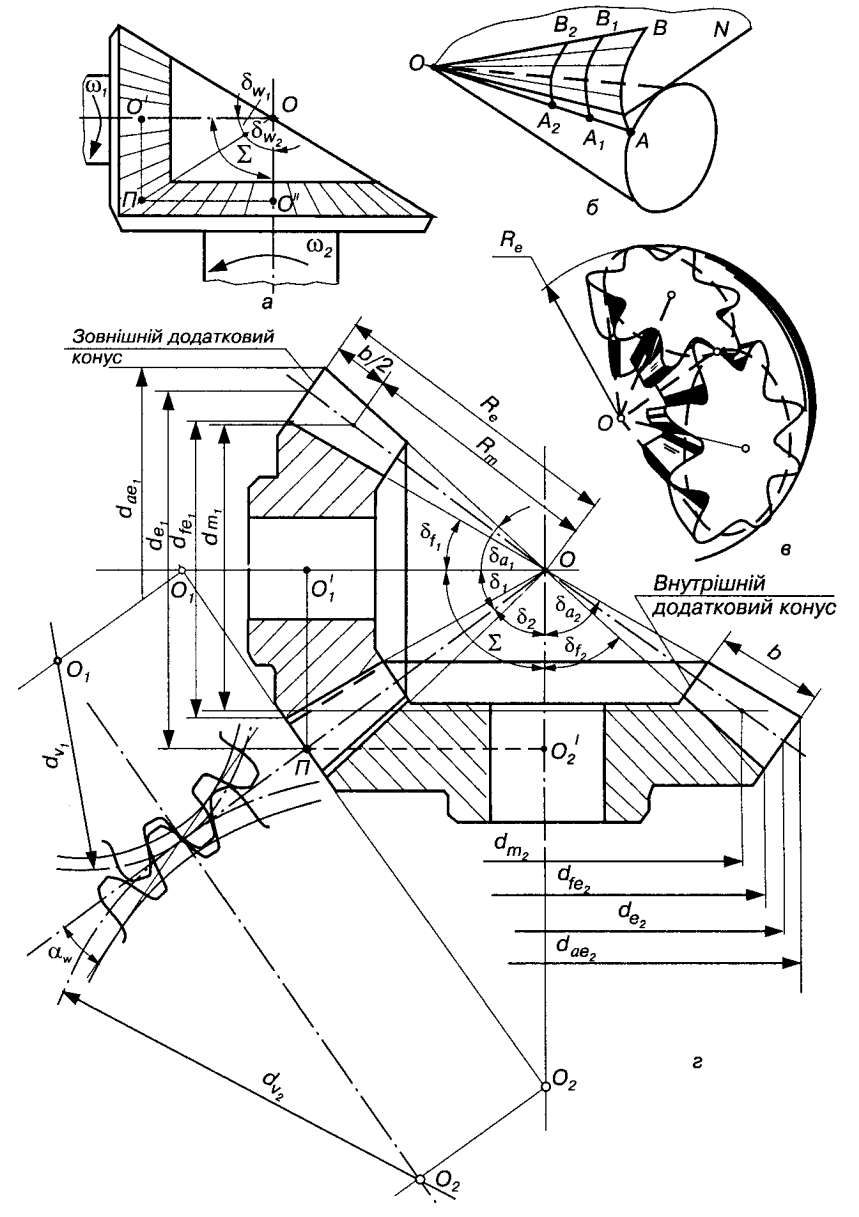

а
б
в
г
Зовнішній додатковий конус
Внутрішній додатковий конус

Рис. 10.1.

У прямозубих колесах лінія *OA* збігається з твірною основного конуса. Але, враховуючи те, що в довільному положенні кожна точка евольвенти, наприклад *AB*, завжди знаходиться на однаковій відстані *OA* від вершини основного конуса *O*, то профілі зубів спряжених конічних коліс треба будувати на сферичних поверхнях з центром у точці *O* (рис. 10.1, *в*). Проте профілювання та виконання евольвентного конічного зачеплення пов'язані з цілим рядом труднощів, оскільки сферична поверхня точно не розгортається на площину. На практиці при побудові профілів зубів сферичні поверхні замінюють конічними, точна розгортка яких легко будується на площині. Оскільки висота зуба конічного колеса незначна порівняно з радіусом R_e сфери, то неточність, що виникає від заміни сферичної поверхні конічною, досить невелика. Таким чином, складна задача побудови профілів на сферичній поверхні зводиться до наближеного, але простого графічного розв'язання цієї задачі на площині. Але перш ніж приступити до цього питання, розглянемо деякі інші особливості геометрії конічних передач.

На рис. 10.1, *г* зображено пару конічних зубчастих коліс, які перебувають у зачепленні. В таких передачах, за аналогією з циліндричними, розглядають, крім основних, початкових і ділильних конусів, про які вже говорилось раніше, ще конуси вершин і западин (δ_{a_i} — кут конуса вершин, δ_{f_i} — кут конуса западин). Як торцеві перетини розглядають перетини зубчастого колеса поверхнями додаткових конусів, тобто конусів, осі яких збігаються з осями коліс, та їх твірні, перпендикулярні до твірних ділильного конуса. Відрізняють ***зовнішній і внутрішній додаткові конуси***, що обмежують зубчастий вінець і визначають ширину зубчастого вінця *b*, та ***середній додатковий конус***, твірна якого ділить ширину зубчастого вінця *b* на дві рівні частини. Всі геометричні параметри, що належать зовнішньому торцевому перетину конічних зубчастих коліс, позначають індексом *e*, внутрішнього — *i*, середнього — *m*, довільного — *x*. У випадках, що не викликають непорозумінь, допускається опускати індекс *m*. Відстані від вершини конусів *O* до твірної відповідного додаткового конуса називають ***конусними відстанями***, які позначають: R_e — зовнішня конусна відстань R_m — середня конусна відстань і т. д. Ширину зубчастого вінця в конічних колесах рекомендується приймати $b \le R_e/3$.

Як видно з рис. 10.1, *г*, зуби конічних коліс мають різні розміри по своїй довжині, а тому крок, модуль й інші параметри

зуба в різних перетинах мають різні значення, вони зменшуються з наближенням до вершин початкових конусів.

Залежно від зміни розмірів осьового перетину зубів по довжині розрізняють ***три форми зубів*** (рис. 10.2). Осьова форма зубів визначається взаємним розташуванням твірних ділильного конуса, конуса вершин і конуса западин, а також взаємним розташуванням вершин цих конусів.

Форма **I** — зуби пропорційно знижуються (рис. 10.2, *а*), а вершини ділильного та внутрішнього конусів збігаються. Висота ніжки зуба пропорційна відстані перетину зуба від вершини конуса. Цю форму використовують для конічних передач з прямими і тангенціальними зубами, а також обмежено для передач із круговими зубами при $m_n \geq 2$ і $z_\Sigma = 20—100$.

Форма **II** — зуби також знижуються (рис. 10.2, *б, в*), але вершини ділильного конуса та конуса западин не збігаються. У таких зубчастих колесах ширина дна западин стала, а товщина зуба на ділильному конусі зростає пропорційно відстані від вершин. Ця форма дозволяє обробляти одним інструментом відразу обидві поверхні зубів і є основною формою для коліс із круговими зубами.

Форма **III** — рівновисокі зуби (рис. 10.2, *г*), твірні конусів ділильного, западин і вершин паралельні. Цю форму використовують для кругових зубів при $z_\Sigma \geq 40$.

Для конічних прямозубих коліс із зубами форми I звичайно вибирають стандартні значення зовнішнього колового модуля m_{te} і задають розміри зубів на зовнішньому торці, на якому зручно виконувати вимірювання. У коліс із круговими зубами звичайно вибирають стандартні значення нормального модуля m_n (хоча це необов'язково) і задають розміри зубів посередині ширини зубчастого вінця.

Побудова профілю конічного зубчастого колеса зводиться до побудови профілю прямозубих циліндричних коліс на поверхні зовнішнього (або іншого) додаткового конуса. Такі зубчасті колеса називають ***еквівалентними колесами.*** Для побудови розгортки поверхонь додаткових конусів через точку $П$ проведемо лінію, перпендикулярну до твірної початкових конусів $ПО$, до перетину з осьовими лініями зубчастих коліс і одержимо точки O_1 і O_2, які вибираємо за центри обертання циліндричних зубчастих коліс, а відрізки $ПО_1$ і $ПО_2$ — за радіуси початкових кіл еквівалентних коліс $r_{v_1} = \frac{d_{v_1}}{2}$ і $r_{v_2} = \frac{d_{v_2}}{2}$ (рис. 10.1, *г*). Прийнявши

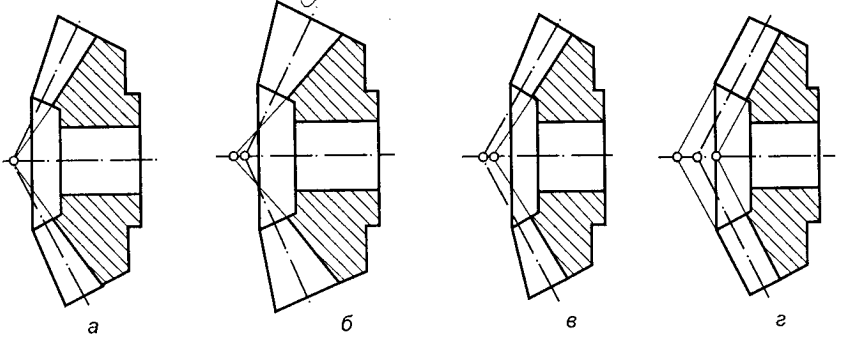


Рис. 10.2.

для циліндричних зубчастих коліс крок, модуль, висоту зуба як у конічного колеса у відповідному перетині (у даному випадку на зовнішньому додатковому конусі), будуємо профіль таких коліс. На рис. 10.1, *г* зліва побудовані такі профілі, які є наближеною розгорткою додаткового конуса. Кола радіусів r_{v_1} і r_{v_2} дорівнюють твірним додаткових конусів і їх можна визначити з трикутників $O_1O_1'П$ і $O_2O_2'П$:

$$r_{v_1} = \frac{r_{e_1}}{\cos\delta_1};\quad r_{v_2} = \frac{r_{e_2}}{\cos\delta_2};\quad r_{e_i} = \frac{d_{e_i}}{2}. \tag{10.5}$$

Виразивши радіуси кіл через модуль і числа зубів коліс, знайдемо число зубів еквівалентних конічних коліс:

$$m_{e_1} z_{v_1} = \frac{m_{e_1} z_1}{\cos\delta_1};\quad m_{e_2} z_{v_2} = \frac{m_{e_2} z_2}{\cos\delta_2},$$

звідки

$$z_{v_1} = \frac{z_1}{\cos\delta_1};\quad z_{v_2} = \frac{z_2}{\cos\delta_2}. \tag{10.6}$$

Інші геометричні параметри конічних коліс визначаються так само, як і звичайних циліндричних зубчастих коліс, геометрію яких розглянуто в розділі 9 і працях [21, 70].

Конічні зубчасті передачі у виготовленні та монтажі складніші, ніж циліндричні. Для нарізання коліс потрібні спеціальні верстати й інструмент. Перетин осей валів утруднює розміщення опор. При цьому одне з конічних коліс, як правило, розташоване консольно, що приводить до збільшення нерівномірності розподілу

навантаження по довжині зуба. В конічному зачепленні діють значні осьові сили, що ускладнює конструкцію опор валів. Все це приводить до того, що несуча здатність конічної передачі становить лише близько 0,85 % порівняно з циліндричною.

Але, незважаючи на вказані недоліки, конічні передачі досить широко використовуються в техніці, оскільки в конструкціях машин, приладів необхідно розташовувати вали під кутом.

10.2. Гвинтові зубчасті передачі

Механізми гвинтових зубчастих коліс (див. рис. 9.2, *ї*) застосовують у тих випадках, коли треба передавати обертання між осями, що схрещуються (осі не паралельні і не перетинаються), із сталим передаточним відношенням:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}.$$

Такі передачі є окремим випадком гіперболоїдних зубчастих передач (див. рис. 9.2, *и*). Початковими поверхнями гвинтової передачі є два кругових циліндри, які дотикаються в точці, що лежить на лінії найкоротшої відстані між осями коліс.

На рис. 10.3 показано проекції двох початкових циліндрів гвинтових зубчастих коліс *1* і *2*, бічні поверхні профілів зубів яких дотикаються одна до одної в точці *П*. При цьому один циліндр перекочуватиметься по другому, ковзаючи вздовж миттєвої осі обертання і ковзання. Осі 1—1 і 2—2 початкових циліндрів схрещуються під кутом Σ. Гвинтові колеса так само, як і косозубі циліндричні колеса, мають гвинтові зуби, нахилені до відповідних осей під кутами β_1 і β_2. У гвинтових колесах має справджуватись рівність

$$\beta_1 + \beta_2 = \Sigma. \qquad (10.7)$$

Кожне з гвинтових коліс у процесі нарізання має свою площину зачеплення. У спряжених гвинтових колесах ці площини перетинаються і утворюють лінію зачеплення H_1H_2, що проходить через точку *П*, а тому поверхні зубів цих коліс у процесі обертання весь час стикаються в точці, що переміщається по лінії H_1 H_2.

З двох косозубих коліс можна скласти гвинтову передачу, якщо кожне з них має можливість спрягатися в зачепленні з одною й тою самою рейкою (в якої в середній площині товщина

зубів дорівнює ширині западин). У цьому випадку косозубі колеса повинні мати однакові нормальні кроки та модулі.

Тоді, відповідно до формули (9.50), між торцевим кроком p_t і нормальним кроком p_n для обох гвинтових коліс можна встановити такі залежності:

$$p_{t_1} = \frac{p_n}{\cos\beta_1} \text{ і } p_{t_2} = \frac{p_n}{\cos\beta_2}, \tag{10.8}$$

або

$$m_{t_1} = \frac{m_n}{\cos\beta_1} \text{ і } m_{t_2} = \frac{m_n}{\cos\beta_2}. \tag{10.9}$$

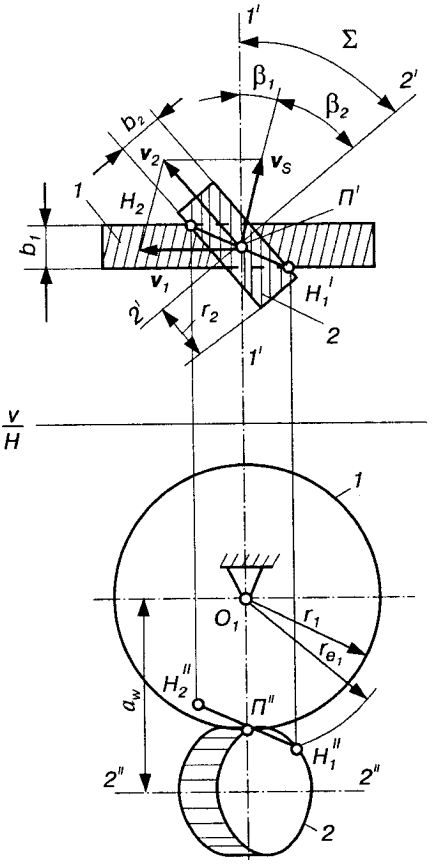


Рис. 10.3.

Встановимо тепер основні співвідношення між різними параметрами гвинтових коліс [33]. У зв'язку з тим, що гвинтова передача може вписатися в необхідну міжосьову відстань за рахунок вибору кутів нахилу зубів, а використання зміщених передач ($x_i \neq 0$) не дає значного поліпшення якісних показників зачеплення, доцільно використовувати незміщені гвинтові передачі, в яких початкові й ділильні циліндри збігаються. Позначимо радіуси цих циліндрів r_1 і r_2, числа зубів або витків — z_1 і z_2, числа обертів коліс за хвилину — n_1 і n_2, а колові швидкості коліс на поверхнях початкових циліндрів — $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_2$. Тоді дістанемо такі співвідношення:

$$2\pi r_1 = z_1 p_{t_1} \text{ і } 2\pi r_2 = z_2 p_{t_2}; \tag{10.10}$$

$$v_1 = \frac{\pi n_1}{30} r_1 \text{ і } v_2 = \frac{\pi n_2}{30} r_2. \tag{10.11}$$

При повороті коліс на один зуб ободи коліс проходять дуги, що дорівнюють крокам p_{t_1} і p_{t_2}, а значить, колові швидкості v_1 і v_2 пропорційні цим дугам. Отже, з врахуванням (10.8) і (10.11) маємо

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_{t_1}}{p_{t_2}} = \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = \frac{n_1 r_1}{n_2 r_2}, \qquad (10.12)$$

звідки

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \cos\beta_2}{r_1 \cos\beta_1} = i_{12}. \qquad (10.13)$$

Якщо $\beta_1 + \beta_2 = 90°$, то

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}\,\mathrm{tg}\beta_1. \qquad (10.14)$$

Замінюючи тепер на основі рівнянь (10.10) r_2 / r_1 на $(z_2 p_{t_2})/(z_1 p_{t_1})$, а відношення $\cos\beta_2 / \cos\beta_1$ — на p_{t_1} / p_{t_2} з (10.12), дістанемо

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2 \cos\beta_2}{r_1 \cos\beta_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (10.15)$$

При схрещуванні осей під прямим кутом маємо

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2 \mathrm{tg}\beta_1}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (10.16)$$

Як видно з одержаних залежностей, передаточне відношення в гвинтових передачах залежить не тільки від діаметрів (радіусів) початкових циліндрів, а й від кутів нахилу зубів β_1 і β_2. Отже, пара гвинтових коліс при незмінних значеннях початкових діаметрів може мати різні передаточні відношення залежно від вибраних кутів β_1 і β_2. Вибираючи ці кути, намагаються звичайно забезпечити вищі ККД передачі.

При наявності відносної швидкості — швидкості ковзання, спрямованої вздовж гвинтових ліній зубів, зубчасті передачі з перехресними осями відрізняються від циліндричних і конічних, в яких відбувається лише ковзання вздовж профілів зубів. Таким чином, у зубчастій передачі з перехресними осями спостерігається подвійне ковзання вздовж гвинтових ліній зубів і до-

даткове — вздовж профілів зубів. Швидкість основного ковзання значно більша від швидкості додаткового. Як видно з рис. 10.3, швидкість основного ковзання визначається за формулою

$$v_s = v_1 \sin \Sigma / \cos(\Sigma - \beta_i).$$

Для ортогональних передач ($\Sigma = 90°$) маємо

$$v_s = v_1 / \sin \beta_1. \qquad (10.17)$$

Гвинтові лінії двох спряжених гвинтових коліс можуть мати як однаковий, так і різні напрямки (праві та ліві). Це залежить від величини кута між осями коліс, а також вибору одного з кутів нахилу зуба. При гвинтових лініях однакового напрямку кут між осями валів Σ дорівнює сумі $\beta_1 + \beta_2$, протилежного напрямку — $\Sigma = |\beta_1 - \beta_2|$. Якщо передача реверсивна, вибирають кути $\beta_1 = \beta_2 = 45°$.

Розміри елементів зубів гвинтових коліс визначають, виходячи з нормального модуля m_n, коефіцієнтів висоти головок зубів $h_a^* = 1$, радіального зазору $c^* = 0{,}25$, кута зачеплення в нормальній площині $\alpha = 20°$ (нульового зачеплення). Гвинтові колеса нарізаються так само, як і косозубі циліндричні колеса. Застосування гвинтових коліс обмежується передаточним відношенням $i_{12} = 1—5$.

Недоліком зубчастих гвинтових механізмів є те, що поверхні зубів стикаються в точці, а значить, контактні напруження будуть значними. Крім цього, подвійне ковзання зубів спричиняє їх швидке спрацювання. Через це гвинтові колеса можна використовувати лише при невеликих швидкостях і незначних потужностях як другорядні передачі в машинах.

10.3. Черв'ячні передачі

Для передачі руху між осями, що схрещуються, досить широке поширення одержали черв'ячні передачі, які є різновидом передач гвинтовими колесами. Найчастіше використовуються ортогональні передачі (з кутом схрещення $\Sigma = 90°$). Якщо на одному з гвинтових коліс передачі зробити зуби під великим кутом, одержимо так званий ***черв'як***, а на другому (під малим кутом) — ***черв'ячне колесо***. Черв'як має форму одновиткового або багатовиткового гвинта (рис. 10.4). Черв'ячне колесо, яке з ним перебуває у зачепленні, має зуби, утворені як огинаючі

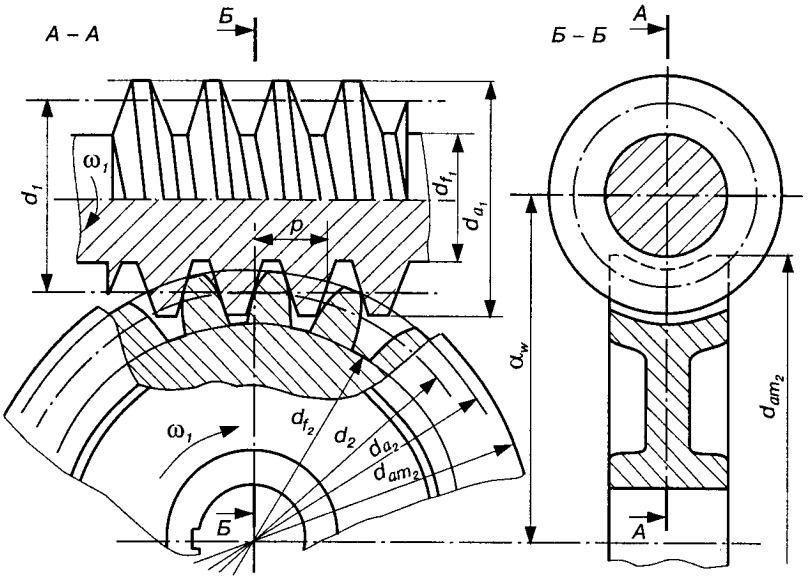


Рис. 10.4.

витки черв'яка. Черв'ячна передача в осьовому перетині *А—А* черв'яка, перпендикулярному до осі колеса, нагадує передачу шестерні з рейкою, а в осьовому перетині *Б—Б* колеса, перпендикулярному до осі черв'яка, — гвинтову передачу. Черв'ячне колесо можна собі уявити також як деякий сектор довгої гайки, обгорнутий навколо циліндричного тіла. Тому черв'ячна передача має властивості як зубчастої, так і гвинтової передач. Як відомо, робота останньої супроводжується значним відносним тертям ковзання витків гайки та гвинта.

Широке застосування черв'ячних передач пояснюється їх значними ***перевагами***. Такі передачі:

- забезпечують великі передаточні відношення, звичайно i_{12} = 6—80, але можливі передачі (для приводу, наприклад, поворотних столів металорізальних верстатів), в яких i_{12} = 500 і навіть i_{12} = 1000;
- забезпечують безшумність у роботі та плавність зачеплення;
- мають малі масу й габарити;
- мають можливість самогальмування (при низьких ККД).

Основні ***недоліки*** черв'ячних передач викликані наявністю відносного ковзання витків черв'яка і зубів черв'ячного колеса. До недоліків черв'ячних передач слід віднести:

• порівняно низький ККД, особливо при малих швидкостях ковзання та великих передаточних відношеннях;

• значне нагрівання при роботі в машинах з безперервною дією, що вимагає додаткових пристроїв для охолодження;

• значні втрати енергії на тертя, через які черв'ячні передачі використовують з обмеженими потужностями (звичайно не більше 100 кВт);

• високу вартість матеріалу вінця черв'ячного колеса (як правило, бронза, особливо для швидкохідних передач);

• високу вартість різального інструмента для нарізання черв'ячних коліс (спеціальні черв'ячні фрези) — для шліфування черв'яків потрібні спеціальні верстати і складні пристосування.

Геометрія черв'ячних передач. У зв'язку з тим, що черв'ячне колесо нарізається фрезою, яка є точною копією черв'яка, геометричні параметри черв'ячної передачі визначаються геометрією черв'яка. Вибір профілю черв'яка визначається переважно експлуатаційними властивостями передачі та технологічними міркуваннями. Розрізняють ***лінійчаті*** (гелікоїдні) і ***нелінійчаті*** черв'яки. До лінійчатих відносять архімедові, конволютні та евольвентні черв'яки (рис. 10.5).

Архімедовий черв'як — це гвинт із нарізкою, що має трапецеїдний профіль (трапецію) в осьовому перетині *А—А* (рис. 10.5, *а*). У торцевому перетині *Г—Г* (рис. 10.5, *г*) витки окреслені по спіралі Архімеда. Ці черв'яки застосовують досить широко, як правило, без шліфування, оскільки для їх шліфування потрібні круги складного профілю. Умовне позначення архімедової черв'ячної передачі *ZA*.

Конволютний черв'як (*ZN*) має прямолінійний профіль западини (витка) в нормальному перетині *А—А* або *Б—Б* (рис. 10.5, *б*), в торцевому перетині (рис. 10.5, *г*) профіль має вигляд видовженої (або вкороченої) евольвенти. Такі черв'яки мають деякі технологічні переваги перед архімедовими (кращі умови різання). Є два різновиди конволютних черв'яків: черв'як *ZN1* з прямолінійним профілем витка в перетині площиною *А—А*, нормальною до осі симетрії витка, і черв'як *ZN2* з прямолінійним профілем витка в перетині площиною *Б—Б*, нормальною до осі симетрії западини на ділильному діаметрі.

Евольвентний черв'як (*ZI*) — це косозубе зубчасте колесо з малим числом зубів і дуже великим кутом нахилу зубів (рис. 10.5, *в*). Профіль зуба в торцевому перетині (рис. 10.5, *г*) окреслений евольвентою. Евольвентна поверхня має прямолінійний профіль у

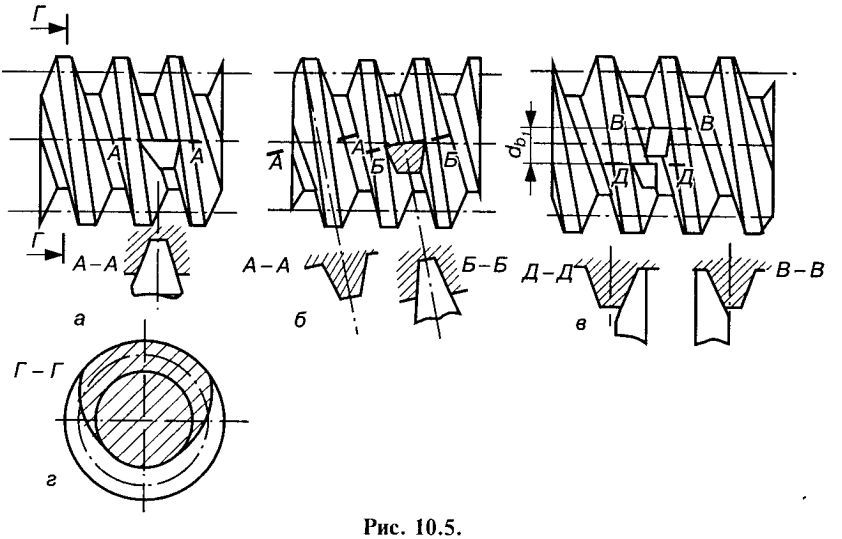


Рис. 10.5.

перетині площиною *В—В* (або *Д—Д*), яка дотикається до основного циліндра черв'яка, тому евольвентні черв'яки можна шліфувати плоским боком круга. Шліфовані черв'яки слід робити евольвентними.

Шліфуванням конволютних черв'яків конусними кругами з прямолінійними твірними на звичайних різьбошліфувальних верстатах одержують ***нелінійчаті бічні поверхні***, які досить близькі до поверхонь конволютних черв'яків.

Нелінійчаті циліндричні черв'яки бувають двох видів: утворені ***конусом*** і ***тором***.

Циліндричні черв'яки, утворені конусом (*ZK*), — це черв'яки, в яких головна поверхня витка є огинаюча твірного конуса при його гвинтовому русі відносно черв'яка з віссю гвинтового руху, що збігається з віссю черв'яка. Розрізняють черв'яки *ZK*1, *ZK*2, *ZK*3. У черв'яків *ZK*1 вісь твірного конуса схрещується з віссю черв'яка під кутом γ, що дорівнює ділильному куту підйому гвинтової лінії черв'яка (рис. 10.6, *а*). У черв'яків *ZK*2 (рис. 10.6, *б*) і *ZK*3 (рис. 10.6, *в*) кут схрещення дорівнює 90°.

Циліндричні черв'яки, утворені тором (*ZT*), — це черв'яки, в яких головна поверхня витка є огинаючою частиною зовнішньої поверхні твірного тора, що здійснює гвинтовий рух відносно черв'яка при збігу осі цього руху з віссю черв'яка. Розрізняють черв'яки *ZT*1 і *ZT*2. У черв'яка *ZT*1 (рис. 10.7, *а*) вісь твірного тора схрещується з віссю черв'яка під кутом γ, який дорівнює

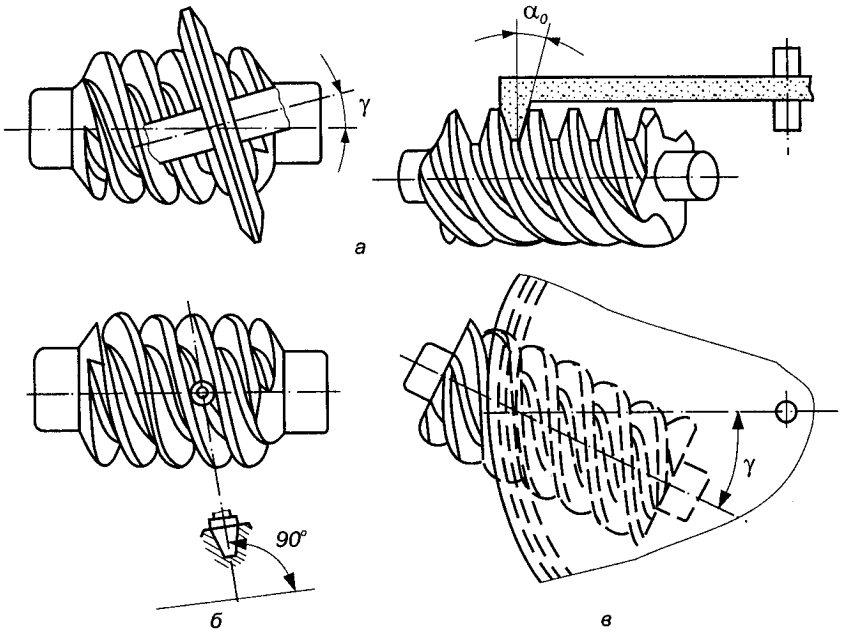


Рис. 10.6.

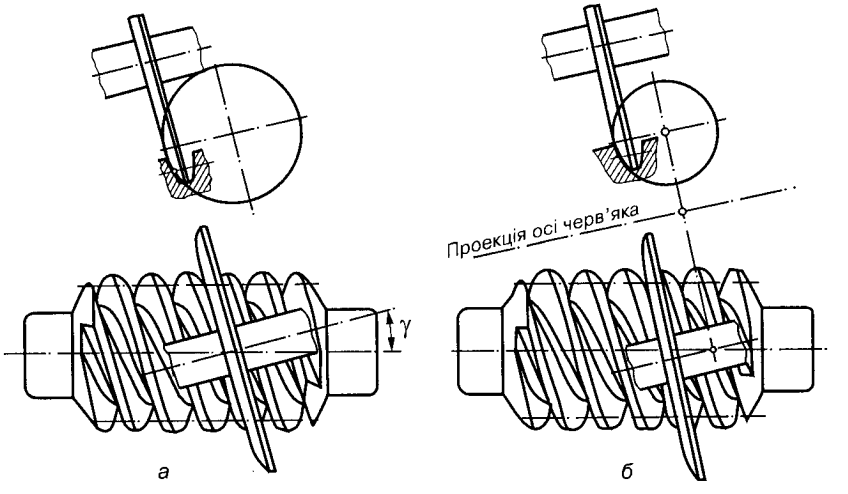


Рис. 10.7.

ділильному куту підйому гвинтової лінії витка черв'яка. Для черв'яка *ZT*2 (рис. 9.7, *б*) кут схрещення осей черв'яка і твірного тора вибирають таким, щоб один із плоских перетинів головної бічної поверхні витка збігався з твірним колом тора.

Геометричні параметри черв'яка. Число зубів черв'яка z_1 називають ***числом заходів*** і вибирають його залежно від передаточного відношення i_{12}. Стандарт встановлює три значення z_1: 1, 2, 4. Розрахунковим кроком p черв'яка (див. рис. 10.4) є його осьовий крок (що вимірюється вздовж осі черв'яка), йому відповідає осьовий модуль черв'яка m, який для черв'ячного колеса є торцевим.

Діаметр d_1 ділильного циліндра черв'яка вибирають кратним осьовому модулю черв'яка, тобто

$$d_1 = qm, \tag{10.18}$$

де q — ***коефіцієнт діаметра черв'яка*** ($q = d_1/m$). Значення параметрів m, q та їх сполучення стандартизовані (ГОСТ 2144-76). Якщо коефіцієнт зміщення твірного контуру інструмента при нарізанні черв'ячного колеса $x \neq 0$, початковий циліндр вже не збігається з його ділильним циліндром. У цьому випадку діаметр початкового циліндра черв'яка визначається за формулою

$$d_{w_1} = m\,(q + 2x). \tag{10.19}$$

Нахил гвинтової лінії витка на ділильному циліндрі (рис. 10.8, *а*) визначається ділильним кутом підйому γ. ***Кутом підйому гвинтової лінії*** називають гострий кут між дотичною до гвинтової лінії на ділильному циліндрі та площиною торцевого перетину черв'яка. На основі рис. 10.8 можна записати:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{p_{z_1}}{\pi d_1}. \tag{10.20}$$

Тут p_{z_1} — ***хід витка***, під яким розуміють відстань між однойменними осьовими профілями одного витка вздовж твірної ділильного циліндра. Для багатозаходових черв'яків ($z_1 > 1$) хід витка можна виразити через осьовий крок черв'яка p (рис. 10.8, *в*): $p_{z_1} = pz_1$, де $p = \pi m$ — крок черв'яка, тобто відстань між однойменними точками сусідніх витків уздовж твірної ділильного циліндра, що дорівнює торцевому кроку черв'ячного колеса на його ділильному колі в середній площині черв'ячної передачі. Тоді

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{p_{z_1}}{\pi d_1} = \frac{\pi m z_1}{\pi d} = \frac{z_1}{q}. \tag{10.21}$$

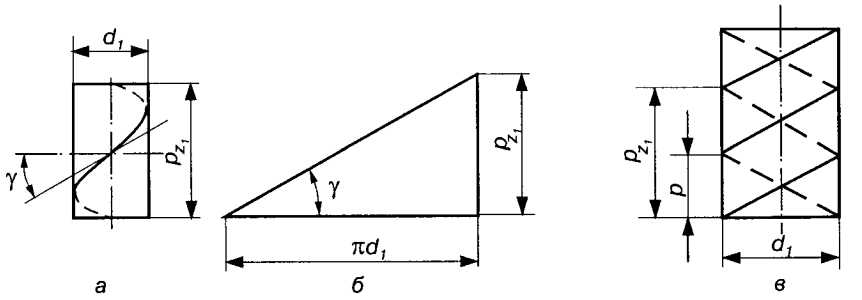


Рис. 10.8.

Геометричні параметри черв'яка обчислюються за формулами: діаметр вершин витків

$$d_{a_1} = d_1 + 2h_{a_1} = m(q + 2h_{a_1}^*); \qquad (10.22)$$

діаметр циліндра западин

$$d_{f_1} = d_1 - 2(h_a^* + c^*)m = m[q - 2(h_a^* + c^*)]; \qquad (10.23)$$

висота витка

$$h = m(2h_a^* + c^*); \qquad (10.24)$$

товщина витка

$$s_1 = p/2 = \pi m/2. \qquad (10.25)$$

Звичайно вибирають $h_a^* = 1, c^* = 0{,}2$. Треба зазначити, що в черв'ячній передачі без зміщення ($xm = 0$) початкова пряма рейки в осьовому перетині черв'яка збігається з ділильною прямою, а початкове коло колеса — з ділильним колом. Кут зачеплення α_w дорівнює куту профілю витка черв'яка в осьовому перетині: $\alpha_w = \alpha$. В черв'ячній передачі зі зміщенням ($xm \neq 0$) початкова пряма не збігається з ділильною прямою рейки і дотикається ділильного кола колеса, яке є, як і в передачі без зміщення, початковим колом. Кут зачеплення передачі зі зміщенням також дорівнює α.

Геометричні параметри черв'ячного колеса. Оскільки черв'ячне колесо нарізають фрезою, що є копією черв'яка, робоче зачеплення черв'ячної передачі в середній площині є одночасно і верстатним зачепленням при нарізанні черв'ячного колеса. Основні геометричні параметри черв'ячного колеса в середньому перетині визначаються за формулами для евольвентної циліндричної передачі:

- діаметр ділильного кола (воно ж початкове)

$$d_2 = mz_2; \tag{10.26}$$

- діаметр кола вершин зубів

$$d_{a_2} = m\,(z_2 + 2x + 2h_a^*); \tag{10.27}$$

- діаметр кола западин

$$d_{f_2} = m\,(z_2 + 2x - 2h_a^* - 2c^*); \tag{10.28}$$

- висота зуба

$$h = m\,(2h_a^* + c^*); \tag{10.29}$$

- товщина зуба на ділильному колі

$$s_2 = m\,(\frac{\pi}{2} + 2x\mathrm{tg}\alpha); \tag{10.30}$$

- міжосьова відстань черв'ячної передачі

$$a_w = \frac{d_{w_1}}{2} + \frac{d_{w_2}}{2} = m\,(\frac{q + z_2}{2} + x). \tag{10.31}$$

Коефіцієнт зміщення вихідного твірного контуру інструмента вибирають у межах ± 1.

Мінімальні числа зубів колеса $z_{2\min}$ рекомендується вибирати такими: для допоміжних кінематичних передач — 17—18; в силових передачах — 26—28. Оптимальним числом зубів колеса для силових передач є $z_2 = 32—63$ (не більше 80), для приводів столів великого діаметра z_2 доходить до 200—300, а в окремих випадках — до 1000.

Кінематика черв'ячних передач. У черв'ячній передачі, на відміну від циліндричної або конічної зубчастих передач, колові швидкості на початкових колах черв'яка $\boldsymbol{v}_1$ і колеса $\boldsymbol{v}_2$ (рис. 10.9) не збігаються: вони спрямовані під кутом 90° і різні за значеннями, оскільки початкові кола черв'яка й черв'ячного колеса не перекочуються відносно один одного, а проковзують. Тому в черв'ячній передачі, як і в передачі гвинтовими колесами, передаточне відношення не може бути виражене відношенням діаметрів початкових кіл d_{w_2} / d_{w_1}.

Передаточне відношення черв'ячної пари можна визначити, якщо врахувати, що поступальна швидкість витків черв'яка $\boldsymbol{v}_\text{п}$ дорівнює коловій швидкості колеса $\boldsymbol{v}_2$ ($\boldsymbol{v}_\text{п} = \boldsymbol{v}_2$), причому

$$v_{\text{п}} = \frac{p_{z_1} n_1}{60 \cdot 1000};\ v_2 = \frac{\pi d_1 n_2}{60 \cdot 1000}, \quad (10.32)$$

де n_1, n_2 — кількість обертів черв'яка й колеса за хвилину.

Тоді, прирівнявши праві сторони залежностей (10.32), маємо

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\pi d_2}{p_{z_1}} = \frac{\pi m z_2}{\pi m z_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (10.33)$$

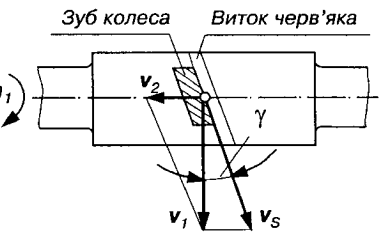


Рис. 10.9.

Отже, число заходів черв'яка виконує в черв'ячній передачі роль числа зубів у циліндричних або конічних зубчастих передачах. Оскільки число витків черв'яка може бути невеликим і часто дорівнювати одиниці, то в одній черв'ячній передачі можна одержати досить значні передаточні відношення.

Характерною особливістю роботи черв'ячних передач порівняно з іншими зубчастими передачами є великі швидкості ковзання та несприятливі напрямки ковзання відносно лінії контакту.

Швидкість ковзання $\boldsymbol{v}_s$ спрямована вздовж дотичної до лінії витка (рис. 10.9) і визначається за формулою

$$v_s = v_1/\cos\gamma, \quad (10.34)$$

де $v_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60 \cdot 1000}$ — колова швидкість (м/с) черв'яка на початковому колі ($d_1 = d_{w_1}$).

Оскільки кут підйому гвинтової лінії γ не дорівнює нулю, то швидкість ковзання v_s завжди більша від колової швидкості черв'яка ($v_s > v_1$). Крім цього, треба зазначити, що напрямок швидкості ковзання не створює сприятливих умов для утворення масляного клина в черв'ячній передачі, що служить причиною зниженого ККД черв'ячної передачі, підвищеного спрацювання та схильності до заїдання.

Глобоїдні черв'ячні передачі. Несучу здатність черв'ячних передач можна суттєво збільшити, якщо і черв'як виконати глобоїдним (див. рис. 9.2, *к*). У цьому разі збільшується число зубів у зачепленні й зведені радіуси кривизни, контактні лінії в зачепленні розміщені під більшим кутом до напрямку швидкості ковзання, що поліпшує умови утворення масляних клинів у зачепленні. Несуча здатність глобоїдних передач при умові точного виготовлення та необхідного охолодження приблизно в 1,5 раза

більша, ніж передач із циліндричними черв'яками з лінійчатими робочими поверхнями.

Глобоїдні черв'ячні передачі в результаті малих габаритів, а значить, і малої поверхні тепловіддачі, дуже нагріваються, тому їх використовують переважно в повторно короткочасному режимі та із штучним охолодженням. Використання глобоїдних передач ефективніше для великих моментів сил.

Детальніше теорію зубчастого зачеплення розглянуто в спеціальній літературі та довідниках, зокрема в [21, 70].

РОЗДІЛ 11

БАГАТОЛАНКОВІ ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ

11.1. Загальні відомості

При проектуванні зубчастих механізмів багатьох машин і приладів виникає необхідність забезпечення передачі обертання з великими передаточними відношеннями або при значних міжосьових відстанях. У таких випадках використовують багатоланкові зубчасті механізми, причому, якщо швидкість обертання вихідного вала знижується порівняно із вхідним, такі зубчасті механізми називають ***редукторами***, а якщо швидкість підвищується, — ***мультиплікаторами***.

Потреба використання багатоланкових зубчастих механізмів викликана тим, що одна пара (ступінь) зубчастих коліс забезпечує обмежені значення передаточних відношень. Як відомо, передаточне відношення $|i_{12}|$ пари зубчастих коліс описується формулою

$$|i_{12}| = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Отже, $|i_{12}|$ залежить від числа зубів коліс. Щоб дістати компактну й легку передачу, число зубів z_1 на меншому колесі має бути найменшим. Найменше число зубів $z_{1\min}$ обмежується явищем підрізання та найменшим допустимим коефіцієнтом перекриття ε_γ. В середньому можна прийняти $z_{1\min} = 12—20$. При виборі числа зубів z_2 на більшому колесі треба

виходити з обмежень габаритних розмірів і маси конструкції. У металообробних верстатах, підіймально-транспортних та інших машинах беруть звичайно $z_{2max} = 125—150$. Таким чином, у середньому можна взяти межу передаточних відношень для однієї пари зубчастих коліс $i_{12max} \approx 10$. У практиці машинобудування для механічних (від електродвигуна) передач приймають ще менші значення— $i_{12} = 1—6$, а для ручних — $i_{12} = 10—12$.

Багатоланкові зубчасті механізми поділяють на ***два основних види:***

1) зубчасті механізми ***з нерухомими осями*** всіх коліс (такі передачі називають ***серіями зубчастих коліс***);

2) зубчасті механізми ***з рухомими осями*** окремих коліс (***епіциклічні передачі***, деколи — планетарні, важільно-зубчасті).

11.2. Зубчасті механізми з нерухомими осями коліс

Зубчасті механізми з нерухомими осями всіх коліс можна поділити на два види: ***ступінчасті*** (рис. 11.1, *а*) і ***паразитні*** (рис. 11.1, *б*). У ступінчастій серії зубчастих коліс кожне колесо входить тільки в одне зубчасте зачеплення (колесо *1* перебуває в зачепленні тільки з колесом *2*, колесо *2′* — тільки з колесом *3* і т. д.). У паразитній серії є зубчасті колеса, що входять одночасно в два або більше зачеплень. У механізмі, показаному на рис. 11.1, *б*, колеса *2* і *3* входять одночасно в два зачеплення (колесо *2* — з колесами *1* і *3*, колесо *3* — з колесами *2* і *4*). Такі колеса називають ***паразитними***. Домовимось позначати всі колеса, що жорстко сидять на одному валу, одною цифрою, проставляючи для кожного колеса штрихи (наприклад, *2*, *2′*, *2″* і т. д.).

Загальне передаточне відношення зубчастих механізмів, зображених на рис. 11.1, можна визначити як відношення швидкостей обертання вхідного та вихідного валів

$$i_{14} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_4} = \pm\frac{n_1}{n_4}. \qquad (11.1)$$

Знак передаточного відношення визначається так само, як і для пари зубчастих коліс: якщо напрямки обертання коліс *1* і *4* збігаються, маємо знак "+", а в протилежному випадку — знак "—". Тут знаком передаточного відношення є "—", оскільки колеса *1* і *4* обертаються в різні боки.

Загальне передаточне відношення i_{14} можна визначити через передаточні відношення окремих пар (ступенів) зубчастого зачеплення:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2};\ i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3};\ i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4}. \tag{11.2}$$

Перемноживши одержані передаточні відношення (11.2), дістанемо

$$i_{12}i_{23}i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_2}{\omega_3}\frac{\omega_3}{\omega_4}(-1)^k = \frac{\omega_1}{\omega_4}(-1)^k,$$

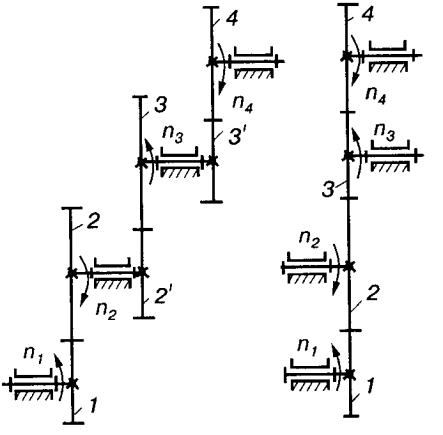


Рис. 11.1.

де k — число пар зовнішнього зубчастого зачеплення. Введення у формулу передаточного відношення добутку $(-1)^k$ дає змогу визначити його знак, не вказуючи напрямку обертання коліс (внутрішнє зачеплення не змінює напрямку обертання коліс).

Оскільки $\omega_1 / \omega_4 = i_{14}$ (11.1), то $i_{14} = i_{12}i_{23}i_{34}$.

Отже, ***передаточне відношення багатоланкової зубчастої передачі з нерухомими осями є добуток передаточних відношень, взятих із своїм знаком, окремих його ступенів.***

У загальному випадку, коли в зачепленні перебувають n коліс, формулу для загального передаточного відношення i_{1n} можна записати так:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12}i_{23}i_{34}...i_{(n-1)n}(-1)^k. \tag{11.3}$$

Передаточне відношення серій зубчастих коліс можна визначити також за допомогою чисел зубів коліс. Такі формули найчастіше використовують на практиці.

Ступінчаста зубчаста передача (рис. 11.1, *а*). Як відомо, передаточне відношення кожної пари зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні, можна записати через відношення чисел зубів коліс:

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1};\ i_{23} = -\frac{z_3}{z_{2'}};\ i_{34} = -\frac{z_4}{z_{3'}}. \tag{11.4}$$

Враховуючи залежність (11.3), маємо

$$i_{14} = i_{12}i_{23}\,i_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_{2'}}\right)\left(-\frac{z_4}{z_{3'}}\right).$$

У загальному випадку формула для передаточного відношення має вигляд

$$i_{1n} = i_{12}i_{23}\,i_{34}...i_{(n-1)n}(-1)^k = \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_{2'}}\frac{z_4}{z_{3'}}...\frac{z_n}{z_{(n-1)'}}(-1)^k. \qquad (11.5)$$

Паразитна зубчаста передача (рис. 11.1, *б*). У цьому випадку передаточні відношення для кожної пари мають вигляд

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1};\ i_{23} = -\frac{z_3}{z_2};\ i_{34} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Тоді загальне передаточне відношення механізму запишеться так:

$$i_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}, \qquad (11.6)$$

або в загальному вигляді:

$$i_{1n} = \frac{z_n}{z_1}(-1)^k. \qquad (11.7)$$

Як видно з формул (11.6), (11.7), значення загального передаточного відношення i_{1n} не залежить від проміжних зубчастих коліс *2* і *3*. Це й дало привід називати такі колеса в техніці ***паразитними***. Насправді ці колеса виконують важливу роль у машинах: вони або забезпечують відповідний напрямок обертання вихідного вала, оскільки введення таких коліс впливає на знак передаточного відношення, або дозволяють передати обертовий рух малими колесами на більшу міжосьову відстань, що значно зменшує масу та габарити зубчастої передачі (рис. 11.2).

Якщо до складу механізму входять конічні зубчасті колеса (рис. 11.3), то значення передаточного відношення таких механізмів визначають так само, як і для циліндричних зубчастих, за формулами (11.5) — для ступінчастих передач, (11.7) — для паразитних передач. Про знак передаточного відношення говорять лише тоді, коли осі коліс, між якими визначають передаточне відношення, паралельні. У цьому випадку його знаходять за напрямками обертання вхідного й вихідного коліс. Для зруч-

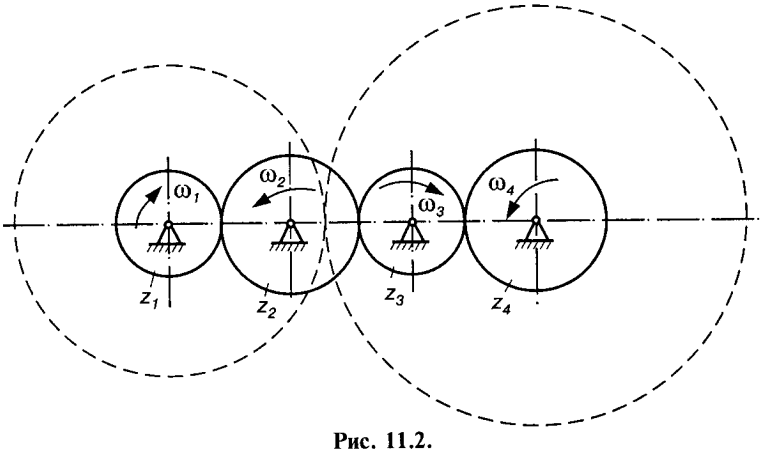


Рис. 11.2.

ності замість кругових стрілок проставляють прямі. Це виконують так: у точці дотику коліс *1* і *2* (рис. 11.3) проводять дві стрілки від зачеплення (вони показують рух зубів на видимому боці зубчастих коліс *1* і *2*), у місці стику коліс *2′* і *3* проводимо дві стрілки, але спрямовані до зачеплення, і так чергуємо напрямки стрілок від зачеплення до зачеплення. Якщо напрямки стрілок вхідного й вихідного коліс збігаються (на рис. 11.3 передача зображена контурною лінією), знак передаточного відношення слід вважати додатним. Якщо ж напрямки цих стрілок протилежні (на рис. 11.3 колесо *2* зображено штриховою лінією), знак передаточного відношення слід вважати від'ємним.

Так само визначають передаточне відношення багатоланкових механізмів, якщо до їх складу входять черв'ячні передачі або передачі гвинтовими колесами. Знак передаточного відношення при паралельних вхідних і вихідних валах треба визначати за напрямками обертання вхідного й вихідного коліс, тобто треба враховувати напрямок гвинтової лінії зубів (правий або лівий).

Приклад 11.1. Для триступінчастого зубчастого редуктора (рис. 11.4) визначити загальне передаточне відношення i_{15}, якщо числа зубів його коліс дорівнюють: $z_1 = 20$, $z_2 = 40$, $z_{2'} = 15$, $z_3 = 45$, $z_{3'} = 25$, $z_4 = 18$, $z_5 = 125$.

Розв'язання. Загальне передаточне відношення редуктора i_{15}, згідно з формулами (11.5) і (11.7), визначається так:

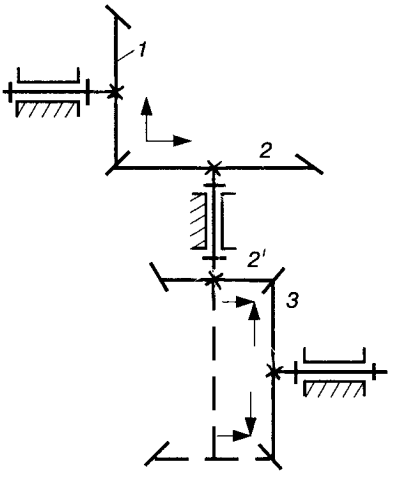


Рис. 11.3.

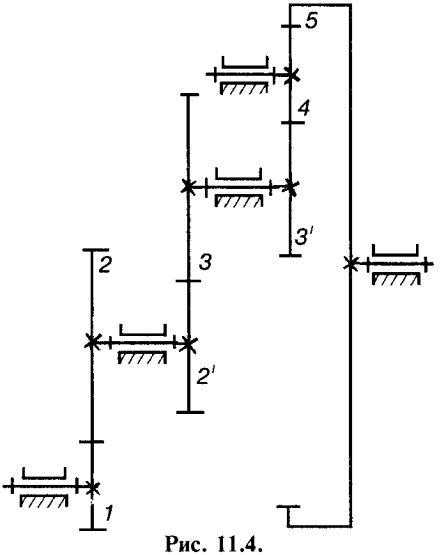


Рис. 11.4.

$$i_{15} = i_{12}i_{23}\,i_{34}i_{45} = \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_{2'}}\frac{z_4}{z_{3'}}\frac{z_5}{z_4}(-1)^k = \frac{40}{20}\cdot\frac{45}{15}\cdot\frac{125}{25}(-1)^3 = -30.$$

Як видно з наведеного прикладу, числа зубів паразитного колеса z_4, що входять у чисельник і знаменник, можна скоротити, і формулу для визначення загального передаточного відношення записувати, не враховуючи z_4, тобто $i_{15} = i_{12}i_{23}i_{35}(-1)^k$, де k — число пар зовнішнього зачеплення (з урахуванням колеса *4*).

11.3. Зубчасті механізми з рухомими осями коліс

У деяких багатоланкових зубчастих передачах осі окремих коліс є рухомими. Такі зубчасті механізми (рис. 11.5) з одним ступенем вільності називають ***планетарними механізмами***, а з двома і більше ступенями вільності — ***диференціальними механізмами***, або просто диференціалами. Колеса з рухомими осями обертання називаються планетарними колесами або сателітами, а ланка, на якій розміщена вісь сателітів, — водилом. На схемах водило прийнято позначати літерою *H*. Зубчасті колеса з нерухомими осями обертання називаються ***сонячними*** або ***центральними***.

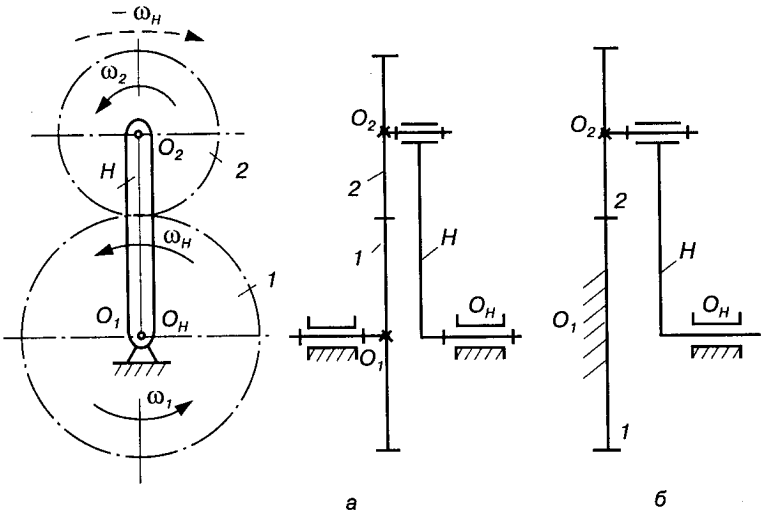


Рис. 11.5.

Диференціальні механізми. На рис. 11.5, *а* зображено в двох проекціях найпростіший диференціальний механізм, в якому колесо *1* є центральним, колесо *2* — сателітом, а ланка *H* — водилом. Нехай колеса *1*, *2* і водило *H* обертаються з кутовими швидкостями ω_1, ω_2 і ω_H.

Визначимо число ступенів вільності механізму, в якому число рухомих ланок $n = 3$, число обертових пар п'ятого класу $p_5 = 3$. Це пари O_1, O_2 і O_H, в які входять відповідні ланки: 0—1, 2—*H*, *H*—0, де 0 — стояк. Зубчасті колеса *1* і *2* утворюють вищу пару четвертого класу ($p_4 = 1$). Отже, за структурною формулою для плоских механізмів число ступенів вільності диференціального механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Таким чином, для визначеності руху механізму він повинен мати заданими закони руху двох ланок, тобто мати дві узагальнені координати. Взагалі кажучи, вибір цих двох ланок може бути довільним. Наприклад, можна задати закони руху ланок *1* і *H*, тобто закони зміни кутів повороту φ_1 і φ_H ланок *1* і *H*. Тоді, очевидно, кут повороту φ_2 ланки *2* буде функцією цих кутів:

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1, \varphi_H). \qquad (11.8)$$

Для визначення передаточних відношень диференціального механізму не можна безпосередньо скористатися формулами для

зубчастих механізмів з нерухомими осями. Для виведення залежності між кутовими швидкостями ланок диференціального механізму та числом зубів зубчастих коліс використаємо метод оборотності (інверсії) руху, який полягає в тому, що всім ланкам механізму надаємо додаткової кутової швидкості навколо осі O_H з кутовою швидкістю $-\omega_H$, яка дорівнює кутовій швидкості ω_H водила H за величиною, але протилежна їй за напрямом. При цьому відносний рух ланок не зміниться. Тоді ланки механізму матимуть кутові швидкості: зубчасте колесо *1* — $\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$; колесо *2* — $\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$; водило H — $\omega_H - \omega_H = 0$.

Отже, після надання ланкам механізму додаткового обертання з кутовою швидкістю $-\omega_H$ ланка H буде нерухомою, і диференціал перетвориться в звичайний зубчастий механізм з нерухомими осями O_1, O_2 і O_3. Передаточне відношення такого механізму визначається формулою (11.5) або (11.7). У даному випадку

$$i_{12}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_2^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1}. \qquad (11.9)$$

Тут і далі, щоб знати, при якій нерухомій ланці визначено конкретне передаточне відношення, біля його позначення в дужках ставитимемо верхній індекс тієї ланки, яка взята за нерухому.

Формула (11.9) називається ***формулою Вілліса*** для диференціального механізму. Цю формулу можна одержати диференціюванням формули (11.8).

У загальному вигляді при будь-якій кількості коліс формула Вілліса записується так:

$$i_{1m}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_m - \omega_H} = \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_{2'}}\frac{z_4}{z_{3'}}\ldots\frac{z_m}{z_{m-1}}(-1)^k, \qquad (11.10)$$

де k — кількість пар зовнішнього зубчастого зачеплення.

Формула Вілліса встановлює математичну залежність між кутовими швидкостями ланок механізму і числами зубів коліс. Маючи заданими кутові швидкості яких-небудь двох ланок, наприклад ω_1, ω_m, і числа зубів коліс, можна визначити кутову швидкість третьої ланки (ω_H). Враховуючи, що $\omega_i = \pi n_i/30$, у формулах (11.9), (11.10) замість ω_i можна записати n_i, де n_i — кількість обертів ланки за хвилину.

Диференціальні механізми широко використовуються в автомобілях, лічильних, сільськогосподарських машинах, металорізальних верстатах тощо.

Планетарні механізми. Ці механізми є окремим випадком диференціальних механізмів. Якщо в диференціальному механізмі одне з центральних коліс зробити нерухомим, одержимо планетарний механізм. На рис. 11.5, *б* колесо *1* закріплено нерухомо. Число ступенів вільності такого механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Отже, у такому механізмі досить мати одну початкову ланку.

Для планетарного механізму також справедлива формула Вілліса (11.9) або (11.10). У даному випадку, коли $\omega_1 = 0$, вона набуває вигляду

$$i_{12}^{(H)} = \frac{-\omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1}. \qquad (11.11)$$

Розділивши у формулі (11.11) чисельник і знаменник на $-\omega_H$, після відповідних перетворень одержимо

$$i_{2H}^{(1)} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - 1 / i_{12}^{(H)} = 1 - i_{21}^{(H)}, \qquad (11.12)$$

де для зовнішнього зубчастого зачеплення при нерухомих осях коліс $i_{12}^{(H)} = \omega_1 / \omega_2 = -z_2 / z_1$.

Рівняння (11.12) можна записати ще так:

$$i_{2H}^{(1)} + i_{21}^{(H)} = 1, \qquad (11.13)$$

тобто для планетарних механізмів із круглими колесами сума передаточних відношень при різних зупинених ланках завжди дорівнює одиниці.

Планетарні механізми широко використовуються в зубчастих редукторах як механізми для виконання складного руху робочих органів машин, наприклад, для обертання лопаток мішалок, приводів шпинделів бавовнопрядильних машин тощо.

Приклад 11.2. Визначити передаточне відношення i_{1H} механізму Давида (рис. 11.6), якщо задано число зубів зубчастих коліс: $z_1 = 100$, $z_2 = 99$, $z_2' = 100$, $z_3 = 101$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Вілліса для диференціального механізму, записуємо передаточне відношення механізму Давида при нерухомому водилі *H*:

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_{2'}}(-1)^k = \frac{99}{100}\cdot\frac{101}{100}(-1)^2 = \frac{9999}{10000}.$$

Оскільки $\omega_3 = 0$, то, розділивши чисельник і знаменник на $-\omega_H$, дістанемо

$$1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{13}^{(H)},$$

звідки

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{13}^{(H)} = 1 - \frac{9999}{10000} = \frac{1}{10000},$$

або

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = 10000.$$

Як видно з наведеного прикладу, планетарні механізми можуть невеликою кількістю зубчастих коліс забезпечувати великі передаточні відношення. Проте багато з них мають низькі ККД і непридатні для практичного застосування (при $\eta < 0$ настає самогальмування). Особливо це стосується планетарних і диференціальних механізмів, які утворені циліндричними зубчастими колесами. Зокрема механізм, зображений на рис. 11.6, з такими числами зубів при ведучому колесі *1* не може бути приведений у рух через самогальмування. Тому на практиці ширше використовують конічні диференціальні та планетарні механізми, в яких ККД вищі.

Комбіновані (багатоланкові) зубчасті механізми. В машинобудуванні та приладобудуванні часто зустрічаються зубчасті механізми, що складаються з різних видів зубчастих механізмів (ступінчастих, паразитних, планетарних і диференціальних). Такі механізми називають ***комбінованими***. До їхнього складу можуть входити й інші механізми (фрикційні, пасові, ланцюгові). Для визначення передаточного відношення таких передач треба спочатку проаналізувати склад передачі, визначити передаточні відношення кожного складового механізму і потім, використовуючи формулу (11.3), записати вираз для загального передаточного відношення всього механізму. Розглянемо це питання на прикладі.

Приклад 11.3. Для зубчастого механізму (рис. 11.7) визначити передаточне відношення i_{1H}, якщо задано число зубів зубчастих коліс: $z_1 = z_{2'} = z_{3'} = 20$, $z_2 = 80$, $z_3 = 40$, $z_4 = 100$.

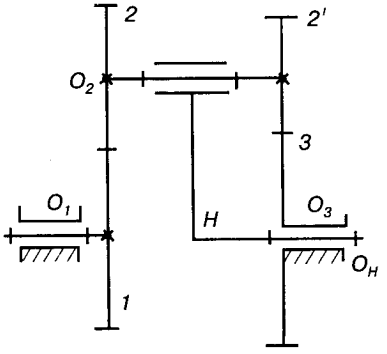


Рис. 11.6.

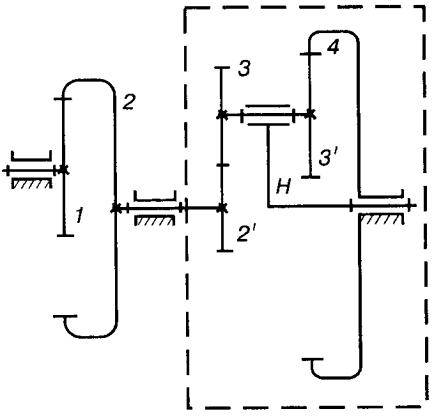


Рис. 11.7.

Розв'язання. Для того щоб визначити загальне передаточне відношення, необхідно механізм розкласти на складові. Насамперед слід виділити планетарний механізм. До планетарного (або диференціального) механізму входять: водило H, сателіти *3* і *3′* і два центральні колеса *2* і *4*, що входять у зачеплення із сателітами, всі інші зубчасті колеса, які не перебувають у зачепленні із сателітами, до планетарного механізму не входять. Отже, зубчасті колеса *1* і *2*, що мають нерухомі осі, в зачеплення з сателітами не входять і утворюють звичайну зубчасту передачу.

Тоді передаточне відношення зубчастого механізму i_{1H} визначають за формулою (11.3):

$$i_{1H} = i_{12} i_{2H},$$

де i_{12} — передаточне відношення ступінчастої зубчастої передачі, яка складається із зубчастих коліс *1* і *2* і визначається за формулою (11.5):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{80}{20} = 4,$$

де i_{2H} — передаточне відношення планетарного механізму, яке можна визначити, записавши формулу Вілліса для диференціального механізму при нерухомому водилі:

$$i_{24}^{(H)} = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{z_2}{z_{2'}} \frac{z_3}{z_{3'}} (-1)^k = \frac{40}{20} \cdot \frac{100}{20} (-1)^1 = -10.$$

Тоді, розділивши кутові швидкості на $-\omega_H$ і враховуючи, що $\omega_4 = 0$, маємо

$$1 - \frac{\omega_2}{\omega_H} = i_{24}^{(H)} \text{ або } i_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - i_{24}^{(H)} = 1 - (-10) = 11.$$

Підставивши значення i_{12} і i_{2H} у загальну формулу, дістанемо

$$i_{1H} = 4 \cdot 11 = 44.$$

Замкнуті диференціальні механізми. Якщо в зубчастому диференціальному механізмі зв'язати додатковою (замикаючою) передачею які-небудь дві ланки, що мають нерухомі осі обертання (це можуть бути центральні колеса або одне центральне колесо й водило), одержимо механізм з одним ступенем вільності, названий ***замкненим диференціальним механізмом***. Передаточні відношення таких механізмів визначають за такими самими методами, як і комбінованих механізмів. При цьому механізм ділять на дві частини: одна — власне диференціальний механізм; друга — замикаюча передача. Для диференціального механізму записують формулу Вілліса, для замикаючої частини — формулу передаточного відношення (11.5) або (11.7) залежно від виду передачі. Розв'язуючи спільно одержані рівняння, знаходимо передаточне відношення замкнутого диференціального механізму. Методику розв'язання таких задач розглянемо на прикладі.

Приклад 11.4. Визначити передаточне відношення i_{1H} для замкнутого диференціального механізму, який зображено на рис. 11.8, якщо задано число зубів зубчастих коліс: $z_1 = 20$, $z_2 = 40$, $z_{2'} = 15$, $z_3 = 75$, $z_{3'} = 25$, $z_4 = 35$, $z_5 = 125$.

Розв'язання. У механізмі, зображеному на рис. 11.8, центральне колесо *3* і водило *H* з'єднані між собою додатковою передачею, що складається із серії зубчастих коліс *3′*, *4*, *5* (водило *H* і зубчасте колесо *5* утворюють одну рухому ланку) з нерухомими осями, тобто утворюють паразитну зубчасту передачу.

Для визначення передаточного відношення механізму розділяємо його на складові частини (ступені). Насамперед треба виділити диференціальний механізм (водило *H*, сателіти *2* і *2′* та центральні колеса *1* і *3*, що входять у зачеплення із сателітами), який на рис. 11.8 обведений штриховою лінією. Колеса *3′*, *4*, *5* утворюють замикаючу передачу. Передаточне відношення $i_{1H} = \omega_1 / \omega_H$ визначають із відповідних залежностей,

що складаються для диференціального механізму й замикаючої передачі.

Для диференціального механізму записуємо формулу Вілліса (при нерухомому водилі):

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} =$$

$$= \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_{2'}}(-1)^{k_1} = \frac{40}{20}\cdot\frac{75}{15}(-1)^1 = -10. \qquad (11.14)$$

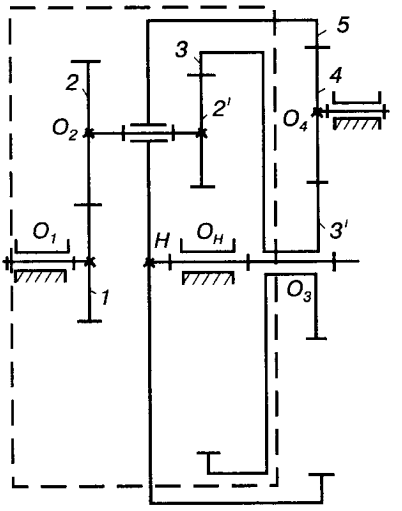


Рис. 11.8.

Для замикаючої (паразитної) передачі передаточне відношення визначають за формулою (11.7):

$$i_{35} = i_{3H} = \frac{\omega_3}{\omega_5} = \frac{z_5}{z_{3'}}(-1)^{k_2} = \frac{125}{25}(-1)^1 = -5. \qquad (11.15)$$

Тут $k_1 = k_2 = 1$ — число пар зовнішнього зачеплення в диференціальному механізмі та замикаючій передачі; $\omega_5 = \omega_H$.

Розв'язуючи спільно рівняння (11.14) і (11.15), знаходимо передаточне відношення i_{1H}. Для цього підставимо в залежність (11.14) значення $\omega_3 = i_{35}\omega_H = i_{35}\omega_5$:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{i_{35}\omega_H - \omega_H} = i_{13}^{(H)}.$$

Розділивши чисельник і знаменник на ω_H, дістанемо

$$\frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{i_{35} - 1} = i_{13}^{(H)},$$

звідки остаточно маємо

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{13}^{(H)}(i_{35} - 1) + 1 = -10(-5 - 1) + 1 = 61.$$

11.4. Графічне визначення передаточних відношень зубчастих механізмів

Кінематичне дослідження зубчастих механізмів можна здійснювати графічним способом за допомогою побудови картин швидкостей.

Як відомо з теоретичної механіки, при обертанні тіла (зубчастого колеса, водила тощо) відносно нерухомої осі швидкості будь-якої точки тіла пропорціональні її відстані від осі обертання. Тому, якщо, наприклад, колесо обертається відносно нерухомої осі, що проходить через точку O (рис. 11.9, *а*), кінці векторів усіх точок ланки, розміщених на лінії AB, будуть лежати на одній прямій $A'B'$, яка проходить через точку O, оскільки швидкість будь-якої точки визначається залежністю $v = \omega r$, де ω — кутова швидкість ланки, r — відстань точки від центра обертання. Ця пряма називається ***картиною швидкостей*** даної ланки.

Якщо ланка здійснює складний рух (наприклад, сателіт диференціального механізму), то цей рух можна розглядати як обертовий рух навколо миттєвого центра обертання. Тому (рис. 11.9, *б*) кінці векторів швидкостей усіх точок ланки, розміщених на прямій

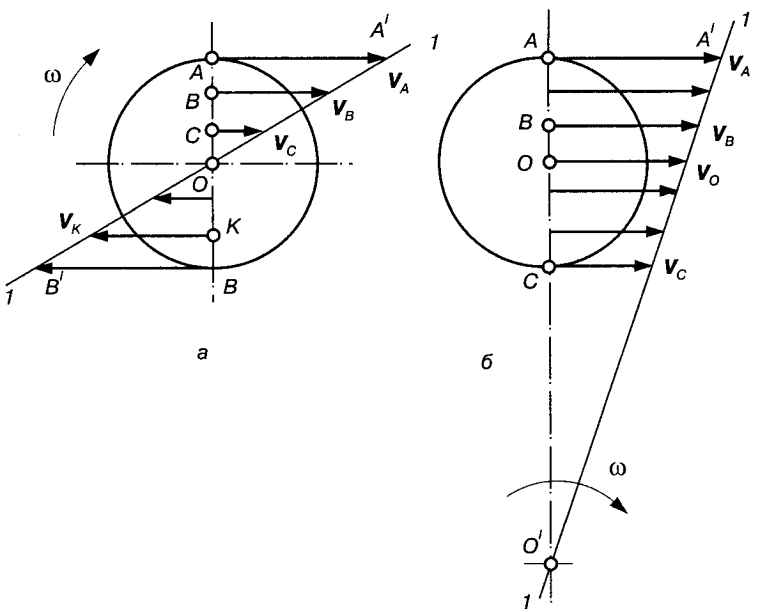


Рис. 11.9.

$O'A$, що проходять через миттєвий центр обертання O', будуть лежати на одній прямій $O'A'$.

Отже, якщо відомі вектори швидкостей яких-небудь двох точок ланки, то, провівши через кінці цих векторів пряму, дістанемо картину швидкостей ланки. Це положення лежить в основі графічного дослідження зубчастих механізмів. Будуючи картину швидкостей послідовно для різних ланок, можна побудувати картину швидкостей для всіх ланок механізму.

Розглянемо спочатку найпростіший зубчастий механізм, що складається з двох циліндричних зубчастих коліс. На рис. 11.10, *а* у масштабі μ_l (обов'язково) зображена кінематична схема зубчастого механізму. Проведемо пряму *y—y* паралельно лінії центрів O_1O_2 і спроектуємо на неї всі характерні точки передачі: O_1, O_2, C, A, B (рис. 11.10, *б*). Швидкість колеса *1* у центрі обертання O_1 дорівнює нулю й буде збігатися з лінією *y—y*, у точці C $v_C = \omega_1 r_1$. На рис. 11.10, *б* вона зображена відрізком CC'. Провівши через точки O_1, C' лінію *1*, дістанемо картину швидкостей колеса *1*. Швидкість точки C, що належить колесу *2*, також буде визначатися цим самим відрізком CC', а тому, провівши через точки C' і O_2 лінію *2*, матимемо картину швидкостей колеса *2*. Далі, продовжимо лінії *1* і *2* до перетину їх з перпендикулярами, що проведені до лінії *y—y* через точки A і B, і отримаємо повну картину швидкостей коліс *1* і *2*. Відрізки O_1A' і O_2B' можна на картинах швидкостей не проводити.

Для визначення передаточних відношень зручно використовувати ***картину кутових швидкостей***, яку будуємо так. На продовженні лінії *y—y* відкладаємо довільний відрізок KP і проводимо через точку K лінію *x—x*, перпендикулярну *y—y*, а через точку P проводимо промені $P1 \| O_1C'$, $P2 \| O_2C'$ і т. д. до перетину з лінією *x—x*. Одержані точки позначимо відповідно *1*, *2* і т. д. Відрізки $K1$, $K2$ зображають у деякому масштабі кутові швидкості відповідно коліс *1* і *2*. Це видно з подібності трикутників O_1CC' і $PK1$ або O_2CC' і $PK2$, для яких можна записати такі пропорції:

$$\frac{r_1}{v_{C_1}} = \frac{KP}{K1} \text{ і } \frac{r_2}{v_{C_2}} = \frac{KP}{K2}.$$

Враховуючи, що колові швидкості коліс у полюсі зачеплення C рівні між собою ($v_{C_1} = v_{C_2} = \mu_v CC'$), маємо

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{K1}{K2}.$$

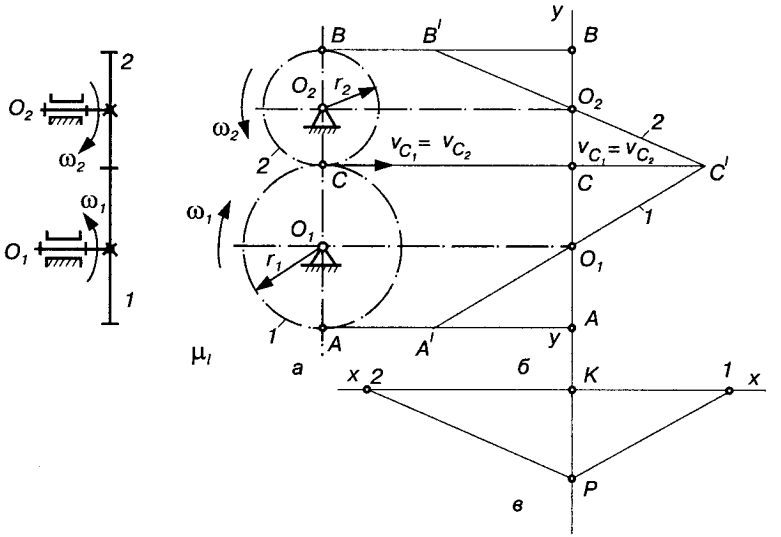


Рис. 11.10.

Оскільки відношення радіусів початкових коліс (тут прийнято, що $r_1 = r_{w_1}$, $r_2 = r_{w_2}$) є передаточне відношення i_{12}, що випливає з (10.14), його можна визначити через відрізки $K1$ і $K2$:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{K1}{K2}.$$

Якщо відрізки на плані кутових прискорень (рис. 11.10, *в*) знаходяться з одного боку від точки K, передаточне відношення додатне, і навпаки, коли з різних боків від точки K, то воно від'ємне.

Розглянемо побудову картин швидкостей планетарного механізму, кінематична схема якого зображена на рис. 11.11. Проводимо лінію $y—y$, на яку проектуємо всі характерні точки механізму — центри обертання коліс O_1, O_2, O_H, полюси зачеплення A, B. Оскільки число ступенів вільності планетарного механізму $W = 1$, то досить задати якій-небудь ланці закон руху, щоб усі ланки мали визначений рух. Нехай такою ланкою буде колесо *1*. Тоді швидкість точки O_1 дорівнює нулю, а швидкість точки A, що належить колесу *1*, дорівнює $v_{A_1} = \omega_1 r_1$, де r_1 — радіус початкового кола ($r_1 = O_1A = r_{w_1}$). Зобразимо цю швидкість відрізком AA'; тоді лінія O_1A' — картина швидкостей колеса *1*.

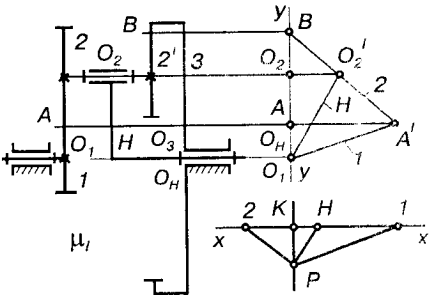


Рис. 11.11.

Сателіти *2* і *2′* з'єднані, з одного боку, з колесом *1* і мають у точці *A* таку саму швидкість, як і колесо *1* у цій точці; з другого боку, зв'язані в точці *B* з колесом *3*, яке нерухоме ($v_B = 0$). Тому, з'єднуючи точки *A′* і *B*, одержимо лінію *2*, яка є картиною швидкостей коліс *2* і *2′*. У водила також відомі швидкості двох його точок: точки O_H, що збігається з точкою O_1 і має швидкість, що дорівнює нулю; точки O_2, що збігається з віссю O_2 сателітів і визначається відрізком O_2O_2', а тому, з'єднавши точки O_H і O_2', дістанемо пряму O_HO_2', яка є картиною швидкостей водила *H*.

Картину кутових швидкостей будуємо аналогічно попередньому механізму: проводимо через точку *K* лінію $x—x \perp y—y$ і з довільної точки *P* проводимо промені, паралельні лініям *1*, *2*, *H* до перетину з прямою *x—x*, одержимо відповідно точки *1*, *2*, *H*. Відрізки *K*1, *K*2, *KH* у деякому масштабі визначають кутові швидкості ω_1, ω_2, ω_H. Тоді передаточні відношення можна записати так:

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{K1}{KH}; \quad i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{K1}{K2}; \quad i_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = \frac{K2}{KH}.$$

Розглянемо побудову картин швидкостей для диференціального механізму (рис. 11.12).

Число ступенів вільності диференціального механізму $W = 2$, а тому треба задати закон руху яким-небудь двом ланкам. Нехай будуть задані кутові швидкості колеса *1* (відрізок *AA′*) і водила *H* (відрізок O_2O_2'). Картиною швидкостей колеса *1* буде лінія *1*, що з'єднує точки O_1 і *A′*. Провівши через точки *A′* і O_2' лінію *2* до перетину з перпендикуляром до лінії *y—y*, проведеному через точку *B*, одержимо картину швидкостей сателіта *2*. І нарешті, у колеса *3* відомі також швидкості двох точок: O_2, яка збігається на лінії *y—y* з точкою O_1, і точки *B*, яка є спільною з сателітом *2*. Отже, з'єднавши точки O_1 і *B′*, одержимо лінію *3*, яка є картиною швидкостей колеса *3*.

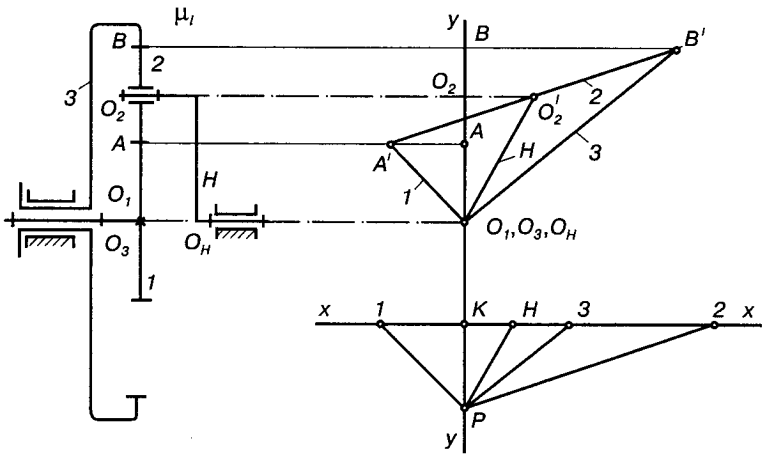


Рис. 11.12.

Картину кутових швидкостей будуємо аналогічно попередньому. Тут відрізки *K*1, *K*2, *K*3, *KH* зображають у деякому масштабі відповідно кутові швидкості ω_1, ω_2, ω_3, ω_H.

На рис. 11.13 зображено побудову картин швидкостей для ***замкнутого диференціального механізму***. Число ступенів вільності такого механізму $W = 1$, а тому треба задати закон руху якій-небудь одній ланці. Побудова картин швидкостей нічим не відрізняється від побудов, що виконувались при аналізі простих диференціальних механізмів, причому побудову зручно починати з лінії *H*, а потім будувати лінії *4*, *3*, *2* і *1*.

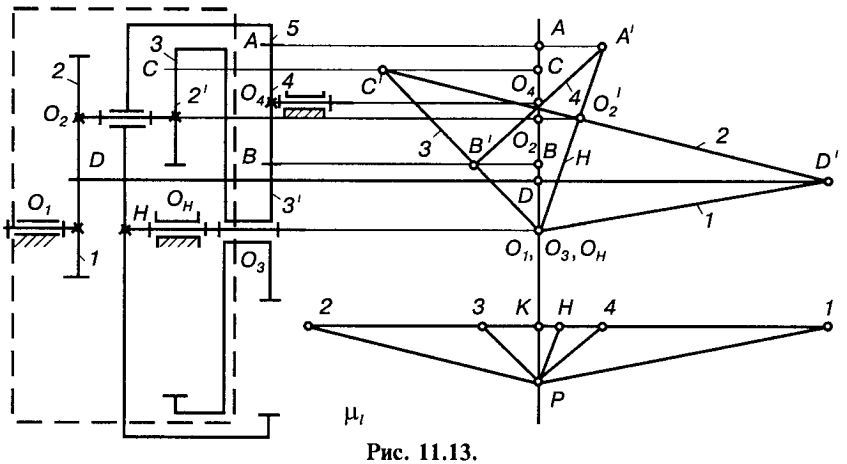


Рис. 11.13.

Цей метод досить наочний, але не точний, як усі графічні методи. Його можна використовувати для перевірки результатів аналітичних розрахунків, оскільки помилка побудови картин швидкостей більш очевидна.

11.5. Коефіцієнт корисної дії планетарного механізму

ККД планетарного механізму можна визначити двома методами [41]. Перший метод грунтується на силовому розрахунку механізмів з урахуванням тертя. Другий метод базується на припущенні, що при оборотності руху (наданні механізму додаткової швидкості $-\omega_H$ і зупинці водила H) сили, що діють на ланки механізму, не змінюються, і тому їх відношення можна виражати через ККД оберненого механізму. Другий метод є наближеним, оскільки при оборотності руху дещо змінюються сили гідравлічного опору (у передачах з колесами, зануреними в масляні ванни), не враховуються відцентрові сили інерції тощо. Проте він використовується частіше, оскільки при розрахунках за першим методом треба мати значення коефіцієнта тертя в зубчастих зачепленнях, які, як правило, невідомі. При розрахунках другим методом треба знати ККД зубчастого механізму з нерухомими осями коліс (ККД оберненого механізму), експериментальні значення якого визначені з достатньою точністю.

Для визначення ККД планетарного механізму (наприклад, показаного на рис. 11.6) за другим методом приймаємо, що всі рухомі ланки зрівноважені й рухаються рівномірно. Сталі моменти зовнішніх сил, що діють на ланки *1*, *H* і *3*, позначимо через M_1, M_H, M_3 (опорний момент, що діє з боку основи або фундаменту на стояк). Моменти рушійних сил вважаємо додатними, а моменти сил опору — від'ємними. Інакше, момент сил вважається додатним, якщо його напрямок збігається з напрямком кутової швидкості.

З умови рівноваги механізму, нехтуючи моментами сил тертя в підшипниках центральних коліс, маємо

$$M_1 + M_H + M_3 = 0. \qquad (11.16)$$

Якщо ведуча ланка є колесо *1*, тобто $M_1 > 0$, ККД, який шукаємо, дорівнює η_{1H} (перший індекс означає ведучу ланку, другий — ведену). Його визначають із відношення потужностей на веденій і ведучих ланках:

$$\eta_{1H} = \frac{P_H}{P_1}, \tag{11.17}$$

де $P_1 = M_1\omega_1$; $P_H = -M_H\omega_H$.

Тоді залежність (11.17) можна записати у вигляді

$$\eta_{1H} = -\frac{M_H\omega_H}{M_1\omega_1}.$$

З урахуванням (11.16) дістанемо

$$\eta_{1H} = \frac{1}{i_{1H}}(1 + \frac{M_3}{M_1}). \tag{11.18}$$

Відношення M_3/M_1 пов'язане з ККД оберненого механізму $\eta^{(H)}$, причому цей зв'язок залежить від того, яка ланка в обертовому русі є ведучою. Ланка *1* залишається ведучою і в обертовому русі, якщо збігаються знаки ω_1 і $\omega_1 - \omega_H$. Ця умова виконується при $i_{1H} > 1$ і $i_{1H} < 0$. Тоді ККД оберненого механізму визначається так:

$$\eta^{(H)} = -\frac{M_3(-\omega_H)}{M_1(\omega_1 - \omega_H)}. \tag{11.19}$$

Якщо в оберненому механізмі ведучою ланкою буде ланка *3* ($0 < i_{1H} < 1$), то

$$\eta^{(H)} = -\frac{M_1(\omega_1 - \omega_H)}{M_3(-\omega_H)}. \tag{11.20}$$

Підставимо в (11.18) відношення M_3/M_1 з (11.19) і (11.20). При $i_{1H} > 1$ і $i_{1H} < 0$ маємо

$$\eta_{1H} = \eta^{(H)} + \frac{1 - \eta^{(H)}}{i_{1H}}; \tag{11.21}$$

при $0 < i_{1H} < 1$

$$\eta_{H1} = -\frac{M_1\omega_1}{M_H\omega_H} \quad \text{або} \quad \eta_{H1} = \frac{i_{1H}}{1 + \frac{M_3}{M_1}}.$$

Відношення M_3/M_1 визначають у цьому випадку за формулою (11.20), якщо ланка *1* залишається веденою в оберненому русі, тобто при $i_{1H} > 1$ і $i_{1H} < 0$. В інтервалі $0 < i_{1H} < 1$ відношення моментів визначають за формулою (11.19). Отже, при $i_{1H} > 1$ та $i_{1H} < 0$

$$\eta_{H1} = \eta^{(H)} \frac{i_{1H}}{i_{1H} - 1 + \eta^{(H)}}; \qquad (11.23)$$

при $0 < i_{1H} < 1$

$$\eta_{H1} = \frac{i_{1H}}{i_{1H}\eta^{(H)} + 1 - \eta^{(H)}}. \qquad (11.24)$$

При ведучому колесі *1* ККД η_{1H} дорівнюватиме нулю, якщо передаточне відношення набуває значень

$$i_{1H} = 1 - \eta^{(H)} \text{ і } i_{1H} = -(1 - \eta^{(H)})/\ \eta^{(H)}.$$

Між цими значеннями i_{1H} ККД стає від'ємним і настає самогальмування. Наприклад, якщо $\eta^{(H)} = 0{,}98$, самогальмування буде при i_{1H}, яке перебуватиме в межах від $-0{,}02$ до $0{,}02$, що доводить неможливість руху розглянутої раніше передачі з передаточним відношенням $i_{1H} = 0{,}0001$ при ведучому колесі *1*. При ведучому водилі самогальмування немає ($\eta_{H1} > 0$), але коли $i_{1H} \to 0$, ККД також прямує до нуля. Наприклад, при $\eta^{(H)} = 0{,}98$ і $\eta_{1H} = 0{,}0001$ за формулою (11.24) маємо

$$\eta_{H1} = \frac{0{,}0001}{0{,}0001 \cdot 0{,}98 + 0{,}02} = 0{,}005.$$

11.6. Синтез планетарних механізмів

Розв'язання задачі синтезу планетарних механізмів можна поділити на два етапи: 1) вибір схеми планетарного механізму; 2) вибір чисел зубів, що забезпечують задане передаточне відношення.

Вибір схеми планетарного механізму. Одне й те саме передаточне відношення можна одержати різними за схемами механізмами, що можуть значно відрізнятися своїми ККД, масою, габаритами та іншими властивостями. У загальному випадку вибір схеми можна виконати тільки детальним порівнянням різних варіантів. Проте деякі загальні рекомендації щодо вибору схеми планетарної передачі можна дати, розглянувши приклад простих схем чотириланкових механізмів, що зображені на рис. 11.14 [4].

За знаком передаточного відношення в оберненому русі $i_{13}^{(H)}$ всі показані передачі поділяють на передачі з від'ємним (рис. 11.14 *а, б*) і

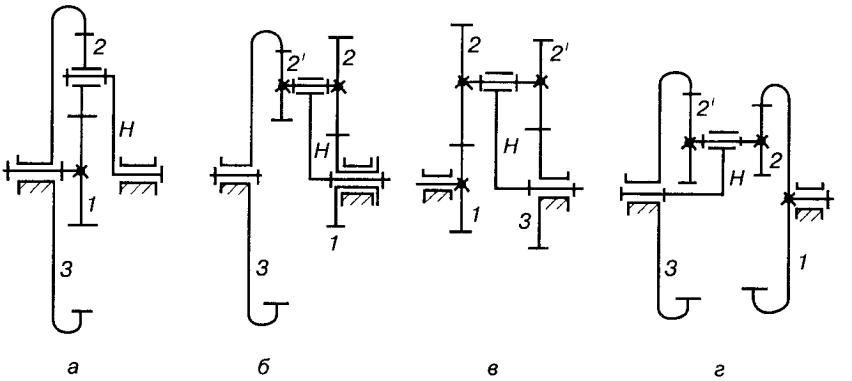


Рис. 11.14.

додатним (рис. 11.14, *в*, *г*) значенням $i_{13}^{(H)}$. Для зіставлення в табл. 11.1 наведено формули для передаточних відношень, виражені через числа зубів для зображених на рис. 11.14 чотирьох типів передач.

Передачі типу *в* і *г* забезпечують однакові передаточні відношення й відрізняються між собою тільки конструктивною наявністю в типі *в* тільки зовнішніх зачеплень, а в типі *г* — тільки внутрішніх. При цьому діапазон передаточних відношень, що забезпечуються цими типами передач, теоретично безмежний. Насправді, якщо підібрати відношення чисел зубів так, щоб загальне передаточне відношення $i_{13}^{(H)}$ було близьким до одиниці, передаточні відношення $i_{1H}^{(3)}$ або $i_{3H}^{(1)}$ будуть прямувати до нуля, а передаточні відношення $i_{H1}^{(3)}$ або $i_{H3}^{(1)}$ — до нескінченності.

Діапазони передаточних відношень передач типу *а* і *б* досить близькі між собою й визначаються габаритами передачі та конструктивними міркуваннями.

У табл. 11.2 наведено прийняті в практиці конструювання діапазони передаточних відношень.

Слід зазначити, що при малих значеннях передаточного відношення передач типу *в* і *г* їх ККД буде дуже малим, а для випадку, коли передача здійснюється від колеса до водила, може бути самогальмування. Отже, використання передач типу *в* і *г* в силових потужних редукторах недоцільне.

Користуючись табл. 11.2, можна встановити, яка схема передачі повинна бути прийнята. Наприклад, треба спроектувати

Таблиця 11.1

ФОРМУЛИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ВІДНОШЕНЬ ТИПОВИХ ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ [4]

Передаточне відношення	Тип *а*	Тип *б*	Типи *в* і *г*
$i_{13}^{(H)}$	$-\frac{z_3}{z_1}$	$-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$
$i_{31}^{(H)}$	$-\frac{z_1}{z_3}$	$-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$
$i_{1H}^{(3)}$	$1+\frac{z_3}{z_1}$	$1+\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$
$i_{H1}^{(3)}$	$\frac{1}{1+\frac{z_3}{z_1}}$	$\frac{1}{1+\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}}$
$i_{3H}^{(1)}$	$1+\frac{z_1}{z_3}$	$1+\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$
$i_{H3}^{(1)}$	$\frac{1}{1+\frac{z_1}{z_3}}$	$\frac{1}{1+\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}}$

Таблиця 11.2

ОСНОВНІ ІНТЕРВАЛИ ПЕРЕДАТОЧНИХ ВІДНОШЕНЬ ПРИ РІЗНИХ НЕРУХОМИХ ЛАНКАХ [4]

Тип передачі	Передаточне відношення	Тип *а*	Тип *б*	Типи *в* і *г*
Звичайні передачі	$i_{13}^{(H)}$	—3...—8	—1...—14	—
	$i_{31}^{(H)}$	—0,77...0,125	—1...—0,071	—
Планетарні передачі	$i_{1H}^{(3)}$	2,3...9,0	2,0...15	32...1500 і більше
	$i_{H1}^{(3)}$	0,445...0,111	0,5...0,067	
	$i_{3H}^{(1)}$	1,77...1,125	20...1,071	
	$i_{H3}^{(1)}$	0,565...0,888	0,5...0,933	

планетарну передачу з передаточним відношенням $i = 0{,}5$. Таке передаточне відношення може бути забезпечене передачею типу *б*. За табл. 11.2 можна також встановити, яка ланка повинна бути ведучою, щоб дістати передаточне відношення в заданому інтервалі.

У тому випадку, коли задане передаточне відношення не входить в інтервали передач типу *а* і *б*, необхідно використовувати складніші планетарні передачі або встановлювати кілька послідовно з'єднаних передач.

Вибір числа зубів планетарного механізму. При виборі числа зубів для заданих схеми механізму і передаточного відношення треба витримати такі умови: 1) співвісність; 2) сусідство; 3) можливість складання передачі; 4) усунення підрізання й інтерференції зубчастих коліс та самогальмування передачі. Розглянемо це питання на прикладі передачі типу *а* (рис. 11.14, *а*) [39]. У більшості випадків для розвантаження центральних підшипників, зменшення навантаження на зуби коліс і забезпечення динамічної зрівноваженості механізму встановлюють не один, а кілька сателітів (рис. 11.15). При структурному й кінематичному аналізі досить розглядати механізм з одним сателітом. На рис. 11.15 показано три сателіти *2*, *2′*, *2″*, які встановлені під одним кутом $2\pi/k$, де k — число сателітів, хоча число сателітів може бути й більшим. Сателіти, крім цього, розміщені в одній площині, і кола виступів не повинні перетинатися. Із трикутника $O_1O_2O_2'$ випливає, що для того щоб кола вершин не стикались, треба витримати умову

$$O_2O_2' > 2r_{a_2},$$

де $O_2O_2' = 2(O_2M) = 2(r_{w_1} + r_{w_2})\sin\dfrac{\pi}{k}$.

Тоді

$$2(r_{w_1} + r_{w_2})\sin\frac{\pi}{k} > 2r_{a_2}. \qquad (11.25)$$

Якщо прийняти зубчасту передачу без зміщення, радіуси початкових і ділильних кіл рівні між собою ($r_{w_i} = r_i$), а $r_{a_2} = r_2 + 2m$. Виразимо ділильні радіуси кіл через числа зубів коліс (модулі всіх зубчастих коліс у такій передачі повинні бути однаковими). Матимемо

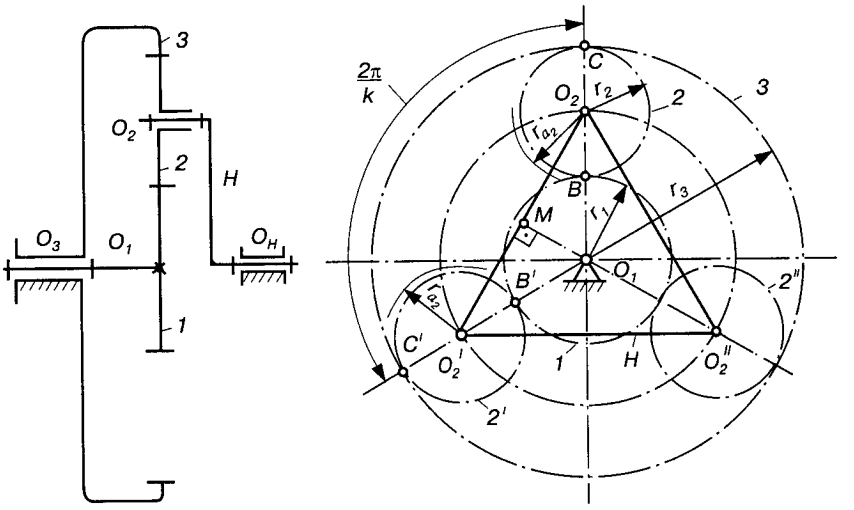


Рис. 11.15.

$$(z_1 + z_2)\sin\frac{\pi}{k} > z_2 + 2, \tag{11.26}$$

звідки

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \tag{11.27}$$

Умова (11.27) називається ***умовою сусідства***.

Для того щоб осі центральних коліс *1* і *3* збігалися, треба витримати умову співвісності, яка для даного механізму може бути записана як умова рівності міжосьових відстаней зубчастих коліс *1* і *2*, з одного боку, і коліс *2* і *3* — з іншого, тобто

$$r_1 + r_2 = r_3 - r_2 \tag{11.28}$$

або, виразивши (11.28) через число зубів, одержимо ***умову співвісності*** в такому вигляді:

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}. \tag{11.29}$$

Із цієї рівності випливає, що числа зубів z_1 і z_3 центральних коліс повинні бути або парні, або непарні.

Щоб виявнити умову складання, вважатимемо, що сателіти *2* розміщені рівномірно (під одним центральним кутом $2\pi/k$). Нехай сателіт *2* входить із центральними колесами *1* і *3* у зачеплення, що легко здійснити. В результаті цього зуби колеса *1* бу-

дуть займати цілком визначене положення відносно зубів колеса *3*. При встановленні іншого сателіта (*2′* або *2″*) може виявитись, що його зуби не потраплять у западину одного з центральних коліс *1* або *3*, тобто його не можна одночасно ввести в зачеплення з центральними колесами, оскільки вони вже зорієнтовані сателітом *2*. Складання механізму в такому випадку неможливе. Щоб здійснити симетричне розташування сателітів при заданому їх числі k, треба забезпечити відповідне співвідношення між числами зубів z_1 і z_3.

Враховуючи, що крок зубчастого зачеплення усіх коліс передачі при симетричному розташуванні сателітів однаковий, можна записати

$$\overset{\cup}{BB'} = \frac{pz_1}{k} = pb_1 + c_1; \quad \overset{\cup}{CC'} = \frac{pz_3}{k} = pb_3 + c_3, \tag{11.30}$$

де b_1 і b_3 — цілі числа; c_1 і c_3 — відрізки, кожний з яких менший кроку p.

Склавши почленно залежності (11.30), після перетворень дістанемо

$$z_1 + z_3 = k(b_1 + b_3) + \frac{c_1 + c_3}{p}k.$$

Оскільки ліва частина цієї рівності має бути лише цілим числом, то й права частина також повинна бути цілим числом при будь-яких значеннях k. Це можливо, якщо $c_1 + c_3 = p$. За цієї умови матимемо

$$z_1 + z_3 = k(b_1 + b_3 + 1) = k\gamma, \tag{11.31}$$

де γ — довільне ціле число.

Рівняння (11.31) і є ***умовою складання*** для даного механізму. З цієї умови випливає, що для складання передачі необхідно, щоб сума чисел зубів центральних коліс *1* і *3* була кратною числу сателітів.

Якщо ведучою ланкою є колесо *1*, передаточне відношення планетарного механізму, який розглядаємо, матиме вигляд

$$i_{1H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - i_{13}^{(H)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \tag{11.32}$$

де $i_{13}^{(H)} = -z_3 / z_1$.

Отже, значення передаточного відношення $i_{1H}^{(3)}$ однієї передачі завжди додатне й більше одиниці, тому колесо *1* і водило *H*

обертаються в одному напрямку, й передача служить для зменшення частоти обертання вихідної ланки — водила H — і для збільшення частоти обертання колеса *1* при веденому водилі H.

З формули (11.32) знаходимо

$$z_3 = z_1(i_{1H}^{(3)} - 1). \tag{11.33}$$

Підставивши значення z_3 в рівняння (11.29) і (11.31), відповідно матимемо

$$z_2 = z_1(i_{1H}^{(3)} - 2)/2, \tag{11.34}$$

$$\frac{z_1 i_{1H}^{(3)}}{k} = \gamma. \tag{11.35}$$

Зіставляючи рівняння (11.33), (11.34) і (11.35), дістанемо загальне рівняння для визначення чисел зубів даного планетарного механізму

$$z_1 : z_2 : z_3 : \gamma = 1 : \frac{i_{1H}^{(3)} - 2}{2} : (i_{1H}^{(3)} - 1) : \frac{i_{1H}^{(3)}}{k}. \tag{11.36}$$

Виходячи з раніше вказаних вимог найменших габаритів і усунення підрізання, задаємо число зубів найменшого центрального колеса *1* і, користуючись рівнянням (11.36), знаходимо числа зубів решти коліс. Вибране число зубів z_3 колеса із внутрішніми зубами треба перевірити на відсутність інтерференції зубів, а всю передачу — на умову сусідства (11.27). У табл. 11.3 наведено допустимі значення чисел зубів малого z_M і великого z_B коліс, при яких не буде підрізання й інтерференції зубів для коліс, нарізаних без зміщення ($xm = 0$ і $h_a^* = 1$).

Приклад 11.5. Підібрати числа зубів зубчастих коліс планетарного механізму, зображеного на рис. 11.15, якщо задано передаточне відношення $i_{1H}^{(3)} = 18/5$.

Розв'язання. Визначимо складові рівняння (11.36), прийнявши число сателітів $k = 3$:

$$\frac{i_{1H}^{(3)} - 2}{2} = \frac{18/5 - 2}{2} = \frac{4}{5};\quad i_{1H}^{(3)} - 1 = \frac{18}{5} - 1 = \frac{13}{5};\quad \frac{i_{1H}^{(3)}}{k} = \frac{18}{5 \cdot 3} = \frac{6}{5}$$

і підставимо їх у рівняння (11.36):

$$z_1 : z_2 : z_3 : \gamma = 1 : 4/5 : 13/5 : 6/5. \tag{11.37}$$

Таблиця 11.3

ДОПУСТИМІ ЧИСЛА ЗУБІВ КОЛІС, ПРИ ЯКИХ ВІДСУТНІ ПІДРІЗАННЯ ТА ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ ЗУБІВ [4]

Зовнішнє зачеплення		Внутрішнє зачеплення			
z_M	$z_{B\,min}$	z_M	$z_{B\,min}$	z_M	$z_{B\,min}$
13	<17	17	∞	23	>41
14	<27	18	>144	24	>38
15	<48	19	>81	25	>36
16	<112	20	>60	26	>35
17	Будь-яке	21	>50	27—79	$>z_M+8$
Більше 17	Будь-яке	22	>44	80 і більше	$>z_M+7$

Як видно з рівнянь (11.37), найменшим колесом буде колесо *2*, яке повинно мати число зубів більше 17 (табл. 11.3). Найменше число, кратне 4 і більше 17, є число 20. Отже, покладаємо $z_2 = 20$ і знаходимо числа зубів інших коліс, помноживши всі члени рівняння (11.37) на 5=20/4, тобто

$$z_1 = 25,\ z_3 = 65.$$

Як видно з табл. 11.3, інтерференції у внутрішньому зачепленні не буде, оскільки $z_3 > 60$.

Умову сусідства перевіряємо за формулою (11.27):

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{z_2+2}{z_1+z_2},\ \text{де}\ \ \sin\frac{\pi}{k} = \sin\frac{\pi}{3} = 0{,}866;$$

$$\frac{z_2+2}{z_1+z_2} = \frac{20+2}{25+20} = 0{,}489.$$

Отже, умова сусідства забезпечується (0,866 > 0,489).

11.7. Хвильові зубчасті передачі

Хвильова зубчаста передача є різновидом епіциклічної передачі, в якій зачеплення зубчастої пари здійснюється внаслідок сталої деформації пружного зубчастого вінця. Хвильова передача, як і епіциклічна, може бути виконана планетарною (одно- та багатоступінчастою) і диференціальною.

Хвильова зубчаста передача в планетарному одноступінчастому виконанні (рис. 11.16) складається з трьох основних елементів: гнучкої ланки *1*, жорсткого колеса *2* і генератора хвиль деформації, що складається з водила *3* і роликів *4*. Гнучка

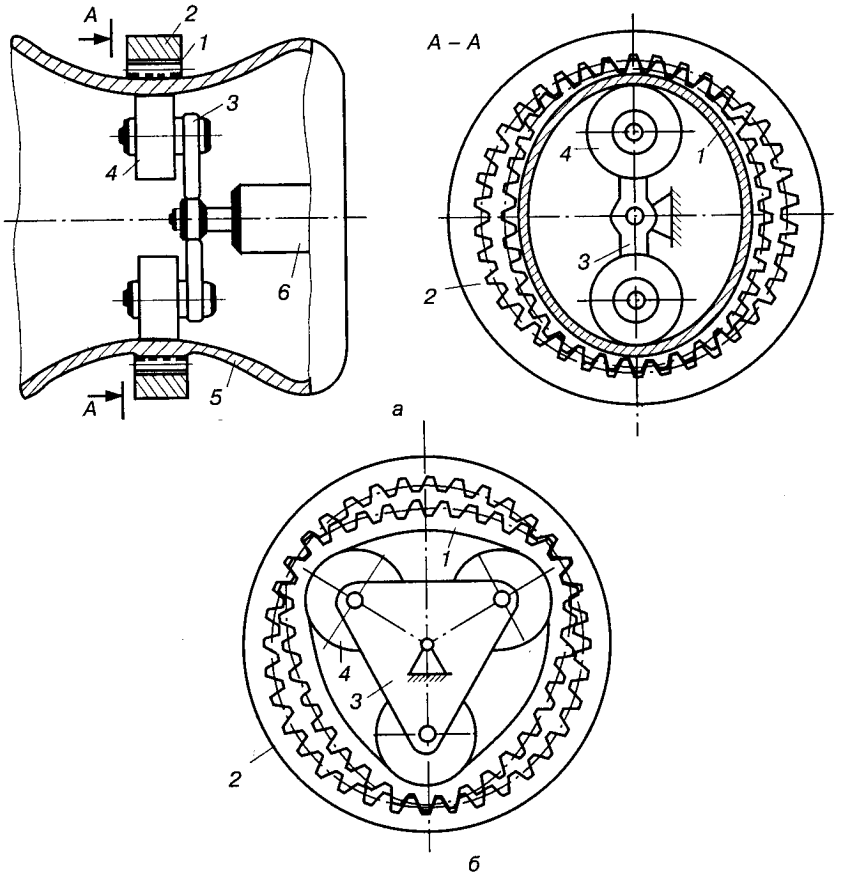


Рис. 11.16.

ланка виконана у вигляді тонкостінного стакана *5* із зубчастим вінцем *1*, з'єднаної з веденим валом *6* передачі. Зубчастий вінець гнучкої ланки *5*, деформований роликами *4* генератора хвиль в еліпс, входить у зачеплення з центральним колесом *2* у двох протилежних зонах (у радіальних напрямках роликів). Взагалі, число хвиль деформації може дорівнювати 1, 2, 3 і т. д. Частіше всього використовують двохвильові передачі. На рис. 11.16, *б* зображено трихвильову передачу.

Генератор може бути виконаний також у вигляді кулачка з еліптичним або будь-яким іншим гладким профілем, який спрягається із внутрішньою поверхнею деформованого зубчастого вінця гнучкої ланки *1*, або через тіла кочення (для змен-

шення тертя). Під час обертання генератор із своїми роликами або профільною поверхнею кулачка обкочує пружно деформований зубчастий вінець *1* по нерухомому центральному колесі *2*, переміщуючи в коловому напрямку в бік власного обертання зони зачеплення або хвилі деформації. При різних числах зубів колеса *2* та гнучкого вінця *1* це приводить до обертання вінця, а отже, і з'єднаного з ним веденого вала в напрямку, протилежному напрямку обертання генератора.

Передаточні відношення хвильових зубчастих передач визначають, як і в епіциклічних передачах, за допомогою методу оборотності руху. Для цього всьому механізму надають обертання з кутовою швидкістю, що дорівнює за значенням і протилежна за напрямком кутовій швидкості ω_3 генератора *3*. При цьому в оберненій передачі генератор зупиняється, а гнучкий вінець і жорстке колесо обертатимуться з кутовими швидкостями відповідно $\omega_1^{(3)} = \omega_1 - \omega_3$ і $\omega_2^{(3)} = \omega_2 - \omega_3 = -\omega_3$. Тоді передаточне відношення від гнучкого колеса *1* до жорсткого колеса *2* при зупиненому генераторі визначається відношенням (формула Вілліса)

$$i_{12}^{(3)} = \frac{\omega_1^{(3)}}{\omega_2^{(3)}} = \frac{\omega_1 - \omega_3}{-\omega_3} = -1 - \frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 - i_{13} = 1 - \frac{1}{i_{31}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Звідси знаходимо передаточне відношення i_{31} від ведучого генератора *3* до веденої ланки *1* виразом ($z_2 > z_1$):

$$i_{31} = \frac{1}{1 - i_{12}^{(3)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{z_2}{z_1}} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1},$$

де знак "—" вказує на те, що ведуча й ведена ланка передачі обертаються в різні боки.

Якщо в хвильовій передачі гнучка ланка закріплена, а жорстке колесо є веденим, передаточне відношення i_{32} від генератора (ведуча ланка) до колеса *2* (ведена ланка) визначається аналогічно:

$$i_{32} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{i_{12}^{(3)}}} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}.$$

Отже, в цьому випадку генератор *1* і жорстке колесо обертаються в одному напрямку.

Хвильові передачі мають ряд суттєвих переваг порівняно із звичайними зубчастими та планетарними передачами. Оскільки в такій передачі мала різниця чисел зубів гнучкого й жорсткого коліс, вони забезпечують великі передаточні відношення ($i = 200—300$), у зачепленні перебуває одночасно не менше чверті загального числа зубів. Тому несуча здатність хвильової передачі в кілька разів вища, ніж в інших зубчастих передачах.

Багатопарність зачеплення — одна з основних ***переваг*** хвильової передачі, яка визначає й інші її переваги: плавність ходу, безшумність, стабільність кінематичних характеристик під навантаженням, відносно високий ККД (70—85 %). На відміну від планетарних передач ККД суттєво не зменшується при збільшенні передаточного відношення.

Хвильові передачі економічніші від планетарних також і тому, що при малій різниці чисел зубів можна одержати передачу з досить високими показниками робота при невисокій точності виготовлення зубів. Навантаження на опори валів хвильових передач малі, оскільки при симетричному генераторові реакції з боку гнучкої ланки замикаються на генераторі й не передаються на опори. Важливою особливістю хвильових механізмів є можливість передачі руху з герметизованого простору назовні або навпаки.

До ***недоліків*** хвильових передач відносять: відносно великий пружний мертвий хід і технологічні утруднення при виготовленні її елементів.

СИНТЕЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

У цьому розділі розглядається синтез плоских важільних механізмів, які досить широко використовуються у багатьох машинах, приладах і пристроях. ***Переваги*** важільних механізмів визначаються здебільшого властивостями нижчих пар, які утворюють ланки механізму. У таких парах стичними елементами ланок є поверхні, а тому питомий тиск і ступінь зносу в них менші, ніж у вищих кінематичних парах. Елементи ланок, які утворюють ці пари, виготовляються досить просто й точно, оскільки технологія обробки площин і циліндричних поверхонь ретельно і повно розроблена. Крім цього, у механізмах з нижчими кінематичними парами забезпечується стале замикання пар і на відміну, наприклад, від кулачкових механізмів, не треба використовувати пружини та інші пристрої.

Теоретично за допомогою плоских важільних механізмів можна точно відтворити будь-яку плоску алгебраїчну криву. Проте практичне використання цих механізмів обмежується тим, що їх виготовляють, як правило, багатоланковими. Із збільшенням кількості ланок у механізмі зростає ймовірність одержання недопустимих кутів передачі, збільшуються втрати потужності на тертя, відхилення від заданої залежності в результаті нагромадження похибок, викликаних неточністю виготовлення, наявністю зазорів у кінематичних парах і пружними деформаціями ланок. Тому деякі закони руху вихід-

ної ланки практично не вдається відтворити за допомогою плоских механізмів із нижчими парами. У цьому полягає їх ***основний недолік***. У той самий час кулачкові та зубчасті механізми завдяки різноманітності елементів вищих пар практично універсальніші, ніж важільні. Проте треба зауважити, що з розвитком методів проектування межі використання важільних механізмів розширюються.

12.1. Основні задачі синтезу та методи їх розв'язування

Якщо при аналізі механізмів розміри їх ланок вважаються заданими й необхідно знайти ті чи інші кінематичні (переміщення, швидкості, прискорення) або силові (сили, моменти сил, роботу, потужність, ККД тощо) характеристики руху, то в процесі створення механізмів і машин виникає інша (зворотна) задача: побудувати такий механізм, який би відповідав необхідним функціональним або технологічним вимогам. Ці вимоги у кінцевому підсумку зводяться до виконання деяких геометричних або механічних умов. Така задача ТММ, зворотна до задачі аналізу, називається синтезом механізмів. Отже, ***під синтезом механізму розуміють проектування його схеми за заданими властивостями***. При цьому розрізняють три основні етапи синтезу.

Перший етап називається ***структурним синтезом*** і полягає у виборі структурної схеми механізму, що має потрібну кількість ступенів вільності, кількість та вид ланок і кінематичних пар, які забезпечують необхідні рухи ланок та їх взаємне розташування. Цей етап синтезу здійснюють на підставі довідкових даних про окремі види механізмів шляхом порівняння властивостей усіх механізмів, які можуть виконувати задані функції [3, 29, 37].

Другий етап називається ***кінематичним синтезом***, задача якого — визначити геометричні розміри ланок, що забезпечують задані кінематичні умови роботи механізму (положення ланок, траєкторії окремих точок, швидкості та прискорення ланок і точок механізму тощо). Кінематичний синтез — один з найвідповідальніших етапів у процесі проектування механізму, оскільки якраз на цьому етапі формуються основні кінематичні властивості, необхідні для виконання механізмом покладених на нього функцій.

Якщо потрібно врахувати також динамічні властивості механізму, розв'язується більш загальна задача ***динамічного синте-***

зу, під якою розуміють проектування кінематичної схеми механізму з визначенням параметрів, що характеризують розміри та розподіл мас ланок. Динамічний синтез містить у собі два попередні види синтезу.

Отже, синтез кінематичної схеми полягає у визначенні деяких сталих параметрів, які задовольняють задані структурні, кінематичні й динамічні умови, при цьому одна частина цих параметрів може бути задана, інша — підлягає визначенню. До таких параметрів, зокрема, належить довжина ланок, положення точок їх траєкторій, значення швидкостей і прискорень, маси та моменти інерції ланок. Незалежні один від одного сталі параметри схеми механізму називають ***параметрами синтезу***.

Параметри синтезу бувають вхідними та вихідними. ***Вхідні*** параметри задані або відомі до проведення синтезу, а ***вихідні*** визначають під час синтезу. Прикладами вхідних параметрів можуть бути наперед задана (потрібна) траєкторія руху точки механізму або необхідна продуктивність машини, а вихідними параметрами є геометричні розміри ланок (у першому випадку), а також маси ланок, закони їх розподілу, моменти інерції ланок, жорсткість пружних ланок, потужність двигуна, швидкість обертання ланок тощо.

Умови перетворення рухів, для виконання яких проектується механізм, досить різноманітні, що визначається надзвичайно широким спектром робочих функцій, які накладаються на механізми в різних машинах, приладах і пристроях сучасної техніки. Назвемо ***деякі вимоги***, які найчастіше ставляться до механізмів:

1) необхідно спроектувати механізм ***за кількома дискретними положеннями ланок***, зокрема крайніми положеннями вихідної ланки; при цьому закон руху ланок між заданими положеннями не регламентується;

2) забезпечити відповідний ***закон руху вихідної ланки*** при заданому законі вхідної, тобто швидкості та прискорення вихідної ланки повинні змінюватися за деяким законом або не бути більшими заданої величини; можуть бути задані окремі кінематичні параметри, наприклад, середня швидкість руху, відношення середніх швидкостей при прямому та зворотному ході, коефіцієнт нерівномірності руху тощо;

3) забезпечити задані ***передаточні відношення*** двох або більше ланок, що входять до складу механізму;

4) деяка точка робочої ланки механізму повинна точно або наближено описувати задану ***траєкторію*** або деяку її частину.

Крім цього, при проектуванні механізмів треба врахувати такі фактори:

прокручування ланок, тобто можливість неперервного переходу ланки з одного заданого положення в інше, оскільки між двома заданими положеннями може виявитися проміжне, в якому рух ланок неможливий;

максимально допустимі кути тиску $\vartheta_{доп}$, оскільки геометрично спроектований механізм може виявитися нераціональним унаслідок недопустимо великих сил, які виникають у кінематичних парах, низького ККД або навіть непрацездатним із-за явища заклинювання;

конструктивні обмеження довжин ланок механізму, оскільки при проектуванні можуть бути варіанти з недопустимо великими або дуже малими розмірами деяких ланок;

допустимі відхилення від заданого закону руху, оскільки задачу синтезу важільних механізмів за заданим законом руху найчастіше можна розв'язати лише наближено.

Серед задач, які має розв'язувати синтезований механізм, можна виділити одну або кілька найважливіших — ***основних*** задач (наприклад, отримання необхідної траєкторії руху, досягнення заданої швидкості тощо), інші вважаються другорядними — додатковими (наприклад, мінімальна вага або мінімальні габаритні розміри).

Основна задача синтезу визначає також і вид синтезу, за допомогою якого може бути розв'язана ця задача (кінематичний або динамічний синтез). Основну умову синтезу можна подати у вигляді деякої функції вихідних параметрів, яку прийнято називати ***цільовою функцією,*** або ***критерієм оптимізації***. Додаткові умови синтезу також повинні бути відображені у математичній формі, як правило, у вигляді нерівностей.

Отже, розв'язання основної задачі синтезу здебільшого є багатопараметричним, що визначає існування багатьох розв'язків. Природно, що в такому випадку з'являється прагнення отримати кращий (оптимальний) або максимально наближений до оптимального розв'язок з урахуванням існуючих реальних обмежень (додаткових умов). Такі задачі найчастіше розв'язуються за допомогою ЕОМ (див. параграф 12.9).

Задачі синтезу механізмів можна розв'язати чотирма основними методами:

• ***графічним***, який засновано на використанні кінематичних схем механізмів, зображених на рисунку, на якому параметри довжини побудовано у певному масштабі. Цей метод досить час-

то застосовується на попередніх стадіях проектування завдяки своїй простоті та наочності й переважно для плоских механізмів;

• ***аналітичним***, заснованим на різних математичних методах, які широко використовуються завдяки повсюдній комп'ютеризації інженерної та наукової праці. Аналітичні методи, які можна застосувати в будь-яких механізмах, дають високу точність розв'язків, дають змогу отримувати оптимальні (за заданими цільовими функціями) значення параметрів синтезу. До їх недоліків слід віднести трудомісткість підготовки та налагодження програм і не завжди достатню наочність;

• ***графоаналітичним***, що поєднує два вказані вище методи. Цей метод дуже часто поєднує в собі високу точність обчислень з наочністю розв'язання;

• ***експериментальним***, що використовує натуральні зразки або моделі механізмів, які проектуються. Цей метод дає результати, найбільш наближені до реальних, але вимагає великих матеріальних витрат і слабо піддається оптимізації.

Вибір того чи іншого методу значною мірою залежить від умов, поставлених при проектуванні. Наприклад, якщо поставлена умова, щоб при наближеному виконанні заданого руху оцінити відхилення потрібного руху від фактично отриманого, то необхідно використовувати аналітичні методи, оскільки графічні методи не можуть дати повної відповіді на поставлені питання.

Далі розглядатимемо лише перші три методи, які здебільшого будуть викладені в тому вигляді, який запропоновано І. І. Артоболевським, М. І. Левитським [4, 5, 42] і частково — [25, 27, 72].

12.2. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах

До найпростіших механізмів, які широко використовуються у техніці, належать шарнірні чотириланкові механізми. Основна характеристика таких механізмів — прокручування їх ланок (наявність у них одного або двох кривошипів), яке залежить від співвідношення довжин ланок. Для встановлення цієї умови розглянемо шарнірний чотириланковий механізм (рис. 12.1), в якого довжини ланок відповідно становлять $l_{OA} = a$, $l_{AB} = b$, $l_{BC} = c$, $l_{OC} = d$.

Для того щоб ланка OA могла стати кривошипом, вона повинна при обертанні послідовно пройти через крайнє ліве OA_1 і праве OA_3 положення. Тоді, прийнявши, що a — довжина найкоротшої ланки, d — найдовшої, та використавши відомі співвідношення між довжинами сторін трикутника (довжина сторони трикутника менша суми довжин двох інших сторін), запишемо такі нерівності:

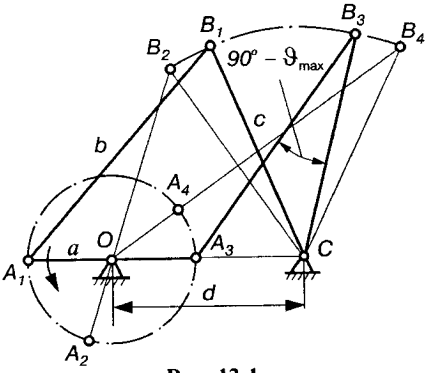


Рис. 12.1.

з $\Delta A_1 B_1 C$

$$a + d \le b + c; \tag{12.1}$$

з $\Delta A_3 B_3 C$ (або $\Delta OB_4 C$)

$$d - a \le b + c. \tag{12.2}$$

Незалежно від співвідношення довжин b і c нерівність (12.1) завжди забезпечує виконання нерівності (12.2). Якщо ж найдовшою ланкою буде ланка AB або BC ($b > c > d$ або $c > b > d$), то нерівність (12.1) тільки підсилюється.

Нерівність (12.1) дає змогу дати загальне формулювання умови прокручування ланок шарнірного чотириланкового механізму, тобто існування кривошипа, а саме — ***найкоротша ланка шарнірного чотириланкового механізму може бути кривошипом, якщо сума довжин найкоротшої і найдовшої ланок менша суми довжин решти ланок.*** Це положення носить назву ***правила Грасгофа.***

Використовуючи це правило, шарнірні чотириланкові механізми поділяють на три групи:

- механізм буде ***кривошипно-коромисловим*** (див. рис. 12.1), якщо розміри його ланок задовольняють правило Грасгофа (12.1) і за стояк прийнято ланку b або d, розташовану біля найкоротшої ланки a;
- механізм буде ***двокривошипним***, якщо його розміри відповідають правилу Грасгофа і за стояк прийнято найкоротшу ланку a (рис. 12.2, *а*). Це випливає з того, що якщо кривошип при виконанні правила Грасгофа виконує повний оборот відносно стояка OC і шатуна AB (див. рис. 12.1), то й ці ланки здійснюють повний оборот відносно стояка;

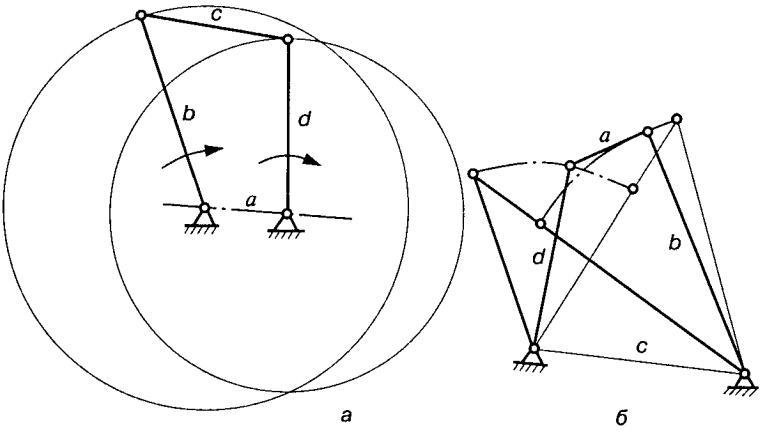


Рис. 12.2.

• механізм буде ***двокоромисловим***, якщо його розміри не задовольняють правило Грасгофа, а також у випадку, коли задовольняють це правило, але найкоротша ланка є шатуном (рис. 12.2, *б*). Тому можливість цієї ланки бути кривошипом зникає, оскільки вона не є ланкою, розташованою біля стояка.

У граничному випадку, коли нерівність (12.1) перетворюється у рівність, усі ланки механізму в одному з крайніх положень розташовано вздовж однієї прямої. Внаслідок цього з'явиться невизначеність руху відповідної ланки (вона може рухатися або в одному, або в іншому напрямку).

У кривошипно-повзунковому механізмі (рис. 12.3, *а*) ланка *1* буде кривошипом, якщо при обертанні вона пройде положення $\varphi = 90°$ і 270°, що можливо, коли виконується умова

$$r < l - |e|, \tag{12.3}$$

де r — довжина ланки OA; l — ланки AB; e — зміщення (дезаксіал).

Штриховою лінією зображена схема механізму, коли $e < 0$. Якщо $r > l - |e|$, то ланка *1* буде коромислом, і такий механізм правильніше називати коромислово-повзунним.

У кулісному механізмі (рис. 12.3, *б*) ланка *1* може бути кривошипом; ланка *3* (куліса) буде кривошипом, якщо при обертанні пройде положення $\varphi = 270°$, що можливо при виконанні умови

$$r > a + e, \tag{12.4}$$

де r — довжина кривошипа OA; $a = l_{OC}$ — міжосьова відстань; e — зміщення куліси; $e = l_{BC}$. У цьому випадку маємо механізм з обер-

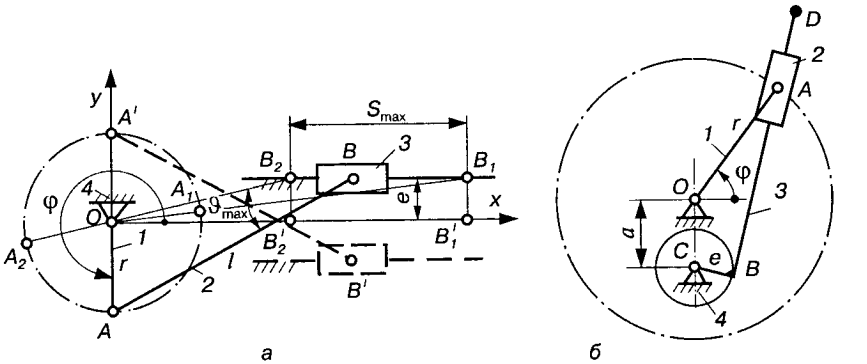


Рис. 12.3.

товою кулісою. Якщо $r < a + e$, то куліса *3* буде коромислом (механізм з коливальною кулісою). Найбільш розповсюджені кулісні механізми, в яких зміщення $e = 0$.

12.3. Синтез механізмів за заданими законами руху ланок

Розв'язання задачі про відтворення заданого руху ланок покажемо на прикладі шарнірного чотириланкового механізму (рис. 12.4). Нехай закон руху вхідної ланки *OA* задано у вигляді залежності його кута повороту φ від часу *t*, тобто

$$\varphi = \varphi(t), \tag{12.5}$$

а закон руху вихідної ланки *BC* — у вигляді залежності його кута повороту β також від часу *t*, тобто

$$\beta = \beta(t). \tag{12.6}$$

Вилучаючи з рівнянь (12.5) і (12.6) час, записуємо ***функцію положення***

$$\beta = \beta(\varphi). \tag{12.7}$$

Закон руху вихідної ланки можна задати також у вигляді передаточної функції i_{31} — аналога кутової швидкості φ_3' (див. параграфи 3.6—3.8):

$$i_{31} = \varphi_3' = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{d\beta}{d\varphi}, \tag{12.7'}$$

де ω_1, ω_3 — кутова швидкість ланки відповідно *1* і *3*.

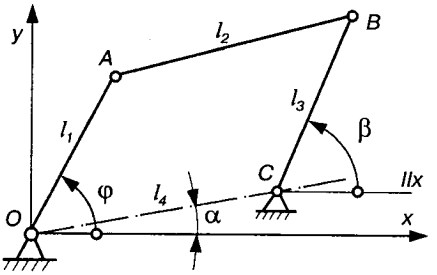


Рис. 12.4.

За цією причиною механізми, які дають змогу відтворити задану функціональну залежність (12.7) або (12.7′) між переміщеннями ланок, що утворюють кінематичні пари зі стояком, називають ***передаточними***.

Зв'язок між кутами φ і β встановлюємо за допомогою розмірів ланок механізму, які називають ***параметрами кінематичної схеми механізму*** або скорочено ***параметрами синтезу***. Отже, щоб задовольнити умову (12.7), необхідно відповідним чином підібрати параметри механізму. Для механізму, зображеного на рис. 12.4, кількість незалежних параметрів може дорівнювати шести. Це довжини ланок $l_1 = l_{OA}$, $l_2 = l_{AB}$, $l_3 = l_{BC}$, $l_4 = l_{OC}$, початкове значення φ_0 кута φ і кут α, який утворює стояк *OC* з віссю *Ox*. Якщо прийняти довжину l_1 кривошипа *OA* за одиницю вимірювання довжин ланок і виразити розміри ланок через відносні параметри:

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{l_1} = 1;\ \lambda_2 = \frac{l_2}{l_1};\ \lambda_3 = \frac{l_3}{l_1};\ \lambda_4 = \frac{l_4}{l_1},$$

то отримаємо п'ять параметрів синтезу (λ_2, λ_3, λ_4, φ_0 і α), які необхідно визначити.

Маючи заданими закони руху ланок *OA* і *BC*, можна визначити окремі положення цих ланок. Позначимо кути, які утворюють ланки *OA* і *BC* з віссю *Ox* (рис. 12.4), відповідно φ_1, φ_2, φ_3, ..., φ_m і β_1, β_2, β_3, ..., β_m. Тоді згідно з (12.7) матимемо систему рівнянь:

$$\beta_1 = \beta_1(\varphi_1),\ \beta_2 = \beta_2(\varphi_2),\ \beta_3 = \beta_3(\varphi_3),\ ...,\ \beta_m = \beta_m(\varphi_m). \qquad (12.8)$$

Якщо число рівнянь (12.8) дорівнює числу параметрів, які треба визначити, то задачу теоретично можна повністю розв'язати. У практичних задачах внаслідок ускладнень при спільному розв'язанні рівнянь (12.8) число *m* пар заданих відповідних значень кутів φ і β вибирають таким, що дорівнює числу параметрів, які необхідно визначити. У такій постановці задача про відтворення заданого закону руху називається задачею про положення і розглядається далі.

12.4. Синтез механізмів за заданими положеннями ланок

Розглянемо задачу про синтез шарнірного чотириланкового механізму (рис. 12.5, *а*) за заданими положеннями його ланок.

Для спрощення задачі слід припустити, що нерухомі шарніри O і C розташовані на осі Ox, від якої ведеться відлік кутів φ і β, і прийняти, що кут $\alpha = 0$, то при заданих довжинах ланок будь-якому заданому значенню φ_i кута φ (рис. 12.5, *б*) відповідатиме цілком визначене значення β_i кута β, а тому кількість параметрів механізму, які необхідно визначити, дорівнюватиме трьом (див. параграф 12.3). Це параметри $\lambda_2 = l_2/l_1$, $\lambda_3 = l_3/l_1$ і $\lambda_4 = l_4/l_1$.

Отже, якщо будуть задані три положення ланки OA (рис. 12.5, *б*) кутами φ_1, φ_2, φ_3, а три відповідні їм положення ланки BC — кутами β_1, β_2, β_3, то завжди будуть визначені параметри λ_2, λ_3, λ_4, оскільки кількість рівнянь вигляду (12.8) дорівнює кількості цих параметрів.

Поставлену задачу можна розв'язати аналітичним і графічним методами.

Аналітичний метод. Зобразимо сторони механізму (рис. 12.6) у вигляді векторів λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, причому $\lambda_1 = 1$. Тоді маємо

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_4 + \lambda_3. \qquad (12.9)$$

Проектуємо обидві частини рівнянь (12.9) на осях Ox, Oy. Позначимо кут, утворений шатуном AB з віссю Ox, буквою δ і отримаємо для довільного i-го положення механізму рівняння проекцій на осях Ox і Oy у вигляді

$$\cos\varphi_i + \lambda_2\cos\delta_i = \lambda_4 + \lambda_3\cos\beta_i;\ \sin\varphi_i + \lambda_2\sin\delta_i = \lambda_3\sin\beta_i,$$

або

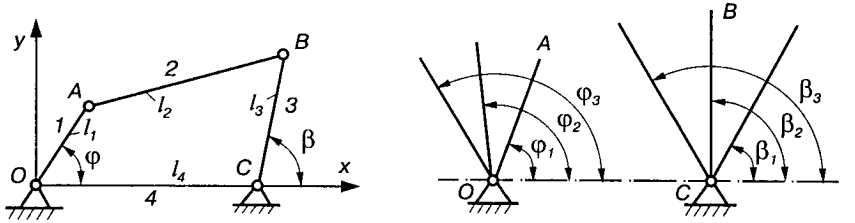
$$\lambda_2\cos\delta_i = \lambda_4 + \lambda_3\cos\beta_i - \cos\varphi_i,\ \lambda_2\sin\delta_i = \lambda_3\sin\beta_i - \sin\varphi_i. \qquad (12.10)$$

Підносимо почленно рівняння (12.10) до квадрата і додаємо їх. Тоді отримаємо

$$\lambda_2^2 = \lambda_4^2 + \lambda_3^2 + 1 + 2\lambda_4\lambda_3\cos\beta_i - 2\lambda_4\cos\varphi_i - 2\lambda_3\cos(\beta_i - \varphi_i). \qquad (12.11)$$

Перенесемо λ_2^2 у праву частину (12.11) і поділимо всі члени на $2\lambda_4$. Розв'язуючи рівняння відносно $\cos\varphi_i$, матимемо

$$\cos\varphi_i = \lambda_3\cos\beta_i - \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\cos(\beta_i - \varphi_i) + \frac{\lambda_4^2 + \lambda_3^2 + 1 - \lambda_2^2}{2\lambda_4}. \qquad (12.12)$$



а *б*

Рис. 12.5.

Введемо позначення:

$$p_0 = \lambda_3,\ p_1 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_4},\ p_2 = \frac{\lambda_4^2 + \lambda_3^2 + 1 - \lambda_2^2}{2\lambda_4}. \qquad (12.13)$$

Тоді (12.12) запишеться так:

$$\cos\varphi_i = p_0 \cos\beta_i + p_1 \cos(\beta_i - \varphi_i) + p_2. \qquad (12.14)$$

Підставляючи у рівність (12.14) задані кути φ_1, φ_2, φ_3 і β_1, β_2, β_3 (див. рис. 12.5, *б*), записуємо систему, складену із трьох лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= p_0 \cos\beta_1 + p_1 \cos(\beta_1 - \varphi_1) + p_2, \\ \cos\varphi_2 &= p_0 \cos\beta_2 + p_1 \cos(\beta_2 - \varphi_2) + p_2, \\ \cos\varphi_3 &= p_0 \cos\beta_3 + p_1 \cos(\beta_3 - \varphi_3) + p_2. \end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

Розв'язуючи сумісно цю систему рівнянь, визначаємо величини коефіцієнтів p_0, p_1, p_2, після чого за допомогою співвідношень (12.13) можна знайти невідомі параметри λ_2, λ_3 і λ_4.

Якщо необхідно спроектувати механізм за двома положеннями ланок *OA* і *BC*, то один із параметрів механізму можна задати довільно і задача матиме нескінченну кількість можливих розв'язків.

Такі задачі можна розв'язати графічним методом за допомогою нескладних геометричних побудов.

Синтез механізмів за двома заданими положеннями шатуна. Нехай задано два положення A_1B_1 і A_2B_2 шатуна шарнірного чотириланкового механізму (рис. 12.7). Необхідно знайти положення точок *O* і *C* — центрів обертання ланок механізму, які входять у кінематичні пари зі стояком. Точки A_1 і A_2 повинні лежати на колі з центром у точці *O*, а точки B_1 і B_2 — на колі з центром *C*. Оскільки через дві точки можна провести нескінченну кількість кіл, то геометричним місцем цих кіл є прямі *11* або *22*, які

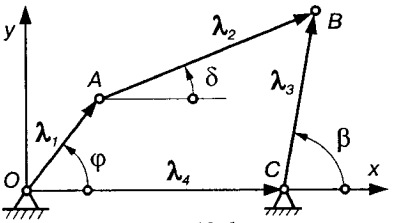


Рис.12.6.

перпендикулярні до хорд A_1A_2 або B_1B_2 і проходять через їх середину N або M. Точку O можна розмістити у будь-якій точці прямої *11*, а точку C — прямої *22*. Отже, для вказаного завдання можна побудувати нескінченну кількість механізмів, які задовольняють задані умови. Додаткові умови можна накласти, якщо, наприклад, поставити умову, щоб механізм був двокривошипним або кривошипно-коромисловим тощо.

Якщо вимагається, щоб одна із точок ланки AB, наприклад точка B, рухалась вздовж нерухомої прямої xx, то центр C кола повинен знаходитися у нескінченності, обертова пара C перетворюється у поступальну (рис. 12.7, *б*), тоді отримаємо кривошипно-повзунковий механізм.

Можна поставити додаткову вимогу, щоб при заданому переміщенні шатуна AB кути повороту φ і β відповідно ланок OA і BC були також заданими (рис. 12.8). Тоді з'єднуємо точки A_1 і A_2 прямою і відкладаємо при точках A_1 і A_2 кути, що дорівнюють $90° - \varphi/2$. Точка перетину O прямих A_1a_1 і A_2a_2 визначить положення осі O обертання ланки OA. Так само, якщо з'єднати точки B_1 і B_2 і при цих точках відкласти кути $90° - \beta/2$, то точка C перетину прямих B_1b_1 і B_2b_2 визначить положення осі обертання C ланки BC.

Синтез механізмів за трьома положеннями шатуна (рис. 12.9). Задача зводиться до знаходження центра кола, яке проходить через три точки. Як відомо, ця задача має тільки один розв'язок. Отже, маючи три точки A_1, A_2, A_3, з'єднуємо прямими

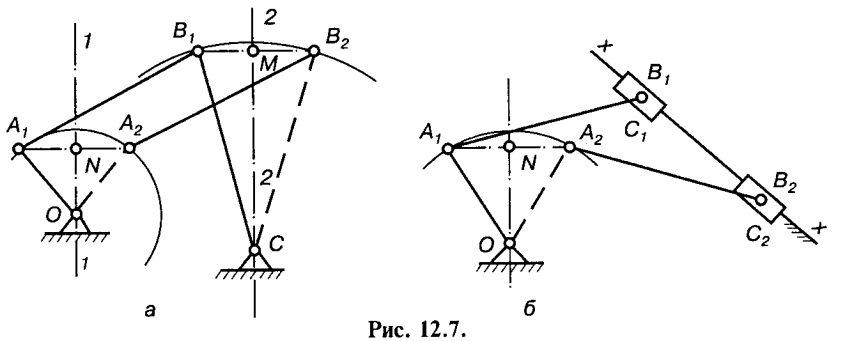


Рис. 12.7.

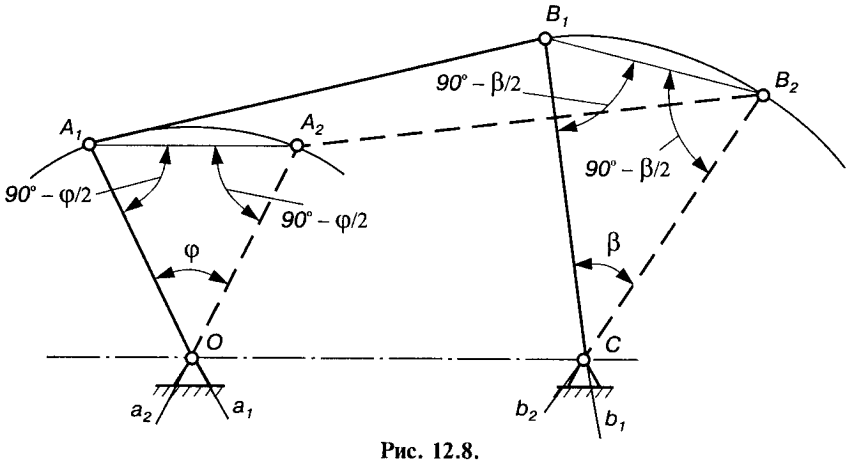


Рис. 12.8.

точки A_1 і A_2 та A_2 і A_3, через середини яких проводимо перпендикуляри N_1n_1 і N_2n_2. Центр обертання ланки OA знаходитиметься на перетині цих перпендикулярів у точці O. Аналогічно на перетині перпендикулярів M_1m_1 та M_2m_2 визначається положення шарніра C. Якщо точки B_1, B_2, B_3 задані на прямій, то ланка BC виконується у вигляді повзуна, як це було у випадку, зображеному на рис. 12.7, *б*.

Синтез механізмів за трьома положеннями коромисла (рис. 12.10). Справді, якщо задано три положення CB_1, CB_2 і CB_3 коромисла, то можна ще задати три довільних положення A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 шатуна AB відносно коромисла BC, які проведено під кутом

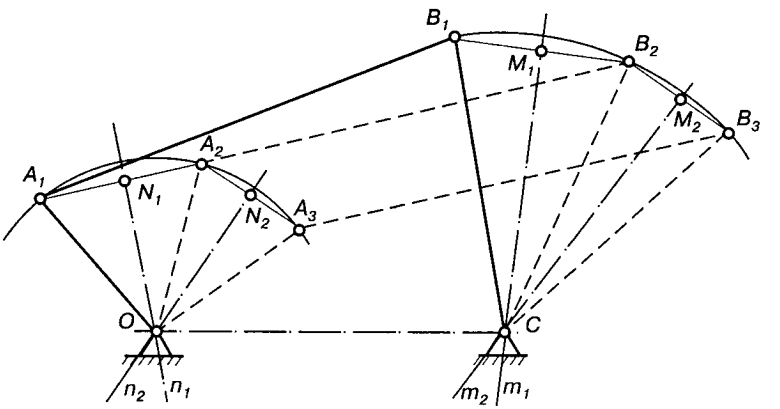


Рис. 12.9.

$A_iB_iC = \mu_{min}$, щоб усунути заклинювання у механізмі. Тоді визначаються три положення A_1, A_2, A_3 точки A, яка належить ланці OA. Знаходження центра обертання O і довжини цієї ланки зводиться до побудови кола, яке проходить через три точки A_1, A_2, A_3.

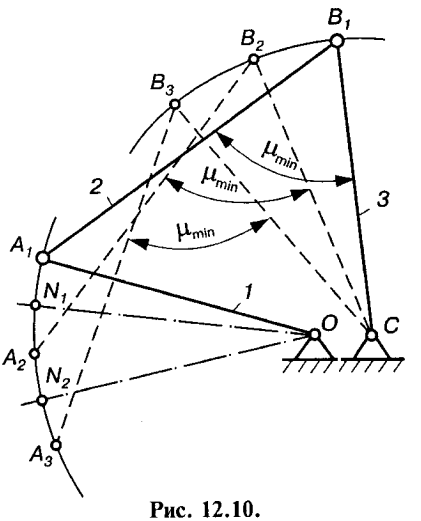


Рис. 12.10.

Синтез механізмів за трьома положеннями двох ланок. Нехай, наприклад (рис. 12.11, *а*), задані положення ланки *1*, яка займає послідовно положення OA_1, OA_2, OA_3, що визначаються кутами φ_1, φ_2, φ_3, і положення площини, яка належить ланці *3* — у вигляді трьох послідовних положень прямої CD, яка належить площині. Нехай пряма CD послідовно займає положення CD_1, CD_2 і CD_3, які визначаються кутами β_1, β_2 і β_3. Треба визначити довжину шатуна, що входить у кінематичні пари з ланками OA і CD.

Припустимо, що шатун входить із кривошипом OA у кінематичну пару в точці A. Тоді необхідно знайти положення осі B обертової пари, до якої входять шатун і коромисло. Розглянемо положення точки A кривошипа відносно прямої CD (рис. 12.11, *б*). У першому випадку положення точки A утворює з прямою CD ΔCA_1D_1, у другому — ΔCA_2D_2 і в третьому — ΔCA_3D_3. Тепер, щоб знайти положення точки A відносно прямої CD, зупинимо цю пряму. Тоді перше відносне положення точки A відносно прямої CD суміститься з її абсолютним положенням A_1. Друге відносне положення точки A — положення A_2' — знайдемо, якщо сторону CD_2 ΔCA_2D_2 сумістимо із CD_1, тоді вершина A_2 трикутника займе положення A_2'. Третє відносне положення точки A — положення A_3' — знайдемо, якщо сторону CD_3 ΔCA_3D_3 сумістимо також із CD_1, тоді вершина A_3 трикутника займе положення A_3'.

У русі точка A відносно прямої CD (рис. 12.11, *б*) послідовно займає положення A_1, A_2', A_3'. Оскільки у відносному русі точка B

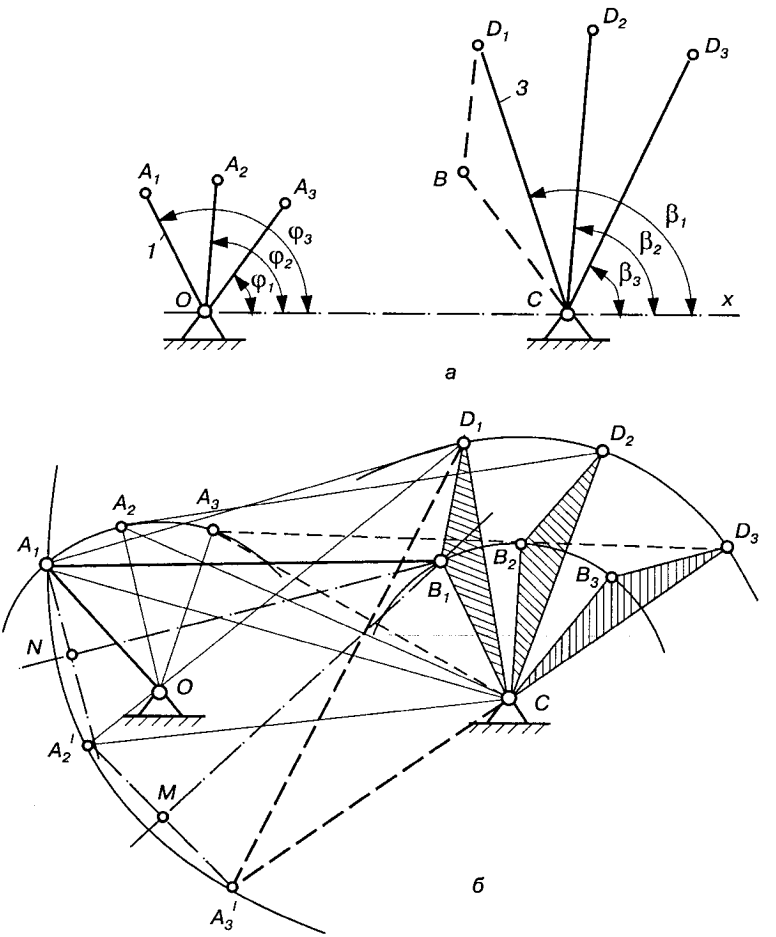


Рис. 12.11.

шатуна AB залишається нерухомою, а його точка A займає положення A_1, A_2', A_3', то точка B повинна бути центром кола, що проходить через три точки (A_1, A_2', A_3'). Положення точки B можна знайти звичайним способом, провівши перпендикуляри до відрізків A_1A_2' і $A_2'A_3'$ через їх середини N і M. Точка B_1 перетину цих перпендикулярів і визначить положення осі обертової пари B у першому положенні.

Отже, схема чотириланкового механізму буде фігурою OA_1B_1C. При трьох заданих положеннях кривошипа і площини,

що належить коромислу, розв'язок буде єдиним. При двох заданих положеннях точку B можна вибирати у будь-якій точці перпендикуляра, поставленого через середину відрізка, що сполучає відповідні положення точки A.

Аналогічно розв'язується задача, коли необхідно спроектувати ***кривошипно-повзунковий механізм*** за трьома положеннями кривошипа OA і повзуна B (рис. 12.12). Нехай задано три положення площини кривошипа у вигляді трьох послідовних положень (OD_1, OD_2 і OD_3) прямої OD, що належить цій площині, і три положення повзуна (B_1, B_2 і B_3). Сполучаємо точки D_1, D_2 і D_3 прямими з точками B_1, B_2 і B_3. Тоді дістанемо трикутники OD_1B_1, OD_2B_2 і OD_3B_3. За початкове положення беремо положення кривошипа, що визначається прямою OD_1. Припустимо далі, що одним кінцем кривошип входитиме в кінематичну пару з шатуном у точці A. Для визначення положення точки A будуємо на відрізку OD $\Delta OD_1B_2'$ і $\Delta OD_1B_3'$, що відповідно дорівнюють трикутникам OD_2B_2 і OD_3B_3. Шукана точка A має бути центром кола, що проходить через точки B_1, B_2' і B_3'. Для її визначення сполучаємо прямими відрізками точку B_1 з точкою B_2', точку B_2' з точкою B_3' і через середини відрізків B_1B_2' і $B_2'B_3'$ проводимо перпендикуляри NA_1 і MA_1. Точка A_1 перетину цих перпендикулярів і визначить положення осі обертової пари A,

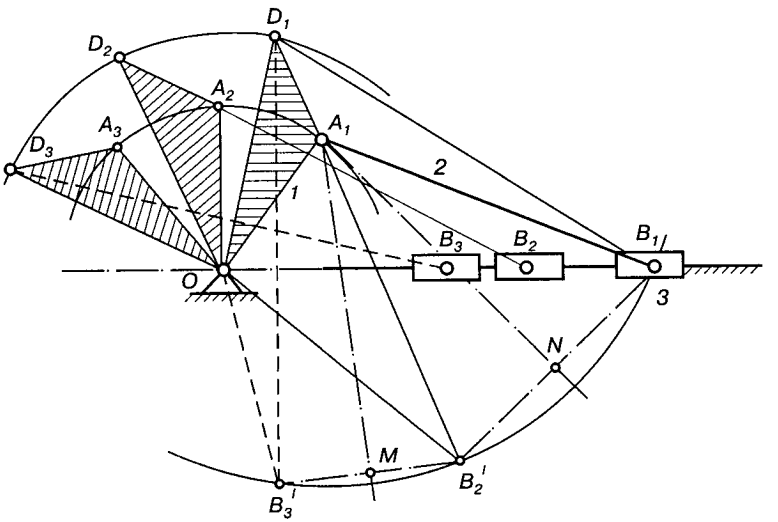


Рис. 12.12.

до якої входять кривошип і шатун. Отже, потрібна схема механізму зобразиться фігурою OA_1B_1.

Нині питання проектування механізмів з нижчими парами в багатьох аспектах вирішені. Зокрема розв'язано задачі про проектування механізмів з нижчими парами, ланки яких займають чотири і п'ять заданих положень [5, 44, 54].

В інженерній практиці широко застосовують синтез механізмів за двома крайніми заданими положеннями вихідної ланки. Надалі детальніше розглянемо методи синтезу чотириланкових і деяких шестиланкових механізмів за певних умов.

12.5. Синтез чотириланкових механізмів за двома крайніми положеннями вихідної ланки

Кривошипно-коромисловий механізм. На рис. 12.13 зображено кривошипно-коромисловий механізм $OABC$, в якому кривошип OA здійснює обертовий рух навколо точки O; коромисло BC — зворотно-коливальний рух навколо точки C; максимальний кут розмаху коромисла β_{max}.

При безперервному обертанні кривошипа коромисло BC займатиме крайнє праве положення CB_1, коли кривошип OA і шатун AB витягнуться в одну лінію OA_1B_1 і, навпаки, крайнє ліве положення CB_2, коли кривошип і шатун складаються в одну лінію OA_2B_2. Положення механізму, при яких вихідна ланка займає одне з крайніх положень, називають ***крайніми***, або "***мертвими***". Для цих положень механізму можна записати такі рівняння:

$$r + l = l_{OB_1},\ l - r = l_{OB_2}, \qquad (12.16)$$

де $r = l_{OA}$; $l = l_{AB}$.

Розв'язуючи (12.16) відносно r і l, знаходимо

$$r = (l_{OB_1} - l_{OB_2})/2;\ l = (l_{OB_1} + l_{OB_2})/2, \qquad (12.17)$$

де довжини відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} можна знаходити як графічним, так і аналітичним методом. Якщо кут $\beta_0 > \pi + \xi$ або $\beta_0 < \xi$, то $l_{OB_1} < l_{OB_2}$, а тому у першій залежності системи рівнянь (12.17) вираз $(l_{OB_1} - l_{OB_2})$ треба брати за абсолютним значенням.

За ***графічним методом*** будуємо два крайні положення коромисла BC (див. рис. 12.13). Відклавши задані кути β_0 і β_{max}, діста-

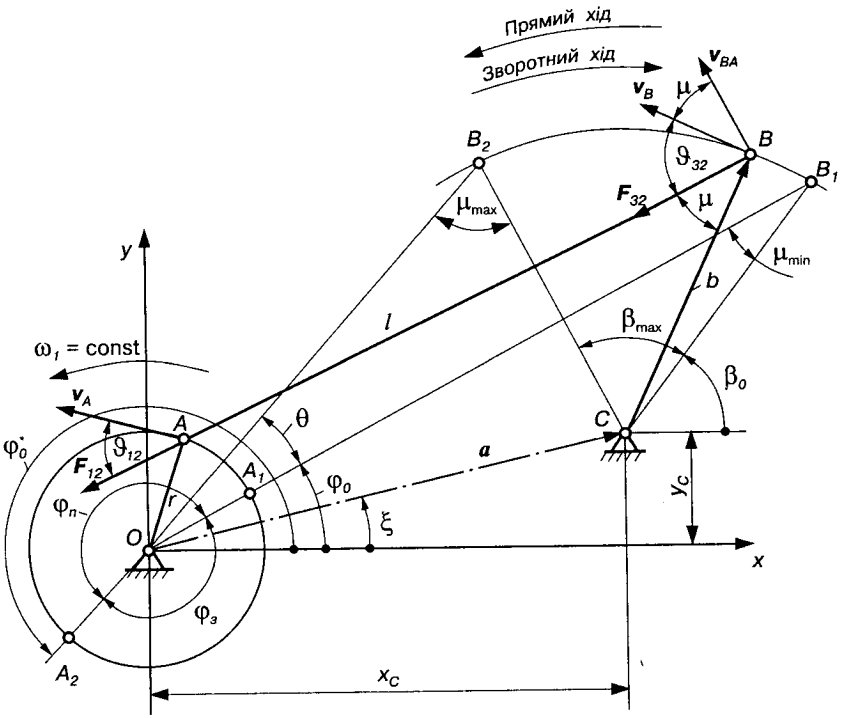


Рис. 12.13.

немо точки B_1 і B_2, які з'єднуємо з центром обертання кривошипа OA. Тобто будуємо крайні положення механізму, з яких знаходимо довжину відрізків OB_1 і OB_2, які в масштабі довжини μ_l визначають дійсну відстань точок B_1 і B_2 від точки O: $l_{OB_1} = (OB_1)\mu_l$, $l_{OB_2} = (OB_2)\mu_l$. Тоді, використавши (12.17), знайдемо довжину кривошипа $r = l_{OA}$ і довжину шатуна $l = l_{AB}$. Кути φ_0 і φ_0^*, які визначають положення кривошипа в крайніх положеннях механізму, визначають безпосередньо з рисунка.

Якщо положення центра обертання OA (відрізки x_C, y_C) не задане, то задача має нескінченну кількість розв'язків.

За ***аналітичним методом*** необхідно насамперед отримати залежності для визначення відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2}. Для розв'язання поставленої задачі можна рекомендувати такий алгоритм:

1) визначаємо величину і напрямок вектора $\boldsymbol{a}$ (див. рис. 12.13):

$$a = l_{OC} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2},\ \xi = \operatorname{arctg}(y_C / x_C),\ a \le \xi \le 2\pi; \quad (12.18)$$

2) знаходимо координати точок B_1 і B_2:

$$x_{B_1} = x_C + b\cos\beta_0,\ y_{B_1} = y_C + b\sin\beta_0;$$

$$x_{B_2} = x_C + b\cos(\beta_0 + \beta_{\max}),\ y_{B_2} = y_C + b\sin(\beta_0 + \beta_{\max}); \quad (12.19)$$

3) використовуючи залежності (12.17), знаходимо довжину r кривошипа OA і довжину l шатуна AB, попередньо визначивши довжину відрізків:

$$l_{OB_1} = \sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2},\ l_{OB_2} = \sqrt{x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2}; \quad (12.20)$$

4) знаючи координати точок B_1 і B_2 (12.19), знаходимо кути φ_0 і φ_0^*, які характеризують положення кривошипа у крайніх положеннях коромисла:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y_{B_1} / x_{B_1}),\ \varphi_0^* = \pi + \operatorname{arctg}(y_{B_2} / x_{B_2}). \quad (12.21)$$

Визначаємо кути повороту кривошипа за період прямого $\varphi_п$ і зворотного $\varphi_з$ ходу механізму:

$$\varphi_п = \varphi_0^* - \varphi_0,\ \varphi_з = 2\pi - \varphi_п.$$

На основі такого алгоритму можна скласти програму на ЕОМ, яка дає змогу обчислити параметри синтезу (r, l, φ_0, φ_0^*, $\varphi_п$, $\varphi_з$) при заданих x_C, y_C, b, β_0, $\beta_{\max}$.

Як зазначалось раніше, при проектуванні механізмів треба враховувати досить важливий параметр, що характеризує умови передавання сил і працездатність механізму — кут тиску ϑ, під яким розуміють гострий кут між вектором сили, прикладеної до веденої ланки, і вектором швидкості точки прикладання рушійної сили (див. рис. 12.13). Тертя і сили інерції при цьому поки що не враховують. Максимальний кут тиску не повинен бути більшим від допустимого значення: $\vartheta_{\max} \le \vartheta_{доп}$. Кут ϑ при передачі зусиль на ведену ланку відмічають на схемі механізму залежно від того, яка його ланка є ведучою. Якщо нею буде коромисло *3*, то сила $\boldsymbol{F}_{32}$ передається на нього під кутом ϑ_{32}, а якщо — кривошип *1*, то сила $\boldsymbol{F}_{12}$ складає з вектором швидкості $\boldsymbol{v}_A$ кут ϑ_{12}.

При ведучому кривошипі кут тиску ϑ_{12} двічі за цикл (коли кривошип і шатун розташовано на одній прямій) дістає мак-

симальне значення, яке дорівнює 90°. Це положення кривошип, як правило, проходить завдяки інерції обертових мас деталей, які жорстко зв'язані з кривошипом *1*. У зв'язку з цим при проектуванні механізму необхідно більше уваги звертати на значення кута ϑ_{32}, найбільшу величину якого визначають шляхом дослідження функції $\vartheta_{32} = \vartheta_{32}(\varphi)$ на максимум. У більшості випадків при інженерних розрахунках вважають, що рушійна сила F_{32} діє вздовж шатуна AB, тоді кут тиску ϑ можна виразити через кут передачі μ, під яким розуміють кут між напрямком абсолютної швидкості v_B точки B і відносної швидкості v_{BA} точки B у відносному русі навколо точки A. Напрямки цих швидкостей визначаються положеннями шатуна AB і коромисла BC ($v_B \perp BC$, $v_{BA} \perp AB$), а отже, кут передачі $\mu = \angle ABC$. Кут передачі може змінюватись в межах 0 — 180°. Тоді кут тиску $\vartheta = 90° - \mu$ (якщо $\mu \le 90°$) або $\vartheta = 180° - \mu$ (якщо $\mu \ge 90°$).

При таких припущеннях кут тиску, а відповідно й кут передачі, досягає екстремальних значень у положеннях, коли центр шарніра A розташовано на лінії стояка OC. Для спрощення задачі синтезу вважають, що екстремуми кута передачі отримують у крайніх положеннях механізму, як це показано на рис. 12.13. Щоб усунути заклинювання механізму, повинна виконуватись умова

$$\mu_{д.min} \le \mu \le \mu_{д.max}, \qquad (12.22)$$

де $\mu_{д.min}$, $\mu_{д.max}$ — відповідно найменші й найбільші допустимі значення кута передачі.

Нині відсутні які-небудь нормативи на допустимі значення кутів передачі. Звичайно, приймають $\mu_{д.min} = 30°$, тоді $\mu_{д.max} = 180° - \mu_{д.min} = 180° - 30° = 150°$. Тому умову (12.22) можна записати так:

$$30° \le \mu \le 150°. \qquad (12.22')$$

Кривошипно-повзунковий механізм. Синтез такого механізму здійснюють аналогічно розглянутому раніше. Повзун B (рис. 12.14) займає крайні положення у тих випадках, коли напрямки кривошипа OA і шатуна AB збігаються. Тобто повзун B займає крайнє праве положення тоді, коли кривошип і шатун витягуються в одну лінію OA_1B_1, крайнє ліве, коли вони складаються в лінію A_2OB_2. А тому залежності (12.16), (12.17) залишаються справедливими і для цього механізму.

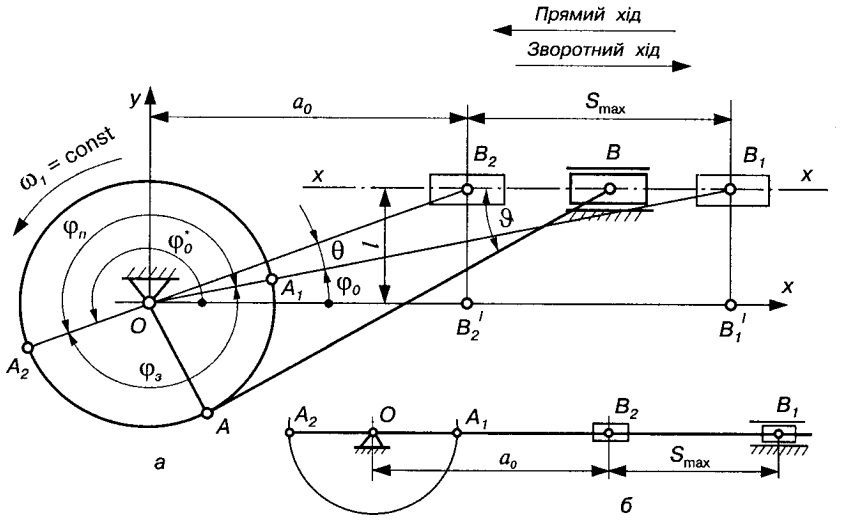


Рис. 12.14.

Для визначення відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2} розглянемо трикутники OB_1B_1' і OB_2B_2' (рис. 12.14, *а*), з яких маємо

$$l_{OB_1} = \sqrt{e^2 + (a_0 + S_{\max})^2}, \; l_{OB_2} = \sqrt{e^2 + a_0^2}, \qquad (12.23)$$

де e — зміщення напрямку руху повзуна відносно осі обертання кривошипа; a_0 — відрізок, який визначає найближче положення повзуна відносно центра обертання кривошипа; $S_{\max}$ — максимальний хід повзуна.

Положення кривошипа в крайніх положеннях повзуна B (у системі координат xOy) визначається кутами

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{e}{a_0 + S_m}, \; \varphi_0^* = \pi + \operatorname{arctg}\frac{e}{a_0}. \qquad (12.24)$$

Максимальний хід повзуна знайдемо з $\Delta OB_1B_1'$ і $\Delta OB_2B_2'$:

$$S_{\max} = \sqrt{l_{OB_1}^2 - e^2} - \sqrt{l_{OB_2}^2 - e^2}. \qquad (12.25)$$

Враховуючи, що $l_{OB_1} = r + l$, $l_{OB_2} = l - r$, залежність (12.25) записуємо у вигляді

$$S_{\max} = \sqrt{(r + l)^2 - e^2} - \sqrt{(l - r)^2 - e^2}. \qquad (12.26)$$

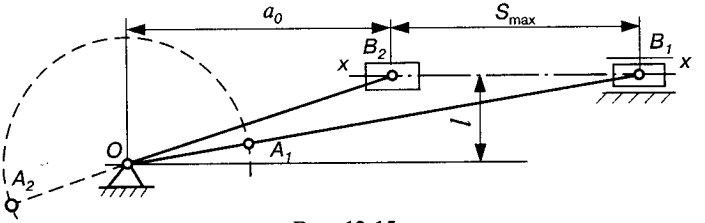


Рис. 12.15.

У центральному кривошипно-повзунковому механізмі ($e = 0$, рис. 12.14, *б*) $S_{max} = 2r$, тоді $r = S_{max}/2$, $\varphi_0 = 0°$, $\varphi_0^* = 180°$, $\varphi_п = \varphi_з = 180°$.

Приклад 12.1. Визначити невідомі розміри ланок кривошипно-повзункового механізму (див. рис. 12.14, *а*), якщо задані такі параметри: S_{max}, e, a_0.

Розв'язання. 1. На будь-якій лінії x—x в масштабі відкладаємо максимальний хід S_{max} повзуна B (рис. 12.15).

2. Відкладаємо відрізки e і a_0, які визначають положення центра обертання кривошипа OA.

3. З'єднуємо точку O з точками B_1 і B_2, тобто будуємо плани механізму в крайніх положеннях.

4. Вимірюємо або обчислюємо за формулами (12.23) довжини відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2}.

5. Знаходимо параметри синтезу $r, l, \varphi_0, \varphi_0^*$, використовуючи залежності (12.17) і (12.24).

Якщо при синтезі механізму не буде задано положення центра обертання кривошипа OA (параметри e, a_0), задача має нескінченне число розв'язків.

На основі наведеного алгоритму неважко скласти програму розрахунку розмірів механізму на ЕОМ.

Кривошипно-кулісний механізм. На рис. 12.16 зображено кривошипно-кулісний механізм. При обертанні кривошипа OA куліса BC здійснює коливальний рух. Положення куліси BC_1 і BC_2 будуть крайніми у тих випадках, коли її геометрична вісь — дотична до траєкторії точки A. Отже, в цих положеннях кривошип OA розташований перпендикулярно до куліси. Тоді, якщо відомі максимальний кут розмаху β_{max} куліси і міжосьова відстань $a = l_{OB}$, то з ΔOA_1B або ΔOA_2B знаходимо довжину кривошипа

$$r = a \sin(\beta_{max}/2). \qquad (12.27)$$

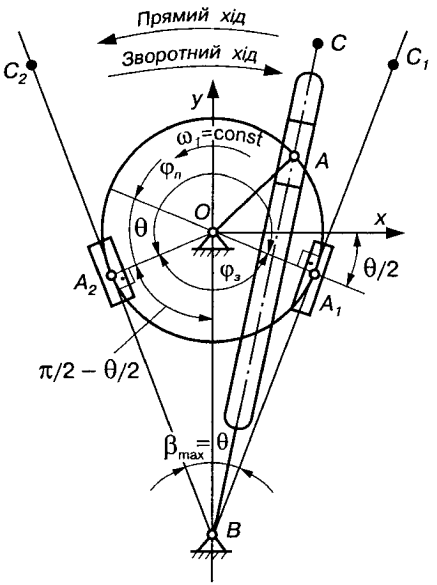


Рис. 12.16.

Якщо при синтезі механізму не буде задано положення центра обертання кривошипа OA (параметр a), то задача буде мати нескінченне число розв'язків.

Положення кривошипа в системі координат xOy, коли куліса займає крайні положення, визначається кутами

$$\varphi_0 = -\beta_{max}/2,\ \varphi_0^* = $$

$$= \pi + \beta_{max}/2.$$

Необхідно зазначити, що максимальний кут розмаху β_{max} куліси BC (рис. 12.16) дорівнює гострому куту θ між положеннями кривошипа в крайніх положеннях механізму. Ця рівність кутів ($\beta_{max} = \theta$) далі використовуватиметься при синтезі механізмів.

12.6. Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

Кривошипно-коромисловий механізм. Важливою характеристикою роботи механізму є ***коефіцієнт k зміни середньої швидкості вихідної ланки,*** під яким розуміють відношення середньої швидкості руху ланки під час зворотного (холостого ходу) ходу $v_з$ до її середньої швидкості під час прямого (робочого) ходу $v_п$.

Нехай рух коромисла BC (див. рис. 12.13) проти руху годинникової стрілки буде прямим (робочим) ходом, за рухом годинникової стрілки — зворотним (холостим). Середню швидкість ланки визначають як відношення максимального переміщення до часу $v_п = S_{max}/t_п$, $v_з = S_{max}/t_з$ або при обертовому русі $\omega_п = \beta_{max}/t_п$, $\omega_з = \beta_{max}/t_з$, де β_{max} — максимальний кут розмаху коромисла BC; $t_п$, $t_з$ — час (період) відповідно прямого і зворотного ходів вихідної ланки.

Тоді можна записати коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки (коромисла BC)

$$k = \frac{v_з}{v_п} = \frac{\omega_з}{\omega_п} = \frac{t_п}{t_з}. \qquad (12.28)$$

Отже, ***коефіцієнтом k можна вважати відношення періоду (часу) прямого ходу ланки до періоду її зворотного ходу.***

Коефіцієнт k дуже часто визначає продуктивність роботи механізму, а тому його інколи називають коефіцієнтом продуктивності.

Якщо кутова швидкість обертання кривошипа OA стала ($\omega_1 = \text{const}$), залежність (12.28) можна виразити через кути повороту кривошипа OA ($\varphi_1 = \omega_1 t$):

$$k = \varphi_п/\varphi_з, \qquad (12.29)$$

де $\varphi_п$, $\varphi_з$ — кут повороту кривошипа за період відповідно прямого і зворотного ходу коромисла.

Якщо позначити через θ кут між положеннями кривошипа OA і шатуна AB у крайніх положеннях коромисла BC (див. рис. 12.13), можна записати

$$\varphi_п = \pi + \theta, \text{ а } \varphi_з = \pi - \theta. \qquad (12.30)$$

Тоді

$$k = (\pi + \theta)/(\pi - \theta), \qquad (12.31)$$

звідки

$$\theta = \pi\,(k - 1)/(k + 1). \qquad (12.32)$$

З (12.31) видно, що коефіцієнт k однозначно визначається кутом θ, а тому, забезпечивши кут θ, який обчислюється за формулою (12.32), можна синтезувати механізм за заданим коефіцієнтом k.

При синтезі кривошипно-коромислового механізму, як правило, задаються коефіцієнтом k, максимальним кутом розмаху β_{max} коромисла BC і його довжиною $b = l_{BC}$, інші параметри синтезу ($r = l_{OA}$, $l = l_{AB}$, координати центра обертання куліси x_C, y_C) знаходять у процесі синтезу. Задачу можна розв'язати графічним або аналітичним методом.

За ***графічним методом*** порядок синтезу такий (рис. 12.17).

1. Із довільної точки C, вибраної за початок координат системи, будуємо крайні положення коромисла B_1C і B_2C симетрично відносно осі y, відклавши кут β_{max}.

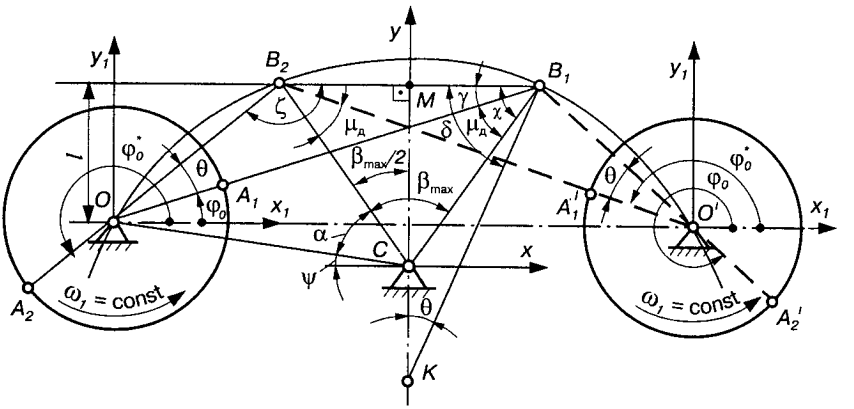


Рис. 12.17.

2. Використовуючи (12.32), знаходимо кут θ.

3. Через точку B_1 (або B_2) проводимо лінію B_1K під кутом $\delta = \pi/2 - \theta$ до лінії B_1B_2, а через точку M (середину хорди B_1B_2) — перпендикуляр MK до перетину з лінією B_1K. При цьому отримаємо при вершині K кут $\theta = \angle B_1KM$, центральний кут $B_1KB_2 = 2\theta$.

4. Проводимо через точки B_1 і B_2 коло з центром у точці K. Будь-яку точку цього кола можна вибрати за центр обертання кривошипа OA, оскільки будь-який вписаний кут B_1OB_2, що спирається на дугу B_1B_2, дорівнює куту θ, тобто забезпечує заданий коефіцієнт k (12.31). Проте не всі ці положення точки O забезпечують сприятливі значення кутів тиску ϑ або передачі μ.

5. Для забезпечення сприятливих кутів передачі, які обмежуються умовою (12.22), через точку B_1 (або B_2) під кутом $\mu_д = \mu_{д.min}$ до лінії B_1C (або B_2C) проводимо лінію OB_1 ($O'B_2$). Тоді дуга B_2O (або B_1O') буде геометричним місцем положень центра обертання кривошипа OA, при якому кути передачі μ будуть більше $\mu_{д.min}$ і менше $\mu_{д.max}$. У цьому випадку задача має багато розв'язків. Для однозначного розв'язку потрібні додаткові умови. Такими умовами можуть бути ексцентриситет e (найкоротша відстань між напрямком лінії, що проходить через крайні положення точки B, і центром обертання кривошипа), міжосьова відстань $a = l_{OC}$, довжина кривошипа OA або шатуна AB.

6. Визначивши положення центра обертання кривошипа (точку O або O' і вимірявши відрізки l_{OB_1} і l_{OB_2}, визначимо довжину кривошипа OA і шатуна AB за формулою (12.17), де

$l_{OB_1} = (OB_1)\mu_l$; $l_{OB_2} = (OB_2)\mu_l$ (μ_l — масштаб побудови на рис. 12.17). Положення кривошипа OA в крайніх положеннях коромисла BC визначаються кутами φ_0 і φ_0^* (12.21).

Порядок ***аналітичного синтезу***.

1. За формулою (12.32) знаходимо величину кута θ.

2. Знаючи довжину коромисла BC і його кут розмаху β_{max}, визначаємо довжину хорди B_1B_2:

$$l_{B_1B_2} = 2b\sin(\beta_{max}/2). \qquad (12.33)$$

3. Із ΔB_1MK визначаємо радіус кола, яке проведено через точки B_1 і B_2 з центром у точці K:

$$l_{KB_1} = l_{B_1M}/\sin\theta, \qquad (12.34)$$

де $l_{B_1M} = l_{B_1B_2}/2$.

4. Вибираємо положення центра обертання кривошипа OA_1. Тоді використовуючи теорему синусів, з ΔOB_1B_2 маємо

$$l_{OB_1} = l_{B_1B_2}\sin\varsigma/\sin\theta, l_{OB_2} = l_{B_1B_2}\sin\gamma/\sin\theta, \qquad (12.35)$$

де

$$\varsigma = \pi - \theta - \gamma; \gamma = \chi - \mu_д; \chi = (\pi - \beta_{max})/2. \qquad (12.36)$$

Тут положення центра обертання кривошипа вибрано так, що кут $\mu_{min} = \mu_д$, тобто знаходиться на лінії B_1O (або B_2O').

5. Визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB за формулами (12.17).

6. Координати точки O у системі координат xOy мають вигляд

$$x_0 = \pm a\cos\psi,\ y_0 = a\sin\psi, \qquad (12.36')$$

де

$$a = l_{OC} = \sqrt{l_{OB_1}^2 + b^2 - 2l_{OB_1}b\cos\mu_д};\ \psi = \frac{\pi - \beta_{max}}{2} - \alpha. \qquad (12.37)$$

З ΔOCB_2

$$\alpha = \arccos\frac{a^2 + b^2 - l_{OB_2}}{2ab}. \qquad (12.38)$$

У залежності (12.36) знак "+" приймають у тому випадку, коли точка O знаходиться справа, знак "–" — зліва від осі y.

7. Для визначення положень кривошипа OA у крайніх положеннях механізму використаємо координати точок $B_1(x_{B_{11}}, y_{B_{11}})$ і $B_2(x_{B_{12}}, y_{B_{12}})$ у системі координат x_1Oy_1, початок якої розмістимо в центрі обертання кривошипа OA, тобто в точці O. Тоді, використовуючи (12.21), маємо

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y_{B_{11}} / x_{B_{11}}),\ \varphi_0^* = \pi + \operatorname{arctg}(y_{B_{21}} / x_{B_{21}}), \quad (12.39)$$

де

$$x_{B_{11}} = b\sin(\beta_{\max}/2) - x_0;\ y_{B_{11}} = b\cos(\beta_{\max}/2) - y_0;$$
$$x_{B_{21}} = -b\sin(\beta_{\max}/2) - x_0;\ y_{B_{21}} = y_{B_{11}}. \quad (12.40)$$

Якщо центр обертання кривошипа OA збігається з точкою O', залежності (12.39) набувають вигляду

$$\varphi_0 = \pi + \operatorname{arctg}(y_{B_{11}} / x_{B_{11}}),\ \varphi_0^* = \operatorname{arctg}(y_{B_{21}} / x_{B_{21}}). \quad (12.41)$$

8. Знаходимо кути повороту кривошипа за періоди прямого і зворотного ходів механізму, які визначаються (12.30).

У тому випадку, коли задано зміщення e, задача синтезу розв'язується так.

1. Визначаємо координати точки O у системі координат xOy:

$$y_O = l_{MC} - e,\ x_O = \pm\sqrt{l_{B_1K}^2 - (y_0 - l_{KC})^2}, \quad (12.42)$$

де $l_{MC} = b\cos(\beta_{\max}/2)$; $l_{KC} = b\sin(\beta_{\max}/2 - \theta)/\sin\theta$.

У (12.42) знак "+" приймають, якщо точка O знаходиться справа, а знак "–" — зліва від осі y.

2. Визначаємо відстань точок B_1 і B_2 від центра обертання кривошипа:

$$l_{OB_1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta_{\max})},$$
$$l_{OB_2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}, \quad (12.43)$$

де $\alpha = \operatorname{arctg}(y_O / x_O)$; $a = \sqrt{x_O^2 + y_O^2}$.

3. Використовуючи залежності (12.17), визначаємо розміри кривошипа OA і шатуна AB.

4. Знаходимо кути φ_0 і φ_0^*, які визначають положення кривошипа в "мертвих" положеннях механізму:

$$\varphi_0 = \arcsin(e / l_{OB_1}),\ \varphi_0^* = \varphi_0 + \theta + \pi.$$

Якщо центр обертання кривошипа збігається з точкою O', маємо

$$\varphi_0 = \pi - \arcsin(e / l_{OB_2}),\ \varphi_0^* = 2\pi - \varphi_0.$$

5. Визначаємо кути повороту кривошипа за періоди прямого і зворотного ходів механізму, використовуючи (12.30).

Кривошипно-повзунковий механізм (див. рис. 12.14, *а*). Методика синтезу такого механізму майже не відрізняється від синтезу кривошипно-коромислового механізму (див. рис. 12.17). Для цього механізму справедливі залежності (12.16), (12.17), (12.28)—(12.32).

Графічний метод синтезу зображено на рис. 12.18. Нехай будуть задані такі параметри: максимальний хід $S_{\max}$, зміщення e і коефіцієнт k.

Розглянемо порядок синтезу.

1. На будь-якій лінії відкладаємо в масштабі максимальний хід повзуна B ($S_{\max} = l_{B_1B_2}$).

2. Визначаємо за формулою (12.32) кут θ.

3. Через точку B_1 або B_2 проводимо лінію B_1K або B_2K під кутом $\delta = \pi/2 - \theta$ до відрізка B_1B_2, а через точку M (середину відрізка B_1B_2) — лінію MK, яка перпендикулярна до цього самого відрізка B_1B_2. При цьому дістанемо $\angle MKB_1 = \theta$, а $\angle B_1KB_2 = 2\theta$.

4. Через точки B_1 і B_2 проводимо коло з центром у точці K, будь-яку точку якого можна вибрати за центр обертання O кривошипа, оскільки довільно вписаний кут B_1OB_2 дорівнює куту θ, тобто забезпечується заданий коефіцієнт k.

5. Проводимо лінію OO', паралельну лінії B_1B_2 і віддалену від неї на величину e. Точка O або O' може бути вибрана за центр обертання кривошипа.

6. З'єднавши точку O або O' з точками B_1 і B_2, знайдемо положення ланок механізму в крайніх положеннях повзуна B, а отже, і довжину відрізків l_{OB_1} і l_{OB_2}.

7. Використавши (12.17), визначимо довжину кривошипа і шатуна. Якщо в умові задачі не буде задане або вибране зміщення, то задача матиме багато розв'язків. Для однозначного розв'язку задачі необхідні додаткові умови, якими можуть бути: найбільше або найменше віддалення повзуна B відносно осі обертання кривошипа, зокрема відрізки a_0 або $a_0 + S_{\max}$; довжина кривошипа OA або шатуна AB.

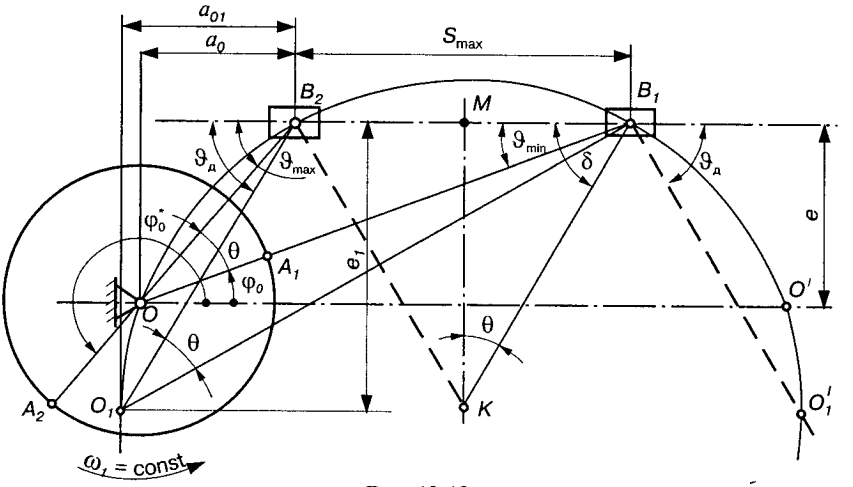


Рис. 12.18.

При синтезі таких механізмів необхідно також врахувати кути передачі μ або кути тиску ϑ. Тут зручніше користуватися кутом ϑ. Для попередження заклинювання механізму слід задовольнити умову $\vartheta_{max} \le \vartheta_д$ або (12.22), оскільки $\vartheta_д = \pi/2 - \mu_д$, де $\vartheta_д$ — допустиме значення кута тиску.

Граничне положення центра O_1 обертання кривошипа OA на дузі кола, що проходить через точки B_1 і B_2 з центром у точці K, знайдемо, якщо через точки B_2 і B_1 проведемо під кутом $\vartheta_д$ до лінії B_1B_2 промені B_2O_1 (або B_1O_1') до перетину з цим колом. Дуги B_2O_1 і B_1O_1' є геометричними місцями положень кривошипа OA, які забезпечують умову $\vartheta \le \vartheta_д$ і заданий коефіцієнт k. Вибравши центр обертання кривошипа, можна визначити параметри синтезу r, l, e, φ_0, φ_0^*, $\varphi_п$, $\varphi_з$ (див. параграф 12.5).

Механізм з коливальною кулісою. Синтез центрального чотириланкового кулісного механізму за коефіцієнтом k аналогічний його синтезу за заданими його крайніми положеннями (див. рис. 12.16), оскільки кут розмаху куліси $\beta_{max} = \theta$ визначає коефіцієнт k (12.31). Для цих механізмів залишаються справедливими формули (12.28)—(12.32). Тому, щоб не повторюватись, розглянемо синтез зміщеного кулісного механізму, який зображений на рис. 12.19. Вихідними даними, звичайно, бувають коефіцієнт k, міжосьова відстань $a = l_{OC}$ і зміщення $e = l_{BC}$. Тобто в цьому механізмі вісь паза куліси AB у крайніх положеннях буде

дотичною до кола радіуса e, а їх напрямки (A_1B_1 і A_2B_2) перетинаються у точці S. Лінія CS є бісектрисою кута B_1CB_2, а її довжина

$$l_{CS} = l_{BC}/\cos(\theta/2). \quad (12.44)$$

Отже, для синтезу цього механізму за заданим коефіцієнтом k необхідно з точки O провести дотичну до цього кола (радіуса l_{CS}) і знайти точку дотику S (для точнішого визначення точки дотику S провести перпендикуляр із точки C до лінії OS). Потім із точки S відкласти кути $\theta/2$ до лінії OS, які визначають крайні положення куліси A_1B_1 і A_2B_2. Кут θ визначають за (12.32). Відрізки OA_1 ($OA_1 \perp A_1S$) або OA_2 ($OA_2 \perp A_2S$) визначають довжину кривошипа в масштабі μ_l, тобто

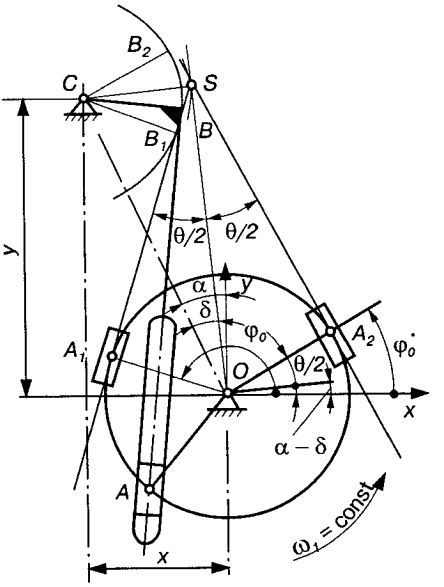


Рис. 12.19.

$$r = l_{OS}\sin(\theta/2), \quad (12.45)$$

де $l_{OS} = \sqrt{l_{OC}^2 - l_{CS}^2}$, або враховуючи, що $a = l_{OC} = \sqrt{x^2 + y^2}$, записуємо

$$l_{OS} = \sqrt{x^2 + y^2 - l_{CS}^2}. \quad (12.46)$$

Положення кривошипа OA у крайніх положеннях куліси (система координат xOy) визначається залежностями

$$\varphi_0^* = \alpha - \delta + \theta/2,\ \varphi_0 = \varphi_0^* + \varphi_з, \quad (12.47)$$

де

$$\alpha = \operatorname{arctg}(x/y);\ \delta = \arcsin(l_{CS}/a). \quad (12.48)$$

Кути $\varphi_п$, $\varphi_з$ обчислюють за формулою (12.30).

Задачу можна розв'язати як графічно, так і аналітично, застосувавши вказаний порядок синтезу.

12.7. Приклади синтезу шестиланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та максимальним ходом вихідної ланки

Методи синтезу чотириланкових механізмів за коефіцієнтом k і ходом S_{max} або β_{max} вихідної ланки можна використати для синтезу шестиланкових механізмів. Розглянемо деякі приклади синтезу таких механізмів.

Шестиланковий механізм з коливальною кулісою (рис. 12.20, *а*, *б*). Такий механізм широко використовують у різних машинах, зокрема в металорізальних верстатах, де потрібно забезпечити високі коефіцієнти k, регулювати хід вихідної ланки. Він перетворює обертовий рух кривошипа *1* у зворотно-поступальний рух повзуна *5*. При цьому середня швидкість $v_з$ повзуна при зворотному русі більша в k разів за середню швидкість $v_п$ прямого ходу. Вихідними даними, звичайно, бувають максимальний хід S_{max} вихідної ланки *5* і коефіцієнт зміни його середньої швидкості $k = v_з/v_п$. Наприклад, у стругальних і довбальних верстатах деталь обробляється в одному напрямку із заданою швидкістю різання, а холостий (зворотний) хід різального інструменту здійснюється з більшою середньою швидкістю; у цьому випадку коефіцієнт $k > 1$.

Рекомендується такий порядок синтезу.

1. Визначаємо кут θ за (12.32).

2. Із довільної точки B проводимо два промені під кутом $\theta/2$ до лінії OB, які визначатимуть два крайні положення куліси *3*.

3. Вибравши міжосьову відстань $a = l_{OB}$, з точки O проводимо перпендикуляри OA_1 і OA_2 до крайніх положень куліси.

4. Із ΔOA_1B визначаємо за (12.27) довжину кривошипа OA.

5. Оскільки довжина хорди C_1C_2 дорівнює максимальному ходу повзуна *5* (як протилежні сторони паралелограма $C_1C_2D_2D_1$), довжину куліси можна визначити з ΔBC_0C_1:

$$l_{BC} = \frac{S_{max}}{2\sin(\theta/2)}. \qquad (12.49)$$

6. Обчислюємо довжину шатуна *4*. Для забезпечення найменших кутів тиску при передачі зусиль від ланки *4* до повзуна *5* доцільно вибрати таке положення осі xx, щоб вона ділила стрілку сегмента f навпіл. Тоді з прямокутного ΔC_1ND_1 довжина шатуна *4*

$$l_{CD} \geq f/(2\sin\vartheta_д), \qquad (12.50)$$

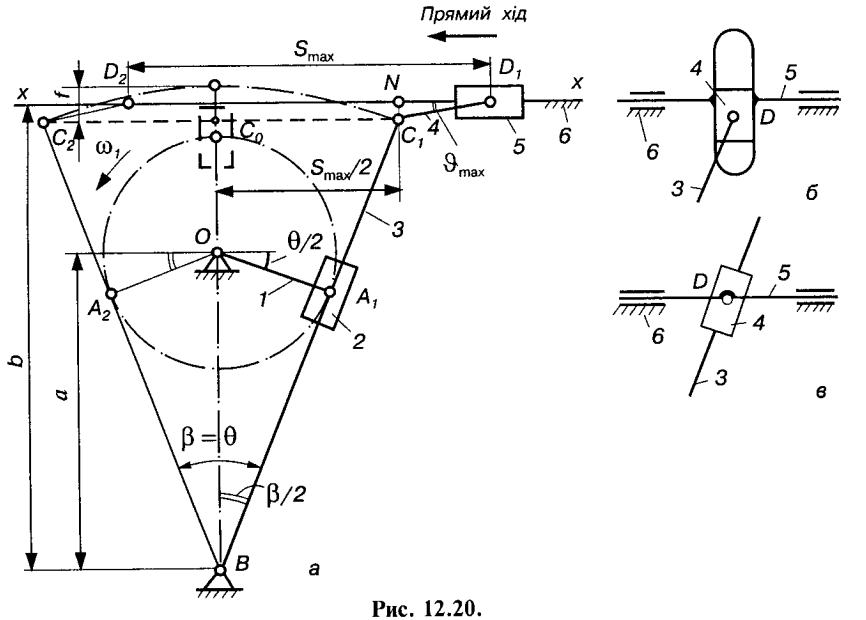


Рис. 12.20.

де $f = l_{BC}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$. У цьому випадку буде забезпечена умова $\vartheta_{max} \le \vartheta_д$, оскільки кут передачі сили від кулісного каменю (повзуна) *2* до куліси *3* $\vartheta_{32} = 0$, що є перевагою кулісних механізмів.

7. Визначаємо відстань b між центром обертання куліси і напрямною повзуна *5* (рис. 12.20, *а*) за формулою

$$b = l_{BC} - f/2. \qquad (12.51)$$

Використовують також інші варіанти приєднаної групи, наприклад, групи II класу IV виду (рис. 12.20, *в*) або V виду (рис. 12.20, *б*). За кутами тиску другий варіант кращий від інших, оскільки $\vartheta_{54} = 0$.

Шестиланковий механізм з обертовою кулісою. На рис. 12.21 зображено схему розповсюдженого варіанта такого механізму. Вихідними даними можуть бути: довжина r кривошипа OA, максимальний хід S_{max} повзуна *5* і коефіцієнт зміни середньої швидкості $k > 1$.

Прямий хід повзуна *5* здійснюється при повороті кривошипа *1* на кут $\varphi_п = \pi + \theta$, зворотний — на кут $\varphi_з = \pi - \theta$. Тому при $\omega_1 =$ = const, маючи заданий коефіцієнт k, можна визначити за форму-

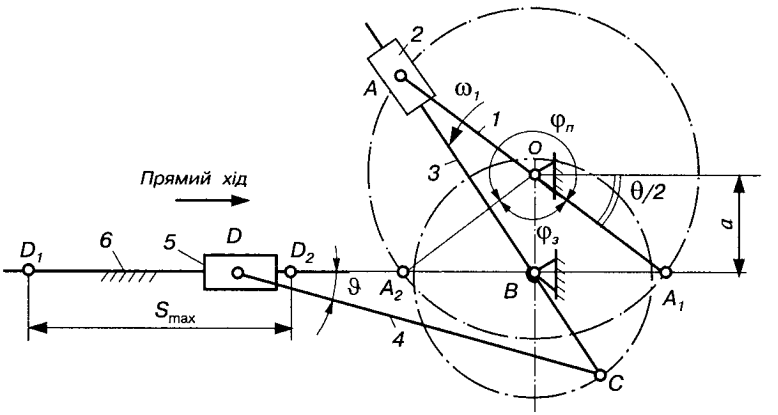


Рис. 12.21.

лою (12.32) кут θ. Тоді, розглянувши ΔBOA_1, знайдемо міжосьову відстань $a = r\sin(\theta/2)$, звичайно, для механізмів даного типу $r/a \geq 2$.

Крайні положення точки D_1 і D_2 повзуна D визначаються положеннями точок A_1 і A_2, коли напрямки куліси *3* і шатуна *4* збігаються. Тому довжина кривошипа BC $l_{BC} = S_{max}/2$.

Довжина шатуна *4* має бути такою, щоб максимальний кут тиску $\vartheta = \vartheta_{54}$ не перевищував допустиме значення $\vartheta_д$. Максимальний кут тиску ϑ буде в тому випадку, коли куліса *3* займе вертикальне положення, тоді $l_{CD} \geq l_{BC}/\sin\vartheta_д$.

Не варто збільшувати довжину шатуна l_{CD}, оскільки це призводить до збільшення габаритів усього механізму. Щоб дістати найменших зусиль у кулісній парі *2–3* (камінь—куліса) бажано вибирати довжину кривошипа *1* найбільшою, проте треба мати на увазі, що це також веде до збільшення габаритів механізму.

12.8. Синтез приєднаних до шатуна структурних груп II класу за заданим коефіцієнтом зміни середньої швидкості й максимальним ходом вихідної ланки

Методика синтезу за коефіцієнтом k і максимальним ходом S_{max} або β_{max} чотириланкових механізмів викладена раніше (див. параграфи 12.5, 12.6). Синтез багатоланкових важільних механізмів за цими параметрами не викликає особливих утруднень, коли структурні групи приєднуються до ланок, які здійснюють прості рухи (поступальні, обертові), оскільки при цьому по-

рівняно легко знайти крайні положення механізму (див. параграф 12.7). Якщо структурна група приєднується до шатуна базового (основного) механізму, наприклад чотириланкового, її синтез ускладнюється. Зараз розміри ланок приєднаної групи, звичайно, знаходять методом проб. У [25, 27] викладено методику проектування приєднаних груп II класу I і II видів.

Розглянемо приклад синтезу шестиланкового механізму за заданими коефіцієнтом k і максимальним ходом повзуна S_{max} (рис. 12.22).

Для розв'язання поставленої задачі необхідно, щоб були задані, крім коефіцієнта k і ходу S_{max}, одне з положень кривошипа φ_1 або φ_2 в крайніх положеннях вихідної ланки та вибрана кінематична схема базового механізму. Коефіцієнт k, кути φ_1 і φ_2 визначаються циклограмою роботи механізму, під якою розуміють діаграму, на якій відображена програма роботи механізму у функції кута повороту головного вала машини (див. параграф 15.4). За базовий механізм можна вибрати шарнірний чотириланковий кривошипно-повзунний, кривошипно-кулісний або інший механізм, у складі якого є ланка, що здійснює складний плоский рух (шатун).

Нехай базовим механізмом буде кривошипно-повзунний механізм (тип базового механізму не впливає на методику синтезу приєднаної до нього структурної групи), у точці C якого (рис. 12.22, *а*) приєднується група II класу I або II виду.

Знаючи коефіцієнт k і, наприклад, кут φ_1, що визначає положення кривошипа на початку прямого (робочого) ходу коромисла DE, можна визначити кут

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_п, \qquad (12.52)$$

де $\varphi_п$ — кут повороту кривошипа за час прямого ходу, $\varphi_п = \pi + \theta$. Кут θ визначається за формулою (12.32). Якщо $\varphi_п < \varphi_з$, то $\theta < 0$.

Визначивши кути φ_1 і φ_2, знайдемо положення ланок і різних точок базового механізму, а отже, і точки C приєднання поводка CD на початку C_1 і в кінці C_2 прямого ходу. Приєднана група CDE визначається розмірами поводка CD, коромисла DE і положенням центра нерухомого шарніра E.

Координати шарніра E (x_E, y_E) і довжину коромисла DE можна знайти, якщо визначити крайні положення шарніра D (точки D_1 і D_2) і кут розмаху β_{max} коромисла DE.

Коромисло DE займає крайні положення у тих випадках, коли поводок CD стає нормаллю до шатунної кривої точки C,

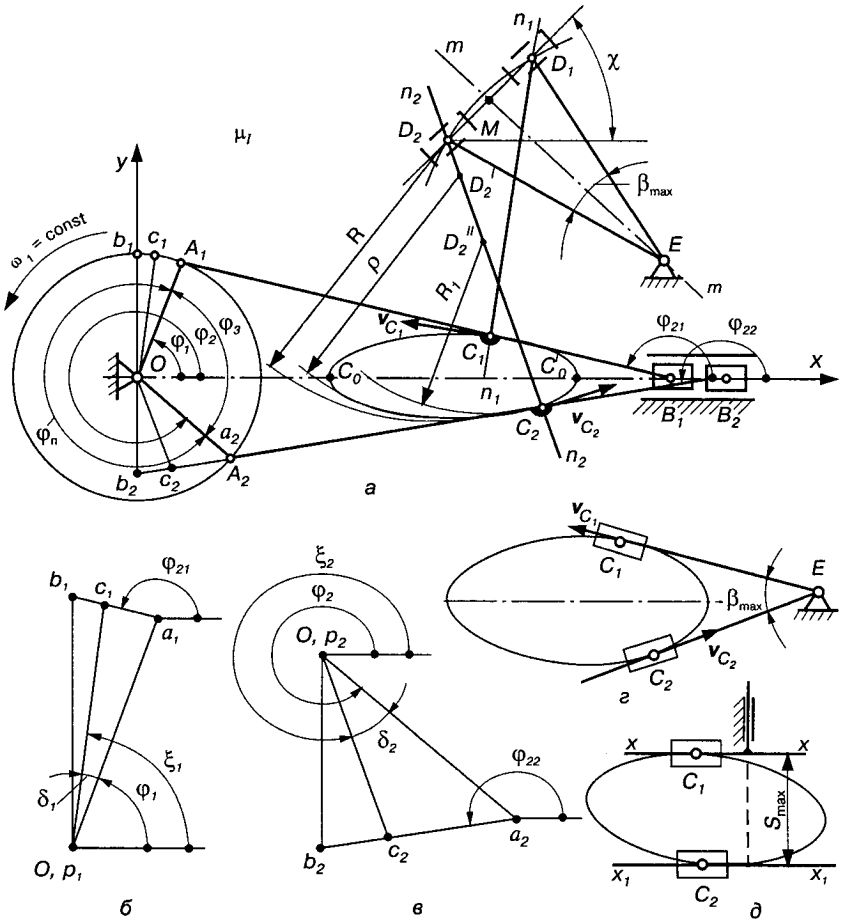


Рис. 12.22.

тобто збігається з нормаллю $n_1—n_1$, проведеною через точку C_1 до траєкторії точки C, або з нормаллю $n_2—n_2$, проведеною через точку C_2 до цієї самої траєкторії. Оскільки швидкість точки C у будь-який момент руху напрямлена по дотичній до її траєкторії, то $n_1—n_1 \perp \boldsymbol{v}_{C_1}$, $n_2—n_2 \perp \boldsymbol{v}_{C_2}$, де $\boldsymbol{v}_{C_1}$, $\boldsymbol{v}_{C_2}$ — вектори абсолютних швидкостей точки C у відповідних положеннях механізму. Тому, щоб знайти положення поводка CD у крайніх положеннях вихідної ланки (коромисла DE), необхідно знати напрямки векторів швидкості C у цих самих положеннях.

Напрямки швидкості точки C можна визначити графічно, побудувавши плани швидкостей базового механізму, які визначаються кутами φ_1 і φ_2, та аналітично, склавши відповідні рівняння. Більш простий і наочний графічний метод.

Довжину поводка CD вибирають з конструктивних міркувань. Проте, якщо вибрати його меншим радіуса ρ кривизни шатунної кривої у точці C_2, не виконуватиметься заданий коефіцієнт k, оскільки $l_{CD} = R_1 < \rho$ (див. рис. 12.22, *а*) і точка C_2 не є найбільш віддаленою точкою шатунної кривої від точки D_2'', тобто ця точка не буде крайнім нижнім положенням шарніра D. При $l_{CD} = \rho$ дістанемо механізм з вистоєм вихідної ланки. Отже, довжину поводка CD потрібно вибирати дещо більшою максимального радіуса кривизни траєкторії точки C на її віддаленій від шарніра D ділянці (у даному випадку — на нижній). Зазначимо, що, змінюючи довжину поводка CD, можна деякою мірою регулювати закон руху вихідної ланки, змінювати положення центра шарніра E, довжину коромисла DE.

На основі викладеного рекомендується такий порядок синтезу приєднаної групи (***графічний метод***).

1. За заданою циклограмою роботи механізму визначимо початок періоду прямого ходу, тобто кут φ_1.

2. За заданим коефіцієнтом k знаходимо кут $\varphi_п$ повороту кривошипа за період прямого ходу:

$$\varphi_п = 2\pi k/(1 + k). \qquad (12.53)$$

Тоді положення кривошипа у другому крайньому положенні механізму визначають за (12.52).

3. Побудуємо плани базового механізму, які зумовлені кутами φ_1 і φ_2.

4. Для цих двох положень базового механізму в довільному масштабі побудуємо плани швидкостей (рис. 12.22, *б, в*), за допомогою яких знайдемо напрямки векторів швидкостей точок C_1 і C_2. Плани швидкостей зручно будувати повернутими на 90° безпосередньо на кінематичній схемі механізму (рис. 12.22, *а*), прийнявши, що довжина вектора швидкості точки A дорівнює відрізку OA. Тоді відрізки Oc_1 і Oc_2 паралельні відповідним положенням поводка C_1D_1 і C_2D_2.

5. Зазначимо, що приєднану групу за заданим коефіцієнтом k можна спроектувати лише тоді, коли точки C_1 і C_2 розташовані з різних боків відрізка CC' (рис. 12.23), який з'єднує найближчу C і

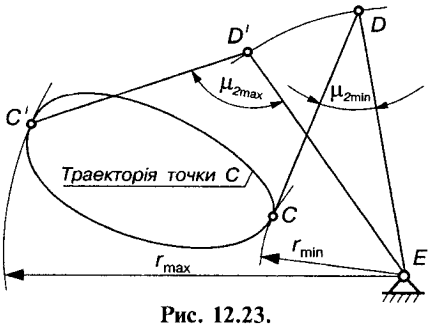


Рис. 12.23.

найдальшу C' точки шатунної кривої від центра обертання E коромисла DE. Якщо ця умова не виконується, необхідно вибрати інші розміри базового механізму (наприклад, змістити точку C на шатуні AB, напрямну повзуна B відносно центра обертання кривошипа тощо) або вибрати інший базовий механізм.

6. Проведемо через точки C_1 і C_2 лінії (рис. 12.22, *а*), паралельні відповідно відрізкам Oc_1 і Oc_2, на яких відкладемо вибрану довжину шатуна CD і за допомогою цього знайдемо точки D_1 і D_2. Відрізки C_1D_1 і C_2D_2 відкладемо в той чи інший бік від шатуна AB (у даному випадку вверх або вниз) залежно від передбачуваного розташування шарніра E і напрямку обертання вихідної ланки за період прямого ходу.

7. З'єднаємо між собою точки D_1 і D_2 відрізком, через середину M якого проведемо перпендикуляр $m—m$. Лінія $m—m$ є геометричним місцем розташування центра шарніра E, який задовольняє заданий коефіцієнт k. Величина кута розмаху β_{max} коромисла DE залежатиме від положення точки E на лінії $m—m$. Якщо кут β_{max} задано, довжина коромисла DE

$$b = l_{DE} = \frac{l_{D_1D_2}}{2\sin(\beta_{max}/2)}. \qquad (12.54)$$

У випадку приєднання групи II виду лінія D_1D_2 визначає положення напрямної повзуна D (рис. 12.23, *а*).

За ***аналітичним методом*** порядок синтезу майже такий самий.

1. Визначимо координати точок C_1 і C_2 та проекції їх аналогів швидкостей у системі координат xOy, використавши рівняння

$$\begin{aligned} x_{C_i} &= x_{A_i} + l_{AC_i}\cos\varphi_{2i},\ y_{C_i} = y_{A_i} + l_{AC_i}\sin\varphi_{2i};\\ x'_{C_i} &= x'_{A_i} - l_{AC_i}\varphi'_{2i}\sin\varphi_{2i},\ y'_{C_i} = y'_{A_i} + l_{AC_i}\varphi'_{2i}\cos\varphi_{2i}, \end{aligned} \qquad (12.55)$$

де $i = 1, 2$; x_A, y_A; x'_{A_i}, y'_{A_i} — відповідно координати та аналоги проекцій швидкості точки A; φ_{2i} — кут, який визначає положення шатуна AB; φ'_{2i} — аналог його кутової швидкості.

2. Знайдемо значення кутів, які визначають напрямки векторів швидкості:

$$\alpha_i = \operatorname{arctg}(y'_{C_i} / x'_{C_i}), \qquad (12.56)$$

де $0 \le \alpha_i \le 2\pi$.

Тоді кути нахилу поводка CD (рис. 12.22, *а—в*)

$$\xi_1 = \alpha_1 \mp \pi/2, \xi_2 = \alpha_2 \pm \pi/2, \qquad (12.57)$$

верхні знаки вибирають, якщо точка D знаходиться над траєкторією точки C, а нижні — під нею.

3. Виберемо довжину шатуна CD і розташування шарніра D (верхнє або нижнє). Тоді координати точок D_1 і D_2 мають вигляд

$$\begin{aligned} x_{D_1} &= x_{C_1} \pm l_{CD}\cos\xi_1, \quad y_{D_1} = y_{C_1} \pm l_{CD}\sin\xi_1; \\ x_{D_2} &= x_{C_2} \mp l_{CD}\cos\xi_2, \quad y_{D_2} = y_{C_2} \pm l_{CD}\sin\xi_2. \end{aligned} \qquad (12.58)$$

4. Обчислимо відстань між точками D_1 і D_2:

$$S_1 = \sqrt{(x_{D_1} - x_{D_2})^2 + (y_{D_1} - y_{D_2})^2}. \qquad (12.59)$$

5. Визначимо довжину b коромисла DE, використавши (12.54).

6. Знайдемо координати точки M, яка лежить по середині відрізка D_1D_2:

$$x_M = (x_{D_1} + x_{D_2})/2, \quad y_M = (y_{D_1} + y_{D_2})/2. \qquad (12.60)$$

Тоді координати точки E можна визначити, використавши такі залежності:

$$x_E = x_M \pm l_{ME}\cos(\chi - \pi/2); \; y_E = y_M \pm l_{ME}\sin(\chi - \pi/2), \qquad (12.61)$$

де

$$l_{ME} = b\cos(\beta_{\max}/2); \quad \operatorname{tg}\chi = (y_{D_1} - y_{D_2})/(x_{D_1} - x_{D_2});$$

знак "+" приймають тоді, коли шарнір розташовано зліва, а знак "—" — відповідно справа від лінії D_1D_2.

Спроектований механізм за заданим коефіцієнтом k і кутом розмаху $\beta_{\max}$ необхідно перевірити на заклинювання, тобто встановити, чи буде кут передачі руху $\mu_2 = \angle CDE$ у допустимих межах. Кут передачі μ_2 (рис. 12.23) приймає екстремальні значення ($\mu_{2\min}$, $\mu_{2\max}$) у положеннях найменшого $r_{\min}$ і найбільшого $r_{\max}$ віддалення траєкторії точки C від нерухомого шарніра E.

У випадку приєднання до базового механізму групи II класу III виду (див. рис. 12.22, *г*) центр обертання куліси *5* повинен знаходитися в точці перетину напрямків векторів швидкості точок C_1 і C_2.

Отже, коефіцієнт k при заданому куті φ_1 або φ_2 і траєкторії точки C однозначно визначає положення центра E обертання куліси CE та її кут розмаху $\beta_{max} = |\xi_2 - \pi - \xi_1|$.

І нарешті, якщо приєднана група II класу V виду (див. рис. 12.22, *д*), то можливості проектування механізмів за заданим коефіцієнтом k і ходом вихідної ланки значно обмежені, оскільки положення напрямної $x—x$ у крайніх положеннях мають бути дотичними до траєкторії точки C і паралельними між собою. Таку задачу найпростіше розв'язувати графічним методом, побудувавши траєкторію точки C, і задавши кут φ_1 (або φ_2), знайти положення дотичної до траєкторії в точці C_1. Тоді, провівши лінію $x_1 - x_1 \| x - x$, дотичну з іншого боку до шатунної кривої, знайдемо точку дотику C_2, яка визначить друге крайнє положення повзуна *5*. Графічно визначають усі параметри синтезу: φ_2, k, S_{max}.

Якщо траєкторія точки C має угнуті ділянки, то задача синтезу дещо ускладнюється, з'являються додаткові ходи вихідної ланки, точка C_2 може не визначати крайні положення вихідної ланки. Тому при синтезі таких механізмів слід спочатку дослідити траєкторію точки під'єднання групи.

12.9. Синтез механізмів методами оптимізації з використанням ЕОМ

Будь-яку задачу синтезу можна звести до задачі знаходження таких параметрів синтезу, за яких цільова функція (критерій оптимізації) має мінімальне значення і при цьому виконуються прийняті обмеження. Якщо оптимальне (найкраще) значення цільової функції відповідає її максимальному значенню, то, використовуючи обернені величини, завжди можна звести задачу пошуку максимуму до задачі знаходження мінімуму.

При невеликій кількості параметрів синтезу умови мінімуму цільової функції можна отримати на основі відомих умов екстремуму функції кількох змінних. При великій кількості параметрів ця задача аналітично не розв'язується і доводиться знаходити параметри перебиранням (інколи випадковим, інколи

впорядкованим) різних варіантів механізму. Можливості такого перебирання практично з'явились тільки після створення ЕОМ.

Домовимось називати оптимізацію (у синтезі механізмів) визначення вихідних параметрів синтезу з умови мінімуму цільової функції при виконанні прийнятих обмежень. Ця задача відома також під назвою нелінійного програмування.

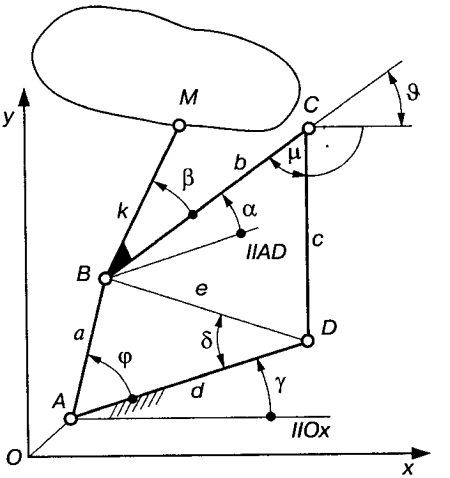


Рис. 12.24.

Для прикладу розглянемо шарнірний чотириланковий механізм (рис. 12.24), в якому точка M на шатуні *2* повинна описувати траєкторію (шатунну криву), що мало відрізняється від заданої кривої $y = y(x)$. Вихідними параметрами синтезу тут можуть бути сталі параметри, які входять у рівняння шатунної кривої. Максимальна кількість цих параметрів для даного механізму — дев'ять $(a,b,c,d,k,\beta,x_A,y_A,\gamma)$. Усі вихідні параметри синтезу повинні бути незалежними. Наприклад, координати точки D залежать від координат точки A, відстані d, кута γ і тому не входять в перелічені раніше параметри.

Щоб дістати задані властивості механізму, треба задовольнити багато, часто суперечливих, умов, пов'язаних із призначенням механізму, його експлуатацією, технологією виготовлення тощо. Але з усіх умов, звичайно, можна вибрати одну основну, в даному випадку такою умовою є отримання заданої траєкторії. А тому цільову функцію можна виразити у вигляді відхилення шатунної кривої точки M від заданої кривої:

$$\Delta_{\max} = |y_M - y|_{\max}, \qquad (12.62)$$

де y_M — ордината шатунної кривої точки M при деякому значенні абсциси x; y — ордината заданої кривої при цьому самому значенні абсциси x.

Виразити цільову функцію (12.62) в явному вигляді через параметри синтезу не вдається. Проте можна вказати алгоритм його обчислення, тобто послідовність обчислень, щоб здобути

Δ_{max} для даної комбінації параметрів синтезу. Із ΔABD знайдемо довжину діагоналі BD шарнірного чотириланкового механізму і її кут нахилу:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}, \quad \delta = \arcsin\left(\frac{a}{e}\sin\varphi\right). \tag{12.63}$$

Із ΔBCD визначимо кут ϑ (або μ), тобто кут тиску на коромисло CD з боку шатуна BC (якщо вважати, що сила, яка діє на коромисло, напрямлена вздовж осі шатуна):

$$\vartheta = \arcsin\frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}, \tag{12.64}$$

і кут нахилу шатуна BC до стояка

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{e}\cos\vartheta\right) - \delta. \tag{12.65}$$

Із рівнянь проекцій контуру $OABM$ на координатні осі знайдемо координати точки M:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + a\cos(\varphi + \gamma) + k\cos(\alpha + \beta + \gamma); \\ y_M &= y_A + a\sin(\varphi + \gamma) + k\sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned} \tag{12.66}$$

Після обчислення координат x_M і y_M при різних кутах φ визначимо ординату y з рівняння заданої кривої, прийнявши $x = x_M$, і модуль різниці ординат шатунної кривої і заданої: $\Delta = |y_M - y|$.

Максимальне значення Δ, яке визначається при різних кутах φ, і є максимальним відхиленням від заданої кривої, тобто цільовою функцією шуканих параметрів синтезу.

Цільова функція — математичний вираз основної умови синтезу. Якщо виділити основну умову синтезу важко, то складають кілька цільових функцій і шукають компромісний варіант розв'язання, при якому перевага віддається одній з них.

Додаткові умови синтезу в даному випадку можна виразити такими трьома обмеженнями.

1. Обмеження на довжину ланок. Для того щоб у механізмі не було дуже великих або дуже малих ланок, вибирають чотири додатні числа, які задовольняють умови

$$l_1 < l_2 < l_3 < l_4, \quad l_4 / l_1 < m. \tag{12.67}$$

Із цієї четвірки чисел можна в будь-якій комбінації вибирати довжини ланок і у всіх цих комбінаціях жодна ланка не буде довшою інших більше ніж у m разів.

2. Кривошипно-коромисловий механізм повинен забезпечити умову існування кривошипа, згідно з якою у такому механізмі кривошип є найменшою ланкою і сума довжин найменшої і найбільшої ланок менше суми двох інших ланок. Звідси виходить, що до умови (12.67) додається ще одна умова:

$$l_1 + l_4 < l_2 + l_3. \tag{12.68}$$

Якщо виконати умови (12.67) і (12.68), то для отримання кривошипно-коромислового механізму треба прийняти

$$a = l_1, \tag{12.69}$$

а решту довжин ланок b, c і d можна вибирати у будь-якому порядку з чисел l_2, l_3 і l_4.

3. Кут тиску на коромисло з боку шатуна має бути меншим допустимого значення $\vartheta_д$:

$$\vartheta < \vartheta_д. \tag{12.70}$$

При синтезі напрямних важільних механізмів звичайно приймають $\vartheta_д = 45 \div 60°$.

Значення кута тиску при різних φ знаходять за формулою (12.64) після підбору довжин ланок, які задовольняють умови (12.68)—(12.70). Якщо найбільше значення кута ϑ не задовольняє умову (12.70), треба вибрати нову комбінацію параметрів a, b, c і d.

Для розв'язання поставленої задачі використовують методи оптимізації. Всі відомі методи оптимізації можна поділити у три групи пошуку: випадковий, спрямований і комбінований. Практичне використання кожного з цих методів пояснимо на прикладі синтезу шарнірного чотириланкового механізму за заданою траєкторією точки шатуна.

Випадковий пошук. Метод випадкового пошуку, який ще називають методом Монте-Карло, базується на тому, що при одному й тому самому числі випробувань (обчислень) імовірність отримання розв'язку, близького до оптимального, при випадковому пошуку більша, ніж при послідовному перебиранні через рівні інтервали зміни окремих параметрів.

У даному прикладі розв'язання задачі синтезу з використанням випадкового пошуку на ЕОМ виконується у такій послідовності.

1. Довільно вибирають вихідні параметри синтезу з набору випадкових чисел. Перевіряють обмеження умов (12.67)—(12.70).

2. За значеннями параметрів синтезу, які задовольняють обмеження, обчислюють цільову функцію (12.62), яку заносять у пам'ять ЕОМ разом з відповідними параметрами синтезу.

3. Вибирають інші випадкові значення параметрів синтезу, перевіряють обмеження і обчислюють цільову функцію Δ_{max}. Якщо нове значення менше отриманого раніше, то його заносять у пам'ять машини разом з відповідними параметрами синтезу, а попередні значення скидають.

Указані етапи повторюють доти, поки Δ_{max} не дорівнюватиме допустимому значенню або ж практично перестане зменшуватись.

Метод випадкового пошуку досить простий, дає змогу оглянути всю область можливих значень параметрів синтезу, але вимагає дуже великого обсягу обчислень. Кількість варіантів, які треба обчислити, інколи досягає десяти і навіть сотні тисяч.

Спрямований пошук. Оскільки сучасні ЕОМ дають змогу порівняти велику кількість варіантів механізмів, слід намагатися знизити трудомісткість обчислень з метою зменшення затрат на проектування механізму, яке можна досягнути використанням спрямованого пошуку, тобто такого пошуку невідомих параметрів синтезу, при якому перехід від однієї комбінації параметрів до іншої здійснюється не випадково, а в напрямку, що відповідає зменшенню цільової функції. Численні методи спрямованого пошуку відрізняються один від одного способами вибору напрямку, за яким треба переходити від одних значень параметрів до інших. При розв'язанні задач синтезу механізмів інколи досить використати найпростіший спосіб, який дає наступну послідовність обчислень.

1. Як і при випадковому пошуку, довільно вибирають першу комбінацію шуканих параметрів $(a_1, b_1, c_1, ...)$, перевіряють обмеження та обчислюють цільову функцію.

2. Змінюють один з параметрів синтезу, наприклад $a = a_1$, на малу величину Δa. Залишаючи всі інші параметри незмінними, обчислюють цільову функцію при зміненому значенні параметра $a = a_1 + \Delta a$. Якщо цільова функція Δ_{max} зменшилась, то вибраний напрямок зміни параметра a правильний, і в пам'ять машини заносять нові значення параметра $a = a_1 + \Delta a$ і цільової функції Δ_{max}. Якщо ж при цьому Δ_{max} збільшилась, треба змінити знак приросту Δa на зворотний, тобто обчислити Δ_{max} при

$a = a_1 - \Delta a$. Тоді Δ_{max} або зменшиться, або залишиться такою самою, якщо досягнуто мінімуму за параметром a.

3. Послідовно змінюють усі параметри. Правильний напрямок зміни кожного параметра визначають так само, як у п. 2.

4. Після зміни всіх параметрів знову дається приріст якомунебудь параметру (наприклад a), і ці самі зміни повторюють доти, поки не буде досягнуто мінімуму цільової функції Δ_{max}.

Мінімум цільової функції можна досягнути швидше, якщо є можливість визначити частинні похідні цільової функції за параметрами синтезу. За значенням цих похідних знаходять напрямок, за яким функція спадає найшвидше (метод найшвидшого спуску та інші градієнтні методи).

Штрафні функції. Перевірку обмежень за направленого пошуку можна сумістити з обчисленням цільової функції, якщо шукати мінімум функції

$$E = \Delta_{max} + q\sum_{i=1}^{n} p_i ,$$

де q — сталий коефіцієнт; p_i — штрафні функції (штрафи), значення яких різко збільшуються біля меж допустимої зони зміни параметрів синтезу.

Наприклад, обмеження за кутом тиску ϑ можна виразити штрафною функцією $p = 1/\lg^{-1}(\vartheta_д / \vartheta)$. При $\vartheta_д = \vartheta$ штрафна функція $p \to \infty$, а тому штраф за наближення до межі допустимих кутів тиску "відштовхуватиме" від цієї межі напрямок, що вибирається, зміни параметрів синтезу. Якщо крок зміни параметрів синтезу виявиться настільки великим, що вибрана точка вийде за допустимі межі, штрафна функція повинна змінити свій знак. У даному прикладі при $\vartheta_д < \vartheta$ функція p стає від'ємною. Зміна знака функції p вказує на необхідність зменшення кроку.

Згідно із зменшенням Δ_{max} зменшується й коефіцієнт q так, щоб у межах точності обчислень збіглися мінімум функції E і Δ_{max}.

Локальний і глобальний мінімуми. У загальному випадку цільова функція може мати кілька мінімумів, які розрізняються за абсолютною величиною. Найменший мінімум у теорії оптимізації прийнято називати ***глобальним***, решту мінімумів — ***локальними.*** На рис. 12.25, *а* зображено графік зміни величини $f = \Delta_{max}$ як функції одного параметра a. У точці *3* знаходиться глобальний мінімум. Якщо цільова функція залежить від багатьох параметрів, відповідно треба розглядати мінімуми багатовимірної

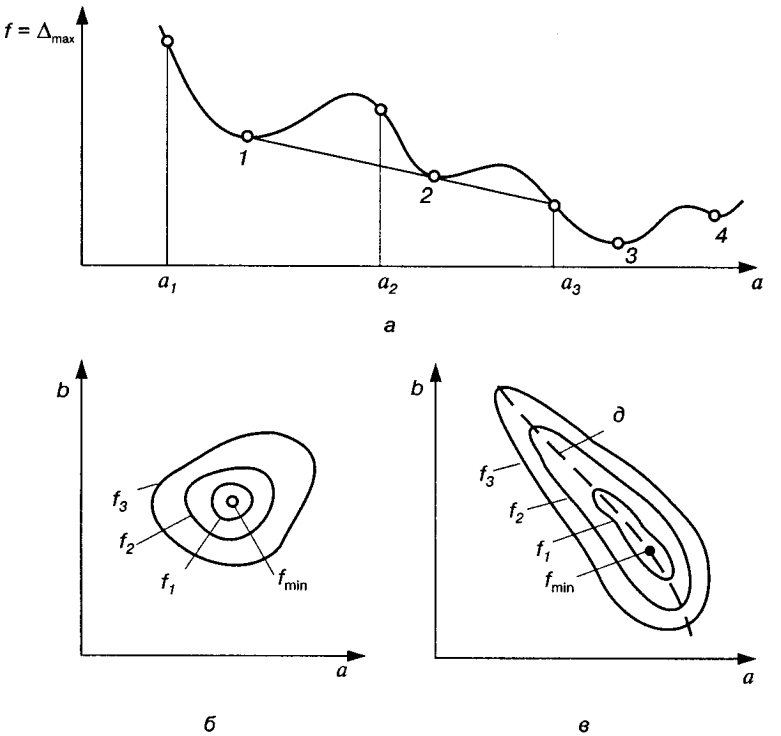


Рис. 12.25.

поверхні. Локальний мінімум такої поверхні має лише "місцеве" значення (звідси походить термін "локальний мінімум"), і для знаходження глобального мінімуму треба переглянути всю багатовимірну зону можливих комбінацій шуканих параметрів (звідси походить термін "глобальний мінімум").

Комбінований пошук. Спрямований пошук, звичайно, приводить до знаходження лише локального мінімуму. Випадковий пошук більше підходить до знаходження глобального мінімуму, оскільки при ньому проглядається вся зона зміни параметрів. Проте він дуже громіздкий, а тому використовують комбіновані методи, за яких випадковим пошуком продивляються і порівнюють значення цільової функції в окремих частинах (ділянках) зони зміни параметрів, а потім спрямованим пошуком знаходять локальні мінімуми для тих ділянок зони, де чекають глобальний мінімум. При знаходженні локального мінімуму слід мати на увазі два можливі випадки його розташування.

У першому випадку він розміщується на ***дні "ями"*** (рис. 12.25, *б*) для функцій *а* і *б* з лініями рівнів цільової функції $f_3 > f_2 > f_1 > f_{\min}$. У другому випадку (рис. 12.25, *в*) він знаходиться на лінії ***дна "яру"***. Якщо треба знайти глобальний мінімум, звичайно вважають за краще після досягнення лінії дна "яру" відразу ж переходити до відшукання другого локального мінімуму. Після цього можна вказати напрямок, де шукати наступний локальний мінімум. Припустимо, наприклад, що для випадку, зображеного на рис. 12.25, *а*, пошук було розпочато з деякої точки $a = a_1$ (випадковий вибір). Спрямований пошук тоді дасть локальний мінімум 1. Вибравши на достатньому віддаленні від точки $a = a_1$ другу випадково вибрану точку $a = a_2$, можна дістати другий локальний мінімум 2. Третю точку $a = a_3$ вибирають на напрямку лінії, яка з'єднує локальні мінімуми 1, 2 і т. д.

Різні методи оптимізації з використанням ЕОМ, які розглянуті на вказаних прикладах, у цій самій послідовності можна використати для будь-якої іншої задачі синтезу механізмів. Тому можна стверджувати, що ці методи є загальними методами синтезу механізмів, а сама проблема синтезу механізмів перестала бути проблемою пошуку методів розв'язання окремих задач синтезу.

12.10. Синтез механізмів методом наближення функцій

Методи оптимізації з використанням ЕОМ дають практичну можливість розв'язати будь-яку задачу синтезу механізмів. Проте ці методи досить трудомісткі й, головне, не дають змогу бачити вплив окремих параметрів синтезу на якісні характеристики механізму. Іншими словами, методи оптимізації дають кількісні розв'язки будь-якої задачі синтезу, але, як правило, не дають можливості здійснити якісний аналіз очікуваних розв'язків, який допускає метод синтезу механізмів, що базується на теорії наближення функцій.

Задача наближення функції полягає в тому, що задана функція $y = F(x)$ наближено замінюється іншою функцією $y = P(x)$, яка мало від неї відрізняється (рис. 12.26). Функція $y = P(x)$, яка називається ***наближеною,*** містить m сталих параметрів: $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Наприклад, при синтезі шарнірного чотириланкового механізму за

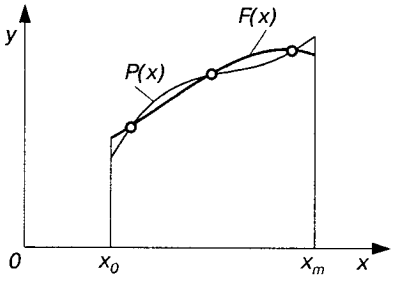


Рис. 12.26.

заданою траєкторією точки шатуна $y = F(x)$ є рівняння заданої траєкторії, а $y = P(x)$ — рівняння шатунної кривої, яка містить дев'ять сталих параметрів (див. параграф 12.9).

Відхилення Δ наближеної функції від заданої, яке виражається, наприклад, різницею ординат, є функцією аргументу x і параметрів наближеної функції:

$$\Delta = \Delta(x, r_1, r_2, ..., r_m). \qquad (12.71)$$

Параметри наближеної функції у задачах синтезу механізмів збігаються з параметрами синтезу або з їх комбінаціями. На відміну від методів оптимізації теорія наближення функції дає змогу знайти значення вихідних параметрів, які відшукують, не шляхом пошуку, а безпосередньо з системи рівнянь, що складені за умов мінімуму максимального відхилення (12.71).

Синтез механізмів за методом наближення функції називають також ***наближеним синтезом механізмів.*** Вперше цей метод використав П. Л. Чебишев [79]. За Чебишевим, задача наближеного синтезу механізмів може бути поділена на три етапи.

Перший етап — вибір основної умови синтезу і додаткових обмежень. Цей етап збігається з розглянутим раніше вибором цільової функції і обмежень. Відмінність полягає лише в тому, що при оптимізації з використанням ЕОМ можна обчислити значення цільової функції послідовними розрахунками за окремими формулами і співвідношеннями, включаючи навіть розв'язання системи рівнянь. При розв'язанні ж задач синтезу механізмів за методом наближення функції обов'язково треба мати аналітичний вираз відхилення від заданої функції у явному або неявному вигляді.

Другий етап — спрощення аналітичного виразу основної умови синтезу у вигляді відхилення від заданої функції. Цей етап є вирішальним для успішного використання методу наближення функції. Справа в тому, що математична теорія наближення функції розроблена тільки для порівняно простих функцій. При синтезі механізмів, як правило, основна умова і, відповідно, відхилення від заданої функції мають складний аналітичний вираз.

Одним з найзручніших способів спрощення аналітичного виразу відхилення від заданої функції у задачах синтезу механізмів є використання ***зваженої різниці*** (***зваженого відхилення***). Цей спосіб уперше було використано П. Л. Чебишевим при розв'язанні задачі синтезу механізму, в якому траєкторія точки шатуна наближалась до кола, а потім М. І. Левитським [44] узагальнена на інші задачі синтезу.

Зваженою різницею називають вираз

$$\Delta_q = q\Delta, \tag{12.72}$$

де вага q — неперервна функція аргументу x і параметрів наближеної функції, що не перетворюється в нуль на відрізку, який розглядається, зміни аргументу x.

Якщо вага q мало відрізняється від сталої величини, то умови мінімуму зваженої різниці майже збігаються з умовами відхилення від заданої функції Δ. У той самий час, вибираючи різну вагу, яка задовольняє вказану умову, можна дістати різницю досить простого вигляду і використати її надалі замість відхилення Δ.

Нехай, наприклад, відхилення від заданої функції подано ірраціональною функцією

$$\Delta = \sqrt{r_1 x^2 + r_2 x + r_3} - r_4. \tag{12.73}$$

Ця функція незручна для обчислення невідомих параметрів r_1, r_2, r_3, r_4 внаслідок її ірраціональності.

Виберемо вагою функцію

$$q = \sqrt{r_1 x^2 + r_2 x + r_3} + r_4. \tag{12.74}$$

При малій величині Δ, використовуючи (12.73) і (12.74), можна записати ($\Delta \to 0$)

$$\sqrt{r_1 x^2 + r_2 x + r_3} \approx r_4;$$

вага $q \approx 2r_4$.

Зважена різниця при такій вазі q буде многочленом

$$\Delta_q = r_1 x^2 + r_2 x + r_3 - r_4^2.$$

Унаслідок того, що вага q приблизно стала, умови мінімуму зваженої різниці Δ_q і відхилення від заданої функції Δ на заданому відрізку зміни x майже збігаються. Отже, збігаються наближено і значення параметрів r_1, r_2, r_3 і r_4, при яких цей

мінімум досягається. Ці значення параметрів знаходяться з умов мінімуму зваженої різниці, оскільки її аналітичний вираз у вигляді многочлена дещо простіший, ніж вираз відхилення від заданої функції, а точність визначення параметрів, які шукаємо, цілком достатня.

Третій етап — обчислення параметрів синтезу з умови мінімуму відхилення від заданої функції. Виконується порівняно просто, якщо отримано простий аналітичний вираз для відхилення заданої функції або для функції, яка замінює це відхилення (зваженої різниці). Спосіб обчислення шуканих параметрів залежить від виду наближення функцій.

Інтерполяція. Найпростіший вид наближення функцій — інтерполяція, при якій значення заданої функції $y = F(x)$ і наближеної функції $y = P(x)$ на відрізку (x_0, x_m) збігаються в k точках, які називаються ***вузлами інтерполяції*** (див. рис. 12.26).

Шукані параметри наближеної функції визначають із системи рівнянь, у яких відхилення у вузлах інтерполяції дорівнюють нулю:

$$P(x_1) = F(x_1), P(x_2) = F(x_2), ..., P(x_n) = F(x_n). \qquad (12.75)$$

Система рівнянь (12.75) буде лінійною, якщо наближена функція має вигляд

$$P(x) = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + ... + p_n f_n(x), \qquad (12.76)$$

де $p_0, p_1, ..., p_n$ — сталі коефіцієнти, в які входять шукані параметри; $f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x)$ — лінійно незалежні неперервні функції аргументу x, які не мають невідомих параметрів.

Цей вид функції $P(x)$ називають ***узагальненим поліномом***, оскільки з нього при окремих припущеннях відносно функції $f_i(x)$ можна дістати звичайні поліноми (степеневі многочлени), тригонометричні поліноми тощо.

Лінійна система рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів узагальненого полінома $P(x)$ при k вузлах інтерполяції має вигляд

$$\begin{aligned}
F(x_1) &= p_0 f_0(x_1) + p_1 f_1(x_1) + ... + p_n f_n(x_1);\\
F(x_2) &= p_0 f_0(x_2) + p_1 f_1(x_2) + ... + p_n f_n(x_2);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(x_k) &= p_0 f_0(x_k) + p_1 f_1(x_k) + ... + p_n f_n(x_k).
\end{aligned} \qquad (12.77)$$

При синтезі механізмів за заданими значеннями швидкостей і прискорень і в деяких інших випадках вимагається, щоб у вузлах інтерполяції збігалися не лише значення заданої функції, а і її похідні до r-го порядку включно. Такі вузли називають ***вузлами кратності*** $r + 1$, а відповідний вид наближення функцій отримав назву ***кратної інтерполяції.*** При кратній інтерполяції, крім рівнянь (12.75), повинні задовільнятися рівняння

$$\Delta^{(r)}(x_i) = 0, \tag{12.78}$$

де $\Delta^{(r)}(x_i)$ — значення похідної r-го порядку від різниці $\Delta = F(x) - P(x)$ за аргументом x при $x = x_i$.

Квадратичне наближення функції. Недолік інтерполяції як методу наближення функцій полягає в тому, що між вузлами інтерполяції відхилення від заданої функції може бути значним, оскільки система рівнянь (12.75) не накладає ніяких умов на відхилення від заданої функції між вузлами. Цей недолік деякою мірою усувається при квадратичному наближенні функцій, яке базується на перетворенні в мінімум середнього квадратичного відхилення від заданої функції:

$$\Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\int_{x_0}^{x_m} [P(x) - F(x)]^2 dx}{x_m - x_0}}, \tag{12.79}$$

де x_0, x_m — значення аргументу на початку і в кінці відрізка наближення.

Середнє квадратичне відхилення стає мінімальним, якщо перетворюється в мінімум інтеграл:

$$I = \int_{x_0}^{x_m} [P(x) - F(x)]^2 dx. \tag{12.80}$$

Якщо наближена функція містить у собі $n + 1$ невідомих коефіцієнтів $p_0, p_1, \ldots, p_n$, для визначення мінімуму інтеграла I треба прирівняти до нуля частинні похідні від I за цими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial I}{\partial p_k} = 0, k = 0,1,\ldots,n. \tag{12.81}$$

Розв'язавши цю систему $n + 1$ рівнянь, знайдемо квадратичне наближення заданої функції, тобто такі значення ко-

ефіцієнтів наближеної функції, при яких середні квадратичні відхилення від заданої функції будуть малі на заданому відрізку зміни аргументу x.

Як і при інтерполяції, система рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів p_k буде лінійною, якщо наближена функція є узагальненим поліномом (12.76), тобто інтеграл має вигляд

$$I = \int_{x_0}^{x_m} [p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + \ldots + p_n f_n(x) - F(x)]^2 dx.$$

Виконуючи диференціювання за всіма коефіцієнтами p_k, записуємо систему $n + 1$ рівнянь (12.81) у такому вигляді:

$$\int_{x_0}^{x_m} [p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + \ldots + p_n f_n(x) - F(x)]^2 f_k(x) dx = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{12.82}$$

Введемо позначення:

$$c_{kl} = c_{lk} = \int_{x_0}^{x_m} f_k(x) f_l(x) dx, \quad k,l = 0, 1,\ldots,n; \tag{12.83}$$

$$\gamma_k = \int_{x_0}^{x_m} F(x) f_k(x) dx, \quad k = 0, 1,\ldots,n. \tag{12.84}$$

За допомогою цих позначень система (12.82) має вигляд

$$\begin{aligned} &c_{00} p_0 + c_{01} p_1 + \ldots + c_{0n} p_n = \gamma_0; \\ &c_{10} p_0 + c_{11} p_1 + \ldots + c_{1n} p_n = \gamma_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_{n0} p_0 + c_{n1} p_1 + \ldots + c_{nn} p_n = \gamma_n. \end{aligned} \tag{12.85}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані значення коефіцієнтів p_k.

Іноді замість інтеграла I перетворюють на мінімум суму:

$$S = \sum_{i=1}^{m} [P(x_i) - F(x_i)]^2. \tag{12.86}$$

Тоді коефіцієнти c_{kl} і γ_k системи рівнянь (12.85) обчислюють за формулами

$$c_{kl} = c_{lk} = \sum_{i=0}^{m} f_k(x_i) f_l(x_i), \quad k,l = 0,1,...,n, \qquad (12.87)$$

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^{m} F(x_i) f_k(x_i), \quad k = 0,1,...,n. \qquad (12.88)$$

Найкраще наближення функцій. Середнє квадратичне наближення дає мале відхилення від заданої функції, але на окремих ділянках відхилення може значно відрізнятися від середнього значення. Цей недолік відсутній у найкращому наближенні функції, за якого максимальне відхилення від заданої функції буде мінімально можливим (звідки випливає назва цього методу наближення — найкраще).

Умови найкращого наближення вперше було вказано П. Л. Чебишовим для деякого класу наближених функцій. Відповідно до цих умов відхилення від заданої функції повинно певну кількість разів досягти свого граничного значення L з послідовним чергуванням знаками. Геометрично це наближення зображують як графік наближеної функції $P(x)$, розташований між кривими, які віддалені від графіка заданої функції $F(x)$ на величину $\pm L$ (рис. 12.27). У цьому випадку наближення називають рівномірним, оскільки відхилення від заданої функції рівномірно досягає своїх граничних значень. Проте не всяке рівномірне наближення виявляється найкращим. Для найкращого рівномірного наближення необхідно, щоб число граничних відхилень було не менше деякого числа, яке залежить від класу наближеної функції.

Наприклад, якщо наближена функція є многочленом степеня n, то число граничних відхилень повинно бути $n + 2$.

Надалі при обчисленнях невідомих коефіцієнтів наближеної функції вважатимемо, що число граничних відхилень на одиницю більше числа невідомих коефіцієнтів.

Отримані при цьому умови рівномірного наближення у задачі синтезу механізмів, звичайно, є найкращими.

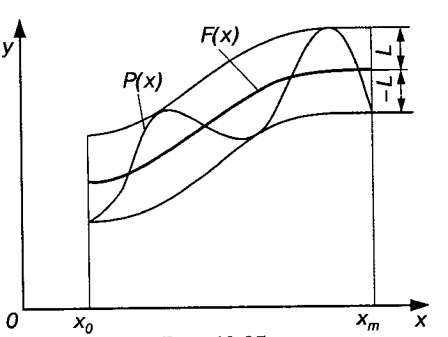


Рис. 12.27.

Нехай, наприклад, наближена функція — узагальнений поліном (12.76) — містить у собі $n + 1$ невідомих коефіцієнтів p_k. Кількість граничних відхилень приймаємо на одиницю більшою за кількість невідомих коефіцієнтів. Тоді дістанемо систему $n + 2$ рівнянь, які виражають умову, що в точках граничних відхилень x_i відхилення дорівнює $\pm L$:

$$p_0 f_0(x_l) + p_1 f_1(x_l) + \ldots + p_n f_n(x_l) - F(x_l) = \varepsilon^l L, \quad l = 1,\ldots,n+2,\ \varepsilon = -1, \tag{12.89}$$

і систему $n + 2$ рівнянь, у яких похідні відхилення від заданої функції за аргументом x у точках граничних відхилень дорівнюють нулю:

$$p_0 f_0'(x_l) + p_1 f_1'(x_l) + \ldots + p_n f_n'(x_l) - F'(x_l) = 0, l = 1,\ldots,n+2, \tag{12.90}$$

де штрихами позначені похідні за x.

Загальна кількість рівнянь (12.89) і (12.90) дорівнює $2n+4$. Кількість невідомих також дорівнює $2n + 4$ $(p_0, p_1, \ldots, p_n; x_0, x_1, \ldots, x_{n+2}; L)$. Оскільки розв'язання такої системи утруднене, тому методом послідовного наближення розв'язують тільки систему $n + 2$ рівнянь (12.89), вважаючи, що значення аргументу x_l у точках граничних відхилень відомі.

Обравши деяку комбінацію гаданих значень точок граничного відхилення x_l і визначивши невідомі коефіцієнти p_k із системи рівнянь (12.89), обчислимо відхилення від заданої функції. Якщо граничні відхилення не дорівнюють $\pm L$, треба вибрати нову комбінацію точок x_l. Ці точки вибирають так, щоб в одній з них досягалось найбільше за абсолютною величиною значення відхилення, а у всіх інших — значення, можливо, більші за абсолютною величиною. Крім цього, знаки відхилень у вибраних точках повинні чергуватися. Для нових значень x_l обчислюють коефіцієнти p_k і процес послідовного наближення повторюють доти, поки не буде досягнуто рівності граничних відхилень, в яких знаки послідовно чергуються. Цей метод обчислень рівномірного наближення називають також методом зрівнювання відхилень.

Швидкість збіжності процесу зрівнювання відхилень визначається вдалим вибором системи точок x_l у першому наближенні. Якщо відхилення від заданої функції характеризуються різницею ординат, то рекомендується вибирати точки граничних відхилень за формулою Чебишова:

$$x_l = \frac{x_0 + x_m}{2} + \frac{x_0 - x_m}{2}\cos\frac{l\pi}{m}, \quad l = 0,1,...,m, \tag{12.91}$$

яка отримана в результаті наближеної зміни відхилення від заданої функції степеневим многочленом.

Дещо кращий результат дає формула Левитського [44], яка враховує не тільки кількість точок граничного відхилення і довжину ділянки наближення, а й деякою мірою форму графіка заданої функції:

$$S_l = \left(1 - \cos\frac{l\pi}{m}\right)S/2, \quad l = 0,1,...,m, \tag{12.92}$$

де S_l — довжина дуги графіка заданої функції, яка вимірюється від початку ділянки наближення до l-ї точки граничного відхилення; S — довжина дуги графіка заданої функції на ділянці наближення.

Положення точок граничного відхилення при обчисленнях за формулами (12.91) і (12.92) досить визначити з точністю до двох або трьох значущих цифр, оскільки будь-яка формула для вибору цих точок дає лише наближене їх розташування. Тому довжину дуги S можна визначити графічно заміною дуги S ламаною, яка складається з хорд, що мало відрізняються від стягуючих дуг.

Отже, якщо наближена функція зображена у вигляді узагальненого полінома (12.76), то при будь-якому виді наближення можна знайти шукані коефіцієнти цієї функції із системи лінійних рівнянь.

12.11. Синтез напрямних механізмів

Напрямними називають такі механізми, які необхідні для відтворення заданої траєкторії деякої точки ланки, що утворює кінематичні пари з рухомими ланками. В основному ці механізми призначені для відтворення руху по прямій (прямолінійні напрямні механізми) або по дузі кола (кругові напрямні механізми). Іноді використовують механізми, які забезпечують інші задані траєкторії точок. На рис. 12.28 наведено приклади таких механізмів: *а*) тістомісильна машина; *б*) машина для ворушіння сіна; *в*) портальний кран (двокоромисловий механізм). Напрямні механізми можуть бути точні або наближені.

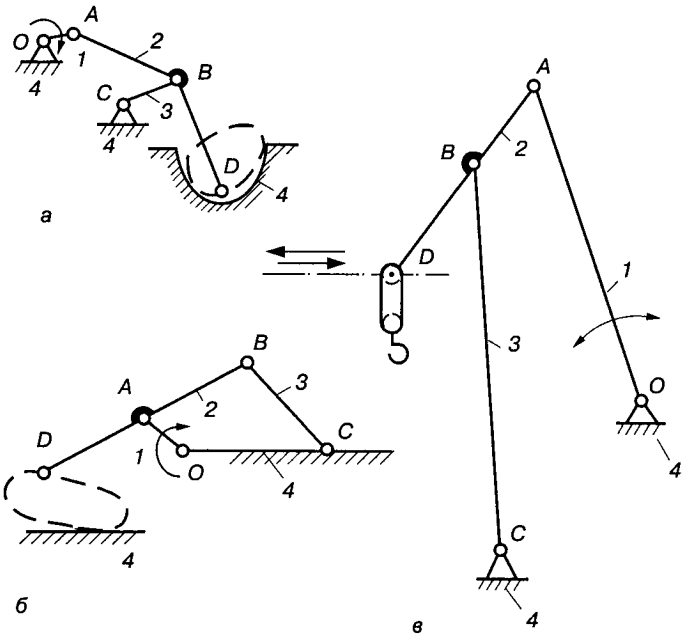


Рис. 12.28.

Точні напрямні механізми. У таких механізмах траєкторія деякої точки ланки, яка утворює кінематичні пари лише з рухомими ланками, точно збігається із заданою кривою на всій її довжині або на деякій ділянці за умови, що похибки виготовлення не беруться до уваги.

Відомо [5], що будь-яку алгебраїчну криву можна відтворити відповідним кінематичним ланцюгом, який утворено нижчими парами V класу. Теорему про таку можливість сформулював А. Кемпе. Нехай рівняння алгебраїчної кривої у неявній формі

$$f(x, y) = 0 \tag{12.93}$$

подано у вигляді

$$\sum Ax^m y^m = 0, \tag{12.94}$$

де A — деяка стала.

Неважко показати, що відтворення за допомогою кінематичного ланцюга кривої, зображеної (12.94), зводиться до виконання низки послідовних математичних операцій, які виконують окремі механізми, що з'єднані в загальний (шуканий) кінематичний ланцюг.

Для цього досить мати такі механізми:

а) для переміщення точки по заданій кривій;

б) для проектування заданої точки на задану пряму;

в) для відсікання на осях Ox і Oy рівних відрізків;

г) для проведення через дану точку прямої, паралельної заданій;

д) для отримання пропорційних відрізків на двох прямих, які проходять через задану точку (множний механізм);

е) для додавання заданих відрізків (підсумковий механізм).

Із цього випливає, що згадані механізми повинні виконувати шляхом геометричних побудов усі математичні операції, які необхідні для складання суми членів, що входять у (12.94), тобто дії додавання, віднімання, множення і піднесення до степеня або ділення і добування кореня, опускання перпендикуляра, викреслення паралельних прямих тощо.

Механізми для переміщення точки по прямій бувають досить різними. Це можуть бути механізми тільки з обертовими парами, наприклад точні напрямні механізми. Дещо простіші механізми, що мають поступальні пари, наприклад, кривошипно-повзунні, деякі види кулісних механізмів тощо.

Механізми для проектування заданої точки на задану криву можуть також складатися лише з обертових пар, як, наприклад, механізм, що зображено на рис. 12.29, *а*. Якщо розміри ланок задовольняють умови $AC = CE$ і $BC = AB = CD = DE = BC' = C'D$ і якщо рухати весь механізм так, щоб точки A і E переміщалися вздовж заданої прямої $a—a$ (наприклад, за допомогою механізмів, вказаних раніше для забезпечення руху по прямій), то точка C' завжди лежатиме на прямій $a—a$ і буде проекцією точки C на цю пряму.

Проектування точки C на пряму $a—a$ можна спростити, якщо, наприклад, використати хрестоподібний повзун *2* із взаємоперпендикулярними напрямними, в яких ковзають ланки *1* і *3* (рис. 12.29, *б*).

Механізм, який відсікає на осях Ox і Oy (рис. 12.29, *в*) ***рівні відрізки*** ($OM = ON$), може бути утворено із трьох механізмів, котрі відтворюють рух точки M по осі Oy, точки N по осі Ox і точки K по прямій Oa, що є бісектрисою кута xOy. Якщо точки M, N і K з'єднати двома ланками MK і KN однакової довжини, то отримаємо шуканий механізм. Можливі й інші механізми для відтворення даного геометричного співвідношення, наприклад механізм з поступальними парами (рис. 12.29, *г*).

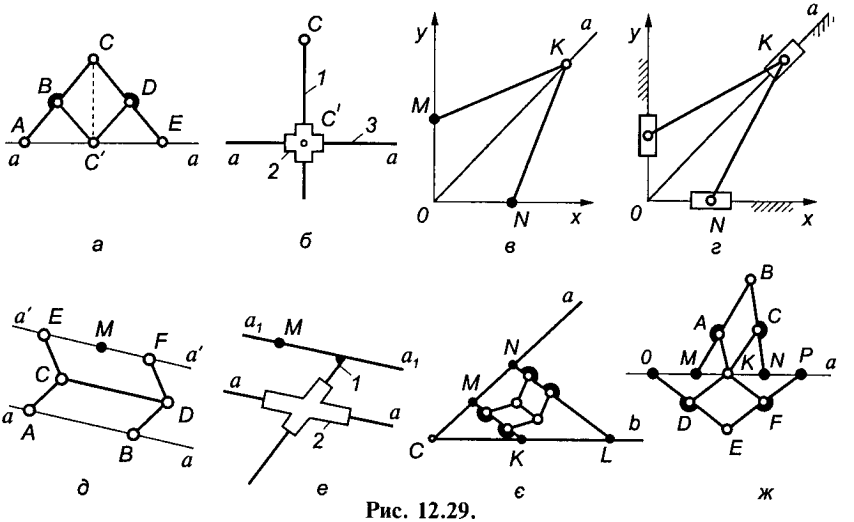


Рис. 12.29.

Механізм для проведення через задану точку M прямої a′ — a′, паралельної даній прямій a—a (рис. 12.29, *д*) — транслятор — механізм подвійного паралелограма, ланки якого задовольняють умови $AB = CD = EF$; $AC = BD$ і $CE = DF$. Встановлюючи ланку AB вздовж заданої прямої *a—a*, ланку EF так, щоб її напрямок проходив через точку M, дістаємо напрямок прямої $a' - a'$, паралельний *a—a*. Варіант механізму з поступальними парами зображено на рис. 12.29, *е*.

Механізм для отримання пропорційних відрізків на двох прямих *Oa* і *Ob* (рис. 12.29, *є*) можна створити з використанням раніше розглянутих кінематичних ланцюгів. Нехай на прямих *Oa* і *Ob* задані точки M, N і K. Треба знайти на прямій *Ob* точку L, яка задовольняє умову:

$$OL/OK = ON/OM. \qquad (12.95)$$

Для цього з прямою MK пов'язують такий механізм (рис. 12.29, *є*), щоб пряма NL була паралельна прямій MK. Тоді пряма NL відсікає на прямій *Ob* відрізок OL, що задовольняє умову (12.95), якщо точки M, N і K переміщаються по прямим *Oa* і *Ob*.

Для додавання заданих відрізків OM і ON (рис. 12.29, *ж*) так, щоб

$$OM + ON = OP, \qquad (12.96)$$

можна двічі використати механізм пантографа. Перший пантограф $MABCNK$ ділить відрізок MN навпіл так, що

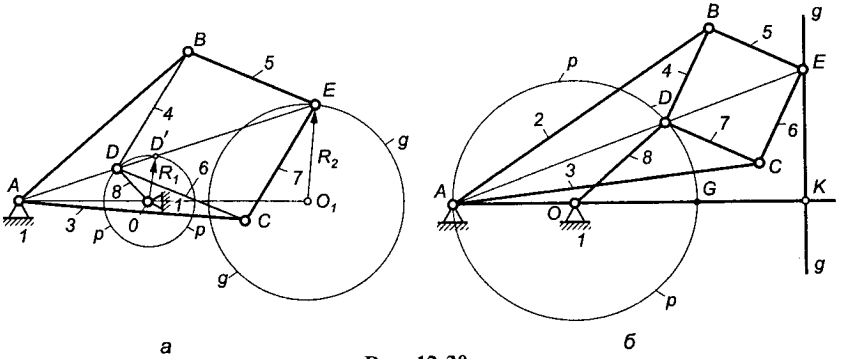


Рис. 12.30.

$$OK = (OM + ON)/2. \qquad (12.97)$$

Другий пантограф $ODEFPK$ подвоює відрізок OK так, що $OP = 2(OK)$.

Отже, завжди можна побудувати механізми, які виконують вказані раніше геометричні побудови.

Пряме розв'язання такої задачі (12.94) за допомогою ланцюгів, які запропонував Кемпе, здебільшого приводить до складних механізмів, практичне втілення яких є зовсім нереальним. Ось чому при побудові механізмів використовують кінематичні ланцюги, що мають різні геометричні властивості, за допомогою яких найпростіше розв'язати задачу про відтворення алгебраїчних кривих або цілих класів цих кривих.

У довідниках із механізмів [3, 29] описано велику кількість напрямних механізмів. Наведемо деякі з них. На рис. 12.30, *а* зображено механізм для викреслювання кола $q—q$ з центром у точці O_1, коли точка D описує коло $p—p$ з центром O. У цьому механізмі розміри ланок вибирають так, щоб $l_4 = l_5 = l_6 = l_7$ і $l_2 = l_3$. Якщо точка A цього механізму лежить на колі $p—p$ (рис. 12.30, *б*), коло $q—q$ перетворюється у пряму $q—q$, яка перпендикулярна до прямої AOK. Отже, отримаємо точний прямолінійно-напрямний механізм, який має назву механізму Поселе—Ліпкіна.

Теорема Робертса. Ця теорема базується на властивостях пантографа, тобто механізму, який призначено для подібного перетворення кривих. На рис. 12.31 зображено ***пантограф Сільвестра,*** який складається із стояка і чотирьох рухомих ланок, що утворюють паралелограм $ABCD$. На двох сторонах цього паралелограма розміщено подібні трикутники BCE і DFC. Кут α

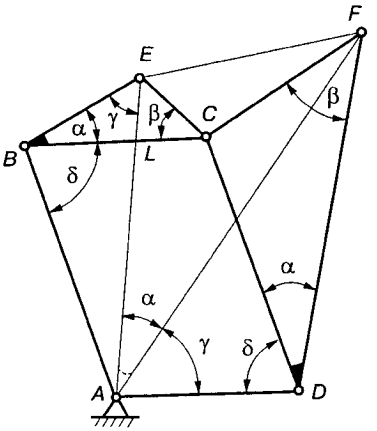


Рис. 12.31.

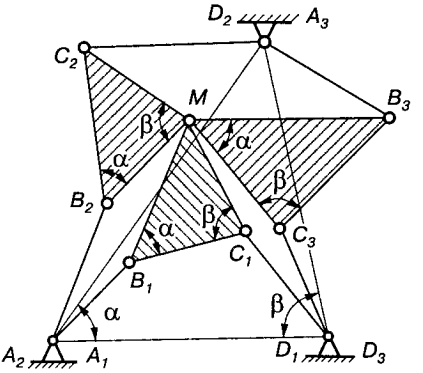


Рис. 12.32.

у цих трикутниках розташовано біля шарнірів B і D паралелограма, а кут β — за ним проти ходу годинникової стрілки.

Із подібності ΔBCE і ΔDFC маємо $BE/BC = DC/DF$. Враховуючи, що $DC = AB$ і $BC = AD$, отримуємо $BE/AD = AB/DF$. Це співвідношення разом з рівністю $\angle ABE = \angle ADF = \alpha + \delta$ доводить подібність ΔABE і ΔADF. Звідси виходить, що

$$AE/AF = BE/AD = k, \qquad (12.98)$$

де k — стала величина, яка називається відношенням подібності.

Крім цього,

$$\angle DAE = \angle EAF + \gamma, \quad \angle CLE = \alpha + \gamma.$$

Кути DAE і CLE внаслідок паралельності сторін рівні і, отже,

$$\angle EAF = \alpha. \qquad (12.99)$$

З (12.98) і (12.99) виходить, що траєкторія точки F подібна до траєкторії точки E і повернута відносно неї на сталий кут α, а $\Delta AFE \sim \Delta BCE \sim \Delta DFC$.

Тепер розглянемо напрямний шарнірний чотириланковий механізм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.32), в якому точка M описує деяку шатунну криву. Приєднаємо в точках M і A дволанкову групу MB_2A_2 так, щоб утворився пантограф Сільвестра. Тоді траєкторія точки C_2 буде подібна до траєкторії точки C_1 і, отже, точка C_2 описуватиме дугу кола, радіус якої дорівнює радіусу C_1D_1,

помноженому на відношення подібності k. Центр D_2 цього кола на основі властивостей пантографа знаходять з умови $\Delta A_1 D_1 D_2 \sim \sim \Delta B_1 C_1 M$. З'єднавши точки C_2 і D_2 за допомогою ланки, яка входить у дві обертові пари, не порушимо рухомості механізму. Від'єднавши вихідний чотириланковик $A_1 B_1 C_1 D_1$, дістанемо перетворений механізм $A_2 B_2 C_2 D_2$, точка M якого опише таку криву, що й вихідному механізмі. Виконуючи аналогічні побудови з центра D_1, маємо третій чотириланковий механізм $A_3 B_3 C_3 D_3$, який описує таку саму шатунну криву.

Отже, одна й та сама шатунна крива шарнірного чотириланкового механізму може бути відтворена у загальному випадку трьома різними шарнірними чотириланковими механізмами. Це і є формулювання теореми Робертса.

Значення цього перетворення для практики полягає в тому, що, одержавши яким-небудь способом один з механізмів, який відтворює задану криву, можна знайти два інші механізми, що також відтворюють таку саму криву, і з них вибрати той, якій повніше задовольняє додаткові умови.

Теорема Робертса розповсюджується й на інші типи плоских механізмів. Для отримання перетворених механізмів, як і в шарнірному чотириланковому механізмі, треба використовувати властивості пантографів.

Наближені напрямні механізми. Наближеними напрямними називають механізми, в яких траєкторія деякої точки на ланці, що утворює кінематичні пари лише з рухомими ланками, мало відрізняються від заданої кривої на окремих ділянках або на всій її довжині. Такі механізми використовують, звичайно, у випадках, коли вони мають меншу кількість ланок порівняно з теоретично точними механізмами. Із зменшенням кількості ланок зменшуються похибки виготовлення, а тому наближені напрямні механізми часто виявляються практично точнішими, ніж теоретично точні. Наприклад, якщо треба дістати рух по прямій лінії за допомогою механізму, який складається лише з обертових пар, мінімальна кількість ланок точного напрямного механізму дорівнює шести. Використовуючи методи наближеного синтезу напрямних механізмів, можна знайти чотириланковий механізм, у якому теоретичні (номінальні) відхилення від прямої лінії чи кола менші за відхилення, спричинені похибками виготовлення. У цьому випадку наближений чотириланковий механізм є точнішим, ніж теоретично точний шестиланковий механізм.

Використання методу оптимізації для синтезу напрямного шарнірного чотириланкового механізму вже було показано (див. п. 12.9).

Механізми Чебишова. Із напрямних механізмів найбільше практичне значення мають механізми, в яких траєкторія точки наближається до дуги кола (кругові напрямні механізми) або до прямої лінії (прямолінійно напрямні механізми). Загальна методика синтезу цих механізмів дана ще П. Л. Чебишовим [79], для якої він використав метод найкращого наближення функцій при частковому припущенні, що шатунна крива механізму є симетричною.

На рис. 12.33, *а* зображено круговий напрямний механізм Чебишова. До складу цього механізму входить двоповідкова структурна група, утворена ланками *ABD* і *BC*, розміри яких задовольняють умову $l_{AB} = l_{BC} = l_{BD} = l$. Таку групу називають ***діадою Чебишова.*** Для забезпечення визначеності в русі ланок і умови існування кривошипа *OA* необхідно, щоб $l_{OA} < l$ і $l_{OC} + l_{OA} < 2l$. При таких співвідношеннях розмірів ланок механізму точка *D* шатуна описує шатунну криву, симетричну відносно осі

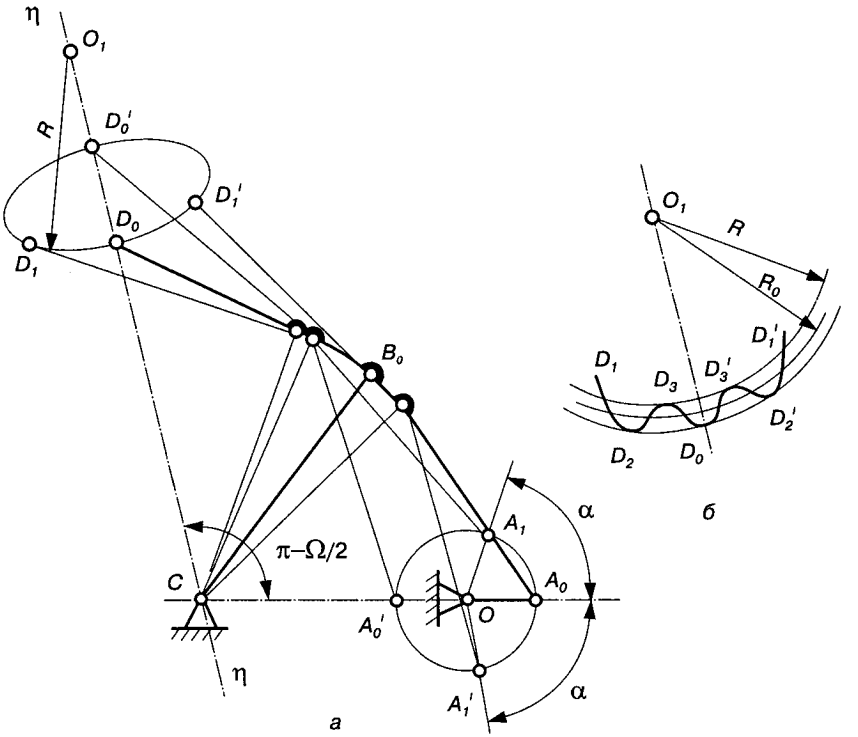


Рис. 12.33.

η—η, яка проходить через центр нерухомого шарніра *C*. Кут нахилу осі ηη до лінії центрів *CO* дорівнює $\pi - \Omega/2$, де $\Omega = \angle ABD$ — кут злому шатуна *ABD*. Оскільки такі механізми в середньому положенні (точка *A* знаходиться на лінії *OC*) нагадує грецьку λ, а траєкторія точки *D* симетрична відносно осі η—η, то їх називають ще симетричними лямбдоподібними механізмами Чебишова (ЛМЧ).

Виразимо всі лінійні розміри механізму відносними параметрами, прийнявши за одиницю довжини відрізок *l*. Відносні геометричні розміри ланок називають геометричними параметрами. У даному випадку виразимо відносну довжину кривошипа *OA* геометричним параметром $r = l_{OA}/l$, міжосьову відстань $CO - a = l_{CO}/l$ тощо.

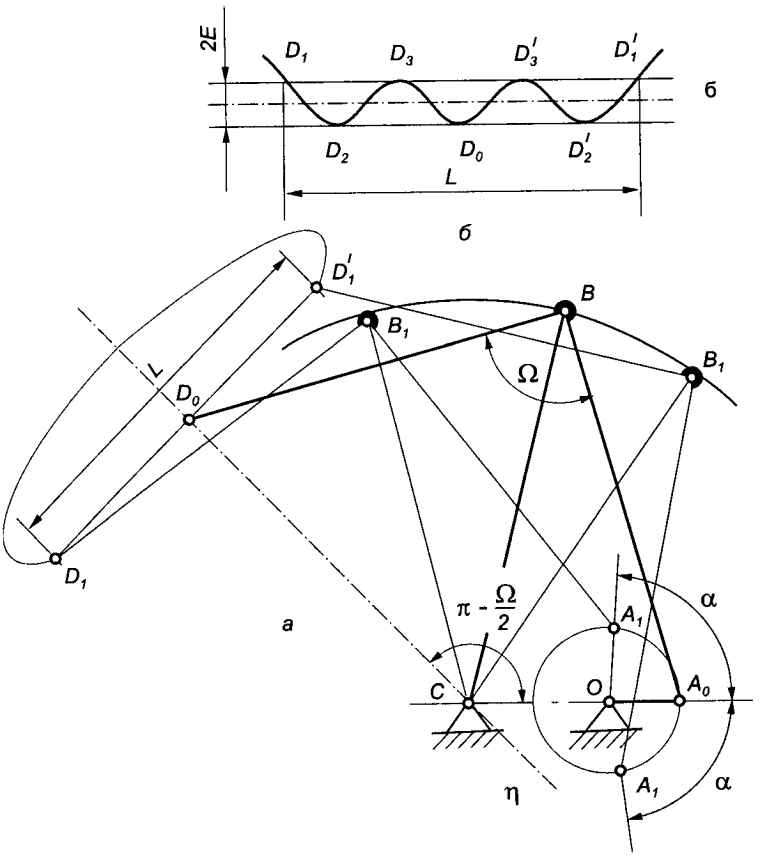
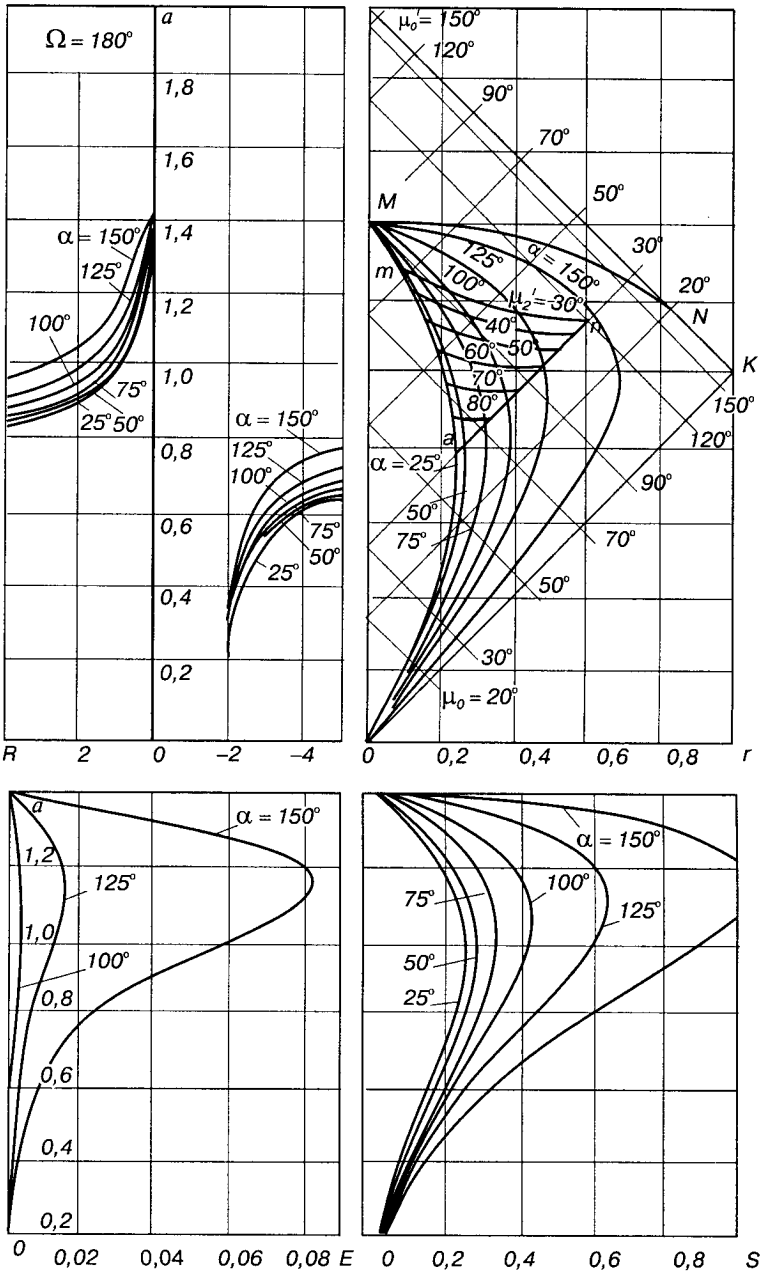


Рис. 12.34.



Ω = 180°
a
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
α = 150°
125°
100°
75°
25°
50°
R
2
0
–2
–4
μ₀' = 150°
120°
90°
70°
50°
30°
20°
M
m
N
K
n
μ₂' = 30°
40°
60°
70°
80°
150°
120°
90°
70°
50°
30°
μ₀ = 20°
α = 25°
50°
75°
0
0,2
0,4
0,6
0,8
r
0,02
0,04
0,06
0,08
E
S

Рис. 12.35.

При відповідному підборі геометричних параметрів ЛМЧ (r, a, Ω) траєкторія точки D (рис. 12.33, *б*) на ділянці D_1D_1' знаходиться у зоні між двома концентричними колами радіусів R_1 і R_0, стикаючись із першим колом у точках D_0, D_2, D_2' і з другим — у точках D_3 і D_3'. У точках D_1 і D_1' траєкторія точки D перетинає коло радіуса R_1 і виходить за межі вказаної зони, при цьому кривошип OA за цей час повертається на кут 2α. Очевидно, якщо різниця між радіусами R_1 і R_0 буде малою, то на ділянці D_1D_1' траєкторія точки D мало відрізнятиметься від дуги кола радіуса $R = (R_0 + R_1)/2$, центр якого знаходиться у точці O_1. У тому випадку, коли на ділянці D_1D_1' радіус $R \to \infty$, дістанемо прямолінійно напрямний механізм Чебишова (рис. 12.34).

Методику синтезу напрямних механізмів Чебишова детально викладено в [25], де наведено основні співвідношення між геометричними параметрами механізмів, межі їх існування, методику і програми розрахунку на ЕОМ геометричних, кінематичних і динамічних параметрів, а також їх числові значення.

На рис. 12.35 наведено приклад ($\Omega = 180°$) довідкових карт, які показують зв'язок між основними геометричними параметрами ЛМЧ, де a — міжосьова відстань, $a = l_{OC}$ (див. рис. 12.33); R — радіус кривизни шатунної кривої на ділянці наближення; L — відхилення шатунної кривої від заданої; S — довжина осі симетрії, яка проходить через середину шатунної кривої, $S = l_{D_0D_0'}$; α — половина кута повороту кривошипа OA за період наближення; μ_0 і μ_0' — кути передачі в основному механізмі (ЛМЧ); μ_2' — кут передачі у приєднаній групі II класу II виду при $k = 1$ (див. далі рис. 13.9).

Як правило, при синтезі задається тривалість наближення шатунної кривої до заданої, яка визначається кутом 2α; далі з кінематичних і динамічних умов та умов конструювання (компонування) вибирають параметри Ω і a. Після цього за допомогою наведених діаграм знаходять радіуси $r = l_{OA}$ та R, відхилення E і відрізок S. Точніші дані можна дістати лише за допомогою таблиць, наведених у праці [25], або ЕОМ.

Напрямні механізми можна отримати також на базі інших чотириланкових механізмів, зокрема несиметричного шарнірного чотириланкового механізму ($l_{AB} \neq l_{BC} \neq l_{BD}$), кривошипно-повзункового або кривошипно-кулісного механізмів (див. далі рис. 13.11). Теорію синтезу таких механізмів викладено в працях [5, 7, 11, 14, 22, 44, 45, 54, 66, 80].

МЕХАНІЗМИ ПЕРЕРИВЧАСТОГО РУХУ

В деяких машинах, особливо в машинах-автоматах, часто треба використовувати односторонній переривчастий рух, тобто рух (обертовий або поступальний) в одному напрямку з періодичними вистоями. Такі механізми ще називають ***кроковими механізмами***. Оцінку долі руху і вистою у загальному робочому циклі T механізму здійснюють відносними коефіцієнтами часу руху $t_р$ і часу вистою (спокою) $t_в$ вихідної ланки, тобто

$$k_р = t_р / T,\ k_в = t_в / T. \qquad (13.1)$$

Для забезпечення переривчастого руху можна використовувати різні механізми, принцип роботи яких та їх особливості розглянемо в даному розділі.

13.1. Механізми неповнозубих коліс

Механізми неповнозубих коліс використовуються для надання вихідному валу обертового руху з періодичними вистоями. Щоб забезпечити такий рух, вхідне колесо повинно мати більший початковий діаметр, а вихідне — менший (рис. 13.1, *а*). Оскільки в зачепленні коліс повинно бути однакове число зубів, то на обох колесах зрізають частину зубів, але так, щоб виконувалась рівність $z_{ф_1} = z_{ф_2}$, де $z_{ф_i}$ — фактичне число зубів коліс (i = 1,2). Отже, в таких передачах використовують не повні зубчасті

колеса, а їх сектори. Після повороту зубчастих коліс на кут $\varphi_р = z_ф\tau$, де τ — кутовий крок ($\tau = 2\pi/z$), зуби секторів виходять із зачеплення. При цьому колесо *1* продовжує рухатися, а колесо *2* зупиняється і фіксується в нерухомому стані запірними дугами В і Г. Зупинка продовжується доти, доки поверхня Б вхідного зубчастого сектора не впреться у виступ А і зуби коліс знову ввійдуть у зачеплення. Тривалість зупинки колеса *2* буде визначатися часом повороту вхідного колеса на кут $\varphi_{1в}$. Тоді коефіцієнт часу вистою визначається так:

$$k_в = t_в/T = \varphi_{1в}/2\pi. \qquad (13.2)$$

Кут $\varphi_{1в}$ повинен містити ціле число кутових кроків $\tau = 2\pi/z_{ф_1}$, яке відповідає цілому числу кроків $\tau = 2\pi/z_{ф_2}$ на колесі *2*. Проте, як відомо, коефіцієнт перекриття в зубчастій парі, звичайно, більший одиниці і це може викликати додатковий поворот колеса *2* та порушити умову спряження зубів на початку наступної фази руху. Для усунення цього явища на стадії проектування механізму передбачають, що коефіцієнт перекриття останньої пари зубів дорівнює одиниці. Це найпростіше досягається зменшенням висоти останнього зуба на сегменті *1* на відповідну величину.

Недоліком зубчастих механізмів з неповним числом зубів є наявність ударів у момент початку зачеплення і в кінці фіксації зупинки запірними дугами. Тому вони застосовуються в тихохідних машинах при незначних рухомих масах.

З метою зменшення ударів у таких механізмах використовуються різні пристрої, які дозволяють плавно вводити в зачеплення або виводити із зачеплення зубчасті сектори. Для цієї мети можуть використовуватися різні кулачкові механізми (рис. 13.1, *б*, *в*). У першому випадку (рис.13.1, *б*) на малому неповнозубому колесі закріплено два ролики А і Б, розташованих у різних площинах (рис.13.1, *г*). На торцях вхідного неповнозубого колеса закріплені кулачки *3* і *4*, які взаємодіють з роликами. Профілі кулачків побудовані так, що обидва ролики під час розбігу і вибігу обкочуються по своїх кулачках, забезпечують геометричне замикання малого колеса і його плавний поворот за заданим законом до повного вступу в зачеплення зубів коліс. Фіксуюча дуга *5* на вхідному колесі забезпечує точне положення вихідного колеса в період вистою.

У другому випадку (рис.13.1, *в*) заданий закон руху вихідного колеса *2* в період розбігу і вибігу забезпечується епіциклоїдним

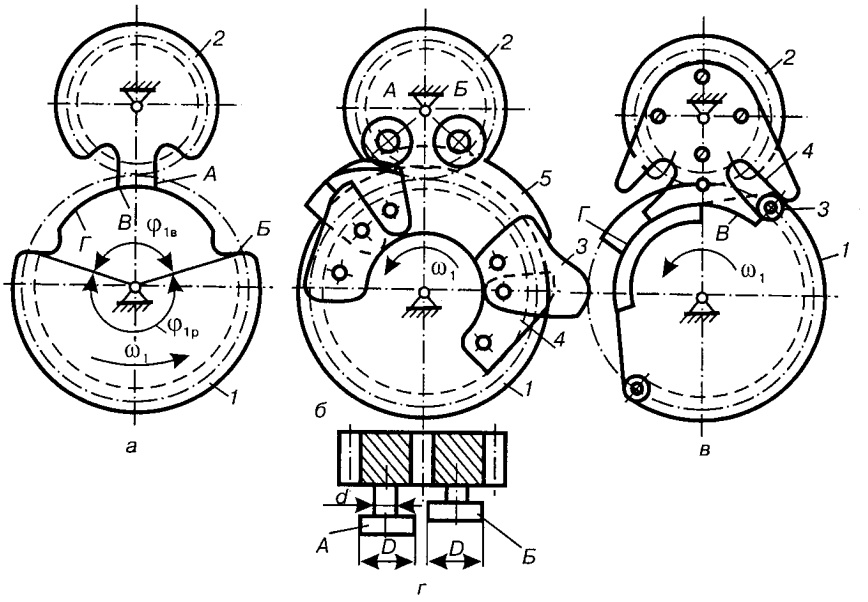


Рис. 13.1.

пазовим кулачком (кулісою) *4*, з яким взаємодіє ролик *3*. Нерухомий стан вихідного колеса *2* під час вистою забезпечується поверхнями фіксуючих кулачків В і Г.

Механізми неповнозубих коліс, в яких забезпечується плавне вмикання і вимикання зубчастого зачеплення (рис.13.1, *б*, *в*), можуть використовуватися в більш відповідальних випадках.

13.2. Храпові механізми

На рис. 13.2, *а* зображено приклад храпового механізму. Такий механізм складається з храпового колеса *4*, собачки *5*, яка шарнірно закріплена на коромислі *3* шарнірного чотириланкового механізму O_1ABO_2 з кривошипом *1* і шатуном *2*. При русі коромисла *3* проти руху годинникової стрілки собачка впирається в зуб храпового колеса і повертає це колесо на відповідний кут, який залежить від кута розмаху коромисла і кратний кутовому кроку храпового колеса. При русі коромисла в зворотному напрямку собачка проскакує над зубами храпового колеса і останнє залишається нерухомим. Для запобігання зворотного ходу колеса *4* встановлюється друга собачка *6* (упор), яка не дає змоги колесу обертатися в зворотному напрямку.

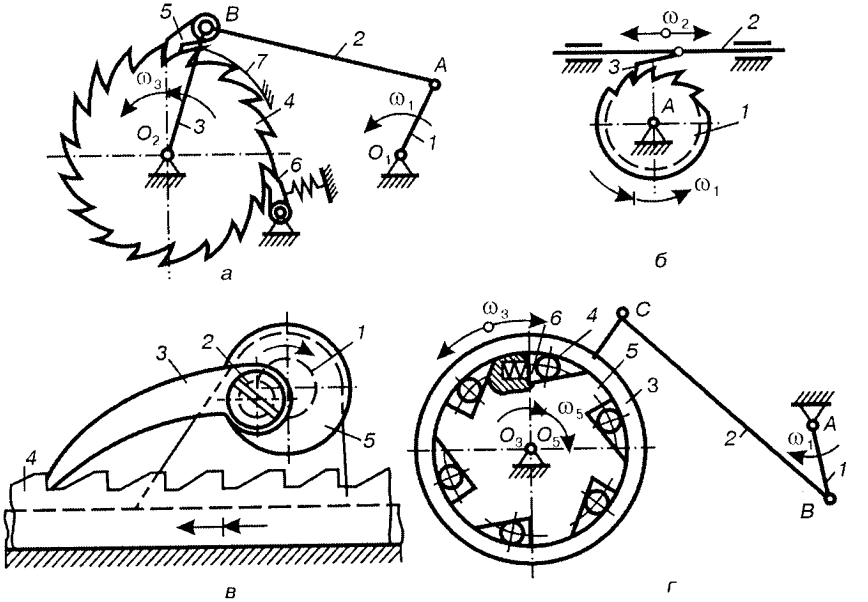


Рис. 13.2.

У тих випадках, коли необхідно регулювати кут повороту храпового колеса *4* при сталому куті розмаху коромисла *3*, можна використати дуговий щиток *7*, пересуваючи який вздовж вершин зубів храпового колеса можна перекривати частину зубів, які знаходяться на дузі переміщення собачки. Регулювання кута повороту храпового колеса здійснюється стрибками з кроком, який дорівнює кроку храпового колеса $\tau = 2\pi/z$, де z — число зубів храпового колеса.

Основні геометричні параметри храпових коліс регламентуються стандартом (ГОСТ 9563-60).

У деяких машинах і пристроях застосовуються храпові механізми, в яких вхідна ланка *2* здійснює поступальний рух (рис. 13.2, *б*), а храпове колесо *1* — обертовий. Для забезпечення поступального переривчастого руху можна використати зубчасту рейку *4* (рис. 13.2, *в*), яка приводиться в рух собачкою *3*. Зворотно-поступальний рух собачки *3* можна забезпечити різними механізмами. У даному випадку собачку приводить у рух приводний вал *1* за допомогою пальця *2*, посадженого на диск *5*. Для надійності контакту собачки з зубами храпового колеса (рейки) застосовують замикання пружиною (на рис. 13.2, *в* не показано).

Храпові механізми рідко використовуються в швидкохідних машинах через великий шум при їх роботі і невизначеність обертання при відсутності гальмівної системи.

Різновидом храпових механізмів, які можуть використовуватися в більш відповідальних випадках, є ***муфти вільного ходу*** (рис. 13.2, *г*). У таких муфтах односторонній переривчастий рух забезпечується за рахунок сил тертя, які виникають між ланками *3* і *5* та роликами (або шариками) *4*. Залежно від напрямку відносного руху ланок *3* і *5* ролики *4* можуть заклинюватися між поверхнями цих ланок або проковзувати. Наприклад, при обертанні ланки *3* проти руху годинникової стрілки ролики *4* за рахунок сил тертя викотяться в ширшу частину клинової порожнини, і муфта розчепиться, і навпаки, при обертанні ланки *3* за рухом годинникової стрілки, ролики *4* закотяться у вужчу частину порожнини, і муфта заклинить-ся. Отже, обертовий рух кривошипа *1* перетворюється в односторонній переривчастий рух ланки *5*. Кутова швидкість ω_5 ланки *5* є змінною величиною.

Для забезпечення постійного контакту роликів з поверхнями ланок *3* і *5* можуть використовуватися пружини *6* і регулювальні гвинти (на рисунку гвинти не показані).

13.3. Мальтійські механізми

Найпростіше переривчастий рух здійснюється за допомогою мальтійського механізму (рис. 13.3, *а*), що дістав таку назву від подібності його форми емблемі духовно-рицарського Мальтійського ордена.

До складу мальтійського механізму входить ведуча (вхідна) ланка *1* з роликом *3* і ведена (вихідна) ланка — хрест *2*. Останній виготовлений у вигляді диска або стола з радіальними пазами. Якщо радіальні пази розташовані на диску рівномірно, то такий мальтійський механізм називають ***правильним*** (або ***однорідним***). При обертанні ланки *1* палець *3* періодично входить в пази хреста *2* і повертає його на кут $\psi_p = 2\pi/z$, де z — число пазів. Для усунення жорсткого удару палець повинен входити в паз або виходити з нього, коли вісь симетрії паза AO_2 дотична до траєкторії центра ролика, тобто кола радіуса O_1A. При виході ролика з паза хрест *2* залишається нерухомим. Щоб усунути самовільний рух ланки *2* під час вистою, на ланках *1* і *2* встановлено запірні дуги *B* і *C*. У деяких випадках вихідну ланку в період

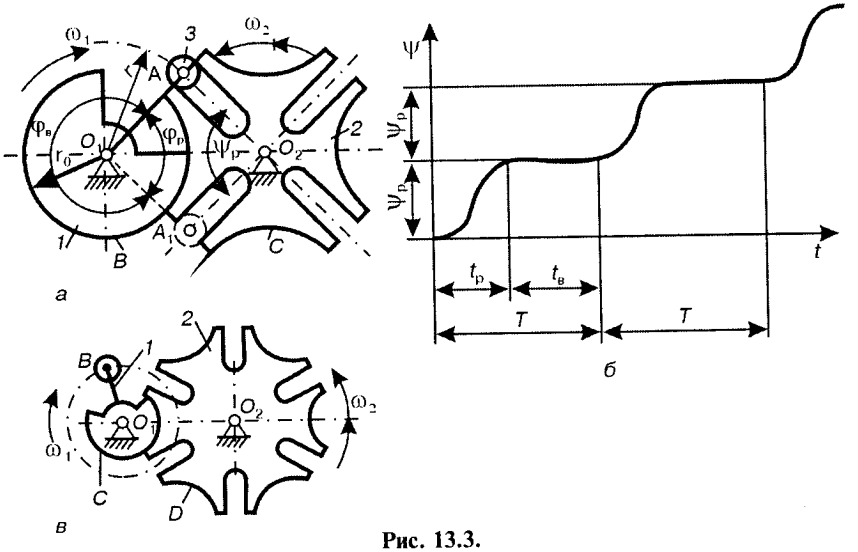


Рис. 13.3.

вистою стопорять спеціальними фіксаторами, які приводяться в рух кулачковим механізмом, зв'язаним з обертовим рухом ланки *1*.

На рис. 13.3, *б* зображено типову діаграму руху вихідної ланки механізму, де $t_р$ — час руху, $t_в$ — час вистою, T — час циклу (період руху), по закінченні якого повторюються періоди руху і спокою вихідної ланки. Відношення часу руху до часу циклу називається ***коефіцієнтом руху***:

$$k_р = t_р/T. \tag{13.3}$$

Кут повороту кривошипа за час руху хреста називається ***кутом руху*** і визначається з прямокутного трикутника O_1AO_2:

$$\varphi_р = \pi - \psi_р. \tag{13.4}$$

Підставляючи в це співвідношення значення кута $\psi_р$, маємо

$$\varphi_р = \pi(z - 2)/z. \tag{13.5}$$

Кут повороту кривошипа за час вистою хреста називають ***кутом вистою*** (спокою) $\varphi_в$ і визначають з умови $\varphi_в = 2\pi - \varphi_р$, яка з урахуванням формули (13.5) приводить до співвідношення:

$$\varphi_в = 0{,}5(z - 2)/z. \tag{13.6}$$

Тоді коефіцієнт руху при рівномірному обертанні кривошипа визначається як відношення кута руху $\varphi_р$ до кута повного оберту 2π, тобто

$$k_р = \frac{\pi(z-2)}{2\pi z} = \frac{z-2}{2z}. \qquad (13.7)$$

Отже, коефіцієнт руху повністю визначається числом пазів, тобто мальтійський механізм має мало можливостей для відтворення заданої діаграми руху. З формули (13.7) також випливає, що мінімальне число пазів дорівнює трьом і коефіцієнт руху змінюється від 1/6 до 1/2 при числі пазів, що наближається до нескінченності. Як правило, число пазів не перевищує 24. На практиці найчастіше беруть $z = 4$ або $z = 6$ (рис. 13.3, *в*). Отже, коефіцієнт руху не перевищує $k_р \approx 0{,}458$.

Щоб одержати час руху більшим за час спокою, інколи використовують мальтійські механізми, в яких кривошип *1* і хрест *2* обертаються в одному і тому самому напрямку (рис. 13.4). У цьому механізмі траєкторія ролика розташована в середині кола, що описане найвіддаленішою точкою паза, а тому механізм дістав назву ***мальтійського механізму з внутрішнім зачепленням*** (на відміну від механізмів із зовнішнім зачепленням, зображених на рис. 13.3, *а*, *в*).

Для мальтійського механізму з внутрішнім зачепленням кут $\psi_р$ визначається за формулою (13.4), а кут $\varphi_р$ знаходиться за умови $\varphi_р = \pi + \psi_р$, звідки

$$\varphi_р = \pi(z+2)/z \qquad (13.8)$$

і

$$\varphi_в = \pi(z-2)/z. \qquad (13.9)$$

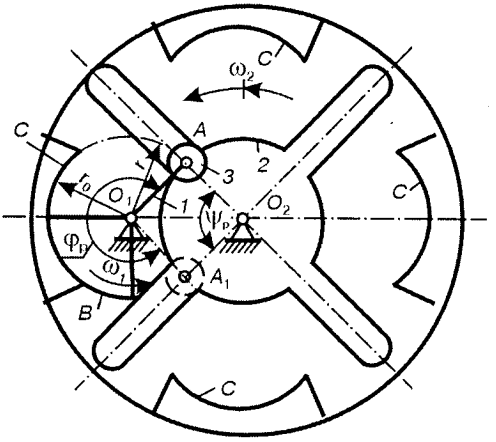


Рис. 13.4.

З порівняння залежностей (13.5) і (13.9) видно, що в мальтійському механізмі з внутрішнім зачепленням кут руху більший за кут спокою. Коефіцієнт руху в такому механізмі визначається так:

$$k_р = 0{,}5(z+2)/z. \qquad (13.10)$$

Мінімальне число пазів так само дорівнює 3, а коефіцієнт руху змінюється від 5/6 до 1/2 (практично до 0,542 при $z = 24$) і зменшується із збільшенням числа пазів.

Мальтійські механізми є одним із конструктивних різновидів важільних кулісних механізмів, оскільки після заміни в них вищих пар нижчими їх можна звести до звичайного кулісного механізму (рис. 13.5, *а*). Для визначення переміщень, швидкостей і прискорень такого механізму можна використати методи дослідження, які наведено в розділі 3. Для мальтійського механізму із зовнішнім зачепленням (див. рис. 13.3, *а*) треба досліджувати рух замінювального кулісного механізму при повороті його на кут $\varphi_р$; для механізму з внутрішнім зачепленням дослідження проводиться при повороті ланки *1* кулісного механізму на кут $\varphi_в$.

На рис. 13.5, *б* зображено діаграми кутових переміщень ψ_2, швидкостей ω_2 і прискорень ε_2 ланки *2* при сталій кутовій швидкості ланки *1*. Порівнюючи ці діаграми, бачимо, що мальтійський механізм із внутрішнім зачепленням працює плавніше, ніж мальтійський механізм із зовнішнім зачепленням.

Збільшити коефіцієнт руху в мальтійському механізмі можна не тільки шляхом переходу до внутрішнього зачеплення, але й

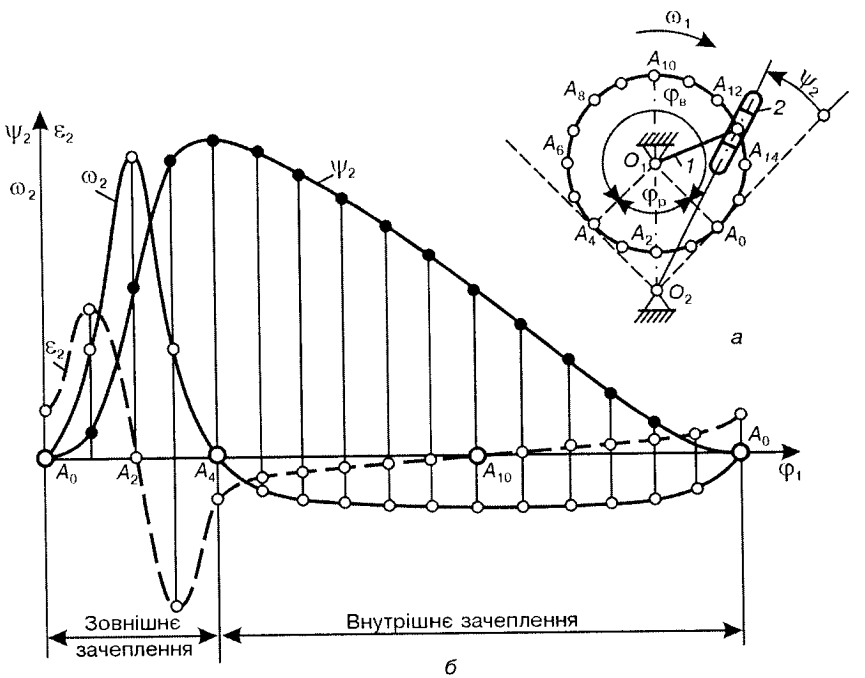


Рис. 13.5.

збільшення числа роликів (цівок) у механізмі з зовнішнім зачепленням (рис. 13.6, *а*, *б*), причому кути φ_p і ψ_p не залежать від числа роликів m; змінюється (зменшується) лише кут спокою, оскільки час циклу T відповідає тепер не повному обертові кривошипа, а куту $\varphi = 2\pi/m$.

У порівнянні з однороликовим механізмом коефіцієнт руху збільшується в m разів:

$$k_p = m\,(z - 2) \,/\, 2z. \qquad (13.11)$$

Коефіцієнт руху при заданому числі пазів обмежується максимальним числом роликів, які знаходяться за умови, що кожен ролик повинен тепер вийти із зачеплення раніше, ніж ввійде в зачеплення наступний ролик, або, що те саме, кут руху повинен бути меншим кутового кроку роликів:

$$\frac{\pi}{2}(z - 2) < \frac{2\pi}{m};$$

звідси $m < \dfrac{2z}{z - 2}$.

Максимальне число роликів при $z = 3$ дорівнює 5, при $z = 4$ і $z = 5$ — 3 і при $z \geq 6$ — 2.

Центри роликів на ланці *1* можуть бути розташовані під одним кутом λ (рис. 13.6, *а*, *б*) і під різними кутами (рис. 13.6, *в*). У першому випадку забезпечуються рівні періоди руху і вистою, оскільки кути між пазами хреста *2* і пальцями рівні між собою. У другому випадку періоди вистою різні. Якщо і періоди вистою, і періоди руху задані нерівними, одержуємо так званий ***неправильний мальтійський механізм*** (рис. 13.6, *г*). У цьому механізмі можуть бути різні кути між пазами, пальцями і відстань пальців від осі обертання O_1.

Якщо робочий процес виконується під час вистою хреста, то час руху і відповідно коефіцієнт руху треба зменшувати з метою підвищення продуктивності механізму. Зменшити коефіцієнт руху при даному числі пазів можна шляхом нерівномірного обертання кривошипа: на ділянці руху хреста кутова швидкість кривошипа повинна бути більша, а на ділянці спокою — менша. Для одержання необхідної нерівномірності обертання кривошипа можуть використовуватися зубчасті механізми зі змінним передаточним відношенням, двокривошипні чотириланкові механізми.

До недоліків мальтійських механізмів, як механізмів одностороннього переривчастого руху відносять не тільки обмежений вибір значень коефіцієнта руху, але й несприятливі динамічні

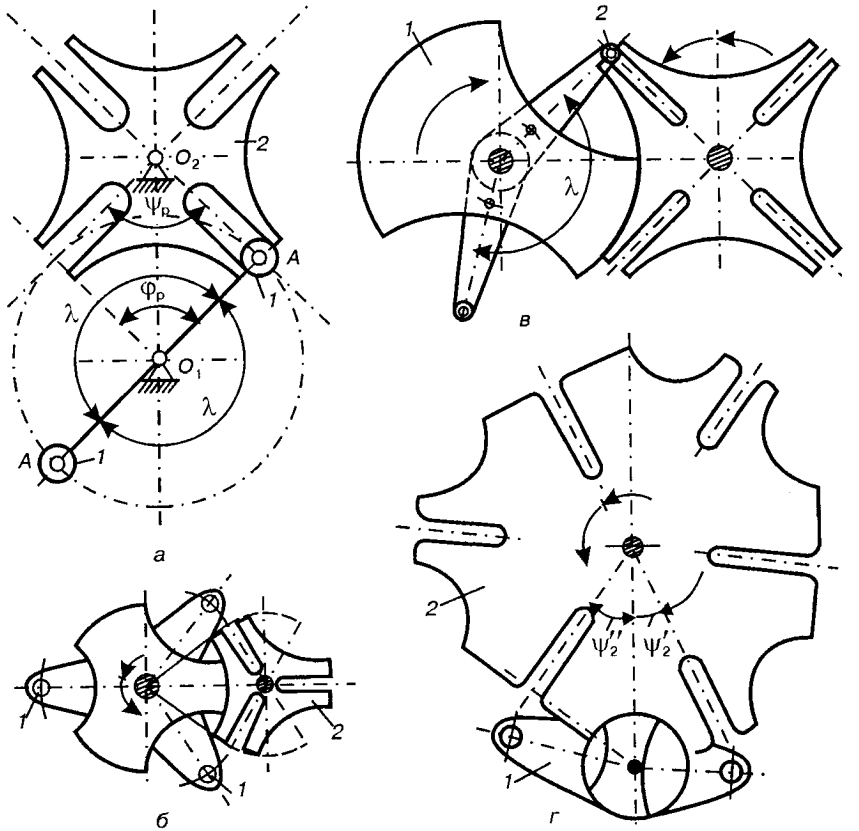


Рис. 13.6.

умови при вході ролика в паз і при виході його з паза. При вході ролика в паз його швидкість відносно хреста дорівнює нулю, якщо напрямок паза в цей час збігається з напрямком вектора швидкості центра ролика, але відносне прискорення не дорівнює нулю. Це викликає м'які удари на початку руху хреста через раптові зміни сили інерції. Від таких недоліків значною мірою позбавлені мальтійські механізми, в яких для приводу хреста використовуються шарнірні чотириланкові механізми (рис. 13.7, *а*). У такому механізмі ролик *D* закріплений на шатуні *1*. Відповідним підбором ланок механізму *OABCD* можна знайти таку траєкторію точки *D*, яка забезпечить необхідний закон руху хреста *2* [50]. І нарешті, можна зробити пази дезаксіальними (рис. 13.7, *б*) або криволінійними. Тоді механізм з

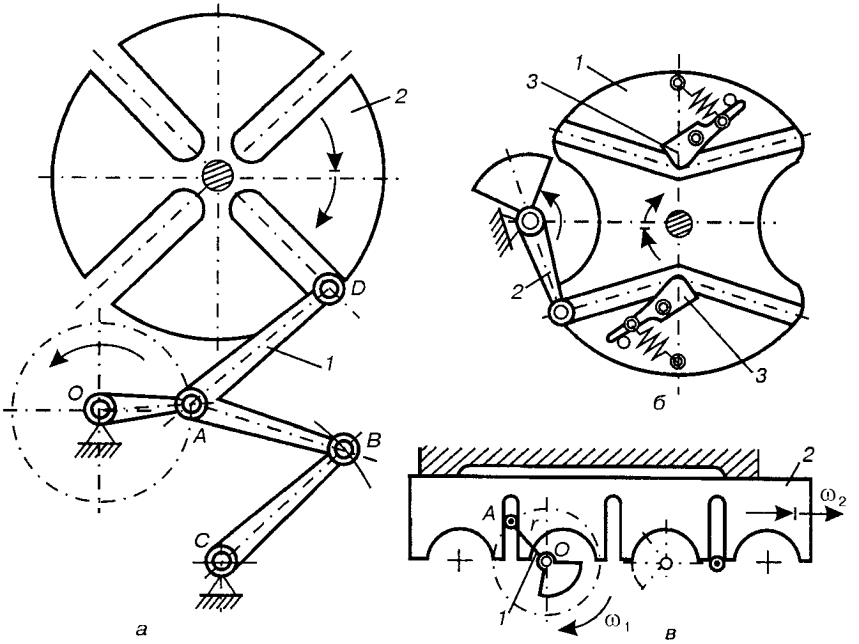


Рис. 13.7.

кулісного перетворюється в кулачковий. У механізмі, зображеному на рис. 13.7, *б*, стрілка *3* усуває реверсивний рух хреста *1*. Вибором профілю паза можна одержати майже будь-який закон руху, але при цьому втрачається головна перевага мальтійського механізму — простота виготовлення.

Мальтійські механізми можуть використовуватися також для забезпечення одностороннього поступального руху вихідної ланки (рис. 13.7, *в*). У цьому випадку пази нарізаються на рейці *2* з кроком $p = 2r$, де r — радіус кривошипа OA.

Мальтійські механізми широко використовуються в різних машинах-автоматах, автоматичних лініях. За їх допомогою транспортуються заготовки, здійснюється зміна інструменту і пристосувань.

13.4. Важільні механізми з вистоями вихідної ланки

У тих випадках, коли необхідно передавати великі навантаження з високою надійністю і плавним законом зміни прискорень вихідної ланки, використовуються важільні або зубчасто-важіль-

ні механізми з вистоями вихідної ланки. Важільні механізми з вистоєм вихідної ланки (ВМВ) бувають двох типів. До першого типу належать механізми, в яких вистій (зупинка) досягається за рахунок зміщення крайніх положень основного (базового) механізму і приєднаної структурної групи; до другого — механізми, в яких для одержання вистою використовуються ділянки кривої, що наближається до прямої лінії або до дуги кола.

Прикладами механізмів ***першого типу*** може бути кривошипно-коромисловий чотириланковий механізм (рис.13.8, *а*), до коромисла O_2B у точці C приєднана структурна група II класу 1-го або 2-го виду. Приєднання груп здійснюється так, що крайні положення базового механізму (у даному випадку чотириланкового механізму O_1ABO_2) і приєднаної групи CDO_2 зміщені за фазою. В результаті цього вихідна ланка DO_3 при деякому куті $\varphi_в$ повороту кривошипа OA має наближений вистій (рис. 13.8, *б*).

Другий тип важільних механізмів з вистоєм можна одержати на базі ***напрямних механізмів*** (див. п. 12.11), до яких належать

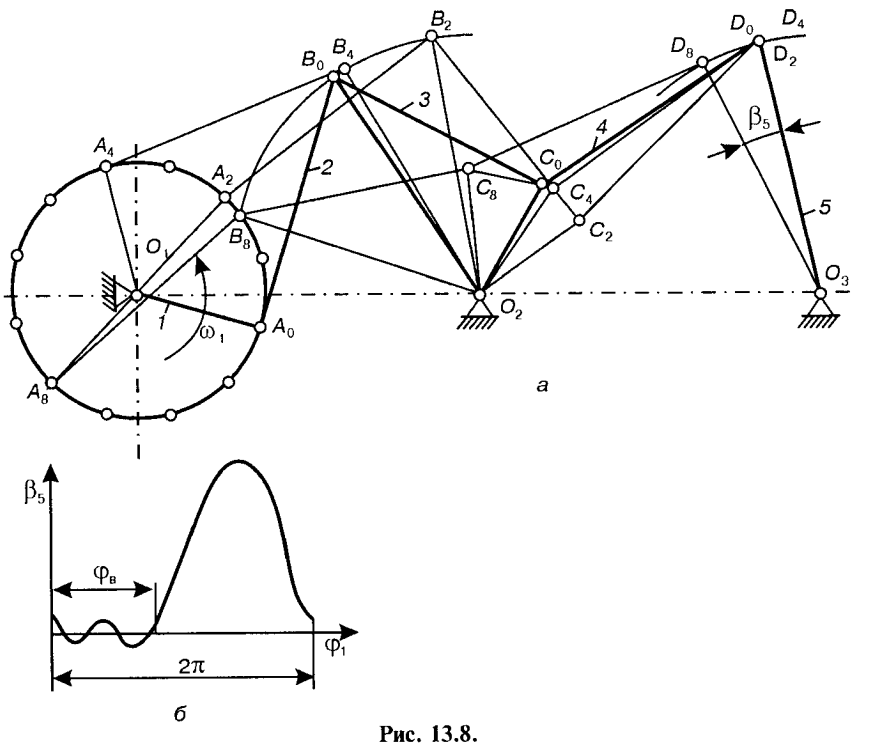


Рис. 13.8.

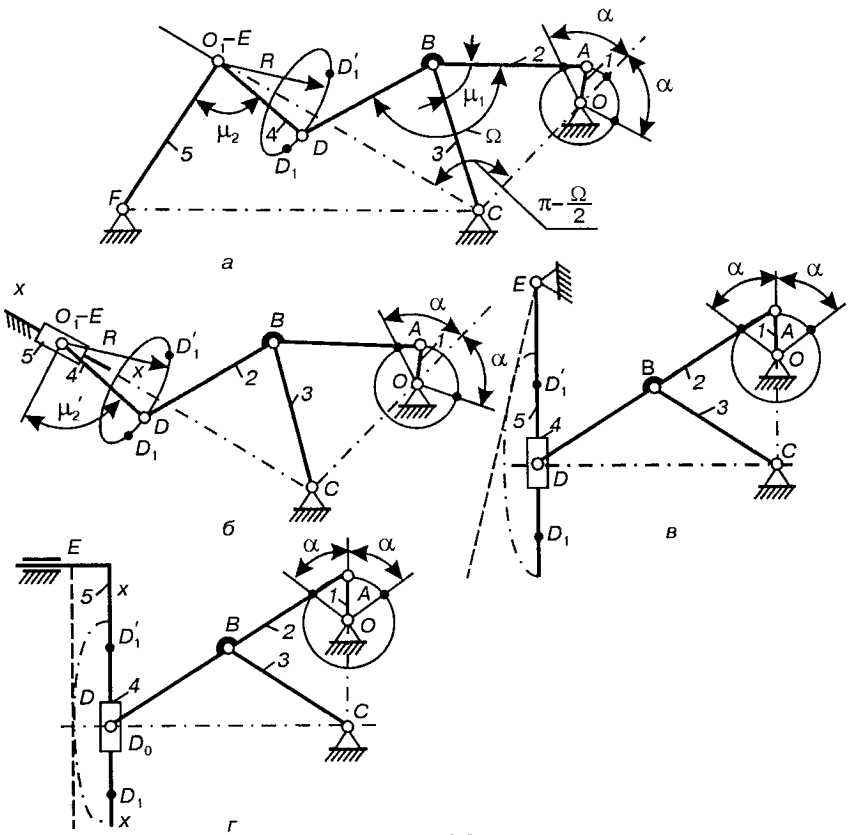


Рис. 13.9.

механізми, де траєкторії деякої точки шатуна мало відрізняються від заданої кривої на окремих ділянках або на всьому періоді руху.

Для одержання механізму з вистоєм вихідної ланки в точці D (див. рис. 12.33, 12.34) приєднують одну із структурних груп (рис. 13.9). Причому, якщо шатунна крива наближається до дуги кола (рис. 13.9, *а*, *б*), то треба приєднувати групи II класу I або II видів; якщо шатунна крива наближається до прямої лінії (рис. 13.9, *в*, *г*), то треба приєднувати групи II класу III або V видів. Довжину шатуна DE (рис. 13.9, *а*, *б*) беруть рівною радіусу R кола, до якого наближається шатунна крива на ділянці $D_1 D_1'$, а положення центра нерухомого шарніра F (рис. 13.9, *а*) вибирають так, щоб в одному з крайніх положень вихідної ланки

EF точка *E* збігалася з точкою O_1 — центром кола радіуса *R*. У другому випадку (рис. 13.9, *б*) напрямна *xx* повзуна *E* повинна проходити через точку O_1, в четвертому (рис. 13.9, *г*) — вісь куліси *xx* паралельна прямолінійній ділянці траєкторії точки *D*. У механізмі, зображеному на рис. 13.9, *в* (третій випадок), положення шарніра *E* вибирається таким, щоб в одному з крайніх положень вісь паза куліси *ED* збігалася з прямолінійною ділянкою шатунної кривої.

При виконанні цих умов вихідна ланка будь-якого з механізмів, зображених на рис. 13.9, *в*, в одному з крайніх положень має вистій, тривалість якого дорівнює часу проходження точкою *D* її траєкторії, яка наближається до дуги кола або прямої лінії. За час вистою вихідної ланки кривошип *OA* повертається на кут $\varphi_1 = 2\alpha$. Приклади діаграм кутових переміщень β_5, швидкостей ω_5 та прискорень ε_5 зображені на рис. 13.10 [25], де φ_1 — кут повороту кривошипа *OA*.

Синтез важільних механізмів з вистоями зводиться до синтезу базового (напрямного) механізму і приєднаної групи. Базовим механізмом можуть служити шарнірний чотириланковий механізм (рис. 13.11, *а*, *б*), окремим випадком якого є симетричний

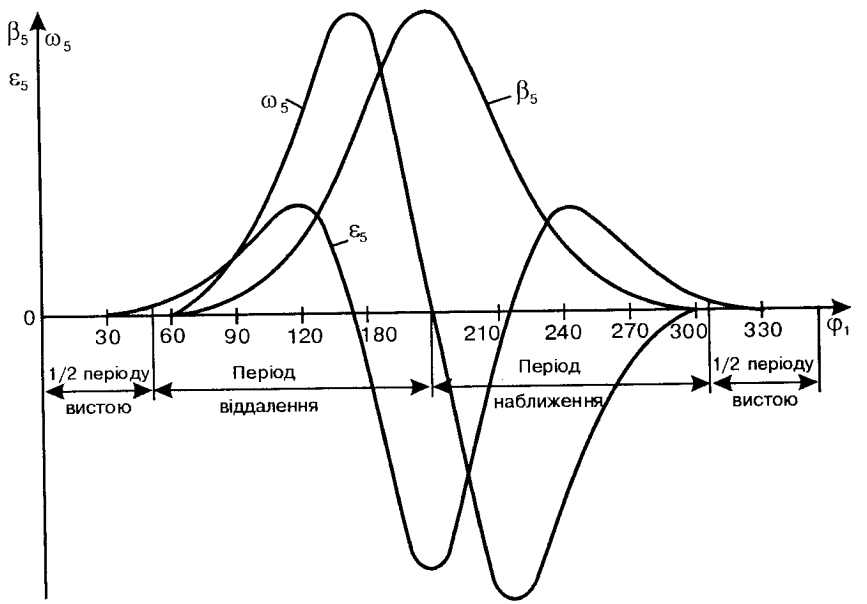


Рис. 13.10.

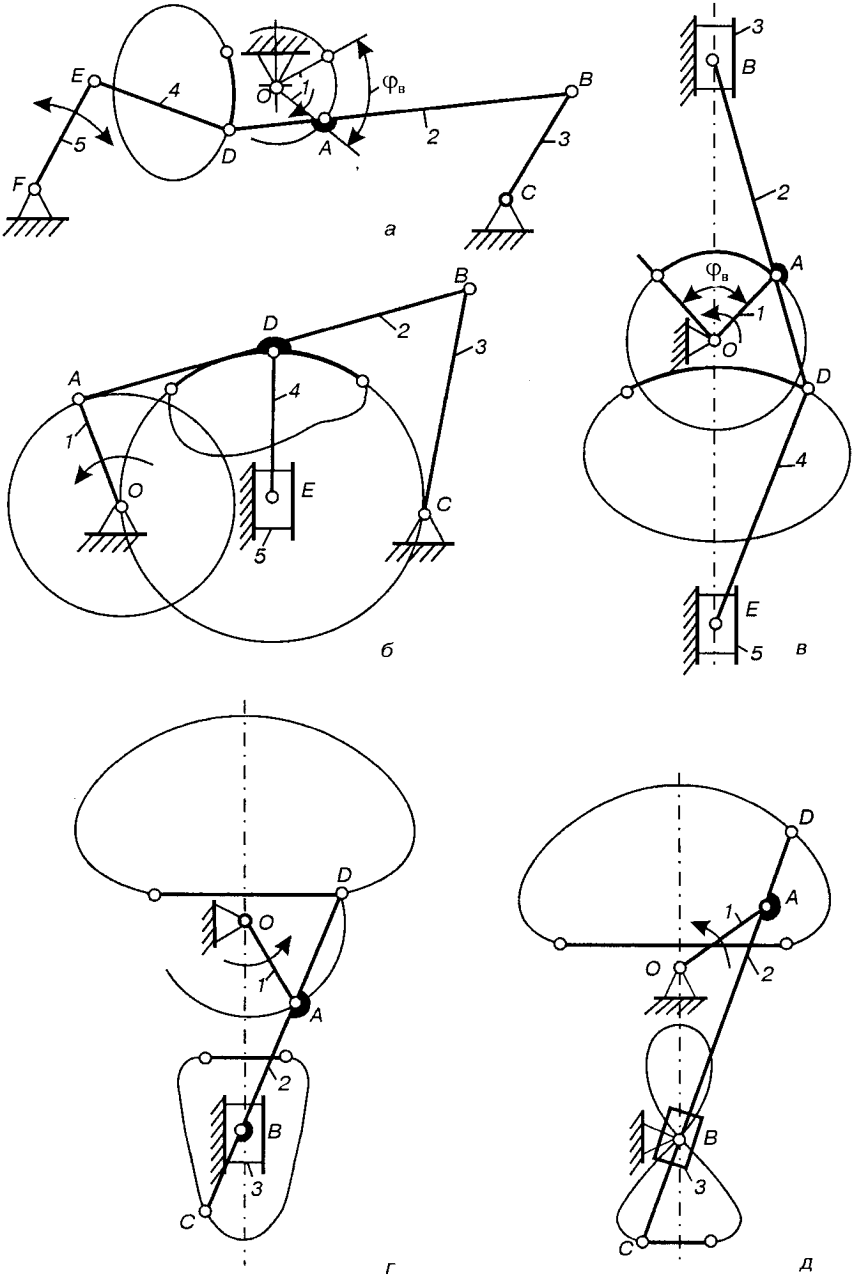

E
4
O
1
φв
B
5
D
A
2
3
F
C
а
B
D
2
3
A
4
1
O
E
C
5
б
3
B
2
A
φв
1
O
D
4
E
5
в
D
O
1
A
2
B
3
C
г
D
A
1
O
2
B
3
C
д

Рис. 13.11.

лямбоподібний механізм Чебишова, зображений на рис. 12.33, 12.34, 13.9, кривошипно-повзунний (рис. 13.11, *в*, *г*) або кривошипно-кулісний (рис. 13.11, *д*) механізм. Теорія синтезу таких механізмів частково викладена в роботах [5, 14, 22, 25], там же наводиться детальніша бібліографія з цього питання.

Важільні механізми можуть забезпечувати вистої вихідної ланки і в двох положеннях механізму. Це можливо в тому випадку, коли шатунна крива (рис. 13.12, *а*, *б*) має на двох ділянках (виділених контурними лініями) однакову кривизну. Механізм, зображений на рис. 13.12, *в*, забезпечує вистій вихідної ланки в середині між її крайніми положеннями.

На базі прямолінійно-напрямних механізмів можна спроектувати механізми одностороннього переривчастого руху, в яких вихідна ланка здійснює обертовий рух з вистоями [25, 26]. Для цього можна, наприклад, використати механізм, зображений на рис. 13.9, *в*, в якому центр обертання куліси E повинен розміщатися або на відрізку $D_1 D_1'$, або в середині траєкторії точки D. У першому випадку (рис. 13.13, *а*) за один оберт кривошипа *1* куліса *5* повертається лише на 180°. Тривалість вистою залишиться такою самою ($\varphi_в = 2\alpha$), оскільки куліса MN буде нерухомою, доки повзун D рухається вздовж ділянки $D_1 D_1'$. При подальшому русі (другий оберт кривошипа *1*) куліса MN повернеться знову на 180°. Отже, за два оберти кривошипа куліса *5* виконає один оберт з двома вистоями. Приклад діаграми переміщень куліси MN зображений на рис. 13.13, *б*. Зміщенням положення центра шарніра E вздовж ділянки $D_1 D_1'$ траєкторії точки D можна змінювати закон руху вихідної ланки, не змінюючи тривалості вистою. Такий механізм є не чим іншим, як окремим випадком двопазового мальтійського механізму, який неможливо було створити звичайним способом (за допомогою кривошипа і ролика). При цьому такий механізм (рис. 13.13) має суттєві переваги, зокрема, дозволяє відповідним підбором траєкторії точки D змінювати тривалість вистою і закон руху вихідної ланки. Теоретично тривалість вистою може змінюватись від 0 до 360°, практично доцільно брати кут $2\alpha \le 200°$.

У другому випадку (центр шарніра E розташований всередині шатунної кривої, рис. 13.14, *а*) одержимо також механізм одностороннього переривчастого руху з вистоєм вихідної ланки лише з тією різницею, що за один оберт кривошипа *1* куліса *5* виконає один оберт з одним вистоєм. Пояснимо цей випадок

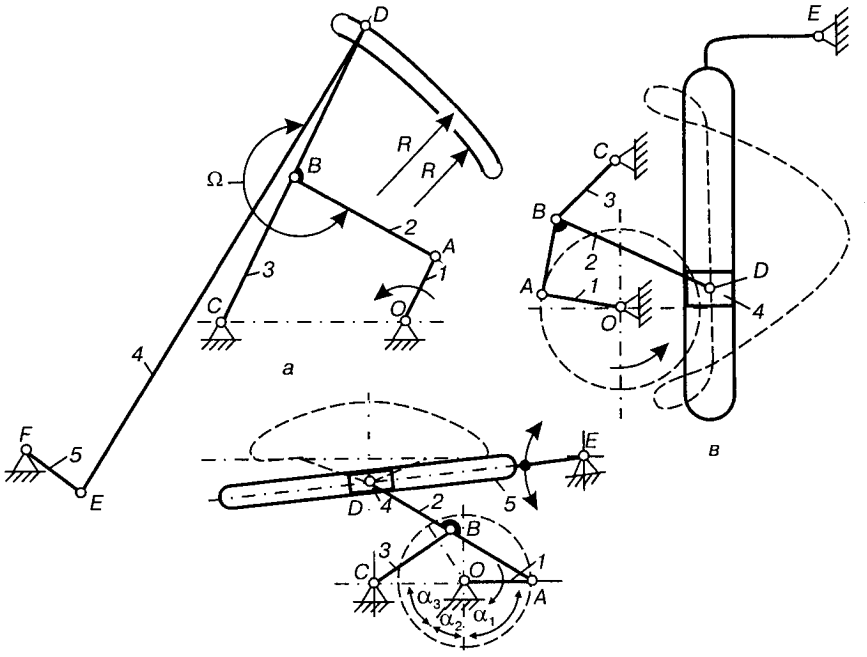


Рис. 13.12.

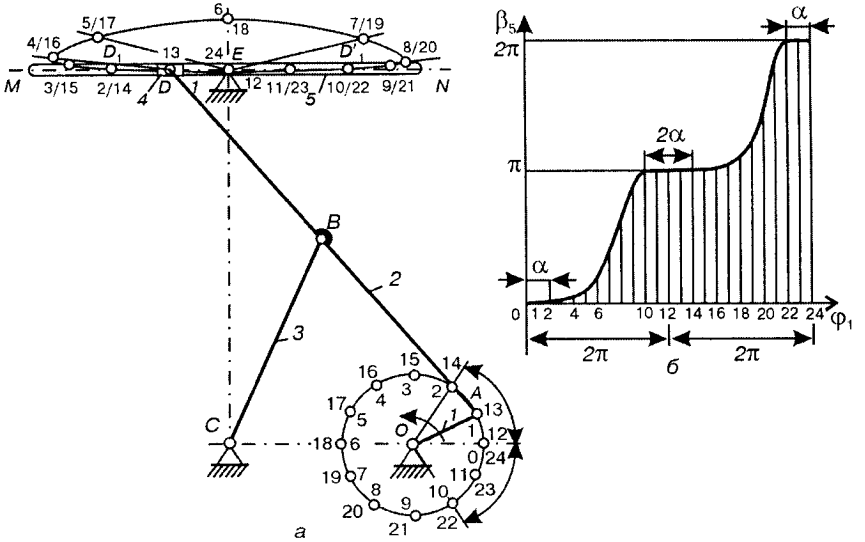


Рис. 13.13.

детальніше. Нехай, наприклад, в початковому положенні механізму центр шарніра D збігається з точкою D_0 — серединою відрізка $D_1 D_1'$, а центр обертання куліси E лежить на лінії $D_0 E \perp D_1 D_1'$. При русі повзуна *4* вліво вздовж ділянки траєкторії $D_0 D_1$ куліса буде нерухома. Потім, починаючи з точки D_1, вона повертається на 360° доти, доки точка D рухається вздовж як криволінійної, так і прямолінійної ділянок $D_1' D_0$. Тривалість вистою куліси визначається часом переміщення повзуна *4* вздовж ділянки $D_0 D_1$ траєкторії точки D. За цей час кривошип *1* повернеться на кут $\varphi_{в1} = \alpha$ (рис. 13.14, *а*). Винятком може бути лише перший цикл руху механізму, якщо на початку руху центр шарніра D знаходиться в іншій точці прямолінійної ділянки траєкторії точки D. Початком періоду вистою може бути будь-яка точка ділянки $D_1 D_1'$. У всіх наступних циклах роботи механізму тривалість вистою визначається відрізком $D_0 D_1$, тобто кутом $\varphi_{в1}$.

На рис. 13.14, *б* зображено діаграми кутових переміщень β_5 куліси *5* як функції кута повороту кривошипа *1* при різних положеннях центра шарніра E. Крива *1* відповідає випадку, який ми розглядали (точка E знаходиться посередині відрізка $E_1 E_1' = D_1 D_1'$), крива *2* відповідає випадку, коли центр шарніра E збігається з точкою E_1'. При заданому напрямі обертання кривошипа *1* цей випадок забезпечує максимальну тривалість вистою ($\varphi_{в2} = 2\alpha$). Крива *3* відповідає випадку, коли центр обертання куліси *5* знаходиться в точці E (мінімальна тривалість вистою — $\varphi_в = 0$).

Характерно, що при зміні напрямку обертання кривошипа тривалість вистою вихідної ланки зміниться. Найбільша (2α) вона буде тоді, коли центр шарніра E знаходиться в точці E_1, і найменша ($\varphi_в = 0$) — в точці E_1'. Інакше кажучи, якщо центр шарніра E знаходиться в точці E_1 або E_1', у роботі механізму спостерігається парадокс: при обертанні кривошипа в один бік вихідна ланка має вистій, при обертанні в другий — вистою немає. При всіх інших положеннях центр шарніра E (крім точки E_0 — середина відрізка $E_1 E_1'$) тривалість вистою вихідної ланки зі зміною напрямку обертання кривошипа буде різною.

Залежність тривалості вистою вихідної ланки від положення центра шарніра E дає змогу одержати механізми переривчастого руху з регульованим вистоєм. Для цього необхідно в конструкції механізму передбачити регулювання положення шарніра E вздовж

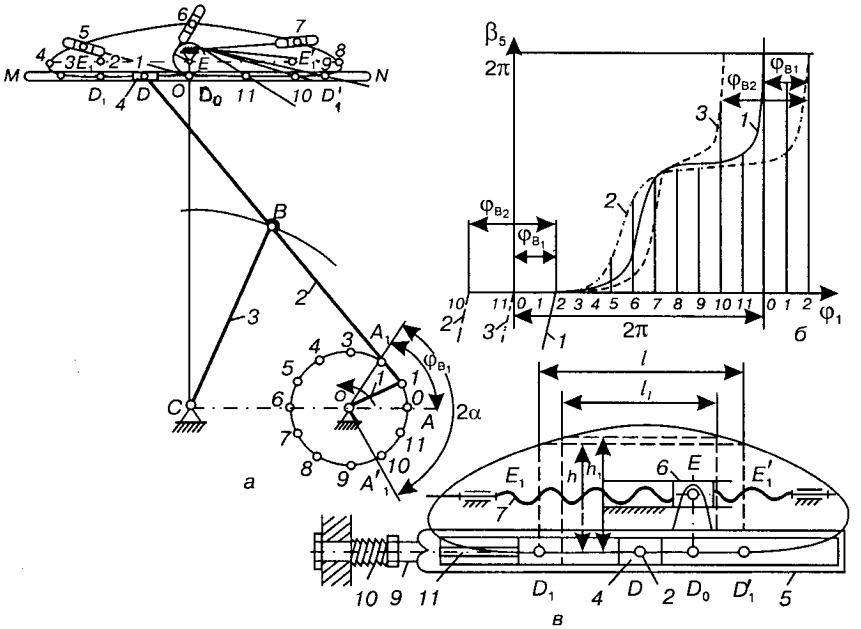


Рис. 13.14.

лінії $E_1E_1' \parallel D_1D_1'$. Таке регулювання можна здійснити навіть під час руху механізму.

На рис. 13.14, *в* зображено приклад кінематичної схеми такого регульованого пристрою, де шарнір E встановлений на рухомому повзуні *6*, який за допомогою гвинта *7* може переміщатися вздовж напрямних *8*. Проте слід мати на увазі, що змінюючи положення центра шарніра E вздовж ділянки E_1E_1', змінюємо не тільки тривалість вистою вихідної ланки ($0 \le \varphi_в \le 2\alpha$), але й закон його руху.

Якщо відхилення траєкторії точки D на ділянці наближення невелике, то в механізмах, показаних на рис. 13.9, *в*, *г*, 13.13 і 13.14, легко встановити жорстку фіксацію вихідної ланки в період вистою (рис. 13.14, *в*) за допомогою клинового пальця (фіксатора) *9*, який притискається до куліси пружиною *10*. Для відводу фіксатора *9* зручно використовувати повзун *4*, оскільки його точка D в кінці періоду вистою завжди перебуває в одному і тому самому положенні (у точці D_1 — при обертанні проти руху годинникової стрілки, у точці D_1' — при обертанні кривошипа за рухом годинникової стрілки). Під час вистою фіксатор *9* пружиною *10* утримується в пазі куліси *5*. При підході повзуна *4*

до крайнього положення (точки D) фіксатор *9* відводиться за допомогою штанги *11*, яка зв'язана з фіксатором. Якщо кривошип обертається за рухом годинникової стрілки, то пристрій для фіксування треба встановити з протилежного боку куліси.

Величину зміщення куліси $e = D_0E$ слід вибирати так, щоб зберігалася умова прокручування куліси, а для цього відрізок e повинен бути не більший половини максимальної висоти h прямокутника, вписаного в траєкторію точки D з основою $l = D_1 D_1'$, тобто $e \le h$. При зменшенні діапазону регулювання тривалості вистою ($D_1 D_1' = l_1$) відрізок e можна збільшити до $h_1/2$. У загальному випадку зміщення e не повинно перевищувати радіуса вписаних у шатунну криву кіл, які мають точку дотику зі всіма точками прямолінійної ділянки траєкторії точки D (l або l_1), що використовується для регулювання тривалості вистою.

Важільні механізми можуть забезпечувати переривчастий рух з кількома вистоями вихідної ланки, якщо використати прямолінійно напрямні механізми, в яких шатунні криві мають кілька прямолінійних ділянок (рис. 13.15). Використовуючи перші дві, одержимо механізм з двома вистоями, використовуючи третю — з трьома, четверту — з чотирма. У першому випадку (рис. 13.15, *а*) центр обертання шарніра E можна вибирати в будь-якій точці відрізка $E_1 E_1'$. Змінюючи положення точки E на цьому відрізку, можна одержати механізми з одним (точка

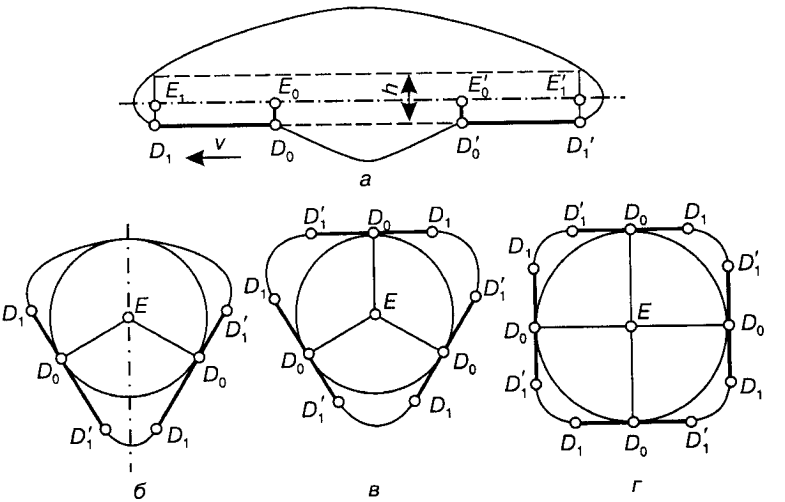


Рис. 13.15.

E знаходиться на ділянці E_0E_1) або з двома (E — на ділянці $E'_0E'_1$) вистоями і можливість регулювати тривалість вистою на одній з ділянок траєкторії (D_0D_1 або $D'_0D'_1$). У другому випадку (рис. 13.15, *б*) центр обертання щарніра E необхідно вибирати на бісектрисі кута, утвореного лініями прямолінійних ділянок шатунної кривої. Причому зміщення куліси $e = ED$ не повинно бути більшим за радіус кола, вписаного в цю траєкторію. У двох останніх випадках (рис. 13.15, *в*, *г*) центр обертання шарніра E має бути в центрі вписаного в шатунну криву кола. Регулювання тривалості вистоїв вихідної ланки тут неможливе.

Розглянуті механізми (див. рис. 13.13 — 13.15) можна застосовувати в різних машинах і приладах для приводу виконавчих органів, які використовують обертовий рух з вистоями, у тому числі з регулюванням його тривалості (рис. 13.14, 13.15, *а*).

13.5. Зубчасто-важільні механізми з вистоями вихідної ланки

Зубчасто-важільні механізми утворені з механізмів, що мають у своєму складі нижчі кінематичні пари (важільний механізм), шляхом додавання до них двох або більше зубчастих коліс, причому хоч би одне з них рухається разом з шатуном.

За допомогою зубчасто-важільних механізмів можна розв'язати такі три задачі: 1) здійснити дуже різноманітні та складні закони руху ланок, у тому числі з вистоями; 2) одержати різноманітні траєкторії окремих точок; 3) передавати обертовий рух між валами із змінною міжосьовою відстанню. Зубчасто-важільні механізми є єдиним видом механізмів, які дозволяють відтворювати, хоч і наближено, траєкторії у вигляді многокутників (див. рис. 13.15, *в*, *г*), завдяки чому вони використовуються для обробки многокутних профілів. Так, за допомогою цих механізмів можна обробляти многокутні профілі розміром 300—400 мм з точністю до 10—11 квалітетів [14].

Іншою галуззю, в якій зубчасто-важільні механізми одержали застосування і мають великі перспективи подальшого використання, є можливість перетворення рівномірного, як правило, обертового руху вхідної ланки в зворотно-поступальний, коливальний або обертовий періодичний рух вихідної ланки. Періодичний рух вихідної ланки може бути трьох видів:

1) ***односторонній обертовий рух зі змінною швидкістю,*** коли кутова швидкість вихідної ланки змінюється за величиною, залишаючись сталою за напрямком;

2) ***з поверненням,*** так званий пілігримовий рух, коли вихідна ланка здійснює значний поворот в одному напрямку і малий поворот у протилежному напрямку;

3) ***з вистоєм*** тої чи іншої тривалості, коли вихідна ланка має одну або кілька зупинок однакової або різної тривалості.

Зубчасто-важільні механізми дають змогу одержати закінчений кінематичний цикл руху вихідної ланки як за один цикл руху вхідної ланки, так і за кілька. Завдяки можливості зміни розмірів ланок важільного кінематичного ланцюга, чисел зубів зубчастих коліс, різних початкових положень ланок, структури механізмів, перетворення руху вихідної ланки, які дають такі механізми, можуть бути дуже різноманітними. Крім цього, зубчасто-важільні механізми мають хороші динамічні характеристики.

Дослідження таких механізмів здійснюється методами, які використовуються при дослідженні важільних і зубчастих механізмів.

На рис. 13.16 показана для прикладу схема зубчасто-важільного механізму з наближеним вистоєм вихідної ланки (повзуна *5*) у крайньому правому положенні. Цей ефект досягається тим, що палець *C* шатуна *4* встановлено не на осі *B* кривошипа *1*, як це має місце в звичайному кривошипно-повзунному механізмі, а на деякій відстані *BC* вздовж радіуса сателіта *2*, який обкочується по нерухомому колесу *3* з внутрішніми зубами. Число зубів коліс z_2 і z_3 підбирають так, щоб точка *C* описувала необхідну траєкторію. У зображеному механізмі відношення чисел зубів коліс *3* і *4* дорівнює трьом. У цьому випадку точка *C* описує замкнену гіпоциклоїду. Кожні з гілок цієї кривої (наприклад, *C′C″*) на деякій ділянці мають кривизну, близьку до сталої. Якщо довжину шатуна *CD* вибрати такою, щоб вона дорівнювала радіусу кривизни цієї ділянки траєкторії точки *C*, то точка *D* буде нерухомою, тобто повзун *5* матиме тривалу зупинку.

Широкі функціональні можливості мають механізми, запропоновані професором Одеської державної академії харчових технологій Р. В. Амбарцумянцом (а. с. 344 189 СРСР, МКИ F 16h 27/06), які одержані на основі планетарних або диференціальних зубчастих механізмів. На рис. 13.17 наведено приклад планетарно-кулісного механізму, який складається з нерухомого центрального колеса *1*, зчепленого з ним сателіту *2*, який

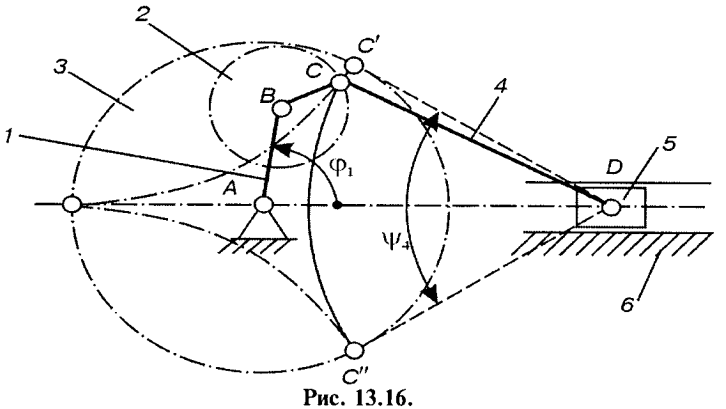


Рис. 13.16.

рухомо сидить на водилі *H*. До сателіта *2* жорстко прикріплено поводок O_2A, в точці *A* якого (за межами початкового кола сателіта *2*) рухомо закріплена цівка *3*. Центр цівки *3* описує видовжену епіциклоїду γ—γ. При обертанні сателіта цівка *3* входить у паз куліси *4* і обертає її навколо осі O_1 на кут α, який визначається положеннями дотичних, що проведені з точки O_1 до траєкторії точки *A*. Після виходу цівки з паза здійснюється зупинка куліси. Для фіксації положення куліси в період її вистою можна використовувати різні фіксуючі пристрої (фрикційні, кулачкові, запірні дуги).

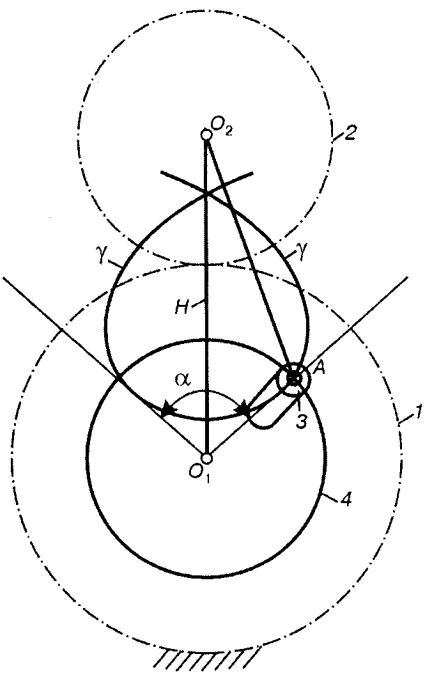


Рис. 13.17.

У такому механізмі, змінюючи передаточне відношення планетарного механізму та положення цівки *3*, можна забезпечити різні коефіцієнти роботи і кількість *z* позицій куліси *4* за час одного оберту вхідної ланки ($2 \le z \le \infty$). Кут повороту водила *H*, який відповідає часу повороту куліси, не має "жорсткого" зв'язку з числом позицій куліси, як це

спостерігається в мальтійських механізмах. Тривалість зупинки куліси може бути різною і навіть більшою одного або кількох обертів вхідної ланки. Можуть використовуватися багатопазові куліси, а також багатоцівкові та багатосателітні передачі, що значно розширює можливості таких механізмів, дозволяє змінювати значення коефіцієнта роботи куліси незалежно від геометричних параметрів вихідного механізму. При однакових кількості позицій куліси та міжосьовій відстані розміри планетарно-кулісного механізму значно менші мальтійського механізму. Такі механізми мають дещо кращі кінематичні та динамічні характеристики.

ЗРІВНОВАЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

14.1. Задача про зрівноваження механізмів

Однією з найважливіших задач сучасного машинобудування є зрівноваження динамічних сил (сил інерції), які виникають при русі механізмів і машин. Це викликано тим, що під час роботи машин ланки їх механізмів рухаються з прискореннями, в результаті чого виникають сили інерції, які викликають додаткові, часом дуже великі, навантаження у кінематичних парах, збільшують тертя і знос їх елементів, створюють додаткові напруження в окремих частинах машин. Це неминуче веде до зменшення витривалості металу та його руйнування. Особливо це стосується швидкохідних машин, оскільки динамічні сили, змінні як за величиною, так і за напрямком, передаються станині (корпусу) машини, фундаменту, викликають їх вібрацію, коливання та розхитування. Надто небезпечні вібрації у зоні, близькій до резонансу, що може викликати руйнування не тільки деталей машин, але і приміщень і навколишніх споруд. Тому в процесі проектування та виготовлення машин ставиться завдання про повне або часткове погашення динамічних сил. Необхідно добитися, щоб на корпус і фундамент передавались якнайменші знакозмінні сили або діяли сили сталі за величиною та напрямком. Ця задача називається ***задачею про зрівноваження рухомих мас механізмів, або задачею про зрівноваження сил інерції.*** Розв'язати її можна шляхом раціонального розміщення та підбору мас ланок механізму.

Задачу про зрівноваження сил інерції в машинах можна поділити на дві: ***про зрівноваження тисків машин або механізмів на фундамент і про зрівноваження тисків у кінематичних парах механізму.*** Але, перш ніж приступити до розгляду вказаних задач, розглянемо деякі методи, які використовуються при розв'язуванні задач зрівноваження механізмів.

14.2. Визначення положення центра мас плоского механізму

Окремі способи розв'язання задач про зрівноваження механізмів пов'язані з використанням розрахункових формул для знаходження ***положення центра мас S механізму*** (рис. 14.1, *а*), яке визначається вектором $\boldsymbol{r}_S$ [1, 6]. Для виводу цієї формули за основу беруть відому з теоретичної механіки залежність

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_{S_i}}{m}, \qquad (14.1)$$

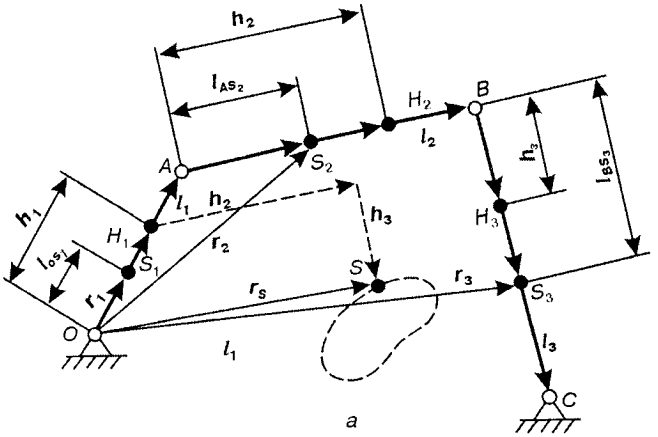
де $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — загальна маса механізму; m_i — маса i-ї ланки; $\boldsymbol{r}_{S_i}$ — радіус-вектор, який визначає положення центра мас S_i i-ї ланки відносно вибраного початку координат.

Користуючись формулою (14.1), для будь-якого механізму можна визначити положення його центра мас. Нехай, наприклад, задано кінематичну схему шарнірного чотириланкового механізму (рис. 14.1, *а*). Центрами мас ланок є точки S_1, S_2, S_3. Довжини ланок позначимо відповідно через l_1, l_2, l_3, а відстані центрів мас S_1, S_2, S_3 від початкових шарнірів при обході механізму за рухом годинникової стрілки — через l_{OS_1}, l_{AS_2}, l_{BS_3}.

З точки O проводимо вектори $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, що визначають положення центрів мас S_1, S_2, S_3. За формулою (14.1) положення центра мас механізму визначається вектором

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad (14.2)$$

де вектори $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{l}_{OS_1}$; $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_{AS_2}$; $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_{BS_3}$.


h2
lAS2
H2
B
l2
A
S2
h1
l1
h2
h3
H3
lBS3
H1
lOS1
S1
r2
r1
rS
S
r3
S3
O
l1
l3
C
а

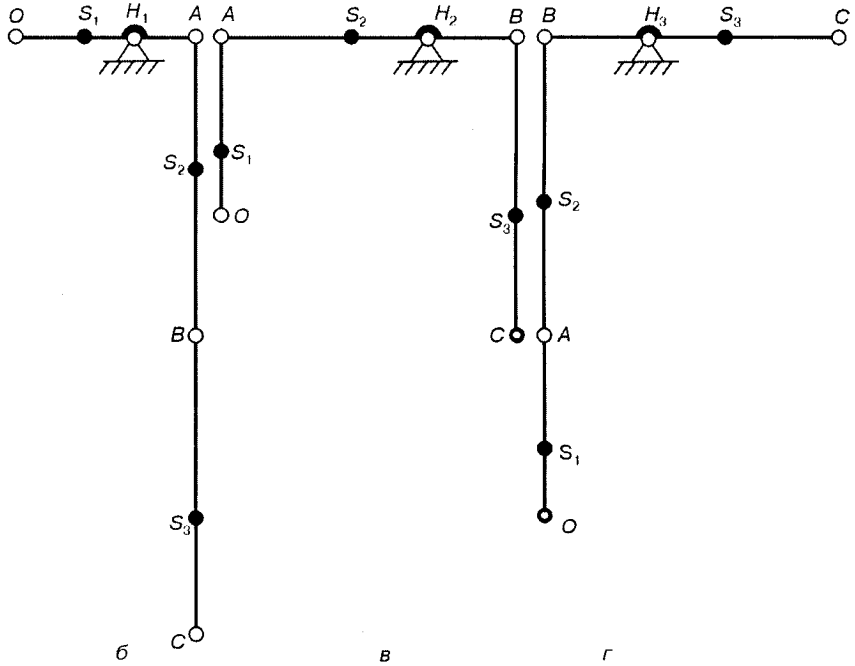

O
S1
H1
A
A
S2
H2
B
B
H3
S3
C
S2
S1
O
B
S3
C
S3
S2
C
A
S1
O
б
в
г

Рис. 14.1.

Тоді

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1 l_{OS_1} + m_2(l_1 + l_{AS_2}) + m_3(l_1 + l_2 + l_{BS_3})}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (14.3)$$

Розкриваючи дужки і групуючи члени, дістаємо

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1 l_{OS_1} + (m_2 + m_3) l_1}{m} + \frac{m_2 l_{AS_2} + m_3 l_2}{m} + \frac{m_3 l_{BS_3}}{m}, \qquad (14.4)$$

де $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Якщо позначити для простоти кожний із трьох складових залежності (14.4) через $\boldsymbol{h}_i$, то одержимо

$$\boldsymbol{r}_S = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3. \qquad (14.5)$$

Як видно з рівняння (14.4), вектори $\boldsymbol{h}_i$ сталі за модулем і паралельні відповідним прямим векторного контуру, тобто $\boldsymbol{h}_1 \| \boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{h}_2 \| \boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{h}_3 \| \boldsymbol{l}_3$.

Отже, вектор загального центра мас $\boldsymbol{r}_S$ можна знайти як геометричну суму векторів $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$, що визначаються рівняннями (14.4), тобто

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1 l_{OS_1} + (m_2 + m_3)\boldsymbol{l}_1}{m}, \quad \boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2 l_{AS_2} + m_3 \boldsymbol{l}_2}{m}, \quad \boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3 \boldsymbol{l}_{BS_3}}{m}. \qquad (14.6)$$

Вектори $\boldsymbol{h}_i$ визначають центри H_i умовного розміщення мас відповідних ланок (див. рис. 14.1). Точки H_i називають ***головними точками***, а вектори $\boldsymbol{h}_i$ — ***векторами головних точок.*** Модулі векторів головних точок можна визначити аналітично, використавши залежності (14.6), або експериментально, встановивши кінематичний ланцюг $OABC$ на призмах відповідно в точках H_1, H_2, H_3 (рис. 14.1, *б—г*). У цих випадках кінематичний ланцюг буде знаходитись у рівновазі. Легко переконатися, що сума статичних моментів мас відносно точок підвісу H_1, H_2, H_3 буде зведена до рівнянь (14.6). Наприклад, у першому випадку (рис. 14.1,*б*) рівняння статичних моментів мас ланок відносно точки H_1 $m_1 l_{S_1 H_1} = (m_2 + m_3) l_{AH_1}$ можна переписати, враховуючи, що $l_{S_1 H_1} = h_1 - l_{OS_1}$, $l_{AH_1} = l_1 - h_1$, у вигляді

$$m_1 h_1 - m_1 l_{OS_1} = (m_2 + m_3) l_1 - (m_2 + m_3) h_1.$$

Звідси, визначивши відрізок h_1, одержимо першу залежність системи (14.6).

Побудувавши з точки O вектори головних точок ланок згідно з рівнянням (14.5) (на рис. 14.1, *а* — штрихові лінії), знайдемо величину та положення вектора $\boldsymbol{r}_S$, який визначає положення загального центра мас S механізму.

Вектор $\boldsymbol{r}_S$ для механізмів з числом n рухомих ланок визначається за формулою, аналогічною (14.5),

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3 + ... + \boldsymbol{h}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{h}_i , \qquad (14.7)$$

де

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_1 &= \frac{m_1 \boldsymbol{l}_{OS_1} + (m_2 + m_3 + ... + m_n)\boldsymbol{l}_1}{m}; \\
\boldsymbol{h}_2 &= \frac{m_2 \boldsymbol{l}_{AS_2} + (m_3 + m_4 + ... + m_n)\boldsymbol{l}_2}{m}; \\
\boldsymbol{h}_3 &= \frac{m_3 \boldsymbol{l}_{BS_3} + (m_4 + m_5 + ... + m_n)\boldsymbol{l}_3}{m}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{h}_n &= \frac{m_n \boldsymbol{l}_{NS_n}}{m}.
\end{aligned} \qquad (14.8)$$

Тут m_i — маса i-ї ланки ($i = 1,2,3,...,n$); $\boldsymbol{l}_{OS_1}$, $\boldsymbol{l}_{AS_2}$, $\boldsymbol{l}_{BS_3},...,\boldsymbol{l}_{NS_n}$ — вектори, які визначають положення центрів мас m_i на відповідних ланках.

У загальному випадку центр мас S механізму змінює своє положення і описує деяку замкнуту траєкторію (див. рис. 14.1, *а*), що приводить до появи деякої незрівноваженої сили інерції $\boldsymbol{F}_{\text{ін}} = -m\boldsymbol{a}_S$. Для усунення цієї сили необхідно так підібрати маси ланок, щоб прискорення загального центра мас механізму $a_S = 0$, а це можливо лише тоді, коли цей центр мас буде нерухомим.

14.3. Метод замінювальних мас

При зрівноваженні механізмів досить широко використовується метод, коли масу будь-якої ланки замінюють окремими зосередженими масами m_i, які жорстко зв'язані між собою [1]. Для того, щоб ця заміна була динамічно еквівалентна, необхідно витримати такі умови:

1) ***сума замінювальних мас повинна дорівнювати масі розглянутої ланки, тобто***

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m, \tag{14.9}$$

де n — кількість замінювальних мас;

2) ***сума статичних моментів замінювальних мас відносно центра мас S ланки повинна дорівнювати нулю:***

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i = 0, \tag{14.10}$$

де ρ_i — відстань від центра мас ланки до положення i-ї замінювальної маси; умову (14.10) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0, \tag{14.11}$$

в яких x_1, y_i — координати i-ї точки відносно осі, що проходить через центр мас S;

3) ***сума моментів інерції замінювальних мас відносно центра мас ланки S повинна дорівнювати моменту інерції J_S розглянутої ланки:***

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \rho^2 = J_S, \tag{14.12}$$

де J_S — момент інерції ланки відносно осі, що проходить через її центр мас S.

Якщо виконуються перші дві умови (14.9) і (14.10) або (14.9) і (14.11), то таку заміну мас називають ***статичним розміщенням мас***. Для того щоб результуюча пара сил інерції замінювальних мас була еквівалентною парі сил інерції ланки, необхідно, щоб, крім зазначених двох умов, задовольнялась ще третя (14.12). У такому випадку одержимо так зване ***динамічне розміщення маси ланки.***

Розглянемо число параметрів, які можна задавати при розв'язуванні рівнянь (14.9)—(14.12). Шуканими є ***положення*** кожної замінювальної маси, яке визначається двома координатами, і ***величина*** самої маси, зосередженої у цій точці. Отже, для однієї замінювальної маси маємо ***три невідомі***, які треба визначити. ***Число рівнянь*** для визначення невідомих дорівнює ***чотирьом*** — рівняння (14.9), (14.11), (14.12). Якщо позначити число вибраних точок через n, то число параметрів p, якими ми можемо задаватись, виразиться так:

$$p = 3n-4. \tag{14.13}$$

При завданні $n = 1$ рівняння (14.13) не задовольняється. При завданні $n = 2$ дістаємо $p = 2$, тобто можна задати, наприклад, дві координати однієї з точок, або одну координату і одну масу. При $n = 3$ дістаємо $p = 5$, тобто можна задати довільно, наприклад, положення двох точок і одну з координат третьої точки, або ж положення двох точок і масу однієї з точок. При $n = 4$ дістаємо $p = 8$, тобто в цьому випадку можна задати положення чотирьох точок, або положення трьох точок і мас двох точок і т. д.

Розглянемо питання про вибір замінювальних мас для деяких, що найчастіше зустрічаються у технічних розрахунках, випадків розподілу мас ланок. Нехай треба розмістити масу m ланки Q, що має центр мас у точці S, по чотирьох довільно вибраних точках A, B, C і D (рис. 14.2). З рівняння (14.13) дістаємо, що при розміщенні мас по чотирьох точках можна задати вісім параметрів.

Зручно задати вісім координат точок A, B, C і D, тобто положень цих чотирьох точок, і визначити маси, зосереджені в цих точках.

Рівняння (14.9)—(14.12) для цього випадку перепишуться так:

$$\begin{aligned} m_A + m_B + m_C + m_D &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C + m_D x_D &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C + m_D y_D &= 0, \\ m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2 + m_D d^2 &= J_S. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Тут m_A, m_B, m_C, m_D — маси, зосереджені відповідно у точках A, B, C, D; x_A, y_A; x_B, y_B; x_C, y_C; x_D, y_D — координати цих точок у системі координатних осей x і y з початком у центрі мас S; J_S — момент інерції ланки відносно осі, що проходить через точку S; a, b, c і d — відповідно відстані точок A, B, C, D від точки S. Маси m_A, m_B, m_C, m_D визначаються сумісним розв'язуванням рівнянь (14.14).

Далі розглянемо випадок, коли треба розмістити масу по трьох точках (A, B і S), що лежать на одній прямій, яка проходить через центр мас S ланки. У цьому випадку координатну вісь x можна сумістити з прямою, на якій лежать точки A, B і S (рис. 14.3). Тоді рівняння (14.9)—(14.12) перепишуться так:

$$m_S + m_A + m_B = m,\ m_A a - m_B b = 0,\ m_A a^2 + m_B b^2 = J_S.$$

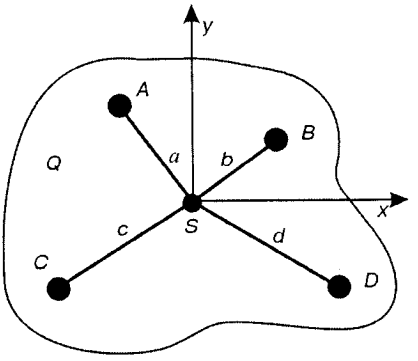


Рис. 14.2.

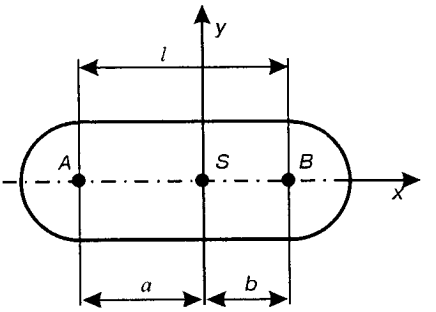


Рис. 14.3.

У цих рівняннях через a позначено відстань від точки A до точки S, а через b — відстань від точки B до точки S. З цих рівнянь

$$m_A = \frac{J_S}{al}, \quad m_B = \frac{J_S}{bl}, \quad m_S = m - \frac{J_S}{ab},$$

де $l = a + b$.

При розміщенні маси ланки Q, що має центр мас у точці S, по двох точках A і B (рис. 14.3) рівняння (14.9)—(14.12) матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_A + m_B &= m, \\ -m_A a + m_B b &= 0, \\ m_A a^2 + m_B b^2 &= J_S. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Оскільки у розглянутому випадку число замінювальних точок дорівнює двом, то згідно з формулою (14.13) можна задати лише два параметри, наприклад координати однієї з точок.

Задамо, наприклад, положення точки A. Тоді положення точки B дістанемо в результаті сумісного розв'язування рівнянь (14.15). Визначаючи з цих рівнянь маси m_A і m_B, одержуємо

$$m_A = \frac{mJ_S}{ma^2 + J_S}, \quad m_B = \frac{m^2 a^2}{ma^2 + J_S}.$$

Положення точки B відносно центра мас S визначиться відрізком

$$b = \frac{J_S}{ma}. \tag{14.16}$$

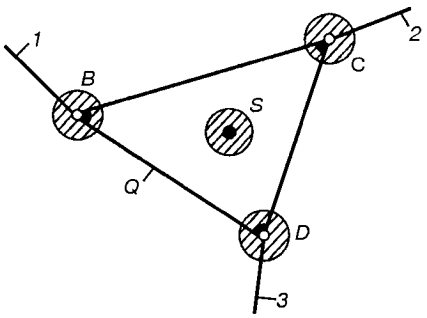


Рис. 14.4.

З рівняння (14.16) випливає, що точки B лежить на продовженні відрізка AS вправо від точки S і її положення збігається з положенням центра коливань ланки Q (за аналогією з однойменною точкою фізичного маятника) за умови, що її підвішено в точці A.

Отже, ***динамічне розміщення мас можна зробити по чотирьох довільних точках. Розміщення по трьох довільних точках можна зробити за умови, коли вони лежать на спільній прямій з центром мас, і, нарешті, розміщення по двох точках можна зробити лише для певного положення однієї з точок і умови, що обидві точки і центр мас лежать на одній спільній прямій.***

У механізмах при розміщенні мас ланок за точки, по яких розміщуються маси, найзручніше вибирати осі шарнірів і центри мас самих ланок. Наприклад, при розміщенні маси ланки Q групи III класу з трьома повідками (рис. 14.4) за точки, у яких зручно розмістити масу m ланки Q, можна вибрати точки B, C і D приєднання повідків *1*, *2* і *3* і точку S — центр мас ланки.

У ланках, в яких центр мас S розміщений на осі ланки (рис. 14.3), зручно замінювальними точками вибирати точки A і B приєднання сусідніх ланок і центр мас S ланки і т. п.

При розв'язуванні деяких практичних задач досить обмежитися тільки статичним розміщенням мас, тобто щоб задовольнялися рівняння (14.9), (14.10) або (14.9) і (14.11).

У цьому випадку при розміщенні маси ланки по двох точках можемо обмежитися рівняннями

$$m_A + m_B = m,\ m_A a - m_B b = 0. \qquad (14.17)$$

З цих рівнянь випливає, що точки A, B і S повинні лежати на одній прямій і положення точок A і B можна вибирати на цій прямій довільно. Величини мас мають вигляд

$$m_A = m\frac{b}{l},\ m_B = m\frac{a}{l}. \qquad (14.18)$$

При цьому замінювальні маси в точках A і B обернено пропорційні їх відстані від центра мас S ланки:

$$m_A/m_B = b/a. \qquad (14.19)$$

При статичному розміщенні маси ланки у трьох довільних точках дістанемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} m_A + m_B + m_C &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C &= 0. \end{aligned} \tag{14.20}$$

З цих рівнянь випливає, що точки A, B і C можна вибрати довільно, тобто статичне розміщення допускає розміщення маси по трьох довільних точках. Величини цих мас можна визначити з рівнянь (14.20).

Отже, ***при статичному розміщенні мас можна розмістити їх або по трьох вибраних точках, або по двох точках, що лежать на одній спільній прямій, яка проходить через центр мас.***

Метод заміни мас можна використовувати при силовому розрахунку механізмів. У цьому випадку знаходження сил інерції зводиться до знаходження сил інерції замінювальних мас і, таким чином, відпадає потреба знаходження моменту сил інерції та кутового прискорення ланки.

14.4. Зрівноваження механізмів відносно фундаменту

14.4.1. Умови зрівноваження механізмів

З теоретичної механіки відомо, що будь-яка система сил, прикладених до твердого тіла або системи тіл, зводиться до головного вектора $\boldsymbol{F}$ і головного моменту $\boldsymbol{M}$ даної системи сил відносно вибраного центра зведення. Користуючись цим методом, сили інерції можна також звести до головного вектора сили інерції $\boldsymbol{F}_{\text{ін}}$ і головного моменту сил інерції $\boldsymbol{M}_{\text{ін}}$. Тоді умови зрівноваження динамічних сил (сил інерції) рухомих ланок механізму мають вигляд

$$\boldsymbol{F}_{\text{ін}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\text{ін}_i} = 0; \tag{14.21}$$

$$\boldsymbol{M}_{\text{ін}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\text{ін}_i} = 0, \tag{14.22}$$

де $\boldsymbol{F}_{\text{ін}_i} = -m_i \boldsymbol{a}_{S_i}$ — головний вектор сил інерції i-ї ланки механізму, яка має масу m_i; $\boldsymbol{a}_{S_i}$ — прискорення центра мас цієї са-

мої ланки; $\boldsymbol{M}_{\text{ін}_i} = -J_{S_i}\boldsymbol{a}_{S_i}$ — головний момент інерції i-ї ланки, момент інерції якої відносно центра мас J_{S_i} і яка рухається з кутовим прискоренням ε_i.

Якщо буде виконано ці обидві умови, то матимемо ***повне зрівноваження сил інерції.*** У практиці машинобудування зазначені умови, звичайно, виконуються частково, залежно від типу механізмів і поставленої задачі.

Обидві умови порівняно легко виконуються для механізмів зі сталими передаточними відношеннями (зубчасті, фрикційні, пасові та ін.). Для інших механізмів (важільних, кулачкових тощо), як правило, вдається забезпечити лише першу умову (14.21), яку можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{F}_{\text{ін}} = -\,m\boldsymbol{a}_S = 0, \qquad (14.23)$$

де $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — загальна маса механізму; $\boldsymbol{a}_S$ — прискорення загального центра мас механізму (див. параграф 14.2).

Умова (14.23) виконується тоді, коли прискорення загального центра мас механізму $\boldsymbol{a}_S = 0$, оскільки маса ланок механізму ніколи не дорівнює нулю. Це можливо в двох випадках: загальний центр мас механізму рухається рівномірно та прямолінійно; загальний центр мас механізму нерухомий. Очевидно, що перша умова, як правило, не може бути виконана, оскільки центр мас ланки механізму рухається по замкнутій кривій. Отже, ***для повного зрівноваження головного вектора сил інерції ланок механізму необхідно і достатньо так підібрати маси, щоб спільний центр мас усіх ланок механізму залишався нерухомим.*** Це досягається установленням на ланках додаткових мас-противаг, положення та величину яких вибирають так, щоб зробити спільний центр мас механізму нерухомим.

Повне зрівноваження головного вектора сил інерції механізму часто називають ***статичним зрівноваженням механізмів***, хоча цей термін не зовсім вдалий. Він з'явився внаслідок того, що статичну незрівноваженість можна виявити без руху механізму, тобто в статичному стані. Проте за своєю фізичною природою так звана статична незрівноваженість (як і моментна) є явище в повному змісті динамічне.

14.4.2. Повне зрівноваження сил інерції механізму

Розглянемо методику зрівноваження головного вектора сил інерції на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис. 14.5, *а*). Вихідними даними є розміри, маси m_1, m_2, m_3 та положення центрів мас S_1, S_2, S_3 ланок механізму.

Для зрівноваження цього механізму використаємо метод головних точок ланок (див. параграф 14.2), згідно з яким положення центра мас S механізму визначається векторним рівнянням:

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3, \qquad (14.24)$$

де $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$ — вектори головних точок відповідних ланок, величину яких знаходимо за формулами (14.6), (14.8), а напрямки визначаємо положеннями відповідних ланок, причому вектор $\boldsymbol{h}_3 = \boldsymbol{FS}$ — сталий за модулем і напрямком. Оскільки він поступально рухається при русі механізму, то його точка F має за формою таку ж траєкторію, як точка S.

Отже, для виконання умови (14.23) досить забезпечити нерухомість точки F, тоді й центр мас механізму S буде нерухомим. Для цього точку F суміщають з центром O, прирівнюючи до нуля векторну суму (14.24):

$$\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 = 0, \qquad (14.25)$$

тоді

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_3 = \text{const}. \qquad (14.26)$$

Якщо точка S_3 збігається з шарніром B, значення $l_{BS_3} = 0$ і $\boldsymbol{h}_3 = 0$. Тоді і $\boldsymbol{r}_S = 0$, тобто точка S збігається з точкою O.

Забезпечивши в механізмі рівність (14.26), одержимо повне зрівноваження сил інерції.

Рівність (14.26) можлива лише при виконанні умови (14.25), з якої випливає

$$h_1 = 0,\ h_2 = 0. \qquad (14.27)$$

Тут відпадає варіант $\boldsymbol{h}_1 = -\boldsymbol{h}_2$, оскільки ці вектори не паралельні один одному. Сукупність двох співвідношень (14.27) приводить безпосередньо до розв'язку масогеометричної задачі статичного зрівноваження кривошипно-повзункового механізму як центрального, так і зміщеного. Розкриваючи співвідношення (14.27) з врахуванням значень $\boldsymbol{h}_1$ і $\boldsymbol{h}_2$ з формул (14.6), одержуємо статичні моменти мас ланок *1* і *2* відносно точок O і A:

$$m_1 l_{OS_1} = -(m_2 + m_3) l_1,\ m_2 l_{AS_2} = -m_3 l_2. \qquad (14.28)$$

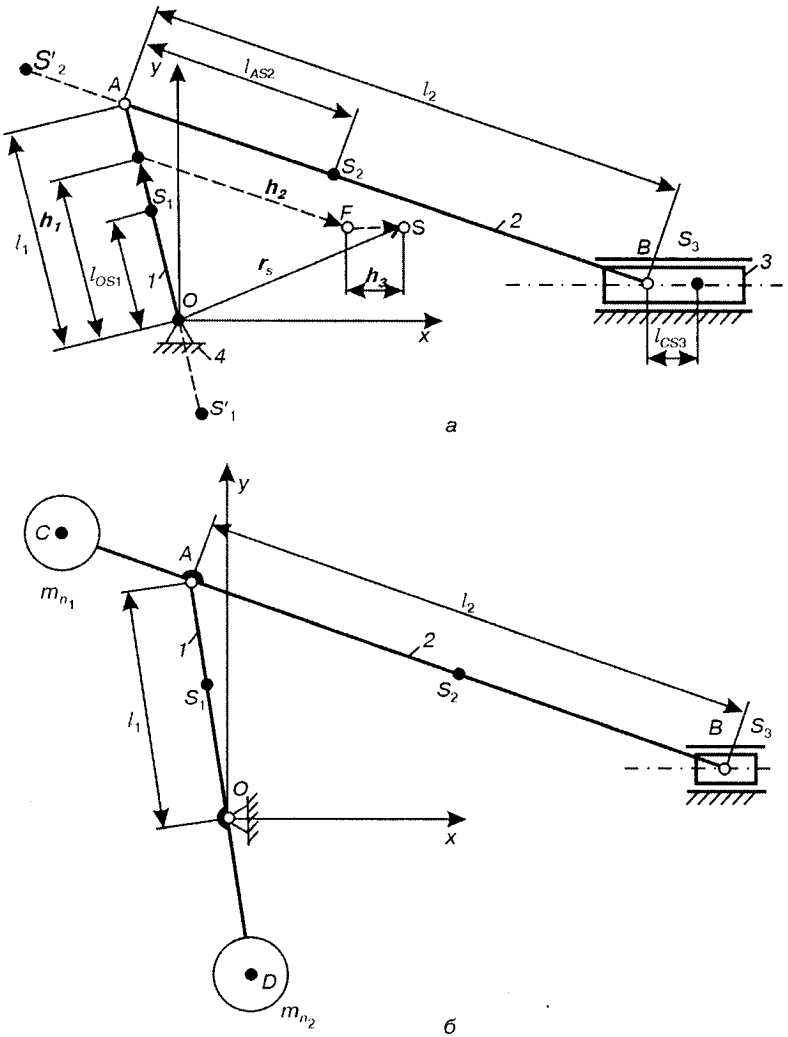


Рис. 14.5.

Формули (14.28) дають можливість вибору різних числових варіантів розв'язку задачі, але всі такі рішення не можуть змінити загальної картини розміщення центрів мас S_1 і S_2 ланок *1* і *2*:

$$l_{OS_1} < 0, \quad l_{AS_2} < 0, \tag{14.29}$$

тобто центри мас S_1 і S_2 вийшли за межі відповідно ланок *OA* і *AB*.

На рис. 14.5, *б* показано схему зрівноваження кривошипно-повзункового механізму (для простоти прийнято $l_{BS_3} = 0$). Для більш конструктивного виконання, при якому довжини ланок *1* і *2* за межами *OA* і *AB* були б не дуже великими, їх продовження виконують у вигляді противаг. Відповідні розрахунки щодо оформлення ланок *1* і *2* зводяться до рівнянь статичних моментів мас. При будь-яких варіантах обчислень не повинні порушуватись умови (14.27).

Отже, для повного зрівноваження сил інерції цього механізму необхідно встановити противаги, які розмістимо в точках *C* і *D*. Масу $m_{п_1}$ противаги *1* виберемо за умови, що спільний центр мас противаги *1*, шатуна *2* і повзуна *3* знаходиться у точці *A*. Тоді можна записати рівняння статичних моментів мас відносно точки *A*:

$$m_{п_1} l_{AC} = m_2 l_{AC_2} + m_3 l_{AB},$$

звідки

$$m_{п_1} = (m_2 l_{AS_2} + m_3 l_{AB}) / l_{AC}. \qquad (14.30)$$

Встановлюючи противагу в точці *C*, зміщуємо центр мас системи шатун—повзун у точку *A*, і надалі масу противаги *1*, шатуна *2* та повзуна *3* можна замінити однією еквівалентною масою $m_A = m_{п_1} + m_2 + m_3$ та розмістити її у точці *A*.

Масу противаги $m_{п_2}$ виберемо за умови, що центр мас усього механізму буде знаходитися у точці *O*, тобто противага *2* зрівноважить масу кривошипа *1* і масу m_A. Рівняння рівноваги статичних моментів мас відносно точки *O* має вигляд

$$m_{п_2} l_{OD} = m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}. \qquad (14.31)$$

Тоді

$$m_{п_2} = (m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}) / l_{OD}. \qquad (14.32)$$

Отже, спільний центр мас ланок механізму у будь-якому положенні буде нерухомим і при $l_{BS_3} = 0$ збігатиметься з точкою *O*.

За допомогою двох противаг можна також зрівноважити сили інерції у шарнірному чотириланковому механізмі (рис. 14.6), розмістивши їх на продовженнях кривошипа *OA* і коромисла *BC*.

Для цього замінимо масу m_2 шатуна *AB* на дві маси m_A і m_B, які розмістимо відповідно у точках *A* і *B*, витримавши умови (14.17), де $a = l_{AS_2}$; $b = l_{BS_2}$. Тоді згідно з (14.18) маємо

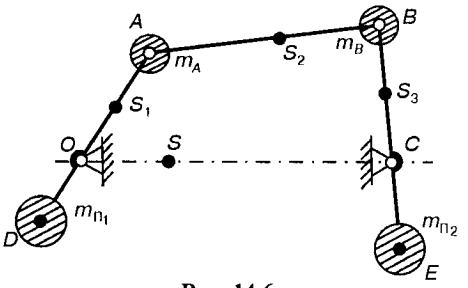


Рис. 14.6.

$$m_A = m_2 l_{BS_2} / l_{AB},$$

$$m_B = m_2 l_{AS_2} / l_{AB}. \quad (14.33)$$

Масу $m_{П_1}$ противаги D вибирають так, щоб сума статичних моментів мас відносно точки O дорівнювала нулю, тобто

$$m_{П_1} l_{OD} = m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}, \quad (14.34)$$

звідки

$$m_{П_1} = (m_1 l_{OS_1} + m_A l_{OA}) / l_{OD}. \quad (14.35)$$

Аналогічно знаходимо масу $m_{П_2}$ противаги E, записуючи рівняння

$$m_{П_2} l_{CE} = m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3}, \quad (14.36)$$

де

$$m_{П_2} = (m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3}) / l_{CE}. \quad (14.37)$$

Отже, і в цьому випадку загальний центр мас S механізму нерухомий і знаходиться на осі OC, оскільки центр мас системи мас m_1, m_A і $m_{П_1}$ розташований у точці O, а системи мас m_3, m_B і $m_{П_2}$, які є нерухомими, перебувають у точці C.

14.4.3. Часткове зрівноваження сил інерції

На практиці рідко виконують повне зрівноваження сил інерції механізмів, зокрема кривошипно-повзункового, який зображений на рис. 14.5, оскільки противагу в точці C з конструктивних міркувань доцільно розміщати поблизу від точки A, тоді маса противаги $m_{П_1}$ буде дуже великою, і внаслідок цього виникають додаткові навантаження в шарнірах, напрямній повзуна і т. д. При зрівноваженні такого механізму обходяться лише однією противагою (рис. 14.7), розміщеною на продовженні кривошипа OA у точці D.

При такому зрівноваженні механізму масу m_2 шатуна AB розподіляють у дві точки A і B так, щоб задовольнялись умови (14.17).

Позначимо маси, розміщені у цих точках, відповідно m_A і m_B. Маса m_A разом з кривошипом здійснює обертовий рух, а разом з повзуном B — поступальний рух. За допомогою противаги D можна зрівноважити лише обертові маси: масу кривошипа m_1 і частину маси шатуна m_A.

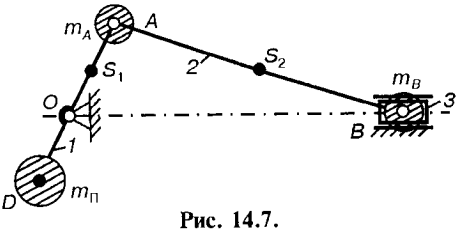


Рис. 14.7.

Записуючи рівняння статичних моментів мас відносно центра обертання кривошипа

$$m_1 l_{OS_1} + m_A l_{AB} = m_П l_{OD}, \tag{14.38}$$

знаходимо масу противаги

$$m_П = (m_1 l_{OS_1} + m_A l_{AB}) / l_{OD}. \tag{14.39}$$

У цьому випадку залишаються незрівноважені сили інерції від маси повзуна m_3 і частина маси шатуна m_B, які здійснюють поступальний рух. Подібне часткове зрівноваження дуже часто застосовується на практиці (наприклад, в сільськогосподарських машинах, двигунах, насосах, ковальсько-пресових верстатах тощо).

14.4.4. Зрівноваження складових сил інерції різних порядків

Методику зрівноваження сил інерції будь-якого порядку покажемо на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис. 14.7). Для цього використаємо формулу прискорення точки B, записану у вигляді ряду Фур'є [1]:

$$a_B = r\omega_1^2 (A_1 \cos\varphi + 4A_2 \cos 2\varphi + 16A_4 \cos 4\varphi + 36A_6 \cos 6\varphi + ...).$$

Тоді силу інерції маси $m_B = m_{B_2} + m_3$, яка рухається поступально (m_{B_2} — частина маси шатуна *2*, що розміщена у точці B, m_3 — маса повзуна *3*), можна визначити за формулою

$$F_{ін\ B} = m_B a_B = m_B r\ \omega_1^2 (A_1 \cos\varphi + 4A_2 \cos 2\varphi + \\ + 16A_4 \cos 4\varphi + 36A_6 \cos 6\varphi + ...), \tag{14.40}$$

де r — довжина кривошипа OA; A_1, A_2, A_3,... — коефіцієнти ряду; $\varphi = \omega_1 t$ — кут повороту кривошипа; ω_1 — його кутова швидкість.

Отже, силу інерції мас, що рухаються поступально, можна подати як суму окремих складових:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ін }B} = \boldsymbol{F}_{\text{ін }1} + \boldsymbol{F}_{\text{ін }2} + \boldsymbol{F}_{\text{ін }4} + \boldsymbol{F}_{\text{ін }6} + \ldots \qquad (14.41)$$

Умовимось називати сили інерції, величина яких пропорційна cos φ, ***силами інерції першого порядку:***

$$\boldsymbol{F}_{\text{ін }1} = A_1 m_B r\, \omega_1^2 \cos\varphi, \qquad (14.42)$$

а сили інерції, величина яких пропорційна cos2φ — ***силами інерції другого порядку***:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ін }2} = 4A_2 m_B r\, \omega_1^2 \cos 2\varphi; \qquad (14.43)$$

$\boldsymbol{F}_{\text{ін }4}$ — четвертого порядку; $\boldsymbol{F}_{\text{ін }6}$ — шостого порядку і т. д.

Сили інерції того чи іншого порядку можна зрівноважити за допомогою додаткових обертових противаг, які надалі будемо називати ***коректуючими масами***. Для цього слід на станині механізму встановити два зв'язані між собою диски з масами $m_{\text{к}}$ (рис. 14.8), які обертаються у різних напрямках з рівними кутовими швидкостями $n\omega_1$, де n — порядок гармоніки, яку необхідно зрівноважити. На ці маси будуть діяти сили інерції $\boldsymbol{F}_{\text{к}_i}$, які можна розкласти на дві складові — горизонтальну $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{ix}}$ і вертикальну $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{iy}}$. Якщо прийняти $n = 1$, то ці складові визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{F}_{\text{к}_{ix}} = \omega_1^2 m_{\text{к}} r_{\text{к}} \cos\varphi_{\text{к}}, \quad \boldsymbol{F}_{\text{к}_{iy}} = \omega_1^2 m_{\text{к}} r_{\text{к}} \sin\varphi_{\text{к}}. \qquad (14.44)$$

Вертикальні складові $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{1y}}$ і $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{2y}}$ взаємно зрівноважуються, а горизонтальні складові $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{1x}}$ і $\boldsymbol{F}_{\text{к}_{2x}}$ створюють силу

$$\boldsymbol{F}_{\text{к}_x} = \boldsymbol{F}_{\text{к}_{1x}} + \boldsymbol{F}_{\text{к}_{2x}} = 2\omega_{\text{к}}^2 m_{\text{к}} r_{\text{к}} \cos\varphi_{\text{к}}, \qquad (14.45)$$

яка зрівноважує силу інерції першого порядку за умови $\boldsymbol{F}_{\text{ін }1} = -\boldsymbol{F}_{\text{к}_x}$. Тоді, враховуючи (14.42) і (14.45), маємо

$$A_1 m_B \omega_1^2 r \cos\varphi = -2\omega_{\text{к}}^2 r_{\text{к}} \cos\varphi_{\text{к}},$$

звідки

$$\omega_{\text{к}} = \omega_1;\ \varphi_{\text{к}} = \pi + \varphi;\ m_{\text{к}} r_{\text{к}} = m_B r/2.$$

Для зрівноваження сил інерції другого порядку (14.43) потрібно, щоб $\boldsymbol{F}_{\text{ін }2} = -\boldsymbol{F}_{\text{к}_x}$, тобто

$$4F_2 m_B r\omega_1^2 \cos 2\varphi = -2\omega_к^2 r_к m_к \cos\varphi_к,$$

де

$$\omega_к = 2\omega_1;\ \varphi_к = 180° + 2\varphi;$$

$$m_к r_к = m_B r A_2 / 2.$$

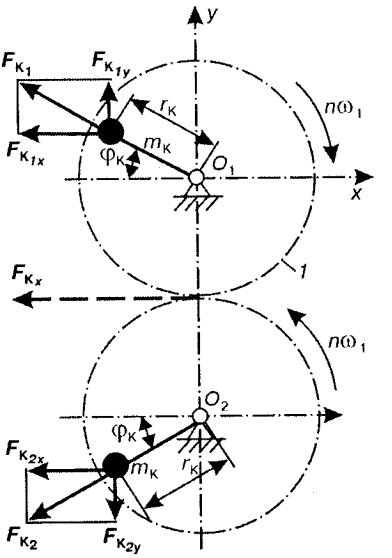


Рис. 14.8.

Аналогічно визначаються коректуючі маси для зрівноваження сил інерції *4*, *6* та інших порядків. На практиці здебільшого зрівноважують лише сили інерції першого порядку, оскільки вони в декілька раз більші від сил інерції другого порядку, і відповідно більше від сил інерції вищих порядків. Приклад такого зрівноваження кривошипно-повзункового механізму показано на рис. 14.9. Тут маса противаги $m_п$ зрівноважує обертові маси (масу кривошипа m_1 і частину маси шатуна m_{A_2}, яка розміщена у точці *A*), а коректуючі маси $m_к$ — сили інерції першого порядку від мас, що рухаються поступально, $m_3 + m_{B_2}$, де m_3 — маса повзуна *3*; m_{B_2} — частина маси шатуна *2*, яка розміщена у точці *B*.

14.4.5. Проектування самозрівноважуваних механізмів

Повного зрівноваження сил інерції можна досягнути і без розміщення противаг, якщо спроектувати так званий ***самозрівноважуваний механізм.*** Прикладом такого механізму є здвоєний кососиметрично розміщений кривошипно-повзунковий механізм (рис. 14.10, *а*), який використовується в мотоциклетних та інших двигунах внутрішнього згорання. У механізмі кривошипи OA_1 і OA_2, шатуни A_1B_1 і A_2B_2 та повзуни B_1 і B_2 — абсолютно однакові, а тому сили інерції такого механізму постійно зрівноважені, тобто головний вектор

$$\boldsymbol{F}_{ін} = \boldsymbol{F}_{ін1} + \boldsymbol{F}_{ін2} + \boldsymbol{F}_{ін3} + \boldsymbol{F}_{ін4} + \boldsymbol{F}_{ін5} = 0,$$

оскільки $\boldsymbol{F}_{ін_1} = 0$; $\boldsymbol{F}_{ін2} + \boldsymbol{F}_{ін4} = 0$; $\boldsymbol{F}_{ін3} + \boldsymbol{F}_{ін5} = 0$.

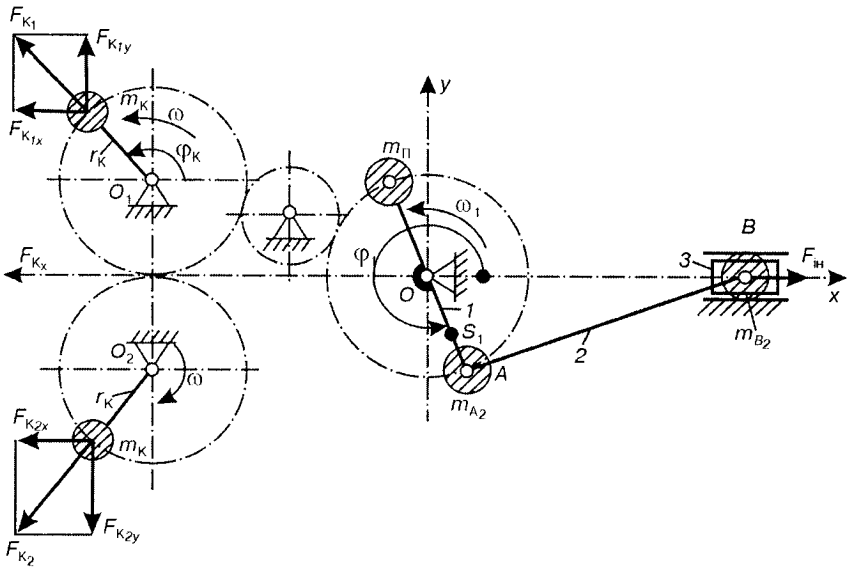
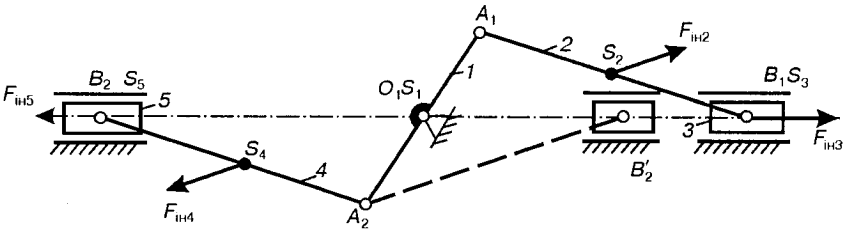
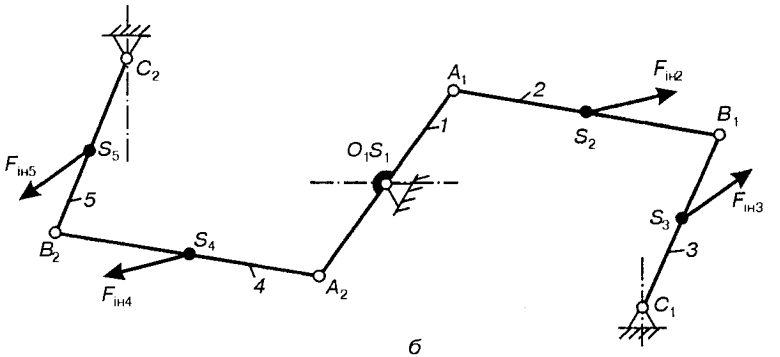


Рис. 14.9.



а



б

Рис. 14.10.

Проте у цьому випадку моменти сил інерції не будуть зрівноважені, оскільки шатуни A_1B_1 і A_2B_2 не можуть конструктивно розташовуватись в одній площині.

Аналогічно, шляхом установки здвоєних механізмів можна повністю зрівноважити сили інерції у шарнірному чотириланковому механізмі (рис. 14.10, *б*).

На практиці не завжди вдається симетрично відносно центра обертання кривошипа O розмістити повзуни B_1 і B_2, їх встановлюють з одного боку (на рис. 14.10, *а* таке розташування шатуна A_2B_2' і повзуна B_2' зображено штриховими лініями). У цьому випадку досягається лише часткове зрівноваження сил інерції.

14.4.6. Зрівноваження моментів сил інерції

Для повного зрівноваження механізмів необхідно зрівноважити, крім головного вектора сил інерції $\boldsymbol{F}_{\text{ін}}$, ще і головний момент сил інерції $\boldsymbol{M}_{\text{ін}}$. Задачею такого зрівноваження є досягнення умови

$$\boldsymbol{M}_{\text{ін}} = 0. \tag{14.46}$$

Таке зрівноваження називають ***моментним.***

Розглянемо моментне зрівноваження на прикладі шарнірного чотириланкового механізму (рис. 14.11, *а*) [72]. Розрахунок здійснимо при умові $\omega_1 = \text{const}$. Головний вектор моменту сил інерції механізму знаходимо за формулою:

$$M_{\text{ін}} = \sum_{i=1}^{n} M_{\text{ін}\,i} + \sum_{i=1}^{n} M_O(F_{\text{ін}\,i}), \tag{14.47}$$

де $M_{\text{ін}\,i}$ — момент сил інерції i-ї ланки; $M_O(\boldsymbol{F}_{\text{ін}\,i})$ — момент від сил інерції відносно точки O i-ї ланки. При цьому треба мати на увазі, що в механізмі попередньо цілком зрівноважені сили інерції і в схемі механізму з'явились противаги $m_{\text{п}_1}$ і $m_{\text{п}_2}$, які наближено розглядаються як зосереджені. Момент сил інерції $\boldsymbol{M}_{\text{п}_2} = M_O(\boldsymbol{F}_{\text{ін п}_2})$ противаги $m_{\text{п}_2}$ також необхідно включити в алгебраїчне рівняння (14.47). Отже, одержимо

$$M_{\text{ін}} = M_{\text{ін}2} + M_{\text{ін}3} + M_O(\boldsymbol{F}_{\text{ін}\,2}) + M_O(\boldsymbol{F}_{\text{ін}\,3}) + M_O(\boldsymbol{F}_{\text{ін п}_2}). \tag{14.48}$$

Оскільки момент $M_{\text{ін}}$ визначаємо за умови — $F_{\text{ін}} = 0$, то його величина не залежить від вибору центра зведення, отже, центром зведення не обов'язково вибирати точку O, це може бути будь-яка точка.

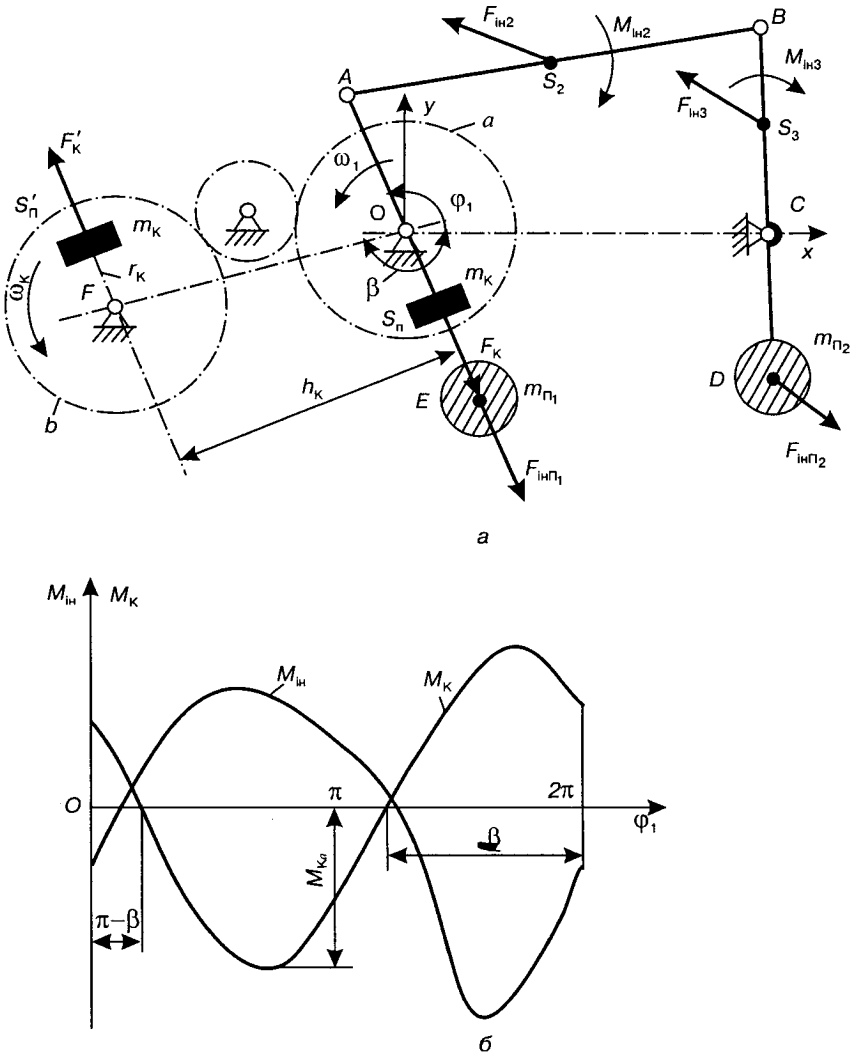


Рис. 14.11.

При русі механізму всі складові рівняння (14.48), а отже, і момент $M_{ін}$, змінюються періодично, як це показано на рис. 14.11, *б* для одного обороту початкової ланки. Для того, щоб зрівноважити загальний (головний) момент сил інерції $M_{ін}$, визначений рівнянням (14.48), необхідно створити зрівноважувальний момент $M_к$, який задовольняв би умову

$$M_к = -M_{ін}. \qquad (14.49)$$

Для цього введемо у схему механізму дві однакові противаги масою $m_к$ (коректуючі маси), які встановимо на зубчастих колесах *a* і *b* (рис. 14.11, *а*), що мають однакові за величиною і напрямком кутові швидкості. Коректуючі маси встановлені на однаковій відстані $r_к$ від центрів обертання коліс, але кутові координати відрізняються одна від одної на 180°. У результаті цього відцентрові сили інерції противаг складають пару сил $[\boldsymbol{F}_к, \boldsymbol{F}'_к]$ з плечем $h_к$. Плече пари $h_к = l_{OF}\sin(\varphi_1 + \beta)$; модуль відцентрової сили $F_к = m_к r_к \omega_1^2$. Тому момент пари сил, який надалі будемо називати ***коректуючим***, визначається залежністю

$$M_к = m_к r_к \omega_1^2 l_{OF} \sin(\varphi + \beta) = M_{кa}\sin(\varphi_1 + \beta). \qquad (14.50)$$

Положення точки F треба вибирати так, щоб коректуючий момент $M_к$ був направлений назустріч моменту $M_{ін}$.

Після установки противаг в точках $S_п$ і $S'_п$ вся система сил інерції механізму буде зведена до загального моменту інерції $M_{ін\Sigma} = M_{ін} + M_к$. Момент інерції $M_к$ згідно з рівнянням (14.50) змінюється за синусоїдним законом. У той же час, як видно з рис. 14.11, *б*, незрівноважений момент інерції $M_{ін}$ змінюється за іншим законом. Отже, коректуючий момент $M_к$ не може точно зрівноважити момент $M_{ін}$. Тому необхідно знайти таке значення кута β і амплітуду $M_{кa}$, при яких синусоїдна залежність найкраще би апроксимувала функцію $M_{ін}(\varphi_1)$. Тоді моментне зрівноваження буде практично виконано, оскільки $M_к \approx M_{ін}$. Після цього визначаємо масу кожної противаги

$$m_к = \frac{M_{кa}}{r_к \omega_1^2 l_{OF}}. \qquad (14.51)$$

Отже, одержимо повне зрівноваження механізму, у якому виконуються обидві умови ($\boldsymbol{F}_{ін} = 0$ і $M_{ін} = 0$). Такий механізм не створює ніякої динамічної дії на свою основу, хоча і має ланки, які рухаються з прискоренням.

Незрівноважений головний момент сил інерції (так само, як і головний вектор сил інерції) можна також подати у вигляді ряду з n гармонік (див. п. 14.4.4) [6]. Тоді для зрівноваження n-ї гармоніки моменту сил інерції на станині машини також встановлюють пару зубчастих коліс (рис. 14.12), які обертаються з однаковими кутовими швидкостями $n\omega$ і на яких встановлено

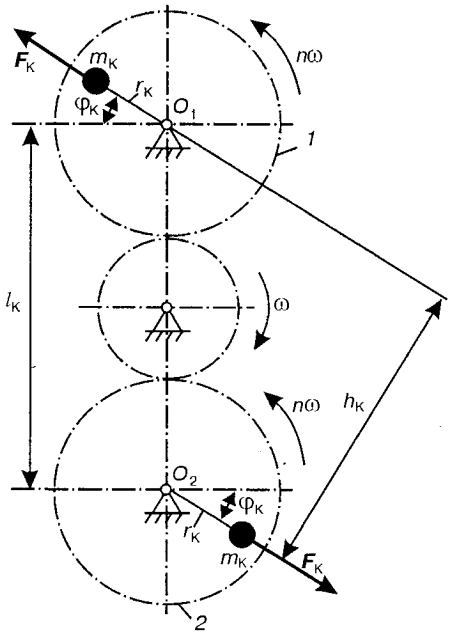


Рис. 14.12.

однакові коректуючі маси $m_к$. Сили інерції $F_к$, що виникають при обертанні коліс, створюють момент пари сил $M_к = F_к h_к = F_к l_к \cos\varphi_к$, який зрівноважить n-у гармоніку головного вектора моменту сил інерції механізму за умови $M_к = -M_{ін}$, де $M_{ін_n}$ — момент сил інерції n-го порядку.

Як видно із сказаного, для одночасного зрівноваження горизонтальної і вертикальної складових сил інерції та момента сил інерції n-го порядку потрібно встановити на шести зубчастих колесах додаткові (коректувальні) маси, забезпечивши передаточне відношення від початкової ланки до зубчастого колеса ($i = 1/n$).

Можна показати [67], що зрівноваження n-ї гармоніки можна виконати за допомогою лише двох різних противаг, які обертаються у різні сторони. При такому зрівноваженні доводиться знаходити не тільки величину кожної противаги, але і їх взаємне розташування та положення центрів мас.

Зазначимо досить важливу властивість механізмів, у яких зрівноважені сили інерції: такий механізм зберігає своє зрівноваження сил інерції при будь-якій величині ω_1 кутової швидкості початкової ланки як сталої, так і змінної.

14.4.7. Зрівноваження багатокривошипних машин

Зрівноваження таких машин розглянемо на прикладі багатоциліндрового двигуна, складеного з декількох кривошипно-повзункових механізмів, ланки яких рухаються в паралельних площинах і приводяться у рух одним колінчастим валом (рис. 14.13). Направимо вісь O_1z вздовж осі колінчастого валу та зведемо маси рухомих ланок кожного кривошипно-повзункового механізму до шарнірів A і B. Тоді величина зведених мас визначається рівняннями

$$m_A = m_{A_1} + m_{A_2} = \frac{l_{OS_1}}{r} m_1 + \frac{l_{BS_2}}{l} m_2,$$

$$m_B = m_3 + m_{B_2} = m_3 + \frac{l_{AS_2}}{l} m_2. \qquad (14.52)$$

Тут маса m_{A_1} кривошипа OA зведена до точки A; m_{A_2}, m_{B_2} — частини маси шатуна AB, зведені відповідно до точок A і B.

Маси m_A відповідних механізмів, зведені до точок A_1, A_2, A_3, можна зрівноважити противагами, які розташовані на продовженні кривошипів O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3. Маса кожної противаги визначається рівнянням статичних моментів мас відносно центрів обертання O (див. рис. 14.7): $m_п l_{OD} = m_A l_{OA}$, звідки

$$m_п = m_{OA} / l_{OD}. \qquad (14.53)$$

Тоді в двигуні незрівноважені лише сили інерції мас, що здійснюють поступальний рух, і зведені до точок B_1, B_2, B_3 та напрямлені паралельно осі O_1x. Причому кожна із цих сил буде визначатися рівнянням (14.40).

Зведемо ці сили за правилами статики до будь-якої точки, наприклад O_1. В результаті одержимо головний вектор $\boldsymbol{F}_{ін}$ і головний момент $\boldsymbol{M}_{ін}$ сил інерції. Тоді проекції на координатні осі головного вектора і головного момента сил інерції незрівноважених мас m_B (14.52) визначаються такими залежностями:

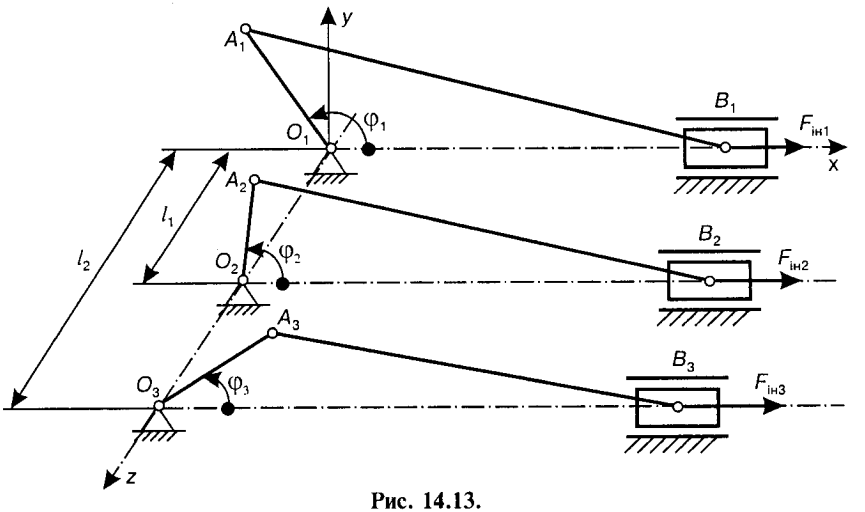


Рис. 14.13.

$$F_{\text{ін }x} = F_{\text{ін }1} + F_{\text{ін }2} + F_{\text{ін }3};\ F_{\text{ін }y} = 0;\ F_{\text{ін }z} = 0;$$

$$M_{\text{ін }x} = 0;\ M_{\text{ін }y} = F_{\text{ін }2}l_1 + F_{\text{ін }3}l_2;\ M_{\text{ін }z} = 0. \qquad (14.54)$$

Звідси видно, що головний вектор $F_{\text{ін}} = F_{\text{ін }x}$, а головний момент сил інерції $M_{\text{ін}} = M_{\text{ін }y}$.

Як відомо, головний вектор $F_{\text{ін}}$ не залежить від вибору центра зведення, а тому він завжди дорівнює нулю, якщо $F_{\text{ін }x} = 0$. Щодо головного момента сил інерції, то він залежить від положення вибраного центра зведення.

На практиці частіше зустрічаються випадки, коли в двигуні всі кривошипно-повзункові механізми розташовано симетрично відносно площини, перпендикулярної до осі O_1z, і мають рівні маси та розміри відповідних ланок. У цьому випадку головний момент сил інерції буде зрівноважений (при $M_{\text{ін}y} = 0$) відносно осі Oy, що проходить через точку O перетину осі O_1z з площиною симетрії (див. рис. 14.13).

На практиці вдається лише частково зрівноважити головний вектор $F_{\text{ін }x}$ і головний момент $M_{\text{ін }y}$ сил інерції, що досягається шляхом відповідного розташування колін вала та підбору числа кривошипно-повзункових механізмів.

Для оцінки ступеня незрівноваженості мас або, що те саме, сил інерції мас в багатоциліндричнорядних двигунах можна використовувати два способи: аналітичний з використанням рівнянь (14.40) і (14.54) і геометричний з використанням векторних рівнянь для сил або моментів сил інерції. Для прикладу розглянемо чотирициліндровий двигун, в якому коліна розташовані під кутом 180° (рис. 14.14). Застосуємо аналітичний спосіб.

Сили інерції першого порядку для механізмів *1* і *4* у відповідності з рівнянням (14.42)

$$F'_{\text{ін }1} = F'_{\text{ін }4} = A_1 m_B r\omega^2 \cos\varphi.$$

Аналогічно сили інерції першого порядку для механізмів *2* і *3* при куті повороту $\varphi + \pi$ визначаються так:

$$F'_{\text{ін }2} = F'_{\text{ін }3} = A_1 m_B r\omega^2 \cos(\varphi + \pi).$$

Тоді головний вектор сил інерції першого порядку на підставі першого рівняння рівностей (14.54) має вигляд

$$F'_{\text{ін }x} = F'_{\text{ін }1} + F'_{\text{ін }2} + F'_{\text{ін }3} + F'_{\text{ін }4} = 2A_1 m_B r\omega^2[\cos\varphi + \cos(\varphi + \pi)] = 0.$$

Отже, в такому двигуні сили інерції першого порядку зрівноважені.

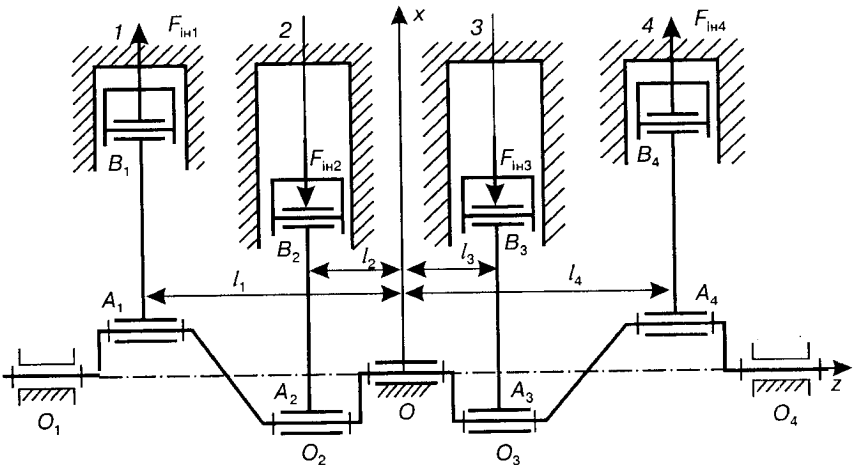


Рис. 14.14.

Зрівноваженим також буде і головний момент усіх сил інерції першого порядку за умови $l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$, оскільки

$$M'_{ін y} = F'_{ін1} l_1 - F'_{ін2} l_2 + F'_{ін3} l_3 - F'_{ін4} l_4 = 0.$$

Тепер знайдемо головний вектор і головний момент сил інерції другого порядку. Для механізмів *1* і *4*

а для механізмів *2* і *3* $F''_{ін1} = F''_{ін4} = 4A_2 m_B r\omega^2 \cos 2\varphi$,

$$F''_{ін2} 2 = F''_{ін3} = 4A_2 m_B r\omega^2 \cos 2(\varphi + \pi).$$

Тоді головний вектор сил інерції другого порядку

$$F''_{ін x} = F''_{ін1} + F''_{ін2} + F''_{ін3} + F''_{ін4} =$$

$$= 8A_2 m_B r\omega^2 [\cos 2\varphi + \cos 2(\varphi + \pi)] = 8A_2 m_B r\omega^2 \cos 2\varphi.$$

Отже, сили інерції другого порядку не зрівноважуються.

Не важко побачити, що головний момент усіх сил інерції другого порядку $M''_{ін y} = 0$.

Аналогічно можна провести аналіз ступеня незрівноваженості сил інерції вищих порядків. Легко побачити, що в такому двигуні головний момент сил інерції всіх порядків зрівноважений.

Детальніше питання зрівноваження механізмів викладено у працях [6, 52, 53, 68, 71, 83], в яких, крім цього, наведено широкий бібліографічний список інших праць, пов'язаних з питаннями зрівноваження, у тому числі просторових, багатоланкових механізмів із симетричними і несиметричними ланками.

14.5. Зрівноваження обертових мас

Оскільки розв'язання задачі про зрівноваження тисків у кінематичних парах механізмів у загальному випадку становить значні труднощі, то цю задачу розглянемо на деталях або вузлах, які здійснюють лише обертовий рух.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, при обертанні твердого тіла не виникає ніяких додаткових тисків на опори (підшипники) лише в тому випадку, коли вісь обертання тіла O є однією із трьох головних центральних осей інерції (x—x, y—y або z—z), які для круглого диску, показаного на рис. 14.15, *а*, є взаємно перпендикулярними і проходять через центр мас S. При обертанні диска навколо будь-якої з цих осей не буде жодних додаткових тисків на підшипники від сил інерції, тобто матимемо повне зрівноваження усіх сил інерції і всіх моментів сил інерції.

У всіх інших випадках обов'язково з'являються незрівноважені сили або моменти сил інерції, або перші та другі разом.

Статична незрівноваженість. Незрівноважені сили інерції з'являються тоді, коли центр мас S обертового тіла (рис. 14.15, *б*) не лежить на осі обертання O, тобто коли остання не збігається з головною центральною віссю інерції, а зміщена на величину e, яку називають ексцентриситетом маси. При обертанні диска на нього буде діяти крім сил ваги $\boldsymbol{G}$ ще сила інерції $\boldsymbol{F}_{\text{ін}}$, модуль якої визначається формулою:

$$F_{\text{ін}} = ma_S = m\omega^2 e, \qquad (14.55)$$

та напрямлена по радіусу OS і обертається разом з диском. Таку незрівноваженість обертової маси можна встановити в стані спокою, а тому її називають ***статичною незрівноваженістю.*** Статична незрівноваженість характеризується ***статичним дисбалансом***

$$D_{\text{ст}} = me. \qquad (14.56)$$

Незрівноважені сили інерції (14.55) можуть досягати значних розмірів і в багато разів перевищують вагу самої обертової деталі. Так, при незрівноваженій масі $m = 0{,}1$ кг, яка обертається

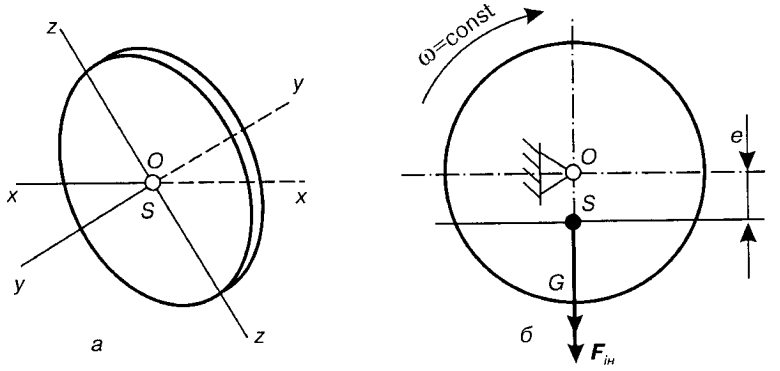


Рис. 14.15.

з швидкістю $\omega = 1000$ с$^{-1}$ ($n \approx 9550$ об/хв) при $e = 0{,}01$ м, виникає відцентрова сила $F_{ін} = 0{,}1 \cdot 1000^2 \cdot 0{,}01 = 1000$ Н, що в 1020 разів більша від ваги самої деталі. Відомо немало прикладів, коли незрівноважені сили інерції викликали руйнування роторів турбін і компресорів, підіймальних кранів, мостів, абразивних кругів тощо. Тому необхідно зрівноважувати всі швидкохідні частини машин і механізмів, починаючи від маятників ручних годинників і закінчуючи роторами турбін.

Характерно, що при умові $F_{ін} \geq G$ має місце підкидання вверх обертової деталі при кожному її обертанні, тобто деталь буде "бити". Згідно з (14.55), прийнявши $F_{ін} = G$, одержимо величину ексцентриситету, при якому наступить підкидання вала:

$$e = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}81}{1000^2} \approx 0{,}00001 \text{ м} = 0{,}01 \text{ мм}.$$

Отже, вже при $e = 0{,}01$ мм маса, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1000$ с$^{-1}$, почне "бити".

Для усунення статичної незрівноваженості треба так підібрати обертові маси, щоб виконувалася умова

$$F_{ін} = m\omega^2 e = 0. \qquad (14.57)$$

А це можливо лише тоді, коли центр ваги обертової маси збігатиметься з віссю обертання ($e = 0$), оскільки в механізмах $m \neq 0$ і $\omega \neq 0$.

Динамічна незрівноваженість. Для повного зрівноваження обертових мас недостатньо, щоб була забезпечена статична зрівноваженість, хоч центр мас може збігатися з віссю обертання. Для цього розглянемо вертикальний вал з двома однаковими

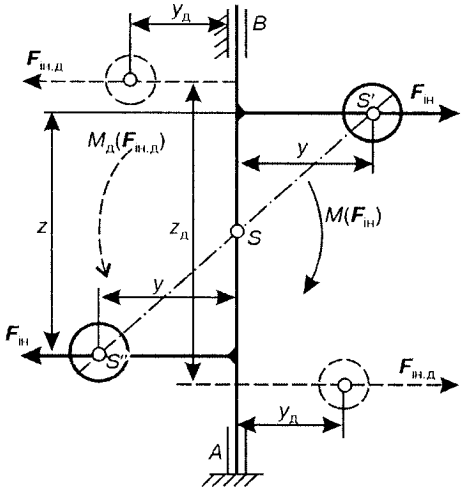


Рис. 14.16.

масами m, які знаходяться на однаковій відстані від осі обертання вала AB (рис. 14.16).

Очевидно, що центр мас S такої системи знаходиться на осі обертання, і вона статично зрівноважена. У стані спокою вал буде займати так зване байдуже положення. Проте при обертанні на кожну масу m діятимуть відцентрові сили інерції $F_{ін} = m\omega^2 y$, що створюють момент пари сил інерції

$$M(F_{ін}) = F_{ін} m\omega^2 yz. \quad (14.58)$$

Цей момент намагається повернути систему так, щоб лінія $S'S''$, яка проходить через центри мас, стала перпендикулярною до осі обертання. Така незрівноваженість називається ***динамічною***, і її можна виявити тільки при швидкому обертанні, але не в стані спокою: вона характеризується ***динамічним дисбалансом***

$$D_д = myz. \quad (14.59)$$

Для усунення динамічної незрівноваженості треба, щоб одна з головних центральних осей інерції обертового тіла збігалася з віссю обертання, тоді $M(F_{ін}) = 0$. Практично це досягається установленням двох вантажів у двох різних площинах (на рис. 14.16 показані штриховими лініями). Положення та маси цих вантажів вибираються так, щоб додатковий момент пари сил інерції $M_д(F_{ін.д})$ був рівним, але напрямленим у протилежний бік відносно незрівноваженого моменту, тобто

$$M_д(F_{ін.д}) = M(F_{ін}), \quad (14.60)$$

або з врахуванням (14.58)

$$m_д y_д z_д = myz. \quad (14.61)$$

Основними причинами незрівноваженості обертових деталей і вузлів можуть бути такі:

• конструкція обертових деталей або вузлів (наявність на валу кулачків, ексцентриків, кривошипів, шпонкових пазів тощо);

• неточність виготовлення та монтажу;

• нерівномірність розподілення матеріалу по об'єму деталі, включаючи раковини, різні отвори тощо;

• деформація деталей машин, особливо валів, як при монтажі, так і в процесі роботи;

• зношування елементів обертових пар та недопустимо великі зазори в них.

На практиці статична та динамічна незрівноваженості усуваються відповідним балансуванням обертових мас, які здійснюються на спеціальних балансувальних верстатах.

Статичне балансування. Задача статичного балансування полягає в тому, щоб усунути незрівноважений головний вектор сил інерції $\boldsymbol{F}_{\text{ін}}$ (14.57), тобто звести центр обертових мас до її осі обертання. Для цього використовуються різноманітні балансувальні верстати. У найпростішому виконанні це дві горизонтальні призми *2* (рис. 14.17, *а*) або дві пари роликів *3* (рис. 14.17, *б*), на які встановлюють обертові маси *1*. Якщо центр мас зміщено відносно осі обертання, то за рахунок моменту від сили ваги деталь повернеться так, що центр мас займе найнижче положення *S'*. Для того, щоб звести центр мас до осі обертання, необхідно на нижній (важчій) частині обертової деталі зняти (висвердлити) частину металу або на верхній (легшій) частині поставити додатковий тягар.

При такому балансуванні із-за сил тертя між деталлю і призмами (роликами) залишається деяка незрівноваженість обертової маси. Для її усунення балансування здебільшого здійснюють у два прийоми. Спочатку деталь зрівноважують до так званої байдужої рівноваги, при якій після повороту на призмах у різні положення вона залишається нерухомою. Для цього торець деталі, що балансується, ділять на шість рівних частин і, встановлюючи кожні два протилежні ділення в горизонтальне положення, підбором додаткових вантажів добиваються байдужого положення деталі на призмах. Потім для усунення дисбалансу, залишеного від сил тертя, підвішують поступово в одному з кожної пари протилежних ділень невеликі вантажі, виводячи деталь зі стану спокою. Як тільки деталь починає повільно обертатися на призмах, додаткові вантажі знімають і зважують. За мінімальним значенням ваги цих вантажів знаходять найважчу частину деталі, для зрівноваження якої висвердлюють надлишок мас у ній або в діаметрально протилежному місці встановлюють вантаж для балансування. Загальним недоліком вказаних пристроїв є їх обмежена чутливість, викликана тертям в опорах.

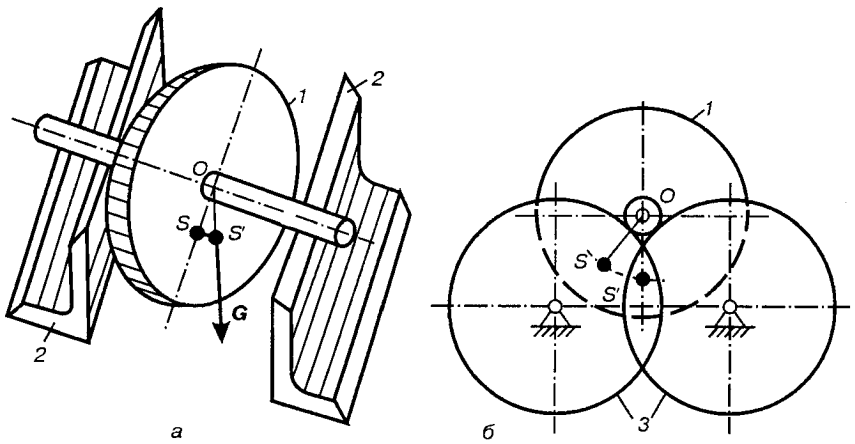


Рис. 14.17.

Більш точним і перспективним щодо точності балансування і її автоматизації є спосіб визначення статичної незрівноваженості *в процесі обертання деталей (роторів)*. Прикладом верстата, який працює за цим принципом, може служити верстат системи Г. М. Петрова і А. П. Устинова, схема якого зображена на рис. 14.18 [72]. Такий верстат складається з плити *1*, яка з'єднана з основою за допомогою пружин *2*. У підшипниках, встановлених у плиті, зі швидкістю ω навколо осі z обертається шпиндель *3*, який несе на собі незрівноважену деталь *4*. Із плитою *1* за допомогою м'якої пружини *5* зв'язана маса *6* сейсмічного датчика. Власна частота коливань маси датчика повинна бути значно менша за частоту обертання деталі. Маса *6* може вільно рухатися вздовж осі x, яка проходить через центр маси S_0 плити.

При обертанні шпинделя разом з деталлю вісь z під впливом незрівноваженості деталі описує конічну поверхню, а плита *2* здійснює просторовий рух. Складова цього руху направлена вздовж осі x і сприймається масою *6*. Вимушені коливання маси відносно плити *1* перетворюються датчиком в електрорушійну силу, подану в електронно-обчислювальний пристрій, який видає відомості про величину та кутові координати незрівноваженості деталі, що піддають балансуванню.

Статичному балансуванню слід піддавати порівняно тихохідні та короткі деталі, тобто такі, у яких довжина l значно менша від їх діаметра D, як правило, $l/D \le 0{,}2$. В інших випадках

(деталі типу роторів, барабанів, довгі валопроводи тощо) статичне балансування не усуває незрівноваженості обертових мас. У такому випадку необхідно здійснювати динамічне балансування.

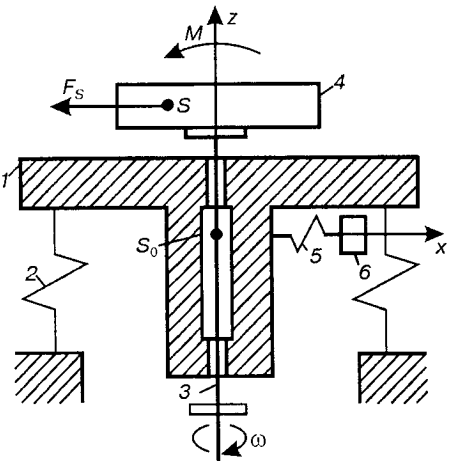


Рис. 14.18.

Динамічне балансування роторів при відомому розташуванні незрівноважених мас. Задачею динамічного балансування обертових мас є не тільки зведення центра мас до осі обертання, але і те, щоб головна центральна вісь інерції збігалася з віссю обертання. Якщо статичного зрівноваження обертових мас можна досягти за допомогою однієї противаги, то, як показано вище (див. рис. 14.16), динамічного — лише двома масами, встановленими у двох різних площинах.

Для прикладу розглянемо обертовий ротор (рис. 14.19), у площинах якого *1*, *2*, *3*, що перпендикулярні до осі обертання, знаходяться незрівноважені маси m_1, m_2, m_3. Положення незрівноважених мас у цих площинах задані радіусами-векторами $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$. Положення площин *1*, *2*, *3* відносно площини зведення *I* визначаються відповідно координатами z_1, z_2, z_3. Противаги встановлюються у площинах *I* і *II*, відстань між якими *l*. Позначимо масу противаги при статичному зрівноваженні через $m_{\text{п}}$, а радіус-вектор, який визначає положення центра мас через $\boldsymbol{r}_{\text{п}}$. Тоді умовою зрівноваженості ротора буде такою:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i + m_{\text{п}} \boldsymbol{r}_{\text{п}} = 0, \qquad (14.62)$$

тобто для статичного зрівноваження обертових мас необхідно забезпечити суму статичних дисбалансів рівною нулю.

Як відомо з викладеного вище, для повного зрівноваження ротора необхідно встановити дві противаги, які розміщують у двох площинах *I* і *II*. Позначимо маси цих противаг m_{I} і m_{II}, а радіуси-вектори, що визначають їх положення відносно їх осі обертання, через $\boldsymbol{r}_{\text{I}}$ і $\boldsymbol{r}_{\text{II}}$. Тоді умовами повного зрівноваження будуть

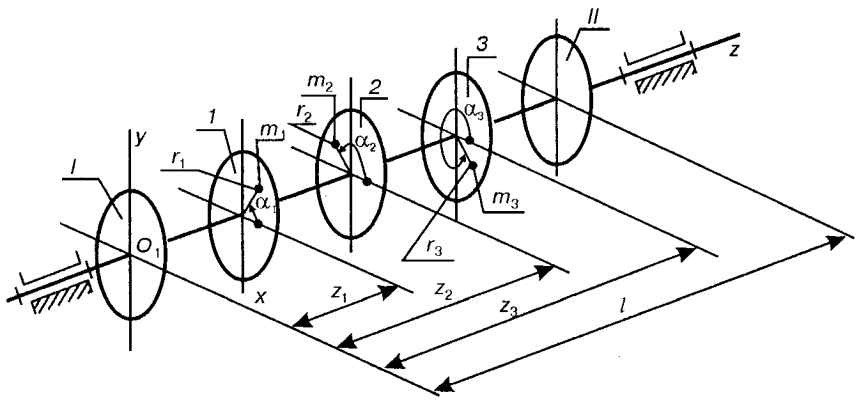


Рис. 14.19.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i + m_{\mathrm{I}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{II}} = 0, \tag{14.63}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i z_i + m_{\mathrm{II}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{II}} l = 0. \tag{14.64}$$

Отже, для динамічного зрівноваження обертових мас необхідно, щоб суми статичних і динамічних дисбалансів дорівнювали нулю.

При аналітичному розв'язанні цієї задачі рівняння (14.62) розгортається у два рівняння проекцій на осі координат, а рівняння (14.63) і (14.64) — у чотири рівняння проекцій на осі координат. Дуже зручним і наочним є графічний спосіб розв'язання цих рівнянь. Визначення величини і розміщення противаги графічним способом при статичному зрівноваженні досягається побудовою векторного многокутника (рис. 14.20) за рівнянням (14.62). У вибраному масштабі будують багатокутник, який складається з векторів $m_1\boldsymbol{r}_1$, $m_2\boldsymbol{r}_2$, $m_3\boldsymbol{r}_3$ і $m_{\mathrm{п}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{п}}$. Положення цих векторів визначається відповідно кутами α_1, α_2, α_3, $\alpha_{\mathrm{п}}$. Усі кути відраховуються проти годинникової стрілки від горизонтальної лінії, що проходить через початок відповідного вектора. Замикаючий вектор $m_{\mathrm{п}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{п}}$ многокутника виражає добуток маси противаги на радіус її розташування. Тоді задають одну величину (наприклад, масою) і визначають іншу величину (радіус). Напрямок радіуса-вектора $\boldsymbol{r}_{\mathrm{п}}$ противаги визначається кутом $\alpha_{\mathrm{п}}$, який вимірюють безпосередньо на кресленні.

При повному (динамічному) зрівноваженні спочатку будують векторний багатокутник динамічних дисбалансів за рівнянням (14.64). При цьому вектори динамічних дисбалансів зручно повернути на 90° так, щоб вони збігалися з напрямками відповідних сил інерції. Модуль замикаючого вектора многокутника дорівнює добутку $m_{II}r_{II}l$ (рис. 14.21, *а*), де координата l відома і дорівнює відстані між площинами зрівноваження. З цього добутку легко визначити радіус r_{II} (або масу противаги m_{II}), якщо задати масу противаги (або радіусом). Кут α_{II}, який визначає напрямок радіуса-вектора, вимірюється на кресленні.

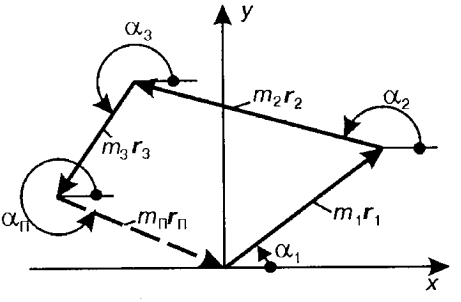


Рис. 14.20.

Потім будуємо многокутник (рис. 14.21, *б*) за рівнянням (14.63). У цьому многокутнику невідомою величиною буде замикаючий вектор, модуль якого дорівнює добутку m_1r_1. Задав один із співмножників у цьому добутку (наприклад, масу m_1), знайдемо другий. Кут α_1, який визначає напрямок радіуса-вектора противаги, знаходимо з рисунка.

Динамічне балансування роторів при невідомому розташуванні незрівноважених мас. У цьому випадку використовуються різні балансувальні верстати. Далі розглянемо балансувальний верстат системи Б. В. Шитикова (рис. 14.22, *а*). Ротор *1*, що необхідно зрівноважити, встановлено на підшипниках у жорсткій рамі *3*.

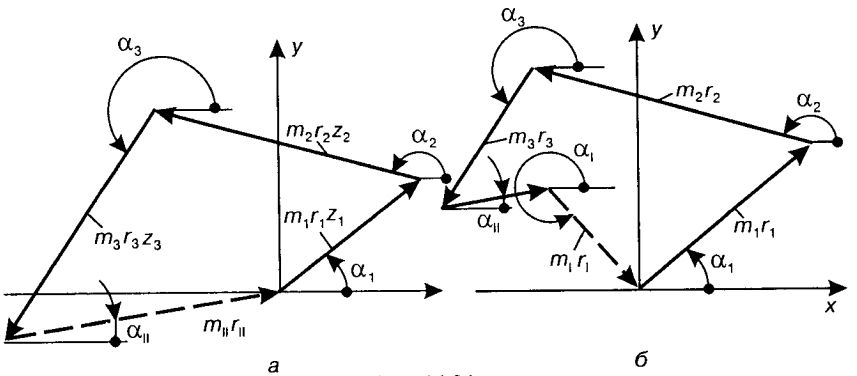


Рис. 14.21.

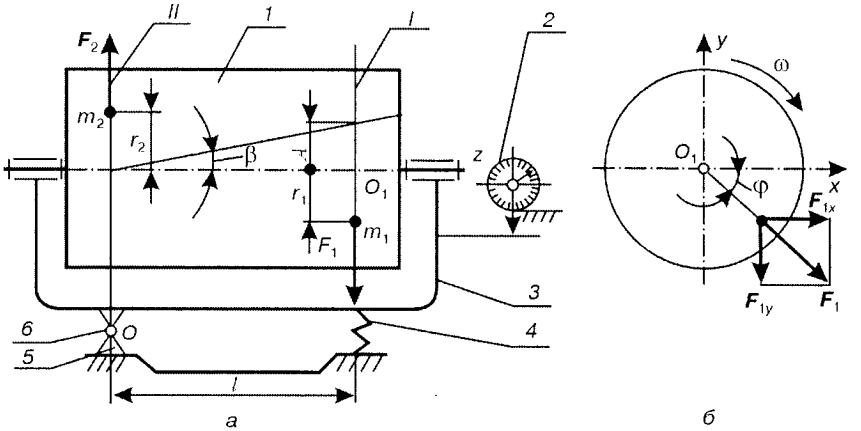


Рис. 14.22.

Остання шарніром *6* зв'язана з нерухомою основою *5*. Вісь шарніра *6* розташована горизонтально і повинна бути перпендикулярна до осі ротора *1*. Рама *3* підтримується пружиною *4*, тому ротор разом з рамою *3* утворює пружну систему, яка може коливатися відносно осі шарніра *6*.

Як відомо, всі незрівноважені маси ротора *1* можна зрівноважити двома масами, розташованими у двох довільно вибраних площинах, що перпендикулярні до осі обертання ротора. Ці площини вибирають так, щоб була реальна можливість встановити в них противаги. Після цього встановлюють ротор на рамі *3* так, щоб одна з площин (наприклад *II*) проходила через вісь обертання рами *3* — точку *O*. Інша площина (*I*) знаходиться від першої на відстані *l*. У площинах *I* і *II* розташовані на відстанях від осі ротора r_1 і r_2 невідомі зведені маси m_1 і m_2. Якщо обертати ротор *1* з кутовою швидкістю ω, то за рахунок мас m_1 і m_2 виникають відцентрові сили інерції (рис. 14.22, *б*), які також обертаються з кутовою швидкістю ω:

$$F_1 = m_1 r_1 \omega^2,\ F_2 = m_2 r_2 \omega^2.$$

Сила F_2 лежить у площині, що проходить через вісь обертання рами *3*, а тому вона буде зрівноважена реакцією у шарнірі *6*. Силу F_1, яка обертається з кутовою швидкістю ω, можна розкласти на горизонтальну і вертикальну складові (рис. 14.22, *б*):

$$F_{1x} = F_1 \cos\omega t,\ F_{1y} = F_2 \sin\omega t.$$

Ці сили діють відносно точки *O* на відстані *l*, створюють момент, який передається рамі *3*. Момент від горизонтальної

складової зрівноважується реактивним моментом шарніра *6*. Момент від вертикальної складової викликатиме вимушені кутові коливання рами з ротором відносно осі *O* шарніра *6*. Оскільки у верстатах Б. В. Шитикова вісь коливання рами і вісь обертання ротора практично перетинаються і кутова амплітуда рами невелика, можна вважати, що точка O_1 (точка перетину площини *I* з віссю ротора) рухається прямолінійно і вертикально, також рухаються і всі інші точки рами, які лежать в одній площині з її віссю коливання. З теорії коливань відомо, що амплітуда вимушених коливань точки O_1 для розглянутого випадку визначається виразом:

$$A = \beta l = \frac{A_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \alpha), \qquad (14.65)$$

де $A_{ст} = F_1/k$ — амплітуда, яка була б при статичній дії сили F_1 (тут k — жорсткість пружної системи); ω і p — частоти відповідно збуджувальної сили (сили інерції) і власних коливань; n — коефіцієнт, який залежить від опору середовища.

Множина $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}}$ називається ***динамічним коефіцієнтом.*** Амплітуду вимушених коливань одержують множенням статичної амплітуди на цей коефіцієнт. При рівності частот ω і p наступає явище резонансу. Якщо опору середовища немає ($n = 0$), резонансна амплітуда дорівнює нескінченності. При $n \neq 0$ максимальна амплітуда (при $\sin(\omega t - \alpha)$ і $\omega = p$)

$$A_{max} = \frac{A_{ст} p}{2n}. \qquad (14.66)$$

Підставляючи сюди значення $A_{ст}$ і сили F_1, дістаємо

$$A_{max} = \frac{F_1}{k}\frac{p}{2} = \frac{m_1 n\omega^2 p}{2nk}. \qquad (14.67)$$

Оскільки жорсткість і власна частота коливань підвішеної системи рама—ротор у процесі балансування практично не змінюється через відносно малу величину противаг, що встановлюються, величина A_{max} при резонансі ($\omega = p$) пропорційна статичному моменту незрівноваженої маси. За великих амплітуд починає зростати швидкість мас, що коливаються, і змінюється

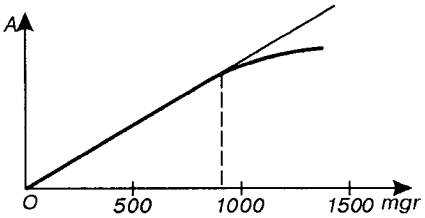


Рис. 14.23.

опір середовища. Пропорційність між статичним моментом незрівноваженої маси і амплітудою коливань рами порушується. У досліді, проведеному на балансувальному верстаті ТММ-1, здобуто діаграму залежності максимальної амплітуди A_{max} від статичного моменту незрівноваженої маси, яка зображена на рис. 14.23. З наведеної діаграми видно, що для верстата цього типу пропорційність зберігається при величинах *mgr*, не вище 1000—1200.

Пропорційність резонансної амплітуди A статичному моменту незрівноваженої маси використовується у верстаті Б. В. Шитикова для визначення величини і положення незрівноваженої маси.

У площині *I* проводиться лінія відліку *x—x* (рис. 14.24, *а*). Нехай незрівноважена маса m_1 знаходиться на радіусі r_1, який утворює з напрямком *x—x* кут α. Розігнавши ротор до обертів, на яких ω буде більшою від *p*, дамо йому вільно вибігати (сповільнювати рух). Зменшуючи оберти, ротор дійде до резонансної частоти; у цей момент рама *3* матиме найбільшу амплітуду. Зафіксуємо максимальну амплітуду коливання за допомогою індикатора *2* (див. рис. 14.22, *а*). Ця амплітуда A_1 на підставі викладеного раніше буде пропорційна статичному моменту m_1r_1 незрівноваженої маси, яка знаходиться у площині *I*. Вона буде також пропорційна відцентровій силі інерції F_1 цієї незрівноваженої маси, тобто

$$A_1 = \mu F_1,$$

де μ — коефіцієнт пропорційності.

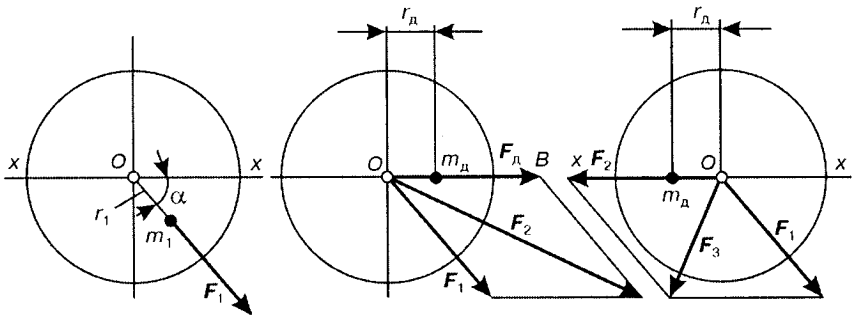


Рис. 14.24.

Встановимо на лінії x—x на відстані $r_д$ від осі обертання ротора додаткову масу $m_д$ (рис. 14.24, *б*) і знову, розігнавши ротор, виміряємо амплітуду A_2 коливань рами. Очевидно, ця амплітуда буде пропорційна відцентровій силі інерції F_2, яка є рівнодіючою відцентрової сили інерції від незрівноваженої маси і відцентрової сили додаткової маси $m_д$:

$$A_2 = \mu F_2.$$

Знімемо додаткову масу з попереднього місця і встановимо її на цій самій лінії x—x, на такій самій відстані від осі обертання, але з протилежного боку (рис. 14.24, *в*). Розженемо ротор і знову виміряємо амплітуду A_3 коливань при резонансі. Ця амплітуда буде пропорційна відцентровій силі інерції F_3, яка є рівнодіючою сил F_1 і $F_д$ ($A_3 = \mu' F_3$). На рис. 14.24, *б, в* побудовано паралелограми сил вказаних двох положень додаткової маси. Зазначимо, що ці паралелограми рівні, оскільки вони мають рівні сторони та рівні кути. На рис. 14.25 побудовано паралелограм $OBCA$, в якому сили замінено пропорційними їм величинами амплітуд. У цьому паралелограмі відомі сторони A_1 і діагоналі A_2 та A_3. Оскільки сторона $A_д = OB$ невідома, то вона дорівнює тій максимальній амплітуді, яку одержали б при резонансі від однієї додаткової маси $m_д$. Як відомо, у паралелограмі сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів діагоналей:

$$2A_д^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + 2A_3^2,$$

звідки

$$A_д = \sqrt{(A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2)/2}, \qquad (14.68)$$

але $A_д = \mu' F_д$.

Оскільки відцентрові сили інерції пропорційні статичним моментам від мас (при однаковій кутовій швидкості ротора), то тепер можна визначити коефіцієнт пропорційності між амплітудами і статичними моментами від мас:

$$\mu = \frac{A_д}{m_д r_д}, \qquad (14.69)$$

де $m_д r_д$ — статичний момент (дисбаланс) від додаткової маси.

Тепер легко визначити для незрівноваженої маси m_1 її статичний дисбаланс $m_1 r_1 = A_1/\mu$.

Статичний момент маси противаги ($m_п r_п$) має дорівнювати статичному моменту від незрівноваженої маси $m_1 r_1$ і бути напрямленим у протилежний бік:

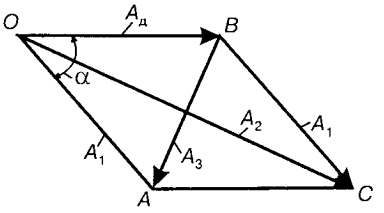


Рис. 14.25.

$$m_п r_п = m_1 r_1.$$

Якщо задати масу противаги $m_п$, можна визначити

$$r_п = m_1 r_1 / m_п. \qquad (14.70)$$

Для визначення напрямку радіуса-вектора $\boldsymbol{r}_п$ (кута α) звернемося до рис. 14.25. З трикутника *OAB* маємо

$$A_3^2 = A_1^2 + A_д^2 - 2A_1 A_д \cos\alpha,$$

звідки

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A_д^2 - A_3^2}{2A_1 A_д}. \qquad (14.71)$$

Одному значенню косинуса відповідає два значення кута α (−α і +α). Отже, противага має бути розташована на одному з діаметрів, який визначається кутом ±α.

Після того як знайдено масу противаги і її радіус-вектор для площини *I*, переходять до визначення противаги площини *II*. Ротор *1* виймають з рами *3*, повертають у площині, яка проходить через його вісь, на 180° і знову встановлюють на раму. При цьому площини *I* і *II* міняються місцями. Противагу для площини *II* знаходять так само, як це описано раніше.

У сучасній техніці використовуються досконаліші балансувальні верстати [68], які базуються на сучасних електрофізичних методах і засобах балансування. На практиці одержали застосування лазерні, електрохімічні та інші методи і засоби балансування.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МАШИН

15.1. Основні поняття та визначення

У вступній частині (див. параграф 1.2) дано визначення машини, машинного агрегату, машини-автомату та автоматичної лінії, наведена функціональна класифікація машин. У цьому розділі розглянуто загальні для різних машин проблеми та методи їх розв'язання. Для виконання поставлених завдань слід попередньо встановити умови виконання процесів обробки матеріалів або виробів у машинах, їх послідовності; вивчити структурні елементи машин та їх взаємозв'язок. Ці питання розглянемо на прикладі технологічних машин, оскільки вони складніші, чим енергетичні або інші групи машин [41, 42, 72, 75, 84].

Випуск будь-якої продукції пов'язаний з витратами корисної роботи, які залежать від багатьох факторів, але, в першу чергу від способу виготовлення, тобто від технології та організації виробництва продукції.

Технологічні процеси та операції. Встановлену послідовність операцій зміни положень, форми і стану поверхні та структури сировини (матеріалу) або напівфабрикатів, які необхідні для одержання готової продукції з відповідними технологічними властивостями, називають ***технологічним процесом***. Технологічні процеси, які виконуються за допомогою відповідних механізмів машин, на відміну від ручних, називаються ***машинними***.

Слід розрізняти ***машинні технологічні процеси***, які виконуються механізмами, і ***апаратні техноло-***

гічні процеси — хімічні, теплові, електричні, ультразвукові тощо. У сучасних технологічних машинах ті та інші процеси часто виконуються разом. Наприклад, при переробці пластмас у вироби проходить нагрівання форми і вихідного матеріалу струмами високої частоти та здійснюється пресування пуансоном. При литві під тиском здійснюються нагрів розплаву електронагрівачами, нагнітання рідкої маси поршнем і охолодження відливки та форми охолоджуючими пристроями.

Під ***технологічною операцією*** розуміють певну закінчену однорідну частину технологічного процесу виробництва, яка виконується одними і тими ж робочими знаряддями або робочими органами. Технологічні операції за своїм характером ділять на основні, допоміжні, контрольні та операції керування.

Основними називають такі технологічні операції, в процесі яких здійснюється безпосередня обробка сировини або напівфабрикатів (наприклад, різання металу, його пластична деформація — штамповка або ковка, тощо). ***Допоміжними*** називають операції, які пов'язані з установкою та зняттям виробів (подача, базування, затискання заготовок і зняття обробленого виробу, переміщення виробів у процесі обробки та після неї). При ***контрольних*** операціях здійснюється перевірка відповідності виконання технологічного процесу технічним вимогам, які ставляться до нього (правильності базування, точності обробки тощо). Операції ***керування*** містять у собі операції настройки механізмів, пуск і зупинка машини, коректування технологічного процесу.

Технологічні операції можуть здійснюватися як послідовно (одна за одною), так і паралельно (суміщенням за часом). Технологічні процеси можуть включати різні комбінації як послідовних, так і паралельних операцій, що раціонально чергуються у просторі та часі.

Основні етапи механізації та автоматизації виробництва. У сучасних машинах можуть бути автоматизовані як окремі операції, так і весь технологічний процес. Це залежить від ступеня механізації та автоматизації виробництва. У табл. 15.1 наведено основні етапи цього процесу [84].

На першому етапі для механізації основних технологічних операцій були розроблені різні механізми, причому механізація однієї основної операції приводила до створення ***одноопераційної*** машини.

Другим важливим кроком було комплексне використання механізмів для виконання певного технологічного процесу, яке

Таблиця 15.1

ЕТАПИ МЕХАНІЗАЦІЇ ТА АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА

Етап розвитку	Розв'язувана задача
Механізм	Виконання і перетворення рухів для механізації однієї технологічної операції
Робоча машина	Механізація основних технологічних операцій
Машинний агрегат	Об'єднання механізмів робочої машини і двигуна
Напівавтомат	Додаткова механізація допоміжних технологічних операцій
Машина-автомат	Додаткова автоматизація операцій контролю та керування
Промисловий робот	Автоматизація допоміжних процесів
Автоматична лінія	Додатково введені та автоматизовані транспортні засоби між окремими машинами-автоматами і загальна система керування
Автоматизоване виробництво	Додатково автоматизоване керування всім виробничим процесом із використанням ЕОМ, створення гнучкого автоматизованого виробництва (ГАВ)

привело до створення ***робочих машин***. Крім класу робочих виробничих машин, розробляються ***транспортні машини*** і ***машини-двигуни.*** Останні перетворюють інші види енергії в механічну роботу, необхідну для приведення у рух робочих машин. Об'єднання машини-двигуна за допомогою передаточних механізмів із виконавчими механізмами привело до створення ***машинного агрегату.***

Переходячи до повної механізації не лише основних технологічних операцій, які змінюють геометричні та фізичні характеристики об'єктів обробки, а також допоміжних операцій (переміщення, орієнтування, фіксація об'єкта обробки тощо) відповідного виробничого процесу, тобто, розв'язуючи задачу комплексної механізації, створюють машини-напівавтомати і машини-автомати. Робочі машини, в яких всі операції виконуються відповідними механізмами без участі людини, називають ***машинами-автоматами***. У цьому випадку роль людини зводиться до періодичної наладки механізмів, усунення неполадок у їх роботі, обслуговування і спостереження за нормальною роботою автоматів. Якщо хоч одна операція в робочому циклі здійснюється вручну, то ця машина не є автоматом, а ***напівавтоматом*** (в такій машині людина, як правило, здійснює подачу заготовки, знімає готовий виріб тощо). Якщо в машинах-напівавтоматах механізовані здебільшого допоміжні технологічні операції і частково операції контролю і керування, то в машинах-автоматах — автоматизований контроль, керування і блокування

(захист), тобто зупинка машини при різкому порушенні технологічного процесу.

Важливим етапом у створенні автоматичних ліній, які виготовляються з окремих машин-автоматів, а також повністю автоматизованого виробництва була поява ***промислових ро́ботів***. Поява різних робототехнічних систем дала змогу не тільки зв'язати окремі технологічні операції в єдиний ланцюг повністю автоматизованого виробництва, але і самостійно розв'язувати ряд технічних проблем, у тому числі комплекси логічних задач. Уже нині у промисловості багато видів робототехнічних систем виконують операції завантаження, складання, збирання окремих вузлів, зварювання і фарбування окремих виробів.

Подальшим етапом механізації та автоматизації виробництва стало створення ***автоматичних ліній***, в яких окремі машини-автомати зв'язані між собою додатковими автоматичними транспортними пристроями (це можуть бути, зокрема, промислові роботи) і призначені для виконання певного технологічного процесу. Автоматичні лінії мають загальну систему керування.

Вершиною механізації та автоматизації виробництва є ***автоматизоване виробництво***, в якому на базі сучасних ЕОМ автоматизоване керування всім виробничим циклом. Використання в системах керування ЕОМ дає змогу програмувати технологічний процес у залежності від стану обладнання і навколишнього середовища, виду продукції тощо, тобто створювати ***гнучке автоматизоване виробництво***, що є дуже важливим в умовах технічного прогресу, частій зміні виробів.

Робочі та виконавчі органи машини. Пристрої, які безпосередньо виконують технологічні операції (різці, пуансони, затискачі, стрічки транспортерів, вимірювальні датчики тощо), називаються ***робочими органами***.

Для виконання відповідної операції необхідно, щоб робочий орган здійснював відносно оброблюваного об'єкта задану траєкторію. Задані відносні траєкторії здебільшого здійснюються шляхом геометричного складання переміщень як робочого органа так і оброблюваного об'єкта, кожний з яких рухається по простійшій траєкторії, наприклад, при нарізанні гвинтової поверхні виріб (гвинт або гайка) обертається, а різець рухається вздовж осі обертання виробу. В окремих випадках один із них може бути нерухомим.

Рухомі деталі та вузли, на яких закріплені робочі органи або вироби, що обробляються, називаються ***виконавчими органами***

технологічних машин. У токарному верстаті, наприклад, виконавчими органами є супорт і шпиндель.

Виконавчі механізми. Механізми, які надають робочим органам рух, необхідний для виконання технологічного процесу, називаються ***виконавчими механізмами***. Залежність між переміщеннями вхідної та вихідної ланок у будь-якому виконавчому механізмі виражається функціями положення $s = s(\varphi)$ або $\psi = \psi(\varphi)$, де φ — кут повороту вхідної ланки; s або ψ — відповідно лінійні або кутові переміщення вихідної ланки механізму.

Механізм, що виконує основну операцію механічного процесу, а якщо усі операції рівноцінні — основну частину корисної роботи, прийнято називати ***основним***, а його вхідну ланку, що здійснює обертовий рух, — ***головним валом***. Якщо вхідна ланка виконавчого механізму здійснює один оберт за цикл і є в той же час вхідною для усіх або ряду виконавчих механізмів, її називають ***розподільним валом*** (РВ). Один і той самий вал у деяких машинах може бути одночасно головним і розподільним.

За характером переміщення оброблюваного виробу всі машини діляться на три види: 1) машини з неперервним рухом; 2) з періодичним рухом; 3) із змішаним рухом. У сучасному машинобудуванні характерна тенденція до переходу від періодичного руху з нерівномірними швидкостями при дискретних (переривчастих) технологічних процесах до безвистойного рівномірного обертового руху, при якому механізми вільні від передачі змінних навантажень, викликаних переривчастим технологічним процесом. Проте в машинах і нині досить широко використовується періодичний рух робочих органів. Механізми, які здійснюють періодичний рух робочих органів, називаються ***цикловими***. В окремих машинах-автоматах використовуються механізми із самостійним робочим циклом, який не зв'язаний з циклом виконавчих механізмів. Це, наприклад, окремі пристрої бункерного живлення верстатів-автоматів, різні контрольні механізми тощо.

Цикли роботи машини. Для виконання машиною переривчастого технологічного процесу необхідно, щоб після закінчення відповідного проміжку часу періодично повторялися положення, швидкості та прискорення ланок, які входять до складу машини. Це характеризує циклічність роботи машини та її механізмів. Розрізняють технологічні, робочі, кінематичні та енергетичні цикли.

Під ***технологічним циклом*** $T_т$ розуміють сукупність всіх послідовно і паралельно закінчених у часі технологічних операцій виготовлення одного певного виробу. Це загальне поняття може звужуватися до межі поняття "технологічний цикл обробки (виробу) автоматом" або розширюватися до межі поняття "технологічний цикл виготовлення (об'єкту) на заводі".

Машинний технологічний процес охоплює, крім основних технологічних операцій, також допоміжні, контрольні операції та операції керування, пов'язані з виготовленням виробу.

Під ***робочим циклом*** називають проміжок часу $T_р$, після якого машина видає черговий оброблений виріб (партію виробів) або порцію матеріалу. За цей час переміщення виконавчих органів машини повністю повторюються. Як правило, робочий цикл спеціалізованих машин-автоматів відповідає одному повному повороту головного вала на 360°.

Кінематичним циклом називають проміжок часу $T_к$, після якого робочі органи машини займають вихідні (початкові) положення, а їх швидкості та прискорення набувають попередніх значень. За час кінематичного циклу повністю повторюються суміжні робочі цикли, які відрізняються один від одного лише окремими допоміжними, контрольними операціями або операціями керування.

При усталеному русі робочої машини-автомата, як правило, кожному кінематичному циклу відповідає певний ***енергетичний цикл***. Протягом цього циклу використання потужності змінюється за деяким законом, який повністю повторюється при кожному наступному енергетичному циклі.

Розрізняють дві групи технологічних машин: із змінним і постійним кінематичним циклом. До першої групи належать такі машини, як вантажопідіймальні, будівельні, землемірні. Робочі органи машин цієї групи переміщуються по різних траєкторіях. Послідовність їх переміщень різна і змінюється в процесі роботи машин у залежності від умов і вимог процесу, який вони виконують. Машина повертається у своє початкове положення через різні проміжки часу $T_к$.

Траєкторії робочих органів машини другої групи постійні; їх переміщення періодично (циклічно) повторюються; після закінчення часу $T_к$ відносне положення робочих органів повторюється. До цієї групи належить переважна більшість технологічних машин.

15.2. Структура машин

Розглядаючи будову будь-якої машини або машинного агрегату незалежно від їх призначення, можна переконатися, що варіанти кінематичних схем окремих вузлів можуть бути різними, але в склад машини (машинного агрегату) входить ряд принципово необхідних механізмів або окремих машин. У найпростішому випадку в склад машини повинні входити такі основні групи структурних елементів: 1) двигун; 2) передаточні механізми; 3) виконавчі механізми.

Наприклад, на рис. 15.1 наведено кінематичну схему автомобіля. Для його руху необхідно мати двигун *1*, робочі органи *6* (ведені колеса) і передаточні механізми, які повинні: а) забезпечувати різні передаточні відношення, при яких двигун працював би в оптимальному режимі при різних швидкостях обертання коліс (тут ці функції виконує коробка передач *3*); б) від'єднувати двигун від робочих органів під час перемикання передач, що здійснюється муфтою зчеплення *2*; в) компенсувати зміщення осей коліс відносно корпуса двигуна, яке досягається карданним механізмом *4*; г) передавати рух від одного двигуна на два незалежні органи з потрібною швидкістю (для цього використовуються конічна зубчаста передача і диференціальний механізм *5* заднього моста). Названі вузли є принципово необхідними (при вибраному двигуні), але їх будова та кінематичні схеми можуть бути різними; так, коробка передач можлива з 3—5 ступенями, з простим або планетарним редуктором, із зовнішнім або внутрішнім зачепленням тощо, а двигун може бути 2- або 4-тактним, із запалюванням або впорскуванням палива, з V-подібним або однорядним розташуванням циліндрів тощо.

Сучасні машини-автомати крім вказаних складових частин мають ще ряд інших механізмів, які виконують різні ***допоміжні операції, операції контролю, регулювання та керування.***

Якщо перші три складові групи структурних елементів, як правило, обов'язкові в кожній машині, то останні визначають ступінь автоматизації технологічного процесу в машині з точки зору не тільки основних технологічних операцій, але й всіх інших операцій — допоміжних, контролю і керування. Правда, є машини, які складаються лише з двох елементів: двигуна і виконавчого механізму; в них відсутні передаточні механізми. Це можуть бути заточні верстати, вентилятори, пилососи тощо.

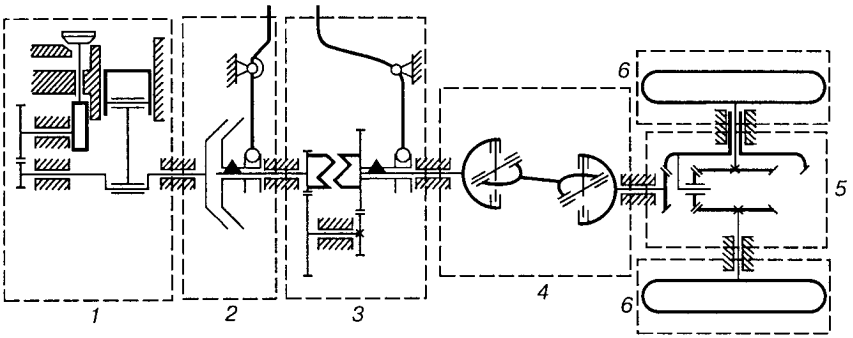


Рис. 15.1.

Як ***двигуни*** в машинах використовують парові машини, двигуни внутрішнього згорання, електро-, пневмо- або гідродвигуни з керуючими засобами. В машинах-автоматах найбільшого використання одержали електродвигуни, які можуть бути керовані (синхронні) і некеровані (асинхронні). При роботі гідродвигуна (силового гідроциліндра чи гідротурбіни) обов'язковими елементами є насос, що приводиться в рух асинхронним двигуном, трубопроводи і керуючі пристрої; пневмодвигуни, як правило, живляться стиснутим повітрям із загальної магістралі або від пристрою (компресора), розташованого за межами машини-автомата.

Передаточні механізми (див. рис. 15.1) служать для передачі й перетворення руху від двигунів до виконавчих механізмів. Як правило, двигун і передаточний механізм конструктивно об'єднують в один вузол, який називають ***приводом.*** При цьому залежно від типу двигуна розрізняють: механічний (некерований електродвигун), електричний, гідравлічний і пневматичний приводи. У багатьох випадках кілька механічних приводів мають один електричний двигун.

У сучасному автоматобудуванні широко застосовують гідравлічні приводи, які дають змогу в широких межах плавно регулювати швидкість обертання та здійснювати дистанційне керування. Внаслідок стискання повітря і його втрат характер руху ланок пневматичних приводів несталий. Тому їх застосовують для здійснення холостих рухів. Прогресивнішими є пневмогідравлічні приводи, де як рушійну силу використовують енергію стиснутого повітря, а стабілізація руху і здійснення його заданого закону зміни виконуються гідросистемою.

Виконавчі механізми машин-автоматів забезпечують рухи робочих органів згідно з вимогами технологічного процесу.

Допоміжні механізми містять у собі різні типи механізмів, які виконують підготовчі операції технологічного процесу: подачу заготовок чи чергової порції матеріалу, встановлення і закріплення заготовки, поворот її на певний кут і фіксацію в процесі обробки, знімання і видачу готової продукції.

Контрольні механізми здійснюють контроль за ходом виконання технологічного процесу. У разі відхилення процесу від заданих умов вони вносять відповідні корективи в роботу машини-автомата. Наприклад, при відхиленні геометричних розмірів оброблюваного виробу від заданих внаслідок спрацювання робочого органа механізм контролю вмикає механізми, що здійснюють підналагодження робочого органа. Автоматизація операцій контролю здійснюється за допомогою спеціальних слідкуючих систем чи пристроїв (датчиків), які дають інформацію про хід технологічного процесу, і, порівнюючи її із заданою програмою, передають системі керування. Якщо відхилення контрольованого параметра перевищує допустиму програмою величину, то система керування автоматично регулює умови технологічного режиму, підтримуючи задані програмою умови. Отже, здійснення функцій автоматичного контролю і керування проводиться за допомогою ***зворотного зв'язку.***

Механізми регулювання і керування забезпечують перебіг технологічного процесу за заданою програмою і ступенем точності. Регулюванню піддаються такі параметри, як швидкість, зусилля (тиск), температура, вологість тощо. Механізм регулювання (регулятор) може складатися або з двох елементів (чутливого (датчика) і виконавчого) або з трьох (чутливого, підсилювального та регулювального). Перший з них регулятор прямої дії, в якому реагуючий орган безпосередньо зв'язаний з чутливим елементом і знаходиться під дією регулювального параметра — відцентровий регулятор прямої дії (див. рис. 5.1); другий — регулятор непрямої дії, в якому чутливий елемент і, власне, регулювальний орган з'єднані підсилювачем, що регулює доступ енергії від постійного джерела у двигун виконавчого механізму (наприклад, відцентровий регулятор непрямої дії, який зображено на рис. 5.2).

Класифікація машин-автоматів. З точки зору структурних ознак, технологічні машини, як уже зазначалось у (параграфі 15.1), можна поділити на машини-напівавтомати та машини-автомати (рис. 15.2). У машинах напівавтоматах машинний технологічний процес вимагає участі людини при випуску кожного виробу. Машини-автомати виконують багато разів увесь

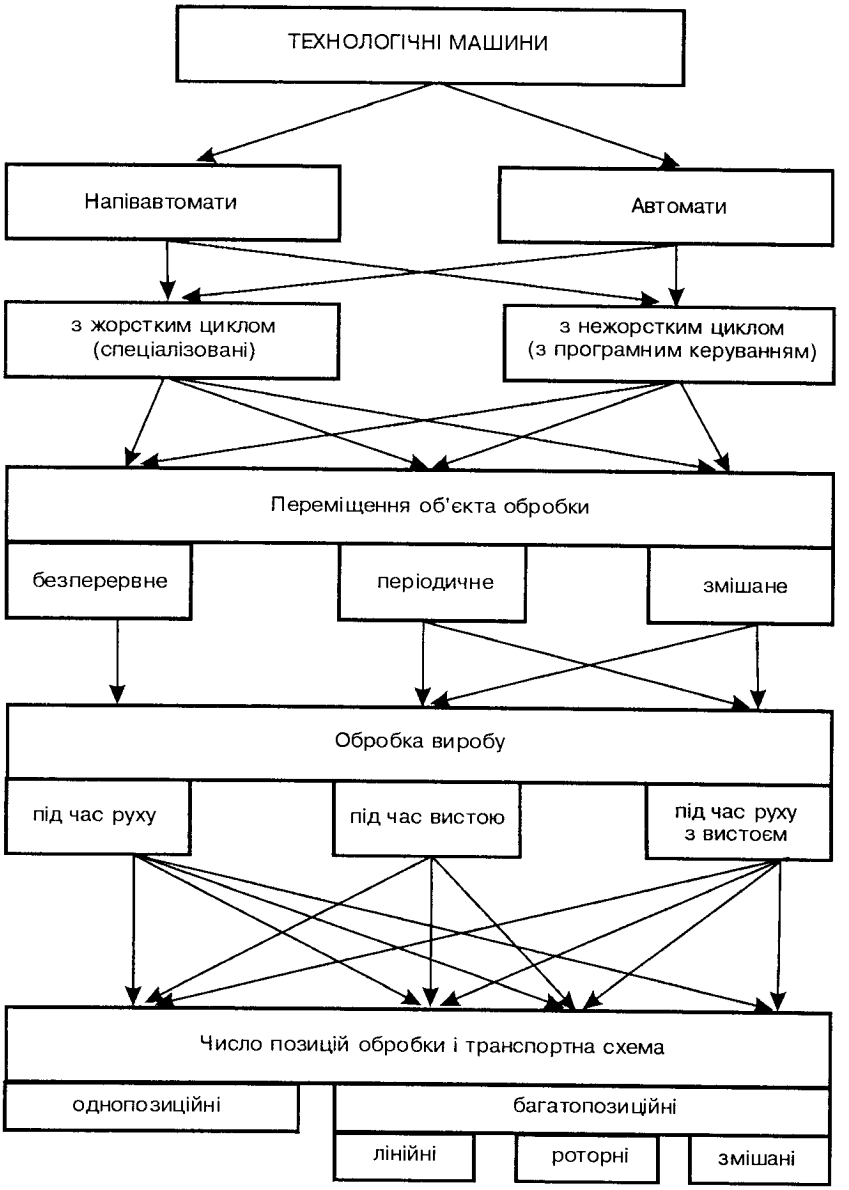

ТЕХНОЛОГІЧНІ МАШИНИ
Напівавтомати
Автомати
з жорстким циклом (спеціалізовані)
з нежорстким циклом (з програмним керуванням)
Переміщення об'єкта обробки
безперервне
періодичне
змішане
Обробка виробу
під час руху
під час вистою
під час руху з вистоєм
Число позицій обробки і транспортна схема
однопозиційні
багатопозиційні
лінійні
роторні
змішані

Рис. 15.2.

цикл технологічних операцій і видають готові вироби без участі людини. Залежно від характеру кінематичного циклу обидві різновидності машини поділяються на два класи: 1) ***спеціалізовані, за сталим кінематичним циклом,*** в яких мають місце незмінні кінематичні зв'язки виконавчих механізмів з пристроями приводу; 2) ***зі змінним кінематичним циклом***, який змінюється за допомогою пристроїв програмного керування виконавчими механізмами.

Залежно від характеру переміщення виробів у процесі обробки всі машини поділяються на три види: з неперервним, періодичним і змішаним переміщенням виробів. ***Періодичне*** переміщення виробу можна досягнути або використанням циклових механізмів транспортування, або періодичним включенням двигуна транспортного пристрою (нереверсивним, реверсивним). При ***змішаному*** переміщенні виробів має місце неперервне переміщення на одній частині шляху та періодичне — на іншій.

Залежно від того, в які періоди вироби обробляються, розрізняють машини з ***обробкою в період його переміщення, машини з обробкою нерухомих виробів*** (в період пауз у русі) і ***машини зі змішаною обробкою виробів,*** тобто з обробкою виробів як у процесі переміщення, так і під час вистою. Залежно від числа позицій виробу при обробці і способу транспортування виробів між позиціями розрізняють ***однопозиційні та багатопозиційні*** машини-автомати (рис. 15.3), в яких операції здійснюються послідовно (рис. 15.3, *а, в, є, ж*), паралельно (рис. 15.3, *г—е*) і послідовно-паралельно (рис. 15.3, *б*) з лінійним (рис. 15.3, *а—в*) або роторним (рис. 15.3, *д—ж*) переміщенням (транспортуванням) виробів.

Збільшення продуктивності обробки в одній машині послідовної дії шляхом суміщення операцій і збільшення числа позицій приводить до створення автоматичних ліній лінійного (конвеєрного) типу з послідовним розміщенням позицій обробки (рис. 15.3, *а, в*).

Машини паралельної дії (рис. 15.3, *г—е*) концентрують одну і ту ж технологічну операцію, яка виконується одночасно на декількох позиціях обробки. У машинах паралельної дії цикли однакових операцій можна змістити по фазі за допомогою розподільного вала (рис. 15.3, *е*), кулачки якого по черзі приводять у рух виконавчі механізми. У деяких випадках зручно обертати стіл (ротор) із комплектом інструментів, а розподільний вал зупинити, перетворивши його в систему нерухомих кулачків-копі-

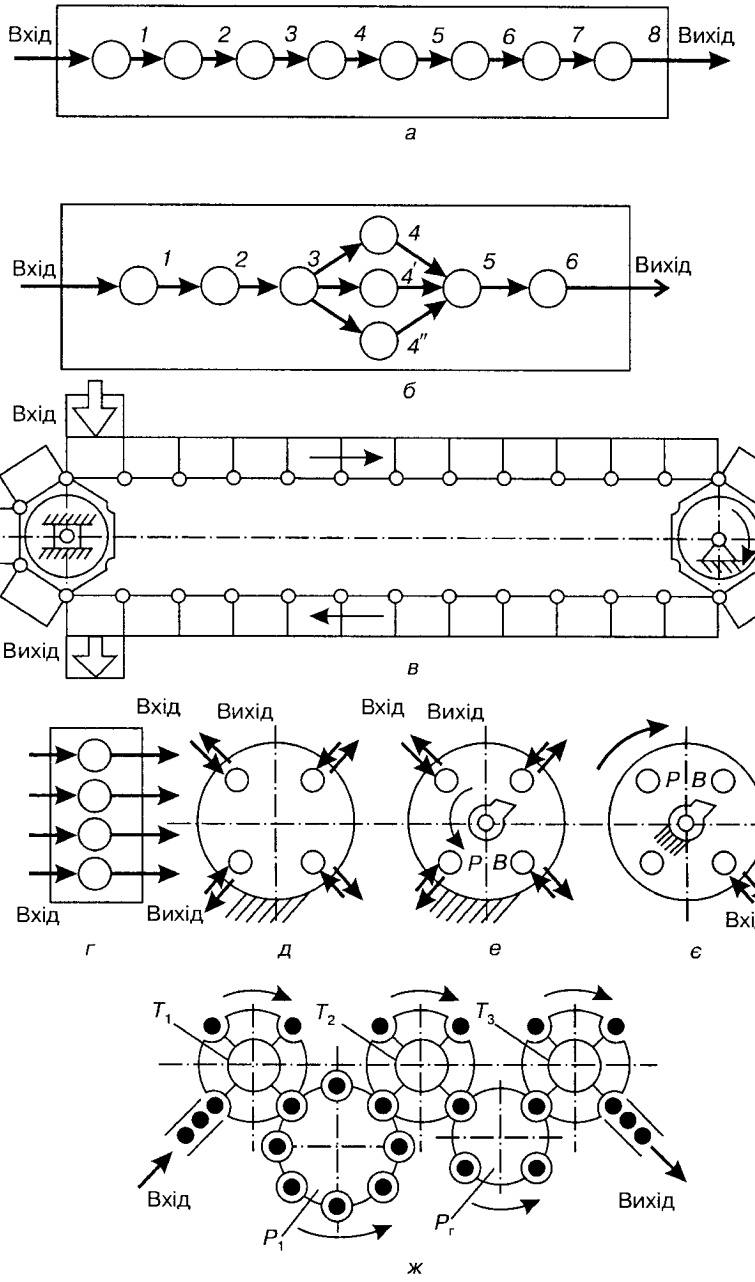

Вхід
1
2
3
4
5
6
7
8
Вихід
а
Вхід
1
2
3
4
4'
4''
5
6
Вихід
б
Вхід
Вихід
в
Вхід
Вихід
Вхід
Вихід
г
д
Вхід
Вихід
P
B
е
P
B
Вихід
Вхід
є
T_1
T_2
T_3
Вхід
Вихід
P_1
$P_г$
ж

Рис. 15.3.

рів (рис. 15.3, *є*). При цьому вироби обробляються у процесі транспортування, а завантаження заготовок і знімання об'єктів обробки можуть виконуватися в одній зоні. Подібні системи (рис. 15.3, *д—ж*) одержали назву ***роторних машин***, в яких сконцентровані однакові операції як і в інших машинах паралельної дії.

Для технологічного процесу, що складається з ряду послідовних операцій, як і при лінійному переміщенні, створюють автоматичні роторні лінії (АРЛ), в яких число технологічних роторів дорівнює числу операцій обробки (рис. 15.3, *ж*). Передачу об'єктів між сусідніми технологічними роторами P_1, P_2 звичайно здійснюють транспортними роторами T_1, T_2, T_3. В АРЛ об'єкти проходять послідовну обробку паралельними потоками.

Крім технологічних і транспортних роторів, до складу АРЛ можуть входити контрольні, керуючі та логічні ротори. Останні розв'язують задачу про часткову відмову від подачі заготовок, про зміну інструменту та корекцію технологічного процесу.

На ділянках автоматичних ліній, утворених з окремих верстатів, можуть використовуватися промислові роботи, які їх обслуговують (див. параграф 15.7).

Основні принципи побудови і складові елементи конструкцій машин-автоматів і автоматичних ліній є загальними для різних галузей виробництва, не зважаючи на різне технологічне призначення, що дає змогу користуватися одними методами їх проектування і розрахунку в різних галузях машинобудування.

15.3. Системи керування машин-автоматів

Загальні відомості про системи керування. Сучасні машини-автомати у своєму складі мають систему різних механізмів, які забезпечують необхідні рухи ланок, пов'язані з перетворенням енергії, стану, властивостей, або положення об'єктів і матеріалів, з керуванням, контролем і регулюванням рухів виконавчих органів машини. Такі системи механізмів бувають досить складними. Для виконання машиною того чи іншого технологічного процесу необхідно, щоб рухи ланок механізмів були узгоджені як в часі, так і в просторі. Інакше кажучи, рухи виконавчих органів машин-автоматів повинні виконуватися за відповідною ***програмою*** (алгоритмом). Під ***програмою роботи механізмів машин-автоматів розуміють сукупність розпоряджень,***

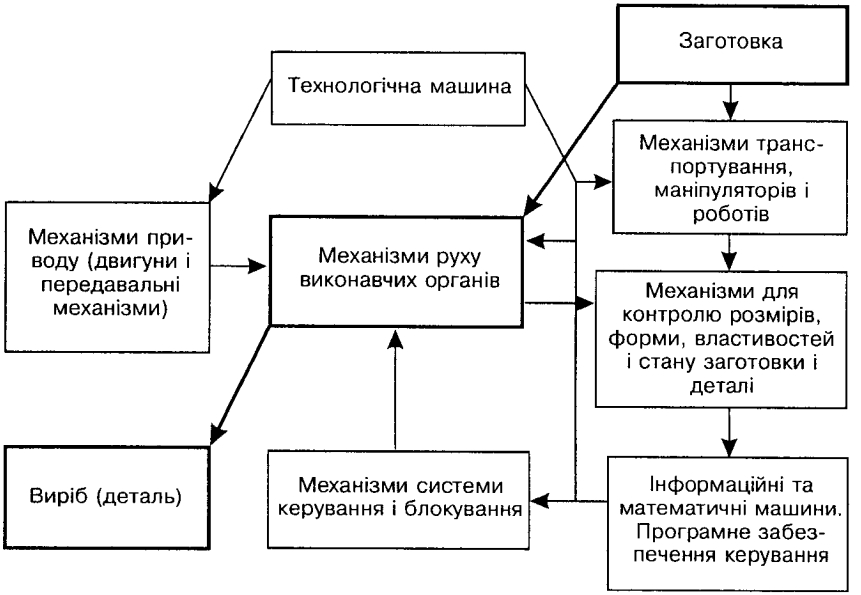


Рис. 15.4.

які забезпечують виконання технологічного процесу. Для автоматичного виконання програми передбачені ***системи керування*** машин, які ***забезпечують узгодженість переміщень усіх виконавчих органів у відповідності із заданою програмою.*** Сукупність засобів програмного керування, які служать для вироблення за заданою програмою керуючих дій на виконавчі органи машини та інші механізми, включають ***технічні засоби*** (приводи, апарати і пристрої автоматики, вимірювальні датчики, пристрої контролю, адаптації і діагностики, обчислювально-логічні пристрої, засоби зв'язку тощо) і ***програмне забезпечення***, які здійснюють організацію процесу керування і реалізацію завдань керування стосовно до кожної системи механізмів.

Наприклад, на рис. 15.4 зображено принципову схему технологічної машини, на якій вказані механізми, що забезпечують функціонування машини і виконання сукупності рухів, необхідних для обробки заготовки (матеріалу) та одержання виробу за заданими параметрами.

Розглянемо деякі приклади керування машин.

Керування від копірів. Керування переміщеннями одного виконавчого органа можна досягти за допомогою окремого механізму, схема і параметри якого вибрані відповідно до заданої

програми роботи машини-автомата. Якщо ці програми повинні бути різними при обробці різних виробів, то слід мати механізми зі змінним законом руху вихідної ланки. Наприклад, якщо треба одержати переміщення виконавчого органа за різними траєкторіями, то використовують механізми зі змінними нерухомими кулачками, які називають ***копірами***.

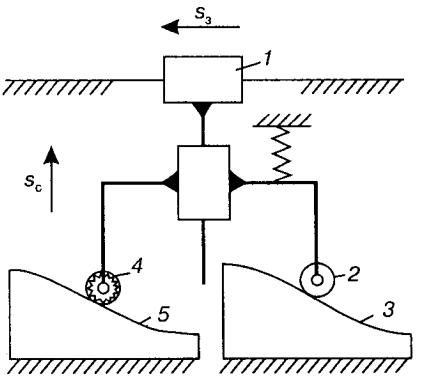


Рис. 15.5.

На рис. 15.5 показано механізм, призначений для керування переміщеннями різального інструменту (фрези або шліфувального круга) при обробці поверхні деталі *5* способом безпосереднього копіювання. Тут повзун *1* одержує в горизонтальному напрямку переміщення $s_з$, яке називають ***задавальною подачею***. Щуп *2* під дією замикаючого

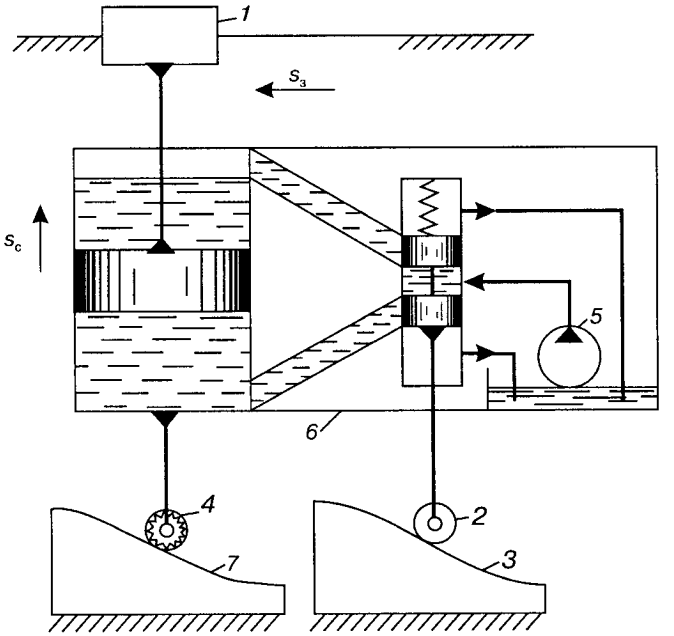


Рис. 15.6.

пристрою постійно притиснутий до копіра *3* і тому крім горизонтального переміщення одержує також переміщення у вертикальному напрямку s_c, яке називають ***слідкуючою подачею.*** Різальний інструмент *4*, зв'язаний із щупом *2*, повторює (копіює) рух щупа. Для одержання різних рухів інструменту треба мати змінні копіри. Аналогічна схема обробки має місце при обертовій задавальній подачі, яка в цьому випадку надається заготовці та копіру.

Спосіб безпосереднього копіювання використовується рідко із-за великих навантажень на копір, який швидко зношується. Для зменшення навантаження на копір використовується ***слідкуючий привод.***

Слідкуючий привод. Принцип дії такого приводу пояснимо на прикладі гідрокопіювального пристрою фрезерного верстата (рис. 15.6).

Фреза *4* з'єднана з корпусом гідроциліндра, а щуп *2* — зі штоком гідрозолотника. Гідроциліндр називається ***виконавчою частиною***, а гідрозолотник — ***керуючою*** (деколи — задавальною). Обидві частини разом з насосом *5* встановлені на загальному столі *6*, який разом з повзуном *1* може переміщатися у напрямку задавальної подачі $s_з$. При цьому переміщенні щуп *2* одержує слідкуючу подачу s_c, яка залежить від профілю копіра *3*, а заготовки *4* разом зі столом *6* повторює рух щупа, "слідкує" за його рухом (звідси назва — ***слідкуючий привод***) і формує поверхню деталі *7*.

Процес слідкування можна уявити собі таким чином. Якщо щуп і фреза займають однакове положення щодо копіра *3* і заготовки *7*, то шток займає середнє положення і перекриває обидва трубопроводи, які ведуть до гідроциліндра. При русі штока золотника із середнього положення вверх рідина під тиском поступає у верхню порожнину гідроциліндра, і його корпус разом зі столом *6* і фрезою *4* також переміщаються уверх, оскільки поршень гідроциліндра жорстко з'єднаний із повзуном *1*. Рух корпуса гідроциліндра відносно поршня і, значить, рух стола *6* відносно штока золотника продовжується доти, доки шток золотника не займе середнє положення. Якщо за інерцією середнє положення буде пройдене, то рідина під тиском поступить у нижню порожнину гідроциліндра, і почнеться зворотний рух до середнього положення.

З описаного процесу слідкування видно, що рух інструмента *4* завжди відстає від руху щупа *2* і, крім цього, може виникнути коливання при переході через середнє положення. Ці похибки руху інструмента можна звести до мінімуму відповідним вибо-

ром параметрів гідроциліндра і золотника на підставі загальних методів динамічного синтезу механізмів. Порівняно зі способом безпосереднього копіювання використання слідкуючого приводу має ті переваги, що на копір передається лише невеликий тиск пружини золотника, а зусилля різання, іноді досить значне, передається через гідроциліндр безпосередньо на стояк.

Числове програмне керування. У машинах-автоматах з керуванням від копірів перехід на іншу програму пов'язаний, як правило, з виготовленням нових копірів, що вимагає великих затрат часу і матеріальних засобів. Значно простіше переналадити на іншу програму машини-автомати з ***числовим програмним керуванням*** (ЧПК), при якому інформація про величину потрібних переміщень виконавчих органів подається в систему керування у вигляді чисел, які називаються ***інформаційними числами***. Якщо величина потрібного переміщення дорівнює s, то інформаційне число (число кроків) повинно бути ближчим цілим числом до відношення:

$$z = \frac{s}{\Delta s}, \qquad (15.1)$$

де Δs — величина одиничного переміщення (кроку), яка вибирається у залежності від необхідної точності переміщень.

На рис. 15.7, *а* показано блок-схему програмного керування переміщеннями одного виконавчого органа. Основна особливість цього керування полягає у регульованому приводі (двигуні), який повинен забезпечувати переміщення виконавчого органа на потрібну величину. Для цього здебільшого використовується кроковий електродвигун, у якому при кожному вмиканні ланцюга живлення (імпульсі) ротор повертається на певний точно фіксований кут. Для одержання потрібного переміщення виконавчого органа треба послати в ланцюг живлення двигуна таке число імпульсів, яке відповідає потрібному інформаційному числу. Ці імпульси посилаються через блок керування від програми, яка містить також команди початку і кінця руху, прямого і зворотного ходу та інші допоміжні команди.

Нехай, наприклад, потрібно обробити плоский кулачок на верстаті з числовим програмним керуванням (рис. 15.7, *б*). У цьому випадку постійна задавальна подача $s_з$ надається безпосередньо заготовці *1*, а слідкуюча подача $s_с$ від крокового двигуна — різальному інструменту *2*. Потрібна величина слідкуючої подачі розраховується з креслень кулачка для окремих точок, які відповідають рівним проміжкам часу переміщень заготовки.

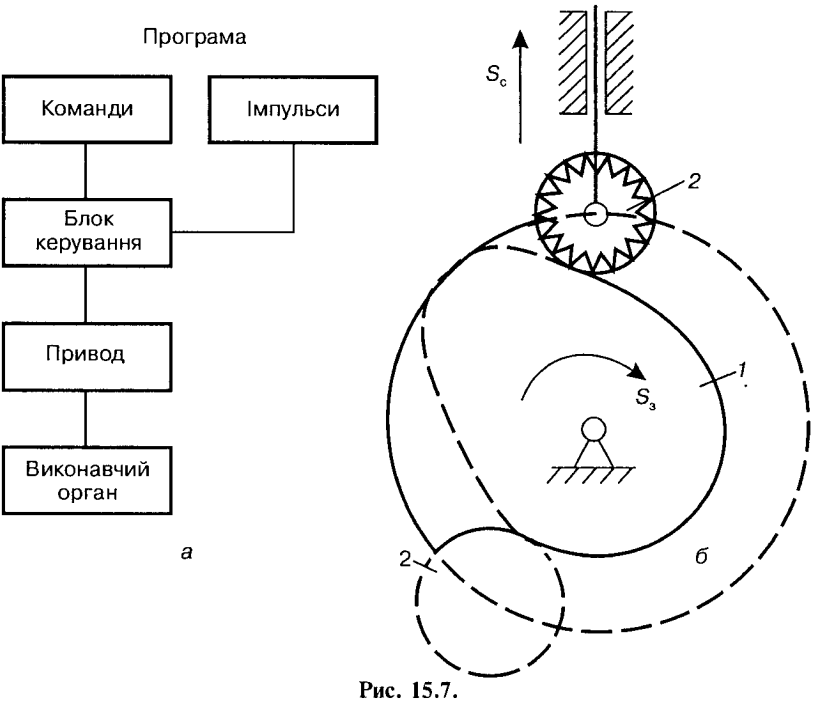


Рис. 15.7.

Для кожної одержаної величини слідкуючої подачі визначається за формулою (15.1) інформаційне число (число імпульсів), яке і фіксується у програмі. Серії імпульсів, які відповідають кожній опорній точці, посилаються через рівні проміжки часу крокову-му двигуну і забезпечують потрібну величину слідкуючої подачі.

Для запису програми, яка виражена в числах, використовуються різні програмоносії: магнітні стрічки або диски, кінострічки, перфокарти, перфострічки, панелі керування з перемикачами.

Класифікація систем керування. Якщо система керування забезпечує потрібну узгодженість руху всіх виконавчих органів у залежності від часу, то її називають системою керування машини ***за часом.*** Якщо система керування забезпечує потрібну узгодженість рухів усіх виконавчих органів у залежності від положення, то її називають системою керування машини ***за шляхом.***

Можливі системи керування машин-автоматів за іншими режимами: швидкістю протікання технологічного режиму, тиском, граничним навантаженням, температурою у відповідній системі тощо.

У системах автоматичного керування (САК) всі керуючі дії здійснюються без безпосередньої участі людини. При напівавтоматичному і ручному керуванні керуючі дії виконуються або виробляються за участю людини — оператора.

За видом початкової (апріорної) інформації, яка включається у програму керування механізмами, САК поділяють на дві групи: з повною і неповною початковою інформацією (рис. 15.8). У першому випадку задана програма є незмінною ("жорсткою") і виконується незалежно від одержаних результатів. Лише в екстремальних умовах її виконання може бути зупинено, якщо за якими-небудь причинами контрольовані параметри досягнуть порогових (гранично допустимих) значень.

У другому випадку для оптимального керування неповна інформація доповнюється різними вимірювальними і керуючими пристроями і датчиками та використовується для коректування програми керування. Такі системи можуть бути самопристосовуючими (адаптивними), самоорганізуючими, самонастроюючими, самонавчаючими (рис. 15.8).

Адаптивні системи мають датчики, які дають змогу одержати інформацію про зовнішнє середовище та хід технологічного процесу і залежно від цієї інформації здійснювати ті або інші рухи. Основним елементом таких систем ***є зворотний зв'язок і блок порівняння***, в якому сигнали, що характеризують виконання технологічного процесу, порівнюються з сигналами програми. І на основі цього порівняння даються сигнали, що викликають необхідну корекцію програми.

У складніших системах керування досить задати кінцеву мету роботи. Використовуючи ЕОМ та інформацію про стан машини, такі САК логічно оцінюють ситуацію і знаходять оптимальні розв'язки з урахуванням конкретної обстановки відповідно з розробленими алгоритмами пошуку.

За характером керуючих сигналів САК поділяються на дві групи: дискретні (імпульсні) і неперервні (аналогові).

У дискретних САК обов'язково є пристрої, в яких керуючі дії змінюються дискретно, тобто скачками (імпульсами) навіть при плавній зміні вхідних величин. В ***аналогових САК*** значення неперервних сигналів є неперервними функціями часу, які реалізуються у вигляді зміни яких-небудь фізичних величин (елементів). Прикладами аналогових САК є системи з кулачками, розподільними валами, з пристроями зміни кута зсуву по фазі двох напружень тощо.

Системи керування машин можуть бути централізованими, децентралізованими і змішаними.

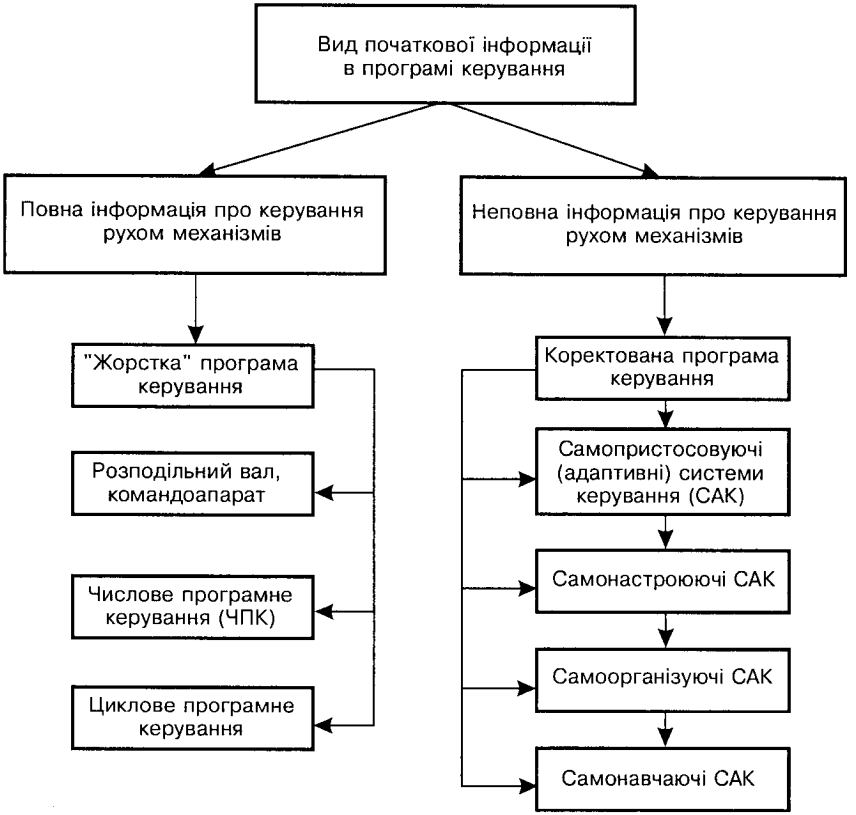


Рис. 15.8.

При ***централізованому керуванні*** забезпечується виконання наперед встановленої програми, незалежної від положення ланок тих чи інших механізмів. Таке керування здійснюється у функції часу програмним керуванням. Система механізмів при програмному керуванні функціонує досить надійно, але при її проектуванні необхідно передбачити деякі запобіжні пристрої, які забезпечують відключення механізмів, гальмування або зупинку двигунів при перевантажених або аварійних ситуаціях. При такому керуванні команди подаються від розподільних валів, командоапаратів або за допомогою пультів.

При ***децентралізованому керуванні*** руху механізмів у функції положень ланок інформація передається від упорів, шляхових і кінцевих перемикачів і вимикачів або інших датчиків положення або переміщення. Надійність функціонування таких систем

залежить від надійності датчиків та інших елементів системи керування. Децентралізоване керування може бути також із регулюванням за заданими режимами роботи (наприклад, за тиском, граничним навантаженням, швидкістю тощо).

При ***змішаному керуванні*** рухом системи механізмів використовуються окремі елементи централізованого і децентралізованого керування, що забезпечують велику надійність і універсальність. При такому керуванні можна зменшити кількість запобіжних пристроїв, замінивши їх установкою датчиків, які будуть контролювати виконання команд або положень ланок. Наприклад, при роботі автоматичної лінії при змішаному керуванні невиконання якої-небудь команди про переміщення ланки в певному положенні фіксується шляховим датчиком, за сигналом якого відключається командоапарат, вал останнього при нормальній роботі обертається рівномірно. Після усунення несправності командоапарат вмикається, що забезпечує подальше функціонування механізмів за системою програмного керування.

При змішаному керуванні здійснюється найбільш оптимальне поєднання різноманітних вимог, які забезпечують керування за часом, за положеннями і переміщеннями ланок, обмеження режимів руху і навантажень на ланки та в кінематичних парах.

15.4. Системи керування за часом

Як уже зазначалось, такі системи керування забезпечують потрібну узгодженість переміщень виконавчих органів залежно від часу. Програма для системи керування за часом задається у вигляді циклограми.

Циклограмою машини-автомата називають діаграму, на якій відображена програма її роботи і ув'язана (узгоджена) робота всіх циклових механізмів за кутом повороту головного вала. З цього випливає, що циклограма показує, в якій послідовності і в які моменти починають і закінчують роботу окремі механізми, а тому закони руху виконавчих органів не обумовлюються. На циклограмах графіки переміщень умовно окреслюють похилими прямими. Іноді на циклограмах взагалі не показують графіки переміщень, а лише записують назви окремих операцій та етапи руху (подача заготовки, вистій тощо).

На рис. 15.9 зображено приклад циклограми трьох виконавчих органів, які приводяться у рух від механізмів *М1*, *М2*, *М3*. За такою циклограмою працює, наприклад, спеціалізований автомат для

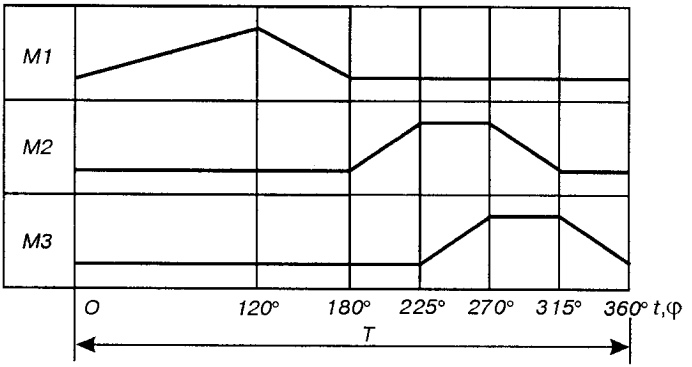


Рис. 15.9.

свердління отворів у деталі. Механізм *M1* виконує основну операцію (свердління), причому час робочого ходу більший часу холостого ходу. Механізм *M2* розтискає кріплення оброблюваної деталі. Механізм *M3* знімає оброблювану деталь і одночасно подає іншу. Після її затискання механізмом *M2* механізм *M3* повертається у вихідне положення, і починається новий цикл.

Циклограми показують в межах одного циклу машини-автомата, тобто проміжку часу T, після закінчення якого повторюється послідовність переміщень всіх виконавчих органів. На циклограмі показують також кути повороту в однієї з ланок, яка обертається рівномірно, наприклад, кулачкового вала механізму, призначеного для основної операції.

Циклограми звичайно будують у прямокутній (декартовій) або полярній системі координат і називають відповідно лінійними і коловими. Колові циклограми будують лише для машин-автоматів, кінематичний цикл яких відповідає одному оберту головного вала, тобто для випадку $T_к = 2\pi$. Лінійні циклограми можна будувати для машин-автоматів з будь-яким кінематичним циклом, тобто при $T_к \geq 2\pi$.

За допомогою циклограм визначається час t кожного циклу (час інтервалу циклу) та час циклу (фазовий час) кожного механізму, який вимірюється кутом повороту φ головного вала, і при рівномірному обертанні вала ($\omega = \text{const}$) визначається співвідношенням $\varphi_i = \omega t_i$, де $i = 1, 2, ..., n$ — номера механізмів. Фазовий час і час інтервалу циклу визначаються на підставі раціонального розподілу сумарного фазового кута між інтервалами циклу окремих циклових механізмів з урахуванням кінематичних параметрів і критерію оптимальності.

Кулачковий розподільний вал. Керування за часом найпростіше досягається кулачковими механізмами з одним загальним валом для всіх кулачків, який називається ***кулачковим розподільним валом***. Для узгодження роботи всіх вихідних ланок для кожного кулачка, який приводить у рух ланки відповідних виконавчих механізмів, досить визначити кут його ***установки***, під яким розуміють кут між початковими прямими даного кулачка і кулачка, прийнятого за базовий. За початкову пряму на кулачку приймають положення початкового радіуса-вектора профілю кулачка в момент початку віддалення вихідної ланки.

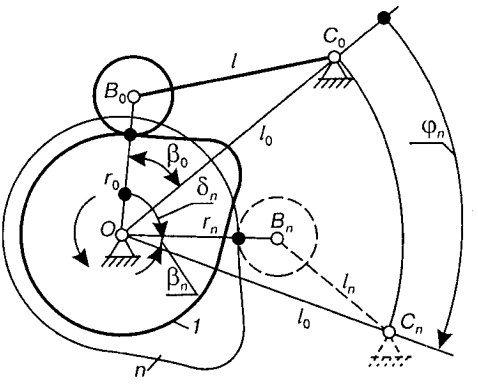


Рис. 15.10.

На рис. 15.10 показано положення ланок базового кулачкового механізму в момент початку віддалення коромисла. Початковий радіус-вектор центрового профілю базового кулачка $l\, r_0 = l_{OB_0}$, довжина коромисла l і міжосьова відстань l_0 відомі. Необхідно знайти кут установки кулачка з номером n, який у відповідності з циклограмою повинен привести у рух взаємодіюче з ним коромисло після повороту базового кулачка на кут φ_n.

Приймемо, що міжосьова відстань l_0 є однаковою для всіх механізмів, але початковий радіус r_n і довжина коромисла l_n можуть бути різними. Для графічного визначення кута установки використаємо метод зворотного руху, тобто відкладаємо від лінії OC_0 заданий кут φ_n у бік, протилежний обертанню кулачка, і побудуємо трикутник OB_nC_n за відомими сторонами l_0, l_n і r_n так, щоб його вершини були розташовані в одному і тому ж напрямку обходу. Кут між одержаною лінією OB_n і лінією OB_0 дає шуканий кут установки δ_n. Аналітичний розв'язок знаходиться з умови

$$\delta_n = \varphi_n + \beta_0 - \beta_n,$$

де кути β_0 і β_n знаходимо із співвідношень

$$\beta_0 = \arccos\frac{l_0^2 + r_0^2 - l^2}{2l_0r_0};\quad \beta_n = \arccos\frac{l_0^2 + r_0^2 - l_n^2}{2l_0r_n}.$$

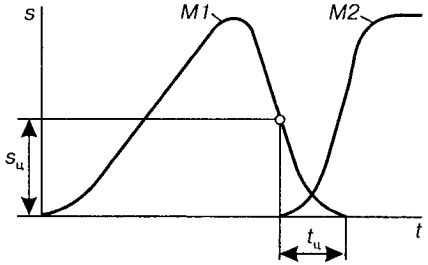


Рис. 15.11.

У центральних кулачкових механізмах (e = 0) кути установки кулачків δ_n дорівнюють фазовим кутам φ_n, які визначаються із циклограми. У нашому випадку (рис. 15.9) кут установки кулачка другого механізму *M2* $\delta_2 = 180°$, третього *M3* $\delta_3 = 225°$.

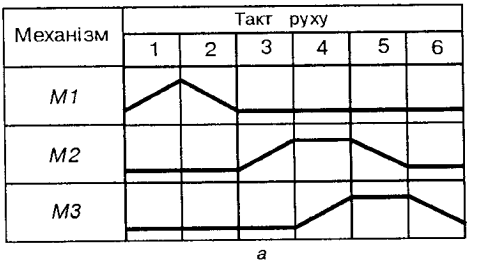
За циклограмою, зображеною на рис. 15.9, кожний виконавчий орган починає рух лише після зупинки попереднього. Проте ця умова не завжди обов'язкова. Нехай, наприклад, за умовами роботи машини виконавчий орган механізму *M2* починає рухатися тоді, коли виконавчий орган механізму *M1* ще не дійшов до вихідної позиції (але свердло вже виведено з деталі) і його положення характеризується переміщенням $s_ц$ (рис. 15.11). Тоді графіки переміщень виконавчих органів можна змістити на величину $t_ц$, яку знаходять графічно або аналітично за заданим законом руху виконавчих органів механізмів *M1* і *M2*. Виконуючи подібні побудови або обчислення для всіх сусідніх механізмів, можна ущільнити циклограму, тобто зменшити час циклу *T*.

Кулачковий командоапарат. При керуванні за допомогою кулачкового розподільного вала виконавчі органи приводяться у рух безпосередньо від кулачків, тобто система керування суміщена з механізмами передачі руху до виконавчих органів. Якщо необхідно зменшити навантаження на кулачки, то кожний виконавчий орган повинен мати індивідуальний електро- або гідропривод, а система керування відокремлюється в окремий пристрій, який називається ***кулачковим командоапаратом***. При керуванні за часом кулачковий командоапарат складається з рівномірно обертового вала з регульованими кулачками, які через відповідні проміжки часу натискають на перемикачі вмикання того чи іншого приводу.

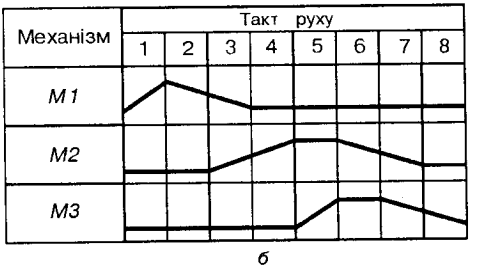
15.5. Системи керування за шляхом

Системи керування машин-автоматів за шляхом забезпечують потрібну узгодженість переміщень виконавчих органів у залежності від їх положень. Схема такої узгодженості задається ***тактограмою*** (рис. 15.12), на якій весь цикл руху поділено на окремі такти руху.

Тактом руху називають проміжок часу, протягом якого не змінюється стан жодного з виконавчих органів (рух є або його нема). На відміну від циклограми на тактограмі не вказується час такту або кут повороту рівномірно обертового вала. Цей час може бути різним залежно від умов виконання технологічного процесу.



а



б

Рис. 15.12.

Виконавчі органи при керуванні за шляхом можуть працювати послідовно (рис. 15.12, *а*) і паралельно-послідовно (рис. 15.12, *б*). При паралельно-послідовній роботі є такти руху, під час яких одночасно рухаються декілька виконавчих органів, що дає змогу зменшити час циклу T роботи машини. При проектуванні систем керування за шляхом використовуються логічні елементи. Аналізуючи тактограми, які зображені на рис. 15.12, *а*, умови руху (або його відсутності) виконавчих органів можна подати логічними висловами. Наприклад, можна написати умову: виконавчий орган механізму *M1* **не** рухається, якщо рухається виконавчий орган механізму *M2* **або** *M3*; виконавчий орган механізму *M1* рухається, якщо **не** рухаються виконавчі органи механізмів *M2* і *M3*. Отже, для того, щоб виконавчі органи переміщались у певній послідовності відповідно до заданої тактограми, треба мати пристрої для виконання логічних дій, які можна описати з використанням слів НІ, ТАК, АБО, І. Ці дії в машинах називають ***логічними операціями***, а пристрої для їх виконання — ***логічними елементами*** (інколи логічними операторами).

Логічний елемент, який складається лише з твердих тіл, називають ***логічним механізмом***. У сучасних машинах-автоматах крім логічних механізмів широко розповсюджені електричні (електромагнітні) логічні елементи, в яких логічні операції виконуються з використанням електричного струму, і пневматичні —

з використанням стиснутого повітря. Сукупність логічних елементів утворюють систему керування, яку називають ***логічною*** (іноді — релейною). Зв'язок між системою керування і виконавчими органами встановлюють за допомогою сигналів.

У машинах-автоматах ***сигналом*** називають певне значення величини, яка дає інформацію про положення якого-небудь виконавчого органа (***вхідний*** сигнал) або про потрібну зміну його положення (***вихідний*** сигнал). Для більшості машин-автоматів досить мати лише інформацію про два положення виконавчого органа (початок і кінець руху). Відповідно кожний сигнал має лише два значення. Одне дорівнює 0, а друге — 1. У логічних механізмах 0 позначає одне із стійких положень ланки, а 1 — друге її положення. В електричних логічних елементах 0 означає "нема струму", а 1 — "є струм"; у пневматичних — 0 означає "нема тиску", а 1 — "є тиск".

Кожний логічний елемент має, звичайно, один або декілька входів, на які поступають вхідні сигнали (аргументи) x_n, і лише один вихід, який дає вихідний сигнал (функцію) f_n. Змінні, які можуть приймати лише два значення (0 і 1), називаються двійковими або булевими (за іменем англійського вченого Буля), а їх функції — ***двійковими або логічними функціями***. Тому логічну операцію, яка виконується логічним елементом, завжди можна подати в алгебраїчній формі як двійкову функцію f_n двійкових аргументів x_n.

Проектування логічних систем керування розглядається здебільшого в курсі "Автоматизація технологічних процесів", частково в працях [4, 41, 42].

15.6. Маніпулятори

Загальні відомості. Принципово новим елементом сучасних технологічних систем є промислові роботи — клас машин-автоматів, що мають універсальні виконавчі органи у вигляді механічних "рук", рух яких здійснюється за відповідною програмою. Головний механічний пристрій промислових роботів — маніпулятор [42]. ***Маніпулятором*** називають технічний пристрій для відтворення робочих функцій руки людини. Перші конструкції маніпуляторів не тільки за призначенням, але й за зовнішнім виглядом нагадували руку людини. На рис. 15.13 показано схему ***копіювального*** маніпулятора, який складається з ***керуючого*** (*K*) і ***виконавчого*** (*B*) механізмів. Обидва механізми

цілком однакові, причому завдяки механічному, електричному, магнітному або якому-небудь іншому зв'язку рухи ланок виконавчого механізму повторюють (копіюють) рухи ланок керуючого механізму.

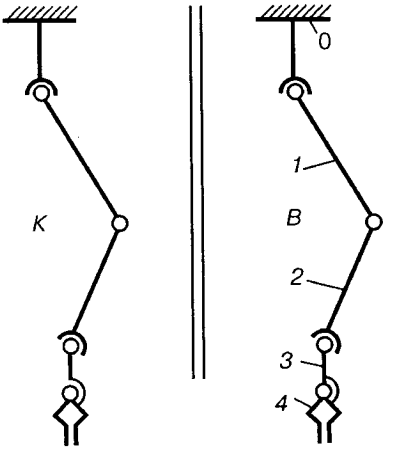


Рис. 15.13.

Як видно зі схеми, механізм маніпулятора утворено із просторового незамкнутого кінематичного ланцюга. Ланки цього ланцюга аналогічно з рукою людини мають назву: *0* — корпус, *1* — плече, *2* — передпліччя, *3* — кість або захват, *4* — палець. Кінематична пара, яка утворена плечем і корпусом, або кінематичний ланцюг, що замінює цю пару, називають плечовим суглобом; кінематична пара, яка утворена плечем і передпліччям — ліктевим суглобом; кістю і передпліччям — кістевим суглобом. Ланка *4* (палець) при розгляді структури, кінематики та динаміки маніпулятора об'єднується з ланкою *3*. Тому вважається, що маніпулятор, зображений на рис. 15.13, складається із стояка (корпусу) і трьох рухомих ланок, які з'єднані між собою двома сферичними парами III класу і однією обертовою парою V класу. Отже, такий механізм дає сім ступенів вільності:

$$W = 6n - 5p_5 - 3p_3 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 7.$$

Захват у такому маніпуляторі може зайняти будь-яке положення у просторі в межах, які допускають розміри ланок.

З часом появились маніпулятори з більшим числом ланок і кінематичних пар, і зовнішня схожість з рукою людини стала втрачатися, але у всіх варіантах збереглось призначення маніпулятора — відтворювати просторові рухи, які подібні рухам руки людини. Копіювальні маніпулятори використовуються тепер у багатьох галузях техніки для виконання операцій в умовах, які виключають можливість перебування людини біля виробу, що обробляється або переміщується (радіоактивність, вакуум, висока температура, підвищений тиск, шкідливе хімічне виробництво тощо).

Види маніпуляторів. Залежно від виду систем керування розрізняють маніпулятори з ручним і автоматичним керуванням.

У маніпуляторах з ручним керуванням оператор, діючи на ланки керуючого механізму, приводить у рух ланки виконавчого механізму. У найпростіших випадках передачу руху можна здійснювати за допомогою механічного зв'язку, тобто через зубчасті колеса, троси, важелі тощо. Проте у цьому випадку граничні сили та переміщення виконавчого органа обмежені можливостями оператора. Від цього недоліку вільні маніпулятори, у яких окремі ланки виконавчого механізму приводяться в рух серводвигунами за сигналами, що виробляються при русі ланок керуючого механізму. Крім цього, у маніпуляторах із серводвигунами легко виконується дистанційне керування.

У маніпуляторах з ***автоматичним керуванням*** ланки виконавчого механізму одержують рух від серводвигунів, які працюють за даною програмою подібно верстатам з числовим програмним керуванням. Керуючий механізм служить у цьому випадку лише для вироблення програми роботи виконавчого механізму. Всі дії оператора, зв'язані з переміщенням ланок керуючого механізму, перетворюються за допомогою датчиків переміщень в електричні або механічні сигнали та записуються на магнітну стрічку або перфострічку. Одержану програму можна багаторазово використовувати для керування маніпулятором. Маніпулятори з автоматичним керуванням можуть використовуватися не тільки для роботи в шкідливих умовах, але і для механізації одноманітних і втомлюваних операцій при обробці та складанні виробів. У цих випадках маніпулятори з автоматичним керуванням називають промисловими роботами (див. параграф 15.7).

Структура маніпуляторів. Маніпулятор, як правило, призначено для виконання багатьох різноманітних рухів, характеристики яких можуть змінюватися не тільки при переході до іншого виду робіт, але і при зміні зовнішніх умов. Іншими словами, маніпулятор є багатоцільовою системою.

Виконавчий механізм будь-якого маніпулятора — це багатоланковий просторовий механізм, який може мати в загальному випадку поступальні, обертові, циліндричні, сферичні та сферичні з пальцем кінематичні пари. Кінематичні схеми незамкнутих ланцюгів маніпуляторів та їх рушійні можливості визначаються виглядом і розташуванням кінематичних пар. Для прикладу на рис. 15.14 показано три кінематичні ланцюги [33], що застосовуються у маніпуляторах, які вміщують такі кінематичні пари: а) три сферичні з пальцем; б) дві циліндричні і одну сферичну з пальцем; в) дві сферичні з пальцем і одну циліндричну.

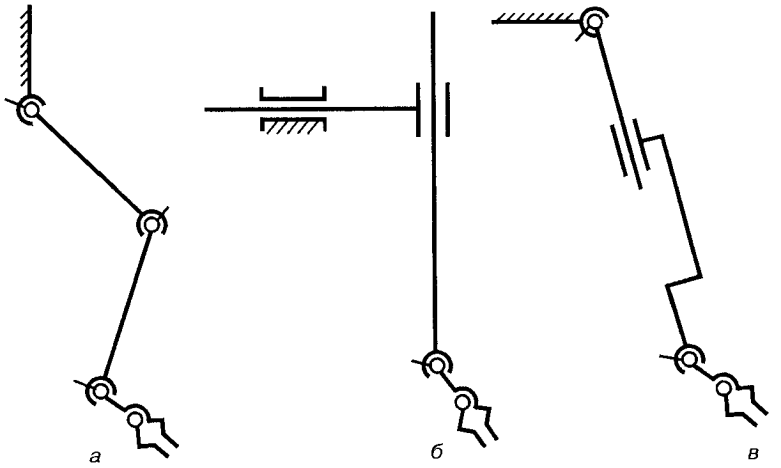


Рис. 15.14.

На практиці сферичні і сферичні з пальцем пари внаслідок складності у передачі відносних рухів з керуючого механізму на виконавчий замінюють кінематичними з'єднаннями (див. параграф 2.3), які складаються відповідно з трьох та двох пар п'ятого класу з осями, що перетинаються.

Залежно від поставленої задачі маніпулятор повинен забезпечувати різне число ступенів вільності захвату. Наприклад, для відтворення просторового руху захвату в загальному випадку маніпулятор повинен мати шість ступенів вільності, які можна реалізувати за допомогою семиланкового незамкнутого кінематичного ланцюга з одними обертовими парами. Якщо ж треба відтворити просторову траєкторію лише одної точки захвату, то необхідне число ступенів вільності зменшується до трьох, тобто з'являються надлишкові ступені вільності. У цьому прикладі закони зміни трьох узагальнених координат визначаються з умов відтворення заданої траєкторії, а решта три — з умови одержання оптимальних значень додаткових критеріїв: швидкодії, мінімуму затрат енергії тощо.

Отже, число ступенів вільності маніпулятора як багатоцільової системи повинно вибиратися відповідно до поставленої задачі, що вимагає максимальної рухомості захвату. При виконанні інших завдань — надлишкові ступені вільності маніпулятора дають змогу оптимізувати кінематичні, динамічні, енергетичні та інші критерії якості процесу маніпулювання. Надлишкові (зайві) ступені вільності називають також ***маневреністю***

маніпулятора, під якою розуміють його число ступенів вільності при нерухомому захваті. Необхідно лише мати на увазі, що при заданій траєкторії одної точки захвату нерухомою треба вважати лише цю точку. Маневреність — одна з найважливіших характеристик маніпулятора. Збільшення числа ступенів маневреності маніпулятора розширює можливості при виконанні складніших рухів: збільшує робочий об'єм, зменшує мертві зони і розширює свободу дії оператора при виконанні рухів з об'єктом маніпулювання у невільному робочому об'ємі або в стиснених умовах.

Механічний маніпулятор (рис. 15.15, *а*) має шість ступенів вільності, але при нерухомому захваті він має ступінь вільності, а отже, і маневреність, що дорівнює нулю, і перетворюється у ферму. Маніпулятор "Mastott I" (рис. 15.15, *б*), що має шість ступенів вільності, при закріпленому захваті також втрачає будь-яку рухливість, перетворюючись у ферму. Проте цей маніпулятор характеризується тим, що одному й тому самому положенню його нерухомого захвату відповідають два різні положення ланок, тобто він може утворювати дві різні ферми (одне з положень показано штриховими лініями). Це дає можливість оператору обходити деякі перешкоди у робочій зоні. Маніпулятор "Рука"(рис. 15.15, *в*), кінематична схема якого модулює руки людини, має один ступінь маневреності, внаслідок чого він має великі можливості для виконання складних рухів. Маніпулятор "Жук" (рис. 15.15, *г*) має дев'ять ступенів маневреності, що дає змогу йому виконувати всі класи рухів і нормально працювати в найскладніших умовах.

Після вибору ступенів вільності маніпулятора встановлюють можливі варіанти його структурної схеми, які розрізняються числом ланок і кінематичних пар різної рухомості (класу) та їх розташуванням. Число цих варіантів значне. Наприклад, уже для маніпулятора з трьома ступенями вільності, якщо застосовувати лише обертові та поступальні пари, одержуємо вісім можливих комбінацій розташування цих пар. При структурному синтезі маніпуляторів з шести або більше ступенями вільності всі можливі варіанти можна одержати лише за допомогою ЕОМ.

Для порівняння варіантів структурної схеми маніпулятора, крім ступеня маневреності, використовуються ще інші характеристики маніпуляторів, що розкривають можливості та зручності виконання різноманітних типових операцій, для яких призначений маніпулятор. Такими характеристиками є робочий об'єм, зона обслуговування, кут і коефіцієнт сервісу.

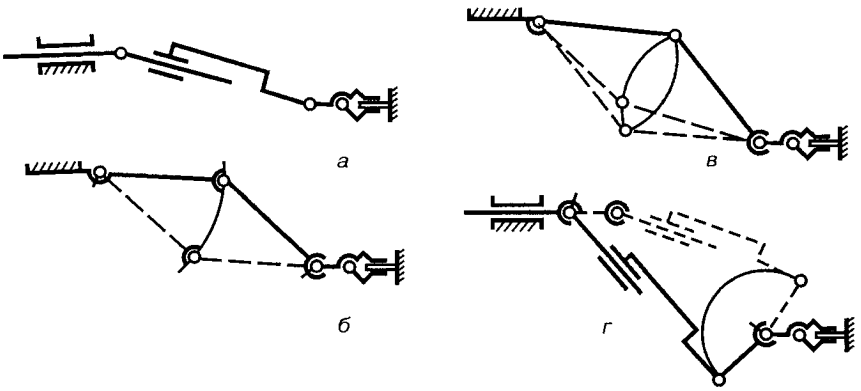


Рис. 15.15.

Робочим об'ємом маніпулятора називають об'єм, обмежений поверхнею, що огинає всі можливі положення захвату.

Конфігурація робочого об'єму та його величина безпосередньо залежать від числа ступенів вільності маніпулятора, розташування і типу кінематичних пар та розмірів ланок руки. Переміщення руки маніпулятора може здійснюватися у прямокутній (рис. 15.16, *а*), циліндричній (рис. 15.16, *в*) або сферичній (рис. 15.16, *б*, *г*) системах координат. Рух руки в прямокутній системі координат можна забезпечити лише поступальними парами, як це зображено на рис. 15.16, *а*. Маніпулятор лише з обертовими рухами ланок руки (рис. 15.16, *б*) дає змогу переміщати об'єкт на поверхні об'ємно-сферичної робочої зони. Обидві вказані схеми мають обмежене використання. Широкі можливості мають маніпулятори на основі структурної схеми з двома поступальними і одним обертовим рухом ланок руки (рис. 15.16, *в*), яка дає змогу останній переміщати об'єкт в об'ємно-циліндричній робочій зоні. Широке розповсюдження одержали маніпулятори на основі структурної схеми з двома обертовими і одним поступальним рухом ланок руки (рис. 15.16, *г*), що дає можливість маніпулювати об'єктом у значно більшій об'ємно-сферичній робочій зоні.

Описані структурні схеми не охоплюють всього різноманіття маніпуляторів нині відомих промислових роботів, а стосуються лише тих, які дістали застосування для виконання порівняно простих технологічних операцій. Для виконання спеціальних робіт, наприклад, при необхідності працювати у стиснених умовах або обходити перешкоди, створюють роботи, що мають руки з великим числом ступенів вільності. Проте при виконанні зада-

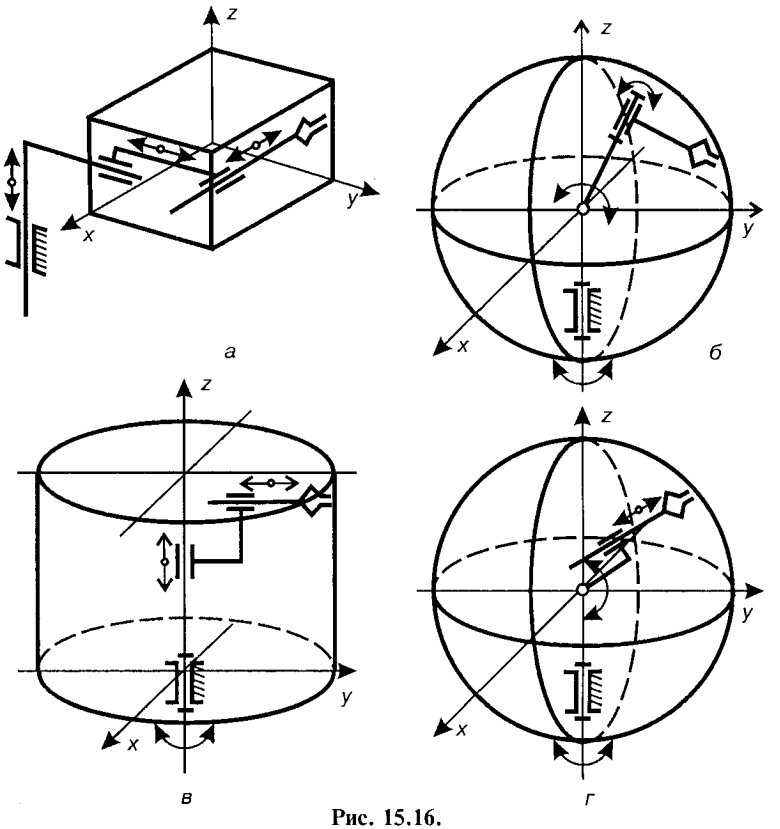


Рис. 15.16.

них рухів захвату з об'єктом, що маніпулюється, не обов'язково використовувати весь об'єм. При цьому не всі частини об'єму однаково зручні для виконання заданих рухів захвату. У зв'язку з цим рухи захвату прийнято поділяти на чотири класи.

До першого класу належать рухи захвату з вільним об'єктом маніпулювання у вільному робочому об'ємі (рис. 15.17, *а*). Рух захвату з вільним об'єктом у невільному робочому об'ємі (тобто є перешкоди у вигляді нерухомого об'єкта) належать до другого класу (рис. 15.17, *б*). До третього класу належать рухи захвату у вільному робочому об'ємі з об'єктом маніпулювання, на який накладено зв'язки (рис. 15.17, *в*). Рух захвату у невільному робочому об'ємі з невільним об'єктом маніпулювання належать до четвертого класу (рис. 15.17, *г*).

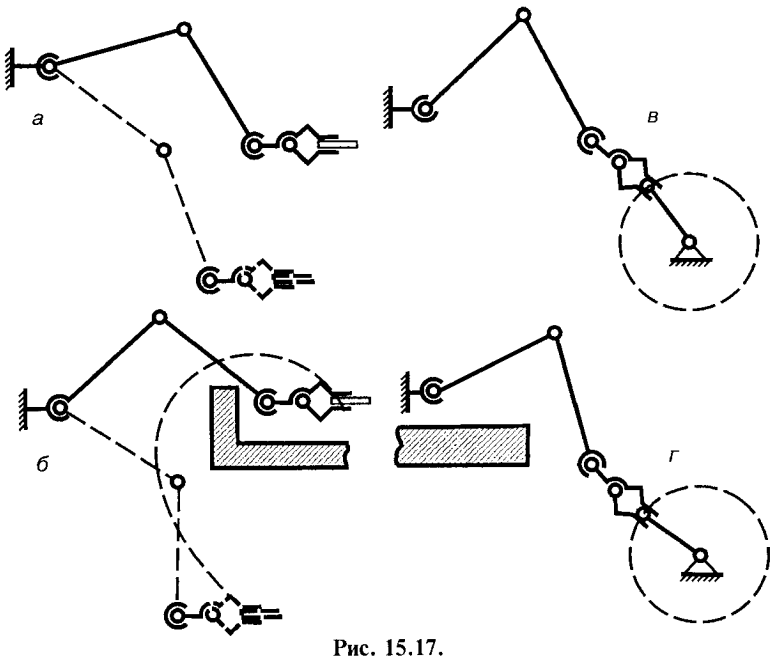


Рис. 15.17.

Зона обслуговування, кут та коефіцієнт сервісу. ***Зоною обслуговування*** або ***робочою зоною*** називають частину робочого об'єму маніпулятора, в якій можна виконати дану операцію, що характеризується розташуванням захвату відносно об'єкта маніпулювання. Для кожної точки робочого об'єму можна визначити тілесний кут ψ, всередині якого захват можна підвести до цієї точки. Цей кут називається ***кутом сервісу***. Відношення кута сервісу ψ до максимального значення тілесного кута 4π називають ***коефіцієнтом сервісу*** ($\theta = \psi / 4\pi$). Значення цього коефіцієнта може змінюватися від нуля для точок на межах робочого об'єму до одиниці для точок повного сервісу. Якість маніпулятора відносно можливостей виконання різних операцій оцінюється ***середнім коефіцієнтом сервісу*** θ_c у робочому об'ємі V, де

$$\theta_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} \theta dV . \qquad (15.2)$$

Системи керування маніпуляторами. Як уже зазначалося, маніпулятори можуть бути з ручним і автоматичним керуван-

ням. Специфічною вимогою, яка ставиться до систем ручного керування маніпулятором, є надання їм "чутливості", тобто встановлення відповідного співвідношення між силами, що прикладені до ланок маніпулятора, і силами, що діють на руку оператора. Інакше кажучи, оператор повинен відчувати ті сили, які діють на захват маніпулятора.

При дистанційному керуванні копіювальним маніпулятором використовуються різні види слідкуючих систем, дія яких подібна до дії слідкуючого приводу, зображеного на рис. 15.6. Характерною особливістю є лише їх властивість "відчуття" залежно від якої системи керування поділяються на системи з ***пасивним*** відображенням сил і системи з ***активним*** відображенням сил. Останні називаються також оборотними слідкуючими системами.

У ***системах з пасивним відображенням сил*** оператор відчуває сили, що діють на виконавчий механізм, лише при зміні положення ланки керування. При цьому зворотний зв'язок, який інформує оператора про значення сил, не впливає на роботу слідкуючого приводу, тобто не змінює положень керуючих ланок. Тому цю систему називають також односторонньою, оскільки керуюча дія поступає лише від оператора.

В ***оборотних слідкуючих системах*** зворотний зв'язок не тільки інформує оператора про значення сил, що діють на виконавчий механізм, але і відповідним чином змінює положення керуючих ланок. Цю систему називають двосторонньою або оборотною, оскільки її слідкуючий привод передає рух у двох напрямках (від входу до виходу і навпаки). На рис. 15.18 зображена блок-схема оборотної слідкуючої системи маніпулятора. Оператор прикладає момент сил M_1. Пристрій "відчуття" вимірює момент M_2 на виході приводу і діє на керуючий механізм моментом M_1. Цей момент впливає на положення керуючих ланок, а тому неузгодженість, тобто різниця між переміщеннями на вході x і переміщеннями на виході y залежать не тільки від дії оператора, але і від навантажень, що діють на ланки виконавчого механізму.

Системи автоматичного керування маніпуляторами будуються звичайно за принципом програмного керування, причому ці системи можуть працювати в двох режимах: режимі навчання і робочому режимі. На рис. 15.19 зображена блок-схема маніпулятора з програмним керуванням, який складається з виконавчого механізму, обладнаного системою сервоприводів, датчиків положень ланок і обчислювальної машини.

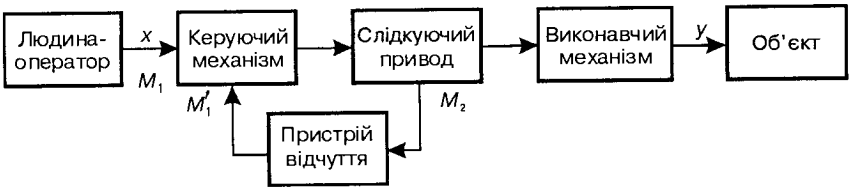


Рис. 15.18.

У ***режимі навчання*** (ключ *1* замкнутий, ключі *2* і *3* розімкнуті) оператор за допомогою додаткової навчальної системи проводить виконавчий механізм через потрібну послідовність робочих положень. Інформація про цю послідовність одержана від датчиків положень ланок, кодується (шифрується) і поступає в запам'ятовуючий пристрій.

У ***робочому режимі*** (ключ *1* розімкнутий, ключі *2* і *3* замкнуті) маніпулятор працює автоматично за введеною раніше в запам'ятовуючий пристрій програмою, яка декодується (розшифровується) і перетворюється в задані рухи ланок виконавчого механізму. Крім цього, обчислювальний пристрій за сигналами від датчиків положень ланок здійснює корекцію роботи маніпулятора через керуючий пристрій.

Алгоритми керування маніпуляторами. ***Алгоритмом*** називають сукупність розпоряджень, які визначають зміст і послідовність операцій, що переводять вихідні дані в шуканий результат. Відповідно ***алгоритмом керування маніпулятором*** називають сукупність розпоряджень, які визначають рух захвата для виконання заданої задачі. При створенні алгоритму керування маніпулятором розрізняють три рівні керування, які розміщуються в ієрархічному порядку.

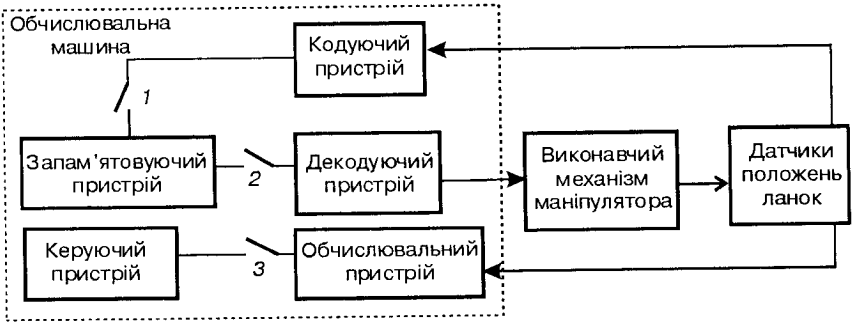


Рис. 15.19.

Перший (нижчий) рівень формує керування приводами. Програма керування на цьому рівні задає значення кожної узагальненої координати маніпулятора. Залежно від вимог до точності виконання заданих рухів використовується або слідкуючий привод, або привод з жорсткою програмою, яка визначається розмірами керуючого пристрою.

Другий (середній або тактичний) рівень формує команди, які керують нижчим рівнем, за заданими командами типу "ВЗЯТИ", "ПЕРЕНЕСТИ" тощо. Ці команди розшифровуються обчислювальною машиною і переводяться на мову нижчого рівня.

Третій (вищий або стратегічний) рівень формує команди тактичного рівня за командами, які виражають мету роботи, що виконуються, тобто за командами типу "СКЛАСТИ ВУЗОЛ", "РОЗВАНТАЖИТИ КОНТЕЙНЕР" тощо. Ці узагальнені команди перекладаються на мову тактичного рівня з врахуванням інформації про властивості зовнішнього середовища, робочих об'єктів і маніпулятора. При цьому можливі варіанти досягнення заданої мети визначаються і порівнюються за критеріями оптимізації. Стратегічний рівень керування поки що неможливий без участі людини.

Останнім часом при складанні алгоритмів керування на першому рівні стали розробляти ***оптимізаційні алгоритми***, в яких шукані закони зміни узагальнених координат маніпулятора визначаються за заданими траєкторіями точок захвату з одночасним виконанням обмежень і одержанням оптимальних значень критеріїв якості (мінімум кінетичної енергії, мінімум загальної затрати енергії, максимальний ККД, мінімум часу переміщення з одної позиції в іншу тощо). Оптимізаційні алгоритми називають також екстремальними, оскільки одержання оптимальних значень критеріїв якості зводиться до розв'язку задач про знаходження законів зміни узагальнених координат (керуючих дій) за заданою метою при додатковій умові екстремуму функціонала, який залежить від керуючих дій і постійних параметрів схеми маніпулятора (довжини ланок, мас, моментів інерції тощо). Використання екстремальних алгоритмів керування можливе лише у випадку, якщо маніпулятор має маневреність, тобто має зайві ступені вільності.

15.7. Промислові роботи

Промисловий робот — це автоматична машина, стаціонарна або пересувна, що складається з маніпулятора (маніпуляторів) та перепрограмуючого пристрою програмного керування і служить

для виконання у виробничому процесі рухів, які властиві руці людини. Промислові роботи відрізняються від звичайних машин-автоматів тим, що завдяки наявності незамкнутого кінематичного ланцюга основного механізму з кількома ступенями вільності, вони мають широкий діапазон різних просторових рухів робочих органів і, як наслідок, можливість швидкого переналагодження на виконання іншої програми. Промислові роботи створюють передумови до переходу до якісно нового рівня автоматизації — впровадження автоматичних виробничих систем, які працюють з мінімальною участю людини, в тому числі створення цехів і заводів-автоматів.

Роботів класифікують за різними ознаками. Промислові роботи залежно від спеціалізації поділяються на універсальні, спеціалізовані та спеціальні.

Універсальні промислові роботи можуть використовуватися в різних технологічних процесах, при цьому змінюючи у широкому діапазоні параметри цих процесів. Ці роботи мають велику кількість ступенів вільності, але забезпечити в них високу точність і надійність важко, крім того, вони вимагають великих затрат при виготовленні, в процесі роботи часто не використовуються для руху всі ступені вільності. ***Спеціалізовані*** роботи призначені для обслуговування технологічного обладнання певної групи і виконання технологічних операцій одного виду. ***Спеціальні*** роботи призначені для оснащення технологічного обладнання конкретної моделі та виконання певних технологічних операцій. Такі роботи мають невелике число ступенів вільності, високі показники швидкодії, точності та надійності. Проте можливості їх використання при зміні параметрів технологічного процесу обмежені.

Залежно від вантажопідйомності роботи бувають: надлегкі (до 1 кг), легкі (до 10 кг), середні (до 200 кг), важкі (до 1000 кг) та надважкі (понад 1000 кг). За ***способом розміщення*** роботи бувають наземні, підвісні та вбудовані; за ***можливістю пересуватися*** — стаціонарні та рухомі.

Промисловий робот складається з трьох основних частин: виконавчого пристрою, приводів і системи керування.

Виконавчі пристрої. ***Виконавчим пристроєм*** промислового робота називають пристрій, який виконує його рушійні функції. У склад виконавчого пристрою входять один або кілька маніпуляторів і пристрій пересування. Робоча ланка маніпулятора несе робочий інструмент або захватний пристрій (захват), призначений для захоплення і утримування об'єкта виробництва або технологічної оснастки. Якщо захоплення і утримування здійс-

нюється відносним переміщенням частин захватного пристрою, то його називають схватом. Крім схватів можуть бути захватні пристрої у вигляді вакуумних присосків, магнітів тощо.

Основною характеристикою виконавчих пристроїв є число ступенів вільності. Три ступеня вільності необхідні для переміщення ланки в будь-яку точку зони обслуговування. Вони називаються ***переносними***. Для орієнтації робочого органу (захвату) необхідні ще три ступеня вільності, які називають ***орієнтуючими***. Крім цього, якщо захватний пристрій виконано у вигляді схвату, то необхідний ще один ступінь вільності для стискання і розтискання пальців схвата. Всього одержуємо сім ступенів вільності. Подальше збільшення ступенів вільності передбачує забезпечення маневреності маніпулятора, тобто можливості переміщення ланок маніпулятора при нерухомому захваті. Маневреність дає можливість ланкам маніпулятора обходити перешкоди або ж розташовуватися у зручнішій позиції. ***Пристрій переміщення*** додатково дає до трьох ступенів вільності при плоскому русі і до шести — при просторовому.

Отже, при неорієнтованих об'єктах праці виконавчий пристрій промислового робота є просторовий механізм з багатьма ступенями вільності. Найважливіше значення має три переносні ступеня вільності, які визначають зону обслуговування. Види зон обслуговування залежать від кінематичних пар маніпуляторів та їх орієнтації. Найбільше розповсюджені зони обслуговування у вигляді площини, поверхні паралелепіпеда, циліндра і кулі (див. параграф 15.6). Видам зони обслуговування відповідають системи координат, в яких визначаються рухи захвату: прямокутна, циліндрична, сферична. Циліндричну зону обслуговування мають звичайно промислові роботи з трьома ступенями вільності, сферичну — промислові роботи з шістьма ступенями вільності, з яких три переносні і три орієнтаційні.

Приводи промислових роботів. Приводи промислових роботів призначені для приведення у рух ланок маніпулятора і переміщення самого робота. Вони можуть бути трьох видів: гідравлічні, пневматичні та електромеханічні. Найбільше розповсюдження мають гідравлічні приводи і дещо менше — пневматичні.

Електромеханічний привод зараз використовується рідше за інші, але в майбутньому його роль зростатиме з появою досконаліших електродвигунів, які не вимагатимуть редукторів, будуть мати малі моменти інерції і підвищену навантажуючу здатність. Використовуються електроприводи як безперервної,

так і дискретної дії (крокові двигуни). До переваг електроприводу порівняно з пневмо- та гідроприводом можна віднести відсутність трубопроводів, легкість монтажу та налагодження, простоту в експлуатації. Останнім часом з'явились уніфіковані електромеханічні модулі (блоки) для окремих видів руху (підйому, повороту тощо). З цих модулів можна скласти виконавчі пристрої роботів при різних поєднаннях потрібних переміщень захвату. Розробка і випуск уніфікованих модулей, поряд з підвищенням якості спеціальних електродвигунів, будуть сприяти розповсюдженню електроприводу в промислових роботах.

Пневматичний привод використовується, як правило, в промислових роботах невеликої вантажопідйомності. Основні його переваги — простота керування, низька вартість і порівняно великий строк служби. Виконується пневмопривод у вигляді пневмоциліндра, тобто циліндра з поршнем, причому циліндр може бути довгоходовим. Для повороту ланок використовується комбінація пневмоциліндра з рейковою передачею. До недоліків пневмоприводу крім вказаного обмеження за вантажопідйомністю можна віднести трудність регулювання швидкості руху ланок маніпулятора.

Гідравлічний привод використовується для промислових роботів великої вантажопідйомності, а також тоді, коли треба мати плавне гальмування ланок і регулювати їх швидкості руху. Поступальний рух виконується гідроциліндром, а обертовий — поворотним гідромотором (рідко — комбінацією гідроциліндра з рейковою зубчастою передачею). До недоліків гідроприводу слід віднести складність обслуговування і експлуатації (можливі витік мастила, засмічення трубопроводів тощо).

Приводи всіх трьох вказаних типів можуть бути розташовані безпосередньо на рухомих ланках або ж бути винесеними на стояк (корпус робота). У першому випадку одержимо більш просту і жорстку конструкцію, оскільки відсутні складні передаточні механізми з довгими кінематичними ланцюгами. Але при цьому зменшується вантажопідйомність маніпулятора та погіршуються його динамічні характеристики. Крім цього, затруднюється робота у важкодоступних місцях через наявність трубопроводів, шлангів і електроприводів. У другому випадку відкривається можливість використання одного приводного пристрою для керування кількома ланками, але затруднюються проектування, виготовлення і монтаж складного багатоланкового передаточного механізму з декількома ступенями вільності

(наприклад, багатоступінчастого зубчастого конічного диференціала з трубчастими валами).

Системи керування промислових роботів. Системи керування в загальному випадку мають у своєму складі: а) ***керуючий пристрій***, призначений для формування і видачі керуючих дій виконавчому пристрою відповідно до заданої програми; б) ***вимірюваний пристрій***, який збирає інформацію про стан промислового роботу та зовнішнього середовища; в) ***пристрій зв'язку*** оператор-робот, який здійснює обмін інформацією між людиною-оператором і керуючим пристроєм.

Всі системи керування промисловими роботами поділяють на дві групи: програмне і адаптивне керування. ***Програмним керуванням*** називають автоматичне керування виконавчим пристроєм за заданою програмою. ***Адаптивним керуванням*** називають автоматичне керування, при якому в процесі керування змінюється алгоритм керування у функції стану зовнішнього середовища та робота. Для реалізації адаптивного керування необхідно, щоб в системі керування була спеціалізована ЕОМ, яка за даними зміни положень і швидкостей точок рухомих ланок або за станом зовнішнього середовища обчислювала поправки до програми керування.

Програмне керування, в свою чергу, поділяється на два види: ***контурне і позиційне керування***. ***Контурним*** керуванням називають програмне керування промисловими роботами, при якому рух його виконавчого пристрою програмується у вигляді траєкторії у робочому просторі з безперервним контролем швидкості руху. ***Позиційним*** керуванням називають програмне керування промисловим роботом, при якому рух виконавчих пристроїв програмується за упорядкованою в часі кінцевою послідовністю точок робочого простору без контролю руху між ними. Частковим випадком позиційного керування є ***циклічне керування***, при якому в програмі фіксуються лише початкові та кінцеві точки переміщень по кожній координаті.

Циклове керування використовується на тих роботах, які призначені для підйомно-транспортних операцій, пов'язаних з обслуговуванням металорізальних верстатів, пресів, молотів тощо. Вхідні сигнали подаються у блок керування від кінцевих вимикачів, на які натискають змінні упори, встановлені на рухомих ланках маніпуляторів. Замість змінних упорів можуть використовуватися пересувні магніти. Одночасно для точної фіксації встановлюються фіксуючі упори, які жорстко визначають кінець переміщення по кожній координаті. Для реалізації циклового керування викори-

стовують релейну систему, оскільки всі вхідні і вихідні сигнали керування мають лише по два значення (див. параграф 15.5).

Позиційне керування за багатьма точками або контурне керування, яке розглядається як граничний випадок позиційного керування при збільшенні числа позицій, використовується для виконання технологічних операцій типу зварювання або фарбування. Для реалізацій контурного керування необхідно використовувати різні програмоносії подібно тому, як вони використовуються у верстатах з ЧПК (див. параграф 15.3).

Три покоління роботів. Залежно від ступеня досконалості системи керування промислові роботи можна поділити на три покоління. Промислові роботи ***першого покоління*** мають програмне керування. Вони можуть бути як стаціонарними, так і рухомими; широко використовуються для виконання основних і допоміжних операцій технологічних процесів, у складських роботах тощо.

Промислові роботи ***другого покоління*** мають адаптивне керування (з елементами відчуття). Їх вже можна використовувати для виконання операцій, які не можна реалізувати роботами першого покоління (наприклад, захоплення довільно розташованих предметів). Такі роботи дозволяють супервізорне керування, тобто керування позмінно оператором і автоматичною системою, яка діє за вказівкою оператора.

Промислові роботи ***третього покоління***, які ще називають роботами з елементами штучного інтелекту, мають розвинуту систему чутливих (інакше сенсорних) пристроїв, включаючи технічний зір, які дають змогу після обробки одержаної інформації пізнавати образи, давати аналіз стану зовнішнього середовища і навіть приймати деякі рішення щодо складання програм. Такі роботи знаходяться ще в стадії пошукових науково-дослідних робіт.

Динаміка промислових роботів. На відміну від копіювальних маніпуляторів з ручним приводом промислові роботи є механічною системою, в якій динамічні навантаження (навантаження від сил інерції) можуть бути значними. Ці навантаження визначаються із системи рівнянь руху. Для складання рівнянь руху просторового механізму з декількома ступенями вільності використовують різні методи: метод рівнянь Лагранжа другого роду, кінетостатичний метод, принцип найменшого примусу Гаусса. Кінетостатичний метод складання рівнянь руху в останній час використовується частіше, оскільки при складанні обчислювальних програм для ЕОМ алгоритм обчислень добре узгоджується з алгоритмом кінематичного дослідження методом

перетворення координат (метод Морошкіна). Важливо також що в рівняння кінетостатики можуть бути введені сили тертя які залежать від реакцій у кінематичних парах. Кінетостатичний метод складання рівнянь руху, як уже вказувалось в розділі 4, базується на рівняннях кінетостатики, в яких прискорення точок ланок вважаються відомими.

Пояснимо цей метод на прикладі простого промислового робота з трьома ступенями вільності при циліндричній зоні обслуговування (рис. 15.20) [41]. За узагальнені координати приймемо циліндричні координати центра мас захвату S_3 з вантажем G_3: φ, R, z. Крім цього, вважаємо, що поступальні приводи ланок *2* і *3* (наприклад гідроциліндри) створюють рушійні сили F_2 і F_3, а обертовий привод ланки *1* створює рушійний момент M_1; маси ланок *2* і *3* позначимо m_2 і m_3, а їх сили ваги відповідно G_2 і G_3, сили тертя в парах *1—2* і *2—3* через F_{f_2} і F_{f_3}. Сили тертя і момент сили тертя в обертовій парі M_{f_1} вважаємо сталими і відомими з дослідних даних.

При складанні рівнянь кінетостатичної рівноваги ланки *3* вважаємо, що головний вектор реакції на ланку *3* з боку ланки *2* F_{32} прикладено в центрі мас S_3. Тоді головний момент цієї реакції дорівнює нулю, і рівняння проекцій сил на осі x_3, y_3, z_3 мають вигляд

$$\begin{aligned} F_3 - F_{f_3} - m_3\ddot{R} + m_3 R\dot{\varphi}^2 &= 0;\\ -m_3 R\ddot{\varphi} - 2m_3\dot{R}\dot{\varphi} + F_{32}^{y_3} &= 0;\\ -G_3 - m_3\ddot{z} + F_{32}^{z_3} &= 0, \end{aligned} \qquad (15.7)$$

де $\dot{\varphi}, \dot{R}, \ddot{\varphi}, \ddot{R}, \ddot{z}$ — перші або другі похідні за часом відповідних величин.

Для ланки *2* одержимо шість рівнянь кінетостатики, які в проекціях на осі x_2, y_2, z_2 записуються так:

$$\begin{aligned} -F_3 - m_2 s\dot{\varphi}^2 + F_{21}^{x_2} &= 0;\\ m_2 s\ddot{\varphi} - F_{23}^{y_2} - F_{21}^{y_2} &= 0;\\ F_2 - F_{f_2} - G_2 - m_2\ddot{z} - F_{23}^{z_2} &= 0;\\ -G_2 s - m_2 s\ddot{z} - F_{23}^{z_2} R - M_{21}^{y_2} &= 0;\\ -J_2\ddot{\varphi} - m_2 s^2\ddot{\varphi} - F_{23}^{y_2} R + M_{21}^{z_2} &= 0;\\ F_{23}^{y_2} h - M_{21}^{x_2} &= 0. \end{aligned} \qquad (15.8)$$

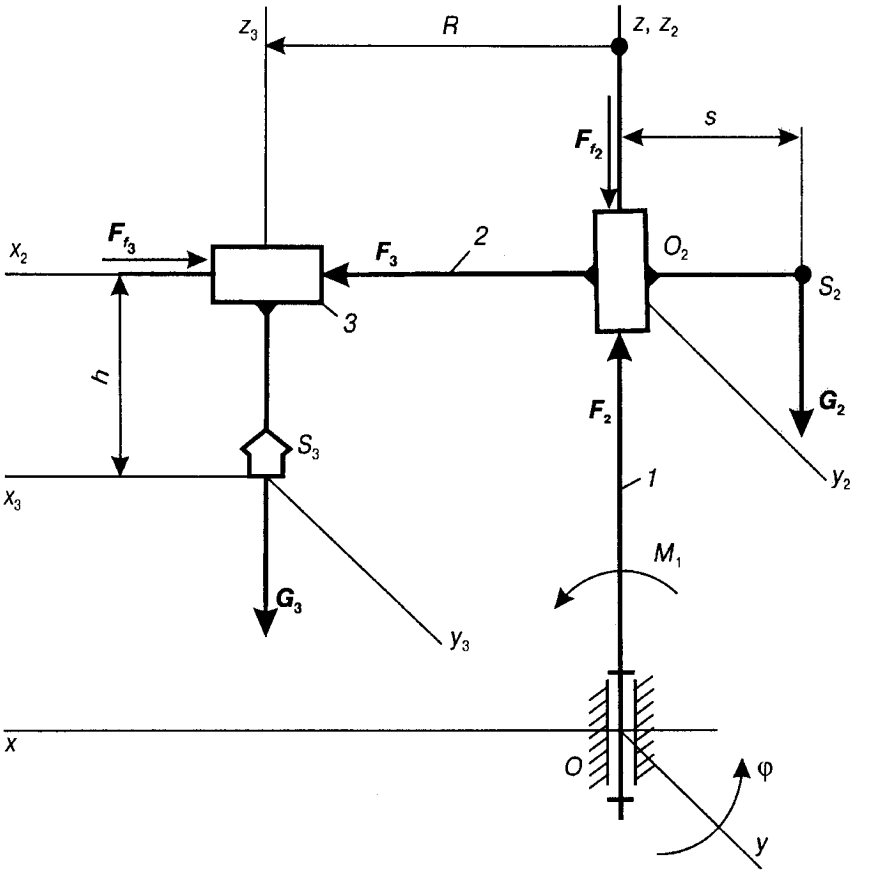


Рис. 15.20.

Для ланки *1* при складанні рівнянь рівноваги досить записати лише одне рівняння моментів відносно осі:

$$M_1 - M_{f_1} - J_1\ddot{\varphi} - M_{12}^z = 0\,. \qquad (15.9)$$

Детальніше питання дослідження і проектування промислових роботів викладено в навчальному посібнику [49], а також у працях [8, 31, 35, 55, 59, 60, 64, 69, 82].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Артоболевський І. І.* Теорія механізмів і машин. — К.: Укрдержвидав техн. літ-ри, 1954. — 696 с.

2. *Артоболевский И. И., Эдельштейн Б. В.* Сборник задач по теории механизмов и машин. — М.: Наука, 1973. — 256 с.

3. *Артоболевский И. И.* Механизмы в современной технике: Пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей. — В 7 т. — М.: Наука, 1979—1981.

4. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1988. — 640 с.

5. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. — М.: Физматгиз, 1959. — 1084 с.

6. *Балансировка* машин и приборов / Под ред. В. А. Щепетильникова. — М.: Машиностроение, 1979. — 296 с.

7. *Бейер Р.* Кинематический синтез механизмов. — К.: Машгиз, 1959. — 318 с.

8. *Белянин П. Н.* Промышленные роботы. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.

9. *Белоконев И. М.* Механика машин. Расчеты с применением ЭЦВМ. — Харьков: Вища шк., 1978. — 232 с.

10. *Белоконев И. М.* Теория механизмов и машин. Методы автоматизированного проектирования. — К.: Вища шк., 1990. — 208 с.

11. *Блох З. Ш.* Приближенный синтез механизмов. — К.: Машгиз, 1948. — 172 с.

12. *Боголюбов А. Н.* Советская школа механики машин. — М.: Наука, 1975. — 175 с.

13. *Боголюбов А. Н.* Теория механизмов и машин в историческом развитии ее идей. — М.: Наука. — 467 с.

14. *Боренштейн Ю. П.* Механизмы для воспроизведения сложного профиля. — Л.: Машиностроение, 1978. — 232 с.

15. *Боудин Ф. П., Тейбор Д.* Трение и смазка. — М.: Машгиз, 1960. — 542 с.

16. *Гаркунов Д. Н.* Триботехника. — М.: Машиностроение, 1989. — 328 с.

17. *Грунауэр А. А.* Проектирование механизмов и машин с помощью цифровых ЭВМ. — Харьков: Вища шк., 1978. — 232 с.

18. *Гуляев К. И. и др.* Расчет геометрии эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления. — Л.: Машиностроение, 1975. — 66 с.

19. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. — М.: Наука, 1982. — 335 с.

20. *Заблонский К. И., Белоконев И. М., Щекин Б. М.* Теория механизмов и машин. — К.: Вища шк., 1989. — 376 с.

21. *Зубчатые* передачи: Справочник / Под ред. Е. Г. Гинзбурга. — Л.: Машиностроение, 1980. — 416 с.

22. *Карелин В. С.* Проектирование рычажных и зубчато-рычажных механизмов. — М.: Машиностроение, 1986. — 184 с.

23. *Кинематика,* динамика и точность механизмов: Справочник / Под ред. Г. В. Крейнина. — М.: Машиностроение, 1984. — 224 с.

24. *Киницкий Я. Т.* Унифицированные алгоритмы расчета механизмов на ЭВМ. — К.: УМК ВО, 1988. — 116 с.

25. *Киницкий Я. Т.* Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена. — К.: Вища шк., 1990. — 229 с.

26. *Киницкий Я. Т.* Проектирование рычажных механизмов прерывистого движения // Изв. вузов. Машиностроение. — 1989. — № 7. — С. 59—64.

27. *Киницкий Я. Т.* Синтез присоединенных к шатуну структурных групп класса II видов I и II по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена // Теория механизмов и машин. — 1975. — Вып. 18. — С. 93—98.

28. *Кожевников С. Н.* Теория механизмов и машин. — М.: Машиностроение, 1973. — 591 с.

29. *Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М.* Механизмы: Справочник. — М.: Машиностроение, 1976. — 784 с.

30. *Кожевников С. Н.* Основы структурного синтеза механизмов. — К.: Наук. думка, 1979. — 232 с.

31. *Козырев Ю. Г.* Промышленные роботы. — М.: Машиностроение, 1983. — 376 с.

32. *Колчин Н. И., Мовнин М. С.* Теория механизмов и машин. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 616 с.

33. *Кореняко О. С.* Теорія механізмів і машин. — К.: Вища шк., 1987. — 206 с.

34. *Костецкий Б. И.* Трение, смазка и износ машин. — К.: Техніка, 1970. — 396 с.

35. *Костюк В. И. и др.* Промышленные роботы: Конструирование, управление, эксплуатация. — К.: Вища шк., 1958. — 359 с.

36. *Крагельский И. В.* Трение и износ. — М.: Машиностроение, 1968. — 480 с.

37. *Крайнев А. Ф.* Словарь-справочник по механизмам. — М.: Машиностроение, 1987. — 560 с.

38. *Курсовое* проектирование по теории механизмов и машин / Под общ. ред. Г. Н. Девойно. — Минск: Вышэйш. шк., 1986. — 285 с.

39. *Курсовое* проектирование по теории механизмов и машин / Под ред. А. С. Кореняко. — К.: Выща шк., 1970. — 332 с.

40. *Левенсон Л. Б.* Теория механизмов и машин. — М.: Машгиз, 1954. — 504 с.

41. *Левитская О. Н., Левитский Н. И.* Курс теории механизмов и машин. — М.: Высш. шк., 1985. — 279 с.

42. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1979. — 576 с.

43. *Левитский Н. И.* Кулачковые механизмы. — М.: Машиностроение, 1964. — 287 с.

44. *Левитский Н. И.* Синтез механизмов по Чебышеву. — М.: Изд-во АН СССР, 1946.

45. *Лихтенхельдт В.* Синтез механизмов. — М.: Наука, 1964. — 228 с.

46. *Марголин Ш. Ф.* Теория механизмов и машин. — Минск: Вышэйш. шк., 1968. — 359 с.

47. *Машков А. А.* Теория механизмов и машин. — Минск: Вышэйш. шк., 1971. — 471 с.

48. *Машнев М. М., Красковский Е. Я., Лебедев П. А.* Теория механизмов и машин, и деталей машин. — Л.: Машиностроение, 1980. — 512 с.

49. *Механика* промышленных роботов. — В 3 кн. / Под ред. К. В. Фролова, Е. В. Воробьева. — М.: Высш. шк., 1988. — Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелева.

50. *Надеждин И. В.* К проектированию и исследованию мальтийских механизмов с приводом от шарнирного четырехзвенника // Теория механизмов и машин. — 1985. — Вып. 38. — С. 80—86.

51. *Озол О. Г.* Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1984. — 432 с.

52. *Основы* балансировочной техники. Т. 1. Уравновешивание жестких роторов и механизмов / Под ред. В. А. Щепетильникова. — М.: Машиностроение, 1975. — 528 с.

53. *Основы* балансировочной техники. Т. 2. Уравновешивание гибких роторов и балансировочное оборудование / Под ред. В. А. Щепетильникова. — М.: Машиностроение, 1975. — 679 с.

54. *Пейсах Э. В., Нестеров В. А.* Система проектирования плоских рычажных механизмов. — М.: Машиностроение, 1988. — 232 с.

55. *Петров Б. А.* Манипуляторы. — Л.: Машиностроение, 1984. — 238 с.

56. *Покора М. І., Теліс Й. Я., Нікіфоров І. П.* Теорія механізмів і машин. — Вид-во ЛДУ, 1973. — 303 с.

57. *Полицер Г., Майснер Ф.* Основы трения и изнашивания. — М.: Машиностроение, 1984. — 264 с.

58. *Попов Н. Н.* Расчет и проектирование кулачковых механизмов. — М.: Машиностроение, 1980. — 214 с.

59. *Попов Е. П., Письменный Г. В.* Основы робототехники: Введение в специальность. — М.: Высш. шк., 1990. — 224 с.

60. *Промышленные* роботы для миниатюрных изделий / Под ред. В. Ф. Шаньгина. — М.: Машиностроение, 1985. — 264 с.

61. *Проников А. С.* Надежность машин. — М.: Машиностроение, 1978. — 590 с.

62. *Решетов Л. Н.* Самоустанавливающиеся механизмы / Справочник. — М.: Машиностроение, 1979. — 334 с.

63. *Решетов Л. Н.* Детали машин. — М.: Машиностроение, 1989. — 496 с.

64. *Робототехника* и гибкие автоматизированные производства. В 9-ти кн. / Под ред. И. М. Макарова. — М.: Высш. шк., 1986.

65. *Саввин Э. А.* Синтез полидинамических законов периодического движения // Критериальные расчеты цикловых механизмов. — Львов: Изд. УПИ им. Ив. Федорова, 1974. — Вып. 6. — 76 с.

66. *Саркисян Ю. Л.* Аппроксимационный синтез механизмов. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

67. *Семенов М. В.* Графо-аналитический метод уравновешивания однокривошипных сложных механизмов // Тр. ЛВВА. — Вып. 5. — 1944.

68. *Современные* методы и средства балансировки машин и приборов / Под ред. В. А. Щепетильникова. — М.: Машиностроение, 1985. — 232 с.

69. *Скотт П.* Промышленные роботы — переворот в производстве. — М.: Экономика, 1987. — 304 с.

70. *Справочник* по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / Под ред. И. А. Болотовского. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.

71. *Суминов В. М., Скворчевский А. К.* Уравновешивание вращающихся тел лучом лазера. — М.: Машиностроение, 1974. — 176 с.

72. *Теория* механизмов и машин / Под ред. К. В. Фролова. — М.: Высш. шк., 1987. — 496 с.

73. *Теория* механизмов / Под ред. В. А. Гавриленко. — М.: Высш. шк., 1973. — 640 с.

74. *Тир К. В.* Комплексный расчет кулачковых механизмов. — К.; М.: Машгиз, 1958. — 308 с.

75. *Тир К. В.* Механика полиграфических машин. — М.: Книга, 1965. — 496 с.

76. *Трение,* изнашивание и смазка: Справочник. В 2 т. / Под ред. И. В. Крагельского и В. В. Алисина. — М.: Машиностроение, 1978. — 758 с.

77. *Турбин Б. И., Карлин В. Д.* Теория механизмов и машин. — М.: Высш. шк., 1968. — 336 с.

78. *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Полн. собр. соч. — М.; Л.: Изд-во АН СССР. — 1974. — Т. 2. — С. 23—51.

79. *Чебышев П. Л.* О простейшей суставной системе, доставляющей движения, симметричные около оси // Полн. собр. соч. — М.; Л.: Изд-во АН СССР. — 1948. — Т. 4. — С. 167—211.

80. *Черкудинов С. А.* Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 323 с.

81. *Шашкин А. С.* Зубчато-рычажные механизмы. — М.: Машиностроение, 1971. — 192 с.

82. *Штейнберг Я. И.* Промышленные роботы в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1977. — 64 с.

83. *Щепетильников В. А.* Урановешивание механизмов. — М.: Машиностроение, 1982. — 256 с.

84. *Юдин В. А., Петрокас Л. В.* Теория механизмов и машин. — М.: Высш. шк., 1977. — 527 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 3

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ 5

1.1. Значення і зміст курсу теорії механізмів і машин ... 5
1.2. Деякі відомості з історії розвитку науки про машини 8
1.3. Основні поняття і визначення курсу теорії механізмів і машин 14

РОЗДІЛ 2

СТРУКТУРА І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ 20

2.1. Кінематичні пари та їх класифікація 20
2.2. Кінематичні ланцюги та їх класифікація 26
2.3. Кінематичні з'єднання 28
2.4. Структурні формули кінематичних ланцюгів 30
2.5. Зайві ступені вільності і умови зв'язку 34
2.6. Проектування раціональних механізмів 35
2.7. Заміна вищих кінематичних пар нижчими 40
2.8. Основний принцип утворення механізмів 42
2.9. Структурна класифікація плоских механізмів 44
2.10. Приклади структурного аналізу плоских механізмів 51

РОЗДІЛ 3

КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ 56

3.1. Задачі і методи кінематичного дослідження механізмів 56
3.2. Побудова положень ланок механізму і траєкторій окремих точок 58

3.3. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм ... 63
3.4. Дослідження руху механізмів методом планів швидкостей і прискорень ... 68
3.5. Приклади побудови планів швидкостей і прискорень механізмів II класу ... 75
3.6. Аналоги швидкостей і прискорень ... 89
3.7. Аналітичне дослідження кінематики плоских важільних механізмів методом замкнених векторних контурів ... 91
3.8. Погрупний метод аналітичного дослідження кінематики механізмів ... 95
3.9. Аналітичне дослідження кінематики механізмів високих класів ... 116
3.10. Кінематичне дослідження просторових механізмів геометричними методами ... 118
3.11. Аналітичне дослідження кінематики механізмів методом перетворення координат ... 122

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ ... 139

4.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів ... 139
4.2. Сили, що діють у машинах ... 140
4.3. Механічні характеристики машин ... 142
4.4. Визначення сил інерції ... 145
4.5. Силовий розрахунок плоских механізмів без урахування сил тертя ... 146
4.6. Приклади силового розрахунку плоских механізмів ... 161
4.7. Важіль М. Є. Жуковського ... 174
4.8. Зведення сил і моментів сил ... 178
4.9. Зведення мас і моментів інерції ... 181
4.10. Рівняння руху механізму ... 185
4.11. Режими руху механізму ... 188
4.12. Механічний коефіцієнт корисної дії ... 190
4.13. Коефіцієнт корисної дії машини ... 192
4.14. Загальні методи дослідження руху механізму ... 195
4.15. Дослідження руху механізмів методом Віттенбауера ... 201
4.16. Дослідження руху механізмів методом М. Є. Жуковського ... 207

РОЗДІЛ 5

НЕРІВНОМІРНІСТЬ І РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН ... 211

5.1. Постановка задачі ... 211
5.2. Середня швидкість і коефіцієнт нерівномірності руху машин ... 212

5.3. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху машини за допомогою кривої Віттенбауера ... 215
5.4. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера ... 216
5.5. Регулятори швидкості ... 229

РОЗДІЛ 6

ТЕРТЯ І ЗНОС У МАШИНАХ ... 234

6.1. Види тертя ... 235
6.2. Тертя ковзання ... 236
6.3. Кут і конус тертя ... 241
6.4. Тертя в поступальних кінематичних парах ... 243
6.5. Тертя у гвинтових кінематичних парах ... 250
6.6. Тертя в обертових кінематичних парах ... 253
6.7. Тертя гнучкої ланки ... 260
6.8. Тертя ковзання змащених тіл ... 263
6.9. Тертя кочення ... 265
6.10. Силовий розрахунок механізмів з урахуванням сил тертя ... 270
6.11. Визначення коефіцієнтів корисної дії механізмів ... 274
6.12. Розрахунок зносу елементів у кінематичних парах ... 276

РОЗДІЛ 7

КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ ... 282

7.1. Загальні відомості ... 282
7.2. Основні типи кулачкових механізмів ... 284
7.3. Замикання ланок кулачкового механізму ... 288
7.4. Основні параметри кулачкових механізмів ... 291
7.5. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів ... 294
7.6. Закони руху вихідної ланки ... 298
7.7. Якісні характеристики законів руху вихідної ланки ... 303
7.8. Кінематичний синтез кулачкових механізмів ... 307
7.9. Кути тиску і передачі, коефіцієнти зростання сил і корисної дії ... 332
7.10. Динамічний синтез кулачкових механізмів ... 339
7.11. Визначення параметрів елементів вищої пари ... 350
7.12. Розрахунок пружини для силового замикання ланок ... 353
7.13. Врахування пружності ланок при проектуванні кулачкових механізмів ... 355

РОЗДІЛ 8

ПЕРЕДАЧІ ... 358

8.1. Загальні відомості ... 358
8.2. Основні характеристики передач ... 360

8.3. Фрикційні передачі 361
8.4. Фрикційні варіатори швидкості 364
8.5. Фрикційні передачі з гнучкими ланками 367

РОЗДІЛ 9

ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ 369

9.1. Загальні відомості 369
9.2. Типи зубчастих передач 371
9.3. Геометричні параметри циліндричного зубчастого колеса 375
9.4. Основна теорема зубчастого зачеплення 379
9.5. Ковзання профілів зубів 382
9.6. Властивості й рівняння евольвенти кола 383
9.7. Теоретичні вихідний і твірний контури 386
9.8. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс 389
9.9. Розрахунок геометричних параметрів циліндричних прямозубих зубчастих коліс з умови верстатного зачеплення 394
9.10. Розрахунок геометричних параметрів циліндричної прямозубої зубчастої передачі з умови щільного зачеплення двох коліс 398
9.11. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач 402
9.12. Геометричні та кінематичні умови існування передачі 406
9.13. Вибір коефіцієнтів зміщення 416
9.14. Побудова торцевого профілю зубів зубчастої передачі 422
9.15. Зачеплення Новикова 425

РОЗДІЛ 10

ПРОСТОРОВІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ 430

10.1. Конічні зубчасті передачі 430
10.2. Гвинтові зубчасті передачі 436
10.3. Черв'ячні передачі 439

РОЗДІЛ 11

БАГАТОЛАНКОВІ ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ 449

11.1. Загальні відомості 449
11.2. Зубчасті механізми з нерухомими осями коліс 450
11.3. Зубчасті механізми з рухомими осями коліс 454
11.4. Графічне визначення передаточних відношень зубчастих механізмів 462
11.5. Коефіцієнт корисної дії планетарного механізму 467

11.6. Синтез планетарних механізмів 469
11.7. Хвильові зубчасті передачі 476

РОЗДІЛ 12

СИНТЕЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ 480

12.1. Основні задачі синтезу та методи їх розв'язування 481
12.2. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах 484
12.3. Синтез механізмів за заданими законами руху ланок 487
12.4. Синтез механізмів за заданими положеннями ланок 489
12.5. Синтез чотириланкових механізмів за двома крайніми положеннями вихідної ланки 496
12.6. Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки 502
12.7. Приклади синтезу шестиланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та максимальним ходом вихідної ланки 510
12.8. Синтез приєднаних до шатуна структурних груп II класу за заданим коефіцієнтом зміни середньої швидкості й максимальним ходом вихідної ланки 512
12.9. Синтез механізмів методами оптимізації з використанням ЕОМ 518
12.10. Синтез механізмів методом наближення функцій 525
12.11. Синтез напрямних механізмів 533

РОЗДІЛ 13

МЕХАНІЗМИ ПЕРЕРИВЧАСТОГО РУХУ 544

13.1. Механізми неповнозубих коліс 544
13.2. Храпові механізми 546
13.3. Мальтійські механізми 548
13.4. Важільні механізми з вистоями вихідної ланки 554
13.5. Зубчасто-важільні механізми з вистоями вихідної ланки 564

РОЗДІЛ 14

ЗРІВНОВАЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ 568

14.1. Задача про зрівноваження механізмів 568
14.2. Визначення положення центра мас плоского механізму 569
14.3. Метод замінювальних мас 572
14.4. Зрівноваження механізмів відносно фундаменту 577
14.5. Зрівноваження обертових мас 594

РОЗДІЛ 15

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МАШИН 607

15.1. Основні поняття та визначення 607
15.2. Структура машин 613
15.3. Системи керування машин-автоматів 619
15.4. Системи керування за часом 627
15.5. Системи керування за шляхом 630
15.6. Маніпулятори 632
15.7. Промислові роботи 642

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 650

Підручник

КІНИЦЬКИЙ
Ярослав Тимофійович

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Київ, видавництво "Наукова думка"

Оформлення художника *В. В. Кузьменка*
Художній редактор *І. М. Галушка*
Технічний редактор *Г. М. Ковальова*
Коректор *Л. Г. Бузіашвілі*
Комп'ютерна верстка *Г. М. Лєдяєвої*

Підп. до друку 07.12.2001. Формат 60×90 1/16. Папір офс. № 1. Гарн. тип Таймс. Офс. друк. Ум.-друк. арк. 41,5. Ум. фарбо-відб. 42,5. Обл.-вид. арк. 39,98. Тираж 5 000 прим. Зам. 1-3383

Видавництво "Наукова думка"
Р. с. № 05417561 від 16.03.95
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ "ВІПОЛ"
03151 Київ 151, вул. Волинська, 60

ISBN 966-00-0740-X